



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Génie Mécanique
Laboratoire de **Génie Mécanique** et **Développement**

ECOLE DOCTORALE EDMIS

Mémoire de Magister

Option : Construction Mécanique

Etudié par :

Fateh MADANI

Ingénieur d'état en génie mécanique –UMB BOUMERDES

Thème

***Interaction entre fissure et inclusion en utilisant la méthode
de discontinuité de déplacement***

Soutenu le : 27/6/2012

Devant le Jury composé de :

Président	Bouzid BENKOUSSAS	MC-A	ENP
Examineur	Mohamed BOUAZIZ	Professeur	ENP
Examineur	Abdelkader NOUR	Professeur	UMBB
Rapporteur	Said RECHAK	Professeur	ENP
Invité	Yacine BELKACEMEI	MA-A	ENP

REMECIMENTS

Je remercie en premier lieu, Dieu tout Puissant, de m'avoir donné la force, le courage et la patience, et la capacité d'arriver à ce stade du savoir pour bien mener ce travail.

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de génie mécanique et développement à l'école nationale polytechnique d'Alger. Sous la responsabilité de monsieur Said RECHAK, professeur à l'ENP d'Alger ; je le remercie très sincèrement pour la formation que j'ai acquise sous sa direction, pour toute l'aide scientifique qu'il m'a apporté, l'attention et le soutien moral qu'il m'accordés.

Je remercie vivement Dr Yacine BELKACEMI enseignant à l'école nationale polytechnique, a considérablement contribué à mon travail en tant que codirecteur de mémoire, non seulement pour son apport scientifique mais aussi pour sa patience, sa disponibilité, et ses critiques à la rédaction de la thèse ; pour tous cela je le témoigne ma profonde gratitude .

Je remercie également Maitre de conférences Bouzid BENKOUSSAS le membre du jury d'avoir accepté de présider et d'avoir accepté de faire parti du jury d'évaluation de ce mémoire.

Je remercie également le professeur Abdelkader NOUR le membre du jury d'avoir accepté d'examiner et d'avoir accepté de faire parti du jury d'évaluation de ce mémoire.

Je remercie également le professeur Mohamed BOUAZIZ le membre du jury d'avoir accepté d'examiner et d'avoir accepté de faire parti du jury d'évaluation de ce mémoire.

Je remercie très vivement les membres de ma famille pour leur compréhension, encouragement et aide pendant toute la période de préparation de ce mémoire, et surtout mes chers parents.

Et, tous les enseignants et élèves de l'Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE	2
-----------------------------	---

Chapitre I : La méthode des éléments de frontières

I.1. INTRODUCTION.....	6
I.2. METHODE INDIRECTE ET DIRECTE EN BEM.....	7
I.2.1. METHODE DIRECTE.....	7
I.2.1.1. EQUATIONS DE BASE.....	7
I.2.1.2. SOLUTION FONDAMENTALE.....	8
I.2.1.3. IDENTITE DE SOMIGLIANA.....	10
I.2.2. METHODES INDIRECTES.....	11
I.3. METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT.....	13
I.3.1. SOLUTION FONDAMENTALE.....	14
I.3.2. PROCEDURE NUMERIQUE.....	16
I.3.3. TRANSFORMATION DES COORDONNEES.....	17
I.3.4. CONSTRUCTION DU SYSTEME D'EQUATION.....	18
I.4. CONCLUSION.....	20

Chapitre II : A propos de la mécanique de la rupture

II.1. APERÇU HISTORIQUE.....	22
II.2. FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE-APPROCHE LOCALE.....	24
II.2.1. ETAT DE CONTRAINTE EN FRONT DE FISSURE.....	25
II.2.2. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE (FIC).....	27
II.3. ASPECTS ENERGETIQUES- APPROCHE GLOBALE.....	27
II.3.1. RELATION ENTRE G ET K.....	29

Chapitre III : Application de la MDD aux bi-matériaux

III.1. INTRODUCTION.....	31
III.2. SOLUTION POUR L'INTERACTION ENTRE FISSURE ET INCLUSION.....	31
III.3. APPLICATION DE LA METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT AUX BI-MATERIAUX	34
III.4. CALCUL NUMERIQUE DE FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE.....	38
III.5. CONCLUSION.....	39

Chapitre III : Exemples, résultats et interprétations

<i>III.1.INTRODUCTION.....</i>	<i>41</i>
<i>III.2.INFLUENCE DU TYPE D'ELEMENT UTILISE ET DE LA FINESSE DU MAILLAG.</i>	<i>41</i>
<i>III.3. STRUCTURE DE PROGRAMME.....</i>	<i>42</i>
<i>III.4. EXEMPLES, RESULTATS ET INTREPRETATIONS.....</i>	<i>43</i>
<i>III.4.1. INCLUSION DANS UNE PLAQUE SANS FISSURE.....</i>	<i>43</i>
<i>III.4.2. INTERACTION D'UNE FISSURE ET D'UNE INCLUSION.....</i>	<i>46</i>
<i>III.4.2.1. EFFET DE RIGIDITE POUR PETITE INCLUSION.....</i>	<i>46</i>
<i>III. 4.2.2. EFFET DE RIGIDITE POUR GROSSE INCLUSION.....</i>	<i>48</i>
<i>III.4.2.3. EFFET DE LA DISTANCE ENTRE LA FISSURE ET L'INCLUSION.....</i>	<i>50</i>
<i>III.4.3. INCLUSION CENTREE ENTRE DEUX FISSURES.....</i>	<i>53</i>
<i>III.4.3.1. EFFET DE DISTANCE.....</i>	<i>53</i>
<i>III.4.3.2. EFFET DE RIGIDITE.....</i>	<i>54</i>
<i>III.4.4.INCLUSION FISSUREE.....</i>	<i>56</i>
<i>III.4.5. FISSURE AVEC UNE ORIENTATION ARBITRAIRE PROCHE DEL'INCLUSION.....</i>	<i>59</i>
<i>III.4.6. FISSURE CENTREE ENTRE UNE LACUNE CIRCULAIRE ET UNE INCLUSIO.....</i>	<i>61</i>
<i>III.5.CONCLUSION.....</i>	<i>64</i>
Conclusion générale	
<i>CONCLUSION GENERALE</i>	<i>66</i>

Bibliographie

LISTE DES FIGURES

Introduction générale

Fig.1 : Types de problèmes d'interaction entre fissure et l'inclusion.....2

Fig.2 : Inclusion situé au voisinage de la fissure.....3

Chapitre I : La méthode des éléments de frontières

Fig.1: Exemple de discrétisation d'un domaine bidimensionnel fissuré.....6

Fig.2 : Domaine d'étude D avec P à l'intérieur.....9

Fig. 3: Domaine avec le point P sur la frontière.....11

Fig.4: Domaine D^- intérieur repéré par le signe (-).....12

Fig. 5 : Domaine D^+ extérieur repéré par le signe +.....12

Fig.6 : Milieu infini avec une fissure. D_s et D_n sont respectivement les discontinuités tangentielle et normale13

Fig.7: Représentation d'une fissure ou contour quelconque en N segments.....16

Fig. 8 : Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire.....18

Fig. 9 : Position et orientation des éléments limites.....19

Chapitre II : A propos de la mécanique de la rupture

Fig.1: Naufrage du FLARE 16 janvier 1998 au large de Terre Neuve.....22

Fig.2 : Modes fondamentaux de rupture.....25

Fig.3 : Elément de volume au voisinage d'un front de fissure rectiligne.....26

Fig.4 : Taux de libération d'énergie.....28

Chapitre III : Application de la MDD aux bi-matériaux

Fig.1:Modèle mécanique.....31

Fig .2: Corps non homogène formé 2 milieux.....34

Fig .3: Elément d'une fissure.....38

Chapitre IIII : Exemples, résultats et interprétations

Fig.1 : Modèle géométrique d'une plaque sollicitée en traction.....43

Fig.2 : Variation du champ de contraintes normales σ_{yy} en présence de l'inclusion sur $y=0$ (pour $E2/E1=5$, $E2/E1=1$, $E2/E1=0.2$).....44

Fig.3 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de l'inclusion $E2/E1 =1$45

Fig.4 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de l'inclusion $E2/E1 =0.2$45

Fig.5: Variation du champ de contraintes normales au niveau de l'inclusion $E2/E1 =5$46

Fig.6: une inclusion située à une certaine distance de la fissure.....	47
Fig.7: Aucun effet n'est prépondérant pour les petites inclusions.....	48
Fig.8 : Représentation d'une plaque sollicitée en traction en présence d'une fissure émanant d'une inclusion.....	48
Fig.9 : Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.....	49
Fig.10 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure.....	50
Fig.11 : Variation du FIC en fonction de la distance de la fissure par rapport à l'inclusion.....	51
Fig. 12 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure qui se propage vers l'inclusion pour $E2/E1=5$	51
Fig. 13 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure qui se propage vers l'inclusion pour $E2/E1=0.2$	52
Fig.14 : Variation du FIC en fonction de l'avance de la fissure vers l'inclusion (C.Y. Dong, K.Y. Lee).....	52
Fig.15 : Représentation d'une plaque sollicitée en traction en présence de deux fissures émanant d'une inclusion.....	53
Fig.16 : Variation du FIC en fonction des distances d/R	54
Fig.17 : Variation du FIC en fonction des distances d/R (C. Y. Dong, S. H. Lo, Y. K. Cheung)....	54
Fig.18 : Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice	55
Fig. 19 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure	55
Fig 20 : Représentation d'une plaque sollicitée en traction en présence d'une fissure située au fond de l'inclusion.....	57
Fig.21 : Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.....	57
Fig. 22 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure qui se propage vers la matrice.....	58
Fig. 23 : Variation du FIC en fonction de l'avance de la fissure vers la matrice.....	59
Fig.24 : une fissure avec une orientation arbitraire émanant de l'inclusion.....	60
Fig.25 : Variation du FIC en fonction de l'inclinaison de la fissure pour $E2/E1=2$	60
Fig.26 : Variation du champ de contraintes au niveau de l'inclusion en fonction de l'inclinaison de la fissure pour $E2/E1=2$	61
Fig.27 : une fissure centrée entre une entaille -inclusion.....	62
Fig.28 : Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.....	63
Fig.29 : Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice (travaux de [Don-2003]).....	63
Fig.30 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure.....	64

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre III : Exemples, résultats et interprétations

<i>Tableau 01 : FIC en fonction du rapport des modules de Young pour petite inclusion.....</i>	<i>47</i>
<i>Tableau 02 : FIC en fonction du rapport des modules de Young pour grosse inclusion.....</i>	<i>49</i>
<i>Tableau 03 : FIC en fonction de la distance entre fissure et l'inclusion.....</i>	<i>50</i>
<i>Tableau 04 : FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.....</i>	<i>55</i>
<i>Tableau 05 : FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.....</i>	<i>57</i>
<i>Tableau 06 : FIC en fonction de l'avance de la fissure vers la matrice.....</i>	<i>58</i>
<i>Tableau 07: Variation du FIC en fonction de l'inclinaison de la fissure pour $E_2/E_1=2$.....</i>	<i>60</i>
<i>Tableau 08: FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.....</i>	<i>62</i>

NOMENCLATURE

NOTATIONS

N : Nombre d'éléments de la discrétisation

u_i : Champ de déplacement dans la direction i

u_i^* : Champ de déplacement auxiliaire

δ_{ij} : Symbole de Kronecker

a : Fissure initiale en m

D_i : Discontinuité de déplacement suivant i en m

D_j : Discontinuité de déplacement dans la direction j

D_x : Discontinuité de déplacement suivant x en m

D_y : Discontinuité de déplacement suivant y en m

μ : Module de cisaillement en MPa

μ_i : Module de cisaillement de la couche i en MPa

x^i : Orientation de l'élément i suivant l'axe des x dans un repère global

y^i : Orientation de l'élément i suivant l'axe des y dans un repère global

β^i : Angle d'orientation de l'élément i suivant le repère local

β^j : Angle d'orientation de l'élément j suivant le repère local

U_i : Déplacement suivant la direction de l'axe i en m

U_x : Déplacement suivant la direction de l'axe x en m

U_y : Déplacement suivant la direction de l'axe y en m

U_s^i : Déplacement tangentiel de l'élément i en m

U_n^i : Déplacement normal de l'élément i en m

σ_s^i : Contrainte tangentielle de l'élément i en MPa

σ_n^i : Contrainte normale de l'élément i en MPa

A_{ss}^{ij} , A_{ns}^{ij} , A_{nn}^{ij} : Sont les coefficients d'influence relatifs aux contraintes sur la frontière

B_{ss}^{ij} , B_{ns}^{ij} , B_{nn}^{ij} : Sont les coefficients d'influence relatifs aux déplacements sur la frontière

σ : Contrainte en MPa

σ_{ij} : Champ de contrainte en MPa

σ_{ij}^* : Champ de contrainte auxiliaire en MPa

σ : Tenseur des contraintes

ε : Tenseur linéarisé des déformations

F_j : Les composantes des forces de volumes

\vec{F}^* : Charges concentrées unitaires

λ_L : Coefficient de Lamé

μ_L : Coefficient de Lamé

$\vec{T}(M, \vec{n})$: Vecteur contrainte agissant au point M présentant une normale \vec{n}

Γ : Contour

\vec{n} : Normale

$\delta(M - P)$: est la distribution de Dirac

\vec{u}^* : Champ de déplacement virtuel

\vec{u} : est le champ de déplacement réel

$U_{ij}^*(M, P)$: Déplacement du point M dans la direction j dû à une force unitaire appliquée au point P dans la direction i

τ_{ij}^* : Tension au point M dans la direction j due à une force unitaire dans la direction i

F_i^* : Force de volume (problème de Kelvin)

D : Domaine

D^- : Domaine intérieur

D^+ : Domaine extérieur

C_1 : Contour de la couche 1

C_2 : Contour de la couche 2

i : Élément

i^* : Élément opposé

$D_s^{[1]}$: Discontinuité de déplacement tangentielle dans le milieu 1

$D_s^{[2]}$: Discontinuité de déplacement tangentielle dans le milieu 2

$D_n^{[1]}$: Discontinuité de déplacement normal dans le milieu 1

$D_n^{[2]}$: Discontinuité de déplacement normal dans le milieu 2

N_1 : Nombre d'éléments dans le milieu 1

N_2 : Nombre d'éléments dans le milieu 2

r : Rayon au voisinage de la tête de fissure en m

E : Module de Young.

ν : Coefficient de poisson.

μ : Module de cisaillement.

K_I , K_{II} et K_{III} : Les facteurs d'intensité de contrainte en mode I, II, et III respectivement.

γ_s : Énergie spécifique de rupture par unité de surface.

σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} et τ_{yz} : Champs de contraintes.

u , v et w : champs de déplacements.

W_p : Energie potentielle

Φ_{ext} : Le travail des forces extérieures

W_e : L'énergie de déformation élastique du système

G : Taux de restitution d'énergie

r, θ : les coordonnées polaires d'un point arbitraire

K_I^{tip} et K_{II}^{tip} : Les facteurs d'intensité de contrainte en mode I et II en présence de l'inclusion

K_I^0 et K_{II}^0 : Les facteurs d'intensité de contrainte en mode I et II en absence de l'inclusion

E_1 : Module de young de la matrice

E_2 : Module de young de l'inclusion

r_0 : La distance r_0 entre l'inclusion et l'extrémité de la fissure

S : tenseur du quatrième ordre, appelé tenseur d'Eshelby

L : tenseur d'Eshelby équivalent

e^A : Une déformation libre dans le domaine d'inclusion

e^T : La déformation finale dans l'inclusion

E_i : Module de Young de l'inclusion

E_m : Module de Young de la matrice

D : Diamètre de l'inclusion

R : Rayon de l'inclusion

ABREVIATIONS

MEF : Méthode des éléments finis

MDD : Méthode de discontinuité de déplacement

BEM : Boundary Element Method (Méthode des éléments frontières)

XFEM: Extended Finite Element (La méthode des éléments finis étendue)

FSM : Fictitious Stress Method

FIC : Facteur d'Intensité de Contrainte

DD : discontinuité de déplacement élémentaire

PNB : Produit national brut

ملخص

إن فهم ظاهرة كسر المواد تتطلب دراسات تفصيلية لبدائية التشققات ، والتي تنشأ عادة في مناطق الإجهاد العالي نظرا للآثار هندسية أو المعدنية. إن معرفة توزيع الإجهاد على مقربة من مناطق مختلفة مهم بالنسبة لتحليل تباين معامل شدة الاجهادات على أساس هندستها الخاصة. في هذه الدراسة، حاولنا تطبيق طريقة الانتقالات الغير المستمرة في الأوساط، في التفاعل بين هذه التشققات و الإدراجات وذلك بحساب معامل شدة الاجهادات .
كلمات افتتاحية: مكانيك التشققات/شق / معامل شدة الاجهادات/ ادراجة / طريقة الانتقالات الغير المستمرة/تفاعل

RESUME

Ce travail de recherche s'intéresse à l'étude de l'interaction entre fissures et inclusions. La méthode de discontinuité de déplacement a été choisie pour réaliser la simulation numérique. Le code de calcul ANSYS a été utilisé pour des calculs comparatifs. L'aspect du potentiel critique de la position de la fissure par rapport à l'inclusion est mis en évidence en travaillant sur les propriétés mécaniques des inclusions et de la matrice. Le facteur d'intensité de contrainte est le paramètre utilisé dans ce cas.

Mots clés : discontinuité de déplacement /fissure /facteur d'intensité de contrainte /inclusion /interaction.

ABSTRACT

This research focuses on the study of the interaction between cracks and inclusions. The displacement discontinuity method has been chosen to carry out numerical simulation. The computer code ANSYS was used in order to compare results. The appearance of the critical configuration of the crack with respect to inclusion is highlighted by working on the mechanical properties of the inclusions and matrix. The stress intensity factor is the parameter used in this case.

Key words: Displacement discontinuity/ stress intensity factor/ / inclusion / displacement discontinuity method / interaction.

Introduction générale

MADANI FATEH

De nombreux matériaux présentent des hétérogénéités microstructurales importantes telles que les inclusions, les cavités et les microfissures, etc. Le comportement élastique des matériaux est très affecté par la présence de défauts qui peuvent entraîner l'affaiblissement de la structure et provoquer sa destruction. Dans les zones à fortes concentrations de contraintes, des microfissures apparaissent. Ces microfissures se développent et coalescent les unes avec les autres jusqu'à ce qu'elles forment une fissure de taille macroscopique qui se propage jusqu'à la ruine de la structure.

Problème : interaction entre inclusion et fissure

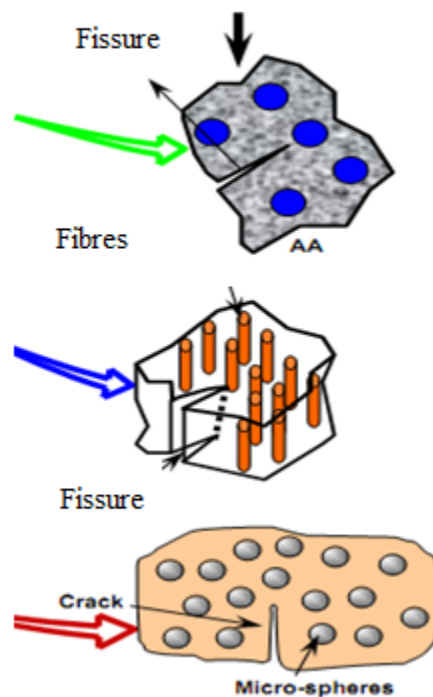


Fig.1 : Types de problèmes d'interaction entre fissure et l'inclusion

Généralement, les composites sont employés dans beaucoup d'applications modernes de technologie telles que l'aviation civile, et les pièces complexes afin de réduction du nombre d'interface (boulonnage, rivetage, et soudures sur structure métalliques). Les machines en général en matériaux composites offrent en particulier des solutions dans de telles situations exigeantes. Un matériau composite est l'union d'au moins deux matériaux constituants qui sont différentes sur échelles microscopiques/macrosopiques, et les caractéristiques mécaniques et thermiques pour obtenir le comportement global désiré.

Les défauts sont présents pratiquement dans toutes les structures métalliques, ils apparaissent lors de la fabrication essentiellement. A la solidification, les variations de volume, de

température et de composition, induisent des séries de défauts, les soudures augmentent les mêmes phénomènes. L'usinage et les traitements thermiques peuvent être à l'origine de fissurations dans l'état final des pièces. En présence d'un défaut détecté dans une pièce ou dans un assemblage métallique, il est nécessaire de connaître le danger qu'il peut représenter lors de l'usage normal pour lequel l'objet a été conçu. Divers comportements peuvent apparaître : au cours de la durée de vie pour laquelle la pièce a été définie, le danger peut rester identique à lui-même.

L'inclusion est formée d'un matériau élastique dont le module de Young est différent à celui de la matrice (**Fig.2**). L'inclusion est modélisée par une forme cylindrique de diamètre d .

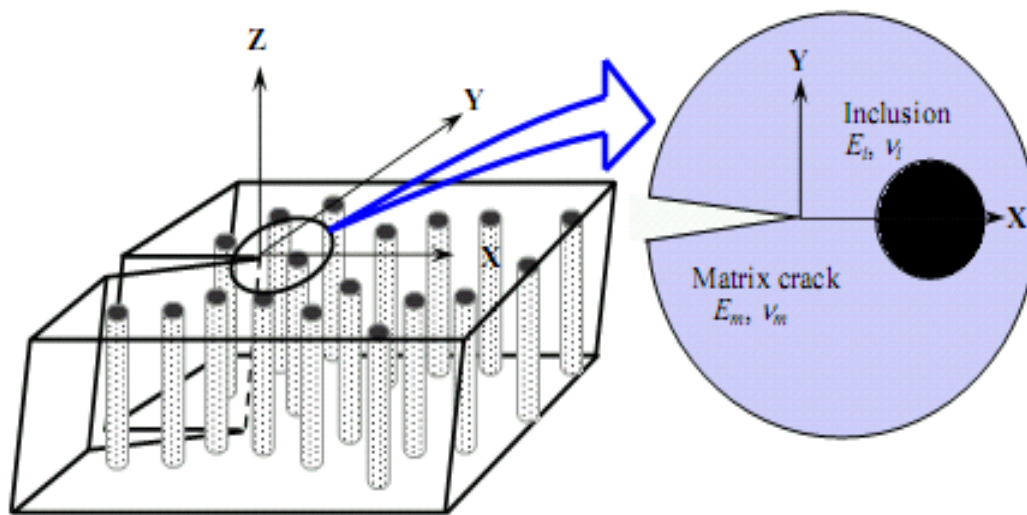


Fig.2 : Inclusion située au voisinage d'une fissure.

De plus en plus d'application de la mécanique de la rupture aux dispositifs fonctionnels miniaturisés ont besoin d'intégrité structurale [Cot-2002].

En dehors de l'expérimentation, la simulation numérique est une voie pour prendre en charge ce type de problèmes et beaucoup de problèmes de l'ingénierie.

Les principales méthodes numériques qui sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de mécanique de la rupture sont la méthode des éléments finis, la XFEM et la méthode des éléments de frontière (BEM).

La méthode des éléments de frontière a été développée suivant deux approches. L'une d'elles est d'origine mathématique basée sur des théorèmes classiques de la théorie du potentiel. L'existence de solution à une équation intégrale, expression d'un problème aux limites dans le cadre de la théorie des potentiels a été montrée par Fredholm (1903). La discrétisation de la frontière pour résoudre l'équation intégrale, pour des problèmes de potentiels avec

l'avènement des ordinateurs est due en premier à Jawson [**Jaw-1963**] et Sym [**Sym-1963**]. La formulation de la méthode directe sous sa forme actuelle a été présentée par Rizzo [**Riz-1967**] et appliquée en thermo-élasticité par Rizzo et al. [**Riz-1977**]. La méthode a été étendue en 3-D par Cruse et al. [**Cru-1971**] et par Lachat et al. [**Lac-1976**].

A partir du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, l'identité de Somogiana est obtenue comme une représentation intégrale directe donnant les déplacements dans le domaine en fonction des déplacements ou contraintes sur la frontière. En écrivant cette identité sur deux domaines complémentaires, deux méthodes intégrales dites indirectes ont été proposées par Crouch [**Cro-1976**] et [**Cro-1983**]. La première représentation est connue sous le nom de potentiel de simple couche de densité la discontinuité de contrainte et proposée par Crouch [**Cro-1983**] sous l'appellation de contraintes fictives ou discontinuité de contraintes. La deuxième représentation est connue sous l'appellation de potentiel double couche de densité la discontinuité de déplacement et proposée par Crouch [**Cro-1976**] comme étant la méthode de discontinuité de déplacement (MDD).

Nous avons adopté la DD comme outil numérique pour l'étude de l'interaction entre fissures et inclusions. Des calculs ont été menés sur ANSYS pour confronter les résultats.

Nous avons décomposé le mémoire en trois chapitres:

Le premier chapitre présente quelques notions sur la mécanique de la rupture. Il s'intéresse particulièrement au calcul du facteur d'intensité de contrainte.

Le deuxième chapitre est consacré à la méthode de discontinuité de déplacement qui représente une méthode indirecte dans la famille des méthodes intégrales de frontière. Les problèmes posés par les multicouches prenant en compte les inclusions est présenté.

Le troisième chapitre est consacré aux applications où des exemples sont présentés et discutés. Il s'agit surtout de traiter l'effet de la présence d'une inclusion près de la fissure en tenant compte du type du matériau de l'inclusion, de sa dimension et de l'effet de la distance de celle-ci par rapport à la fissure. L'étude est terminée par une conclusion générale.

CHAPITRE I

La méthode des éléments de frontières

MADANI FATEH

I.1. INTRODUCTION

Il est rare qu'un problème réel ou la géométrie et les conditions de chargement souvent très complexes, ait une solution analytique. Parfois on est amené à simplifier le problème pour le rapprocher à un cas où la solution analytique est envisageable. Mais une telle situation n'est pas possible sans trop s'éloigner du cas réel. De ce fait, nous faisons appel aux méthodes numériques qui englobent depuis leur apparition une grande variété de techniques. Parmi ces techniques citons la méthode des différences finis (FDM), la méthode des volumes finis, la méthode des éléments finis (FEM) et XFEM, et la méthode des éléments frontières (BEM). Certaines techniques utilisent des combinaisons de ces méthodes pour bénéficier des avantages de chacune d'elle en raison notamment de leur efficacité dans le traitement des singularités de contrainte au voisinage de tête de fissure.

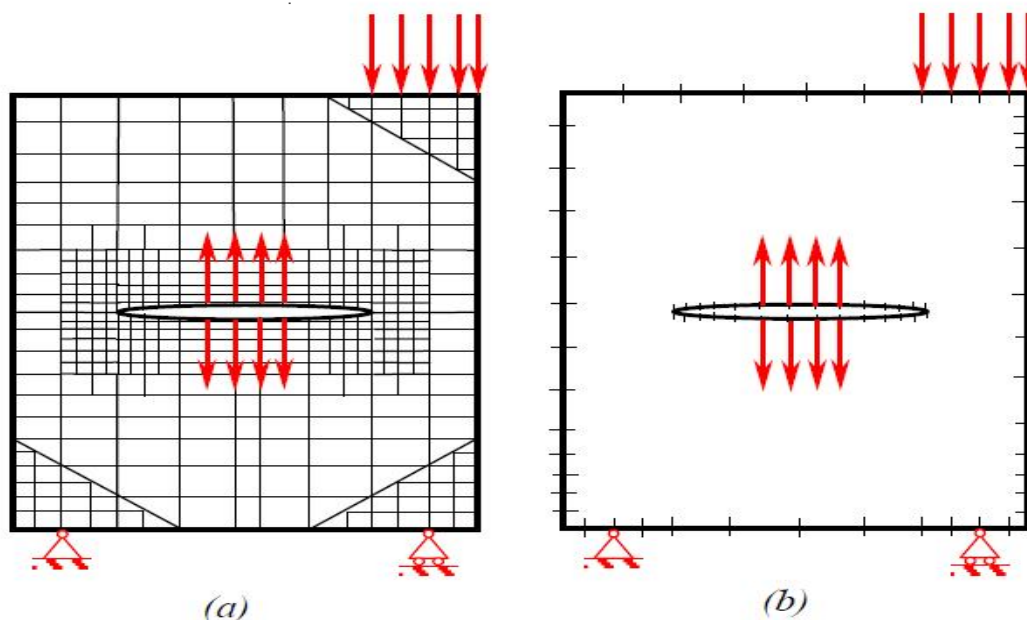


Fig.1: Exemple de discrétisation d'un domaine bidimensionnel fissuré.

(a) par FEM – (b) par BEM

La question de l'efficacité relative des différentes méthodes numériques FEM, XFEM et BEM, objet de nombreuses discussions notamment entre les deux premières, ne semble pas essentiel. En effet, la FEM occupe une position dominante. Son champ d'application est plus grand que celui des autres. La BEM présente aussi un avantage pour le traitement de certaines situations de fissuration en utilisant des éléments de discontinuités de déplacement et pour les problèmes où le milieu est supposé infini ou semi infini.

I.2. METHODE INDIRECTE ET DIRECTE EN BEM

L'approche indirecte est basée sur les équations intégrales qui sont exprimées entièrement en termes de solutions d'unité singulière à partir d'équations différentielles originales et est distribuée avec des densités inconnues spécifiques sur la frontière du domaine de ce problème. Les fonctions de densité elles-mêmes n'ont aucune signification physique apparente. Une fois les fonctions de densité obtenues, les calculs peuvent être poursuivies en n'importe quel point intérieur du domaine étudié par un procédé d'intégration simple. L'approche indirecte regroupe la méthode de discontinuité de déplacement DDM et la méthode de discontinuité de contrainte appelée parfois la méthode des contraintes fictives FSM. Dans notre étude, nous retenons la DD comme outil de simulation numérique.

Les équations intégrales dans cette approche sont celles qui sont exprimées en termes de variables physiques réelles du problème, telles que les tractions et les déplacements sur la frontière pour l'élasticité. Les paramètres pour le volume peuvent être obtenus comme un calcul ultérieur, une fois les valeurs sur la frontière connues. L'approche directe à une similitude étroite avec la FEM, avec laquelle beaucoup d'ingénieurs sont familiarisés. Cette méthode a été couplée avec la méthode des éléments finis dans plusieurs études [Abd -1997].

I.2.1. METHODE DIRECTE

Le concept de la distribution ou de pondération d'une équation différentielle est non seulement valide pour les solutions approximatives mais c'est un concept mathématique fondamental, qui peut être employé dans des applications innombrables d'ingénierie. Lagrange a proposé la première démonstration du principe des travaux virtuels, en utilisant les concepts des distributions, appliquant ce qui s'appelle maintenant les multiplicateurs Lagrangiens. Ces concepts sont également essentiels pour traiter des équations différentielles.

2.1.1. EQUATIONS DE BASE

Les équations d'équilibre suivantes doivent être satisfaites en tout point du domaine étudié :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0 \quad (\text{I.1})$$

Où σ_{ij} représentent les composantes du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ et F_j sont les composantes des forces de volumes.

La loi de Hooke généralisée est donné par :

$$\sigma_{ij} = 2\mu_L \epsilon_{ij} + \lambda_L \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{I.2})$$

Où ε_{ij} sont les composantes du tenseur linéarisé des déformations $\bar{\varepsilon}$. λ_L et μ_L sont les coefficients de Lamé.

Les composantes du tenseur de déformations sont obtenues à l'aide des composantes du champ de déplacement u_i

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{I.3}$$

Le vecteur contrainte $\bar{T}(M, \vec{n})$ agissant au point sur une surface Γ de normale \vec{n} est donné par :

$$\bar{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} \tag{I.4}$$

Nous obtenons l'équation d'équilibre de Lamé-Navier suivante en termes de déplacement en injectant les équations(I.2) et (I. 3) dans l'équation (I.1) :

$$(\lambda_L + \mu_L) grad(div \vec{u}) - \mu_L rot \vec{u} + \vec{F} = \vec{0} \tag{I.5}$$

2.1.2. SOLUTION FONDAMENTALE

La formulation intégrale requiert la solution répondant à un problème représenté par un domaine infini en présence d'une force concentré. Cette solution est due à Kelvin et connue sous le nom de solution fondamentale.

La solution fondamentale de l'équation de Lamé-Navier est obtenue en recherchant une solution particulière de l'équation (I.5) en posant une distribution de charges concentrées unitaires \vec{F}^* appliquée au point P dans la direction e_i égale à :

$$F_i^* = \delta(M - P) e_i \tag{I.6}$$

Où $\delta(M - P)$ est la distribution de Dirac.

Pour un champ de déplacement virtuel \vec{u}^* , il est possible de déduire le théorème des travaux virtuels qui s'écrit :

$$\int_{\partial D} \bar{T}(M, \vec{n}) \vec{u}^* dS + \int_D \vec{F} \vec{u}^* dV = \int_D \bar{\sigma} \bar{\varepsilon}^* dV \tag{I.7}$$

Nous pouvons déduire le théorème de réciprocité de Maxwell Betti qui s'écrit :

$$\int_{\partial D} \bar{T}(M, \vec{n}) \vec{u}^* dS + \int_D \vec{F} \vec{u}^* dV = \int_{\partial D} \bar{T}^*(M, \vec{n}) \vec{u} dS + \int_D \vec{F}^* \vec{u} dV \tag{I.8}$$

Où \vec{u} est le champ de déplacement réel.

Utilisons le résultat précédent pour les deux états suivants :

Etat 1 :

\vec{u} : Déplacement, $\vec{T}(M, \vec{n})$: Vecteur contrainte agissant au point M présentant une normale \vec{n}

\vec{F} : Force de volume

Etat 2 :

$U_{ij}^*(M, P)$: Déplacement du point M dans la direction j dû à une force unitaire appliquée au point P dans la direction i

τ_{ij}^* : Tension au point M dans la direction j due à une force unitaire dans la direction i

$F_i^* = \delta(M - P)e_i$: Force de volume (problème de Kelvin)

En considérant les forces dans les trois directions de l'espace, le déplacement en un point M quelconque du domaine s'écrit :

$$u_j^* = U_{ij}^*(M, P)e_i \tag{I.9}$$

Les expressions des solutions fondamentales pour un problème de Kelvin ont été données par [Cru- 1974] et [Dom-1987] sous la forme :

$$U_{ij}^*(M, P) = \frac{1}{16\pi \mu(1-\nu)r} \left((3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \tag{I.10}$$

Dans le cas d'un problème en 3-D et

$$U_{ij}^*(M, P) = \frac{1}{8\pi \mu(1-\nu)r} \left((3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \tag{I.11}$$

Dans le cas d'un problème en 2-D en déformation plane .Où $r = r(P, M)$ est la distance entre le point P et le point M appartenant au contour.

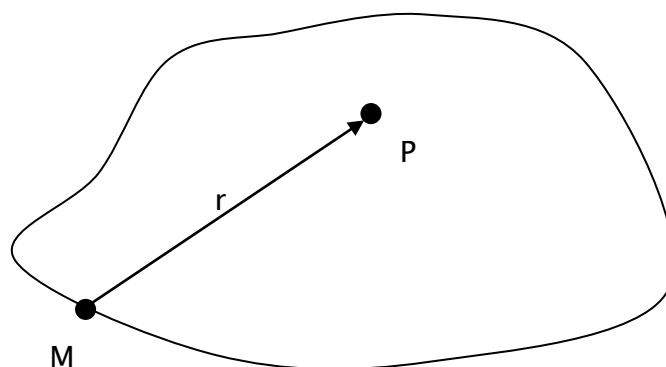


Fig.2: Domaine d'étude D avec P à l'intérieur.

Et ν est le coefficient de Poisson.

Les contraintes peuvent être déduites au point P .

Les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}^*(M, \vec{n})$ au point M prennent la forme suivante :

$$T_j^* = \tau_{ij}^*(P, M) e_i \quad (I.12)$$

τ_{ij}^* Est donné pour les problèmes 3D comme suit :

$$\tau_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left((1-2\nu)\delta_{ij} + 3\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) + (1-2\nu) \left(n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \right] \quad (I.13)$$

Et pour les problèmes 2D en déformation plane il est donné par :

$$\tau_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left((1-2\nu)\delta_{ij} + 2\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) + (1-2\nu) \left(n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \right] \quad (I.14)$$

2.1.3. IDENTITE DE SOMIGLIANA

Considérons deux états élasto-statiques $[\bar{\sigma}, \bar{u}, \bar{F}]$ et $[\bar{\sigma}^*, \bar{u}^*, \bar{F}^*]$ définis sur le même domaine borné D de frontière Γ et reprenons le théorème de Maxwell-Betti écrit pour les deux états élastiques qui s'écrit :

$$\int_{\partial D} \vec{T}(M, \vec{n}) \bar{u}^* dS + \int_D \bar{F} \bar{u}^* dV = \int_{\partial D} \vec{T}^*(M, \vec{n}) \bar{u} dS + \int_D \bar{F}^* \bar{u} dV \quad (I.15)$$

Soit D , supposé une partie du domaine infini et chargé au point P par une force unitaire dans la direction i . Nous pouvons écrire à partir de l'équation (I.16) et de la distribution de Dirac pour un point P à l'intérieur du domaine D , ce qui suit :

$$u_i(P) + \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) u_j(M) dS = \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) T_j(M) dS + \int_D F_j(M) U_{ij}(M, M) dV \quad (I.16)$$

Connue sous le nom d'identité de Somigliana.

En l'absence de forces de volumes, l'équation (I.16) présente la forme simplifiée suivante :

$$u_i(P) = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) u_j(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) T_j(M) dS \quad (I.17)$$

Au passage à la limite, lorsque le point P est sur le contour, les intégrales sont singulières. Celles-ci sont intégrées au sens des valeurs principales de Cauchy.

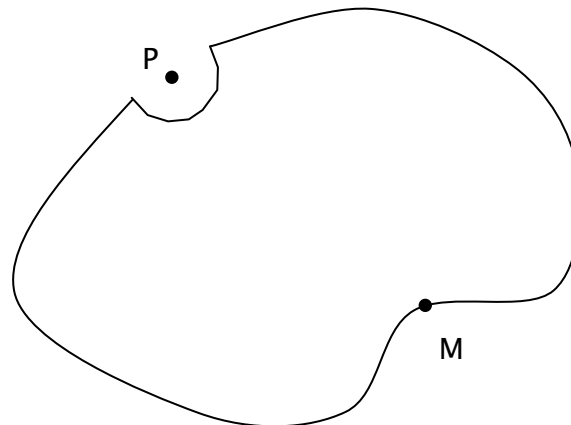


Fig.3 : Domaine avec le point P sur la frontière.

Dans le cas du plan, il est montré par [Dom-1987], pour un point P appartenant à la surface, que l'équation (I.17) devient:

$$c_{ij}u_i(P) = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P)u_j(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P)T_j(M) dS \quad (\text{I.18})$$

c_{ij} Est un terme libre qui dépend de la régularité du contour.

On a $c_{ij} = \frac{1}{2}$ pour un contour lisse au point P

$c_{ij} = 0$ Pour P à l'intérieur du domaine.

L'identité de Somigliana est commune comme une représentation intégrale directe donnant les contraintes et les déplacements en un point du domaine à partir des conditions appliquées à la frontière en termes de contrainte et déplacement.

I.2.2. METHODES INDIRECTES

Il existe des représentations où les déplacements et les contraintes sont des fonctions de certaines quantités qui ne sont ni les déplacements ni contraintes appliqués. Ces techniques sont appelées méthodes directes.

Celles-ci peuvent être introduites comme suit en supposant avoir à résoudre deux problèmes : un problème intérieur (borné) et un problème extérieur (infini).

Pour le problème intérieur (borné), on écrit l'identité de Somigliana pour ce problème(Fig.4)

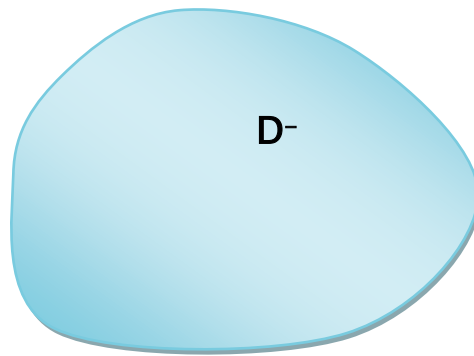


Fig.4 : Domaine D^- intérieur repéré par le signe (-).

Le domaine $(-)$ est le domaine réel occupé par la structure et sa solution est $[\bar{\sigma}^-, \vec{u}^-]$.

On considère le domaine complémentaire à D^- , soit D^+ . Pour ce problème la solution est $[\bar{\sigma}^+, \vec{u}^+]$.

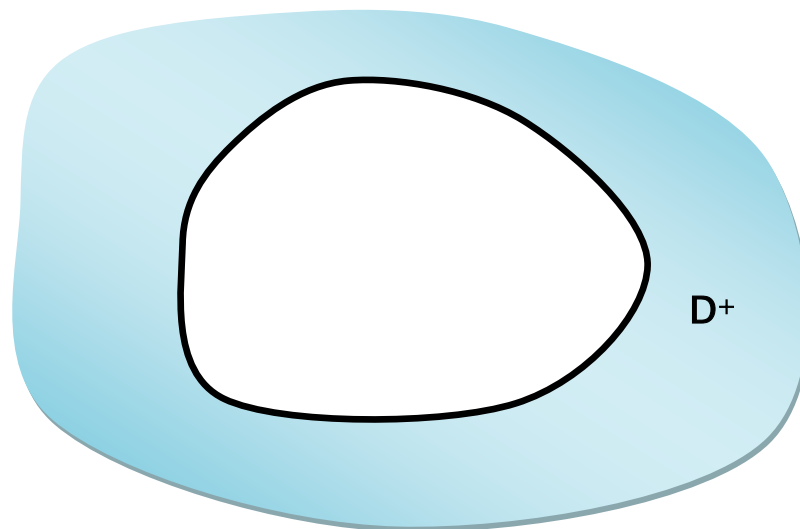


Fig.5 : Domaine D^+ extérieur repéré par le signe +.

Appliquons le théorème de la réciprocité entre l'état $(+)$ et la solution fondamentale, lorsque la charge concentrée est dans le domaine D^- . Nous obtenons l'identité de Somigliana comme suit :

$$0 = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) u_j^+(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) T_j^+(M) dS \tag{I.19}$$

En soustrayant membre à membre (I.19) et l'équation (I.17) écrite pour le domaine D^- , nous obtenons :

$$u_i^-(P) = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P)(u_j^- - u_j^+)(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P)(T_j^- - T_j^+)(M) dS \quad (I.20)$$

La solution dans D^+ peut être choisie arbitrairement.

Choisissons, sur la frontière la condition suivante : $T_j^+ = T_j^-$

En posant : $D_j = u_j^+ - u_j^-$, $j = 1, 2$

Alors, il reste :

$$u_i^-(P) = \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P)(u_j^+ - u_j^-)(M) dS = \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) D_j dS \quad (I.21)$$

Ce résultat est connu sous le nom de potentiel de double couche avec la densité D_j . Cette méthode a été introduite en premier par Crouch (1976) sous le nom de méthode des discontinuités de déplacement (MDD).

D_j Est la discontinuité de déplacement dans la direction j .

I.3. METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT

C'est une méthode de type indirecte qui fait intervenir des variables auxiliaires qui sont les discontinuités de déplacement. De manière évidente, ceci est un avantage pour l'étude des milieux fissurés.

La méthode est fondée sur la solution analytique du problème d'une discontinuité de déplacement constante le long d'un segment de droite fini dans le plan xy , d'un solide élastique infini (figure 6). Le contour du domaine ainsi que les fissures peuvent être discrétisés par un nombre fini d'éléments dont les inconnues sont les discontinuités de déplacement définies. Sur les fissures, ces inconnues sont bien l'ouverture et le glissement des lèvres [Cro-1976],[Sta-1983].

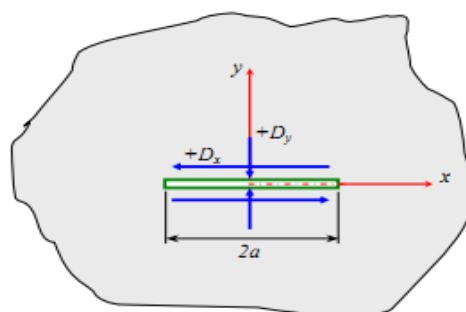


Fig.6 :Milieu infini avec une fissure. D_s et D_n sont respectivement les discontinuités tangentielle et normale.

Le déplacement est discontinu sur le segment de longueur $2a$ disposé sur l'axe x .

Désigné par $D_i = (D_x, D_y)$,

$$D_i = \Delta U_i = U_i(x, 0_-) - U_i(x, 0_+) \quad (I.22)$$

Où

$$\begin{cases} D_x = U_x(x, 0_-) - U_x(x, 0_+) \\ D_y = U_y(x, 0_-) - U_y(x, 0_+) \end{cases} \quad (I.23)$$

I.3.1. SOLUTION FONDAMENTALE

La solution en contraintes et en déplacements est donnée par Crouch ([Cro-1976]) pour un milieu homogène et isotrope par la fonction $f(x,y)$ et ses dérivés dans le xoy du système de la coordonnée local.

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\arctg \frac{y}{x-a} - \arctg \frac{y}{x+a} \right) - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[-(x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \right] \right] \quad (I.24)$$

Où $2a$ est la longueur d'un segment orientée dans le domaine infini Ω et rapporté dans le repère local $\bar{x}o\bar{y}$. ν est le coefficient du Poisson.

Les fonctions des déplacements et contraintes pour tout point arbitraire (x, y) en fonction de discontinuité de déplacement Δu_y normale et Δu_x tangentielle, ayant la forme suivante :

$$\begin{cases} u_x \\ u_y \\ \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} 2(1-\nu) f_{,y} - y f_{,xx} & -(1-2\nu) f_{,x} - y f_{,xy} \\ (1-2\nu) f_{,x} - y f_{,xy} & 2(1-2\nu) f_{,y} - y f_{,yy} \\ 2G(2f_{,xy} - y f_{,xyy}) & 2G(f_{,yy} + y f_{,yyy}) \\ 2G(-y f_{,xyy}) & 2G(2f_{,yy} - y f_{,xyy}) \\ 2G(2f_{,yy} + y f_{,yyy}) & 2G(-y f_{,xyy}) \end{bmatrix} \begin{cases} \Delta u_x \\ \Delta u_y \end{cases} \quad (I.25)$$

Avec $G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)}$: module de cisaillement .

Les dérivées de fonction $f(x, y)$ sont obtenues directement à partir de l'équation (I.24) :

$$f_{,x} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (I.26)$$

$$f_{,y} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right]$$

$$f_{,xy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (I.27)$$

$$f_{,xx} = f_{,yy} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 f,_{xyy} = f,_{xxx} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)^2 - y^2}{\{(x-a)^2 + y^2\}^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{\{(x+a)^2 + y^2\}^2} \right] \\
 f,_{yyy} = f,_{xxy} &= \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)}{\{(x-a)^2 + y^2\}^2} - \frac{(x+a)}{\{(x+a)^2 + y^2\}^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{I.28}$$

Ces équations forment la base de la méthode de discontinuité de déplacement.

Les déplacements le long de la droite $y=0$ sont :

$$\begin{aligned}
 u_x &= -\frac{1}{2\pi} D_x \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 u_x &= -\frac{1}{2\pi} D_y \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|
 \end{aligned}
 \tag{I.29}$$

Les valeurs des limites en arc tangent sont les suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}-a} - \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}+a} \right] = \begin{cases} 0 & |\bar{x}| > a, \bar{y} = 0 \\ +\pi & |x| < a, \bar{y} = 0^+ \\ -\pi & |x| < a, \bar{y} = 0^- \end{cases}
 \tag{I.30}$$

On peut considérer trois cas pour évaluer les déplacements le long de la ligne $y=0$.

1) $|x| > a$ et $y = 0$

$$\begin{aligned}
 u_x(x, 0) &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 u_y(x, 0) &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|
 \end{aligned}
 \tag{I.31}$$

2) $|x| < a$ et $y = 0^+$

$$\begin{aligned}
 u_x(x, 0^+) &= -\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 u_x(x, 0^+) &= -\frac{1}{2} D_y + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|
 \end{aligned}
 \tag{I.32}$$

3) $|x| < a, y = 0^-$

$$\begin{aligned}
 u_x(x, 0^+) &= \frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 u_x(x, 0^+) &= \frac{1}{2} D_y + \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|
 \end{aligned}
 \tag{I.33}$$

Les déplacements $u_{\bar{x}}$ et $u_{\bar{y}}$ sont continus pour $|x| > a$ et $y=0$, mais ont une discontinuité constante $+D_x$ et $+D_y$ pour $|x| < a$, Les contraintes le long de la ligne $y=0$, d'après l'équation(I.24) peuvent être évaluées comme suite :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(x,0) &= -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\
 \sigma_{yy}(x,0) &= -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\
 \sigma_{xy}(x,0) &= -\frac{aG}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2 - a^2}
 \end{aligned}
 \tag{I.34}$$

I.3.2. PROCEDURE NUMERIQUE

La MDD est un moyen de trouver une approximation de la distribution régulière du déplacement et contraintes. On utilise la procédure numérique pour résoudre les problèmes complexes aux limites, qui peuvent être développés au moyen des équations algébriques.

Nous subdivisons la frontière de la région qui nous intéresse en N segments de droite. Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement définie suivant un repère local s, n comme le montre la figure 7, parfaitement reliés les uns aux autres et forment une courbe quelconque.

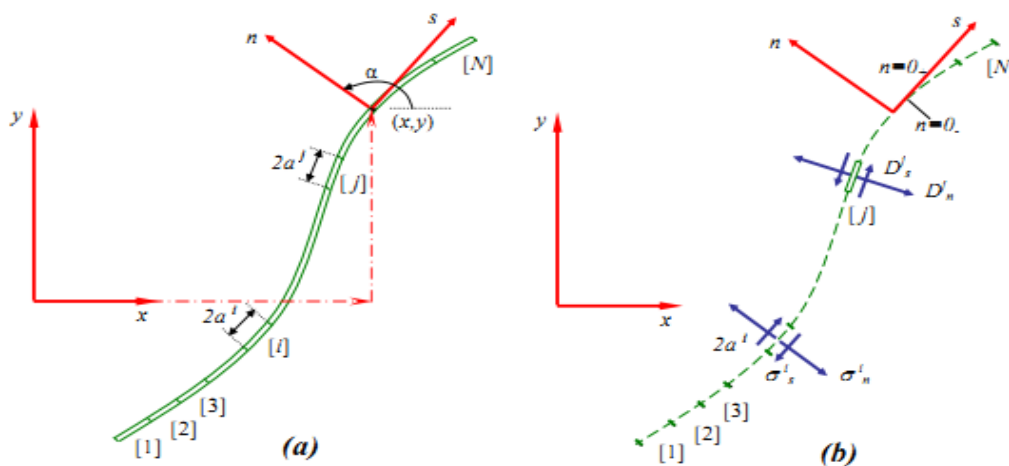


Fig.7: Représentation d'une fissure ou contour quelconque en N segments.

La longueur de chacun de ces segments est notée par $2a^i$ comme le montre la figure (7).

Les composantes D_s^j et D_n^j sont données par l'expression :

$$\begin{aligned}
 D_s^j &= u_s^{j-} - u_s^{j+} \\
 D_n^j &= u_n^{j-} - u_n^{j+}
 \end{aligned}
 \tag{I.35}$$

Où u_s^j et u_n^j sont les déplacements normaux et tangentiels de l'élément j .

Les contraintes normales et tangentiels au milieu de l'élément i peuvent être exprimées en fonction des composantes de discontinuité de l'élément j comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1, N \tag{I.36}$$

En utilisant le principe de superposition, et en tenant compte de l'effet des N éléments (discontinuités), nous obtenons le champ de contrainte:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1, N \tag{I.37}$$

Où A_{ij} : sont les coefficients d'influences relatifs aux contraintes sur la frontière.

De même manière, on établit le champ de déplacement :

$$\left. \begin{aligned} u_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1, N \tag{I.38}$$

Où B^{ij} sont les coefficients d'influences relatifs aux déplacement sur la frontière.

I.3.3. TRANSFORMATION DES COORDONNEES

Les coefficients d'influence dans l'équation (I.37) et (I.38) sont développés dans le problème pour une discontinuité de déplacement constante avec une orientation arbitraire d'un segment dans un solide infini. La méthode de discontinuité de déplacement est basée essentiellement sur la connaissance des coordonnées des points à étudier par rapport au repère local de chaque segment et l'orientation de ce repère par rapport au repère global.

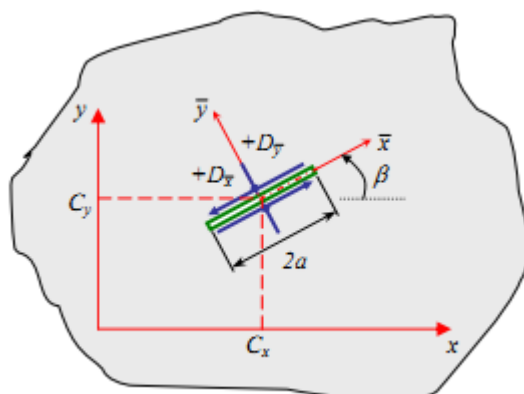


Fig. 8 : Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire.

Les coordonnées locales (\bar{x}, \bar{y}) sont obtenues par une translation et une rotation par rapport au repère global (x, y) de système. Les composantes du centre de l'élément sont C_x et C_y suivant x, y respectivement, tandis que la rotation est définie par l'angle β positif dans le sens trigonométrique.

Les déplacements et les contraintes dans les systèmes de coordonnée locale sont trouvés en remplaçant (x, y) par (\bar{x}, \bar{y}) dans les équations (I.25), avec :

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= F_1(\bar{x}, \bar{y}), f_{,\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) = F_2(\bar{x}, \bar{y}), f_{,\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) = F_3(\bar{x}, \bar{y}), \\ f_{,.\bar{x}\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) &= F_4(\bar{x}, \bar{y}), f_{,.\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) = -f_{,.\bar{y}\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) = F_5(\bar{x}, \bar{y}), \\ f_{,.\bar{x}\bar{y}\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) &= F_6(\bar{x}, \bar{y}), f_{,.\bar{y}\bar{y}\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) = F_7(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \tag{I.39}$$

Les coordonnées des déplacements et de contraintes dans le repère global (x, y) de système, sont :

$$\begin{aligned} U_x &= D_{\bar{x}} \left[-(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 + \bar{y} (\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right] \\ &+ D_{\bar{y}} \left[-(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right] \\ U_y &= D_{\bar{x}} \left[(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right] \\ &+ D_{\bar{y}} \left[-(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 - \bar{y} (\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right] \\ \sigma_{xx} &= 2GD_{\bar{x}} \left[2 \cos^2 \beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y} (\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ &2GD_{\bar{y}} \left[-\bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ \sigma_{yy} &= 2GD_{\bar{x}} \left[2 \sin^2 \beta \bar{F}_4 - \sin 2\beta \bar{F}_5 - \bar{y} (\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ &2GD_{\bar{y}} \left[-\bar{F}_5 - \bar{y} (\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ \sigma_{xy} &= 2GD_{\bar{x}} \left[\sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ &2GD_{\bar{y}} \left[-\bar{y} (\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right] \end{aligned} \tag{I.40}$$

On peut utiliser ces équations pour calculer les coefficients d'influence.

I.3.4. CONSTRUCTION DU SYSTEME D'EQUATION

Nous considérons un domaine infini contenant N segments de droites orientés dans des directions arbitraires par rapport au repère global (x, y) . Nous considérons deux éléments distincts $\ll i \gg$ et $\ll j \gg$ reliés à un repère local (x^i, y^i) et (x^j, y^j) respectivement, et orientés de β^i et β^j :

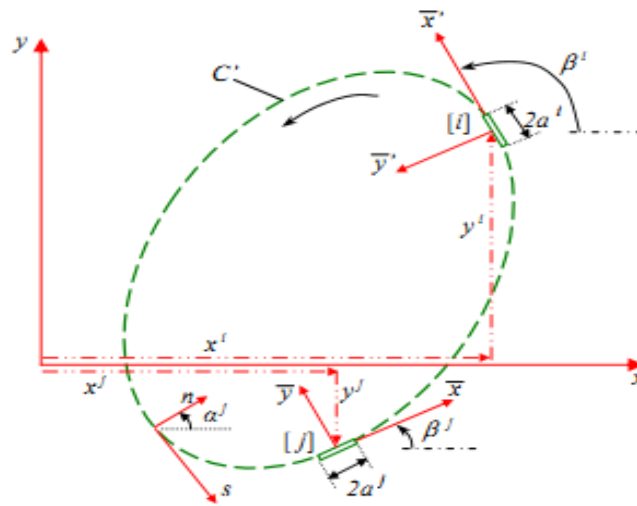


Fig. 9 : Position et orientation des éléments limites.

Les coordonnées locales (\bar{x}, \bar{y}) dans les équations (I.40) et (I.41) représentent celles du point (x, y) par rapport au milieu de l'élément i :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x - x^j) \cos \beta^j + (y - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x - x^j) \sin \beta^j + (y - y^j) \cos \beta^j \end{aligned} \tag{I.42}$$

Les déplacements et les contraintes en ce point dues aux discontinuités de déplacements sur les N éléments sont obtenus par la sommation des contributions de chaque élément.

En choisissant le point (x, y) comme étant le milieu de l'élément i , c'est-à-dire : $x = x^i$ et $y = y^i$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x^i - x^j) \cos \beta^j + (y^i - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x^i - x^j) \sin \beta^j + (y^i - y^j) \cos \beta^j \end{aligned} \tag{I.43}$$

Les composantes de déplacements et de contraintes relativement au repère local au point « i » sont x' et y' . Les deux repères locaux de l'élément i et l'élément j sont reliés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x} \cos \gamma + \bar{y} \sin \gamma \\ \bar{y}' &= -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma \end{aligned} \tag{I.44}$$

Où $\gamma = \beta^i - \beta^j$ (orientation de l'élément j par rapport au l'élément i)

Les déplacements et les contraintes seront :

$$\begin{aligned} U_{\bar{x}'}^i &= U_{\bar{x}}^i \cos \gamma + U_{\bar{y}}^i \sin \gamma \\ U_{\bar{y}'}^i &= -U_{\bar{x}}^i \sin \gamma + U_{\bar{y}}^i \cos \gamma \end{aligned} \tag{I.45}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i &= \sigma_{xx}^i \cos^2 \gamma + 2\sigma_{xy}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{yy}^i \sin^2 \gamma \\
 \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i &= \sigma_{xx}^i \sin^2 \gamma - 2\sigma_{xy}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{yy}^i \cos^2 \gamma \\
 \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i &= -(\sigma_{xx}^i - \sigma_{yy}^i) \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{xy}^i (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)
 \end{aligned}
 \tag{I.46}$$

Les coefficients d'influence pour les déplacements et les contraintes sont obtenues des systèmes des équations(II .40),(II .41),(II.45)et (II.46) après avoir posé :

$$D_s^j = D_{\bar{x}}^j, D_n^j = D_{\bar{y}}^j, u_s^i = D_{\bar{x}}^i, u_n^i = D_{\bar{y}}^i, \sigma_s^i = \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i, \sigma_n^i = \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i$$

Donc

$$\begin{aligned}
 U_s^i &= D_s^j \left[(1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5) \right] \\
 &+ D_n^j \left[-(1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5) \right] \\
 U_n^i &= D_s^j \left[(1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5) \right] \\
 &+ D_n^j \left[(1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5) \right]
 \end{aligned}
 \tag{I.47}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_s^i &= 2GD_s^j \left[-\sin 2\gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7) \right] \\
 &+ 2GD_n^j \left[-\bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7) \right] \\
 \sigma_n^i &= 2GD_s^j \left[2\sin^2 \gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7) \right] \\
 &2GD_n^j \left[-\bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7) \right]
 \end{aligned}
 \tag{I.48}$$

On peut écrire les équations (II.26) et (II.27) sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned}
 u_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\
 u_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j
 \end{aligned} \right\} i = 1, N$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\
 \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j
 \end{aligned} \right\} i = 1, N$$

$$\tag{I.49}$$

I.4.COCCLUSION

Dans ce chapitre ,les équations qui régissent la theorie de l'élasticité ont été transformées en équations intégrales et une présentation détaillée de la méthode de discontinuité de déplacement dans le but d'exploiter cette technique pour résoudre le problème des structure fissuré.

CHAPITRE II

A propos de la mécanique de la rupture

MADANI FATEH

II.1. APERÇU HISTORIQUE

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. Cette dernière constitue le défaut majeur qui pilote la rupture pouvant déboucher à la ruine.

Le coût des accidents liés aux ruptures catastrophiques des structures jusqu'à la fin des années quatre-vingt du siècle dernier représente, d'après une étude économique [Zeg-2003], près de 4% du produit national brut (PNB) dans les pays industrialisés. D'après la même étude, on pourrait réduire ce coût d'environ 30% si on appliquait correctement les concepts connus de la mécanique de la rupture d'une part, et de 25% supplémentaires par le développement de recherches dans le domaine de la rupture d'autre part. La pertinence de la maîtrise d'une telle science est due à l'importance des incidents liés à la rupture et à la délicatesse de la prévention de leurs risques.

Par gros temps, le «FLARE» s'est brisé en deux. Vingt et un membres de l'équipage ont péri et quatre ont survécu. Le gasoil qui s'est échappé n'a pu être récupéré et s'est dispersé sur une grande superficie, causant une catastrophe écologique en mer.



Fig.1: Naufrage du FLARE 16 janvier 1998 au large de Terre Neuve.

On distingue deux causes majeures provoquant la rupture des structures :

- Une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure qui pourrait être évitée si la structure avait été bien dimensionnée avec un choix de matériaux adapté et un chargement correctement évalué.
- L'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue où la prévention de la rupture est plus délicate ; en effet

lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il ya souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours.

Eviter la rupture des édifices et des structures est depuis longtemps une préoccupation pour l'homme. Les concepteurs des structures de l'Egypte des pharaons (pyramides) ou ceux des civilisations qui leurs ont succédé (romaine, perse, musulmane, ...) nous ont laissé des édifices que l'on peut contempler, prouvant bien qu'ils avaient le souci d'éviter la ruine des structure. Mais comme les structures anciennes de pierre, de brique ou de mortier étaient conçues de telle sorte à n'avoir que des contraintes en compression, elles ont autant résisté car le risque de rupture par fissuration était très faible en l'absence de la traction contribuant directement à l'ouverture des fissures. Le problème de la rupture est actuellement plus crucial avec le développement de structures complexes lié au progrès technologique utilisant des matériaux travaillant en traction tels que les aciers, les alliages métalliques et les composites. Les avancées dans la connaissance en mécanique de la rupture ont permis de mieux prévenir le risque de rupture.

La première vraie interprétation qualitative de la rupture est exposée en 1920 par Griffith **[Gri-1920]** qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. S'appuyant sur les travaux de Inglis **[Ing-1913]** au début du 20^{ème}, Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure. Il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture basée sur la stabilité de la fissure uniquement pour les matériaux fragiles, ne tenant pas compte de la dissipation d'énergie due à la plastification. Il a fallu attendre les travaux d'Irwin **[Irw1948- Irw1949]** qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

Irwin **[Irw-1956]**, avec un groupe de chercheurs dans les laboratoires de la marine américaine, développa en 1956 le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaad **[Wes-1939]** et **[Irw-1956]**, montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique relié aux taux de restitution d'énergie. Ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est appelé *le facteur d'intensité de contrainte* (FIC). Le concept de FIC fut également utilisé par Paris **[Par-1963]** afin de décrire

la propagation des fissures en remplaçant la notion d'endurance par la notion de fatigue pour une meilleure prédiction des durées de vie des fissures.

La période entre 1960 et 1980 vit une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles concurrentes. D'une part les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture et d'autre part ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. La mécanique linéaire de la rupture cesse d'être valable lorsqu'une plastification importante précède la rupture. Pour tenir compte de l'effet de cette plastification sur les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité d'une fissure, plusieurs auteurs comme Irwin [Irw-1962], Dugdale [Dug-1960], et Barenblatt [Bar-1962] proposèrent ce qu'on appelle une correction de zone plastique. La taille de la fissure est augmentée de cette zone plastique pour retrouver les champs de contraintes élastiques décrits par le FIC.

Actuellement, on s'intéresse en plus au comportement viscoplastique et viscoélastique.

Généralement, le comportement viscoplastique est observé à température élevée lorsque les phénomènes de fluage deviennent importants.

Cependant beaucoup de mécanismes de rupture restent toujours mal connus lorsqu'on utilise de nouveaux matériaux ou de nouveaux procédés.

L'apparition des matériaux composites a de nouveau permis l'utilisation des concepts de la mécanique linéaire de la rupture pour décrire le comportement de ces matériaux.

Dans cette étude, nous nous limitons à la mécanique linéaire de la rupture.

II.2. FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE-APPROCHE LOCALE

D'un point de vue macroscopique, on peut considérer trois modes fondamentaux de rupture [Rec-1995]. La fissure représente des discontinuités du champ de déplacement. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois mouvements appelés modes fondamentaux de rupture.

- Mode I: « mode par ouverture » ; Mode d'ouverture de la fissure ou le chargement est perpendiculaire au plan de la fissure.
- Mode II: « cisaillement plan » ; mode de cisaillement plan ou le chargement est parallèle au plan et perpendiculaire au front de la fissure.
- Mode III: « cisaillement anti-plan » mode de cisaillement anti plan ou le chargement est parallèle au plan et au front de la fissure.

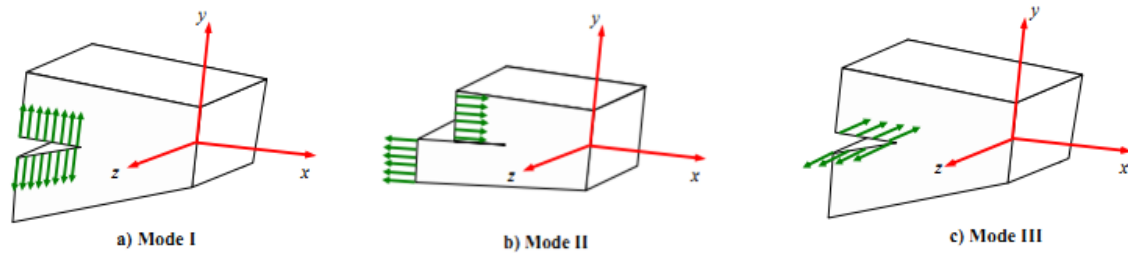


Fig.2 : Modes fondamentaux de rupture.

Le mode I est le mode principal de rupture. Il concerne les cas de chargement les plus importants et les plus dangereux.

II.2.1 ETAT DE CONTRAINTE EN FRONT DE FISSURE

On peut distinguer deux approche planes: l'état plan de contrainte et l'état plan de déformation (figure 3).

En état plan de contraintes nous avons :

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad (\text{II.1})$$

L'état plan de déformation est défini lorsque :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \quad (\text{II.2})$$

L'état plan de déformation peut avoir lieu au centre d'une pièce épaisse, où la tri axialité des contraintes est important. Dans la suite de l'étude, nous supposons un état de déformation plan. D'après IRWIN [IRW-1949], les champs de contraintes et de déplacements au voisinage de la pointe de fissure s'expriment dans le cadre d'élasticité et en déformation plane par les relations suivantes pour les différentes modes. Les facteurs K_I , K_{II} et K_{III} sont exprimés en $\text{MPa}\sqrt{m}$. Ils sont appelés facteurs d'intensités de contraintes. Ces paramètres dépendant uniquement des conditions de chargement et de géométrie.

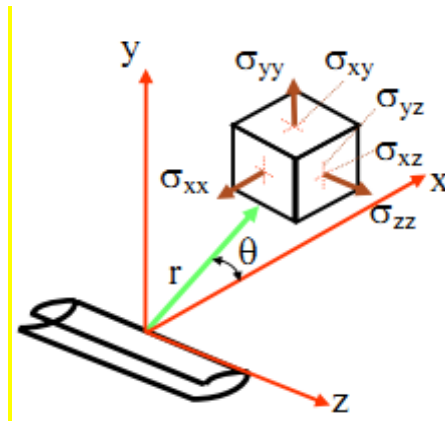


Fig.3 : Élément de volume au voisinage d'un front de fissure rectiligne.

En mode I :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
 u &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 v &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 w &= 0
 \end{aligned} \tag{II.3}$$

En mode II :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x - \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
 u &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 v &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 w &= 0
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

En mode III :

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ w &= \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = u = v = 0\end{aligned}\tag{II.5}$$

ν est le coefficient de poisson et μ est le module de cisaillement avec : $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

II.2.2. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE (FIC)

Le facteur d'intensité de contrainte est un paramètre couramment utilisé pour caractériser la singularité du champ de contrainte au voisinage de la tête de la fissure. Il permet de déterminer complètement les champs de contraintes où de déplacement au voisinage de la fissure contenue dans une structure considérée élastique.

Il est possible de trouver le facteur d'intensité de contrainte pour le mode $\alpha = I, II, III$ par :

$$K_\alpha = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{ij}\tag{II.6}$$

Une autre alternative permet de calculer ces facteurs.

Si nous connaissons les discontinuités des composantes des déplacements $[u]$, $[v]$, et $[w]$ des lèvres de la fissure (approche cinématique), on peut déterminer les FIC des différents modes en un point donné du front de fissure M par les expressions suivantes [LEM-2001]:

$$\begin{aligned}K_I(M) &= \lim_{rx \rightarrow 0} (\sigma_y \sqrt{2\pi r}) = \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)}\right) [v] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \\ K_{II}(M) &= \lim_{rx \rightarrow 0} (\tau_{xy} \sqrt{2\pi r}) = \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)}\right) [u] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \\ K_{III}(M) &= \lim_{rx \rightarrow 0} (\tau_{yz} \sqrt{2\pi r}) = \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)}\right) [w] \sqrt{\frac{2\pi}{r}}\end{aligned}\tag{II.7}$$

Il faut noter que les expressions restent toujours valables en déformation plane.

II.3 ASPECTS ENERGETIQUES- APPROCHE GLOBALE

Griffith (1920) a été le premier à étudier la rupture d'un point de vue énergétique GRIFFITH [GRI-1920] constata que, lorsqu'une fissure est introduite dans une plaque de matériaux élastique ou qu'une fissure se propage, deux phénomènes se produisent, en rapport avec la quantité d'énergie dans la plaque.

- Relaxation des contraintes autour de la fissure, provoquant une diminution de l'énergie potentielle.

- Création de nouvelles surfaces de rupture

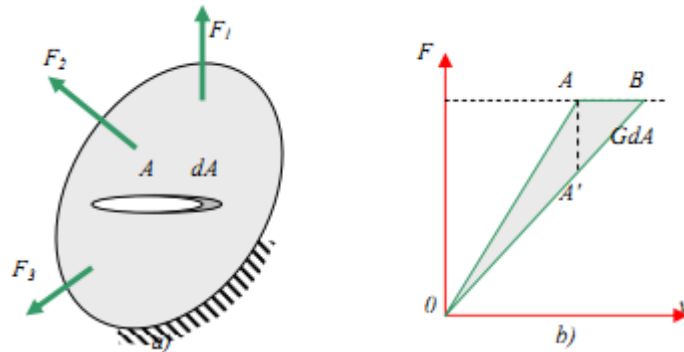


Fig.4 : Définition du taux de restitution d'énergie G .

La création des nouvelles surfaces de rupture est un processus qui absorbe de l'énergie. Il s'agit de quantifier ces processus énergétiques.

Griffith suppose l'existence d'une énergie de liaison positive par unité de surface γ , Griffith étudie alors l'éventualité de la propagation quasi statique, et sous chargement constant, d'une fissure et définit une énergie G . Le taux de restitution d'énergie G correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W_p pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a , à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur δa .

$$G = -\frac{\partial W_p}{\partial a} \tag{II.8}$$

Avec : $W_p = W_e - \Phi_{ext}$

Où $\Phi_{ext} = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \int_{d\Omega} \vec{T} \cdot \vec{u} dS$: Le travail des forces extérieures.

$$W_e = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} dV$$
 : L'énergie de déformation élastique du système.

Il existe une énergie critique $G_c = 2\gamma$ et le critère de propagation s'écrit comme suit :

$$G \geq G_c = 2\gamma \tag{II.9}$$

Il faut relever que pour les problèmes en mécanique de la rupture linéaire, les hypothèses de Griffith sont suffisantes pour le traitement des problèmes. Pour les chargements dynamiques ou en présence de zones plastiques non négligeables en tête de fissure, il faut tenir en compte des dissipations d'énergie dans le bilan [Bui-1980].

II.3.1.RELATION ENTRE G ET K

Il est intuitif de penser que le taux de libération d'énergie, G , sera une grandeur très sensible à la singularité des contraintes.

On montre que Nous allons montrer qu'en fait les deux quantités K et G sont liés.

Quand la fissure se propage dans sa propre direction, le taux de restitution d'énergie est donnée par :

$$\text{En déformation plane : } G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (\text{II.10})$$

$$\text{En contrainte plane : } G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (\text{II.11})$$

CHAPITRE III

Application de la méthode de discontinuité de déplacement aux bi-matériaux

MADANI FATEH

III.1. INTRODUCTION

Pour des inclusions de petites dimensions au voisinage des fissures, des résultats analytiques des FIC peuvent être obtenus. Ces résultats seront exploités. Pour d'autres configurations, la simulation numérique est la seule disponible. La méthode adoptée est donc confrontée à des résultats obtenus par des études numériques.

III.2. SOLUTION POUR L'INTERACTION ENTRE FISSURE ET INCLUSION

La rupture dans un matériau composite (contenant une inclusion dans notre cas) dépend de la forme de l'inclusion, la fraction de volume, la différence entre les propriétés élastiques de la matrice et de l'inclusion et la force d'interface (amorçage des cavités à partir de décohésion).

Un certain nombre d'études ont été établies pour les problèmes de fissuration et l'interaction entre fissure et inclusion. L'analyse du facteur d'intensité de contrainte est importante pour comprendre le phénomène dans les matériaux composites.

La solution analytique du facteur d'intensité de contrainte peut être obtenue pour quelques cas simples. Tamate [Tam-1968], Erdogan [Erd-1974], Hassi [Has -1976] et Shivakumar [Shi-1976] ont étudié l'interaction entre une fissure et l'inclusion de forme circulaire.

La solution pour une inclusion elliptique est due à Nisitami [Nis-1996]).

La solution basée sur une théorie de transformation sur la solution du problème de l'inclusion d'Eshelby, est développée pour obtenir le facteur d'intensité de contrainte pour une fissure près d'une inclusion de forme et de taille arbitraire soumise à un chargement générant un mode mixte.

La plupart des études qui traitent de l'interaction entre une fissure et une inclusion de forme, taille et localisation différente ont été effectuées par des approches numériques. Nous pouvons citer les travaux de Kassam et al. [Kas-1995] et Boselli et al. [Bos-2001] qui ont utilisés la méthode des éléments finis. Des résultats sur l'interaction utilisant la méthode des équations intégrales de frontière sont dus à Bush [Bus-1997], Asher [Ash-1998] et Wang [Wan-1998].

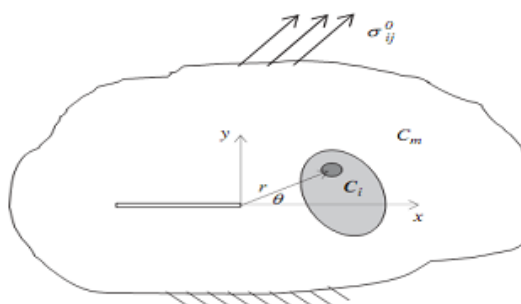


Fig. 1 : Modèle mécanique.

En présence d'inclusion au voisinage de la tête de la fissure, se pose le problème de l'identification du facteur d'intensité de contrainte.

Dans ce qui suit nous traitons ce problème. La figure (1) présente une structure plane contenant une fissure et une inclusion de forme arbitraire soumises à un champ de contrainte σ_{ij}^0 .

Le facteur d'intensité de contrainte en mode mixte (mode I et mode II dans le cas plan), en absence d'inclusion, est noté par K_I^0 et K_{II}^0 au voisinage de la fissure dans une structure considéré élastique. En présence de l'inclusion, le facteur d'intensité est noté par K_I^{tip} et K_{II}^{tip} . Pour simplifier le problème, nous supposons que l'inclusion et la matrice soient isotropes et ont le même coefficient de poisson ν . Posons $\alpha = \frac{E_i}{E_m}$; où E_i et E_m sont respectivement les modules de Young pour l'inclusion et la matrice.

On peut supposer qu'en l'absence de matrice, l'inclusion aurait subi une déformation libre e^A dans le domaine d'inclusion au bout de la fissure. La déformation finale dans l'inclusion e^T présente la manière équivalente l'incompatibilité créée par e^A et par l'hétérogénéité élastique entre la matrice et l'inclusion varie, peut être exprimée par Eshelby [Esh-1957] :

$$e^T = L e^A \quad (\text{III.1})$$

Où :

$$L = [(\alpha - 1)S + I]^{-1} (1 - \alpha) \quad (\text{III.2})$$

S est un tenseur du quatrième ordre, appelé tenseur d'Eshelby. Il dépend des modules d'élasticité de la matrice et de la géométrie de l'inclusion. I est le tenseur identité. Pour un élément infinitésimal de section circulaire, le tenseur d'Eshelby [Esh-1957] est donné par :

$$\begin{aligned} S_{1111} = S_{2222} &= \frac{5 - 4\nu}{8(1 - \nu)} \\ S_{1122} = S_{1212} &= \frac{4\nu - 1}{8(1 - \nu)} \\ S_{1133} = S_{2233} &= \frac{\nu}{2(1 - \nu)} \\ S_{1212} &= \frac{3 - 4\nu}{4(1 - \nu)} \\ S_{1313} = S_{2323} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Les autres composantes sont nulles. Le tenseur d'Eshelby équivalent est :

$$\begin{aligned}
 L_{1111} &= L_{2222} = \frac{(1-\alpha)(1-\nu)(3-4\nu+5\alpha-5\nu\alpha)}{(1+\alpha-2\nu)(1+3\alpha-4\nu\alpha)} \\
 L_{1122} &= L_{2211} = \frac{(1-\alpha)^2(1-\nu)(1-4\nu)}{(1+\alpha-2\nu)(1+3\alpha-4\nu\alpha)} \\
 L_{1133} &= L_{2233} = \frac{(1-\alpha)^2\nu}{(1+\alpha-2\nu)} \text{ et } L_{3333} = (1-\alpha) \\
 L_{1212} &= \frac{4(1-\alpha)(1-\nu)}{(1+3\alpha-4\nu\alpha)}
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

Et les déformations sont données par :

$$\begin{aligned}
 e_{11}^A &= \frac{K_I^0(1+\nu)}{E_m\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-2\nu) - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}^0(1+\nu)}{E_m\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2(1-\nu) - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{1-\nu^2}{E_m} \sigma_{11}^0 - \frac{\nu(1+\nu)}{E_m} \sigma_{22}^0 \\
 e_{22}^A &= \frac{K_I^0(1+\nu)}{E_m\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1-2\nu) + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}^0(1+\nu)}{E_m\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2\nu + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{1-\nu^2}{E_m} \sigma_{22}^0 - \frac{\nu(1+\nu)}{E_m} \sigma_{11}^0 \\
 e_{12}^A &= \frac{(1+\nu)}{E_m\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I^0 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II}^0 \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] + \frac{(1+\nu)}{E_m} \sigma_{12}^0
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

La déformation équivalent finale dans l'inclusion e^T peut être exprimée par : $e^T = Le^A$

$$\begin{aligned}
 e_{11}^T &= \frac{(1-\alpha)(1-\nu)}{(1+\alpha-2\nu)(1+3\alpha-4\nu\alpha)} \left[(3-4\nu+5\alpha+4\nu\alpha)e_{11}^A - (1-\alpha)(1-4\nu)e_{22}^A \right] \\
 e_{22}^T &= \frac{(1-\alpha)(1-\nu)}{(1+\alpha-2\nu)(1+3\alpha-4\nu\alpha)} \left[(1-\alpha)(1-4\nu)e_{11}^A - (3-4\nu+5\alpha-4\nu\alpha)e_{22}^A \right] \\
 e_{12}^T &= \frac{4(1-\alpha)(1-\nu)}{(1+3\alpha-4\nu\alpha)} e_{12}^A
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

Les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte au front de la fissure est déterminé (cf. [Yan-2004], [Che-2004]) et [Lam-1986]) par :

$$dK_{tip} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{E_m}{1-\nu^2} r^{-\frac{3}{2}} \Omega_1(e_{\alpha\nu}^T, \theta) dA \tag{III.7}$$

dA : élément de surface de l'inclusion.

Où

$$\Omega_1(e_{\alpha\nu}^T, \theta) = (e_{11}^T + e_{22}^T) \cos \frac{3\theta}{2} + 3e_{12}^T \cos \frac{5\theta}{2} \sin \theta + \frac{3}{2} (e_{22}^T - e_{11}^T) \sin \theta \sin \frac{5\theta}{2} \tag{III.8}$$

A partir des équations précédentes, nous trouvons (cf. [Zhon-2002],[Qian-2002]):

$$\Delta K_{tip} = CK_0 \int_A r^{-2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{3}{4(1-2\nu)} \sin^2 \theta \cos \theta \right) dA \tag{III.9}$$

Où

$$C = \frac{(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{E_m}{E_i} - 1 \right) \tag{III.10}$$

III.3.APPLICATION DE LA METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT AUX BI-MATERIAUX

Nous présentons un exemple simple de multi couches. Nous supposons que le corps à étudier est composé de deux milieux R_1 et R_2 présentés sur la figure 2.

Chaque domaine est supposé isotrope, homogène et linéairement élastique avec des constantes élastiques ν_1, E_1 et ν_2, E_2 .

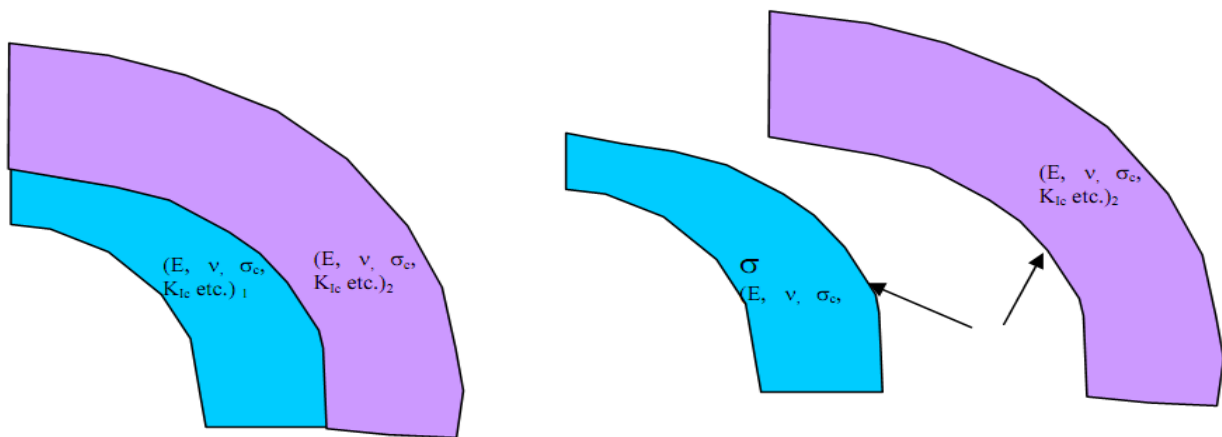


Fig.2 : Corps non homogène formé 2 milieux.

Les systèmes locaux des coordonnées sont associés aux deux contours. Ils sont directement opposés le long de l'interface, c'est-à-dire : $s_1 = -s_2$ et $n_1 = -n_2$.

Pour la résolution de ce problème, nous définissons les conditions aux limites du problème dans le corps représenté en figure 2 par des conditions en déplacements et en contraintes pour la partie d'interface .

Ces conditions de continuités sont définies pour un point Q de l'interface :

$$\begin{aligned} \sigma_s^{[1]}(Q) &= \sigma_s^{[2]}(Q) \\ \sigma_n^{[1]}(Q) &= \sigma_n^{[2]}(Q) \end{aligned} \tag{III.11}$$

et

$$\begin{aligned} u_s^{[1]}(Q) &= -u_s^{[2]}(Q) \\ u_n^{[1]}(Q) &= -u_n^{[2]}(Q) \end{aligned} \tag{III.12}$$

Nous utilisons la procédure numérique de la méthode des discontinuités de déplacement pour traiter le problème de la figure (2). Avec les deux milieux R_1 et R_2 , nous considérons, pour la résolution, deux problèmes liés entre eux par les conditions à l'interface. Nous associons les discontinuités de déplacement D_s et D_n à chaque élément des contours C_1 et C_2 . Les déplacements et les contraintes dans le milieu R_1 sont donnés en fonction $D_s^{[1]}$ et $D_n^{[1]}$ des N_1 éléments du contour C_1 et les déplacements et les contraintes dans le milieu R_2 sont donnés en fonction $D_s^{[2]}$ et $D_n^{[2]}$ des N_2 éléments du contour C_2 .

Le problème se ramène à trouver les discontinuités de déplacement D_s et D_n dans chaque élément de frontière parmi les $N = N_1 + N_2$ éléments si les conditions aux limites et les conditions de continuité sont prêtes pour la construction du système algébrique d'équation pour ce problème composé. Il est préférable de numéroter les éléments de frontières de deux milieux dans un certain ordre. Nous commençons par le milieu R_1 à partir de l'élément 1 jusqu'à l'élément N_1 le long de C_1 . Nous continuons pour le milieu R_2 de l'élément $N_1 + 1$ jusqu'à l'élément $N = N_1 + N_2$ le long de C_2 . En se référant aux équations (I.49), les contraintes sur la frontière de R_1 peuvent être :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} A_{ss}^{ij[1]} D_s^{j[1]} + \sum_{j=1}^{N_1} A_{sn}^{ij[1]} D_n^{j[1]} \\ \sigma_n^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} A_{ns}^{ij[1]} D_s^{j[1]} + \sum_{j=1}^{N_1} A_{nn}^{ij[1]} D_n^{j[1]} \end{aligned} \right\} i = 1, N_1 \quad (\text{III.13})$$

Et les contraintes dans la frontière du milieu R_2 peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N A_{ss}^{ij[2]} D_s^{j[2]} + \sum_{j=N_1+1}^N A_{sn}^{ij[2]} D_n^{j[2]} \\ \sigma_n^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N A_{ns}^{ij[2]} D_s^{j[2]} + \sum_{j=N_1+1}^N A_{nn}^{ij[2]} D_n^{j[2]} \end{aligned} \right\} i = N_1 + 1, N \quad (\text{III.14})$$

Et les déplacements sont :

$$\left. \begin{aligned} u_s^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} B_{ss}^{ij[1]} D_s^{j[1]} + \sum_{j=1}^{N_1} B_{sn}^{ij[1]} D_n^{j[1]} \\ u_n^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} B_{ns}^{ij[1]} D_s^{j[1]} + \sum_{j=1}^{N_1} B_{nn}^{ij[1]} D_n^{j[1]} \end{aligned} \right\} i = 1, N_1 \quad (\text{III.15})$$

Et les déplacements dans la frontière du milieu R_2 peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} u_s^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^{N_1} B_{ss}^{ij[2]} D_s^{j[2]} + \sum_{j=N_1+1}^{N_1} B_{sn}^{ij[2]} D_n^{j[2]} \\ u_n^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^{N_1} B_{ns}^{ij[2]} D_s^{j[2]} + \sum_{j=N_1+1}^{N_1} B_{nn}^{ij[2]} D_n^{j[2]} \end{aligned} \right\} i = N_1 + 1, N \quad (\text{III.16})$$

Les coefficients d'influences dans les équations (III.13) à (III.16) sont calculés exactement de la même manière que le cas du milieu monocouche. Mais il est nécessaire d'utiliser les propriétés d'élasticité de chaque milieu.

Les équations (III.13) à (III.16) peuvent se mettre sous la forme d'un système algébrique de $2N$ équations à $2N$ inconnus (les D_s et D_n) :

$$\left. \begin{aligned} b_s^i &= \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n^j \\ b_n^i &= \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1, N, (N = N_1 + N_2) \quad (\text{III.17})$$

en conservant les conditions aux limites et les conditions de continuités comme suit :

- a) L'élément i appartient à la partie libre de C_1 et posons qu'on a des contraintes appliquées à cet élément $\sigma_s^{i[1]} = (\sigma_s^i)_0$ et $\sigma_n^{i[1]} = (\sigma_n^i)_0$ donc :

$$\left\{ \begin{aligned} C_{ss}^{ij} &= \begin{cases} A_{ss}^{ij}, j = 1, N_1 \\ 0, j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i &= (\sigma_s^i)_0, b_n^i = (\sigma_n^i)_0 \end{aligned} \right. \quad (\text{III.18})$$

même chose pour C_{ns}^{ij} , C_{sn}^{ij} , C_{nn}^{ij}

- b) L'élément i appartient à la partie libre de C_2 et si les conditions imposées sont en déplacement $u_s^{i[2]} = (u_s^i)_0$ et $u_n^{i[2]} = (u_n^i)_0$ donc :

$$\left\{ \begin{aligned} C_{ss}^{ij} &= \begin{cases} 0, j = 1, N_1 \\ B_{ss}^{ij}, j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i &= (u_s^i)_0, b_n^i = (u_n^i)_0 \end{aligned} \right. \quad (\text{III.19})$$

Même chose pour C_{ns}^{ij} , C_{sn}^{ij} , C_{nn}^{ij} .

Avec des relations similaires, nous pouvons exprimer les autres coefficients d'influence en combinant les deux conditions aux limites des deux milieux et en faisant un simple réarrangement des équations(III.18) et(III.19) . Nous obtenons un seul système.

Si l'élément i est situé sur la portion d'interface qui est C_1 . Nous obtenons un élément i^* opposé directement à i et appartenant au contour C_2 . Nous obtenons quatre conditions à vérifier concernant les deux éléments face à face i et i^* , soit deux conditions de continuité de contraintes et deux de déplacements .

1) Les conditions de continuité en contraintes sont :

$$\begin{aligned} \sigma_s^{i[1]} - \sigma_s^{i^*[2]} &= 0 \\ \sigma_n^{i[1]} - \sigma_n^{i^*[2]} &= 0 \end{aligned} \tag{III.20}$$

D'après , les quantités b_s^i, b_n^i , et $C_{ss}^{ij} \dots$ etc, dans de l'équation seront :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij[1]}, j = 1, N_1 \\ -A_{ss}^{i^*j[2]}, j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = \sigma_s^{i[1]} - \sigma_s^{i^*[2]} = 0, b_n^i = \sigma_n^{i[1]} - \sigma_n^{i^*[2]} = 0 \end{cases} \tag{III.21}$$

Et identiquement pour les autres coefficients d'influence.

2) Les conditions de continuité en déplacements sont :

$$\begin{aligned} u_s^{i[1]} + u_s^{i^*[2]} &= 0 \\ u_n^{i[1]} + u_n^{i^*[2]} &= 0 \end{aligned} \tag{III.22}$$

D'après les équation(III.15) et (III.16), les quantités b_s^i, b_n^i , et $C_{ss}^{ij} \dots$ etc, dans de l'équation seront :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} B_{ss}^{i^*j[1]}, j = 1, N_1 \\ B_{ss}^{ij[2]}, j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = u_s^{i[1]} + u_s^{i^*[2]} = 0, b_n^i = u_n^{i[1]} + u_n^{i^*[2]} = 0 \end{cases} \tag{III.23}$$

Et identiquement pour les autres coefficients d'influence.

III.4.CALCUL NUMERIQUE DE FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE

Les discontinuités de déplacements D_i sont les déplacements relatifs entre la surface supérieure et la surface intérieure de la fissure.les facteurs d'intensité de contraintes sont déterminés à l'aide de ces discontinuités [Wen-1996].

Pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes, une formulation par la méthode de discontinuité de déplacements nous donne la combinaison liant les contrariantes en chaque élément i et les discontinuités de déplacements en chaque élément de la fissure.

À l'élément i , en utilisant l'équation (I.25), nous avons :

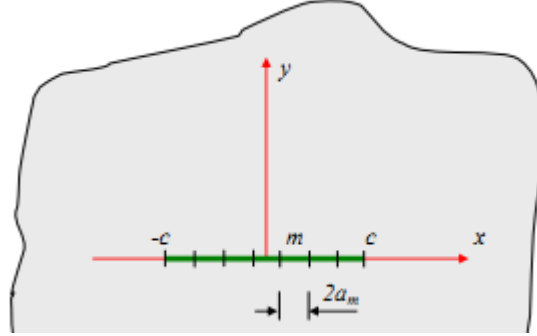


Fig .3: Elément d'une fissure.

$$\begin{aligned}\sigma_n^i &= \sum_{m=1}^M \frac{Ga_m D_n^m}{\pi(1-\nu) [(x_m - x_i)^2 - a_m^2]} = \sum_{m=1}^M \alpha_{im} D_n^m \\ \sigma_s^i &= \sum_{m=1}^M \frac{Ga_m D_s^m}{\pi(1-\nu) [(x_m - x_i)^2 - a_m^2]} = \sum_{m=1}^M \alpha_{im} D_s^m\end{aligned}\quad (\text{III.24})$$

Où a est la moitié de la longueur d'élément i et :

$$\alpha_{im} = \frac{Ga_m}{\pi(1-\nu) [(x_m - x_i)^2 - a_m^2]} \quad (\text{III.25})$$

Et x_i est la coordonnée de milieu de l'élément i dans le repère lié à la fissure.

D'après [Wen-1996], le facteur d'intensité de contrainte peut être donnée par, (en basant sur le noyau de green) :

$$\begin{aligned}K_I^\pm &= \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^c \sigma_n(x) \sqrt{\frac{c \pm x}{c \mu x}} dx = \sum_{i=1}^M \sigma_n^i F_i \sqrt{\pi c} = \sum_{i=1}^M \sum_{i=1}^M \alpha_{im} F_i D_n^m \sqrt{\pi c} \\ K_{II}^\pm &= \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^c \sigma_s(x) \sqrt{\frac{c \pm x}{c \mu x}} dx = \sum_{i=1}^M \sigma_s^i F_i \sqrt{\pi c} = \sum_{i=1}^M \sum_{i=1}^M \alpha_{im} F_i D_s^m \sqrt{\pi c}\end{aligned}\quad (\text{III.26})$$

Où

$$F_i = \frac{1}{\pi c} \int_{x^i - a^i}^{x^i + a^i} \sqrt{\frac{c \pm x}{c \mu x}} dx = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{x}{c}\right) \omega \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right]_{x^i - a^i}^{x^i + a^i} \quad (\text{III.27})$$

C : est la moitié de la longueur de la fissure.

Le signe positif est attribué à la tête droite de la fissure et le signe négatif à la tête gauche de la fissure.

D'après l'équation (III.26), on peut prévoir qu'elle donne une meilleure approche de facteur d'intensité de contrainte car elle se base sur les discontinuités de déplacements de tous les éléments de la fissure. Cependant, plus on se rapproche de la tête de la fissure, plus l'influence de sa discontinuité déplacement d'élément est plus grande.

III.5. CNCLUSION

Ce chapitre consacré à la méthode de discontinuité de déplacement est l'outil numérique pour traiter des milieux non homogènes prenant en charge l'interaction entre des inclusions et des fissures.

CHAPITRE IV

Exemples, résultats et interprétations

MADANI FATEH

III.1. INTRODUCTION

Dans cette partie, nous traitons un nombre d'exemples en mécanique des solides simulés numériquement par la méthode de discontinuités de déplacement (MDD) en bidimensionnel en utilisant un code de calcul en langage de programmation **FORTRAN90**. Dans le cas des fissures en présence d'inclusions, les résultats obtenus avec la présente approche (MDD) seront comparés avec des résultats analytiques, quand elles sont disponibles, des résultats obtenus par le code de calcul ANSYS. Des comparaisons sur le plan qualitatif avec des résultats de la littérature obtenus numériquement sont présentées.

III.2. MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

ANSYS est un code éléments finis d'usage général dédié à la résolution numérique d'une large variété de problèmes physique en général et de mécanique en particulier. Ces problèmes portent notamment : analyse structurale en statique et en dynamique (linéaire et non linéaire), transfert de chaleur, dynamique des fluides, acoustique, électromagnétique.

Pour nos simulations Ansys, nous nous sommes intéressés à L'élément **SOLID PLANE 82**. Les éléments Solid PLANE 82 sont définis par 8 nœuds et permettent de fournir des résultats plus précis et peuvent tolérer des formes irrégulières, sans que la perte de beaucoup de précision.

De façon générale, une résolution par éléments finis par ANSYS comporte trois étapes :

1. Préparation des données ou Pré-processing: définir le problème; les étapes majeurs sont données : Définition des points clés (keypoints) /lignes/surfaces/volumes ; Définir le type d'élément fini, ses propriétés géométriques et les propriétés physiques des matériaux ; Maillage des lignes /surfaces/volume si cela est requis. Les données nécessaires dépendent évidemment de la de la dimension du problème (1D, 2D, axisymétrique, 3D).
2. Traitement ou Processing: assigner les charges, contraintes (conditions aux limites) et résolution; on spécifie notamment la nature des charges (localisées et/ou distribuées), contraintes ou conditions aux limites (translation et rotation) et, finalement, on résout le système d'équations.
3. Post-processing: analyse et visualisation des résultats; lors de cette étape, on peut examiner : La liste des déplacements nodaux ; Les forces et des moments au niveau des éléments; Tracé des Déformées ; Tracé des Iso contours des contraintes

III. 3. STRUCTURE DE PROGRAMME

Le programme est construit à l'aide du langage de programmation **FORTRAN90**. Le programme est constitué de quatre parties :

- Localisation des éléments et définitions.
- Calcul des discontinuités des déplacements sur les frontières ainsi que les contraintes et les déplacements aux frontières.
- Introduction des fissures.
- Calcul les contraintes et déplacements en des points intérieurs choisis.

Le premier module du programme comporte la lecture des principales données : les caractéristiques mécaniques, le chargement et la discrétisation. Il discrétise le corps à étudier et il affecte à chaque élément sa position, son orientation et ses conditions aux limites.

Le deuxième module est la partie principale. Il récupère les données à partir de la localisation et il calcule les coefficients d'influence en appelant à la subroutine **COEFF**. Il construit ensuite le système algébrique d'équations pour le résoudre grâce à subroutine **SOLVE** pour obtenir les composantes de discontinuité de déplacement de chaque élément. Ces résultats vont être chargés dans un fichier qui va être utilisé comme une base de données pour les autres parties. Finalement cette partie calcule le champ de contrainte et de déplacement pour chaque élément de frontière.

La troisième partie du programme traite les problèmes de la mécanique de la rupture.

En présence de fissure, il récupère les données à partir de la deuxième partie, ajoute les nouveaux éléments, et calcule les nouveaux coefficients d'influences en appelant la subroutine **COEFF**. La subroutine **SOLVE** est appelée encore pour la résolution et le facteur d'intensité de contrainte peut être calculé.

Dans le but de valider notre travail, les résultats obtenus avec la présente méthode (MDD) sont comparés avec des résultats obtenus par solutions analytique empiriques issus de la littérature scientifique et concernent principalement le calcul du FIC. Des calculs ont été lancés avec le code de calcul **ANSYS**. Une étude comparative est faite.

Les problèmes traités dans ce chapitre sont dans l'ordre :

- Interaction de la fissure proche de l'inclusion : inclusion située à une certaine distance de la fissure : a) Effet de rigidité b) Effet de distance.
- Deux fissures et une inclusion : a) Effet de rigidité b) Effet de distance.
- Fissure à l'intérieur de l'inclusion : a) Effet de rigidité b) Effet de distance.
- Une fissure avec une orientation arbitraire proche de l'inclusion et fissure centrée entre une lacune circulaire et une inclusion.

III.4. EXEMPLES, RESULTATS ET INTREPRETATIONS

III.4.1. INCLUSION DANS UNE PLAQUE SANS FISSURE

Le premier exemple concerne une plaque carrée sans fissure contenant une inclusion en son milieu. Ce test est préliminaire validation du code de calcul. La plaque est soumise à une traction uni-axiale $\sigma=100\text{Pa}$.

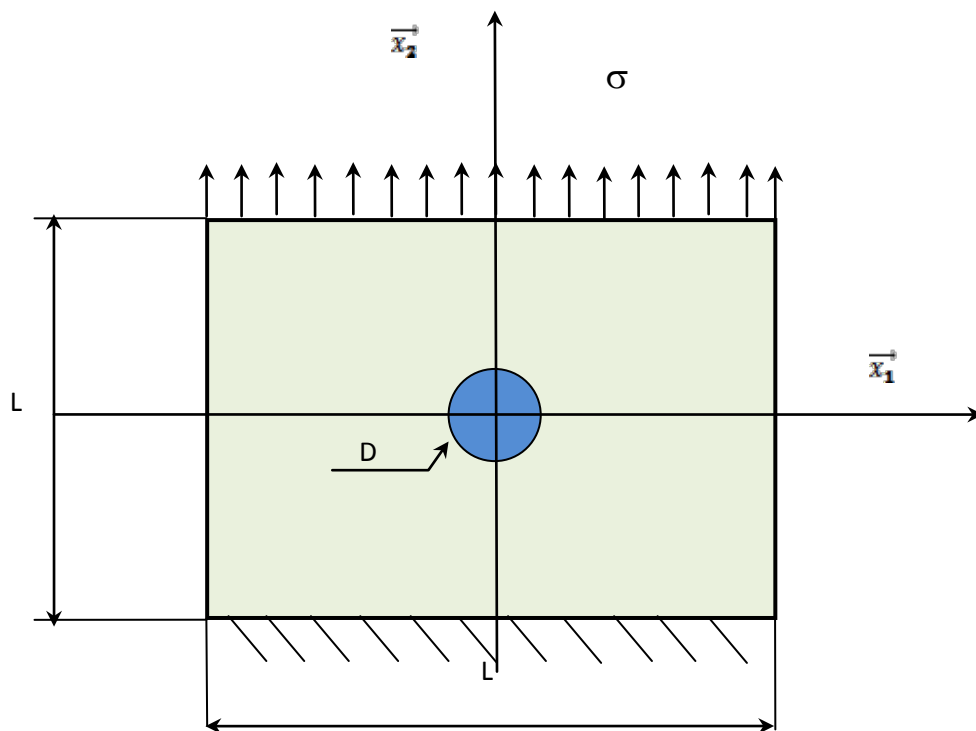


Fig.1 : Modèle géométrique d'une plaque sollicitée en traction.

L'inclusion est formée d'un matériau élastique dont le module de Young E_2 est différent de celui de la matrice. L'inclusion est modélisée par une forme cylindrique de diamètre D .

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont $E = 21000\text{MPa}$ et $\nu = 0.3$.

Pour le calcul numérique, nous prenons $L=5D$, où D est le diamètre de l'inclusion.

Le côté L de la plaque est égal à $L=200\text{mm}$. Chaque côté de la plaque est discrétisé par un nombre d'éléments $N_{largeur} = 40$ éléments. L'inclusion est discrétisée par :

$N_{inclusion} = 150$ éléments.

La variation du champ de contraintes est obtenue pour les trois rapports (pour : $E_2/E_1 = 5$, $E_2/E_1 = 1$ et $E_2/E_1 = 0.2$).

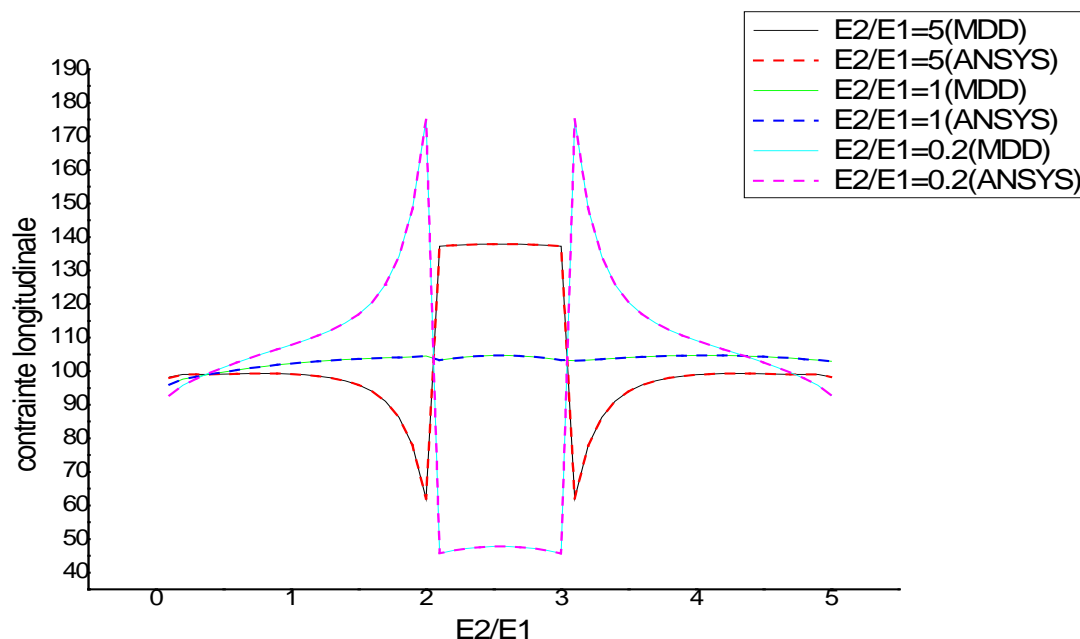


Fig.2 : Variation du champ de contraintes normales σ_{yy} en présence de l'inclusion sur $y=0$ (pour $E_2/E_1=5, E_2/E_1=1, E_2/E_1=0.2$).

La comparaison des résultats obtenus par notre code de calcul avec les résultats obtenus par le code de calcul ANSYS 12 montre une très bonne corrélation pour les trois rapports de module de Young. Ceci nous permet d'avoir « confiance » dans les calculs concernant les problèmes d'inclusion en présence de fissures.

Les résultats représentés sur la figure (2) sont obtenus pour trois rapports E_2/E_1 .

Le programme met en évidence la discontinuité des contraintes au voisinage de l'interface sauf pour le rapport $E_2/E_1=1$ équivalent dans ce cas, à un milieu continu.

Nous remarquons que pour un rapport $E_2/E_1=0,2$ la contrainte maximale est au niveau de l'interface matrice inclusion. Une inclusion moins dure que la matrice permet l'obtention d'une concentration de contraintes de degré moindre. Un effet contraire est observé pour un rapport égal à cinq ($E_2/E_1=5$). Dans ce cas les contraintes minimales sont au niveau de l'interface matrice-inclusion.

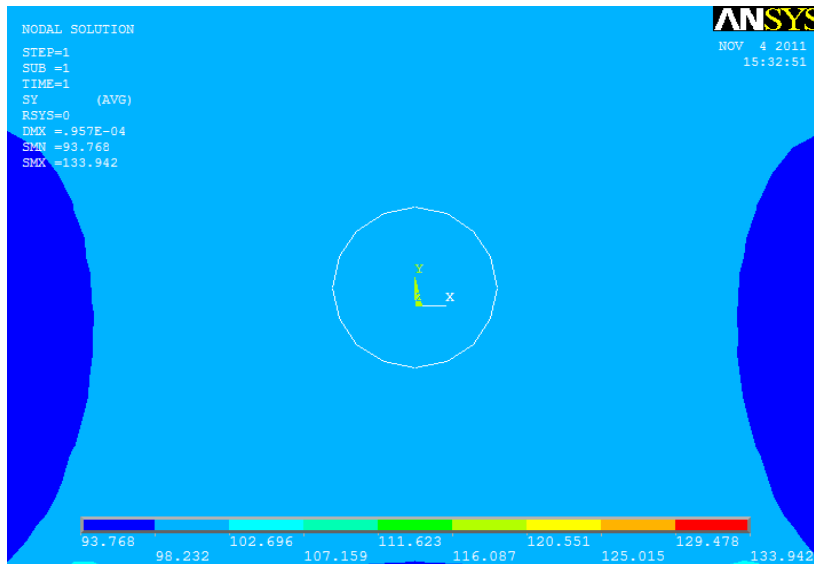


Fig.3 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de l'inclusion $E_2/E_1 = 1$.

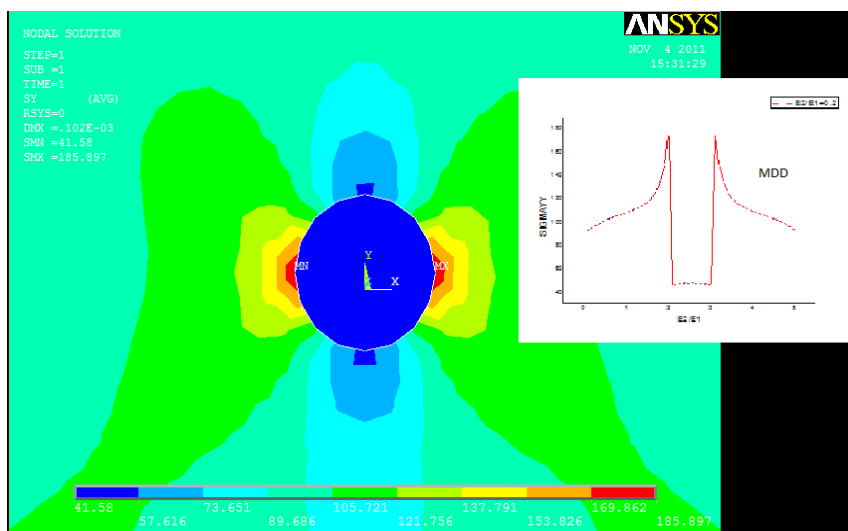


Fig.4 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de l'inclusion $E_2/E_1 = 0.2$.

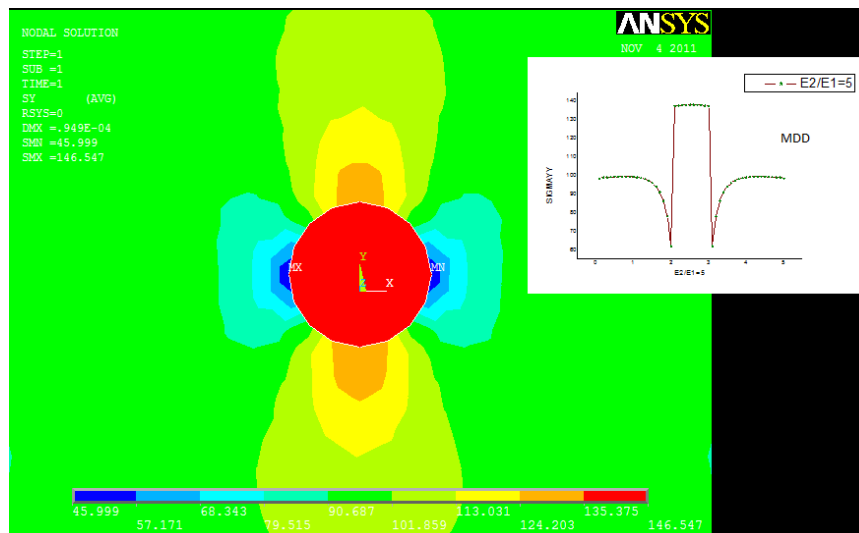


Fig.5: Variation du champ de contraintes normales au niveau de l'inclusion $E_2/E_1 = 5$.

III.4.2. INTERACTION D'UNE FISSURE ET D'UNE INCLUSION

Dans le cas de petites inclusions, des solutions analytiques sont disponibles donnant les FIC. Pour de grosses inclusions, les solutions sont plus compliquées. Les travaux dans ce cas sont orientés vers des calculs numériques.

4.2.1. EFFET DE RIGIDITE POUR PETITE INCLUSION

Pour mener à bien cette étude on considère que la plaque carrée d'une longueur de 0.2m de coté, contenant une fissure de 40mm proche d'une inclusion de rayon $R = 2\text{mm}$. La distance r_0 entre l'inclusion et l'extrémité de la fissure est égale à $10R$. Dans ce cas de figure, des solutions analytiques sont disponibles.

La discrétisation est la suivante : 40 éléments sur les côtés, 10 éléments sont utilisés sur la fissure et l'inclusion est discrétisée avec 100 éléments.

La solution analytique en mode I avec un chargement transversale, a été donnée par (III.9) :

$$\Delta K_{tip} = CK_0 \int_A r_0^{-2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{3}{4(1-2\nu)} \sin^2 \theta \cos \theta \right) dA \quad (\text{III.1})$$

Pour $\theta = 0$, ΔK_{tip} peut être exprimé sous forme ([Zhon-2002], [Qian-2002]) :

$$\Delta K_{tip} = CK_0 \int_A r_0^{-2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} dA \quad (\text{III.2})$$

Pour une seule petite inclusion avec une section circulaire de rayon R ($R \ll r_0$), le FIC est donné par ([Zhon-2002], [Qian-2002]) :

$$\Delta K_{tip} = CK_{0I} \frac{\pi R^2}{2r_0^2} \quad (\text{III.3})$$

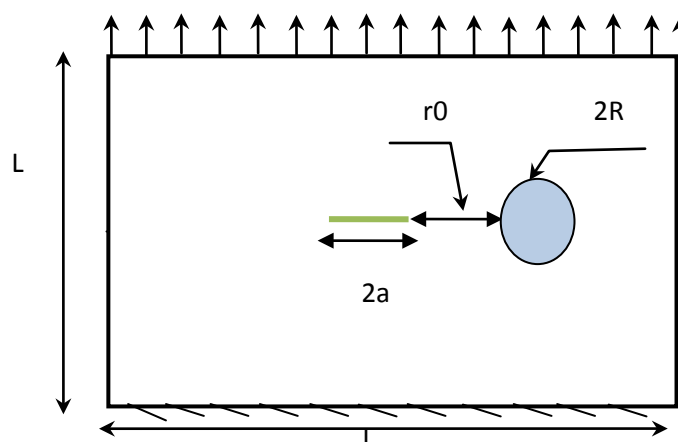


Fig.6: une inclusion située à une certaine distance de la fissure.

Avec : $\Delta K_{tip} = K_{tip} - K_{I0}$ et $C = \frac{(1-2\nu)}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{E_m}{E_i} - 1 \right)$.

La solution analytique pour K_{I0} , donnée par [Pil-1994] :

$$K_{I0} = f\left(\frac{a}{L}\right) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (\text{III.4})$$

Avec :

$$f\left(\frac{a}{L}\right) = \left(1 - 0.1\left(\frac{a}{L}\right)^2 + 0.96\left(\frac{a}{L}\right)^4\right) \sqrt{1 / \cos\left(\pi\left(\frac{a}{L}\right)\right)}$$

(III.5)

L'équation (III .3) peut être écrite :

$$K_{tip} = \left(C \frac{\pi R^2}{2r_0^2} + 1\right) K_{0I} \quad (\text{III.6})$$

D'après (III.4), on trouve : $K_{I0} = 25,680 \text{ Mpa}$

Les résultats analytiques et numériques peuvent être représentés dans le tableau suivant:

Tableau 01 : FIC en fonction du rapport des modules de Young pour petite inclusion

	E_{mat}/E_{incl}	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	5	10
$R/r_0=0.1$	$K_{tip}(ANA)$	25.64	25.65	25.65	25.66	25,68	25.78	25.86	26.06

	K_{tip} (MDD)	23.70	23.79	23.87	23.91	23.98	24.11	24.26	24.70
--	-----------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Le FIC augmente avec l'augmentation du rapport des modules de Young. Etant donné la faible dimension de l'inclusion ayant permis la formulation de la solution analytique, la variation du FIC n'est pas très sensible. Mais les résultats obtenus restent satisfaisants.

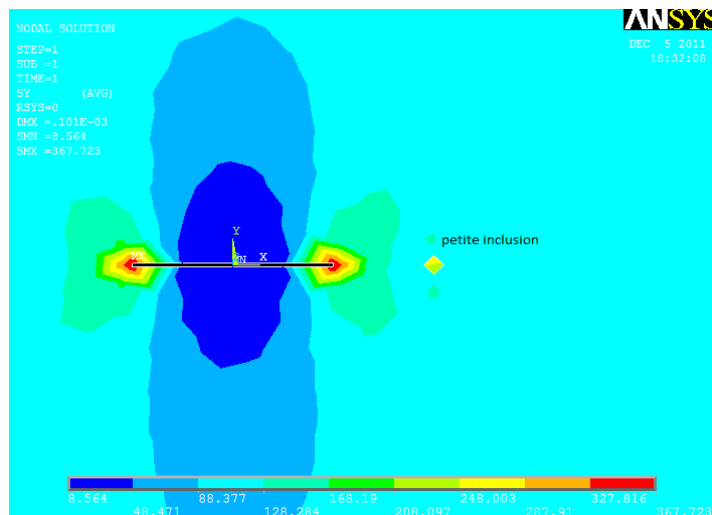


Fig.7: Aucun effet n'est prépondérant pour les petites inclusions.

4.2.2. EFFET DE RIGIDITE POUR GROSSE INCLUSION

Dans ce cas, nous supposons que la fissure est située dans la matrice et se propage vers l'inclusion distante de $d = 10\text{mm}$. Dans le cas d'inclusion considéré « grande » $D = 40\text{mm}$, le modèle précédent n'est pas utilisé. Nous nous contentons d'un calcul numérique.

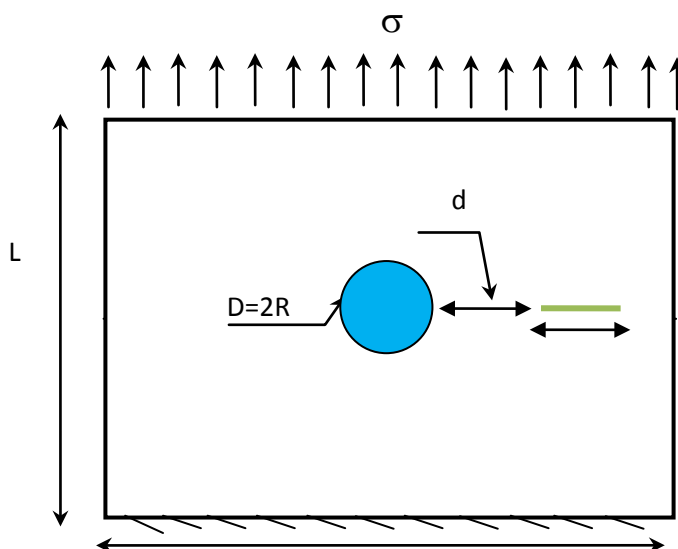


Fig.8 : Représentation d'une plaque sollicitée en traction en présence d'une fissure proche d'une inclusion.

Nous considérons le même modèle géométrique (figure 8), avec le même chargement dont les propriétés du matériau constituant la plaque sont : le module de Young E_1 et le coefficient de Poisson ν_1 (Figure 8). Nous nous intéressons à la variation du FIC en fonction des différents rapports des modules de Young inclusion-matrice. Les résultats obtenus correspondent aux différentes longueurs de fissure respectivement $a = 40\text{mm}$ et 60mm . Ces résultats sont représentés sur la figure (9).

Les nombres des éléments ont été choisis comme suit : $N_{largeur} = 40$ éléments,

$N_{fissure} = 10$ éléments et $N_{inclusion} = 100$ éléments.

10 éléments et $N_{inclusion} = 100$ éléments.

Tableau 02 : FIC en fonction du rapport des modules de Young pour grosse inclusion.

	E_2/E_1	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	5	10
a = 40mm	$K_1(\text{ANS})$	45.12	42.16	40.386	37.14	33.96	32.45	30.24	29.37
	$K_1(\text{MDD})$	44.71	41.99	40.07	37.51	34.30	31.85	29.87	29.08
	E_2/E_1	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	5	10
a = 60mm	$K_1(\text{ANS})$	64.12	59.97	58.07	54.57	50.13	47.27	43.91	42.00
	$K_1(\text{MDD})$	63.86	60.04	57.37	53.86	49.49	46.15	43.43	42.33

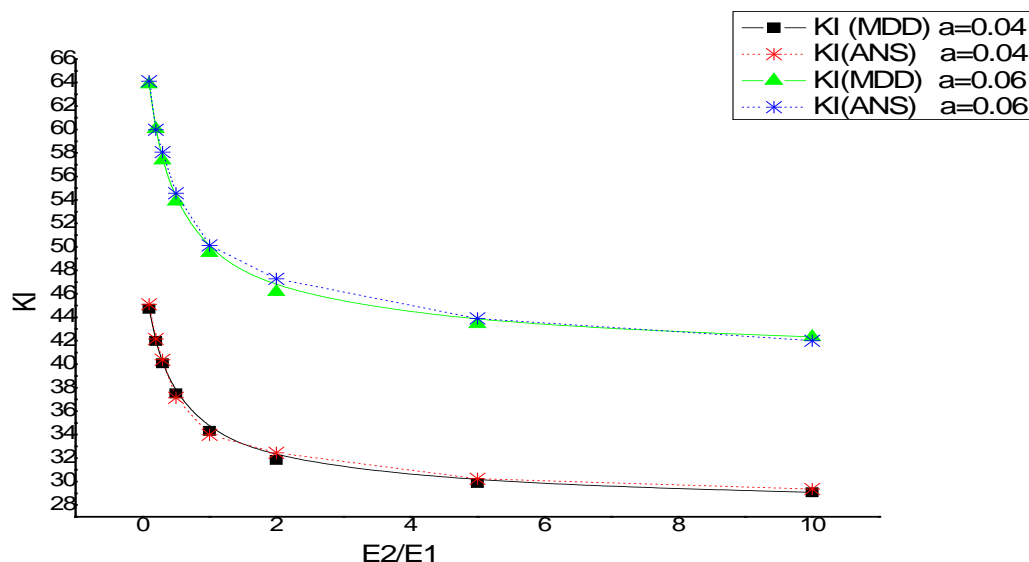
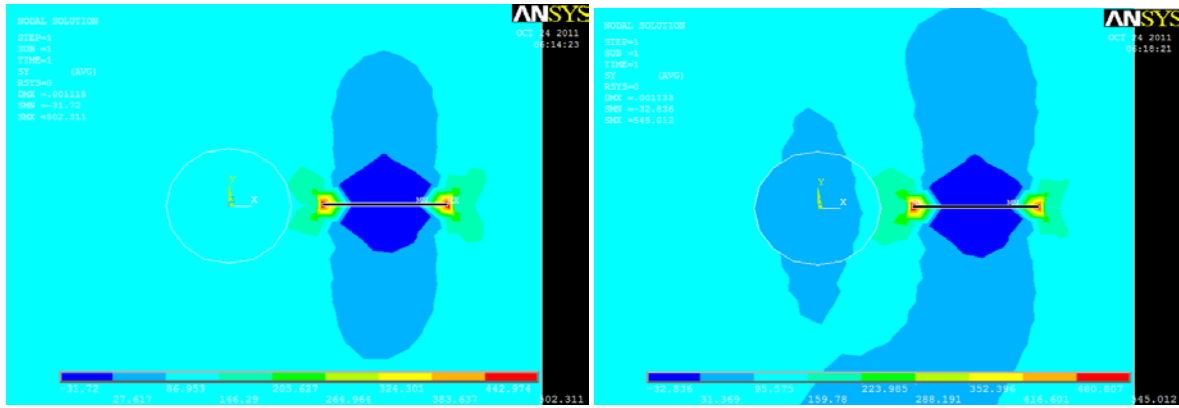
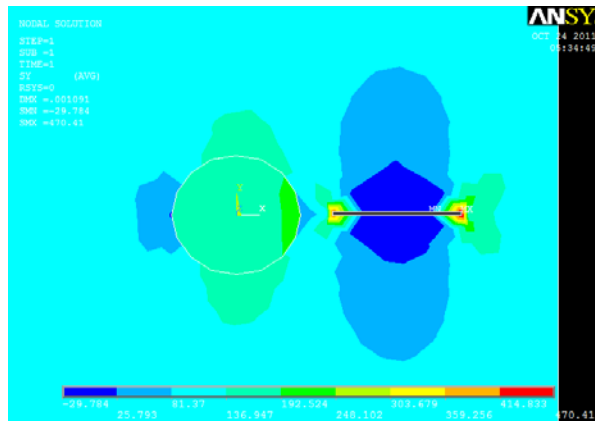


Fig.9 : Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.



a) $E_2/E_1=0.5$

b) $E_2/E_1=1$



c) $E_2/E_1=10$

Fig.10 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure.

Nous remarquons que le du FIC diminue avec le rapport des valeurs E_2/E_1 . Ce qui montre que la configuration critique est obtenue pour une fissure proche d’une inclusion plus souple que la matrice ou que l’inclusion rigide tend à freiner la propagation.

4.2.2. EFFET DE LA DISTANCE ENTRE LA FISSURE ET L’INCLUSION

Nous nous intéressons à la variation du FIC en fonction de la distance séparant l’inclusion de la pointe de la fissure pour trois valeurs du rapport E_2/E_1 . La fissure est fixé égale à $a = 3\text{mm}$.

Tableau 03 : FIC en fonction de la distance entre fissure et l’inclusion.

$E_2/E_1=0.2$	$d(\text{mm})$	10	11	12	15	17	20	25	30
	$KI(MDD)$	35.48	34.90	34.43	33.37	32.87	32.32	31.77	31.55
	$KI(ANS)$	35.71	35.02	33.98	33.27	32.77	32.22	31.94	31.42
$E_2/E_1=1$	d	10	11	12	15	17	20	25	30
	$KI(MDD)$	28.71	28.73	28.76	28.83	28.892	28.99	29.20	29.51
	$KI(ANS)$	28.87	28.75	28.93	29.33	29.13	29.12	29.15	29.47
$E_2/E_1=5$	d	10	11	12	15	17	20	25	30

	<i>KI (MDD)</i>	24.82	25.18	25.49	26.24	26.63	27.12	27.77	28.39
	<i>KI (ANS)</i>	25.23	25.73	26.01	26.42	26.87	27.36	28.07	28.58

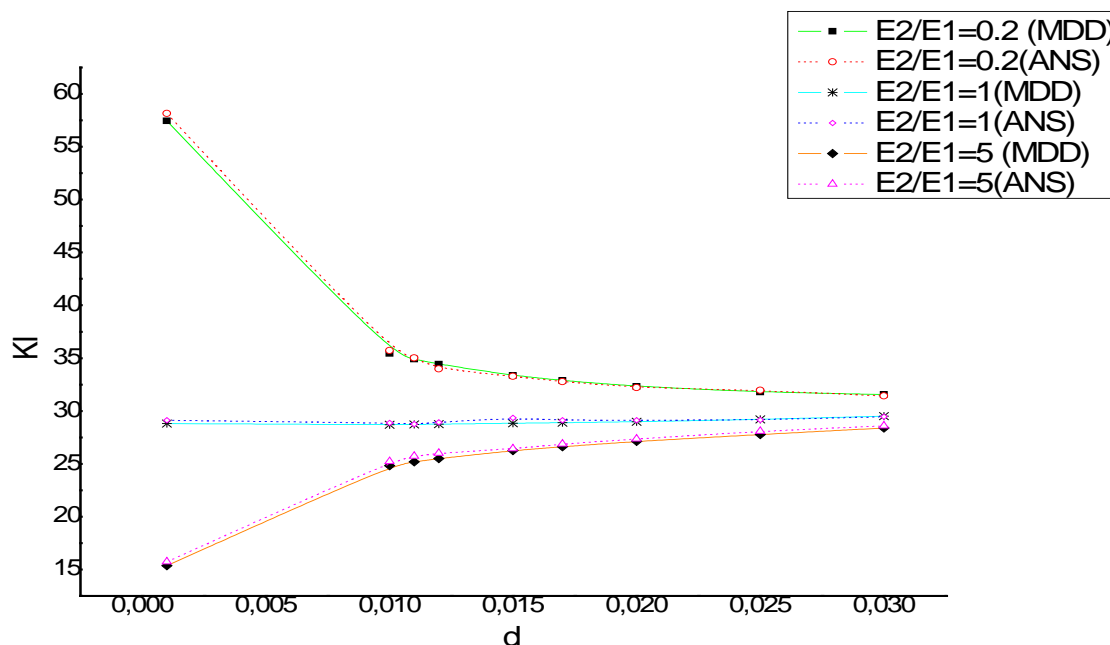
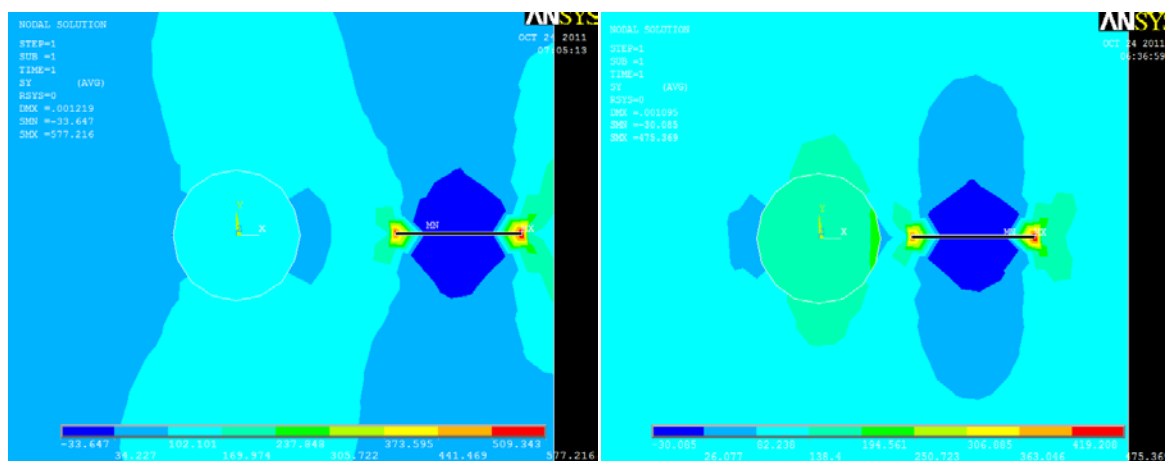


Fig.11 : Variation du FIC en fonction de la distance de la fissure par rapport à l'inclusion.



a) $d=30mm$

b) $d=10mm$

Fig. 12 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure qui se propage vers l'inclusion pour $E_2/E_1=5$.

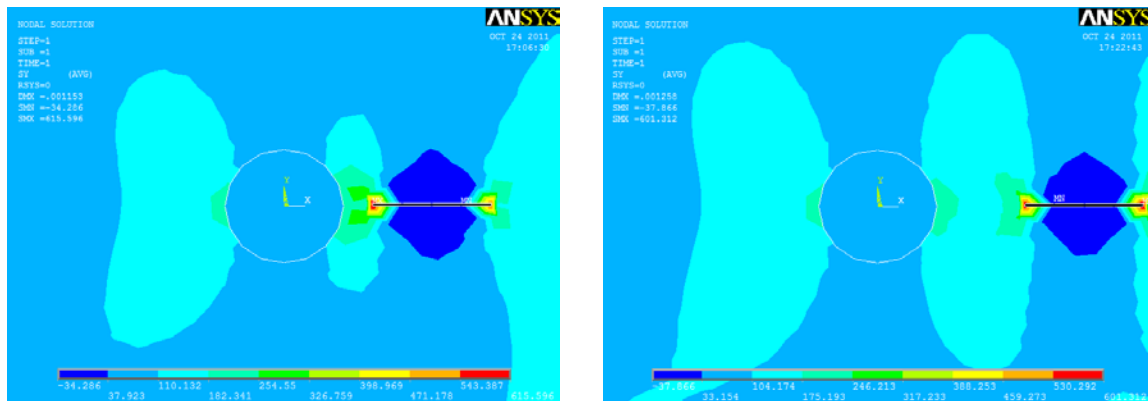
La figure (11) montre la variation du FIC en fonction de la distance d séparant l'inclusion de la tête de fissure pour trois valeurs du rapport E_2/E_1 .

Le FIC diminue en fonction de la distance d pour le rapport des module de Young $E_2/E_1=0.2$ alors qu'il augmente pour le rapport $E_2/E_1=5$. Mais à une distance d fixée et à longueur de fissure égale, le FIC est sensiblement supérieur pour le rapport $E_2/E_1 =0.2$. Le cas critique dans ce cas est obtenu pour une inclusion plus rigide que la matrice. Le potentiel de propagation est plus important lorsque l'inclusion est plus souple que la matrice.

Nous retrouvons les conclusions de l'exemple précédent.

Au loin, le FIC se stabilise vers la valeur obtenue pour un rapport $E_2/E_1=1$. Nous retrouvons le cas d'un matériau quasi homogène.

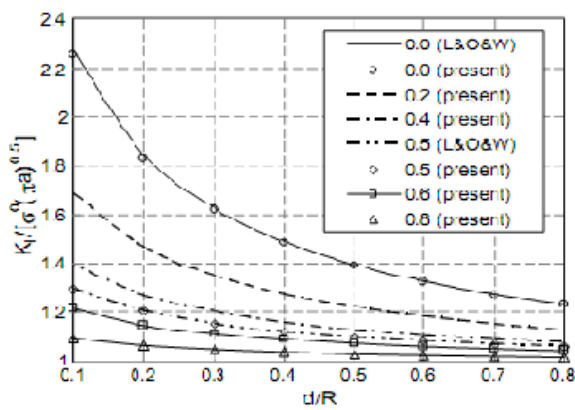
Tous ces résultats sont retrouvés par les calculs lancés sur ANSYS 12 .



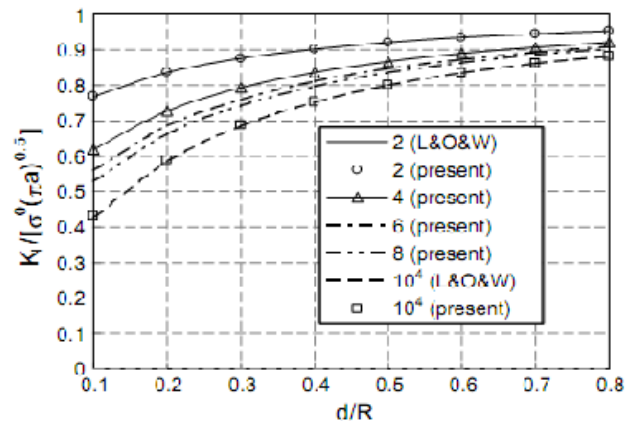
a) $d=10\text{ mm}$

b) $d=30\text{mm}$

Fig. 13 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure qui se propage vers l'inclusion pour $E_2/E_1=0.2$.



a) $E_2/E_1 < 1$



b) $E_2/E_1 > 1$

Fig.14 : Variation du FIC en fonction de l'avance de la fissure vers l'inclusion.

(C.Y. Dong, K.Y. Lee: A new integral equation formulation of two-dimensional inclusion–crack problems)

Nous pouvons noter un bon accord avec les travaux de Dong et al. pour les rapports de module de Young comparables en se référant aux figures 14 a et 14 b.

III.4.3. INCLUSION CENTREE ENTRE DEUX FISSURES

Dans cet exemple, nous considérons une inclusion centrée entre deux fissures. Nous considérons le même modèle géométrique avec le même chargement et la même discrétisation. Les propriétés du matériau constituant la plaque sont le module de Young E_1 et le coefficient de Poisson ν_1 .

La fissure a pour longueur $a = 40\text{mm}$ et l'inclusion $D = 40\text{mm}$ (Figure 15).

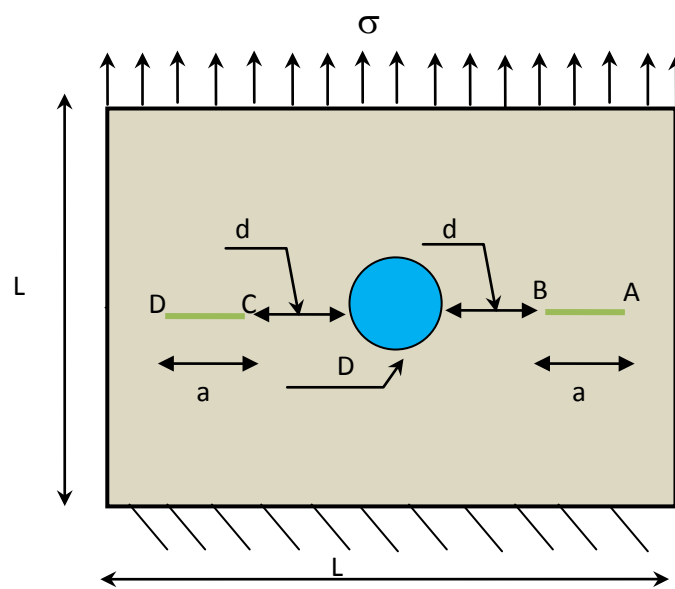


Fig. 15 : Représentation d'une plaque sollicitée en traction en présence de deux fissures émanant d'une inclusion.

4.3.1. EFFET DE DISTANCE

Nous nous intéressons à la variation du FIC en fonction en fonction des différents rapports d/R . Deux valeurs du rapport E_2/E_1 sont considérées. Les résultats obtenus avec la présente approche (MDD) sont comparés avec des résultats obtenus par le code de calcul ANSYS et des résultats numériques de la littérature. Nous nous intéressons à la variation du FIC en fonction des différents rapports d/R .

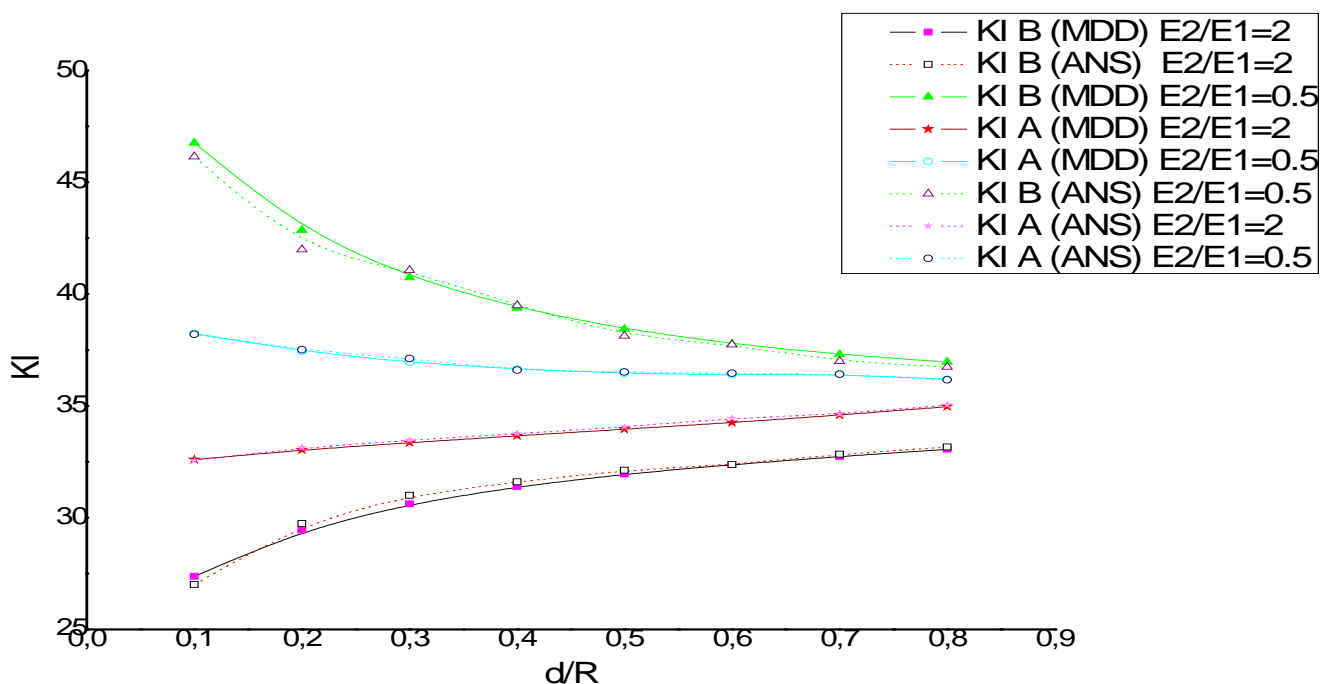


Fig.16 : Variation du FIC en fonction des distances d/R .

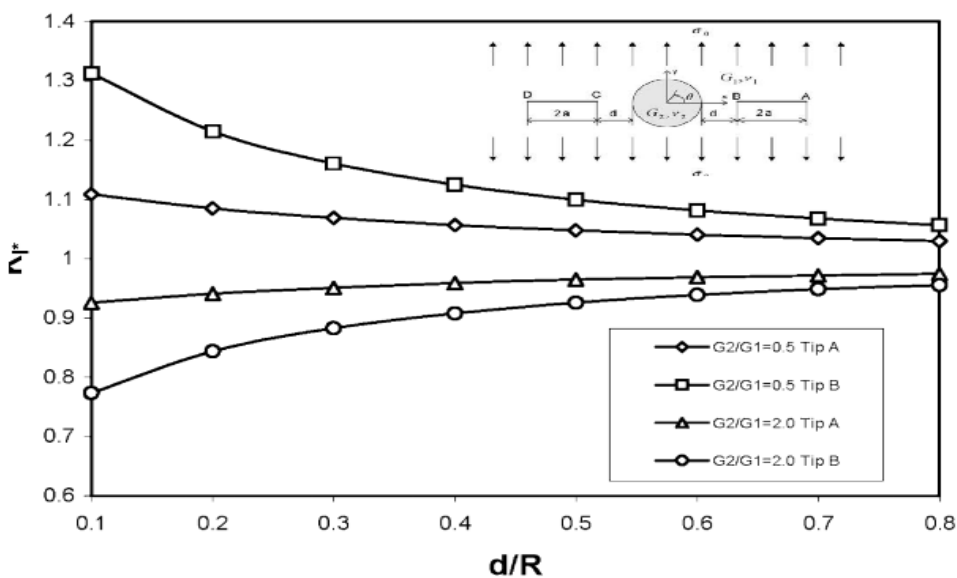


Fig.17 : Variation du FIC en fonction des distances d/R [DON-2003]

La comparaison de ces résultats obtenus par notre code de calcul avec les résultats obtenus par le code de calcul ANSYS 12 montre une bonne corrélation pour les quatre courbes.

La comparaison effectuée (figure 16 et 17) permet de montrer un bon accord en terme qualitatif par rapport à nos résultats.

- Le FIC est maximum aux pointes de fissure B et C pour un rapport $E_2/E_1=0.5$.

- Pour un rapport $E_2/E_1 = 0,5$, le FIC diminue avec l'augmentation du rapport.

Les observations concernant l'influence de la distance entre la fissure et l'inclusion sont équivalentes à celle du test précédent.

4.3.2. EFFET DE RIGIDITE

Nous nous intéressons au calcul du FIC en fonction des différents rapports des modules de Young matrice-inclusion.

Tableau 04 : FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

E_2/E_1	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	3	5	10
$K_{IC}(MDD)$	47.47	44.15	41.85	38.86	35.21	32.51	31.39	30.39	29.57
$K_{IC}(ANS)$	46.95	43.99	40.96	39.01	35.95	32.68	31.57	30.55	29.13
$K_{ID}(MDD)$	40.41	38.90	37.88	36.56	35.00	33.86	33.40	33.00	32.66
$K_{IC}(ANS)$	41.23	39.15	37.48	36.23	34.32	32.42	32.10	31.91	31.87

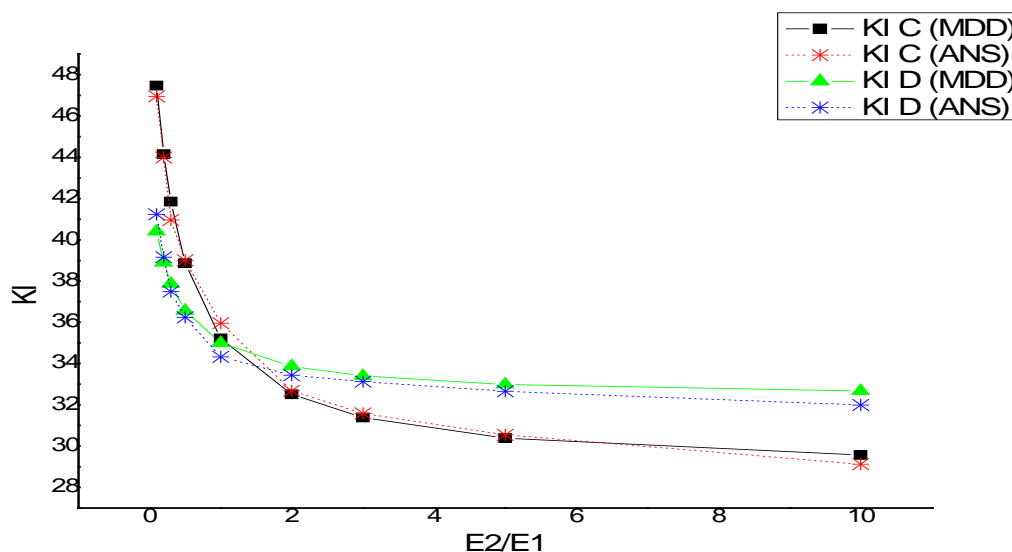


Fig.18 : Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

La comparaison de ces résultats obtenus par notre code de calcul avec les résultats obtenus par le code de calcul ANSYS 12 montre un bon accord pour les différents rapports comme le montre la figure (18). Les deux courbes montrent dans ce cas que le FIC diminue avec le rapport des modules de Young inclusion/matrice. Le point $E_2/E_1=1$ constitue un point d'inversion du point critique. La pointe de la fissure la plus critique devient celle la plus éloignée de l'inclusion.

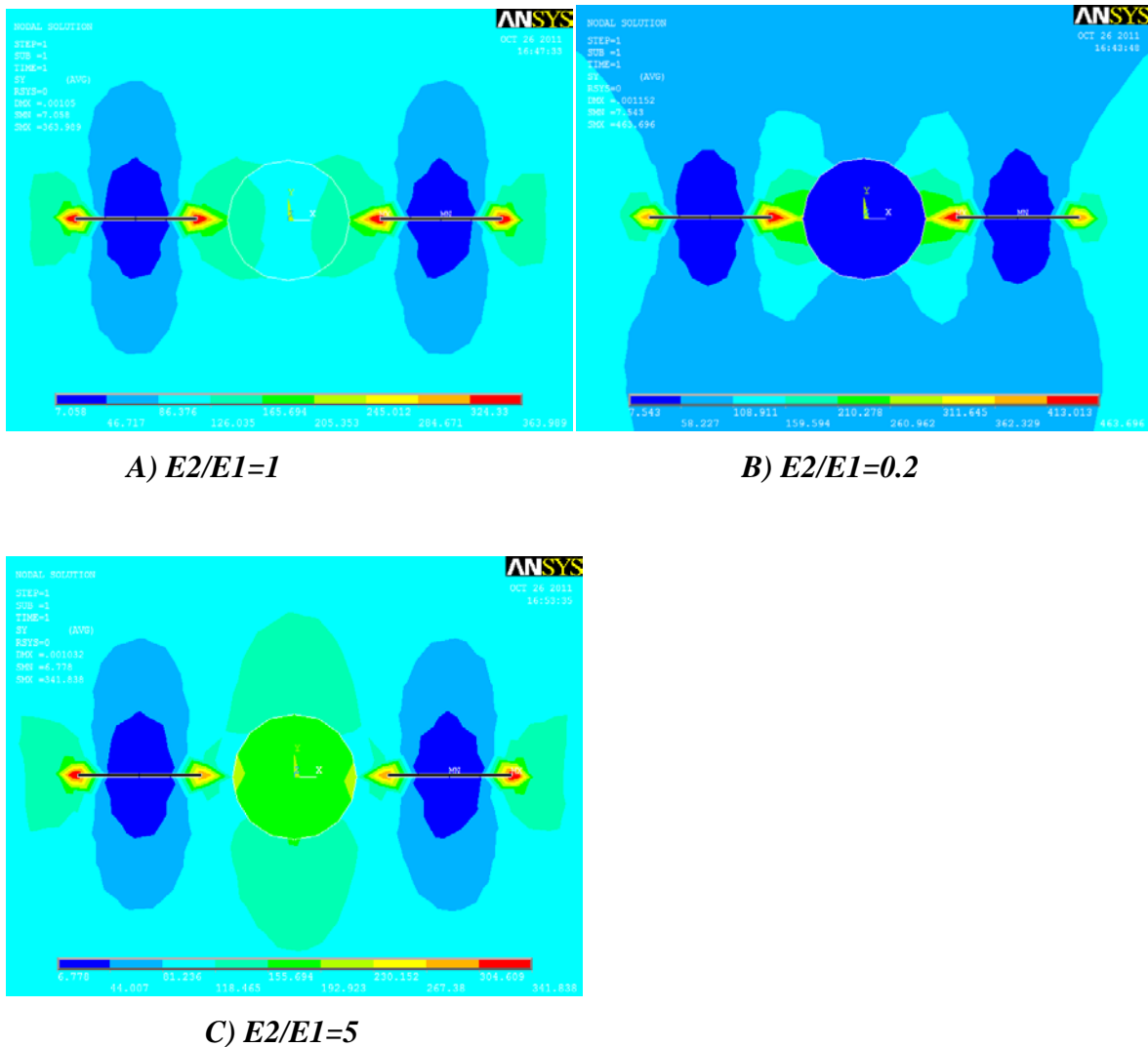


Fig. 19 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure.

III.4.4. INCLUSION FISSURÉE

Nous considérons dans cet exemple le cas où la fissure se trouve dans l'inclusion (figure 20). Nous calculons le FIC en fonction des différents rapports des modules de Young matrice-inclusion (figure 21).

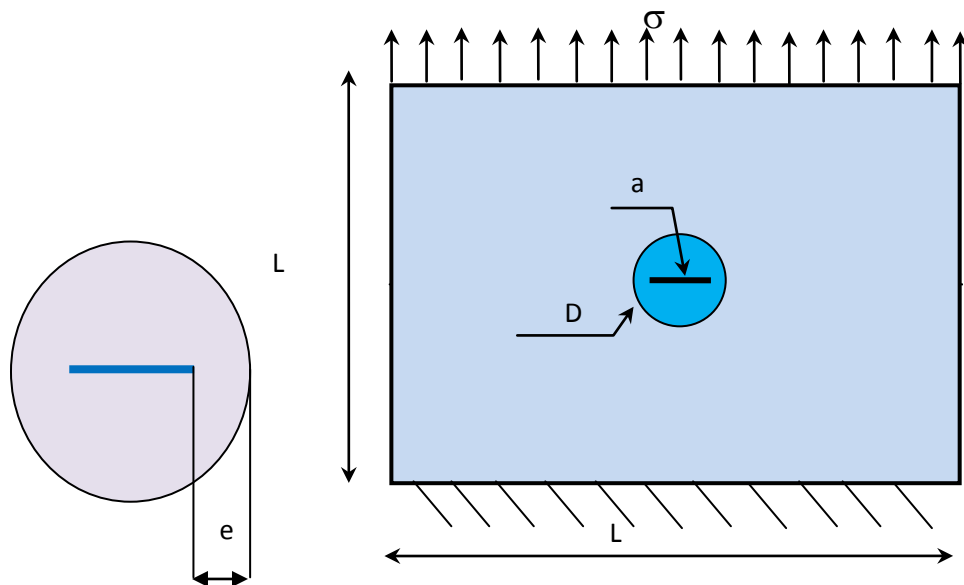


Fig. 20 : Représentation d'une plaque sollicitée en traction en présence d'une fissure située au fond de l'inclusion.

Les résultats obtenus correspondent à la longueur de fissure $a=2\text{mm}$ en gardant les discrétisations des exemples précédents. Ces résultats sont représentés sur la figure (21).

Tableau 05 : FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

a =2mm	E_2/E_1	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	5	10
	KI(ANS)		43.01	38.52	34.91	29.44	21.250	13.74	6.73
KI(MDD)		43.07	39.12	35.46	28.99	22.16	13.72	7.262	4.61

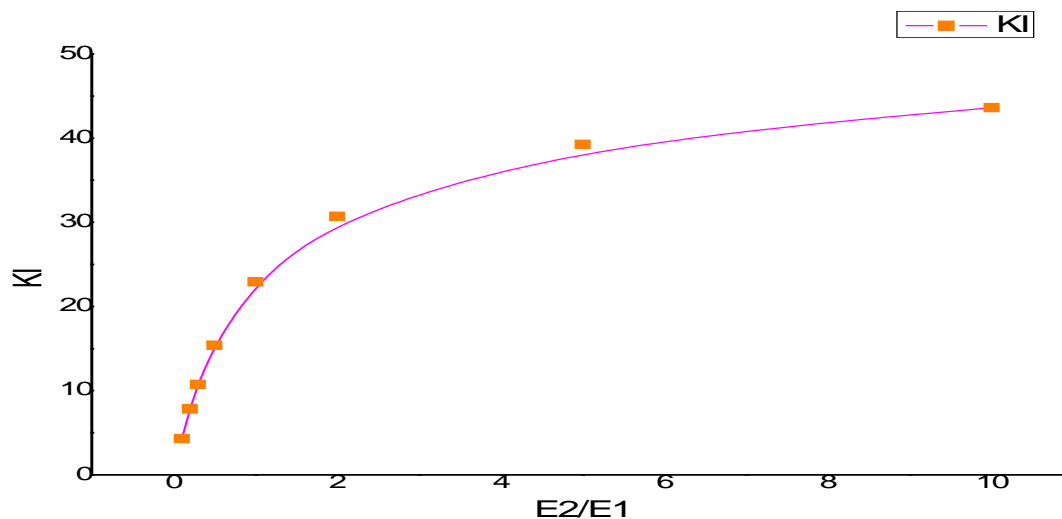


Fig.21 : Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

Nous remarquons que le FIC augmente avec le rapport des modules de Young E_2/E_1 . Une augmentation de ce rapport conduit à un FIC plus important et par conséquent un taux de restitution d'énergie G plus important. Dans ce cas, le cas le plus critique correspond à une inclusion plus rigide. Ce qui conforte les résultats obtenus avec une fissure dans la matrice.

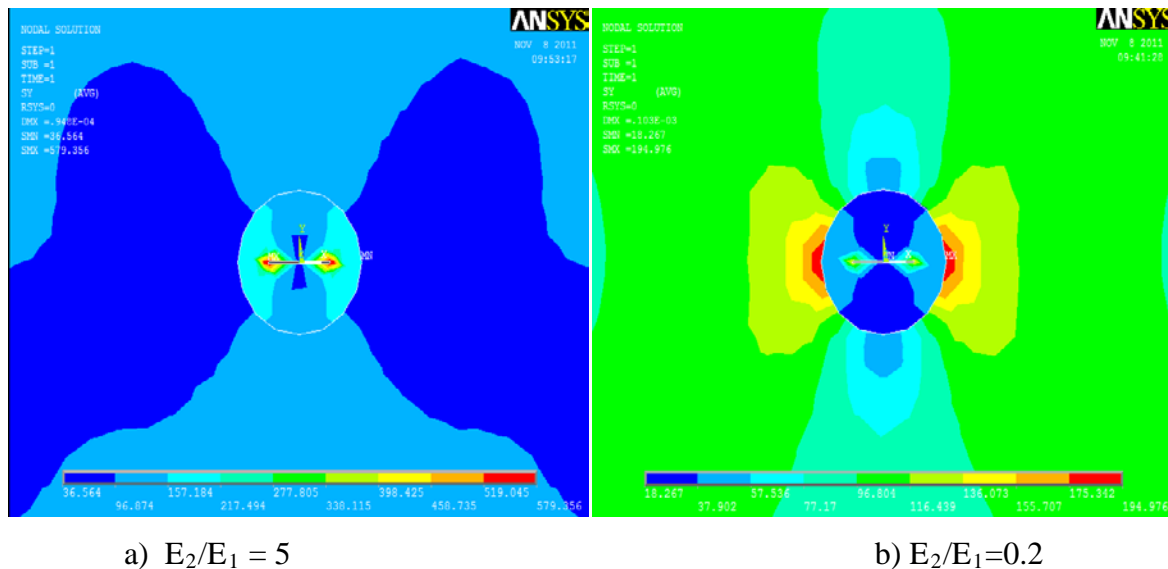


Fig. 22 : Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure qui se propage vers la matrice.

Sur la figure (23), nous présentons la variation du FIC en fonction la distance (e) séparant la pointe de la fissure et l'interface pour trois valeurs du rapport E_2/E_1 .

Tableau 06 : FIC en fonction de l'avance de la fissure vers la matrice.

a=0.002	e	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$E_2/E_1=5$	K_I	37.82	38.29	38.95	41.16	43.01	45.81	50.71	61.20
$E_2/E_1=1$	K_1	22.30	22.31	22.32	22.36	22.36	22.42	22.47	22.50
$E_2/E_1=.2$	K_1	7.71	7.67	7.58	7.35	7.35	7.17	6.58	6.04

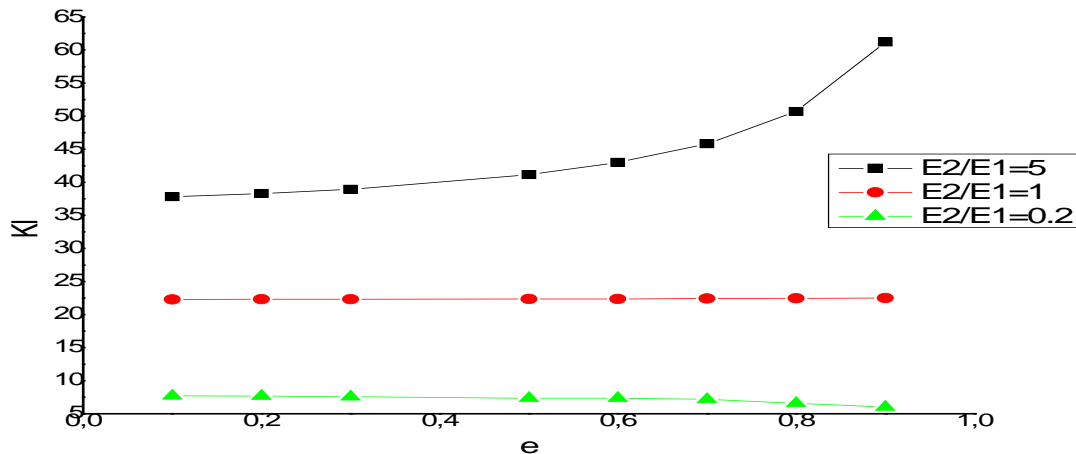


Fig.23 : Variation du FIC en fonction de l'avance de la fissure vers la matrice.

Pour un rapport $E_2/E_1 = 0,2$, le FIC diminue légèrement avec l'augmentation de la distance e . Donc, le potentiel de propagation est moindre pour une inclusion plus souple que la matrice. Si la matrice et l'inclusion présentent les mêmes caractéristiques mécaniques ($E_2/E_1 = 1$), on peut considérer qu'il s'agit du même matériau et c'est l'effet de la fissure qui apparaît. Contrairement à la fissure dans la matrice, pour le rapport $E_2/E_1=5$, la configuration est la plus critique lorsque la fissure est dans l'inclusion pour une inclusion plus dure.

III.4.5. FISSURE AVEC UNE ORIENTATION ARBITRAIRE PROCHE DE L'INCLUSION

La figure (24) montre une plaque contenant une inclusion circulaire et une fissure de longueur ($a = 40\text{mm}$); soumise à traction d'intensité $\sigma = 100 \text{ Mpa}$. Nous faisons varier l'angle θ entre 0° et 90° . La distance $d = 30\text{mm}$, La discrétisation est la même que l'exemple précédent. Nous calculons la variation des deux FIC (KI et KII) en fonction de l'orientation est tracée et représentée sur la figure (24).

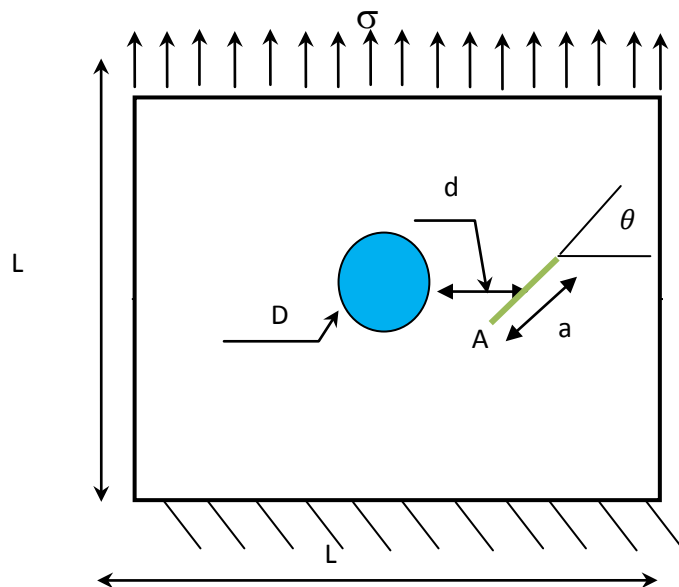


Fig.24 : une fissure avec une orientation arbitraire proche de l'inclusion.

Tableau 07: Variation du FIC en fonction de l'inclinaison de la fissure pour $E_2/E_1=2$.

θ	0	20	30	40	45	50	80	90
KI_A (ANSYS)	30.15	27.20	23.38	19.05	15.82	13.21	6.14	0
KI_A	29.737	26.40	22.90	18.65	15.58	12.05	5.32	0
θ	0	20	30	40	45	50	80	90
KII_A (ANSYS)	0	10.04	13.83	15.64	16.01	16.22	27.93	38.43
KII_A	0.51	9.79	13.45	15.094	15.54	15.914	28.454	37.22

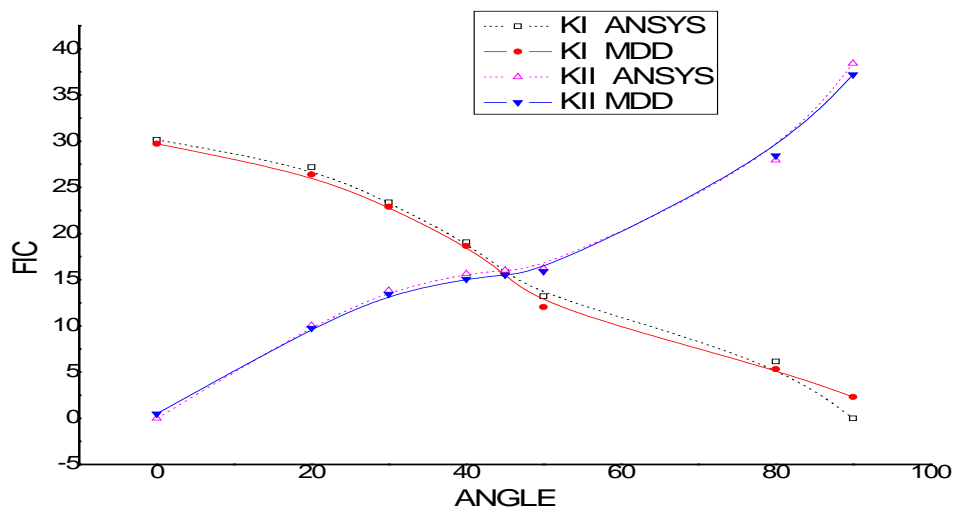


Fig.25 : Variation du FIC en fonction de l'inclinaison de la fissure pour $E_2/E_1=2$.

Nous obtenons une bonne coïncidence des résultats obtenus par ANSYS 12 et les résultats obtenus par la méthode de discontinuité de déplacement.

La figure (25) montre la variation du FIC en fonction de l'orientation de la fissure pour une distance d fixée entre le centre de la fissure et le point du cercle sur l'axe des abscisses et pour un rapport des modules de Young $E_2/E_1=2$. Nous remarquons que K_I diminue vers l'inclinaison 90° ce qui correspond à la position la plus stable. Cependant le K_{II} augmente. Mais en termes d'équivalence en G en utilisant les relations en fonction des K_I , globalement les positions les plus critiques sont obtenues pour $\theta=0$ et 90° .

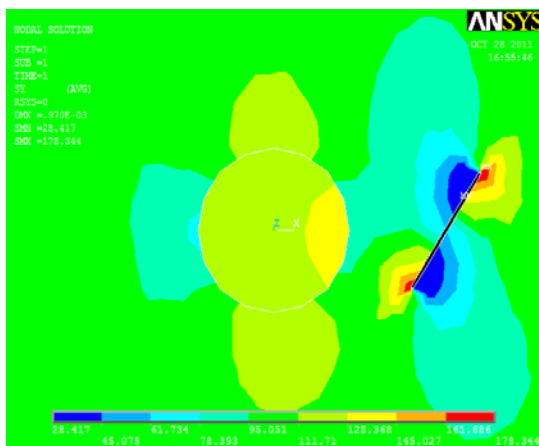
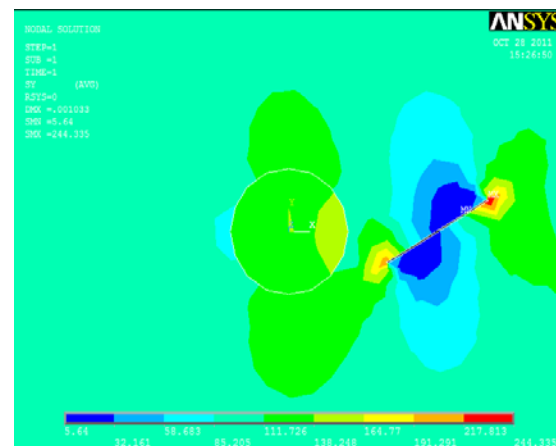
a) $\theta = 45^\circ$ b) $\theta = 30^\circ$

Fig.26 : Variation du champ de contraintes en fonction de l'inclinaison de la fissure pour $E_2/E_1=2$.

III.4.6.FISSURE CENTREE ENTRE UNE ENTAILLE CIRCULAIRE ET UNE INCLUSION

Dans cet exemple, nous considérons une plaque carrée fissurée de longueur $L = 0.2m$. Elle présente une lacune circulaire centrée dans la moitié gauche de la plaque de rayon $R=0.02m$ et une inclusion de même rayon sur la moitié droite de la plaque. Nous considérons le même chargement que l'exemple précédent. Le module de Young E_1 est égal à $21000MPa$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

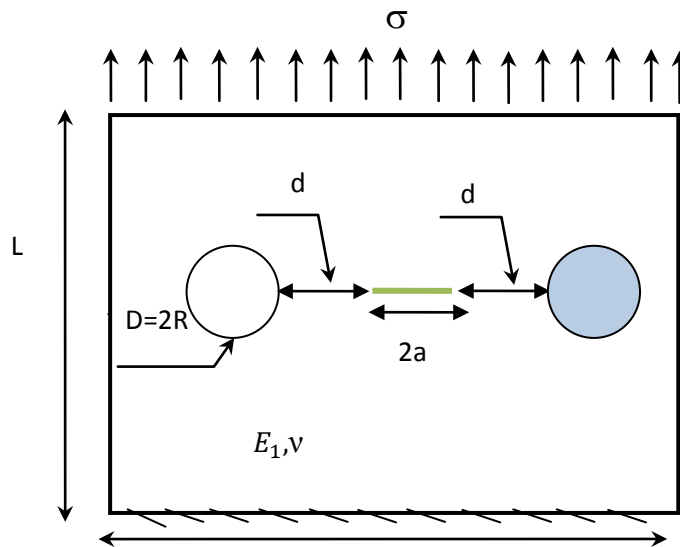


Fig.27 : une fissure centrée entre une entaille -inclusion.

Nous calculons la variation du FIC en fonction des différents rapports des modules de Young inclusion-matrice. Les résultats obtenus correspondent à une longueur fissure $a = 20\text{mm}$. Les courbes (28) la variation du FIC en fonction des rapports E_2/E_1 .

Tableau 08: FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

E_2/E_1	0.1	0.2	0.3	0.5	1	2	3	5	10
$K_{inc}(MDD)$	38.62	36.26	34.56	32.28	29.39	27.16	26.21	25.35	24.63
$K_{inc}(ANS)$	37.31	35.94	34.05	30.97	29.18	25.96	25.14	24.58	23.93
$K_{Itaille}(MDI)$	39.95	38.47	37.42	36.01	34.24	33.86	32.31	31.79	31.36
$K_{Itaille}(ANS)$	38.90	37.98	36.81	35.46	33.91	32.10	31.54	30.97	30.76

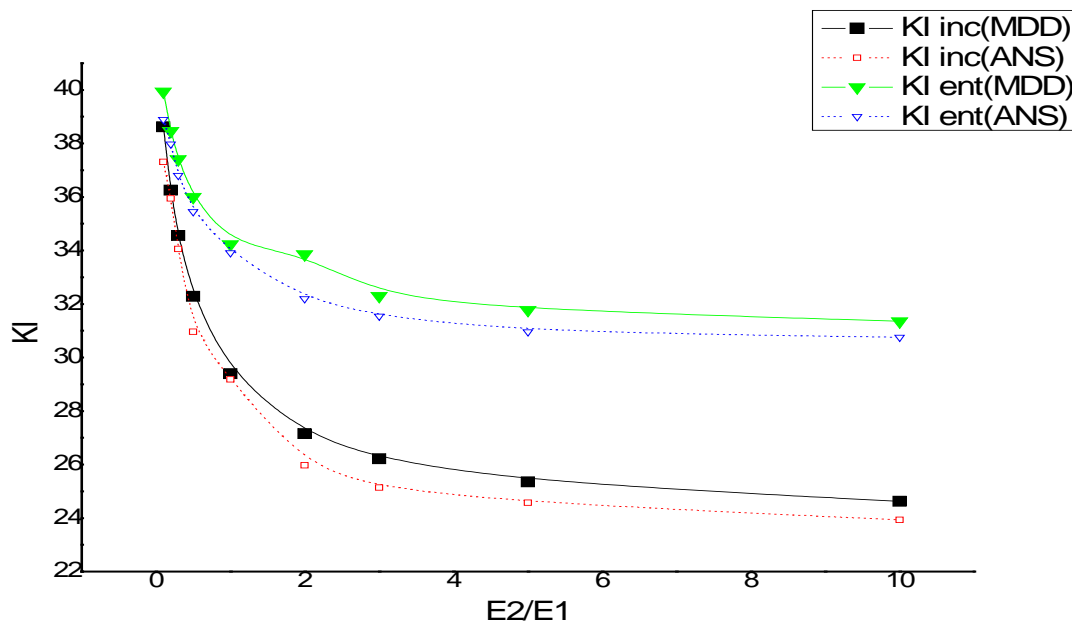


Fig.28 : Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice.

Le FIC diminue avec le rapport E_2/E_1 pour les deux têtes de fissure. Le FIC côté entaille est plus grand que le FIC côté inclusion. Une inclusion plus dure que la matrice permet le ralentissement de la propagation de la fissure. Ceci est relevé dans les travaux de [Don-2003] présentés sur la figure 29.

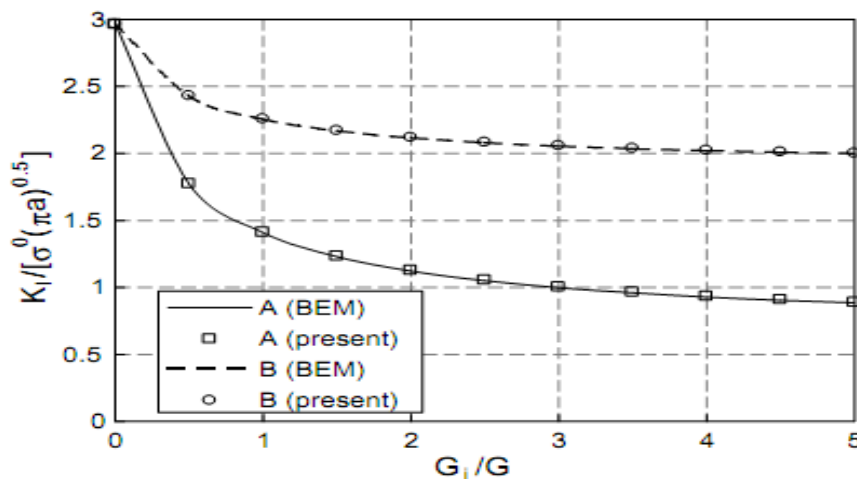
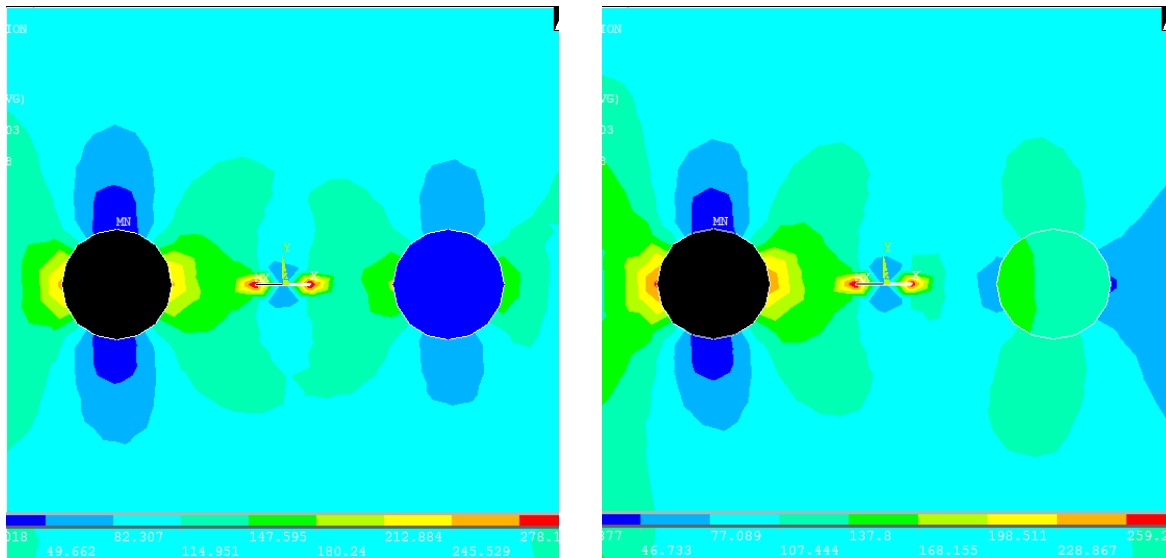


Fig. 29: Variation du FIC en fonction des caractéristiques des matériaux inclusion-matrice. ([Don-2003])

a) $E_2/E_1=0.2$ b) $E_2/E_1=5$ **Fig.30 :** Variation du champ de contraintes normales au niveau de la pointe de la fissure.

III.5.CONCLUSION

Cette étude a été menée dans le but d'étudier le comportement d'une structure fissurée en présence d'une inclusion près de la fissure. L'analyse des résultats donnés par la méthode de discontinuité de déplacement, en les confrontant aux calculs sur ANSYS et d'autres travaux de la littérature, a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Pour une fissure dans la matrice et pour le rapport des modules de Young inclusion/matrice E_2/E_1 inférieur à 1, c'est-à-dire une inclusion plus souple que la matrice, pour une configuration de fissure sur l'axe de l'inclusion, la position la plus critique correspond à la tête de fissure la plus proche de l'inclusion. Cette situation s'inverse lorsque ce rapport est supérieur à un et la position critique correspond à la tête de fissure la plus éloignée de l'inclusion.

- L'orientation d'une fissure ayant pour centre l'axe de l'inclusion fait intervenir le mode I et II. Un fort taux du mode II est remarqué pour une fissure verticale due à l'interaction inclusion/fissure. Les modes les plus critiques restent le mode I et le mode II pur. Ce résultat a été testé pour un rapport de $E_2/E_1=2$. Nous pensons que cela reste valable quelle que soit les rapports des modules de Young.

- Pour une fissure contenue dans l'inclusion, la position la plus critique pour une tête plus proche de l'inclusion est obtenue pour une inclusion plus rigide que la matrice. Ce qui est l'inverse du cas d'une fissure dans la matrice avec une inclusion plus souple.

Conclusion générale

MADANI FATEH

Dans cette étude, La méthode de discontinuité de déplacement est adopté pour la simulation du problème d'interaction inclusion fissure. L'étude montre l'efficacité de cette méthode.

Les résultats montrent particulièrement l'effet de la présence d'inclusion près de la fissure en tenant compte du type du matériau de l'inclusion et de l'effet de la distance de celle-ci par rapport à la fissure.

Les résultats obtenus concernent le FIC. Ils ont été comparés à une solution analytique dans le cas de petites inclusions.

Les solutions analytiques pour de grosses inclusions ne sont pas disponibles. Dans ce cas, la simulation numérique s'impose.

Des résultats numériques ont été obtenus et comparés aux résultats de la littérature. Des calculs ont été lancés aussi sur ANSYS 12.

Les différentes comparaisons permettent d'apprécier la qualité des résultats obtenus par la MDD et montrent le bon accord de nos résultats avec ceux trouvés dans la littérature scientifique.

L'analyse des résultats donnés par la méthode de discontinuité de déplacement, en les confrontant aux calculs sur ANSYS et d'autres travaux de la littérature, a permis de tirer les conclusions suivantes :

- Pour une fissure dans la matrice et pour le rapport des modules de Young inclusion/matrice E_2/E_1 inférieur à 1, c'est-à-dire une inclusion plus souple que la matrice, pour une configuration de fissure sur l'axe de l'inclusion, la position la plus critique correspond à la tête de fissure la plus proche de l'inclusion. Cette situation s'inverse lorsque ce rapport est supérieur à un et la position critique correspond à la tête de fissure la plus éloignée de l'inclusion.
- L'orientation d'une fissure ayant pour centre l'axe de l'inclusion fait intervenir le mode I et II. Un fort taux du mode II est remarqué pour une fissure verticale due à l'interaction inclusion/fissure. Les modes les plus critiques restent le mode I et le mode II pur. Ce résultat a été testé pour un rapport de $E_2/E_1=2$. Nous pensons que cela reste valable quelle que soit les rapports des modules de Young.
- Pour une fissure contenue dans l'inclusion, la position la plus critique pour une tête plus proche de l'inclusion est obtenue pour une inclusion plus rigide que la matrice. Ce qui l'inverse du cas d'une fissure dans la matrice avec une inclusion plus souple.

Cette étude a été menée sur des multi-matériaux isotropes par partie. La méthode est extensible aux milieux orthotropes. Dans cette perspective, une étude complémentaire peut être menée pour travailler dans le cadre des milieux orthotropes non homogènes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A

[Abd -1997] Abd . Latif Saleh.(1997) .« Crack Growth in Concrete Using Boundary Elements »Computational Mechanics Publications Southampton UK and Boston USA Volume 30 Edited by C.A. Brebbia and J.J.Connor , pp 2-4.

[Ash-1998] Asher .A. R, Wang. P. (1998). The fracture toughness of a particle-reinforced brittle matrix. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 46, 1139–1154.

B

[Bar-1962] Barenblatt .G.I.(1962).The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture , Advances in appl. Mech ,Vol 7,p 55-129 .

[Bos-2001] Boselli .J, Pitcher .P.D, Gregson .P.J and Sinclair .I. (2001). Numerical modeling particle distribution effects on fatigue in Al-SiCp composites. Materials Science and Engineering A300, 113–124.

[Bui -1980] Bui H.D.(1980) « Introduction à la mécanique de la rupture » in Rupture contrôle Sureté Edité par Masounave, Bathias, Dickson, Conseil national de recherches du Canada, Institut de Génie des Matériaux, pp.3-5.

[Bus-1997] Bush.M.B. (1997). The Interaction between a crack and a particle cluster. International Journal of Fracture 88,215–232.

C

[Cot-2002] Cotterell.B.(2002) «The past, present, and future of fracture mechanics » Engineering Fracture Mechanics 69 ,533-553

[Cro-1983] Crouch .S. L,Starfied . A. M.(1983) .Boundary élément method in solid mechanics with application in rock mechanics and geological mechanics.London ,Allen et Unwin, Boston.

[Cro-1976] Crouch .S. L .(1976) .Solution of plane elasticity problems by displacement discontinuity method.Int.

[Cru-1971] Cruse .T.A, VanBuren .W. « *Three dimensional elastic stress analysis of fracture specimen with edge crack* » Int. J. of Fracture 1971 , Vol. 7, N°1.

D

[Don-2003] C. Y. Dong, S. H. Loet ,Y. K. Cheung. (2003). Numerical analysis of the inclusion-crack interactions using an integral equation. COMPUTATIONAL MECHANICS, Volume 30, Number 2, 119-130.

[Dom-1987] Dominguez. (1987). « Elastostatics in boundary element methods in structural Analysis » .Beskos Ed. ASCE.

[Dug-1960] Dugadle. D.S.(1960). Yielding of steel sheets ,J .Mech .Phys.Solids ,Vol 8,p 100-108 .

E

[Erd-1974] Erdogan. F. (1974). Interaction between a circular inclusion and an arbitrary oriented crack. Journal of Applied Mechanics 41, 1007–1013.

[Esh-1957] Eshelby. J. D. (1957). The determination of the elastic fields of an ellipsoidal inclusion and related problems. Proc. Royal Soc. London, Series A, 241, 376–396 .

G

[Gri-1920] Griffith .A.A. (1920) .The phenomena of rupture and flow solids . Philosophical transactions of royal society vol, A-221, p 163-197.

H

[Has -1976], [Shi- 1976] Hasu .Y.C, Shivakumar. V. (1976). Interaction between an elastic circular inclusion and two symmetrically placed collinear cracks. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 13, 213–222.

[Hac-2007] Hachi .B. E. K.(2007). Analyse des fissures elliptiques en statique et en fatigue par hybridation de fonctions de green. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de lorraine, France.

I

[Ing-1913] Inglis.C.E. (1913) .Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Trans ,Inst ,Naval Architets Vol, 55 ,p 219-241 .

[Irw1948] Irwin.G.R. (1948). Fractures dynamics ,Fracturing of metals ,American society for metals ,Cleveland.

[Irw1949] Irwi.G.R. (1949). Fracturing of metals , American society for metals ,Cleveland.p147 .

[Irw-1956] Irwin.G.R. (1956).Relation of stresses near a crack to the crack extension force, Proceeding of the 9th international congress on applied mechanics , Brussels.

[Irw-1962] Irwin.G.R. (1962). The crack extension force a par through crack in a plate ,Journal of applied mechanics Vol,29-4,p651-654.

J

[Jaw-1963] Jawson.M.A.(1963) « *Integral equation in potential theory I* ».Proceeding of the Royal Society , 275, pp. 23-32.

K

[Kas-1995] **Kassam Z. H.A, Zhang. R. J and Wang Z.**(1995). Finite element simulation to investigate interaction between crack and particulate reinforcements in metal-matrix composites. *Materials Science and Engineering A*203,286–299.

L

[Lac-1976] **Lachat J.C, Watson J.O.**(1976). « *Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three dimensional elasto-statics* »- *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 10, pp. 991-105.

[Lam-1986] **Lambropoulos. J.C.** (1986). Shear, shape and orientation effects in transformation toughening in ceramics. *Int. J. Solids Struct.* 22, 1083–1106.

[Lem-2001] **et al Lemaitre.J, Chaboche. J. L.** (2001). , *Mécaniques des matériaux solides* ,Ed. Dunold , paris.

[Li-2002] **Li. Z,Chen.Q.**(2002). Crack-inclusion interaction for mode I crack analyzed by Eshelby equivalent inclusion method. *International Journal of Fracture* .

N

[Nis-1996] **Nisitani.H.**(1996). Interaction between an elliptic inclusion and a crack. *Proceedings of the 1996 fourth international conference on computer-aided assessment and control*, Computational Mechanics Inc., Billerica, MA, USA, p. 325–332.

P

[Par-1963] **Paris.P.** (1963). A critical analysis of cracks propagation laws , *Journal of basic engineering* ,Transactions of the American society of mechanical engineers ,p 528-534 .

[Pil-1994] **W.D. Pilkey.** (1994). (*Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices*).

R

[Rec-1995] **Naman.Recho.**(1995). «*Rupture par fissuration des Structures* » .Hermès

[Riz-1967] **Rizzo.F.J.**(1967). « *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics* » *Quarterly of applied mathematics*, 25, pp. 83-95.

[Riz-1977] **Rizzo.F.J, Shippy D.J.**(1977) .« *An advanced boundary integral equation method for three dimensional thermo-elasticity* » *Int. J. for NUM. Meth. In Eng.*, Vol. 11, pp. 1753-1768

S

[Sym-1963] **Sym.G.T.** (1963)« *Integral equation methods in potential theory II* » *Proceeding of the Royal Society* **1963**, 275, pp. 33-46.

T

[Tam-1968] **Tamate.O.** (1968). The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension. *International Journal of Fracture Mechanics* 4, 257–265.

W

[Wen-1996] Wen Ph .(1996) .Dynamic fracture mechanics: displacement discontinuity method. Computational mechanics publication, Southampton, UK and Boston, USA.

[Wes-1939] Westergaad H M.(1996). Bearing pressures and cracks ,Int J Mech ,Vol.61,p A49-A53 .

Y

[Yan-2004] Yang. L, Chen. Q,Li.Z.(2004). Crack-inclusion interaction for mode II crack analyzed by Eshelby equivalent inclusion method. Engng. Fract. Mech. 71, 1421–1433.

Z

[Zeg-2003] A.Zegloul. (2003) .Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture .Cours université de Metz.

[Zho-2004] R. Zhou ,Z .Li, J .Sun.(2004). Crack deflection and interface debonding in composite materials elucidated by the configuration force theory. Engineering Fracture Mechanics.

[Zhon-2002] L.Zhonghua, C.Qiang. (2002) . Some simple formulas to predict the variation of stress intensity factors for mode I crackinduced by near crack-tip inclusion. Engineering Fracture Mechanics. 581–587.