



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Automatique
Laboratoire de Commande des Processus



Thèse de Doctorat Troisième Cycle en Automatique

Option :

Automatique des systèmes de
conversion d'énergie

Présentée par :

Charaf Abdelkarim MOSBAH

Ingénieur Master en Automatique de l'ENP

Intitulée:

Contribution à la commande des systèmes régis par équations aux dérivées partielles. Application au concentrateur solaire cylindro-parabolique

Soutenue publiquement le 21/06/2017 devant le jury composé de :

B. HEMICI	Professeur à l'ENP	Président
M. TADJINE	Professeur à l'ENP	Rapporteur
M. S BOUCHERIT	Professeur à l'ENP	Rapporteur
D. BOUDANA	Maitre de Conférences à l'UYF Médéa	Examineur
K. BENMANSOUR	Professeur à l'ESDTA	Examineur
L. NEZLI	Professeur à l'ENP	Examineur
L. BARAZANE	Professeur à l'USTHB	Invitée

ENP2017

AVANT-PROPOS

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse a été effectué au Laboratoire de Commande de Processus (LCP) de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger sous la direction de Monsieur **Mohamed Tadjine** et Monsieur **Mohamed Seghir Boucherit** Professeurs à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger. Je tiens à les remercier pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en acceptant de diriger ce travail. Leur disponibilité et leurs encouragements durant de longues années m'ont été d'un grand apport pour l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à remercier vivement Monsieur **Boualem Hemici**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider ce jury.

Que Monsieur **Djamel Boudana**, Maître de Conférences à l'UYF Médéa, trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Que Monsieur **Khelifa Benmansour**, Professeur à l'ESDTA, trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Que Monsieur **Lazhari Nezli**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner.

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, et en particulier, mes professeurs d'automatique qui m'ont encadrés auparavant et tous mes enseignants pour les connaissances qu'ils m'ont transmis, leur disponibilité et leurs efforts.

Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

Que tous mes amis et collègues trouvent ici le témoignage de mon amitié et de ma reconnaissance.

Enfin, je ne pourrais terminer cet avant-propos sans remercier toute ma famille pour son soutien pendant toutes mes études et particulièrement mes parents.

ملخص :

الهدف من هذه الأطروحة يركز بشكل أساسي على موضوعين رئيسيين. الأول يكمن في التحكم الآلي في الأنظمة التي تحكمها معادلات تفاضلية جزئية، و يتعلق الثاني بمشكلة تقدير الحالة لهذا النوع من الأنظمة. الدافع الرئيسي لهذا العمل تمثل في حاجتنا لتقنية فعالة للتحكم بدرجة حرارة مجمع الطاقة الشمسية الأسطوانية المكافئ وذلك لجعلها تتبع مسارات مرجعية محددة مسبقا. لبلوغ هذا الهدف إقترحنا طريقة تحكم جديدة مستوحاة من مبدأ عمل السحاب و نظرية الإستقرار لليابونوف. تعتمد الطريقة المقترحة بشكل أساسي على حالة النظام، من أجل ذلك قمنا بتقدير هذه الأخيرة و التي تمثل درجة حرارة سائل داخل أنبوب. من أجل تقييم أداء الطرق المقترحة قدمنا إختبارات كفاءة تحت ظروف عمل مختلفة وذلك بإستعمال المحاكات العددية.

الكلمات المفتاحية : مجمع الطاقة الشمسية الأسطوانية المكافئ، معادلة تفاضلية جزئية، تحكم السحاب، تقدير الحالة .

Abstract:

The objective of this thesis targets, mainly, two major topics. The first is the control of systems governed by partial differential equation (PDE) and the second is dedicated to the state estimation problem of this kind of systems. The main motivation behind the subject of this work consist in the need of an efficient technique to control the outlet temperature of parabolic solar collector. On the control topic, a new control law is developed, inspired by the functioning principal of a zipper, as well as the Lyapunov stability theory. The main concept of this method refers to the observer based control designs. Thus, we were obliged to estimate the state variable which describes the temperature evolution of an oil flowing inside a pipe. Finally, the performances of the proposed methods are evaluated with simulation tests using real system parameters, and under different functioning conditions.

Key words: Parabolic Solar Collector, Partial Differential Equation, The Zipper Controller, State Estimation.

Résumé :

L'objectif de cette thèse cible, principalement, deux thèmes majeurs. Le premier est la commande des systèmes régis par des équations aux dérivés partielles (EDP), et le second porte sur la problématique d'estimation d'état pour ce genre de systèmes. La principale motivation qui a fait l'objet de ce travail consiste en la nécessité d'une technique efficace pour contrôler la température de sortie du concentrateur solaire cylindro-parabolique (CSCP). Sur le thème commande, nous avons introduit une nouvelle loi de commande inspirée du principe de fonctionnement de la fermeture éclair et de la théorie de stabilité de Lyapunov. Le concept de cette méthode appartient à la classe des commandes à base d'observateur. Pour cela, nous étions obligés d'estimer la variable d'état qui décrit l'évolution de la température d'un fluide coulant à l'intérieur d'un tube. Finalement, nous avons évalué les performances des méthodes proposées à travers des tests de simulations en utilisant de vrais paramètres du système sous différentes conditions de fonctionnement.

Mots-clés : Concentrateur Solaire Cylindro-Parabolique, Equation aux Dérivés Partielles, Contrôleur de la fermeture-éclair, Estimation d'état.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction Générale	11
1 Généralités et bref état de l'art	13
1.1 Introduction	14
1.2 Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles ?	14
1.3 Exemples de problème de commande des systèmes régis par EDP	15
1.4 Notions de base sur les EDP	17
1.4.1 Ordre d'une EDP	17
1.4.2 Linéarité d'une EDP	17
1.4.3 Éléments de classification des EDP	17
1.5 Résolution d'une EDP	18
1.5.1 Méthode analytique	18
1.5.2 Méthode numérique	18
1.5.2.1 La méthode des différences finies	18
1.5.2.2 La méthode des volumes finis	18
1.5.2.3 La méthode des éléments finis	19
1.5.3 Relations entre les méthodes analytiques et numériques	19
1.6 Conclusion	19
2 Concentrateur Solaire Cylindro-Parabolique	21
2.1 Introduction	22
2.2 Concept du Solaire Thermique	22

2.2.1	Étymologie et concept générale	22
2.2.2	Classification des Concentrateurs Solaires	23
2.2.2.1	Concentrateur à Tour Solaire	23
2.2.2.2	Concentrateur solaire à Miroirs de Fresnel	23
2.3	Concentrateur Cylindro-Parabolique (CSCP)	24
2.3.1	Principe de fonctionnement	24
2.3.2	Problème de commande	25
2.3.2.1	Technique classique	25
2.3.2.2	Technique moderne	25
2.4	Investigations sur le comportement dynamique du CSCP	26
2.4.1	Modélisation du CSCP	26
2.4.2	Comportement dynamique du CSCP	28
2.4.2.1	Méthode des caractéristiques	28
2.5	Conclusion	30
3	Commande du Concentrateur Cylindro-Parabolique	31
3.1	Introduction	32
3.2	Préliminaires et formulation du problème	32
3.3	Commandes basées sur l'approche RPS	33
3.3.1	Commande prédictive	33
3.3.1.1	Simplification du Modèle	33
3.3.1.2	Synthèse de la commande	34
3.3.2	Commande par retour d'état	37
3.3.2.1	Simplification du Modèle	37
3.3.2.2	Synthèse de la commande	39
3.4	Commandes basées sur l'approche SPR	40
3.4.1	Commande par retour de sortie	40
3.4.2	Commande à base de l'énergie interne	43
3.5	Commande de la fermeture-éclair	46
3.5.1	Méthode des différences finies étendue	46
3.5.1.1	Synthèse du modèle équivalent incertain	47
3.5.2	Synthèse de la commande et analyse de la stabilité	48
3.5.2.1	Définition des systèmes limites	49
3.5.2.2	Définition de la relation de liaison	50
3.5.2.3	Analyse de stabilité du contrôleur	51
3.5.3	Résultats de simulation	52
3.5.3.1	Test 1 : (Poursuite de Référence)	53
3.5.3.2	Test 2 : (Robustesse du Contrôleur)	53
3.6	Étude comparative	53

3.7	Conclusion	57
4	Estimation de la température du fluide à l'intérieur du tube-récepteur du CSCP	60
4.1	Introduction	61
4.2	Préliminaires et formulation du problème	61
4.3	Principe d'estimation à base d'observateur	62
4.3.1	Sur l'observabilité	62
4.3.2	Sur la structure d'observateur	63
4.4	Observateurs basés sur l'approche RPS	63
4.4.1	Observateur de Luenberger (1A)	63
4.4.1.1	Simplification du modèle EDP	63
4.4.1.2	Synthèse de l'observateur	65
4.4.2	Observateur de Luenberger (2A)	66
4.4.2.1	Simplification du modèle EDP	66
4.4.2.2	Synthèse de l'observateur	67
4.5	Observateurs basés sur l'approche SPR	67
4.5.1	Observateur de Luenberger (1B)	67
4.5.2	Observateur de Luenberger (2B)	69
4.6	Observateur à grand gain	72
4.6.1	Etude d'observabilité	72
4.6.2	Synthèse d'observateur à grand gain	73
4.6.3	Résultats de simulation	76
4.6.3.1	Test 1 : (Dynamique d'estimation)	77
4.6.3.2	Test 2 : (Influence des paramètres)	77
4.6.3.3	Test 3 : (Robustesse de l'observateur)	77
4.7	Étude comparative	80
4.8	Conclusion	80
	Conclusion Générale	83
	ANNEXE A : Résumé de la thèse en anglais (Thesis résumé)	85
A.1	Introduction	85
A.2	Process Description	86
A.3	Controller design	87
A.3.1	Uncertain state space synthesis	87
A.3.2	The zipper controller design	89
A.3.2.1	Baseline control scheme :	89
A.3.3	Simulation results	93
A.4	Observer design	96
A.4.1	Preliminaries and problem formulation	96

A.4.2 Soft sensor design	97
A.4.3 Simulation results	102
A.5 Conclusion	103
ANNEXE B : Paramètres du Concentrateur Solaire Cylindro-Parabolique	106
ANNEXE C : Liste des publications de l’auteur	107
Bibliographie	109

TABLE DES FIGURES

1.1	Conduction thermique unidimensionnelle.	15
2.1	Concentrateur à Tour Solaire	23
2.2	Concentrateur solaire à Miroirs de Fresnel	24
2.3	Concetrateur Solaire Cylindro-Parabolique	24
2.4	Volume de Contrôle	26
3.1	Répartition des fonctions gaussiennes le long du tube-récepteurv[28]	38
3.2	Principe du contrôleur de la fermeture-éclair (The Zipper controller)	49
3.3	Performances de poursuite pour une référence sinusoïdale	54
3.4	Performances de poursuite pour une référence en créneaux	55
3.5	Réponse indicielle du contrôleur de la fermeture-éclair	56
3.6	Profile de radiation solaire	56
3.7	Erreur de perturbation du contrôleur de la fermeture-éclair*	56
4.1	Schéma de positionnement des grandeurs à mesurer	62
4.2	Influence de θ sur la dynamique d'estimation de la température de sortie	78
4.3	Erreur d'estimation le long de la dimension spatiale pour $\theta = 10$	78
4.4	Contour plot de l'erreur d'estimation pour $\theta = 10$	78
4.5	Influence de la longueur du pas de discrétization sur l'erreur d'estimation	79
4.6	Profile de radiation solaire	79
4.7	Contour plot de l'erreur d'estimation	79
A.1	Parabolic Solar Collector	87
A.2	The Zipper Controller Principle	90
A.3	Evolution of the PSC system for a "staircase" and "sinusoidal" references. (A,B) represents the reference tracking, and the applied oil flow rate (the control input). (C,D) describes the temperature evolution inside the pipe for both references	94

A.4	Solar radiation profile	95
A.5	Robustness Test	95
A.6	Sensor positioning schematic	97
A.7	Influence of θ on the estimation of the outlet temperature	104
A.8	Estimation error along the space horizon for $\theta = 10$ (with strong variation on T_{inlet})	104
A.9	Contour plot of the estimation error for $\theta = 10$	104
A.10	Effect of the spatial step size on the estimation error	105
A.11	Solar radiation profile	105
A.12	Contour plot of the estimation error	105

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Paramètres de simulation	53
3.2	Étude comparative	58
4.1	Étude comparative	81
A.1	Simulation Parameters	94
B.1	Paramètres du concentrateur solaire cylindro-parabolique	106

LA thèse que nous allons présenter porte d'une part sur la commande et l'estimation d'état d'une classe des systèmes régie par une équation aux dérivées partielles. D'autre part, elle porte sur l'exploitation et l'amélioration des outils classiques de commande et d'estimation d'état afin qu'ils soient adaptés aux problèmes de contrôle et d'estimation liés à cette classe de systèmes. A ce sujet, nous rappelons que le concept classique de la théorie de commande et d'estimation d'état a été toujours investigué sur des systèmes régis par des équations aux dérivées totales (EDO's) sous ces différentes formes : linéaire ou nonlinéaire, variant dans le temps ou invariant, déterministe ou stochastique... etc. Pour ces systèmes, on peut affirmer que les techniques proposées ont atteint un certain degré de maturité et ont été largement adoptées dans le secteur industriel. Cependant, plusieurs travaux de recherche ont montré que de nombreux procédés industriels, contenant des phénomènes de transport de masse ou d'énergie, sont régis par des équations aux dérivées partielles (EDP's). Face à ces systèmes la théorie existante sous trouve impuissante. Il est donc important d'étendre cette théorie pour remédier aux problèmes liés à ces systèmes.

Ce travail est motivé par une application de grande envergure : le contrôle d'un système de production d'énergie renouvelable. Dans une course acharnée pour améliorer le mode de vie et le bien-être de la race humaine, l'industrialisation a envahi les quatre coins du monde dès le début du 19^{ème} siècle, en consommant ainsi les diverses ressources de notre planète, matières premières, terre et en plus importantes ressources d'énergie. Certes, cette industrialisation a contribué au développement, mais ça n'a pas été sans payer cher ; dès les années 70 la communauté mondiale a déclenché les alarmes quant aux effets nuisibles sur l'environnement ; réchauffement planétaire, changement climatique, pollution etc... durant la conférence des nations unies sur l'environnement en 1972, puis mis en évidence dans le rapport de Brundtland en 1987, en appelant ainsi les pays industrialisés à adopter une démarche de production durable attirant ainsi l'attention sur un autre problème ; l'épuisement des ressources. L'énergie nucléaire est apparue alors comme une solution intéressante, or avec les différents risques

qu'elle présentait, mis en évidence par les différentes catastrophes, Tchernobyl et récemment Fukushima, il fallait se tourner vers d'autres modes plus propres et non épuisables ; les énergies renouvelables.

Ce travail constitue une continuité aux différents travaux menés sur les thèmes de contrôle des systèmes d'énergie renouvelable et les concentrateurs solaire en particulier. Nous avons essayé d'intégrer d'autres visions de commande des systèmes ainsi que d'autres améliorations, comme ça va suivre. L'ensemble du mémoire de thèse est organisé comme suit :

- Le premier chapitre est consacré principalement à la présentation des systèmes régis par équations aux dérivées partielles et les notions théoriques nécessaires à la compréhension du manuscrit.
- Dans le deuxième chapitre, nous présentons le problème de commande du concentrateur solaire cylindro-parabolique (CSCP) comme application au problème étudié dans cette thèse. Un intérêt particulier sera consacré au problème de contrôle de la température d'un fluide dans ce système. Pour cela, nous modélisons le comportement dynamique de la température de ce fluide faisant appel aux lois de la thermodynamique et les bilans énergétiques.
- Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de commande de la classe des systèmes, régie par équations aux dérivées partielles, qui décrit le fonctionnement de notre système. En premier lieu, nous avons présenté les méthodes récemment proposées pour remédier à ce problème avec une évaluation de ses performances. Par la suite, nous avons introduit le concept d'une nouvelle loi de commande inspirée du principe de fonctionnement de la fermeture-éclair (the zipper).
- Dans le quatrième chapitre, nous abordons le problème d'estimation d'état de la classe des systèmes qui décrit le fonctionnement du CSCP. La principale motivation qui a fait l'objet de ce chapitre est le besoin d'une information sur la température d'un fluide qui s'écoule à l'intérieur d'un tube dans ce système. Pour cela, nous avons gardé le même plan de travail qui consiste à présenter les méthodes récemment proposées et les évaluer. Par la suite, nous avons introduit une nouvelle méthode d'estimation basée sur un observateur à grand gain.
- En Annexe A, nous présentons un résumé de la thèse, **en anglais**, pour les non-francophones.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS ET BREF ÉTAT DE L'ART

"Le seul endroit où le succès précède le travail est dans le dictionnaire."

Vidal Sassoon

Sommaire

1.1 Introduction	14
1.2 Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles ?	14
1.3 Exemples de problème de commande des systèmes régis par EDP	15
1.4 Notions de base sur les EDP	17
1.4.1 Ordre d'une EDP	17
1.4.2 Linéarité d'une EDP	17
1.4.3 Éléments de classification des EDP	17
1.5 Résolution d'une EDP	18
1.5.1 Méthode analytique	18
1.5.2 Méthode numérique	18
1.5.3 Relations entre les méthodes analytiques et numériques	19
1.6 Conclusion	19

1.1 Introduction

LES équations aux dérivées partielles sont omniprésentes dans la plupart des sciences de l'ingénierie. En physique, par exemple, le flux de chaleur et les phénomènes de propagation des ondes sont décrits par des équations aux dérivées partielles [1, 2, 3, 4]. En écologie, la plupart des modèles de population sont régis par des équations aux dérivées partielles [5, 6]. La dispersion d'un matériau chimiquement réactif est caractérisée par des équations aux dérivées partielles. De plus, la plupart des phénomènes physiques de la dynamique des fluides, de la mécanique quantique, de l'électricité, de la physique des plasmas et d'autres phénomènes sont régis par des équations aux dérivées partielles [7].

Le contrôle des systèmes régis par équations aux dérivées partielles a fait l'objet de nombreuses études depuis les années 1960 [8]. Cet intérêt est dû au besoin d'une technique efficace pour contrôler ces systèmes. Les premiers travaux qui ont fondus la base de ce domaine ont traité certains problèmes de contrôle optimal pour des systèmes linéaires [9]. Depuis, ce domaine a connu un développement croissant, qui s'est manifestait par la publication de nombreux ouvrages et papiers (voir, par exemple, [10, 11, 12, 13]). Dans ce chapitre introductif, nous présentons quelques préliminaires utiles et nous rappelons quelques définitions essentielles pour mieux comprendre le manuscrit.

1.2 Qu'est-ce qu'une équation aux dérivées partielles ?

Une équation aux dérivées partielles est une relation mathématique entre les dérivées partielles d'une fonction multivariable. La forme générale d'une EDP est donnée comme suit :

$$F\left(x, t, z(x, t), \frac{\partial z}{\partial t}(x, t), \frac{\partial z}{\partial x}(x, t), \dots, \frac{\partial^i z}{\partial t^i}(x, t), \frac{\partial^i z}{\partial x^i}(x, t)\right) = 0 \quad (1.1)$$

où :

- $z(x, t)$ est la fonction multivariable (solution de l'EDP).
- x, t sont des variables indépendants.

On peut citer comme exemple les EDP suivantes :

$\frac{\partial z}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) + z(1 - z)$	Équation de Fisher
$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0$	Équation de Laplace
$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) = \exp(\pm z)$	Équation de Liouville
$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) = \alpha \sin(z)$	Équation de sine-Gorden

Dans un phénomène physique, la fonction multivariable représente la variation d'une grandeur significative comme la température d'un fluide, la pression d'une gaze ou d'autres grandeurs physiques. Par exemple, la variation de température le long d'une tige mince exposée à

une source de chaleur est décrite par l'EDP suivante : (Phénomène de conduction thermique)

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \quad (1.2)$$

où :

- $T(x,t)$ représente la température à l'instant t et à la position longitudinale x comme illustré dans la figure (1.1)

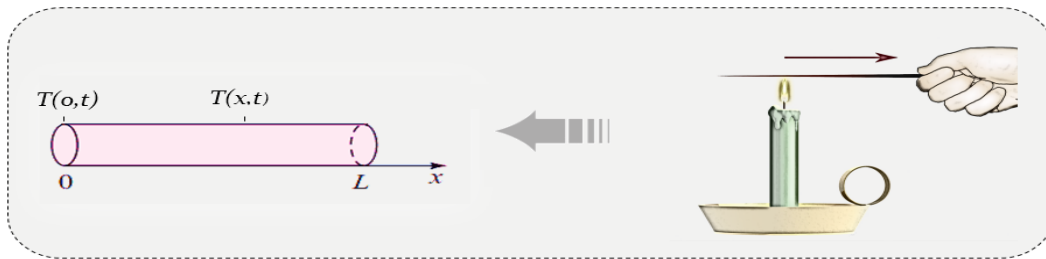


Figure 1.1: Conduction thermique unidimensionnelle.

1.3 Exemples de problème de commande des systèmes régis par EDP

Nous présentons dans cette section quelques exemples des problèmes de commande et d'estimation des systèmes régis par équation aux dérivées partielles.

Exemple 1

L'évolution de la population d'un pays est régie par le modèle EDP suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial p}{\partial x}(x,t) = -\mu(x,t) p(x,t) & (1.3a) \\ p(x,0) = p_0(x) \quad x \geq 0 & (1.3b) \\ p(0,t) = u(t) \quad t \geq 0 & (1.3c) \end{cases}$$

où :

- $p(x,t)$ représente le nombre d'individus d'âge x à l'instant t .
- $\mu(x,t)$ est la fonction de mortalité.
- $u(t)$ est le nombre d'individus nés à l'instant t .

Le problème de commande est de choisir u de manière à obtenir un profil d'âge souhaité $q(x)$ au moment final t_f . Ce problème peut être posé sous forme d'un problème de minimisation comme suit :

$$J(u) = \int_0^1 |p(x, t_f) - q(x)|^2 + \int_0^{t_f} \lambda |u(s)|^2 ds \quad (1.4)$$

Le second terme est ajouté pour minimiser le coût du contrôle de la natalité.

Exemple 2

Le mouvement d'une corde, uniforme, tendue est décrit par l'équation d'Alembert à une dimension donnée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial z^2}{\partial t^2}(x,t) - \alpha \frac{\partial z^2}{\partial x^2}(x,t) = u(x,t) \end{array} \right. \quad (1.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z(0,t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.5b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z(1,t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.5c)$$

où :

- $z(x,t)$ est le déplacement de la corde à la position x et l'instant t .
- ρ est la densité de la corde.
- α est le paramètre de traction.
- u est une force appliquée le long de la corde.

Peut-on choisir u pour amener la corde à se reposer dans un temps fini ?!

Pour avoir les conditions suffisantes pour que cela soit possible on doit étudier la commandabilité de ce système.

Exemple 3

Dans les usines sidérurgiques, il est nécessaire d'estimer la distribution de température sur des plaques métalliques. Le modèle qui décrit la température dans cette application est régi par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho c_1 \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = k \frac{\partial z^2}{\partial x^2}(x,t) - \alpha [z(x,t) - z_0(x,t)] \quad 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (1.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x}(0,t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.6b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x}(1,t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.6c)$$

où :

- ρ est la densité de la plaque.
- c_1 est la capacité thermique de la plaque.
- k est la conductivité thermique.
- α est un paramètre de transfert de chaleur.

Alors, notre problème est d'estimer le profil de température $z(x, t)$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $t > 0$

1.4 Notions de base sur les EDP

1.4.1 Ordre d'une EDP

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle la plus élevée qui apparaît dans cette équation. Par exemple, les équations suivantes

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t) \right) = 0 \quad (1.9)$$

sont des EDP de premier ordre, deuxième ordre et troisième ordre respectivement.

1.4.2 Linéarité d'une EDP

Une équation aux dérivées partielles est linéaire si la relation entre les dérivées partielles est linéaire et elle est nonlinéaire dans le cas inverse (par exemple elle contient le carré d'une dérivée partielle). Dans le tableau ci-dessous nous illustrons quelques exemples des EDP linéaires et nonlinéaires.

EDP Linéaire	EDP Nonlinéaire
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(t,x) = c \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x)$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) = \alpha \sinh(z)$
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) = a \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(t,x) + b \frac{\partial z}{\partial t}(t,x)$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) = \exp(\pm z)$
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\frac{\partial z}{\partial t}(t,x) = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x)$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\frac{\partial z}{\partial t}(t,x) = d \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) + z(1-z)$

1.4.3 Éléments de classification des EDP

Les équations aux dérivées partielles peuvent être classés selon plusieurs critères : par ordre, linéaire/nonlinéaire, par type ... etc. Considérons par exemple l'EDP définie comme suit :

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(t,x) + b \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x}(t,x) + c \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,x) = d \quad (1.10)$$

où :

- a, b et c sont des paramètres réelles qui ne dépendent pas de t et x.

Cette équation fait partie de la classe des EDP du second ordre, comme on peut la classer avec les EDP linéaire et la classification par type ce fait comme suit :

- si $\Delta > 0$ alors l'EDP (1.10) est hyperbolique. ($\Delta \triangleq b^2 - 4ac$)

- si $\Delta = 0$ alors l'EDP (1.10) est parabolique.
- si $\Delta < 0$ alors l'EDP (1.10) est elliptique.

1.5 Résolution d'une EDP

1.5.1 Méthode analytique

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire ; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondants aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes [14]. La résolution des EDP a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Plusieurs méthodes ont été proposées pour remédier à ce problème comme la méthode des caractéristiques¹, méthode de séparation des variables \dots etc . L'inconvénient majeur de ces méthodes c'est qu'elles sont restreintes à des classes d'EDP bien spécifiques alors qu'un grand nombre d'EDP n'est pas résolue à nos jours.

1.5.2 Méthode numérique

Plusieurs méthodes numériques ont été proposée pour approximer la solution exacte de l'EDP. Dans notre manuscrit, on se limite aux méthodes les plus adoptées.

1.5.2.1 La méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique courante pour l'approximation de la solution d'une EDP sur des points d'une grille [15]. L'idée de cette méthode consiste à approximer l'opérateur de dérivation/différentiation par des différences divisées tirées du développement en série de Taylor.

Avantages : grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte de quelque types des conditions aux limites (type Neumann).

1.5.2.2 La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis fait partie des outils de l'analyse numérique, elle est utilisée pour résoudre numériquement les équations aux dérivé partielles. Contrairement à la méthode des différences finies qui approxime l'opérateur de différentiation, la méthode des

1. nous revenons à cette méthode avec plus de détails dans le chapitre suivant.

volumes finis est basée sur l'approximation de l'intégrale à l'aide d'un maillage constituée de volumes finis [15]. De nombreux logiciels utilisent cette méthode pour simuler le comportement physique des systèmes comme : Fluent, StarCD, CFX, FineTurbo, elsA.

Avantages : permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque, détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann.

Inconvénients : peu de résultats théoriques de convergence.

1.5.2.3 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode numérique utilisée pour l'approximation de la solution d'une EDP, comme la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis. L'origine de cette méthode revient aux travaux de Fermat et Bernoulli (1743) en calcul des variations. L'appellation éléments finis vient de la décomposition du domaine d'étude en élément. La solution approchée est dans ce cas une fonction déterminée par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, ses valeurs en certains points ou noeuds du maillage [15]. De nombreux codes de calculs de structure reposent sur cette méthode comme : l'ANSYS, CADD5, CATIA.

Avantages : traitement possible de géométries complexes, nombreux résultats théoriques sur la convergence.

Inconvénient : complexité de mise en oeuvre et grand coût en temps de calcul et mémoire.

1.5.3 Relations entre les méthodes analytiques et numériques

La stabilité : c'est la propriété qui assure que la différence entre la solution obtenue par les méthodes analytiques et la solution numérique est bornée .

La consistance : c'est la propriété qui assure que la solution numérique tend vers la solution analytique lorsque le pas de discrétisation de la méthode numérique tend vers zéro [15].

La convergence : c'est la propriété qui assure que la solution numérique tend vers la solution analytique. C'est évidemment la propriété la plus recherchée !

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le problème de commande des systèmes régis par équations aux dérivées partielles. Pour cela, on a présenté quelques exemples concrets des problèmes de commande et d'estimation des systèmes régis par EDP. Par la suite, il nous a semblé nécessaire de rappeler quelques notions théoriques sur les équations aux dérivées partielles pour une bonne compréhension du manuscrit. Finalement, un panorama non-exhaustif des méthodes de résolution des EDP est présenté pour servir à l'étude du comportement dynamique des systèmes régis par EDP.

Dans le chapitre suivant, nous étudions en détaille le problème de commande d'un système de production d'énergie régi par une EDP du premier ordre.

CHAPITRE 2

CONCENTRATEUR SOLAIRE CYLINDRO-PARABOLIQUE

"La façon dont on trouve n'est pas celle dont on prouve"

Albert Einstein

Sommaire

2.1 Introduction	22
2.2 Concept du Solaire Thermique	22
2.2.1 Étymologie et concept générale	22
2.2.2 Classification des Concentrateurs Solaires	23
2.3 Concentrateur Cylindro-Parabolique (CSCP)	24
2.3.1 Principe de fonctionnement	24
2.3.2 Problème de commande	25
2.4 Investigations sur le comportement dynamique du CSCP	26
2.4.1 Modélisation du CSCP	26
2.4.2 Comportement dynamique du CSCP	28
2.5 Conclusion	30

2.1 Introduction

DEPUIS la révolution industrielle, l'humanité a été confrontée à plusieurs problèmes liés à sa survie et à son bien être : armes nucléaires, pollution, rareté des ressources pétrolières et énergétiques [16]. La technologie avançait mais n'était pas toujours présente à la demande humaine d'autrefois, néanmoins aujourd'hui l'humanité est devenue plus exigeante vis à vis de la technologie actuelle pour plusieurs raisons [17] : craintes liées au tarissement des ressources naturelles, amélioration des conditions sanitaires humaines, développement des relations humaines grâce aux satellites de communication...etc.

De nos jours, les énergies renouvelables sont présentées comme une alternative prometteuse aux ressources énergétiques classiques tel que le solaire [18], la géothermie, l'hydraulique et l'éolienne vu qu'elles sont propres et inépuisables. Dans l'optique d'une production d'électricité sans impact environnemental, l'énergie solaire électrique, sous ses deux formes (photovoltaïque et thermique), présente une source incontournable. L'adoption de telle source d'énergie dans les circonstances actuelles est significativement encouragée par des promesses tangibles de réduction fiscale de l'Etat [19]. Néanmoins, le coût élevé et la rentabilité réduite de photovoltaïque, en particulier, demeurent les majeures contraintes à leur adoption [20]. Face de telles circonstances, l'énergie solaire thermique est donc incontournable.

Le concentrateur solaire cylindro-parabolique est un processus industriel d'une grande utilité pour les centrales thermiques. L'objet de ce chapitre porte d'une part sur l'étude et la modélisation de ce système. D'autre part, il porte à introduire le problème de contrôle d'une classe des systèmes régis par une équation aux dérivées partielles (hyperbolique) qui décrit le comportement dynamique de ce système. Le reste de ce chapitre est organisé comme suit :

- Premièrement, nous introduisons le concept du solaire thermique et une brève description de la technologie des concentrateurs solaires.
- Puis, nous présentons le principe de fonctionnement du concentrateur cylindro-parabolique et pose du problème de commande.
- Finalement, nous terminerons par la modélisation de notre système en se basant sur les lois de la thermodynamique et le bilan énergétique.

2.2 Concept du Solaire Thermique

2.2.1 Étymologie et concept générale

Le terme "SOLAIRE THERMIQUE" désigne la conversion d'énergie solaire en énergie thermique. Le concept principal de cette conversion consiste à focaliser les rayons solaires sur un foyer pour échauffer un fluide dedans [21, 22]. Ensuite, l'énergie thermique portée par ce

fluide est utilisée dans diverses applications : chauffage d'eau sanitaire, production de froid (cycle thermique), production de vapeur (afin d'entraîner des alternateurs)... etc. Une centrale solaire thermique est constituée de trois éléments principaux [23] :

- LE CHAMPS SOLAIRE.
- LE SYSTÈME DE TRANSFERT DE CHALEUR.
- LE SYSTÈME DE GÉNÉRATION ÉLECTRIQUE.

Le concentrateur solaire est l'élément essentiel dans cette installation, il recueille le maximum des rayons solaires afin de les transmettre aux fluides. En effet, plusieurs technologies de concentrateurs ont été mises en oeuvre.

2.2.2 Classification des Concentrateurs Solaires

Les concentrateurs solaires peuvent être répartis selon plusieurs critères [19, 22] température de fonctionnement (basse, moyenne, élevée), forme de foyer (linéaire, pointé) ou mode de fonctionnement (concentration centralisée, concentration répartie) [24]. En effet, dans ce qui suit nous allons présenter les concentrateurs les plus adoptés pour une production d'électricité à grande échelle¹.

2.2.2.1 Concentrateur à Tour Solaire

Elle est constituée d'un champ de miroirs-réflecteurs, appelés héliostats, qui concentrent les rayons du soleil vers un foyer fixe, situé au sommet d'une tour. La figure (2.1) montre une aperçue globale d'une tour solaire [22].



Figure 2.1: Concentrateur à Tour Solaire

2.2.2.2 Concentrateur solaire à Miroirs de Fresnel

Il utilise une succession de miroirs plans (ou quasi-plans) qui peuvent chacun pivoter autour d'un axe horizontal de façon à suivre la trajectoire solaire et ainsi rediriger et concentrer

1. Le concentrateur cylindro-parabolique sera présenté ultérieurement puisque c'est l'objet de notre étude.

de manière optimale les rayons solaires incidents vers un tube-récepteur (foyer linéaire). La figure (2.2) montre une aperçue globale d'un concentrateur à miroirs de fresnel [22].



Figure 2.2: Concentrateur solaire à Miroirs de Fresnel

2.3 Concentrateur Cylindro-Parabolique (CSCP)

2.3.1 Principe de fonctionnement

Le concentrateur solaire cylindro-parabolique est un processus industriel qui sert à convertir l'énergie-solaire en énergie-thermique en se basant sur le principe de réflexion des rayonnements solaire [25, 26], un aperçu de ce système est illustré dans la figure.(2.3). Les miroirs-réfecteurs sont choisis paraboliquement courbés afin de focaliser les rayons solaires incidents sur la ligne focale de la parabole, de ce fait, un fluide thermique (typiquement huile synthétique, eau ou sel fondu) coulant à l'intérieur de tube-récepteur sera chauffé.

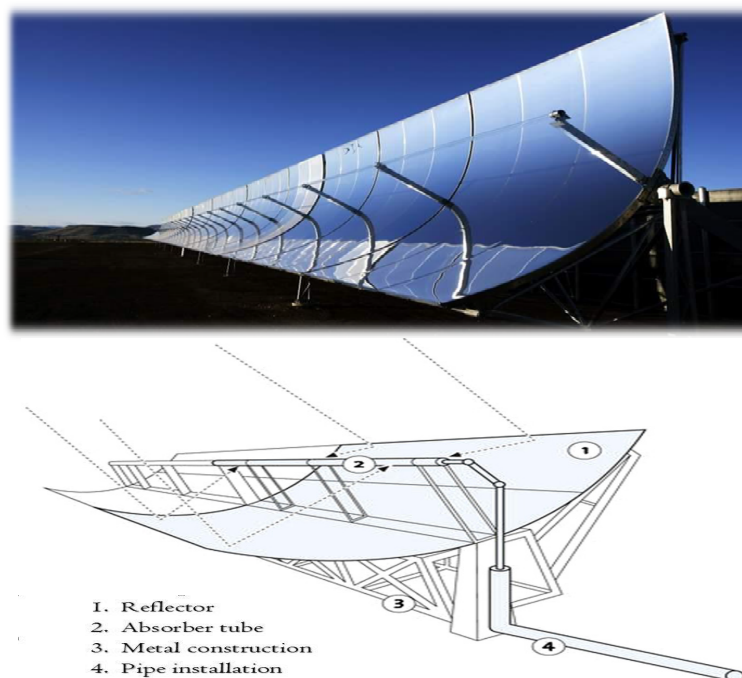


Figure 2.3: Concentrateur Solaire Cylindro-Parabolique

Le fluide chauffé est utilisé par la suite dans un échangeur de chaleur pour produire la vapeur d'eau. La vapeur ainsi produite fait tourner des turbines qui entraînent des alternateurs produisant de l'électricité, ou sert comme une source d'énergie qui actionne un cycle thermique conventionnel.

2.3.2 Problème de commande

Afin de maximiser l'énergie solaire captée, ce processus est doté d'un système de poursuite solaire à un degré de liberté [27], pour suivre la trajectoire solaire. En conséquence, le rendement sera maximalisé. Cependant, un fonctionnement optimal ne correspond pas toujours à un rendement maximal, mais à un rendement qui peut être contrôlé selon le besoin énergétique. A cet égard, il y a eu de nombreuses études pour contrôler l'énergie thermique produite. Le principal objectif de ces travaux consiste à forcer la température de sortie du tube-récepteur à suivre une référence désirée [28, 29, 30]. Pour remédier à ce problème deux principales techniques ont été proposées : classique et moderne.

2.3.2.1 Technique classique

Elle consiste à contrôler l'orientation du concentrateur vis-à-vis la direction principale du flux de radiation solaire incident, afin d'ajuster l'intensité de radiation concentrée au tube-récepteur de telle sorte qu'on atteigne la température de sortie désirée [22]. L'inconvénient majeur de cette technique est qu'elle s'appuie sur une démarche empirique. Cependant, la certitude dans une telle application est une obligation. En outre, ce système est souvent affecté par plusieurs sources de perturbation comme le changement brusque en radiation solaire causé par les passages nuageux, l'accumulation du sable et des impuretés sur les miroirs réflecteurs qui affectent la réflexion de rayons incidents. Alors, face de telles conditions cette méthode est impuissante d'atteindre les performances désirées.

2.3.2.2 Technique moderne

Le concept principal de cette technique consiste à prendre avantage de la relation qui existe entre la vitesse de fluide à l'intérieur du tube-récepteur et sa température. En effet, il est évident que lorsque la vitesse du fluide est basse sa température sera plus grande que celle obtenue à une vitesse relativement élevée, puisqu'il sera plus exposé à la source de chaleur (rayonnement solaire). Autrement dit, la relation entre ces deux grandeurs est inversement proportionnelle. En conséquence, la température de sortie peut être contrôlée en ajustant la vitesse du fluide à l'intérieur du tube-récepteur. Pour cela, une pompe à débit ajustable est insérée à l'entrée du tube-récepteur [16, 18]. Et afin d'atteindre l'objectif ultime, il suffit de contrôler le débit volumétrique de la pompe. La solution offerte par cette méthode est basée sur l'asservissement. Nous tenons à rappeler que cette démarche consiste essentiellement en trois principales étapes :

- Après avoir défini l'objectif souhaité, on doit définir la variable de commande (l'entrée) et la variable à commander (la sortie).
- Par la suite, on doit définir une relation mathématique qui gouverne le transfert entre l'entrée et la sortie prédéfinie. Autrement dit, la modélisation du comportement dynamique du système.
- Finalement, en se basant sur la théorie de commande et le modèle de système on pourra aboutir à l'objectif désiré.

2.4 Investigations sur le comportement dynamique du CSCP

2.4.1 Modélisation du CSCP

Pour modéliser l'évolution de la température du fluide à l'intérieur du tube-récepteur, nous considérons un petit élément du tube, souvent appelé le volume de contrôle, compris entre x et $x+\Delta x$ comme illustré dans la figure (2.4). L'enthalpie accumulée dans le volume de

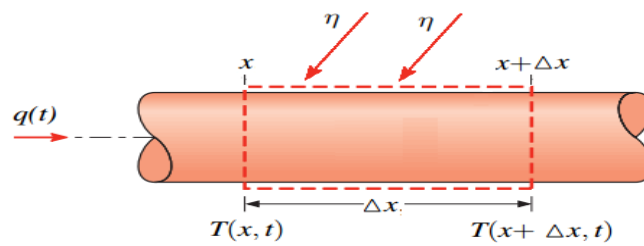


Figure 2.4: Volume de Contrôle

contrôle considéré entre deux instants successifs t et $t+\Delta t$, est donné par la relation suivante [21] :

$$E = \rho_f c_f s_f \Delta x (T(x, t + \Delta t) - T(x, t)) \quad (2.1)$$

où :

s_f : est la superficie de la section du tube.

ρ_f, c_f : sont la densité et la chaleur spécifique du fluide (respectivement).

$T(x, t)$: est la température de fluide, qui est en fonction du temps et de la position longitudinale x .

D'autre part, le calcul du bilan énergétique permet de calculer l'enthalpie accumulée susmentionné comme suit [21] :

$$E = E_1 + E_2 \quad (2.2)$$

Telle que :

- E_1 : est la différence entre l'enthalpie à l'entrée du tube et celle de sortie (on considère que le fluide est en écoulement), qui est donnée par :

$$E_1 = \rho_f c_f q(t) \Delta t (T(x, t) - T(x + \Delta x, t)) \quad (2.3)$$

où :

$q(t)$: est le débit de fluide.

- E_2 : est l'augmentation d'enthalpie dû à l'énergie solaire à l'intérieur du tube, qui est donnée par :

$$E_2 = \alpha \eta \Delta x \Delta t \quad (2.4)$$

où :

η : est l'intensité de la radiation solaire.

α : est un paramètre lié à l'efficacité de l'absorption d'énergie par le fluide.

Substituons (2.1), (2.3) et (2.4) dans (2.2), mène à :

$$\rho_f c_f s_f \Delta x (T(x, t + \Delta t) - T(x, t)) = \rho_f c_f q(t) \Delta t (T(x, t) - T(x + \Delta x, t)) + \alpha \eta \Delta x \Delta t \quad (2.5)$$

La division de (2.5) par $\Delta t \Delta x$, mène à l'équation suivante :

$$\rho_f c_f s_f \frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} = \rho_f c_f q(t) \frac{T(x, t) - T(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + \alpha \eta \quad (2.6)$$

Lorsque Δt et Δx tend vers zéro nous obtenons le modèle suivant :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \frac{q(t)}{s_f} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \frac{\alpha}{\rho_f c_f s_f} \eta \quad (2.7)$$

Le modèle (3.1) décrit l'évolution de la température à l'intérieur du tube-récepteur le long de la dimension spatiale (le long du tube). En outre, il exprime la relation entre la température du fluide et sa vitesse, donnée par le rapport entre le débit et la superficie de la section du tube, i.e.

$$\frac{\partial \overbrace{[T(x, t)]}^{\text{Température}}}{\partial t} + \underbrace{\left[\frac{q(t)}{s_f} \right]}_{\text{Vitesse} = u(t)} \frac{\partial \overbrace{[T(x, t)]}^{\text{Température}}}{\partial x} = \frac{\alpha}{\rho_f c_f s_f} \eta \triangleq s(t) \quad (2.8)$$

- Le terme cadré décrit l'apport de la source de chaleur (le soleil) sur l'évolution de la température, il est souvent appelé "**le terme source**".

Finalement, il reste à définir les conditions aux limites relatives à l'équation (3.1). Pour cela nous considérons le domaine spatial borné $x \in [0, l]$ à cause de la limitation de la longueur du tube-récepteur.

$$\text{C.L} \begin{cases} T(0, t) = T_o(t) \\ T(l, t) = T_{out}(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

où $T_o(t)$ est la température du fluide à l'entrée du tube-récepteur.
 $T_{out}(t)$ est température du fluide à la sortie du tube-récepteur.

La variation en radiation solaire et en température d'entrée sont considérées comme une source de perturbation qui affecte le système.

2.4.2 Comportement dynamique du CSCP

Le modèle (3.1) décrit d'une façon implicite la relation entre la commande et la sortie. Afin d'avoir une relation explicite entre ces deux grandeurs, on est invité à résoudre l'équation aux dérivées partielles. La solution de cette équation va nous offrir la possibilité d'étudier le comportement dynamique du système sans avoir besoin de simulation numérique. Par exemple, pour vérifier que la relation entre la température du fluide et sa vitesse est inversement proportionnelle, il suffit de vérifier que la dérivée de l'un par rapport à l'autre est négative. Pour cela, nous recourons aux méthodes analytiques de résolution d'EDP. Dans notre manuscrit on se limite à la méthode des caractéristiques dû à sa simplicité.

2.4.2.1 Méthode des caractéristiques

Pour une EDP du premier ordre, la méthode des caractéristiques consiste à chercher des courbes, appelées ligne caractéristiques, le long desquelles l'équation aux dérivées partielles se réduit à une simple équation différentielle ordinaire. La solution de l'ODE le long de la ligne caractéristique permet de retrouver la solution du problème original.

Equation Homogène :

Considérons l'équation homogène définie comme suit :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + u(t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

On cherche une ligne caractéristique $(t, x(t))$ le long de laquelle l'EDP (2.10) se réduit à une équation différentielle ordinaire.

Calculons la dérivée de $T(x, t)$ le long d'une telle courbe :

$$\begin{aligned} \frac{dT(x(t), t)}{dt} &= \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \frac{dt}{dt} \\ &= \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

On remarquera aisément qu'en imposant $\frac{dx}{dt} = u(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dT(x(t), t)}{dt} &= \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} u(t) + \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Il vient ainsi deux équations différentielles ordinaires à résoudre :

$$\frac{dx}{dt} = u(t) \quad (2.13)$$

$$\frac{dT(x(t), t)}{dt} = 0 \quad (2.14)$$

La solution de (2.10) reste constante le long de chaque ligne caractéristique. La valeur de la solution en un point x peut donc être retrouvée en cherchant la valeur de la condition initiale à l'origine x_0 tel que :

$$x_0 = x - \int_{t_0}^t u(\sigma) d\sigma \quad (2.15)$$

En conséquence, on peut vérifier que la fonction $\psi(x, t)$ définie ci-dessous est une solution de l'équation homogène (2.10) :

$$\psi(x, t) = x - \int_{t_0}^t u(\sigma) d\sigma \quad (2.16)$$

Equation Non-Homogène :

Considérons maintenant l'équation non-homogène définie comme suit :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + u(t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = s(t) \quad (2.17)$$

Pour résoudre cette équation nous introduisons les changements de variables suivants :

$$\xi_1 = \psi(x, t) \quad (2.18)$$

$$\xi_2 = t \quad (2.19)$$

Les dérivées partielles de $T(x, t)$ le long de la courbe (ξ_1, ξ_2) peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \\ &= \frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.21)$$

En substituant (2.20) et (2.21) dans (2.17), on obtient :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_1} \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + u(t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right] = s(t) \quad (2.22)$$

Prenons en considération que $\psi(x, t)$ est une solution de l'équation homogène, on obtient :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial \xi_2} = s(t) \quad (2.23)$$

Comme on peut le voir, l'équation aux dérivées partielles se réduit à une simple équation différentielle ordinaire. En conséquence, la solution de l'équation (2.23) est donnée comme suit :

$$T(x, t) = T(\xi_2, 0) + \int_{t_0}^t s(\sigma) d\sigma \quad (2.24)$$

En inversant le changement de variable, on trouve la solution finale donnée par (2.25)

$$T(x, t) = T(x - \int_{t_0}^t u(\sigma) d\sigma, 0) + \int_{t_0}^t s(\sigma) d\sigma \quad (2.25)$$

L'équation (2.25) décrit d'une façon explicite la relation entre le début du fluide et sa température.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème de commande d'un système de production d'énergie régi par équation aux dérivées partielles. Dans un premier lieu, nous avons présenté le contexte global de notre application et exposé les différentes technologies des concentrateurs solaires. Par la suite, on a mis en évidence le problème de commande qui a fait l'objet de notre travail et les différentes techniques qui ont été proposées pour remédier à ce problème. Finalement, une modélisation mathématique du comportement dynamique de ce système est synthétisée en utilisant les lois de conservation d'énergie. A travers ce chapitre on a pu constater la grande importance du problème traité dans cette thèse dans le secteur industriel et on s'est familiarisé avec la technologie des concentrateurs solaires. Dans le chapitre suivant, nous concentrons sur la commande de ce système.

CHAPITRE 3

COMMANDE DU CONCENTRATEUR CYLINDRO-PARABOLIQUE

"Tout changement est une menace pour la stabilité"

Aldous Huxley

Sommaire

3.1 Introduction	32
3.2 Préliminaires et formulation du problème	32
3.3 Commandes basées sur l'approche RPS	33
3.3.1 Commande prédictive	33
3.3.2 Commande par retour d'état	37
3.4 Commandes basées sur l'approche SPR	40
3.4.1 Commande par retour de sortie	40
3.4.2 Commande à base de l'énergie interne	43
3.5 Commande de la fermeture-éclair	46
3.5.1 Méthode des différences finies étendue	46
3.5.2 Synthèse de la commande et analyse de la stabilité	48
3.5.3 Résultats de simulation	52
3.6 Étude comparative	53
3.7 Conclusion	57

3.1 Introduction

CES dernières années, les concentrateurs solaires cylindro-paraboliques ont pris les devants sur une large gamme des concentrateurs solaires existants et sont devenus l'objet de nombreuses études car ils offrent la possibilité de contrôler l'énergie thermique produite. Néanmoins, la complexité du modèle EDP qui gouverne son fonctionnement demeure la contrainte majeure pour la synthèse du contrôleur [20, 16]. Pour remédier à ce problème, de nombreuses méthodes ont été proposées. Ces méthodes peuvent être classées, selon leurs principes, en deux catégories : "**Réduire Puis Synthétiser (RPS)**" et "**Synthétiser Puis Réduire (SPR)**" [31, 32]. La première consiste à faire des simplifications au modèle avant la synthèse du contrôleur afin de réduire sa complexité. La théorie la plus adoptées pour cela est basée sur la discrétisation spatiale dans laquelle de nombreuses méthodes sont appliquées, telles que : la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis [33, 34]. Alors que les méthodes de la deuxième catégorie utilisent directement le modèle EDP pour la synthèse du contrôleur en se basant sur un modèle d'état à dimension infinie obtenu par la description du modèle EDP dans l'espace de Hilbert ou l'espace de Banache [35, 36, 37]. Par la suite, le contrôleur résultant est réduit pour faciliter sa mise en oeuvre et son implémentation sur des cartes de commande.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle technique de commande inspirée du principe de fonctionnement de la fermeture-éclair aussi bien que la théorie de stabilité de Lyapunov. La principale motivation de ce travail consiste au besoin d'une méthode qui assure une optimisation entre le duel : complexité du développement analytique et certitude du modèle de synthèse de commande. Nos contributions dans ce chapitre sont les suivantes :

- **La méthode des différences finies étendue** : une version améliorée de la méthode des différences finies que nous l'employions pour surmonter la complexité du modèle EDP et avoir plus de précision.

- **Le contrôleur de la fermeture-éclair (The zipper controller)** : une nouvelle technique de commande, qui repose sur la méthode des différences finies étendue pour le contrôle des systèmes régis par équations aux dérivées partielles.

3.2 Préliminaires et formulation du problème

Considérons la classe des systèmes non linéaires régie par le modèle EDP définie comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + u(t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = s(t), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ & (3.1a) \\ T(x, 0) = T_0(x), & x \in \Omega & (3.1b) \\ y(t) = T(L, t), & t \in \mathbb{R}^+ & (3.1c) \end{cases}$$

L'objectif de commande consiste à synthétiser une loi de commande $u(t)$ assurant la bornitude de tous les signaux du système bouclé et la poursuite pour la sortie $y(t)$ d'une trajectoire $y_r(t)$. Dans notre application, les paramètres du système (3.1) correspondents aux regroupements paramétriques suivant :

$$\begin{cases} s(t) \triangleq \frac{V_0 \eta}{\rho_f c_f} \\ u(t) \triangleq \frac{q(t)}{s_f} \end{cases}$$

3.3 Commandes basées sur l'approche RPS

3.3.1 Commande prédictive

La commande prédictive est une technique de commande avancée de l'automatique. Elle a pour objectif de commander des systèmes industriels complexes. Le principe de cette technique est d'utiliser un modèle dynamique du processus à l'intérieur du contrôleur en temps réel afin d'anticiper le futur comportement du procédé. La commande prédictive fait partie des techniques de contrôle à modèle interne (IMC : Internal Model Controller). En anglais on utilise le terme MPC ou MBPC pour qualifier la commande prédictive : Model (Based) Predictive Control ou aussi PFC : "Predictive Functional Control". Cette méthode a été inventée par un Français, J. Richalet [38], en 1978 et généralisée par D.W. Clarke en 1987 [39] en accord avec de grands groupes industriels aux États-Unis et en Europe (Shell et Adersa).

3.3.1.1 Simplification du Modèle

Afin de s'affranchir de la complexité liée à l'opérateur de différentiation par rapport à la seconde variable, une approche conventionnelle est souvent adoptée pour approximer le modèle EDP par un modèle équivalent constitué d'un ensemble d'équations aux dérivées ordinaires. Chaque équation ODE représente le comportement du système dans une région spatiale bien définie.

L'idée de cette approche consiste à subdiviser l'horizon spatial à un maillage équidistant de longueur Δx . Par la suite, on approxime l'opérateur susvisé dans chaque maille par la méthode des différences finies comme suit : $\forall x \in [x_i - \Delta x, x_i]$,

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{T(x_i, t) - T(x_i - \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (3.2)$$

En substituant cette approximation dans le modèle EDP (3.1), on obtient le modèle ODE suivant : $\forall x \in [x_i - \Delta x, x_i]$,

$$\frac{dT(x,t)}{dt} = -u(t) \frac{T(x_i, t) - T(x_i - \Delta x, t)}{\Delta x} + s(t) \quad (3.3)$$

Pour écrire le modèle (3.3) sous une représentation d'état, nous considérons la variable d'état suivante :

$$x_i(t) = T(i \Delta x, t)$$

Avec le choix du vecteur d'état ci-dessous, nous représentons le comportement dynamique du système le long de l'horizon spatial :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}$$

En conséquence, le modèle d'état équivalent est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B s(t) + D T_{in}(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} u(t) & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & u(t)I_{n-1} & \ddots & 0 \\ & & & & u(t) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3.1.2 Synthèse de la commande

La synthèse de la commande prédictive est basée, essentiellement, sur trois étapes.

Prédiction du comportement futur du système

Afin de prédire le comportement futur du système, on suppose que la sortie du système $y(t)$ est connue et on cherche à trouver $\hat{y}(t + \sigma)$ (σ est souvent appelé le pas de prédiction). Pour ce faire, le développement en série de Taylor (DST) peut servir comme un outil de prédiction si on l'exploite comme suit :

$$\hat{y}(t + \sigma) = y(t) + \sigma \frac{dy(t)}{dt} + \sum_{i=2}^n \frac{\sigma^i}{i!} \frac{d^i y(t)}{dt^i} \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{y}(t + \sigma) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & \cdots & \sigma^n/n! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Par analogie, la prédiction de la référence désirée y_r peut s'écrire comme suit¹ :

$$\hat{y}_r(t + \sigma) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & \cdots & \sigma^n/n! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_r \\ \dot{y}_r \\ \vdots \\ y_r^{(n)} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Soit $e(t)$ l'erreur de poursuite défini comme suit :

$$e(t) \triangleq y(t) - y_r(t) \quad (3.8)$$

La prédiction de l'erreur de poursuite est donnée par l'équation (3.9) :

$$\hat{e}(t + \sigma) = \hat{y}(t + \sigma) - \hat{y}_r(t + \sigma) \quad (3.9)$$

En substituant (3.6) et (3.7) dans (3.9), on obtient :

$$\hat{e}(t + \sigma) = \psi(\sigma) \varphi(t) \quad (3.10)$$

où :

$$\psi^T(\sigma) \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \\ \vdots \\ \sigma^n/n! \end{pmatrix} ; \quad \varphi(t) \triangleq \begin{pmatrix} y - y_r \\ \dot{y} - \dot{y}_r \\ \vdots \\ y^{(n)} - y_r^{(n)} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\dim \{ \varphi(t) \} = (n+1) \times 1$$

Optimisation quadratique et synthèse de la commande prédictive

Soit $J(t)$ le critère quadratique, pénalisant l'erreur prédite, défini comme suit :

$$J(t) \triangleq \frac{1}{2} \int_0^T \hat{e}(t+\sigma)^2 d\sigma \quad (3.11)$$

- T est l'horizon de prédiction.
- t est l'instant présent.
- $\sigma \in [t, t+T]$ est l'instant auquel la présentation est faite.

1. La prédiction de la référence ce n'est qu'une astuce de synthèse du contrôleur prédictif. En pratique, la référence est connue en préalable

On cherche à trouver la commande $u(t)$ qui minimise le critère $J(t)$ le long de l'horizon T .
En substituant (3.10) dans (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{2} \int_0^T \varphi^T(t) \psi^T(\sigma) \psi(\sigma) \varphi(t) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \varphi^T(t) \left(\int_0^T \psi^T(\sigma) \psi(\sigma) d\sigma \right) \varphi(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Afin d'avoir le terme de la commande dans l'expression du critère quadratique $J(t)$ on a qu'à choisir l'ordre du développent en série de Taylor égal au degré relatif du système². Avec ce choix, on assure que l'ordre le plus élevé des dérivées de la sortie $y(t)$ dans le DST est égale au degré relatif du système. En conséquence, l'apparition de la commande dans l'expression du critère quadratique.

Avec ce choix nous obtenons l'identité suivante :

$$\int_0^T \psi^T(\sigma) \psi(\sigma) d\sigma = \begin{pmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

En substituant (3.13) dans (3.12), on obtient :

$$J(t) = \frac{1}{2} \varphi^T(t) \begin{pmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} \end{pmatrix} \varphi(t) \quad (3.14)$$

Finalement, la loi de la commande prédictive peut être obtenue par la minimisation du critère $J(t)$ comme suit :

$$\frac{\partial J}{\partial u} = 0 \quad (3.15)$$

En conséquence,

$$\left(\frac{\partial \varphi(t)}{\partial u} \right)^T \begin{pmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} \end{pmatrix} \varphi(t) = 0 \quad (3.16)$$

Après quelque développment analytique nous obtenons la commande suivante :

$$u(t) = \frac{\Delta x}{x_n - x_{n-1}} (s(t) - \dot{x}_r + \frac{3}{2T}e) \quad (3.17)$$

Algorithme d'implémentation

Nous rappelons que l'objectif de commande est de stabiliser l'erreur de poursuite au voisinage de zéro dans un temps finis. Dans les étapes précédentes on a abouti à un résultat très intéressant mais l'objectif de commande n'est pas vraiment atteint. La commande synthétisée

2. Par définition, Le degré relatif d'un système présente le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie afin de faire apparaître explicitement la commande (l'entrée)

contribuée à la minimisation de l'erreur prédit³ alors que le problème en temps réel est toujours posé.

"The receding horizon predictive control" est une approche algorithmique souvent adoptée pour remédier à ce problème. Elle est constituée, essentiellement, des étapes suivantes :

- 1 • Utiliser le modèle de système pour prédire son comportement futur, en fonction d'une séquence de contrôle⁴.
- 2 • Calculer la séquence de contrôle qui minimise une certaine fonction objective.
- 3 • Appliquer seulement le premier élément de la séquence de contrôle, puis recalculer la séquence en décalant l'horizon de prédiction d'un pas en avant.

Plus de détails sur l'algorithme d'implémentation peuvent être trouvés dans la référence [40].

3.3.2 Commande par retour d'état

Dans [41], un modèle bilinéaire de complexité réduite a été introduit en se basant sur une interpolation gaussienne le long de l'horizon spatial. Par la suite, une commande par retour d'état a été synthétisée en se basant sur le modèle proposée.

3.3.2.1 Simplification du Modèle

Dans cette section nous allons présenter le principe de la méthode adoptée dans la modélisation.

On considère n ensembles D_i dans l'espace $\Omega = [0, L]$ caractérisé par des fonctions de distribution μ_i définies en fonction de la coordonnée spatiale, telles que :

$$D_i = \{(x_i, \mu_i(x)) \mid x \in [0, L]\}, \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (3.18)$$

Ces fonctions ont été choisies gaussiennes pour conserver les caractéristiques de la solution distribuée ; continuité et différentiabilité infinie. Ils sont exprimés en fonction de la positions spatiale comme suit :

$$\mu_i(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x - a_i}{\sigma_i}\right)^2\right), \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (3.19)$$

où

- a_i : est la valeur moyenne de la fonction gaussienne correspondante à l'ième ensemble.
- σ_i : est la variance de la fonction gaussienne.

3. L'optimisation n'implique pas la stabilité

4. La commande n'est pas considéré comme une fonction continue, car l'implémentation pratique se fait en discret

Nous considérons que la valeur moyenne et la variance sont définies comme suit :

$$a_i = (i - 1) \frac{L}{(n - 1)} \quad \text{et} \quad \sigma_i = \sigma = a \frac{L}{(n - 1)} \quad (3.20)$$

Les fonctions gaussiennes sont centrées autour des points distribués, en équidistant, le long de l'horizon spatial comme illustré dans la figure (3.1). Afin de reproduire la dynamique du

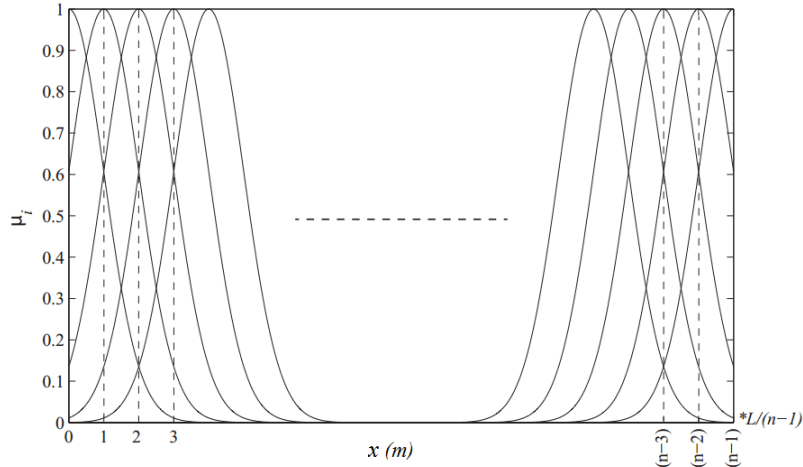


Figure 3.1: Répartition des fonctions gaussiennes le long du tube-récepteur[28]

système, la température $T(x,t)$ est approximée à chaque position x par une interpolation. Soit $\hat{T}(x,t)$ l'approximation de $T(x,t)$, que l'on définit comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{T}(x, t) &= \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \gamma_i(x) \\ &= \gamma^T(x) \xi(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Avec :

$$\gamma^T(x) = [\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)] \quad \text{et} \quad \xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)]$$

où :

$$\gamma_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\sum_{k=1}^n \mu_k(x)}$$

En substituant l'approximation (3.21) dans le modèle EDP (3.1) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{T}(x, t) + u(t) \frac{\partial}{\partial x} \hat{T}(x, t) = s(t) \quad (3.22)$$

$$\gamma(x)^T \dot{\xi}(t) + u(t) \xi(t)^T \gamma_x(x) = s(t) \quad (3.23)$$

Et

$$\hat{T}(0, t) = \gamma(0)^T \xi(t) = T_{in}(t), \quad (3.24)$$

Afin de représenter ce modèle le long de la dimension spatiale, on considère une grille unidimensionnelle de p points équidistants sur le domaine $\Omega = [0, L]$, $j = \{0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, L\}$ avec $\Delta x = \frac{L}{p-1}$, on obtient :

$$\Gamma \dot{\xi} + \Gamma_x \xi u(t) = S(t), \quad (3.25)$$

Tel que :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1(0) & \cdots & \gamma_n(0) \\ \gamma_1(\Delta x) & \cdots & \gamma_n(\Delta x) \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_1(j) & \cdots & \gamma_n(j) \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_1(L) & & \gamma_n(L) \end{bmatrix}_{p \times n}, \quad \Gamma_x = \begin{bmatrix} \gamma_{x1}(0) & \cdots & \gamma_{xn}(0) \\ \gamma_{x1}(\Delta x) & \cdots & \gamma_{xn}(\Delta x) \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{x1}(j) & \cdots & \gamma_{xn}(j) \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{x1}(L) & & \gamma_{xn}(L) \end{bmatrix}_{p \times n}$$

Et

$$S(t) = s(t) I_{p \times 1}, \quad \gamma_{xi}(x) = \frac{\partial \gamma_i(x)}{\partial x} \quad (3.26)$$

Pour assurer que l'approximation proposée reproduit fidèlement le comportement dynamique du système, les valeurs des paramètres $\xi(t)$ sont choisies de façon à minimiser l'erreur d'approximation en utilisant un critère quadratique des moindres carrés. En conséquence, l'évolution temporelle des paramètres $\xi(t)$ est donnée par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A \xi(t) u(t) + B(t) \\ y(t) = C \xi(t) \end{cases} \quad (3.27)$$

où :

$$A = -(\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Gamma_x, \quad \text{et} \quad B(t) = (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T S(t). \quad (3.28)$$

La sortie du système, qui représente la température du fluide à la sortie du tube-récepteur, est donnée par :

$$y(t) = C \xi(t) = T(L, t) \quad \text{tel que} \quad C = [\gamma_1(L) \quad \cdots \quad \gamma_n(L)], \quad (3.29)$$

Remarque 3.1 :

L'ordre du système (3.27) est égal au nombre d'ensembles n .

3.3.2.2 Synthèse de la commande

Nous rappelons que l'objectif de commande consiste à trouver une loi de commande $u(t)$ pour que la sortie $y(t)$ suit une référence désirée $y_r(t)$.

Théorème 3.1 :

Considérons le système régi par le modèle (3.27). Si la loi de commande définie ci-dessous est appliquée à ce système,

$$u(t) = \frac{Ke - CB}{CA \xi} \quad (3.30)$$

où :

- $e(t)$: est l'erreur de poursuite définie par (3.31).

$$e(t) = y_r(t) - y(t) \quad (3.31)$$

Alors, l'erreur de poursuite converge exponentiellement à zéro.

Preuve :

Soit V une fonction de Lyapunov définie comme suit :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ V &= \frac{1}{2}e^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

En dérivant (3.32), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e \dot{e} \\ &= -C[A \xi u(t) + B]e \end{aligned} \quad (3.33)$$

Afin de stabiliser l'erreur de poursuite au voisinage de zéro, on doit assurer que la dérivée de la fonction de Lyapunov soit définie négative. En conséquence, on cherche que \dot{V} soit définie comme suit :

$$\dot{V} = -k e^2 \quad (3.34)$$

En substituant (3.33) dans (3.34), on trouve la commande définie comme suit

$$u(t) = \frac{Ke - CB}{CA \xi} \quad (3.35)$$

Alors, si la commande (3.35) est appliquée au système (3.27) l'erreur définie par (3.31) converge exponentiellement à zéro.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0, \quad (3.36)$$

Ce qui termine la preuve. ■

3.4 Commandes basées sur l'approche SPR

3.4.1 Commande par retour de sortie

Nous présentons dans cette section une méthode de commande basée sur le modèle EDP du système. L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle ne dépend pas de l'état du sys-

tème, elle est basée uniquement sur la sortie⁵. Cette idée a été proposée récemment par Elmentennani et *al.* dans [42].

On suppose que le profil de la température désirée $\bar{T}(x, t)$ est la solution du système régi par le modèle EDP suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial x} = \bar{s}(t), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ & (3.37a) \\ \bar{T}(x, 0) = \bar{T}_0(x), & x \in \Omega & (3.37b) \\ \bar{T}(0, t) = \bar{T}_{in}(t), & t \in \mathbb{R}^+ & (3.37c) \end{cases}$$

où :

- $\bar{s}(t)$: est le terme source.
- \bar{u} : est une vitesse constante.
- $\bar{T}(0, t)$: est la condition limite qui est choisit la même que celle du modèle (3.1).

Ce modèle est appelé dans la littérature "*le modèle générateur de référence*" (en anglais, Trajectory-Generator ou bien Motion-Planner). Nous reviendrons à ce point avec plus de détails dans l'étude comparative.

Soit $w(x, t)$ l'erreur de poursuite définie par (3.38) :

$$w(x, t) \triangleq T(x, t) - \bar{T}(x, t), \quad x \in \Omega = [0, L], t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.38)$$

En substituant (3.59a) et (3.37b) dans (3.38), on obtient :

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial t} \quad (3.39)$$

$$= -u(t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + s(t) + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial x} - \bar{s}(t) \quad (3.40)$$

En ajoutant et en soustrayant le terme $\bar{u} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$, nous obtenons le modèle qui décrit la dynamique de l'erreur de poursuite :

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = -(u(t) - \bar{u}) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + (s(t) - \bar{s}(t)) \quad (3.41)$$

Afin d'atteindre l'objectif de commande on doit stabiliser l'erreur de poursuite régie par le modèle (3.41) au voisinage de zéro.

5. Dans notre application, la sortie du système représente la température à la sortie du tube-récepteur qui est mesurable par un thermomètre.

Théorème 3.2 :

Considérons le système régi par le modèle EDP (3.1). Si la loi de commande définie ci-dessous est appliquée à l'entrée de ce système,

$$u(t) = \frac{s(t) - \bar{s}(t)}{\frac{y(t) - T_{in}(t)}{L}} + \bar{u} \quad (3.42)$$

où :

$$\frac{\bar{s}(t)}{\bar{u}} = \frac{y_r - T_{in}(t)}{L} \quad (3.43)$$

Alors, l'erreur de poursuite $w(x,t)$ converge exponentiellement à zéro, c-à-d :

$$\exists \tau > 0, \text{ tel que } \forall t > \tau : w(L, t) = 0 \quad (3.44)$$

Preuve :

L'idée de cette méthode est de forcer l'erreur de poursuite à suivre un modèle de référence qui satisfait l'objectif de commande. Pour cela, nous considérons un modèle EDP stable défini comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0, & x \in \Omega=[0,L], \quad t \in [\tau, +\infty[\end{cases} \quad (3.45a)$$

$$\begin{cases} w(x, 0) = 0, & x \in \Omega = [0, L] \end{cases} \quad (3.45b)$$

$$\begin{cases} w(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.45c)$$

Puis, en imposant au modèle (3.41) à suivre le modèle de référence (3.45). Pour cela, on identifie les dynamiques des deux systèmes.

En identifiant (3.41) avec (3.45b), on obtient :

$$-(u(t) - \bar{u}) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + (s(t) - \bar{s}(t)) = 0 \quad (3.46)$$

En conséquence, la commande qui assure la stabilité du système peut être dérivée de l'équation (3.46) comme suit :

$$u(t) = \frac{s(t) - \bar{s}(t)}{\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}} + \bar{u} \quad (3.47)$$

Comme on peut le voir, la commande résultante dépend de termes inconnus (les termes colorés en rouge). Pour s'affranchir de ce problème, Elmetennani et al. propose les approximations suivantes :

- La variation de la température par rapport à x est approximée par la méthode des différences finies comme suit :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \frac{T(L, t) - T(0, t)}{L} \quad (3.48)$$

$$= \frac{y_r(t) - T_{in}(t)}{L} \quad (3.49)$$

De la même façon, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial x} = \frac{\bar{T}(L, t) - \bar{T}(0, t)}{L} \quad (3.50)$$

$$= \frac{y_r(t) - T_{in}(t)}{L} \quad (3.51)$$

- En tenant compte des conditions physiques du système où la température d'entrée varie lentement par rapport au débit volumétrique de la pompe et aux perturbations externes, on aboutit à cette identité⁶ :

$$\frac{\bar{s}(t)}{\bar{u}} = \frac{y_r - T_{in}(t)}{L} \quad (3.52)$$

Pour appliquer cette commande au système, on pose \bar{u} comme un paramètre de réglage et on trouve $\bar{s}(t)$ par l'équation (3.52).

Ce qui termine la preuve. ■

3.4.2 Commande à base de l'énergie interne

Dans cette méthode on cherche à contrôler l'énergie à l'intérieur du tube-récepteur pour atteindre l'objectif de commande. Le principe de cette approche a été introduit, en 2002, par Johansen [27]. Le contrôle de l'énergie interne mène à un problème de poursuite dans lequel on cherche à forcer la température du fluide, le long du tube-récepteur, à suivre un profil désiré. En conséquence, la température de sortie va suivre la référence désirée et l'objectif de commande sera atteint indirectement.

L'énergie à l'intérieur du tube récepteur est définie comme suit :

$$E = \rho_f c_f s_f \int_0^L T(x, t) dx \quad (3.53)$$

On cherche à forcer l'énergie à l'intérieur du tube récepteur pour qu'elle suit la référence E_r qui est définie comme suit :

$$E_r = \rho_f c_f s_f \int_0^L T^*(x, t) dx, \quad (3.54)$$

Nous définissons l'erreur de poursuite comme suit :

$$\Delta E = E_r - E \quad (3.55)$$

En substituant (3.54) et (3.53) dans (3.55), on obtient :

$$\Delta E = \rho_f c_f s_f \int_0^L (T^*(x, t) - T(x, t)) dx \quad (3.56)$$

Si on considère que $T^*(x, t)$ est le profil de température désiré. Alors, on peut atteindre les objectifs de commandes qui assurent le contrôle de l'énergie interne et la température du fluide

6. Plus de détails sur cette approximation sont donnés dans [42].

le long du tube à la fois. Pour cela, on doit trouver une loi de commande qui entraîne l'erreur de poursuite moyenne $\delta(t)$ défini par (3.57) à zéro dans un temps fini, tout en supposant que la condition limite et le terme source sont mesurables⁷.

$$\delta(t) = \int_0^L (T^*(x, t) - T(x, t)) dx \quad t \geq 0 \quad (3.57)$$

Dans la proposition suivante nous introduisant un résultat préliminaire pour remédier à ce problème.

Proposition :[43]

L'erreur de poursuite moyenne $\delta(t)$ donnée par l'équation (3.57) est positive si la condition suivante est satisfaite :

$$T^*(x, t = 0) \geq T(x, t = 0) \quad (3.58)$$

où :

- $T^*(x, t = 0)$ est la condition initiale du profile de température désiré.
- $T(x, t = 0)$ est la condition initiale de la température du fluide.

Preuve :

Nous considérons que le profile de température désiré est la solution analytique du modèle générateur de référence suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial t} + u^*(t) \frac{\partial T^*(x, t)}{\partial x} = s(t) & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ & (3.59a) \\ T^*(x, 0) = T_0(x), & x \in \Omega & (3.59b) \\ y^*(t) = T^*(L, t), & t \in \mathbb{R}^+ & (3.59c) \end{cases}$$

La solution analytique du modèle EDP (3.1) est donnée comme suit :

$$T(x, t) = T(x - \int_{t_0}^t u(\sigma) d\sigma, 0) + \int_{t_0}^t s(\sigma) d\sigma \quad (3.60)$$

Par analogie, la solution du modèle générateur de référence est donnée comme suit :

$$T^*(x, t) = T^*(x - \int_{t_0}^t u^*(\sigma) d\sigma, 0) + \int_{t_0}^t s(\sigma) d\sigma \quad (3.61)$$

En substituant (3.60) et (3.61) dans (3.57), on obtient :

$$\delta(t) = \int_0^L \left(T_0^*(x - \int_0^t u^*(\tau) d\tau) - T_0(x - \int_0^t u(\tau) d\tau) \right) dx \quad (3.62)$$

Si la condition donnée par (3.58) est satisfaite, alors l'erreur de poursuite moyenne $\delta(t)$ est positive.

Ce qui termine la preuve. ■

7. le terme source dépend de la radiation solaire qui est mesurable par le Pyranomètre

Remarque 3.2 :

Si $\delta(t)$ tends vers zéro, alors, la température du fluide $T(x, t)$ tend vers le profil désiré $T^*(x, t)$.⁸

Hypothèse :

Afin de tirer profit de ce résultat, nous supposons que le profil de température désirée $T^*(x, t)$ est choisie de telle sorte que la condition (3.58) est satisfaite.

Théorème 3.3 :

Considérons le système régi par le modèle EDP (3.1). Si la loi de commande définie ci-après est appliquée au système :

$$u(t) = \frac{1}{(T(L, t) - T(0, t))} \left[\frac{s(t)}{L} - \int_0^L \frac{\partial T^*}{\partial t} dx - k_p \delta(t) \right] \quad (3.63)$$

Alors, l'erreur de poursuite moyenne $\delta(t)$ converge exponentiellement vers zéro.

Preuve :

Soit $V(t)$ une fonction de Lyapunov définie comme suit :

$$V(t) = \frac{1}{2} \delta(t)^2 \quad (3.64)$$

En dérivant (3.64), nous obtenons :

$$\dot{V}(t) = \delta(t) \int_0^L \left\{ u(t) \frac{\partial T}{\partial x} - s(t) + \frac{\partial T}{\partial t} \right\} dx \quad (3.65)$$

En substituant (3.63) dans (3.65), nous obtenons :

$$\dot{V}(t) = -k_p \delta(t)^2 \quad (3.66)$$

Et donc :

$$V(t) \leq V(0) \exp^{-k_p t} \quad (3.67)$$

Ce qui termine la preuve. ■

Finalement, on peut conclure que par l'application de la loi de commande (3.63) au système régi par le modèle EDP (3.1) l'erreur de poursuite moyenne $\delta(t)$ converge globalement et exponentiellement à zéro.

En tenant compte de la **Remarque 3.2**, on peut conclure que la température de sortie $T(L, t)$ converge exponentiellement vers la température de sortie désirée.

8. Si l'intégrale d'une fonction est positive, alors, la convergence de l'intégrale à zéro implique la convergence de cette fonction à zéro.

3.5 Commande de la fermeture-éclair

Remarque 3.3 : Pour des raisons de simplicité on note $T(t, x)$ par $T_t(x)$ dans le reste de ce chapitre.

3.5.1 Méthode des différences finies étendue

La méthode des différences finies est l'une des approches les plus adoptées pour s'affranchir de la complexité liée à la différentiation dans les modèles dynamiques des systèmes [16]. Le concept principal de cette méthode consiste à approximer l'opérateur de dérivation/différentiation par une fonction linéaire tirée du développement en série de Taylor. Dans le cas des systèmes régis par équations aux dérivées partielles (EDP), cette approximation est appliquée à l'opérateur de différentiation lié à la variable secondaire seulement. En conséquence, le modèle EDP sera équivalent à un modèle constitué d'un ensemble d'équations aux dérivées ordinaires ODE's de complexité réduite. Dans ce qui suit, nous rappelons le fondement analytique de cette méthode.

L'approximation susmentionnée est donnée par l'identité suivante :

$$\frac{\partial T_t(x)}{\partial x} \simeq \frac{T_t(x) - T_t(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (3.68)$$

où :

- Δx : désigne la longueur du pas de discrétisation.

L'identité ci-dessus est dérivée du développement en série de Taylor (TSE) de $T_t(x)$ dans un voisinage spatial Δx , comme suit :

$$T_t(x - \Delta x) = T_t(x) - \Delta x \frac{\partial T_t(x)}{\partial x} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i \Delta x^i}{i!} \frac{\partial^i T_t(x)}{\partial x^i} \quad (3.69)$$

Ou de manière équivalente :

$$\frac{\partial T_t(x)}{\partial x} = \frac{T_t(x) - T_t(x - \Delta x)}{\Delta x} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i \Delta x^{i-1}}{i!} \frac{\partial^i T_t(x)}{\partial x^i} \quad (3.70)$$

Notons \mathcal{R} le terme provenant du reste de développement en série de Taylor, qui est défini comme suit :

$$\mathcal{R} \triangleq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i \Delta x^{i-1}}{i!} \frac{\partial^i T_t(x)}{\partial x^i} \quad (3.71)$$

Comme on peut le voir :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{R} = 0 \quad (3.72)$$

Pour des raisons de simplicité, généralement le terme \mathcal{R} est négligé. Cependant, cette ignorance conduit à une perte d'information sur le comportement dynamique du système à cause des erreurs de troncature résultantes. Pour remédier à ce problème, tous les travaux précédents proposent de choisir le pas de discrétisation Δx assez petit pour justifier la négligence de \mathcal{R} par la satisfaction de la condition donnée par l'équation (3.72) ou étant suffisamment proche de leur satisfaction. En conséquence, le nombre d'équations ODE's qui constituent le modèle équivalent sera très grand, ce qui mène à un besoin croissant de puissance de calcul donc un cout élevé. En outre, nous ne pouvons jamais atteindre la précision du modèle EDP malgré les petites valeurs du pas de discrétisation.

Proposition 3.1. *Pour surmonter la complexité du modèle EDP et avoir plus de précision, nous proposons de considérer le terme \mathcal{R} comme un paramètre inconnu dans la synthèse du contrôleur.*

En faveur de cette proposition, l'approximation de l'opérateur de différentiation donnée par (3.68) deviendra comme suit :

$$\frac{\partial T_t(x)}{\partial x} = \frac{T_t(x) - T_t(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{R}_{\text{uncertain}} \quad (3.73)$$

Remarque 3.4 : L'idée de la méthode des différences finies étendue peut être utilisée pour perfectionner la certitude d'autres méthodes de discrétisation comme la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis.

3.5.1.1 Synthèse du modèle équivalent incertain

En faveur de la méthode des différences finies étendue, le modèle EDP (3.1) est équivalent au modèle ODE incertain obtenu par la substitution de l'identité (3.73) dans (3.1), comme suit :

$$\forall x \in [x_l - \Delta x, x_l]$$

$$\frac{dT_t(x)}{dt} = (T_t(x - \Delta x)|_{x=x_1} - T_t(x)|_{x=x_1}) \frac{q(t)}{s} + \frac{v_0 \eta}{\rho c s} I(t) - \frac{q(t)}{s} \mathcal{R}|_{x=x_1} \quad (3.74)$$

uncertain

Afin d'écrire le modèle équivalent-incertain (3.74) sous une représentation d'état nous choisissons la variable d'état x défini comme suit :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{Avec} \quad x_i = T_t(l - (i - 1) \Delta x)$$

Alors, le modèle d'état équivalent peut être défini comme suit :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u + \xi(t) \\ y = c x \end{cases} \quad (3.75)$$

Avec :

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix} ; \quad \zeta(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ \vdots \\ \zeta_n(t) \end{pmatrix} ; \quad f(x) = \frac{v_0 \eta}{\rho c s} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} I(t) ; \quad c^T = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où :

$$g_i(x) = \frac{x_i - x_{i+1}}{s} ; \quad \zeta_i(t) = -\frac{q(t)}{s} \mathcal{R}_i$$

Deux avantages principaux de la méthode proposée méritent d'être soulignés. Le premier consiste dans sa capacité d'assurer une optimisation entre le duel complexité/précision, en fournissant un modèle équivalent-incertain qui peut décrire avec précision et moins de complexité le modèle EDP d'origine. Le second est la possibilité d'être appliquée pour décrire tous les processus régis par un modèle EDP.

Sur cette base, nous introduisons le contrôleur de la fermeture-éclair dans la section suivante.

3.5.2 Synthèse de la commande et analyse de la stabilité

Les inspirations créatrices qui ont marqué les grands moments du génie humain sont liées à des détails insignifiants en apparence : une pomme pour Newton, une piscine pour Archimède, et plein d'autres exemples impressionnants. Pour remédier à l'objectif de commande susvisé, nous présentons dans ce qui suit une nouvelle approche de commande inspirée de la fermeture-éclair que nous appelons "*The zipper controller*". L'idée principale de cette approche repose sur le principe de fonctionnement de la fermeture-éclair aussi bien que sur l'analyse de stabilité par la méthode de Lyapunov.

L'idée de base de cette méthode consiste à confiner le système incertain (Σ) entre deux systèmes bien définis que nous appelons "*Les systèmes limites*", c-à-d :

$$\forall t \in [0, t_f]$$

$$(\Sigma)_{min} \leq (\Sigma) \leq (\Sigma)_{max} \tag{3.76}$$

Puis nous coïncidons (Σ) à la référence désirée, grâce à l'inégalité (3.76), tout en forçant $(\Sigma)_{min}$ et $(\Sigma)_{max}$ à suivre la même référence. En conséquence, nous atteignons l'objectif désiré.

Le principe de cette idée est inspiré du principe de fonctionnement de la fermeture-éclair comme illustré dans la figure (3.2).

Avant d'entamer la synthèse de ce contrôleur, nous soulignons les étapes principales de ce nouveau principe de commande :

- Premièrement, nous devons définir les systèmes limites $(\Sigma)_{min}$ et $(\Sigma)_{max}$.
- Ensuite, nous élaborons une relation mathématique, que nous appelons "*La relation de liaison*", entre les lois de commandes faisant $(\Sigma)_{min}$ et $(\Sigma)_{max}$ convergent à la référence désirée pour coïncider (Σ) avec elle.

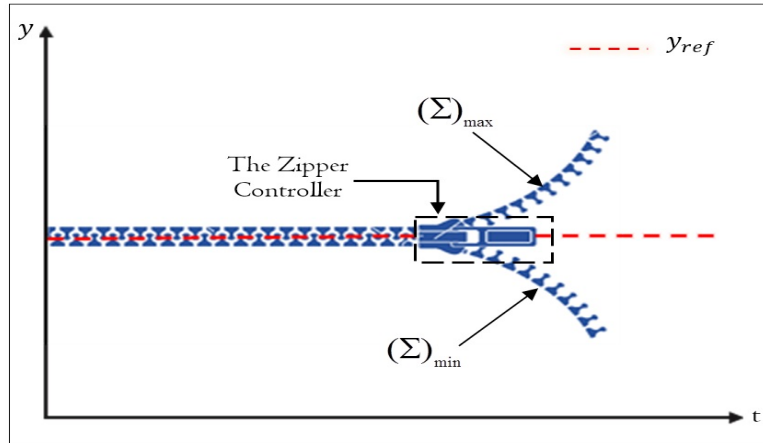


Figure 3.2: Principe du contrôleur de la fermeture-éclair (The Zipper controller)

- Finalement, nous analysons la stabilité du contrôleur résultant en faisant appel à la théorie de stabilité de Lyapunov.

Remarque 3.5 : La méthode que nous allons présenter peut être étendue à d'autres classes de systèmes incertains. Pour cela, nous fournissons quelques remarques qui sont nécessaires pour l'adoption de cette méthode.

3.5.2.1 Définition des systèmes limites

Pour surmonter le problème causé par l'apparition des paramètres incertains dans la loi de commande résultante, on doit choisir les systèmes limites bien définies (ces systèmes ne doivent contenir aucune incertitude).

En tenant compte de cette condition, les systèmes limites sont formellement définis dans la proposition suivante :

Proposition 3.2 : Soit $(\Sigma)_1$ et $(\Sigma)_2$ deux systèmes non-linéaires définis comme suit :

$$(\Sigma)_1 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u - \xi_m \\ y = c x \end{cases} \quad (\Sigma)_2 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u + \xi_m \\ y = c x \end{cases}$$

où :

- ξ_m : est la borne supérieure de $|\xi(t)|$, c-à-d

$$|\xi(t)| \leq \xi_m$$

Alors, le système incertain (3.75) satisfait l'inégalité suivante :

$$(\Sigma)_{min} : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) + g(x) u - \xi_m \\ y = c x \end{array} \right\} \leq (\Sigma) : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) + g(x) u + \xi(t) \\ y = c x \end{array} \right\} \leq (\Sigma)_{max} : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) + g(x) u + \xi_m \\ y = c x \end{array} \right\}$$

Preuve :

Utilisant le fait que les incertitudes du système sont bornées, donc on peut écrire :

$$|\zeta(t)| \leq \zeta_m \quad (3.77)$$

Ou d'une manière équivalente :

$$-\zeta_m \leq \zeta(t) \leq \zeta_m \quad (3.78)$$

En ajoutant le terme $f(x) + g(x)u$ à l'inégalité (3.78), on obtient :

$$f(x) + g(x)u - \zeta_m \leq f(x) + g(x)u + \zeta(t) \leq f(x) + g(x)u + \zeta_m \quad (3.79)$$

Ou d'une manière équivalente :

$$\dot{x}\{(\Sigma)_{min}\} \leq \dot{x}\{(\Sigma)\} \leq \dot{x}\{(\Sigma)_{max}\} \quad (3.80)$$

En intégrant l'inégalité (3.80) et en multipliant par c , nous obtenons :

$$y\{(\Sigma)_{min}\} \leq y\{(\Sigma)\} \leq y\{(\Sigma)_{max}\} \quad (3.81)$$

Ce qui termine la preuve. ■

3.5.2.2 Définition de la relation de liaison

Avant de définir la relation de liaison on doit trouver les lois de commandes assurant la convergence de $(\Sigma)_{min}$ et $(\Sigma)_{max}$ à la référence désirée. Grâce à la théorie de stabilité de Lyapunov, nous pouvons facilement atteindre ce but. Dans le théorème suivant nous énonçons le résultat obtenu.

Théorème 3.4 :

Si les lois de commandes suivantes sont appliquées aux systèmes limites $(\Sigma)_{min}$ et $(\Sigma)_{max}$ (respectivement) :

$$u_{min}(t) = \frac{1}{g(x)} (\dot{x}_r - f(x) + \zeta_m - \lambda e) \quad (3.82)$$

$$u_{max}(t) = \frac{1}{g(x)} (\dot{x}_r - f(x) - \zeta_m - \lambda e) \quad (3.83)$$

où :

• $\lambda \in \mathcal{R}^+$: est un gain scalaire introduit pour imposer un degré sélectif de robustesse et/ou de stabilité.

Alors, ces systèmes convergent exponentiellement à la référence désirée.

Preuve :

La preuve est omise en raison de brièveté. Nous pouvons facilement obtenir ce résultat grâce à la méthode classique de Lyapunov. ■

Ensuite, pour établir la relation de liaison nous proposons de discuter la définition de l'erreur de poursuite comme suit :

- Si l'erreur de poursuite est négative (c-à-d $y \leq y_r$) : dans ce cas, nous devons appliquer u_{min} afin de forcer $(\Sigma)_{min}$ à converger à la référence désirée. En conséquence, nous forçons la convergence de (Σ) par l'intermédiaire de l'inégalité (3.76).
- Si l'erreur de poursuite est positive (c-à-d $y \geq y_r$) : dans ce cas, nous devons appliquer u_{max} afin de forcer $(\Sigma)_{max}$ à converger à la référence désirée. En conséquence, nous forçons la convergence de (Σ) par l'intermédiaire de l'inégalité (3.76).

En effet, nous pouvons récapituler les discussions ci-dessus dans la proposition suivante.

Proposition 3.3 : *Grâce aux discussions ci-dessus, nous pouvons définir la relation de liaison comme suit :*

$$u(t) = \begin{cases} u_{min}(t) & e \leq 0 \\ u_{max}(t) & e \geq 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

ou sous la forme compacte suivante :

$$u(t) = \frac{1}{2}[\gamma_1 u_{min}(t) + \gamma_2 u_{max}(t)] \quad (3.85)$$

où :

$$\begin{cases} \gamma_1 \triangleq 1 - \text{sgn}(e) \\ \gamma_2 \triangleq 1 + \text{sgn}(e) \end{cases} \quad (3.86)$$

3.5.2.3 Analyse de stabilité du contrôleur

En faveur des étapes précédentes, nous énonçons le théorème qui englobe le résultat principal du contrôleur de la fermeture-éclair.

Théorème 3.5 :

Considérons le système régi par le modèle EDP (3.1) sous sa forme équivalente (3.75), si la loi de commande suivante est appliquée à ce dernier :

$$u(t) = \frac{1}{g(x)} (\dot{x}_r - f(x) - \zeta_m \text{sgn}(e) - \lambda e) \quad (3.87)$$

Alors, ce système converge exponentiellement à la référence désirée.

Preuve :

D'après le théorème 3.1 et la proposition 3.3, la loi de commande dérivée du principe de la

fermeture-éclair peut être obtenue en substituant (3.82) et (3.83) dans (3.85) :

$$u(t) = \frac{1}{g(x)} (\dot{x}_r - f(x) - \xi_m \operatorname{sgn}(e) - \lambda e) \quad (3.88)$$

Considérons la fonction de Lyapunov V défini comme suit :

$$V : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$V(t) \triangleq \frac{1}{2} e^2(t)$$

où

• $e(t)$: est l'erreur de poursuite défini comme suit :

$$e(t) = x(t) - x_r(t) \quad (3.89)$$

En dérivant $V(t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e(t) \dot{e}(t) \\ &= e(t) (f(x) + g(x)u + \xi - \dot{x}_r) \end{aligned} \quad (3.90)$$

En substituant (3.88) dans (3.90), nous obtenons :

$$\dot{V}(t) = -\lambda e^2 + (\xi(t) - \operatorname{sgn}(e) \xi_m) e \quad (3.91)$$

Et nous avons :

$$(\xi(t) - \operatorname{sgn}(e) \xi_m) e = (\operatorname{sgn}(e)\xi(t) - \xi_m) |e| \quad (3.92)$$

De (3.92), nous avons :

$$(\operatorname{sgn}(e)\xi(t) - \xi_m) |e| \leq 0 \quad (3.93)$$

De (3.93), on peut conclure que \dot{V} est définie négative. En conséquence, le contrôleur proposé assure la stabilité asymptotique de l'erreur de poursuite.

Ce qui termine la preuve. ■

3.5.3 Résultats de simulation

Afin d'évaluer les performances du contrôleur de la fermeture-éclair, nous testons ce dernier sous divers conditions de fonctionnement. Pour cela, nous utilisons l'environnement Matlab pour la simulation du comportement dynamique du système contrôlé et nous utilisons des paramètres du système réels tirés de la plateforme solaire appartenant au centre de recherche énergétique espagnol CIEMAT, Almería-Spain (voir table (B.1) en annexe B).

<i>Paramètre</i>	<i>Valeur</i>
<i>Température d'entrée $T_t(0)$</i>	200 °c
<i>Radiation solaire</i>	900 w/m ²
<i>Temps d'échantillonnage</i>	36 s
<i>Nombre de discrétisation</i>	20

Tableau 3.1: Paramètres de simulation

3.5.3.1 Test 1 : (Poursuite de Référence)

Dans ce test nous souhaitons évaluer les performances de poursuite de la fermeture-éclair. Pour cela, nous choisissons deux références caractérisées par une dynamique très élevée : "**Référence en Créneaux**" et "**Référence Sinusoïdale**". Les paramètres de simulation choisis pour ce test sont illustrés dans le tableau (3.1). Les résultats obtenus sont illustrés dans les figures (3.3)-(3.5). A partir de ces résultats, on peut remarquer que la température de sortie suit efficacement la référence désirée. En outre, les signaux de commandes sont lisses ce qui rendre leur implémentation sur des cartes de commande facile.

3.5.3.2 Test 2 : (Robustesse du Contrôleur)

Afin d'évaluer la robustesse du contrôleur fermeture éclair vis- -vis les erreurs de modélisations et/ou les variations paramétriques, nous considérons une variation brutale dans la radiation solaire causée par un passage nuageux puis nous constatons l'influence de ce changement sur les erreurs de poursuite. Le profil de radiation solaire considéré et les résultats obtenus sont illustrés dans les figures (3.6)-(3.7).

*Définition** : l'erreur de perturbation est la différence entre deux grandeurs du même types d'un système soumis à des perturbations et un autre non-perturbé.

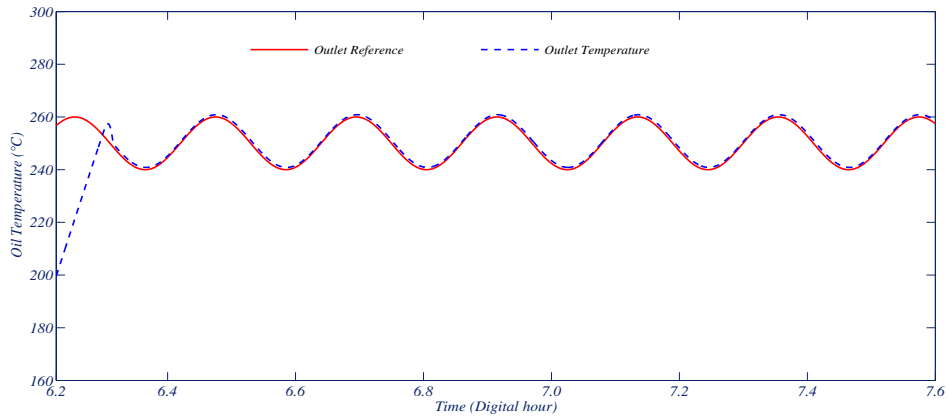
Comme on peut voir, l'effet de la perturbation s'atténue en se rapprochant de la sortie du tube récepteur (la sortie du système). En conséquence, nous concluons le rejet de perturbation d'où la robustesse de notre contrôleur.

3.6 Étude comparative

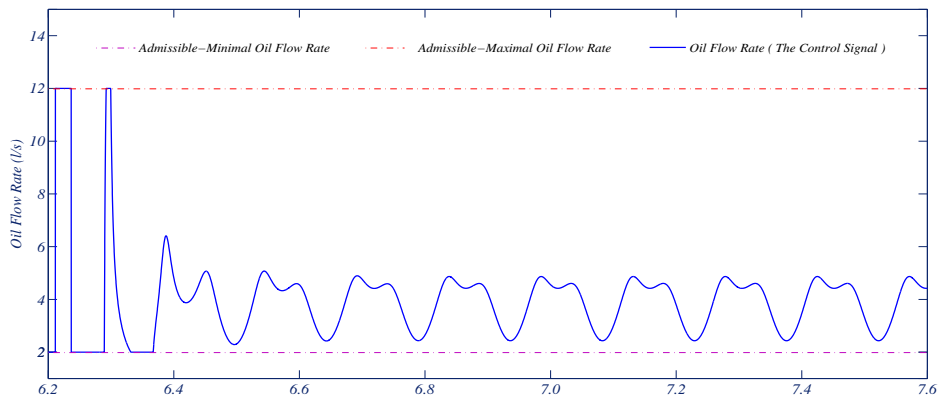
Pour une évaluation équitable, nous effectuons une étude comparative entre les approches de commande présentées dans ce chapitre. Cette comparaison est basée sur les critères de performance suivants :

- Le modèle de commande⁹.
- La poursuite des références.
- La stabilité en boucle fermée.
- La possibilité d'implémentation sur des cartes de commande.

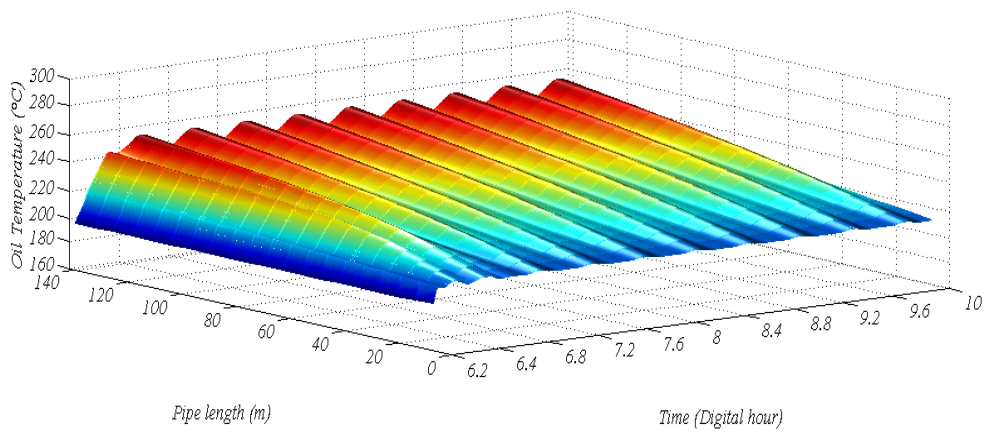
9. Par définition, le modèle utilisé pour la synthèse de la loi de commande est appelé le modèle de commande.



(a) Réponse du système

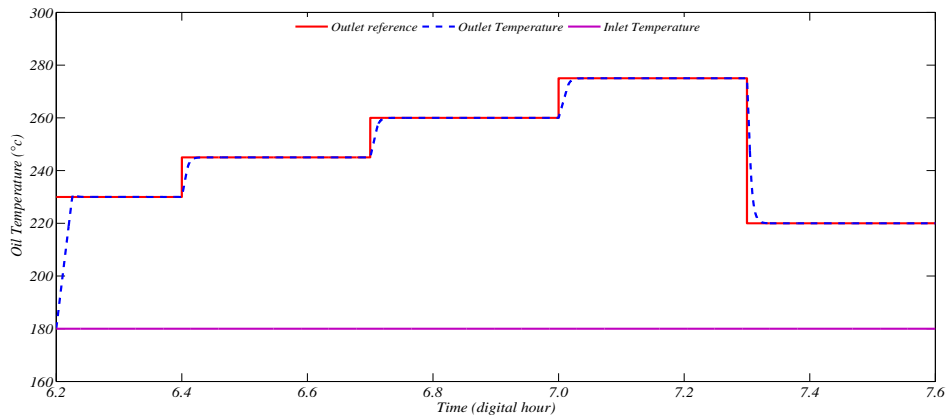


(b) Signale de commande

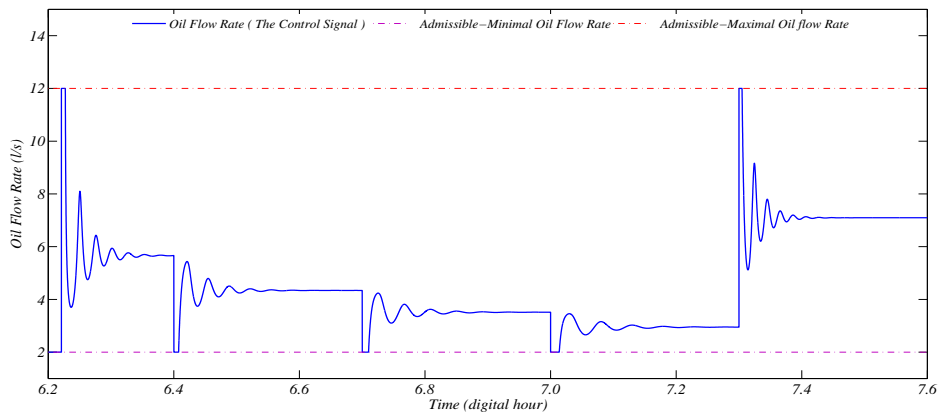


(c) Évolution de la température à l'intérieur du tube récepteur

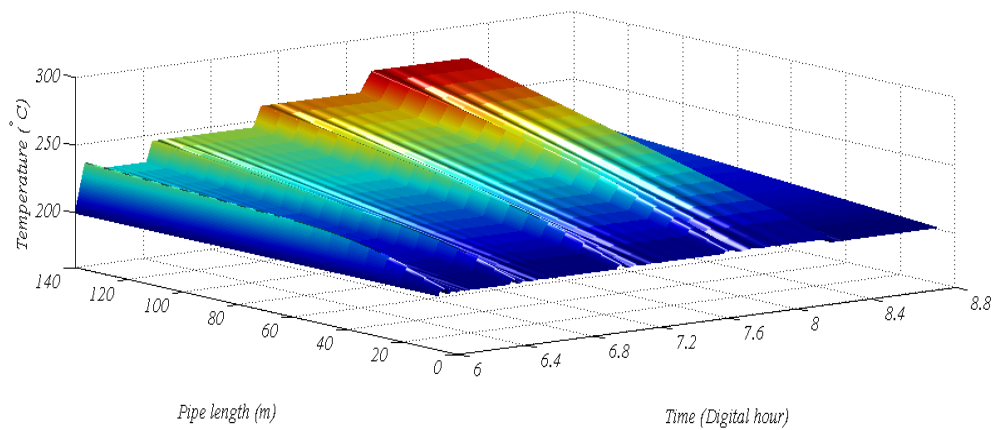
Figure 3.3: Performances de poursuite pour une référence sinusoïdale



(a) Réponse du système



(b) Signale de commande



(c) Évolution de la température à l'intérieur du tube récepteur

Figure 3.4: Performances de poursuite pour une référence en créneaux

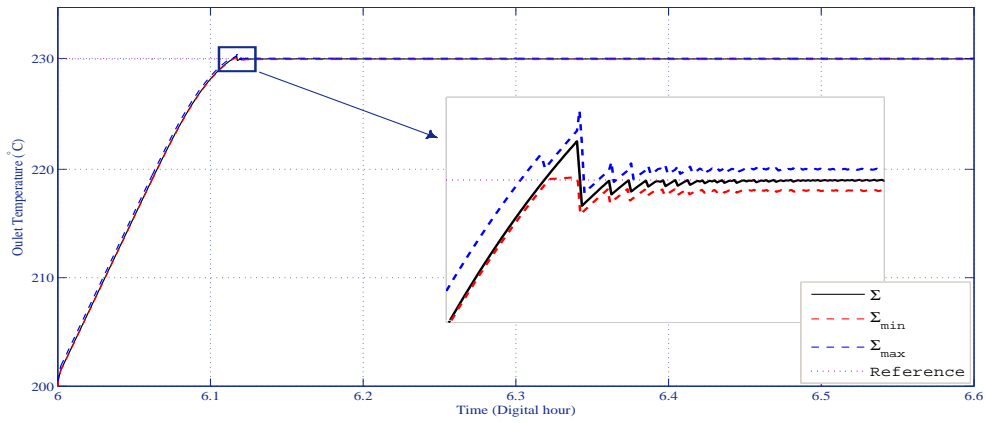


Figure 3.5: Réponse indicielle du contrôleur de la fermeture-éclair

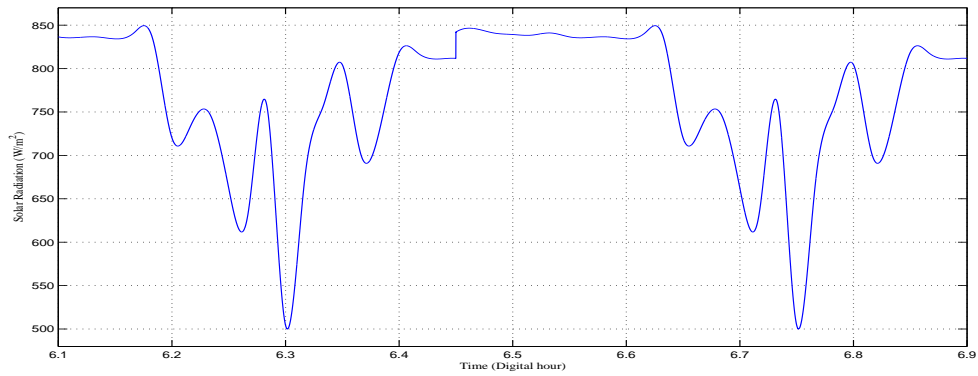


Figure 3.6: Profile de radiation solaire

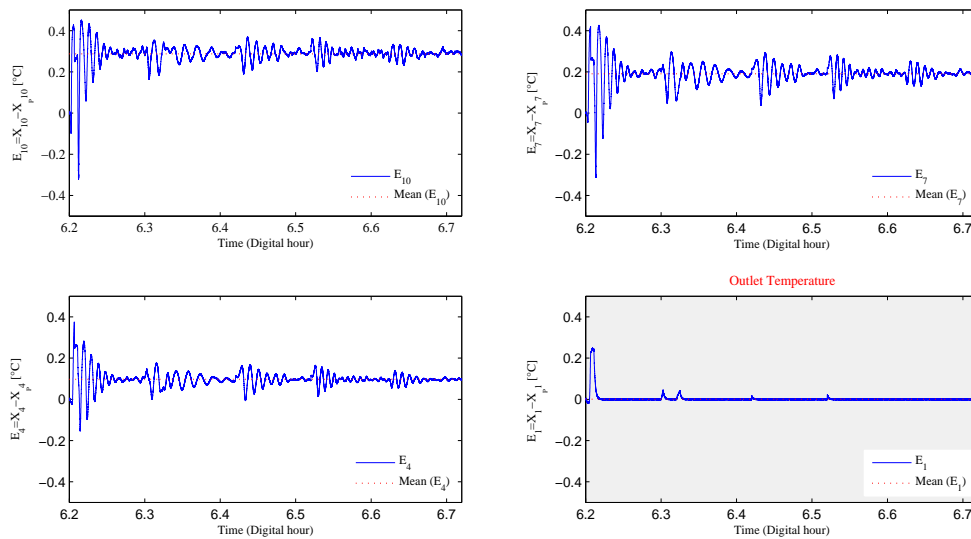


Figure 3.7: Erreur de perturbation du contrôleur de la fermeture-éclair*

Nous identifions les commandes par les abréviations suivantes :

- Commande basée sur l'approche RPS :
 - Commande prédictive (CP).
 - Commande par retour d'état (CRE).
- Commande basée sur l'approche SPR :
 - Commande par retour de sortie (CRS).
 - Commande à base de l'énergie interne (CEI).
- Commande de la fermeture-éclair (CFE).

Dans le tableau (3.2) nous présentons une étude comparative entre ces différentes commandes.

1- Avantages des commandes RPS par rapport aux commandes SPR et CFE :

- ★ Le modèle de commande utilisé dans l'approche RPS permet de prendre avantage de la théorie de commande classique. En conséquence, la synthèse de la loi de commande est relativement facile par rapport aux autres approches.
- ★ Les commandes RPS peuvent être implémentées sur des cartes de commande sans aucune simplification contrairement à la plupart des commandes SPR. En conséquence, les performances de ces commandes vont être concrétisées pratiquement et sans aucune perte.

2- Avantages des commandes SPR par rapport aux commandes RPS et CFE :

- ★ Le modèle de commande utilisé par l'approche SPR est plus précis que celui des autres approches. Alors, d'un point de vue théorique, les commandes SPR sont plus fiables.
- ★ La stabilité en boucle fermée de la commande CEI est prouvée pour le modèle du système contrairement aux commandes RPS qui est prouvée pour le modèle de commande seulement.

3- Avantages de la commande CFE par rapport aux commandes SPR et RPS :

- ★ En pratique, les commandes RPS et SPR peuvent échouer dans l'accomplissement de l'objectif de commande dû aux pertes d'information ; dans la synthèse de commande pour les commandes RPS et dans l'implémentation pour les commandes SPR. Ce problème n'est pas posé dans la commande CFE puisque l'information perdue est compensée ; par la méthode des différences fines étendue dans la synthèse de commande et par la possibilité d'implémentation directe.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de commande d'une classe des systèmes régis par EDP afin de contrôler la température de sortie du tube-récepteur du CSCP. Pour cela, nous avons adopté deux approches de commande différentes : l'approche RPS et l'approche SPR. La première approche consiste à simplifier le modèle EDP avant de le commander, alors

Critères de Performance	Commande basée sur l'approche RPS		Commande basée sur l'approche SPR		Commande de la fermeture-éclair (CFE)
	CP	CRE	CRS	CEI	
Poursuite de référence (PR)	Assure la PR	Assure la PR	Assure la PR	Assure la PR	Assure la PR
Le modèle de commande (MC)	Un modèle ODE équivalent	Un modèle ODE équivalent	Un modèle EDP équivalent	Un modèle EDP équivalent	Un modèle ODE équivalent
Stabilité en boucle fermée (SBF)	La SBF est assurée pour le MC seulement	La SBF est assurée pour le MC seulement	La SBF n'est pas assurée	La SBF est assurée	La SBF est assurée
Possibilité d'implémentation	Implémentable directement	Implémentable directement	Implémentable directement	Implémentable après simplification	Implémentable directement

Tableau 3.2: Étude comparative

que, la deuxième utilise directement le modèle EDP du système comme un modèle de commande.

L'apport bénéfique des commandes basées sur l'approche RPS réside dans la simplicité de mise en oeuvre. Cependant, le modèle de commande simplifié peut mener à un échec dans l'accomplissement de l'objectif de commande dû à la perte d'information. Afin de faire face à ce problème, les méthodes SPR semblent être plus précises en utilisant directement le modèle EDP pour la synthèse du contrôleur. Néanmoins, la complexité du développement analytique de ces méthodes demeure le principal obstacle à leurs adoptions et implémentations.

Afin de s'affranchir des inconvénients susvisés, on a proposé une nouvelle commande qui prend avantage de la simplicité de l'approche RPS et perfectionne la certitude du modèle de commande en utilisant la méthode des différences finies étendue qu'on a proposé. L'idée de base de cette commande est inspirée du principe de fonctionnement de la fermeture-éclair et la théorie de stabilité de Lyapunov. Les performances de cette méthode sont prouvées théoriquement et en simulation sous divers conditions de fonctionnement. Finalement, une étude comparative entre les différentes commandes présentées dans ce chapitre est effectuée.

CHAPITRE 4

ESTIMATION DE LA TEMPÉRATURE DU FLUIDE À L'INTÉRIEUR DU TUBE-RÉCEPTEUR DU CSCP

"Les esprits mobiles ne sont pas garantis contre les idées fixes"

Raymond d'Alost

Sommaire

4.1	Introduction	61
4.2	Préliminaires et formulation du problème	61
4.3	Principe d'estimation à base d'observateur	62
4.3.1	Sur l'observabilité	62
4.3.2	Sur la structure d'observateur	63
4.4	Observateurs basés sur l'approche RPS	63
4.4.1	Observateur de Luenberger (1A)	63
4.4.2	Observateur de Luenberger (2A)	66
4.5	Observateurs basés sur l'approche SPR	67
4.5.1	Observateur de Luenberger (1B)	67
4.5.2	Observateur de Luenberger (2B)	69
4.6	Observateur à grand gain	72
4.6.1	Etude d'observabilité	72
4.6.2	Synthèse d'observateur à grand gain	73
4.6.3	Résultats de simulation	76
4.7	Étude comparative	80
4.8	Conclusion	80

4.1 Introduction

Au cours des dernières décennies du 19^{ème} siècle, l'instrumentation a apporté un grand progrès pour les sciences d'ingénieur ce qui a contribué à l'amélioration des conditions vitales des individus tels que l'assurance de la sûreté humaine dans les usines par la redondance des capteurs dans les applications dangereuses [20], l'amélioration des conditions sanitaires grâce au développement des applications biomédicale (comme la chirurgie robotique qui est basée essentiellement sur des capteurs de précision) et ainsi de suite. Néanmoins, le coût élevé de l'exploitation des capteurs (surtout dans le cas de redondance) demeure une contrainte majeure. De plus, parfois le placement des capteurs lui-même peut être très délicat et l'opérateur sera exposé à des dangers néfastes, comme le cas des centrales nucléaires [44].

L'observation d'état est une méthode d'estimation largement adoptée pour s'affranchir des problèmes d'accessibilité et de coût élevé en instrumentation. Dans cette méthode, le modèle gouverneur de l'évolution des variables à mesurer est mis sous forme d'état et les variables à mesurer sont considérées comme les variables d'état de ce modèle. Puis, à l'aide d'un algorithme d'estimation, qui est appelé l'observateur dans le cas déterministe ou bien le filtre dans le cas stochastique [16], ces variables seront estimées. Le concept classique de la théorie d'estimation à base d'observateur a été toujours investigué sur des systèmes régis par des équations différentielles ordinaires (EDO) [45, 46]. Cependant, plusieurs travaux de recherche ont montré que de nombreux procédés industriels contenant des phénomènes de transport de masse ou d'énergie, tels que : le réacteur à lit fixe [35, 44], la route catalytique [47], l'échangeur de chaleur à contre-courant [31], le réacteur à écoulement [48] et le bio-filtre de nitrification-dénitrification [33], sont spatialement distribués. Néanmoins, ce type des systèmes est régi par des équations aux dérivées partielles (EDP) à cause de son évolution en temps et en espace. De ce fait, cette théorie se trouve impuissante face de tels problèmes. Dans ce chapitre nous proposons une nouvelle méthode pour l'estimation des variables dans le cas des systèmes régis par un modèle EDP.

Dans ce chapitre, nous proposons comme troisième contribution d'exploiter une seconde fois la méthode des différences finies étendue pour estimer la température de fluide à l'intérieur du tube-récepteur du CSCP.

4.2 Préliminaires et formulation du problème

Deux problèmes principaux font l'objet de ce travail : le premier est la nécessité d'avoir une information sur la température du fluide à l'intérieur du tube-récepteur afin qu'elle soit exploitée par la commande prédéveloppée (commande à base d'observateur). Le deuxième est le manque d'un outil de mesure qui permet de s'affranchir des contraintes d'accessibilité. Autrement dit, avec un capteur physique (comme le thermomètre) on ne mesure la tempé-

rature du fluide qu'aux bornes du tube-récepteur. Alors, nous nous sommes invités à trouver une solution pour remédier à cette problématique.

Notre objectif est de trouver un outil pour estimer la température du fluide à l'intérieur du tube récepteur sur un maillage équidistant de longueur Δx comme illustré dans la figure (4.1).



Figure 4.1: Schéma de positionnement des grandeurs à mesurer

Pour cela, nous considérons de nouveau la classe des systèmes non linéaires régie par le modèle EDP définie comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + u(t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = s(t), & x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ & (4.1a) \\ T(x, 0) = T_0(x), & x \in \Omega & (4.1b) \\ y(t) = T(L, t), & t \in \mathbb{R}^+ & (4.1c) \end{cases}$$

Alors, notre objectif est d'estimer l'état $T(x, t)$ en considérant que la commande $u(t)$ est admissible et la sortie $y(t)$ est mesurable.

4.3 Principe d'estimation à base d'observateur

L'estimation à base d'observateur repose sur deux principales notions : l'observabilité et la structure d'observateur.

4.3.1 Sur l'observabilité

L'observabilité est une condition nécessaire pour l'existence d'un observateur qui assure l'estimation paramétrique avec une erreur qui tend vers zéro [33]. Cette condition se révèle particulièrement difficile à vérifier dans le cas des systèmes non linéaires. Dans le cas des systèmes non linéaires représentés sous forme d'état, l'observabilité est la possibilité de reconstruire la variable d'état (autrement dit, l'estimation de l'état) par la simple connaissance du couple entrée/sortie.

Dans le cadre d'une définition générale de la notion d'observabilité, nous considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.2)$$

Définition 1 : (Indistinguabilité [49])

Une paire de deux états initiaux $(x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $x_0^1 \neq x_0^2$ sont dite indistinguable dans l'espace d'état \mathbb{X} du système (4.2), si $\forall t \geq t_0$, on a les sorties correspondantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ vérifient $y_1(t) \neq y_2(t)$.

Définition 2 : (Observabilité [49])

Un système non linéaire de la forme (4.2) est dit observable s'il n'admet pas de pair indistinguable.

4.3.2 Sur la structure d'observateur

Dans cette phase nous nous sommes intéressés à reconstruire l'état courant du système, c'est-à-dire le calcul de la trajectoire du variable d'état estimée \hat{x} . L'équation de l'observateur peut être sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{f}(x, u) \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (4.3)$$

4.4 Observateurs basés sur l'approche RPS**4.4.1 Observateur de Luenberger (1A)**

Dans cette méthode, un modèle linéaire discret a été introduit en se basant sur la discrétisation de la solution analytique du modèle EDP (4.1). Par la suite, un observateur conventionnel de Luenberger a été synthétisé en se basant sur le modèle proposé.

4.4.1.1 Simplification du modèle EDP

La résolution du modèle EDP (4.1) par la méthode des caractéristiques mène à la solution analytique suivante :

$$T(x, t) = T\left(x - \int_{t_0}^t u(\sigma) d\sigma, t_0\right) + \int_{t_0}^t s(\sigma) d\sigma \quad (4.4)$$

Si on considère que les paramètres $u(t)$ et $s(t)$ sont constants entre chaque deux instants de discrétisation successifs t et $t+\Delta t$, alors, on peut discrétiser l'équation (4.4), entre ces deux instants comme suit :

$$T(x, t+\Delta t) = T(x - u(t)\Delta t, t) + s(t) \Delta t \quad (4.5)$$

L'équation (4.5) peut s'écrire comme suit :

$$T(x, t+\Delta t) = T\left(x - \frac{q(t)}{s_f} \Delta t, t\right) + s(t) \Delta t \quad (4.6)$$

Si on choisit le pas de discrétisation suivant :

$$\Delta t = \frac{s_f}{q(t)} \Delta x \quad (4.7)$$

Alors, on peut écrire l'équation (4.6) comme suit :

$$T(x, t+\Delta t) = \beta T(x - \Delta x, t) + u_f(t) \quad (4.8)$$

Où :

- β est un paramètre introduit pour tenir compte des pertes de chaleur.
- $u_f(t)$ est une commande fictive définie par (4.9).

$$u_f(t) = \Delta x s_f \frac{s(t)}{q(t)} \quad (4.9)$$

Pour écrire le modèle (4.8) sous une représentation d'état, nous considérons la variable d'état suivante :

$$x_i(k) \triangleq T(i\Delta x, k) \quad (4.10)$$

La température à l'entrée du tube récepteur est considérée comme une perturbation mesurable,

$$d(k) \triangleq T(0, k) \quad (4.11)$$

Afin que le modèle d'état soit linéaire, on considère que la commande du système est $u_f(t)$ [50]. En conséquence, on aboutit au modèle suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) + D d(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases} \quad (4.12)$$

Où :

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) & \dots & x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ & \beta I_{n-1} & \vdots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique du modèle (4.12) est défini par (4.13) :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n \quad (4.13)$$

Alors, le modèle (4.12) possède n pôles placés à l'origine. Les zéros de ce système sont les racines du polynôme suivant :

$$N(\lambda) = \lambda^{n-1} + \beta \lambda^{n-2} + \dots + \beta^{n-2} \lambda + \beta^{n-1} \quad (4.14)$$

Ces racines sont définies comme suit :

$$\lambda_i = \beta e^{2\pi i/n}, \quad i = \{1, \dots, n-1\} \quad (4.15)$$

4.4.1.2 Synthèse de l'observateur

Avant d'entamer la synthèse d'observateur on doit vérifier l'observabilité du système. Pour cela, on doit vérifier le rang de la matrice d'observabilité définie comme suit :

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

En conséquence, la matrice d'observabilité du système (4.12) est égale à,

$$O_b = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \beta^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

On peut facilement vérifier que le rang de cette matrice est égal à n ce qui montre que le système (4.12) est complètement observable.

Pour estimer l'état de ce système, on considère l'observateur de Lunberger défini comme suit :

$$\begin{cases} \hat{x}(k) = A \hat{x}(k-1) + B u(k-1) + D d(k-1) + L[y(k) - \hat{y}(k)] \\ \hat{y}(k) = C \hat{x}(k) \end{cases} \quad (4.18)$$

Où :

- L est le vecteur des gains de l'observateur.

Soit $e(k)$ l'erreur d'estimation définie comme suit :

$$e(k) \triangleq x(k) - \hat{x}(k) \quad (4.19)$$

A partir de la dynamique du système (4.12) et celle de l'observateur proposé, la dynamique de l'erreur d'estimation peut être définie comme suit :

$$e(k) = (A-LC) e(k-1) \quad (4.20)$$

Pour assurer la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro, on doit choisir le vecteur des gains L de telle sorte que la matrice $A-LC$ soit définie négative. Cette condition peut être satisfaite si on choisit L comme suit :

$$L = \left[\frac{1}{n} \quad \frac{2}{n} \quad \cdots \quad \frac{n}{n} \right]^T \quad (4.21)$$

Avec ce choix, le polynôme caractéristique de la dynamique de l'erreur d'estimation devient :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\lambda I - A + LC) \\ &= \lambda^n + \frac{n}{n} \lambda^{n-1} + \frac{n-1}{n} \lambda^{n-2} + \cdots + \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.4.2 Observateur de Luenberger (2A)

La collocation orthogonale est une méthode numérique dédiée à la résolution d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites [51]. Elle consiste à approximer l'équation aux dérivées partielles par un ensemble d'équations différentielles (ODE's). Dans cette section, nous utilisons cette méthode pour la synthèse d'observateur.

4.4.2.1 Simplification du modèle EDP

L'idée de cette méthode consiste à choisir une approximation fonctionnelle de la solution $T(x, t)$ du modèle EDP comme suit :

$$T(x, t) = \sum_{i=0}^{N+1} \varphi_i(x) T_i(t) \quad (4.23)$$

Les fonctions φ_i sont appelées les fonctions de forme (en anglais, trial functions). Ces fonctions peuvent être choisies par différentes manières. J.M. Igergia et al [52] ont proposé de les choisir comme des polynômes d'interpolation de Lagrange orthogonaux aux points de collocation x_j , c-à-d :

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4.24)$$

En substituant l'approximation (4.23) dans (4.1a), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{N+1} \varphi_i(x) \frac{dT_i(t)}{dt} = -u(t) \sum_{i=0}^{N+1} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} T_i(t) + s(t) \quad (4.25)$$

Prenant en considération la condition d'orthogonalité (4.24), l'équation (4.25) peut s'écrire à chaque point de collocation $x = x_j$ comme suit :

$$\frac{dT_j(t)}{dt} = -u(t) \left[\sum_{i=1}^{N+1} \frac{d\varphi_i(x_j)}{dx} T_i(t) + \frac{d\varphi_0(x_j)}{dx} T_0(t) \right] + s(t) \quad (4.26)$$

Pour écrire le modèle (4.26) sous une représentation d'état, nous considérons la variable d'état suivante :

$$x^T = [T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_{N+1}] \quad \text{avec} \quad T_i(t) = T(x_i, t) \quad (4.27)$$

En conséquence, on aboutit au modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -u(t) (A x + B x_0) + D s(t) \\ y = C x \end{cases} \quad (4.28)$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1(x_1) & \dot{\varphi}_2(x_1) & \dots & \dot{\varphi}_{N+1}(x_1) \\ \dot{\varphi}_1(x_2) & \dot{\varphi}_2(x_2) & \dots & \dot{\varphi}_{N+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\varphi}_1(x_{N+1}) & \dot{\varphi}_2(x_{N+1}) & \dots & \dot{\varphi}_{N+1}(x_{N+1}) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_0(x_1) \\ \dot{\varphi}_0(x_2) \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_0(x_{N+1}) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tel que :

$$\dot{\varphi}_i(x_j) = \frac{d\varphi_i(x_j)}{dx} , \quad x_0 = T(0, t) \quad (4.29)$$

4.4.2.2 Synthèse de l'observateur

Pour estimer l'état du système (4.28), on considère l'observateur de Luenberger défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = -u(t)(A\hat{x} + Bx_0) + Ds(t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (4.30)$$

Où :

- L est le vecteur des gains de l'observateur.

Soit e l'erreur d'estimation définie comme suit :

$$e = x - \hat{x} \quad (4.31)$$

Alors, la dynamique de l'erreur d'estimation est définie comme suit :

$$\dot{e} = (A - LC)e \quad (4.32)$$

Pour assurer la convergence de l'erreur d'estimation à zéro, on doit choisir le vecteur des gains L de telle sorte que la matrice $A-LC$ soit définie négative.

4.5 Observateurs basés sur l'approche SPR

4.5.1 Observateur de Luenberger (1B)

Dans le même contexte, une autre méthode DTR a été proposée par Mechhoud et al [43]. L'idée de cette méthode peut être résumée dans les points suivants :

- L'observateur proposé est de type Luenberger avec une légère différence dans le terme de correction qui est inséré dans la condition au limite au lieu d'être dans l'équation d'état.
- La dynamique d'estimation est analysée par la théorie classique de Lyapunov et le gain de l'observateur est identifié grâce à cette théorie.

Considérons l'observateur d'état régi par le modèle dynamique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = -u(t) \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + s(t), & x \in [0, L], t \geq 0 \end{cases} \quad (4.33a)$$

$$\begin{cases} \hat{T}(0, t) = g(t) - k_0 \Delta T(1, t), \end{cases} \quad (4.33b)$$

$$\begin{cases} \hat{T}(x, 0) = \hat{T}_0(x) \geq 0 \end{cases} \quad (4.33c)$$

où :

- $\hat{T}(x, t)$ est l'état estimé.
- $\Delta T(x, t)$ est l'erreur d'estimation qui est défini par (4.34).

$$\Delta T(x, t) \triangleq T(x, t) - \hat{T}(x, t) \quad (4.34)$$

A partir de la dynamique du système (4.1) et l'observateur (4.33), nous pouvons définir la dynamique de l'erreur d'estimation comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = -u(t) \frac{\partial T}{\partial x} \end{array} \right. \quad (4.35a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T(0, t) = -k_0 \Delta T(L, t) \end{array} \right. \quad (4.35b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T(x, 0) = \hat{T}_0(x) - T_0(x) \end{array} \right. \quad (4.35c)$$

Théorème 4.1 :

Pour toutes les entrées de commande admissibles $u(t)$ et les sorties mesurées $y(t)$. Si on choisit le gain k_0 de l'observateur (4.33) comme suit :

$$0 \leq |k_0| \leq e^\mu \quad (4.36)$$

où :

- μ est un gain scalaire positive.

Alors, l'erreur d'estimation régie par le modèle (4.35) converge à zéro dans un temps fini.

Preuve :

Pour étudier la stabilité de l'erreur d'estimation, nous considérons la fonction de Lyapunov introduite dans [53] pour analyser la stabilité des systèmes hyperboliques symétriques :

$$V(t) = \int_0^1 e^{-\mu x} (\Delta T(x, t))^2 dx \quad (4.37)$$

En dérivant (4.37), nous obtenons :

$$\dot{V}(t) = 2 \int_0^1 e^{-\mu x} \Delta T(x, t) \frac{\partial \Delta T}{\partial t} dx \quad (4.38)$$

$$= -u(t) \int_0^1 e^{-\mu x} \frac{\partial \Delta T^2}{\partial x} dx \quad (4.39)$$

En utilisant l'intégration par partie, on obtient :

$$\dot{V}(t) = -u(t) \mu \int_0^1 e^{-\mu x} \Delta T(x, t)^2 dx - u(t) \left[e^{-\mu} \Delta T(1, t)^2 - \Delta T(0, t)^2 \right] \quad (4.40)$$

En substituant la condition limite (4.33c) dans (4.40), on obtient :

$$\dot{V}(t) = -u(t) \mu \int_0^1 e^{-\mu x} \Delta T(x, t)^2 dx - u(t) (e^{-\mu} - k_0^2) \Delta T(1, t)^2 \quad (4.41)$$

$$\leq -u_{max} \mu V(t) \quad (4.42)$$

En conséquence, nous concluons que :

$$V(t) \leq V(0) e^{-\mu u_{\max} t} \quad (4.43)$$

A partir de l'équivalence entre les normes $\|\cdot\|_{2,e^{-\mu x}}$ et $\|\cdot\|_2$ nous déduisons que :

$$\|\Delta T(\cdot, t)\|_2 \leq \|\Delta T(\cdot, 0)\|_2 e^{-u_{\max} \mu t} \quad (4.44)$$

Ce qui termine la preuve. ■

4.5.2 Observateur de Luenberger (2B)

Dans [54], un observateur de type Luenberger est introduit en considérant le modèle EDP du système. La méthode de synthèse proposée peut être résumée dans les points suivants :

- La dynamique de l'erreur de poursuite est définie en se basant sur le modèle EDP du système et un observateur de Luenberger proposé.
- En s'inspirant de la commande à modèle de référence, la dynamique de l'erreur d'estimation est forcée à suivre un modèle de référence pour stabiliser l'erreur de poursuite au voisinage de zéro.
- En s'inspirant de l'observateur backstepping introduit par Kristic *et al* [13], le gain de l'observateur proposé est identifié.

Avant de procéder, nous rappelons que notre objectif est de synthétiser un observateur pour estimer l'état du système et assurer la stabilité de l'erreur d'estimation au voisinage de zéro.

Considérons l'observateur d'état régi par le modèle EDP suivant :

$$\begin{cases} \hat{T}_t(x,t) + u(t) \hat{T}_x(x,t) = s(t) + L(x,t) (y(t) - \hat{y}(t)) & (4.45a) \\ \hat{T}(0,t) = \hat{T}_{in}(t) & (4.45b) \\ \hat{y}(t) = \hat{T}(L,t) & (4.45c) \end{cases}$$

où :

- $\hat{T}(x,t)$ est l'état estimé.
- $y(t)$ est la sortie du système.
- $L(x,t)$ est le gain d'observateur.

Soit $\tilde{T}(x, t)$ l'erreur d'estimation définie comme suit :

$$\tilde{T}(x, t) \triangleq T(x,t) - \hat{T}(x,t) \quad (4.46)$$

En conséquence, la dynamique de l'erreur d'estimation est définie comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{T}_t(x, t) = -u(t) \tilde{T}_x(x, t) - L(x,t) \tilde{T}(L, t) & (4.47a) \\ \tilde{T}(L, t) = 0 & (4.47b) \end{cases}$$

On cherche maintenant à stabiliser l'erreur de poursuite régie par le modèle (4.47) au voisinage de zéro. Pour remédier à ce problème, Elmethnani *et al* [54] propose une approche élégante inspirée du principe de la commande à modèle de référence. Nous rappelons que le principe de cette commande est basée essentiellement sur les étapes suivantes :

- On choisit un modèle de référence qui satisfait l'objectif désiré¹. Le choix de ce modèle est soumis à plusieurs contraintes qui doivent être prises en considération (comme l'ordre, la forme, ... etc).
- La commande stabilisante résulte de l'identification de la dynamique de l'erreur de poursuite avec la dynamique du modèle de référence.

Pour cela, nous considérons le modèle de référence suivant :

$$\begin{cases} w_t(x,t) = -u(t) w_x(x,t) & (4.48a) \\ w(0,t) = 0 & (4.48b) \end{cases}$$

Théorème 4.2 :

Pour toutes les entrées de commande admissibles $u(t)$ et les sorties mesurées $y(t)$. Si on choisit le gain de l'observateur (4.45) défini comme suit :

$$L(x,t) = u(t) G(x) \quad (4.49)$$

tel que :

$$G(x) = -K(x,L) \quad (4.50)$$

où :

- $K(x,L)$ est un gain obtenu par la résolution de l'équation (4.51).

$$\begin{cases} K_\sigma(x,\sigma) + K_x(x,\sigma) = K(x,L) K(x,\sigma) \\ K(0,\sigma) = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

Alors, l'erreur d'estimation régie par le modèle EDP (4.48) converge à zéro dans un temps fini.

Preuve :

Considérons la transformation suivante :

$$\tilde{T}(x,t) = w(x,t) - \int_0^L K(x,\sigma)w(\sigma,t) d\sigma \quad (4.52)$$

En différenciant (4.52) par rapport au temps, on obtient :

$$\tilde{T}_t(x,t) = w_t(x,t) - \int_0^L K(x,\sigma)w_t(\sigma,t) d\sigma \quad (4.53)$$

En substituant (4.48a) dans (4.53), on obtient :

$$\tilde{T}_t(x,t) = w_t(x,t) + u(t) \int_0^L K(x,\sigma)w_\sigma(\sigma,t) d\sigma \quad (4.54)$$

1. Dans notre cas, l'état du modèle de référence doit être stable au voisinage de zéro.

En utilisant l'intégration par partie, on obtient :

$$\tilde{T}_t(x,t) = w_t(x,t) + u(t) K(x,L) w(L,t) - u(t) K(x,0) w(0,t) - u(t) \int_0^L K_\sigma(x,\sigma) w(\sigma,t) d\sigma \quad (4.55)$$

D'autre part, la différenciation de (4.52) par rapport à l'espace donne :

$$\tilde{T}_x(x,t) = w_x(x,t) - \int_0^L K_x(x,\sigma) w(\sigma,t) d\sigma \quad (4.56)$$

En substituant (4.55) et (4.56) dans (4.47a), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{T}_t(x,t) + u(t) \tilde{T}_x(x,t) = & w_t(x,t) + u(t) w_x(x,t) + u(t) K(x,L) w(L,t) - u(t) K(x,0) w(0,t) \\ & - u(t) \int_0^L K_\sigma(x,\sigma) w(\sigma,t) d\sigma - u(t) \int_0^L K_x(x,\sigma) w(\sigma,t) d\sigma \end{aligned} \quad (4.57)$$

En substituant (4.48a) et (4.48b) dans (4.57), on obtient :

$$\tilde{T}_t(x,t) + u(t) \tilde{T}_x(x,t) = u(t) K(x,L) w(L,t) - u(t) \int_0^L [K_\sigma(x,\sigma) + K_x(x,\sigma)] w(\sigma,t) d\sigma \quad (4.58)$$

D'autre part, en substituant la transformation (4.52) dans (4.47a), on obtient :

$$\tilde{T}_t(x,t) + u(t) \tilde{T}_x(x,t) = -L(x,t) \left[w(L,t) - \int_0^L K(L,\sigma) w(\sigma,L) d\sigma \right] \quad (4.59)$$

En identifiant (4.58) avec (4.59), on obtient :

$$L(x,t) = -u(t) K(x,L) \quad (4.60a)$$

$$u(t) [K_\sigma(x,\sigma) + K_x(x,\sigma)] = -L(x,t) K(L,\sigma) \quad (4.60b)$$

En définissant le gain d'observateur comme suit :

$$L(x,t) = u(t) G(x) \quad (4.61)$$

En utilisant cette définition, on peut écrire l'équation (4.60) comme suit :

$$G(x) = -K(x,L) \quad (4.62a)$$

$$K_\sigma(x,\sigma) + K_x(x,\sigma) = K(x,L) K(L,\sigma) \quad (4.62b)$$

La condition limite de la dynamique d'estimation (4.47a) mène à la condition limite suivante :

$$K(0,\sigma) = 0 \quad (4.63)$$

Si le gain de l'observateur (4.45) est choisi de telle sorte que les conditions (4.62) et (4.63) sont vérifiées, alors l'erreur d'estimation $\tilde{T}(x,t)$ converge à zéro dans un temps fini.

Ce qui termine la preuve. ■

4.6 Observateur à grand gain

Pour remédier au problème d'estimation de la température nous proposons d'exploiter, une seconde fois, le modèle équivalent-incertain que nous avons développé. Par la suite, nous traitons le problème d'estimation susvisé sous une nouvelle forme.

4.6.1 Etude d'observabilité

Pour étudier l'observabilité du système équivalent-incertain (3.75) en s'appuyant sur le travail de J.P Gauthier et al [55], où l'étude d'observabilité révèle par le théorème suivant :

Theorem. 4.1. (Observabilité Uniforme) [55]

Soit (Σ) un système nonlinéaire exprimé sous la forme compacte d'observabilité définie comme suit :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2, u). \\ \vdots \\ \dot{z}_i = f_i(z_i, z_{i+1}, u) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = f_n(z, u). \end{cases} \quad (4.64)$$

où :

$$\begin{aligned} z_i &= (z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_i) \\ z &= (z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n) \end{aligned}$$

(Σ) est uniformément observable si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial z_{i+1}} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f_i(z_i, z_{i+1}, u)}{\partial z_{i+1}} \neq 0$$

Pour tirer profit du résultat de ce théorème, on est invité à réécrire le système incertain (3.75) sous la forme compacte d'observabilité ou sous une forme d'observabilité équivalente. Pour cela, nous choisissons la forme normale d'observabilité utilisée par Farza et al dans [56] qui est définit comme suit :

$$(\Sigma)_{\text{NFO}} \begin{cases} \dot{z} = A z + \varphi(u, z) + \xi \\ y = C z \end{cases} \quad (4.65)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \psi(u) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \psi(u) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \psi(u) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(u, z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, z_1) \\ \varphi_2(u, z_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(u, z_{(n-1)}) \\ \varphi_n(u, z) \end{pmatrix}$$

$$\xi^T = (\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_i \quad \cdots \quad \xi_n) \quad C = (1 \quad \cdots \quad 0)$$

Remarque 4.1 : La forme normale d'observabilité définie par (4.65) est une forme développée (éclatée) de la forme compacte d'observabilité.

Pour réécrire le système incertain (3.75) sous la forme normale d'observabilité (4.65), on doit choisir les réarrangements paramétriques suivants [57] :

$$\begin{cases} \psi(u) = \frac{\gamma}{\Delta x} u \\ \xi_i = -\gamma \mathcal{R}_i u \\ \varphi(u, z_i) = \mathcal{Q}(t) - \frac{\gamma}{\Delta x} z_i u \end{cases}$$

Finalement, grâce au théorème de l'observabilité uniforme susmentionné, on peut vérifier l'observabilité comme suit :

$$\frac{\partial f_i(z_i, z_{i+1}, u)}{\partial z_{i+1}} = \psi(u) \quad | \quad \psi(u) \neq 0$$

Ce qui implique l'observabilité uniforme du système incertain sous sa forme normale équivalente.

Remarque 4.2 : Afin de généraliser notre approche à d'autres systèmes régis par des modèles EDP, le lecteur est invité à consulter la référence [55] où il peut trouver une méthode générale pour réécrire le système incertain sous une forme équivalente d'observabilité.

4.6.2 Synthèse d'observateur à grand gain

Une fois que nous avons étudié l'observabilité du système incertain, on doit synthétiser un observateur pour estimer la variable d'état de ce système en dépit des incertitudes. Pour cela, nous choisissons l'observateur à grand gain à cause de ces performances impressionnantes en estimation paramétriques dans les systèmes incertains [57].

Comme dans toute synthèse d'un observateur à grand gain [18, 56], on considère l'hypothèse de Lipschitz suivante :

Hypothèse 4.1 : La fonction $\varphi(u, z)$ est globalement Lipschitzienne par rapport à z , c'est-à-dire :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}, \forall u(t) \in \mathcal{U}; \exists L > 0 : \|\varphi_i(u, z_1) - \varphi_i(u, z_2)\| \leq L \|z_1 - z_2\|$$

Maintenant, nous pouvons prouver le théorème suivant qui fournit un observateur d'état assurant la convergence de l'erreur d'estimation à zéro en dépit des incertitudes.

Théorème 4.3 :

Le modèle EDP (4.1) sous la forme normale équivalente d'observabilité (4.65) admet un observateur d'état donné par le modèle suivant :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(u, \hat{z}) - \theta\beta_\theta^{-1}\gamma^{-1}C^T(C\hat{z} - y) \quad (4.66)$$

avec :

• $\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive obtenue par la résolution de l'équation de LYPAUNOV [56] définie comme suit :

$$\gamma A + A^T \gamma + \gamma = C^T C \quad (4.67)$$

• β_θ est une matrice diagonale donnée par :

$$\beta_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\theta} & \cdots & \frac{1}{\theta^{n-1}} \end{pmatrix}$$

où :

• $\theta > 1$ est un gain scalaire qui doit être choisi assez grand.

Par le choix approprié des paramètres de synthèse, l'observateur (4.66) assure la convergence de l'erreur d'estimation à un petit voisinage de zéro.

Preuve :

Avant d'entamer le développement analytique, nous rappelons que le but ultime de l'observateur synthétisé consiste à assurer la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro malgré les incertitudes du système.

Soit $e(t)$ l'erreur d'estimation définie comme suit :

$$e \triangleq \hat{z} - z \quad (4.68)$$

La dérivée par rapport au temps de $e(t)$ est donnée par :

$$\dot{e} = A e + \varphi(u, \hat{z}) - \varphi(u, z) - \theta \beta_\theta^{-1} \gamma^{-1} C^T C e - \xi \quad (4.69)$$

En utilisant le changement de variable suivant $\tilde{e} = \beta_\theta e$, on peut réécrire (4.69) comme suit :

$$\dot{\tilde{e}} = \beta_\theta A \beta_\theta^{-1} \tilde{e} + \beta_\theta (\varphi(u, \hat{z}) - \varphi(u, z)) - \theta \gamma^{-1} C^T C \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - \beta_\theta \xi \quad (4.70)$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne à $\varphi(u, z)$ et en utilisant les identités suivantes :

$$\beta_\theta A \beta_\theta^{-1} = \theta A \quad , \quad C \beta_\theta^{-1} = C$$

Nous obtenons :

$$\dot{\tilde{e}} = \theta A \tilde{e} + \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} e - \theta \gamma^{-1} C^T C \tilde{e} - \beta_\theta \xi \quad (4.71)$$

Ou de manière équivalente :

$$\dot{\tilde{e}} = \theta A \tilde{e} + \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - \theta \gamma^{-1} C^T C \tilde{e} - \beta_\theta \xi \quad (4.72)$$

Maintenant, nous revenons à l'analyse de la convergence de l'erreur d'estimation. Soit $V(\tilde{e})$ une fonction de Lyapunov définie comme suit :

$$V(\tilde{e}) \triangleq \tilde{e}^T \gamma \tilde{e} \quad (4.73)$$

La dérivée par rapport au temps de V est donnée comme suit :

$$\dot{V} = 2\tilde{e}^T \gamma \dot{\tilde{e}} \quad (4.74)$$

$$= 2\theta \tilde{e}^T \gamma A \tilde{e} + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - 2\theta \tilde{e}^T C^T C \tilde{e} - 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \xi \quad (4.75)$$

En substituant (4.67) dans (4.74), nous obtenons :

$$\dot{V} = \theta (\tilde{e}^T \gamma \tilde{e} + \tilde{e}^T C^T C \tilde{e}) + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - 2\theta \tilde{e}^T C^T C \tilde{e} - 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \xi \quad (4.76)$$

$$\dot{V} = -\theta V - \theta \tilde{e}^T C^T C \tilde{e} + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - 2\theta \tilde{e}^T C^T C \tilde{e} - 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \xi \quad (4.77)$$

En effet, nous avons :

$$\dot{V} \leq -\theta V + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \xi \quad (4.78)$$

$$\dot{V} \leq -\theta V + 2 \|\gamma\| \|\tilde{e}\| \|\beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1}\| \|\tilde{e}\| + 2 \|\gamma\| \|\tilde{e}\| \|\beta_\theta \xi\| \quad (4.79)$$

On peut démontrer que :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\theta V + 2\lambda_{\max}(\gamma) \|\tilde{e}\|^2 \|\beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1}\| + 2\lambda_{\max}(\gamma) \|\tilde{e}\| \|\beta_\theta \xi\| \\ \dot{V} &\leq -\theta V + 2 \frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\lambda_{\min}(\gamma)} \|\beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1}\| + 2 \frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\sqrt{\lambda_{\min}(\gamma)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\xi_k^2}{\theta^{2(k-1)}}} \sqrt{V} \end{aligned} \quad (4.80)$$

où :

- $\lambda_{\min}(\gamma)$ (respectivement $\lambda_{\max}(\gamma)$) est la plus petite valeur propre de γ (resp. la plus grande).
- ξ_k est la borne supérieure de $\|\xi\|$.

En utilisant le fait que $\varphi(u, z)$ est Lipschitzienne et possède une structure triangulaire, nous avons :

$$\|\beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1}\| < \mathcal{K} \quad (4.81)$$

avec :

- \mathcal{K} est une constante positive qui ne dépend pas de θ .

Ceci mène à :

$$\dot{V} \leq -(\theta - 2\mathcal{P})V + 2\mathcal{R}_\theta \sqrt{V} \quad (4.82)$$

avec :

- $\mathcal{R}_\theta \triangleq \frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\sqrt{\lambda_{\min}(\gamma)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\zeta_k^2}{\theta^{2(k-1)}}} \sqrt{V}$
- \mathcal{P} est le nombre de conditionnement de γ qui est défini comme suit : $\mathcal{P} \triangleq \frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\lambda_{\min}(\gamma)}$

Après simplification, l'équation (4.82) devient :

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{V}}{\sqrt{V}} \leq -\frac{(\theta - 2\mathcal{P})}{2} \sqrt{V} + \mathcal{R}_\theta \quad (4.83)$$

Ou de manière équivalente :

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\tilde{e}(t))} \leq -\frac{(\theta - 2\mathcal{P})}{2} \sqrt{V} + \mathcal{R}_\theta \quad (4.84)$$

Grâce au lemme de comparaison de H Khalil et al [58] on obtient :

$$\sqrt{V} \leq \exp\left(-\frac{\theta - 2\mathcal{P}}{2}t\right) \sqrt{V(\tilde{e}(0))} + \frac{1}{\theta - 2\mathcal{P}} \mathcal{R}_\theta \quad (4.85)$$

Ce qui implique :

$$\|\tilde{e}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\lambda_{\min}(\gamma)}} \exp\left(-\frac{\theta - 2\mathcal{P}}{2}t\right) \|\tilde{e}(0)\| + \frac{1}{\lambda_{\min}(\gamma)(\theta - 2\mathcal{P})} \mathcal{R}_\theta \quad (4.86)$$

Revenons maintenant à l'erreur d'origine e sachant que pour $\theta \geq 1$, nous avons :

$$\|\tilde{e}\| \leq \|e\| \leq \theta^{q-1} \|\tilde{e}\| \quad (4.87)$$

Utilisation (4.87), l'inégalité (4.86) devient :

$$\|e\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\lambda_{\min}(\gamma)}} \theta^{q-1} \exp\left(-\frac{\theta - 2\mathcal{P}}{2}t\right) \|e(0)\| + \frac{\theta^{q-1}}{\lambda_{\min}(\gamma)(\theta - 2\mathcal{P})} \mathcal{R}_\theta \quad (4.88)$$

De (4.88), nous pouvons conclure que l'erreur d'estimation sera dans une boule de rayon proportionnel à ζ_k , et centrée à l'origine. Donc, pour que l'erreur d'estimation soit petite on doit choisir θ assez grande.

Ceci termine la preuve. ■

4.6.3 Résultats de simulation

Afin d'évaluer les performances de notre approche, nous illustrons quelques tests de simulation sous l'environnement Matlab[®].

4.6.3.1 Test 1 : (Dynamique d'estimation)

Dans ce test, nous considérons les conditions climatiques nominales pour le fonctionnement du concentrateur solaire cylindro-parabolique. Par la suite, nous étudions l'influence du gain d'observateur θ sur la dynamique d'estimation de la température. Le point de fonctionnement nominal est caractérisé par une radiation solaire qui vaut de $I = 900 \text{ W/m}^2$. Les autres paramètres de simulation sont choisis comme suit : le débit d'huile à l'entrée du tube-récepteur égal à $q(t) = 6 \text{ l/s}$, la température d'huile à l'entrée du tube-récepteur égal à $T_{inlet} = 100 \pm 10 \text{ }^\circ\text{C}$ et le pas de discrétisation est choisi égal à $\Delta x = 2 \text{ m}$. Les résultats obtenus sont illustrés dans les figures (4.2)-(4.4).

A partir des résultats obtenus, on peut remarquer que la dynamique d'estimation de la température varie proportionnellement avec le gain de l'observateur. Alors, ces résultats confirment ceux obtenus en théorie.

4.6.3.2 Test 2 : (Influence des paramètres)

Afin d'étudier l'influence de la longueur du pas de discrétisation Δx sur les performances de l'observateur, nous estimons la température à l'intérieur du tube-récepteur pour quatre différentes valeurs de Δx et pour comparer les résultats obtenus nous reconstruisons le profil de température le long de tube-récepteur (la dimension spatiale) en utilisant la méthode d'interpolation du spline cubique. Les paramètres de simulation pour ce test sont les suivants : la radiation solaire est choisie égale à $I = 900 \text{ W/m}^2$, le débit d'huile à l'entrée du tube-récepteur égal à $q(t) = 7 \text{ l/s}$, et la température d'huile à l'entrée du tube-récepteur vaut de $T_{inlet} = 100 \pm 3 \text{ }^\circ\text{C}$. Les résultats de simulation sont illustrés dans la figure (4.5).

A partir des résultats obtenus, il est notable que les petites valeurs du pas de discrétisation mènent à des petites erreurs d'estimation.

4.6.3.3 Test 3 : (Robustesse de l'observateur)

Afin de tester la robustesse de l'observateur vis-à-vis les changements paramétriques et/ou les incertitudes de modélisation, nous considérons un changement brusque en radiation solaire causé par un passage nuageux. Ce type de perturbation affecte très souvent le fonctionnement du concentrateur en réalité. Pour cela, nous choisissons des données réelles de radiation solaire prise au cours d'une journée nuageuse. La température du fluide à l'entrée du tube est choisie égale à $T_{inlet} = 120 \text{ }^\circ\text{C}$ et les autres paramètres sont choisis les mêmes que le test 1. Les résultats de simulation sont présentés dans les figures (4.6)-(4.7).

A partir de ces résultats, on peut conclure que l'observateur proposé présente des bonnes performances de robustesse vis-à-vis les changements paramétriques et les incertitudes de modélisation.

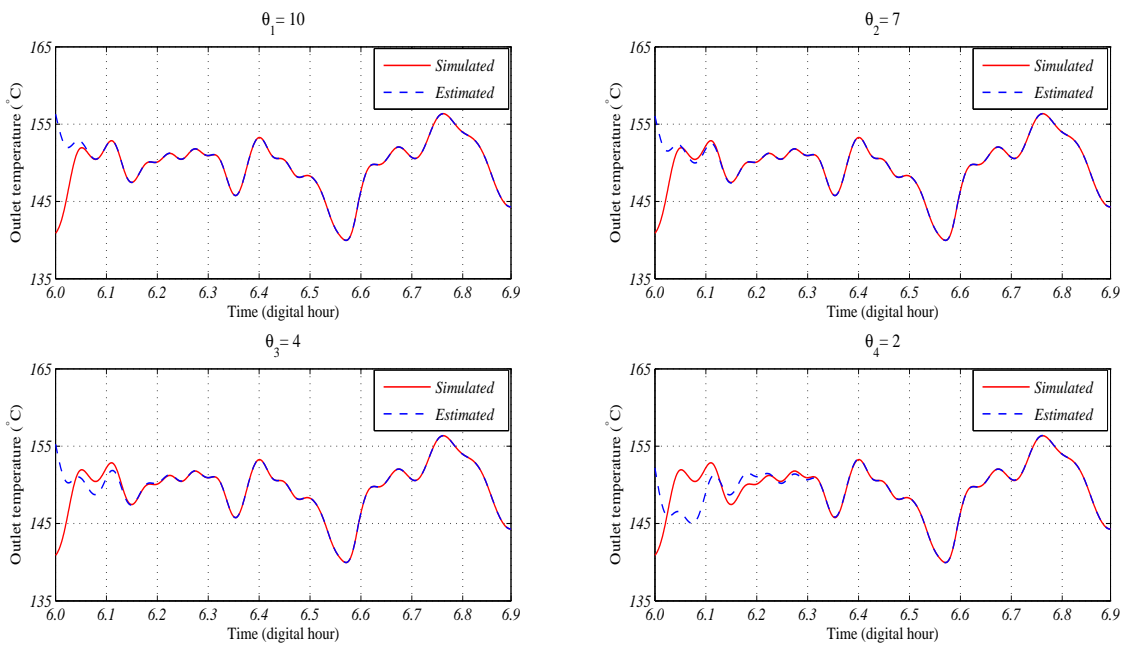


Figure 4.2: Influence de θ sur la dynamique d'estimation de la température de sortie

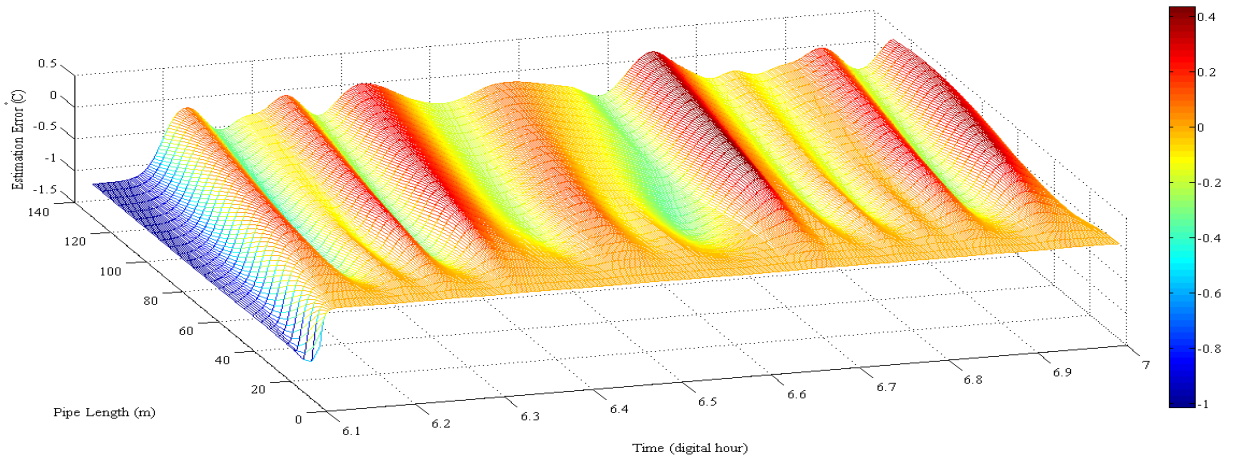


Figure 4.3: Erreur d'estimation le long de la dimension spatiale pour $\theta = 10$

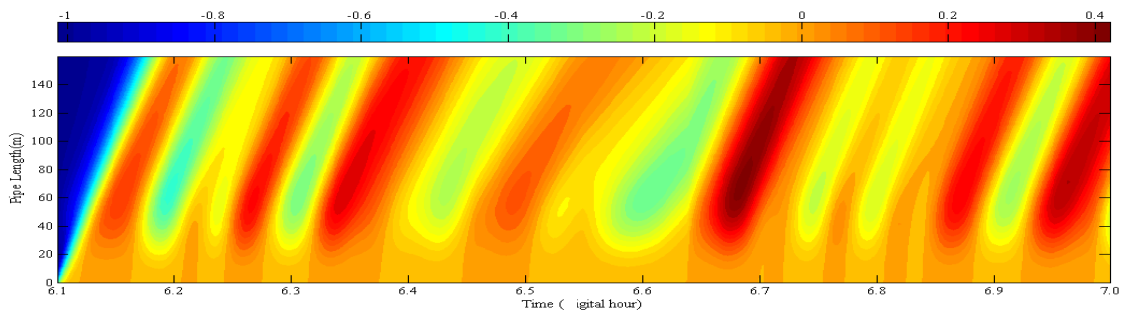


Figure 4.4: Contour plot de l'erreur d'estimation pour $\theta = 10$

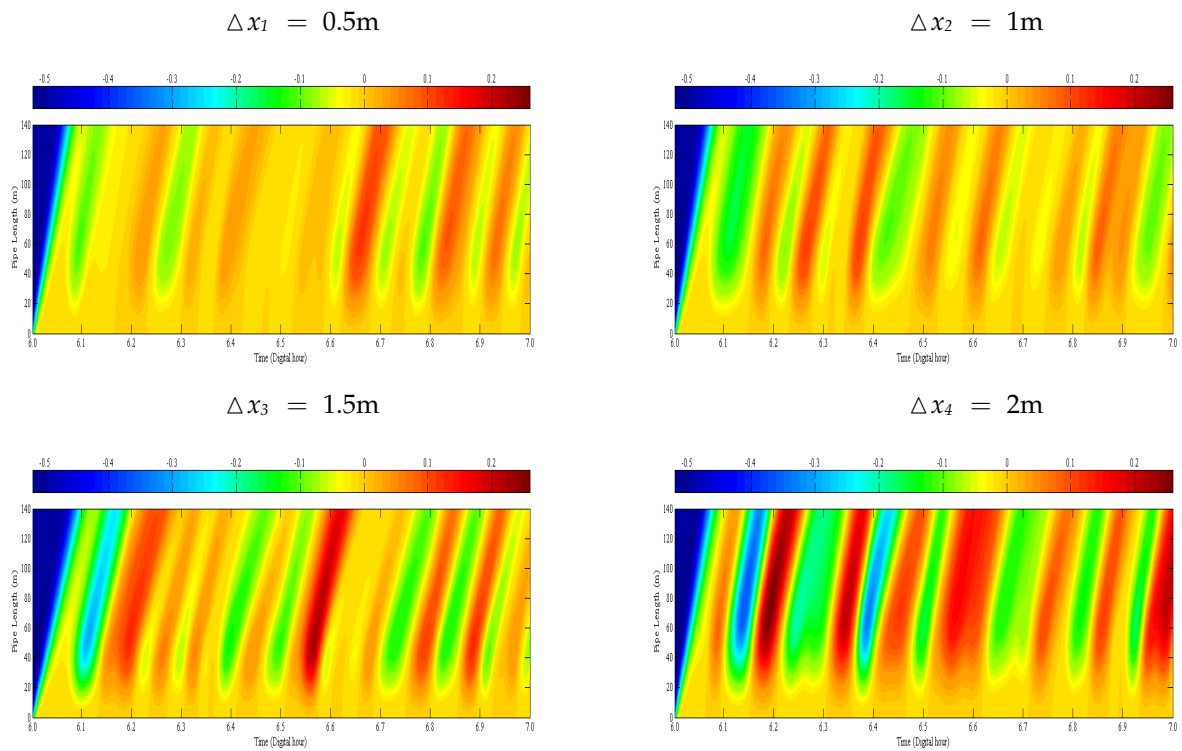


Figure 4.5: Influence de la longueur du pas de discrétisation sur l'erreur d'estimation

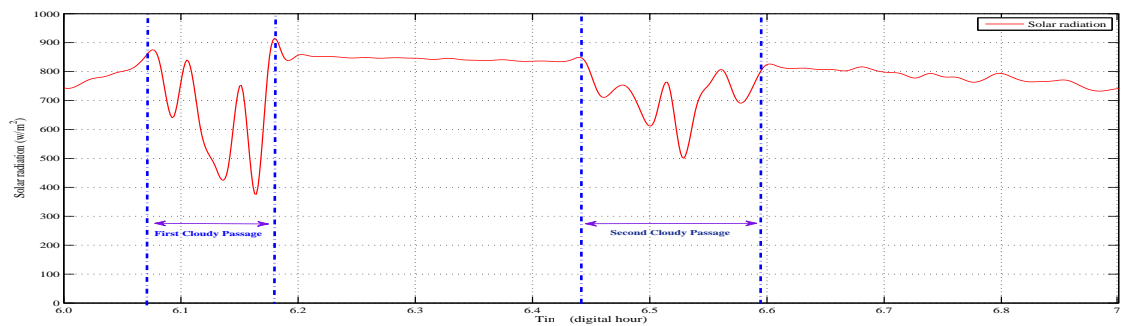


Figure 4.6: Profile de radiation solaire

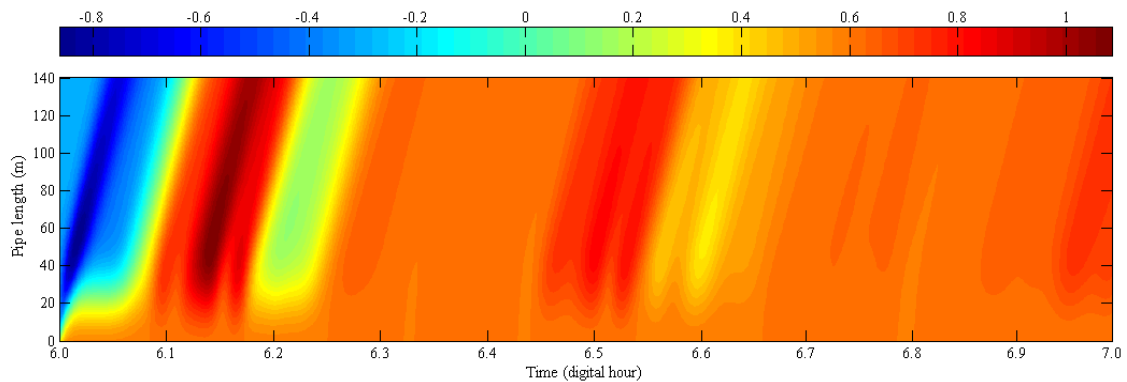


Figure 4.7: Contour plot de l'erreur d'estimation

4.7 Étude comparative

Pour une évaluation équitable, nous effectuons une étude comparative entre les différents observateurs présentés dans ce chapitre. Cette comparaison est basée sur les critères de performance suivants :

- Le modèle de l'observateur.
- La dynamique de l'erreur d'estimation.
- Les paramètres de réglage.
- Le champ d'application.

Nous identifions les observateurs par les abréviations suivantes :

- Observateur basé sur l'approche RPS :
 - Observateur de Luenberger (OL-1A).
 - Observateur de Luenberger (OL-2A).
- Observateur basé sur l'approche SPR :
 - Observateur de Luenberger (OL-1B).
 - Observateur de Luenberger (OL-2B).
- Observateur à grand gain (OGG).

Dans le tableau (4.1) nous présentons une étude comparative entre ces différents observateurs.

1- Avantages des observateurs RPS par rapport aux observateurs SPR et OGG :

- ★ La méthode de synthèse des observateurs RPS est relativement plus facile que celle des observateurs SPR.
- ★ La méthode de synthèse de l'observateur OL-2A peut être appliquée à d'autres classes de système EDP contrairement aux observateurs SPR qui sont conçus pour cette application seulement.

2- Avantages des observateurs SPR par rapport aux observateurs RPS et HGG :

- ★ La stabilité de la dynamique de l'erreur d'estimation est assurée par les observateurs SPR contrairement aux observateurs RSP. En conséquence, les observateurs SPR sont plus fiables.

3- Avantages de l'observateur OGG par rapport aux observateurs SPR et RPS :

- ★ La méthode de synthèse de l'observateur OGG peut être appliquée à d'autres classes de système EDP contrairement aux méthodes SPR qui sont conçus pour cette application seulement (le même modèle EDP).

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème d'observation d'état d'une classe des systèmes régis par EDP afin d'estimer la température du fluide à l'intérieur du tube-récepteur du CSCP. Dans un premier lieu, nous avons présenté deux observateurs synthétisés à base de

Critères de Performance	Observateur basé sur l'approche RFS		Observateur basé sur l'approche SPR		Observateur à grand gain (OGG)
	OL-1A	OL-2A	OL-1B	OL-2B	
Le modèle dynamique de l'observateur	un modèle ODE	un modèle ODE	un modèle EDP	Un modèle EDP	un modèle ODE
Dynamique de l'erreur d'estimation (DEE)	la stabilité de la DEE n'est pas prouvée	la stabilité de la DEE n'est pas prouvée	stable	stable	stable
Paramètres de réglage	un gain constant	un gain constant	un gain constant	un gain constant	un gain constant
Champs d'application	peut être étendu à des problèmes similaires	limité à cette application	limité à cette application	Limité à cette application	peut être étendu à des problèmes similaires

Tableau 4.1: Étude comparative

l'approche RPS. Dans les deux observateurs ; une méthode de discrétisation est adoptée pour réduire la complexité du modèle EDP. Par la suite, l'observateur de Luenberger conventionnel est utilisé pour estimer l'état des modèles ODE résultants de la simplification. L'avantage majeur de ces observateurs est la simplicité de ces développements analytiques, ce qui permet de les implémentés sans aucune simplification. En conséquence, les performances prouvées théoriquement seront concrétisés pratiquement.

En second lieu, nous avons présenté deux observateurs SPR introduit récemment pour la même application. Les deux observateurs sont de type Lunberger, ils gardent la même structure du modèle EDP avec l'introduction d'un terme de correction pour ajuster leurs dynamiques. La seule différence entre eux est dans le choix du gain de l'observateur qui se fait de deux différentes méthodes. D'un point de vue théorique, ces observateur sont parfaits, parce qu'ils assurent la convergence de l'erreur d'estimation à zéro contrairement aux observateurs RPS. L'inconvénient majeur de ces observateurs se révèle lors de son implémentation dû aux approximations des opérateurs de différenciations ; ce qui peut dégrader les performances de ces observateurs.

Finalement, nous avons présenté notre contribution qui consiste à prendre avantage de la méthode des différences finies étendue pour réduire la complicité du modèle EDP et assurer la certitude du modèle réduit. Ensuite, on a pris avantage de l'observateur à grand gain pour estimer l'état du modèle résultant. De nombreuses avantages de la méthode proposée méritent d'être soulignées ; dû à la prise en compte des erreurs de troncature, nous ne sommes pas obligés de choisir des petites valeurs de Δx . En conséquence, la dimension de l'observateur ne doit pas être aussi grande qu'auparavant. Alors, on peut exploiter cet avantage pour réduire le coût et le temps de calcul. Cependant, nous devons être prudents dans le choix des paramètres de réglage de l'observateur. En outre, la méthode proposée peut être appliquée à d'autres classes de systèmes régis par équations aux dérivées partielles.

PAR ce travail, nous estimons avoir contribué aux problèmes de commande et d'observation d'état des systèmes régis par équations aux dérivées partielles. Sur le thème commande, on a pu apporter deux contributions à la littérature du domaine. Dans la première, on a amélioré la certitude du modèle de commande de l'approche SPR. En effet, la littérature est abondante des plusieurs méthodes qui ont été proposées pour atteindre cet objectif. Néanmoins, le problème est loin d'être résolu dans sa totalité ; il reste plusieurs pistes à explorer pour améliorer ces méthodes. Dans notre proposition on a apporté une perfection à la méthode des différences finies qui est largement adoptée. L'avantage de cette contribution réside dans la simplicité de sa mise en oeuvre, sa généralité et son fondement mathématique. Par la suite, notre travail s'est orienté vers la recherche des nouvelles techniques de commande afin de contrôler la classe des systèmes étudiée. Pour cela, on a introduit le concept d'un nouveau principe de commande inspiré du fonctionnement de la fermeture-éclair et la théorie de stabilité de Lyapunov. Sur le thème observation d'état, on a proposé une nouvelle méthode de synthèse d'observateur, qui prendre avantage de la théorie d'observation classique et l'adopte aux systèmes régis par équations aux dérivées partielles.

A l'issue de ces travaux, les résultats fondamentaux proposés restent perfectibles et ouvrent la voie à de nouveaux axes de recherche. Parmi les directions jugées prometteuses, nous citons :

- L'extension de l'idée de la méthode des différences finis étendue, présenter dans le chapitre trois, à d'autres méthodes numériques comme la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis.
- L'extension de la commande de la fermeture-éclair à d'autres classes des systèmes incertains (ODE et PDE).
- L'implémentation pratique des algorithmes proposés.
- Tester l'applicabilité de la méthode de synthèse d'observateur, proposée dans le chapitre quatre, à d'autres classes des systèmes EDP et d'autres types d'observateurs.

Il faut noter aussi que certains de ces points sont déjà en cours d'exploration. Des résultats très encourageants ont été constatés et d'autres sont attendus incessamment.

A.1 Introduction

MANY physical systems containing masse or energy transport phenomena are modeled by partial differential equations (PDE's). Such systems and many others (like systems modeled by delay differential equations and integral equations) are known in the literature by several nominations, such as, infinite-dimensional systems, distributed parameter systems · · · etc. The PDE models of these systems can be, as for the ODE case, linear or nonlinear, deterministic or stochastic, time-invariant or time-varying [59].

The control of PDE systems has been the subject of many studies since 1960s. The early works that laid the foundations of this field, in late 1960s and early 1970s, dealt with some problems of optimal control and controllability of linear PDE systems [60]. The motivation behind the interest of controlling these systems returns to the need of an efficient technique for designing a controller that takes in consideration the dynamic behavior and the spatial variations of these systems. Furthermore, it is a stimulant topic because different classes of PDEs call for very different techniques.

Many methods have been proposed in the literature. These methods can be classified, according to their principles, into two classes : "Reduce Then Design (RTD)" and "Design Then Reduce (DTR)" [31, 32, 57] . They are also called "Early-Lumping" and "Late-Lumping" approaches [33, 17]. In the first one, some simplifications are applied to reduce the PDE model complexity before the controller design . The space discretization is the most useful theory for this task. Many methods are commonly used in this theory such as : the finite difference method, finite element method and finite volume method [33, 30]. In the second approach, the controller is directly designed by using the PDE model. This is based on infinite-dimensional description by using Hilbert and Banache spaces [35, 36, 37]. After that, the resulted scheme is reduced in order to facilitate its implementation.

A potential disadvantage of the RTD approach consists in the discrete linear model used to describe the original PDE, which is unable to represent accurately the behavior of the real system due to the lack of information in the discretization stage. As a matter of fact, the resulted design may fail in the achievement of the desired objective. The DTR approach seems to be more precise by using the original PDE model in the controller synthesis, but the fastidious analytic development remains a major constraint in its adoption.

This thesis deals, on one hand, with the control and the state-estimation problems for a class of systems governed by a inhomogeneous first order hyperbolic PDE model. On the other hand, they addresses a tracking problem in an energy conversion system as application. In this resume, we present only our contributions.

A.2 Process Description

The parabolic solar collector is an industrial process that converts the sunlight energy into thermal energy. This system is constituted of curved parabolic mirrors that focus the received solar radiations onto a pipe located at the focal line of the parabola. As a matter of fact, a thermal oil flowing through the pipe will be heated and then stored [26]. The most oil used in such application is SANTOTHERM 55 [25] which is characterized by a high capacity of energy storage and can support a temperature up to 300°C without losing its thermal properties. The stored heated oil can be used in many processes. The Solar Power Plant is the most known process where the heated oil is used in a heat exchanger to produce steam used in the turbine to drive electricity generators. Figure (A.1) illustrates an overall view of the Parabolic Solar Collector constitution.

In recent years, parabolic solar collectors have taken the lead upon a large range of other existing solar collectors and became the subject of many studies because they offer the possibility to control the produced thermal energy. This aim is reached by forcing the outlet temperature of oil flowing inside the receiver-pipe to track a desired reference.

By using the principle of energy conservation, the heat transfer mechanism in parabolic solar collector can be described by an inhomogeneous first order hyperbolic PDE given as follows : [28, 61]

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \frac{q(t)}{s_f} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \frac{\nu_0 \eta}{\rho_f c_f s_f} I(t) \quad (\text{A.1})$$

The process parameters are summarized in table (B.1) (see appendix B).

Two restrictions are imposed on the process operating :

- The thermal oil pump must function between two limits, 2 and 12 l/s, the upper limit is due to pump capacity limitations, and the lower is a safety limit in order to reduce the possibility of overheating of the oil .
- Ensure the safety of the process by respecting the limit imposed in the difference between the inlet and outlet temperature in order to avoid a leakage of the thermal oil due

to its high pressure.

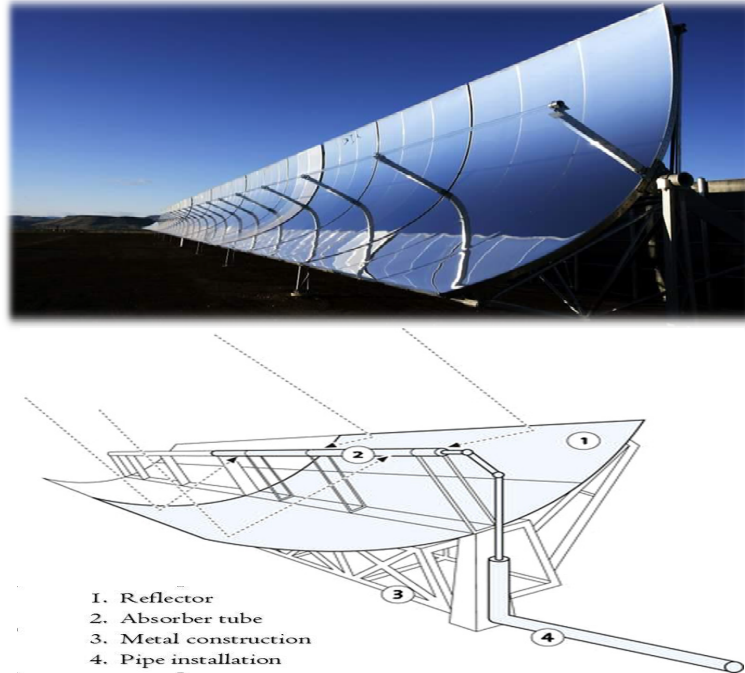


Figure A.1: Parabolic Solar Collector

A.3 Controller design

From a mathematical point of view, the main difference between ODE and PDE models resides in the spatial differential operator. This difference causes a major constraint and prevents the usage of classic control theory. In order to overcome this problem, this operator is approximated by several methods. However, none of them reached the accuracy of the original model. Motivated by this fact, we propose in this section an extended finite difference method that helps to overcome this problem and being the base of a new controller design.

A.3.1 Uncertain state space synthesis

The finite difference method is one of the most useful approaches to deal with the PDE model complexity[30, 62]. In this approach, the PDE model's is semi-discretized to a set of ordinary differential equations (ODEs) using the following identity :

$$\frac{\partial T_t(x)}{\partial x} = \frac{T_t(x) - T_t(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{A.2})$$

where :

- Δx : denotes the spacial step size.

The above identity is derived from the Taylor Series Expansion (TSE) of $T_t(x)$ in a given space

vicinity Δx , as follows :

$$T_t(x - \Delta x) = T_t(x) - \Delta x \frac{\partial T_t(x)}{\partial x} + \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i \Delta x^i}{i!} \frac{\partial^i T_t(x)}{\partial x^i} \quad (\text{A.3})$$

Or equivalently

$$\frac{\partial T_t(x)}{\partial x} = \frac{T_t(x) - T_t(x - \Delta x)}{\Delta x} + \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i \Delta x^{i-1}}{i!} \frac{\partial^i T_t(x)}{\partial x^i} \quad (\text{A.4})$$

Let us denote by $\mathcal{R}(\Delta x)$ the bias derived from the rest of the TSE, which is defined as follows :

$$\mathcal{R}(\Delta x) \triangleq \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i \Delta x^{i-1}}{i!} \frac{\partial^i T_t(x)}{\partial x^i} \quad (\text{A.5})$$

As it can be seen :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathcal{R}(\Delta x) = 0 \quad (\text{A.6})$$

For simplicity, usually $\mathcal{R}(\Delta x)$ is neglected¹. However, this leads to a loss of information on the system's behavior (due to the truncation error). To overcome this problem all the previous works based on this method propose to choose Δx small enough in order to justify the negligence of $\mathcal{R}(\Delta x)$ by satisfying the condition given by (A.6) or being close enough to the satisfaction of this latter.

As a result, the resulting model will be with a high dimension, which leads to an increased computational cost. Furthermore, we can never achieve the accuracy of the real process despite the smallness of the spatial step size Δx .

Proposition A.1 : To avoid the PDE model's complexity and get more accuracy, we propose to consider $\mathcal{R}(\Delta x)$ as an unknown parameter in our design (i.e $\mathcal{R}(\Delta x) = ?!$).

Consequently, the partial derivative of $T_t(x)$ with respect to "x" given by (A.2) will become as follows :

$$\frac{\partial T_t(x)}{\partial x} = \frac{T_t(x) - T_t(x - \Delta x)}{\Delta x} + \underbrace{\mathcal{R}(\Delta x)}_{\text{uncertain}} \quad (\text{A.7})$$

The PDE model (A.30) is equivalent to the uncertain ODE given by (A.8) : $\forall x \in [x_1 - \Delta x, x_1]$

$$\frac{dT_t(x)}{dt} = (T_t(x - \Delta x)|_{x=x_1} - T_t(x)|_{x=x_1}) \frac{q(t)}{s} + \frac{v_0 \eta}{\rho c s} I(t) - \underbrace{\frac{q(t)}{s} \mathcal{R}(\Delta x)|_{x=x_1}}_{\text{uncertain}} \quad (\text{A.8})$$

The equivalent state space describing the uncertain ODE model (A.8) along the space horizon is obtained by choosing the following state variables :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad x_i = T_t(l - (i - 1) \Delta x)$$

1. Notice that the boundedness of $\mathcal{R}(\Delta x)$ is automatically ensured if the state variable is bounded [63]

Obviously, the equivalent uncertain state space model can be rewritten as follows :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u + \xi(t) \\ y = c x \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

with :

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix} ; \xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix} ; f(x) = \frac{v_0 \eta}{\rho c s} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} I(t)$$

$$c = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

where :

$$g_i(x) = \frac{x_i - x_{i+1}}{s} \quad ; \quad \xi_i(t) = -\frac{q(t)}{s} \mathcal{R}_i(\Delta x)$$

Two main features of the proposed method are worth mentioning. The first consists in its ability to ensure an optimization of the complexity/accuracy balance, by providing an equivalent uncertain state-space (USS) model which can describe accurately the real process with less complexity. The second one is the possibility of it being applied to describe all processes governed by a PDE model.

In the next section, we introduce the zipper controller based for the resulting uncertain state space.

A.3.2 The zipper controller design

Creative inspirations that marked the great moments of human genius are linked to seemingly insignificant details : an Apple for Newton, a Bath for Archimedes, and many other impressive examples [18]. In this section, we propose a new controller design inspired from the functioning principle of "*The zipper*". The proposed control scheme is based on the Lapunov stability analysis as well as the zipper functioning principle.

A.3.2.1 Baseline control scheme :

The basic idea of the proposed method consists in confining the uncertain system (Σ) between two well defined systems², i.e :

$$\forall t \in [0, t_1] : (\Sigma)_{min} \leq (\Sigma) \leq (\Sigma)_{max} \quad (\text{A.10})$$

Hereafter, we coincide (Σ) at the desired reference, thanks to the inequality(A.10), by forcing $(\Sigma)_{min}$ and $(\Sigma)_{max}$ to track the same desired reference. Hereby, achieving of the desired objective.

The principle of the proposed idea is inspired from the functioning principle of the zipper as illustrated in figure (A.2). Before proceeding, we propose to emphasize the main steps leading

2. As will be shown latter, these systems are described by known parameters and don't contain any uncertainty

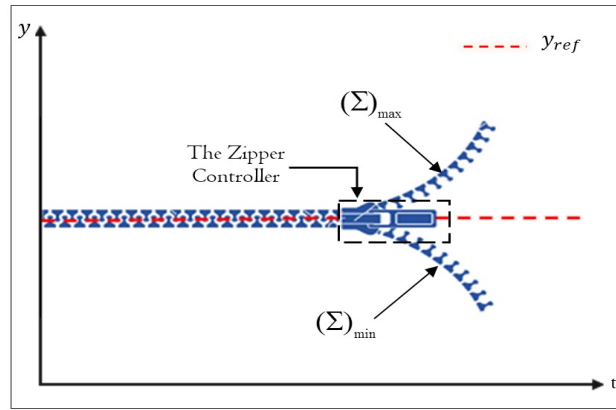


Figure A.2: The Zipper Controller Principle

to the controller design :

1. Firstly, we must define the system bounds $(\Sigma)_{min}$ and $(\Sigma)_{max}$.
2. Thereafter, we establish a matching relationship between the control laws making $(\Sigma)_{min}$ and $(\Sigma)_{max}$ converge to the desired reference in order to have (Σ) coincide with it.
3. Finally, the stability analysis of the final control scheme is carried out by resorting to the classic Lyapunov theory.

In this contribution, we will focus on the control design for our system as a study case. Thus, we provide some remarks for extending "the zipper principle" to other class of uncertain systems.

• *1st Stage : (definition of the systems bound)*

The systems bound are formally defined in the following proposition.

Proposition A.2 : Let $(\Sigma)_1$ and $(\Sigma)_2$ be two nonlinear systems defined as follows :

$$(\Sigma)_1 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u - \zeta_m \\ y = c x \end{cases}$$

$$(\Sigma)_2 : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u + \zeta_m \\ y = c x \end{cases}$$

where :

- ζ_m : is the upper bound of $|\zeta(t)|$ i.e ;

$$|\zeta(t)| \leq \zeta_m$$

Then, the uncertain system (A.9) fulfills the following inequality :

$$(\Sigma)_{min} : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u - \tilde{\zeta}_m \\ y = c x \end{cases} \leq (\Sigma) : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u + \tilde{\zeta}(t) \\ y = c x \end{cases} \leq (\Sigma)_{max} : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) u + \tilde{\zeta}_m \\ y = c x \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Proof :

Using the fact that the system uncertainty is a bounded function, we have :

$$|\tilde{\zeta}(t)| \leq \tilde{\zeta}_m \quad (\text{A.12})$$

Or equivalently :

$$-\tilde{\zeta}_m \leq \tilde{\zeta}(t) \leq \tilde{\zeta}_m \quad (\text{A.13})$$

By adding the term $f(x) + g(x)u$ to the inequality (A.13), we obtain :

$$f(x) + g(x)u - \tilde{\zeta}_m \leq f(x) + g(x)u + \tilde{\zeta}(t) \leq f(x) + g(x)u + \tilde{\zeta}_m \quad (\text{A.14})$$

Or equivalently :

$$\dot{x}\{(\Sigma)_{min}\} \leq \dot{x}\{(\Sigma)\} \leq \dot{x}\{(\Sigma)_{max}\} \quad (\text{A.15})$$

By integrating the inequality (A.15) and multiplying by c , we obtain :

$$y\{(\Sigma)_{min}\} \leq y\{(\Sigma)\} \leq y\{(\Sigma)_{max}\} \quad (\text{A.16})$$

Which concludes the proof ■

• **2nd Stage : (definition of the matching relationship)**

Firstly, we must find the control laws ensuring the convergence of both $(\Sigma)_{min}$ and $(\Sigma)_{max}$ to the same desired reference.

By resorting to Lyapunov theory, we can easily reach this aim. In the following theorem we state the main result.

Theorem A.1 :

For nonlinear systems $(\Sigma)_{min}$ and $(\Sigma)_{max}$, If the following control laws are applied (respectively) :

$$u_{min}(t) = \frac{1}{g(x)} (\dot{x}_r - f(x) + \tilde{\zeta}_m - \lambda e) \quad (\text{A.17})$$

$$u_{max}(t) = \frac{1}{g(x)} (\dot{x}_r - f(x) - \tilde{\zeta}_m - \lambda e) \quad (\text{A.18})$$

where :

- $\lambda \in \mathcal{R}^+$: is a scalar gain to impose a selective degree of robustness and/or stability.

Then, these systems exhibits exponential reference tracking.

Proof :

The proof is omitted for brevity³. ■

To establish the matching relationship we propose to discuss the definition of the tracking error as follows :

◇ If the tracking error is negative (i.e. $y \leq y_r$) : in this case, we must apply u_{min} in order to force $(\Sigma)_{min}$ to converge to the desired reference. Hereby, we also force the convergence of (Σ) via the inequality (A.11).

◇ If the tracking error is positive (i.e. $y \geq y_r$) : in this case, we must apply u_{max} in order to force $(\Sigma)_{max}$ to converge to the desired reference. Hereby, we also force the convergence of (Σ) via the inequality (A.11).

Indeed, we can summarize the above discussions in the following proposition

Proposition A.3 : *From the above discussions, we can define the matching relationship as follows :*

$$u(t) = \begin{cases} u_{min}(t) & e \leq 0 \\ u_{max}(t) & e \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

or equivalently

$$u(t) = \frac{1}{2}[\gamma_1 u_{min}(t) + \gamma_2 u_{max}(t)] \quad (\text{A.20})$$

where :

$$\begin{cases} \gamma_1 \triangleq 1 - \text{sgn}(e) \\ \gamma_2 \triangleq 1 + \text{sgn}(e) \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

■

• 3rd Stage : (stability analysis of the final control scheme)

As a consequence of the previous stages, we can now state the main contribution.

Theorem A.2 :

Consider the PDE system (A.30) under the equivalent USS representation (A.9), If the following control law is applied :

$$u(t) = \frac{1}{g(x)} (\dot{x}_r - f(x) - \xi_m \text{sgn}(e) - \lambda e) \quad (\text{A.22})$$

Then, this system exhibits exponential reference tracking.

Proof :

From Theorem 1 and Proposition 3, the control law derived from "the zipper principle" can be obtained by substituting (A.17) and (A.18) in (A.20) :

$$u(t) = \frac{1}{g(x)} (\dot{x}_r - f(x) - \xi_m \text{sgn}(e) - \lambda e) \quad (\text{A.23})$$

3. We can easily obtain this result by resorting to the classic Lyapunov method

Then, let $V(t)$ be a positive definite function defined as follows :

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ V(t) &\triangleq \frac{1}{2} e^2(t) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

where $e(t)$ is the tracking error defined as follows :

$$e(t) = x(t) - x_r(t) \quad (\text{A.25})$$

The time derivative of $V(t)$ is expressed as follows :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e(t) \dot{e}(t) \\ &= e(t) (f(x) + g(x)u + \zeta - \dot{x}_r) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

By substituting (A.23) in (A.26), we obtain

$$\dot{V}(t) = -\lambda e^2 + (\zeta(t) - \text{sgn}(e) \zeta_m) e \quad (\text{A.27})$$

As it can be seen :

$$(\zeta(t) - \text{sgn}(e) \zeta_m) e = (\text{sgn}(e)\zeta(t) - \zeta_m) |e| \quad (\text{A.28})$$

And we have :

$$(\text{sgn}(e)\zeta(t) - \zeta_m) |e| \leq 0 \quad (\text{A.29})$$

Hereby, $\dot{V}(t)$ is negative definite. Hence, we conclude the exponential stability for the predefined reference ■

A.3.3 Simulation results

In this section, we carried out simulations to evaluate the performances of the proposed control scheme under different conditions. Simulations are done with real values of process parameters, which are those of the solar platform belonging to the Spanish research energy center (CIEMAT, Almería_Spain).

Test 1. To assess the reference tracking performances of the zipper controller, we consider two reference signals characterized by a high dynamics; "staircase-reference" and "sinusoidal-reference". The simulation parameters used in this test are summarized in table (A.1). The obtained results are illustrated in figure (A.3).

From the obtained results, we can conclude that the proposed controller succeeds in achieving the control objective.

Tableau A.1: Simulation Parameters

Parameter	Value
inlet temperature $T_i(0)$	200 °C
solar radiation	900 w/m ²
sampling time for simulation	36 s
number of discretization	20

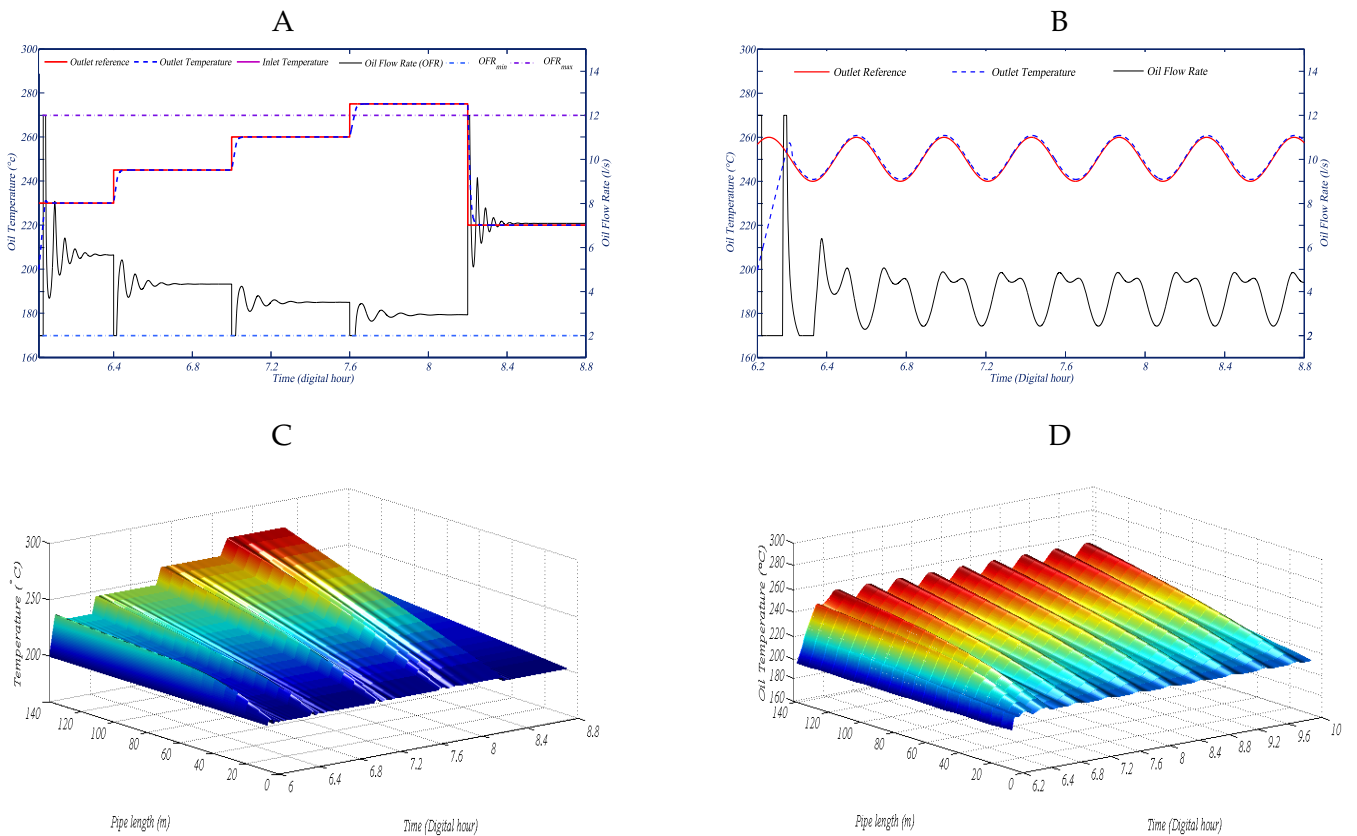


Figure A.3: Evolution of the PSC system for a "staircase" and "sinusoidal" references. (A,B) represents the reference tracking, and the applied oil flow rate (the control input). (C,D) describes the temperature evolution inside the pipe for both references

Test 2. In order to check the robustness of the zipper controller against modeling error and/or parameters variation, we consider a brutal change in the solar radiation caused by passing clouds, and we check the tracking performances of this latter. Indeed, we apply the solar radiation profile (A.4) to the parabolic solar collector (in the steady-state). Figure. (A.5) shows the tracking error obtained by comparing the perturbed and non-perturbed system.

As it can be seen an attenuation of the perturbation effects while approaching to the pipe extremity (the system output). Hereby, we conclude the robustness of our controller against perturbations.

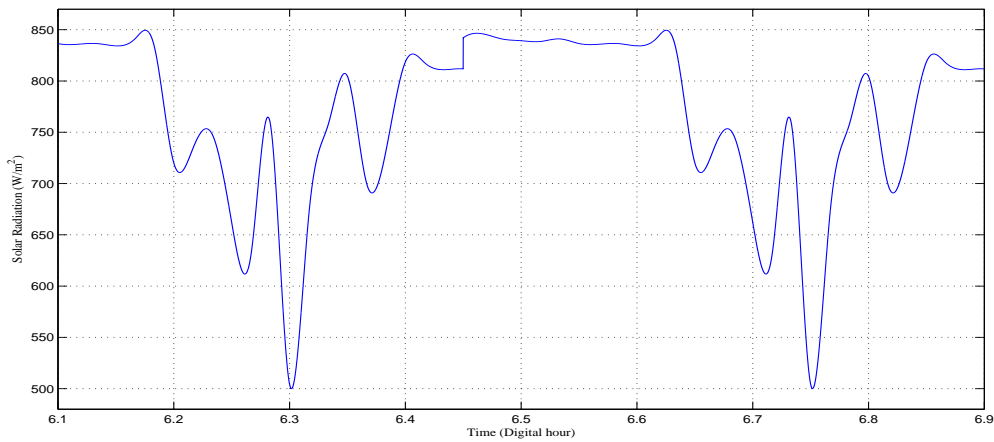


Figure A.4: Solar radiation profile

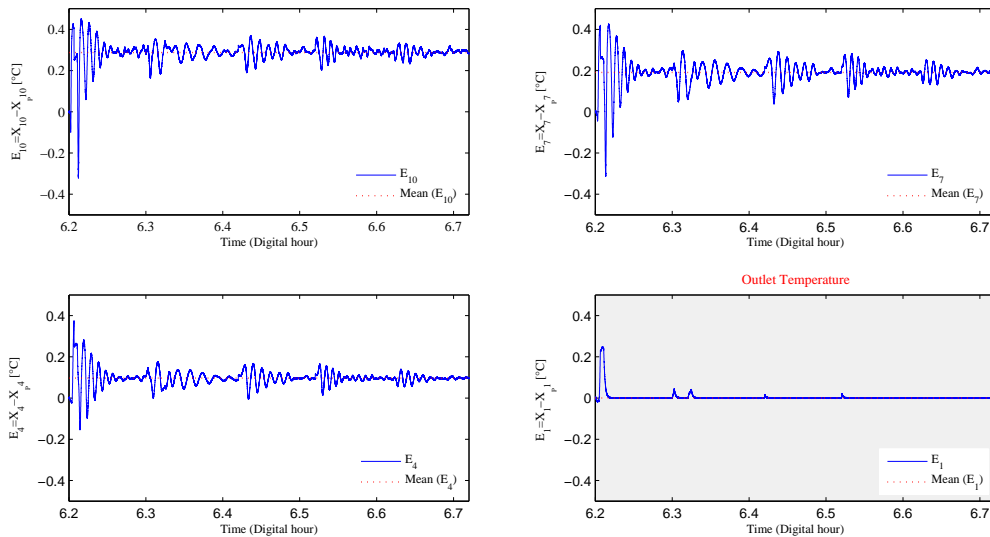


Figure A.5: Robustness Test

A.4 Observer design

In the previous section, we have seen that the Zipper controller can drive the tracking error towards zero by using a distributed sensing (the state variables). However, in practice a distributed sensing does not exist [64]. The only available measurements are those of the solar radiation $I(t)$, using a pyrheliometer, and of the outlet temperature $T(L, t)$ using a thermometer. This motivates the design of a sensor able to ensure a distributed sensing along the receiver-pipe despite the accessibility constraint.

The soft sensors are instrumental in inaccessible variables measurement due to their impressive performances and reduced cost compared to physical sensors. State observation theory has been presented, recently, as a powerful tool for soft sensor design. The potential advantage that makes the use of such theory an obligation consists in the ability to deal with problems of inaccessible variables measurement. This fact can be exploited in several ways such as, ensuring human safety in a nuclear power station, where the placement of physical sensors is a dangerous task or can help to overcome physical constraints leading to the inaccessibility problem.

The conventional concept of state observation theory has been always investigated based on systems modeled by ordinary differential equations (ODEs)[45]. However, several research works showed that many industrial processes containing mass or energy transport phenomena such as : fixed-bed reactor[35, 44], catalytic road [47], counter flow heat exchanger [31], plug flow reactor [48], nitrification-denitrification biofilter [33] and fiber spline [65], are spatially distributed. Nevertheless, these systems are governed by partial differential equation (PDE) models (due to their evolution in space and time simultaneously) which make the use of the aforementioned theory an arduous task.

In this section, we present a new method for soft sensor design in order to estimate the temperature of oil flowing inside the receiver-pipe in Parabolic Solar Collector. The challenge in the achievement of this objective consists in the complexity of the PDE model governing temperature's evolution. To overcome this problem, the extended finite difference method is exploited a second time to provide an equivalent uncertain ODE model which describes accurately the original model. Subsequently, based on the uncertain model, the soft sensor is synthesized.

A.4.1 Preliminaries and problem formulation

Let us introduce our problem by considering the hyperbolic PDE model governing temperature's evolution inside the pipe, given by :

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} u(t) = s(t) \quad (\text{A.30})$$

where :

$t \in \mathbb{R}^+, x \in \Omega = [0, l]$ denote respectively the time instant and the space position, $y(t, x) \in \mathbb{R}^+$ denotes the state variable, $u(t) \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ is the control input and $s(t) \triangleq \frac{\nu_0 \eta}{\rho_f c_f s_f} I(t)$ is a time-varying parameter. $\Gamma \triangleq \frac{1}{s_f}$ is a constant.

Notice that model (A.30) includes a large class of systems containing mass and/or energy transport phenomena such as : solar plant [28], bio-reactors [51], and tubular reactor [66], in which the state can describe temperature, pressure, flow rate, or other meaningful variables.

We assume that the state is accessible for measurement (via instrumental sensor) only in the space boundary domain, that we can define as follows :

$$\begin{cases} y(t, 0) = y(t)_{\text{inl}} \\ y(t, l) = y(t)_{\text{out}} \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

$y(t)_{\text{inl}}$ and $y(t)_{\text{out}}$ correspond to the inlet and the outlet temperature of the pipe in our application example.

As a matter of fact, we seek a soft sensor for the estimation of the state (the fluid temperature) along the space horizon on an equi-distance spatial grid as illustrated in figure (A.6).

Remark A.1 : For clarity and simplicity, the state variable $y(t, x)$ is denoted by $y_t(x)$ throughout the rest of this paper.

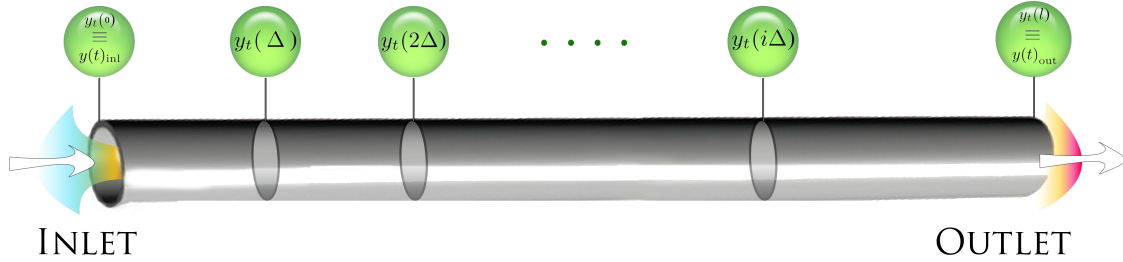


Figure A.6: Sensor positioning schematic

Assumption A.1 : Due to the actuators' saturation constraint (for instance : Pump), we assume that the control input is bounded, i.e :

$$\forall t \in [0, t_l] : \quad 0 < u(t) \leq u_{\max}$$

A.4.2 Soft sensor design

Following the method leading to high gain observer design for ODE models [56] and extending its usefulness for process governed by PDE models, the proposed soft sensor is carried

out.

The existence of a state observer requires the satisfaction of the observability condition. Therefore, the uniform observability theorem that will be used to check the system observability is stated as follows :

Theorem : (Uniform Observability Theorem) [55]

Let $(\Sigma)_{\text{CFO}}$ be a nonlinear system expressed in the compact form of observability, i.e :

$$(\Sigma)_{\text{CFO}} \begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2, u). \\ \vdots \\ \dot{z}_i = f_i(z_i, z_{i+1}, u) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = f_n(z, u). \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

where :

$$\underline{z}_i = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_i) \quad z = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n)$$

$(\Sigma)_{\text{CFO}}$ is uniformly observable if and only if the following condition is satisfied :

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial z_{i+1}} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f_i(\underline{z}_i, z_{i+1}, u)}{\partial z_{i+1}} \neq 0$$

First, we propose to rewrite the system (A.9) in the normal form of observability given as follows :

$$(\Sigma)_{\text{NFO}} \begin{cases} \dot{z} = A z + \varphi(u, z) + \zeta \\ y = C z \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

with :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \psi(u) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \psi(u) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \psi(u) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(u, z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, z_1) \\ \varphi_2(u, z_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(u, z_{(n-1)}) \\ \varphi_n(u, z) \end{pmatrix}$$

$$\zeta^T = (\zeta_1 \ \dots \ \zeta_i \ \dots \ \zeta_n) \quad C = (1 \ \dots \ 0)$$

This form is reached by choosing $(z = x)$ in model (A.9) and making some rearrangements⁴.

4. To extend the proposed method for other PDE models, at this stage, the reader is referred to [55] in which a general method leading to the normal form of observability is described

Indeed, the parameters are given as follows :

$$\begin{cases} \psi(u) = \frac{\Gamma}{\Delta x} u \\ \zeta_i = -\Gamma \mathcal{R}_{x(\Delta x)i} u \\ \varphi(u, z_i) = s(t) - \frac{\Gamma}{\Delta x} z_i u \end{cases}$$

Now, we go back to the problem of interest with making use of the proposed normal form of observability (A.33). Indeed, the observability of the system (A.33) can be checked easily thanks to the "uniform observability theorem [55]" :

$$\frac{\partial f_i(z_i, z_{i+1}, u)}{\partial z_{i+1}} = \psi(u) \quad | \quad \psi(u) \neq 0$$

Therefore, $(\Sigma)_{\text{NFO}}$ is uniformly observable.

As commonly used in high gain observer design, we consider the following lipschitz assumption.

Assumption A.2 : $\varphi(u, z)$ is a lipschitz function with respect to z uniformly to u , i.e :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}, \forall u(t) \in \mathcal{U}; \exists L > 0 : \|\varphi_i(u, z_1) - \varphi_i(u, z_2)\| \leq L \|z_1 - z_2\|$$

Now we can prove the following theorem, which provides a state observer ensuring the convergence of the estimation error to zero despite the uncertainty.

Theorem A.3 :

The PDE model (A.30) under the equivalent normal form of observability (A.33) admits a state observer given by :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(u, \hat{z}) - \theta\beta_\theta^{-1}\gamma^{-1}C^T(C\hat{z} - y) \quad (\text{A.34})$$

with :

- $\gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$: a symmetric positive definite matrix [56] obtained by the resolution of the Lyapunov equation defined as follows :

$$\gamma A + A^T \gamma + \gamma = C^T C \quad (\text{A.35})$$

- β_θ : a diagonal matrix given by :

$$\beta_\theta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\theta} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \frac{1}{\theta^{n-1}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

where :

- $\theta > 1$: a scalar gain that must be chosen large enough.

Then, the observer (A.34) guarantees the convergence of the estimation error to a small neighborhood of zero by appropriately choosing the design parameter.

Proof :

To the best of our knowledge, the results presented here are very similar in their statement to the results given in [56]. However, we must provide some comments which emphasize the added value.

Before proceeding, recall that the ultimate aim of the proposed soft sensor consists in ensuring the convergence of the estimation error to zero despite the system uncertainty.

Indeed, let $e \triangleq \hat{z} - z$ be the estimation error. Therefore, the time derivative of e is given by :

$$\dot{e} = A e + \varphi(u, \hat{z}) - \varphi(u, z) - \theta \beta_\theta^{-1} \gamma^{-1} C^T C e - \xi \quad (\text{A.37})$$

Using the following variable substitution $\tilde{e} = \beta_\theta e$, we can rewrite (A.37) as follows :

$$\dot{\tilde{e}} = \beta_\theta A \beta_\theta^{-1} \tilde{e} + \beta_\theta (\varphi(u, \hat{z}) - \varphi(u, z)) - \theta \gamma^{-1} C^T C \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - \beta_\theta \xi \quad (\text{A.38})$$

By applying the mean value theorem to $\varphi(u, z)$ and using the following identities :

$$\beta_\theta A \beta_\theta^{-1} = \theta A \quad , \quad C \beta_\theta^{-1} = C$$

we obtain :

$$\dot{\tilde{e}} = \theta A \tilde{e} + \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} e - \theta \gamma^{-1} C^T C \tilde{e} - \beta_\theta \xi \quad (\text{A.39})$$

Or equivalently :

$$\dot{\tilde{e}} = \theta A \tilde{e} + \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - \theta \gamma^{-1} C^T C \tilde{e} - \beta_\theta \xi \quad (\text{A.40})$$

Now, we go back to the convergence analysis of the estimation error. Let $v(\tilde{e}) \triangleq \tilde{e}^T \gamma \tilde{e}$ be a Lyapunov function candidate.

The time derivative of v is expressed as follows :

$$\dot{v} = 2\tilde{e}^T \gamma \dot{\tilde{e}} \quad (\text{A.41})$$

$$= 2\theta \tilde{e}^T \gamma A \tilde{e} + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - 2\theta \tilde{e}^T C^T C \tilde{e} - 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \xi \quad (\text{A.42})$$

Substituting (A.35) in (A.41) yields to :

$$\dot{v} = \theta (\tilde{e}^T \gamma \tilde{e} + \tilde{e}^T C^T C \tilde{e}) + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - 2\theta \tilde{e}^T C^T C \tilde{e} - 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \xi \quad (\text{A.43})$$

$$\dot{v} = -\theta v - \theta \tilde{e}^T C^T C \tilde{e} + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} - 2\theta \tilde{e}^T C^T C \tilde{e} - 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \xi \quad (\text{A.44})$$

Indeed, we have

$$\dot{v} \leq -\theta v + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1} \tilde{e} + 2\tilde{e}^T \gamma \beta_\theta \xi \quad (\text{A.45})$$

$$\dot{v} \leq -\theta v + 2 \|\gamma\| \|\tilde{e}\| \beta_\theta \left\| \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \right\| \beta_\theta^{-1} \|\tilde{e}\| + 2 \|\gamma\| \|\tilde{e}\| \beta_\theta \|\xi\| \quad (\text{A.46})$$

One can show that :

$$\begin{aligned}\dot{v} &\leq -\theta v + 2\lambda_{\max}(\gamma) \|\tilde{e}\|^2 \|\beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1}\| + 2\lambda_{\max}(\gamma) \|\tilde{e}\| \|\beta_\theta \zeta\| \\ \dot{v} &\leq -\theta v + 2 \frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\lambda_{\min}(\gamma)} \|\beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1}\| + 2 \frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\sqrt{\lambda_{\min}(\gamma)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\zeta_k^2}{\theta^{2(k-1)}}} \sqrt{v}\end{aligned}\quad (\text{A.47})$$

where :

- $\lambda_{\min}(\gamma)$ (resp $\lambda_{\max}(\gamma)$) signifies the smallest eigenvalue (resp the largest) of γ .
- ζ_k are the upper bounds of $\|\zeta\|$.

Using the fact that $\varphi(u, z)$ is lipschitz and has a triangular structure, we have :

$$\|\beta_\theta \frac{\partial \varphi(u, z)}{\partial z} \beta_\theta^{-1}\| < \mathcal{K} \quad (\text{A.48})$$

with :

- \mathcal{K} : positive constant independent of θ

This yields to :

$$\dot{v} \leq -(\theta - 2\mathcal{P})v + 2\mathcal{R}_\theta \sqrt{v} \quad (\text{A.49})$$

with :

- $\mathcal{R}_\theta \triangleq \frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\sqrt{\lambda_{\min}(\gamma)}} \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\zeta_k^2}{\theta^{2(k-1)}}} \sqrt{v}$
- \mathcal{P} is the conditioning number of γ defined as follows : $\mathcal{P} \triangleq \frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\lambda_{\min}(\gamma)}$

After simplification, equation (A.49) becomes :

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{v}}{\sqrt{v}} \leq -\frac{(\theta - 2\mathcal{P})}{2} \sqrt{v} + \mathcal{R}_\theta \quad (\text{A.50})$$

Or equivalently :

$$\frac{d}{dt} \sqrt{v(\tilde{e}(t))} \leq -\frac{(\theta - 2\mathcal{P})}{2} \sqrt{v} + \mathcal{R}_\theta \quad (\text{A.51})$$

Taking advantage of the comparison lemma given in [58] we get :

$$\sqrt{v} \leq \exp\left(-\frac{\theta - 2\mathcal{P}}{2}t\right) \sqrt{v(\tilde{e}(0))} + \frac{1}{\theta - 2\mathcal{P}} \mathcal{R}_\theta \quad (\text{A.52})$$

which implies

$$\|\tilde{e}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\lambda_{\min}(\gamma)}} \exp\left(-\frac{\theta - 2\mathcal{P}}{2}t\right) \|\tilde{e}(0)\| + \frac{1}{\lambda_{\min}(\gamma)(\theta - 2\mathcal{P})} \mathcal{R}_\theta \quad (\text{A.53})$$

Let us now return to the original error e . Knowing that, for $\theta \geq 1$, we have :

$$\|\tilde{e}\| \leq \|e\| \leq \theta^{q-1} \|\tilde{e}\| \quad (\text{A.54})$$

Using (A.54), the inequality (A.53) becomes :

$$\| e \| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\gamma)}{\lambda_{\min}(\gamma)}} \theta^{q-1} \exp\left(-\frac{\theta - 2\mathcal{P}}{2}t\right) \| e(0) \| + \frac{\theta^{q-1}}{\lambda_{\min}(\gamma)(\theta - 2\mathcal{P})} \mathcal{R}_\theta \quad (\text{A.55})$$

From (A.55), we can conclude that the estimation error will be in a ball of radius proportional to ξ_k , and centered at the origin. So, to make the estimation error small, we have to choose θ large enough.

This concludes the proof. ■

A.4.3 Simulation results

To show the efficiency of the proposed soft sensor, some tests are performed using Matlab[®] environment as follows :

Test 1. We consider here the nominal operating conditions of the parabolic solar collector, which corresponds to a clear-day. Then, we study the influence of the observer gain θ , which represents the tuning-knob of the soft sensor, on the estimated temperature. The nominal operating point is characterized by a solar radiation : $I = 900 \text{ W/m}^2$, an inlet oil flow rate : $q(t) = 6 \text{ l/s}$, and a varying inlet oil temperature : $T_{inlet} = 100 \pm 10 \text{ }^\circ\text{C}$, the spatial step size is chosen : $\Delta x = 2 \text{ m}$. The simulation results are illustrated in figure (A.7)-(A.9).

From the obtained results, it can be seen that the temperature estimation is improved with the increment of θ . These results confirm those obtained theoretically.

Test 2. In this test, we attempt to check the influence of the spatial step size Δx on the soft sensor performances. Indeed, we estimate the oil temperature on an equi-distance spatial grid (as illustrated in figure (A.6)) for four different values of Δx . Thereafter, we reconstruct the temperature profile along the space horizon by using the spline cubic interpolation method in order to make a comparison between the obtained results. The simulation parameters are given as follows : solar radiation $I = 900 \text{ W/m}^2$, inlet oil flow rate : $q(t) = 7 \text{ l/s}$, and inlet oil temperature : $T_{inlet} = 100 \pm 3 \text{ }^\circ\text{C}$. The effect of the spatial step size on the estimation error is shown in figure (A.10).

From the obtained results it is noticeable that small spatial step size gives small estimation error.

Test 3. In order to check the sensitivity of the soft sensor towards disturbance sources, another test is performed. In this one, we consider an abrupt change in solar radiation caused by passing clouds. Therefore, real solar radiation data, taken in a cloudy-day, are used in this test. The inlet oil temperature is chosen as follows : $T_{inlet} = 120 \text{ }^\circ\text{C}$ and the other parameters are chosen the same as the first test. The simulation results are shown in figure (A.11)-(A.12).

From these figures, we can show the robustness performance of the proposed soft sensor against perturbations.

A.5 Conclusion

The ultimate aim of this work is to control the outlet temperature of parabolic solar collector, which is governed by an inhomogeneous first order hyperbolic PDE. This aim is reached thanks to the proposed modeling approach which helped us to reduce the PDE model complexity by providing an equivalent uncertain ODE model. Thereafter, an elegant observer-based control scheme is introduced. Both of the proposed controller and observer are synthesized based on the uncertain ODE model. Many strength properties of the proposed method are worth to be pointed out. Due to the truncation error consideration, we are not obliged to choose small value of Δx . As a matter of fact, the dimension of the equivalent ODE model will be relatively less than before. In fact, the dimension of the proposed observer-based control scheme will be also less than before, which leads to a reduced computational cost. However, we must be careful in the choice of the tuning parameters. Furthermore, the proposed method can be applied to other classes of PDE models.

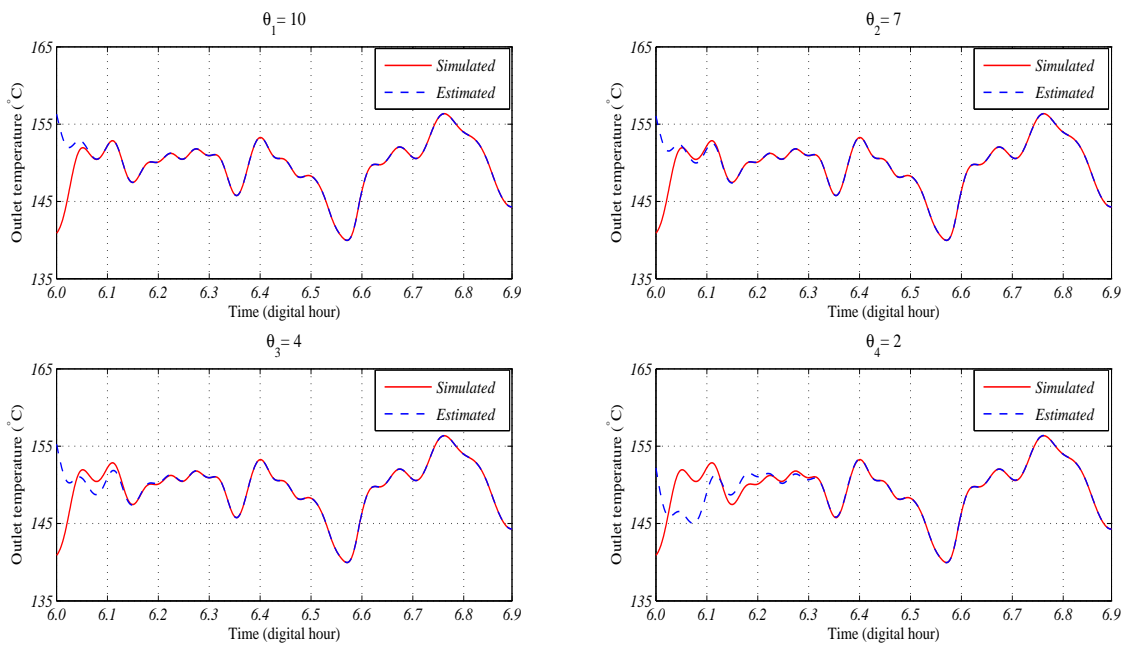


Figure A.7: Influence of θ on the estimation of the outlet temperature

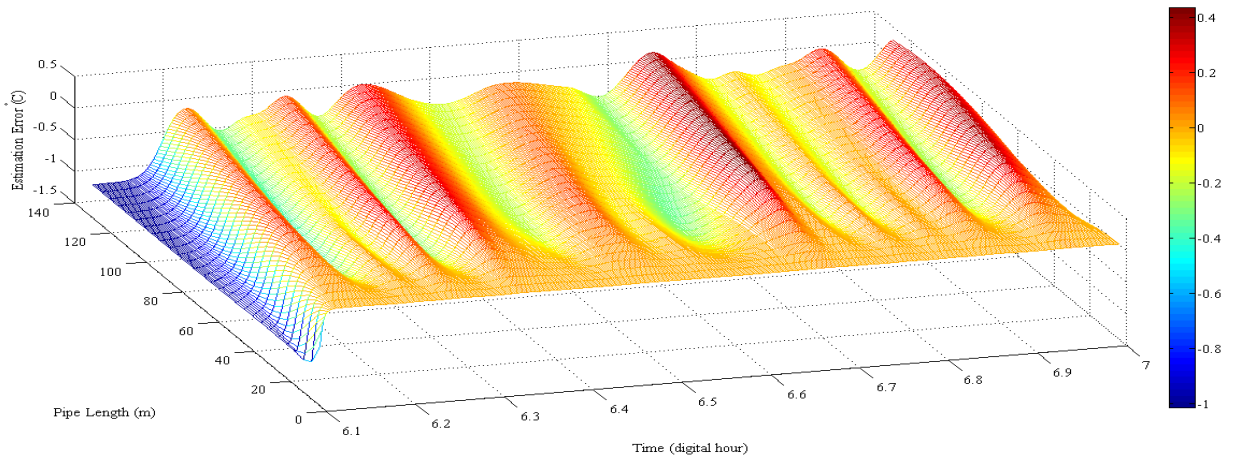


Figure A.8: Estimation error along the space horizon for $\theta = 10$ (with strong variation on T_{inlet})

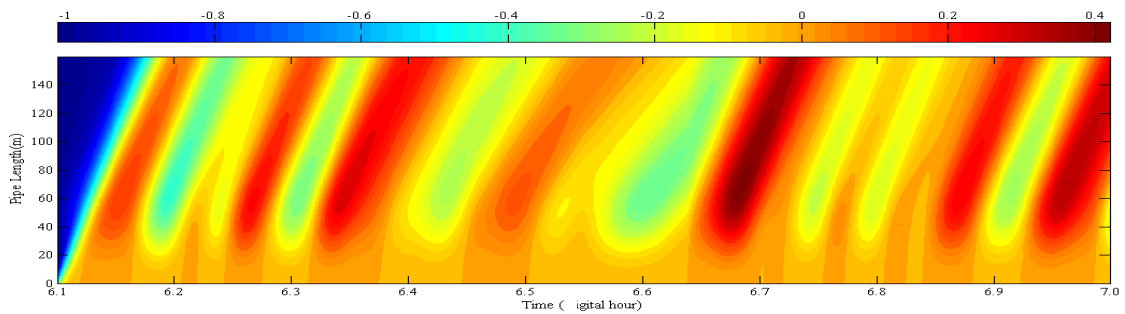


Figure A.9: Contour plot of the estimation error for $\theta = 10$

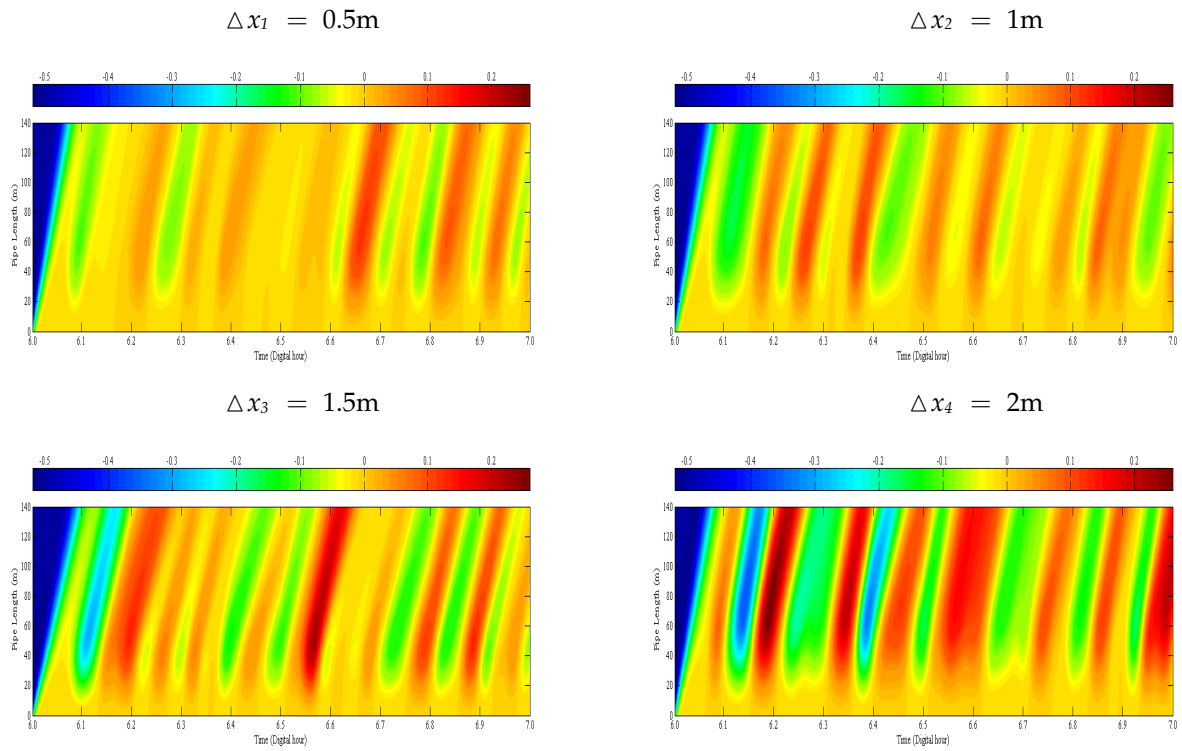


Figure A.10: Effect of the spatial step size on the estimation error

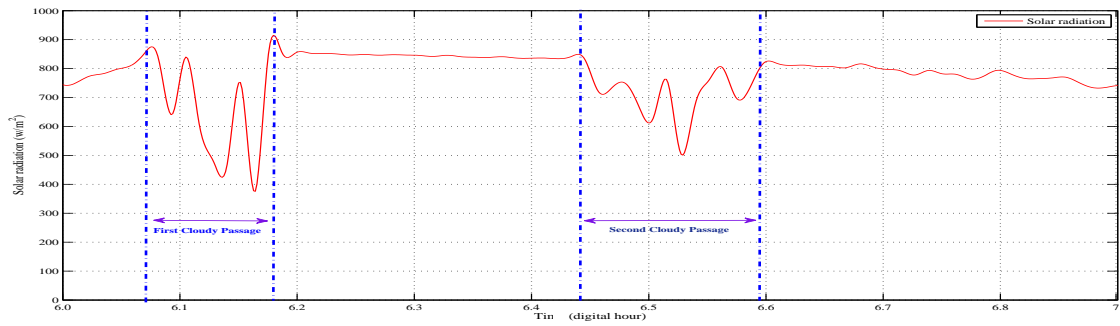


Figure A.11: Solar radiation profile

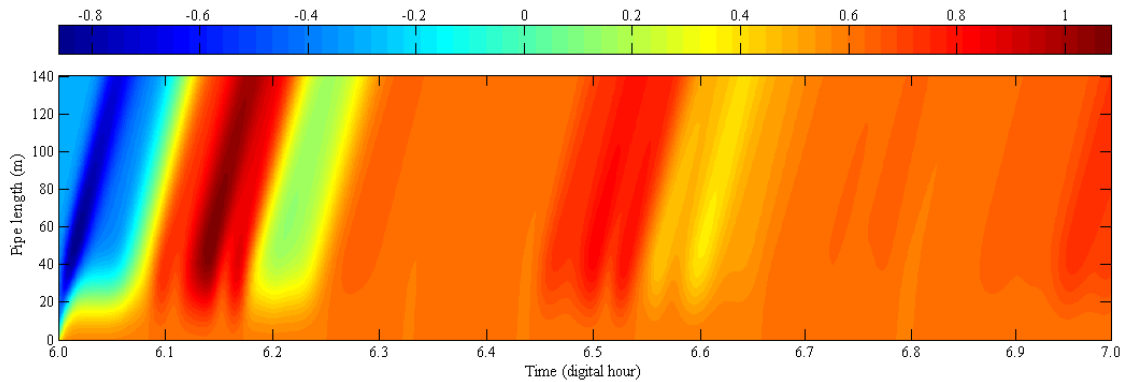


Figure A.12: Contour plot of the estimation error

ANNEXE B

ANNEXE B : PARAMÈTRES DU CONCENTRATEUR SOLAIRE CYLINDRO-PARABOLIQUE

<i>Symbol</i>	<i>Description</i>	<i>Value</i>
c_f	<i>specific heat capacity</i>	$1820 \text{ Jc}^{-1}\text{kg}^{-1}$
η	<i>mirror optical aperture</i>	1.83 m
ρ_f	<i>density</i>	903 kgm^{-3}
ν_0	<i>mirror optical efficiency</i>	73%
l	<i>pipe length</i>	142 m
s_f	<i>cross sectional area</i>	0.0006 m^2

Tableau B.1: Paramètres du concentrateur solaire cylindro-parabolique

ANNEXE C

ANNEXE C : LISTE DES PUBLICATIONS DE L'AUTEUR

- **C.A Mosbah**, M Tadjine, A Rebai, M.S Boucherit, Design of a soft sensor for the estimation of oil temperature in Parabolic Solar Collector, Flow Measurement and Instrumentation 53 (2017) 326-334.
- **C.A Mosbah**, M Tadjine, M Chakir, M.S Boucherit, On The Control Of Parabolic Solar Collector : The Zipper Approach, International Journal of Renewable Energy Research (IJRER), 6(3)(2016), pp. 1100-1108 .
- **C.A Mosbah**, M Tadjine, M Chakir, M.S Boucherit, The Zipper : A Lyapunov Control Design for Parabolic Solar Collector, in : Control Applications (CCA), 2016 IEEE Conference on, IEEE, 2016, pp. 279-284.
- **C.A Mosbah**, M Tadjine, M.S Boucherit, A Software Simulator For Solar Power Plant Based On Parabolic Solar Collector, Conférence Nationale sur les CFD et la Technologie, Algiers, 2016.
- **C.A Mosbah**, M Tadjine, M.S Boucherit, On The Control of Solar Power Plant : A Software Simulator, Congrès Annuel sur les Sciences & Technologies Appliquées (CASTA'2016), Boumerdes, 2016.
- **C.A Mosbah**, M. Tadjine, M.S Boucherit, High gain observer for a class of hyperbolic PDE with application to Parabolic Solar Collector, in : Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2015 16th International Conference on, IEEE, 2015, pp. 839-843.
- **C.A Mosbah**, M. Tadjine, M.S Boucherit, Min-max Lyapunov control for a class of hyperbolic PDE with Application to Parabolic Solar Collector, in : Sciences

and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2015
16th International Conference on, IEEE, 2015, pp. 689-693.

- [1] D. Bleeker, G. Csordas, Basic partial differential equations, CRC Press, 1992.
- [2] S. J. Farlow, Partial differential equations for scientists and engineers, Courier Corporation, 1993.
- [3] F. John, Partial differential equations, volume 1 of applied mathematical sciences (1982).
- [4] L. Lam, Nonlinear physics for beginners : fractals, chaos, solitons, pattern formation, cellular automata and complex systems, World Scientific Publishing Co Inc, 1998.
- [5] J. D. Logan, An introduction to nonlinear partial differential equations, Vol. 89, John Wiley & Sons, 2008.
- [6] A. Wazwaz, Partial differential equations : Methods and applications, balkema, leiden,(2002).
- [7] A.-M. Wazwaz, Partial differential equations and solitary waves theory, Springer Science & Business Media, 2010.
- [8] A. Bensoussan, G. Da Prato, M. C. Delfour, S. Mitter, Representation and control of infinite dimensional systems, Springer Science & Business Media, 2007.
- [9] R. F. Curtain, H. Zwart, An introduction to infinite-dimensional linear systems theory, Vol. 21, Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] O. M. Aamo, M. Krstic, Flow control by feedback : stabilization and mixing, Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] P. D. Christofides, Nonlinear and robust control of PDE systems : Methods and applications to transport-reaction processes, Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] M. D. Gunzburger, Perspectives in flow control and optimization, SIAM, 2002.
- [13] M. Krstic, A. Smyshlyaev, Backstepping boundary control for first-order hyperbolic pdes and application to systems with actuator and sensor delays, Systems & Control Letters 57 (9) (2008) 750–758.

- [14] C. Mourad, *Analyse fonctionnelle : équations aux dérivées partielles, cours et exercices corrigés* (2013).
- [15] E. Goncalves, *Résolution numérique, discrétisation des edp et edo*, Institut national polytechnique de Grenoble.
- [16] C. A. **Mosbah**, M. Tadjine, M. Chakir, M. S. Boucherit, The zipper : A lyapunov control design for parabolic solar collector, in : *Control Applications (CCA), 2016 IEEE Conference on, IEEE, 2016*, pp. 279–284.
- [17] K. S. Tey, S. Mekhilef, Modified incremental conductance algorithm for photovoltaic system under partial shading conditions and load variation, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 61 (10) (2014) 5384–5392.
- [18] C. A. **Mosbah**, M. Tadjine, M. Chakir, M. S. Boucherit, On the control of parabolic solar collector : The zipper approach, *International Journal of Renewable Energy Research (IJRER)* 6 (3) (2016) 1100–1108.
- [19] B. Khoukhi, *Modélisation et commande dun système solaire thermique-dessalement eau de mer*, Ecole Nationale Polytechnique d’Alger, 2013.
- [20] C. A. **Mosbah**, M. Tadjine, M. S. Boucherit, Min-max lyapunov control for a class of hyperbolic pde with application to parabolic solar collector, in : *Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2015 16th International Conference on, IEEE, 2015*, pp. 689–693.
- [21] J. M. Lemos, R. Neves-Silva, J. M. Igreja, *Adaptive Control of Solar Energy Collector Systems*, Springer Verlag, 2014.
- [22] E. F. Camacho, M. Berengul, F. R. Rubio, D. Martinez, *Control of solar Energy systems*, Springer Verlag, 2012.
- [23] C. A. **Mosbah**, M. Tadjine, M. S. Boucherit, A software simulator for solar power plant based on parabolic solar collector, in : *Conférence Nationale sur les CFD et la Technologie, 2016*.
- [24] C. A. **Mosbah**, M. Tadjine, M. S. Boucherit, On the control of solar power plant : A software simulator, in : *Congrès Annuel sur les Sciences & Technologies Appliquées (CASTA), 2016*.
- [25] C. M. Cirre, M. Berenguel, L. Valenzuela, E. F. Camacho, Feedback linearization control for a distributed solar collector field, *Control Engineering Practice* 15 (12) (2007) 1533 – 1544.
- [26] E. Camacho, F. Rubio, M. Berenguel, L. Valenzuela, A survey on control schemes for distributed solar collector fields. part i : Modeling and basic control approaches, *Solar Energy* 81 (10) (2007) 1240 – 1251.
- [27] T. A. Johansen, C. Storaas, Energy-based control of a distributed solar collector field, *Automatica* 38 (7) (2002) 1191 – 1199.

- [28] S. Elmetennani, T. Laleg-Kirati, Fuzzy universal model approximator for distributed solar collector field control, in : Control (CONTROL), 2014 UKACC International Conference on, 2014, pp. 203–208.
- [29] S. Elmetennani, T. M. Laleg-Kirati, New fuzzy approximate model for indirect adaptive control of distributed solar collectors, in : Evolving and Adaptive Intelligent Systems (EAIS), 2014 IEEE Conference on, 2014, pp. 1–7.
- [30] A. Gallego, F. Fele, E. Camacho, L. Yebra, Observer-based model predictive control of a parabolic-trough field, *Solar Energy* 97 (2013) 426 – 435.
- [31] J.-W. Wang, H.-N. Wu, H.-X. Li, Distributed fuzzy control design of nonlinear hyperbolic pde systems with application to nonisothermal plug-flow reactor, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 19 (3) (2011) 514–526.
- [32] H.-N. Wu, J.-W. Wang, H.-X. Li, Exponential stabilization for a class of nonlinear parabolic pde systems via fuzzy control approach, *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 20 (2) (2012) 318–329.
- [33] I. T. Ziga, I. Queinnec, A. V. Wouwer, Observer-based output feedback linearizing control strategy for a nitrification-denitrification biofilter, *Chemical Engineering Journal* 191 (2012) 243 – 255.
- [34] J. L. R.N Silva, L.M. Rato, Observer based nonuniform sampling predictive controller for a solar plant, 15 th Triennial World Congress, Barcelona, Spain.
- [35] I. Aksikas, A. Fuxman, J. F. Forbes, J. J. Winkin, {LQ} control design of a class of hyperbolic {PDE} systems : Application to fixed-bed reactor, *Automatica* 45 (6) (2009) 1542 – 1548.
- [36] I. Aksikas, J. F. Forbes, On asymptotic stability of semi-linear distributed parameter dissipative systems, *Automatica* 46 (6) (2010) 1042 – 1046.
- [37] A. A. Moghadam, I. Aksikas, S. Djurjivic, J. F. Forbes, Boundary optimal (lq) control of coupled hyperbolic {PDEs} and {ODEs}, *Automatica* 49 (2) (2013) 526 – 533.
- [38] J. Richalet, A. Rault, J. Testud, J. Papon, Model predictive heuristic control : Applications to industrial processes, *Automatica* 14 (5) (1978) 413–428.
- [39] D. W. Clarke, C. Mohtadi, P. Tuffs, Generalized predictive control part i. the basic algorithm, *Automatica* 23 (2) (1987) 137–148.
- [40] E. F. Camacho, C. B. Alba, Model predictive control (2013).
- [41] S. Elmetennani, T. M. Laleg-Kirati, Bilinear approximate model-based robust lyapunov control for parabolic distributed collectors, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- [42] S. Elmetennani, T. M. L. Kirati, Output feedback control of heat transport mechanisms in parabolic distributed solar collectors, in : American Control Conference (ACC), 2016, IEEE, 2016, pp. 4338–4343.

- [43] S. Mechhoud, T.-M. Laleg-Kirati, Observer-based bilinear control of first-order hyperbolic pdes : Application to the solar collector, in : Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on, IEEE, 2015, pp. 4909–4914.
- [44] L. Mohammadi, I. Aksikas, J. Forbes, Optimal control of a time-varying catalytic fixed bed reactor with catalyst deactivation, in : American Control Conference, 2009. ACC '09., 2009, pp. 2470–2475.
- [45] Y.-T. C. Bor-Sen Chen, Fuzzy state-space modeling and robust observer-based control design for nonlinear partial differential systems, IEEE TRANSACTION ON FUZZY SYSTEMS.
- [46] S. Elmetennani, T. Laleg-Kirati, Bilinear reduced order approximate model of parabolic distributed solar collectors, Solar Energy 131 (2016) 71 – 80.
- [47] H.-N. Wu, H.-X. Li, A multiobjective optimization based fuzzy control for nonlinear spatially distributed processes with application to a catalytic rod, Industrial Informatics, IEEE Transactions on 8 (4) (2012) 860–868.
- [48] I. Aksikas, J. Winkin, D. Dochain, Optimal lq-feedback regulation of a nonisothermal plug flow reactor model by spectral factorization, Automatic Control, IEEE Transactions on 52 (7) (2007) 1179–1193.
- [49] M. Zerrougui, Observation et commande des systemes singuliers non linéaires, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I (2011).
- [50] R. Silva, L. Rato, J. Lemos, Time scaling internal state predictive control of a solar plant, Control Engineering Practice 11 (12) (2003) 1459 – 1467, award winning applications-2002 {IFAC} World Congress.
- [51] D. Dochain, J. Babary, N. Tali-Maamar, Modelling and adaptive control of nonlinear distributed parameter bioreactors via orthogonal collocation, Automatica 28 (5) (1992) 873 – 883.
- [52] J. Igreja, J. Lemos, S. Costa, Robust pointwise min-norm control of distributed systems with fluid flow, in : Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on, 2011, pp. 2662–2667.
- [53] C.-Z. Xu, G. Sallet, Exponential stability and transfer functions of processes governed by symmetric hyperbolic systems, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations 7 (2002) 421–442.
- [54] S. Elmetennani, T. M. Laleg-Kirati, Nonlinear observer design for a first order hyperbolic pde : application to the estimation of the temperature in parabolic solar collectors, IFAC-PapersOnLine 49 (8) (2016) 199–203.
- [55] I. k. Jean-Paul Gauthier, Detministic observation theory and application, Cambridge University Press.

-
- [56] M. Farza, M. M'Saad, L. Rossignol, Observer design for a class of {MIMO} nonlinear systems, *Automatica* 40 (1) (2004) 135 – 143.
- [57] C. A. **Mosbah**, M. Tadjine, A. Rebai, M. S. Boucherit, Design of a soft sensor for the estimation of oil temperature in parabolic solar collector, *Flow Measurement and Instrumentation* 53 (2017) 326–334.
- [58] J. G. Hassan K Khalil, H. khalil, *nonlinear systems*, prentice hall ptr, 2002.
- [59] I. Aksikas, *Analysis and lq-optimal control of infinite-dimensional semilinear systems : Application to a plug flow reactor*, Ph.D. thesis, Université Catholique De Louvain (2005).
- [60] M. Krstic, A. Smyshlyaev, *Boundary control of pdes : A course on backstepping designs* (2008).
- [61] J. Igreja, J. Lemos, R. Silva, Adaptive receding horizon control of a distributed collector solar field, in : *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on, 2005*, pp. 1282–1287.
- [62] A. Gallego, E. Camacho, Estimation of effective solar irradiation using an unscented kalman filter in a parabolic-trough field, *Solar Energy* 86 (12) (2012) 3512 – 3518, solar Resources.
- [63] D. Astolfi, L. Marconi, A high-gain nonlinear observer with limited gain power, *IEEE Transactions on Automatic Control* 60 (11) (2015) 3059–3064.
- [64] C. A. **Mosbah**, M. Tadjine, M. S. Boucherit, High gain observer for a class of hyperbolic pde with application to parabolic solar collector, in : *Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), 2015 16th International Conference on, IEEE, 2015*, pp. 839–843.
- [65] J.-W. Wang, H.-N. Wu, Guaranteed cost distributed fuzzy control design for a class of nonlinear first-order hyperbolic pde systems, in : *American Control Conference (ACC), 2012, 2012*, pp. 4375–4380.
- [66] L. Lefèvre, D. Dochain, S. F. de Azevedo, A. Magnus, Optimal selection of orthogonal polynomials applied to the integration of chemical reactor equations by collocation methods, *Computers Chemical Engineering* 24 (12) (2000) 2571 – 2588.