

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Automatique

Laboratoire de Commande des Processus



Thèse

de Doctorat en Sciences

en Génie Électrique

Option : Automatique

Présenté par

Noureddine BOUARROUDJ

Magister en Automatique de l'ENP

Intitulé

**Commandes par Mode de Glissement d'Ordre Fractionnaire
Optimisées par Métaheuristique. Application aux Systèmes Non
Linéaires et Interconnectés.**

Présentée le 15/02/2017 devant le Jury composé de :

Mr. CHEKIREB Hachemi	Professeur	ENP	Président
Mr. BOUKHETALA Djamel	Professeur	ENP	Rapporteur
Mr. BOUDJEMA Farès	Professeur	ENP	Rapporteur
Mr. BALI Noureddine	Professeur	USTHB	Examineur
Mr. BENMANSOUR Khelifa	Professeur	ESDAT/U. Medéa	Examineur
Mr. BOUAMAR Mohamed	Professeur	ESDAT/U. M'Sila	Examineur
Mr. HEMICI Boualem	Professeur	ENP	Examineur

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Automatique

Laboratoire de Commande des Processus



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique



Thèse

de Doctorat en Sciences

en Génie Électrique

Option : Automatique

Présenté par

Noureddine BOUARROUDJ

Magister en Automatique de l'ENP

Intitulé

**Commandes par Mode de Glissement d'Ordre Fractionnaire
Optimisées par Métaheuristique. Application aux Systèmes Non
Linéaires et Interconnectés.**

Présentée le 15/02/2017 devant le Jury composé de :

Mr. CHEKIREB Hachemi	Professeur	ENP	Président
Mr. BOUKHETALA Djamel	Professeur	ENP	Rapporteur
Mr. BOUDJEMA Farès	Professeur	ENP	Rapporteur
Mr. BALI Noureddine	Professeur	USTHB	Examineur
Mr. BENMANSOUR Khelifa	Professeur	ESDAT/U. Medéa	Examineur
Mr. BOUAMAR Mohamed	Professeur	ESDAT/U. M'Sila	Examineur
Mr. HEMICI Boualem	Professeur	ENP	Examineur

Dédicace

Je dédie ce travail à mes très chers parents, dont le sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience, le soutien, l'aide et l'encouragement sont l'essentiel de ma réussite. Sans eux je ne serai pas à ce stade aujourd'hui.

A mes frères et sœurs.

A ma grande famille.

Et à tous mes amis.

BOUARROUDJ Nouredine

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir donné la force et le courage pour réaliser ce travail.

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au sein du Laboratoire de Commande des Processus de l'Ecole Nationale Polytechnique.

Ce travail que nous présentons a été effectué sous la direction de mes deux professeurs, BOUKHETALA Djamel, et BOUDJEMA Farès, qui ont suivie de très près ce travail, pour leur orientation pédagogique dans l'élaboration de cette thèse.

Je remercie Monsieur CHEKIREB Hachemi, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de ma soutenance.

Je remercie aussi les membres du jury, Professeur BALI Nouredine, Professeur BEN-MANSOUR Khelifa, Professeurs BOUAMAR Mohamed et HEMICI Boualem pour avoir accepté l'évaluation de ce travail.

Enfin, je tiens à remercier tous les gens qui ont contribué à ma réussite tout au long de mon parcours d'étude.

ملخص: يعتبر حساب الاشتقاق والتكامل الكسري موضوع العديد من الدراسات منذ عدة سنوات. الهدف من هذا العمل هو بدء التعامل مع تقنيات التحكم من منظور جديد. لهذا الغرض، طرق تحكم بدرجة كسرية تم اقتراحها، أولاً، تقنيات التحكم بواسطة (PID) الكلاسيكي و (PID) بدرجة كسرية ($PI^{\alpha}D^{\beta}$) لمقلد طائرة الهليكوبتر (TRMS) تمت دراستها بعد ذلك قمنا باقتراح العديد من تقنيات التحكم غير الخطية بدرجة كسرية للعديد من الأنظمة غير خطية. بالنسبة للفئة الأولى من الأنظمة الغير خطية بمدخلين ومخرجين تم اقتراح العديد من تقنيات التحكم المنزلق مع المنطق الضبابي (لحل مشكلة الترددات العالية) بالاختيار الأمثل لمساحات انزلاق بدرجة طبيعية (PD, PID) وبدرجة كسرية (PD^{α} , $PI^{\alpha}D^{\alpha}$). تقنيات تحكم منزلق بدرجة طبيعية وبدرجة كسرية تمت دراستها أيضاً بالنسبة للفئة الثانية من الأنظمة الغير خطية بمدخل ومخرجين. من اجل الحصول على أداء جيد للنظام في الحلقة المغلقة تم استخدام خوارزمية سحابة الجزيئات (PSO). في الأخير أجرينا عمليات محاكاة عددية للتحقق من الإنشاءات النظرية التي قدمت في هذا العمل، حيث أظهرت النتائج أفضلية تقنيات التحكم بدرجة كسرية على التي بدرجة طبيعية وذلك في معظم الحالات.

كلمات مفتاحية: الحساب الكسري، مقلد طائرة الهليكوبتر، نظام بمدخلين و مخرجين، نظام بمدخل و مخرجين، التحكم (PID)، التحكم ($PI^{\alpha}D^{\beta}$)، التحكم المنزلق، خوارزمية سحابة الجزيئات.

Abstract: This work deals with the fractional order control of nonlinear systems. A conventional PID controller and fractional order one ($PI^{\alpha}D^{\beta}$) are synthesized and compared in term of dynamic performances of the TRMS system. Then, different nonlinear control approaches of fractional order are proposed for different classes of nonlinear systems. For the first class of nonlinear TITO systems, some structures of sliding mode control with fuzzy logic are designed to overcome the *chattering* phenomena. Different sliding surfaces of integer order (PD, PID) and fractional order (PD^{α} , $PI^{\alpha}D^{\alpha}$) are proposed. For the second class of nonlinear SITO systems, sliding mode controllers of integer order and fractional order were also proposed. In order to improve the performance of the system in closed loop, the algorithm of particle swarm (PSO) is used to optimize the control laws parameters. Numerical simulations were performed to highlight the performances of the proposed approaches. The simulation results shows the superiority of the fractional order control compared with the integer order one in the most cases.

Key words: fractional order calculus, TRMS, TITO system, SITO system, PID controller, $PI^{\alpha}D^{\beta}$ controller, sliding mode control, PSO algorithm.

Résumé: La théorie du calcul fractionnaire fait l'objet de multiples études depuis plusieurs années. L'objectif visé par le présent travail de thèse est l'utilisation de cette théorie pour la synthèse de lois de commande pour plusieurs classes de systèmes dynamiques. Dans un premier lieu, des commandes par PID classique et PID fractionnaire ($PI^{\alpha}D^{\beta}$) sont synthétisées pour le système Twin Rotor Mimo System (TRMS). Ensuite, plusieurs approches de commande non linéaires d'ordre fractionnaire sont proposées pour différents systèmes non linéaires. Pour les systèmes non linéaires Two Inputs Two outputs (TITO), différentes structures de commande par mode glissant combiné avec la logique floue élaborées afin de remédier aux problèmes de *chattering* ont été élaborées. Des surfaces de glissement d'ordre entier (PD, PID) et d'ordre fractionnaire (PD^{α} , $PI^{\alpha}D^{\alpha}$) sont proposées. Pour des systèmes non linéaires Single Input Two Outputs (SITO), des commandes par mode glissant d'ordre entier et d'ordre fractionnaire ont été également synthétisées. Afin d'optimiser les valeurs des paramètres des lois de commande proposées, l'algorithme d'optimisation par essaim de particules (OEP) a été utilisé. Les résultats de simulation ont démontré la supériorité, en terme de performances des commandes d'ordre fractionnaire par rapport à celle d'ordre entier dans la majorité des situations.

Mots clés: calcul d'ordre fractionnaire, TRMS, système TITO, système SITO, régulateur PID, régulateur $PI^{\alpha}D^{\beta}$, commande par mode glissants, algorithme OEP.

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Introduction Générale	11
0.1 Introduction	11
0.2 Contributions et organisation de la thèse	13
1 Optimisation par essaim de particules (OEP)	14
1.1 Introduction	14
1.2 Formalisation	15
1.2.1 Nombre de particules	16
1.2.2 Initialisation de l'essaim	17
1.2.3 Equation de mouvement	17
1.2.4 Confinement d'intervalle	18
1.2.4.1 Coefficient de constriction	20
1.2.5 Critère d'arrêt	20
1.3 Application de l'algorithme OEP	20
1.4 OEP et hybridation	21
1.5 Exemple de test	22
1.6 Conclusion	25
2 Sur la théorie du calcul d'ordre fractionnaire	26
2.1 Introduction	26
2.2 Théorie de la dérivée d'ordre fractionnaire	27
2.2.1 Fonctions spécifiques pour la dérivée d'ordre fractionnaire	27
2.2.1.1 La fonction Gamma	27
2.2.1.2 La fonction Mittag-Leffler	28
2.2.2 Définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire	28
2.2.2.1 Définition de Riemann-Liouville (RL)	29
2.2.2.2 Définition de Caputo	29
2.2.2.3 Définition de Gröndwald-Leitnikov (GL)	30
2.2.3 Quelques propriétés de la dérivée d'ordre fractionnaire	31
2.2.4 Transformée de Laplace de l'intégrale et de la dérivée d'ordre fractionnaire	32
2.2.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	33
2.2.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	33
2.3 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	34
2.3.1 Méthode d'Oustaloup	35
2.3.1.1 Exemple d'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $1/s^{0.5}$	36

TABLE DES MATIÈRES

2.3.1.2	Exemple d'approximation de dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.5}$	37
2.4	Systèmes d'ordre fractionnaire	39
2.4.1	Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire	39
2.4.1.1	Equation différentielle et fonction de transfert	39
2.4.1.2	Représentation d'état	40
2.4.1.3	Condition de stabilité	44
2.4.2	Systèmes non linéaire d'ordre fractionnaire	45
2.5	Commandes robustes d'ordre fractionnaire	47
2.5.1	La commande par PID d'ordre fractionnaire ($PI^\lambda D^\mu$)	48
2.5.1.1	Méthodes de réglage des paramètres	49
2.6	Exemple d'application	50
2.7	Conclusion	57
3	Commande par mode de glissement d'ordre fractionnaire optimisée des systèmes non linéaires TITO	60
3.1	Introduction	60
3.2	Description du système	61
3.3	La commande par mode glissant d'ordre entière	62
3.3.1	Choix de la surface de glissement s_j ($j = 1, 2$)	62
3.3.2	Elaboration de la commande u_j ($j=1,2$)	64
3.3.3	Analyse de stabilité	66
3.4	Commande floue-mode glissant d'ordre entier	67
3.5	La commande par mode glissant d'ordre fractionnaire	73
3.5.1	Choix de la surface de glissement s_j ($j=1,2$)	73
3.5.2	Synthèse de la commande u_j ($j=1,2$)	74
3.5.3	Analyse de stabilité	75
3.6	La commande floue-mode glissant d'ordre fractionnaire	77
3.7	Optimisation par algorithme OEP des commandes synthétisées	77
3.8	Application au système du double pendule inversé	78
3.9	Conclusion	88
4	Commande par mode de glissement d'ordre fractionnaire optimisée des systèmes non linéaires SITO	89
4.1	Introduction	89
4.2	Description du système	90
4.3	Synthèse de la commande par mode glissant d'ordre entier (MGOE)	90
4.3.1	Analyse de stabilité	93
4.4	Synthèse de la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire (MGOF)	94
4.4.1	Analyse de stabilité	95
4.5	optimisation des commandes par essaim de particules	97
4.6	Application au système Bille-Barre	97
4.7	Conclusion	104
	Conclusion Générale	105
	Bibliographie	107

Liste des tableaux

1.1	Algorithme d'optimisation par essaim de particules	19
1.2	Fixation de la vitesse maximale	19
1.3	Une sélection représentative de l'application de l'OEP.	22
1.4	Minimum global en fonction de la dimension du problème D	24
1.5	Minimum global en fonction du nombre de particules n	25
1.6	Minimum global en fonction du nombre d'itérations k	25
2.1	Paramètres optimaux des deux régulateur PID et FOPID pour le sous système vertical.	55
2.2	Paramètres optimaux des deux régulateur PID et FOPID pour le sous système horizontal.	56
3.1	Les valeurs spécifiques de l'algorithme OEP.	80
3.2	Paramètres optimaux pour la commande avec surface PD fractionnaire/- surface PD.	81
3.3	Paramètres optimaux pour la commande avec surface PID fractionnaire/- surface PID.	81
3.4	Comparaison entre les différentes stratégies de commande pour le système sein	86
3.5	Comparaison entre les différentes stratégies de commande en présence de perturbations externes	87
3.6	Comparaison entre les différentes stratégies de commande pour changement des trajectoires désirées	88
4.1	Paramètres optimaux des commandes MGOF et MGOE.	100
4.2	Comparaison entre la commande par MGOF et MGOE pour le système sein.	103
4.3	Comparaison entre la commande par MGOF et MGOE avec addition de perturbation externe $d(t)$	104
4.4	Comparaison entre la commande par MGOF et MGOE avec changement de trajectoire.	104

Liste des figures

1.1	Exemple d'essaim de particules (Oiseaux).	15
1.2	Déplacement d'une particule.	16
1.3	Résultats de simulation du scenario 1; a) pour la fonction F_1 , b) pour la fonction F_2	23
1.4	Résultats de simulation du scenario 2; a) pour la fonction F_1 , b) pour la fonction F_2	24
1.5	Résultats de simulation du scenario 3; a) pour la fonction F_1 , b) pour la fonction F_2	24
2.1	tracés de Bode (amplitude et phase) de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $1/s^{0.5}$ et de la fonction rationnelle de son approximation.	36
2.2	Intégration d'ordre fractionnaire ($1/s^\alpha$) d'un signal d'entrée rampe pour différents ordres.	37
2.3	tracés de Bode (amplitude et phase) de dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.5}$ et de la fonction rationnelle de son approximation.	38
2.4	Dérivateur d'ordre fractionnaire (s^α) d'un signal d'entrée rampe pour différents ordres.	38
2.5	Région de stabilité dans le plans (s^α) pour un système d'ordre fractionnaire.	45
2.6	Structure générale d'un régulateur PID d'ordre fractionnaire.	49
2.7	Commande PID à partir d'un point (a) jusqu'au plan (b).	49
2.8	le simulateur d'hélicoptère TRMS.	51
2.9	Réponse libre ($u_v = u_h = 0$ v) du système TRMS avec condition initiale $(\alpha_{v0}, \alpha_{h0}) = (0, 0)$ rad.	53
2.10	Réponse du système en boucle ouverte dans le mode couplé pour différentes excitations, avec condition initiale $\alpha_{v0}, \alpha_{h0} = (0, 0)$ rad.	53
2.11	schéma global de la commande PID fractionnaire optimisée par OEP du TRMS	54
2.12	l'évolution de la fonction de cout F dans chaque cas de commande	55
2.13	Réponse du sous système vertical pour un test de stabilisation	56
2.14	Réponse du sous système horizontal pour un test de stabilisation	56
2.15	forme de la perturbation appliquée	57
2.16	Réponse du sous système vertical pour une poursuite de trajectoire	58
2.17	Réponse du sous système horizontal pour une poursuite de trajectoire	58
2.18	Réponse du sous système vertical pour test de stabilisation en présence de perturbation externe	59
2.19	Réponse du sous système horizontal pour test de stabilisation en présence de perturbation externe	59
3.1	schéma fonctionnelle de la commande équivalente.	65
3.2	la fonction « <i>sgn</i> » de u_n .	65
3.3	Schéma de principe de la commande par mode glissant pour un système TITO.	66

LISTE DES FIGURES

3.4	Partition floue de l'espace autour de la surface de glissement.	70
3.5	Fonctions d'appartenance de, a) l'entrée s et de, b) la sortie uf	70
3.6	Résultats de l'inférence des règles floues pour différentes valeurs de r	72
3.7	Système d'inférence flou utilisé pour calculer la commande discontinue	73
3.8	Processus d'optimisation des paramètres de la commande avec OEP	78
3.9	Structure du système double pendule inversé	79
3.10	réponse du système double pendule inversé en boucle ouverte pour des échelons de 2 Nm, avec $(\theta_1(0), \theta_3(0)) = (0.5, -0.5)$	80
3.11	L'évolution de la fonction de cout (F) pour les différentes stratégies de commandes synthétisées.	81
3.12	Variation des variables d'état (x_1) et (x_3), utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire	82
3.13	Variation des commandes (u_1) et (u_2), utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire	82
3.14	Variation des variables d'état (x_1) et (x_3), utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire	83
3.15	Variation des commandes (u_1) et (u_2), utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire	83
3.16	Variation des variables d'état (x_1) et (x_3) avec addition des perturbations externes, utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire	84
3.17	Variation des commandes (u_1) et (u_2) avec addition des perturbations externes, utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire	84
3.18	Variation des variables d'état (x_1) et (x_3) avec addition des perturbations externes, utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire	85
3.19	Variation des commandes (u_1) et (u_2) avec addition des perturbations externes, utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire	85
3.20	Variation des variables d'état (x_1) et (x_3) avec changement de trajectoires, utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire	86
3.21	Variation des commandes (u_1) et (u_2) avec changement de trajectoires, utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire	86
3.22	Variation des variables d'état (x_1) et (x_3) avec changement de trajectoires, utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire	87
3.23	Variation des commandes (u_1) et (u_2) avec changement de trajectoires, utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire	87
4.1	Schema de principe de la commande par mode glissant pour un système SITO.	97
4.2	Processus d'optimisation des paramètres de la commande avec algorithme d'OEP pour un système SITO.	98
4.3	Système Bille-Barre.	98
4.4	Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de 1N.m.	99
4.5	L'évolution de la fonction objective (F) pour les stratégies de commande.	100
4.6	Variation des variables d'état θ et r	101
4.7	Variation de la variable z et la commande u	101
4.8	Variation des variables d'état $\theta(t)$ et $r(t)$ avec addition de perturbation externe	102
4.9	Variation de la variable z et la commande u avec addition de perturbation externe	102
4.10	Variation des variables d'état $\theta(t)$ et $r(t)$ avec un changement des trajectoires	103

LISTE DES FIGURES

4.11 Variation de la variable z et la commande u avec un changement des trajectoires 103

Introduction Générale

0.1 Introduction

Durant les dernières décennies, un progrès considérable a été remarqué dans le développement de lois de commandes en automatique. Ainsi, un grand nombre d'approches sont proposées par les chercheurs allant du PID jusqu'aux techniques les plus élaborées.

La commande par PID est supposée être la commande linéaire de base qui a été appliquée avec succès dans le milieu industriel aussi bien pour les systèmes linéaires que pour les systèmes non linéaires où le point de fonctionnement change uniquement dans la limite de linéarisation.

La commande par mode glissant est une commande non linéaire naturellement discontinue, basée sur la commutation de fonctions de variables d'état, utilisées pour créer une variété ou hyper-surface de glissement, dont le but est de forcer la dynamique du système à coïncider avec celle définie par l'équation de l'hyper-surface. Quand l'état est maintenu sur cette hyper-surface, le système se trouve en régime glissant. Sa dynamique demeure alors insensible aux perturbations extérieures et paramétriques tant que les conditions du régime glissant sont vérifiées. Ce type de commande présente plusieurs avantages tels que la robustesse, la stabilité, et la simplicité de réalisation. Cependant, le phénomène de *chattering* ou broutement provoqué par la partie discontinue de cette commande peut avoir un effet néfaste sur les actionneurs. Pour remédier à cet inconvénient, plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature. Dans [1], les auteurs introduisent une bande de transition autour de la surface de glissement qui consiste à remplacer la fonction de commutation dans la commande par une fonction de saturation. D'autres approches [2], [3] ont été également proposées, combinant le mode de glissement avec la commande par logique floue pour développer une commande hybride appelée *fuzzy-sliding mode control*.

L'ensemble des lois de commande développées contenaient des actions dérivées et intégrales d'ordre entier. Par ailleurs, l'extension du calcul classique (d'ordre entier) vers

le calcul d'ordre non entier conduit au calcul fractionnaire. Les premières études systématiques de ce dernier furent développées au 19^{iem} siècle par Liouville, Riemann et Holmgren [4]. Ainsi, les commandes d'ordre entier ont été étendues aux commandes d'ordre fractionnaire.

Les premières utilisations des commandes d'ordre fractionnaire, reviennent à Oustaloup qui a développé la Commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE) [5, 6, 7, 8, 9], puis Podlubny [10], qui propose le régulateur $PI^\alpha D^\beta$. En 2003, Calderon [11] a élargi la commande par mode glissant d'ordre entier à la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire ; et ouvrit la porte à la recherche dans ce nouveau champ, où plusieurs approches par mode glissant d'ordre fractionnaire ont été proposées telles que : la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire basée sur l'ajustement automatique des paramètres pour la commande de vitesse du moteur synchrone à aimant permanent [12], la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire pour un bras manipulateur flexible [13], la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire pour un système de freinage non blocables [14], la commande par mode glissant terminal d'ordre fractionnaire pour une classe des systèmes dynamiques avec incertitude [15] et la commande flou-mode glissant d'ordre fractionnaire pour un système à double réservoirs et bras manipulateur [16] ; le calcul fractionnaire est introduit afin de déterminer des variétés de surfaces de glissement.

Il est à noter que le problème majeur de la commande réside dans le manque de méthodes systématiques pour le choix des valeurs des paramètres, en particulier dans le cas des systèmes non linéaires interconnectés. La conception et la synthèse se basent sur l'expertise et les connaissances a priori sur le processus à commander. Pour remédier à cet inconvénient, plusieurs techniques d'optimisation ont été utilisées afin de calculer d'une manière optimale les paramètres des lois de commande d'ordre fractionnaire. On peut citer, entre autres ; les algorithmes génétiques, les algorithmes de colonies de fourmis et l'essaim de particules... Ces derniers, appelés méthode d'optimisation par essaim de particules (en anglais, Particle Swarm Optimization PSO) [17] s'inspire du comportement des animaux vivant en essaims (abeilles, oiseaux, poissons... etc). Les algorithmes PSO seront utilisés dans le présent travail de thèse pour le calcul des paramètres des lois de commande d'ordre fractionnaire que nous synthétiserons.

0.2 Contributions et organisation de la thèse

L'objectif visé par notre travail est le développement de nouvelles techniques de commande basées sur le calcul d'ordre fractionnaire notamment lors de l'utilisation des modes glissants où peu de résultats sont disponibles dans la littérature.

Le travail de thèse est principalement organisé en quatre chapitres

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions de base sur les algorithmes d'optimisation de type PSO en mettant en évidence leurs principes ainsi que leur mode de déroulement algorithmique.

Dans le second chapitre, nous présentons quelques notions de base sur le calcul et les opérateurs d'ordre fractionnaires en mettant en exergue leurs propriétés mathématiques. La description des systèmes par modèles d'ordre fractionnaire linéaires et non linéaires est ensuite explicitée. Les approximations numériques des opérateurs d'ordre fractionnaire sont également présentées. Nous synthétisons ensuite une loi de commande PID d'ordre fractionnaire optimisée par PSO pour le système TRMS (Twin Rotor MIMO System).

Le troisième chapitre présente une première contribution portant sur l'élaboration de surfaces de glissement d'ordre fractionnaire (PD^α et $PI^\alpha D^\alpha$) pour la conception de lois de commande hybrides floue-mode glissant d'ordre fractionnaire des systèmes non linéaires TITO (Two inputs Two Outputs). Cette proposition nous conduit à une représentation d'état de la dynamique réduite des erreurs sous forme d'un système linéaire d'ordre fractionnaire, chose qui facilite la démonstration de stabilité en utilisant les théorèmes existant dans la littérature [18]. Les paramètres des lois de commande proposées sont optimisées par l'algorithme PSO.

Dans le quatrième et dernier chapitre la contribution porte sur le développement de lois de commande par mode glissant d'ordre fractionnaire optimisées par PSO des systèmes SITO (Single Input Two Outputs) non linéaires. Une étude comparative entre les commandes d'ordre entier et celles d'ordre fractionnaire est menée afin de mettre en évidence les performances de chacune d'entre elles.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats obtenus dans ce travail et les perspectives qu'ils permettent d'ouvrir.

Chapitre 1

Optimisation par essaim de particules (OEP)

1.1 Introduction

La solution des problèmes d'optimisation constitue, actuellement, un axe de recherche privilégié de plusieurs équipes de recherche, vu l'importance capitale qu'elle revêt dans notre vie quotidienne. Ce domaine de recherche fait appel à des méthodes mathématiques et informatiques [19]. La solution d'un problème d'optimisation consiste à rechercher une solution d'une qualité suffisante parmi un ensemble de solutions au regard d'un (des) critère(s) donné (s) et des objectifs à satisfaire. Elle consiste à maximiser ou à minimiser une ou un ensemble de fonctions fitness en respectant des contraintes liées au problème traité. Dans la littérature on trouve plusieurs algorithmes d'optimisation, parmi eux celui de l'optimisation par essaim de particules.

L'optimisation par essaim de particules (OEP), ou en anglais Particle Swarm Optimization (PSO) est une méta-heuristique d'optimisation qui utilise une population de solutions candidates pour développer une solution optimale au problème, cet algorithme a été inventé par Russel Eberhart (ingénieur en électricité) et James Kennedy (sociopsychologue) en 1995 [17]. Cette méthode est inspirée du comportement social des animaux évoluant en essaim, tels que les bancs de poissons et les vols groupés d'oiseaux [20], [21]. Reynolds a montré qu'un essaim réaliste d'oiseau pourrait être programmé en mettant en application trois règles simples : assortir la vitesse des voisins, orienter pour le centre perçu de l'essaim, et éviter les collisions [22].

Cette approche est basée sur la coopération entre individus simples souvent appelés des

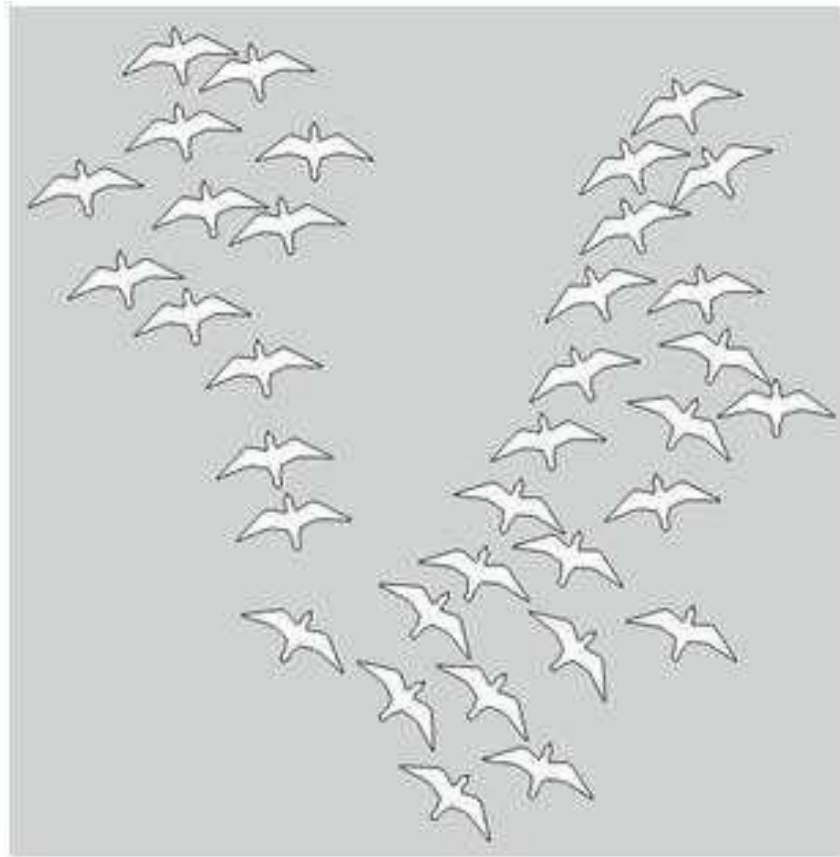


FIGURE 1.1: Exemple d'essaim de particules (Oiseaux).

particules. Ces dernières possèdent une capacité de mémorisation dans le sens où chaque particule se rappelle de sa meilleure position visitée et la meilleure position trouvée dans son voisinage. Chaque particule se déplace alors selon une trajectoire perturbée en utilisant les informations sur la position et la vitesse [23].

L'OEP est un algorithme simple et efficace qui commence par un certain nombre de particules placées de manière aléatoire dans l'espace de recherche et initialisées avec des vitesses aléatoires.

1.2 Formalisation

Dans l'algorithme d'optimisation par essaim de particules, un ensemble d'individus appelés particules, sont originellement disposés de façon aléatoire et homogène, se déplaçant dans l'espace de recherche et constituant, chacune, une solution potentielle.

Chaque particule dispose d'une mémoire concernant sa meilleure solution visitée ainsi que la capacité de communiquer avec les particules de son entourage. Ensuite, à chaque itération :

- Chaque particule est capable d'évaluer la qualité de sa position et de garder en mémoire sa meilleure position qu'elle a atteint jusqu'ici (parfois la position courante) et sa qualité (la valeur de la fonction à optimiser en cette position).
- Chaque particule est capable de communiquer avec un certain nombre de ses voisins et d'obtenir de chacune d'elles sa propre meilleure performance (et la qualité afférente).
- Chaque particule choisit la meilleure performance parmi les meilleures dont elle a connaissance, modifie sa vitesse en fonction de cette information et de ses propres données et se déplace en conséquence.

Pour réaliser son prochain mouvement, chaque particule combine les trois tendances suivantes : suivre sa propre vitesse, revenir vers sa meilleure performance, et aller vers la meilleure performance de ses informatrices. Une fois la meilleure informatrice détectée, la modification de la vitesse est une simple combinaison linéaire de ces trois tendances. La stratégie de déplacement d'une particule est illustrée par la figure 1.2.

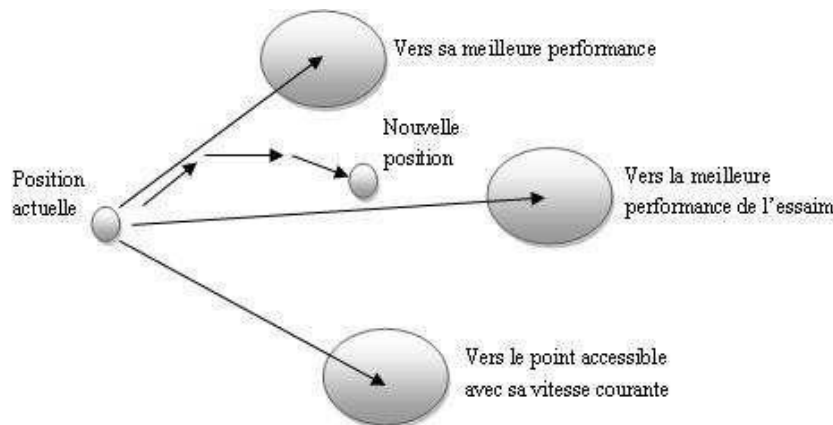


FIGURE 1.2: Déplacement d'une particule.

1.2.1 Nombre de particules

Le nombre n de particules allouées à la résolution du problème dépend essentiellement de deux paramètres :

La taille de l'espace de recherche D et le rapport entre les capacités de calcul de la machine et le temps maximum de recherche. Il n'y a pas de règle pour déterminer ce paramètre n , mais réaliser de nombreux essais permet de se doter de l'expérience nécessaire à l'appréhension de ce paramètre.

Ce qui compte, c'est plutôt le nombre de fois où la fonction *fitness* doit être évaluée car

dans la plupart des problèmes réels, cette évaluation nécessite un temps non négligeable, et évidemment, pour une itération, ce nombre d'évaluation est égal au nombre de particules. Donc si nous voulons réduire le nombre total d'évaluations nécessaires pour trouver une solution, nous sommes au contraire tentés de diminuer la taille de l'essaim. Mais un essaim trop petit risque de mettre très longtemps pour trouver une solution ou même ne pas la trouver du tout. Donc il y a un compromis à trouver. Empiriquement, les expérimentateurs ont proposé des tailles de l'ordre de 20 à 30 particules qui, en effet, se révèlent tout à fait suffisante pour résoudre la quasi-totalité des problèmes de test classiques [24].

1.2.2 Initialisation de l'essaim

La position des particules ainsi que leur vitesse initiale doivent être initialisés aléatoirement selon une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Mais en pratique, il n'est pas souhaitable que trop de particules tendent à sortir de l'espace de recherche dès le premier pas du temps, ni d'ailleurs plus tard. Pour les premières formulations nous nous contentons de tirer au hasard les valeurs des composantes de chaque position et vitesse, selon une distribution uniforme dans :

$$[(x_{\min} - x_{\max}) / 2, (x_{\max} - x_{\min}) / 2] \quad (1.1)$$

1.2.3 Equation de mouvement

On considère un ensemble de n particules et une fonction objective f que l'on cherche à minimiser sur un espace de recherche D . Pour chaque particule, on définit son vecteur de position $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD}]$, et son vecteur de vitesse $v_i = [v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD}]$. La qualité de sa position est déterminée par la valeur de la fonction objectif f dans chaque itération. Cette particule garde en mémoire la meilleure position par laquelle elle est déjà passée, que l'on note $Pbest_i = (pbest_{i1}, pbest_{i2}, \dots, pbest_{iD})$. $Gbest = (gbest_1, gbest_2, \dots, gbest_D)$ correspond à la meilleure position atteinte par les particules de l'essaim. Nous nous référons à la version globale de l'OEP, où toutes les particules de l'essaim sont considérées comme voisines de la particule i , d'où la notation $Gbest$ (global best).

Au départ de l'algorithme, les particules de l'essaim sont initialisées de manière aléatoire/régulière dans l'espace de recherche du problème. Ensuite, A chaque itération, chaque particule se déplace, leurs vitesses de déplacement et leurs position à l'itération $(k + 1)$ sont mises à jours. Les équations régissant cette étape sont données par (1.2) et (1.3)

respectivement [25] :

$$v_{i,j}^{k+1} = wv_{i,j}^k + c_1r_{1i,j}^k(pb_{i,j}^k - x_{i,j}^k) + c_2r_{2i,j}^k(gb_{i,j}^k - x_{i,j}^k), j \in \{1, \dots, D\} \quad (1.2)$$

$$Pbest_i^{k+1} = \begin{cases} Pbest_i^k, & \text{si } f(x_i^{k+1}) \geq Pbest_i^k \\ x_i^{k+1}, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x_{i,j}^{k+1} = x_{i,j}^k + v_{i,j}^{k+1}, j \in \{1, \dots, D\} \quad (1.3)$$

w : s'appelle le facteur d'inertie, il sert à contrôler l'influence de la direction de déplacement sur le déplacement futur.

c_1 et c_2 : sont des constantes positives, appelées respectivement le facteur cognitif et le facteur social permettant le contrôle du comportement individuel et collectif de chaque particule.

r_1 et r_2 : sont des nombres aléatoires distribués uniformément dans l'intervalle $[0,1]$. À l'itération $(k + 1)$, les deux vecteurs $Pbest_i$ et $Gbest$ sont mis à jour, dans le cas d'une minimisation suivant les deux équations (1.4), et (1.5) [25].

$$Pbest_i^{k+1} = \begin{cases} Pbest_i^k, & \text{si } f(x_i^{k+1}) \geq Pbest_i^k \\ x_i^{k+1}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.4)$$

$$Gbest^{k+1} = \underset{Pbest_i}{arg \min} f(Pbest_i^{k+1}), 1 \leq i \leq n \quad (1.5)$$

où f c'est la fonction de cout.

La procédure de l'optimisation par essaim de particules est résumée par l'algorithme (1.1). Le critère d'arrêt peut être différent suivant le problème posé. Si l'optimum global est connu a priori, on peut définir une "erreur acceptable" ξ comme critère d'arrêt [24].

1.2.4 Confinement d'intervalle

Lors de l'évolution de l'essaim, il peut arriver qu'une particule sorte de l'espace de recherche initialement défini; Pour s'affranchir de ce problème, plusieurs approches ont été proposées dans la littérature. On peut introduire une vitesse maximale (notée V_{max}) qui va permettre de contrôler l'"explosion" du système, comme indiqué dans l'algorithme (1.2) [26]. Dans [27] on trouve une étude sur le comportement de l'OEP suivant cette proposition.

Tableau 1.1: Algorithme d'optimisation par essaim de particules
Algorithme 1.1

1. Initialisation aléatoire de n particules : position et vitesse.
 2. Evaluation de la position de chaque particule
 3. Pour chaque particule i , $Pbest_i = x_i$
 4. Calcul de $Gbest$ selon l'équation (1.5)
 5. Tant que le critère d'arrêt n'est pas satisfait faire :
 6. Déplacement des particules selon les équations (1.2) et (1.3)
 7. Evaluation des positions des particules
 8. Mise à jour de $Pbest_i$ et $Gbest$ selon les équations (1.4) et (1.5)
 9. Fin
-

Tableau 1.2: Fixation de la vitesse maximale
Algorithme 1.2

1. Si $v_{i,j}^k \succ V_{\max}$ alors
 2. $v_{i,j}^k = V_{\max}$
 3. Fin si
 4. Si $v_{i,j}^k \prec -V_{\max}$ alors
 5. $v_{i,j}^k = -V_{\max}$
 6. Fin si
-

De plus, une stratégie de confinement d'intervalle peut être introduite ; cette stratégie permet de ramener une particule sortie de l'espace de recherche à l'intérieur de celui-ci.

Supposons, pour simplifier, que l'espace de recherche soit $[x_{\min}, x_{\max}]^D$ avec D est la dimension de l'espace de recherche.

Alors ce mécanisme stipule que si une coordonnée $x_{i,j}^{k+1}$, calculée selon les équations de mouvement, sort de l'intervalle $[x_{\min}, x_{\max}]$, on lui attribue en fait la valeur du point frontière le plus proche. En pratique, cela revient donc à remplacer la deuxième ligne des équations de mouvement (1.3) par :

$$x_{i,j}^{k+1} = \min(\max(x_{i,j}^k + v_{i,j}^{k+1}, x_{\min}), x_{\max}) \quad (1.6)$$

En outre, on complète souvent le mécanisme de confinement par une modification de la vitesse, soit en remplaçant la composante qui pose problème par son opposée, souvent pondérée par un coefficient inférieur à 1, soit, tout simplement, en l'annulant.

Plus généralement, le principe même du confinement consiste à dire ceci : « si une particule tend à sortir de l'espace de recherche, alors la ramener au point le plus proche qui soit dans cet espace et modifier sa vitesse en conséquence ». Il permet de définir les confinements nécessaires à des problèmes à granularité non nulle (Positions à valeurs entières, par exemple) ou à des problèmes (combinatoires, en général) dont les solutions

doivent avoir toutes les coordonnées différentes.

1.2.4.1 Coefficient de constriction

Une autre approche pour le contrôle de la convergence des particules au sein de l'essaim est présentée par Clerc en 2002 [28]. Cette méthode utilise un facteur de constriction χ qui combine les paramètres w , c_1 , c_2 . Les études effectuées par Clerc et Kennedy ont démontré qu'une bonne convergence, une prévention de l'explosion de l'essaim, peut être assurée en rendant dépendants les paramètres w , c_1 , c_2 . Par l'utilisation du coefficient de constriction l'équation (1.2) devient :

$$v_{i,j}^{k+1} = \chi \left[v_{i,j}^k + \Phi_1 r_{1i,j}^k (pbest_{i,j}^k - x_{i,j}^k) + \Phi_2 r_{2i,j}^k (gbest_j^k - x_{i,j}^k) \right] \quad (1.7)$$

Avec :

$$\chi = \frac{2}{|2 - \Phi - \sqrt{\Phi^2 - 4\Phi}|} \quad (1.8)$$

où $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, $\Phi \succ 4$.

Par observation on remarque que cette structure modifiée de l'algorithme OEP est équivalente à l'OEP original avec : $w \leftrightarrow \chi$, $c_1 \leftrightarrow \chi\Phi_1$ et $c_2 \leftrightarrow \chi\Phi_2$.

Avec de nombreux tests effectués dans [28], les valeurs optimales de Φ_1 , Φ_2 sont déterminés. Généralement, on prend $\Phi = 4.1$ et $\Phi_1 = \Phi_2 = 2.05$, ce qui donne un coefficient $\chi = 0.7298844$.

1.2.5 Critère d'arrêt

En effet, la convergence vers la solution optimale globale n'est pas garantie dans tous les cas. Il est donc important de doter l'algorithme d'une porte de sortie en définissant un nombre maximum d'itérations. Le programme s'arrête alors si et seulement si le nombre maximum d'itérations est atteint ou que la valeur du critère obtenue est acceptable pour l'utilisateur.

1.3 Application de l'algorithme OEP

Les algorithmes d'OEP ont été appliqués à des problèmes d'optimisation classiques telles que la planification, le problème de voyageur de commerce, l'apprentissage des ré-

seaux de neurones, et la répartition des tâches, à des applications hautement spécialisées telles que la puissance réactive et contrôle de tension [29], l'enregistrement d'image biomédicale [30], et même la composition de la musique [31]. Au cours des dernières années, l'algorithme OEP est devenu également un choix privilégié pour de nombreux chercheurs pour la manipulation optimisation multi-objectifs [32] et problèmes d'optimisation dynamique [33].

L'une des premières applications de l'OEP était l'évolution des structures de réseaux de neurones artificiels. Eberhart a utilisé l'OEP pour remplacer l'algorithme d'apprentissage traditionnel retro-propagation dans un perceptron multicouche [26]. En raison de son comportement de convergence rapide, l'utilisation de l'OEP pour l'apprentissage de réseau de neurones peut quelques fois économiser une quantité considérable de temps de calcul par rapport aux autres méthodes d'optimisation.

Le tableau 1.1 dans la page suivante montre une liste des exemples d'applications de l'algorithme d'OEP qui peuvent être trouvés dans la littérature.

1.4 OEP et hybridation

L'hybridation est une procédure consistant à combiner des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation, pour tirer profit des avantages qu'offre chaque méthode. Mais l'algorithme résultant risque d'hériter également de leurs faiblesses [25]. Dans ce qui suit on donne des exemples d'hybridation de l'algorithme d'OEP avec d'autres algorithmes.

En 1998, Angeline a proposé la première hybridation de l'algorithme OEP avec l'algorithme génétique [68] dont le but est de sélectionner les bonnes particules qui vont subir une mutation et d'éliminer les mauvaises particules. Puis, Lian *et al* ont proposé en 2006 une nouvelle version de l'algorithme OEP avec l'algorithme génétique nommé NPSO [69] dans laquelle ils ont intégré les opérateurs de croisement et de mutation dans les étapes de la version classique de l'algorithme OEP.

L'algorithme OEP est aussi hybridé avec les algorithmes de colonies de fourmis, tels que proposé par Shelokar *et al*, en 2007 [70], et Zang *et al*, en 2009 [71]. Dans ces approches hybrides l'algorithme de colonie de fourmis a été utilisé en tant que méthode de recherche locale permettant la mise à jour des positions des particules.

Enfin, il existe dans la littérature plusieurs méthodes hybridant l'algorithme OEP avec d'autres approches. Nous citons entre autres, OEP avec la recherche Tabou [72], [73]; OEP avec le recuit simulé [74]...etc.

Tableau 1.3: Une sélection représentative de l'application de l'OEP.

Problème	Auteur	Référence
-problème de voyageur de commerce	-G.C. Onwubolu et al.	[34]
-problème de sac à dos	-J. C. Bansal et al.	[35]
-affectation des tâche	-A. Salman et al.	[36]
-réseaux de neurones artificiels	-J. Kennedy et al.	[22]
	-R. Mendes et al.	[37]
	-A.v.E. Conradie et al.	[38]
	-V.G. Gudisz et al.	[39]
	- J-R. Zhang et al.	[40]
-bioinformatique	-E.S. Correa et al.	[41]
	-V.L. Georgiou et al.	[42]
-applications industriel	-S. Katare et al.	[43]
	-R. Marinke et al.	[44]
-puissance réactive et contrôle de tension	-H. Yoshida et al.	[29]
-commande par PID	-Z-L. Gaing	[45]
-commande par FOPID	-H. Ramezani et al.	[46]
	-Z. Bingul et al.	[47]
-commande par logique floue	-Z. Bingul et al.	[48]
-commande par mode de glissement	- H. Abderrezek et al.	[49]
	- M. Taherkhorsandi et al.	[50]
-commande par floue-mode de glissement	- R. Hooshmand et al.	[51]
-enregistrement d'image bio-médical	-M.P. Wachowiak et al.	[30]
-systèmes de puissance	-G.K. Venayagamoorthy	[52]
-applications électromagnétique	-S. Mikki et al.	[53]
-système PVT	-I. Tabet et al.	[54]
-problèmes multi objectif	-J. Moore et al.	[55]
	-C.A. Coello et al.	[56]
	-J.E. Fieldsend et al.	[57]
	-X. Hu et al.	[58]
	-K.E. Parsopoulos et al.	[59]
-problèmes dynamique	-A. Carlisle et al.	[60]
	-X. Hu et al.	[61]
	-R.C. Eberhart et al.	[62]
	-A. Carlisle et al.	[63]
	-T. Blackwell et al.	[64,65]
	-S. Jason et al.	[66]
	-D. Parrott et al.	[67]
	-X. Li et al.	[33]
-musique	-T.M. Blackwell et al.	[31]

1.5 Exemple de test

Afin de montrer la dépendance de l'algorithme OEP de ses paramètres, tels que, la dimension du problème (D), le nombre de particules (n) et le nombre d'itérations (k) ainsi que la complexité du problème, nous avons effectué une série de tests sur les deux fonctions (1.9) et (1.10). Ces deux fonctions possèdent chacune un optimum global égal à

0.

$$\text{Fonction Sphre} \begin{cases} F_1(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2 \\ x = [x_1, x_2, \dots, x_D] \in [-10, 10] \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\text{Fonction Rastrigin} \begin{cases} F_2(x) = \sum_{i=1}^D (x_i^2 - 10 \cdot \cos(2\pi x_i) + 10) \\ x = [x_1, x_2, \dots, x_D] \in [-5.12, 5.12] \end{cases} \quad (1.10)$$

Les paramètres Φ_1 , Φ_2 et χ de l'algorithme OEP utilisé dans cette étude sont fixés à 2.05, 2.05 et 0.7298 respectivement. La série de tests est effectuée avec les trois scénarios suivant :

- Le premier scénario : on fixe le nombre d'itérations k et le nombre de particules n à 100 et 20 respectivement, et on varie la dimension du problème D .
- Le deuxième scénario : on fixe le nombre d'itérations k , et la dimension du problème D à 100 et 10 respectivement, et on varie le nombre de particules n .
- Le troisième scénario : on fixe la dimension du problème D et le nombre de particules n à 10 et 20 respectivement, et on varie le nombre d'itérations k .

Après une série d'expériences de 5 essais chacune ; les résultats de simulation sont donnés par les figures 1.3, 1.4 et 1.5 et les tableaux 1.4, 1.5 et 1.6 :

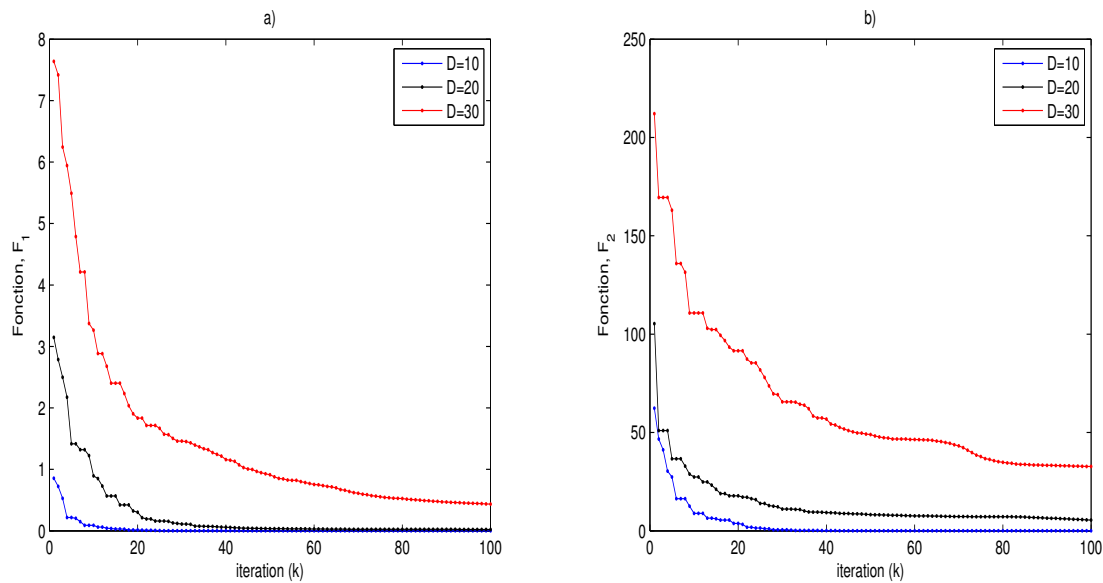


FIGURE 1.3: Résultats de simulation du scénario 1 ; a) pour la fonction F_1 , b) pour la fonction F_2

D'après les courbes d'évolution des deux fonctions présentées par les figures 1.3, 1.4 et 1.5 ; et les tableaux 1.4, 1.5 et 1.6, on peut remarquer que :

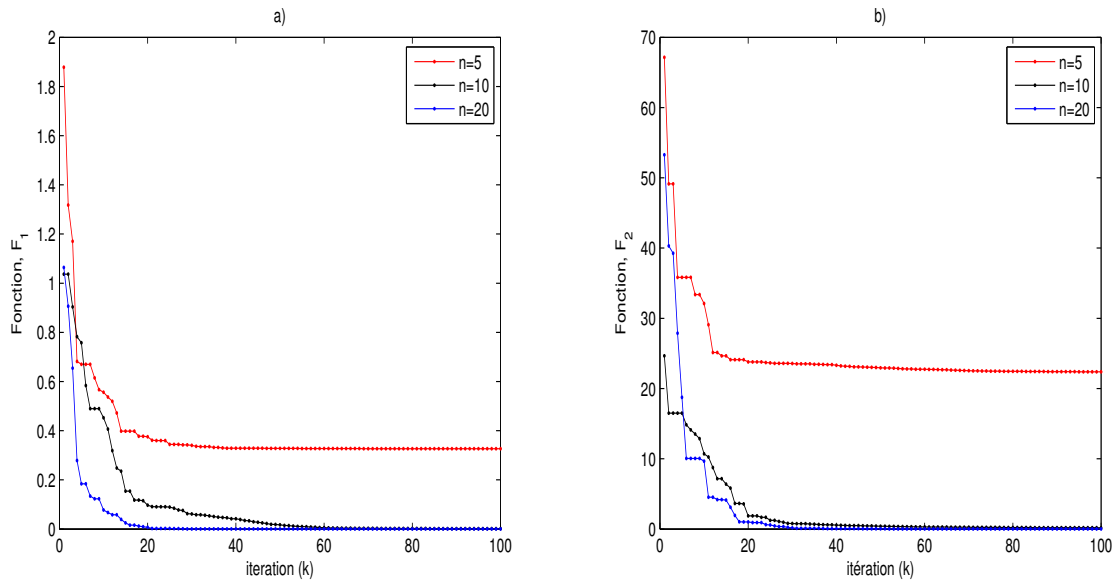


FIGURE 1.4: Résultats de simulation du scénario 2 ; a) pour la fonction F_1 , b) pour la fonction F_2

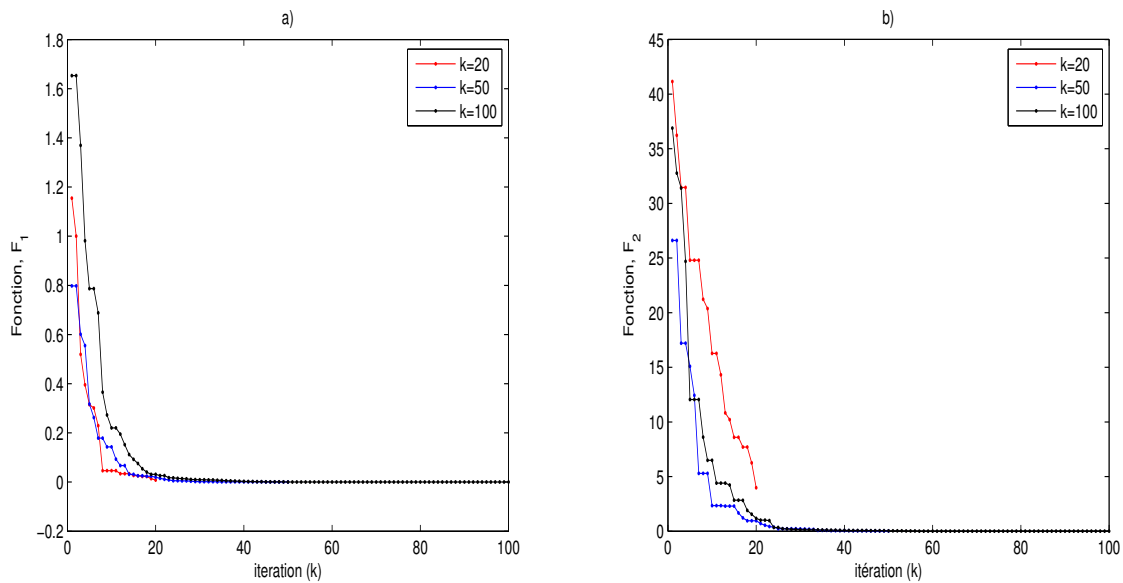


FIGURE 1.5: Résultats de simulation du scénario 3 ; a) pour la fonction F_1 , b) pour la fonction F_2

Tableau 1.4: Minimum global en fonction de la dimension du problème D .

Fonction	Minimum global	$D=10$	$D=20$	$D=30$
F_1	0	$2.044 * 10^{-9}$	0.02319	0.4354
F_2	0	0.0001421	5.45	32.73

- l'augmentation de la dimension du problème empêche l'algorithme de trouver l'optimum global.
- le bon choix du nombre de particules (n) peut aider à converger rapidement vers

Tableau 1.5: Minimum global en fonction du nombre de particules n .

Fonction	Minimum global	$n=5$	$n=10$	$n=20$
F_1	0	0.3268	0.001591	$3.23 * 10^{-7}$
F_2	0	22.38	0.1816	0.0008876

Tableau 1.6: Minimum global en fonction du nombre d'itérations k .

Fonction	Minimum global	$k=20$	$k=50$	$k=100$
F_1	0	0.008246	0.0003399	0.0001712
F_2	0	3.982	0.01735	$4.909 * 10^{-5}$

l'optimum global.

- selon la dimension du problème (D) et le nombre de particules (n), il faut donner un nombre suffisant d'itérations pour que l'algorithme converge vers l'optimum global.
- on peut observer aussi que dans la plupart des cas, l'optimum global de la fonction (F_1) est meilleur que celui de la fonction (F_2); alors, on constate qu'il y a également une relation de dépendance entre l'algorithme et la complexité du problème d'optimisation.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, un intérêt particulier a été porté à la méthode d'optimisation par essaim de particules (OEP). Cette dernière, inspirée des déplacements d'animaux en essaims, a connu un grand succès depuis sa découverte. Sa relative simplicité et son efficacité en font un des algorithmes les plus utilisés de nos jours. D'abord, nous avons commencé par citer son principe, son origine, sa formulation, ses applications ainsi que son hybridation avec d'autres méthodes d'optimisation. Pour montrer la dépendance de l'algorithme OEP de ces paramètres, nous avons donné un exemple de test sur deux fonctions usuelles. Dans les chapitres suivants nous fournirons plus de détail sur l'application de cet algorithme d'optimisation dans la commande des systèmes dynamiques non linéaires.

Chapitre 2

Sur la théorie du calcul d'ordre fractionnaire

2.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire est un sujet mathématique dont l'histoire remonte à plus de 300 ans. L'idée du calcul fractionnaire est connue depuis le calcul d'ordre entier ; la première référence étant probablement celle l'associant à Leibniz et de l'Hopital en 1695 où la dérivée d'ordre demi ($1/2$) de la fonction $f(t)$ par rapport à la variable t a été mentionnée. À l'heure actuelle, on assiste au développement rapide de nombreuses applications du calcul fractionnaire. Ces phénomènes mathématiques nous permettent de décrire et modéliser un objet réel d'une manière plus précis que les méthodes classiques "entières" ; car les objets réels sont généralement d'ordre fractionnaire [6], [75], [76]. Pourtant un exemple simple de mécanique des fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne. Dans ce chapitre on présente, les définitions de l'opérateur d'ordre fractionnaire les plus connues dans le domaine des mathématiques, les fonctions associées à ces définition, leurs principales propriétés qui nous seront utiles dans la suite de notre étude, la transformée de Laplace ainsi que les méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire. On présente aussi une vue générale sur les systèmes linéaires et non-linéaires d'ordre fractionnaire, leurs condition de stabilité ainsi que quelques approches de commande d'ordre fractionnaire, puis on termine par un exemple d'application.

Dans ce chapitre on présente, les définitions de l'opérateur d'ordre fractionnaire les plus

connues dans le domaine des mathématiques, les fonctions associées à ces définition, leurs principales propriétés qui nous seront utiles dans la suite de notre étude, la transformée de Laplace ainsi que les méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire. On présente aussi une vue générale sur les systèmes linéaires et non-linéaires d'ordre fractionnaire, leurs condition de stabilité ainsi que quelques approches de commande d'ordre fractionnaire, puis on termine par un exemple d'application.

2.2 Théorie de la dérivée d'ordre fractionnaire

2.2.1 Fonctions spécifiques pour la dérivée d'ordre fractionnaire

Dans la théorie du calcul fractionnaire, il existe deux fonctions jouant un rôle très important, telle que la fonction Gamma Euler et la fonction Mittag-Leffler [77] présentées ci-dessous.

2.2.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma. Cette fonction généralise la factorielle $n!$, et permet à n de prendre des valeurs non entières. La définition de la fonction Gamma sous forme d'intégrale est donnée par [78], [79] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0 \quad (2.1)$$

Il est évident que l'intégrale (2.1) converge pour tout $z \in C$, pour lequel $Re(z) > 0$. La formule de récurrence (2.2) est obtenue à partir de l'intégration par parties de (2.1).

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

Évidemment $\Gamma(1) = 1$, en utilisant la formule (2.2), on obtient pour $z = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1! \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2! \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3! \\ &\dots\dots\dots \\ \Gamma(n + 1) &= n.\Gamma(n) = n.(n - 1)! = n! \end{aligned} \quad (2.3)$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle a des pôles simples

pour $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

Son expression est :

$$\Gamma(z) = \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \frac{(-1)^2}{2!} \frac{1}{2+z} + \dots \quad (2.4)$$

Avec :

$$\varphi(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.5)$$

Ceci signifie que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend asymptotiquement vers l'infini.

2.2.1.2 La fonction Mittag-Leffler

Dans le calcul d'ordre entier la fonction exponentielle $\exp(z)$ joue un rôle important. De même, dans le calcul d'ordre fractionnaire la fonction Mittag-Leffler joue également un rôle très important [78].

Dans la littérature on distingue deux fonctions usuelles :

— La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre est donnée par la formule suivante :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0 \quad (2.6)$$

Cette fonction a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 [78].

La fonction exponentielle usuelle correspond à une valeur de $\alpha = 1$ [79].

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (2.7)$$

En 1953, la fameuse fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres $E_{\alpha,\beta}(z)$ a été introduite par Agarwal [80]. Sa définition fut modifiée plus tard par Erdélyi *et al.* [81] pour devenir,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.8)$$

2.2.2 Définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire

Les opérateurs fractionnaires differo-integral notés par ${}_a D_t^{\alpha}$, Où a et t sont les limites de l'opération et $\alpha \in R$ sont une généralisation de l'intégration et de la différenciation

des opérateurs d'ordre non entier. L'opérateur differo-intégral continu est donné par :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \text{pour } \alpha \succ 0 \\ 1 & \text{pour } \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^\alpha & \text{pour } \alpha \prec 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans la littérature, on trouve des différentes définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire, mais les plus couramment utilisés sont :

2.2.2.1 Définition de Riemann-Liouville (RL)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[a + \infty]$.

L'intégrale fractionnaire d'ordre α de f de borne inférieure à a est définie par [82] :

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

La dérivée fractionnaire d'ordre α de f est définie par [82] :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1-(m-\alpha)}} d\tau \quad (2.11)$$

Où le nombre entier m est tel que $m - 1 < \alpha < m$

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (2.10) comme suit :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \{ {}_a I_t^{(m-\alpha)} f(t) \} \quad (2.12)$$

2.2.2.2 Définition de Caputo

La définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo peut être écrite comme suit [76], [83] :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)}{(t - \tau)^{1-(m-\alpha)}} d\tau \quad (2.13)$$

Avec $m - 1 < \alpha < m$

Dans les conditions initiales homogènes les définitions de Riemann-Liouville, et Caputo sont équivalentes. Notons la dérivée d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville par ${}_a^{RL} D_t^\alpha T(t)$ et la définition de Caputo par ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$, alors la relation entre eux est :

$${}^{RL}D_t^\alpha T(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) \quad (2.14)$$

Les conditions initiales pour les équations différentielles d'ordre fractionnaires avec les dérivées de Caputo sont dans la même forme que pour les équations différentielles d'ordre entier. Il est un avantage parce que les problèmes d'application, exigent des définitions de dérivées fractionnaires, où il y a des interprétations scalaires de conditions initiales, qui contiennent $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ...etc [84].

2.2.2.3 Définition de Gründwald-Leitnikov (GL)

Une définition élémentaire de la dérivée entière d'une fonction f au sens de GL peut être formalisée de la façon suivante [76] :

$${}_a D_t^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f(t - k.h) \quad (2.15)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients binomiaux $\binom{m}{k}$ sont donnés par :

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \quad (2.16)$$

En remplaçant l'entier m par l'ordre fractionnaire $\alpha \in R^+$, et la formule (2.16) par l'expression suivante :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (2.17)$$

Γ étant la fonction Gamma.

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\alpha \succ 0$ de G-L est donc :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - k.h) \quad (2.18)$$

Où $N = \frac{t-a}{h}$,

Si f est causale, pour un pas de discrétisation h « petit », on peut écrire :

$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - k.h) \quad (2.19)$$

On montre plus précisément que dans le cas d'un échantillonnage la dérivation d'ordre α à l'instant $t_m = h.m$, où h est le pas d'échantillonnage, est donnée par :

$${}_a D_t^\alpha f(t_m) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f_{m-k} \quad (2.20)$$

Où $f_m = f(t_m)$,

Cette expression permet de déterminer numériquement par discrétisation la dérivation non entière d'une fonction f causale.

2.2.3 Quelques propriétés de la dérivée d'ordre fractionnaire

Les propriétés principales des dérivées/intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes [4], [76], [78], [84], [85] :

- Si $f(t)$ est une fonction analytique de t , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire ${}_0 D_t^\alpha f(t)$ est une fonction analytique de t , α .
- Pour $\alpha = n$, où n est un nombre entier, l'opération ${}_0 D_t^\alpha f(t)$ donne le même résultat que la différenciation classique d'ordre entier n .
- Pour $\alpha = 0$, ${}_0 D_t^\alpha f(t) = f(t)$
- La différenciation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérateurs linéaires :

$${}_a D_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \mu {}_a D_t^\alpha g(t) \quad (2.21)$$

- La dérivée d'ordre fractionnaire d'une intégrale fractionnaire de $f(t)$ donne :

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^{-\alpha} f(t)) = f(t) \quad (2.22)$$

- L'intégrale d'ordre fractionnaire d'une dérivée fractionnaire de $f(t)$ au sens de Caputo donne :

$${}_a D_t^{-\alpha} ({}_a D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \quad (2.23)$$

- L'intégral d'ordre fractionnaire d'une dérivée fractionnaire de $f(t)$ au sens de RL donne :

$${}_0D_t^{-\alpha}({}_0D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=1}^m \left[{}_0D_t^{\alpha-k} f(t) \right]_{t=0} \frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}, \quad m-1 < \alpha < m \quad (2.24)$$

— si $f(t)$ est continue pour $t \geq 0$ l'égalité suivante est vérifiée :

$$D_t^{-\alpha}(D_t^{-\beta} f(t)) = D_t^{-\beta}(D_t^{-\alpha} f(t)) = D_t^{-\alpha-\beta} f(t), \quad \alpha, \beta \in R^+ \quad (2.25)$$

— L'opérateur d'ordre fractionnaire de Caputo est équivalent à $(m - \alpha)$ -fois intégrations après la différenciation d'ordre m .

$$D_t^\alpha(f(t)) = D_t^{(\alpha-m)} \frac{d^m}{dt^m}(f(t)) \quad (2.26)$$

Avec $m - 1 < \alpha < m$, $m \in N$, $\alpha \in R$

— La définition de RL peut être réécrite sous la forme suivante

$${}_aD_t^\alpha(f(t)) = \frac{d^m}{dt^m}({}_aD_t^{(\alpha-m)} f(t)) \quad (2.27)$$

Avec $m - 1 < \alpha < m$, $m \in N$, $\alpha \in R$

— La loi de l'indice additif (propriété semi-groupe).

La dérivée d'ordre fractionnaire commute avec la dérivée d'ordre entier

$$\frac{d^m}{dt^m}({}_aD_t^\alpha f(t)) = {}_aD_t^\alpha \left(\frac{d^m f(t)}{dt^m} \right) = {}_aD_t^{\alpha+m} f(t) \quad (2.28)$$

sous la condition de $t = a$, on a $f^k(a) = 0$, ($k = 0, 1, 2 \dots m - 1$). La relation ci-dessus est vérifiée.

— Dérivées fractionnaires successives

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha f(t) &= {}_aD_t^{\alpha_1} {}_aD_t^{\alpha_2} {}_aD_t^{\alpha_3} \dots {}_aD_t^{\alpha_n} f(t) \\ \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \quad 0 < \alpha_i < 1 \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'opérateur de dérivée fractionnaire D_t^α peut être de GL, RL ou de Caputo.

2.2.4 Transformée de Laplace de l'intégrale et de la dérivée d'ordre fractionnaire .

La simulation numérique d'une équation différentielle fractionnaire n'est pas aussi simple que celle d'une équation différentielle ordinaire. Le procédé de transformation de

Laplace est souvent utilisé comme un outil pour la résolution des problèmes qui se posent dans l'ingénierie [4], [86].

2.2.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous allons commencer par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ défini par (2.10), que nous pouvons écrire comme une convolution des fonctions $g(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $f(t)$ [78] :

$$\begin{aligned} {}_0I_t^\alpha f(t) &= {}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

La transformée de Laplace de la fonction $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ est [76], [78] :

$$G(s) = L\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}; s\right) = s^{-\alpha} \quad (2.31)$$

s étant l'opérateur de Laplace égal à js .

Par conséquent, en utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution donnée par (2.32), on obtient la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville et Grunwald-Letnikov donnée par (2.33) :

$$L\{f(t) * g(t); s\} = F(s).G(s) \quad (2.32)$$

$$L\{{}_0D_t^{-\alpha} f(t); s\} = s^{-\alpha}.F(s) \quad (2.33)$$

Remarque : pour plus de détail sur les éléments de base de la transformée de Laplace voir [78].

2.2.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

— Dérivée de Riemann-Liouville

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville pour $m-1 < \alpha < m$ est donnée par la formule suivante [4], [76], [84], [86] :

$$L\{{}_0D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{(m-1)} s^k \left[{}_0D_t^{(\alpha-k-1)} f(t) \right]_{t=0} \quad (2.34)$$

Malgré que la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville soit bien connue ; elle souffre néanmoins d'une limitation pratique due à l'absence de

l'interprétation physique des valeurs limites des dérivés fractionnaire pour $t = 0$. Jusqu'à présent, cette interprétation n'a été résolue que partiellement dans le travail accompli par Heymans et Podlubny, en 2006 [87].

— Dérivée de Caputo

La démonstration de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo est donnée dans [76] par la formule suivante :

$$L \{ {}_0D_t^\alpha f(t); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{(m-1)} s^{(\alpha-k-1)} f^{(k)}(0) \quad (2.35)$$

Avec $m - 1 < \alpha < m$

L'avantage de cette méthode est qu'il existe une interprétation physique des conditions initiales (par exemple, $f(0)$ est la position initiale, $f'(0)$ est la vitesse initiale et $f''(0)$ est l'accélération initiale...etc) puisque les conditions initiales, qu'on peut remarquer, sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine [76], [79].

L'avantage de cette méthode est qu'il existe une interprétation physique des conditions initiales (par exemple, $f(0)$ est la position initiale, $f'(0)$ est la vitesse initiale et $f''(0)$ est l'accélération initiale...etc) puisque les conditions initiales, qu'on peut remarquer, sont données en fonction d'une dérivée entière évaluée à l'origine [76], [79].

— Dérivée de Gröndwald-Leitnikov

$$L ({}_0D_t^\alpha f(t)) = s^\alpha . F(s) \quad (2.36)$$

Remarque : Pour des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace des dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville et Caputo sont réduites à celle de Gröndwald-Leitnikov.

2.3 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Depuis les années soixante (1960) quelques chercheurs se sont intéressés à l'idée d'obtenir des modèles approximatés d'ordre entier pour les systèmes d'ordre non entier ou fractionnaire. Parmi les méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire trouvées dans la littérature, on peut citer les deux catégories principales suivantes :

Les méthodes d'approximations utilisant l'expansion des fractions continues (CFE) et

des techniques d'interpolation. Les plus importantes méthodes de cette catégorie sont, la méthode de Carlson [88], et la méthode de Matsuda [89].

-Les méthodes d'approximation utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification.

Les deux méthodes les plus connues et utilisées sont celles proposées par Charef [90, 91] et Oustaloup [92]. Cette dernière est plus élaborée et plus pratique pour les approximations des transferts d'ordre fractionnaire. C'est pourquoi nous l'avons utilisée pour l'implémentation de nos schémas de commande, et nous la présenterons par la suite.

2.3.1 Méthode d'Oustaloup

La méthode proposée par Oustaloup dans [92] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre non entier (fractionnaire) $G(s) = s^\alpha$ avec $\alpha \in R$, par une fonction rationnelle (appelée aussi filtre récursif d'Oustaloup) en utilisant une distribution récursive de zéros et de pôles d'ordre entier, répartis dans une bande de fréquence limitée.

L'approximation de l'opérateur s^α dans une bande de fréquence $[w_b, w_h]$ donnée par :

$$\hat{G}(s) = \left(\frac{w_u}{w_h}\right)^\alpha \cdot \prod_{k=-N}^N \frac{\left(1 + \frac{s}{w_k}\right)}{\left(1 + \frac{s}{w_k}\right)} \quad (2.37)$$

Avec : w_b et w_h sont respectivement les basses et hautes fréquences.

$$\begin{aligned} w_u &= \sqrt{w_b \cdot w_h} \\ w_k' &= w_b \cdot \left(\frac{w_h}{w_b}\right)^{(k+N+0.5(1-\alpha))/(2N+1)} \\ w_k &= w_b \cdot \left(\frac{w_h}{w_b}\right)^{(k+N+0.5(1+\alpha))/(2N+1)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$(2N + 1)$ est l'ordre du filtre.

Ce filtre est donné avec une simplification par : [93]

$$\hat{G}(s) = K \cdot \prod_{k=-N}^N \frac{(s + w_k')}{(s + w_k)} \quad (2.39)$$

Avec $K = w_h^\alpha$

Dans cette thèse, pour l'approximation de l'opérateur fractionnaire s^α nous considérons $N = 2$ et la marge d'approximation $w = (10^{-2}; 10^2)$ rad/sec.

À titre d'illustration, nous prenons les deux exemples suivants :

2.3.1.1 Exemple d'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $1/s^{0.5}$

La fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{s^{0.5}} \quad (2.40)$$

Avec E l'entrée de l'intégrateur et Y sa sortie.

L'approximation de la fonction de transfert $G(s)$ en utilisant le filtre d'Oustaloup avec ces paramètres donnés ci-dessus est donnée par la fonction de transfert rationnelle suivante :

$$G_a(s) = \frac{Y_a(s)}{E_a(s)} = \frac{0.1s^5 + 7.497s^4 + 76.85s^3 + 121.8s^2 + 29.85s + 1}{s^5 + 29.85s^4 + 121.8s^3 + 76.85s^2 + 7.497s + 0.1} \quad (2.41)$$

Le tracé de Bode des fonctions $G(s)$ et $G_a(s)$ est présenté dans la figure 2.1.

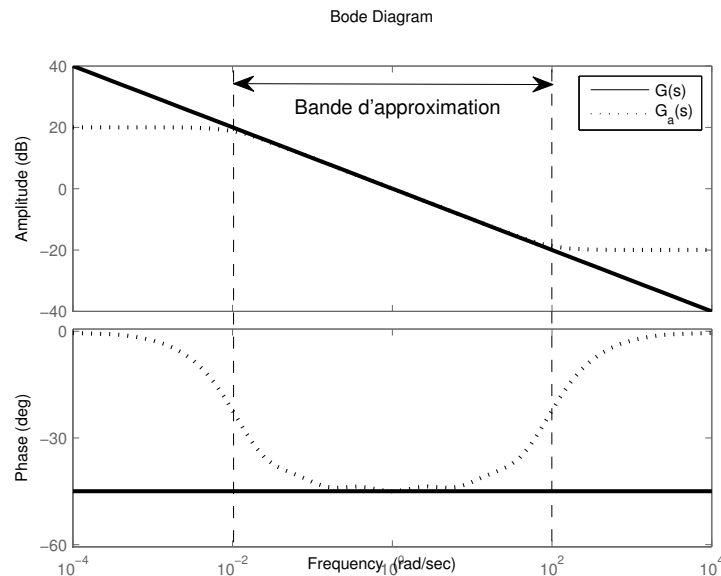


FIGURE 2.1: tracés de Bode (amplitude et phase) de l'intégrateur d'ordre fractionnaire $1/s^{0.5}$ et de la fonction rationnelle de son approximation.

On peut observer que le tracé de Bode de la fonction rationnelle d'approximation $G_a(s)$ converge vers le tracé de Bode de la fonction irrationnelle $G(s)$; la pente de la fonction d'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire à une pente de -10 dB/décade (-20×0.5), et la phase de -45° , ($-0.5 \times \pi/2$) ce qui implique la validité de l'approximation.

La figure 2.2 montre l'intégration d'ordre fractionnaire d'un signal d'entrée rampe ($e_a(t) = t$) pour des différents ordres :

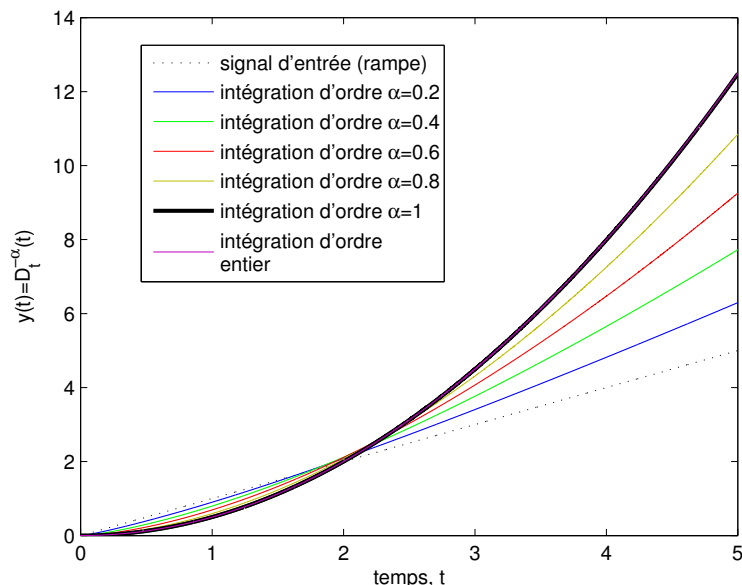


FIGURE 2.2: Intégration d'ordre fractionnaire ($1/s^\alpha$) d'un signal d'entrée rampe pour différents ordres.

D'après la figure 2.2, il est clair que pour $\alpha = 1$ le résultat de l'intégration d'ordre fractionnaire se superpose avec l'intégrateur d'ordre entier, ce qui justifie la bonne approximation et la validité de la méthode.

2.3.1.2 Exemple d'approximation de dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.5}$

La fonction de transfert de dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = s^{0.5} \quad (2.42)$$

L'approximation de la fonction de transfert $H(s)$ en utilisant le filtre d'Oustaloup est donnée par la fonction de transfert rationnelle $H_a(s)$ suivante :

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{E_a(s)} = \frac{10s^5 + 298.5s^4 + 1218s^3 + 768.5s^2 + 74.97s + 1}{s^5 + 74.97s^4 + 768.5s^3 + 1218s^2 + 298.5s + 10} \quad (2.43)$$

Le tracé de Bode des fonctions $H(s)$ et $H_a(s)$ est présenté dans la figure 2.3.

On peut observer que le tracé de Bode de la fonction rationnelle d'approximation $H_a(s)$ converge vers le tracé de Bode de la fonction irrationnelle $H(s)$; la pente de la fonction

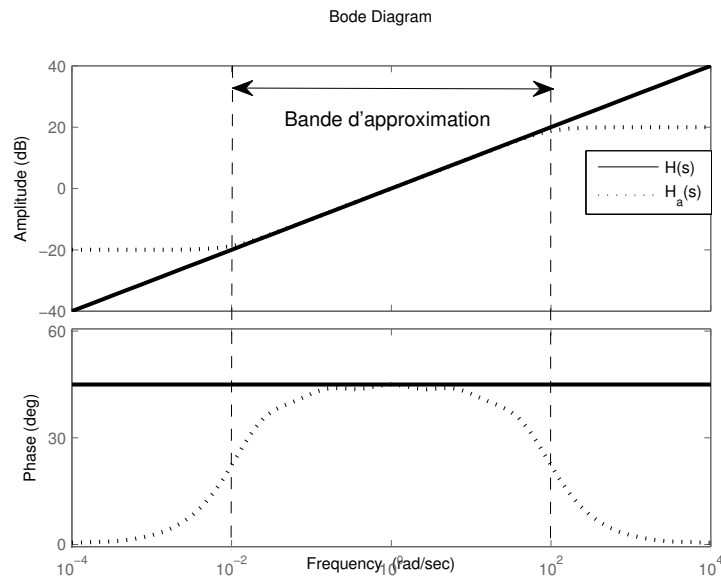


FIGURE 2.3: tracés de Bode (amplitude et phase) de dérivateur d'ordre fractionnaire $s^{0.5}$ et de la fonction rationnelle de son approximation.

d'approximation de la dérivée d'ordre fractionnaire à une pente de 10 dB/décade (20×0.5), et la phase de 45° , ($0.5 \times \pi / 2$) ce qui implique la validité de l'approximation.

La figure 2.4 montre la dérivation d'ordre fractionnaire d'un signal d'entrée ($e_a(t) = t$) pour des différents ordres :

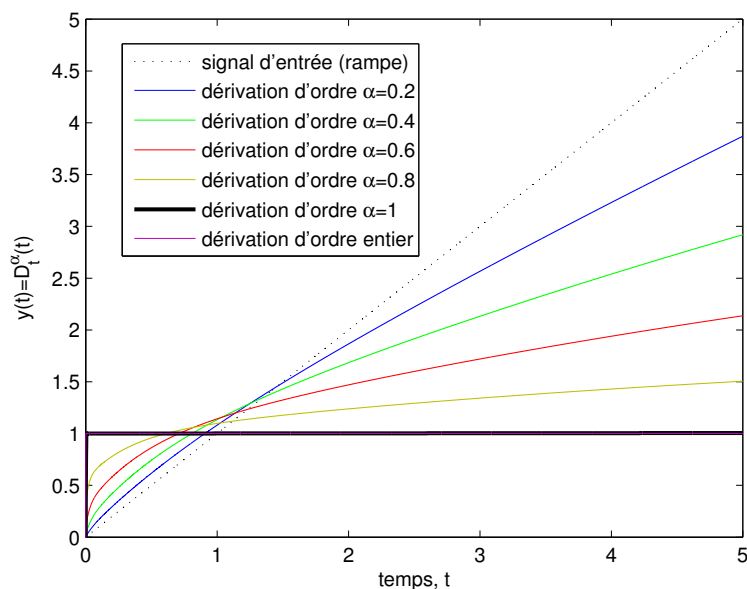


FIGURE 2.4: Dérivateur d'ordre fractionnaire (s^α) d'un signal d'entrée rampe pour différents ordres.

D'après la figure 2.4 il est clair que pour $\alpha = 1$, la dérivée d'ordre fractionnaire se

superpose avec la dérivée d'ordre entier, ce qui justifie la bonne approximation et la validité de la méthode.

Remarque : Lorsque l'approximation d'ordre entier est utilisée pour approcher les modèles de fonction de transfert d'ordre fractionnaires avec l'utilisation du filtre récursif d'Oustaloup, le système d'ordre entier résultant pourrait avoir un extrêmement élevé. En effet, une approximation d'ordre plus réduit peut être obtenue en utilisant la méthode de réduction optimale du modèle [94].

2.4 Systèmes d'ordre fractionnaire

Après avoir établi les définitions fondamentales du calcul fractionnaire et leurs propriétés dans les parties précédentes, cette partie portera sur l'analyse des systèmes décrits par des équations d'ordre fractionnaire. Cette analyse va être étudiée comme dans les systèmes d'ordre entier en utilisant la théorie de la commande dans différentes représentations temporelles ou fréquentielles pour l'évaluation des performances et de la stabilité.

2.4.1 Systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

2.4.1.1 Equation différentielle et fonction de transfert

Un système d'ordre fractionnaire peut être décrit par une équation différentielle fractionnaire de la forme :

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) \\ = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Avec $u(t)$ et $y(t)$ désignant respectivement l'entrée et la sortie du système, $D_t^\alpha \equiv {}_0D_t^\alpha$ représente la dérivée d'ordre fractionnaire de GL, RL ou Caputo [76]. La fonction de transfert d'ordre fractionnaire *non commensurable* correspondante est de la forme suivante [84] :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} = \frac{Q(s^{\beta_k})}{P(s^{\beta_k})} \quad (2.45)$$

Ou dans le domaine fréquentiel sous la forme [95] :

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_m (jw)^{\beta_m} + b_{m-1} (jw)^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 (jw)^{\beta_0}}{a_n (jw)^{\alpha_n} + a_{n-1} (jw)^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 (jw)^{\alpha_0}} \\ &= \frac{Q((jw)^{\beta_k})}{P((jw)^{\beta_k})} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Avec $a_k (k = 0, \dots, n)$, $b_k (k = 0, \dots, m)$, sont des constantes, et $\alpha_k (k = 0, \dots, n)$, $\beta_k (k = 0, \dots, m)$, sont des nombres réels ou rationnel arbitraires, et sans perte de généralité, ils peuvent être disposés de cette façon : $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$, et $\beta_n > \beta_{n-1} > \dots > \beta_0$.

Dans le cas où tous les exposants de s sont multiples d'une certaine valeur réelle α (ordres commensurables), la fonction de transfert (2.45) peut être réécrite sous la forme [96] :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} \quad (2.47)$$

Où m et n sont des entiers tels que $m \leq n$.

Un système d'ordre fractionnaire décrit par une fonction de transfert de la forme (2.47) est appelé système commensurable [96].

2.4.1.2 Représentation d'état

Le système linéaire d'ordre fractionnaire invariant dans le temps peut également être représenté par le modèle d'espace d'état suivant [84] :

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Avec $x \in R^n$, $u \in R^r$ et $y \in R^p$ sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie, $A \in R^{n.n}$, $B \in R^{n.r}$, $C \in R^{p.n}$, $D \in R^{p.r}$ sont toutes des matrices ou des vecteurs à éléments constants et de dimensions appropriées. $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ sont les ordres fractionnaires. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$, le système (2.48) est appelé un système d'ordre *commensurable*, sinon il est un système d'ordre *non commensurable*.

Le modèle d'espace d'état d'ordre fractionnaire peut être converti à la forme de fonction de transfert d'ordre fractionnaire en utilisant la relation suivante [97].

$$G(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D \quad (2.49)$$

Avec I représentant la matrice unitaire de dimension $n.n$.

Associées à la fonction de transfert (2.47), trois représentations canoniques d'espace d'état peuvent être proposées. Elles sont similaires à celles [98] développées pour les systèmes d'équations différentielles d'ordre entier [99].

— **La forme canonique commandable**

Dans un premier lieu, nous définissons le premier état en termes de sa transformée de Laplace comme suit :

$$X_1(s) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\alpha)^k} U(s) \quad (2.50)$$

Les éléments restants du vecteur d'état de manière récursive à partir de celui-ci comme $x_{i+1} = D^\alpha x_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, la représentation d'état exprimée sous la forme canonique commandable, est donnée par les équations suivante [99] :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.51)$$

$$y = [b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (2.52)$$

Avec $b_i = 0$ pour $m < i < n$

— **Forme canonique observable**

De l'équation (2.47), nous regroupons du côté gauche de l'équation les termes qui contiennent les puissances de s et du côté droit les termes qui n'en ont pas, nous avons

$$\underbrace{s^\alpha \left[((s^\alpha)^{n-1} + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-2} + \dots + a_1) Y(s) - (b_n (s^\alpha)^{n-1} + \dots + b_1) U(s) \right]}_{X(1)} \quad (2.53)$$

$$= b_0 U(s) - a_0 Y(s)$$

A partir de la définition de X_1 dans l'expression donnée ci-dessus, la première équation d'état et les équations utilisées pour définir les états suivants sont obtenus :

$$\begin{aligned} D^\alpha x_1(t) &= b_0 u(t) - a_0 y(t) \\ X_1(s) &= ((s^\alpha)^{n-1} + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-2} + \dots + a_1)Y(s) - (b_n(s^\alpha)^{n-1} + \dots + b_1)U(s) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Par répétition dans la deuxième équation de (2.54) le réarrangement réalisé en (2.53) donne :

$$\begin{aligned} & s^\alpha \underbrace{\left[((s^\alpha)^{n-2} + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-3} + \dots + a_2)Y(s) - (b_n(s^\alpha)^{n-2} + \dots + b_2)U(s) \right]}_{X(2)} \\ &= X_1(s) + b_1 U(s) - a_1 Y(s) \end{aligned} \quad (2.55)$$

A partir de la définition de X_2 dans l'expression donnée ci-dessus, la deuxième équation d'état et les équations utilisées pour définir les états suivants sont obtenus :

$$\begin{aligned} D^\alpha x_2(t) &= x_1(t) + b_1 u(t) - a_1 y(t) \\ X_2(s) &= ((s^\alpha)^{n-2} + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-2} + \dots + a_2)Y(s) - (b_n(s^\alpha)^{n-2} + \dots + b_2)U(s) \end{aligned} \quad (2.56)$$

La répétition de cette procédure jusqu'à ce que x_n est définie, nous obtenons enfin :

$$\begin{aligned} D^\alpha x_n(t) &= x_{n-1}(t) + b_{n-1} u(t) - a_{n-1} y(t) \\ X_n(s) &= Y(s) - b_n U(s) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Notons que la dernière expression de (2.57) est l'équation de sortie.

En remplaçant y par l'équation de sortie dans la première des équations (2.54), (2.56), (2.57), et en réarrangeant les équations d'état d'ordre fractionnaire ci-dessus, la forme canonique observables est obtenue ensuite sous forme :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} - b_n a_{n-2} \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u \quad (2.58)$$

$$y = [0, 0, \dots, 0, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (2.59)$$

Avec $b_i = 0$ pour $m \prec i \prec n$

— **Forme canonique modale**

Effectuant l'expansion en fractions partielles de (2.47) en fonctions de s^α , et supposons que le premier pôle λ_1 est de multiplicité r et les $n-r$ pôles restant sont de multiplicité 1, on peut donc écrire :

$$Y(s) = \left[b_n + \frac{\rho_1}{(s^\alpha - \lambda_1)^r} + \dots + \frac{\rho_{r-1}}{(s^\alpha - \lambda_1)^2} + \frac{\rho_r}{(s^\alpha - \lambda_1)} + \frac{\rho_{r+1}}{(s^\alpha - \lambda_{r+1})} + \dots + \frac{\rho_n}{(s^\alpha - \lambda_n)} \right] U(s) \quad (2.60)$$

Les variables d'état sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{(s^\alpha - \lambda_1)^r} U(s) = \frac{1}{s^\alpha - \lambda_1} X_2(s), \\ X_2(s) &= \frac{1}{(s^\alpha - \lambda_1)^{r-1}} U(s) = \frac{1}{s^\alpha - \lambda_1} X_3(s), \\ &\vdots \\ X_{r-1}(s) &= \frac{1}{(s^\alpha - \lambda_1)^2} U(s) = \frac{1}{s^\alpha - \lambda_1} X_r(s), \\ X_r(s) &= \frac{1}{s^\alpha - \lambda_1} U(s), \\ X_{r+1}(s) &= \frac{1}{s^\alpha - \lambda_{r+1}} U(s), \\ X_n(s) &= \frac{1}{s^\alpha - \lambda_n} U(s), \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dans l'ensemble des équations ci-dessus, les équations des premiers $(r - 1)$ états, font que $D^\alpha x_i = \lambda_1 x_i + x_{i+1}$, $1 \leq i \prec r$, et les équations des états restants font que $D^\alpha x_i = \lambda_i x_i + u$, $r \leq i \prec n$, (où il est supposé que $\lambda_r = \lambda_1$).

Tenant en compte ces relations et de (2.60), la forme canonique modale est donnée par :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_r \\ D^\alpha x_{r+1} \\ \vdots \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{r+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.62)$$

$$y = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r, \rho_{r+1}, \dots, \rho_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (2.63)$$

Avec $b_n = 0$ si $m < n$.

Pour plus de détail voir l'exemple illustratif donné dans [99].

Remarque : D'une manière similaire aux concepts conventionnels de commandabilité et observabilité, la commandabilité et l'observabilité dans le cas d'un système d'ordre fractionnaire est définie comme suit [100] :

Le système (2.48) peut être commandé sur $[t_0, t_f]$, si la matrice de commandabilité C_a (2.64) est de rang n .

$$C_a = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2.64)$$

Le système (2.48) est observable sur $[t_0, t_f]$ si la matrice d'observabilité C_o (2.65) est de rang n .

$$C_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

2.4.1.3 Condition de stabilité

Le système donné par la représentation d'état (2.48) est stable si la condition suivante est vérifiée (voir aussi figure 2.5) [18] :

$$|\arg(\text{eig}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad (2.66)$$

Avec $\text{eig}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de la matrice A .

Dans ce cas, les composantes de l'Etat convergent vers 0 comme $t^{-\alpha}$.

Remarque : Les éléments de $G(s)$ donnée par l'équation (2.49) sont des fonctions de transfert avec un dénominateur commun donné par :

$$\phi(s^\alpha) = \det(s^\alpha I - A) \quad (2.67)$$

Notons que p_i sont les pôles du système (2.49). Ils sont définis comme la solution de l'équation $\phi(s^\alpha) = 0$. Ensuite, il se déduit aisément de (2.67) que les pôles du système peuvent être obtenus à partir :

$$p_i = \lambda_i^{1/\alpha} \quad (2.68)$$

Avec λ_i , $1 \leq i \leq n$ étant les valeurs propres de la matrice A .

La condition de stabilité dans le sens BIBO (Bounded Input-Bounded Output) est obtenue si les pôles du système sont situés dans le demi plan négative du plan complexe s ($|\arg(p_i)| > \frac{\pi}{2}$).

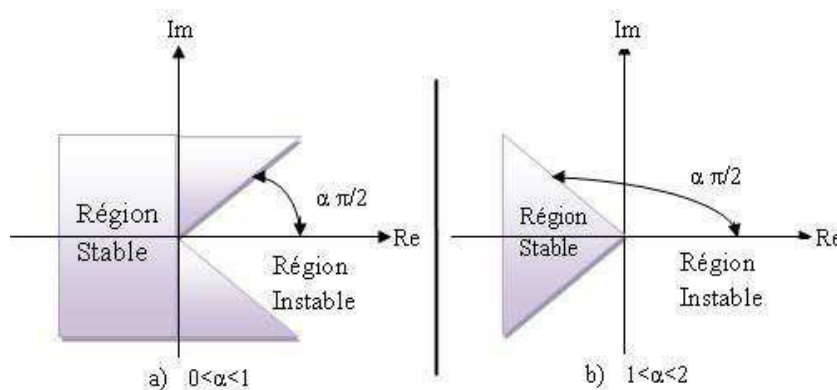


FIGURE 2.5: Région de stabilité dans le plans (s^α) pour un système d'ordre fractionnaire.

2.4.2 Systèmes non linéaire d'ordre fractionnaire

Le système non linéaire d'ordre fractionnaire est donné par la forme générale comme suit [84] :

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha_i} x_i(t) &= f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t), \\ x_i(0) &= c_i, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.69}$$

Avec : f_i sont des fonctions non linéaires, c_i les conditions initiales.

Les points d'équilibre du système (2.69) sont calculés en résolvant l'équation suivante :

$$f_i(x) = 0 \tag{2.70}$$

Et nous supposons que $E^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est le point d'équilibre du système (2.69).

— **Condition de stabilité**

La stabilité du système non linéaire d'ordre fractionnaire est très complexe et différente du système linéaire d'ordre fractionnaire. Il existe de nombreuses définitions de la stabilité Pour les systèmes non linéaires. L'idée de base a été formulée par A. M. Lyapunov.

Comme mentionné dans [18], la stabilité exponentielle ne peut pas être utilisée pour caractériser la stabilité asymptotique de ces systèmes ; donc de nouvelles définitions ont été introduites.

— **Definition 2.1 :**

La trajectoire $x(t) = 0$ du système (2.69) est $t^{-\alpha}$ asymptotiquement stable s'il existe un nombre réel positif α tel que :

$$\forall \|x(t)\| \text{ avec } t \leq t_0, \exists N(x(t)), \text{ telque } \forall t \geq t_0, \|x(t)\| \leq Nt^{-\alpha} \tag{2.71}$$

Le fait que les composantes de $x(t)$ convergent lentement vers 0 suivant $t^{-\alpha}$ conduit à des systèmes fractionnaires parfois appelés systèmes de mémoire à long terme. La loi de stabilité $t^{-\alpha}$ est un cas particulier de la stabilité de Mittag-Leffler [101].

— **Théorème 2.1 :**

Selon le théorème de stabilité définie dans [102], les points d'équilibre sont asymptotiquement stables pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \dots \equiv \alpha$, si toutes les valeurs propres $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ de la matrice Jacobienne $J = \partial f / \partial x$, où $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ évaluée à E^* , satisfont la condition [103, 104].

$$|\arg(\text{eig}(J))| = |\arg(\lambda_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.72}$$

— **Théorème 2.2 [101] :**

Soit $x = 0$ le point d'équilibre du système de Caputo ou RL suivant :

$$D_t^\alpha x(t) = f(x, t) \quad (2.73)$$

où $f(x, t)$ satisfait la condition Lipschitzienne avec constante de Lipschitz $l > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$. Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov $V(t, x(t))$ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|x\|^a &\leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\| \\ \dot{V}(t, x) &\leq -\alpha_3 \|x\| \end{aligned} \quad (2.74)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et a sont des constantes positives et $\|\cdot\|$ désigne la norme. Ensuite, le point d'équilibre du système (2.73) est Mittag-Leffler (asymptotique) stable.

2.5 Commandes robustes d'ordre fractionnaire

Peut-être que le premier signe du potentiel de la commande robuste d'ordre fractionnaire, mais sans utiliser le terme "fractionnaire", est apparu avec Bode [105, 106]. Un problème clé sur la conception d'un amplificateur à retour a été de concevoir une boucle de retour de sorte que la performance de la boucle fermée soit insensible aux variations dans le gain de l'amplificateur. Bode a présenté une solution élégante à ce problème de conception robuste, qu'il a appelé la caractéristique idéale de coupure (en anglais, ideal cutoff characteristic), actuellement connue comme la fonction de transfert idéal de Bode (en anglais, Bode's ideal loop transfer function [99]), dont le tracé de Nyquist est une ligne droite passant par l'origine donnant une marge de phase insensible aux variations du gain de l'amplificateur. L'application de cette approche pour la commande des systèmes a été introduite par [107], et [108].

En ce qui concerne la commande automatique, Oustaloup et ses collègues ont étudié les algorithmes d'ordre fractionnaire pour la commande des systèmes dynamiques et ont démontré la performance supérieure de la Commande Robuste d'Ordre Non Entier (CRONE) par rapport au régulateur PID classique. Trois stratégies bien distinctes assurant d'excellentes performances de robustesse ont fait l'objet de développements théoriques et technologiques importants, Chacune d'elles définit une génération de la commande CRONE [109].

Podlubny [10] a proposé une généralisation du régulateur PID, à savoir le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$, impliquant un intégrateur d'ordre λ et un dérivateur de l'ordre μ . Il a également démontré la meilleure réponse de ce type de commande, en comparaison avec le régulateur

PID classique, lorsqu'il est utilisé pour la commande des systèmes d'ordre fractionnaire. Une approche de domaine fréquentiel en utilisant les régulateurs PID d'ordre fractionnaire a également été étudiée dans [110].

Le calcul fractionnaire s'étend également à d'autres types de commandes différentes du PID. Pour les commandes H_2 et H_∞ , par exemple, [111] traite le calcul de la norme H_2 d'un système SISO d'ordre fractionnaire, et [112] a traité la minimisation de la norme des contrôleurs H_2 et H_∞ pour les systèmes d'ordre fractionnaire.

Les applications du calcul fractionnaire dans la commande des systèmes sont nombreuses. Dans [113], la commande des structures viscoélastiques amortie est présentée. Les applications de la commande à une transmission flexible [7], à une suspension active [114], à un convertisseur abaisseur [11, 115], à un actionneur hydraulique [116], à un bras manipulateur flexible [117], à des robots rigides [118], supervision de la ferme éolienne [119], et à système thermique [120] sont aussi disponibles dans la littérature.

2.5.1 La commande par PID d'ordre fractionnaire ($PI^\lambda D^\mu$)

Le régulateur PID d'ordre fractionnaire ($PI^\lambda D^\mu$) a été proposée dans [10, 76] comme une généralisation du régulateur PID classique avec un intégrateur d'ordre réel λ et dérivateur d'ordre réel μ . La fonction de transfert de ce régulateur PID d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace prend cette forme [10], [121] :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + k_i s^{-\lambda} + k_d s^\mu, \quad (\lambda, \mu \in R^+) \quad (2.75)$$

k_p étant le gain proportionnel, k_i le gain d'intégrateur et k_d le gain du dérivateur.

Comme présenté dans la figure 2.6, la structure interne du régulateur PID d'ordre fractionnaire avec la structure parallèle se compose des actions proportionnelle, intégrale, et dérivée :

La fonction de transfert (2.75) correspond dans le domaine temporel à l'équation différentielle d'ordre fractionnaire (2.76).

$$u(t) = k_p e(t) + k_i D_t^{-\lambda} e(t) + k_d D_t^\mu e(t) \quad (2.76)$$

Comme il est montré sur la figure 2.7, le régulateur PID fractionnaire ($PI^\lambda D^\mu$) généralise le régulateur PID classique et l'étend du point au plan. Cette extension offre d'avantage de flexibilité dans la conception des commandes par PID.

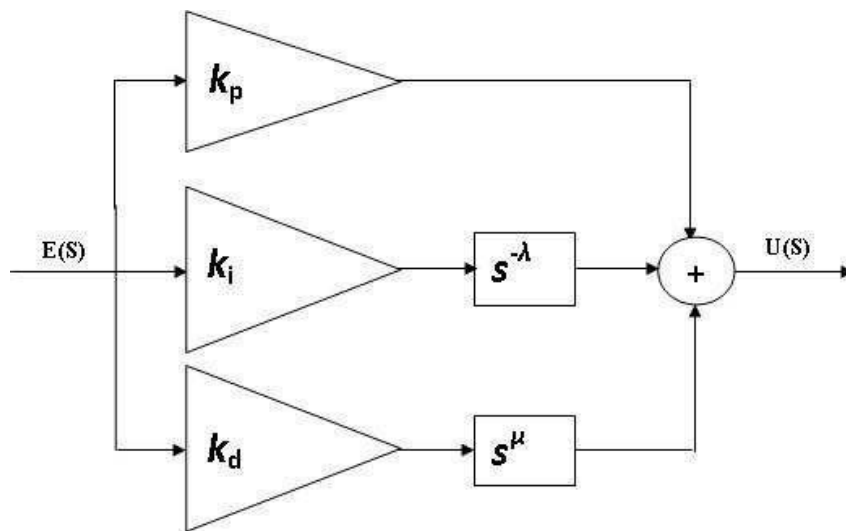


FIGURE 2.6: Structure générale d'un régulateur PID d'ordre fractionnaire.

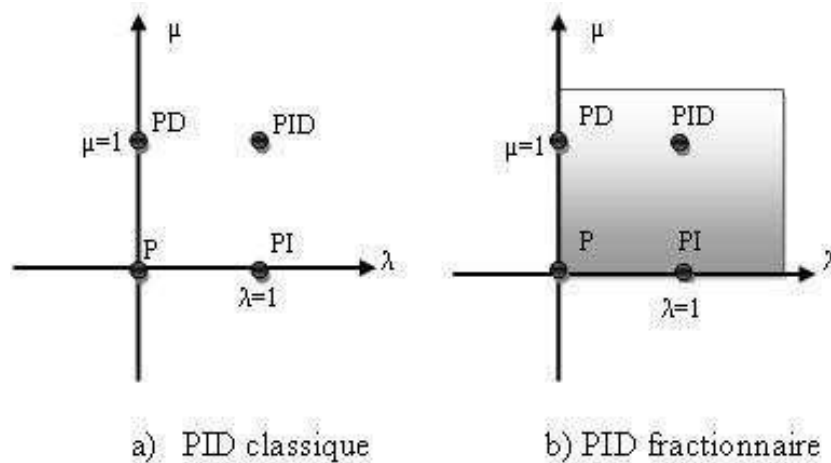


FIGURE 2.7: Commande PID à partir d'un point (a) jusqu'au plan (b).

2.5.1.1 Méthodes de réglage des paramètres

Plusieurs méthodes ont été proposées afin de définir de nouvelles techniques efficaces pour le réglage des paramètres des régulateurs d'ordre fractionnaire utilisant une extension de la théorie des régulateurs classiques. On trouve par exemple :

- **Les spécifications de marge de phase ϕ_m et gain de fréquence de coupure w_c**

Les marges de phase et de gain ont toujours servi comme une importante mesure de robustesse ; puisque il est connu que la marge de phase est liée au coefficient d'amortissement du système. Les équations qui définissent la marge de phase et le gain de la fréquence de coupure sont :

$$|C(jw_c)G(jw_c)|_{dB} = 0 \text{ dB}, \quad \arg(C(jw_c)G(jw_c)) = -\pi + \phi_m \quad (2.77)$$

Avec $C(s)$ la fonction de transfert du régulateur et $G(s)$ la fonction de transfert du système.

— **Robustesse aux variations du gain du système** [123]

La contrainte suivante est considérée dans ce cas :

$$\left. \frac{d \arg(F(s))}{dw} \right|_{w=w_c} = 0 \quad (2.78)$$

Cette condition a été considérée pour forcer la phase de la boucle ouverte du système $F(s) = C(s)G(s)$ d'être plate à w_c .

— **Rejet du bruit à haute fréquence** [99]

Une contrainte sur la fonction de sensibilité complémentaire $T(jw)$ peut être établie :

$$\begin{aligned} |T(jw) = \frac{C(jw)G(jw)}{1+C(jw)G(jw)}|_{dB} &\leq A \text{ dB}, \\ \forall w \geq w_t \text{ rad/sec} &\Rightarrow |T(jw_t)|_{dB} = A \text{ dB} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Avec A l'atténuation désirée du bruit pour les fréquences $w \succ w_t$ rad/sec.

Pour assurer un bon rejet de perturbation à la sortie [99], une contrainte sur la fonction de sensibilité $S(jw)$ peut être définie :

$$\begin{aligned} |S(jw) = \frac{1}{1+C(jw)G(jw)}|_{dB} &\leq B \text{ dB}, \\ \forall w \leq w_s \text{ rad/sec} &\Rightarrow |S(jw_s)|_{dB} = B \text{ dB} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Avec B la valeur désirée de la fonction de sensibilité pour les fréquences $w \leq w_s$ rad/sec (plage de fréquence souhaitée).

D'autres chercheurs se sont penchés sur les algorithmes évolutionnaires d'optimisation pour concevoir les meilleurs paramètres, on cite à titre d'exemple, l'optimisation par les algorithmes génétique, et l'optimisation par essaim de particules [47].

2.6 Exemple d'application

Dans cette section, nous proposons d'appliquer deux lois de commandes par PID d'ordre fractionnaire (FOPID) et PID classique pour le simulateur de vol d'hélicoptère (Twin Rotor MIMO System (TRMS) en anglais) en mode couplé. Afin d'optimiser les paramètres de chaque régulateur, nous utiliserons l'algorithme (OEP) détaillé dans le chapitre

1.

Le système TRMS comme le montre la figure 2.8 est un dispositif de laboratoire développé par [124], et conçu dans le but d'expérimenter les lois de commandes développées théoriquement [125]. Du point de vue commande ; c'est un exemple de système présentant une non-linéarité d'ordre supérieur et fortement couplée. Le TRMS est formé de (figure 2.8) :

- une poutre pouvant pivoter sur sa base de manière à ce qu'elle puisse tourner librement dans les plans vertical et horizontal
- Deux propulseurs (principal et secondaire) fixés aux deux extrémités de la poutre. Ils sont formés d'une hélice, d'un moteur à courant continu (la tension de commande u varie entre ± 2.5 volt) couplés à un tachymètre et d'un bouclier de sécurité ;
- Un contrepoids fixé sur une tige collée au niveau du pivot de la poutre, son rôle est de diminuer les vibrations (oscillations) de cette dernière ;
- Une tour pour maintenir la poutre ;
- Une base comprenant des circuits électroniques pour l'adaptation, la synchronisation et le filtrage des signaux entrants et sortants ;
- Un boîtier de marche/arrêt des moteurs

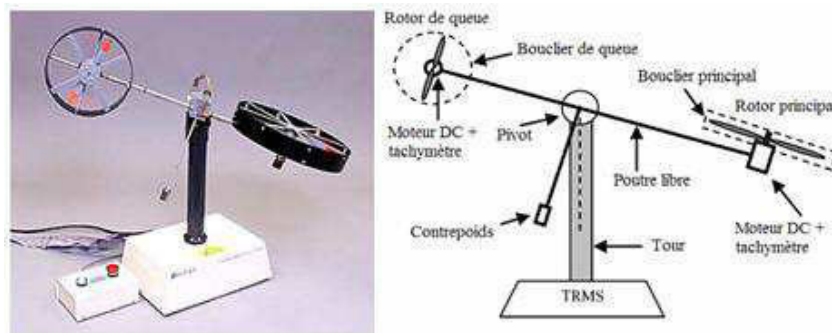


FIGURE 2.8: le simulateur d'hélicoptère TRMS.

L'état de la poutre est décrit par 4 variables : les angles horizontal α_h (azimut) et vertical α_v (élévation) mesurés à l'aide d'un capteur se trouvant au niveau du pivot (et qui représente également les sorties du système). Les deux autres variables sont les vitesses angulaires autour des axes vertical et horizontal. Le vecteur d'entrée est formé des tensions d'excitation u_v et u_h des deux moteurs à courant continu. Il convient de noter que les vitesses angulaires sont des fonctions non linéaires de la tension d'entrée de ces moteurs à courant continu. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\frac{du_{vv}}{dt} &= \frac{1}{T_{mr}} (-u_{vv} + K_{mr}u_v), w_v = P_v(u_{vv}) \\ \frac{du_{hh}}{dt} &= \frac{1}{T_{tr}} (-u_{hh} + K_{tr}u_h), w_h = P_h(u_{hh})\end{aligned}\quad (2.81)$$

Le modèle d'espace d'état global du système TRMS est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_2 + J_{tr}P_h(x_6)}{J_v} \\ \dot{x}_2 &= l_m F_v(P_v(x_3)) - K_v \left[\frac{x_2 + J_{tr}P_h(x_6)}{J_v} \right] + g((A - B) \cos(x_1) - C \sin(x_1)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{x_5 + J_{mr}P_v(x_3) \cos(x_1)}{J_h(x_1)} \right]^2 (A + B + C) \sin(2x_1) \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{T_{mr}} (-x_3 + K_{mr}u_v) \\ \dot{x}_4 &= \frac{x_5 + J_{mr}(P_v(x_3)) \cos(x_1)}{J_h(x_1)} \\ \dot{x}_5 &= l_t F_h(P_h(x_6)) \cos(x_1) - K_h \left[\frac{x_5 + J_{mr}P_v(x_3) \cos(x_1)}{J_h(x_1)} \right] \\ \dot{x}_6 &= \frac{1}{T_{tr}} (-x_6 + K_{tr}u_h)\end{aligned}\quad (2.82)$$

Avec :

$F_{h/v}(h/v)$: Fonction non linéaire de la force aérodynamique ; du rotor secondaire/principal.

$J_{tr/mr}$: Moment d'inertie dans le moteur secondaire/principal.

$J_{v/h}$: somme des moments d'inertie par rapport à l'axe horizontal/vertical.

$l_{m/t}$: longueur de la partie principale/secondaire de la tige.

$K_{v/h}$: Constantes de friction.

$T_{mr/tr}$: Constante du temps du moteur principal/secondaire.

$K_{mr/tr}$: Gain statique du moteur principal/secondaire.

g : force gravitationnelle

A, B, C, D : sont des constantes en fonction des paramètres du système (voir [124]).

Les figures 2.9 et 2.10 représentent quelques réponses du système en boucle ouverte :

La réponse libre du sous-système d'élévation est oscillatoire amortie, dont l'origine est le moment gravitationnel, ce dernier n'agit que dans le plan vertical. L'amortissement quant à lui est dû aux forces de frictions qui forcent le système à se stabiliser à un point d'équilibre ($\alpha_{v0} = -0.94$ rad). Quant au sous système d'azimut, il reste à sa position initiale tant qu'il n'est pas excité.

Lorsqu'on excite le système, le sous-système vertical tend vers un nouveau point d'équilibre qui dépendra de l'excitation appliquée. Pour une excitation $u_v \in [-2.5, 2.5]$, le sous système vertical se comporte comme un système **BIBO** (**B**ounded **I**nput **B**ounded

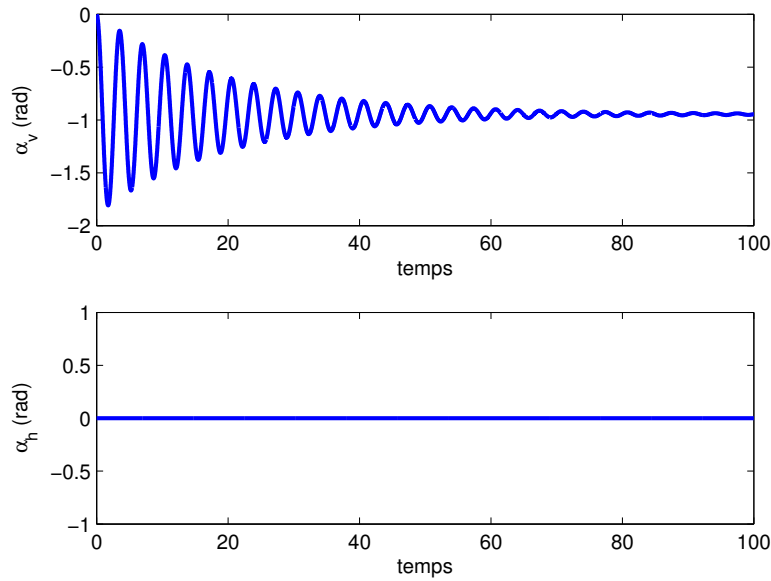


FIGURE 2.9: Réponse libre ($u_v = u_h = 0$ v) du système TRMS avec condition initiale $(\alpha_{v0}, \alpha_{h0}) = (0, 0)$ rad.

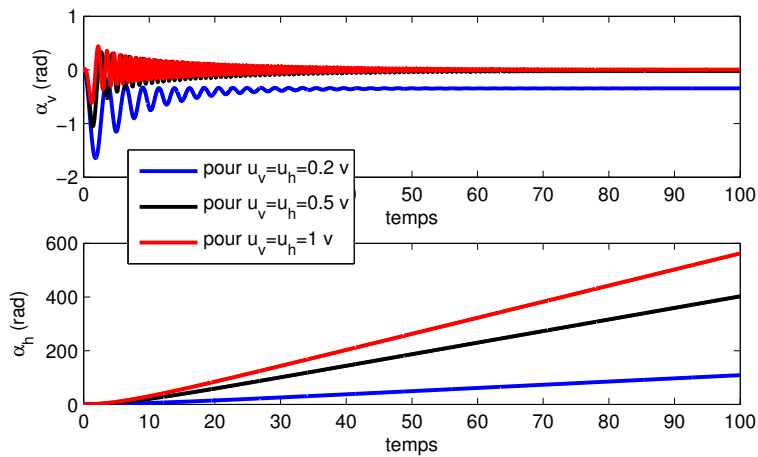


FIGURE 2.10: Réponse du système en boucle ouverte dans le mode couplé pour différentes excitations, avec condition initiale $\alpha_{v0}, \alpha_{h0} = (0, 0)$ rad.

Output). Le sous système horizontal a le comportement d'un intégrateur, il a une infinité de points d'équilibre (tout le plan horizontal), et il diverge même pour de petites excitations.

Notre objectif est d'assurer la poursuite des deux angles (α_v, α_h) , et cela se fait par deux sous-contrôleurs, l'un pour le sous-système horizontal et l'autre pour le sous-système vertical (voir figure 2.11).

Les deux régulateurs PID d'ordre fractionnaire (FOPID) sont donnés par :

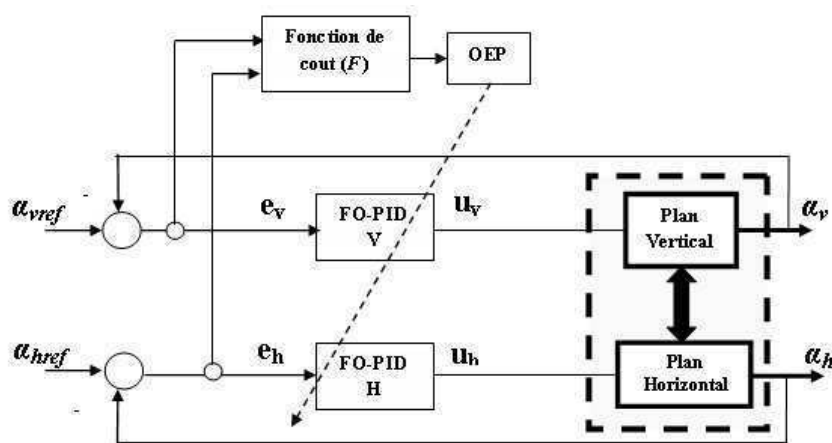


FIGURE 2.11: schéma global de la commande PID fractionnaire optimisée par OEP du TRMS

$$u_v(t) = k_{p1}e_v(t) + k_{i1}D_t^{-\lambda_1}e_v(t) + k_{d1}D_t^{\mu_1}e_v(t), \quad e_v = \alpha_{vref} - \alpha_v \quad (2.83)$$

$$u_h(t) = k_{p2}e_h(t) + k_{i2}D_t^{-\lambda_2}e_h(t) + k_{d2}D_t^{\mu_2}e_h(t), \quad e_h = \alpha_{href} - \alpha_h \quad (2.84)$$

Remarque : pour les régulateurs PID nous avons $\lambda = \mu = 1$.

Il est à noter, que l'implémentation pratique sur le prototype réel n'est possible qu'une fois le processus de réglage des paramètres de la de commande globale est fait. Néanmoins, un réglage *on-line* est presque impossible, puisque le processus d'entraînement par une métaheuristique est généralement très gourmand en temps de calcul. De plus, il y a le risque de tomber dans un état d'instabilité au début du réglage par une sélection prématurée aléatoire des paramètres en question. De ce fait, la présence d'un modèle très proche du système réel est indispensable pour réussir la procédure. La figure 2.11 montre le schéma d'optimisation *off-line* des deux régulateurs pour le système TRMS.

Le vecteur P_i qui porte tous paramètres à régler afin de minimiser la fonction coût (2.85) est exprimé comme suit :

$$P_i = [k_{p1}, k_{i1}, k_{d1}, \lambda_1, \mu_1, k_{p2}, k_{i2}, k_{d2}, \lambda_2, \mu_2]$$

$$F(k) = \sum_{i=1}^N |e_h(i)| + |e_v(i)| \quad (2.85)$$

N étant le nombre d'échantillons, et k le nombre d'itérations.

En somme, nous avons 10 paramètres pour les régulateurs PID d'ordre fractionnaire et 6 pour les régulateurs PID classiques, dont leurs bornes sont données comme suit.

$$0 < k_{p1}, k_{i1}, k_{d1}, k_{p2}, k_{i2}, k_{d2} < 10 \text{ et } 0 < \lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 < 2$$

La simulation du problème d'optimisation a été effectuée en utilisant l'outil Matlab/Simulink pour la stabilisation du system TRMS autour de son point d'équilibre $(\alpha_v, \alpha_h) = (0, 0)$ rad avec une condition initiale $(-0.5, -0.5)$ rad. Le nombre de particules de l'algorithme OEP est fixé à 30 particules, les paramètres Φ_1 , Φ_2 et χ sont mis à 2.05, 2.05 et 0.7298 respectivement ; a cause de la nature pseudo-stochastique de l'algorithme OEP, l'algorithme est exécuté 5 fois avec 100 itérations par exécution (on prend le meilleur avec la fonction coût minimale). La figure 2.12 montre l'évolution de la fonction objectif (F) dans chaque cas de commande ; il est bien observé que la commande par PID fractionnaire donne le minimum de la fonction (F), et F peut de converger d'avantage si on augmente le nombre maximum d'itérations, par contre le PID classique est stabilisé à l'itération 60. À l'itération 100 l'algorithme converge vers les paramètres optimaux donnés par les tableaux 2.1 et 2.2 ; les paramètres du régulateur FOPID-OEP (sauf k_{p1}) sont approximativement proches de ceux du régulateur PID- OEP. Figure 2.13 et 2.14 montrent la réponse des deux sous systèmes commandés par PID et PID d'ordre fractionnaire optimisé par OEP.

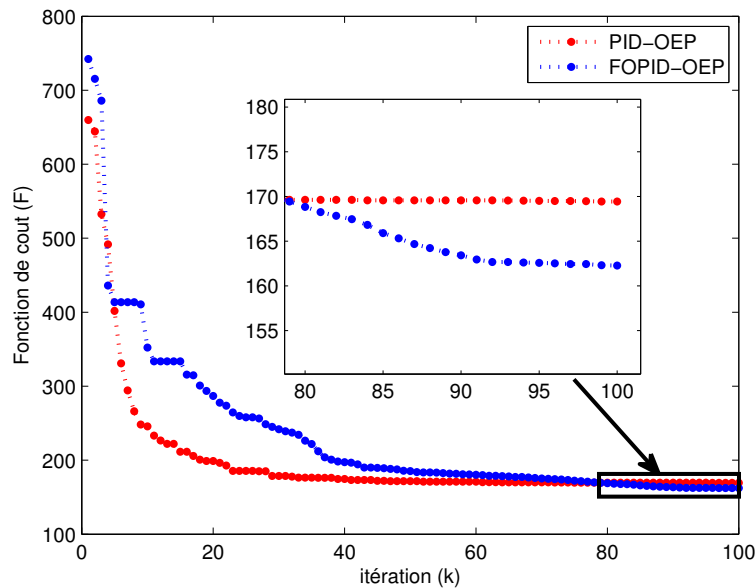


FIGURE 2.12: l'évolution de la fonction de cout F dans chaque cas de commande

Tableau 2.1: Paramètres optimaux des deux régulateur PID et FOPID pour le sous système vertical.

Paramètre	k_{p1}	k_{i1}	k_{d1}	λ_1	μ_1
PID	3.5555	0.7322	4.3304	-	-
FOPID	10.0000	0.5620	4.6447	1.1741	1.4016

Tableau 2.2: Paramètres optimaux des deux régulateur PID et FOPID pour le sous système horizontal.

Paramètre	k_{p2}	k_{i2}	k_{d2}	λ_2	μ_2
PID	1.1148	0	0.8417	-	-
FOPID	0.8746	0	0.5916	0.1898	1.0586

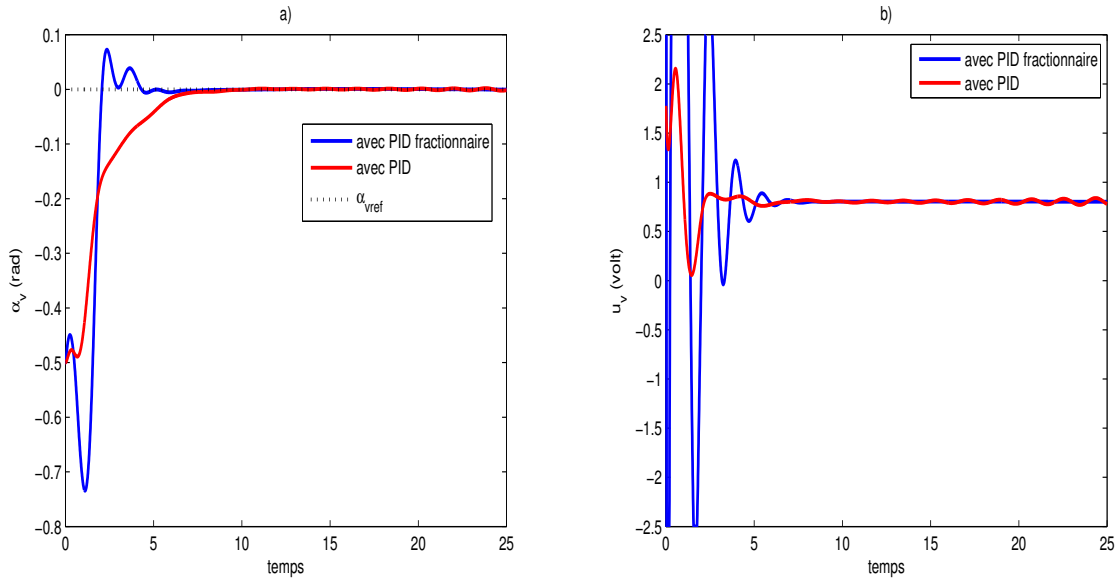


FIGURE 2.13: Réponse du sous système vertical pour un test de stabilisation

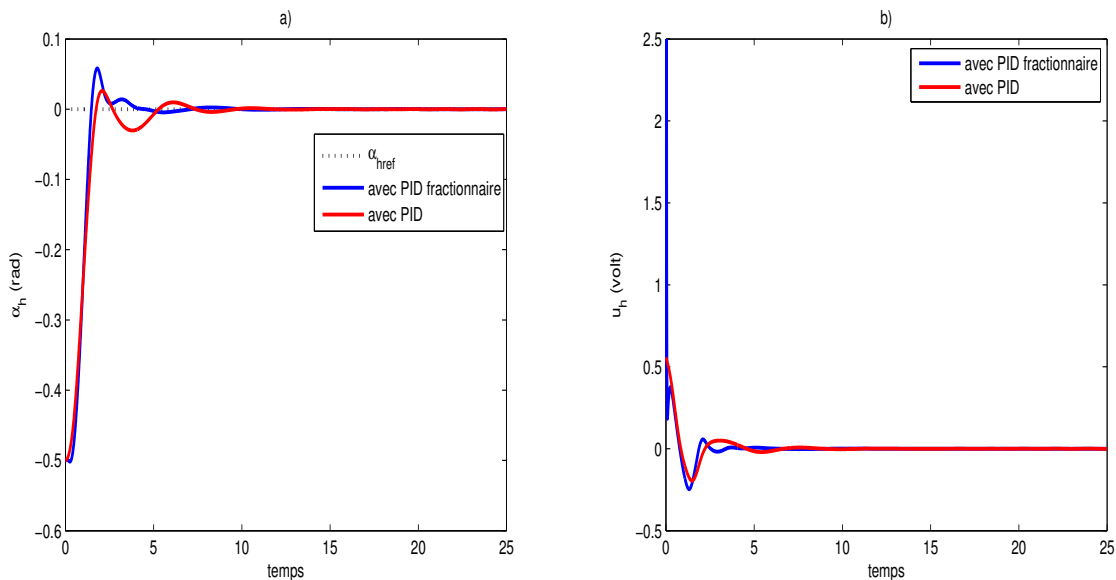


FIGURE 2.14: Réponse du sous système horizontal pour un test de stabilisation

Le régulateur PID d'ordre fractionnaire présente un temps de réponse plus court avec absence d'oscillations en régime permanent. Ces performances sont obtenues avec un signal de commande atteignant les limites (± 2.5 volt) en régime transitoire. Par contre, avec un PID classique on remarque un temps de réponse plus important. De plus, le sous système

vertical présente une sensibilité à la force gravitationnelle, traduite par des oscillations en régime permanent.

Afin de tester la validité et l'efficacité des deux régulateurs optimaux par rapport aux changements de trajectoires, nous effectuons des tests suivants en utilisant les trajectoires suivantes :

$$\alpha_{href}(t) = 0.3 \left[\cos \left(\frac{0.15\pi t}{2} \right) + \sin \left(\frac{0.15\pi t}{3} \right) \right] \quad (2.86)$$

$$\alpha_{vref}(t) = -\alpha_{href}(t) \quad (2.87)$$

Nous superposons aux sorties une perturbation externe de la forme $d(t) = 0.1\sin(0.5\pi t)$ pendant 4 sec (figure 2.15). Les résultats de simulation sont donnés par les figures 2.16 à 2.19.

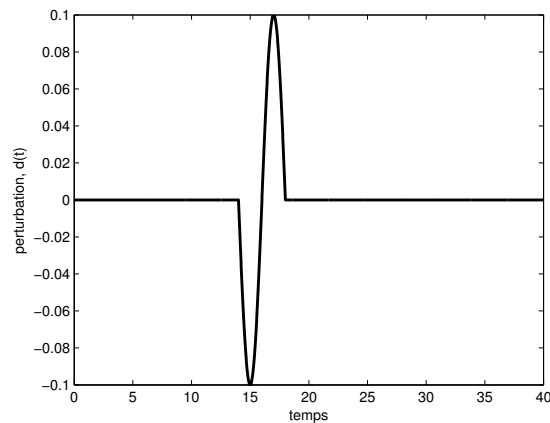


FIGURE 2.15: forme de la perturbation appliquée

Les résultats de simulation présentés par les figures 2.16 à 2.19 montrent clairement la supériorité du régulateur PID fractionnaire aussi bien en poursuite de trajectoires qu'en rejet de perturbation. Le régulateur PID classique a montré ses limites en terme de performances allant jusqu'à la perte de la stabilité.

2.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les éléments de base du calcul fractionnaire dans les deux domaines (temporel et fréquentiel), les définitions mathématiques des opérateurs d'ordre fractionnaire ainsi que les différentes propriétés et caractéristiques de la dérivée et

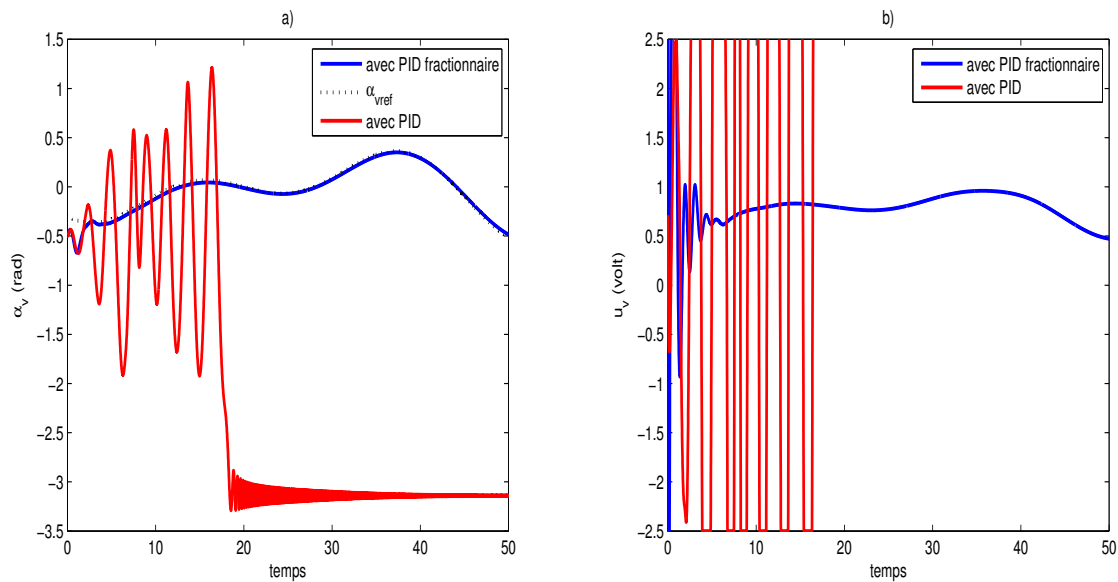


FIGURE 2.16: Réponse du sous système vertical pour une poursuite de trajectoire

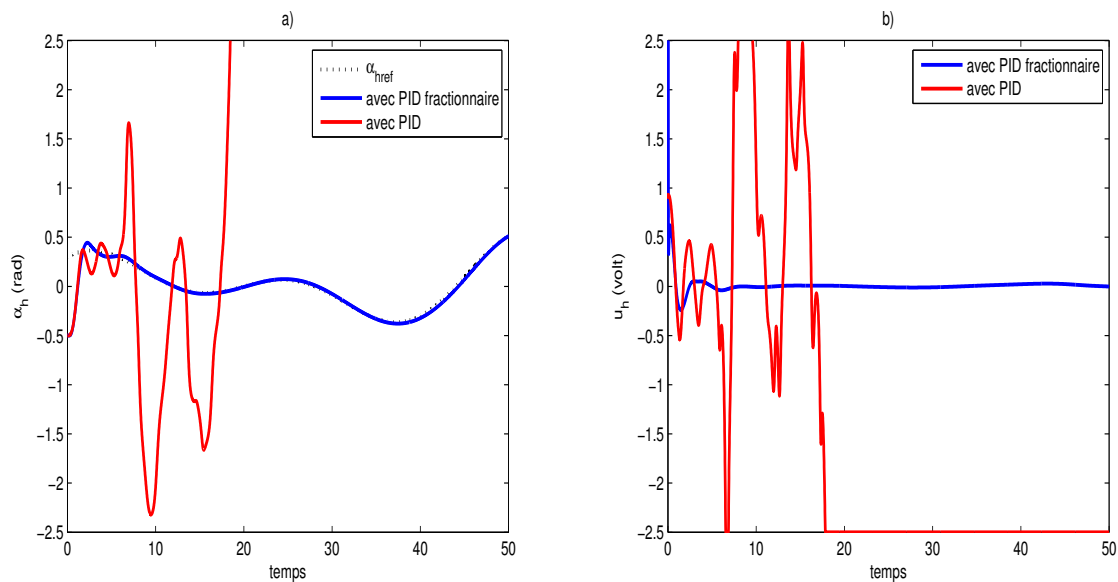


FIGURE 2.17: Réponse du sous système horizontal pour une poursuite de trajectoire

de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle. Nous avons présenté aussi, une méthode simple permettant l'approximation de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire basée sur le filtre d'Oustaloup. Nous avons donné une définition générale de systèmes linéaires et non linéaires d'ordre fractionnaire et leurs conditions de stabilité. L'application au système TRMS a montré que la commande PID d'ordre fractionnaire présente de meilleures performances par rapport au régulateur conventionnel PID. Ce chapitre nous a permis de présenter quelques notions de la dérivation et l'intégration non entières et de mettre en valeur leurs intérêts pour les chapitres suivants dans l'analyse et

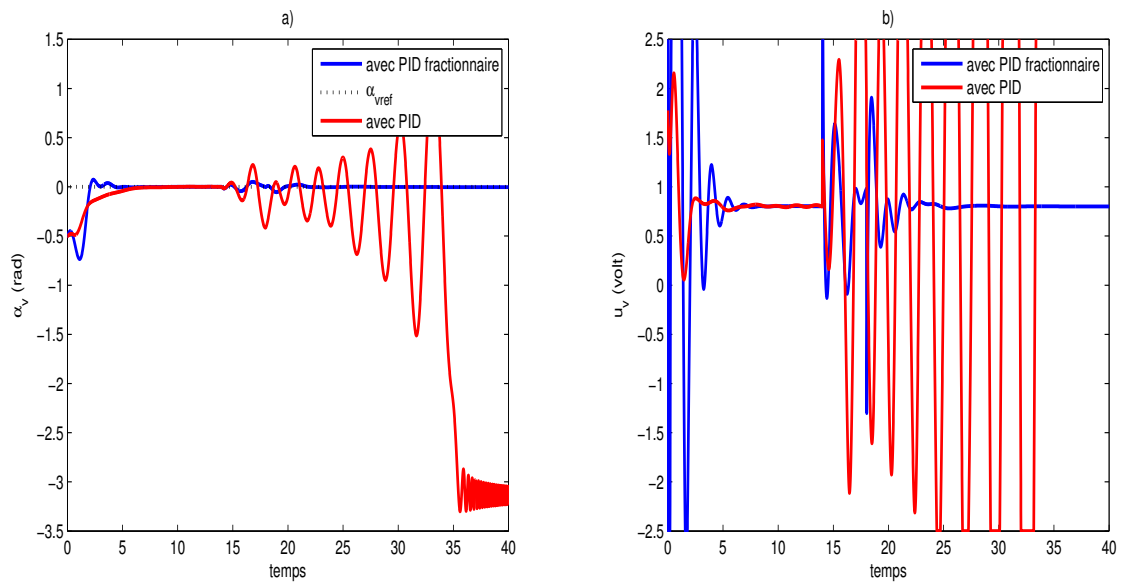


FIGURE 2.18: Réponse du sous système vertical pour test de stabilisation en présence de perturbation externe

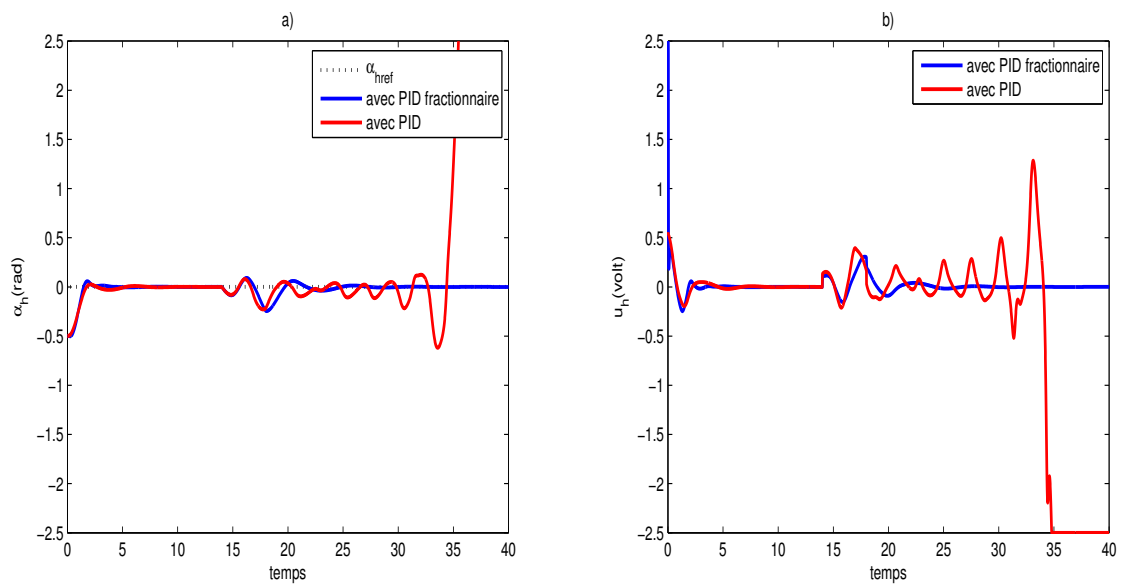


FIGURE 2.19: Réponse du sous système horizontal pour test de stabilisation en présence de perturbation externe

la synthèse des contrôleurs fractionnaires pour la commande des systèmes non-linéaires.

Chapitre 3

Commande par mode de glissement d'ordre fractionnaire optimisée des systèmes non linéaires TITO

3.1 Introduction

Avec le progrès technologique actuel, la stabilisation des systèmes non linéaires complexes et interconnectés devient aujourd'hui un axes de recherche et développement très privilégié; la non linéarité et le couplage entre les sous systèmes composant le système global rend la synthèse de la commande du système très délicate et complexe à mettre en œuvre. Afin de résoudre ce problème, plusieurs approches ont été proposées dans la littérature.

La commande par mode glissant est l'une des approches qui a largement prouvé son efficacité à travers les études théoriques rapportées et pratiques [1], [126], [127]. Cette commande est, principalement, élaborée en trois étapes :

- La première étape consiste à choisir une surface de glissement : cette surface étant une relation entre les variables d'états du système, elle définit une équation différentielle et détermine donc totalement la dynamique du système, à condition qu'il reste sur cette surface [128]. Pour que la propriété d'insensibilité aux perturbations ne soit pas perdu, la dynamique exigée par la surface de glissement doit être compatible avec l'amplitude de commande "utile" et la dynamique du système en boucle ouverte [128].
- La deuxième étape consiste à concevoir une commande équivalente, et une loi de

commande discontinue (attractante) en se basant sur la surface de glissement, de telle sorte que les états du système soient forcés vers la surface de glissement et glissant le long de la position souhaitée.

- La troisième étape est la vérification de la condition de stabilité : la méthode directe de Lyapunov permet de se prononcer quant à la stabilité d'un état d'équilibre sans avoir recours à la résolution de l'équation d'états du système [128].

Dans la littérature, plusieurs méthodes de sélection de la surface de glissement ont été rapportées, les approches données dans [129, 130] et [131, 132] utilisent respectivement des surfaces de glissement de type proportionnel dérivé et proportionnel intégral, où l'ordre de dérivation et intégration est un nombre entier. Dans [133], [134] et [135] une surface de glissement basée sur une fonction continue non linéaire est adoptée. Une surface sous forme d'un régulateur PID est étudiée dans plusieurs articles tels que [136] et [137].

En raison de l'importance du calcul d'ordre fractionnaire dans divers domaines, une surface de glissement PD d'ordre fractionnaire a été proposée dans [12], [16], [138].

Dans ce chapitre nous proposons une autre forme de surface de glissement de type PID fractionnaire [139, 140], et nous comparons cette approche avec d'autres basées sur des surfaces PD fractionnaire, PD, et PID classiques, pour un système non linéaire MIMO.

Pour remédier au phénomène de *chattering*, nous introduisons la logique floue au lieu de la fonction *sign* pour avoir une commande attractante lisse. Afin d'optimiser les différents paramètres des commandes en boucle fermée, l'algorithme OEP sera utilisé.

3.2 Description du système

Nous considérons le système non-linéaire interconnecté donné par la représentation d'état d'ordre 4 suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_1(X) + b_1(X)u_1(t) + d_1(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= f_2(X) + b_2(X)u_2(t) + d_2(t) \\
 x_0 &= x(t_0)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Avec $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ est le vecteur d'état, f_1 , f_2 , b_1 et b_2 sont des fonctions non-linéaires, u_1 et u_2 sont les commandes des sous systèmes 1 et 2 conçues pour la poursuite des trajectoires x_{1d} et x_{3d} ; d_1 et d_2 sont les perturbations externes, et $Y = [x_1, x_3]^T$, est

le vecteur de sortie du système.

Le système (3.1) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2j-1}(t) &= x_{2j}(t) \\ \dot{x}_{2j}(t) &= f_j(X) + b_j(X)u_j(t) + d_j(t) \quad , j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le système présenté ici est donc régi par des équations différentielles impliquant des termes discontinus. La théorie classique des équations différentielles ordinaires ne permet pas de décrire le comportement des solutions dans de tels cas et il faut alors se reporter à la théorie des inclusions différentielles [141, 142] et aux solutions au sens de Filippov [143].

Hypothèses :

- Sans perte de généralité supposons que $b_j(x) \succ 0 \forall x$.
- La perturbation $d_j(t)$ supposée comme étant bornée satisfaisant les conditions suivantes :

$$|d_j(t)| \leq \delta_j \quad (3.3)$$

$$\left| D_t^{(\alpha_j-1)} d_j(t) \right| \leq \psi_j \quad (3.4)$$

δ_j, ψ_j sont des constantes positives connues ; α_j est un nombre réel positif entre 0 et 1.

Puisque l'utilisation de la commande centralisée a généralement comme conséquence des lois de commande complexes, qui ne peuvent pas être mises en œuvre facilement, dans ce cas le système global (3.1) sera décomposé en 2 sous-systèmes, chacun d'eux est commandé indépendamment par un régulateur. Les interconnexions sont considérées comme perturbations pour chaque sous-système.

3.3 La commande par mode glissant d'ordre entière

3.3.1 Choix de la surface de glissement s_j ($j = 1, 2$)

La synthèse d'une surface de glissement repose sur la définition d'une fonction $s(x, t)$ appelée variable de glissement ou de commutation. Ainsi, une surface de glissement est définie par l'ensemble S comme suit :

$$S = \{x \in R^n | s(x, t) = 0\} \quad (3.5)$$

D'après [127], on dit qu'il existe un régime glissant idéal sur S s'il existe un temps fini t_s tel que la solution de la commande u satisfait la condition $s(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_s$.

J.J Slotine [1] propose une forme d'équation générale pour déterminer la surface de glissement qui assure la convergence d'une variable x à sa valeur de consigne.

$$s(x) = \left(\frac{d}{dt} + k_p \right)^{r-1} e(x) \quad (3.6)$$

x : variable à commander.

$e(x)$: l'erreur de poursuite $e(x) = x - x_d$.

k_p : Une constante positive qui interprétera la dynamique de la surface

r : le degré relatif du système, peut être interpréter comme le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie par rapport au temps pour faire apparaître l'entrée u de manière explicite [144].

$s(x) = 0$ est une équation différentielle linéaire dont l'unique solution est $e(x) = 0$, pour un choix convenable du gain k_p .

Dans notre cas pour chaque sous système j nous avons $r=2$; alors nous considérons dans le premier cas la surface de glissement linéaire s_j suivante :

$$s_j = k_{pj}e_{(2j-1)} + \dot{e}_{(2j-1)}, \quad e_{(2j-1)} = x_{(2j-1)} - x_{(2j-1)d} \quad (3.7)$$

En régime de glissement idéal, la surface de glissement est nulle $s_j = 0$. L'équation (3.7) donne alors $\dot{e}_{(2j-1)} = -k_{pj}e_{(2j-1)}$.

La surface de glissement locale j est exponentiellement stable en régime glissant si $k_{pj} \succ 0$.

Dans d'autres articles scientifiques [136], [137], cette surface est augmentée par un intégrateur pour avoir une surface de type PID, ce choix est retenu pour obtenir la dynamique d'erreur souhaitée et une erreur nulle en régime permanent [136] :

$$s_j = k_{pj}e_{(2j-1)} + \dot{e}_{(2j-1)} + k_{ij} \int_0^t e_{(2j-1)}(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Les coefficients k_{pj} , et k_{ij} , sont choisis pour que la surface de glissement soit Hurwitzienne et garantit la stabilité exponentielle [137].

En d'autres termes, ils existent des constantes positives K_j et k_j tels que :

$$\|e^{\Lambda_j t}\| \leq K_j \cdot e^{-k_j t}, \quad \Lambda_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{ij} & -k_{pj} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Avec $\|\cdot\|$ étant la norme de la matrice.

La relation entre le maximum d'erreur de poursuite et le maximum de la surface de glissement est énoncé dans le théorème 3.1, pour obtenir les performances de poursuite désirées.

Théorème 3.1 [137] : Si la surface de glissement définie par (3.8) satisfait $|s_j| \leq \gamma_j$ pour $t \geq t_0$ (avec t_0 est le temps initial), et $|E_j(t_0)| \leq \frac{\gamma_j}{k_j}$ (avec $E_j = [e_{(2j-1)} \quad \dot{e}_{(2j-1)}]$) est satisfait, alors :

$$|e_{(2j-1)}| \leq \varepsilon_{1j} \quad (3.10)$$

$$|\dot{e}_{(2j-1)}| \leq \varepsilon_{2j} \quad (3.11)$$

Sont satisfait pour tout $t \geq t_0$, avec ε_{1j} et ε_{2j} sont des constantes positives définis par :

$$\varepsilon_{1j} = \frac{K_j}{k_j} \cdot \gamma_j, \quad \varepsilon_{2j} = \gamma_j \cdot \left(1 + Z_j \cdot \frac{K_j}{k_j}\right), \quad Z_j \equiv \|[k_{pj} \quad k_{ij}]\| \quad (3.12)$$

Pour plus de détails veuillez consulter [137].

3.3.2 Elaboration de la commande u_j ($j=1,2$)

Dans la théorie de la commande à structure variable, il existe différentes manières pour choisir les paramètres afin de définir une logique de commutation. Dans la littérature on trouve trois types de structures très répandues : la commande par contre-réaction linéaire à gains commutés, la commande par relais et la commande équivalente. Les deux dernières approches sont privilégiées [145].

Dans notre cas, la méthode choisie est celle de la commande équivalente, schématisée sur la figure 3.1 [145].

Avec u_{eq} est la commande équivalente obtenue à partir de $\dot{s}(x, t) = 0$, et u_n est la commande discontinue ou attractante donnée par la forme de base qui est celle d'un relais représenté par la fonction « *sgn* » (figure 3.2) :

$$u_n = -K_s \text{sgn}(s), \quad K_s > 0 \quad (3.13)$$

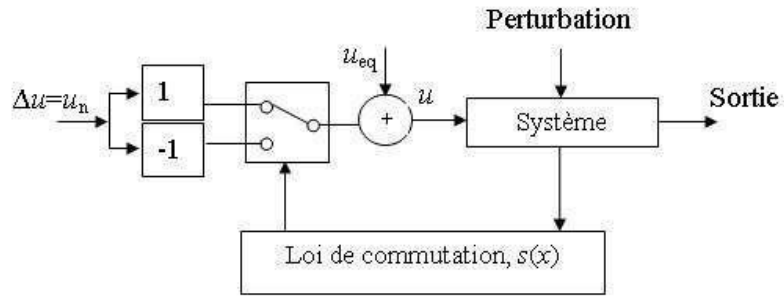


FIGURE 3.1: schéma fonctionnelle de la commande équivalente.

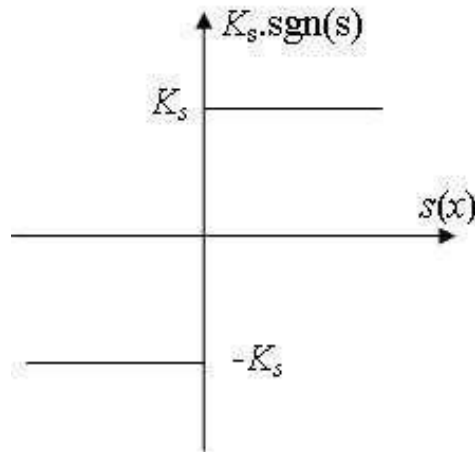


FIGURE 3.2: la fonction « sgn » de u_n .

La phase de glissement correspond à celle d'un relais commutant avec une fréquence infinie.

Prenant la dérivée par rapport au temps t des deux surfaces (3.7) et (3.8), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1}^{\text{er}} \text{ cas } \dot{s}_j = k_{pj} \dot{e}_{(2j-1)} + \ddot{e}_{(2j-1)} \\ \quad = k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)} + \ddot{x}_{(2j-1)} - \ddot{x}_{(2j-1)d} \\ \quad = k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)} + f_j(X) + b_j(X)u_j + d_j - \ddot{x}_{(2j-1)d} \\ \text{2}^{\text{eme}} \text{ cas } \dot{s}_j = k_{ij} \cdot e_{(2j-1)} + k_{pj} \dot{e}_{(2j-1)} + \ddot{e}_{(2j-1)} \\ \quad = k_{ij} \cdot e_{(2j-1)} + k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)} + f_j(X) + b_j(X)u_j + d_j - \ddot{x}_{(2j-1)d} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Posant $\dot{s}_j = 0$ on obtient les deux variantes de la commande équivalent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1}^{\text{er}} \text{ cas } u_{(eq)j} = \frac{-1}{b_j(X)} \left[k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)} + f_j(X) - \ddot{x}_{(2j-1)d} \right] \\ \text{2}^{\text{eme}} \text{ cas } u_{(eq)j} = \frac{-1}{b_j(X)} \left[k_{ij} \cdot e_{(2j-1)} + k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)} + f_j(X) - \ddot{x}_{(2j-1)d} \right] \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Les commandes globales qui satisfont la condition de stabilité sont données par :

$$\begin{cases} 1^{\text{er}} \text{ cas} & u_j = \frac{-1}{b_j(X)} \left[k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)} + f_j(X) - \ddot{x}_{(2j-1)d} + K_{sj} \text{sgn}(s_j) \right] \\ 2^{\text{eme}} \text{ cas} & u_j = \frac{-1}{b_j(X)} \left[k_{ij} \cdot e_{(2j-1)} + k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)} + f_j(X) - \ddot{x}_{(2j-1)d} + K_{sj} \text{sgn}(s_j) \right] \end{cases} \quad (3.16)$$

la figure 3.3 resume la stratégie de commande utilisée pour un système TITO.

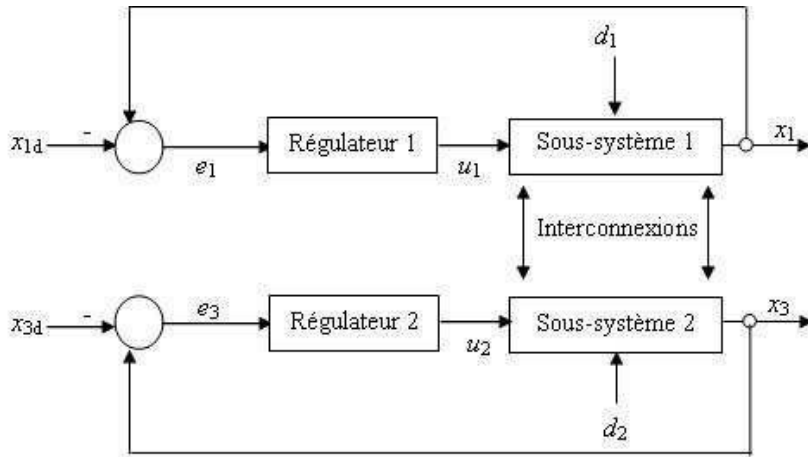


FIGURE 3.3: Schéma de principe de la commande par mode glissant pour un système TITO.

3.3.3 Analyse de stabilité

La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive des variables d'état du système $V(x) \succ 0$. La loi de commande doit être de telle sorte que cette fonction soit décroissante ($\dot{V}(x) < 0$). L'idée est de choisir une fonction scalaire $s(x)$, et de concevoir une loi de commande u qui conduise, dans un temps fini, l'état du système vers la surface de glissement, telle que le carré de la surface corresponde à une fonction de Lyapunov.

La fonction de Lyapunov est, donc, définie comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2} s^2(x) \quad (3.17)$$

La dérivée de cette fonction donne

$$\dot{V}(x) = s(x) \dot{s}(x) \quad (3.18)$$

Pour que la fonction $V(x)$ puisse décroître, il suffit que sa dérivée soit négative. En substituant respectivement les équations de (3.16) dans les équations de (3.14) on aura

dans les deux cas :

$$\dot{s}_j = d_j - K_{sj} \operatorname{sgn}(s_j) \quad (3.19)$$

et

$$\begin{aligned} s_j \dot{s}_j &= s_j (d_j - K_{sj} \operatorname{sgn}(s_j)) \\ &\leq (\delta_j - K_{sj}) |s_j| \end{aligned} \quad (3.20)$$

Donc la stabilité est vérifiée si $K_{sj} > \delta_j$.

L'inégalité (3.20) implique que si $s_j \neq 0$ alors $\dot{V}_j = s_j \dot{s}_j < 0$. On obtient donc :

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^2 \dot{V}_j < 0 \quad (3.21)$$

Finalement, le système global (3.1) en boucle fermée est asymptotiquement stable avec les deux stratégies de commande u_j développées pour les deux surfaces de glissement.

Parfois, un grand gain de commande K_{sj} provoque parfois un effet de *Chattering*. L'utilisation d'une fonction de saturation au lieu de la fonction *sign* peut éliminer ce phénomène. Néanmoins, pour assurer un compromis satisfaisant entre une diminution du *Chattering* et une précision de poursuite, la logique floue est introduite.

3.4 Commande floue-mode glissant d'ordre entier

La logique floue est une technique de commande basée sur la conception d'un système expert à base de lois comportementales. Elle est en quelque sorte une codification du "bon sens", elle permet la résolution des problèmes à la façon d'un être humain.

Il existe de nombreuses méthodes permettant d'adapter la théorie de la logique floue à un problème de contrôle-commande. Elles suivent une procédure comprenant quatre étapes : la fuzzification, la définition des règles de contrôle, la définition des mécanismes d'inférences des règles floues et la défuzzification.

La fuzzification : c'est le codage des différentes entrées et sorties du système en déterminant les différents univers de discours correspondant aux domaines de variation des variables.

Ensuite, on définit pour chacune des variables ses sous-ensembles flous ainsi que leurs fonctions d'appartenance associées.

Les règles de contrôle : c'est un ensemble de règles linguistiques qui assure le

contrôle du processus. La connaissance du processus, au sens physique ou d'après les dires d'experts, permet de raisonner en temps de contrôle et de remplir des tables de règles.

Le mécanisme d'inférence des règles floues : C'est un mécanisme de décision qui, en manipulant le bloc des règles, établit une décision. Il existe plusieurs stratégies d'inférence.

Exemple :

Mamdani (Max, Min.).

Larsen (Max, Prod.).

Sugeno (Somme, Prod.).

La défuzzification : c'est l'opération qui a pour but de produire une valeur non floue pour chacune des variables de sortie. On peut appliquer plusieurs méthodes de résolution, mais la plus fréquente est la méthode des centres de gravité.

Dans cette partie nous présentons un système de contrôle flou qui obéit à la théorie des systèmes à structure variable et ceci pour garantir la stabilité. Cette nouvelle vision est basée sur l'interprétation suivante des règles de contrôle flou.

Une règle est généralement une relation floue de la forme [146] :

$$R^i : \text{ Si } (A_i, B_i) \text{ Alors } C_i \quad (3.22)$$

Où A_i et B_i sont des quantités floues représentant les mesures du processus et C_i est une quantité floue représentant le signal de commande. Nous remarquons que la règle R_i constitue une "structure" du système de contrôle flou qui change selon les états du processus. Ainsi, la séparation des états basée sur la "structure" est vue comme un système de contrôle à structure variable.

En s'appuyant sur cette idée, on peut traiter le système de contrôle flou comme un type de système à structure variable (le contrôleur flou est identique à un contrôleur à structure variable avec une bande limite "boundary layer").

Comme nous l'avons montré déjà dans la section précédente, le terme de correction dans une commande à structure variable est donné par :

$$u_n = -K_s \cdot \text{sgn}(s) \quad (3.23)$$

Théoriquement, il faut noter que le mode glissant est idéal. Dû au retard de commutation, il est rare, dans le cas d'un système réel, que ce modèle idéal se produise, en

particulier à cause du broutement (*Chattering*) autour de la surface de glissement. Cette situation est corrigée par un lissage de la commande discontinue à l'intérieur d'une bande limite (autour de la surface de glissement).

Donc en introduisant une bande limite ϕ , la loi de commande par mode glissant est modifiée comme suit [147] :

$$u_n = \begin{cases} K_s & s > \phi \\ -K_s \cdot \frac{s}{\phi} & -\phi \leq s \leq \phi \\ -K_s & s < -\phi \end{cases} \quad (3.24)$$

Dans cette section, nous présentons un contrôleur flou (système d'inférence floue) qui est équivalent au (3.24).

L'idée de base pour la conception de ce contrôleur est qu'il est possible de faire une extension de la surface de glissement, $s = 0$ vers une surface floue définie par l'expression linguistique [133, 134] :

$$\tilde{s} \text{ est } zros \quad (3.25)$$

Avec \tilde{s} la variable linguistique de s et "zéro" est l'un de ses ensembles flous. Dans le but de fuzzifier l'espace autour de la surface de glissement s on définit cinq sous ensembles flous (figure 3.4), tels que :

$$T(\tilde{s}) = \{NG, NM, EZ, PM, PG\} = \{\tilde{F}_s^1, \dots, \tilde{F}_s^5\} \quad (3.26)$$

Avec les prédicats suivants :

NG : négatif grand; NM : négatif moyen; EZ : environ zéro; PM : positif moyen; PG : positif grand.

Quant à la commande u_n , nous définissons aussi cinq sous ensembles flous tels que :

$$T(\tilde{u}_n) = \{PG, PM, EZ, NM, NG\} = \{\tilde{F}_{u_n}^1, \dots, \tilde{F}_{u_n}^5\} \quad (3.27)$$

Les fonctions d'appartenance des deux variables s et u_n , sont illustrées par la figure 3.5.

On définit des fonctions d'appartenance de forme triangulaires pour la surface de glissement s et des singletons pour la commande u_n .

Dans la figure 3.5, le paramètre, $r \in [0, 1]$ est utilisé pour ajuster les points modaux

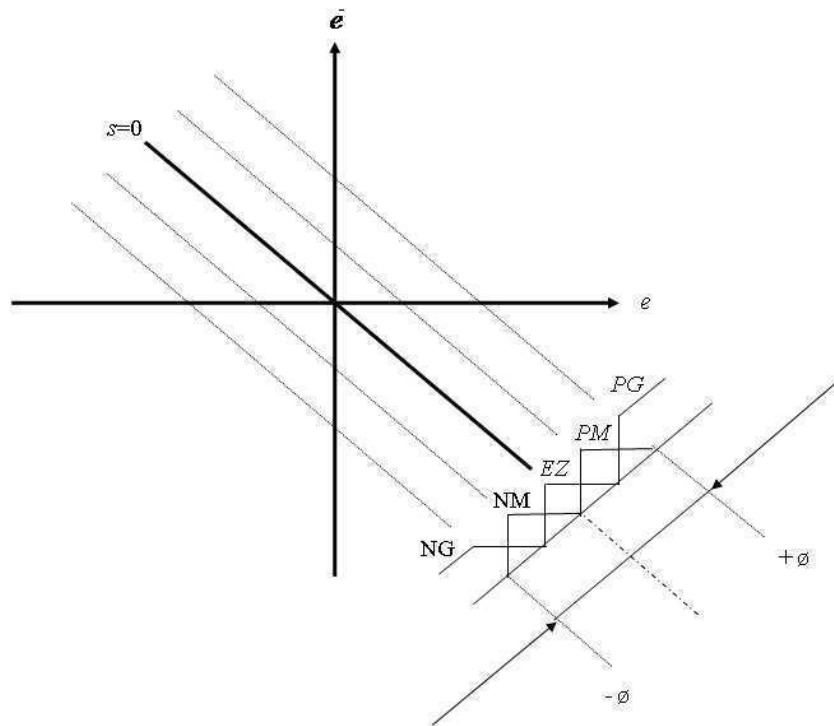


FIGURE 3.4: Partition floue de l'espace autour de la surface de glissement.

du sous ensemble EZ (la précision de la commande réside dans l'expression, \tilde{s} est zéro).

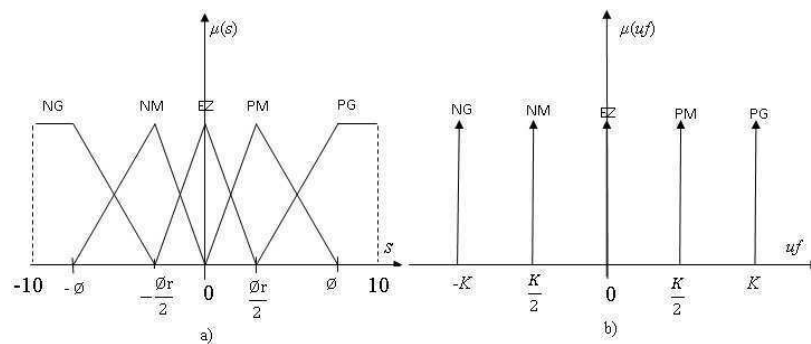


FIGURE 3.5: Fonctions d'appartenance de, a) l'entrée s et de, b) la sortie u_f

Nous définissons pour ce système d'inférence flou, les règles suivantes :

R1 : SI s est NG Alors u_f est PG

R2 : SI s est NM Alors u_f est PM

R3 : SI s est EZ Alors u_f est EZ

R4 : SI s est PM Alors u_f est NM

R5 : SI s est PG Alors u_f est NG

On peut mettre aussi :

$$R_i : SI s \text{ est } F_s^i \text{ Alors } uf \text{ est } F_u^i . \text{ Avec } i = 1, \dots, 5 \quad (3.28)$$

Nous considérons X et Y , comme étant l'espace d'entrée et de sortie des règles floues respectivement. Pour un ensemble flou arbitraire \tilde{F}_x dans X , un ensemble flou $\tilde{F}_x \circ R_i$ est défini dans l'espace Y par la règle R_i .

Par l'utilisation de la méthode d'inférence max-min [148], [149].

$$\mu_{\tilde{F}_x \circ R_i}(uf) = \max_{s \in X} [\min[\mu_{\tilde{F}_x}(s), \min[\mu_{\tilde{F}_s^i}(s), \mu_{\tilde{F}_u^i}(uf)]]] \quad (3.29)$$

Ainsi, les sous ensembles flous et les fonctions d'appartenance sont déterminés. Il ne nous reste que l'étape de défuzzification pour extraire la valeur de la commande u_n .

Pour le cas où la forme du sous ensemble \tilde{F}_x est un singleton, on peut écrire :

$$\mu_{\tilde{F}_x}(s) = \begin{cases} 1 & Si \quad s = \alpha \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad (3.30)$$

Pour la phase de défuzzification, on utilise la méthode de centre de gravité, ce qui nous donne :

$$u_n = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_i(s).uf^i}{\sum_{i=1}^5 \mu_i(s)} \quad (3.31)$$

Avec, $\mu_i(s)$ le degré d'appartenance de s au sous ensemble F_s^i .

Finalement, le résultat d'inférence pour tout s , s'écrit [150] :

$$u_n = -K.sig\left(\frac{s}{\phi}\right) \quad (3.32)$$

Avec :

$$sig(z) = \begin{cases} -1 & z < -1 \\ \frac{z+r-1}{2-r} & -1 \leq z < -r/2 \\ \frac{z}{r} & -r/2 \leq z < 0 \\ \frac{z}{r} & 0 \leq z < r/2 \\ \frac{z+1-r}{2-r} & r/2 \leq z < 1 \\ 1 & z \geq 1 \end{cases} \quad (3.33)$$

La figure 3.6, illustre le résultat d'inférence des règles floues pour différentes valeurs de

la variable r . On remarque clairement que la valeur de la variable r joue un rôle important dans la forme de cette fonction. Pour $r = 1$, on peut la considérer comme une fonction de saturation.

Par conséquent, on peut améliorer les performances de la commande par l'ajustement de cette variable.

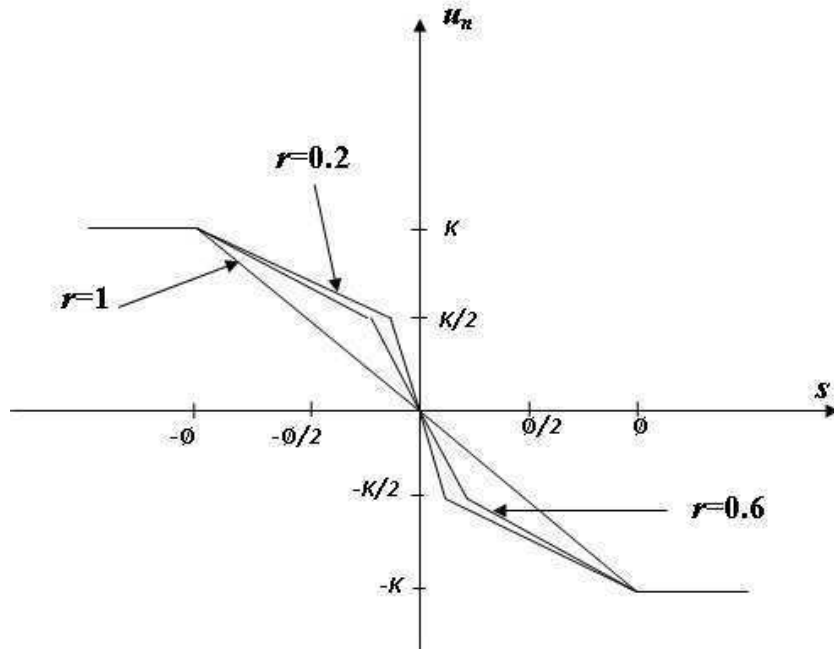


FIGURE 3.6: Résultats de l'inférence des règles floues pour différentes valeurs de r

L'application de la commande floue-mode glissant pour le système (3.1) contient deux termes, une commande floue ($u_{(nF)j}$) donnée par (3.34) qui approxime la commande discontinue ($-K_{sj} \text{sgn}(s_j)$), et la commande équivalente développée précédemment.

$$\begin{cases} u_j = u_{(eq)j} + u_{(nF)j} \\ \text{avec } u_{(nF)j} = \frac{\sum_{i=1}^5 \mu_i(s_j) \cdot u_{f_j^i}}{\sum_{i=1}^5 \mu_i(s_j)}, \quad j = 1, 2 \end{cases} \quad (3.34)$$

La description du système floue utilisé est détaillée par la figure 3.7 :

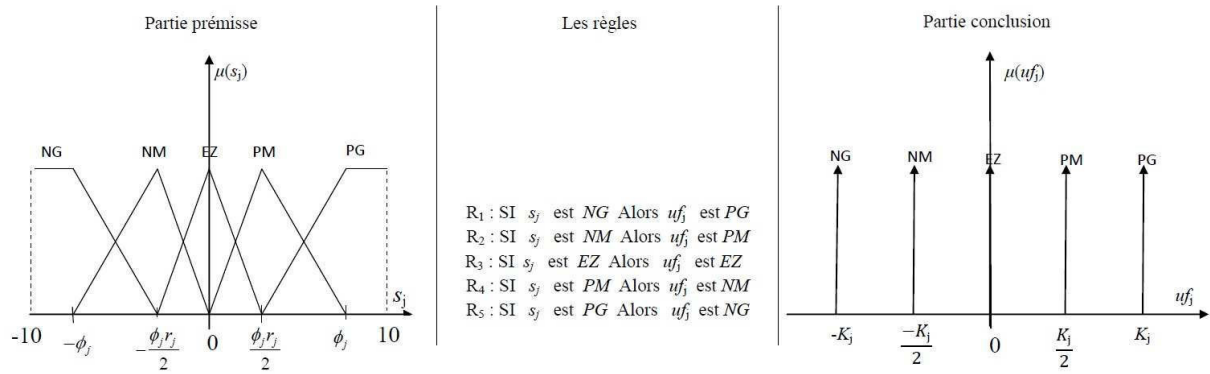


FIGURE 3.7: Système d'inférence flou utilisé pour calculer la commande discontinue

3.5 La commande par mode glissant d'ordre fractionnaire

3.5.1 Choix de la surface de glissement s_j ($j=1,2$)

Dans notre premier cas nous allons utiliser la surface de glissement proposé par [12], [16] c'est une surface sous forme d'un régulateur PD d'ordre fractionnaire (PD^α) sa forme est donné par :

$$s_j = k_{pj}e_{(2j-1)} + D_t^{\alpha_j}e_{(2j-1)}, \quad 0 < \alpha_j < 1 \quad (3.35)$$

Où la définition utilisée est celle de Caputo donnée dans le deuxième chapitre.

En régime de glissement idéal, la surface de glissement $s_j = 0$. L'équation (3.35) donne alors $D_t^{\alpha_j}e_{(2j-1)} = -k_{pj}e_{(2j-1)}$.

On peut constater que $|\arg(-k_{pj})| = \pi > \alpha_j \frac{\pi}{2}$. Donc les gains k_{pj} sont choisie pour être positifs afin de satisfaire la condition de stabilité (2.66).

Respectant la propriété de Caputo de (2.26), l'équation (3.35) peut être réécrite comme suit :

$$s_j = k_{pj}e_{(2j-1)} + D_t^{(\alpha_j-1)}\dot{e}_{(2j-1)} \quad (3.36)$$

Pour le deuxième cas, on propose une surface de glissement sous forme d'un régulateur PID d'ordre fractionnaire ($PI^\alpha D^\alpha$) comme suit [139, 140] :

$$s_j = k_{pj}e_{(2j-1)} + k_{ij}D_t^{-\alpha_j}e_{(2j-1)} + D_t^{\alpha_j}e_{(2j-1)}, \quad 0 < \alpha_j < 1 \quad (3.37)$$

Cette dernière peut être réécrite comme, en respectant la propriété (2.26) :

$$s_j = k_{pj}e_{(2j-1)} + k_{ij}D_t^{-\alpha_j}e_{(2j-1)} + D_t^{(\alpha_j-1)}\dot{e}_{(2j-1)} \quad (3.38)$$

Le but de cette proposition est de tirer profit de l'introduction de ces deux paramètres (k_{ij} et $-\alpha_j$) et d'établir des spécifications additionnelles de conception, assurant une performance robuste du système commandé par rapport aux variations paramétriques et les perturbations externes [139].

Dans le régime glissant nous avons $s_j = 0$, L'équation (3.37) donne alors :

$$k_{pj}e_{(2j-1)} + k_{ij}D_t^{-\alpha_j}e_{(2j-1)} + D_t^{\alpha_j}e_{(2j-1)} = 0 \quad (3.39)$$

On choisi le vecteur d'état $[D_t^{-\alpha_j}e_{(2j-1)} \quad e_{(2j-1)}] = [E_{1j} \quad E_{2j}]$. D'où le système linéaire d'ordre fractionnaire suivant caractérisant la dynamique de l'erreur :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_j}E_{1j} = E_{2j} \\ D_t^{\alpha_j}E_{2j} = -k_{ij}E_{1j} - k_{pj}E_{2j} \end{cases} \quad (3.40)$$

Ou sous matricielle :

$$\begin{bmatrix} D_t^{\alpha_j}E_{1j} \\ D_t^{\alpha_j}E_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{ij} & -k_{pj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1j} \\ E_{2j} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Les paramètres k_{pj} et k_{ij} de la surface de glissement sont choisis positifs afin que les valeurs propres de la matrice Aremplissent la condition de stabilité du (2.66).

3.5.2 Synthèse de la commande u_j ($j=1,2$)

La synthèse de la commande u_j se fait de la même manière que dans la commande d'ordre entier, où la commande équivalente est calculée a partir de $\dot{s} = 0$, et u_n la commande discontinue peut prendre une forme modifiée et être d'ordre fractionnaire pour des raison de simplification de calcul et satisfaction de la condition de stabilité.

En résumé, la commande u_j est alors d'ordre fractionnaire.

Pour le premier cas (avec surface PD^α) la dérivée de (3.36) nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{s}_j &= k_{pj}.\dot{e}_{(2j-1)} + D_t^{(\alpha_j-1)}\ddot{e}_{(2j-1)} \\ &= k_{pj}.\dot{e}_{(2j-1)} + D_t^{(\alpha_j-1)}(\ddot{x}_{(2j-1)} - \ddot{x}_{(2j-1)d}) \\ &= k_{pj}.\dot{e}_{(2j-1)} + D_t^{(\alpha_j-1)}(f_j(X) + b_j(X)u_j + d_j - \ddot{x}_{(2j-1)d}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Posant $\dot{s}_j = 0$, et respectant la propriété de dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo (2.22), la commande $u_{(eq)j}$ est obtenue :

$$u_{(eq)j} = \frac{-1}{b_j(X)} \left[k_{pj} \cdot D_t^{(1-\alpha_j)} (\dot{e}_{(2j-1)}) + f_j(X) - \ddot{x}_{(2j-1)d} \right] \quad (3.43)$$

La commande global u_j est donnée par :

$$u_j = \frac{-1}{b_j(X)} \left[k_{pj} \cdot D_t^{(1-\alpha_j)} (\dot{e}_{(2j-1)}) + f_j(X) - \ddot{x}_{(2j-1)d} + D_t^{(1-\alpha_j)} (K_{sj} \cdot \text{sgn}(s_j)) \right] \quad (3.44)$$

Pour le deuxième cas (avec surface $PI^\alpha D^\alpha$), la dérivée de (3.38) nous donne

$$\begin{aligned} \dot{s}_j &= k_{pj} \dot{e}_{(2j-1)} + k_{ij} D_t^{-\alpha_j} \dot{e}_{(2j-1)} + D_t^{(\alpha_j-1)} \ddot{e}_{(2j-1)} \\ &= k_{pj} e_{(2j-1)} + k_{ij} D_t^{-\alpha_j} e_{(2j-1)} + D_t^{(\alpha_j-1)} (\ddot{x}_{(2j-1)} - \ddot{x}_{(2j-1)d}) \\ &= k_{pj} e_{(2j-1)} + k_{ij} D_t^{-\alpha_j} e_{(2j-1)} + D_t^{(\alpha_j-1)} (f_j(X) + b_j(X)u_j + d_j - \ddot{x}_{(2j-1)d}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

De la même manière que précédemment, la commande équivalente $u_{(eq)j}$ est obtenue en posant $\dot{s}_j = 0$ comme suit :

$$u_{(eq)j} = \frac{-1}{b_j(X)} \left[k_{pj} \cdot D_t^{(1-\alpha_j)} (\dot{e}_{(2j-1)}) + k_{ij} \cdot D_t^{(1-2\alpha_j)} (\dot{e}_{(2j-1)}) + f_j(X) - \ddot{x}_{(2j-1)d} \right] \quad (3.46)$$

Et la commande global u_j est donnée par :

$$u_j = \frac{-1}{b_j(X)} \left[k_{pj} \cdot D_t^{(1-\alpha_j)} (\dot{e}_{(2j-1)}) + k_{ij} \cdot D_t^{(1-2\alpha_j)} (\dot{e}_{(2j-1)}) + f_j(X) - \ddot{x}_{(2j-1)d} + D_t^{(1-\alpha_j)} (K_{sj} \cdot \text{sgn}(s_j)) \right] \quad (3.47)$$

3.5.3 Analyse de stabilité

Pour le premier cas :

Par substitution de l'équation (3.44) dans l'équation (3.42), nous aurons :

$$\dot{s}_j = k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)} + D_t^{(\alpha_j-1)} (d_j) - k_{pj} \cdot D_t^{(\alpha_j-1)} D_t^{(1-\alpha_j)} \dot{e}_{(2j-1)} - D_t^{(\alpha_j-1)} D_t^{(1-\alpha_j)} (K_{sj} \cdot \text{sgn}(s_j)) \quad (3.48)$$

Respectant la propriété (2.23) pour $m = 1$, l'équation (3.48) devient :

$$\dot{s}_j = D_t^{(\alpha_j-1)}(d_j) + k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)}(0) - K_{sj} \cdot (\text{sgn}(s_j)) + K_{sj} \cdot \text{sgn}(s_j(0)) \quad (3.49)$$

Si on suppose que :

$$k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)}(0) + K_{sj} \cdot \text{sgn}(s_j(0)) = 0 \quad (3.50)$$

Cela implique :

$$\begin{aligned} s_j \dot{s}_j &= s_j \cdot \left(D_t^{(\alpha_j-1)}(d_j) - K_{sj} \cdot (\text{sgn}(s_j)) \right) \\ &\leq (\psi_j - K_{sj}) |s_j| \end{aligned} \quad (3.51)$$

D'après (3.51), la condition de stabilité est vérifiée si $K_{sj} \succ \psi_j$

Autrement, si $\left| k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)}(0) + K_{sj} \cdot \text{sgn}(s_j(0)) \right| \prec \xi_j \prec \infty$

$$s_{1j} \dot{s}_{1j} \leq (\psi_j - K_{sj} + \xi_j) \cdot |s_j| \quad (3.52)$$

Alors, la condition de stabilité est vérifiée si $K_{sj} \succ (\psi_j + \xi_j)$

Pour le deuxième cas :

La substitution de l'équation (3.47) dans l'équation (3.45), en respectant la propriété (2.23) donne :

$$\dot{s}_j = D_t^{(\alpha_j-1)}(d_j) + k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)}(0) + k_{ij} \cdot D_t^{-\alpha_j} \dot{e}_{(2j-1)}(0) - K_{sj} \cdot (\text{sgn}(s_j)) + K_{sj} \cdot \text{sgn}(s_j(0)) \quad (3.53)$$

Si on suppose que :

$$k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)}(0) + k_{ij} \cdot D_t^{-\alpha_j} \dot{e}_{(2j-1)}(0) + K_{sj} \cdot \text{sgn}(s_j(0)) = 0 \quad (3.54)$$

Cela implique que :

$$\begin{aligned} s_j \dot{s}_j &= s_j \cdot \left(D_t^{(\alpha_j-1)}(d_j) - K_{sj} \cdot (\text{sgn}(s_j)) \right) \\ &\leq (\psi_j - K_{sj}) |s_j| \end{aligned} \quad (3.55)$$

D'après (3.55), la condition de stabilité est vérifiée si $K_{sj} \succ \psi_j$

Autrement, si $\left| k_{pj} \cdot \dot{e}_{(2j-1)}(0) + k_{ij} \cdot D_t^{-\alpha_j} \dot{e}_{(2j-1)}(0) + K_{sj} \cdot \text{sgn}(s_j(0)) \right| \prec \varepsilon_j \prec \infty$

$$s_{1j}\dot{s}_{1j} \leq (\psi_j - K_{sj} + \varepsilon_j) \cdot |s_j| \quad (3.56)$$

Alors, la condition de stabilité est vérifiée si $K_{sj} \succ (\psi_j + \varepsilon_j)$

3.6 La commande floue-mode glissant d'ordre fractionnaire

La fonction *sign* dans (3.44) et (3.47) peut engendrer l'effet de *Chattering*. Pour remédier à ce problème, cette fonction est remplacée par un contrôleur flou. La même procédure la même que dans le cas de la commande flou-mode glissant d'ordre entier. La combinaison de la stratégie de commande floue avec le mode glissant d'ordre fractionnaire permet de profiter des avantages de ces deux approches [16]. La description du système floue utilisé est donnée par la figure 3.7.

3.7 Optimisation par algorithme OEP des commandes synthétisées

Le problème d'optimisation est conçu pour trouver les valeurs optimales des différentes commandes synthétisées précédemment afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée.

Prenant P comme le vecteur des paramètres à optimiser.

$P = [k_{p1}, k_{p2}, k_{i1}, k_{i2}, \alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, r_1, r_2, K_1, K_2]$ dans le cas du régulateur flou-mode glissant d'ordre fractionnaire avec surface de glissement ($PI^\alpha D^\alpha$).

$P = [k_{p1}, k_{p2}, k_{i1}, k_{i2}, \phi_1, \phi_2, r_1, r_2, K_1, K_2]$ dans le cas du régulateur flou-mode glissant d'ordre entier avec surface de glissement (PID).

$P = [k_{p1}, k_{p2}, \alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2, r_1, r_2, K_1, K_2]$ dans le cas du régulateur flou-mode glissant d'ordre fractionnaire avec surface de glissement (PD^α).

$P = [k_{p1}, k_{p2}, \phi_1, \phi_2, r_1, r_2, K_1, K_2]$ dans le cas du régulateur flou-mode glissant d'ordre entier avec surface de glissement (PD).

Où les régions de ces paramètres sélectifs sont mentionnées comme suit :

$$0.01 \prec k_{p1}, k_{p2}, k_{i1}, k_{i2}, \phi_1, \phi_2, K_1, K_2 \prec 10; 0.01 \prec \alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2 \prec 1$$

Pour converger vers la solution optimale, l'algorithme d'OEP doit être guidé par la

fonction de coût. Par conséquent, elle devrait être correctement défini avant l'exécution de l'algorithme d'OEP. Dans la présente étude, la fonction de coût utilisée (F) est définie par l'expression suivante :

$$F(k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 \left(\gamma_{(2j-1)} |e_{(2j-1)}(i)| + \gamma_{(2j)} |u_j(i)| \right) \quad (3.57)$$

Où $e_{(2j-1)}(i)$ est l'erreur de poursuite de l' i ème échantillon, $u_j(i)$ est le signal de commande de l' i ème échantillon, N est le nombre des échantillons, et k est le nombre d'itérations. Les facteurs de pondération $\gamma_{(2j-1)}$ et γ_{2j} sont employés pour donner plus de flexibilité au concepteur selon la nature de l'application et l'importance donnée à l'erreur ou au signal de commande.

La figure 3.8 montre la structure du processus d'optimisation de la commande utilisant l'algorithme d'OEP.

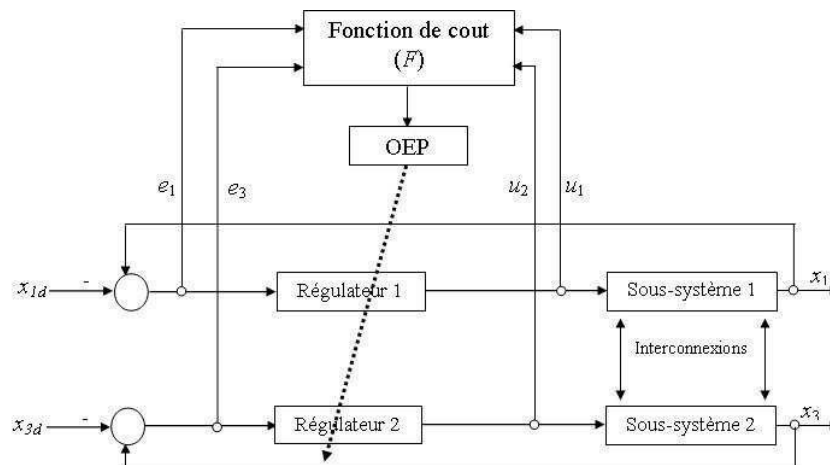


FIGURE 3.8: Processus d'optimisation des paramètres de la commande avec OEP

3.8 Application au système du double pendule inversé

Le double pendule inversé est un système dynamique non linéaire complexe interconnecté. Il est souvent utilisé par les développeurs de lois de commande dédiées aux systèmes interconnectés. La structure de ce système est illustrée par la figure 3.9.

Les deux pendules inversés sont connectés entre eux par un ressort de rappel. Deux couples u_1 et u_2 sont appliqués aux entrées à travers des servomoteurs afin de garantir les positions θ_1 et θ_2 désirées.

La dynamique du système est représentée par les équations suivantes [151], [152] :

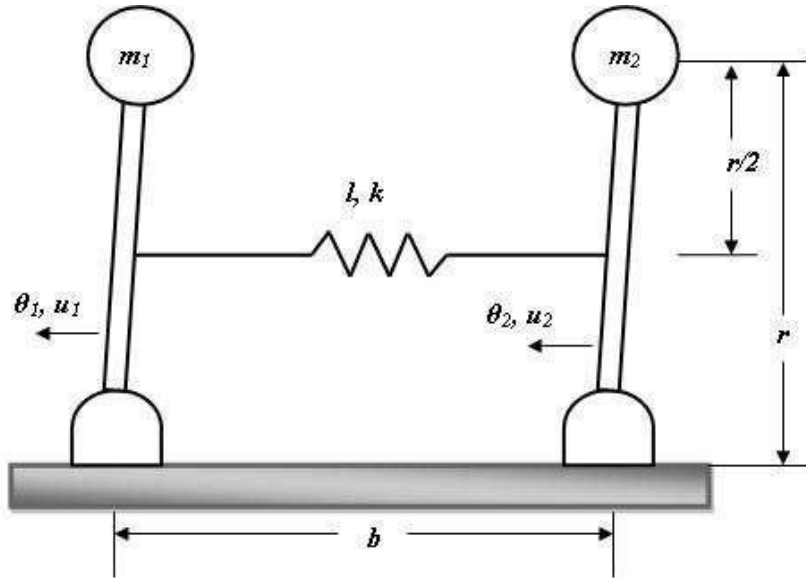


FIGURE 3.9: Structure du système double pendule inversé

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= \left(\frac{m_1 g r}{J_1}\right) \sin(x_1) + \left(\frac{k r^2}{4 J_1}\right) (\sin(x_3) - \sin(x_1)) + \left(\frac{k r}{2 J_1}\right) (l - b) + \frac{u_1(t)}{J_1} + d_1(t) \\
 \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
 \dot{x}_4(t) &= \left(\frac{m_2 g r}{J_2}\right) \sin(x_3) + \left(\frac{k r^2}{4 J_2}\right) (\sin(x_2) - \sin(x_3)) - \left(\frac{k r}{2 J_2}\right) (l - b) + \frac{u_2(t)}{J_2} + d_2(t)
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Où les variables d'état sont les positions angulaires et les vitesses angulaires donnés par le vecteur $X = [x_1, x_2, x_3, x_4] = [\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2]$. Les paramètres du système utilisés dans cette étude sont donnés par [151] :

$$k = 100 \text{ [N/M]}; g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}; m_1 = 2 \text{ [kg]}; m_2 = 2.5 \text{ [kg]}; l = 0.5 \text{ [m]}; r = 0.5 \text{ [m]}; b = 0.4 \text{ [m]}; J_1 = 0.5 \text{ [kg.m}^2\text{]}; J_2 = 0.625 \text{ [kg.m}^2\text{]}.$$

La figure 3.10 présente la réponse du système en boucle ouverte pour des échelons de couple $u_1 = u_2 = 2 \text{ N.m}$; Ces résultats montrent que ce système est instable en boucle ouverte.

L'objectif est de synthétiser les commandes u_1 et u_2 pour maintenir les états désirés x_{1d} et x_{3d} suivant :

$$\begin{aligned}
 x_{1d}(t) &= 0.12(\cos(\pi t) + \sin(2\pi t/3)) \text{ rad} \\
 x_{3d}(t) &= 0.12(\sin(\pi t) + \cos(\pi t/3)) \text{ rad}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Les conditions initiales sont $(x_1(0), x_3(0)) = (0.0)$ Les paramètres de synthèse de

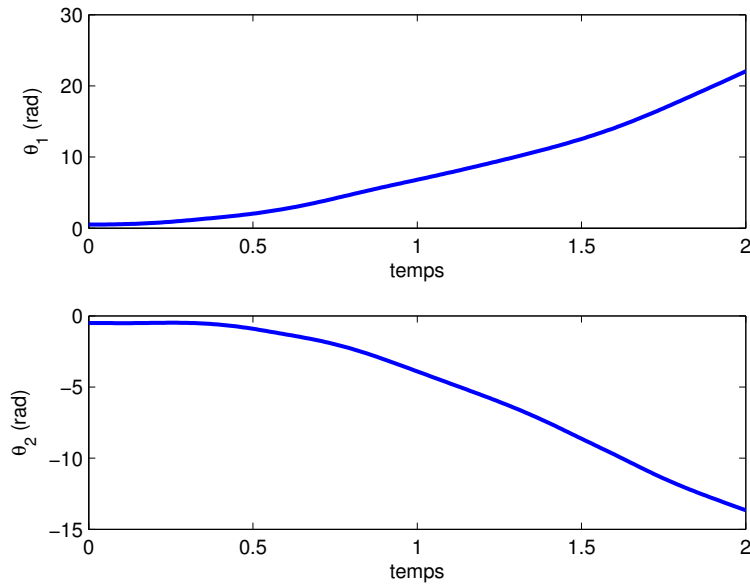


FIGURE 3.10: réponse du système double pendule inversé en boucle ouverte pour des échelons de 2 Nm, avec $(\theta_1(0), \theta_3(0)) = (0.5, -0.5)$

l'algorithme OEP pour l'optimisation des différents contrôleurs synthétisés précédemment sont donnés par le tableau 3.1.

Tableau 3.1: Les valeurs spécifiques de l'algorithme OEP.

Caractéristique	Valeur
Nombre de particules (n)	20
Nombre des itérations (k)	20
Paramètre (Φ_1)	2.05
Paramètre (Φ_2)	2.05
facteur de pondération ($\gamma_{(2j-1)}$ $j = 1 : 2$)	3
facteur de pondération (γ_{2j} $j = 1 : 2$)	0.1

Les courbes d'évolution de la fonction de cout (F) minimale, parmi les 5 exécutions du programme dans chaque cas de commande, sont illustrées dans la figure 3.11. On peut clairement observer que la commande avec surface PID est meilleures par rapport à tous les autres commandes en terme de qualité des solutions obtenues et de vitesse de convergence.

Les paramètres obtenus après optimisation des différentes commandes sont donnés par les tableaux 3.2 et 3.3.

D'après les tableaux 3.2 et 3.3, la condition de stabilité est vérifiée dans chaque cas ; puisque les valeurs propres de la matrice A de (3.41) satisfont la condition (2.66).

Les réponses du système double pendule inversé, ainsi que les signaux de commande

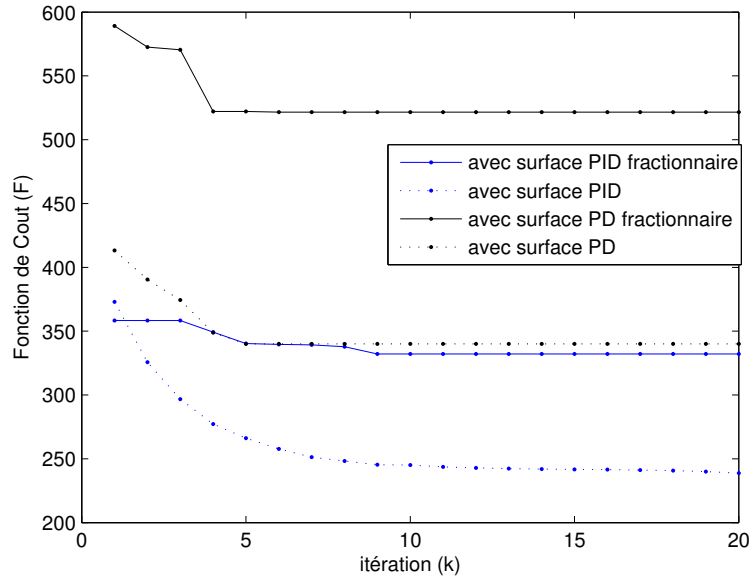


FIGURE 3.11: L'évolution de la fonction de cout (F) pour les différentes stratégies de commandes synthétisées.

Tableau 3.2: Paramètres optimaux pour la commande avec surface PD fractionnaire/surface PD.

Paramètre	k_p	α	ϕ	r	K
Sous système 1	0.9282	0.1178	0.0100	0.7754	0.5604
	3.5985	-	0.8656	0.0100	1.5923
Sous système 2	0.6068	0.2338	0.0100	0.7586	0.6534
	2.3227	-	0.0100	0.8306	0.5801

Tableau 3.3: Paramètres optimaux pour la commande avec surface PID fractionnaire/surface PID.

Paramètre	k_p	k_i	α	ϕ	r	K
Sous système 1	1.0163	0.1988	0.1022	0.4085	0.0527	1.2101
	5.1803	0.0100	-	0.0100	0.9717	3.9910
Sous système 2	0.8395	0.2823	0.2555	0.0100	0.7031	0.5614
	4.8864	0.2258	-	0.0100	0.3590	0.8937

avec les paramètres optimaux sont illustrés par les figures suivantes. Pour des raisons de comparaison nous donnons les résultats de chaque paire de techniques sur la même figure. Les figures 3.12 et 3.13 montre respectivement la variation des variables d'états et des commandes avec surface PD et PD fractionnaire. Les figures 3.14 et 3.15 montrent les résultats de simulation en utilisant la surface PID et PID fractionnaire.

Comme le montrent les figures 3.12 à 3.15, les commandes d'ordre entier ou fractionnaire assurent la poursuite de trajectoire. En termes de performances, la commande d'ordre fractionnaire donne de meilleurs résultats notamment par rapport au temps de

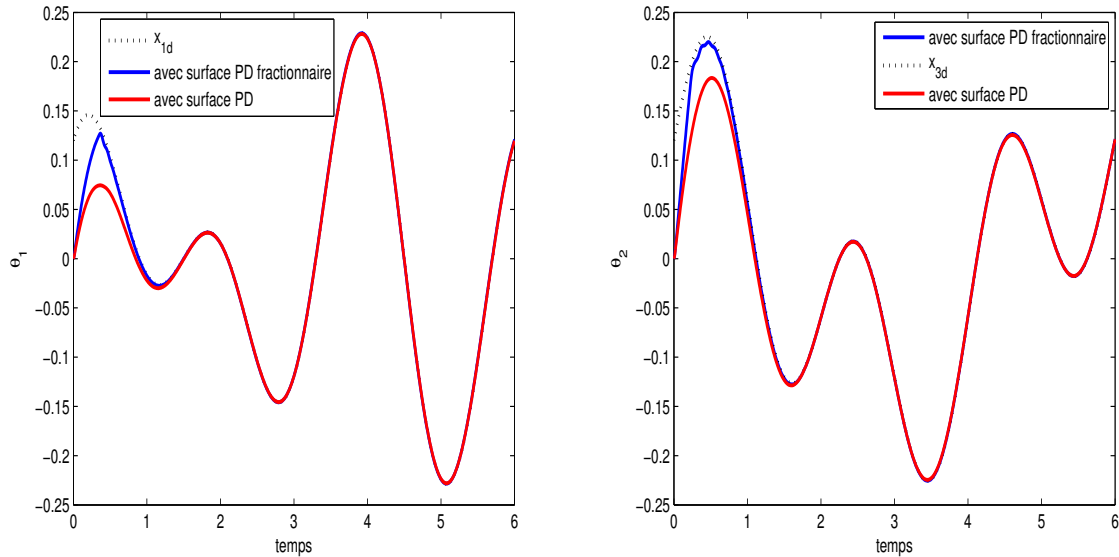


FIGURE 3.12: Variation des variables d'état (x_1) et (x_3), utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire

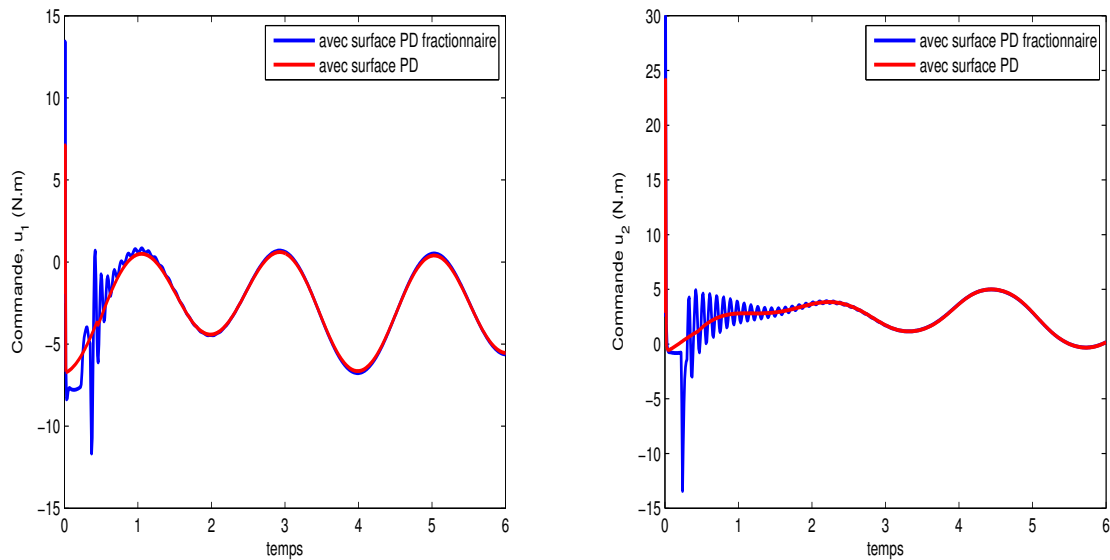


FIGURE 3.13: Variation des commandes (u_1) et (u_2), utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire

réponse.

Le rejet de perturbation est clairement démontré à travers les résultats de simulation pour des perturbations externes de la forme $d_1 = d_2 = 0.1\sin(t)$. Les résultats de simulation sont donnés par les figures 3.16 à 3.19.

La robustesse des contrôleurs optimaux est testée aussi vis-à-vis d'un changement de trajectoire (signal *rampe* avec un pente de 0.08) avec les conditions initiales ($x_1(0)$, $x_3(0)$)

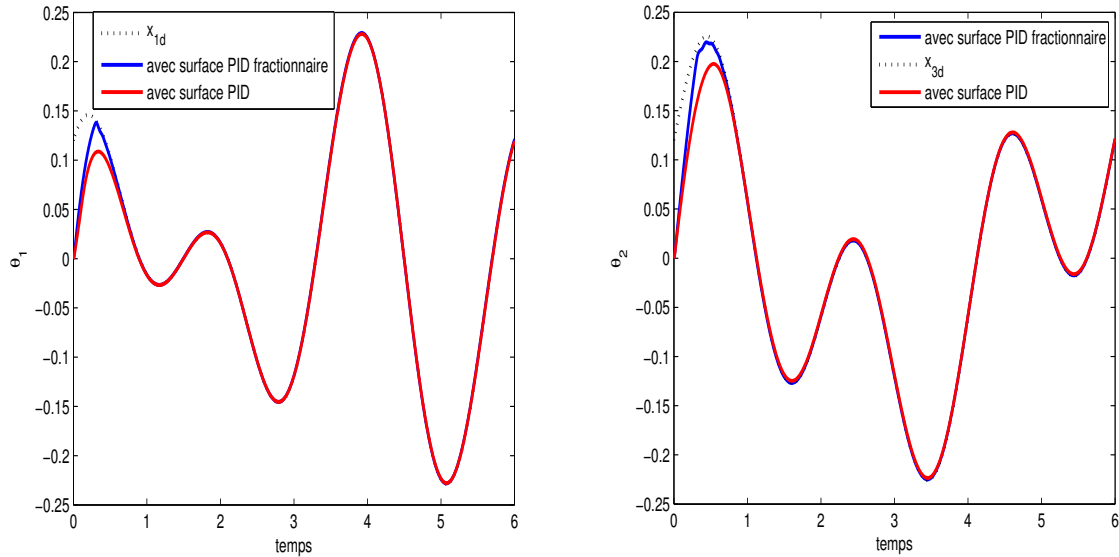


FIGURE 3.14: Variation des variables d'état (x_1) et (x_3), utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire

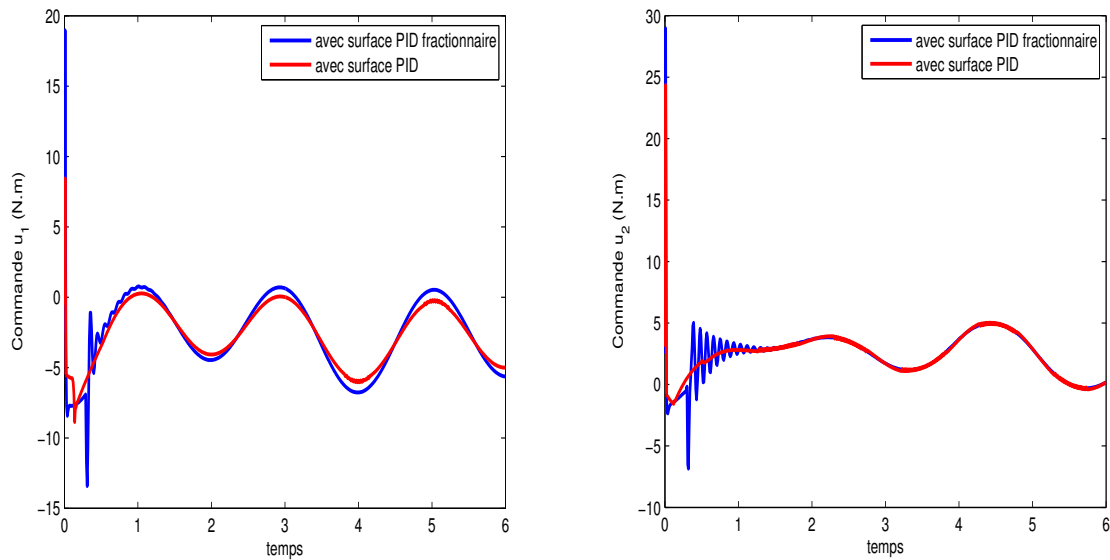


FIGURE 3.15: Variation des commandes (u_1) et (u_2), utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire

= (0.1, - 0.1). Les résultats de simulation sont donnés par les figures suivantes.

D'après les résultats obtenus en présence de perturbations externes, on remarque, la poursuite des trajectoires est assurée avec insensibilité nulle aux perturbations. En changeant les trajectoires désirées et les conditions initiales des états, le système reste stable avec une bonne poursuite. Néanmoins, des oscillations indésirables à haute fréquence (phénomène de *chattering*) sont constatées sur le signal de commande ; dans la figure 3.23, la

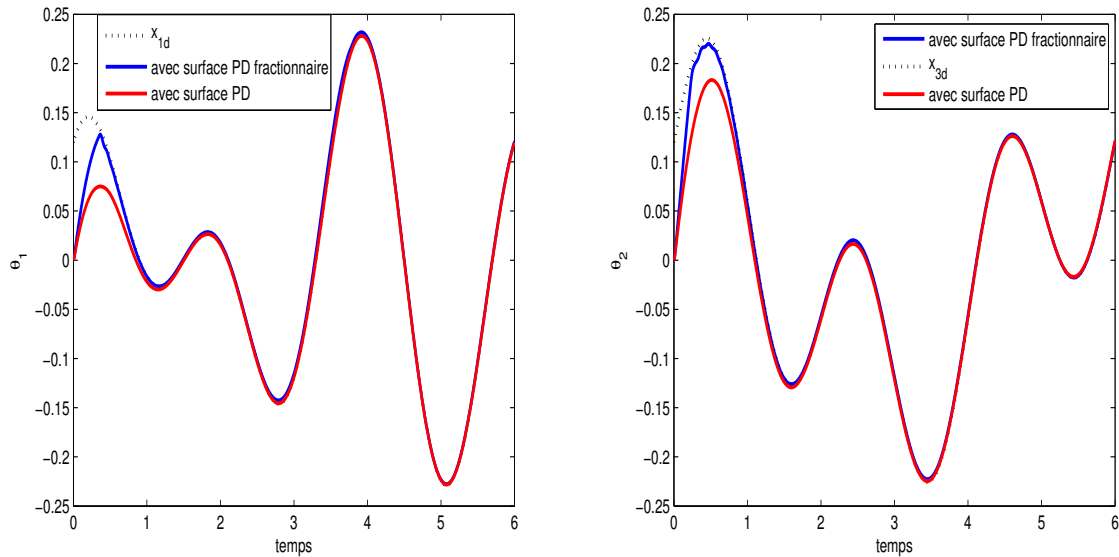


FIGURE 3.16: Variation des variables d'état (x_1) et (x_3) avec addition des perturbations externes, utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire

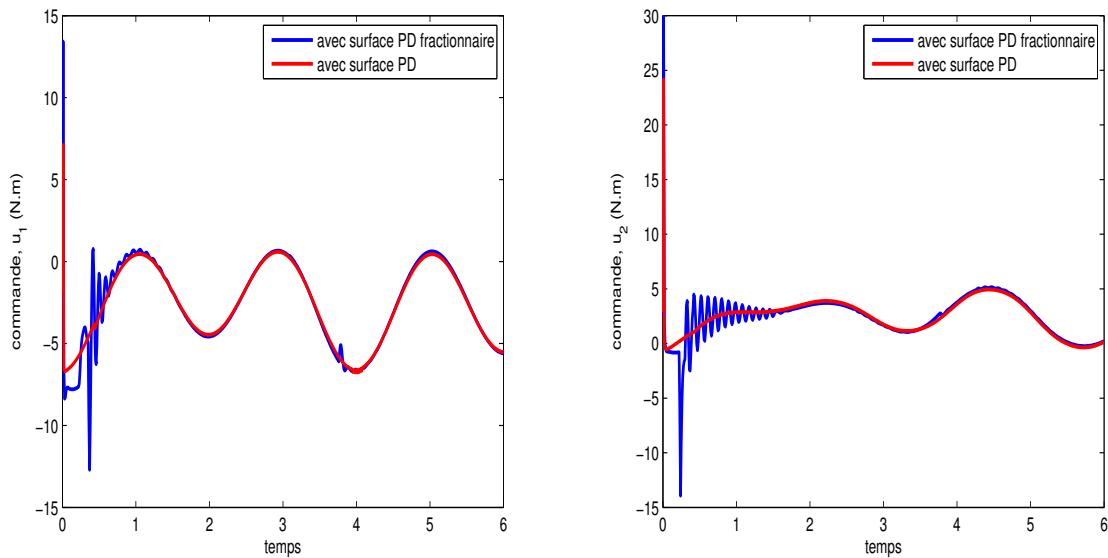


FIGURE 3.17: Variation des commandes (u_1) et (u_2) avec addition des perturbations externes, utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire

commande avec surface PID montre que les signaux de commande générés pour les deux sous systèmes, présentent des oscillations à haute fréquence (phénomène de *chattering*).

Par la suite, une étude comparative entre les différents cas de commandes optimales synthétisées, a été faite en se basant sur les deux critères de performance J_1 and J_2 données par (3.60), avec N étant le nombre des échantillons du signal mesuré.

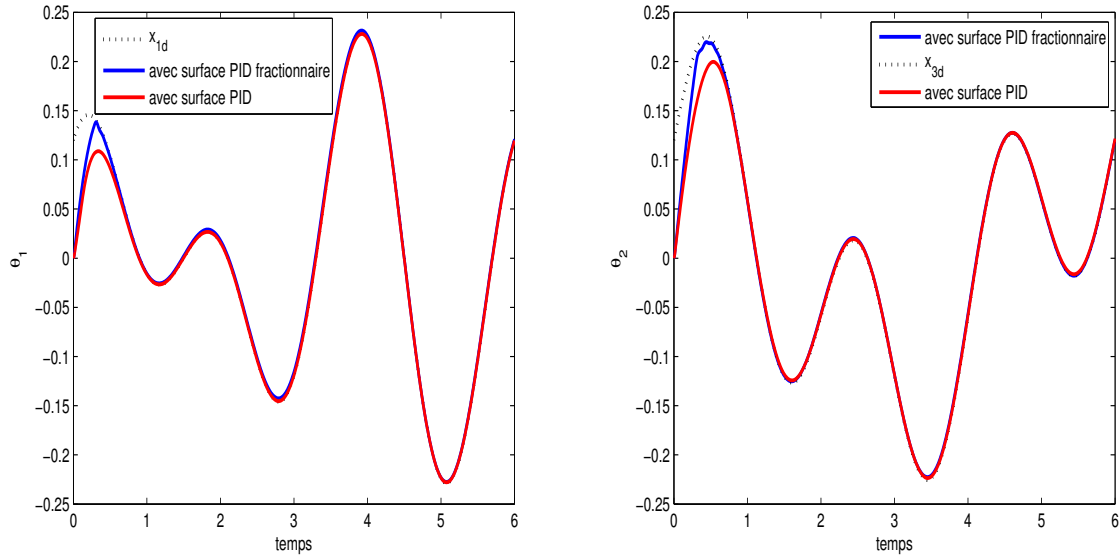


FIGURE 3.18: Variation des variables d'état (x_1) et (x_3) avec addition des perturbations externes, utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire

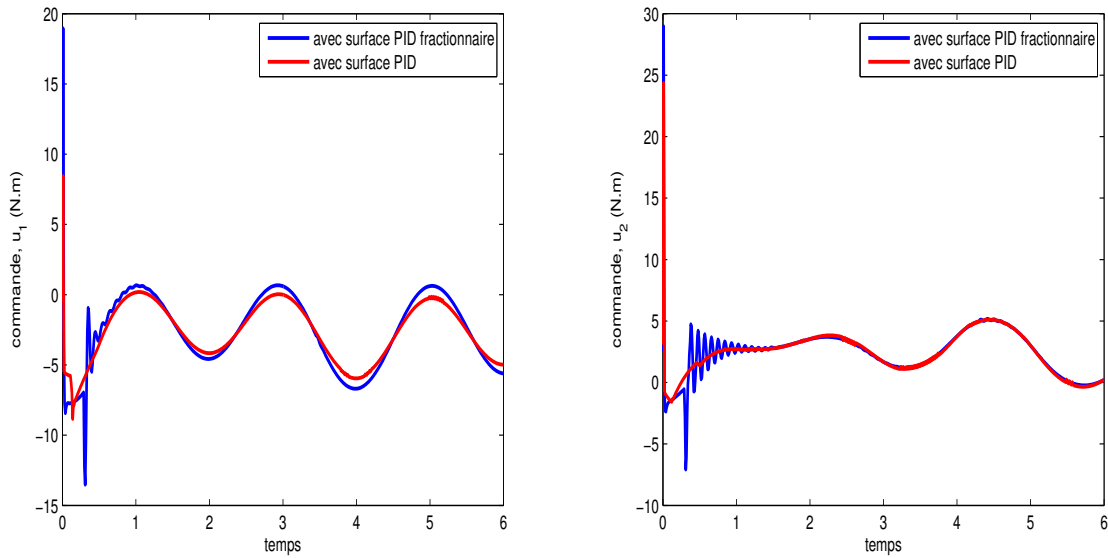


FIGURE 3.19: Variation des commandes (u_1) et (u_2) avec addition des perturbations externes, utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 |e_{(2j-1)}(i)| \\
 J_2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 |u_j(i)|
 \end{aligned}
 \tag{3.60}$$

D'après les tableaux 3.4, 3.5 et 3.6, on peut déduire que les deux stratégies de commandes par mode glissant d'ordre fractionnaire donnent de meilleurs résultats en termes de précision ($\min(J_1)$) avec évidemment une supériorité de la commande avec surface PID

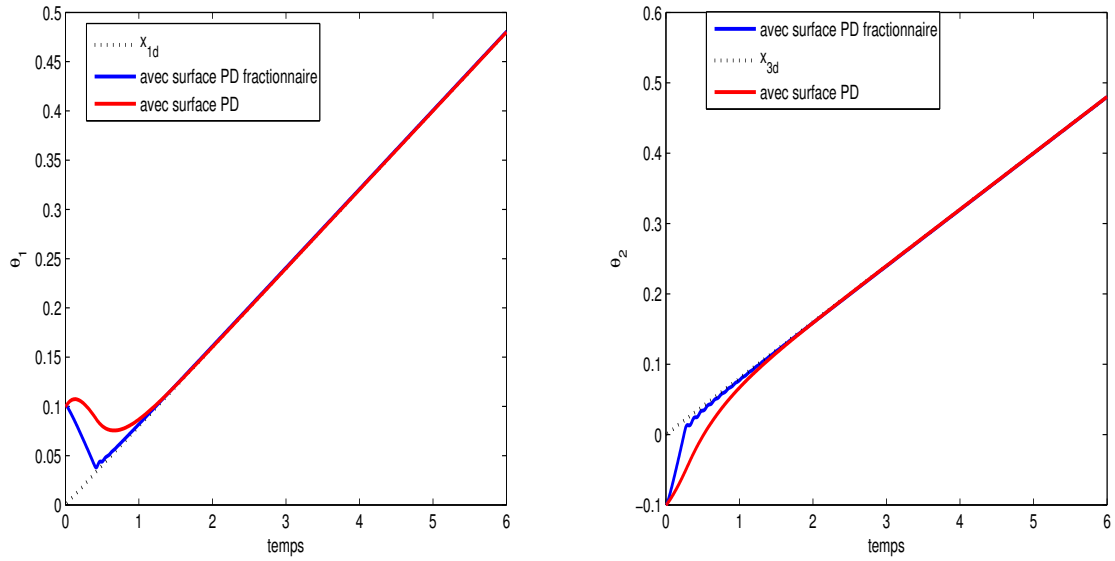


FIGURE 3.20: Variation des variables d'état (x_1) et (x_3) avec changement de trajectoires, utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire

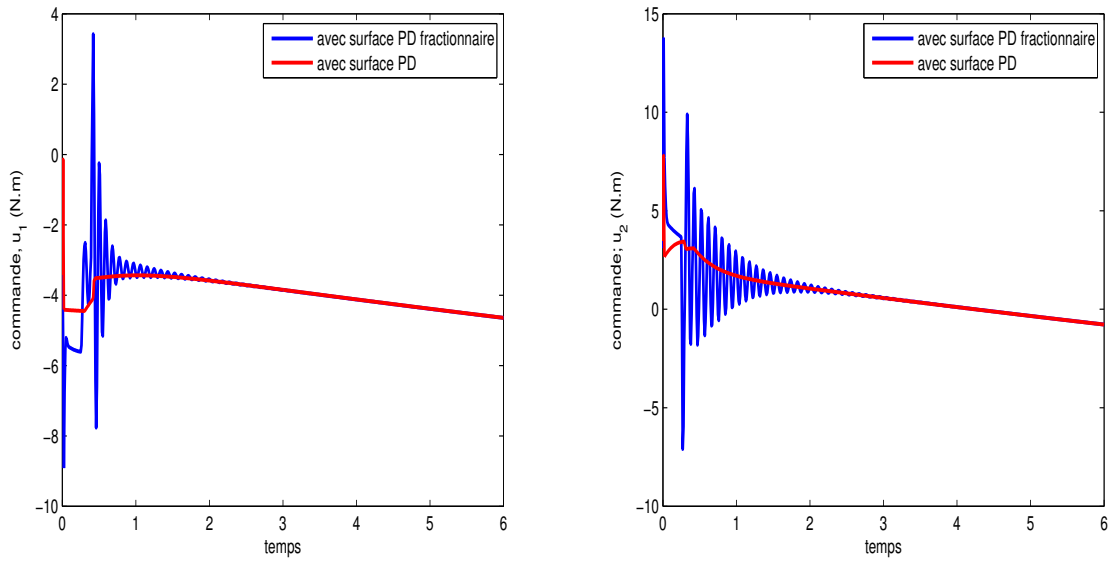


FIGURE 3.21: Variation des commandes (u_1) et (u_2) avec changement de trajectoires, utilisant la commande avec surface PD/ PD fractionnaire

Tableau 3.4: Comparaison entre les différentes stratégies de commande pour le système sein

Critère	surface PD	surface PD fractionnaire	surface PID	surface PID fractionnaire
J_1	11.0630	5.5296	7.9838	5.1636
J_2	$3.1455 * 10^3$	$3.2943 * 10^3$	$3.1388 * 10^3$	$3.2900 * 10^3$

fractionnaire. cependant une comparaison basée sur l'énergie (J_2) montre que ces dernières approches deviennent beaucoup plus énergétiques ($max(J_2)$) par rapport aux autres, qui

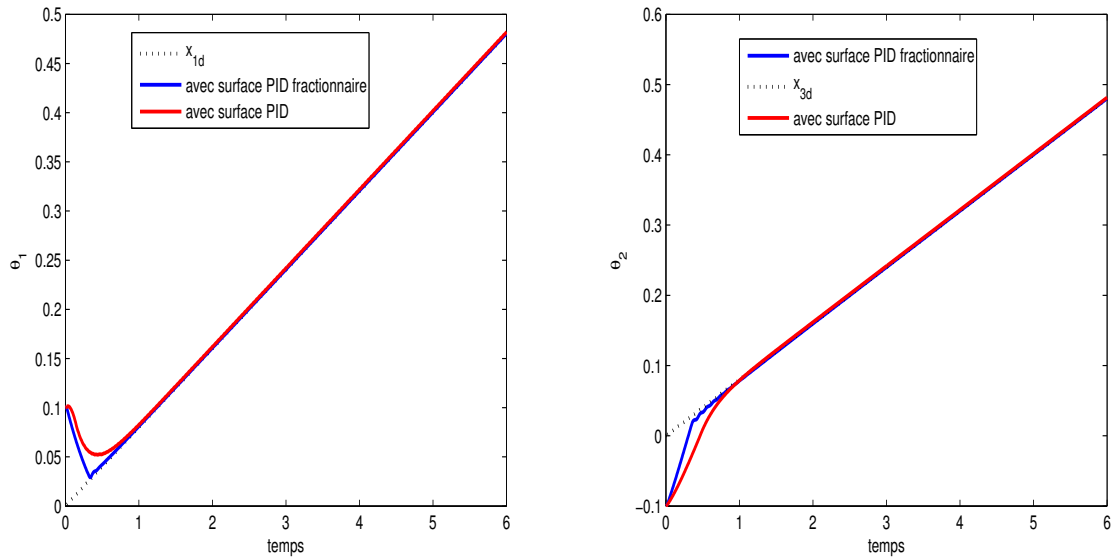


FIGURE 3.22: Variation des variables d'état (x_1) et (x_3) avec changement de trajectoires, utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire

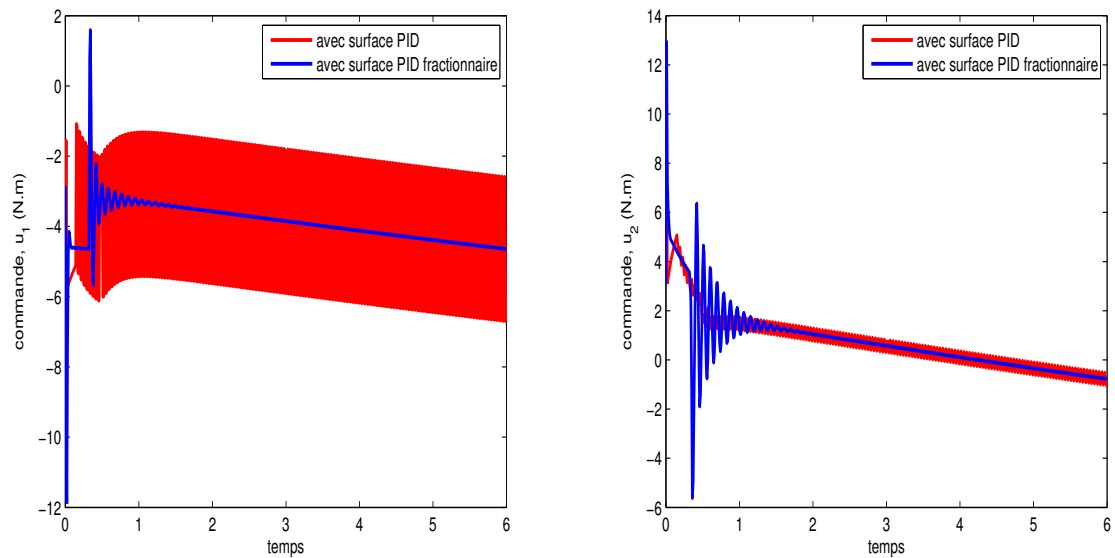


FIGURE 3.23: Variation des commandes (u_1) et (u_2) avec changement de trajectoires, utilisant la commande avec surface PID/ PID fractionnaire

Tableau 3.5: Comparaison entre les différentes stratégies de commande en présence de perturbations externes

Critère	surface PD	surface PD fractionnaire	surface PID	surface PID fractionnaire
J_1	11.1409	5.9089	8.0489	5.5165
J_2	$3.1501 * 10^3$	$3.2947 * 10^3$	$3.1403 * 10^3$	$3.2943 * 10^3$

assurent quant à elles la stabilité avec minimum d'énergie avec une supériorité de la commande avec surface PID classique.

Tableau 3.6: Comparaison entre les différentes stratégies de commande pour changement des trajectoires désirées

Critère	surface PD	surface PD fractionnaire	surface PID	surface PID fractionnaire
J_1	10.6850	5.3670	8.7104	4.6442
J_2	$2.9676 * 10^3$	$3.0077 * 10^3$	$2.9562 * 10^3$	$2.9823 * 10^3$

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, des approches de commande floue-mode glissant ont été développés pour le système double pendule inversé. Nous avons d'abord commencé par exposer les deux stratégies de commande basées sur des surfaces de glissement PD et PID d'ordre entier. Ensuite, nous avons développé deux nouvelles approches en se basant sur la synthèse de surfaces de glissement d'ordre fractionnaires de type PD et PID. La stabilité du système est démontrée à l'aide du théorème de Lyapunov.

Les résultats de simulation obtenus ont montré clairement l'efficacité et la supériorité des approches d'ordre fractionnaire par rapport à celles d'ordre entier.

Chapitre 4

Commande par mode de glissement d'ordre fractionnaire optimisée des systèmes non linéaires SITO

4.1 Introduction

Dans les dernières années ont vu la commande des systèmes non linéaires à entrée unique et plusieurs sorties (appelé communément systèmes sous actionnées) , particulièrement à une entrée et deux sorties (en anglais Single Input Two Output (SITO)) a gagner une place importante et attirer un certain nombre de chercheurs. Par exemple, dans [153] des régulateurs PID sont appliqués à la stabilisation et commande de poursuite de trois types de pendules inversés ; dans [154] le régulateur PID et combiné avec le LQR afin d'aboutir à une commande résultante optimale ; un contrôleur flou avec estimation de ses paramètres a été proposé dans [155]. Une commande intelligente basée sur le PD flou type-2 a été également proposée dans [156].

La conception de la commande par mode glissant pour ce genre de systèmes constitue un défi de taille. On peut citer, entre autre ; le mode glissant découplé [157] ; la commande floue-mode glissant optimisée par algorithme de colonies de fourmis [158], [159] ; la commande par mode glissant découplée avec flou-réseaux de neurone [160], où le flou-réseaux de neurone est utilisé pour l'approximation de la commande computationnel. Il est à noter que toutes ces approches développées sont basées sur le calcul d'ordre entier.

Motivé par ce qui a été obtenu comme résultats dans le chapitre précédent, nous avons proposé une nouvelle approche de commande par mode glissant d'ordre fractionnaire pour

une classe de systèmes SITO. En premier lieu, deux surfaces de glissement d'ordre fractionnaires sont proposées avec une variable intermédiaire transféré de la seconde surface vers la première (considéré comme principale), afin d'hierarchiser les deux surfaces de glissement. En second lieu, une loi de commande a été synthétisée afin de commander les deux sorties du système. La condition de stabilité au sens de Lyapunov a été présentée en respectant les propriétés du calcul d'ordre fractionnaire. Dans l'objectif d'améliorer les performances du système en boucle fermée, l'algorithme d'optimisation par essaim de particules a été utilisé.

Enfin, l'efficacité et la robustesse de l'approche de commande par mode glissant d'ordre fractionnaire proposée et celle d'ordre entier, sont démontrées à travers des résultats de simulation avec le système Bille-Barre (*en anglais Ball-Beam*).

4.2 Description du système

Soit le système non linéaire décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_1(X) + b_1(X)u(t) + d_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= f_2(X) + b_2(X)u(t) + d_2(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Avec :

$X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ est le vecteur d'état, $f_1(X)$, $f_2(X)$, $b_1(X)$ et $b_2(X)$ sont des fonctions non linéaires, $u(t)$ est la commande du système appliquée aux deux sous systèmes, $d_1(t)$ et $d_2(t)$ sont des perturbations externes, et $Y = [x_1, x_3]^T$ est le vecteur de sortie du système.

Remarque : les hypothèses présentées dans le chapitre précédent sont utilisées ici.

4.3 Synthèse de la commande par mode glissant d'ordre entier (MGOE)

L'idée principale de la commande par mode glissant pour le système (4.1) peut être présentée comme suit :

On découple le système global en deux sous systèmes (le premier sous système contiens

les états x_1 et x_2 , et le deuxième contient les états x_3 et x_4), et on définit deux surfaces de glissement S_1 et S_2 :

$$S_1 = \dot{e}_1 + \lambda_1 \cdot e_1, \quad e_1 = x_1 - x_{1d} \quad (4.2)$$

$$S_2 = \dot{e}_3 + \lambda_2 \cdot e_3, \quad e_3 = x_3 - x_{3d} \quad (4.3)$$

Avec λ_1 et λ_2 sont des constantes positives.

Notez que l'objectif de la commande consiste à forcer les états du premier sous-système à se déplacer vers la surface de glissement $S_1 = 0$ et converger vers $x_1 = x_{1d}$, $x_2 = \dot{x}_{1d}$. Le deuxième objectif est de forcer les états du deuxième sous-système à se déplacer vers la surface de glissement $S_2 = 0$ et converger vers $x_3 = x_{3d}$, $x_4 = \dot{x}_{3d}$.

Puisque l'utilisation d'une commande u_1 calculée à partir de la surface de glissement S_1 , n'assure que la convergence des états x_1 , x_2 aux souhaités, valeurs et l'utilisation d'une commande u_2 calculée à partir de la surface de glissement S_2 , n'assure que la convergence états x_3 , x_4 , nous prenons en compte l'idée donnée dans [158] qui consiste à utiliser une variable intermédiaire z de l'équation (4.5) présentant les informations transférées de S_2 vers S_1 . En effet, la surface de glissement S_1 est modifiée comme dans l'équation (4.4) et la surface S_2 conserve toujours la même forme telle que dans l'équation (4.3).

Cette modification change l'objectif de la commande de $x_1 = x_{1d}$, $x_2 = \dot{x}_{1d}$ et $x_3 = x_{3d}$, $x_4 = \dot{x}_{3d}$ à $x_1 = x_{1d} + z$, $x_2 = \dot{x}_{1d}$ et $x_3 = x_{3d}$, $x_4 = \dot{x}_{3d}$.

$$S_1 = \dot{e}_1 + \lambda_1 \cdot (e_1 - z) \quad (4.4)$$

$$z = \text{sat} \left(\frac{S_2}{\varphi_2} \right) \cdot k_2, \quad 0 < k_2 < 1 \quad (4.5)$$

Avec φ_2 est la bande limite de la surface de glissement S_2 qui assure le lissage de la commande et le maintien de l'état du système dans cette bande.

D'après l'équation (4.4), si $S_1 = 0$, alors $x_1 = x_{1d} + z$ et $x_2 = \dot{x}_{1d}$. D'autre part, lorsque $S_2 \neq 0$ alors $z \neq 0$. Il en résulte que l'objectif de la commande est de réduire S_2 . Lorsque S_2 diminue, z diminue aussi. En résumé, lorsque $S_2 \rightarrow 0$ avec $x_3 = x_{3d}$, alors $z \rightarrow 0$ avec $x_1 = x_{1d}$; alors $S_1 \rightarrow 0$, et ainsi l'objectif de la commande est atteint. L'objectif de commande sera, donc, atteint quand $S_1 = 0$ et $S_2 = 0$. Dans ce cas, si $t_{f1} \geq t_{f2}$, t_{f2} est non considéré, t_f sera égal à t_{f1} , En outre, si $t_{f2} \geq t_{f1}$, t_{f1} est non considéré, t_f sera égal

à t_{f2} ; avec t_{f1} , t_{f2} et t_f respectivement le temps final (pour l'erreur $e=0$) de sous système 1, système 2 et système global.

D'après l'équation (4.5) la valeur absolue maximale de e_1 sera limitée.

Démonstration : L'équation (4.4) peut être réécrite comme suit :

$$S_1 = \dot{e}_1 + \lambda_1 \cdot e_1 - \lambda_1 \cdot \text{sat} \left(\frac{\dot{e}_3 + \lambda_2 \cdot e_3}{\varphi_2} \right) \cdot k_2 \quad (4.6)$$

Supposant que :

$$|\dot{e}_3 + \lambda_2 \cdot e_3| \leq \varphi_2 \quad (4.7)$$

Nous sommes dans la partie linéaire de la fonction «*sat*» et alors (4.6) devient

$$S_1 = \dot{e}_1 + \lambda_1 \cdot e_1 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{\dot{e}_3 + \lambda_2 \cdot e_3}{\varphi_2} \right) \cdot k_2 \quad (4.8)$$

En régime glissant on a $S_1 = 0$. Le point d'équilibre est atteint quand $t \rightarrow \infty$, dans ce cas $\dot{e}_1 = \dot{e}_3 = 0$. Donc on trouve que :

$$S_1 = 0 = \lambda_1 \cdot e_1 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{\lambda_2 \cdot e_3}{\varphi_2} \right) \cdot k_2 \Rightarrow e_1 = \left(\frac{\lambda_2 \cdot e_3}{\varphi_2} \right) \cdot k_2 \quad (4.9)$$

Si la relation (4.7) est vérifiée, alors nous aurions en régime glissant $\left| \frac{\lambda_2 \cdot e_3}{\varphi_2} \right| \leq 1$. Donc par substitution dans (4.9) on obtien $|e_1| \leq k_2$.

La structure générale de la commande qui répond à la condition de stabilité peut être écrite comme suit :

$$u = u_{eq} + u_n \quad (4.10)$$

Avec u_{eq} est la commande équivalente calculée à partir de $\dot{S}_1 = 0$, et un la commande discontinue ou attractante.

La dérivée par rapport au temps de l'équation (4.4) donne :

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \ddot{e}_1 + \lambda_1 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{z}) \\ &= (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{z}) \\ &= (f_1 + b_1 u + d_1 - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{z}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Avec \dot{z} est donné par l'expression suivante [50] :

$$\dot{z} = \begin{cases} \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{S}_2 & \text{si } \left| \frac{S_2}{\varphi_2} \right| < 1 \\ 0 & \text{si } \left| \frac{S_2}{\varphi_2} \right| \geq 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Et \dot{S}_2 par :

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 &= \ddot{e}_3 + \lambda_2 \cdot \dot{e}_3 \\ &= (\ddot{x}_3 - \ddot{x}_{3d}) + \lambda_2 \cdot \dot{e}_3 \\ &= (f_2 + b_2 u + d_2 - \ddot{x}_{3d}) + \lambda_2 \cdot \dot{e}_3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

En substituant l'équation (4.13) et l'équation (4.12) dans l'équation (4.11) et en posant $\dot{S}_1 = 0$, la commande équivalente pour le système non perturbé est obtenue :

$$u_{eq} = \frac{-1}{(b_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} b_2)} [f_1 - \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot (f_2 - \ddot{x}_{3d}) + (\lambda_1 \cdot \dot{e}_1 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{e}_3)] \quad (4.14)$$

La commande globale u sera :

$$u = \frac{-1}{(b_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} b_2)} [f_1 - \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot (f_2 - \ddot{x}_{3d}) + (\lambda_1 \dot{e}_1 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{e}_3) + (k_1 \cdot \text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1}))] \quad (4.15)$$

Où k_1 est une constante positive et φ_1 est la couche limite de la surface de glissement S_1 .

4.3.1 Analyse de stabilité

Garder les états du système (x_1, x_3) sur les surfaces de glissement $S_1, S_2, \forall t \succ 0$ garantira que le vecteur des erreurs de poursuite (e_1, e_3) se rapproche asymptotiquement vers zéro. La condition de glissement correspondante est donnée par la fonction candidate de Lyapunov [160] :

$$\begin{cases} V = \frac{1}{2} S_1^2 \\ \dot{V} = S_1 \dot{S}_1 \leq 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Substituant l'équation (4.15) dans l'équation (4.11)

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= (d_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot d_2) - k_1 \text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1}) \\ &\leq (\delta_1 \cdot \text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1}) - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \delta_2 \cdot \text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1})) - k_1 \cdot \text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

D'où

$$S_1 \dot{S}_1 \leq \varphi_1 \left(\delta_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \delta_2 - k_1 \right) \left| \frac{S_1}{\varphi_1} \right| \quad (4.18)$$

D'après l'équation (4.18), on peut conclure que la condition de stabilité est obtenue sous la condition suivante :

$$k_1 \succ (\delta_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \delta_2) \quad (4.19)$$

Mais, l'équation (4.15) aura une commutation à haute fréquence (*chattering*) à proximité de la surface de glissement ($S_1 = 0$) en raison de la fonction 'sgn' impliqués. Ainsi, afin d'éliminer ce phénomène, on remplace $\text{sgn}(S_1/\varphi_1)$ par $\text{sat}(S_1/\varphi_1)$ comme suit :

$$u = \frac{-1}{(b_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} b_2)} [f_1 - \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot (f_2 - \ddot{x}_{3d}) + (\lambda_1 \cdot \dot{e}_1 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{e}_3) + (k_1 \cdot \text{sat}(\frac{S_1}{\varphi_1}))] \quad (4.20)$$

4.4 Synthèse de la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire (MGOF)

Dans cette partie, nous allons développer une commande par mode glissant d'ordre fractionnaire pour la poursuite des trajectoires du système (4.1). A cet effet, les formes introduites dans la section précédente seront utilisés.

Les deux surfaces de glissement peuvent être définies comme suit [161] :

$$S_1 = D_t^\alpha e_1 + \lambda_1 \cdot (e_1 - z), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.21)$$

$$S_2 = D_t^\alpha e_3 + \lambda_2 \cdot e_3 \quad (4.22)$$

Utilisant la propriété du dérivé fractionnaire au sens de Caputo donnée par l'équation (2.26) dans le deuxième chapitre ; S_1 et S_2 peuvent être réécrites comme suit :

$$S_1 = D_t^{(\alpha-1)} \dot{e}_1 + \lambda_1 \cdot (e_1 - z) \quad (4.23)$$

$$S_2 = D_t^{(\alpha-1)} \dot{e}_3 + \lambda_2 \cdot e_3 \quad (4.24)$$

Prenant le dérivé des deux côtés de l'équation (4.23) par rapport au temps t , on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= D_t^{(\alpha-1)}\ddot{e}_1 + \lambda_1 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{z}) \\ &= D_t^{(\alpha-1)}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{z}) \\ &= D_t^{(\alpha-1)}(f_1 + b_1 u + d_1 - \ddot{x}_{1d}) + \lambda_1 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{z})\end{aligned}\quad (4.25)$$

Avec \dot{z} prend la même forme que l'équation (4.12), et

$$\begin{aligned}\dot{S}_2 &= D_t^{(\alpha-1)}\ddot{e}_3 + \lambda_2 \cdot \dot{e}_3 \\ &= D_t^{(\alpha-1)}(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_{3d}) + \lambda_2 \cdot \dot{e}_3 \\ &= D_t^{(\alpha-1)}(f_2 + b_2 u + d_2 - \ddot{x}_{3d}) + \lambda_2 \cdot \dot{e}_3\end{aligned}\quad (4.26)$$

En posant $\dot{S}_1 = 0$ et en respectant les propriétés de linéarité des dérivés fractionnaires donnés dans le chapitre 2, la commande équivalente est obtenue :

$$u_{eq} = \frac{-1}{(b_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} b_2)} [f_1 - \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot (f_2 - \ddot{x}_{3d}) + D_t^{(1-\alpha)}(\lambda_1 \cdot \dot{e}_1 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{e}_3)] \quad (4.27)$$

La commande globale sera :

$$\begin{aligned}u &= \frac{-1}{(b_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} b_2)} [f_1 - \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot (f_2 - \ddot{x}_{3d}) + D_t^{(1-\alpha)}(\lambda_1 \dot{e}_1 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{e}_3) \\ &\quad + D_t^{(1-\alpha)}(k_1 \cdot \text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1}))]\end{aligned}\quad (4.28)$$

Où u_n est donnée par sa propre forme dans (4.28) afin de satisfaire la condition d'existence et de stabilité du mode glissant.

4.4.1 Analyse de stabilité

Pour la condition de stabilité, en substituant l'équation (4.28) dans l'équation (4.25); il en résulte :

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= -D_t^{(\alpha-1)} D_t^{(1-\alpha)}(\lambda_1 \cdot \dot{e}_1 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{e}_3) - D_t^{(\alpha-1)} D_t^{(1-\alpha)}(k_1 \cdot \text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1})) \\ &\quad + (\lambda_1 \cdot \dot{e}_1 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{e}_3) + D_t^{(\alpha-1)} d_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot D_t^{(\alpha-1)} d_2\end{aligned}\quad (4.29)$$

Prenons en considération la propriété de Caputo donnée dans le chapitre 2 par (2.23);

cela nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 = & -k_1 \cdot (\text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1})) + k_1 \cdot (\text{sgn}(\frac{S_1(0)}{\varphi_1})) + (\lambda_1 \dot{e}_1(0) - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{e}_3(0)) \\ & + D_t^{(\alpha-1)} d_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot D_t^{(\alpha-1)} d_2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Si on suppose que

$$k_1 \cdot (\text{sgn}(\frac{S_1(0)}{\varphi_1})) + (\lambda_1 \dot{e}_1(0) - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \dot{e}_3(0)) = 0 \quad (4.31)$$

L'équation (4.30) devient

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 = & -k_1 (\text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1})) + D_t^{(\alpha-1)} d_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot D_t^{(\alpha-1)} d_2 \\ = & -k_1 (\text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1})) + \psi_1 (\text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1})) - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \psi_2 (\text{sgn}(\frac{S_1}{\varphi_1})) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Alors

$$S_1 \dot{S}_1 \leq \varphi_1 \cdot \left(\psi_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \psi_2 - k_1 \right) \cdot \left| \frac{S_1}{\varphi_1} \right| \quad (4.33)$$

D'après l'équation (4.33) la condition de stabilité est obtenue sous la condition

$$k_1 \succ (\psi_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \psi_2) \quad (4.34)$$

Par contre si :

$$\left| k_1 \cdot (\text{sgn}(\frac{S_1(0)}{\varphi_1})) + (\lambda_1 \dot{e}_1(0) - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \dot{e}_3(0)) \right| \prec \xi \prec \infty \quad (4.35)$$

Cela nous permet d'avoir :

$$S_1 \dot{S}_1 \leq \varphi_1 \cdot \left(\psi_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \psi_2 - k_1 + \xi \right) \cdot \left| \frac{S_1}{\varphi_1} \right| \quad (4.36)$$

Donc pour :

$$k_1 \succ (\psi_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \psi_2 + \xi) \quad (4.37)$$

La condition de stabilité (4.16) est encore vérifiée.

La commande continue globale sera donc donnée par :

$$\begin{aligned} u = & \frac{-1}{(b_1 - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} b_2)} [f_1 - \ddot{x}_{1d} - \lambda_1 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot (f_2 - \ddot{x}_{3d}) \\ & + D_t^{(1-\alpha)} (\lambda_1 \dot{e}_1 - \lambda_1 \lambda_2 \frac{k_2}{\varphi_2} \cdot \dot{e}_3) + D_t^{(1-\alpha)} (k_1 \cdot \text{sat}(\frac{S_1}{\varphi_1}))] \end{aligned} \quad (4.38)$$

La figure 4.1 résume la structure de commande par mode glissant d'ordre entier/fractionnaire pour le système global où les deux sous systèmes sont commandés par un seul régulateur.

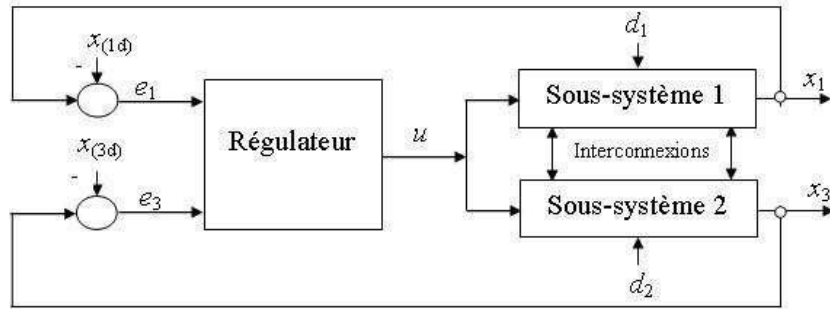


FIGURE 4.1: Schéma de principe de la commande par mode glissant pour un système SITO.

4.5 optimisation des commandes par essaim de particules

Dans cette partie, nous appliquons l'algorithme d'OEP pour optimiser les paramètres des commandes synthétisées en minimisant la fonction de cout F donnée par :

$$F(k) = \sum_{i=1}^N (\gamma_1 |e_1(i)| + \gamma_2 |e_3(i)| + \gamma_3 |u(i)|) \quad (4.39)$$

Le vecteur P des paramètres à optimiser, regroupant tous les paramètres, est donné dans chaque cas par :

- $P = [\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2, \varphi_1, \varphi_2]$ dans le cas du régulateur par mode glissant d'ordre entier.
- $P = [\lambda_1, \lambda_2, k_1, k_2, \varphi_1, \varphi_2, \alpha]$ dans le cas du régulateur par mode glissant d'ordre fractionnaire.

Les régions de ces paramètres sélectifs sont données par :

$$0.01 < \lambda_1, \lambda_2, k_1, \varphi_1, \varphi_2 < 10, 0.01 < k_2, \alpha < 1$$

Le problème d'optimisation est résumé dans la figure 4.2.

4.6 Application au système Bille-Barre

Afin de tester l'applicabilité de la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire proposée au problème de poursuite de trajectoire des systèmes à une seule entrée et deux

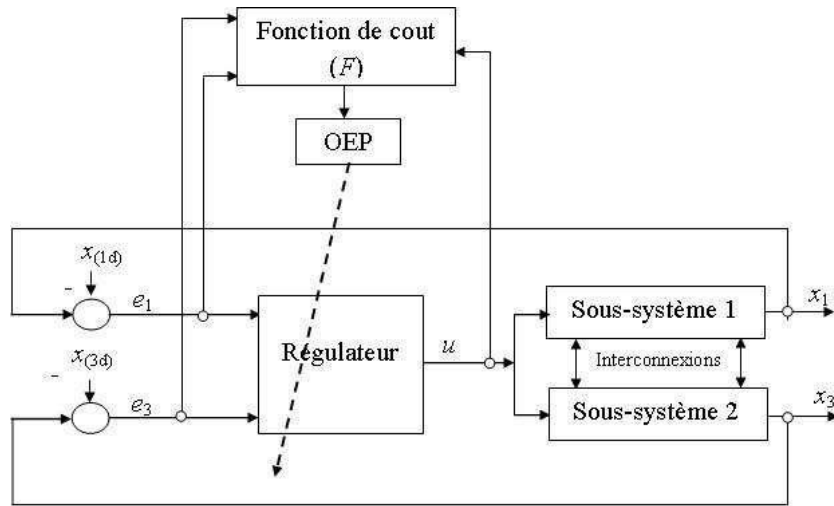


FIGURE 4.2: Processus d'optimisation des paramètres de la commande avec algorithme d'OEP pour un système SITO.

sorties, nous avons choisi le système Bille-Barre considéré comme système de test dans beaucoup de laboratoires d'automatique dans le monde.

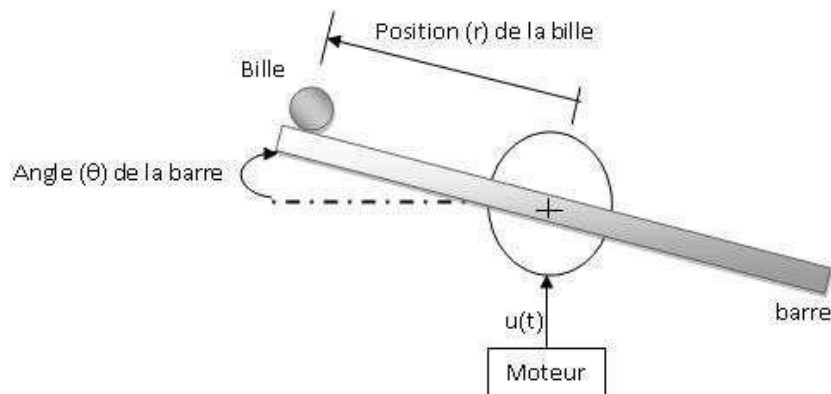


FIGURE 4.3: Système Bille-Barre.

Un couple $u(t)$ est appliqué à l'entrée du système à travers un moteur, provoquant la rotation de la barre d'un angle θ , la bille se déplace à la position r .

La dynamique du système Bille-Barre est représentée par les équations suivantes [50] :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{-m_s x_3 (2x_4 x_2 - g \cos(x_1))}{m_s x_3^2 + I_b} + \frac{1}{m_s x_3^2 + I_b} u + d \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= \frac{-5}{7} (g \sin(x_1) - x_3 x_2^2) + d
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Avec :

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = r, x_4 = \dot{r}$$

$u(t)$ La commande appliquée sur la barre.

$m_s = 0.05kg$: La masse de la bille.

$m_b = 1kg$: La masse de la barre.

$a = 1m$: La longueur de la barre.

$r_s = 0.01m$: Rayon de la sphère.

$I_b = \frac{m_b a^2}{12}$: Le moment d'inertie de la barre.

$I_s = \frac{2}{5}(m_s r_s^2)$: Le moment d'inertie de la bille.

$g = 9.81m/s^2$: L'accélération de la pesanteur.

Ce système est non linéaire instable en boucle ouverte ; comme montré dans la figure 4.4, la simulation a été utilisée en injectant un échelon unitaire en entrée sur une durée de 1 seconde avec $(x_1(0), x_3(0)) = (0, 0)$. Il est donc nécessaire d'introduire une commande pour le stabiliser.

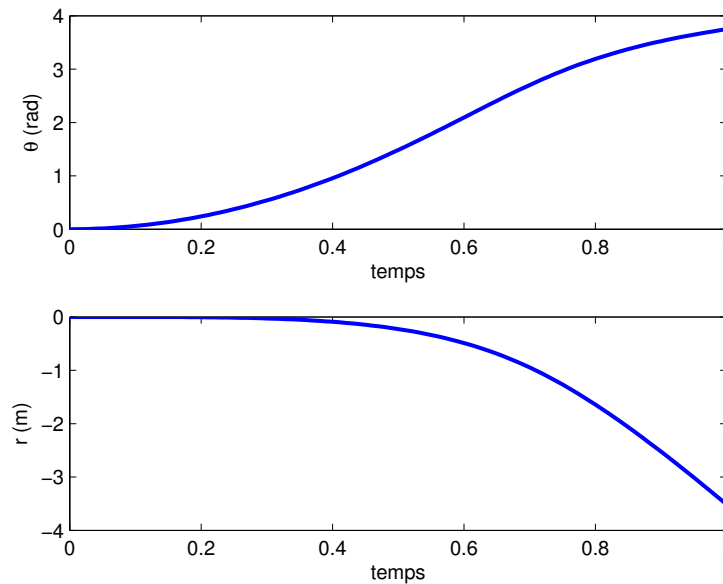


FIGURE 4.4: Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de 1N.m.

Le problème de poursuite est effectué dans le cas de la stabilisation du système au point d'équilibre $(x_{1d}, x_{3d}) = (0, 0) rad$; avec les conditions initiales $X(0) = [0, 0, 0.3, 0]$. Où les valeurs spécifiques de l'algorithme OEP pour l'optimisation des deux contrôleurs sont donnée par :

- Nombre de particules (n)= 20
- Nombre d'itérations (k)= 20
- Paramètres $\Phi_1 = \Phi_2 = 2.05$
- facteurs de pondérations $\gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2; \gamma_3 = 1$

Les résultats de simulation sont donnés par les figures suivantes ; la figure 4.5 montre l'évolution de la fonction de coût minimale parmi les 5 fois d'exécution du programme dans chaque cas ; à l'itération 20 l'algorithme d'OEP converge vers les paramètres optimaux donnés dans le tableau 4.1. La figure 4.6 représente la convergence des états du système vers les points d'équilibre. La variation de la variable z et le signal de commande u sont donnés par la figure 4.7.

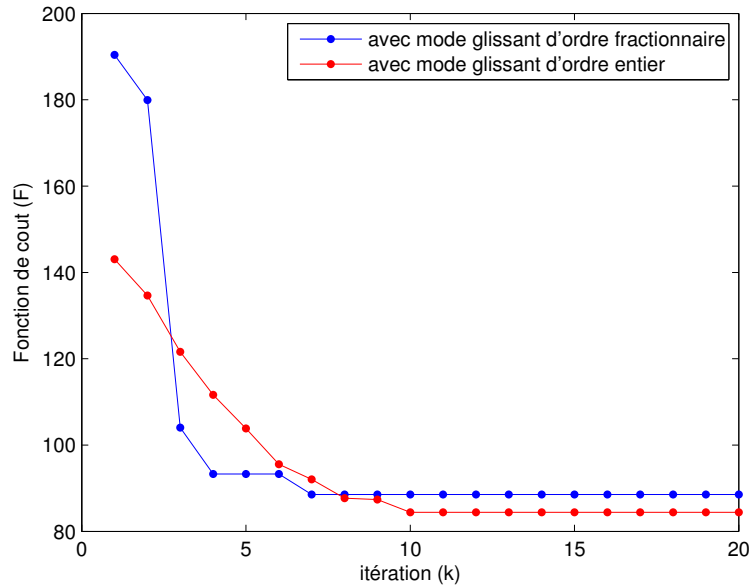


FIGURE 4.5: L'évolution de la fonction objective (F) pour les stratégies de commande.

Tableau 4.1: Paramètres optimaux des commandes MGOF et MGOE.

Paramètre	λ_1	φ_1	λ_2	φ_2	k_1	k_2	α
MGOF	1.2721	0.3299	1.3924	0.7756	1.4754	0.4949	0.2809
MGOE	3.7585	0.2411	1.7640	2.6585	1.8717	1.0000	-

Pour tester l'efficacité des commandes en présence des perturbations externes et vis-à-vis de changement de trajectoires, les deux tests suivants sont effectués : l'un avec l'introduction d'une perturbation externe de la forme $d(t) = 0.01\sin(t)$, et l'autre avec le changement de trajectoire par $(x_{1d}, x_{3d}) = (0, 0.2\sin(0.1\pi t))$; en gardant les paramètres optimaux ainsi calculés inchangés. Les résultats de simulation sont donnés par les figures (4.8 à 4.11).

D'après les résultats de simulation présentés par les figures, il est bien observé que les deux états x_1 et x_3 convergent respectivement vers les états désiré x_{1d} et x_{3d} . on s'aperçoit également que la convergence de la variable d'état x_3 utilisant la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire proposée est plus rapide que celle de la commande d'ordre

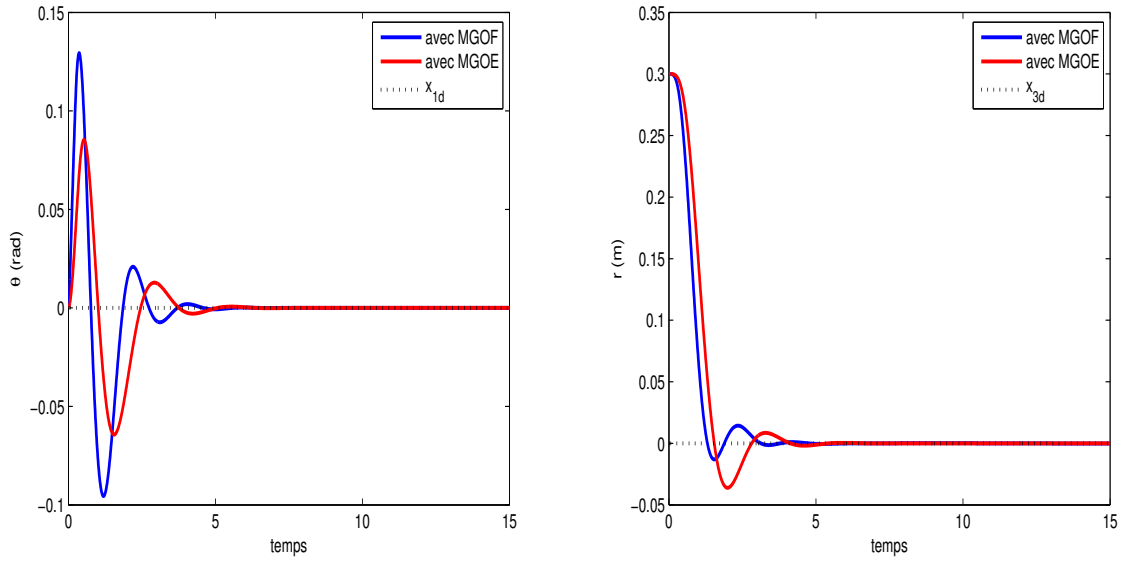


FIGURE 4.6: Variation des variables d'état θ et r

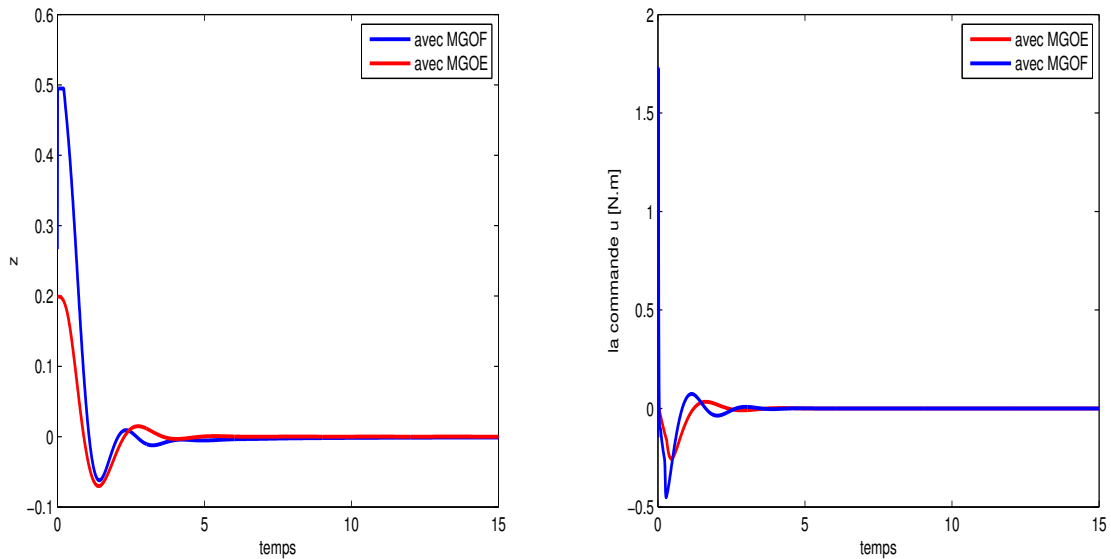


FIGURE 4.7: Variation de la variable z et la commande u

entier . Ceci est obtenu pour une valeur considérable de l'angle θ . On remarque aussi que l'effet du *chattering* est éliminé par la fonction *sat*.

En présence de la perturbation et changement de trajectoires, le système commandé par mode glissant d'ordre fractionnaire et mode glissant d'ordre entier sont stabilisés dans les deux cas.

Une étude comparative entre ces deux commandes distinctes (d'ordre fractionnaire et d'ordre entier) est menée. Pour cela, nous définissons les deux critères suivants (J_1 et J_2), le premier est en fonction de l'erreur totale résultante, le deuxième est en fonction de la

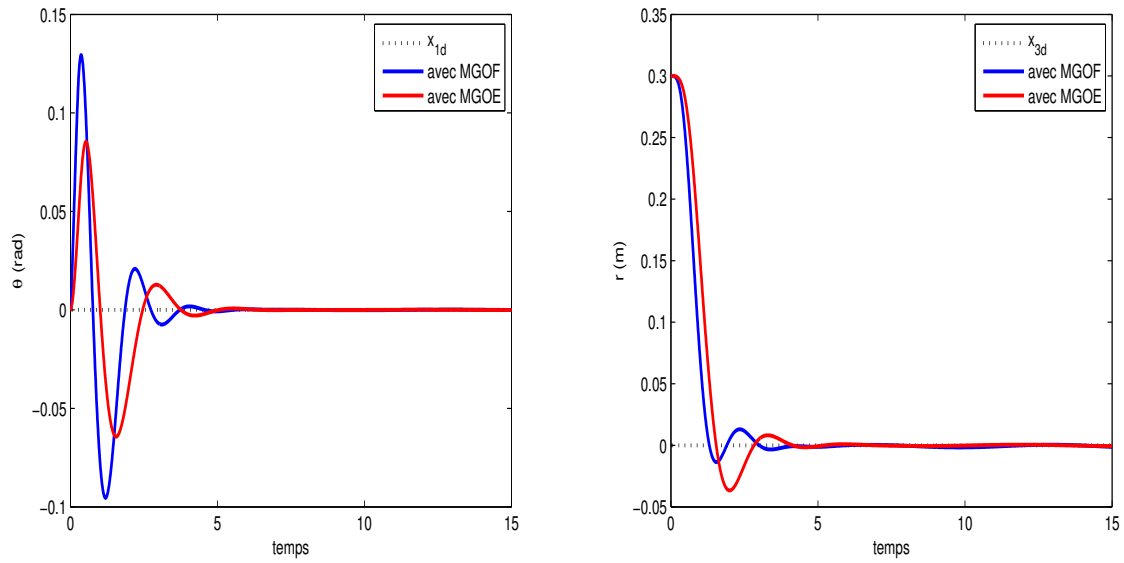


FIGURE 4.8: Variation des variables d'état $\theta(t)$ et $r(t)$ avec addition de perturbation externe

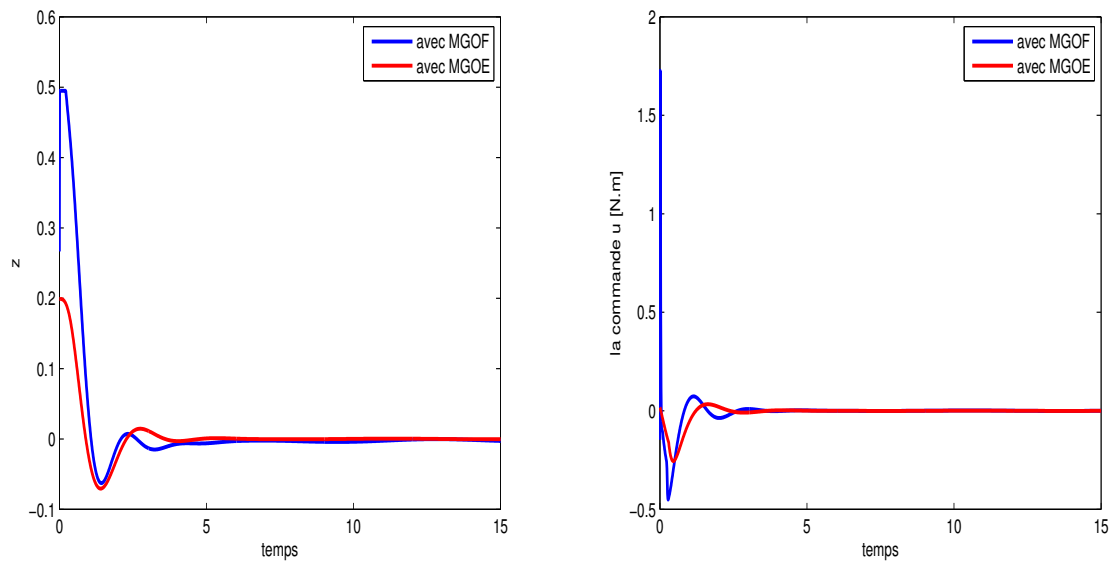


FIGURE 4.9: Variation de la variable z et la commande u avec addition de perturbation externe

commande appliquée. Les résultats de simulation pour chaque critère sont donnés dans les tableaux 4.2, 4.3, 4.4.

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^2 |e_{(2j-1)}(i)| \\
 J_2 &= \sum_{i=1}^N |u(i)|
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

D'après les résultats obtenus pour les deux stratégies de commande synthétisées, on

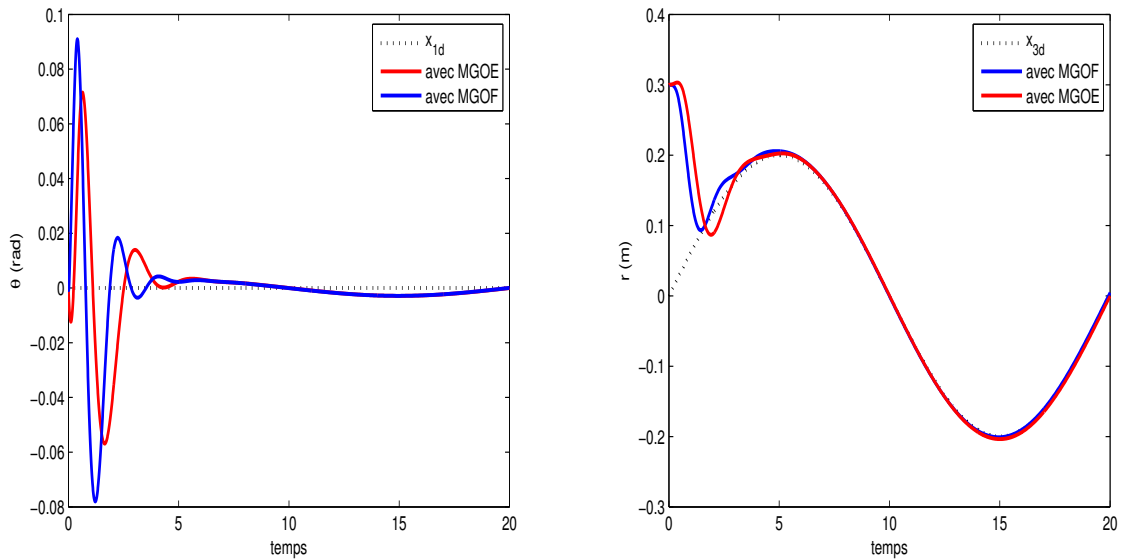


FIGURE 4.10: Variation des variables d'état $\theta(t)$ et $r(t)$ avec un changement des trajectoires

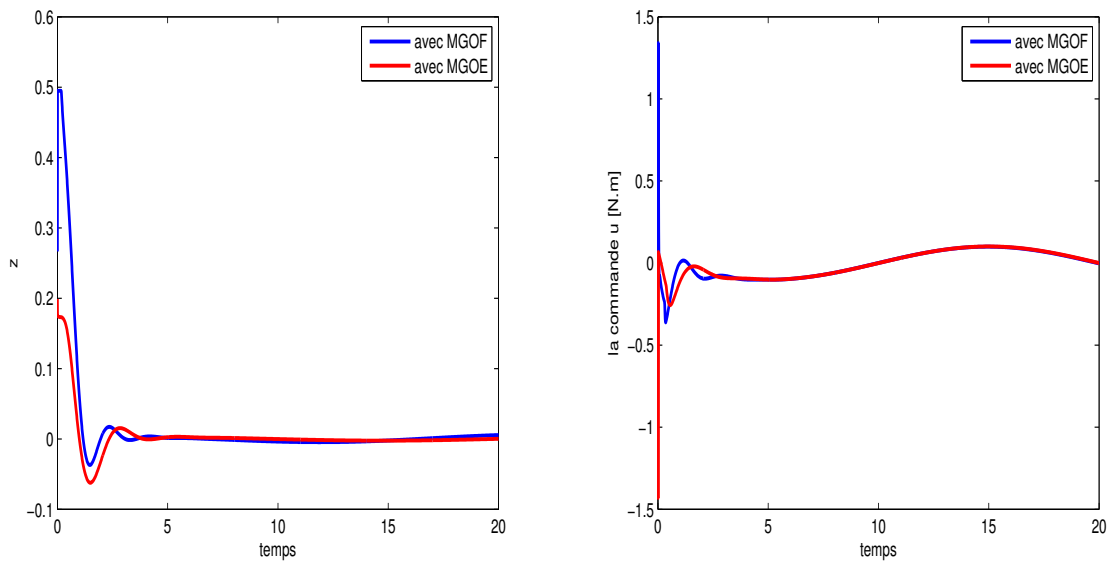


FIGURE 4.11: Variation de la variable z et la commande u avec un changement des trajectoires

Tableau 4.2: Comparaison entre la commande par MGOF et MGOE pour le système sein.

Critère	MGOF	MGOE
J_1	38.9751	44.9667
J_2	27.0138	18.5979

peut déduire que pour la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire, le critère J_1 prend des valeurs les plus faibles (valeurs en gras) pour le système non perturbé, perturbé et avec changement de trajectoire. Cette meilleure performance est obtenue avec

Tableau 4.3: Comparaison entre la commande par MGOF et MGOE avec addition de perturbation externe $d(t)$.

Critère	MGOF	MGOE
J_1	39.6844	45.3030
J_2	27.6766	19.0297

Tableau 4.4: Comparaison entre la commande par MGOF et MGOE avec changement de trajectoire.

Critère	MGOF	MGOE
J_1	43.7732	50.4159
J_2	144.9944	142.7709

une valeur élevée du critère J_2 , où la commande par mode glissant donne de meilleurs résultats.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une commande par mode glissant d'ordre fractionnaire optimale pour un système SITO non linéaires est proposée et comparée à une commande d'ordre entier optimale. Basé sur les critères de stabilité de Lyapunov, les lois de commande sont conçues, assurant ainsi la poursuite des références en boucle fermée. L'optimisation des lois de commande proposées est assurée en utilisant l'algorithme OEP selon une fonction de cout. Les résultats des simulations ont démontré l'efficacité et la robustesse de ces contrôleurs. En outre, dans la plupart des cas, la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire est plus performante comparativement à celle d'ordre entier.

Conclusion Générale et Perspectives

Le travail présenté dans cette thèse concerne la commande d'ordre fractionnaire des systèmes dynamiques non linéaires optimisée par algorithmes OEP. Ainsi, un certain nombre d'approches sont proposées. Dans un premier lieu, une étude est menée sur ces algorithmes en mettant en évidence leur structure et les paramètres intervenant lors de leur mise en œuvre. Les notions de base et les propriétés relatives au calcul fractionnaire sont ensuite explicitées. Ceci nous a permis de se familiariser avec ce domaine d'intérêt avéré en automatique.

Les lois de commande proposées ont montrées la faisabilité de l'approche par calcul d'ordre fractionnaire dans le domaine de la commande par mode de glissement. La stabilité est démontrée pour chaque approche proposée.

Les approches proposées sont validées par simulation sur des systèmes physiques. Les premiers résultats ont porté sur la conception des régulateurs PID d'ordre non entier optimisés ($PI^\alpha D^\beta$) pour la commande d'un TRMS. L'optimisation des paramètres est effectuée par l'algorithme d'essaim de particules (OEP). Une étude comparative sur les performances des régulateurs PID et $PI^\alpha D^\beta$ a été menée. Les résultats obtenus montrent clairement les meilleures performances de l'approche fractionnaire par rapport à l'approche classique.

Des lois de commande non linéaires d'ordre entier et d'ordre fractionnaire sont ensuite proposées pour deux classes de systèmes non linéaires.

Pour la première classe de systèmes TITO non linéaires interconnectés, la conception de la commande floue-mode glissant d'ordre entier et de la commande floue-mode glissant d'ordre fractionnaire a été présentée. Le système global est décomposé en deux sous-systèmes où chaque sous-système est commandé par un régulateur indépendant. La stabilité du système global est démontrée.

A travers les résultats de simulation et l'étude comparative, nous constatons l'apport évident de l'approche fractionnaire par rapport à l'approche classique. L'efficacité des commandes élaborées en présence de perturbations externes et par rapport aux changements

de références est également prouvée.

Pour la seconde classe de systèmes sous actionnées non linéaires, des commandes par mode glissant optimale d'ordre fractionnaire et d'ordre entier optimales sont développées. La poursuite de trajectoires de références en boucle fermée est garantie par les deux lois de commande synthétisées. Les résultats des simulations ont permis de démontrer l'efficacité et la robustesse des approches proposées. L'approche de commande fractionnaire apparaît plus performante que celle d'ordre entier dans la plupart des situations. Ce qui ouvre un grand axe d'investigation pour développer d'autre type de commande d'ordre non entier.

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse, sans avoir la prétention de résoudre tous les problèmes, a contribué à la mise en exergue de cette notion de commande d'ordre fractionnaire qui est parfois ignorée par la communauté des automaticiens.

Dans ce contexte et à travers cette étude, il est suggéré d'explorer les perspectives suivantes :

- Mise en œuvre pratique de ce type de commandes des prototypes réels.
- Développement d'autres stratégies de commande d'ordre fractionnaire pour d'autres classes de systèmes.

Bibliographie

- [1] J. J. E. Slotine, W. Li, *Applied nonlinear control*, Prentice-Hall, USA, 1991.
- [2] H. Nobahari and S. H. Pourtakdoust, "Optimal Fuzzy CLOS Guidance Law Design Using Ant Colony Optimization", *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, pp. 95–106, 2005.
- [3] C-Y. Liang, J-P Su, "A new approach to the design of a fuzzy sliding mode controller", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 139, issue. 1, pp. 111–124, 2003
- [4] K.B. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus: Theory and application of differentiation and integration to arbitrary order*, Academic Press, INC. San Diego, California, 1974.
- [5] A. Oustaloup, *La Commande CRONE*, Hermes, Paris, 1991.
- [6] A. Oustaloup, *La Derivation Non Entiere : Theorie, Synthèse et Applications*, Hermes, Paris, 1995.
- [7] A. Oustaloup, B. Mathieu and P. Lanusse, "The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission", *European Journal of Control*, vol. 1, n°. 2, pp. 113-121, 1995.
- [8] A. Oustaloup, J. Sabatier and X. Moreau, "From fractal robustness to the CRONE approach", in *ESAIM : Proceedings*, PP. 177-192, 1998.
- [9] A. Oustaloup, J. Sabatier and P. Lanusse, "From fractal robustness to the CRONE control", *FCAA*, vol. 1, n°. 2, PP. 01-30, 1999.
- [10] I. Podlubny, "Fractional-Order Systems and PI D Controllers", *IEEE transactions on automatic control*, vol. 44, n° 1, january 1999.
- [11] A.J. Calderon, B.M. Vinagre, V. Feliu, "Fractional sliding mode of a DC-DC buck converter with application to DC motor drives", *11th int. conf. on advanced robotics*, university of Coimbra, Portugal, pp. 252-257, 2003.
- [12] B. Zhang, Y. Pi, and Y. Luo, "Fractional order sliding-mode control based on parameters auto-tuning for velocity control of permanent magnet synchronous motor", *ISA Transactions*, vol. 51, issue. 5, pp. 649-656, 2012.
- [13] A. Mujumdar, S. Kurode and B. Tamhane, "Fractional Order Sliding mode control for Single Link Flexible Manipulator", *Part of 2013 IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, Hyderabad, India, August 28-30, pp. 288-293, 2013.
- [14] Y. Tang, X. Zhang, D. Zhang, G. Zhao, X. Guan, "Fractional order sliding mode controller design for antilock braking systems", *Neurocomputing*, vol. 111, pp. 122–130, 2 July 2013.
- [15] S. Dadras, H. R. Momeni, "Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty", *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* vol. 17, issue. 1, pp. 367–377, 2012.
- [16] H. Delavari, R. Ghaderi, A. Ranjbar, and S. Momani, "Fuzzy fractional order sliding mode controller for nonlinear systems", *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, vol. 15, pp. 963-978, 2010.
- [17] R. Eberhart, J. Kennedy, "A new optimizer using particle swarm theory", *Proceedings of the 6th International Symposium on Micro Machine and Human Science*, IEEE Press, pp. 39-43, 1995.
- [18] D. Matignon, "Stability results for fractional differential equations with applications to control processing", *In computational engineering in systems applications*, pp. 963-968, Lille, France, 1996.
- [19] A. Gherboudj, Méthodes de résolution de problèmes difficiles académiques, Thèse de Doctorat 3^{ème} cycle LMD en Informatique, Université de Constantine 2, 2013.

- [20] C.W. Reynolds, "Flocks, herds and schools: a distributed behavioral model", *Computer Graphics*, vol. 21, n°4, pp. 25-34, 1987.
- [21] E.O. Wilson, *Sociobiology: The new synthesis*, Belknap Press, 1975.
- [22] J. Kennedy, R. C. Eberhart, and Y. Shi. *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA, 2004.
- [23] S. Nabti, reconnaissance de caractères manuscrits par intelligence collective, Thèse de doctorat en science en informatique, université Ferhat Abass-Sétif, 2013.
- [24] Y. Cooren, Perfectionnement d'un algorithme adaptatif d'Optimisation par Essaim Particulaire. Applications en génie médical et en électronique, Thèse de doctorat en science, Spécialité : sciences de l'ingénieur, université paris 12 val de marne, 2008.
- [25] A. El Dor, Perfectionnement des algorithmes d'Optimisation par Essaim Particulaire. Applications en segmentation d'images et en électronique, Thèse de doctorat en informatique, université paris-est école doctorale mathématiques et STIC (MSTIC, E.D. 532) 2012.
- [26] R.C. Eberhart, P. Simpson, R. Dobbins, *Computational intelligence PC tools, Chapter 6*, Academic Press Professional, inc, San Diego, CA, USA, pp. 212–226, 1996.
- [27] X. Cai and Y. Tan, "A study on the effect of v_{max} in particle swarm optimisation with high dimension". *Int. J. Bio-Inspired Computation*, vol. 1, n° 3, pp. 210-216, 2009.
- [28] M. Clerc and J. Kennedy, "The particle swarm: explosion, stability, and convergence in multidimensional complex space", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, n° 1, pp. 58- 73, 2002.
- [29] H. Yoshida, K. Kawata, Y. Fukuyama, S. Takayama, and Y. Nakanishi, "A particle swarm optimization for reactive power and voltage control considering voltage security assessment", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, n° 4, pp. 1232–1239, November 2000.
- [30] M.P. Wachowiak, R. Smolikova, Y. Zheng, J.M. Zurada, and A.S. Elmaghraby, "An approach to multimodal biomedical image registration utilizing particle swarm optimization", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 8, n° 3, pp. 289–301, June 2004.
- [31] T.M. Blackwell and P. Bentley, "Improved music with swarms", *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, vol. 2, pp. 1462–1467, IEEE Press, 2002.
- [32] M. Reyes-Sierra and C. A. Coello Coello, "Multi-objective particle swarm optimizers: A survey of the state-of-the-art", *International Journal of Computational Intelligence Research*, vol. 2, n° 3, pp. 287–308, 2006.
- [33] X. Li, J. Branke, T. Blackwell, "Particle swarm with speciation and adaptation in a dynamic environment", In *GECCO'06: Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, pp. 51–58, ACM New York, NY, USA, 2006.
- [34] G.C. Onwubolu and M. Clerc, "Optimal path for automated drilling operations by a new heuristic approach using particle swarm optimization", *International Journal of Production Research*, vol. 42, issue. 3, pp. 473–491, February 2004.
- [35] J. C. Bansal, K. Deep, "A Modified Binary Particle Swarm Optimization for Knapsack Problems", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, issue. 22, pp. 11042–11061, 2012.
- [36] A. Salman, I. Ahmad, S. Al-Madani, "Particle swarm optimization for task assignment problem", *Microprocessors and Microsystems*, vol. 26, issue. 8, pp. 363–371, 2002.
- [37] R. Mendes, P. Cortez, M. Rocha, and J. Neves, "Particle swarms for feed forward neural networks training", In *International Joint Conference on Neural Networks*, pp. 1895–1899, Honolulu (Hawaii), USA, 2002.
- [38] A.v.E. Conradie, R. Miikkulaninen, and C. Aldrich, "Adaptive control utilizing neural swarming", In *Proc. of Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)*, New York, USA, 2002.

- [39] V. G. Gudise and G. K. Venayagamoorthy, "Comparison of particle swarm optimization and backpropagation as training algorithms for neural networks", *In IEEE Swarm Intelligence Symposium*, pp. 110–117, Indianapolis, Indiana, USA, 2003.
- [40] J-R. Zhang, J. Zhang, T-M. Lok, M. R. Lyu, "A hybrid particle swarm optimization–back-propagation algorithm for feedforward neural network training", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 185, issue. 2, pp. 1026–1037, 2007.
- [41] E.S. Correa, A. A. Freitas, and C.G. Johnson, "A new discrete particle swarm algorithm applied to attribute selection in a bioinformatics data set", *In Proceedings of the 8th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation (GECCO)*, vol. 1, pp. 35–42, Seattle, Washington, USA, ACM Press, 2006.
- [42] V.L. Georgiou, N.G. Pavlidis, K.E. Parsopoulos, Ph.D. Alevizos and M.N. Vrahatis, "Optimizing the performance of probabilistic neural networks in a bioinformatics task", *In Proceedings of the EUNITE Conference*, pp. 34–40, 2004.
- [43] S. Katare, A. Kalos, D. West, "A hybrid swarm optimizer for efficient parameter estimation", *In Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pp. 309–315, IEEE Press, 2004.
- [44] R. Marinke, E. Araujo, and L. Coelho, I. Matiko, "Particle swarm optimization (PSO) applied to fuzzy modeling in a thermal-vacuum system", *In Fifth International Conference on Hybrid Intelligent Systems (HIS'05)*, pp. 67–72. IEEE Computer Society, 2005.
- [45] Z-L. Gaing, "A particle swarm optimization approach for optimum design of PID controller in AVR system", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 19, n^o. 2, pp. 384–391, June 2004.
- [46] H. Ramezani and S. Balochian, "Optimal Design a Fractional-Order PID Controller using Particle Swarm Optimization Algorithm", *International Journal of Control and Automation*, vol. 6, n^o. 4, pp. 55-67, August, 2013.
- [47] Z. Bingul, O. Karahan, "Fractional PID controllers tuned by evolutionary algorithms for robot trajectory control", *Turk J Elec Eng & Comp Sci*, vol.20, n^o.Sup.1, pp. 1123-1136, 2012.
- [48] Z. Bingul, O. Karahan, "A Fuzzy Logic Controller tuned with PSO for 2 DOF robot trajectory control", *Expert Systems with Applications*, vol. 38, issue. 1, pp. 1017–1031, 2011.
- [49] H. Abderrezek and M.N. Harmas, "DC-DC Converter Finite Time Robust Control", *Journal of Electrical Engineering*, vol. 14 - Edition: 2, 2014.
- [50] M. Taherkhorsandi, K.K. Castillo-Villar, M.J. Mahmoodabadi, F. Janaghaei and S.M. Mortazavi Yazdi, "Optimal Sliding and Decoupled Sliding Mode Tracking Control by Multi-objective Particle Swarm Optimization and Genetic Algorithms", *Springer International Publishing*, pp. 43-78, Switzerland 2015.
- [51] R. Hooshmand, M. Ataei and A. Zargari, "A new fuzzy sliding mode controller for load frequency control of large hydropower plant using particle swarm optimization algorithm and Kalman estimator", *Euro. Trans. Electr. Power, John Wiley & Sons, Ltd*, 2011.
- [52] G. K. Venayagamoorthy, "Optimal control parameters for a UPFC in a multimachine using PSO", *In Proceedings of the 13th International Intelligent Systems Application to Power Systems*, pp. 488–493, 2005.
- [53] S. Mikki and A. A. Kishk, "Investigation of the quantum particle swarm optimization technique for electromagnetic applications", *In 2005 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 2A, pp. 45–48, 2005.
- [54] I. Tabet, K. Touafek, N. Bellel, **N. Bouarroudj**, A. Khelifa, and M. Adouane, "Optimization of angle of inclination of the hybrid photovoltaic-thermal solar collector using particle swarm optimization algorithm", *journal of renewable and sustainable energy*, vol6, 053116, 2014.
- [55] J. Moore and R. Chapman, "Application of particle swarm to multiobjective optimization", *Department of Computer Science and Software Engineering, Auburn University*, 1999.

- [56] C. A. Coello Coello, M. S. Lechuga, "MOPSO: A Proposal for Multiple Objective Particle Swarm Optimization", *In Proceeding of the Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, vol. 2, pp. 1051–1056, IEEE Service Center, May 2002.
- [57] J. E. Fieldsend and S. Singh, "A multi-objective algorithm based upon particle swarm optimisation, an efficient data structure and turbulence", *In Proceedings of the UK Workshop on Computational Intelligence (UKCI'02)*, pp. 37–44, Birmingham, UK, September 2002.
- [58] X. Hu and R. Eberhart, "Multiobjective optimization using dynamic neighborhood particle swarm optimization", *In Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation (CEC'02)*, pp. 1677–1681, IEEE Press, 2002.
- [59] K.E. Parsopoulos and M.N. Vrahatis, "Particle swarm optimization method in multiobjective problems", *In Proceedings of the ACM Symposium on Applied Computing (SAC)*, pp. 603–607, ACM Press, 2002.
- [60] A. Carlisle and G. Dozier, "Adapting particle swarm optimization to dynamic environments", *In the Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence (IC-AI)*, pp. 429–434, Las Vegas, Nevada, USA, 2000.
- [61] X. Hu and R. C. Eberhart, "Adaptive particle swarm optimization: detection and response to dynamic systems", *In Proc. Congress on Evolutionary Computation*, pp. 1666–1670, 2002.
- [62] R. C. Eberhart and Y. Shi, "Tracking and optimizing dynamic systems with particle swarms", *In Proc. of the Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, vol. 1, pp. 94–100, IEEE Press, 2001.
- [63] A. Carlisle, G. Dozier, "Tracking changing extrema with adaptive particle swarm optimizer", *In Proceedings of the 5th Biannual World Automation Congress*, vol. 13, pp. 265–270, 2002.
- [64] T. Blackwell and J. Branke, "Multi-swarm optimization in dynamic environments", *In EvoWorkshops, volume 3005 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, pp. 489–500, 2004.
- [65] T. Blackwell and J. Branke, "Multi-swarms, exclusion and anti-convergence in dynamic environments", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol.10, n^o. 4, pp. 459–472, august 2006.
- [66] S. Janson, M. Middendorf, "A hierarchical particle swarm optimizer for noisy and dynamic environments", *Genet Program Evolvable Mach*, vol. 7, issue. 4, pp. 329–354, 2006.
- [67] D. Parrott and X. Li, "Locating and tracking multiple dynamic optima by a particle swarm model using speciation", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 10, n^o. 4, pp. 440–458, August 2006.
- [68] P. J. Angeline, "Evolutionary optimization versus particle swarm optimization: Philosophy and Performance Differences", *Proceedings of the Evolutionary Programming VII, Volume 1447 of the series Lecture Notes in Computer Science*, pp. 601–610, Springer, 2005.
- [69] Z. Lian, X. Gu, B. Jiao, "A novel particle swarm optimization algorithm for permutation flow-shop scheduling to minimize makespan", *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 35, issue. 5, pp. 851–861, 2008.
- [70] P.S. Shelokar, P. Siarry, V.K. Jayaraman, B.D. Kulkarni, "Particle swarm and ant colony algorithms hybridized for improved continuous optimization", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 188, issue. 1, pp. 129–142, 2007.
- [71] Y. Zhang, M. Zhang, Y-C Liang, "A hybrid ACO/PSO algorithm and its applications", *Int. J. Modelling, Identification and Control*, vol. 8, n^o. 4, pp. 309–316, 2009.
- [72] W. Wen, G. Liu, "Swarm Double-Tabu Search", *Advances in Natural Computation, Volume 3612 of the series Lecture Notes in Computer Science*, pp. 1231–1234, Springer, 2005.
- [73] S. Nakano, A. Ishigame, K. Yasuda, "Particle swarm optimization based on the concept of tabu search", *IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pp. 3258–3263, Singapore, 25–28 Sept 2007.

- [74] L. Fang, P. Chen, S. Liu, "Particle Swarm Optimization with Simulated Annealing for TSP", *Proceedings of the 6th WSEAS int. Conf. on artificial intelligence, knowledge engineering and data bases*, pp. 206-210, corfu island, Greece, February 2007.
- [75] M. Nakagawa, K. Sorimachi, "Basic characteristics of a fractance device", *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, vol. E75-A, n^o. 12, pp. 1814-1819, 1992.
- [76] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, vol. 168, 1999.
- [77] I. N'DOYE, Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires, Thèse de Doctorat de l'Université Henri Poincaré -Nancy 1 et de l'Université Hassan II Ain Chock- Casablanca, 2011.
- [78] S. Das, *Functional Fractional Calculus*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [79] A. Si-Ammour, Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire, Thèse de doctorat en automatique, UMMTO, 2011.
- [80] R.P. Agarwal, "A propos d'une note de m. pierre humbert". C.R. Seances Acad. Sci., Vol 236 N^o 21, pp: 2031-2032, 1953.
- [81] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. 3. Mc Graw-Hill, New York, 1955.
- [82] S. Ladaci, Contribution a la commande adaptative d'ordre fractionnaire, Doctorat en Sciences, en Electronique option control, université Mentouri de Constantine 2007.
- [83] M. Caputo, "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II", *Geophys. J. R. Astr. Soc*, vol. 13, pp. 529-539, 1967.
- [84] I. Petras, *Fractional-Order Nonlinear Systems, Modeling, Analysis and simulation*, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [85] C. Li, W. Deng, "Remarks on fractional derivatives", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 187, pp. 777-784, 2007.
- [86] K.S. Miler, B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, New York, 1993.
- [87] N. Heymans, I. Podlubny, "Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives", *Rheol Acta, Springer-verlag*, vol. 45, pp. 765-771, 2006.
- [88] G. E. Carlson and C. A. Halijak, "Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{1/n}$ by a regular Newton process", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. 11, issue. 2, pp. 210-213, 1964.
- [89] K. Matsuda and H. Fujii, "H_∞ optimized wave-absorbing control: Analytical and experimental results", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 16, n^o. 6, pp. 1146-1153, November-December, 1993.
- [90] A. Charef, H.H. Sun, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, "Fractal system as represented by singularity function", *IEEE Trans On Automatic Control*, vol. 37, n^o. 9, pp. 1465-1470, Sept.1992.
- [91] H. Sun, A. Charef, Y.Y. Tsao, and B. Onaral, "Analysis of polarization dynamics by singularity decomposition method", *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 20, pp. 321-335, 1992.
- [92] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, and F. M. Nanot, "Frequency-Band Complex Noninteger Differentiator: Characterization and Synthesis", *IEEE transactions on circuits and systems-I: fundamental theory and applications*, vol. 47, n^o. 1, pp. 25-39, January 2000.
- [93] S. Das, I. Pan, S. Das, A. Gupta, "A novel fractional order fuzzy PID controller and its optimal time domain tuning based on integral performance indices", *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 25, pp. 430-442, 2012.
- [94] D. Xue, D. P. Atherton, "A suboptimal reduction algorithm for linear systems with a time delay", *International Journal of Control*, vol. 60, n^o. 2, pp. 181-196, 1994.

- [95] I. Petras, L. Dorcak, P. O'Leary, B. M. Vinagre, I. Podlubny, "The modelling and analysis of fractional-order control systems in frequency domain", *Proc. of the ICC'2000 Conference*, May 23-26, High Tatras, pp. 261–264, 2000.
- [96] A. Djouambi, Contribution a la commande CRONE, Thèse de doctorat en électronique option control, Université Mentouri de Constantine, 2008.
- [97] S. Das, I. Pan, *Fractional Order Signal Processing: Introductory Concepts and Applications*, Springer Heidelberg Dordrecht London, New York 2012.
- [98] K. Ogata, *modern control engineering, third edition*, Prentice Hall International, London, 1974.
- [99] C. A. Monje, YQ. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*, Springer-Verlag London Limited, 2010.
- [100] D. Matignon, B. d'andréa-Novel, "Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems", *In Computational Engineering in Systems Applications*, pp. 252-256, Lille, France, 1996.
- [101] Y. Li, YQ. Chen, I. Podlubny, "Mittag–Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems", *Automatica*, vol. 45, pp. 1965–1969, 2009.
- [102] M. S. Tavazoei, M. Haeri, "Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems", *Physica*, vol. D 237, pp. 2628–2637, 2008.
- [103] M.S. Tavazoei and M. Haeri, "Unreliability of frequency-domain approximation in recognising chaos in fractional-order systems", *IET Signal Process*, vol. 1, n^o. 4, pp. 171–181, 2007.
- [104] M. S. Tavazoei, M. Haeri, "A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems", *Physics Letters*, A 367, pp. 102–113, 2007.
- [105] H. W. Bode, "Relations between attenuation and phase in feedback amplifier design", *Bell System Technical Journal*, vol. 19, issue. 3, pp. 421–454, 1940.
- [106] H. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, D. Van Nostrand Company, 1945.
- [107] S. Manabe. The non-integer integral and its application to control systems. Japanese Institute of Electrical Engineers Journal, 1961, 6(3-4):83–87.
- [108] R. S. Barbosa, J. A. T. Machado, I. M. Ferreira, "A fractional calculus perspective of PID tuning", *Proceedings of the ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, USA, 2003.
- [109] J. Sabatier, P. Lanusse, P. Melchior, A. Oustaloup, *Fractional Order Differentiation and Robust Control Design, CRONE, H-infinity and Motion Control*, Springer Science+Business Media Dordrecht 2015.
- [110] B.M. Vinagre, I. Podlubny, L. Dorcak, V. Feliu, "On fractional PID controllers: a frequency domain approach", *Proceedings of the IFAC Workshop on Digital Control. Past, Present and Future of PID Control*, pp. 53–58, Terrasa, Spain, 2000,
- [111] R. Malti, M. Aoun, O. Cois, A. Oustaloup, "H₂ Norm of fractional differential systems", *Proceedings of the ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, USA, 2003.
- [112] D. Valério, J.S.D. Costa, "Tuning of Fractional Controllers Minimising H₂ and H_∞ Norms", *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 3, n^o. 4, pp. 55-60, 2006.
- [113] G. Barone, A. Palmeri, and M. Lombardo, "Stochastic analysis of fractional oscillators by equivalent system definition", 1st ECCOMAS Thematic Conference on International Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering, Greece, 25–27 May 2015.
- [114] P. Lanusse, T. Poinot, O. Cois, A. Oustaloup, J.C. Trigeassou, "Tuning of an active suspension system using a fractional controller and a closed-loop tuning", *Proceedings of ICAR 2003, the 11th International Conference on Advanced Robotics*. Coimbra, Portugal, pp. 258–263, 2003.

- [115] A.J. Calderon, B.M. Vinagre, V. Feliu, "Linear fractional order control of a DC-DC buck converter", *Proceedings of European Control Conference (ECC)*, Cambridge, UK, pp. 1292-1297, 2003.
- [116] V. Pommier, R. Musset, P. Lanusse, and A. Oustaloup, "Study of two robust controls for an hydraulic actuator", *Proceedings of European Control Conference (ECC)*, 2003.
- [117] C.A. Monje, F. Ramos, V. Feliu, and B.M. Vinagre, "Tip position control of a lightweight flexible manipulator using a fractional order controller", *IET Control Theory and Applications*, vol. 1, n^o. 5, pp. 1451-1460, 2007.
- [118] N.M. Fonseca, J.A. Tenreiro, "Fractional-order hybrid control of robotic manipulators", *Proceedings of ICAR 2003, the 11th International Conference on Advanced Robotics*, Coimbra, Portugal, pp. 393-398, 2003.
- [119] B. Benlahbib, **N. Bouarroudj**, F. Bouchafaa, B. Baton, "Fractional Order PI Controller for Wind Farm Supervision", *IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management*, pp. 1234-1238, Bandar Sunway, Malaysia, 2014.
- [120] B.M. Vinagre, I. Petras, P. Merchan, L. Dorcak, "Two digital realizations of fractional controllers: application to temperature control of a solid", *Proceedings of the European Control Conference (ECC)*, Porto, Portugal, pp. 1764-1767, 2001.
- [121] I. Podlubny, I. Petras, B.M. Vinagre, P. O'Leary and L. Dorcak, "Analogue realizations of fractional-order controllers", *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, issue. 1, pp. 281-296, 2002.
- [122] G.F. Franklin, J.D. Powell, A. E-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley publishing company, 1986.
- [123] YQ. Chen and K. L. Moore, "Relay feedback tuning of robust PID controllers with iso-damping property", *IEEE transactions on systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, vol. 35, n^o. 1, pp. 23-31, February 2005.
- [124] Feedback Instruments Ltd, *Twin Rotor MIMO System, advanced teaching manual 1*, Crowborough, U.K, 33-007-4M5, 1997.
- [125] J-G. Juang, W-K. Liu, R-W. Lin, "A hybrid intelligent controller for a twin rotor MIMO system and its hardware implementation", *ISA Transactions*, vol. 50, pp. 609-619, 2011.
- [126] S-V. Emelyanov, *Variable Structure Control Systems*. Nouka, Moscow. 1967
- [127] V.I. Utkin, *Sliding Modes in Control Optimization*, Springer -verlag Berlin, Heidelberg, 1992.
- [128] V. Bregeault, *Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants*, Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2010.
- [129] Y. Z. Elhalwagy, M. Tarbouchi, "Fuzzy logic sliding mode control for command guidance law design", *ISA Transactions*, vol. 43, issue. 2, pp. 231-242, 2004.
- [130] M. Roopaei, M. Z. Jahromi, R. John, T-C Lin, "Unknown nonlinear chaotic gyros synchronization using adaptive fuzzy sliding mode control with unknown dead-zone input", *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, vol. 15, issue. 9, pp. 2536-2545, 2010.
- [131] G.D. Lee, S. W. Kim, "A longitudinal control system for a platoon of vehicles using a fuzzy-sliding mode algorithm", *Mechatronics*, vol. 12, issue. 1, pp. 97-118, 2002.
- [132] Chih-Yang Chen, Tzuu-Hseng S. Li, Ying-Chieh Yeh, "EP-based kinematic control and adaptive fuzzy sliding-mode dynamic control for wheeled mobile robots", *Information Sciences*, vol. 179, issues. 1-2, pp. 180-195, 2009.
- [133] A. Boubakir, F. Boudjema, S. Labiod, "A Neuro-fuzzy-sliding Mode Controller Using Nonlinear Sliding Surface Applied to the Coupled Tanks System", *International Journal of Automation and Computing*, pp. 72-80, 2009.
- [134] A. Boubakir, F. Boudjema, C. Boubakir, and S. Labiod, "A Fuzzy Sliding Mode Controller Using Nonlinear Sliding Surface Applied to the Coupled Tanks System", *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 10, n^o. 2, pp. 112-118, 2008.

- [135] D. Boukhetala, F. Boudjema, T. Madani, M. S. Boucherit and N.K. M'Sirdi, "A New Decentralized Variable Structure Control for Robot Manipulators", *International journal of robotics & automation*, vol. 18, n°. 1, pp. 28-40, 2003.
- [136] T.-L. Chern, Y.-c. wu, "Design of integral variable structure controller and application to electrohydraulic velocity servosystems", *IEE Proceedings-D*, vol. 138, n°. 5, September 1991.
- [137] J-H. Lee, J-S. Ko, S-K. Chung, J-J. Lee, and M-J. Youn, "Design of Continuous Sliding Mode Controller For BLDD Motor With Prescribed Tracking Performance", *23rd Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC'92 Record*, 1992.
- [138] **N. Bouarroudj**, D. Boukhetala, F. Boudjema, "Tuning Fuzzy PD Sliding Mode Controller using PSO algorithm for trajectory tracking of a chaotic system", *Journal of Electrical Engineering*, vol. 14 Edition. 2, 2014.
- [139] **N. Bouarroudj**, D. Boukhetala, F. Boudjema, "A Hybrid Fuzzy Fractional Order PID Sliding Mode Controller Design using PSO algorithm for interconnected Nonlinear Systems", *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, vol. 17, n°. 1, pp. 41-51, 2015.
- [140] **N. Bouarroudj**, D. Boukhetala, F. Boudjema, "Tuning Fuzzy Fractional Order PID Sliding-Mode Controller using PSO algorithm for nonlinear systems", *The 3rd International Conference on systems and control, ICSC'13*, Algiers, Algeria, October 29-31, 2013.
- [141] J-P. Aubin, A. Cellina, *Différentiel inclusion*, Springer -Verlag Berlin, Heidelberg, 1984.
- [142] J-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, 1990.
- [143] A.F. Filippov, *Differential equations with discontinuous right hand-sides, Mathematics and its applications (Soviet series)*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [144] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, London, 1995.
- [145] A. Faqir, F. Betin, L.C. Alaoui, B. Nahid, D. Pinchon, "Varying Sliding Surface Control of an induction machine drive", *Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications*, vol. 1, pp. 93-98, 23-25 Jun 2003.
- [146] T. Takagi, M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control", *IEEE Tras. Syst. Man and Cyb*, vol. SMC-15, n°. 1, pp.116-132, 1985.
- [147] J-J.E. Slotine, "The robust control of robot manipulators", *Int. J. Robotics, Res*, vol. 4, n°. 2, pp. 49-64, 1985.
- [148] S-W. Kim, J-J. Lee, "Design of a fuzzy controller with fuzzy sliding surface", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 71, issue. 3, pp. 359-367, 1995.
- [149] C.C. Lee, "Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller-part I and II", *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 20, pp. 404-435, 1990.
- [150] J-Z. Liu, W-J. Zhao, L-J. Zhang, "Design of a sliding mode controller based on fuzzy logic", *Proceeding Of the third international conference on machine learning and cybernetics*, Shanghai, pp. 616-619, 2004.
- [151] J.T. Spooner and K.M. Passino, "Decentralized Adaptive Control of Nonlinear Systems Using Radial Basis Neural Networks", *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 44, n°. 11, november 1999.
- [152] M. Ö. Efe, X. Yu, O. Kaynak, B. M. Wilamowski, "Sliding Mode Control of Nonlinear Systems Using Gaussian Radial Basis Function Neural Networks", *Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks, IJCNN '01*, vol.1, pp. 474-479, 2001.
- [153] J-J. Wang, "Simulation studies of inverted pendulum based on PID controllers", *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 19, issue. 1, pp 440-449, 2011.
- [154] L. B. Prasad, B. Tyagi, H. O. Gupta, "Modelling & Simulation for Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum Dynamical System using PID Controller & LQR", *Sixth Asia Modelling Symposium*, pp. 138-143, 2012.

- [155] S-K. Oh, W. Pedrycz, S-B. Rho, T-C. Ahn, "Parameter estimation of fuzzy controller and its application to inverted pendulum", *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 17, issue. 1, pp. 37–60, 2004.
- [156] A. M. El-Nagar, M. El-Bardini, N. M. EL-Rabaie, "Intelligent control for nonlinear inverted pendulum based on interval type-2 fuzzy PD controller", *Alexandria Engineering Journal*, vol. 53, issue.1, pp. 23–32, 2014.
- [157] M.J. Mahmoodabadi, S. Arabani Mostaghim, A. Bagheri, N. Nariman-zadeh, "Pareto optimal design of the decoupled sliding mode controller for an inverted pendulum system and its stability simulation via Java programming", *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 57, pp. 1070–1082, 2013.
- [158] J-C. Lo and Y-H. Kuo, "Decoupled Fuzzy Sliding-Mode Control", *IEEE transactions on fuzzy systems*, vol. 6, n^o. 3, pp. 426-435, august 1998.
- [159] Y-H. Chang, C-W. Chang, C-W. Tao, H-W. Lin, J-S. Taur, "Fuzzy sliding-mode control for ball and beam system with fuzzy ant colony optimization", *Expert Systems with Applications*, vol. 39, issue. 3, pp. 3624–3633, 2012.
- [160] L-C. Hung, H-Y. Chung, "Decoupled sliding-mode with fuzzy-neural network controller for nonlinear systems", *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 46, pp. 74–97, 2007.
- [161] **N. Bouarroudj**, D. Boukhetala and F. Boudjema, "Sliding-Mode Controller Based on Fractional Order Calculus For a Class of Nonlinear Systems", *IJECE*, vol. 6, n^o 5, pp. 2239–2250, 2016.