UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE

THESE DE FIN D'ETUDES

ALLOCATION DE RESSOURCES DANS UN GRAPHE ORIENTE

Proposée par
K. HADRI

Etudié par :
S. FERHATI & K. SLAIMIA

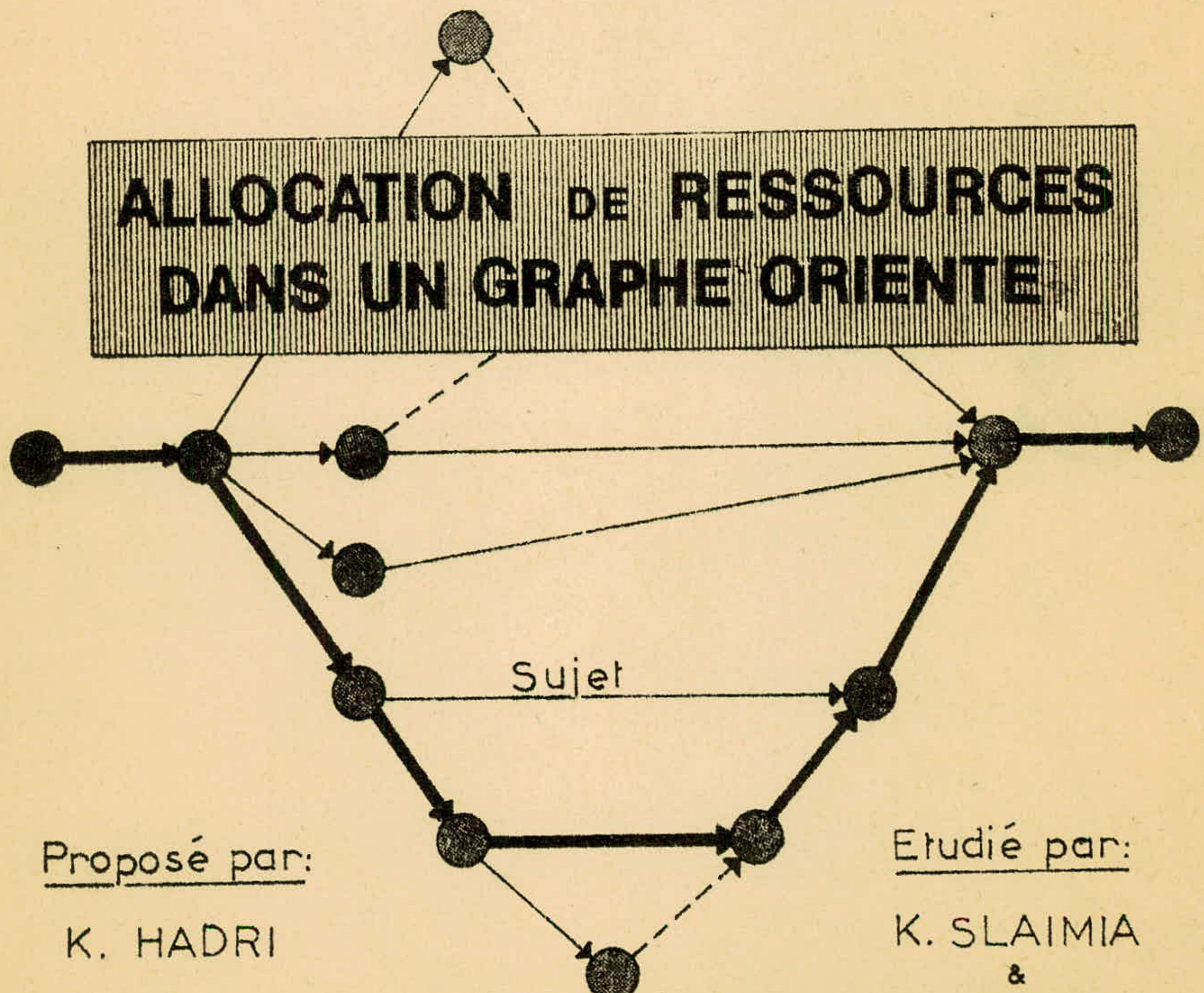
PROMOTION 1975

UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE

ALLOCATION DE RESSOURCES DANS UN GRAPHE ORIENTE



Sujet

Proposé par:

K. HADRI

Etudié par:

K. SLAIMIA
&
S. FERHATI

JUIN 1975

R E M E R C I E M E N T S

Nous tenons à exprimer toute notre gratitude à tous nos professeurs qui d'une manière ou d'une autre ont pu contribuer à notre formation au sein de l'ENPA.

Par ailleurs, nos remerciements vont à toutes les personnes dont les noms suivent, qui n'ont point ménagé leurs efforts en vue de notre formation et dont les critiques et suggestions nons ont été profitables :

Mr. Ait Ouyahia, professeur de recherche opérationnelle à l'ENPA.

Mr. Boumahrat, chef du centre de calcul.

Mr. Lancou, professeur en théorie des graphes à l'ENPA.

Mr. Kaddour Hadri, sous-directeur des études et projets au ministère des transports, trouve ici un témoignage spécial de notre reconnaissance car il nous a aidé dans l'élaboration de notre thèse en nous permettant d'éclaircir un grand nombre de points obscurs.

Nous remercions également mademoiselle BAHIA qui s'est chargée de dactylographier cette étude et dont le lecteur remarquera qu'elle a parfaitement réussi cette tâche ardue.

K. SLAIMIA
et S. FERHATI

LECTEUR, pour vivre bien content,

Lisez, pour apprendre à bien vivre,

Et ne perdez point votre temps,

A chercher les fautes d'un livre ;

Il n'en est point de si parfait,

Où vous ne puissiez reprendre ;

Il n'en est point de si mal fait,

En qui vous ne puissiez apprendre.

Jean de LA RIVIERE (1721)

Et je ne veux pas non plus lasser
ta patience avec une longue préface.

"DRYDEN, Georgies, Livre 2"

Cette dernière quinzaine d'années a vu les attitudes changer progressivement à l'égard des problèmes industriels. Dans différentes industries, on s'est préoccupé d'étudier puis d'essayer de nouvelles méthodes de planning et de contrôle accroissant l'efficacité de la direction dans ce domaine et visant à diminuer le temps d'exécution des projets. De ces milliers d'expériences, sont enfin sorties une série de techniques fondées sur les réseaux du planning.

Parmi ces techniques, les deux versions les plus originales et peut-être les plus connues sont le *PERT (programme Evaluation and Review Technique)* et le *CPM (Critical Path Method)*.

L'étude du premier nommé peut se situer vers 1957-58, quand le bureau de planning de *l'U.S.Navy* conjointement avec des ingénieurs de la *'Booz Allen et Hamilton'*, a mis au point le projet PERT pour contrôler l'avancement des études et de la réalisation des fusées *POLARIS ;* l'efficacité du PERT a été prouvée pour un gain de 18 mois à 3 ans sur la date initialement prévue pour la sortie des POLARIS : le délai accordé à la mise au point du système POLARIS a été de 5 ans au lieu de 6 à 8 ans pour les autres systèmes.

Parallèlement, les chercheurs opérationnels de la *Rand Corporation* développaient à la demande de la *Société du Pont de Nemours*, le principe du CPM et l'appliquaient dans de grandes entreprises industrielles.

Depuis cette époque, une multitude de systèmes hybrides est née. Le rythme de développement est tel que, dans ce domaine, depuis l'application originale de 1957, on a pu recenser plus de cent systèmes dénommés, ne différant les uns des autres que par quelques détails.

Aussi, les titres originaux (PERT et CPM) ont-ils déjà perdu de leur signification première et ne servent-ils plus souvent que de termes génériques couvrant un ensemble de techniques.

Nous emploierons habituellement le vocable de "planning" par réseaux puisque notre souci essentiel est constitué par les principes et nous ne citerons de noms que lorsque nous traiterons de caractéristiques appartenant en propres à certains systèmes.

Toutes ces techniques utilisées sont basées sur la théorie des graphes, c'est-à-dire, qu'elles mettent en jeu la transcription graphique d'une succession d'arcs orientés (réseaux de flèches) des résultats d'une analyse. Ce graphe sert ensuite à l'établissement des calculs.

L'utilisation du concept de planning par réseaux s'étend actuellement de façon rapide dans l'industrie ou le secteur commercial, encore plus hâtée par l'apparition du calendrier électronique qui facilite l'analyse des grands réseaux.

Tout indique que nous abordons l'ère de la gestion scientifique. Les techniques de planning par réseaux constituent sans aucun doute l'avant-garde du progrés et sont, dans ce domaine, les premières méthodes véritablement scientifiques à faire l'objet d'une application étendue.

TABLE DES MATIERES

Pages

Pages

CHAPITRE II : ALGORITHMES DE RECHERCHE DU CHEMIN CRITIQUE

Pages

2° PARTIE : ALLOCATION DE RESSOURCES

CHAPITRE 1ER : PRESENTATION DU PROBLEME

CHAPITRE II : METHODES DE RESOLUTION DU PROBLEME DES ALLOCATIONS DE RESSOURCES

INTRODUCTION

La représentation d'un projet par un réseau permet de calculer les dates de début et de fin pour les différentes tâches, c'est-à-dire, un ordonnancement du projet. Mais cet ordonnancement ne tient pas compte d'une limitation éventuelle des moyens disponibles pour réaliser les tâches, limitation qui peut empêcher l'exécution simultanée de deux ou plusieurs tâches. C'est pourquoi, certains programmes comprennent un module "CHARGE" permettant de prendre en compte de façon plus ou moins complète et précise ces limitations.

Actuellement, les programmes existant offrent une certaine combinaison des possibilités 'TEMPS', 'CHARGE', 'COUT', la première existant dans tous les cas.

L'objet de notre étude dans cet ouvrage porte par mesure restrictive - vu l'ampleur d'un tel sujet - sur une combinaison des deux premiers.

Ainsi, dans une première partie, nous traiterons d'une manière générale de l'analyse et de la structure logique d'un projet, suivies des principaux algorithmes de recherche du chemin critique et de la résolution des problèmes associés.

A ce titre, nous vous faisons remarquer que nous adoptons tout au long de cette étude, le graphe des évènements configuration claire et souple qui se prête mieux aux calculs sur machine. D'autre part, bien que nous ayons mentionné brièvement, à titre d'information, le cas des durées aléatoires nous supposerons les durées comme fixes et représentées par un chiffre unique.

Dans une seconde partie, nous abordons et ce, dans le premier chapitre, le problème des allocations de ressources, lequel sera traité de façon générale. Le second chapitre constituera une porte ouverte sur ce que pourraient être les méthodes de résolution du problème des allocations de ressources. Là-dessus, nous ferons une comparaison entre une méthode pratique mais approximative (méthode heuristique) et une méthode exacte (Branch and Bound).

L'intensité sur chaque tâche est supposé fixe ; pour le cas de l'intensité variable, des références bibliographiques ont été mentionnées.

A ce sujet, il semblera au lecteur que nous avons insisté essentiellement sur les méthodes heuristiques. Cette démarche est bien volontaire quand on sait les succés que remportent ces méthodes dans le secteur industriel ou commercial. Il est vrai que l'utilisation des méthodes mathématiques sur les problèmes d'ordonnancement de projet n'est pas encore admise d'une façon définitive par toutes les entreprises compte tenu de l'excés de programmation et de leur coût prohibitif, mais....

''on n'évite pas l'avenir''

O. WILDE

P R E L I M I N A I R E S

NOTIONS DE THEORIE DES GRAPHES

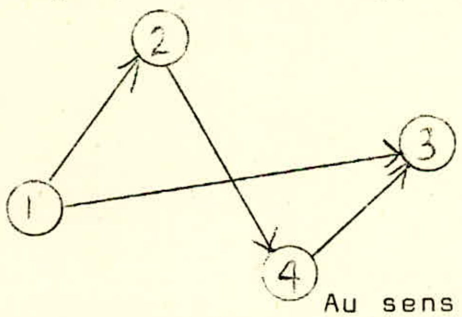
I. DEFINITIONS

I.1 Graphe orienté

Nous appelerons graphe orienté G, tout schéma dans R^n constitué :

- d'une part, d'un ensemble X = (x1, x2, ... xn) de points de R^n en nombres finis appelés <u>sommets</u> du graphe

- d'autre part, d'un ensemble U de lignes munies d'une orientation reliant chacune deux sommets et eux deux seulement. Chacune de ces ligne est entièrement définie par le couple (x1, yj) de sommets qu'elle relie. Ce couple étant ordonné comme l'indique le sens d'orientation de la ligne, celle-ci s'appelle un <u>arc</u>.



X = (1,2,3,4)

U = {(1,2) (1,3) (2,4) (4,3)}

Au sens mathématique, ces arcs symbolisent une application Γ (non nécessairement univoque) de X dans X. A chaque sommet de l'ensemble correspond par l'application Γ un sous ensemble X.

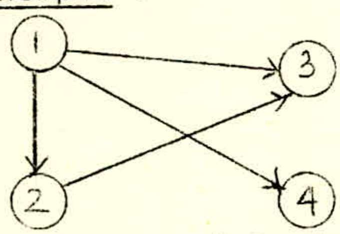
On notera donc un graphe par G = (X,Γ) ou G = (X,U).

1.2 Notion de "successeur"

On dira que xj est un successeur de xi, s'il existe un arc ayant son extrémité initiale en xi et son extrémité terminale en xj.

Il peut y avoir plusieurs successeurs. L'ensemble des successeurs de xi se note : Γ_G^+ (xi).

Exemple :



Γ_G^+ (1) = (2,3,4)

1.3 Notion de "prédécesseur"

xj est un prédécesseur de xi, s'il existe un arc ayant une extrémité initiale xj et une extrémité terminale xi, autrement dit s'il existe un arc de la forme (xj, xi).

L'ensemble des prédécesseurs de xi se note : Γ_G^- (xi).

Exemple : Γ_G^- (3) = (1,2)

1.4 Notion de "voisins"

L'ensemble des voisins de xi se note Γ_G(xi) et on a Γ_G(xi) = Γ_G^+ (xi) U Γ_G^- (xi).

Exemple : L'ensemble des voisins de 2 est :

Γ_G (2) = (1,3)

1.5 Graphe symétrique, graphe antisymétrique

Soit un graphe G = (N ; U). Ce graphe est dit symétrique si :

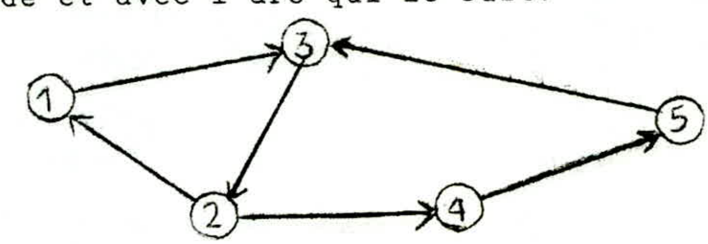
$$(xi,sj) \in U \rightarrow (xj,xi) \in U \quad \forall xi,xj \in N$$

Il est dit antisymétrique si :

$$(xi,xj) \in U \rightarrow (xj,xi) \notin U \quad \forall xi,xj \in N$$

1.6 Chaîne

C'est une séquence d'arcs telle que chaque arc de la séquence ait une extrémité en commun avec l'arc qui le précède et avec l'arc qui le suit.



Exemple : (2,1) ; (2,4) ; (4,5) est une chaîne.

1.7 Chemin

C'est une chaîne où l'extrémité initiale de chaque arc coïncide avec l'extrémité terminale de l'arc qui le précède.

Exemple : (1,3) ; (3,2) ; (2,4) ; (4,5) est un chemin.

1.8 Cycle

C'est une chaîne fermée.

Exemple : (2,1) ; (2,4) ; (4,5) ; (5,3) ; (1,3) est un cycle.

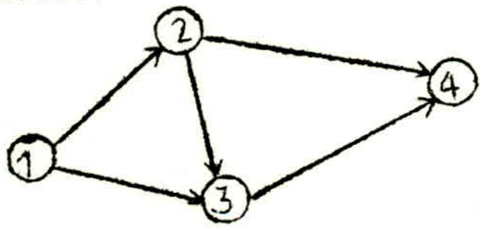
1.9 Circuit

C'est un chemin fermé. C'est un cycle dont tous les arcs sont orientés dans le même sens.

Exemple : (3,2) ; (2,4) ; (4,5) ; (5,3) est un circuit.

1.10 Graphe connexe

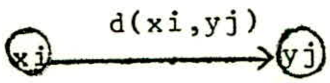
Un graphe est connexe si pour tout couple de sommets distincts, il existe une chaîne allant de l'un à l'autre.



G = (N,U) est connexe.

1.11 Longueur d'un arc

Des "longueurs" seront associées aux arcs du graphe G et on désigne, pour tout (si,yj)EU par d(xi,yj) la longueur de l'arc (xi,yj).



II. GRAPHE SANS CIRCUIT

II.1 Relation d'ordre dans un graphe connexe sans circuit

On dit que deux sommets xi, xj d'un graphe connexe sans circuit possédent une relation d'ordre strict s'il existe un chemin de longueur non nulle de xi à xj. Nous noterons cette relation : xi < xj.

Cette relation posséde les propriétés suivantes :

a) elle est antisymétrique

$xi < xj \rightarrow sj \not< xi$ (l'existence d'un circuit détruit cette propriété)

b) elle est transitive

$xi < xj$ et $xj < xk \rightarrow xi < xk$

Cette propriété est évidente si l'on considère la définition d'un chemin.

II.2 Théorème 1

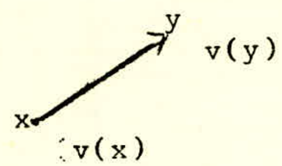
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe G = (N,U) soit sans circuit et que tout sous ensemble S non vide de l'ensemble N de ses sommets admette au moins un élément qui ne soit suivant d'aucun élément de S.

$\forall S \subset N \; ; \; S \neq \emptyset \qquad S - \Gamma^{+}(S) \neq \emptyset$

II.3 Théorème 2

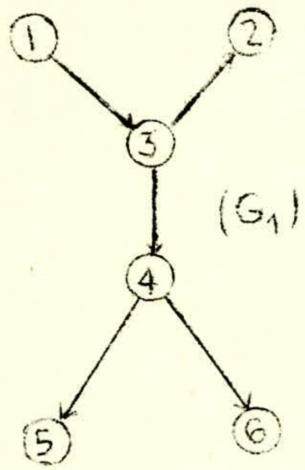
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit sans circuit et qu'il existe un numérotage (à valeurs entières non négatives) de ses sommets tel que pour chaque sommet x, on ait :

$$v(x) < v(y) \quad \forall y \in \Gamma_g^+ (x)$$

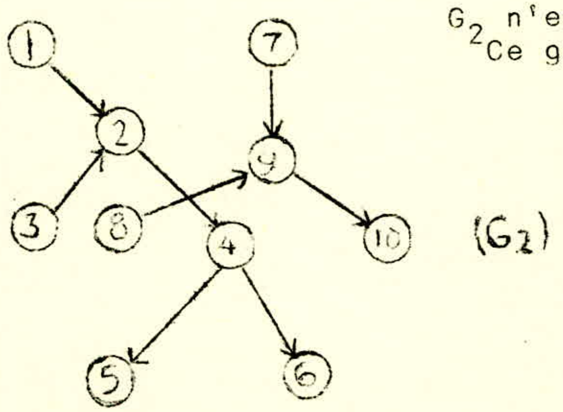


III. GRAPHE SANS CYCLE

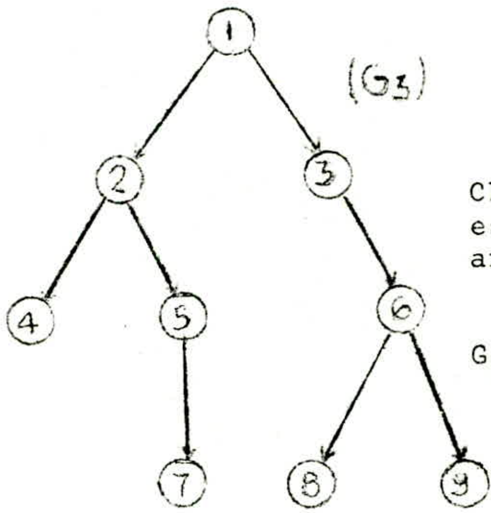
III.1 Différents types de graphe sans cycle



G_1 est un graphe sans cycle simplement connexe. C'est un ARBRE.



G_2 n'est pas simplement connexe. Ce graphe constitue une FORET.



(G_3)

Chacun des sommets sauf 1 (la racine) est l'extrémité terminale d'un seul arc.

G_3 est une ARBORESCENCE de racine 1.

III.2 Arborescence

III.2.1 Racine

C'est unsommet r tel qu'il existe un chemin allant de r à xi, $\forall$ xi.

III.2.2 Graphe quasi-fortement connexe inférieurement (q fi)

Si pour tout couple de sommets (x,y), il existe un sommet z d'où partent un chemin allant en x et un autre allant en y, le graphe est dit q fi connexe.

III.2.3 Propriétés caractéristiques

Soit G un graphe de N sommets. Les propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser une arborescence

- G est qfi connexe et sans cycle, ni circuit.

- G est sans circuit et (N-1) de ses sommets ont uniquement un seul prédecesseur.

$$\forall x \in N \rightarrow \Gamma^{-}(x) = y \quad ; y \in N$$

- Il existe un sommet (racine) relié à tout autre par un chemin unique, l'extrémité initiale du chemin étant la racine.

PREMIERE PARTIE

ANALYSE DU CHEMIN CRITIQUE

(C.P.A)

CHAPITRE I

INTRODUCTION A L'ANALYSE DU CHEMIN CRITIQUE

I. ANALYSE LOGIQUE DU PROJET

Elle a pour but d'analyser le projet et de le matérialiser sous la forme d'un graphe.

I.1 PRESENTATION D'UN PROJET

Tout projet ou programme se traduit par un ensemble ordonné d'actions qui tendent à la réalisation d'un certain objectif. Un projet comporte donc un début et une fin qui est atteinte lorsque toutes les actions constituantes ont été accomplies.

Exemple :

Considérons un projet de remise en état d'une unité d'une raffinerie d'huile.

I.11 Enumération des tâches

Tout projet ou toute réalisation est décomposable en tâches qui définissent par leur accomplissement des étapes.

TACHE	DESCRIPTION
	<u>Rafraichisseur n°1</u>
A	Oter la conduite enrobée de sa coquille
B	Contrôler et vérifier la coquille
C	Nettoyer la conduite enrobée
D	Replacer la conduite
P	Essayer le rafraichisseur.
	<u>Rafraichisseur n°2</u>
E	Essayer la pression
Q	Replacer la canalisation aprés l'essai
	<u>Admission par les vannes du fond</u>
F	Oter et réparer
R	Réinstaller
	<u>Echangeur de chaleur</u>
H	Oter la conduite enrobée de sa coquille
K	Vérifier et contrôler la coquille
L	Ajuster le replacement de l'enrobage à la conduite
M	Replacer la conduite enrobée
S	Essayer et réparer les canalisations
	<u>Divers</u>
U	Préparation générale avant que tout travail ne commence
G	Régénérer le catalyseur
N	Essayer la canalisation euxiliaire
T	Nettoyage du terrain après la fin du travail

I.12 Recherche des contraintes d'ordre entre les tâches

La réalisation à promouvoir ne peut se faire de façon quelconque. Elle est soumise à des contraintes d'ordre entres les tâches. Ces contraintes sont basées sur des motifs techniques, juridiques et climatiques. Elles définissent les relations d'ordre entre les différentes tâches.

Dressons un tableau, où l'on note toutes les tâches précédant et suivant immédiatement une tâche donnée, correspondant à notre exemple.

Tâche	tâches immédiatement antérieures	tâches immédiatement postérieures
A	U	B,C
B	A	D
C	A	D
D	B,C	P,Q
E	U	P,Q
F	U	R
G	U	H,N
H	G	K,L
K	H	M
L	H	M
M	K,L	S
N	G	S
P	D,E	T
Q	D,E	T
R	F	T
S	M,N	T
T	P,Q,R,S	-
U	-	A,E,F,G

Les travaux sur les deux rafraichisseurs, l'admission par les vannes du fond, la canalisation auxiliaire et l'échangeur de chaleur peuvent se dérouler simultanément, mais seules les deux dernières tâches doivent attendre jusqu'à ce que le catalyseur ait été régénéré.

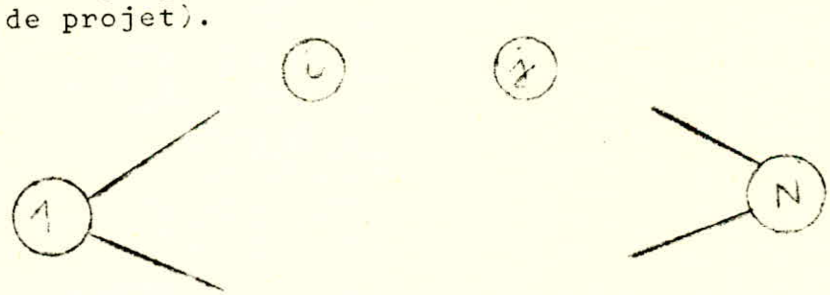
Les essais doivent être ordonnancés attentivement. Le rafraichisseur n°1 doit être éprouvé jusqu'à ce que l'état du n°2 ait été trouvé satisfaisant, quoiqu'il n'y ait pas besoin d'attendre que la canalisation soit replacée sur le n°2. La révision de l'échangeur de chaleur ne peut être faite que si la canalisation a déjà été testée.

1.2 CONSTRUCTION DU GRAPHE DE PROJET

1.21 Définitions

a) Réseau

Un réseau est une successeion d'arcs orientés qui ont pour origine et extrémités les sommets du graphe et joignent le noeud 1 (début du projet) au noeud N (fin de projet).



b) Tâche ou activité

Une tâche est une action ou un élément nécessaire à la réalisation du projet. Elle est identifiable par un début (lancement du travail) et une fin (achèvement du travail).

c) Evènement ou étape

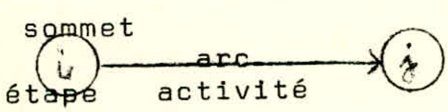
L'étape est un jalon ou un point de contrôle dans le projet. Elle occupe seulement un instant dans le déroulement de la réalisation et décrit le commencement ou l'achèvement d'une tâche ou d'un groupe de tâches.

1.22 Graphe des activités et des évènements

La représentation du déroulement du projet par un graphe (ou réseau) peut être effectuée de deux manières différentes.

1.221 Graphe des évènements :

Dans ce type de représentation, les tâches sont matérialisées par les arcs du réseau ; les noeuds (ou sommets) en représentent les étapes.



i : évènement prédecesseur

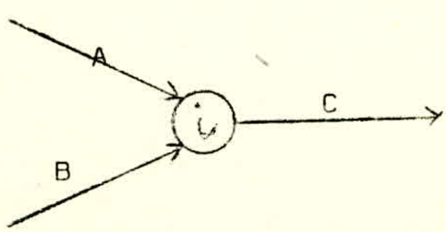
j : évènement successeur

1.2211 Contraintes d'ordre

Elles s'expriment de la façon suivante :

Pour qu'une étape soit atteinte, il faut que toutes les tâches qui y aboutissent soient terminées.

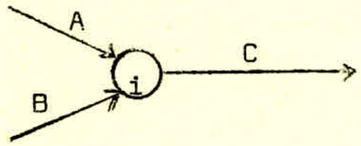
Exemple



i sera atteint lorsque A et B seront terminées.

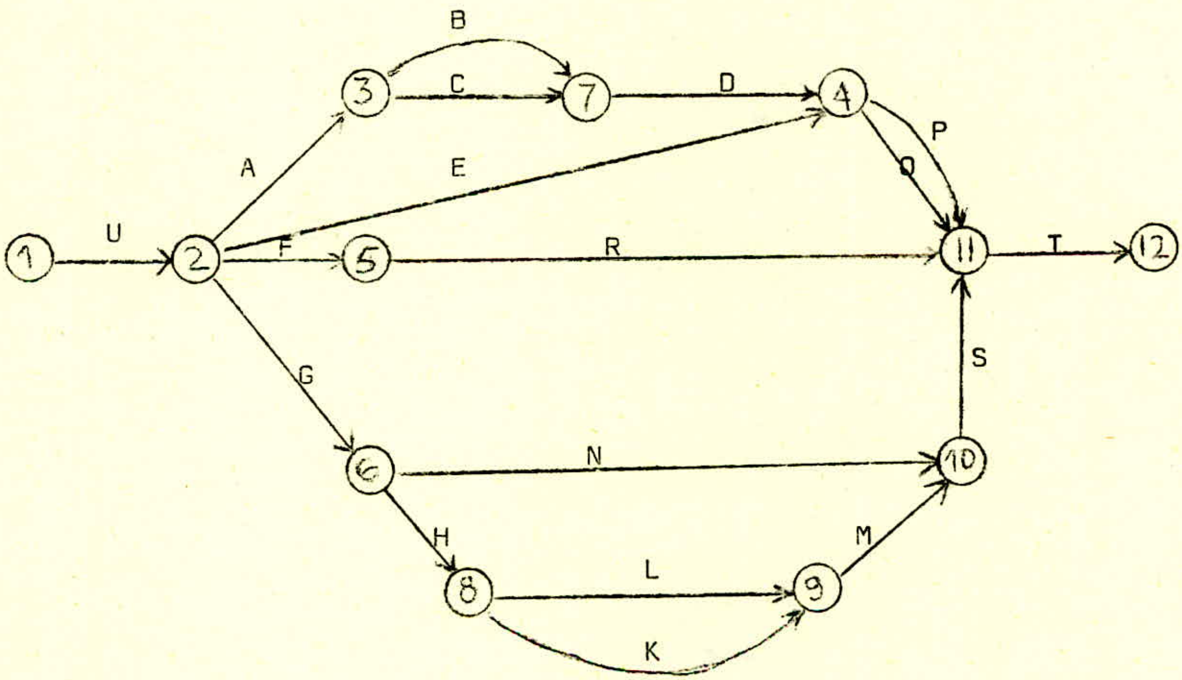
Pour qu'une tâche puisse démarrer, il faut que l'étape dont elle est issue soit atteinte.

Exemple :



C ne pourra commencer que lorsque l'étape i sera atteinte.

En appliquant ces règles, on obtient le réseau, pour l'aménagement de la raffinerie d'huile.



1.2212 Tâches fictives

a) tâches fictives de contraintes

Certaines relations d'ordre exigent pour être correctement représentées l'introduction de tâches fictives auxquelles ne correspond dans le projet aucune opération.

Ces activités virtuelles n'ont aucune durée et ne consomment pas de ressources et de temps. Ainsi, les tâches fictives permettent de marquer la dépendance d'un évènement par rapport à un autre.

Dans un réseau, la tâche fictive a pour symbole une ligne discontinue joignant l'évènement prédécesseur au suivant.

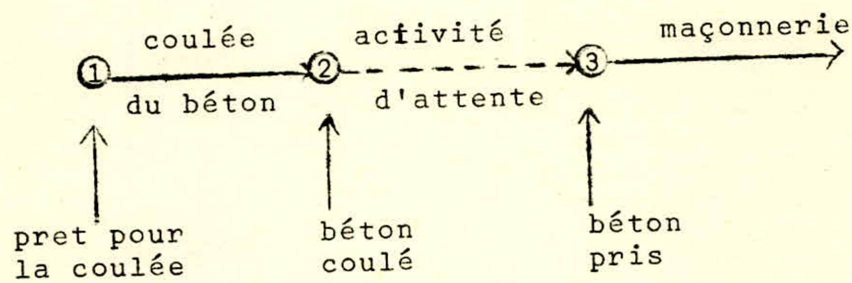
tâche fictive
(i) ----------------- (j)

b) tâches fictives d'attente

On appelle activité fictive d'attente, celle qui n'utilise aucune ressource, mais il doit s'écouler un certain temps entre l'apparition des deux évènements de celle-ci. Donc, ce type de tâche fictive possède une durée, mais n'utilise pas de moyens.

Les activités fictives d'attente ont le même symbole que les tâches fictives.

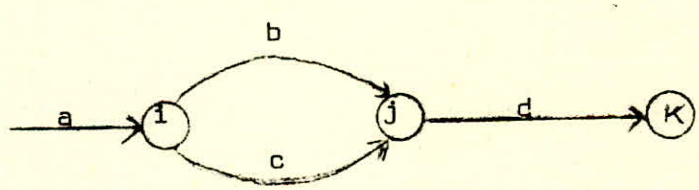
<u>Exemple</u> : Le début de la maçonnerie d'un étage ne peut commencer que lorsque la dalle en béton de cet étage est suffisamment prise.

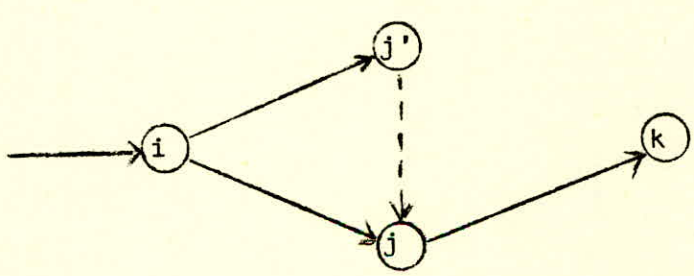


1.2213 Contraintes logiques

a) <u>opérations parallèles</u> (non dépendantes)

Supposons qu'entre deux évènements i et j se placent deux tâches b et e qui suivent une tâche a. On introduit alors un évènement fictif j' et une tâche virtuelle x entre j et j'.





Exemple : passage chez le coiffeur.

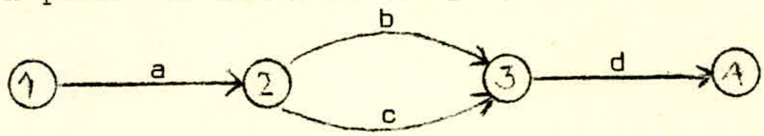
a : aller chez le coiffeur

b : se faire couper les cheveux

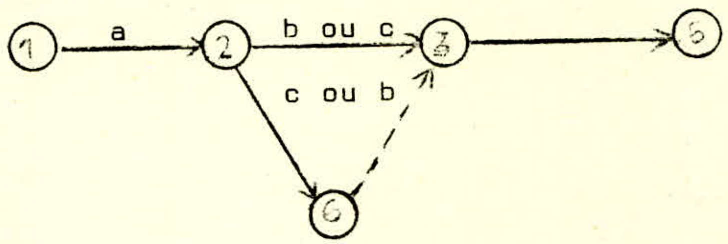
c : se faire une manucure

d : quitter la boutique.

On pourrait réaliser le graphe suivant :

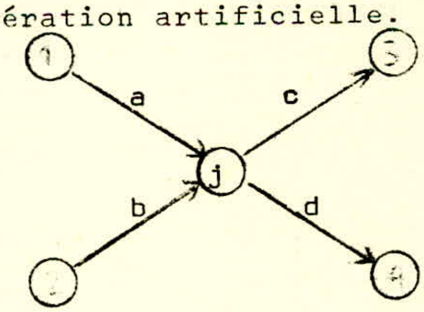


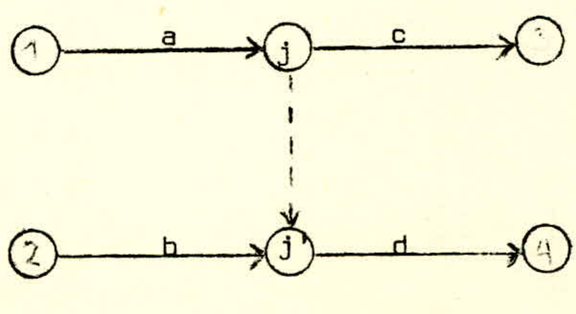
Mais il faut éviter que b et c aient en même temps, le même origine 2 et le même but 3.



b) opérations dépendantes

Quand deux chemins ont une étape en commun et sont en eux mêmes indépendants. On introduit un évènement j' et une opération artificielle.





Exemple : Réparation d'une crevaison de pneu de voiture.

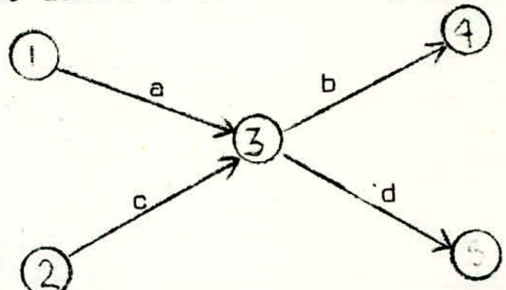
a : enlever la roue du pneu crevé

b : réparer la crevaison

c : sortir la roue de secours

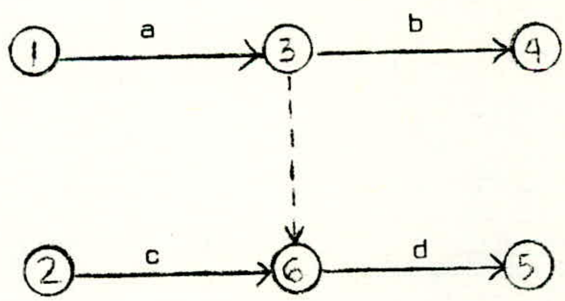
d : mettre en place la roue de secours.

Les opérations b et d doivent suivre les opérations a et c. On pourrait alors réaliser le graphe suivant :



D'une part, ce graphe est faux, car il signifie que b (réparer la crevaison) doit suivre c (sortir la roue de secours), ce qui n'est pas nécessaire.

D'autre part, comment définir simplement l'étape 3 ? Il faut donc dissocier l'évènement 3. En réalité, il faut considérer 2 chemins totalement indépendants et les relier par une tâche fictive (3,6), 6 étant un évènement fictif.

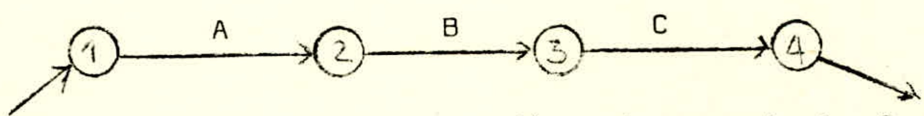


1.2214 Chevauchement d'activités

Lorsque certaines tâches s'enchaînent sur le plan technique mais qu'il est possible de superposer partiellement leurs périodes d'exécution, il y a lieu de les décomposer.

C'est ce qui se produira lorsqu'on travaille par lot ou par section d'un tout.

Exemple :

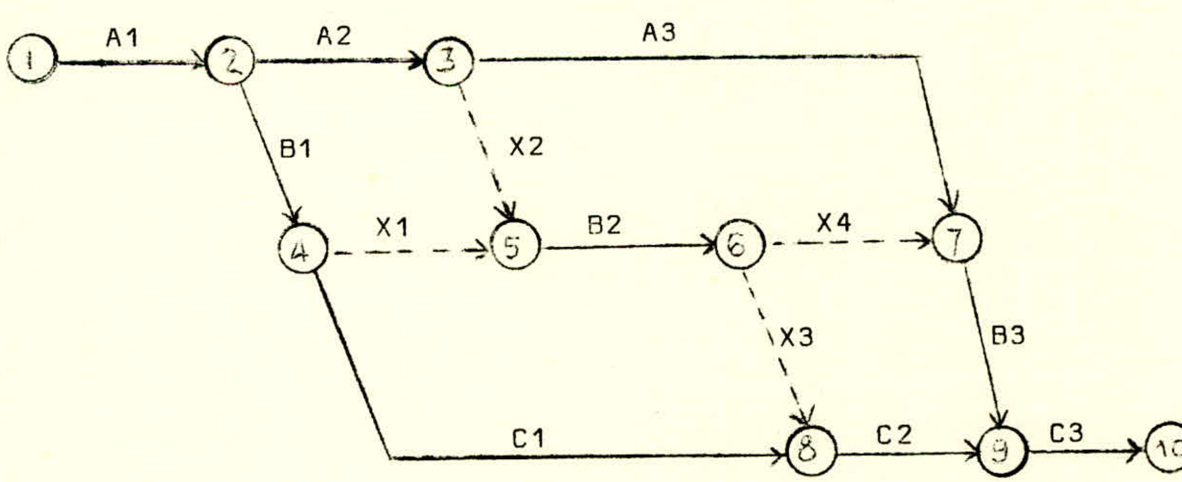


Tâche A : réception de 12 pièces brutes de la fonderie

Tâche B : usinage de ces 12 pièces

Tâche C : montage de ces 12 pièces.

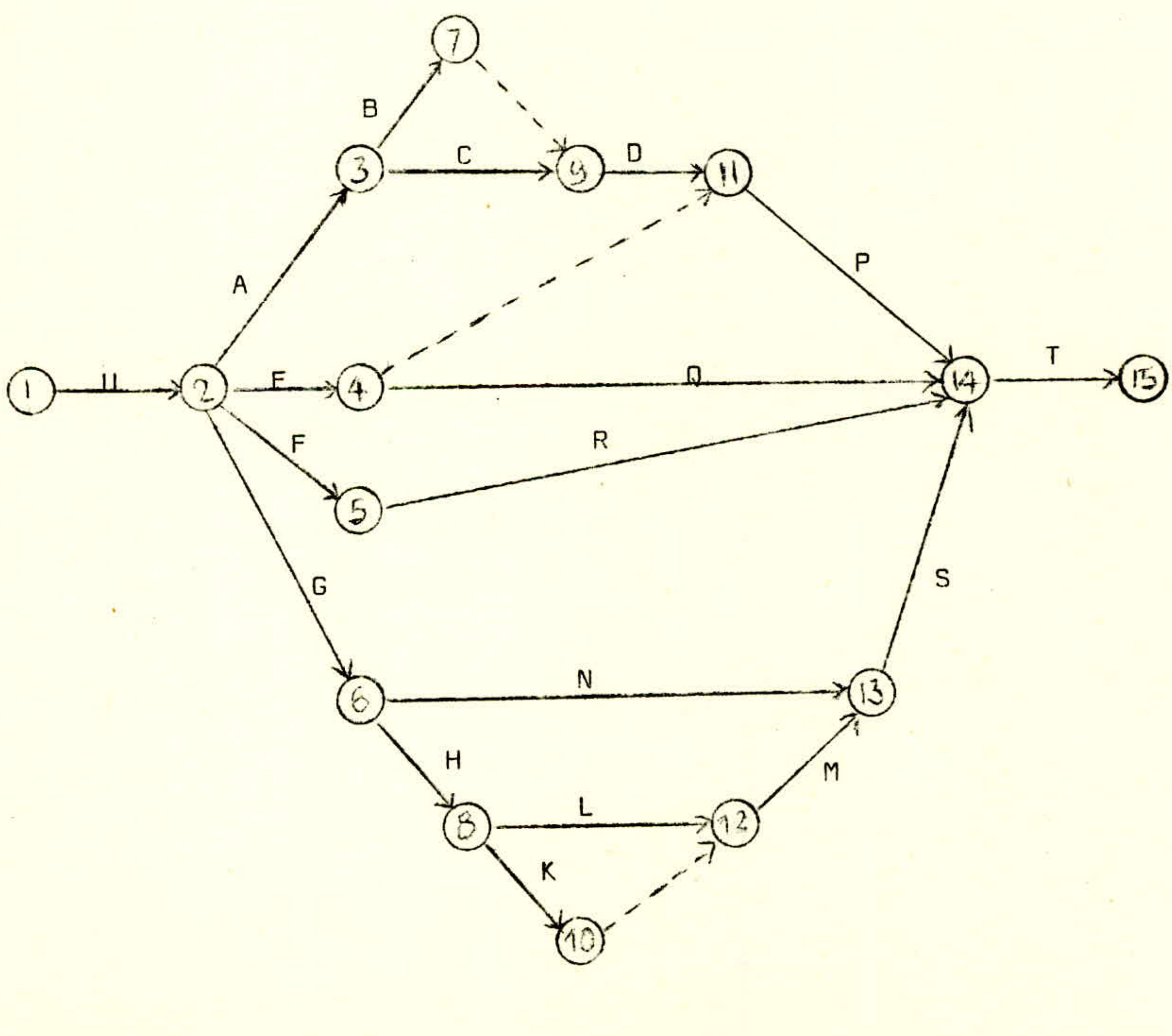
Si le lot de montage et d'usinage est de 4 pièces, il est possible de décomposer chaque tâche en 3 et l'on aura de ce fait le réseau suivant :



On constate en effet que chaque lot constitue une activité distincte au cours de chacune des trois opérations. Tous les lots de celle du milieu (B) sont isolés par des tâches fictives. Ceci assure la possibilité de les ordonnancer avec des intervalles de temps entre elles pour le cas où une disparité dans la durée viendrait à intervenir.

1.2215 Présentation du projet de la raffinerie

En respectant toutes les régles énoncées, le réseau du projet de remise en état de l'unité de la raffinerie d'huile s'établit comme suit :

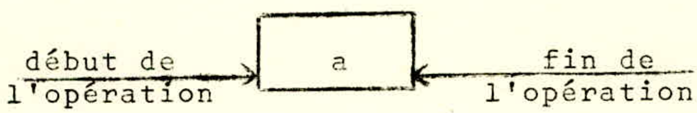


I.222 Graphe des activités

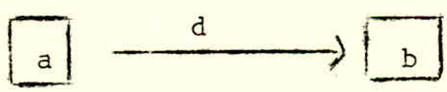
Dans ce type de représentation, les sommets du réseau matérialisent les activités du projet. Les arcs figurent les relations d'ordre de ces activités. Cette méthode ne fait plus appel à la notion d'étape.

Mais au lieu d'un cercle, on représente les sommets par un rectangle, le côté vertical gauche correspond au début de l'activité et le côté vertical droit à la fin de l'activité.

Une opération est représentée par :



La liaison entre opérations donc entre rectangles, se fait également au moyens de vecteurs qui représentent uniquement des contraintes de liaison pouvant avoir une certaine durée d'exécution d'une opération déterminée. On aura par exemple :

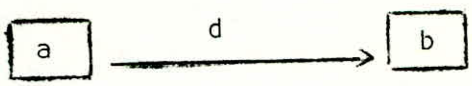


Cela signifie que l'activité b ne peut débuter que d'unité de temps après la fin de a.

Elle pourra commencer de suite après la fin de a si d = o

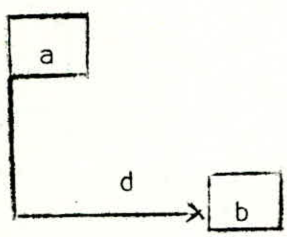
1.2221 Différents types de liaisons entre les tâches.

a) liaison fin - début



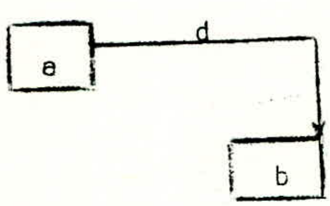
L'opération b ne peut commencer que d'unité de temps après que l'opération a est terminée. Si d = o c'est l'enclenchement direct.

b) liaison début - début



L'opération b ne peut commencer que d'unité de temps après le début de a. Si d = o, les opérations a et b commencent simultanément.

c) liaison fin - fin

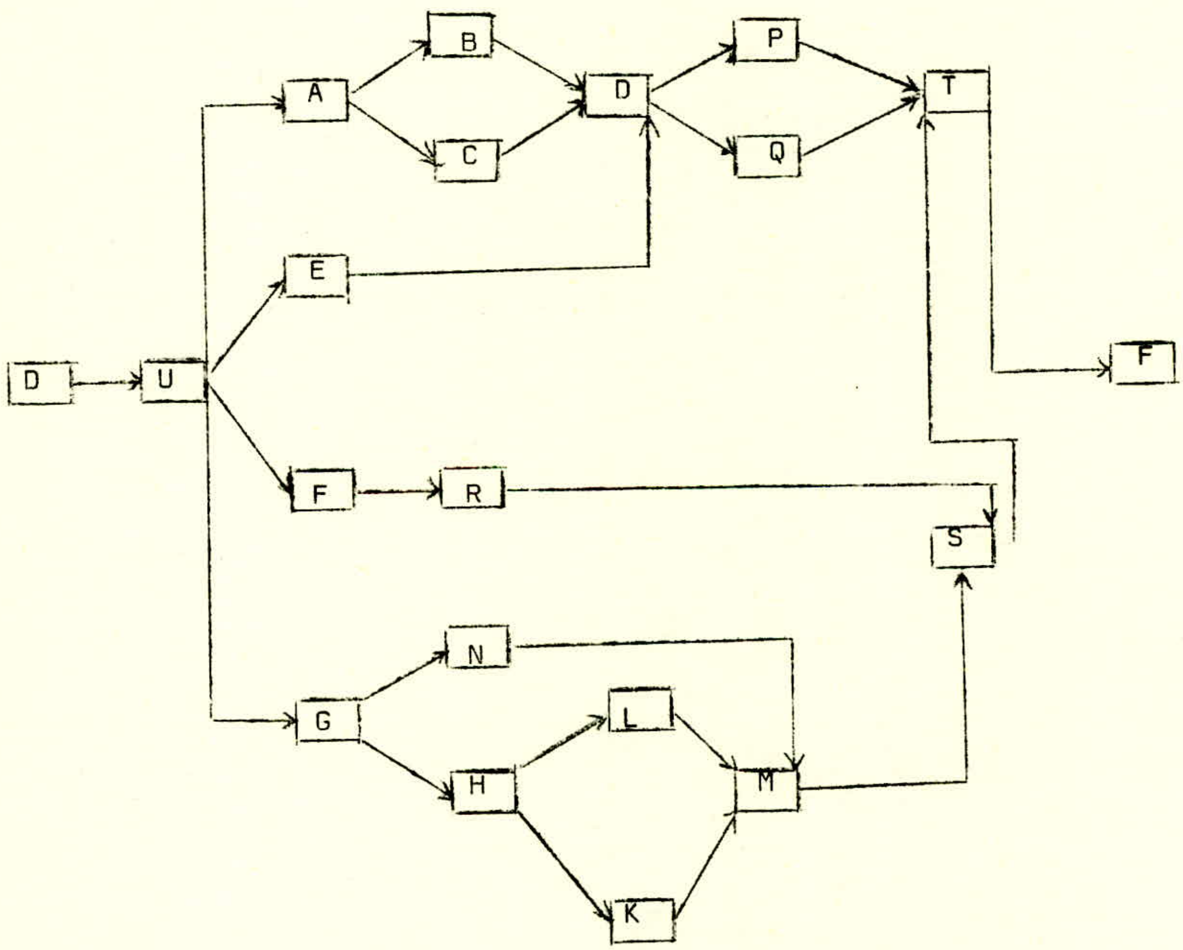


L'opération a doit se terminer d'unité de temps avant la fin de b. Si d = o, a et b doivent se terminer en même temps.

I.2222 Entrée et sortie du graphe des activités

Le graphe des activités ne fait pas intervenir la notion d'étape. On passe par une opération de début D et une opération fin F.

I.2223 Graphe du projet d'aménagement de la raffinerie



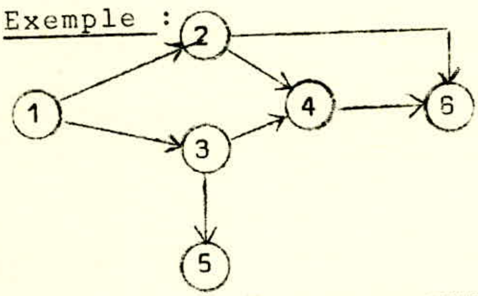
1.3 CONTROLE DU GRAPHE DE PROJET

La première notion de contrôle est de s'assurer que les successions des opérations, le long de chaque chemin, sont logiques. Deux erreurs de logique peuvent apparaître lors de l'établissement d'un graphe.

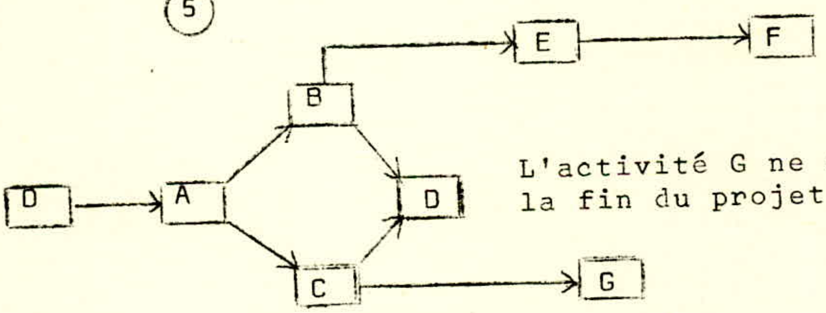
a) les flèches libres :

Toutes les opérations doivent en principe conduire au but désiré. Par conséquent, il faut s'assurer que ceci est respecté.

Exemple :



L'activité (3,5) ne conduit pas à l'étape finale 6.

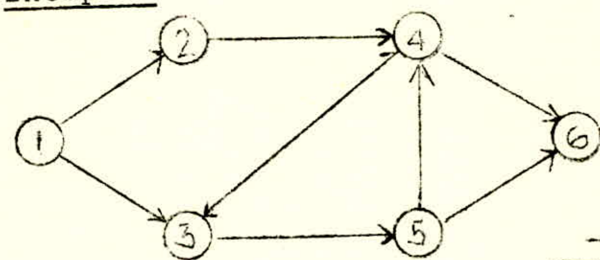


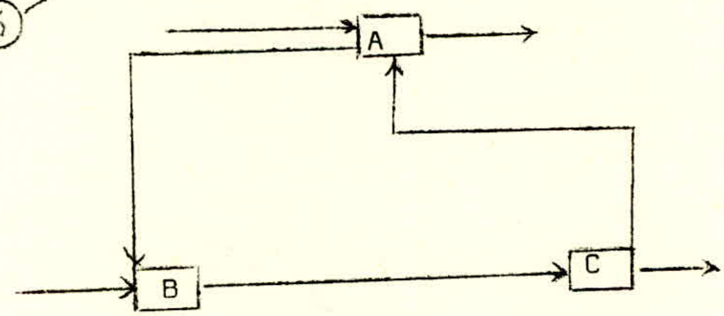
L'activité G ne conduit pas à la fin du projet F.

b) circuit :

L'existence de circuit dans un réseau détruit les relations d'ordre entre les activités et rend impossible l'accomplissement du projet (un programme général est établi pour ce cas, en annexe A).

Exemple :





I.4 NUMEROTATION D'UN GRAPHE DE PROJET

Cette phase ne présente aucune difficulté de principe sauf si l'on considère une énumération séquentielle, c'est-à-dire, que pour toute tâche (i,j) on ait j > i.

Notons qu'une telle numérotation est utile au bon déroulement des programmes machines à établir. Divers algorithmes permettent de réaliser la condition j > i.

Algorithme de Fulkerson

- Numéroter l'origine
- barrer tous les arcs qui ne partent
- identifier les noeuds où tous les arcs arrivent barrés
- les numéroter à la suite (dans n'importe quel ordre), etc...

- barrer les arcs partant des noeuds déjà numérotés
- identifier les noeuds non encore numérotés où tous les arcs arrivent barrés
- les numéroter, etc...

CONCLUSION

Ainsi, si l'on doit tenir compte des régles précédentes, le graphe d'un projet doit présenter les particularités suivantes, à savoir qu'il doit être :

- connexe
- antisymétrique
- sans circuit
- il doit comporter en outre un seul début et une seule fin.

II. ANALYSE QUANTITATIVE DU PROJET

La première phase a servi à analyser le projet et à en figurer la structure logique par un réseau sans tenir compte de la notion de durée.

L'objet de cette seconde phase ayant pour but l'estimation et le contrôle des dates de réalisation, il importe d'y introduire le temps.

II.1 ESTIMATION DES DUREES

II.11 Notion de durée des opérations

La durée est le temps nécessaire à l'achèvement d'une tâche. Ce n'est pas nécessairement le temps qui s'écoule entre l'étape de tête et l'étape de queue.

Par exemple, l'étape i peut être à la semaine 0 et l'étape j à la semaine 10, mais la durée de la tâche (i,j) peut n'être que de 4 semaines, auquel cas, on dit que la tâche possède une marge (de 6 semaines dans cet exemple). Ceci sera étudié de façon d'étaillée dans la suite de cette étude.

II.12 Bases de l'estimation

La fixation de cette durée est évidemment un point délicat et important.

La construction d'un réseau implique nécessairement la notion de prévision. Dés lors, si dans certains cas, il sera possible de fixer une seule durée pour une opération (travaux déjà réalisés plusieurs fois antérieurement), dans d'autres, il faudra considérer la notion d'incertitude de la durée (durées connues mais sujettes à des aléas divers - durées encore mal connues).

La notion de durée implique aussi la fixation des moyens employés (comme nous le verrons plus tard). Or, la fixation des moyens à utiliser dépendra des possibilités, des potentialités existantes ; ces potentialités dépendront elles-mêmes des différents projets ou fabrication en cours simultanément.

Dés lors, on retiendra dans ce paragraphe les deux hypothèses suivantes :

- Pour définir la durée de la tâche, l'estimateur propose que les moyens affectés sont au niveau normal ou courant. Ce niveau normal est trés fréquemment défini par l'usage en la matière ou dans le domaine considéré, sinon on choisit le niveau correspondant au meilleur rendement ou au meilleur coût, des moyens mis en oeuvre.

- Il n'y a jamais de conflit entre les tâches pour l'utilisation des moyens ; c'est-à-dire que l'estimateur doit considéréer que le niveau normal des moyens est toujours disponible pour chacune des tâches dont il a à prévoir la durée.

Ces régles peuvent paraître restrictives (la première) ou paradoxales (la deuxième) qui revient à supposer l'existence de moyens illimités pour l'ensemble du projet ; ce sont cependant les seules disponibles et raisonnables. Notons aussi qu'il s'agit seulement d'obtenir une valeur probable de la durée des tâches et non de définir un ordonnancement des moyens affectés au projet, problème qui sera étudié en son temps (deuxième partie de cette thèse).

II.13 Durées certaines

C'est le cas où les normes de travail ont pu être établies correctement ou, s'il s'agit d'opérations bien connues dont la durée moyenne diffère trés peu des durées les plus optimistes ou les plus pessimistes. On peut alors considérer les différences entre les prévisions et les durées réelles comme négligeables.

Par exemple, un bâtiment dont la durée de construction est prévue à 1 an, sera considéré comme érigé dans les prévisions si l'on met 50 à 54 semaines.

On distingue :

II.131 - <u>les durées calculées</u> :

Ce sont celles qui font appel aux normes de fabrication.

<u>Exemple</u> : un bâtiment comporte X m3 de maçonnerie d'un certain type de briques. Une équipe de maçons (1 qualifié + 1 manoeuvre) peut placer en moyenne sur certain nombre de briques représentant Y m3/jour.

- si l'on emploie une seule équipe, l'érection de la maçonnerie de ce bâtiment prendra :

X/Y jours ouvrables

- si l'on emploie n équipes, il faudra :

$d = X/nY$ jours

Il faudra donc se fixer un nombre n d'équipes que l'on considère comme disponibles.

Ce bâtiment exigera donc pour l'opération maçonnerie :

n équipes (n maçons + n manoeuvres)
pendant $d = X/nY$ jours ouvrables

De plus, si l'on a Z briques/m3, il faudra prévoir l'approvisionnement de (X.Z) briques, réparties sur une durée de :

$d = X/nY$ jours ouvrables

soit : $\frac{X.Z}{X/nY}$ = briques jours = $Z.nY = N$

De plus, il faudra prévoir le mortier. S'il faut a m3 de mortier par m3 de maçonnerie, il faudra au total :

a.X m3 de mortier/jour = N'

Si un manoeuvre peut malaxer b m3 de mortier par jour, il faudra employer :

a.n.y/b manoeuvres

A son tour, le mortier exigera une certaine quantité de ciment et de sable. Son malaxage exigera une mélangeuse d'une capacité minimum de a.n.Y m3 par jour.

Pour la manipulation des briques et du mortier, il faudra :

c élévateurs

d pelles

etc...

<u>Conclusions</u> :

Le calcul de la durée de l'élévation de ce type de maçonnerie donne :

durée = X/nY

Cette durée exige :

n	: équipes de maçons	
N=Z.nY	: briques par jour	
N' = a.n.Y	: m3 de mortier par jour	(ciment (sable
a.n.Y/b	: manoeuvres	
C	: élévateurs	
d	: pelles	
1	: malaxeuse de mortier	

On voit donc que du calcul de la durée, découlent non seulement le nombre d'hommes nécessaires, mais aussi le matériel et les matières.

Cet exemple montre bien l'effet direct de la disponibilité des moyens sur la durée des opérations ; elle peut être accrue ou diminuée en augmentant ou en diminuant le nombre n de maçons. On aura ainsi une variation conséquente des autres besoins.

En résumé, pour les durées calculées, il faut prendre les points suivants en considération :

- Etudier en détail chaque opération afin de n'oublier aucun élément concernant le personnel qualitativement nécessaire, la quantité de travail que cette opération représente.

- Fixer les différentes normes le plus exactement possible pour chaque catégorie d'ouvriers ou d'employés, ou les capacités de productions des machines.

- Déterminer la durée de l'opération en fonction :

  + du nombre d'hommes disponibles
  + du nombre de machines disponibles
  + des normes établies.

- Exprimer les durées dans une unité commune à toutes les opérations du graphe (heures, jours ouvrables, semaines, mois, etc...)

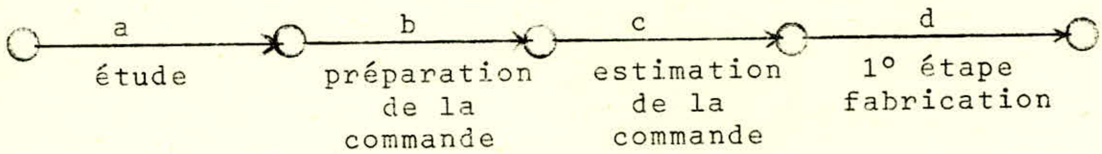
- Toutes les opérations réelles doivent faire l'objet d'une estimation semblable.

- Les opérations fictives, n'ayant aucune durée et n'employant aucun moyen, ne recevront donc aucune estimation.

- Tous les éléments extérieurs (commande de matériels, sous traitance) doivent être obtenus en temps voulu.

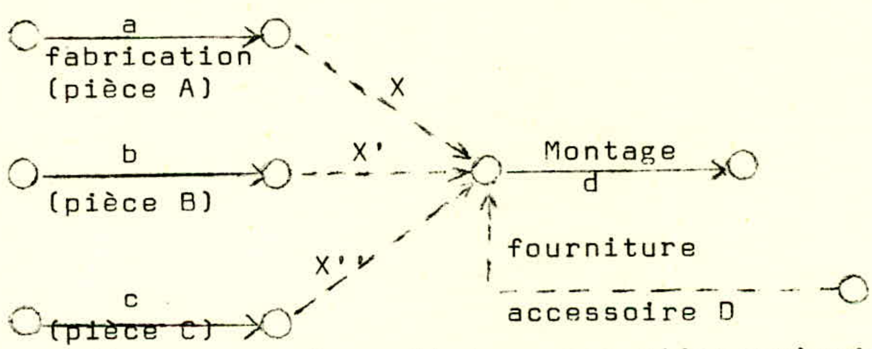
II.132 - <u>les durées imposées</u> :

C'est le cas de ces éléments extérieurs. Par exemple, si l'on considère dans un réseau la succession :



Les opérations a, b et d auront des durées calculées (en fonction des moyens utilisés) tandis que l'opération c aura une <u>durée imposée</u> : le délai donné par le fournisseur et accepté par le fabricant.

Dans ce cas de commandes usuelles, intervenant pour certaines opérations, on aura simplement des contraintes imposant une date au plus tôt à ces opérations :



<u>Remarque</u> : On voit donc que l'incertitude des durées ne pourra être considérée que pour des hypothèses qui ne font pas varier les moyens, si l'on ne veut pas compliquer exagérement le problème. Cependant, on peut envisager le calcul de la durée des opérations par référence au module - coût - (ceci ne faisant pas partie de notre étude) qui prend en compte l'hypothèse de la minimisation du coût : c'est ce qu'on appelle l'<u>optimation d'un réseau</u>.

Ce problème est traité dans les ouvrages sur le PERT-COST ou sur CPM (approche économique).

II.14 Durées incertaines

Dans la grande majorité des applications qui concernent les secteurs de la construction, l'estimateur fournira une seule évaluation de la durée de chaque tâche. L'expérience de ce dernier joue un grand rôle dans ce cas là.

Cependant, dans certains cas (études, recherches, travaux réalisés pour la première fois ...), il est trés difficile d'apprécier la durée que prendra une tâche. On suppose que les durées des tâches ne sont pas des durées fixées mais qu'elles peuvent varier, soit que l'on ne sache pas les estimer avec précision, soit que les tâches puissent être perturbées dans leur déroulement.

On cherchera alors à obtenir de l'estimateur les 3 valeurs suivantes :

* to temps optimiste : le temps minimum pour réaliser la tâche si tout va anormalement bien. L'estimateur considère qu'il n'y a qu'une chance sur cent pour que tout aille si bien.
* tp temps pessimiste : la durée de la tâche si tout ce qui peut aller bien tournait mal, et prenait un maximum de temps (à l'exception des catastrophes, accidents grèves, ...) il y a plus d'une chance sur cent d'avoir toute la malchance de l'estimation pessimiste.

* tv temps vraisemblable : celui que l'estimateur juge, sur la base de son expérience, devoir se produire dans des circonstances normales.

A partir de ces trois estimations, on prendra comme valeur probable de la durée des tâches (d) :

$$d = \frac{tp + 4\ tv + to}{6}$$

<u>But recherché</u> : connaissant la loi de probabilité de la durée de chaque tâche :

$$Pr\ (t < dij < t + dt)$$

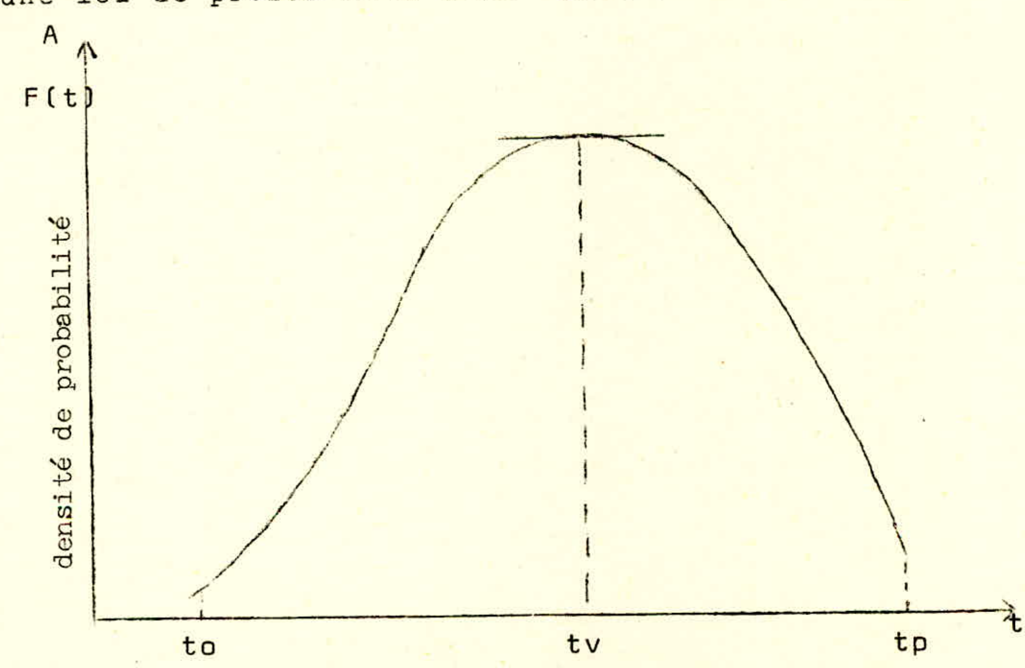
en déduire la loi de probabilité de la durée totale du projet :

$$Pr\ (t < D < t + dt)$$

<u>Conclusion</u>

Nous n'entreprendrons pas de présenter ici les bases statistiques de ce procédé, arguments que le lecteur trouvera dans la plupart des ouvrages ou articles sur le *PERT*. Cependant, on a pu remarquer que dans la plupart des programmes, la durée des tâches est considérée comme certaine et exprimée par un nombre unique.

Quelques programmes admettent des durées aléatoires ; si l'on connaît les distributions statistiques des temps, on pourra calculer un temps moyen, mais si au contraire les distributions ne sont pas connues, on préconise dans la méthode *PERT* d'assimiler la distribution des temps à une loi de probabilité dite *"Bêta"*.



to et tp sont assimilés aux valeurs limites de la variable aléatoire, dans la loi "Bêta", dont l'application permet de calculer une estimation de la durée probable des tâches (ou en terme de statistique "valeur moyenne").

Le choix de la distribution "Bêta" est dû à la facilité avec laquelle on la manipule à la calculatrice, et selon les utilisateurs, les résultats trouvés sont significatifs et utiles.

II.15 Unité de temps utilisé

Les durées des différentes tâches doivent être exprimées en fonction d'une unité de temps, qui peut être imposée ou à choisir parmi plusieurs. Certains programmes autorisent l'utilisation simultanée de plusieurs unités de temps.

II.2 CALCUL DU CALENDRIER DE REALISATION

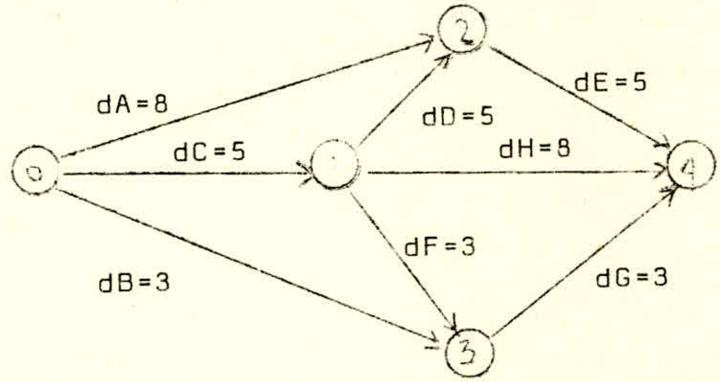
Toutes les données nécessaires (réseau logique et durée probable des tâches) étant réunies, il est alors possible d'établir le planning ou calendrier de réalisation.

II.21 Dates de réalisation des étapes

Prenons à titre d'exemple, celui d'un atelier d'embouteillage en affectant des durées aux diverses opérations. Les durées d (valeur unique ou moyenne de trois estimations) sont exprimées, par exemple, en semaines.

	Opérations	durée en sem.
A	Commande cuverie	8
B	Commande matériel d'embouteillage	3
C	Terrassement - fondations	5
D	Infrastructure cuverie	5
E	Installation de la cuverie	5
F	Infrastructure matériel d'embouteillage	3
G	Installation du matériel d'embouteillage	3
H	Mise en place du matériel de manutention	8

d'où la représentation graphique du projet :



II.211 - Dates de réalisation au plus tôt (E)

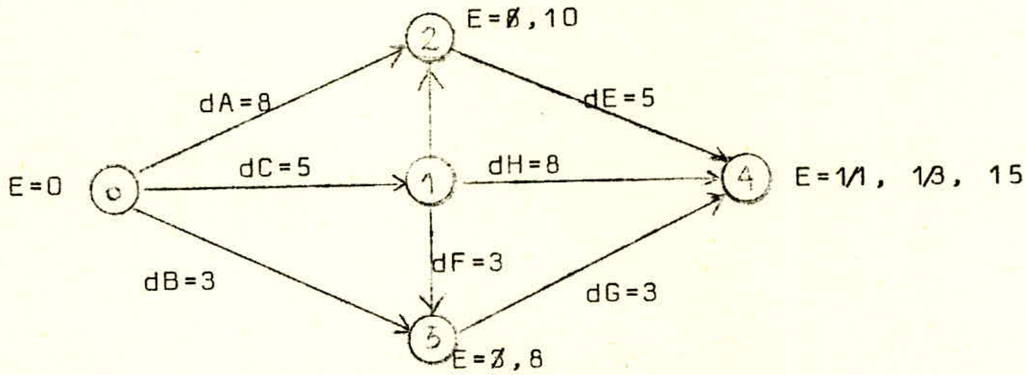
Nous allons chercher à quelle date au plus tôt (E = ti) peut se situer chacune des étapes i du planning. Ce calendrier détermine en fonction de l'accomplissement des tâches, la date la plus proche de l'origine à laquelle on peut espérer atteindre chacune des étapes du réseau.

Pour cela, nous dressons le tableau suivant :

Etape n°	Etapes immédiatement antérieures		durée de la tâche	date au plus tôt (E) de l'étape considérée	
	numéro	date au plus tôt			
0	-	-	-	0	0
1	0	0	dc = 5	5	5
2	0 1	0 5	da = 8 d_d = 5	8 10	- 10
3	0 1	0 5	db = 3 df = 3	3 8	- 8
4	1 2 3	5 10 8	dh = 8 de = 5 dg = 3	13 15 11	- 15 -

La dernière colonne du tableau a été divisée en deux et on reporte dans sa partie droite les dates réelles au plus tôt des étapes (maximum des dates de la partie gauche).

Ce tableau décrit le procédé de recherche qu'on peut aussi bien effectuer sur le réseau :



- On énumère les étapes

- on recherche toutes les étapes immédiatement antérieures à une étape donnée (j)

- on trouve la date au pkus tôt de l'étape considérée (j) en ajoutant aux dates des étapes immédiatement antérieures la durée des tâches qui les séparent (j) et en prenant le maximum des dates obtenues.

II.212 - Dates de réalisation au plus tard (L)

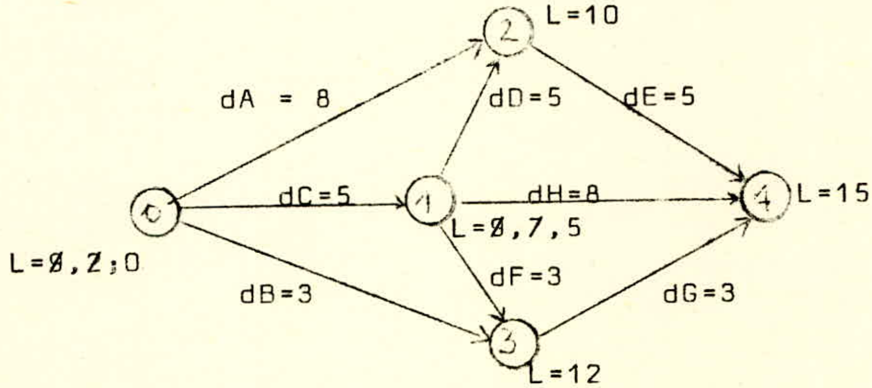
Cette fois, le calcul va définir pour chaque étape la date la plus tardive à laquelle celle-ci peut encore être atteinte, sans que cela modifie la date de l'étape finale du projet... Pour cela,(+) recommencer l'étude d'échelonnement en partant de la date de terminaison (qui est la date à laquelle on doit ou on souhaite avoir terminé le projet ou à défaut, la date que l'on vient de trouver) et en remontant le cours du temps pour trouver les <u>dates au plus tard</u> (L) des étapes, compatibles avec le planning.

(+) nous allons...

Etapes n°	Etapes immédiatement postérieures		durée de la tâche	Date au plus tard (L) de l'étape considérée.	
	numéro	dates au plus tard			
4	-	-	-	15	15
3	4	15	dg = 3	12	12
2	4	15	de = 5	10	10
1	4	15	dh = 8	7	-
	3	12	df = 3	9	-
	2	10	dd = 5	5	5
0	3	12	db = 3	9	-
	2	10	da = 8	2	-
	1	5	dc = 5	0	0

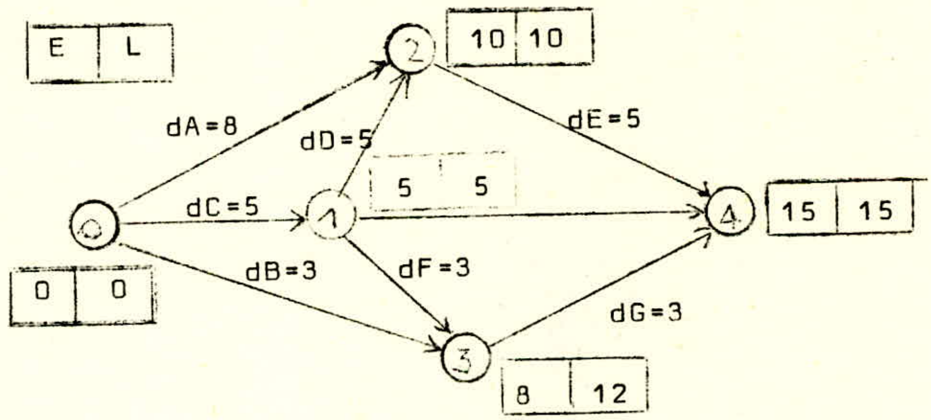
On a également reporté dans la partie droite de la dernière colonne les dates réelles au plus tard des étapes.

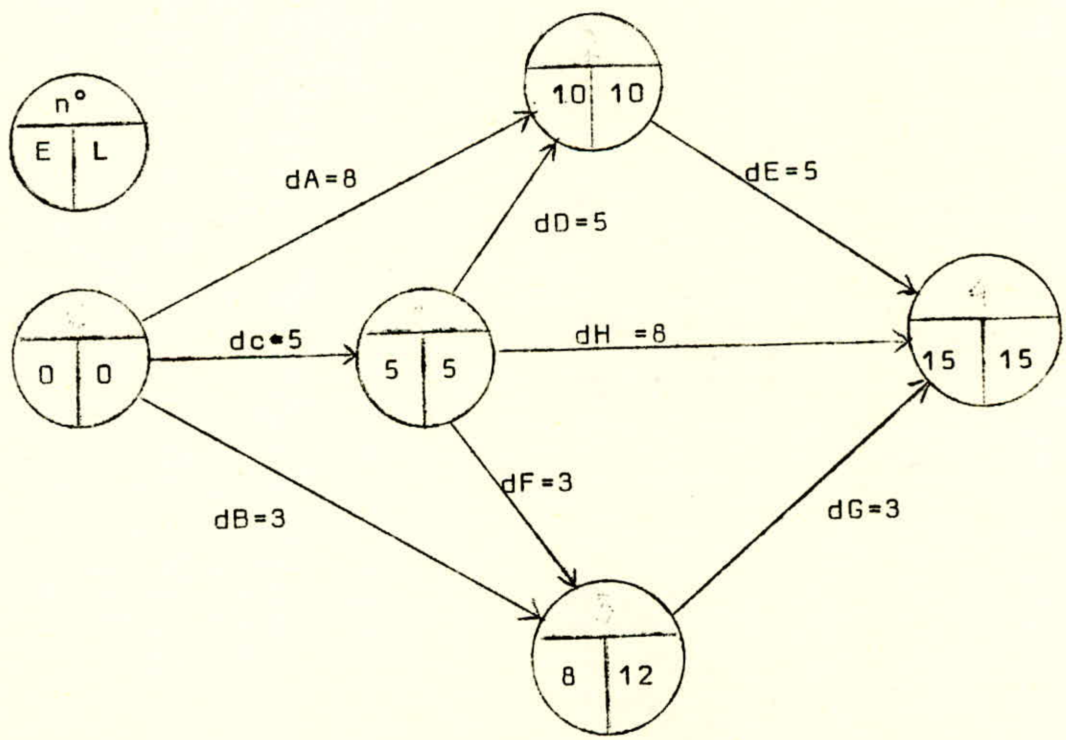
La figure ci-dessous montre le graphe sur lequel on a noté les dates au plus tard de chaque étape.



Conclusion :

Dans la suite de notre étude, nous utiliserons pour représenter les dates au plus tôt et au plus tard de chaque étape, l'une ou l'autre des configurations suivantes :





II.213 - Formalisation des calculs

On cherche les dates les plus rapporchées et les plus éloignées de chaque étape en calculant le planning dans le sens de l'écoulement du temps puis dans le sens inverse.

Si on se donne au départ :

- to : date au plus tôt à laquelle le projet peut commencer

- tf : date au plus tard à laquelle le projet peut finir

On voit alors aisément que les relations générales sont les suivantes :

$$tj = \text{Max}_i \ (ti + dij)$$

$$Ti = \text{Min}_j \ (Tj + dij)$$

Sachant que :

tj = date au plus tôt de l'étape j

Ti = date au plus tard de l'étape i

dij = durée de la tâche (i,j)

On obtient ainsi pour chaque étape un couple de valeur (ti, Ti) :

- si ti = Ti, l'étape est critique, c'est-à-dire que tout retard dans sa réalisation retarde le planning.

- si ti<Ti, on dispose d'une marge de planning : Ti - ti.

Plus généralement, puisque la date de terminaison du projet qui sert à la détermination des dates au plus tard Ti n'est pas obligatoirement celle obtenue lors du calcul des dates au plus tôt, les étapes critiques sont celles correspondant au minimum de (Ti - ti).

- Si Min (Ti - ti) > 0, le délai à priori est large

- Si Min (Ti - ti) < 0, le délai à priori est trop court et ne peut être tenu dans la structure actuelle du projet.

II.22 Dates des tâches

Le calcul peut être aussi bien mené dans le cas des tâches pour lesquelles on définit quatre dates :

- date de début au plus tôt (E) qui est la date la plus proche de l'origine à laquelle il est possible de lancer une tâche. Elle est égale à la date de réalisation au plus tôt de l'étape précédant cette tâche (ti).

- date de fin au plus tôt (FE) qui est la date la plus proche de l'origine pour l'achèvement d'une tâche. Il est clair que :

$$FE = DE + dij = ti + dij = x$$

- date de fin au plus tard (Fl) qui est la date la plus tardive à laquelle on peut encore terminer une tâche sans causer un retard sur la date finale du réseau. Elle est égale à la date de réalisation au plus tard de l'étape suivant cette tâche (Tj).

- date de début au plus tard (DL) qui est la date la plus tardive à laquelle il est possible de lancer une tâche sans causer un retard sur la date finale du réseau. Nous avons alors :

$$DL = FL - dij = Tj - dij = y$$

Remarque

Le temps maximum disponible pour l'exécution d'une tâche (i,j) est :

(Tj - ti)

Aussi, une tâche est critique si elle utilise (ou dépasse) le temps maximum disponible.

On a alors aucune marge pour encaisser un retard. Cela s'exprime par :

$Tj - ti \leqslant dij$

Plus généralement, on appelle critiques les tâches pour lesquelles (Tj - ti - dij) à la valeur minimale.

Les tâches critiques commencent et finissent en des étapes critiques.

II.23 CHEMIN CRITIQUE ET MARGE

II.231 - Le chemin critique

Quand il y a plus d'un chemin (c'est-à-dire une suite de tâches) entre son étape début et son étape fin, un réseau présente presque toujours de la marge. L'existence de la marge signifie que la date de réalisation de l'étape peut se déplacer dans cet intervalle sans compromettre la date d'achèvement du projet.

La suite des tâches reliant les étapes de marge la plus faible détermine le chemin critique.

"Le chemin critique, est la chaîne d'activités partant de l'origine et aboutissant à l'extrémité, telles que toutes les tâches soient critiques".

Il y en a toujours au moins un, sans quii le planning pourrait être raccourci.

La surveillance des activités du chemin critique conditionne la tenue du planning.

II.232 - Les marges

Nous calculerons pour chaque tâche, les marges suivantes :

- la marge totale :

$T = Tj - ti - dij = Tj - x = y - ti$

- la marge libre amont (au plus tôt) :

$L = tj - ti - dij = tj - x$

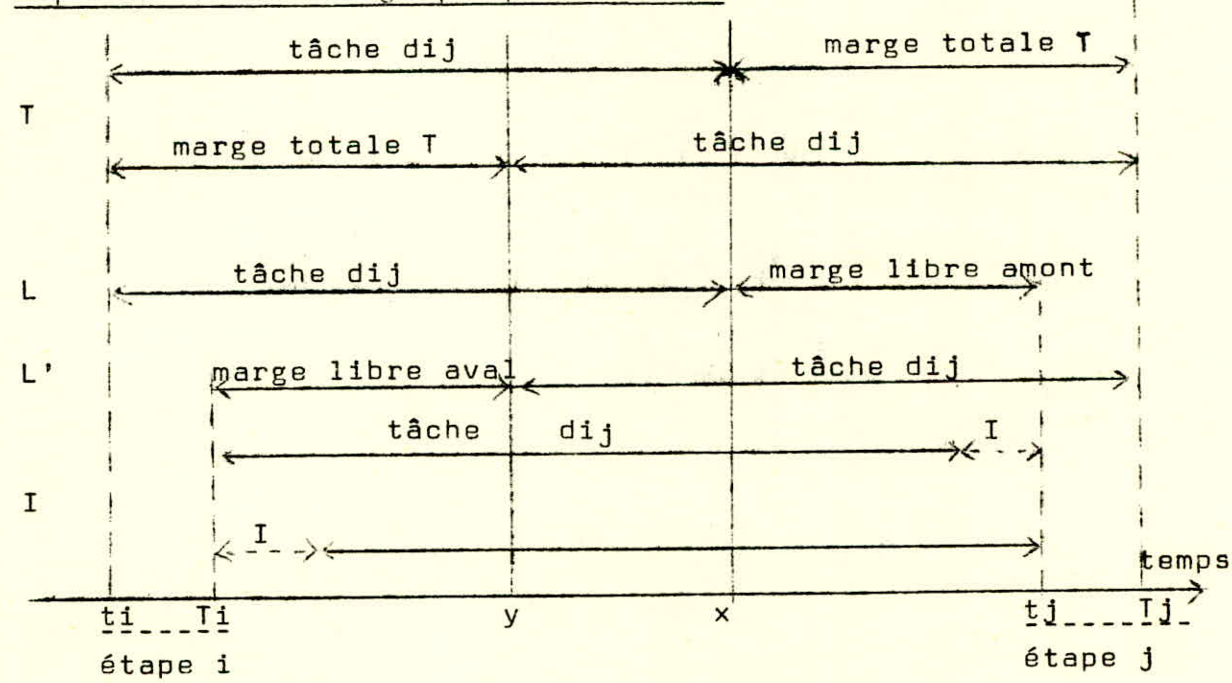
- La marge libre aval (au plus tard) :

$L' = Tj - Ti - dij = y - Ti$

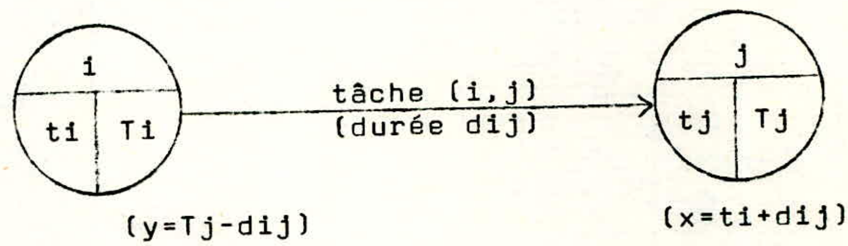
- La marge indépendante :

$I = tj - Ti - dij$ ou zéro.

Représentation sur graphique linéaire :



Représentation sur réseau :



Remarques :

1. si une tâche relie deux étapes critiques, ses trois marges sont égales.

dans ce cas : ti = Ti et tj = Tj

2. si l'étape extrémité d'une tâche est critique, la marge totale et la marge libre au plus tôt (amont) de cette tâche sont identiques.

dans ce cas : tj = Tj

3. si c'est l'étape origine qui est critique, la marge totale et la marge libre au plus tard (aval) sont égales.

dans ce cas : ti = Ti

III. ANALYSE DES RESULTATS - PLANIFICATION

Les résultats fournis précédemment par le calcul doivent être soigneusement analysés, et bien souvent, une mise au point sera nécessaire pour parvenir à un planning d'exécution satisfaisant. Ce planning est l'outil permanent de coordination et de pilotage des travaux. Il est mis à jour avec une périodicité convenable.

Pour parvenir à ce résultat, nous sommes passés par des phases distinctes : établissement de la structure logique du réseau ; puis estimation des durées des tâches enfin, le calcul vient sanctionner les options prises dans ces deux phases, par comparaison au délai fixé ou souhaité. Il convient alors d'examiner les résultats du calcul et de réduire la durée totale par une série d'actions réfléchies, c'est-à-dire, prises en connaissance de causes et surtout de conséquences (§ III.1).

Ensuite, en supposant que le délai total obtenu soit satisfaisant, le calcul a fourni non pas un calendrier de réalisation mais une pluralité de possibilités comprises entre deux limites : calendriers des tâches "calés" au plus tôt et au plus tard. Assurément, l'un et l'autre sont viables du point de vue de la chronologie et sont en pratique souvent utilisés tels quels.

Il faut cependant ne pas négliger les contraintes autres que les délais (intempéries, continuité de certains travaux ...) et dont la prise en compte conduira à un planning plus réaliste (§ III.3).

Enfin, la considération parmi ces contraintes de celles relatives à la mise en oeuvre de moyens, va permettre de lever l'hypothèse qui pesait sur le planning depuis la phase de l'estimation des durées. Cet aspect sera traité plus tard dans le chapitre I de la deuxième partie, mais notons dés à présent, qu'il peut y avoir antagonisme entre la nécessité de maintien ou de réduction des délais et le respect de disponibilités fixes de moyens ou de lissages des courbes de charge.

Par conséquent, cette phase de planification peut être décomposée en trois parties :

III.1 AMELIORATION DU PLAN D'EXECUTION

Le réseau obtenu à l'issue des phasesprécédentes peut ne pas être satisfaisant : délai total trop long, découpage du projet trop ou trop peu détaillé, etc...

Pour atténuer ou supprimer ces défauts, les deux actions, souvent nécessaires, sont les suivantes :

III.11 - Réduction des délais :

Dans tous les cas où l'on cherche à réduire la durée totale d'un projet de la manière la plus économique, l'établissement d'un planning se révèle d'une extrême utilité. Bien souvent, la première durée calculée s'avère trop longue ; il faudra alors procéder à une série de modifications pour améliorer ou raccourcir la durée du projet.

Ce raccourcissement sera obtenu en faisant appel aux solutions suivantes, par ordre de "gravité croissante" :

- révision des durées des tâches ; ce qui est possible si une seule technique d'exécution a été envisagée primitivement, ou si les évaluation ont été faites sans calcul précis. Il faut s'attaquer en priorité aux tâches critiques.

-- révision des contraintes d'ordre entre les tâches et, en particulier, recherche d'un fractionnement des tâches comportant des travaux répétitifs et recherche d'un chevauchement entre tâches successives.

-- révision de la définition des tâches et redécoupage du plan d'exécution du projet, en augmentant le degré de détail, donc le nombre des tâches.

-- à la limite, modification du projet lui-même (ces cas extrêmes sont, heureusement, assez rares).

Généralement, les modifications de durée et la mise en parallèle des tâches permettent d'aboutir à un résultats satisfaisant.

III.12 - Homogéneisation du réseau

Cette opération a pour but de transformer le réseau théorique en un réseau homogène vis-à-vis d'un critère particulier ; par exemple, on cherchera à obtenir un réseau homogène quant aux corps de métier auxquels il est fait appel pour l'exécution : on extrairera du réseau global un réseau des travaux, un réseau des commandes aux fournisseurs, un réseau des études ...

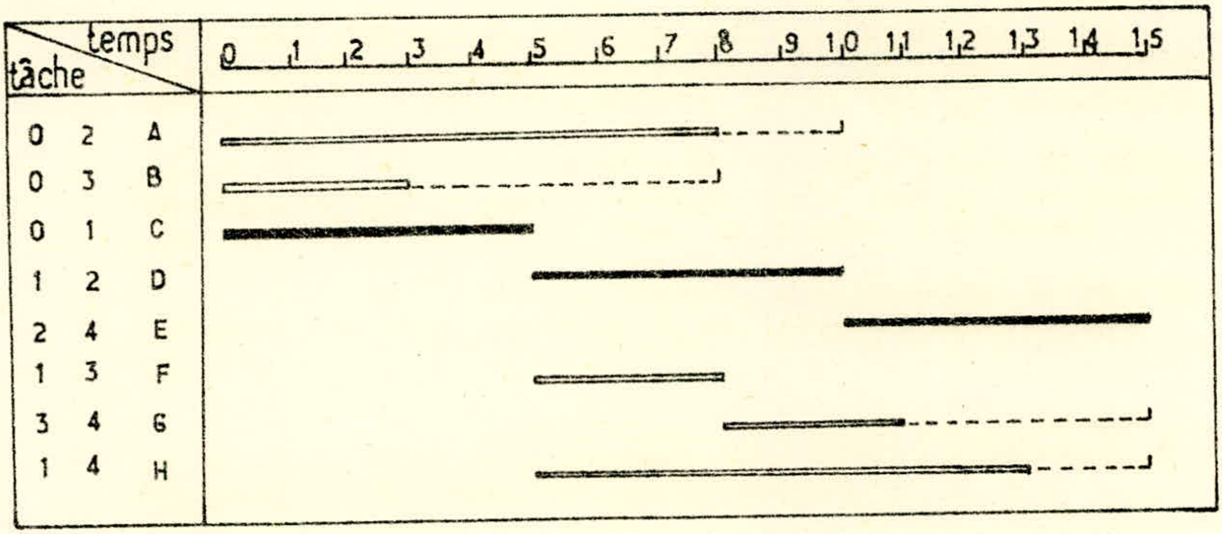
III.2 ETABLISSEMENT DU PLANNING LINEAIRE D'EXECUTION

Les plannings linéaires peuvent être établis soit à partir du réseau complètement calculé, soit à partir du tableau donnant seulement les contraintes d'ordre et les durées des tâches.

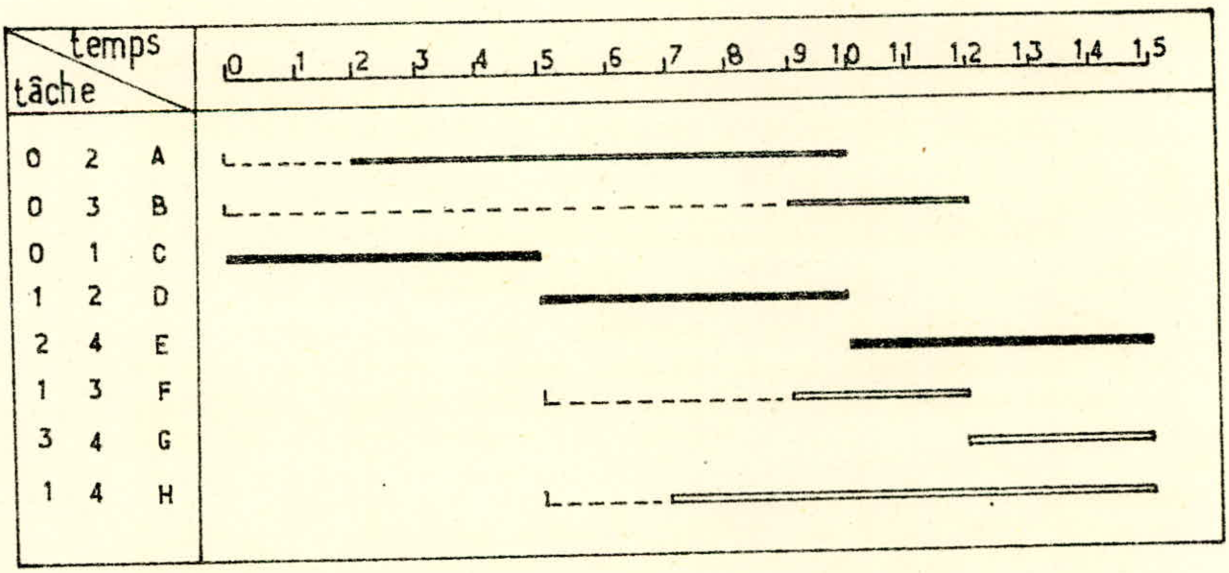
Quelle que soit la méthode adoptée, on adoptera d'abord un planning calé à gauche (au plus tôt) faisant apparaître les marges libres amont (au plus tot "L") puis un planning calé à droite faisant apparaître les marges libres aval (au plus tard "L'").

PLANNING LINEAIRE/DIAGRAMME DE GANTT

CALAGE A GAUCHE



CALAGE A DROITE



On devra enfin choisir un planning définitif, par compromis entre les soucis inverses de sécurité (calage à gauche) et d'économie (calage à droite). Ce choix sera fait globalement si le réseau est homogène ou, de préférence, par tâche ou groupe de tâches. Ce choix s'appuiera sur l'estimation des enjeux et des risques respectifs.

III.21 - Représentation graphique avec jalonnement dans le temps (diagramme de GANT - diagramme à barres)

Un excellent moyen, qui a fait ses preuves, de représenter les opérations est constitué par le diagramme de GANTT (ou diagramme à barres). Ici, nous ne donnerons rien de plus qu'une simple introduction sur ce type de diagramme, et ceux qui voudraient approfondir la question peuvent se reporter au livre de WALLACE Clark *"le diagramme de GANTT"*.

Dans ce type de diagramme, on représente la durée d'une tâche par une horizontale dont la longueur est proportionnelle à la durée de la tâche ; le temps s'écoulant de gauche à droite, les tâches étant énumérées de bas en haut. Ainsi, si on avait à représenter le projet de l'atelier d'embouteillage, on aurait les diagrammes de GANTT (calé soit à gauche, soit à droite) (voir ci-dessus).

III.22 - Les difficultés du diagramme de GANTT

Le premier problème qui se pose est que le diagramme ne peut pas mettre facilement en évidence les relations entre les tâches. Les diagrammes ci-dessus montrent bien 8 tâches, mais les relations entre celles-ci n'apparaissent pas facilement. On peut par exemple, pour un petit travail, relier les barres par des pointillés, mais dés que le nombre de tâches augmente, le diagramme ainsi modifié devient inutile, car confus.

III.23 - Mise à jour des réseaux et des plannings linéaires d'exécution :

La mise à jour des réseaux sera généralement périodique ; le choix de la période de mise à jour étant fonction de la durée de projet, et de l'unité de temps adoptée. Les périodes les plus fréquentes sont la semaine la quinzaine et le mois.

La mise à jour se déroule selon le schéma suivant :

a) remontée des informations : préparée et organisée pour que les circuits soient sûrs et rapides, les réunions doivent être préparées et conduites avec grand soin.

b) mise à jour du réseau - calculs.

c) analyse des résultats - décisions. Ces décisions prises peuvent exiger un nouveau calcul du réseau.

d) mise à jour corrigée des plannings d'exécution.

III.3 PRISE EN COMPTE DES CONTRAINTES DIVERSES.

L'introduction dans le planning des contraintes de moyens étant étudiée par ailleurs en seconde partie de notre projet, nous n'examinerons présentement que l'influence sur le calendrier de réalisation d'un certain nombre de facteurs.

Parmi ceux-là, on peut distinguer :

-- les "intempéries" ou plus généralement l'incidence des conditions climatiques (pluie, froid, chaleur, raccourcissement ou allongement des journées, etc...)

-- le "niveau de service" : dans leur forme la plus fréquente les contraintes n'ont pas le caractère des enclenchements techniques ou technologiques qui sont à la base du destin des réseaux ; elles traduisent seulement une logique de réalisation "souhaitable", comme par exemple :

++ dans le bâtiment, une entreprise de second-oeuvre ne souhaitera intervenir que si le gros oeuvre est terminé par un certain nombre de cellules ou de niveaux.

++ en travaux publics, pour la construction d'un ouvrage urbain, l'administration ne souscrira pas forcément au planning donnant le plus court délai de réalisation, mais plutôt à celui qui entraînera le moins d'interruption ou de modifications au trafic local (rues barrées, circulations des engins ou camions, etc...)

CONCLUSION

L'expression de telles contraintes peut être faite lors de l'élaboration initiale du planning. Mais la meilleure solution, selon nous, consiste à les introduire après un premier calcul du chemin critique et des problèmes associés.

L'existence des marges permet alors de caler les tâches dans le temps pour satisfaire au meilleur "niveau de service" possible et sans modifier la structure technique du reste de la réalisation.

CHAPITRE II

ALGORITHMES DE RECHERCHES DU CHEMIN CRITIQUE

Différents algorithmes permettent de résoudre le problème de la recherche du chemin critique ou chemin de longueur maximale.

On présentera ci-après, quelques variantes de ces algorithmes de résolution, formulées d'une part par la programmation dynamique, d'autre part par la programmation linéraire.

I. ALGORITHMES DE LA PROGRAMMATION DYNAMIQUE

I.1 DEFINITIONS

I.11 - Principe d'optimalité

Les algorithmes suivants sont axés sur le principe d'optimalité de Bellman : *"Une politique optimale est telle que, quels que soient l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes doivent constituer une politique optimale par rapport à l'état résultant de la première décision"*.

Autrement dit : *"Tout chemin comprenant au plus r arcs et maximal est formé de chemins partiels contenant au plus k arcs ($k \leq r$) et qui sont eux aussi maximaux"*.

I.12 - Equations fonctionnelles

Les dates au plus tôt des diverses étapes sont solution de l'équation :

$$f(y) = \sup_{x \in P(y)} \left\{ f(x) + a(x,y) \right\}$$

P (y) désigne l'ensemble des précédents de y dans un graphe G = X, M).

Les dates au plus tard quant à elles, sont solution de l'équation :

$$f(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in P(x)} \left\{ f(y) - a(x,y) \right\}$$

P (x) désigne l'ensemble des successeurs de x dans un graphe G = (X,M).

I.2 ALGORITHME NATUREL

I.21 - Première méthode

Soit ti et Ti respectivement la date au plus tôt et la date au plus tard d'un évènement i :

$$t1 = 0$$

$$tj = \operatorname*{Max}_{u \in uj} \left\{ \sum_{(i,j) \in u} tij \right\} \quad j = 2, \quad ,n$$

uj étant l'ensemble des chemins allant de 1 à j. tij étant la durée d'une tâche associé à l'arc (i,j) du graphe G = (X,M).

$$Tn = tn$$

$$Tj = tn - \operatorname*{Max}_{V \in Vj} \left\{ \sum_{(i,j) \in V} tij \right\}$$

Vj étant l'ensemble des chemins allant de j à n.

I.22 - Deuxième méthode

$$t1 = 0$$

$$tj = \operatorname*{Max}_{(i,j) \in U\bar{j}} \left\{ ti + tij \right\} , \ j = 2,3, \quad ,n$$

et

$$Ti = \operatorname*{Min}_{(i,j) \in i^{+}} \left\{ Tj - tij \right\} , \ i = 2, \ldots ,n-1$$

$Tn = tn$: date de réalisation du projet

$T1 = t1 = 0$: date de démarrage du projet

I.23 - Intervalles de flottement et marges

Les intervalles de flottement et marges se déduisent automatiquement de ti et Ti par les relations suivantes :

$Ti - ti$	intervalle de flottement
$Tj - ti - tij$	marge totale de la tâche (i, j)
$tj - ti - tij$	marge libre de la tâche (i, j)
$tj - Ti - tij$	marge certaine de la tâche (i, j)

I.24 - Application

L'algorithme naturel est illustré par la méthode matricielle ci-après :

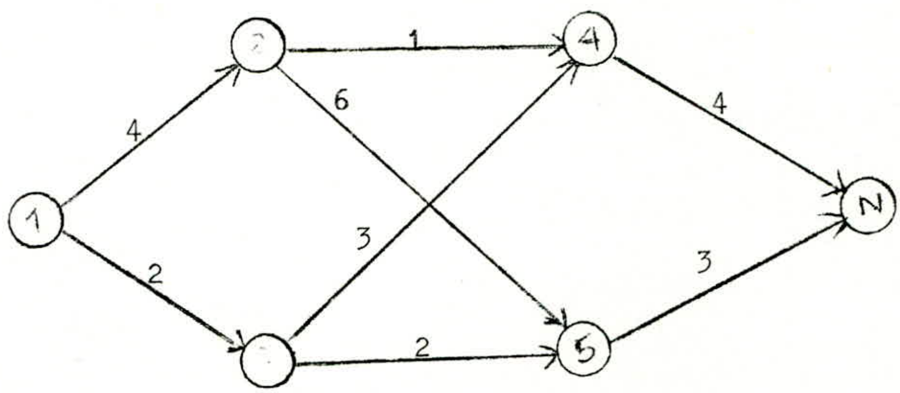
Soit C (i,j) la matrice associée au graphe d'un projet $G = (X, \Gamma)$

- $C(i,j) = tij$; si $(i,j) \in G = (X,\Gamma)$

- $C(i,j) = 0$; si $(i,j) \notin G = (X,\Gamma)$

C'est une matrice triangulaire supérieure en raison de l'antisymétrie d'un graphe de projet.

On calculera les dates au plus tôt et les dates au plus tard de toutes les étapes du graphe suivant :



			étapes postérieures						dates au plus tôt
			1	2	3	4	5	6	
	étapes antérieures	1		4	2				0
		2				1	6		4
		3				3	2		2
		4						4	5
		5						3	10
		6							13
E	dates au plus tard		0	4	6	9	10	13	

(I)

$$t_j = \underset{i}{\mathrm{Max}}\,(t_{ij} + t_i)$$

$$T_i = \underset{j}{\mathrm{Min}}\,(t_j - t_{ij})$$

<u>Procédure</u> :

On part de la première étape de la colonne i et sur la même rangée on va jusqu'à la diagonale (i = j), dans ce cas 0 (NB : ce premier stade nécessaire mais on l'indique pour la bonne compréhension de la méthode générale). Puis on descend dans la colonne i (vers i = 2) et on recommence.

On inscrit dans la colonne E, à côté de i = 2, le nombre trouvé au dessus de la diagonale plus ce qui est dans la colonne E au même niveau que ce nombre. Dans le cas où figurent plusieurs nombres au dessus de la diagonale, le nombre que l'on inscrira dans la colonne E est le plus grand de tous ceux qu'on peut former en additionnant celui de chaque case et le nombre E qui y correspond et ainsi de suite jusqu'à N.

Quand on a rempli la colonne E, se trouve alors associé à chaque étape sa date au plus tôt.

La date au plus tard de l'étape FIN est, comme on l'a déjà dit, la même que sa date au plus tôt, et on l'inscrit dans le coin inférieur droit. On passe à la colonne suivante ; mon monte jusqu'à la diagonale puis on se déplace le long de la rangée en retranchant le nombre rencontré sur la rangée du nombre L correspondant. Dans le cas où figurent plusieurs nombres sur la rangée, on inscrira la plus petite différence.

1.3 ALGORITHME DE FORD

Il est aussi utilisé dans la recherche du chemin critique (chemin de longueur maximale) et de la date de réalisation d'un programme.

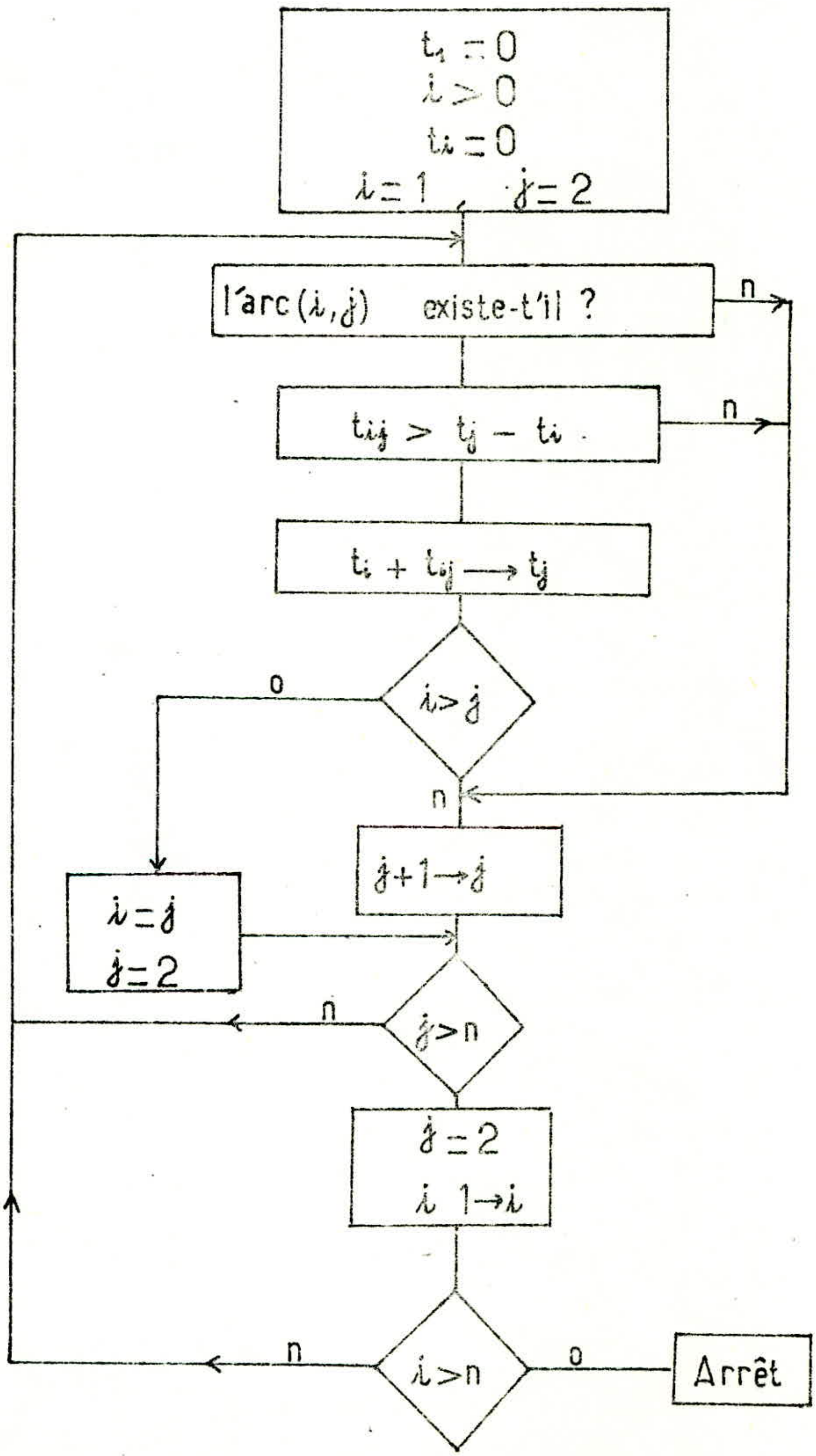
Considérons un graphe de projet $G = (X,\Gamma)$. Soit U un chemin quelconque de G allant de 1 à y. On appellera longueur du chemin le nombre :

$$f\ (y) = f\ (x) + a\ (x,y)$$

Nous rechercherons parmi tous les chemins de G ayant même extrémité initiale et même extrémité terminale, ceux dont la longueur est maximale. Soit   cette longueur.

$$= \operatorname{Sup}_{(i,j) E U_i^+} \left\{ f\ (x) + a\ (x,y) \right\}$$

RECHERCHE DU CHEMIN DE LONGUEUR MAXIMALE (FORD)



1° On marque chaque sommet i avec un indice λ_i ; tout d'abord on prendra $\lambda 1 = 0$ et $\lambda_i = 0$ $i \neq 1$.

2° On cherche un arc (i,j) tel que $\lambda j - \lambda i < ti,j$

On remplace alors λj par :

$$\lambda' j = \lambda i + ti,j > \lambda j$$

On notera que $\lambda' j > 0$ si $j \neq 1$. On continue ainsi jusqu'à ce qu'aucun arc ne permette plus d'augmenter les λi.

3° Il existe un sommet p_1 tel que

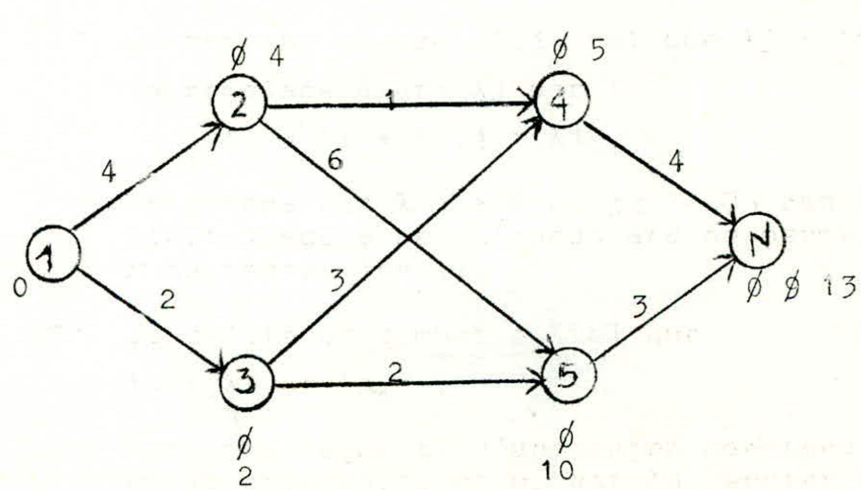
$\lambda n - \lambda p_1 = \lambda p_1 n$,

car n a augmenté d'une façon monotone au cours de la procédure, et p_1 est le dernier sommet utilisé pour augmenter λn. De même soit p_2 tel que :

$\lambda p_1 - \lambda p_2 = tp_1, p_2$ ... etc...

La séquence λn, λp_1, λp_2, ... étant strictement décroissante, on aura à un certain moment $pk + 1 = 1$. Alors λn sera la valeur du chemin critique, chemin le plus long entre 1 et N.

<u>Application</u> :



I.4 ALGORITHME DE BELLMAN KALABA

Il s'appuie sur le théorème d'optimalité. Il revient donc à chercher, à partir du sommet final du graphe, les valeurs des chemins de 1 arc, 2 arcs, ..., k arcs successivement de valeur maximale.

On calculera donc pour chaque sommet i un $t_i^{(k)}$ correspondant.

$t_i^{(k)}$: valeur maximale du chemin de k arcs partant du sommet i vers le sommet final.

$$t_i^{(1)} = t_{in} \qquad i = 1,2,\ldots,n-1$$

$$t_n^{(1)} = 0$$

On calcule ensuite :

$$t_i^{(2)} = \text{Max } (tij + t_j^{(1)}) \qquad i = 1,2,\ldots,n-1 \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$t_n^{(2)} = 0$$

Puis successivement :

$$t_i^{(k)} = \text{Max } (tij + t_j^{(k-1)}) \qquad i = 1,2, \ldots , n-1 \quad j = 1,2, \ldots , n$$

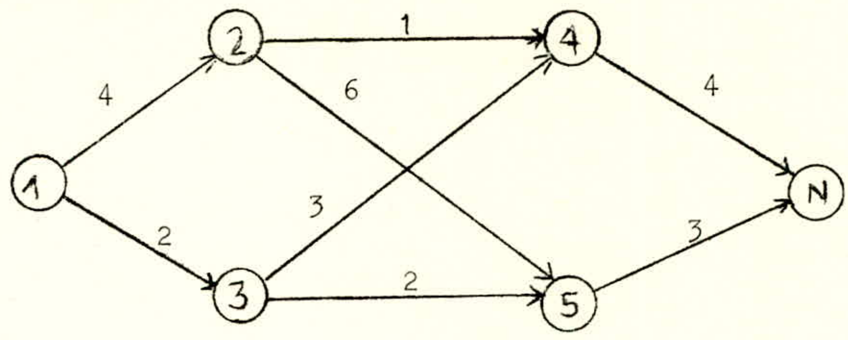
$$t_n^{(k)} = 0$$

Pour toute les valeurs de k = 1,2,3, ..., on s'arrête lorsque :

$$t_i^{(k)} = t_i^{(k-1)} \qquad i = 1,2, \ldots ,n$$

Alors $t_1^{(k)}$ représente la valeur du chemin optimal entre les sommets 1 et N.

Application :



a) $t_N^{(1)} = 0 \;;\; t_4^{(1)} = 4 \;;\; t_5^{(1)} = 3$

b) $t_3^{(2)} = \max\,(t_{34} + t_4^{(1)} \,,\, t_{35} + t_5^{(1)})$
$= 7$

$t_2^{(2)} = \max\,(t_{25} + t_5^{(1)} \;;\; t_{24} + t_4^{(1)})$
$= 9$

c) $t_1^{(3)} = \max\,(t_{12} + t_2^{(2)} \,,\, t_{13} + t_3^{(2)})$
$= 13$

d) $t_1^{(4)} = t_1^{(3)} = 13$

Les résultats du calcul sont consignés sur le tableau suivant : tableau des sous politiques optimales $(t_i^{(k)})$

k \ i	1	2	3	4	5	N
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*3*	*4*	*0*
2	$-\infty$	*9*	*7*	*3*	*4*	*0*
3	*13*	*9*	*7*	*3*	*4*	*0*
4	*13*	*9*	*7*	*3*	*4*	*0*

<u>NB</u> : pour tout arc (i,j) EU on pose tij = $-\infty$
d'autre part, pour tout i, on pose ti = 0

Cet algorithme permet de calculer la durée globale du projet, mais il ne donne aucune information concernant les étapes et les tâches (marges, dates au plus tôt, etc...)

Cependant, si les calculs s'articuleraient d'une manière inverse, les $t_i^{(1)}$ seraient les dates au plus tôt des évènements du projets.

II. METHODE DES POTENTIELS

Elle est surtout connue sous le nom de méthode de *ROY*. Celle-ci utilise le graphe des activités, donc ne nécessite aucune définition d'évènement. pour parvenir au résultat, nous procéderons comme suit :

II.1 CALCUL DE LA DATE DE DEBUT AU PLUS TOT

Le temps de démarrage de la jème activité est tj. Alors pour toutes les activités i antérieures à l'activité j (précédence logique) :

$$tj > ti + di$$

di est la durée de l'activité i.

Le temps de démarrage au plus tôt de l'activité j s'exprime de la façon suivante :

$$tj = \max_i (ti + di)$$

Ainsi, dans le calcul aller, on obtient les dates de départ au plus tôt de chacune des activités.

II.2 CALCUL DES DATES DE DEBUT AU PLUS TARD

Le calcul des dates de départ au plus tard des activités est analogue à celui des dates de départ correspondantes au plus tôt.

Seules quelques particularités sont à signaler ; pour effectuer un tel calcul on part de la date finale possible au plus tôt du projet. Cette date est ici déterminée par le maximum des dates d'achèvement possible au plus tôt de chacune des activités.

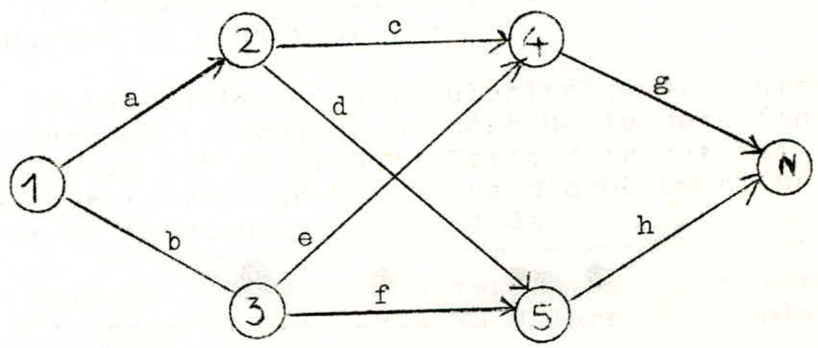
Soit Ti le temps de démarrage au plus tard de l'activité i. Soit Tj les dates de démarrage au plus tard des activités postérieures. Alors :

$$T_i \leqslant T_j - d_j$$

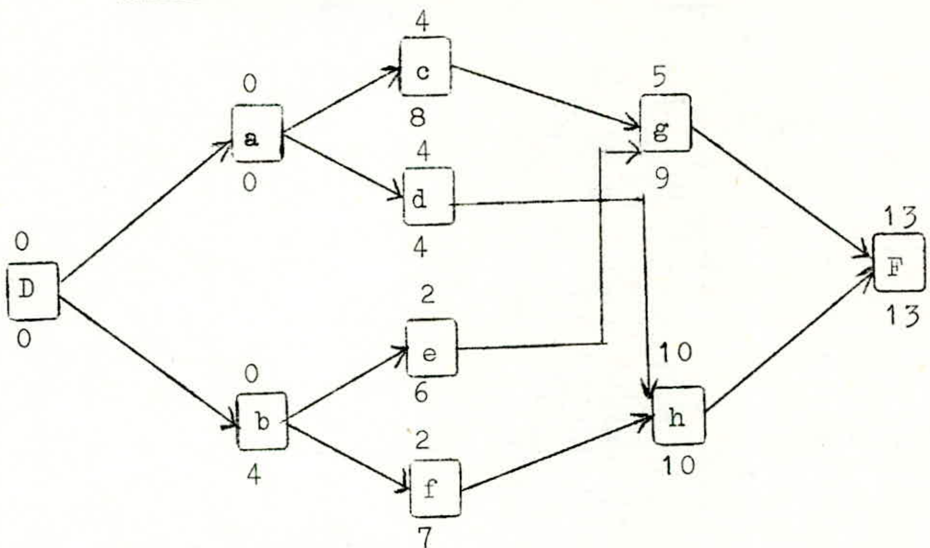
dj est la durée de l'activité j. Le temps de démarrage au plus tard de l'activité i est :

$$T_i = \min_j (T_j - d_j)$$

II.3 APPLICATION



Graphe des activités correspondant :



Calcul aller :

Noeuds	D	a	b	c	d	e	f	g	h	F
Durée	-	4	2	1	6	3	2	4	3	-
Noeuds antérieurs		D	D	a	a	b	b	c e	d f	g h
Dates au plus tôt de début	0	0	0	4	4	2	2	5	10	13

sens du calcul.

Calcul retour :

Noeuds	D	a	b	c	d	e	f	g	h	F
Durée	-	4	2	1	6	3	2	4	3	-
Noeuds postérieures	a b	c d	e f	g	h	g	h	F	F	
Date au plus tard de début	0	0	4	8	4	6	7	9	10	13

sens du calcul

III. ALGORITHMES DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE

Notre intention, cette fois-ci, est d'étudier le chemin critique et les problèmes associés du point de vue de la programmation linéaire.

Avant d'aborder le programme linéaire proprement dit, nous allons d'abord le voir sous sa forme la plus simple, à savoir le problème de transport.

III.1 APPROCHE PAR LE PROBLEME DE TRANSPORT

Soit un graphe de projet définit par un début S et une fin T. Notre premier objectif est de déterminer le chemin le plus long de S à T (àsavoir une succession d'arcs adjacents tels que leur longueur totale soit la plus grande possible à l'intérieur du réseau.)

On note les noeuds Pi (i = 0,1,2, ... ,N) où Po est le noeud de départ S et Pn le noeud final et nous notons les arcs de Pi à Pj par PiPj ; la longueur de PiPj sera notée par Cij et nous cherchons :

$$\text{Max } (Coi_1 + Ci_1i_2 + \dots Ci_t\, n)$$

III.11 - Formulation du problème

On peut partir de l'origine S du réseau et atteindre le noeud final du réseau en empruntant plusieurs chemins différents.

Il existe toujours un chemin (sinon plus d'un) qui soit le plus long d'entre tous.

Introduisons des variables Xij et décrivons un chemin à travers le réseau comme suit :

$$\begin{cases} Xij = 1 \quad ; & \text{si } PiPj \in \text{chemin} \\ Xij = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Alors, si un chemin doit commencer à S et se terminer à T, nous aurons :

$$\sum_i Xoi = 1 \qquad (a)$$

(où la sommation s'étend à tous les noeud Pi qui sont directement accessibles de S).

Nous aurons aussi :

$$\sum_j Xjn = 1$$

(où la sommation s'étend à tous les noeud Pj à partir desquels T est directement accessible). Pour des raisons de commodité présente, nous préférons écrire cette dernière équation :

$$- \sum_j xjn = - 1$$

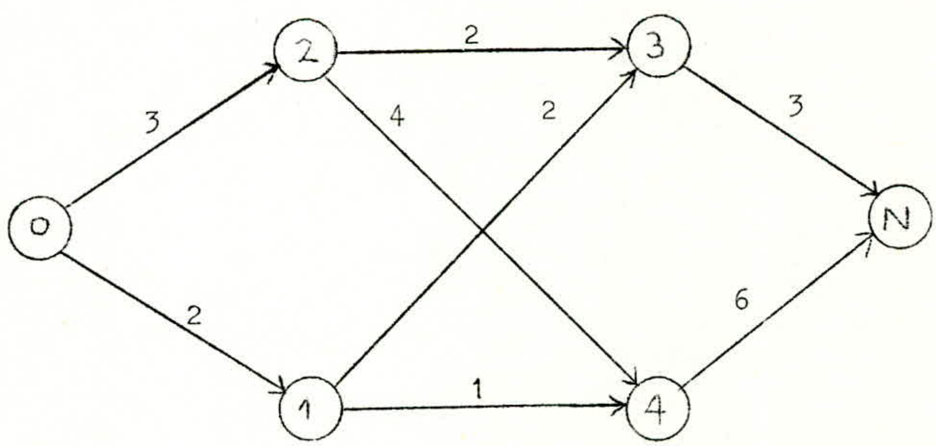
De plus, chaque noeud est atteind soit une fois, soit jamais et quitté si et seulement si il a été atteint réellement ; dans ce cas, nous avons pour chaque neoud (excepté S et T).

$$- \sum_i xij + \sum_k xjk = 0 \qquad (c)$$

(où les Pi sont les noeuds à partir desquels les Pj peuvent être directement atteints, et la Pk ceux qui peuvent être atteints directement de Pj).

<u>Exemple</u> :

Donnons-nous le graphe de projet précédemment employé :



Les formulations (a,b,c) appliquées à ce réseau nous donnent :

$$
(d) \quad \left\{
\begin{aligned}
x_{o1} + x_{o2} &= 1 \\
- x_{3n} - x_{4n} &= -1 \\
- x_{o1} + x_{13} + x_{14} &= 0 \\
- x_{o2} + x_{23} + x_{24} &= 0 \\
- x_{13} - x_{23} + x_{3n} &= 0 \\
- x_{14} - x_{24} + x_{4n} &= 0
\end{aligned}
\right.
$$

On remarque que chaque variable apparaît deux fois (une fois avec un coefficient + 1 et une autre fois - 1) ; il est clair que celà doit être ainsi pour chaque cas et pas seulement pour cet exemple particulier.

Notre objectif est de chercher les valeurs xij soumises aux contraintes données (d) et qui satisfassent :

$$\text{Max} \sum_i \sum_j C_{ij} \, x_{ij}$$

Remarque :

On se réfère à un fait connu de la théorie de la programmation linéaire à savoir qu'un problème avec ce genre de coefficients peut toujours s'écrire sous la forme d'un problème de transport (*cf. DANTZIG*).

On montrerait alors que la solution obtenue par l'analyse du chemin critique (CPA) est analogue à un problème de transport d'une quantité unitaire de O à N en passant par les destinations intermédiaires afin de maximiser le coût, il faudrait dans la suite du problème sous entendre à chaque fois le mot "temps" à la place de coût (dans ce genre de problèmes, il s'agira de maximiser le temps).

III.12 - Chemin critique et problèmes associés :

Introduisons dans les équations (d) de nouvelles variables telles que :

$$
(e)\quad \left\{
\begin{aligned}
x_{o1} + z_1 &= M \\
x_{o2} + z_2 &= M \\
x_{13} + x_{23} + z_3 &= M \\
x_{14} + x_{24} + z_4 &= M
\end{aligned}
\right.
$$

Où M est un trés grand nombre. On remarquera que nous avons utilisé les combinaisons de xij qui apparaissent avec un signe négatif dans les contraintes.

Nous pouvons alors remplacer chaque équation qui contient des coefficients aussi bien positifs que négatifs par deux équations avec uniquement des coefficients positifs ; ainsi :

$$x_{13} + x_{14} - x_{o1} = 0$$

Peut être remplacé par :

$$x_{13} + x_{14} + z_1 = M \quad \text{et} \quad x_{o1} + z_1 = M$$

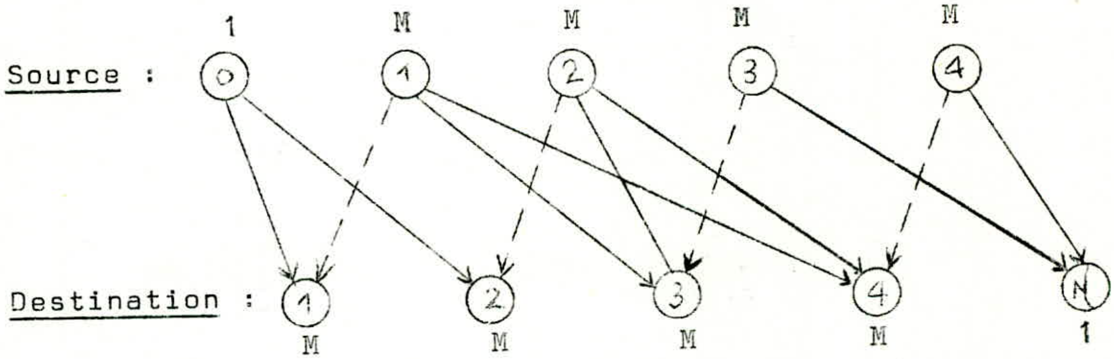
De cette façon, le problème initial peut être écrit comme un problème de transport :

Destination

Source	1	2	3	4	N
0	xo1	xo2			
1	z1		x13	x14	
2		z2	x23	x24	
3			z3		x3n
4				z4	x4n

où les xij ont des "coûts" (temps) Cij ; les zi ont des coûts nuls et toutes les cases vides ont un trés grand coût négatif (n'oublions pas que notre objectif ici est de maximiser).

Représentation graphique



Etape 1 : détermination du chemin critique

En utilisant l'une des méthodes les plus connues pour la résolution du problème de transport (méthode du coin nord-ouest, méthode de *HOUTTAKER*, etc...) on botient pour l'exemple choisi la solution suivante :

Destination

Source	1	2	3	4	N	
0	0	1				1
1	M					M
2		M-1	0	1		M
3			M			M
4				M-1	1	M
	M	M	M	M	1	

Ce tableau optimal nous permet de connaître les tâches critiques et par conséquent le chemin critique. Ainsi, les cases du tableau contenant la valeur 1 correspondent aux tâches critiques :

(Po,P2) ; (P2,P4) ; P4,Pn) -------- chemin critique PoP2P4Pn.

<u>Etape 2</u> : calcul des dates du réseau

Compte tenu de la solution précédente, la matrice de transport complète s'établit comme suit :

Source		Destination 1	2	3	4	N	date au plus tôt	date au plus tard
1	0	xo1=2	1 xo2=3				0	0
M	1	M z1=0		x13=2	x14=1		2	6
M	2		M-1 z2=0	x23=2	1 x24=4		3	3
M	3			M z3=0		x3n=3	5	10
M	4				M-1 z4=0	1 x3n=6	7	7

a) <u>calcul des dates au plus tôt</u> :

La solution peut être obtenue comme dans la méthode des potentiels de *ROY* :

On part de 0 comme date au plus tôt pour la première ligne (évènement 0).

Ensuite, de la première ligne et de xo1 = 2, on introduit 2 comme date au plus tôt pour la seconde ligne (évènement source 1).

Ainsi, pour toutes les lignes suivantes, on aurait :

$$E_j = \max_{i<j} (E_i + X_{ij})$$

où Ei est la date au plus tôt pour l'évènement-source j.

Pour la dernière ligne (évènement N-1), nous avons :

$$E_n = \max_{i<n} (E_i + X_{in})$$

qui est : $E_4 + X_{4n} = 13$

Ceci correspond à la durée du projet dans notre exemple :

b) <u>calcul des dates au plus tard</u> :

Les dates au plus tard des évènements peuvent être obtenues en refaisant les calculs dans le sens inverse, à partir de la durée du projet en utilisant :

$$L_i = \min_{j>i} (L_j - X_{ij})$$

Ainsi, pour L3 par exemple, on a :

$L_3 = 13 - X_{3n} = 10$

<u>Remarque</u> : utilisation des variables duales (Ui,Vj) par le calcul des dates.

Si les variables duales sont calculées, nous remarquons qu'elles apparaissent seulement pour les évènements critiques.

En effet, si à la solution Xij, on fait correspondre les variables (Ui,Vj) du problème dual, telles que :

$C_{ij} = -(U_i, V_j)$

(Le signe négatif est dû au fait que dans notre cas, il s'agit de maximiser et non de minimiser).

A partir de la matrice précédente, on peut construire une nouvelle matrice $\bar{C}ij$:

Ui \ Vj	-2	-3	-5	-7	-13	
.	2	3				0
2	0		3	5		1
3		0	2	4		2
5			0		8	3
7				0	6	4
	1	2	3	4	N	

On remarque bien que ces valeurs duales n'apparaissent que pour les évènements critiques et qu'elles co respondent aux dates au plus tôt calculées à partir de la formule :

$$E_j = \underset{i<j}{\mathrm{Max}}\ (E_i + X_{ij})$$

ligne	Ui	colonne	Vj
0	0	2	-3
2	3	4	-7
4	7	N	-13

D'autre part, pour tester si la solution obtenue précédemment est optimale, il suffit d'appliquer comme dans la méthode de *HOUTTAKER* pour l'amélioration de la solution de base la formule de test suivante :

$$C_{ij} - \bar{C}_{ij} \leqslant 0$$

Pour cela, construisons le tableau = $C_{ij} - \bar{C}_{ij}$

.	.			
.		-1	-4	
	.	.	.	
		.		-5
			.	.

ou est bien à l'optimum, et les valeurs négatives obtenues sur ce tableau correspondent aux marges libres des tâches dont les variables ne sont pas de base.

<u>Etape 3</u> : calcul des marges et des flottements

Les <u>flottements</u> des évènements ne sont autre que la différence entre les dates au plus tôt et au plus tard

Les <u>marges libres</u> correspondent aux valeurs négatives de la formule de test ($C_{ij} - \bar{C}_{ij}$) et figurent sur le tableau précédent (les variables de base ont une marge libre nulle).

La <u>marge totale</u> peut être obtenue de la manière suivante :

MT = marge libre + flottement de l'évènement de fin.

Ainsi, dans notre exemple, nous obtenons les résultats suivants :

évenement	date au plus tôt	date au plus tard	flot-tement	acti-vité	marge libre	flottement évènement de fin	MT
0	0	0	-	0-1	0	4	4
1	2	6	4	0-2	0	-	-
2	3	3	-	1-3	1	5	6
3	5	10	5	1-4	4	-	4
4	7	7	-	2-3	0	5	5
N	13	13	-	2-4	0	-	-
				3-N	5	-	5
				4-N	0	-	-

III.2 METHODE DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE

Soit ti, l'instant où l'évènement i commence. Posons to = 0. Nous avons ainsi ti $\geq$ 0.

Par conséquent : tij $\leq$ tj - ti où tij est la durée de l'activité (i,j) entre les évènements i et j.

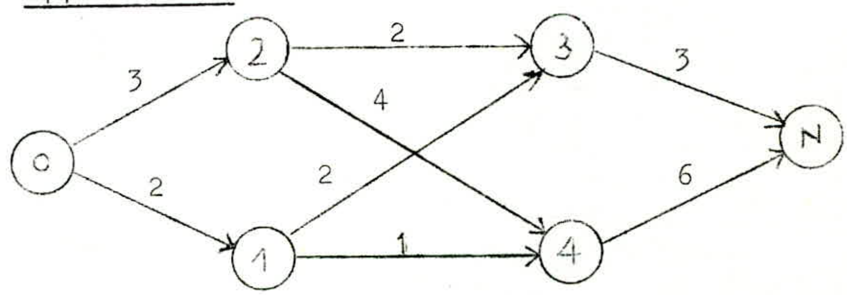
Le projet s'achève à l'instant tn, c'est la plus petite durée d'accomplissement du projet.

De ce fait, la longueur du chemin critique est obtenue en minimisant tn sujet aux inégalités. Les inconnues sont t1,t2, ...,tn par contre les tij sont connus.

Le programme linéaire sera formulé de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll} to = 0 & \\ & \\ tij \leqslant tj - ti & \forall (i,j) \in U \\ & \\ \min(tn) & \end{array}\right.$$

<u>Application</u>



$t1 \geqslant 2$	$t3-t1 \geqslant 2$	$t3-t2 \geqslant 2$	$tn-t3 \geqslant 3$
$t2 \geqslant 3$	$t4-t1 \geqslant 1$	$t4-t2 \geqslant 4$	$tn-t4 \geqslant 6$

Minimiser (tn)

	-t1	-t2	-t3	-t4	-tn	1	
xo					1		max
xo1	-1					-2	
xo2		-1				-3	
x13	1		-1			-2	
x14	1			-1		-1	
x23		1	-1			-2	
x24		1		-1		-4	
x3n			1		-1	-3	
x4n				1	-1	-6	

RHS

II.21 - calcul des dates au plus tôt :

A la suite de 8 pivotages, nous avons atteint l'optimum (xo = -13) car il s'agit de la recherche du max :

$$\max(-tn) = \min(tn)$$

	-xo1	-xo2	-x23	-x24	-x4n	1
xo		1		1	1	-13
t1						2
t2		-1				3
t3		-1	-1			5
t4		-1		-1		7
x13	1	-1	-1			1
x14	1	-1		-1		4
tn		-1		-1	-1	13
x3n			1	-1	-1	5

RHS_1

Le second membre nous donne la valeur des dates au plus tôt des évènements. La solution initiale s'exprime donc de la façon suivante :

$$
\begin{array}{lllllll}
t1 & = 2 & + xo1 & & & & \\
t2 & = 3 & & + xo2 & & & \\
t3 & = 5 & & + xo2 & + x23 & & \\
t4 & = 7 & & + xo2 & & + x24 & \\
x13 & = 1 & - xo1 & + xo2 & + x23 & & \\
x14 & = 4 & - xo1 & + xo2 & & + x24 & \\
x3n & = 5 & & & - x23 & + x24 & + x4n \\
tn & = 13 & & + xo2 & & + x24 & + x4n
\end{array}
$$

III.22 - Calcul des dates au plus tard

Une augmentation de xo2, x24, ou x4n augmenterait aussi bien tn et de plus ils doivent rester nuls (tn valeur optimale). Ce qui veut dire que les activités (0,2) (2,4) et (4,N) sont des activités critiques (marges nulles). D'autre part, xo1, x23 peuvent être augmenter sans altérer tn, par conséquent, la solution n'est pas unique du fait même que xo1 et x23 sont des variables de base qui doivent être nulles.

Cette situation s'explique aussi par la dégénerescence au niveau de la fonction économique. Essayons de trouver les autres solutions réalisables.

	-xo1	-xo2	-x3n	-x24	-x4n	1
xo		1		1	1	-13
t1	-1					2
t2		-1				3
t3		-1	1			10
t4		-1		-1		7
x13	1	-1	1	-1	-1	6
x14	1	-1		-1		4
tn		-1		-1	-1	13
x23			1	-1	-1	5

	-x14	-xo2	-x3n	-x24	-x4n	1
xo		1		1	1	-13
t1	1	-1		-1		6
t2		-1				3
t3		-1	1			10
t4		-1		-1		7
x13	-1	-1	1	-1	-1	2
xo1	1	-1		-1		4
tn		-1		-1	-1	13
x23			1	-1	-1	5

RHS_3

Parmi toutes les solutions réalisables, il en est une qui donne les dates au plus tard, telles que :

$$\{Tj\} = \max_{k} \{ tj \} E \quad RHS_k$$

k solutions réalisables

j 1,2, ... n

Par analogie, les dates au plus tôt peuvent s'obtenir, compte tenu de toutes les solutions réalisables, de la manière suivante :

$$\{\tau j\} = \min_{k} \{ tj \} E \quad RHS_k$$

III.23 - Calcul des marges

Pour chaque activité (i,j) nous avons

- une marge totale MT :

$$MT = \max tj - \min ti - tij$$

- une marge libre ML :

$$ML = \min tj - \min ti - tij$$

IV. CRITIQUE DE CES METHODES

IV.1 SUR LE PLAN DU CALCUL

Les méthodes de programmation linéaire s'avèrent trop longues et fastudieuses, voire pratiquement impossibles dans le cas des projets complexes. D'autre part, ces méthodes nécessitent énormément de place en mémoire.

IV.2 SUR LE PLAN DES INFORMATIONS

Ce point est trés important uand on sait que trés peu de méthodes donnent les résultats nécessaires pour une résolution complète du problème du chemin critique. Là aussi, la programmation linéaire s'avère insuffisante sur le plan des informations. Par exemple, il est intéressant de remarquer que le programme linéaire simple bien qu'ayant la forme du problème de transport utilise des méthodes annexes pour trouver les dates de réalisation.

Pareillement, l'algorithme de *FORD* st incomplet et l'on est obligé de recourir à des méthodes additionnelles pour résoudre le problème.

De toutes les méthodes utilisées, on a orienté notre choix sur l'algorithme naturel qui s'avère trés souple et complet dans l'analyse des données (un algorithme a été dressé à cette intention en annexe). Toutefois, il ne faudrait pas oublier que la méthode des potentiels reste la plus efficace dans le cas des graphes des activités.

SECONDE PARTIE

ALLOCATION DE RESSOURCES

CHAPITRE I

PRESENTATION DU PROBLEME

I. INTRODUCTION

I.1 PRISE EN COMPTE DE LA LIMITATION DES MOYENS

La réalisation de tout projet fait appel à des moyens (ou ressources) dont la disponibilité influence la fixation des objectifs, le choix du plan, l'estimation de la durée des tâches, l'ordonnancement et le contrôle de l'avancement. Une grande partie des efforts consacrés à la gestion d'un projet s'applique donc à l'analyse des moyens nécessaires afin d'assurer la compatibilité des besoins et des disponibilités et de contrôler l'utilisation de ces moyens.

L'analyse des projets par les diverses méthodes du chemin critique - que nous venons de voir - ne tient pas compte explicitement des moyens dans ces formes initiales. La structure logique des projets que nous obtenons à partir de cette analyse fait en principe abstraction des moyens nécessaires à l'exécution des tâches, ou du moins, si elle en préjuge forcément, ne serait-ce que par la méthode choisie, elle suppose leur disponibilité en quantité suffisante.

Cependant, sauf en de rares cas, les moyens ne sont pas illimités ; aussi faut-il en tenir compte. Il existe le plus souvent un plafond que l'on ne peut dépasser et la quantité ainsi fixée doit être fréquemment partagée entre différentes activités ou même entre différents projets.

L'ordonnancement des projets dépend donc de la quantité de ressources disponibles et de la politique générale définie pour leur utilisation.

I.2 MOYENS ET TACHES

I.21 - Les types de moyens :

Nous entendons par moyens (ou ressources) tout ce qui est nécessaire à l'exécution d'une tâche, de quelque nature que ce soit : l'argent, la main-d'oeuvre de diverses spécialités, l'équipement, les matières premières et d'autres besoins exprimables en quantités physiques tels que l'exclusivité d'une portion d'espace ou d'un produit intermédiaire d'un projet, des unités de sécurité, etc...

Parmi les nombreux moyens utilisés, la main-d-oeuvre et l'argent font l'objet d'une attention particulière :

La main-d'oeuvre est souvent la plus coûteuse des moyens car il faut du temps pour recruter et former du personnel, et par conséquent on préfère le constituer et le maintenir à un niveau constant. On cherchera à planifier les opérations pour les employer avec continuité : un niveau de main-d'oeuvre trop faible retarde la réalisation du projet, un niveau excessif engendre le sous-emploi et grève le budget.

L'argent constitue une ressource d'une grande souplesse et d'une importance considérable dans des procédures de contrôle puisqu'elle constitue l'unité dans laquelle s'expriment finalement toutes les données, et en particulier, quand on étudie l'élément en général majeur de toute politique opérationnelle, la réalisation d'un surplus.

NB / *dans certains domaines comme le bâtiment et les travaux publics, on simplifie l'énumération des moyens en faisant appel à la notion d'équipe.*

Les équipes sont composées de travailleurs de diverses spécialités.

I.22 - Relation entre moyen et tâche définitions :

a) on mesure la relation entre moyen et tâche par la notion d'intensité. L'intensité d'un moyen est la quantité de ce moyen mise en oeuvre sur une tâche pendant une période donnée (l'unité de temps).

b) la charge désigne la quantité des besoins d'un moyen par unité de temps pour l'ensemble des tâches en cours.

La fonction de charge nécessite comme point de départ que l'on expose les besoins en travail. On ne peut la donner qu'en termes d'heures-travail (ou machine) ; on ne devrait pas la donner sous d'autres formes qui ne seraient pas convertibles en heures-ressources.

c) le produit de l'intensité par la durée d'utilisation du moyen représente la quantité de travail. Si on laisse de côté la notion de "rendement" (que l'on peut inclure dans la valeur de l'intensité), il est clair que la quantité de travail étant constante, si l'on fait varier l'intensité, on modifie aussi la durée de la tâche.

I.23 - Les moyens rares ou moyens-clé

Une approche traditionnelle consiste à réduire le modèle à des proportions plus maniables en considérant seulement les "moyens-clé", tels que l'équipement spécial, les spécialistes, l'encadrement, certaines équipes, etc...

La direction d'un projet a souvent, par expérience, une idée exacte des moyens qui lui font défaut.

Les moyens rares, nons substituables, ou les plus coûteux seront seuls pris en compte.

I.3 CATEGORISATION DES PROJETS

Les divers projets utilisés dans la pratique combine des valeurs représentatives de paramètres pour définir diverses caractéristiques :

I.31 - Caractéristiques de logique

Un paramètre principal aide à décrire le projet : c'est le paramètre de complexité.

La complexité est définie comme le rapport du nombre d'activités dans le réseau et du nombre de noeuds (évènements) :

$$C = \frac{\text{nb. d'activités}}{\text{nb. d'évènements}}$$

Augmenter la complexité équivaudrait à compliquer l'allocation de ressource par l'augmentation des inter-relations du réseau.

I.32 - Caractéristiques de temps

Les deux paramètres de temps qui sont utilisés sont :

- du durée du chemin critique (bien connu)
- la densité, définie comme la somme des durées de toutes les activités dans un projet sur la somme de ces durées augmentée de la somme des marges libres :

$$d = \frac{\Sigma \text{ durées des activités}}{\Sigma \text{ durées} + \Sigma \text{ marges libres}}$$

I.33 - Caractéristiques de ressources

Le paramètre d'utilisation des ressources (ou facteur des ressources) est défini comme le rapport du nombre total de ressources utilisées par le nombre total de ressources disponibles sur le projet.

$$t = \frac{\text{total des ressources utilisées}}{\text{total des ressources prévues (ou disponibles)}}$$

La maximisation d'un tel facteur peut être définie comme une fonction économique.

I.4 GOULOT D'ETRANGLEMENT

Cette situation a lieu quand à un instant donné t, la demande pour une ou plusieurs ressources excède l'offre. C'est le problème principal des allocations de ressources.

Un accroissement de la complexité ou le facteur de ressources sur un projet est vraisemblablement de resserer le goulot ; c'est pour cette raison que la complexité et le facteur de ressources sont des paramètres importants.

II. ANALYSE DES BESOINS EN MOYENS

Une grande partie des efforts fournis par les dirigants du projet est orientée vers l'analuse des besoins, la conciliation de ceux-ci avec les contraintes extérieures et par la suite le contrôle de l'utilisation des moyens.

Nous avons déjà vu, dans la première partie que s'il n'existait pas de limitations de moyens, les différentes méthodes par l'analyse du chemin critique, fournissaient directement la solution. A l'inverse, s'il n'y a pas de limitations de déli, on exécutera les tâches lorsque les moyens nécessaires seront devenus disponibles.

On établit les besoins par période et par type de ressources. Les objectifs du projet tendent généralement à limiter les délais ; la disponibilité des moyens fixe les charges maximales qu'on peut atteindre.

Le problème est de concilier courbes de charge et autres contraintes.

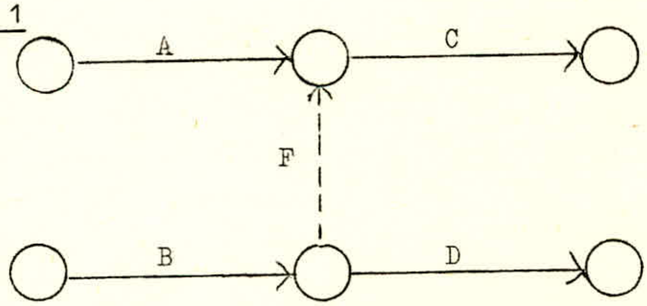
II.1 PRISE EN COMPTE DES CONTRAINTES DE MOYENS

La prise en compte des contraintes de moyens dans la planification se traduit de manières différentes, selon qu'il s'agit :

a) de moyens "unitaires", c'est-à-dire en si petites quantités qu'il est à priori exclu de pouvoir réaliser deux tâches en même temps ; c'est ce qu'on désigne par *"contraintes disjonctives"*.

Une application au cas des moyens "unitaires" consiste par une première procédure, à introduire ce type de contraintes dans le graphe du projet (*CPA*), par la mise en place de liaisons logiques qui traduisent la succession - la disjonction - des tâches faisant appel à un même moyen.

Exemple 1

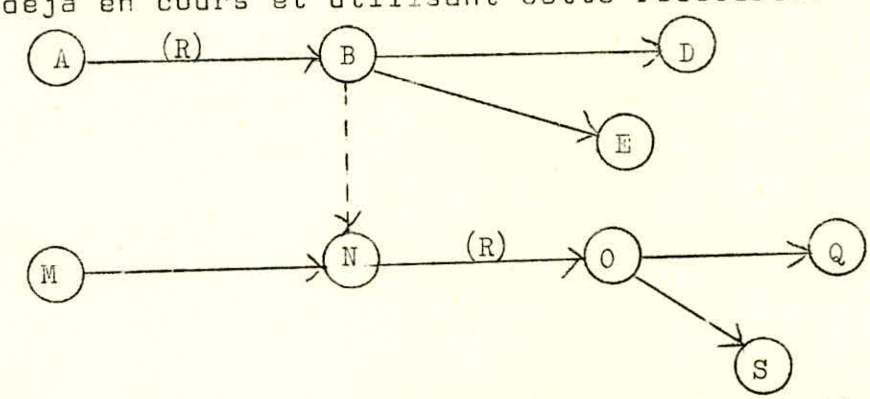


Sur cette figure, si nous voulons exprimer, par exemple, que les tâches B et C utilisent un même moyen unitaire : grue, tour, ouvrier spécialisé ... La seule question à résoudre porte sur l'ordre dans lequel il convient de lancer les diverses tâches à placer en disjonction.

La solution découle de l'examen des dates de début et de fin, ainsi que des marges des différentes tâches. En conséquence, la prise en compte de ces contraintes dans le réseau ne se fera, à bon escient, qu'après un premier calcul du réseau, c'est-à-dire au cours de la phase d'analyse des résultats précédemment décrite.

<u>Exemple 2</u> :

Nous pouvons aisément introduire dans le graphe déjà élaboré, des contraintes complémentaires n'autorisant le démarrage d'une tâche, mettant par exemple en oeuvre une catégorie déterminée de ressources qu'après achèvement d'une tâche déjà en cours et utilisant cette ressource.



Si AB et NO nécessitent une ressource R unique, il suffit d'adjoindre une contrainte BN fictive au programme. Bien entendu, on ne sait pas avant d'avoir effectué les calculs si la liaison à prévoir est $\overrightarrow{BN}$ ou $\overrightarrow{OA}$. Le plus simple est de négliger d'abord cette contrainte et d'effectuer les calculs des dates et marges. La contrainte est alors ajoutée dans le sens favorable et les calculs repris selon cette nouvelle structure.

b) de <u>moyens "pluriaux"</u>, c'est-à-dire en quantité suffisante pour permettre l'exécution de plusieurs tâches en parallèle : les problèmes seront alors de vérifier la comptabilité des charges avec les disponibilités, ou d'égaliser les charges dans le temps : ces contraintes sont dites "*cumulatives*".

II.2 LES COURBES DE CHARGES

II.21 - Calcul de la charge :

C'est une opération qui est difficile à mener avec certitude car il faut faire face à deux problèmes :

- le problème de l'optimisation : il est fréquemment difficile de décider ce qui sera optimisé. Le point principal est, qu'au vu du problème, il faut prendre une décision. Il est souvent commode de classer les différents facteurs et ensuite de les optimiser dans cet ordre.

- le problème des alternatives : le problème est ici celui de l'interaction d'un travail avec un autre. Par exemple, si dans un service, on doit réaliser trois opérations A,B,C indépendantes, on verra qu'il y a six opérations ; il y aura 24 séquences possibles et d'une façon générale, s'il y en a N, il y aura (N!) ordres possibles. De ces différents ordres, un (ou plusieurs) réalise l'optimum mais pour le connaître, il faut faire le calcul de tous les ordres possibles. D'où la difficulté quand N est grand (ex : N = 10 → N! = 3 638 800)

NB / *Il se peut que l'examen de toutes les solutions soit impraticalbe, et souvent on se contente de prendre une solution acceptable, c'est-à-dire une que l'on puisse réaliser et qui n'enfreigne pas trop les lois de l'optimisation (méthodes hewistiques).*

Le problème général de la charge est extrêmement complexe ; on peut trouver des solutions dans quelques cas spéciaux et elles dépendent souvent de mathématiques trés élaborées, comme la programmation linéaire ou dynamique.

Pour des opérations importantes, il n'y a pas de solution toute prête et il est nécessaire d'utiliser des méthodes purement empiriques.

II.211 - Définition de la charge

"La charge désigne la quantité des besoins d'un moyen par unité de temps pour l'ensemble des tâches en cours".

Dans de nombreux problèmes, on est amené à associer à chaque tâche i, une fonction $\gamma_{i,k}$ traduisant en fonction du temps θ, les besoins en moyens (main-d'oeuvre par exemple) à chaque instant sur la tâche i et ce, pour un corps de métier spécifié k.

Cette fonction dépend, dans tous les cas, non seulement du temps θ mais encore de l'époque de début ti et de la durée di : ce que nous symboliserons en écrivant :

$$\gamma_{i,k} = \gamma_{i,k}\ (\theta/ti,di)$$

Si l'on effectue à chaque instant pour le corps de métier k considéré, le cumul des besoins de main-d'oeuvre sur l'ensemble des tâches, on obtient la courbe de charge :

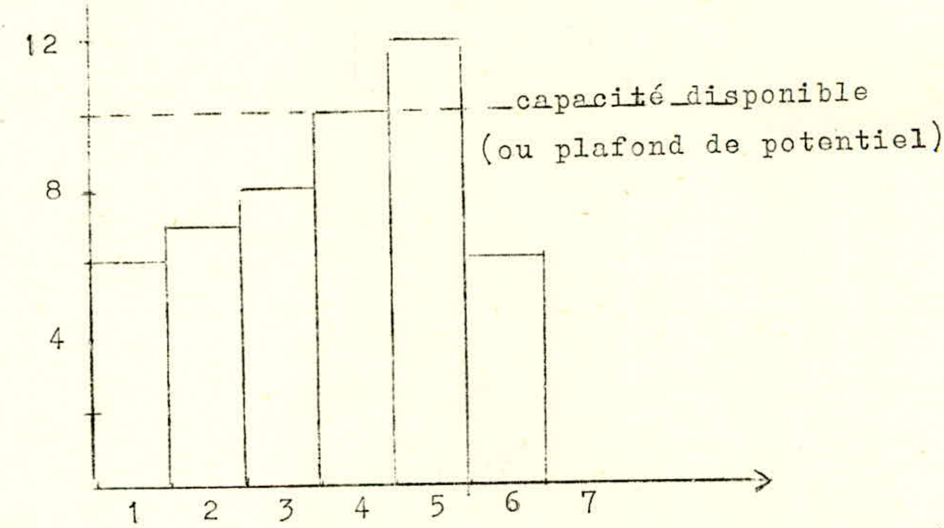
$$\sum_{i=1}^{i=n} \gamma_{i,k}\ (\theta/ti,di) = \Gamma k\ (t1,\ldots\ tn\ ;\ d1,d2,\ldots\ dn)$$

qui traduit l'évolution au cours du temps du besoin global de main-d'oeuvre dans l'ordonnancement symbolisé par t1,... tn, d1,d2,... dn.

II.212 - Représentation graphique de la charge

Il est commode de représenter la charge par un histogramme, c'est-à-dire, un graphe de barres verticales, la longueur de la barre étant proportionnelle à la charge.

Exemple



Cet exemple montre que le service est sous-chargé aux semaines 1, 2, 3 et 6 pleinement chargé à la semaine 4 et sur-chargé à la semaine 5.

Cette représentation graphique a l'avantage d'être trés claire et en pratique il est plus aisé de travailler sur un graphique que sur des chiffres.

Nous verrons par la suite qu'il est possible de transformer un "pic" en une "vallée" (sur-charge en sous-charge) en vue de lisser la charge.

II.22 - Courbes de charge associées à un calendrier :

L'estimation des moyens nécessaires à l'exécution des tâches en cours pendant une période donnée suppose résolu le calcul d'un calendrier des tâches compatibles avec les contraintes, ou se contente souvent d'une solution de départ qui sera analysée et améliorée jusqu'à ce que l'on obtienne un résultat satisfaisant. Cette solution n'est pas compatible avec l'ensemble des contraintes (le problème serait résolu) mais seulement avec les contraintes temporelles. Pour l'obtenir, la durée des tâches et l'intensité correspondante sont généralement fixées aux conditions normales.

On calcule alors les deux calendriers au plus tôt et au plus tard et on "cumule" pour chaque période les besoins des tâches simultanées en divers moyens. Quand les tâches ont une marge, leur position dans le temps n'est limitée qu'à cette marge prés, et l'on pourra par exemple, calculer deux courbes de charge totale, au plus tôt et au plus tard.

II.23 - Accumulation de ressources ou Aggrégation :

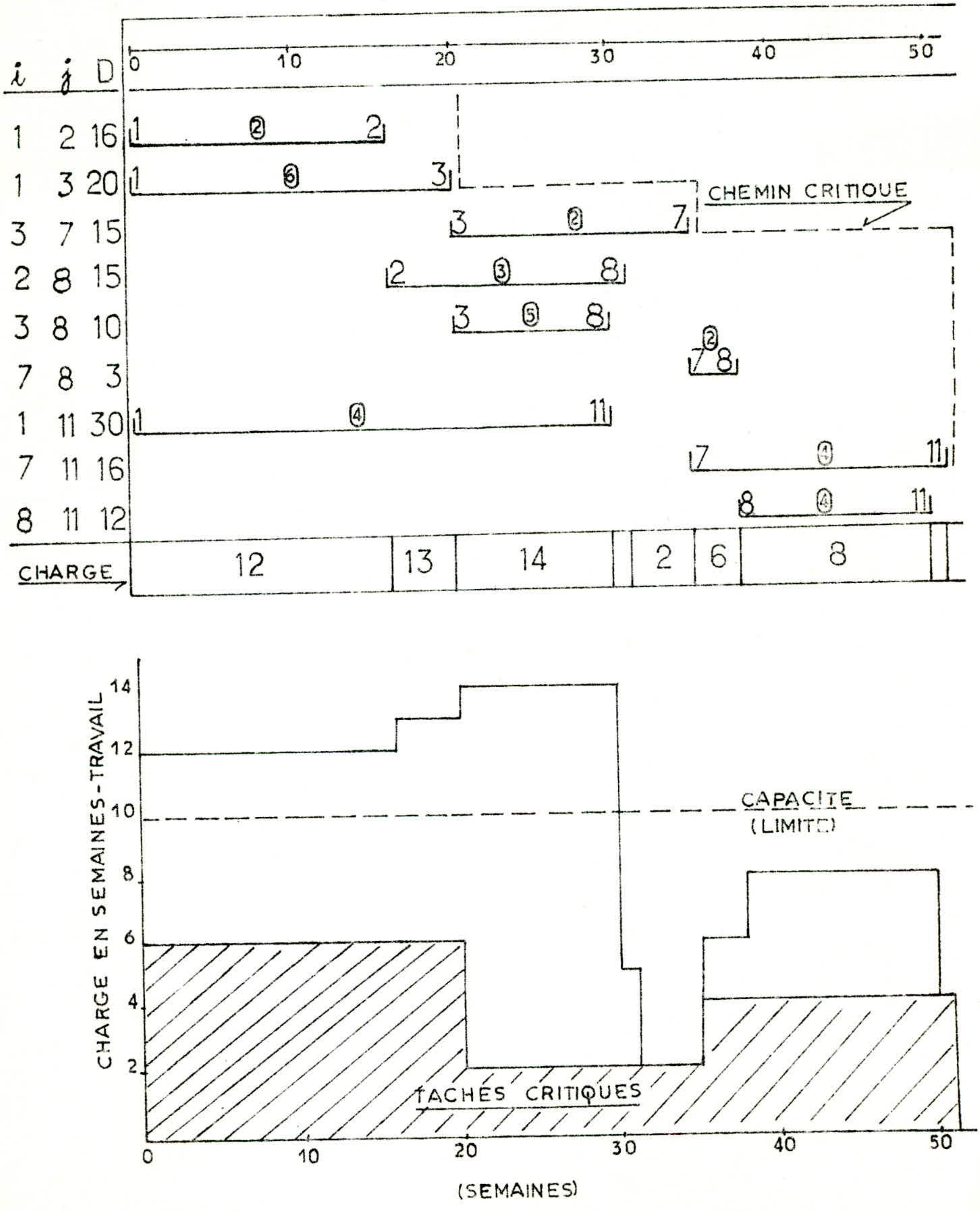
La courbe de charge - appelée aussi profil des ressources - est obtenue par l'accumulation des ressources.

La méthode consiste à parcourir le réseau et à faire pour chaque période la somme des ressources nécessaires à l'exécution des tâches ; ce qui nous donne, nous venons de le voir, l'allure générale d'un histogramme.

Ainsi, si deux tâches (exigeant chacune le même nombre d'ouvriers) prennent place au cours de la même période, on additionnera le nombre d'ouvriers nécessaires à l'une et à l'autre.

L'exemple suivant constitue un exemple simple de cette méthode (on supposera que la phase de l'analyse du chemin critique a déjà été faite de façon à utiliser directement les résultats correspondants au problème d'accumulation de ressources) → calendrier au plus tôt et au plus tard.

FIG.II23.



i j D
1 2 16
1 3 20
3 7 15
2 8 15
3 8 10
7 8 3
1 11 30
7 11 16
8 11 12
CHEMIN CRITIQUE
CHARGE
12
13
14
2
6
8
CHARGE EN SEMAINES-TRAVAIL
CAPACITE
(LIMITE)
TACHES CRITIQUES
(SEMAINES)

La façon la plus simple de tracer la courbe (c'est-à-dire l'histogramme relatif au réseau précédent) est probablement de dresser la diagramme de *GANTT* approprié et, comme nous venons de la voir, de faire la somme des ressources diverses pour chaque période.

On suppose, ici, que la seule ressource soit le travail humain et que chaque tâche nécessitera le travail suivant :

Tâche	durée	hommes
1-2	16	2
1-3	20	6
1-11	30	4
2-8	15	3
3-7	15	2
3-8	10	5
7-8	3	2
7-11	16	4
8-11	12	4

On trace à nouveau le diagramme de *GANTT* et l'on insère les besoins en hommes au-dessus de chaque barre. En faisant la somme pour chaque semaine, on trouve le potentiel humain (ou courbe de charge) nécessaire, tracé par commodité en-dessous du diagramme de *GANTT (cf. fig II.23)*

Si nous supposons dans cet exemple que la capacité de travail est de 10 semaines-travail et que les hommes sont interchangeables, cette disponibilité est représentée sur l'histogramme en pointillés et sert de frontière aux sur-charge et sous-charge.

<u>NB</u>/ *Dans cet exemple, nous avons cumulé les ressources pour chaque période selon la date au plus tôt (ce qui aurait pu se faire aussi par rapport à la date au plus tard.*

L'examen de tels histogrammes identifie les "pointes" et les "creux" de charges qui, nous le verrons (*cf. § IV*) pourront être résorbés par le jeu sur les marges ou sur les intensités.

III. LES FACTEURS DE L'ORDONNANCEMENT

L'importance relative de ces facteurs diffère d'un projet à l'autre ; elle met en cause les fondements de l'activité industrielle et commerciale, et les divers groupes humains concernés.

Mais si on veut aboutir au "meilleur" ordonnancement possible, il faut décider de ce qui est "meilleur".

III.1 LES PRINCIPAUX FACTEURS

Si on envisage le problème globalement, on trouve quatre classes principales de facteurs :

- les objectifs du projet : spécifications techniques, délai total, dates fixées de livraison, etc...

- la politique d'exécution des travaux : par exemple, la réalisation au plus tôt, une utilisation uniforme de la main-d'oeuvre, etc...

- la disponibilité des moyens : c'est-à-dire la quantité de main-d'oeuvres par spécialité, d'équipements, de fonds, ...disponibles à un moment donné.

- des considérations économiques : (coûts prévus, plans d'engagement des dépenses, profit attendu, etc...)

NB / ce dernier facteur ne fait pas ici l'objet de notre étude

III.2 NECESSITE DE CRITERES DE PRIORITES

Dés que la charge dépasse la capacité, il faut modifier l'ordonnancement de certaines tâches. Le choix parmi les tâches se fait généralement au moyen de critères de priorité. Nous pouvons définir six critères utilisés par la majorité des programmes :

- marge
- date au plus tôt
- date au plus tard
- durée de la tâche
- priorité externe
- ressources.

Naturellement, certains programmes utilisent plusieurs critères simultanément.

III.3 NECESSITE D'OPTIONS DE L'ORDONNANCEMENT

Il est évident que la durée des tâches étant fonction de l'intensité des moyens alloués, l'action sur l'intensité entraînerait automatiquement une variation de la durée des tâches.

Ainsi, si l'intensité est fixe, la durée est alors fixe. Dans le cas contraire, l'action sur l'intensité des moyens allonge ou réduit la durée des tâches afin de diminuer ou d'accroître la charge pendant certaines périodes. Ceci permet de respecter les niveaux de disponibilité ou d'égaliser les courbes de charge.

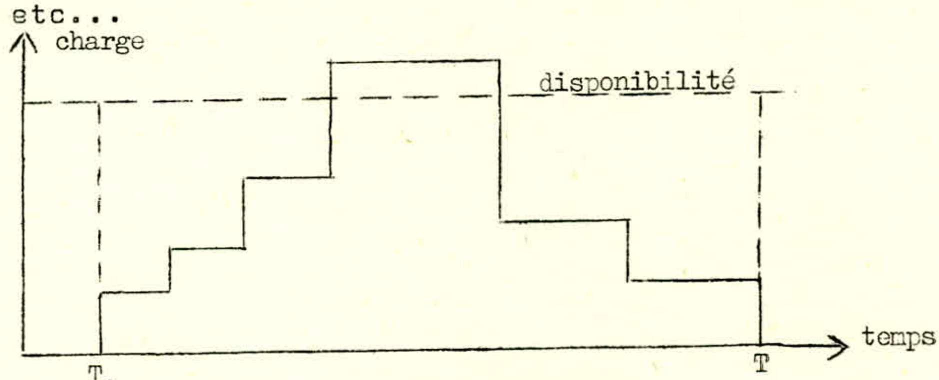
Si une solution n'a pu être trouvée, car il s'avère souvent impossible de satisfaire toutes les contraintes, certaines conditions de départ doivent être modifiées.

Le calcul reprendra après allongement de la durée totale du projet du minimum de temps nécessaire, ou après accroissement de la disponibilité des moyens déficients du minimum d'unités indispensables, d'où la nécessité des options suivantes :

III.31 - Cas où les délais sont fixés :

Si l'accent est mis sur le maintien des délais, on cherchera dans la durée fixée ou souhaitée, à définir un ordonnancement qui satisfasse au mieux les contraintes de disponibilité des moyens existants. Mais il subsistera parfois des pointes de charge irréductibles dans les conditions données.

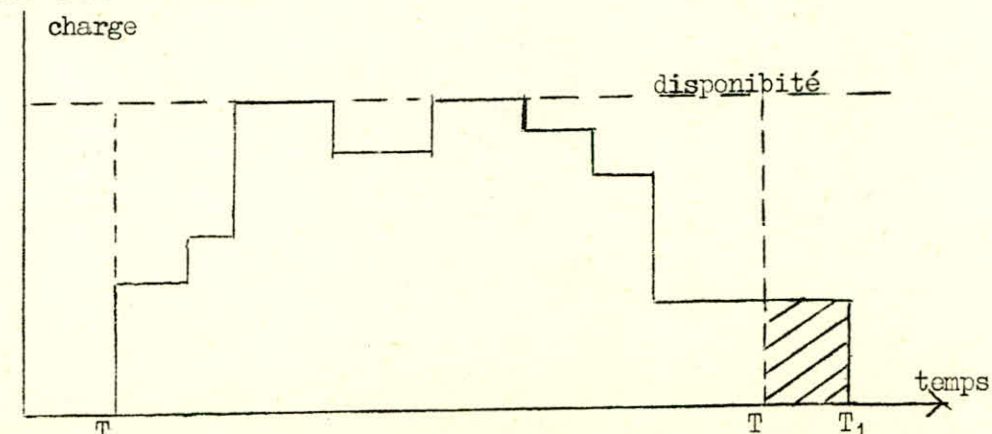
Pour les réduire, il faudra accroître les effectifs par embauche supplémentaire, location de matériel, etc...



(courbe de charge, délai fixé).

III.32 - Cas où les disponibilités sont fixées :

Si les niveaux de disponibilité ne doivent en aucun cas être dépassés, il faudra parfois consentir à un allongement des délais.



(courbe de charge, disponibilité fixée).

III.33 - Emploi constant des moyens :

La recherche d'une constance dans le niveau de certains moyens ou de la continuité de l'intervention d'un moyen, peut constituer l'objectif de l'ordonnancement.

En principe, dans ce cas, le niveau lui-même n'est pas défini. C'est précisément au calcul de l'établir.

Si un délai global doit être respecté, le problème devient plus compliqué ; de même, s'il existe aussi une limite de disponibilité.

IV. LISSAGE ET NIVELLEMENT *(smoothing and levelling)*

IV.1 CAS OU L'INTENSITE EST FIXE

Pour résoudre ces problèmes de moyens, il faudra en général, se conformer à l'une ou à l'autre des options énoncées précédemment, du fait que les programmes-machine existant sont conçus pour traiter un problème à la fois. On dispose ainsi de deux familles de programmes, les uns produisant un "nivellement", les autres un "lissage" des courbes de charges.

IV.11 - Programmes de nivellement :

Il s'agit d'une recherche de comatibilité entre charges et disponibilités, qui s'effectue sur un nombre important de tâches et de moyens, en utilisant les marges ou en interrompant les tâches, mais sans modifier la durée ni l'intensité de chacune. Si l'ordonnancement ne peut être ainsi obtenu, le programme joue sur la longueur du chemin critique, en ajoutant une unité de temps à la durée totale du projet et repète le cycle de calcul.

Le seul cas impossible à traiter par le calcul est celui où l'intensité d'une tâche dépasse la disponibilité d'un moyen (l'ordinateur signale ce cas comme une erreur dans les données d'entrée, et n'entame pas le calcul).

IV.12 - Programmes de lissage :

La technique du nivellement est intéressante quand on dispose d'un potentiel limité de moyens et que l'objectif consiste à les ordonnancer de telle sorte que la durée totale du projet soit aussi courte que possible. Mais on fait alors implicitement l'hypothèse que les moyens "dormants" représentent un coût négligeable.

Un autre problème apparaît quand il est possible de se procurer les moyens nécessaires pour mener à bien le projet dans un délai donné, mais que l'on souhaite utiliser ces moyens à un niveau relativement constant. Ce cas consiste à "lisser" les courbes de charges, c'est-à-dire à produire un ordonnancement tel que la charge demeure aussi voisine que possible d'un niveau à déterminer.

<u>NB</u>/ *la formulation mathématique des méthodes de lissage et de nivellement est souvent complexe. Aussi, avant de revoir celà plus en détail dans le chapitre II, on se limitera à un exmple d'opération manuelle en utilisant le diagramme de GANTT.*

IV.13 - Exemple de lissage et de nivellement Utilisation du diagramme de GANTT :

Pour continuer toujours sur la même voie, nous prendrons l'exemple déjà utilisé précédemment (*cf § II.23 de la deuxième partie)* dans lequel nous avons cumulé les moyens pour chaque période selon la date au plus tôt.

Nous supposerons, par la même occasion, résolu un calendrier des tâches compatibles avec les contraintes sur le mode de calcul de l'analyse quantitative du projet déjà traité dans la première partie. Ce calendrier se présente dans le cas de notre exemple de la manière suivante :

		instant initial		instant final		marge		
Tâche	durée	E	L	E	L	I	L	I
1-2	16	0	8	16	24	8	0	0
1-3	20	0	0	20	20	0	0	0
1-11	30	0	21	30	51	21	21	21
2-8	15	16	24	31	39	8	7	0
3-7	15	20	20	35	35	0	0	0
3-8	10	20	29	30	39	9	8	8
7-8	3	35	36	38	39	1	0	0
7-11	16	35	35	51	51	0	0	0
8-11	12	38	39	50	51	1	1	0

La situation révélée par l'histogramme de la figure II.23 est absolument inacceptable car pendant 30 semaines, la charge dépasse la capacité et ceci aura pour but d'allonger la durée des tâches concernées et d'augmenter le temps total du projet. De même, pendant 21 semaines, la capacité excède la charge ; ce qui signifie que des hommes sont sans travail. Il est donc hautement désirable d'essayer de déplacer la surcharge initiale vers la sous-charge finale. Si on arrive à le faire complètement, on dira que la charge a été lissée.

Certaines tâches sont fixées dans le temps (c'est-à-dire sont critiques) alors que d'autres peuvent bouger (c'est-à-dire possèdent une marge). La portion critique de la charge figure en traits hachurés et le lissage doit s'effectuer entre les parties claires de la charge.

Les changements substantiels ne peuvent s'effectuer que là où la marge est importante.

PHASE 1 :

La tâche (7-8) n'a qu'une semaine de marge libre ; c'est pourquoi, son effet sur la charge totale est faible. La tâche (1-11) possède la marge la plus grande et doit être examinée en premier.

On remarque qua sa durée est si grande que si on la décale au maximum, on réduira la charge au début, mais la pointe entre les semaines 20 et 30 ne sera vraiment pas réduite.

La tâche suvvante par ordre de marges décroissantes est (3-8). Si on la déplace au maximum, la tâche (8-11) avancera d'une semaine et (3-8) se placera entre les semaines 29 et 39 → ce qui donnera le diagramme de GANTT et l'histogramme de la fig IV.13a.

PHASE 2 :

La surcharge a été complètement réduite entre les semaines 20 et 29 et une légère surcharge a été introduite entre les semaines 35-38.

Toute la marge des tâches (3-8) et (8-11) a été enlevée. La seule tâche qui ait encore une marge importante est (2-8) : la déplacer en avant de 4 semaines réduira la pointe des semaines 31-35. Le diagramme et l'histogramme deviennent : voir fig. IV.13b

FIG. IV-13a.

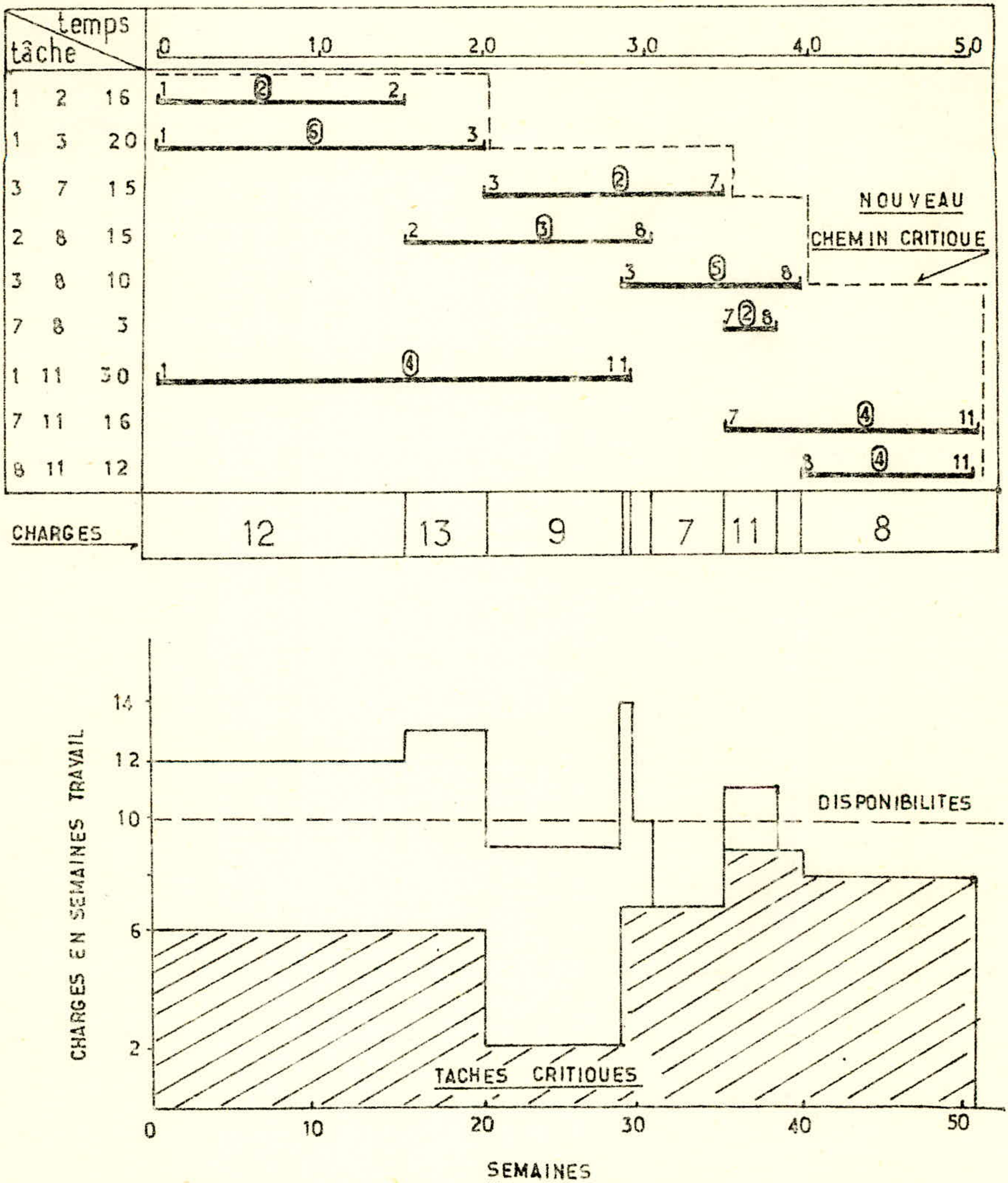
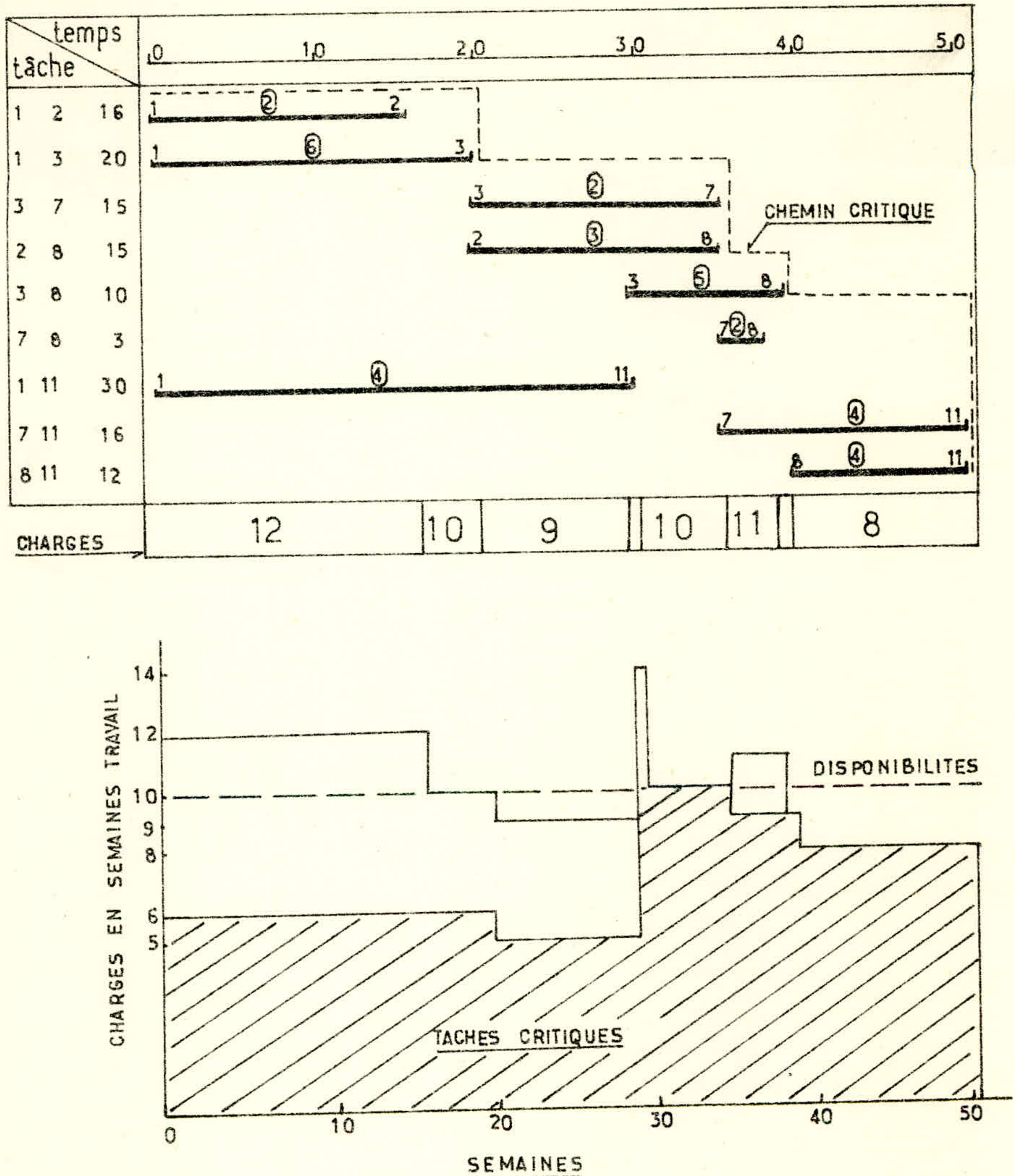

temps
tâche
0
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
1 2 16
1 3 20
3 7 15
2 8 15
3 8 10
7 8 3
1 11 30
7 11 16
8 11 12
NOUVEAU
CHEMIN CRITIQUE
CHARGES
12
13
9
7
11
8
CHARGES EN SEMAINES TRAVAIL
DISPONIBILITES
TACHES CRITIQUES
SEMAINES

FIG. IV-13b.



temps
tâche
0
10
20
30
40
50
1 2 16
1 3 20
3 7 15
2 8 15
3 8 10
7 8 3
1 11 30
7 11 16
8 11 12
CHEMIN CRITIQUE
CHARGES
12
10
9
10
11
8
CHARGES EN SEMAINES TRAVAIL
DISPONIBILITES
TACHES CRITIQUES
SEMAINES

Déplacer toute autre tâche et seules les tâches (1-2) (1-11) et (7-8) peuvent l'être, ne changerait pas grand chose à la charge.

Donc, l'ordonnancement ci-dessus est celui qui donne la plus petite surcharge et en utilisant ceci comme critère, il est le meilleur (ce critère n'est autre que la maximation du facteur d'utilisation des ressources).

<u>NB</u>/ *La pointe de la semaine 29 ne peut être <u>nivelée</u> que si la tâche (3-8) est avancée d'une semaine : ceci avancera le chemin critique d'une semaine et le temps total du projet passera à 52 semaines.*

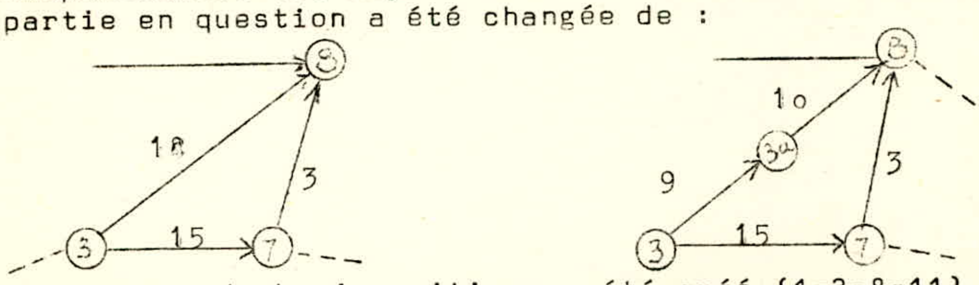
De même, la surcharge des semaines (1-11) peut être réduite en coupant la tâche (1-11) en deux parties, la première longue de 20 semaines, la seconde de 10 et en accomplissant la deuxième partie durant les semaines 42-51.

Est-ce acceptable ? La CPA ne donne pas de solution au problème de la charge mais procure une méthode systématique d'investigation des possibilités. S'il y a plus d'une ressource, les recherches deviennent difficiles.

<u>CONCLUSION</u> :

Quel est l'effet du lissage sur le projet ? Pour le voir, supposons que la situation que nous venons d'étudier est la solution acceptable. Il faudra alors que la tâche (3-8) ne commence pas avant la semaine 20 et qu'elle finisse à la semaine 30. Ainsi, l'instant initial minimum et limite de la tâche (3-8) est la semaine 20 et son instant final minimum et limite est 30, d'où une disparition totale de la marge, la durée de la tâche étant de 10 semaines.

Effectivement, une autre tâche "attendre la disponibilité des moyens de travail" a été introduite et la partie en question a été changée de :



et un second chemin critique a été créé (1-3-8-11). De même, en fixant l'instant initial de la tâche (2-8) à la semaine 20 on réduit la marge de cette tâche. L'effet de cette sorte d'action est de réduire la liberté du graphe en tant que tel, en améliorant l'utilisation du travail.

Le lissage permet ainsi de fixer des dates réelles aux tâches. En comparant le calendrier suivant au premier calendrier prévu par l'analyse originale du graphe, on verra que la plupart des marges originelles ont disparu.

		date de début.		date de fin.		marges			
tâche	durée	E	L	E	L	I	L	1	ressources
1-2	16	0	4	16	20	4	4	4	2
1-3	20	0	0	20	22	0	0	0	6
1-11	30	0	21	30	51	21	21	21	4
2-8	15	20	20	35	35	0	0	0	3
3-7	15	20	20	35	35	0	0	0	2
3-8	10	29	29	39	39	0	0	0	5
7-8	3	35	36	38	39	1	1	1	2
7-11	16	35	35	51	51	0	0	0	4
8-11	12	39	39	51	51	0	0	0	4

IV.2 CAS OU L'INTENSITE EST VARIABLE

Dans ces méthodes d'ordonnancement qui admettent des intensités variables pour les tâches, la subdivision en méthodes de nivellement ou de lissage perd son sens.

L'ordonnancement sera défini par rapport à un certain critère d'optimisation qui sera généralement une fonction "conomique" : coût minimum, etc... Usuellement, les programmes existants limitent la variation de l'intensité à trois cas (ou seulement deux parmi ces trois cas) :

- l'intensité normale : c'est-à-dire la quantité de moyens qui serait utilisée à la tâche dans les circonstances normales.

- l'intensité maximum (ou accélérée) : c'est-à-dire la quantité maximum de moyens qui pourraient être employés utilement à la tâche.

- l'intensité minimum (ou ralentie) : c'est-à-dire la quantité minimum de moyens que l'on peut affecter à la tâche.

Aux diverses intensités se rapportent évidemment différentes durées pour l'exécution d'une tâche, durées dites normales, accélérée et ralentie.

Il existe actuellement trois méthodes principales de ce genre :

- *CPM*
- *Méthode de Mc GEE et MARKARIAN*
- *RAMPS.*

CHAPITRE II

METHODES DE RESOLUTION DU PROBLEME DES ALLOCATIONS DE RESSOURCES

Le problème est de développer des méthodes ou des techniques qui donnent de bons (sinon d'assez bons) résultats dans des situations pratiques anns trop de programmation quoique pour un réseau de taille importante un ordinateur est une nécessité pour l'allocation de ressources :

On distingue essentiellement :

- des méthodes dites algorithmiques (ou mathématiques comme la programmation linéaire, qui pourraient être utilisées pour donner des solutions optimales. Cependant, ces méthodes seraient trés coûteuses car elles nécessiteraient beaucoup de programmation sur un grand ordinateur.

d'autres méthodes de ce genre peuvent être suggérées groupant la programmation dynamique et la *"Branch and Bound"*. Néanmoins, leur pratique reste incertaine.

- des méthodes heuristiques, désignées pour donner de bonnes solutions qui ne sont pas nécessairement optimales. La plupart des méthodes pratiquement utilisées font appel essentiellement à des processus heuristiques. Ce type de méthode se programme trés bien sur ordinateur.

chaque problème particulier a sa méthode propre ; il n'existe ni programme général, ni langage spécialisé pour les programmer ; ainsi, utilise-t-on fréquemment un langage symbolique tel le *FORTRAN*.

Remarque :

Un projet peut être complétement défini par la programmation linéaire selon sa logique, ses besoins et ses disponibilités en ressources. De plus, un objectif peut être spécifié et la programmation linéaire nous donnera une solution optimale du problème relativement à cet objectif.

Cependant, la formulation d'un tel problème est difficile à établir et le nombre des contraintes est exorbitant dans le cas de projets complexes ; d'où l'inconvénient de cette méthode qui tient, par sa programmation, énormément de place en mémoire et dont l'utilisation est finalement fort coûteuse.

C'est pour cette raison que, comme méthode algorithmique, nous présontons ici la méthode *"Branch and Bound"* qui se prête relativement mieux à ce genre de problème. La solution optimale qui en découlerait servira à faire une comparaison avec la solution heuristique.

I. "BRANCH AND BOUND" METHOD

I.1 ALGORITHME DE *"BRANCH AND BOUND"*

I.11 - Données et notations :

- Considérons un problème de prises de décisions, par exemple représenté par une arborescence $G = (X,U)$.

- Les noeuds (sommets) $s \in S \subset X$ représentent les solutions. L'ensemble des solutions réalisables s'appelera FCS.

- Chaque solution s a un coût $f(s)$ que l'on sait calculer. Une solution irréalisable aura un coût infini.

- Nous supposerons que l'on cherche un noeud s de coût minimal.

Lors de l'exploration de l'arborescence, nous appellerons s^* la meilleure solution déjà rencontrée et f^* sont coût. Au départ, on peut avoir aucune solution réalisable et l'on fixe f^* à $+\infty$.

I.12 - Principe des séparations et des évaluations progressives

I.121 : Position du problème

a) comment trouver une première "bonne solution" réalisable, s'il en est une, c'est-à-dire une premier couple (s^*, f^*) ou f^* est faible ?

b) comment "couper" aussi rapidement que possible, certaines branches de l'arborescence dont on soit sûr qu'elles ne peuvent pas contenir l'optimum, de façon à accélérer l'exploration ?

c) à chaque étape de l'exploration où se "brancher" pour l'étape suivante ? Le dernier point est une règle de décision.

I.122 : Evaluations (bornes inférieures)

a) ou bien nous savons construire rapidement une "borne" ou du moins pas trop mauvaise solution réalisable, ou bien nous ne savons pas et nous passons outre.

b) bornes

Appelons x_i^k, le kème sommet de niveau i dans G = (X,U).

Appelons S_i^k , l'ensemble des noeuds de la branche issue de x_i^k.

L'idée maîtresse de la méthode présentée ici consiste à exprimer lorsque cela est possible, en chaque sommet x_i^k examiné, une borne inférieure $\varphi(x_i^k)$ de la valeur de la fonction économique f pour l'ensemble des noeuds S_i^k.

Ceci exprimer que toute solution de S_i^k issue de x_i^k aura un coût supérieur ou égal à $\varphi(x_i^k)$.

Dés que l'on rencontrera un $\varphi(x_i^k) \geq f^*$ nous pouvons couper la branche x_i^k puisqu'elle ne risque pas d'améliorer la meilleure solution déjà vue s^*.

Règle de la décision n°1

en un sommet x_i^k dés que :
$f^* \leq \ (x_i^k) \leq f(s) \ \forall s \in S_i^k$
→ couper la branche, en évitant de l'explorer.

I.123 : Séparations progressives (branchement)

Deux situations et deux philosophies sont possibles :

a) <u>les deux situations possibles</u>

au cours de l'exploration : étant en un sommet x_i^k : ou bien ce sommet a des successeurs à examiner ou bien il n'en a pas (soit parce que tous ses successeurs ont déjà été examinés, soit parce qu'il est lui-même un noeud, soit encore parce que sa branche a déjà été coupée).

b) <u>les deux philosophies</u>

nous donnerons ici deux cas extrêmes, une alliance des deux étant bénéfique.

- dans la première optique, on cherche à chaque étape, à garder inchangées le plus possible de décisions déjà prises. On cherche donc à garder la plus grande partie possible du chemin (xo,....., x_i^k). On continuera à "descendre" le long de ce chemin, sinon on "remontera" le long de ce chemin à partir de x_i^k vers le premier sommet ayant des successeurs examinés.

- une deuxième optique consiste à se "brancher" à chaque étape vers le sommet x_i^{1k} qui est le plus susceptible d'avoir sur sa branche une solution moins coûteuse de s^*. On ira vers le sommet examiné (ayant des successeurs à examiner) de minimum.

Ce procédé conduit à sauter de branche en branche.

<u>Règle de la décision n°2</u>

Etant en x_i^k

1

Il existe dans Γx_i^k un sommet non examiné (ni coupé)

a. <u>1ère optique</u> ; BB1

aller au premier successeur de x_i^k non encore examiné

b. <u>2ème optique</u> ; BB2

aller au sommet de G de moindre , ayant des successeurs à examiner et "descendre" à partir de ce sommet comme en

---

2

Le sommet x_i^k n'a pas (ou n'a plus) de successeurs à examiner

a. BB1 : retourner sur le chemin ($xo, \ldots, x_i^k$) vers le premier ayant au moins un successeur à examiner.

b. BB2 : faire comme en 1b.

Le choix à faire entre les deux optiques BB1 et BB2 est délicat, en outre il n'est pas seulement fonction de la chance qu'on a de rencontrer sur les branches étudiées de meilleures solutions que s^* ; il est également fonction du temps et la place-mémoire disponible.

Dans la pratique, on utilise souvent une combinaison des deux.

I.2 "*BRANCH AND BOUND METHOD*" POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME D'ALLOCATION DE RESSOURCES DANS UN GRAPHE ORIENTE

I.21 Position du problème

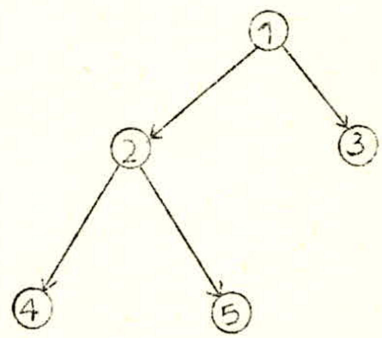
Comment ordonnancer les activités dans le but de minimiser le temps de réalisation d'un projet quand les ressources sont limitées ?

On a à rechercher la solution optimale parmi un ensemble donné de solutions admissibles. Le principe de base est de diviser cet ensemble de solutions en sous ensembles. Autrement dit c'est une procédure s'appuyant sur une possibilité d'exploration systématique : on sépare progressivement l'ensemble des ordonnancements admissibles en sous-ensembles de plus en plus finis que l'on caractérisera par exemple par le sens des arbitrages relativement à certaines paires de disjonctions ; la progression pourra être guidée par une évaluation optimiste de la valeur qu'un critère conduit à attribuer au meilleur ordonnancement de chaque sous-ensemble. De ce fait, on calculera pour chaque sous ensemble une borne inférieure : date de réalisation du projet à l'intérieur de chacun d'eux.

I.22 Dominance

Dans l'arborescence un évènement (noeud) m qui peut être trouvé par un branchement de l'évènement j est un descendant de j.

Exemple



5 est un descendant de 1, par contre 3 n'est pas un descendant de 2.

Soient j et k les évènements tels qu'aucun ne soit descendant de l'autre. Il est parfois possible que la meilleure solution du problème principal en k ne soit pas meilleure que celle en j. Dans ce cas l'évènement j domine l'évènement k.

Théorème 1 : Si les quatre conditions suivantes sont réalisées simultanément, nous dirons que le sous problème j, domine le sous problème k.

1/ $t_j \leq t_k$

2/ toute activité qui ne débute pas en k est :
+ soit qu'elle ne débute pas en j
+ soit qu'elle finit en j.

3/ toute activité qui finit en k finit en j.

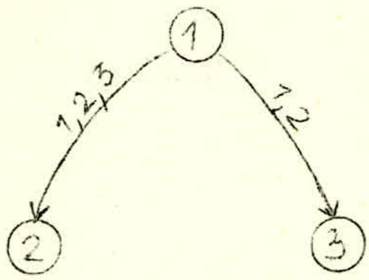
4/ toute activité qui commence en k finit au moins en j.

Théorème 2 : Si le sous-problème (s/pb) j a un descendant qui domine le s/pb k, alors le s/pb j domine le s/pb k.

Soit i l'évènement en cours et soit j et k les descendants immédiats de i. Soit Ai,j l'ensemble des activités en cours sur la branche (i,j).

Considérons la situation où Ai,k est sous ensemble de Ai,j et soit Bi,j,k l'ensemble des activités qui sont dans Ai,j mais non pas dans Ai,k.

Exemple



$A_{1,2}$ = (1,2,3)

$A_{1,3}$ = (1,3)

$B_{1,2,3}$ = (2)

Théorème 3 : Nous dirons que le s:pb j domine le s/pb k, si les conditions suivantes sont réalisées simultanément :

1/ j et k sont descendants immédiats du même évènement i.

2/ Ai,k est sous ensemble de Ai,j

3/ Les durées d'activités dans Bi,j,k sont toutes inférieures ou égales au minimum des durées d'activités dans Ai,k.

Démonstration :

Supposons que l'ensemble des activités dans Ai,j s'achemine jusqu'à ce que le minimum de la durée d'activité dans l'eneemble Ai,k ait expiré. Appelons le s/pb résultant m. Alors :

tm = tk.

Toute activité n'appartenant pas à Bi,j,k a la même possition en k et en m.

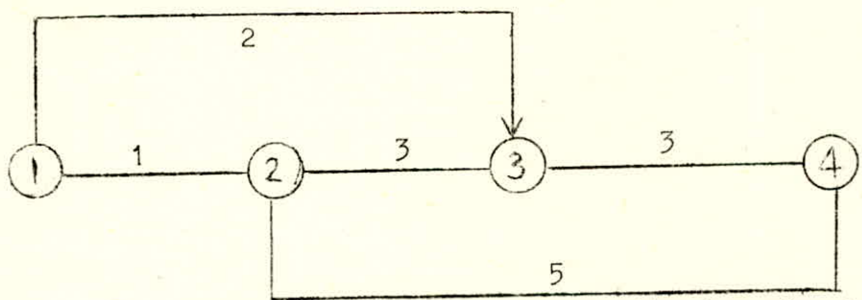
Toute activité en Bi,j,k s'achève en m mais ne s'achève pas nécessairement en k. Par le théorème 1, m domine k. Ensuite d'après le théorème 3, j domine k.

1.23 Application

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant : soit le réseau ci-après, il y a 5 activités et chacune nécessite un certain nombre d'hommes. Quatre hommes sont disponibles à tout moment. Comment ordonnancer les activités dans le but de minimiser la durée du projet ?

Activité	queue	tête	durée	ressources
1	1	2	1	2
2	1	3	2	4
3	2	3	3	2
4	2	4	5	1
5	3	4	3	3

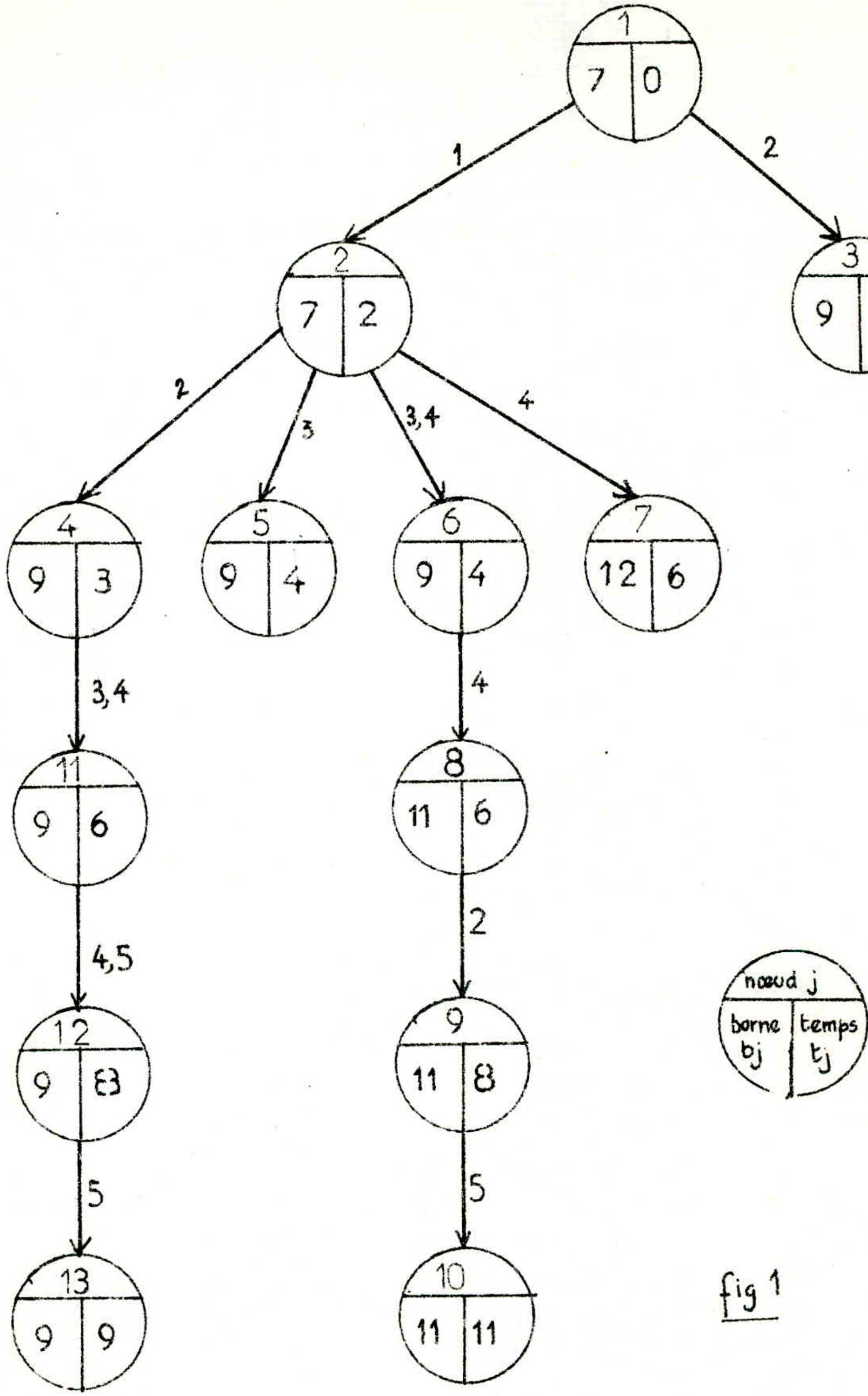
4 hommes disponibles.



Une arborescence est développée dans laquelle chaque noeud représente un sous problème similaire au projet original, mais avec des activités partiellement ou complètement achevées. Chaque branche de l'arbre représente un lot d'activités en cours. La recherche de ce type d'arborescence conduit à une solution optimale.

L'analyse de l'arborescence pour l'exemple est indiquée en fig 1.

Les cercles sont les noeuds de l'arbre, et les nombres dans la partie supérieure de chaque noeud est le numéro de ce dernier. Le noeud 1 de l'arborescence représente l'origine du projet. Le projet doit commencer avec un des trois lots d'activités nommées : activité 1, activité 2, ou activités 1 et 2 ensembles. Le dernier lot est soumis aux contraintes de ressources. Les autres sont représentés par des arcs ou branches émanant du noeud 1. Les nombres sur une branche indiquent les activités en cours pour cette branche.



1
7 0
2
7 2
3
9 3
4
9 3
5
9 4
6
9 4
7
12 6
11
9 6
8
11 6
12
9 8
9
11 8
13
9 9
10
11 11
1
2
2
3
3,4
4
3,4
4
4,5
2
5
5
nœud j
borne bj
temps tj

fig 1

Le noeud 2 de l'arborescence correspond à un sous problème qui est le projet original moins l'activité 1 ; tandis que le noeud 3 correspond à un sous problème qui est le projet original moins l'activité 2.

Le nombre tj au fond à droite du noeud j est le temps auquel le sous problème j doit commencer. Le nombre bj au fond à gauche du noeud j est la borne inférieure du temps d'achèvement du projet donné, étant donné que le s/pb j commence au temps tj. Les bornes inférieures (ou limites inférieures) du temps d'achèvement sont calculées en supposant qu'il n'y a pas de contraintes de ressources. Alors, pour le noeud 1 de l'arborescence la borne inférieure est le temps d'achèvement du projet original sans les contraintes de ressources.

b1 = 7	t1 = 0	noeud 1
b2 = 7	t2 = 1	noeud 2
b3 = 9	t3 = 2	noeud 3.

L'évènement 2 a une borne plus inférieure que l'évènement 3 ; pour le s/pb 2 l'ensemble faisable des activités initiales est :

(2) ; (3) ; (3,4) ; (4)

Ces lots sont représentés par des branches qui mènent aux évènements 4,5,6 et 7 respectivement. Là où plusieurs activités se déroulent ensemble,la branche se termine quand l'activité la plus courte s'achève. Donc, le s/pb 6 cprrespondant à l'évènement 6 a les activités 1 et 3 terminées et l'activité 4 commençant mais avec 2 jours de retard de travail (tâche restant en cours). Il est supposé que l'activité 4 doit se poursuivre quand le s/pb 6 commence.

Nous choisirons le noeud successeur avec la plus petite borne inférieure. Il arrive parfois que les noeuds 4,5,6 ont tous des limites inférieures égales (9jours). Aussi, nous résolvons le problème en choisissant l'évènement dont la branche précédente a le plus grand nombre d'activités en cours (dominance). Cette tactique a l'avantage de donner préférence aux ordonnancements dans lesquels des activités sont achevées plus tôt que plus tard et elle est soutenue par le théorème 3. Donc l'évènement 6 est sélectionné.

L'unique activité initiale faisable pour le s/pb 6 est l'activité 4. L'achèvement de l'activité 4 conduit au s/pb 8 qui comprend les activités 2 et 5 seulement. L'achèvement de l'activité 2 mène au s/pb 9 qui comprend l'activité 5. L'achèvement de l'activité 5 termine le projet et mène à l'évènement 10. C'est un évènement terminal correspondant à une durée du projet de 11 jours.

Nous remontons maintenant l'arborescence et examinons les évènements non consultés. L'évènement 7 a une borne inférieure de 11 jours et doit être sous optimal. Le noeud 5 a une borne inférieure de 9 jours, cependant en raison de la dominance, il est exclu. L'examen du noeud 4 a une succession d'évènements 11,12,13 dont le dernier est un évènement terminal avec une durée du projet de 9 jours.

L'ordonnancement optimal est donc le suivant :

temps de démarrage	activité
0	1
1	2
3	3,4
6	5

II. LES METHODES HEURISTIQUES

II.1 INTRODUCTION

Des méthodes approximatives appropriées peuvent aboutir trés efficacement à des solutions satisfaisantes surtout si on fait appel à un ordinateur pour le travail fastidieux.

Les méthodes heuristiques sont utilisées quand il n'existe pas de solutions algorithmiques ou mathématiques exactes ou si elles sont connues, ne sont pas techniquement faisables. Pour les allocations de ressources, il existe une théorie mathématique pour la recherche de la meilleure solution mais celà demande beaucoup de programmation. Même le plus puissant ordinateur ne peut donner les résultats dans un temps raisonnalbe.

La plupart des méthodes pratiquement utilisées font appel à des processus heuristiques, c'est-à-dire capables d'atteindre rapidement des solutions voisines de l'optimum sans garantie de convergence.

Ces méthodes (heuristiques) sont basées sur des règles de décisions formelles qui dérivent logiquement d'hypothèses raisonnables. Elles ne nous garantissent pas nécessairement l'optimalité mais elles nous procurent rapidement des solutions voisines et sont souvent moins chères que d'autres méthodes.

Plusieurs méthodes heuristiques d'allocations de ressources ont été proposées. Deux points intéressants émanent de ces "heuristiques".

- différentes méthodes heuristiques donnent différents résultats sur le même projet et les mêmes heuristiques donnent des résultats différents relatifs à différents projets, où les solutions sont en accord avec un objectif donné.

- certaines méthodes heuristiques donnent une indication d'analyse adéquate ou une raison comparative de préférence d'une méthode d'allocation ou d'un mode de tri par rapport à un autre.

Dans le cas des points ci-dessus, il a paru avantageux de tester les hypothèses suivantes :

a) que des méthodes heuristiques ne sont pas à proprement dit, des succés relativement l'une par rapport à l'autre en accord avec un objectif donné.

b) qu'il n'y a pas de meilleure méthode de projets avec des caractères spécifiques.

c) qu'il n'y a pas de méthode qui soit de façon consistante bonne sur tous les projets.

Les méthodes heuristiques consistent généralement en une procédure d'allocation et un mode de tri. Celles utilisées communément emploient deux méthodes de base : la méthode sérielle et la méthode parallèle.

Certaines, par contre, utilisent une combinaison de ces deux méthodes et sont appelées "serielle-parallèle."

II.11 Caractéristiques des méthodes sérielles

Dans la méthode serielle, une liste est faite de toutes les activités du réseau, triées dans un certains ordre tel que la marge totale (à l'intérieur de la date de début au plus tard). Cette liste connue parfois ous le nom de "table de précédence" est le fondement même des allocations de ressources.

La première activité est alors considérée et les ressources nécessaires allouées. La seconde activité est similairement considérée et ainsi de suite à travers la liste. Si une activité nécessite une ressource qui est pleinement employée par une activité précédente, elle doit attendre jusqu'à ce que cette dernière ait terminé avec la ressource.

II.12 Caractéristiques des méthodes en parallèle

La méthode en parallèle tient compte de tout le projet et pour une période d'un temps donné, sélectionne toutes les tâches disponibles pour l'ordonnancement et susceptibles d'utiliser une ressource donnée. Elle trie alors les activités dans un ordre de priorité. Par exemple, le tri majorant peut être la date de début au plus tôt, avec un tri minorant sur la marge totale.

Les ressources sont alors allouées aux activités avec la plus grande priorité. S'il y a une insuffisance de ressources pour commencer une activité, les activités avec une faible priorité sont examinées, auquel cas les ressources disponibles peuvent être employées.

Si le début d'une activité est ajourné jusqu'à la période suivante, sa date de début au plus tôt doit être augmentée et sa marge totale réduite. Le réseau doit être examiné attentivement pour voir si les dates des activités suivantes doivent être ajustées.

Remarque :

Certaines méthodes, nous l'avons déjà mentionné, utilisent une combinaison de ces deux méthodes et sont appelées "serielle-parallèle".

La procédure est exactement comme pour les méthodes sérielles sauf qu'après chaque activité qui a été ordonnancée, l'ordre de précédence est révisé et modifié si nécessairement en vue d'une activité bien ordonnancée.

II.2 REGLES DE DECISION :

Chaque fois que la quantité de ressources demandées excède la quantité disponible, un choix doit se faire entre les tâches qui concourent pour les ressources limitées. Le choix est établi par une règle de décision qui utilise un index de priorité et les ressources sont ensuite allouées dans cet ordre jusqu'à ce qu'elles s'achèvent c'est le "tri majorant" ou tri principal.

Si deux tâches ont le même index de priorité un second doit être utilisé comme critère de choix entre elles : c'est le "tri minorant" ou tri secondaire.

II.21 - Priorité imposée aux tâches

Les priorités sont le plus souvent calculées pour les tâches individuelles. Il paraît raisonnable d'affecter des ressources rares de préférence aux tâches critiques.

Ainsi, si la marge totale est utilisée, les tâches sont alors triées par ordre croissant de marge.

II.22 - Types de règles de décision

Toutes les règles de décision utilisées en pratique englobent au moins un des critères cités au chapitre I (III.2) de cette seconde partie.

II.3 MODELE DE PLANNING

Pour illustrer la procédure, nous allons l'appliquer à un exemple déjà vu, celui de la raffinerie d'huile.

Les règles de décision sont :

- tri majorant : marge totale
- tri minorant : durée.

Nous faisons, en outre, l'hypothèse qu'aucune tâche ne peut démarrer sans que toutes les ressources nécessaires soient disponibles.

II.31 - Présentation du modèle

Le modèle est traité ci-dessus, sous les trois aspects suivants :

a) cas des moyens unitaires : la répartition des ressources sur chaque tâche du projet se fair de façon unitaire par période (contraintes disjonctives).

b) cas des moyens pluriaux : c'est le cas où une tâche exige plus d'une ressource par période (contraintes cumulatives).

c) cas de plusieurs types de ressources : un projet nécessite souvent plusieurs types de ressources pour sa réalisation (main-d'oeuvre, matériel, etc...). Nous avons élaboré à ce sujet un modèle de types de ressources.

Dans le modèle choisi, la partie gauche comprend cinq colonnes où figurent les nécessités en ressources, les évènements de début et de fin, la durée et la marge totale de chaque tâche du projet.

Les tâches sont alors introduites dans une liste d'attente afin de transférer ensuite leurs marges totales dans les colonnes de "Marges" (partie droite du tableau).

Les "en-têtes des colonnes de "Marges" marquent les débuts et les fins des tâches.

Un trait sous une marge totale signifie le début de la tâche correspondante tandis que le signe (*) dans la même période indique sa fin.

Les nombres représentés dans les colonnes "Tâche" sont simplement un sommaire de l'analyse du réseau déjà traitée.

La procédure de tri et d'ordonnancement pour les différents cas précédents, est représentée sur les tableaux ci-dessus.

II.32 - Procédure

L'horloge est positionné à zéro. L'en-tête de la première colonne est marquée '0' temps de démarrage du projet.

La première colonne contient seulement une entrée car à cette date, une tâche unique (1,2) peut débuter. La marge totale de la tâche est allouée à la (ou les) ressource nécessitée et ce conformément aux disponibilités.

Le numéro de la tâche et la date prévue pour son achèvement sont mentionnés au fond de la colonne '0'. Comme nous l'avons déjà mentionné, nous montrons que la tâche est maintenant en cours en soulignant la marge correspondante.

On prévoit une ligne pour la durée globale du projet qui commence à 120 heures comme déterminé lors de l'analyse originale.

Le temps d'achèvement de la tâche (1,2) à savoir 24h, devient l'en-tête de la colonne suivante et le signe (x) indique la fin de cette tâche. A ce moment, le réseau montre que les quatre tâches commençant à l'évènement 2 sont à leur début ; leurs marges totales sont alors transférées dans cette colonne. A cet instant, toutes les ressources sont disponibles et l'ordre de priorité des tâches s'établit selon les règles de décision de base, à savoir la marge totale et la durée minimales. Les tâches sont alors sélectionnées dans la limite des ressources disponibles.

Légende
R : ressources nécessaires
D : durée
MT : marge totale

MODELE DE PLANNING

(ALLOCATION D'UN TYPE DE RESSOURCES/ MOYENS UNITAIRES)

PI01475
Arand p 116

m a r g e s

TACHE R	i	j	D	MT	0	24	40	48	56	64	Nouv MT	72	Nouv MT	96	Nouv MT	112	Nouv MT	118	120	122	138	146	156	158
1	1	2	24	0	0	*																		
1	2	3	16	14		14	*																	
1	2	4	16	36		36	20	12	4			*												
1	2	5	40	40		40	24	16	8	0	2	-6	0			*								
1	2	6	24	0		0		*																
1	3	7	16	14			14		*															
1	3	9	8	22			22	14	6	-2	0	*												
0	4	11	0	36														*						
1	4	14	12	60								60	66	42	58	42	46	40	38	36	20	12		*
1	5	14	8	40												40	44	38	36	34	18	*		
1	6	8	16	0				0		*														
1	6	13	4	44				44	36	28	30	22	28	4	20	4	8	2		*				
0	7	9	0	14					*															
1	8	10	16	8						8	10	2	8	-16	0	*								
1	8	12	24	0						0	2	-6	0	√										
1	9	11	6	14								14	20	-4	12	-4	0	*						
0	10	12	0	8												*								
1	11	14	36	14														14	12				*	
1	12	13	8	0												0	4		*					
1	13	14	16	0																0	*			
1	14	15	8	0																			0	
Durée globale					120					+2	122	+6	128	+16	144	+4	148						$\boxed{166}$	

CONTRE-MAITRE(X)

* tâche achevée	(1,2)	(2,3)	(3,7)	(3,7)	(2,4)	(2,4)	(2,5)	(2,5)	(9,11)	(6,13)	(6,13)	(13,14)	(5,14)	(4,14)	(4,14)	(14,15)
à	24	40	56	56	72	72	112	112	118	122	122	138	146	158	158	166

CONTRE-MAITRE(Y)

* tâche achevée	(2,6)	(2,6)	(6,8)	(6,8)	(3,9)	(8,12)	(8,10)	(12,13)	(12,13)	(11,14)	(11,14)	(11,14)	(11,14)
à	48	48	64	64	72	96	112	120	120	156	156	156	156

Par exemple, sur le tableau concernant les moyens unitaires, les tâches (2,6) et (2,3) qui ont les marges les plus faibles sont choisies et soulignées. Les ressources disponibles (2)sont dans ce cas pleinement employées.

La tâche (2,6) avec une durée de 24h, s'achèvera à 48h (24+24) et la tâche (2,3) d'une durée de 16h à 40h (24+16). Ces temps mentionnés au fond de la colonne relativement aux contre-maîtres disponibles, et la date la plus faible (ici 40) sera l'en-tête de la prochaine colonne.

A la date '40', les tâches (2,4) et (2,5) n'ont pas encore démarré (à leur date de début au plus tôt) ; elles se trouvent alors retardées de la différence de temps écoulé. Par conséquent, leurs marges totales (36 et 40) sont respectivement réduites de (40-24) ; ce qui donnera :

- marge totale de la tâche (2,4): 36 - (40-24) = 20
- marge totale de la tâche (2,5) : 40 - (40-24) = 24

Ainsi, dans la colonne '40', nous ne mentionnerons pas les marges totales originales des tâches qui n'ont pas encore démarré, mais leurs nouvelles marges totales.

A cette date, la tâche (2,3) est achevée (ceci est mentionné par *) avec libération d'un contre-maître et deux nouvelles tâches (3,7) et (3,9) sont prêtes pour démarrer.

On fait de nouveau appel au critère de base pour sélectionner les tâches prioritaires et on procède de façon similaire jusqu'à l'accomplissement de toutes les tâches du projet.

En continuant dans cette voie, on peut éventuellement se heurter à une marge négative. Celà veut dire que la date de début au plus tard de la tâche correspondante est dépassée du délai représentant la valeur négative de la marge. Dans ce cas, on remédie à ce genre de situation en remettant la marge en question à zéro.

Naturellement, toutes les tâches en lisse dans la colonne voient leurs marges augmenter du même temps qui a servi à réduire la marge de la tâche retardée à zéro ; d'où une nouvelle colonne notée N.M.T (nouvelle marge totale).

Il s'en suit que le projet doit être inévitablement retardé du même temps....

En continuant ainsi la procédure, nous arrivons à un résulat final dans lequel la durée global du projet est de : 166 heures (cas des moyens unitaires avec deux ressources disponibles).

Dans ce cas, le facteur d'utilisation pour les deux contre-maîtres (strictement parlant, car en réalité il s'agit de six contres-maîtres qui se relaient deux à deux) est :

$$r = \frac{298}{2 \times 166} = 0,90 \ (90\%)$$

Pour les autres cas, les résultats figurent sur les tableaux respectifs.

II.33 - Programmation du modèle

Les algorithmes et le programme *FORTRAN* du modèle figurent en troisième partie (*Annexe C*).

PI01475

Après p. 117 (1)

MODELE DE PLANNING

(ALLOCATION DE DEUX TYPES DE RESSOURCES)

marges

TÂCHE																													
R	i	j	D	M.T	0	24	40	48	64	New M.T	80	New M.T	96	New M.T	120	New M.T	132	New M.T	160	New M.T	176	New M.T	182	New M.T	186	190	206	222	230
(0/1)	1	2	24	0	0	*																							
(0/1)	2	3	16	14		14	*																						
(1/1)	2	4	16	36		36	20	12	-4	6	-10	0	*																
(1/1)	2	5	40	40		40	24	16	0	10	-6	4	-12	0	-24	0			*										
(1/1)	2	6	24	0		0																							
(1/1)	3	7	16	14			14	6	-10	0	*																		
(0/1)	3	9	8	22			22	*																					
(0/0)	4	11	0	36									*																
(0/1)	4	14	12	60									60	72	48	72	*												
(1/1)	5	14	8	40															40	68	52	56	50	52	48	44	28	16	*
(1/1)	6	8	16	0				0	*																				
(1/1)	6	13	4	44				44	28	38	22	32	16	28	4	28	16	20	-8	20	4	8	2	4	*				
(0/0)	7	9	0	14							*																		
(1/1)	8	10	16	8					8	18	2	12	-4	8	-16	8	-4	0	-28	0	*								
(1/2)	8	12	24	0					0	10	-6	4	-12	0	*														
(1/2)	9	11	6	14							14	24	8	20	4	20	8	12	-16	12	-4	0	*						
(0/0)	10	12	0	8																	*								
(1/1)	11	14	36	14																			14	16	12		*		
(0/1)	12	13	8	0																	0	4	-2	0		*			
[illegible]	13	14	16	0																						0	*		
[illegible]	14	15	8	0																								0	
Durée globale					120				+10	130	+10	140	+12	152	+24	176	+4	180	+28	208	+4	212	+2	214				$\boxed{238}$	
TYPE R1:																													
* tâche achevée						(2,6) 48	(2,6) 48	(6,8) 64		(3,7) 80		(2,4) 96		(8,12) 120		(2,5) 160		(2,5) 160		(8,10) 176		(9,11) 182	(6,13) 186	(11,14) 222	(11,14) 222	(11,14) 222	(5,14) 230		
TYPE R2:																													
(R'2) tâche achevée					(1,2) 24	(2,6) 48	(2,6) 48	(6,8) 64		(3,7) 80		(2,4) 96		(8,12) 120		(2,5) 160		(2,5) 160		(8,10) 176		(9,11) 182	(6,13) 186	(11,14) 222	(11,14) 222	(11,14) 222	(5,14) 230	(14,15) 238	
(R''2) tâche achevée						(2,3) 40	(3,9) 48							(8,12) 120		(4,14) 132						(9,11) 182	(12,13) 190	(12,13) 190	(13,14) 206				

PI 0114 75
après p. 117 (2)

MODELE DE PLANNING

(ALLOCATION D'UN TYPE DE RESSOURCES / MOYENS PLURIAUX)

TACHE					marges																								
R	i	j	D	M.T	0	24	40	48	56	New M.T	64	New M.T	80	New M.T	88	New M.T	92	New M.T	108	New M.T	116	New M.T	120	New M.T	126	New M.T	134	142	162
1	1	2	24	0	0	*																							
2	2	3	16	14		14	*																						
2	2	4	16	36		36	20	12	4	6	-2	0	*																
1	2	5	40	40		40	24	16	8	10	2	4	-12	0									*						
1	2	6	24	0		0		*																					
2	3	7	16	14			14		*																				
2	3	9	8	22			22	6	-2	0	*																		
0	4	11	0	36									*																
1	4	14	12	60									60	72			*						40	44	38	40	*		
1	5	14	8	40				0			*																		
1	6	8	16	0				44	36	38	30	32	16	28	20	22	18	22	6	16	8	16	*						
2	6	13	4	44					*																				
0	7	9	0	14							8	10	6	6	-2	0	-4	0	*										
2	8	10	16	8							0	2			*														
1	8	12	24	0							14	16	0	12	4	6	2	6	-10	0	-8	0	-4	0	*				
3	9	11	6	14															*										
0	10	12	0	8																					14	16			*
1	11	14	36	14															0	10	*								
2	12	13	8	0																			0	4	-2	0		*	
1	13	14	16	0																									0
1	14	15	8	0																									
Durée globale					120				+2	122	+2	124	+12	136	+2	138	+4	142	+10	152	+8	160	+4	164	+2	166			$\boxed{170}$

RESSOURCE(X)	(1,2) 24	(2,3) 40	(3,7) 56	(3,7) 56	(3,9) 64	(2,4) 80	(2,5) 120	(2,5) 120	(2,5) 120	(2,5) 120	(2,5) 120	(9,11) 126	(11,14) 162	(11,14) 162	(11,14) 162	(14,15) 170
RESSOURCE(Y)		(2,3) 40	(3,7) 56	(3,7) 56	(3,9) 64	(2,4) 80	(4,14) 92	(4,14) 92	(8,10) 108	(12,13) 116	(6,13) 120	(9,11) 126	(13,14) 142	(13,14) 142		
RESSOURCE(Z)		(2,6) 48	(2,6) 48	(6,8) 64	(6,8) 64	(8,12) 88	(8,12) 88		(8,10) 108	(12,13) 116	(6,13) 120	(9,11) 126	(5,14) 134			

PI 014 75
Aprbp. 117 (3).

MODELE DE PLANNING

marges

TACHE																			
R	i	j	D	MT	0	24	40	48	56	62	64	88	New MT	98	102	104	110	112	128
1	1	2	24	0	0	*													
1	2	3	16	14		14	*												
1	2	4	16	36		36	*												
1	2	5	40	40		40	24	16				*							
1	2	6	24	0		0		*											
1	3	7	16	14			14		*										
1	3	9	8	22			22	*											
0	4	11	0	36			*												
1	4	14	12	60			60	52	44	38	36	12	28	18			*		
1	5	14	8	40								40	56	46	42		*		
1	6	8	16	0				0			*								
1	6	13	4	44				44	36	30	28	4	20	10	*				
0	7	9	0	14					*										
1	8	10	16	8							8	-16	0			*			
1	8	12	24	0							0			*					
1	9	11	6	14					14	*									
0	10	12	0	8												*			
1	11	14	36	14						14				*					
1	12	13	8	0												0		*	
1	13	14	16	0														0	*
1	14	15	8	0															
Durée globale					120							+16	136						$\boxed{136}$
CONTRE-MAITRE(X)					(1,2) 24	(2,6) 48	(2,6) 48	(6,8) 64	(6,8) 64	(6,8) 64	(8,12) 98		(8,12) 98	(6,13) 102	(5,14) 110	(5,14) 110			
CONTRE-MAITRE(Y)						(2,3) 40	(3,7) 56	(3,7) 56	(9,11) 62	(11,14) 98	(11,14) 98		(11,14) 98	(4,14) 110	(4,14) 110	(4,14) 110			
CONTRE-MAITRE(Z)						(2,4) 40	(3,9) 48	(2,5) 88	(2,5) 88	(2,5) 88	(2,5) 88		(8,10) 104	(8,10) 104	(8,10) 104	(12,13) 112	(12,13) 112	(13,14) 128	(14,15) 136

B I B L I O G R A P H I E

1. KAUFFMAN & DESBAZEILLE
"La méthode du chemin critique"
DUNOD

2. FAURE
"Eléments de recherche opérationnelle"
Ed. Gauthier et Villars (1968)

3. REVUE FRANCAISE DE RECHERCHE OPERATIONNELLE - n° 38
B. ROY (1° trimestre 1966)

4. G. WILDE - K. GEWALD - H. WEBER
"L'analyse des projets par les réseaux"
DUNOD (1971)

5. Monsieur AIT OUYAHIA
"Cours de programmation linéaire dispensé à l'ENPA"

6. B. ROY
"Algèbre moderne et théorie des graphes"
DUNOD (1969)

UNIVERSITE D'ALGER

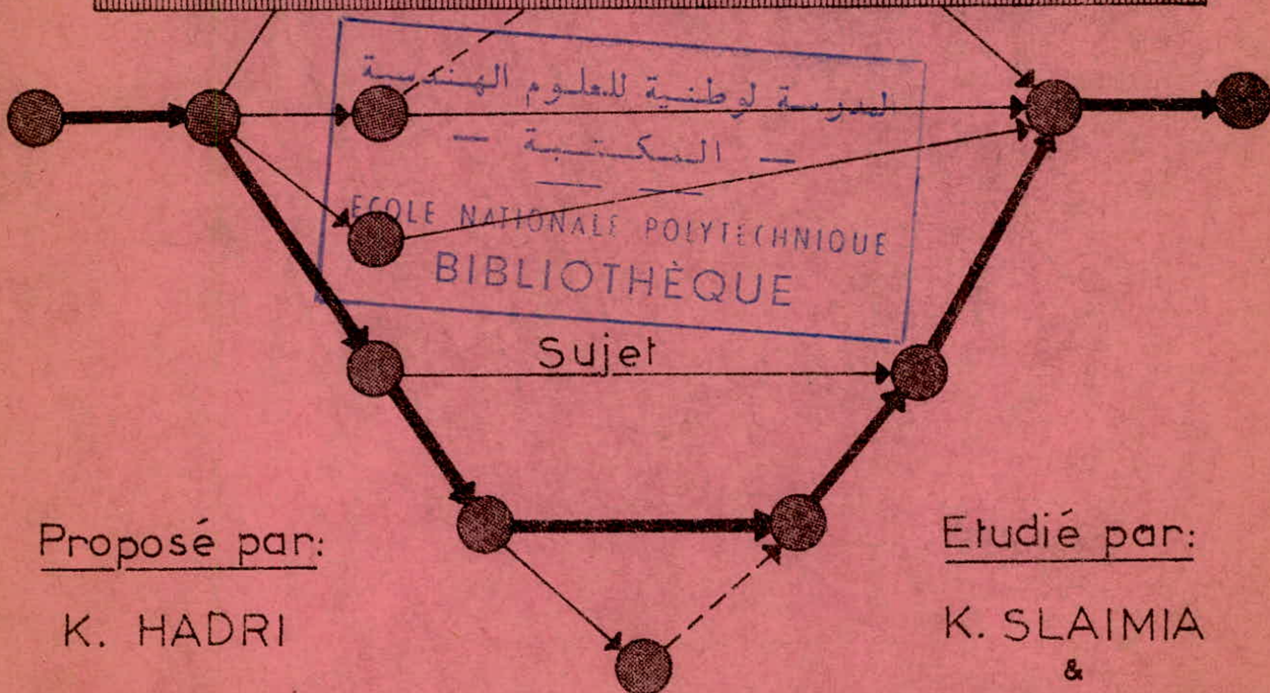
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE

ANNEXE

PROGRAMMATION

ALLOCATION DE RESSOURCES DANS UN GRAPHE ORIENTE



Sujet

Proposé par:

K. HADRI

Etudié par:

K. SLAIMIA
&
S. FERHATI

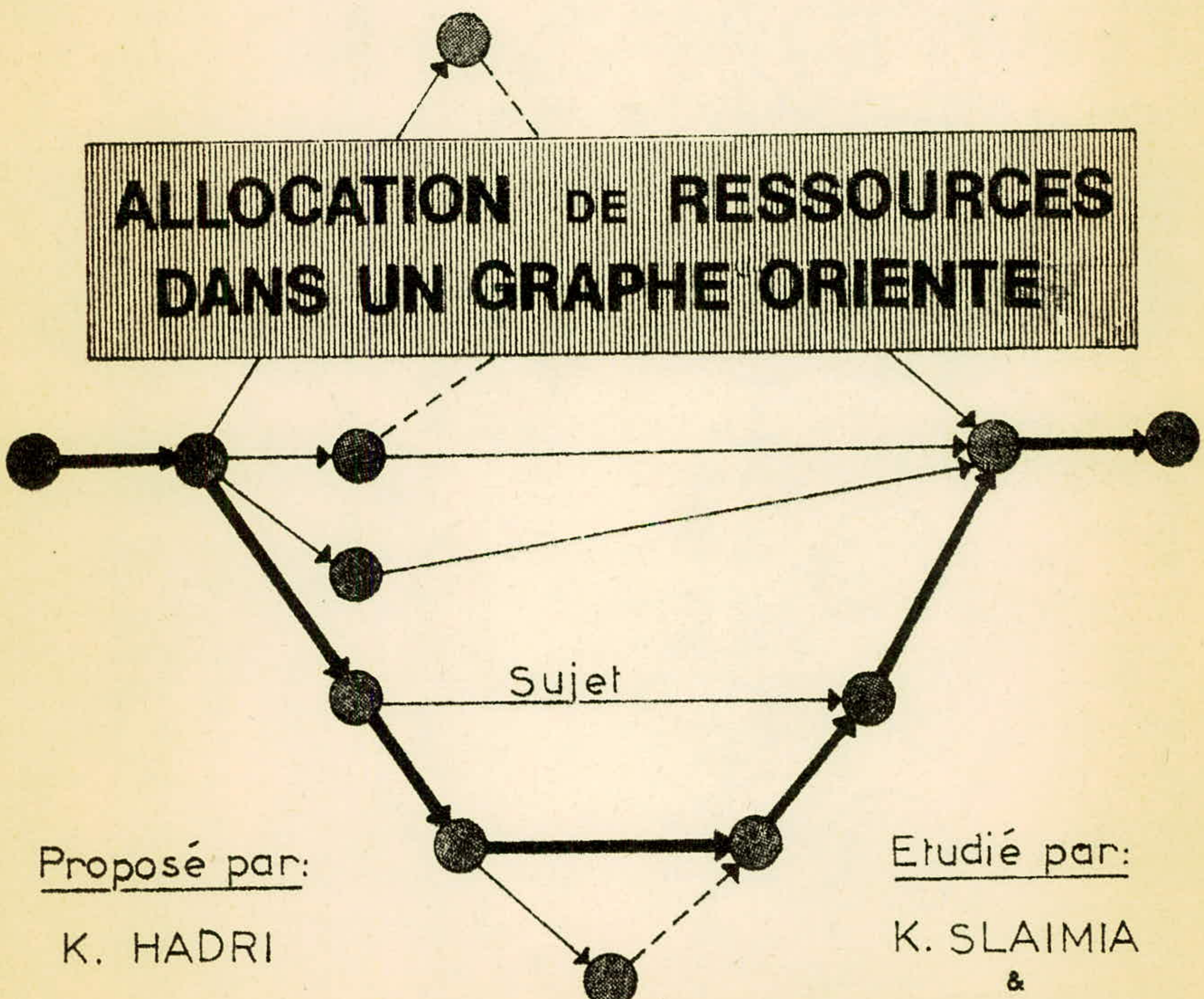
JUIN 1975

UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE

ALLOCATION DE RESSOURCES DANS UN GRAPHE ORIENTE



Proposé par:

K. HADRI

Etudié par:

K. SLAIMIA
&
S. FERHATI

JUIN 1975

A N N E X E S

PROGRAMMATION

NOUS REMERCIONS 'BENMESSAOUD' DE SA PRECIEUSE COLLABORATION ET DE SON DEVOUEMENT LESQUELS NOUS ONT PERMIS D'ELABORER CE FASCICULE DE PROGRAMMATION.

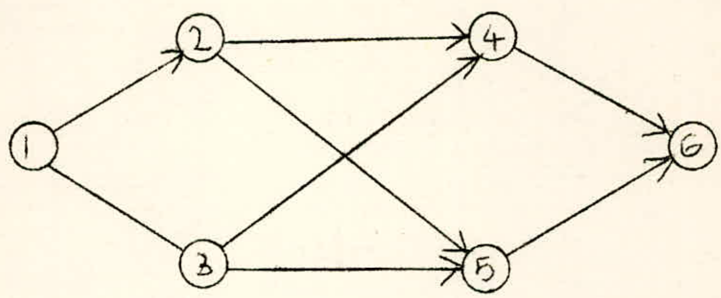
ANNEXE "A"

A1 - DESCRIPTION D'UN GRAPHE SUR ORDINATEUR

I. DICTIONNAIRE D'UN GRAPHE

C'est un tableau à simple entrée dont les lignes se réfèrent chacune à un sommet et portent l'énumération des suivants :

Exemple



x	$\Gamma^+(x)$
1	2, 3
2	4, 5
3	4, 5
4	6
5	6
6	-

Le dictionnaire d'un graphe est en outre assez commode pour conduire des calculs, particulièrement sur ordinateur, parce qu'il est peu encombrant, facile à "entrer" et à "sortir". Nous en fournissons ci-après une amélioration.

Le principe de la représentation qui est exposée ici, est de ne mentionner en machine que les arcs du graphe qui existent.

Pour cela, nous utiliserons deux tableaux :

1) un tableau qui donnera pour chaque sommet du graphe le nombre d'arcs issus de ce sommet,

2) un tableau qui donnera pour chaque arc son extrémité terminale.

Soit NARC le nom du premier tableau, IMAGE le nom du second.

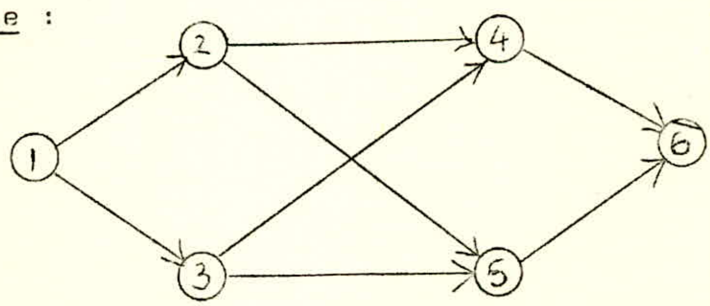
NARC (I) = p	p étant le degré extérieur du sommet I autrement dit le nombre d'arcs qui partent de I.
IMAGE (K) = J	J destination d'un des p arcs issus de I $0 < K < p$

Pour rendre la description plus souple, utilisons le tableau NARC comme pointeur. Pour cette raison, il vaut mieux poser :

NARC (I) = NARC (I-1) + nombre d'arcs issus du sommet I.

En posant que NARC (0) = 0

Exemple :



NARC (0) = 0	IMAGE (1) = 2	issus de 1
NARC (1) = 2	IMAGE (2) = 3	
NARC (2) = 4	IMAGE (3) = 4	issus de 2
NARC (3) = 6	IMAGE (4) = 5	
NARC (4) = 7	IMAGE (5) = 4	issus de 3
NARC (5) = 8	IMAGE (6) = 5	
NARC (6) = 8	IMAGE (7) = 6	issus de 4
	IMAGE (8) = 6	issus de 5

Le tableau NARC aura pour longueur le nombre de sommets, tandis qu'IMAGE aura pour dimension le nombre d'arcs.

Nous pouvons définir aussi d'autres tableaux, par exemple le tableau IVALU contient les longueurs associées aux arcs.

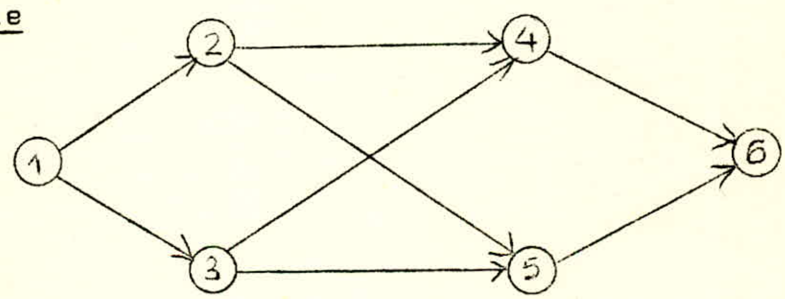
II. MATRICE BOOLEENNE D'UN GRAPHE

On attribue au graphe G = (X,U) une matrice carrée M = (Mij) ainsi définit :

$$M_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pour } (x_i, x_j) \notin U \\ 1 \text{ pour } (x_i, x_j) \in U \end{cases}$$

Cette matrice s'appelle la matrice associée au graphe.

Exemple



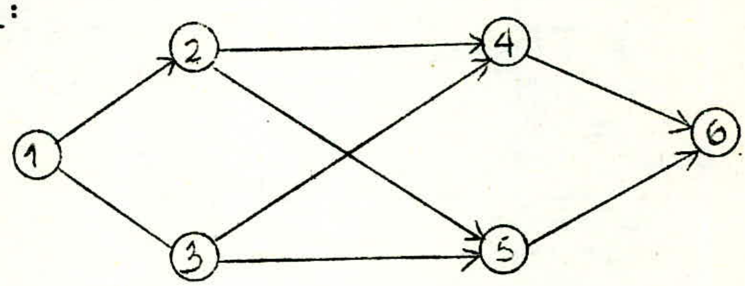
$$M = \begin{array}{c} {}_{i}\backslash^{j} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

III. AUTRE METHODE

Soient A(J) et B(J) deux tableaux de même longueur qui nous aiderons à décrire un graphe par l'intermédiaire de ces arcs.

A(J) comprend les queues des arcs du graphe et B(J) les têtes correspondantes.

Exemple :



A(J)	B(J)
1	2
1	3
2	4
2	5
3	4
3	5
4	6
5	6

A2 DETERMINATION DES RANGS ET DES CIRCUITS EVENTUELS

I. METHODE PRINCIPALE

Soit un graphe $G = (X, \Gamma)$ ayant une matrice associée M.

Les hypothèses suivantes sont équivalentes :

a) Indépendamment du choix de $A \subset X$ ($A \neq \emptyset$), on n'obtient jamais pour $A - \Gamma A$ l'ensemble vide (pas de circuit).

b) Il existe une numérotation des sommets, dans laquelle le numéro de chaque sommet est toujours plus petit que les numéros de ses successeurs et toujours plus grand que les numéros de ses prédecesseurs.

Démonstration :

Etant donné que G... posséde la propriété a), il y a au moins un élément $a \in A$ qui n'a aucun prédécesseur direct en A. Nous appelerons cet élément x1. Pour la même raison, il y a en X - (x1) au moins un sommet qui en dehors de (x1) n'a aucun prédécesseur direct. Appelons le x2. Nous pouvons continuer de procéder ainsi jusqu'à xi. Dans X - (x1,x2,..,xi) nous avons au moins un sommet qui, excepté (x1,x2,...,xi) n'a aucun prédécesseur. Nous l'appelerons xi + 1. Il est ainsi possible de numéroter chaque sommet et cette numérotation posséde la propriété b).

Considérons tout d'abord un graphe $G = (X, \Gamma)$ qui ne contient aucun circuit. De l'ensemble des sommets X, on peut extraire l'ensemble partiel :

$$C_o = X - \Gamma X$$

L'ensemble Co contient tous les sommets qui n'ont aucun prédécesseur. On peut opérer de la même façon avec l'ensemble X - Co et on obtient l'ensemble partiel :

$$C_1 = (X - C_o) - \Gamma\,(X - C_o)$$

On obtient ainsi une répartition de l'ensemble X en ensembles partiels Ci (i = 0,1,...,r,...,p), et on ne doit y chercher les prédécesseurs du r^e ensemble partiel Cr que dans un ensemble partiel C_ρ avec $\rho < r$. Pour r = 0, il n'y a pas de prédécesseurs. X est donc réparti comme ci-après, en (p+1) classes non vides :

$$Co = X - \Gamma X$$

$$C1 = (X-Co) - \Gamma\ (X-Co)$$

$$C2 = (X-Co-C1) - \Gamma\ (X-Co-C1)$$

!

!

$$Cr = (X-Co - \dots - Cr-1) - \Gamma\ (X-Co - \dots - Cr-1)$$

!

!

$$Cp = (X-Co-\dots-Cr-\dots-Cp-1) - \Gamma\ (X-Co-\dots-Cr-\dots-Cp-1)$$

D'un sommet de la $r^{ème}$ classe Cr on dit qu'il possède le rang r. Le théorème suivant sert de base à une méthode simple de détermination du rang.

THEOREME

Dans un graphe où il n'y a pas de circuit, un sommet est du rang r, et seulement du rang r, si le plus long des chemins dont il constitue les sommets finals est constitué de r arcs

De tout ce qui vient d'être dit, il ressort que dans l'hypothèse où le graphe ne contient pas aucun circuit, on dispose d'une méthode simple de détermination du rang des sommets.

Soit M = (mij) la matrice associée au graphe où :

$$mij = \begin{cases} 0 & (xi;xj) \notin U \\ 1 & (xi;xj) \in U \end{cases}$$

pour i, j = 1,2, ...,n

La répartition du graphe en rangs a été faite en recherchant tous les sommets qui ne possédent pas de prédécesseur. Ces sommets sont attribués au rang correspondant et dissociés pour déterminer le rang suivant. A présent, nous pourrions opérer de même dans la matrice associée au graphe. Les éléments 1 de chaque colonne de la matrice indiquent les prédécesseurs directs du sommet que cette colonne caractérise. La somme $\sum_i mij$, j =1,2,...,n indique donc le nombre des éléments de l'ensemble partiel qui contient les prédécesseurs directs du sommet xj. Si cet ensemble est vide, c'est-à-dire si $\sum_i mij = 0$, le sommet xj n'a pas de prédécesseurs.

Pour sjo E Co, on doit avoir :

$$\sum_i mijo = 0$$

Après décomposition de l'ensemble partiel Co, nous obtenons ;

$$\sum_{i \neq jo} mij \text{ et } j \neq jo$$

Pour l'ensemble partiel C1, la condition ci-après est donc valable :

$$\sum_{i \neq jo} mij1 = 0 \text{ et } j1 \neq jo$$

On peut de cette façon définir tous les Co = (xjo), C1 = (xj1), ... , Cr = (xjr),.., Cp = (xjp). La condition générale s'exprime comme suit :

$$\sum_{i \neq jo, j1, \ldots, jr-1} mijr = 0 \text{ et } jr \neq jo, j1, \ldots, jr-1$$

En conséquence, on peut formuler un algorithme pour la détermination du rang.

<u>ALGORITHME 1</u> : Détermination du rang.

a) additionner les éléments dans les colonnes de la matrice M.

b) attribuer aux sommets xi (i = 1, ..., n) dont le total des colonnes est nul, le rang r = 0.

c) rayer tous les sommets dont le total de la colonne considérée est nul.

d) soustraire de tous les totaux des colonnes les éléments correspondants dans la ligne du sommet rayé.

e) attribuer à tous les sommets dont le nouveau total de la colonne est nul, le rang (r+1).

f) recommencer comme en c) d) et e) jusqu'à ce que les totaux des colonnes nouvellement calculés deviennent nuls.

Si un graphe contient des circuits on ne peut attribuer de rang a aucun sommet contenu dans le circuit, car un tel sommet $x \in X$ ne remplit pas la condition de ne détenir que des prédécesseurs d'un rang inférieur. On peut dans ce cas constituer un ensemble partiel $A \subset X$ avec $x \in A$, de façon à obtenir :

$$A - \Gamma A = \emptyset$$

Transposé sur l'algorithme de détermination du rang, cela signifie qu'on ne peut plus trouver de sommet $x_j \in X$ dans la matrice, pour lequel est valable la condition.

$$\Sigma m_{ij} = 0$$

bien que :

$$X - C_o - C_1 - \quad - C_r) \neq \Phi$$

On peut reconstruire le circuit à partir de la matrice associée au graphe. Nous élargissons l'algorithme 1 en un algorithme 2 pour rechercher le circuit.

ALGORITHME 2

a) si aucune colonne de somme nulle n'apparaît plus après avoir procédé comme en f) de l'algorithme 1, bien que tous les totaux des colonnes ne soient pas encore nuls, choisir une colonne quelconque j d'un sommet x_j dont le rang est encore indéterminé.

b) rechercher dans la jème colonne, l'élément 1 dans la ième ligne d'un sommet x_i, $(i = 1,\dots,n)$ dont le rang n'est pas encore déterminé.

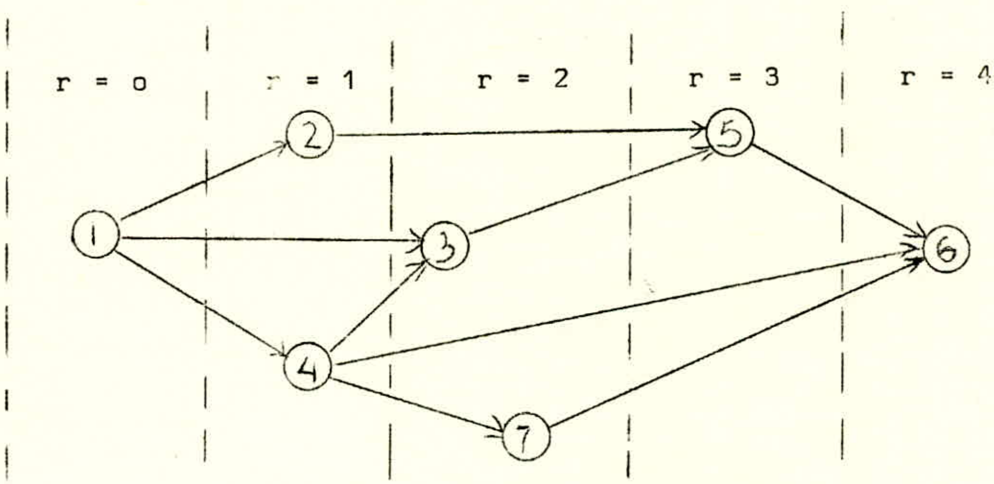
c) aller à la ième colonne, remplacer i par j et recommencer b) et c) jusqu'à ce que la colonne trouvée en c) concorde avec celles choisies en a). Les sommets des colonnes parcourues forment uncircuit.

L'algorithme 2 permet de la même façon de trouver d'autres circuits.

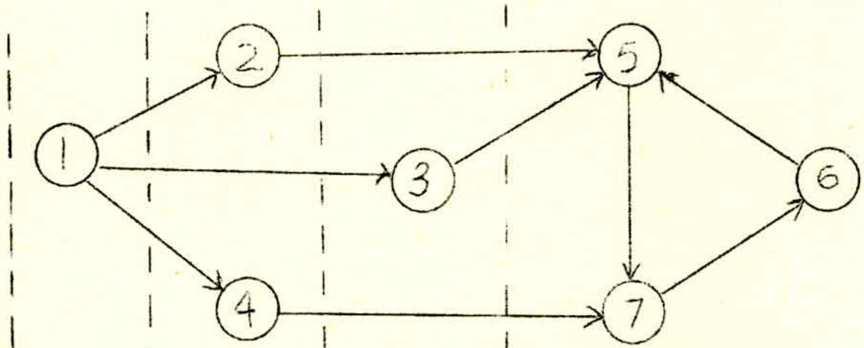
II. APPLICATIONS

Exemple 1 : détermination du rang des sommets dans un graphe sans circuit.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



	1	2	3	4	5	6	7	
1	0	1	1	1	0	0	0	
2	0	0	0	0	1	0	0	
3	0	0	0	0	1	0	0	
4	0	0	1	0	0	1	1	
5	0	0	0	0	0	1	0	
6	0	0	0	0	0	0	0	
7	0	0	0	0	0	1	0	
	0	1	2	1	2	3	1	r=0 sommet : 1
		0	1	0	2	3	1	r=1 sommets :2,4
			0		1	2	0	r=2 sommets :3,7
					0	1		r=3 sommet : 5
						0		r=4 sommet : 6



La matrice associée est alors :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'algorithme 2 dans la recherche des circuits et des rangs apparaît dans le schéma ci-après. La dernière ligne du schéma ci-après ne contient plus aucun total nul et la recherche du cycle commence. Le cycle trouvé de la façon décrite ci-dessus est inscrit dans le schéma.

1	2	3	4	5	6	7		
0	1	1	1	0	0	0		
0	0	0	0	1	0	0		
0	0	0	0	1	0	0		
0	0	1	0	0	0	1		
0	0	0	0	0	0	1		
0	0	0	0	1	0	0		
0	0	0	0	0	1	0		
0	1	2	1	3	1	2	r=o	sommet : 1
X	0	1	0	3	1	2	r=1	sommets: 2,4
	X	0	X	2	1	1	r=2	sommet : 3
				1	1	1		

III. ORGANIGRAMME ET PROGRAMME FORTRAN

Données :

M (I,J) matrice associée au graphe

N nombre de sommets du graphe.

Variables :

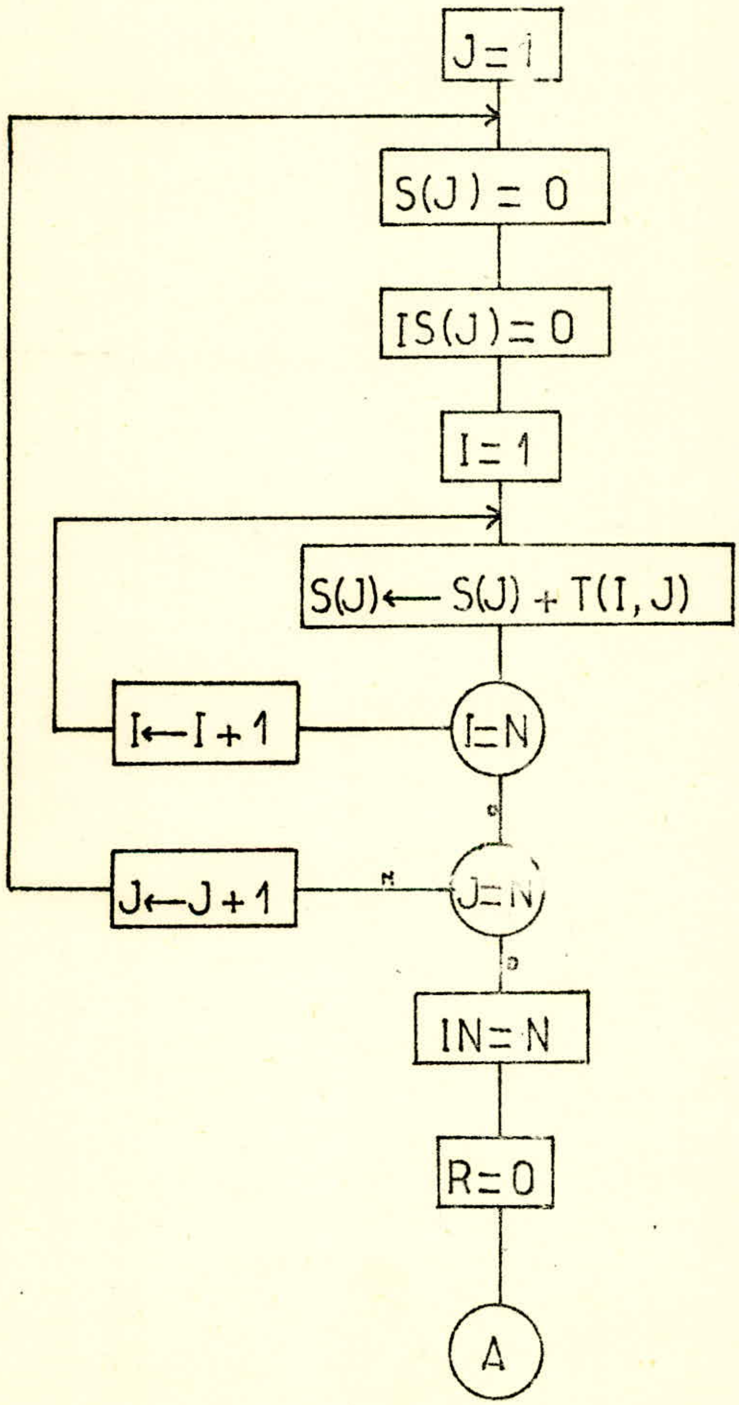
IN nombre de sommets en attente d'avoir un rang.

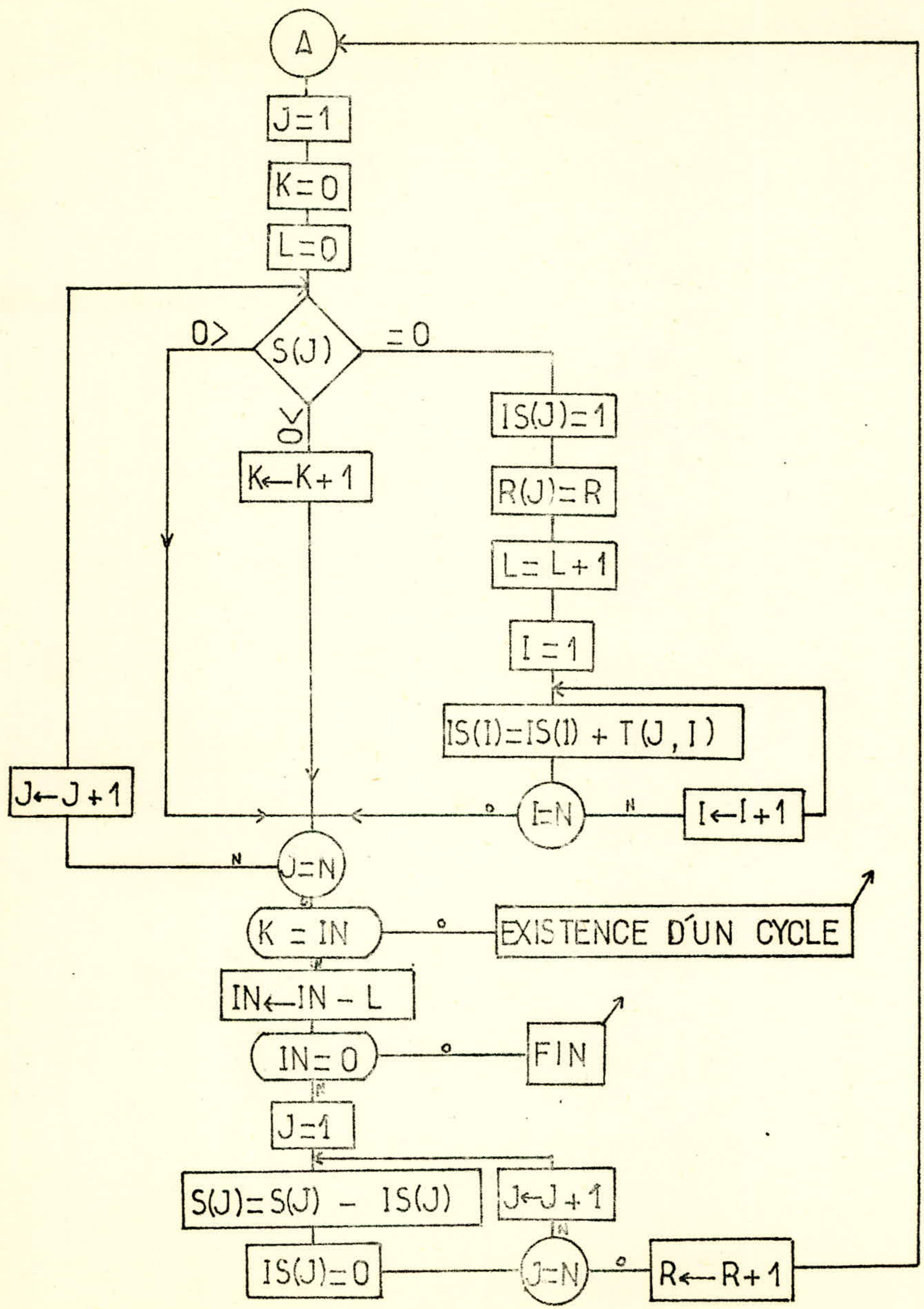
LS(J) ligne où s'effectue la somme des colonnes de M(I,J).

LM(J) colonne désignant les rangs des sommets.

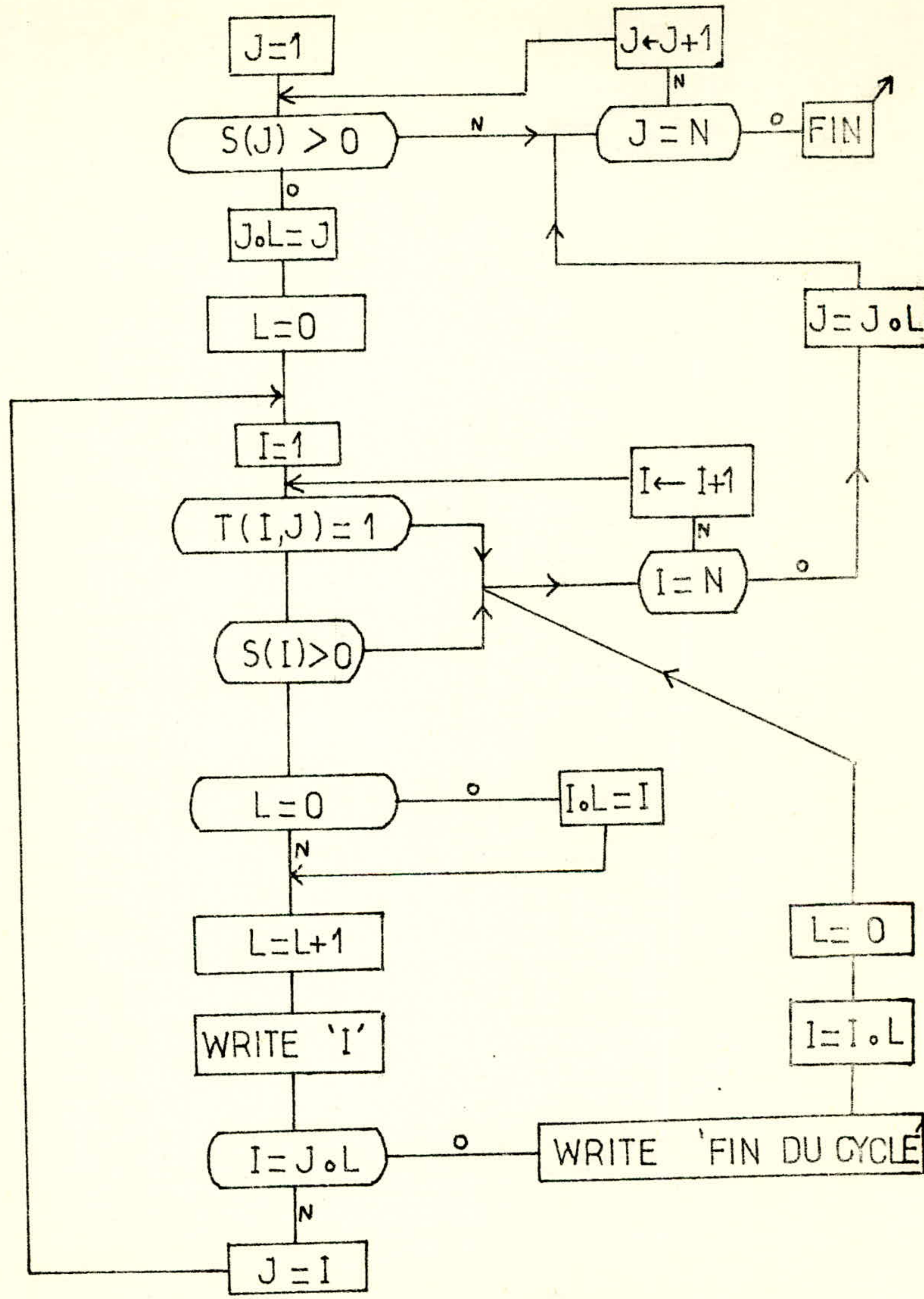
IS(J) colonne où sont disposés les sommets ayant reçu un rang.

CALCUL DU RANG DES SOMMETS D'UN GRAPHE





A
J=1
K=0
L=0
S(J)
0>
=0
<0
K←K+1
IS(J)=1
R(J)=R
L=L+1
I=1
IS(I)=IS(I) + T(J, I)
J←J+1
I=N
I←I+1
J=N
K = IN
EXISTENCE D'UN CYCLE
IN←IN - L
IN=0
FIN
J=1
S(J)=S(J) - IS(J)
J←J+1
IS(J)=0
J=N
R←R+1



J=1
J←J+1
N
S(J) > 0
N
J = N
o
FIN
o
JoL=J
L=0
J=JoL
I=1
I← I+1
N
T(I,J)=1
I=N
o
S(I)>0
L=0
o
IoL=I
N
L=L+1
L= 0
WRITE 'I'
I=IoL
I=JoL
o
WRITE 'FIN DU CYCLE'
N
J=I

```
      DIMENSION M(7,7),LM(7),LS(7),IS(7)
      N=7
      READ(2,1) ((M(I,J),J=1,N),I=1,N)
1     FORMAT(7I1)
      DO 2 J=1,N
      LS(J)=0
      IS(J)=0
      DO 2 I=1,N
      LS(J)=LS(J)+M(I,J)
2     CONTINUE
      IN=N
      IR=0
11    J=1
      K=0
      L=0
20    IF(LS(J)) 3,4,5
4     LM(J)=IR
      L=L+1
      IS(J)=1
      DO 90 I=1,N
90    IS(I)=IS(I)+M(I,J)
      GO TO 3
5     K=K+1
3     IF(J-N) 19,18,19
19    J=J+1
      GO TO 20
18    IF(K-IN) 6,7,6
6     IN=IN-L
      IF(IN) 9,8,9
9     DO 10 J=1,N
      LS(J)=LS(J)-IS(J)
10    IS(J)=0
      IR=IR+1
      GO TO 11
7     WRITE(3,12)
12    FORMAT('EX UN C')
```

```
      J=1
104   IF(LS(J)) 100,100,101
100   IF(J-N)  102,103,102
103   GO TO 14
102   J=J+1
      GO TO 104
101   JOL=J
      IL=0
120   I=1
109   IF(M(I,J)-1) 105,106,105
105   IF(I-N) 107,108,107
107   I=I+1
      GO TO 109
108   J=JOL
      GO TO 100
106   IF(LS(I)) 105,105,110
110   IF(IL) 111,112,111
112   IOL=I
111   IL=IL+1
      WRITE(3,30) I
 30   FORMAT(5X,I1//)
      IF(I-JOL) 113,114,113
114   WRITE(3,40)
 40   FORMAT (5X,'FIN DU CYCLE')
      I=IOL
      IL=0
      GO TO 105
113   J=I
      GO TO 120
  8   WRITE(3,13) (LM(J),J=1,N)
 13   FORMAT(5X,'RAG=',I2//)
 14   CALL EXIT
      END
```

ANNEXE "B"

DETERMINATION DU CHEMIN CRITIQUE ET DES PROBLEMES ASSOCIES

ORGANIGRAMME ET PROGRAMME FORTRAN :

Données :

NARC (I)
IMAGE (J) | description du graphe.

IVALU (J) : tij affectés aux arcs du graphe.

N : nombre de sommets du graphe.

NENT : numéro du sommet d'entrée.

NSORT : numéro du sommet de sortie.

VAriables :

IPATH (I) : date au plus tard de l'évènement I

KCHEM (I) : date au plus tôt de l'évènement I

IDEP : début d'une activité (i,j)

IFIN : fin d'une activité (i,j)

ITET : date de début au plus tôt de l'activité (i,j)

IQUEU : date de début au plus tard de l'activité (i,j)

JTET : date de fin au plus tôt de l'activité (i,j)

JQUEU : date de fin au plus tard de l'activité (i,j).

MLIBR : marge libre

MTOT : marge totale

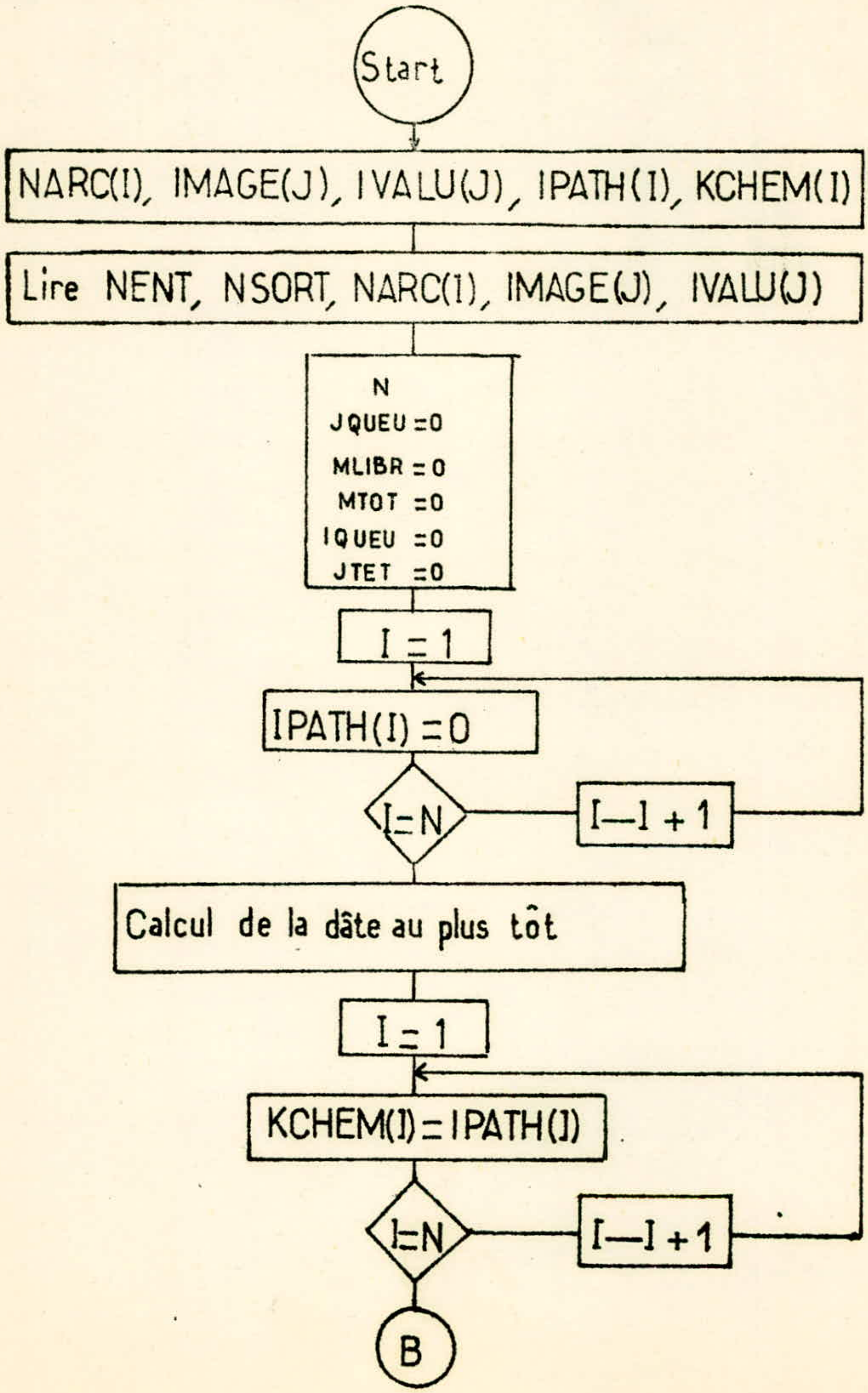
<u>Remarque</u> :

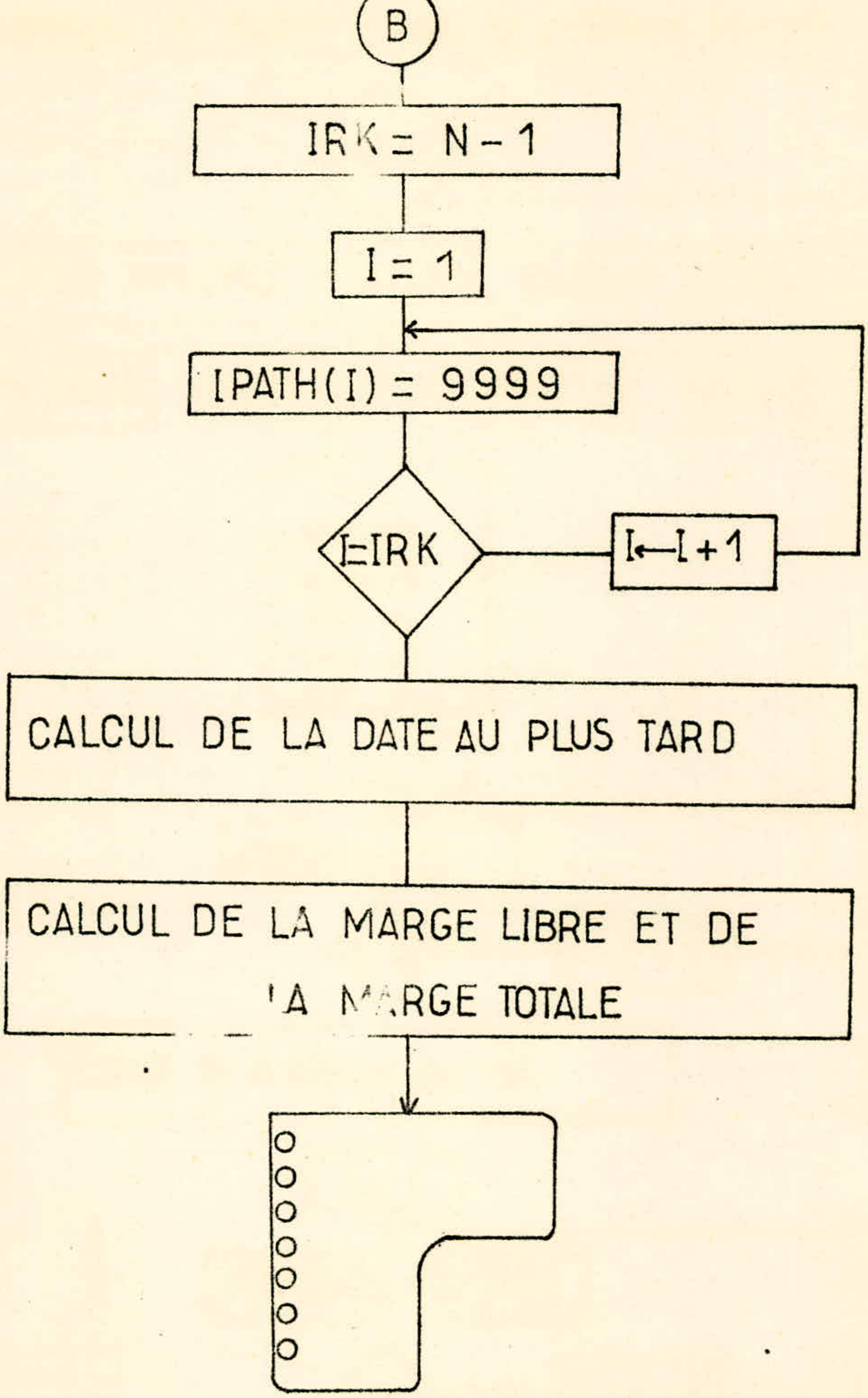
L'algorithme ci-après n'est valable que pour les graphes dont la numérotation est conforme aux rangs des sommets du graphe.

La date au plus tôt pour chaque évènement est calculée à l'aide de l'algorithme de *FORD* pour la recherche du chemin de longueur maximale. Par contre, sa date au plus tard est obtenue par l'intermédiaire d'une procédure qui est une synthèse de l'algorithme naturel et de l'algorithme de *FORD* pour la recherche du chemin de longueur minimale.

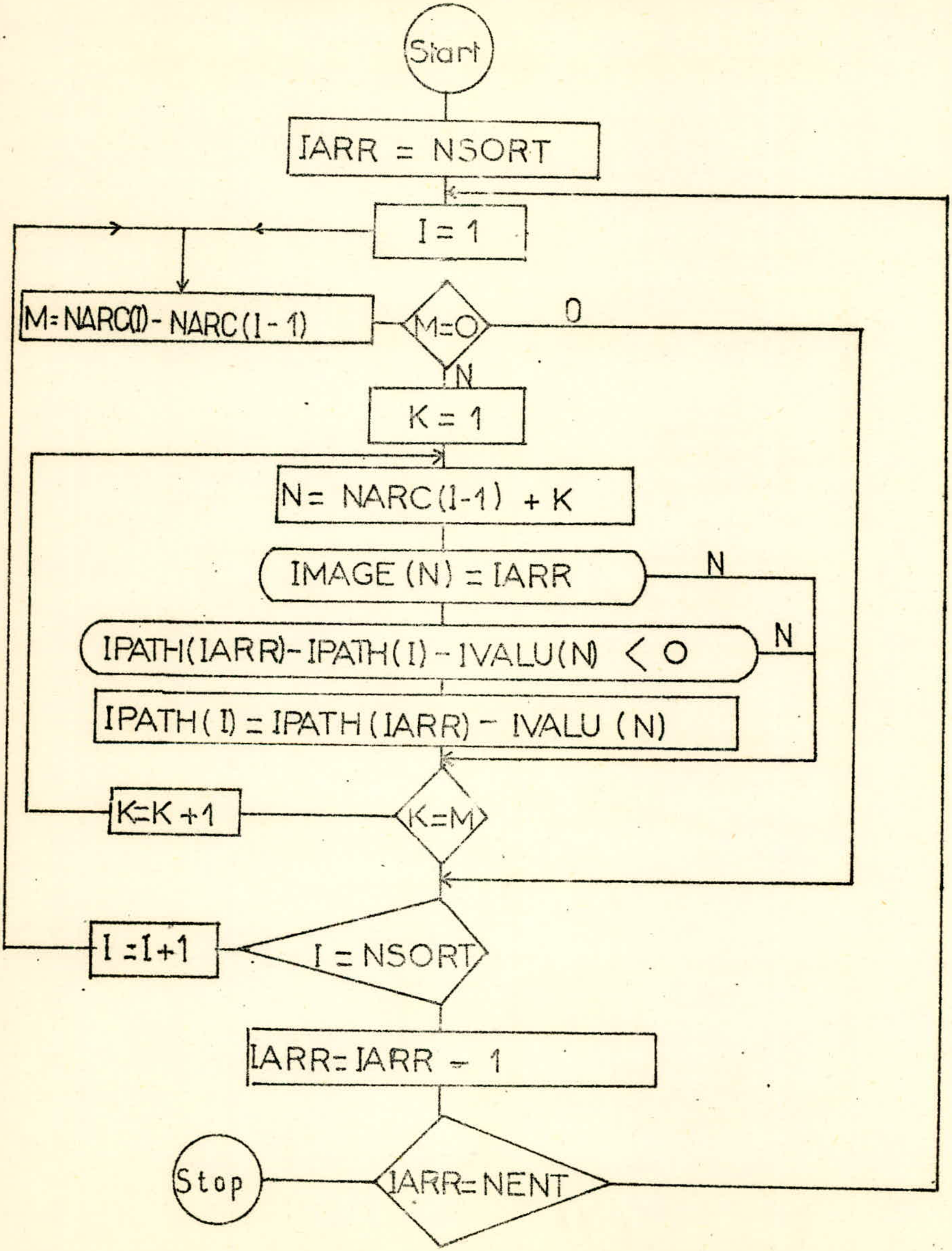
ORGANIGRAMME GENERAL

Détermination du chemin critique et problèmes associés

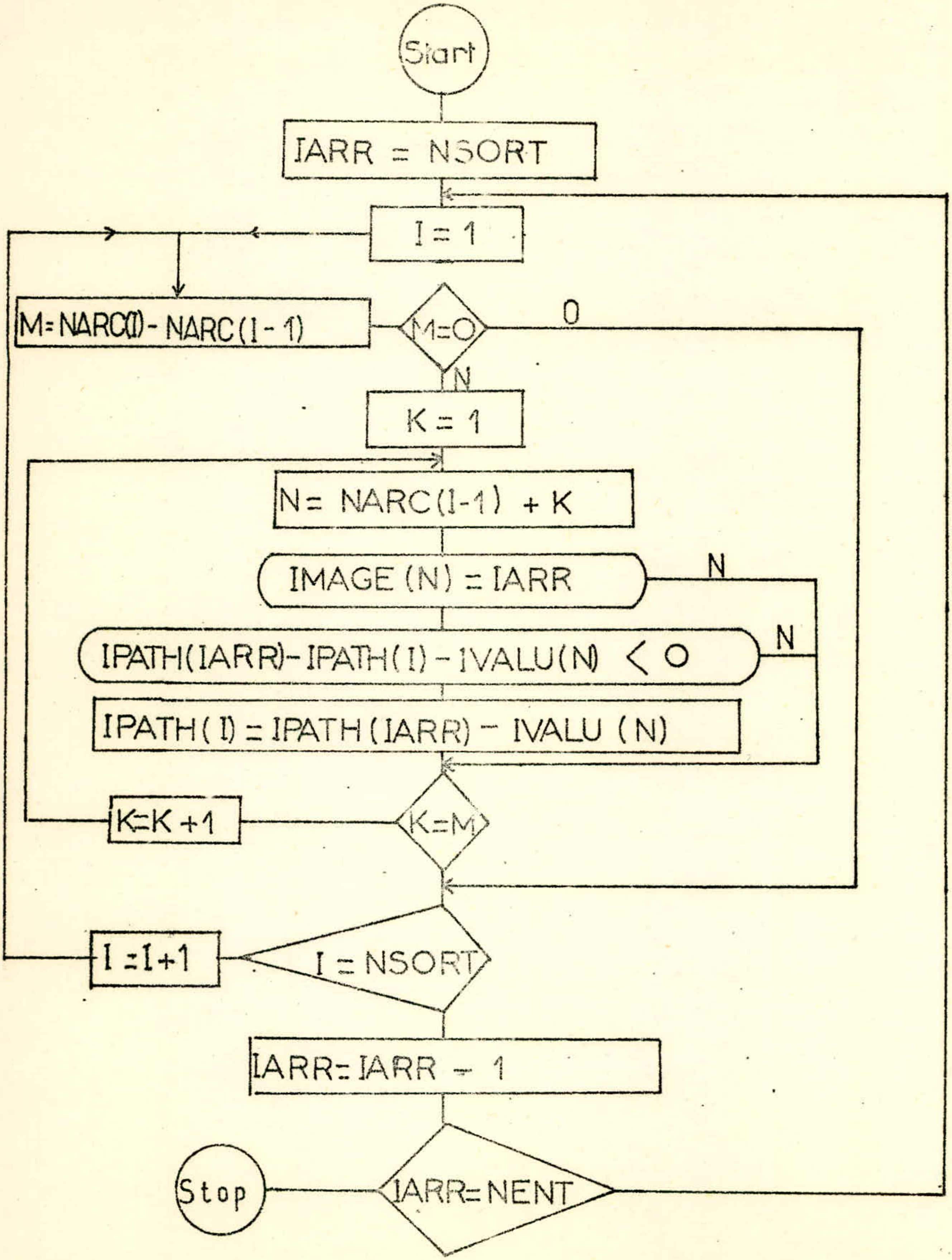



B
IRK = N - 1
I = 1
IPATH(I) = 9999
I=IRK
I←I+1
CALCUL DE LA DATE AU PLUS TARD
CALCUL DE LA MARGE LIBRE ET DE
LA MARGE TOTALE

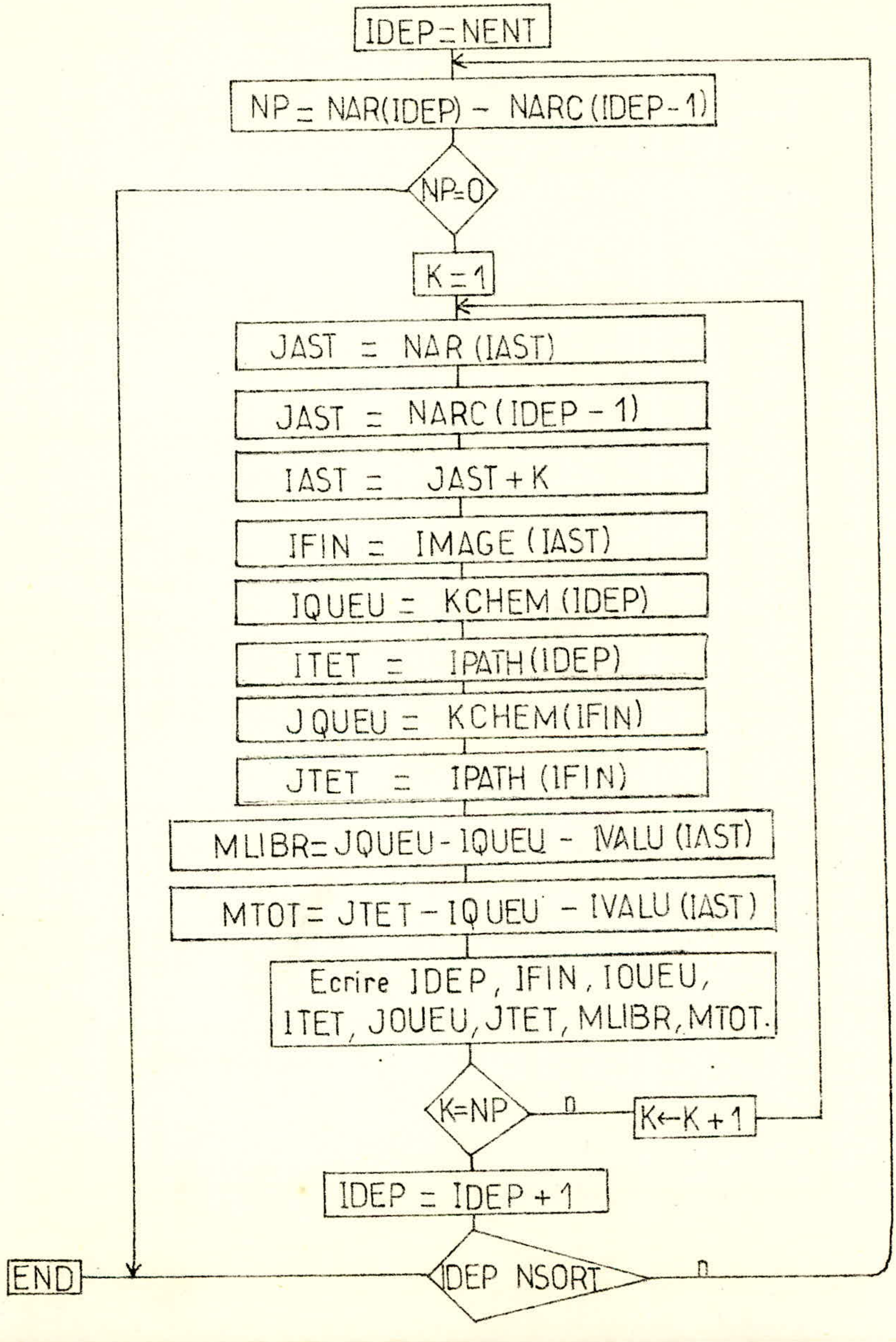
CALCUL DE LA DATE AU PLUS TARD



CALCUL DE LA DATE AU PLUS TARD



CALCUL DE LA MARGE LIBRE ET DE LA MARGE TOTALE



```
      DIMENSION NARC(15),IMAGE(21),IVALU(21),IPATH(15),KCHEM(15)
1000  FORMAT(12,13)
1001  FORMAT(15I2)
1002  FORMAT(21I2)
1003  FORMAT(21I2)
1006  FORMAT(8(10X,I3))
1004  FORMAT(16X,'TACHE',16X,'DATE DE DEBUT',12X,'DATE DE FIN',18X,'
     1MARGE'//)
1005  FORMAT(10X,'N. ANT',5X,'N. POST',10X,'E',12X,'1',12X,'E',12X,'L',1
     20X,'LIBRE',7X,'TOTALE'///)
2000  FORMAT(50X,32HDETERMINATION DU CHEMIN CRITIQUE///)
      READ(2,1000) NENT,NSORT
      READ(2,1001) NARC
      READ(2,1002) IMAGE
      READ(2,1003) IVALU
      WRITE(3,2000)
      N=15
      MLIBR=0
      MTOT=0
      IQUEU=0
      ITET=0
      JQUEU=0
      JTET=0
      DO 60 I=1,15
   60 IPATH(I)=0
C***************CALCUL DE LA DATE AU PLUS TOT*************************
      IDEP=NENT
  916 IF(IDEP-1) 905,904,905
```

```
904  KMIN=1
     GO TO 906
905  KMIN=IDEP-1
     KMIN=NARC(KMIN)+1
906  KMAX=NARC(IDEP)
     K=KMIN
907  ICK=IMAGE(K)
     IF(IVALU(K)-IPATH(ICK)+IPATH(IDEP)) 910,910,908
908  IPATH(ICK)=IPATH(IDEP)+IVALU(K)
     IF(IDEP-IMAGE(K)) 910,910,912
912  IDEP=IMAGE(K)
     GO TO 916
910  IF(K-KMAX) 911,913,911
911  K=K+1
     GO TO 907
913  IDEP=IDEP+1
     IF(IDEP-NSORT) 916,915,915
915  DO 917 I=1,N
917  KCHEM(I)=IPATH(I)
     IRK=N-1
     DO 918 I=1,IRK
918  IPATH(I)=9999
C***************CALCUL DE LA DATE AU PLUS TARD***********************
     IARR=NSORT
 10  DO 930 I=1,NSORT
     IF(I-1) 920,919,920
919  M=NARC(I)
     GO TO 921
920  M=NARC(I)-NARC(I-1)
921  IF(M)  923,930,923
923  DO 927 K=1,M
     IF(I-1) 925,924,925
924  N=K
     GO TO 926
925  N=NARC(I-1)+K
926  IF(IMAGE(N)-IARR) 927,928,927
928  IF(IPATH(IARR)-IPATH(I)-IVALU(N)) 929,927,927
```

```
929   IPATH(I)=IPATH(IARR)-IVALU(N)
927   CONTINUE
930   CONTINUE
      IARR=IARR-1
      IF(IARR-NENT) 932,932,10
932   WRITE(3,1004)
      WRITE(3,1005)
C*************CALCUL DE LA MARGE TOTALE ET DE LA MARGE LIBRE*********
      IDEP=NENT
 20   IF(IDEP-1) 934,933,934
933   NP=NARC(IDEP)
      GO TO 935
934   NP=NARC(IDEP)-NARC(IDEP-1)
935   IF(NP) 936,939,936
936   DO 937 K=1,NP
      JAST=NARC(IAST)
      IF(IDEP-1) 40,30,40
 30   IFIN=IMAGE(K)
      IAST=K
      GO TO 938
 40   JAST=NARC(IDEP-1)
      IAST=JAST+K
      IFIN=IMAGE(IAST)
938   IQUEU=KCHEM(IDEP)
      ITET=IPATH(IDEP)
      JQUEU=KCHEM(IFIN)
      JTET=IPATH(IFIN)
      MLIBR=KCHEM(IFIN)-KCHEM(IDEP)-IVALU(IAST)
      MTOT=IPATH(IFIN)-KCHEM(IDEP)-IVALU(IAST)
      WRITE(3,1006) IDEP,IFIN,IQUEU,ITET,JQUEU,JTET,MLIBR,MTOT
937   CONTINUE
      IDEP=IDEP+1
      IF(IDEP-NSORT) 20,939,939
939   CALL EXIT
      END
```

ANNEXE "C"

METHODE HEURISTIQUE

ORGANIGRAMME ET PROGRAMME FORTRAN

Données :

N nombre d'activités du projet

IA(J) sommet prédécesseur de l'activité J (queue) description du graphe

IB(J) sommet successeur de l'activité J (tête) description du graphe

KD(J) durée de l'activité (J) (durée)

MARGE(J) marge totale de l'activité J (TF)

IR 1 disponibilités de la ressource de type 1

IR 2 disponibilités de la ressource de type 2

IRES 1(J) nécessité de l'activité J en ressource de type 1

IRES 2(J) nécessité de l'activité J en ressource de type 2

Variables :

IALFA : horloge

IPRE(K) : prédécesseur d'une activité en cours

ISUC(K) : successeur d'une activité en cours) table des

IDUR(K) : durée d'une activité en cours) en cours.

IC (J) : table de la liste des activités en attente d'être satisfaites.

IC(J) = IBLAN : l'activité J n'est pas en cours, elle n'est pas atteinte.

IC(J) = ICOUR : l'activité J est en cours

IC(J) = IAST : l'activité J a été achevée.

Sous-programmes :

MARGEMAX recherche la marge maximum dans la liste IC(J)

MARGEMIN recherche la marge la marge minimum dans la liste IC(J) afin de pouvoir faire démarrer l'activité J éventuellement.

NEWMARGEMIN recherche d'une nouvelle marge minimum dans IC(J), en raison de l'insuffisance des ressources disponibles pour faire démarrer l'activité correspondante à la marge minimum précédente.

DATMIN recherche dans la table des en-cours l'activité qui s'échève le plus tôt et libérer les ressources qu'elle mobilise.

REVISION fait varier la table IC(J). Une marge qui se trouve dans la liste d'attente exprime que la tâche correspondate est retardée. Par conséquent, sa marge totale doit diminer d'une quantité IBETA.

RANGE 1 Dés qu'une activité s'achève, et si toutes les activités qui ménent à son évènement final sont achevées, les activités suivantes peuvent démarrer. Par conséquent, les marge correspondantes alimentent la liste d'attente IC(J). Cependant, si l'une des activités suivantes est une activité fictive et si les activités qui ménent à son évènement final sont achevées introduire dans IC(J) les marges des activités qui suivent cette activité fictive et ainsi de suite.......

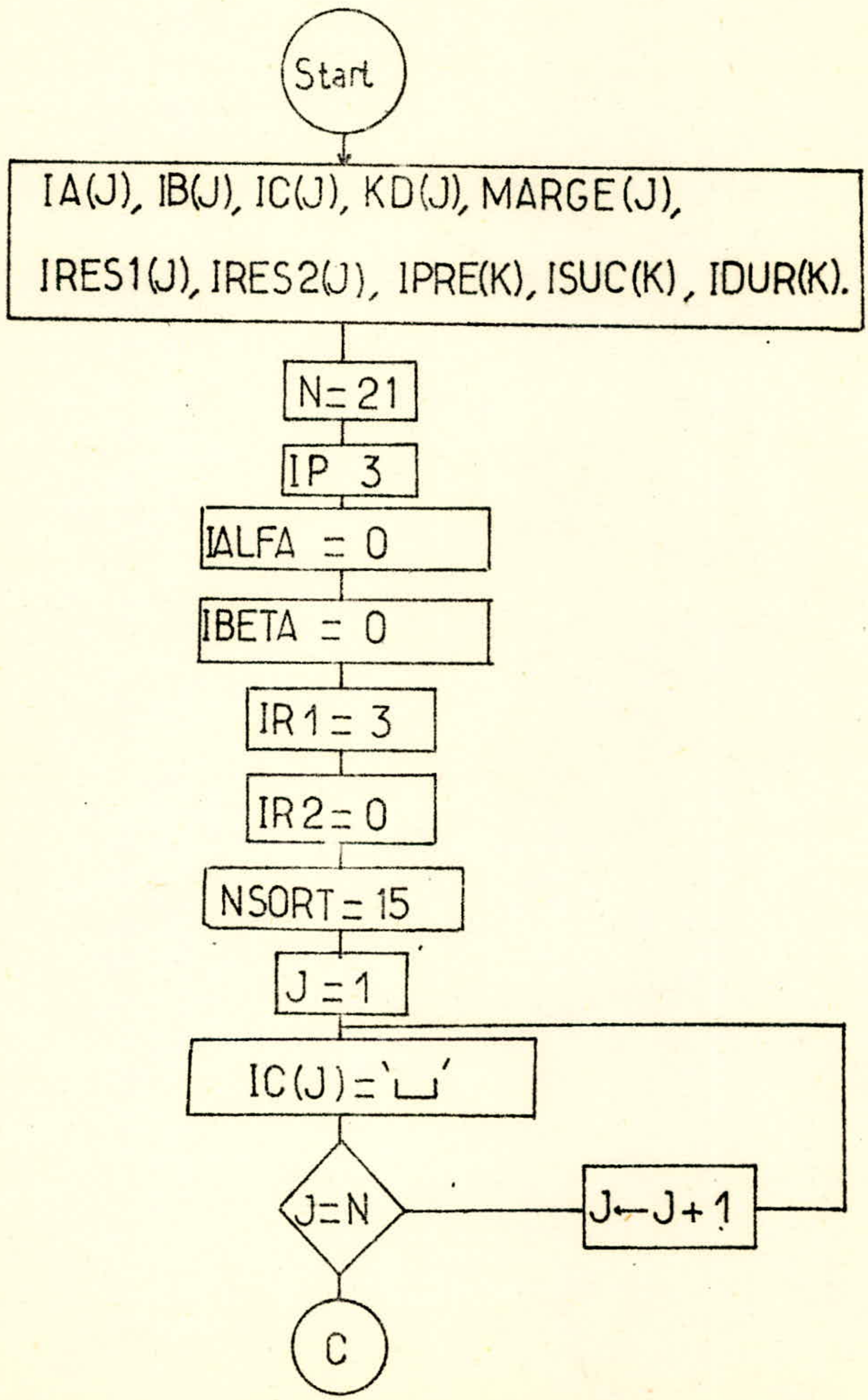
Une étoile est introduite dans IC(J) dés qu'une activité s'achève.

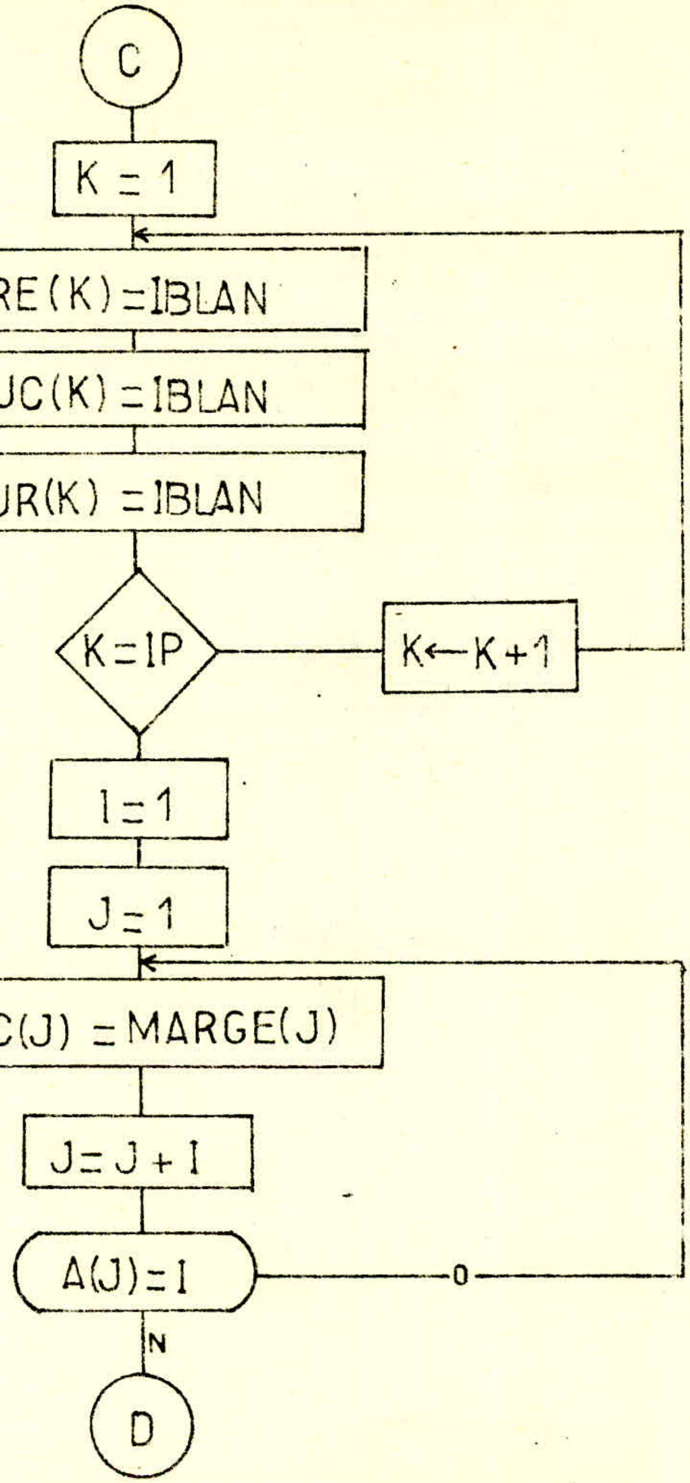
Le sous programme *RANGE 1* est appelé à faire ce travail.

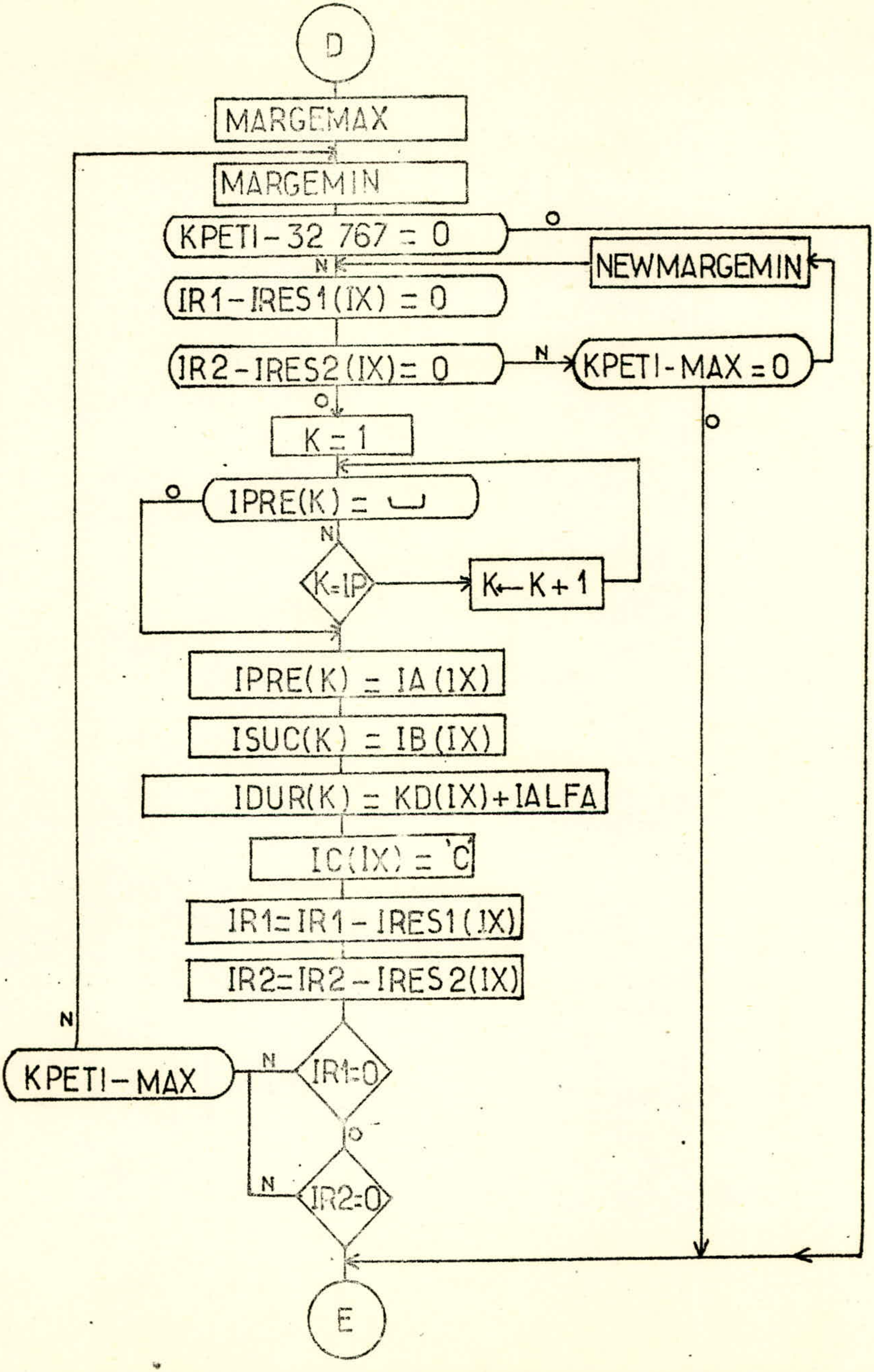
NEGA — Contrôle de la table IC(J). Si elle contient des valeurs négatives, il recherchera la plus négative.

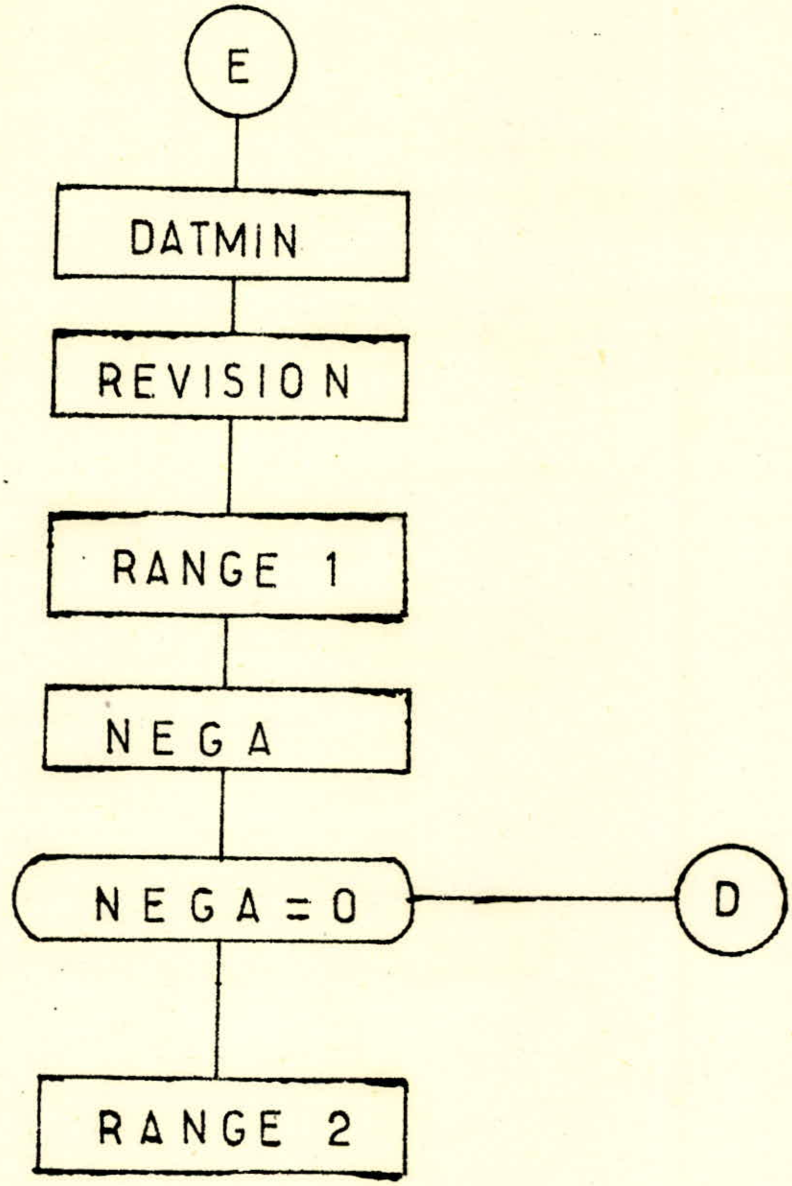
RANGE 2 — Il lui sera fait appel dés que *NEGA* détecte des valeurs négatives dans IC(J). Il genère donc le *N.M.T* (nouvelle marge totale.)

ORGANIGRAMME GENERAL DE LA METHODE HEURISTIQUE (2 types de ressources)

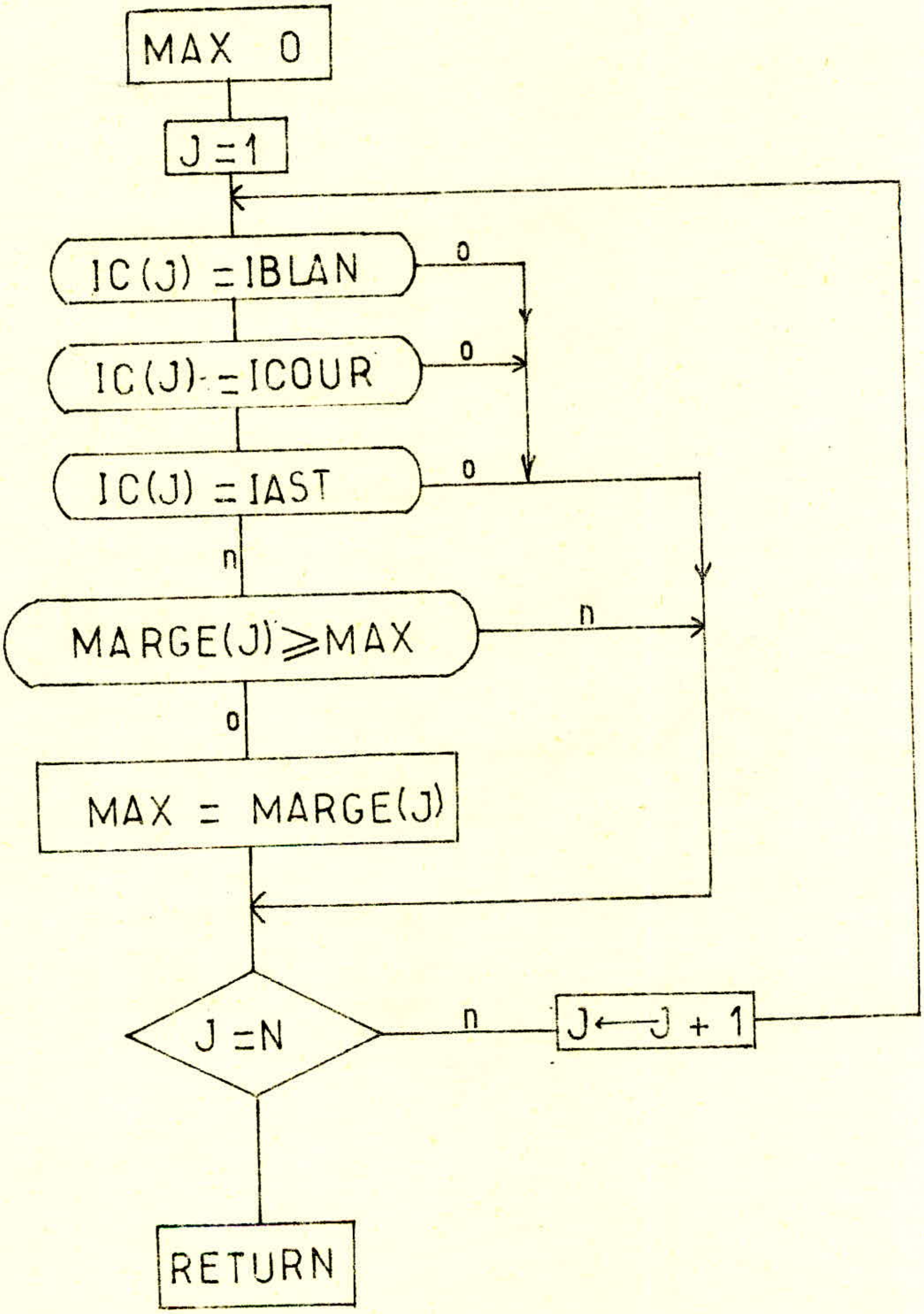



C
K = 1
IPRE(K) = IBLAN
ISUC(K) = IBLAN
IDUR(K) = IBLAN
K = IP
K ← K + 1
I = 1
J = 1
IC(J) = MARGE(J)
J = J + I
A(J) = I
O
N
D

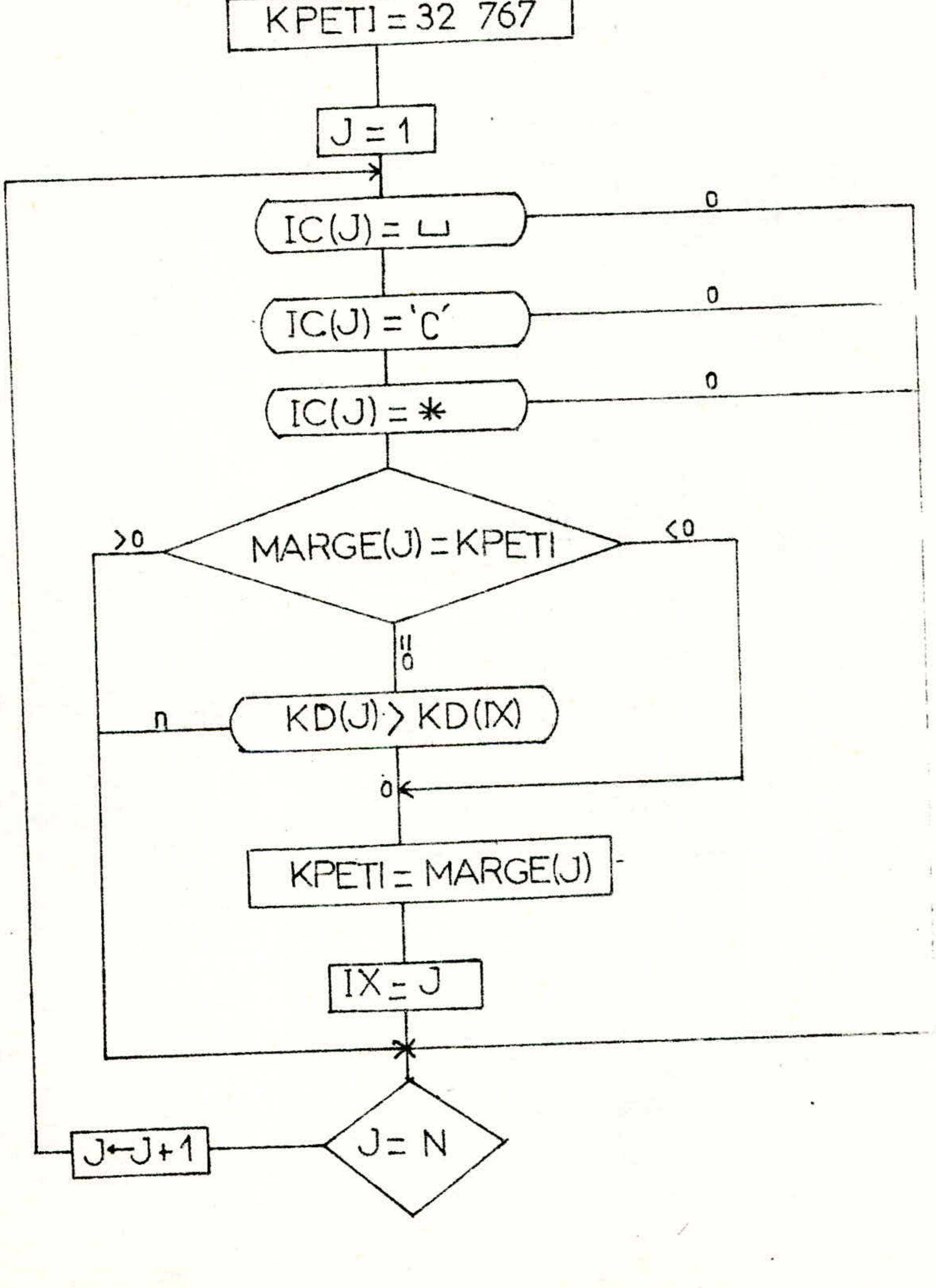

D
MARGEMAX
MARGEMIN
KPETI-32 767 = 0
O
NEWMARGEMIN
N
IR1-IRES1(IX) = 0
IR2-IRES2(IX) = 0
N
KPETI-MAX = 0
O
O
K = 1
O
IPRE(K) = ␣
N
K=IP
K←K+1
IPRE(K) = IA(IX)
ISUC(K) = IB(IX)
IDUR(K) = KD(IX)+IALFA
IC(IX) = 'C'
IR1=IR1-IRES1(IX)
IR2=IR2-IRES2(IX)
N
KPETI-MAX
N
IR1=0
O
N
IR2=0
E


E
DATMIN
REVISION
RANGE 1
NEGA
NEGA = 0
D
RANGE 2

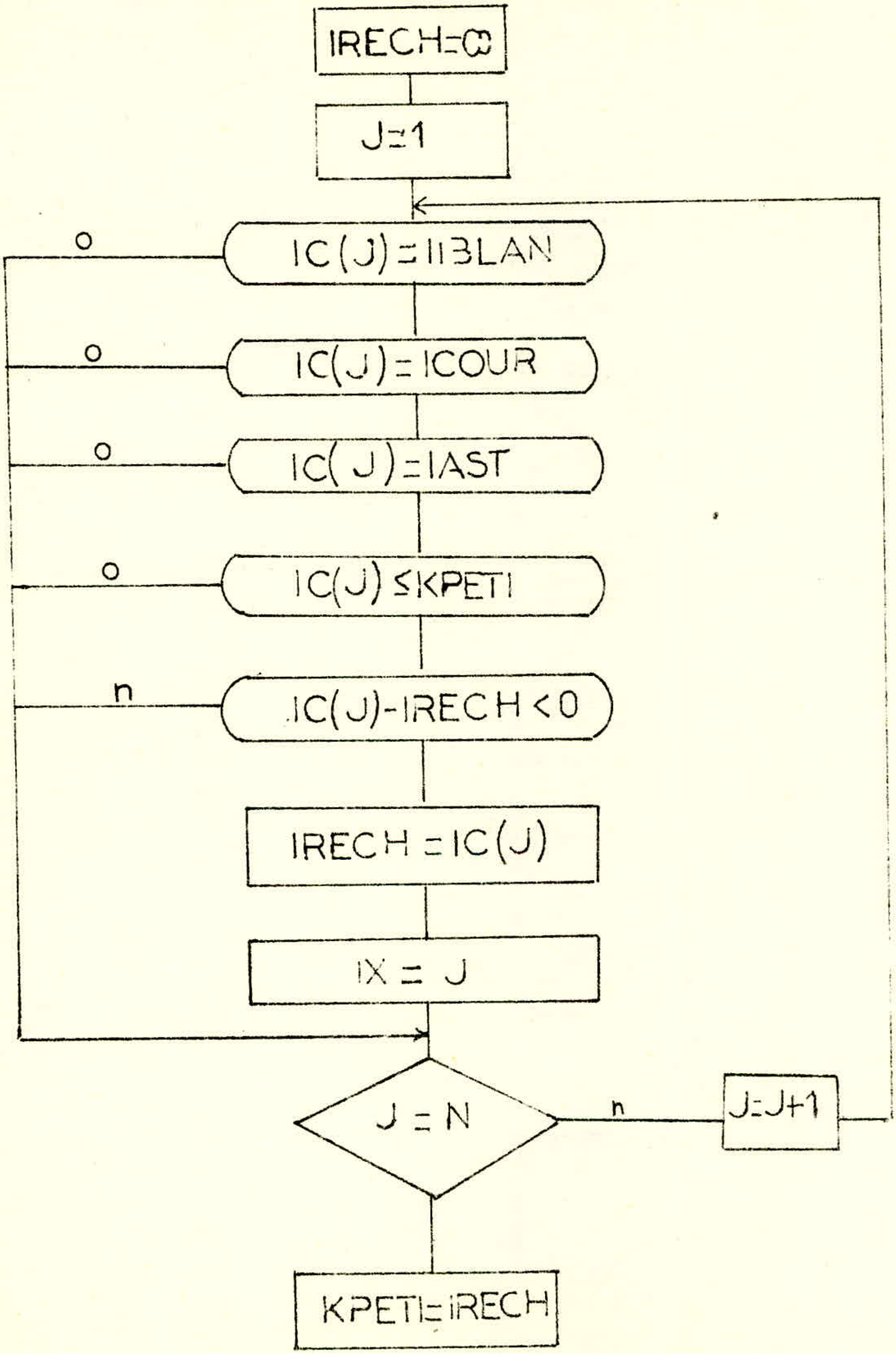
MARGEMAX


MAX 0
J = 1
IC(J) = IBLAN
o
IC(J) = ICOUR
o
IC(J) = IAST
o
n
MARGE(J) ≥ MAX
n
o
MAX = MARGE(J)
J = N
n
J ← J + 1
RETURN

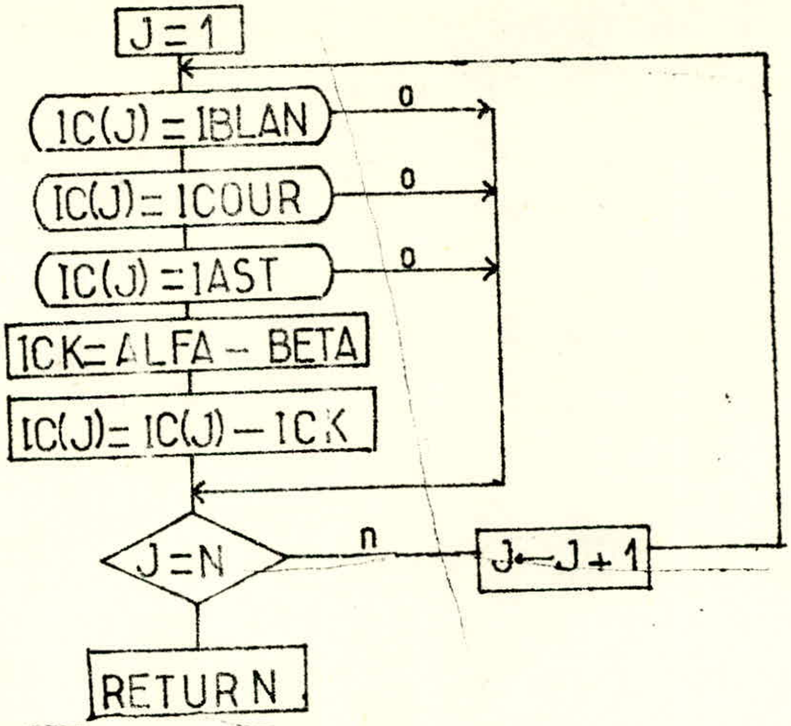
MARGEMIN


KPETI = 32 767
J = 1
IC(J) = ␣
0
IC(J) = 'C'
0
IC(J) = *
0
MARGE(J) = KPETI
>0
<0
=0
KD(J) > KD(IX)
n
0
KPETI = MARGE(J)
IX = J
J = N
J←J+1

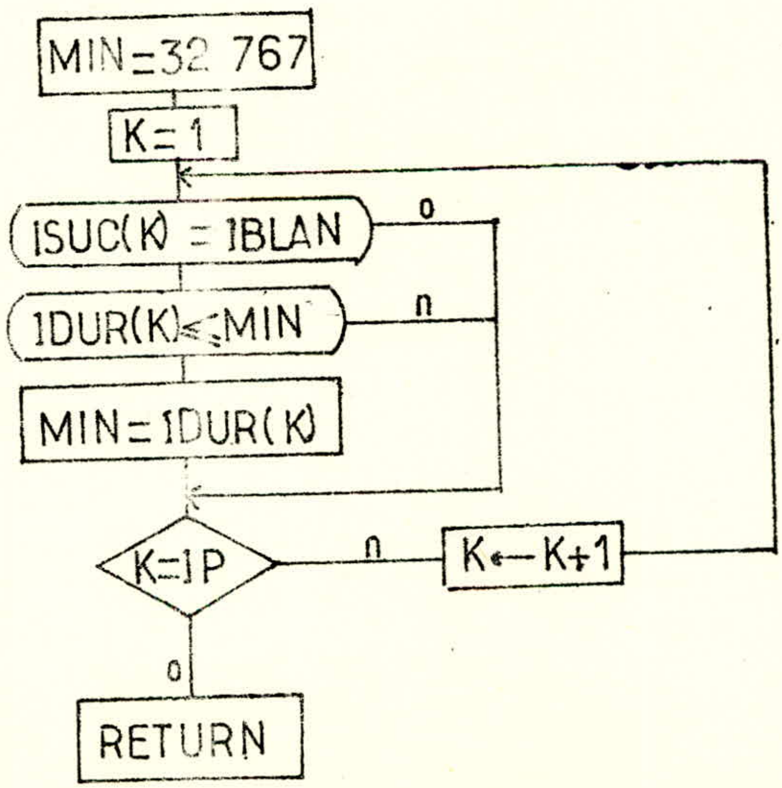
NEWMARGEMIN

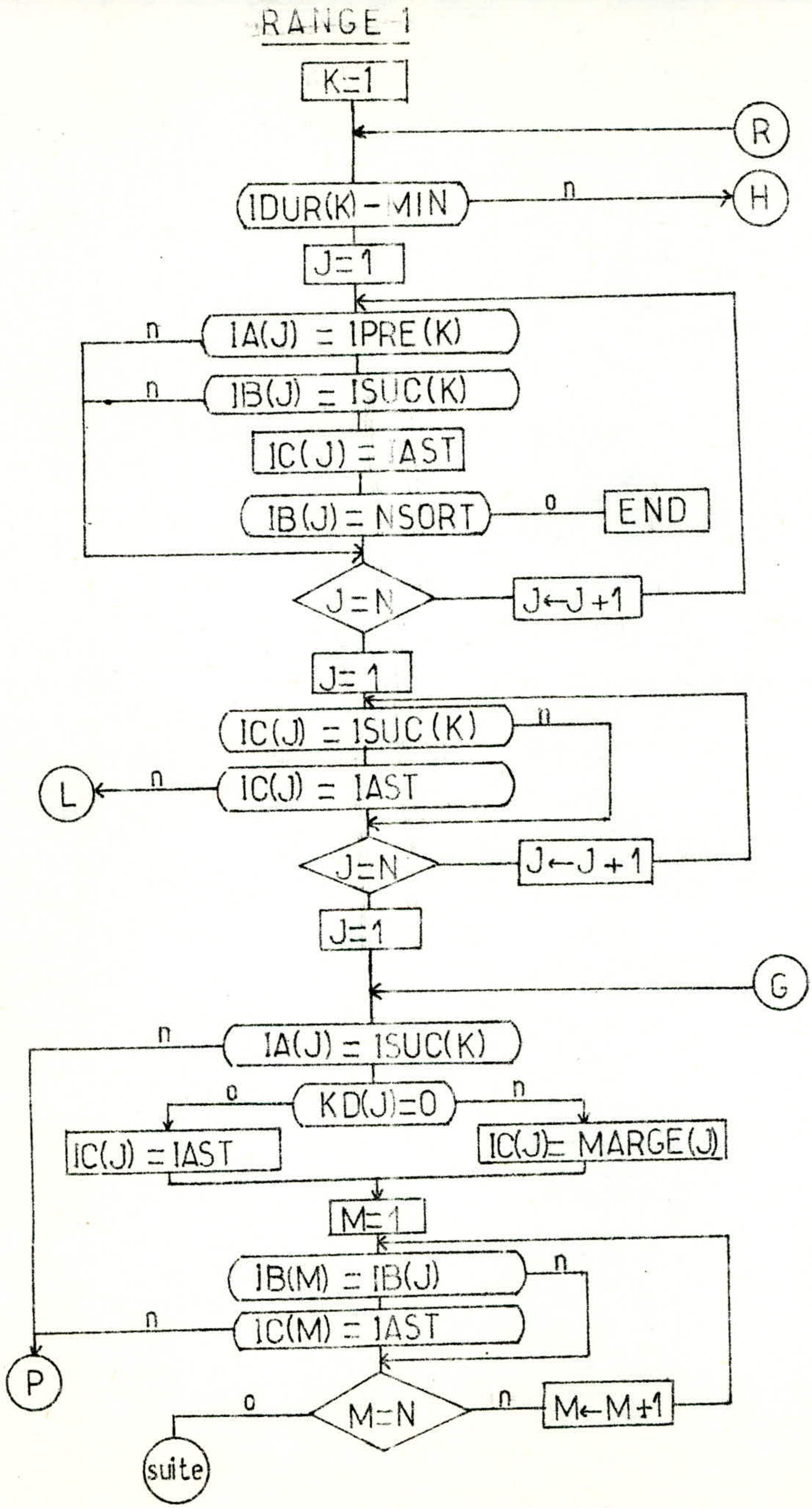


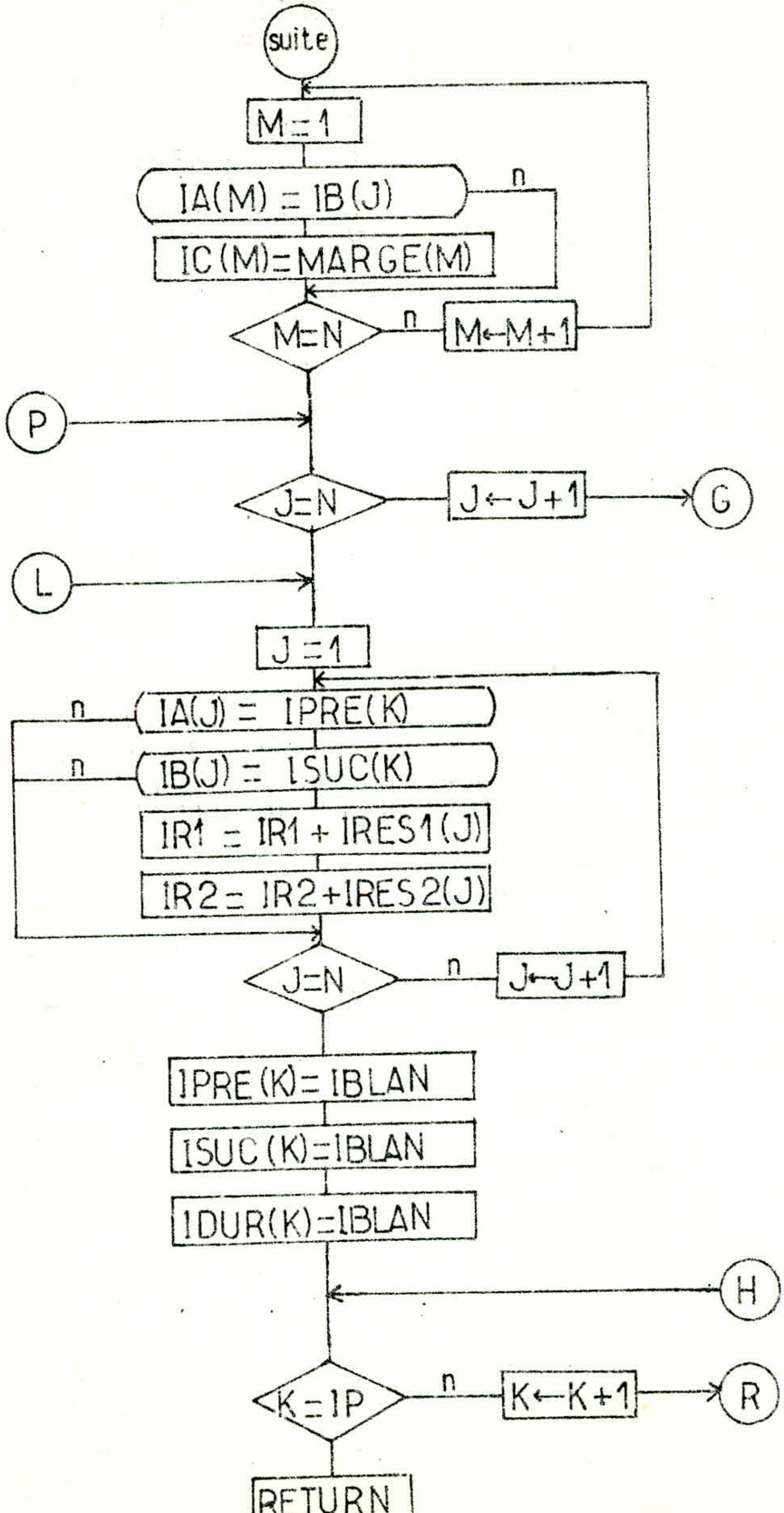
REVISION



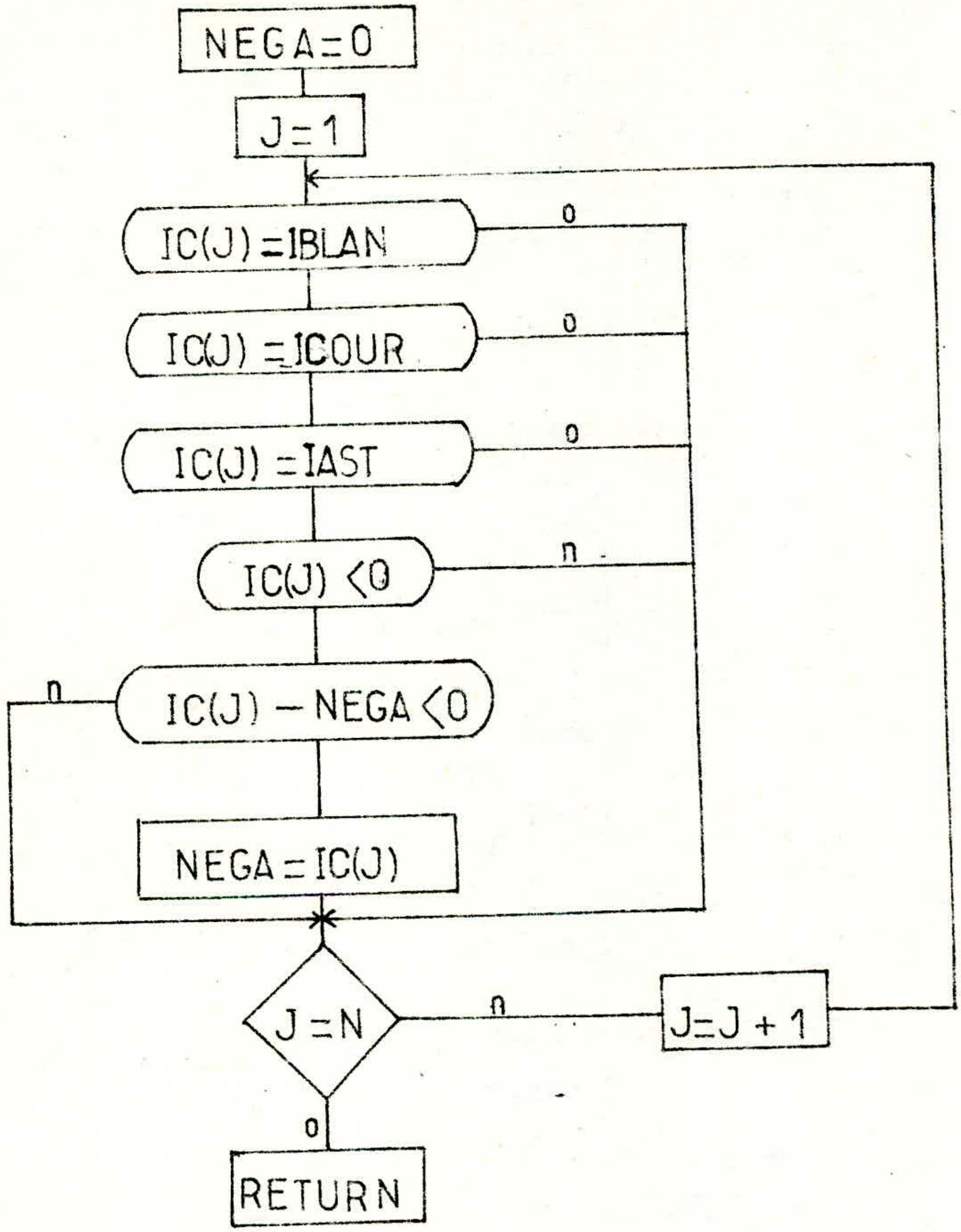
DATMIN




RANGE 1
K=1
R
IDUR(K) - MIN
n
H
J=1
IA(J) = IPRE(K)
n
IB(J) = ISUC(K)
n
IC(J) = IAST
IB(J) = NSORT
o
END
J=N
J←J+1
J=1
IC(J) = ISUC(K)
n
IC(J) = IAST
n
L
J=N
J←J+1
J=1
G
IA(J) = ISUC(K)
n
KD(J)=0
o
n
IC(J) = IAST
IC(J)= MARGE(J)
M=1
IB(M) = IB(J)
n
IC(M) = IAST
n
P
M=N
o
n
M←M+1
suite

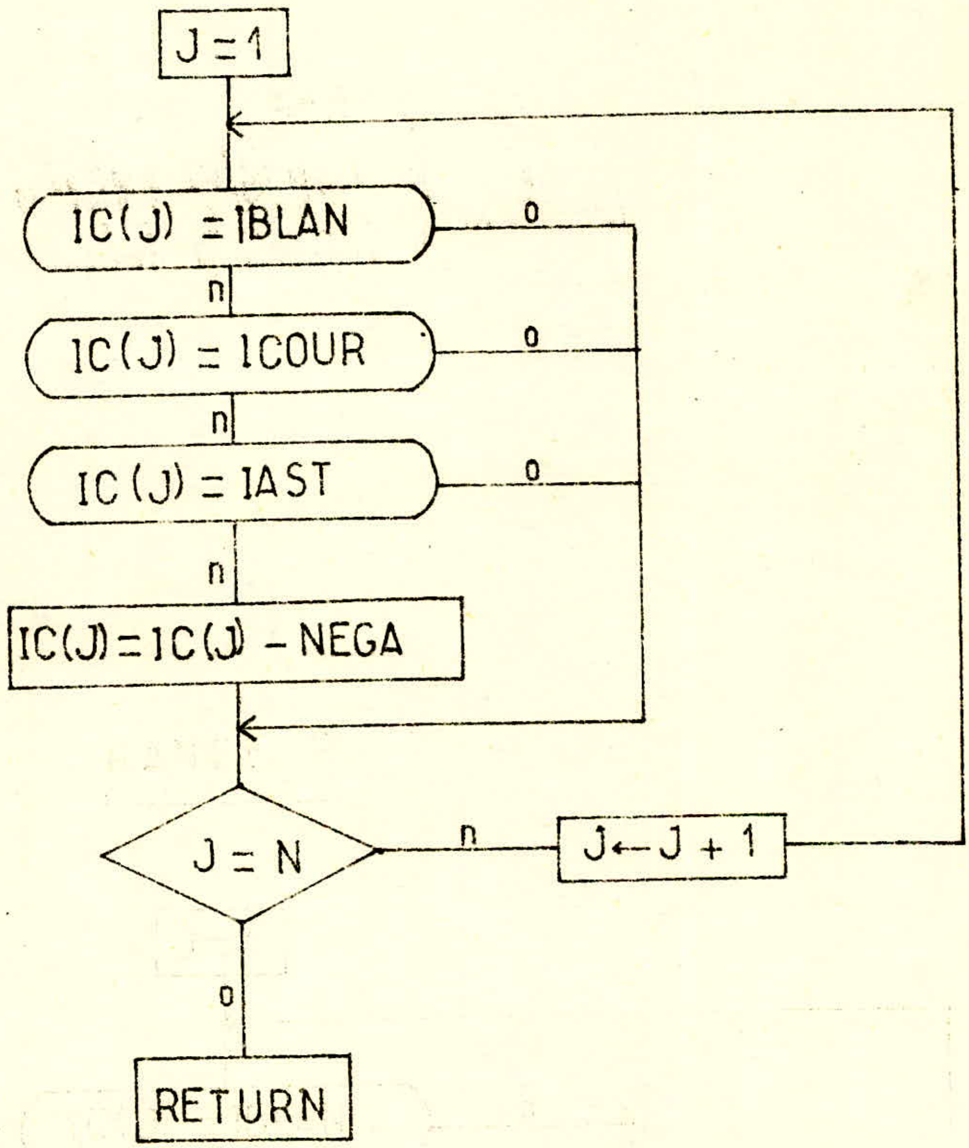

suite
M = 1
IA(M) = IB(J)
n
IC(M)=MARGE(M)
M=N
n
M←M+1
P
J=N
J←J+1
G
L
J = 1
IA(J) = IPRE(K)
n
IB(J) = ISUC(K)
n
IR1 = IR1 + IRES1(J)
IR2 = IR2+IRES2(J)
J=N
n
J←J+1
IPRE(K)= IBLAN
ISUC(K)=IBLAN
IDUR(K)=IBLAN
H
K = IP
n
K←K+1
R
RETURN

NEGA



NEGA=0
J=1
IC(J)=IBLAN
o
IC(J)=ICOUR
o
IC(J)=IAST
o
IC(J) <0
n
IC(J) − NEGA <0
n
NEGA=IC(J)
J=N
n
J=J+1
o
RETURN

RANGE 2



J = 1
IC(J) = IBLAN
o
n
IC(J) = ICOUR
o
n
IC(J) = IAST
o
n
IC(J) = IC(J) - NEGA
J = N
n
J ← J + 1
o
RETURN

```
// JOB

*** E N P A ***          CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000         1111         1111         0000

V2 M10   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

// FOR
*IOCS(CARD,1132 PRINTER)
*ONE WORD INTEGERS
*LIST SOURCE PROGRAM
      DIMENSION IA(21),IB(21),KD(21),IC(21),MARGE(21),IRES1(21),IRES2(21
     1),ICOUR(2),IPRE(2),ISUC(2)
 1000 FORMAT (21I2)
 4000 FORMAT(3I4)
      READ(2,1000) IRES1
      READ(2,1000) IRES2
      READ(2,1000) IA
      READ(2,1000) IB
      READ(2,1000) KD
      READ(2,1000)MARGE
      READ(2,4000) IAST,ICOUR,IBLAN
      N=21
```

```
      IALFA=0
      IBETA=0
      IR1=2
      IR2=0
      IP=2
      NSORT=15
      DO 90 J=1,21
   90 IC(J)=IBLAN
      DO 100 K=1,IP
      IPRE(K)=IBLAN
      ISUC(K)=IBLAN
      IDUR(K)=IBLAN
  100 CONTINUE
      I=1
      J=I
    1 IC(J)=MARGE(J)
      J=J+1
      IF(IA(J)-I) 3,1,3
C*******RECHERCHE DE LA PLUS GRANDE MARGE DANS IC(J)***MARGEMAX*********
    3 MAX=0
      DO 6 J=1,N
      IF(IC(J)-IBLAN)5,6,5
    5 IF(IC(J)-ICOUR)7,6,7
  7   IF(IC(J)-IAST)9,6,9
   9  IF(IC(J)-MAX) 6,10,10
   10 MAX=IC(J)
    6 CONTINUE
C********RECHERCHE DE LA MARGE LA PLUS FAIBLE DANS IC(J)****MARGEMIN****
   37 KPETI=32767
      DO 16 J=1,N
      IF(IC(J)-IBLAN) 11,16,11
   11 IF(IC(J)-ICOUR) 12,16,12
   12 IF(IC(J)-IAST) 13,16,13
   13 IF(IC(J)-KPETI) 15,14,16
   14  IF(KD(J)-KD(IX)) 16,16,15
   15 KPETI=IC(J)
      IX=J
   16  CONTINUE
      IF(KPETI-32767) 28,36,28
   28 IF(IR1-IRES1(IX)) 17,111,111
  111  IF(IR2-IRES2(IX)) 17,18,18
   17 IF(KPETI-MAX)19,36,19
C*******RECHERCHE D'UNE MARGE SATISFAISANTE*********NEWMARGEMIN*********
   19 IRECH=32767
      DO 21 J=1,N
      IF(IC(J)-IBLAN) 22,21,22
   22  IF(IC(J)-ICOUR) 23,21,23
   23  IF(IC(J)-IAST) 24,21,24
```

```
 24 IF(IC(J)-KPETI) 21,21,25
 25 IF(IC(J)-IRECH) 26,21,21
 26 IRECH=IC(J)
    IX=J
 21 CONTINUE
    KPETI=IRECH
    GO TO 28
 18 DO 30 K=1,IP
    IF(IPRE(K)-IBLAN) 30,29,30
 29  IPRE(K)=IA(IX)
    ISUC(K)=IB(IX)
    IDUR(K)=KD(IX)+IALFA
    GO TO 109
 30 CONTINUE
109 IC(IX)=ICOUR
    IR1=IR1-IRES1(IX)
    IR2=IR2-IRES2(IX)
    IF(IR1) 34,34,350
 34 IF(IR2) 36,36,350
350 IF(KPETI-MAX) 37,36,36
 36 DO 110 K=1,IP
    IF(K-1) 136,140,136
140 WRITE(3,5000) IALFA,IPRE(K),ISUC(K),IDUR(K)
5000 FORMAT(5X,I3,2X,3(I3,2X))
    GO TO 110
136 WRITE(3,7000) IPRE(K),ISUC(K),IDUR(K)
7000 FORMAT(10X,3(I3,2X))
110 CONTINUE
C****RECHERCHE DE LA DATE LA PLUS FAIBLE DANS LA TABLE DES RESSOURCES***
C**********************************************DATMIN*******************************
    MIN=32767
    DO 39 K=1,IP
    IF(ISUC(K)-IBLAN) 38,39,38
 38 IF(IDUR(K)-MIN)40,40,39
 40 MIN=IDUR(K)
 39 CONTINUE
C******DECROISSANCE DES MARGES DANS LA LISTE D'ATTENTE IC(J)**REVISION*
    IBETA=IALFA
    IALFA=MIN
    DO 55 J=1,N
    IF(IC(J)-IBLAN) 52,55,52
 52 IF(IC(J)-ICOUR) 53,55,53
 53 IF(IC(J)-IAST) 54,55,54
 54 ICK=IALFA-IBETA
    IC(J)=IC(J)-ICK
 55 CONTINUE
C**********MODIFICATION DE LA TABLE DES RESSOURCES******RANGE 1**********
    DO 51 K=1,IP
```

```
      IF(IDUR(K)-MIN) 51,42,51
   42 DO 46 J=1,N
      IF(IA(J)-IPRE(K)) 46,44,46
   44 IF(IB(J)-ISUC(K)) 46,45,46
   45 IC(J)=IAST
      IF(IB(J)-NSORT) 43,72,43
   46 CONTINUE
   43 DO 59 J=1,N
      IF(IB(J)-ISUC(K)) 59,58,59
   58 IF(IC(J)-IAST) 161,59,161
   59 CONTINUE
      DO 60 J=1,N
      IF(IA(J)-ISUC(K)) 60,57,60
   57 IF(KD(J)) 81,80,81
   81 IC(J)=MARGE(J)
      GO TO  60
   80 IC(J)=IAST
      DO 83 M=1,N
      IF(IB(M)-IB(J)) 83,84,83
   84 IF(IC(M)-IAST) 60,83,60
   83 CONTINUE
      DO 86 M=1,N
      IF(IA(M)-IB(J)) 86,85,86
   85 IC(M)=MARGE(M)
   86 CONTINUE
   60 CONTINUE
  161 DO 222 J=1,N
      IF(IA(J)-IPRE(K)) 222,333,222
  333 IF(IB(J)-ISUC(K)) 222,444,222
  444 IR1=IR1+IRES1(J)
      IR2=IR2+IRES2(J)
  222 CONTINUE
      IPRE(K)=IBLAN
      ISUC(K)=IBLAN
      IDUR(K)=IBLAN
   51 CONTINUE
C*****RECHERCHE DES MARGES NEGATIVES DANS IC(J)****NEGA******************
      NEGA=0
      DO 67 J=1,N
      IF(IC(J)-IBLAN) 62,67,62
   62 IF(IC(J)-ICDUR)63,67,63
   63 IF(IC(J)-IAST)64,67,64
   64 IF(IC(J))65,67,67
   65 IF(IC(J)-NEGA) 66,67,67
   66 NEGA=IC(J)
   67 CONTINUE
      IF(NEGA)68,3,3
C**********NOUVELLES MARGES TOTALES DANS IC(J)*****RANGE 2**************
```

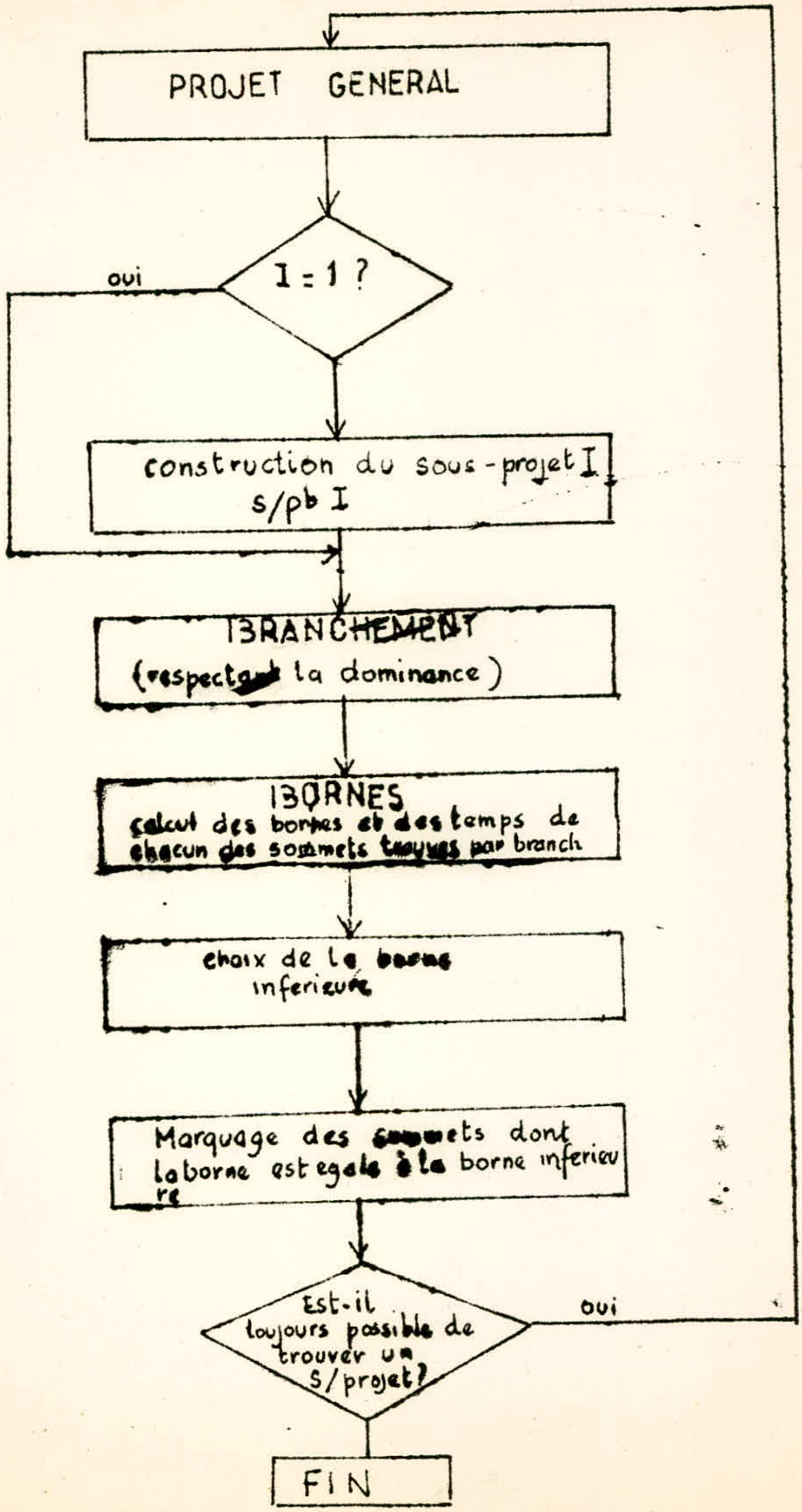
```
   68 DO 72 J=1,N
      IF(IC(J)-IBLAN)69,72,69
   69 IF(IC(J)-ICOUR)70,72,70
   70 IF(IC(J)-IAST) 71,72,71
   71 IC(J)=IC(J)-NEGA
   72 CONTINUE
      GO TO 3
   73 CALL EXIT
      END

 SYNTAXE CORRECTE
  ONE WORD INTEGERS
  ICCS

 TOPOLOGIE-PROGRAMME
  COMMON        0  VARIABLES    176  PROGRAM    1300

 FIN DE COMPILATION

 // XEQ
```

ANNEXE " D "

ALGORITHME DE LA " BRANCH AND BOUND "

ORGANIGRAMME DE LA METHODE

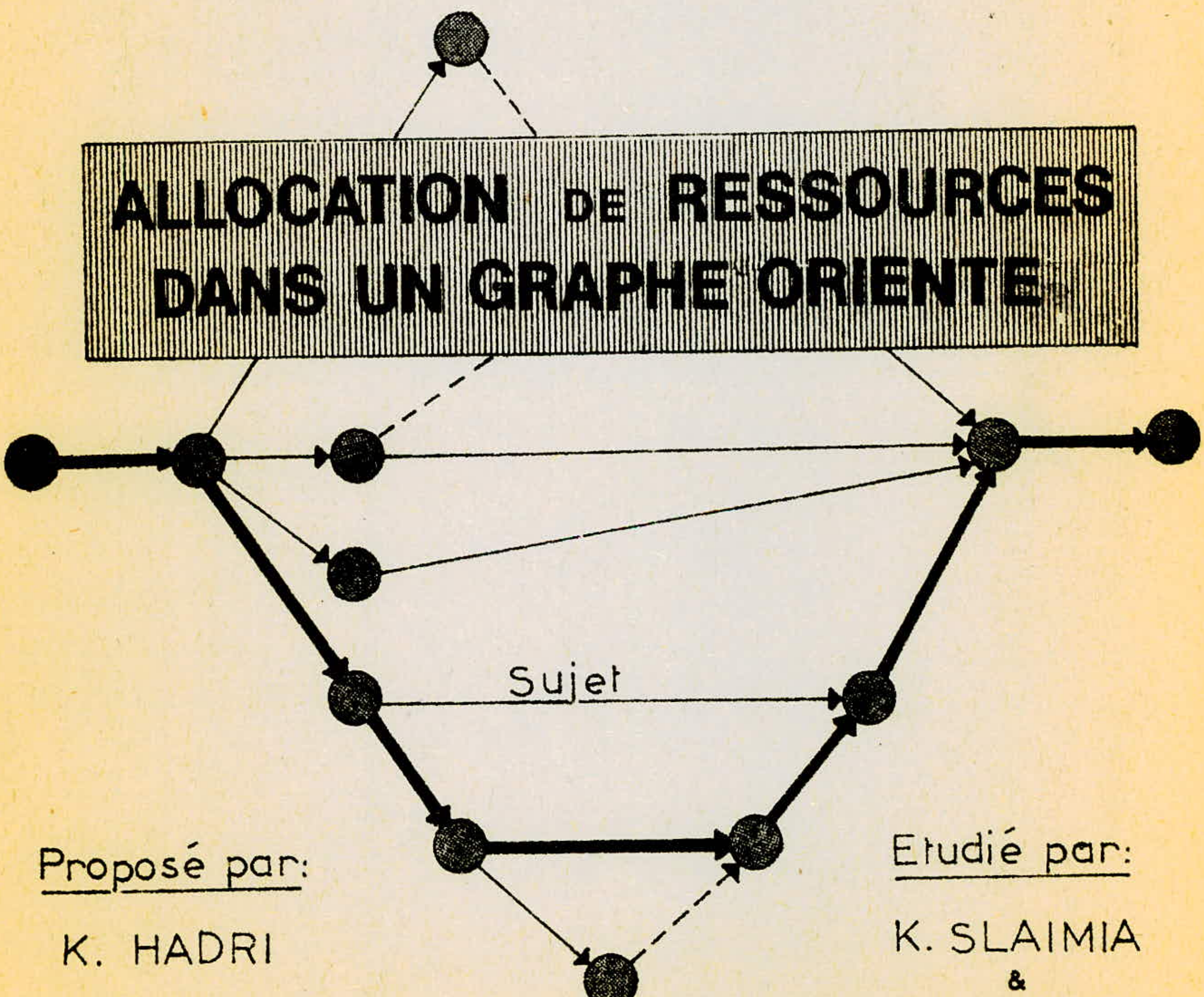
«BRANCH AND BOUND»



UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE



Sujet

ALLOCATION DE RESSOURCES DANS UN GRAPHE ORIENTE

Proposé par:

K. HADRI

Etudié par:

K. SLAIMIA
&
S. FERHATI

JUIN 1975