

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Electronique

Laboratoire Signal et Communications



Mémoire de projet de fin d'études pour l'obtention
du diplôme d'ingénieur d'état en électronique

Thème

**Calibration des RADARs MIMO FMCW
pour les Algorithmes Super-Résolution**

Youval KLIOUI

Sous la direction de
et

M. Mustapha DJEDDOU MCA, ENP.
M. Marc BAUDUIN Chercheur, IMEC.

Présenté et soutenu publiquement le 29/09/2022

Composition du Jury:

Président	M. Adel BELOUHRANI	Professeur ENP.
Promoteur	M. Mustapha DJEDDOU	MCA ENP.
Promoteur	M. Marc BAUDUIN	Chercheur IMEC.
Examineur	M. Mourad ADNANE	Professeur ENP.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Electronique

Laboratoire Signal et Communications



Mémoire de projet de fin d'études pour l'obtention
du diplôme d'ingénieur d'état en électronique

Thème

**Calibration des RADARs MIMO FMCW
pour les Algorithmes Super-Résolution**

Youval KLIOUI

Sous la direction de
et

M. Mustapha DJEDDOU MCA, ENP.
M. Marc BAUDUIN Chercheur, IMEC.

Présenté et soutenu publiquement le 29/09/2022

Composition du Jury:

Président	M. Adel BELOUHRANI	Professeur ENP.
Promoteur	M. Mustapha DJEDDOU	MCA ENP.
Promoteur	M. Marc BAUDUIN	Chercheur IMEC.
Examineur	M. Mourad ADNANE	Professeur ENP.

ملخص:

يتم أولاً استعراض مبدأ تشغيل رادار FMCW MIMO ، ثم تتم مناقشة خوارزمية الاستبانة الفائقة MUSIC لتقدير زاوية الوصول. بعد ذلك ، تتم مناقشة مسألة التماسك، النابعة من حقيقة أن الأهداف تقع على نفس المسافة من الرادار ولكن بزوايا وصول مختلفة ، إلى جانب تأثيرها المهيمن على أداء خوارزمية MUSIC. ثم تتم مراجعة طريقة التنعيم المكاني كحل لمشكلة التماسك هذه. أخيراً ، تمت دراسة تأثير الكسب وعدم تطابق الطور على MUSIC ، ونقدم أيضاً التوصيف التجريبي لعدم تطابق الكسب / الطور لـ AWR2243 Cascade من Texas Instruments ، وهو رادار FMCW MIMO مع مصفوفة من 16 عنصر Rx و 12 عنصر Tx . سنرى أنه يمكن نمذجة الكسب وعدم التطابق في الطور كتغيرات عشوائية موزعة بشكل طبيعي. ثم تتم مناقشة طريقة المعايرة للتعويض عن هذه العيوب في الكسب والمرحلة ، ثم يتم تقديم سيناريو يجمع بين كل من التماسك وعدم تطابق الكسب / الطور مع ثلاثة أهداف متقاربة عند 5 و 6 و 10 درجة لمقارنة أداء MUSIC مقابل FFT لحالة مصفوفة تتكون من 82 عنصراً.

الكلمات الرئيسية: RADAR ، FMCW ، MUSIC ، AoA ، الهوائيات ، السيارات ، MIMO ، المعايرة.

Summary:

This thesis deals with a class of algorithms for estimating the angular position of targets for automotive applications called super-resolution in the context of FMCW radars. A review of the FMCW MIMO Radar operating principle is first given, then the super-resolution algorithm MUSIC for angular of arrival estimation is discussed. Next, the issue of coherence, stemming from the fact that targets located at the same distance from the radar but at different angle of arrivals, is discussed along with its degrading effect on the performance of the MUSIC algorithm. The spatial smoothing method as a solution to this coherence issue is then reviewed. Finally, the gain and phase mismatch effect on MUSIC is studied, we also present the experimental characterization of the gain/phase mismatch of the AWR2243 Cascade from Texas Instruments, which is a MIMO FMCW radar with an array of 16 Rx elements and 12 Tx elements. We will see that the gain and phase mismatches can be modeled as normally distributed random variables. The calibration method to compensate for these imperfections in gain and phase is then discussed, and a scenario combining both coherence and gain/phase mismatch with three closely spaced targets at 5, 6 and 10 deg is then presented to compare the performance of MUSIC against an FFT for the case of an array with 82 elements.

Keywords: RADAR, FMCW, MUSIC, AoA, Antennas, Automotive, MIMO, Calibration.

Résumé:

Ce mémoire traite d'une classe d'algorithmes d'estimation de la position angulaire des cibles pour des applications automobiles appelle super-resolution dans le contexte des radars FMCW. Le principe de fonctionnement du radar MIMO FMCW est d'abord revu, puis l'algorithme de super-résolution MUSIC pour l'estimation de l'angle d'arrivée est abordé. Ensuite, le problème de la cohérence entre les signaux source, provenant du fait que les cibles sont situées à la même distance du radar mais à des angles d'arrivée différents, est discuté ainsi que son effet dégradant sur les performances de l'algorithme MUSIC. La méthode du spatial smoothing comme solution à ce problème de cohérence est ensuite examinée. Enfin, nous étudions l'effet d'imperfections en gain et en phase du réseau d'antennes, le gain mismatch et le phase mismatch, sur les performances de MUSIC. Nous présentons également la caractérisation expérimentale du gain/phase mismatch du radar cascade AWR2243 de Texas Instruments, qui est un radar MIMO FMCW avec un réseau de 16 éléments Rx et 12 éléments Tx. Nous verrons que ces imperfections en gain et en phase peuvent être modélisés comme des variables aléatoires normalement distribuées. La méthode de calibration pour compenser ces imperfections est ensuite discutée, et un scénario combinant à la fois la cohérence et le gain/phase mismatch avec trois cibles situées à 5, 6 et 10 deg est ensuite présenté pour comparer les performances de MUSIC par rapport à une FFT pour le cas d'un réseau de 82 éléments.

Mots clefs: RADAR, FMCW, MUSIC, Antennes, MIMO, Calibration, AoA.

Remerciements

Je souhaite remercier M. Bauduin Marc d'IMEC pour avoir fourni les mesures expérimentales, M. Djeddou Mustapha pour avoir accepté d'agir en tant que promoteur et ainsi que les membres du jury pour leur suggestions et remarques sur ce travail.

Table des matières

Liste des tableaux	5
Liste des figures	6
Liste des abréviations	8
Introduction	9
1 Concepts généraux liés aux radars MIMO FMCW	12
1.1 Radar SISO FMCW	12
1.2 Radar SIMO FMCW	17
1.3 Radar MIMO FMCW	21
2 Algorithmes d'estimation de l'angle d'arrivée	30
2.1 L'Algorithme MUSIC	30
3 Sources cohérentes et décorrélation avec le spatial smoothing	34
3.1 Sources cohérentes et MUSIC	34
3.2 Le spatial smoothing	37
4 Gain et phase mismatch et la calibration	44
4.1 Gain et phase mismatch	44
4.2 Caractérisation expérimentale du gain et phase mismatch	46
4.3 Influence du gain et phase mismatch sur MUSIC et calibration	52
Conclusion	57
Bibliographie	58
Annexe	60

Liste des tableaux

1.1	Valeurs typiques des paramètres des chirps emits.	16
1.2	Dimensions du réseau d'antennes Tx	23

Liste des figures

A.1	Différents capteurs embarqués sur un véhicule automotif	9
A.2	Radar vs Lidar vs Camera	10
1.1	Principe de la modulation fréquentielle linéaire.	13
1.2	Paramètres configurables du chirp émit par le radar,	14
1.3	Exemple d'une implémentation du radar FMCW.	15
1.4	FFT (en dB) du signal démodulé en fonction de la distance (en mètres).	16
1.5	Logiciel de configuration du radar TI.	17
1.6	Un radar FMCW avec une antenne Tx et trois antennes Rx.	18
1.7	FFT (en dB) de $\mathbf{y}_{IF}(t)$ définie en Eq. 2.19, avec $N_R = 20$, $\theta_1 = 30$ deg, et $\theta_2 = 54$ deg.	22
1.8	Block fonctionnel d'un radar MIMO avec 4 Rx et 3 Tx.	23
1.9	Photo de front du radar MIMO employé.	24
1.10	Réseau d'antennes correspondant au radar employé.	25
1.11	Réseau d'antennes MIMO avec 3 antennes émettrices Tx et 3 antennes réceptrices Rx.	26
2.1	$P_{MUSIC}(\theta)$ en dB. Deux signaux arrivant des directions 30 deg et 54 deg.	32
2.2	$P_{MUSIC}(\theta)$ vs FFT en dB. Deux signaux arrivant des directions 30 deg et 54 deg.	33
3.1	$P_{MUSIC}(\theta)$ pour deux signaux cohérents arrivant des directions 30 deg et 54 deg sur un réseau de 20 éléments (SNR=20 dB).	36
3.2	Principe du Spatial Smoothing	38
3.3	$ \rho $ en fonction du nombre de sous-réseaux et de la séparation entre les angles d'arrivée $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$	42
3.4	$P_{MUSIC}(\theta)$ après application du spatial smoothing avec $M = 20$, $L = 10$, $\theta_1 = 30$ deg, $\theta_2 = 54$ deg, et SNR=20 dB.	43
4.1	Dispositif expérimental de la mesure de l'angle d'arrivée.	46
4.2	FFT des mesures montrant la position angulaire de la cible.	47
4.3	Range profile montrant la position radiale de la cible	48
4.4	Pdf du gain mismatch \bar{G}	49

4.5	Pdf du phase mismatch $\bar{\phi}$	50
4.6	Évolution de $\bar{G}(\theta)$ en fonction de θ	51
4.7	Évolution de $\bar{\phi}(\theta)$ en fonction de θ	51
4.8	Effet des imperfections en gain et en phase sur le spectre de MUSIC définie en Eq. 2.11	53
4.9	Spectre de MUSIC pour trois cibles à la même portée de 2 mètres et à des angles de 5, 6, et 10.2 deg, avant la calibration et avant le spatial smoothing.	54
4.10	Spectre de MUSIC pour trois cibles à la même portée de 2 mètres et à des angles de 5, 6, et 10.2 deg, après la calibration avec $\mathbf{\Gamma}^{-1}(0)$ et avant le spatial smoothing.	55
4.11	Spectre de MUSIC pour trois cibles à la même portée de 2 mètres et à des angles de 5, 6, et 10.2 deg, après la calibration avec $\mathbf{\Gamma}^{-1}(0)$ et après le spatial smoothing.	55
4.12	Comparaison de la résolution de MUSIC vs une FFT pour le réseau de 82 éléments du radar AWR2243 après calibration et après spatial smoothing	56

Liste des abréviations

RADAR	Radio Detection And Ranging
LIDAR	Light Detection And Ranging
SISO	Single Input Single Output
FMCW	Frequency Modulated Continuous Wave
SIMO	Single Input Multiple Output
MIMO	Multiple Input Multiple Output
FFT	Fast Fourier Transform
IF	Intermediate Frequency
MUSIC	Multiple Signal Classification

Introduction

Dans le but d'arriver à des véhicules entièrement autonomes (voitures automobiles), les véhicules récents incorporent de plus en plus des capteurs comme le radar, le lidar, et des caméras permettant d'estimer plusieurs paramètres des objets se trouvant dans leur environnement immédiat [1] [2]. Ces paramètres étant la portée, la position angulaire ainsi que la vitesse des objets voisins (autres voitures, piétons, arbres, etc). A partir de ces données, l'ordinateur de bord prend alors des décisions pour assurer la navigation du véhicule. Selon l'environnement dans lequel se trouve le véhicule, certains capteurs

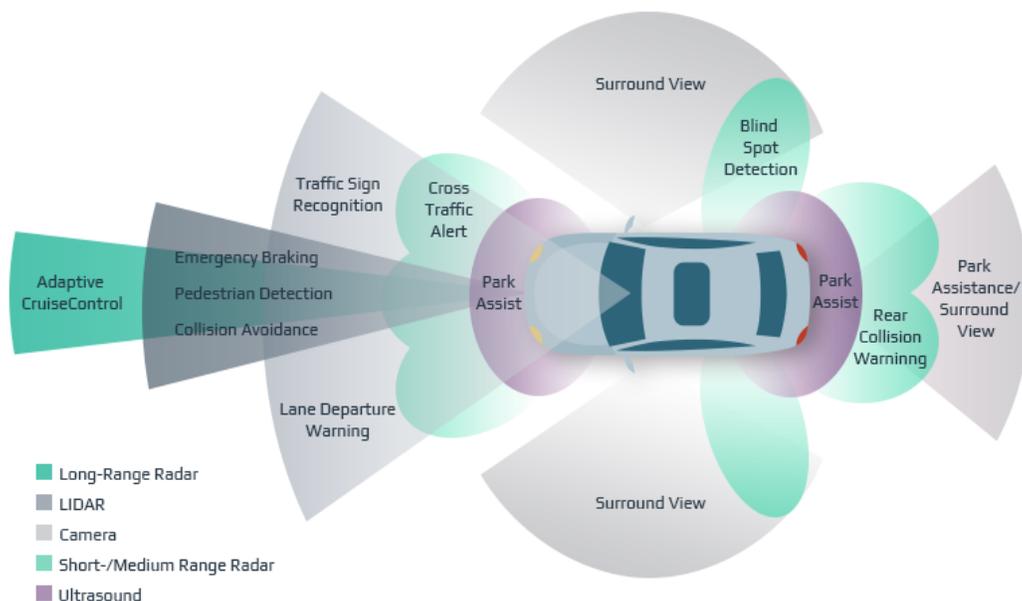


Figure A.1: Différents capteurs embarqués sur un véhicule automobile .

performer mieux que d'autres. Par exemple, dans des conditions météorologiques adverses (brouillard, tempête de sable, etc), le radar performe mieux que le lidar.

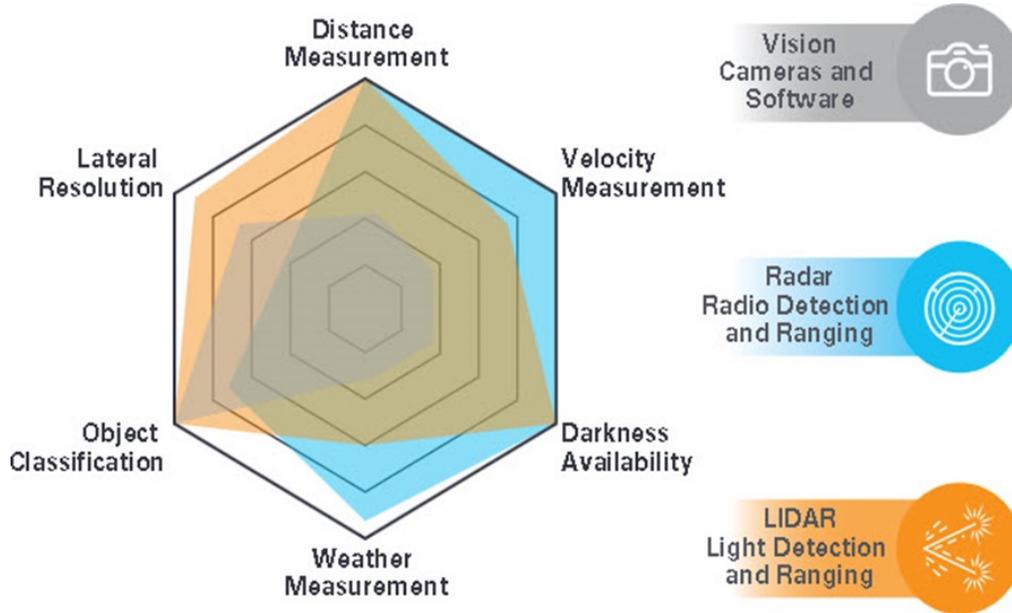


Figure A.2: Radar vs Lidar vs Camera

Nous allons nous focaliser dans ce mémoire uniquement sur les capteurs radars (Radio Detection and Ranging). De plus, nous allons traiter principalement des algorithmes super-résolution pour l'estimation des angles d'arrivée de cibles se situant dans le champ de vision du radar. Le mémoire est répartie en quatre chapitres.

Le second chapitre est une introduction au concept du radar FMCW, au réseau SIMO et au radar FMCW-MIMO. On y introduit plusieurs notions couramment employées dans la littérature des radars FMCW. Le chapitre introduit aussi la méthode d'estimation de la portée ainsi que de l'angle d'arrivée d'une cible à l'aide d'une FFT. Le troisième chapitre contient un bref rappel d'algèbre linéaire. Puis l'algorithme MUSIC est introduit et une comparaison est établie entre les performances de MUSIC et celui d'une FFT pour l'estimation de l'angle d'arrivée. Le quatrième chapitre traite du problème de cohérence entre les signaux sources. Nous noterons par la suite l'effet détérioratif qu'a cette cohérence sur les performances de l'algorithme MUSIC. La méthode du spatial smoothing est ensuite introduite comme solution à ce problème. Le cinquième chapitre traite du problème d'imperfections en gain et en phase dont souffrent les réseaux d'antennes de manière générale. Nous allons aussi établir l'effet qu'ont ces imperfections sur les performances de l'algorithme MUSIC. La méthode de calibration est enfin introduite comme solution pour réduire l'effet des imperfections du réseau sur l'estimation des angles d'arrivées des cibles.

Le mémoire s'achève avec une conclusion générale et quelques axes de recherche potentiels futur qui pourraient être poursuivis.

Chapitre 1

Concepts généraux liés aux radars MIMO FMCW

Le radar SISO FMCW ayant une seule antenne Tx et une seule antenne Rx permet d'estimer *uniquement* la portée de la cible. Pour pouvoir estimer l'angle d'arrivée, nous allons rajouter des antennes Rx supplémentaires au radar SISO pour construire ce qu'on appelle le radar SIMO. Le radar SIMO n'offre malheureusement pas une résolution angulaire suffisante. Pour remédier à ce problème, des antennes émettrices Tx supplémentaires sont rajoutées pour construire le radar MIMO. Le radar MIMO avec N_R antennes réceptrices et N_T antennes émettrices permet d'obtenir une résolution angulaire de l'ordre de $2/N_R N_T$ rad.

1.1 Radar SISO FMCW

Soit une cible se trouvant à une distance R de notre radar. Pour estimer R l'antenne émettrice du radar FMCW (Frequency Modulated Continuous Wave) va émettre un signal $y_T(t)$ ayant une fréquence $\omega(t)$ qui augmente linéairement avec le temps [3], i.e.,

$$\omega(t) = St + \omega_0 \quad (1.1)$$

où S est une constante, en rad/s. ω_0 est la fréquence initiale, et $0 < t < T_c$.

Par définition

$$S \triangleq \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{T_c} \triangleq \frac{2\pi B}{T_c} \quad (1.2)$$

Pour les radars travaillant en fréquences millimétrique, $f_0 = \omega_0/2\pi = 77$ GHz,

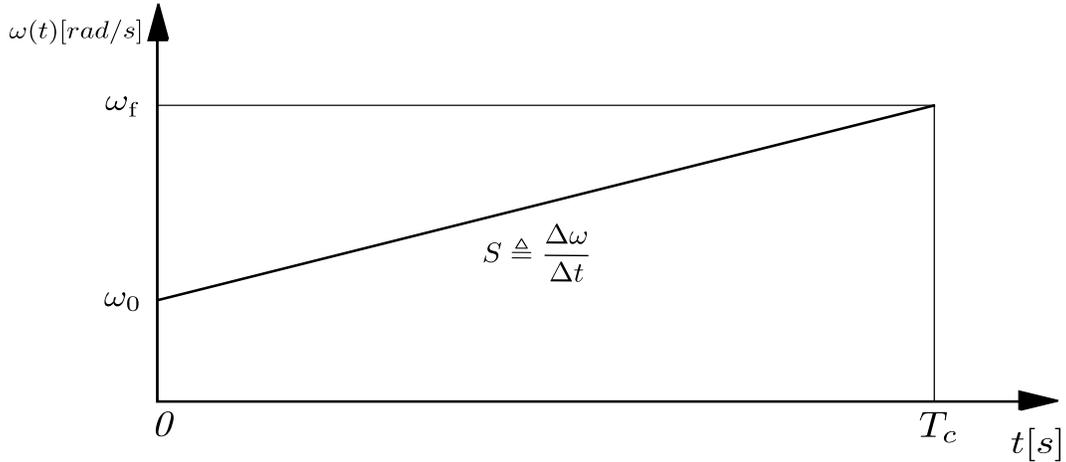


Figure 1.1: Principe de la modulation fréquentielle linéaire.

$B \approx 4$ GHz, et T_c est de l'ordre de $100 \mu\text{s}$. La phase sera donc donnée par

$$\phi(t) = \int_0^t \omega(u) du = \frac{1}{2} S t^2 + \omega_0 t + \phi_0. \quad (1.3)$$

où ϕ_0 est la phase initiale à $t = 0$.

Le signal transmis $y_T(t)$, aussi appelé un *chirp* en nomenclature radar, sera donc donné par [4]

$$y_T(t) = U \exp(j\phi(t)) = U \exp \left[j \left(\frac{1}{2} S t^2 + \omega_0 t + \phi_0 \right) \right] = A \exp \left[j \left(\frac{1}{2} S t^2 + \omega_0 t \right) \right] \quad (1.4)$$

Où U est une constante positive représentant la puissance du signal transmis, et $A = U \exp(j\phi_0)$. Ce signal va aller percuter la cible qui se trouve à une distance R , puis reviendra vers le radar après un délai total τ donné par

$$\tau = \frac{2R}{c} \quad (1.5)$$

avec $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Le signal reçu $y_R(t)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} y_R(t) &= A' y_T(t - \tau) = A' A \exp \left[j \left(\frac{1}{2} S (t - \tau)^2 + \omega_0 (t - \tau) \right) \right] \\ &\triangleq B \exp \left[j \left(\frac{1}{2} S (t - \tau)^2 + \omega_0 (t - \tau) \right) \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

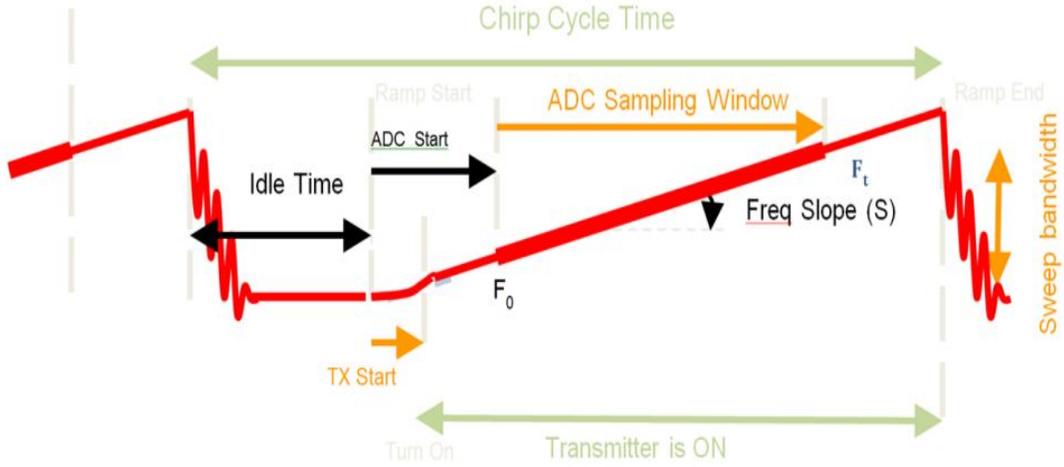


Figure 1.2: Paramètres configurables du chirp émit par le radar,

A' étant une constante complexe représentant l'atténuation du signal après propagation en aller et en retour, et dont la phase modélise une phase aléatoire qui s'ajoute à la phase du signal transmit $y_T(t)$ après percussion avec la cible.

En multipliant $y_R^*(t)$ par $y_T(t)$, où $*$ dénote le conjugué complexe, implémentant ainsi un filtre adapté, on obtient le signal démodulé

$$\begin{aligned}
 y_{IF}(t) &= y_R^*(t) \times y_T(t) = B^* \exp \left[j \left(-\frac{1}{2} S t^2 - \frac{1}{2} S (t - \tau)^2 + \omega_0 t - \omega_0 (t - \tau) \right) \right] \\
 &= B^* \exp \left[j \left(-\frac{1}{2} S \tau^2 + S \tau t + \omega_0 \tau \right) \right] \\
 &= C \exp (j S \tau t)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

avec $C = B^* \exp [j (-\frac{1}{2} S \tau^2 + \omega_0 \tau)]$ une constante complexe. Le signal démodulé, $y_{IF}(t)$, est donc une sinusoïde complexe de fréquence ω_{IF} avec

$$\omega_{IF} = S \tau. \tag{1.8}$$

La distance R peut être donc récupérée en prenant une FFT sur $y_{IF}(t)$ pour trouver ω_{IF} , et par la suite

$$\begin{aligned}
 \omega_{IF} &= S \tau = S \times \frac{2R}{c} \\
 \implies \boxed{R} &= c \frac{\omega_{IF}}{2S}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

La figure 1.3 montre une implémentation typique de ce type de radar [5]. Un signal ayant une fréquence augmentant linéairement dans le temps est généré par le synthétiseur de fréquence, et est ensuite amplifié par l'amplificateur de puissance pour être émis à travers l'antenne d'émission Tx. Ce même signal transmis, $y_T(t)$ est utilisé pour la démodulation dans le circuit de réception. Le circuit de réception/démodulation contient un amplificateur à faible bruit suivi de deux mixeurs qui servent à implémenter Eq. 1.7 (i.e. pour implémenter la multiplication de $y_T(t)$ par $y_R^*(t)$). La composante I (en phase) et Q (quadrature de phase) du signal démodulé $y_{IF}(t) = y_R^*(t) \times y_T(t)$ sont ensuite filtrées par un filtre passe bande puis échantillonnées.

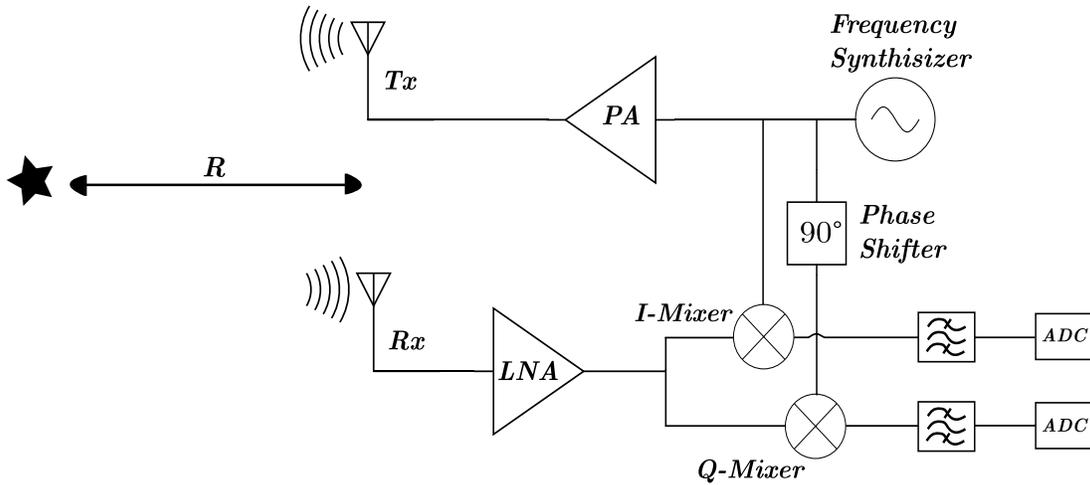


Figure 1.3: Exemple d'une implémentation du radar FMCW.

Exemple: Soit deux cibles se trouvant à une distance de 14 m et 7 m du radar. Pour estimer ces distances, le radar envoie un signal $y_T(t)$ ayant pour paramètres $\omega_0 = 2\pi \times f_0 = 2\pi \times (77 \text{ GHz})$ et $S = 2\pi(40 \text{ MHz/s})$. La figure 1.5 montre la FFT en dB du signal démodulé $y_{IF}(t)$. On voit bien deux pics correspondants aux distances 13.95 m et 7.02 m. Ce genre de courbe est appelée *Range Profile*.

Parameter	Units	LRR	MRR	SRR	USRR
Max unambiguous range	m	225	125	45	22.5
Sweep bandwidth	MHz	300	540	750	1500
Ramp slope	MHz/us	10	12	15	30
Inter-chirp duration	us	8	10	12	50
Number of chirps	-	256	128	128	128
Range resolution	m	0.50	0.28	0.20	0.1
Chirp duration	us	30	45	50	50
Max unambiguous relative velocity	kmph	92.28	63.75	56.56	35.3
Max beat frequency	MHz	15	10	4.5	4.5
ADC sampling rate (complex)	Msps	16.67	11.11	5.00	5.00
Number of samples per chirp		500	500	250	250
Range FFT size	-	512	512	256	256
Frame time (total)	ms	9.728	7.04	7.94	12.8
Frame time (active)	ms	7.68	5.76	6.4	6.4
Radar data memory required	KB	2048	1024	512	512

Table 1.1: Valeurs typiques des paramètres des chirps émis.

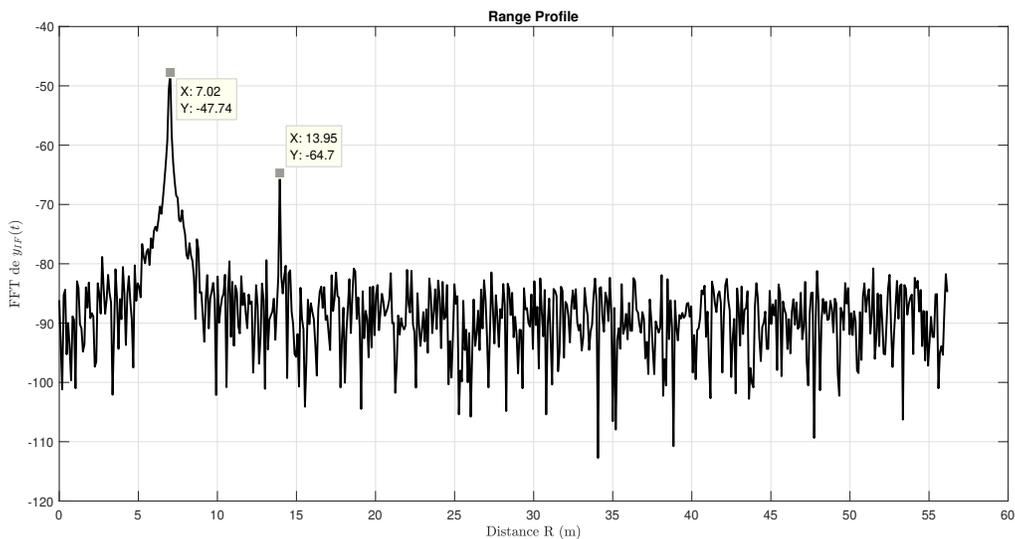


Figure 1.4: FFT (en dB) du signal démodulé en fonction de la distance (en mètres).

La figure 1.5 montre la GUI (Graphical User Interface) du logiciel permettant de configurer les paramètres du chirp émit par le radar, par exemple la fréquence initiale, la

pende S , la fréquence d'échantillonnage de l'ADC, etc.

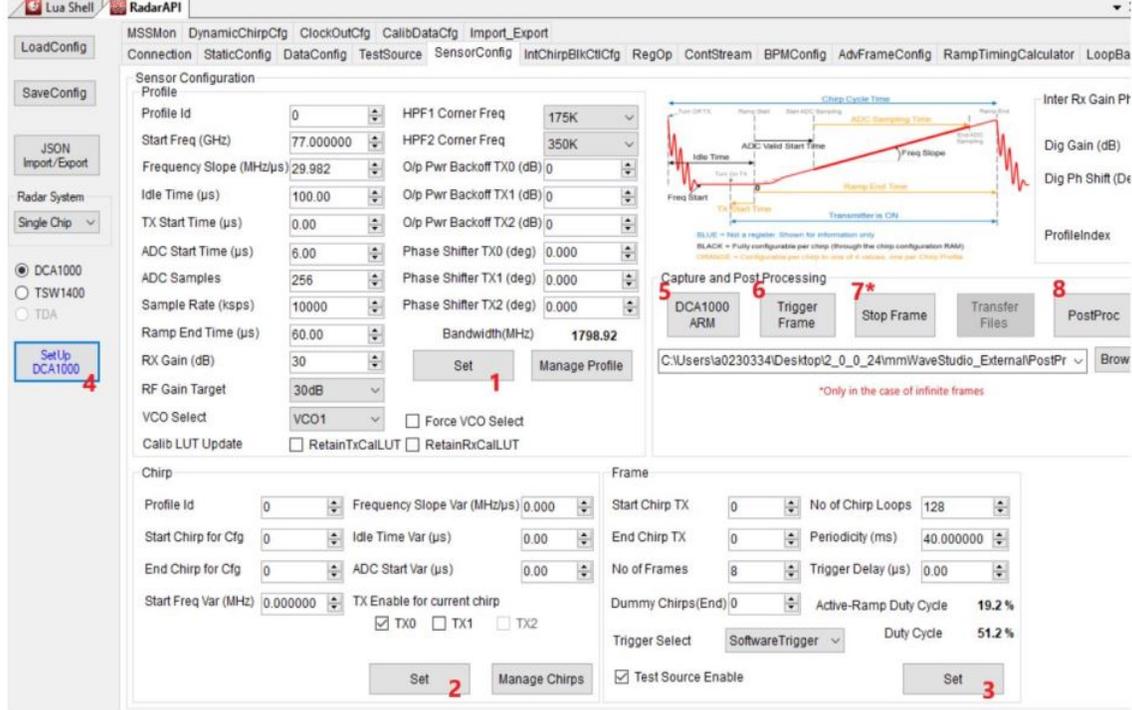


Figure 1.5: Logiciel de configuration du radar TI.

1.2 Radar SIMO FMCW

Si notre radar contient plus d'une antenne en réception, alors nous serons en mesure d'estimer la position angulaire de la cible par rapport au radar, en plus de sa distance.

En supposant que la cible se trouve en zone du champ lointain (i.e. $R \gg 2 \frac{D^2}{\lambda}$, où D est la plus grande dimension physique de l'antenne, et λ est la longueur d'onde à 77 GHz.), les antennes réceptrices vont toutes recevoir des front d'ondes qui sont parallèles entre eux comme en figure 1.6.

Toujours dans le contexte d'un radar FMCW, le signal démodulé sur l'antenne réceptrice i $y_{IF,i}(t)$, pour $i = 1, 2, 3, \dots$, s'écrit en reprenant Eq. 1.7

$$y_{IF,i}(t) = B^* \exp \left[j \left(-\frac{1}{2} S \tau_i^2 + S \tau_i t + \omega_0 \tau_i \right) \right] \quad (1.10)$$

Où τ_i est le délai pris par le signal émit pour aller de l'antenne Tx vers la cible, puis de la cible vers l'antenne $R_{X,i}$. Le signal arrivant sur l'antenne 2 va prendre exactement le

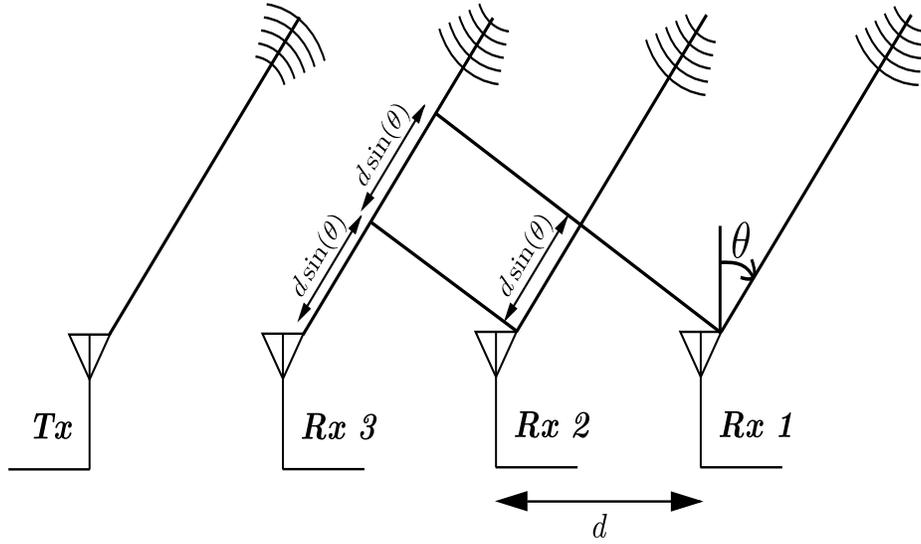


Figure 2.6: Un radar FMCW avec une antenne Tx et trois antennes Rx.

même délai que celui prit pour arriver vers l'antenne 1 en plus d'un délai supplémentaire $\Delta\tau$

$$\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau. \quad (1.11)$$

Le même raisonnement s'applique sur τ_3 et τ_2

$$\tau_3 = \tau_2 + \Delta\tau = (\tau_1 + \Delta\tau) + \Delta\tau = \tau_1 + 2\Delta\tau \quad (1.12)$$

Et de manière générale, pour la i ème antenne réceptrice

$$\tau_i = \tau_1 + (i - 1)\Delta\tau \quad (1.13)$$

En remplaçant Eq. 1.13 dans Eq. 1.10, on obtient

$$y_{IF,i}(t) = B^* \exp \left[j \left(-\frac{1}{2} S(\tau_1 + (i - 1)\Delta\tau)^2 + S(\tau_1 + (i - 1)\Delta\tau)t + \omega_0(\tau_1 + (i - 1)\Delta\tau) \right) \right] \quad (1.14)$$

A partir de la figure 1.7, nous avons $\Delta\tau = \frac{d}{c} \sin(\theta)$, où θ est l'angle d'arrivée du signal. Pour développer des approximations utiles pour plus-tard, prenons l'espacement entre

les antennes Rx comme étant $\frac{\lambda}{2}$, ce qui est très souvent le cas pour les applications automobiles.

Nous avons alors avec

$$\begin{aligned} S\Delta\tau^2 &= \frac{2\pi B}{T_c} \left(\frac{\lambda \sin(\theta)}{2c} \right)^2 \\ &= \frac{2\pi B}{4T_c} \times \frac{\sin^2(\theta)}{f_0^2} \approx 0, \end{aligned} \quad (1.15)$$

avec $f_0 = 77$ GHz. Nous avons aussi

$$S\tau_1\Delta\tau = \frac{2\pi B}{T_c} \left(\frac{2R}{c} \right) \left(\frac{\lambda \sin(\theta)}{2c} \right) \approx 0. \quad (1.16)$$

De plus, la durée du signal démodulé $y_{IF}(t)$ étant au plus T_C , la résolution fréquentielle de $y_{IF}(t)$ dans le domaine fréquentiel sera au minimum $\Delta f = \frac{1}{T_c}$. D'un autre côté, nous avons aussi

$$\begin{aligned} S\Delta\tau &= \frac{2\pi B}{T_c} \left(\frac{\lambda \sin(\theta)}{2c} \right) \\ &= \frac{\pi B \sin(\theta)}{f_0 T_c} \\ &= \frac{\pi B \sin(\theta)}{f_0} \Delta f < \Delta f \end{aligned} \quad (1.17)$$

En prenant en compte toutes ces approximations, et en utilisant $\omega_0 = 2\pi c/\lambda$ et $\Delta\tau = d \sin(\theta)/c$ (voir figure 1.6), Eq 1.14 devient donc

$$\begin{aligned} y_{IF,i}(t) &\approx B^* \exp \left[j \left(-\frac{1}{2} S\tau_1^2 + S\tau_1 t + \omega_0 (\tau_1 + (i-1)\Delta\tau) \right) \right] \\ &= D \exp \left(j 2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda} i \right) \exp(j S\tau_1 t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Où D est une constante complexe valant $D = B^* \exp \left[j \left(-\frac{1}{2} S\tau_1^2 + \omega_0 (\tau_1 - \Delta\tau) \right) \right]$.

Nous pouvons à présent construire un vecteur $\mathbf{y}_{IF}(t)$ de taille $N_R \times 1$, où N_R est le nombre d'antennes Rx, ayant pour i ème élément le signal reçu et démodulé $y_{IF,i}(t)$ sur l'antenne i , i.e.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{IF}(t) &= \begin{bmatrix} y_{IF,1}(t) \\ y_{IF,2}(t) \\ \vdots \\ y_{IF,N_R}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} D \exp\left(j2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda}\right) \exp(jS\tau_1 t) \\ D \exp\left(j2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda} 2\right) \exp(jS\tau_1 t) \\ \vdots \\ D \exp\left(j2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda} N_R\right) \exp(jS\tau_1 t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \exp\left(j2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda}\right) \\ \exp\left(j2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda} 2\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda} N_R\right) \end{bmatrix} D \exp(jS\tau_1 t) \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Et donc pour un $t = t_0$ donne, si on prend une FFT à travers les éléments du vecteur $\mathbf{y}_{IF}(t_0)$, nous allons obtenir un pic à la fréquence Ω donnée par

$$\Omega = 2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda} \implies \boxed{\theta = \text{asin}\left(\frac{\lambda \Omega}{2\pi d}\right)} \tag{1.20}$$

Quelle est la résolution angulaire $\Delta\theta$ obtenue avec N_R antennes en réception? Une fréquence Ω_1 correspondra à un angle d'arrivée θ_1 , et une autre fréquence Ω_2 correspondra à un angle d'arrivée θ_2 avec

$$\Omega_1 = 2\pi \frac{d \sin(\theta_1)}{\lambda} \tag{1.21}$$

$$\Omega_2 = 2\pi \frac{d \sin(\theta_2)}{\lambda}. \tag{1.22}$$

D'un autre cote, il y'a N_R échantillons de la sinusoïde $\exp(j\Omega n)$, donc la résolution fréquentielle

$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ va satisfaire [5]

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N_R} \tag{1.23}$$

Et en utilisant Eq. 2.21 et Eq. 2.22

$$2\pi \frac{d}{\lambda} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) = \frac{2\pi}{N_R} \quad (1.24)$$

En définissant la résolution et la moyenne angulaire $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ et $\bar{\theta} = (\theta_2 + \theta_1)/2$, respectivement, on peut réécrire Eq. 2.24 comme suit

$$4\pi \frac{d}{\lambda} \cos(\bar{\theta}) \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \frac{2\pi}{N_R} \quad (1.25)$$

Pour deux angles d'arrivée θ_2 et θ_1 suffisamment proches, i.e. pour $\theta_2 \approx \theta_1$, $\Delta\theta$ sera suffisamment petit et nous pourrons alors utiliser l'approximation $\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \approx \frac{\Delta\theta}{2}$, et Eq 1.25 devient

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\lambda}{d} \times \frac{1}{N_R} \times \frac{1}{\cos(\bar{\theta})}} \quad (1.26)$$

Pour un espacement d fixe, la résolution dépend de l'angle d'arrive θ , et elle est minimum pour $\theta = 0$. En prenant $d = \frac{\lambda}{2}$ et $\theta = 0$, Eq. 1.26 devient

$$\Delta\theta = \frac{2}{N_R} \quad \text{rad}, \quad (1.27)$$

i.e. la meilleure résolution possible pour un réseau ayant N_R antennes en réception est de $2/N_R$ rad. Par exemple, pour un réseau de 10 antennes, la résolution angulaire sera de 0.5 rad, ou 28.6 deg.

Si on souhaite augmenter la résolution angulaire de notre radar, il faut donc augmenter le nombre d'antennes réceptrices, ce qui est coûteux vu que chaque antenne réceptrice est suivit d'un circuit de démodulation, sans compter le coût en termes de surface occupée, de prix des composants, et de la puissance consommée.

Exemple: Soit deux cibles se trouvant aux angles 30 deg et 54 deg par rapport à la normale du radar. Le graphe en figure 2.7 montre la FFT prise sur le vecteur $\mathbf{y}_{IF}(t)$ définie en Eq. 1.19. La taille du réseau est de 20 éléments.

2.3 Radar MIMO FMCW

Comme vu précédemment, augmenter le nombre d'antennes réceptrices pour augmenter la résolution n'est pas très rentable comme solution. Les réseaux d'antennes MIMO permettent d'alléger ce problème en employant plusieurs antennes émettrices et réceptrices comme dans la figure 1.8. Le radar AWR2243 employé dans les mesures contient 4 cir-

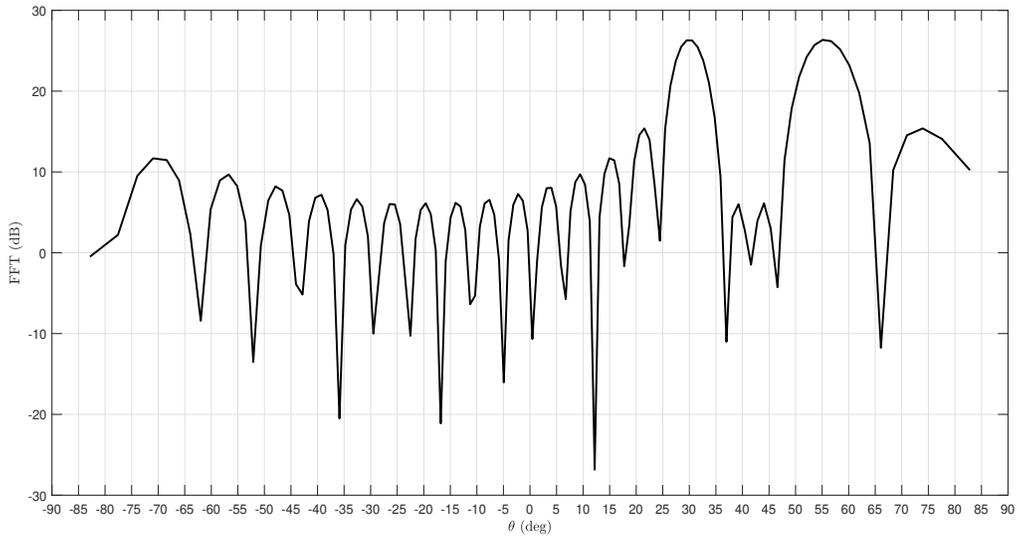


Figure 1.7: FFT (en dB) de $y_{IF}(t)$ définie en Eq. 2.19, avec $N_R = 20$, $\theta_1 = 30$ deg, et $\theta_2 = 54$ deg.

cuit intégré identiques (numéroté de 1 jusqu'à 4 en figure 1.9). Chacun de ces quartes est représenté par le bloc fonctionnel en figure 2.8. Et chacun de ces quartes circuits est relié à 3 antennes émettrices et 4 antennes réceptrices, et formant donc un réseau ayant $4 \times 3 = 12$ antennes (numéroté 9 en figure 2.9) Tx et $4 \times 4 = 16$ antennes Rx (numéroté 8 en figure 2.10). La figure 1.10 montre la construction géométrique des antennes Rx et Tx. Le même modèle d'antenne, de type microstripe, est utilisé pour le réseau Rx et le réseau Tx. L'espacement entre les éléments Rx est de $\lambda/2$, et de 2λ pour les éléments Tx, où λ est la longueur d'onde à 77 GHz.

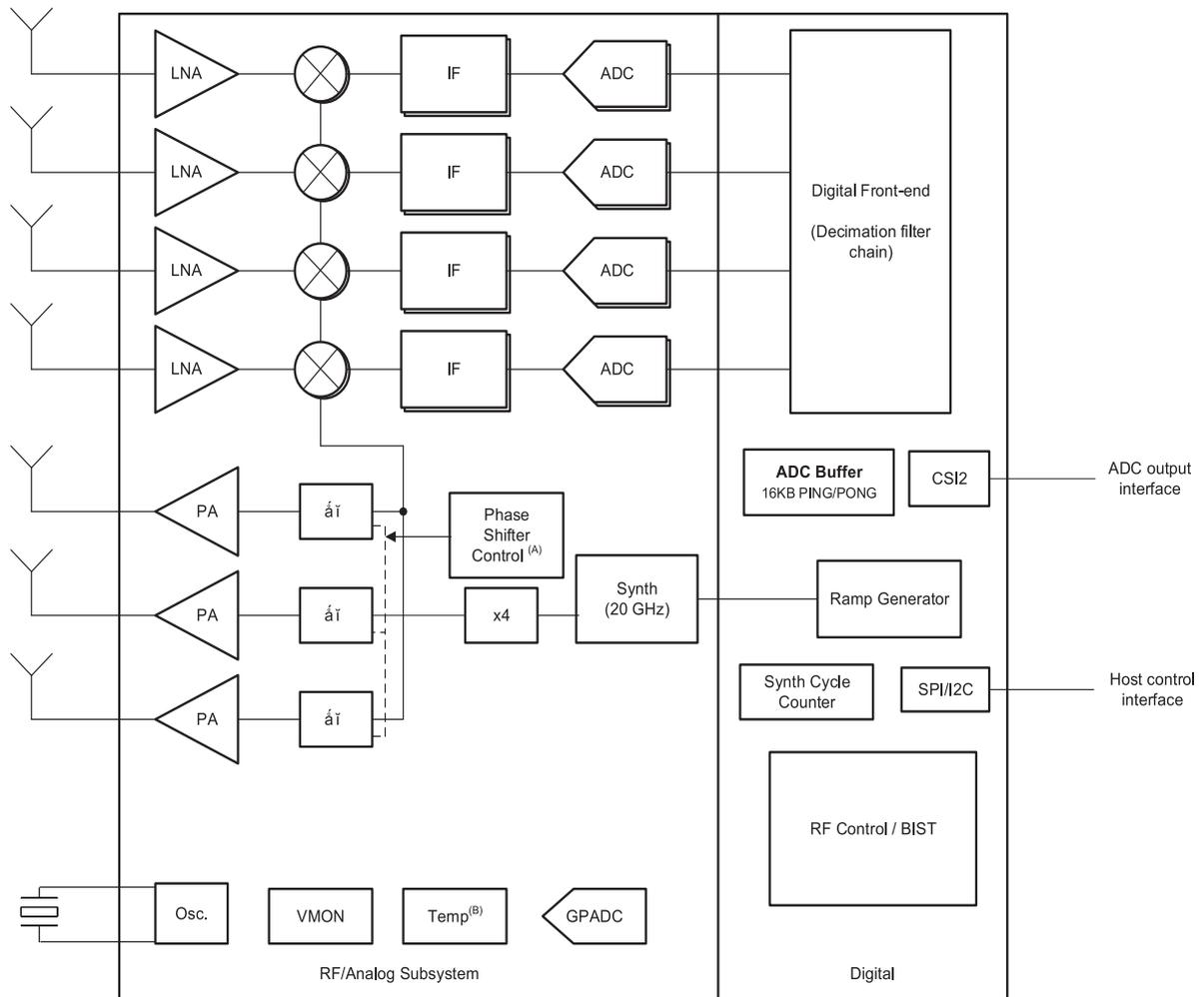
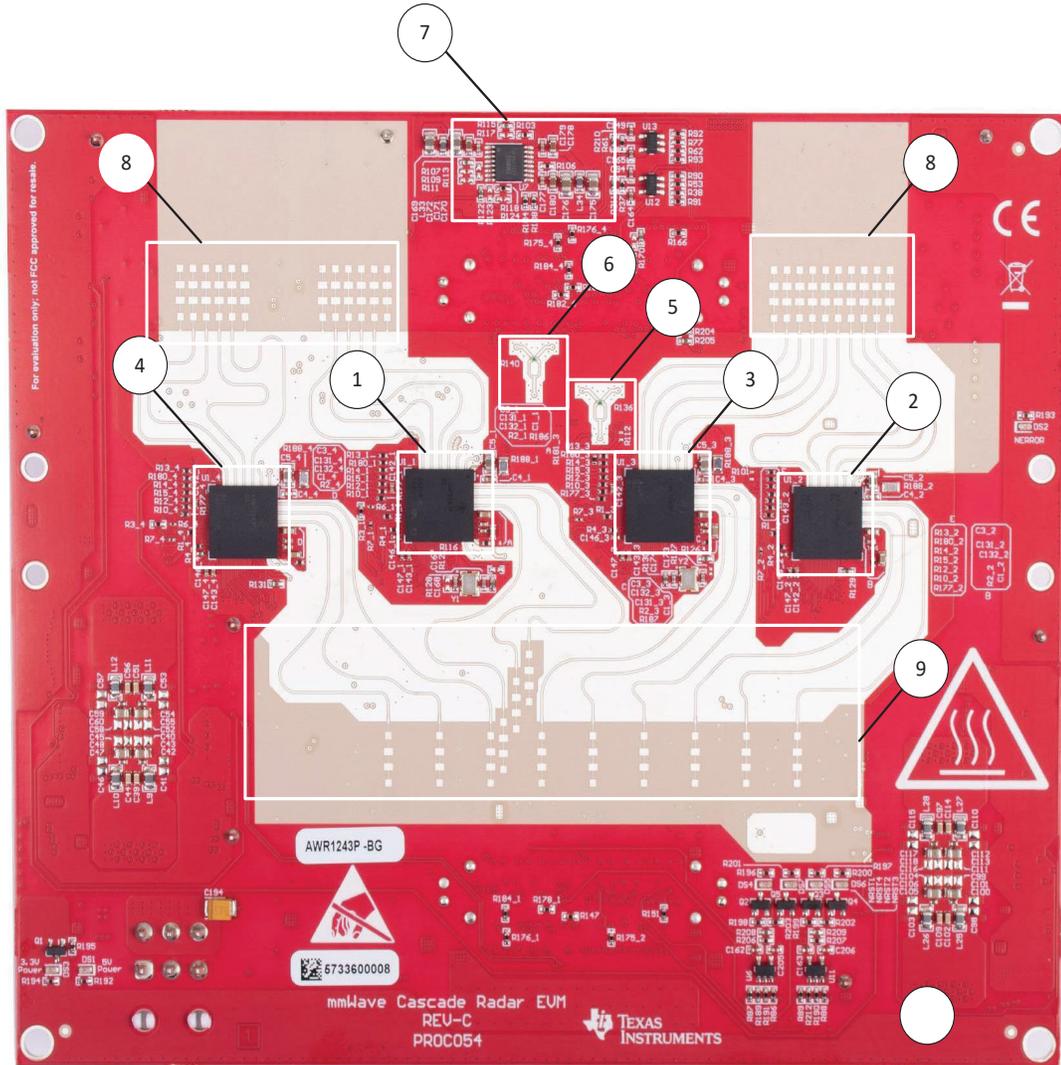


Figure 1.8: Block fonctionnel d'un radar MIMO avec 4 Rx et 3 Tx.

TX Antenna Array Dimensions

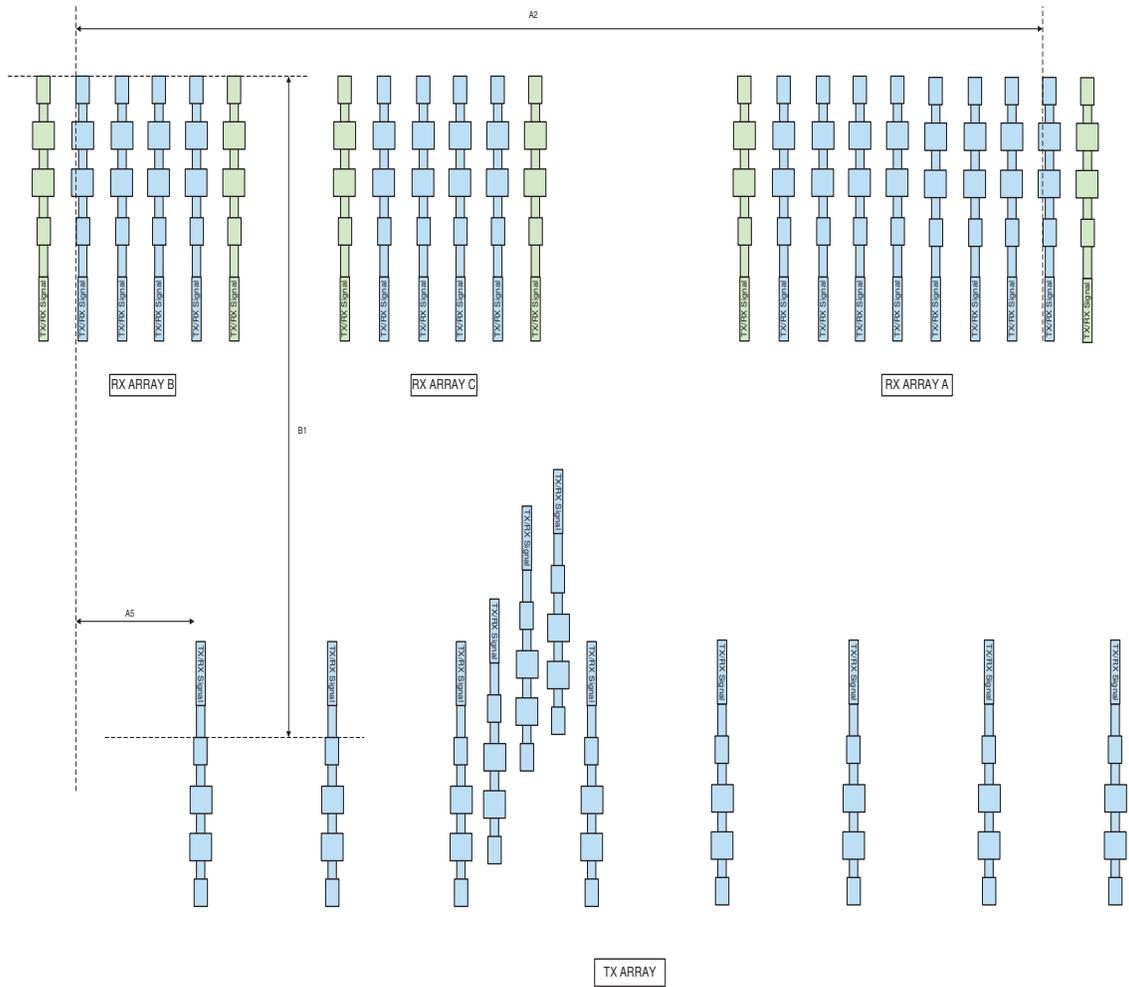
Dimension Label	Dimension (mils)	Dimension (77 GHz lambda)
B1	2928.84	19.072
B2	76.78	0.5
B3	230.36	1.5
B4	153.56	1.0

Table 1.2: Dimensions du réseau d'antennes Tx.



1. AWRx #1 "Master" (U1_1)
2. AWRx #2 "Slave 1" (U1_2)
3. AWRx #4 "Slave 3" (U1_4)
4. AWRx #3 "Slave 2" (U1_3)
5. 20 GHz LO Wilkinson Power Divider #1 (FMCW_CLKOUT) AWR #1 and AWR #2
6. 20 GHz LO Wilkinson Power Divider #2 (FMCW_SYNCOUT) AWR #3 and AWR #4
7. LMK00804B (U4) AWRx 40 MHz clock distribution buffer
8. Receive antenna array
9. Transmit antenna array

Figure 1.9: Photo de front du radar MIMO employé.



TX and RX Antenna Array Relative Dimensions

Figure 1.10: Réseau d'antennes correspondant au radar employé.

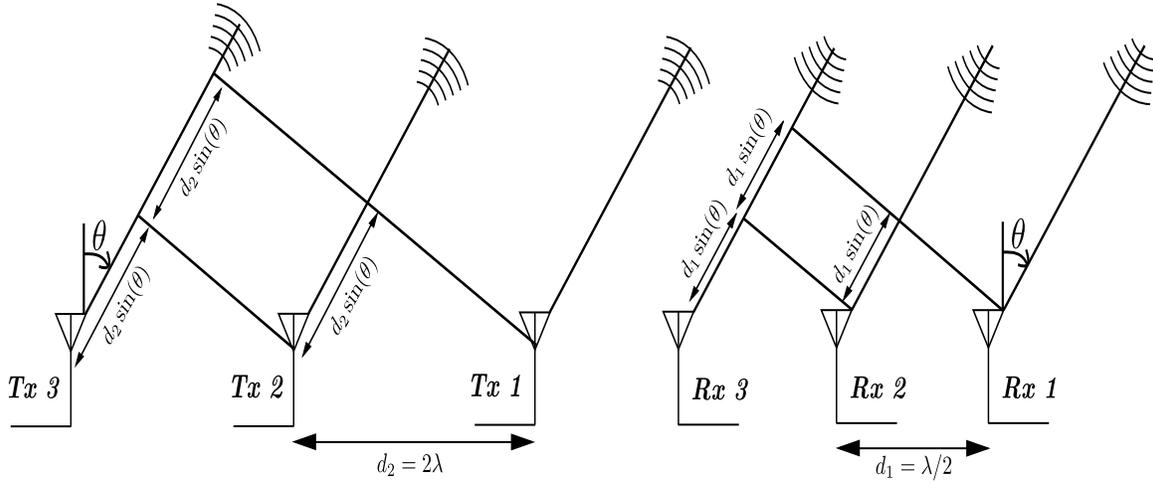


Figure 1.11: Réseau d'antennes MIMO avec 3 antennes émettrices Tx et 3 antennes réceptrices Rx.

Comme nous allons le voir, un réseau MIMO ayant N_R antennes Rx et N_T antennes Tx est équivalent à un réseau conventionnel ayant $N_R \times N_T$ antennes Rx. Donc un réseau MIMO ayant, par exemple, 4 antennes Rx et 3 antennes Tx, et donc 7 antennes en tout, sera équivalent à un réseau conventionnel ayant 12 antennes Rx, soit une économie de 5 antennes. Ce gain en antenne est encore plus considérable pour les réseaux de grande taille.

Soit $y_{IF,m,n}(t)$ le signal transmit par l'antenne $T_{X,m}$ est reçue, puis démodulée, par l'antenne $R_{X,n}$. En employant le même raisonnement que celui utilisé pour dériver Eq. 1.18, on peut mettre $y_{IF,m,n}(t)$ sous cette forme [6]

$$\begin{aligned} y_{IF,m,n}(t) &= D \exp \left[j \left(S\tau_1 t + \omega_0 \Delta\tau_1 n + \omega_0 \Delta\tau_2 m \right) \right] \\ &= D \exp \left(j\omega_0 (\Delta\tau_1 n + \Delta\tau_2 m) \right) \exp(jS\tau_1 t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec $D = B^* \exp \left[j \left(-\frac{1}{2} S\tau_1^2 + \omega_0 (\tau_1 - \Delta\tau_1 - \Delta\tau_2) \right) \right]$, $\Delta\tau_1 = \frac{d_1 \sin(\theta)}{c}$ et $\Delta\tau_2 = \frac{d_2 \sin(\theta)}{c}$, d_1 est l'espacement entre les antennes réceptrices, et d_2 est l'espacement entre les antennes émettrices.

En prenant $d_1 = \lambda/2$ et $d_2 = 2\lambda$, comme dans la figure 1.12, et en utilisant $\omega_0 = 2\pi c/\lambda$, Eq. 1.28 devient

$$y_{IF,m,n}(t) = D \exp \left(j(n + 4m)\pi \sin(\theta) \right) \exp(jS\tau_1 t)$$

Soit $\mathbf{y}_{IF,1}(t)$ le vecteur de taille 4×1 contenant le signal envoyé par $T_{X,1}$ et reçu puis démodulé sur $R_{X,1}$, $R_{X,2}$, $R_{X,3}$, et $R_{X,4}$, dans cet ordre. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{IF,1}(t) &= \begin{bmatrix} y_{IF,1,1}(t) \\ y_{IF,1,2}(t) \\ y_{IF,1,3}(t) \\ y_{IF,1,4}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} D \exp(j5\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau_1 t) \\ D \exp(j6\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau_1 t) \\ D \exp(j7\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau_1 t) \\ D \exp(j8\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau_1 t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \exp(j5\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j6\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j7\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j8\pi \sin(\theta)) \end{bmatrix} D \exp(jS\tau_1 t) \tag{1.29}
\end{aligned}$$

De même pour $\mathbf{y}_{IF,2}(t)$, le vecteur contenant le signal envoyé par $T_{X,2}$ et reçu puis démodulé sur $R_{X,1}$, $R_{X,2}$, $R_{X,3}$, et $R_{X,4}$, nous avons

$$\mathbf{y}_{IF,2}(t) = \begin{bmatrix} \exp(j9\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j10\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j11\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j12\pi \sin(\theta)) \end{bmatrix} D \exp(jS\tau_1 t) \tag{1.30}$$

Et enfin, pour $\mathbf{y}_{IF,3}(t)$,

$$\mathbf{y}_{IF,3}(t) = \begin{bmatrix} \exp(j13\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j14\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j15\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j16\pi \sin(\theta)) \end{bmatrix} D \exp(jS\tau_1 t) \tag{1.31}$$

Nous pouvons à présent construire le vecteur $\mathbf{y}_{IF}(t)$, de taille 12×1 définit comme suit

$$\mathbf{y}_{IF}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{IF,1}(t) \\ \mathbf{y}_{IF,2}(t) \\ \mathbf{y}_{IF,3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(j5\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j6\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j7\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j8\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j9\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j10\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j11\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j12\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j13\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j14\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j15\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j16\pi \sin(\theta)) \end{bmatrix} D \exp(jS\tau_1 t) = \tag{1.32}$$

En introduisant $F = D \exp(j4\pi \sin(\theta))$, nous pouvons réécrire Eq (1.32) comme suit

$$\mathbf{y}_{IF}(t) = \begin{bmatrix} \exp(j1\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j2\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j3\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j4\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j5\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j6\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j7\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j8\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j9\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j10\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j11\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j12\pi \sin(\theta)) \end{bmatrix} F \exp(jS\tau_1 t) \quad (1.33)$$

On voit bien que pour un temps donné t_0 , le vecteur $\mathbf{y}_{IF}(t_0)$ est une séquence sinusoïdale complexe de fréquence $\Omega = \pi \sin(\theta)$. La taille de cette séquence est de $N_R \times N_T = 4 \times 3 = 12$ éléments. On aurait pu obtenir cette même séquence avec un réseau conventionnel ayant une seule antenne Tx et 12 antennes Rx (Eq. 2.19). Donc le nombre total d'antennes économisées grâce au réseau MIMO est de $12 - (4 + 3) = 5$ antennes.

En résumé, pour K cibles se situant à des distance R_1, R_2, \dots, R_K et à des angles $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$, un radar FMCW-MIMO ayant N_R antennes Rx et N_T antennes Tx aura un vecteur de données démodulées $\mathbf{y}_{IF}(t)$, ayant une taille $N_R N_T \times 1$, ayant la forme suivante

$$\mathbf{y}_{IF}(t) = \begin{bmatrix} y_{IF,1}(t) \\ y_{IF,2}(t) \\ \vdots \\ y_{IF,N_R N_T}(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) \quad (1.34)$$

avec $t = 1, 2, \dots, N_S$, où N_S est le nombre d'échantillons pris par l'ADC, et

$$\mathbf{a}(\theta_k) = \begin{bmatrix} \exp(j\pi \sin(\theta_k)) \\ \exp(j2\pi \sin(\theta_k)) \\ \vdots \\ \exp(jN_R N_T \pi \sin(\theta_k)) \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

et

$$s_k(t) = F_k \exp(jS\tau_k t) \quad (1.36)$$

où F_k est une constante complexe, et $\tau_k = 2R_k/c$.

La matrice de données \mathbf{Y} , de taille $N_R N_T \times N_S$, et contenant tous les échantillons temporels sera alors défini comme suit

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\mathbf{IF}}(1) & \mathbf{y}_{\mathbf{IF}}(2) & \dots & \mathbf{y}_{\mathbf{IF}}(N_S) \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Les distances R_k peuvent être estimés en prenant une FFT sur l'une des lignes de \mathbf{Y} . Les angles θ_k peuvent être estimés en prenant une FFT sur l'une des colonnes de \mathbf{Y} .

De même que les réseaux conventionnels, les radars FMCW-MIMO ont une résolution angulaire, avec une simple FFT, valant $\frac{2}{N_R N_T}$ rad. Par exemple, pour un réseau de 4 Rx et 3 Tx, la résolution angulaire sera de $\frac{2}{12}$ rad, soit 9.5 deg.

L'algorithme super-résolution MUSIC, présenté dans le chapitre qui suit, permet d'obtenir des résolutions angulaires au delà de $\frac{2}{N_R N_T}$ en exploitant la matrice de données \mathbf{Y}

Chapitre 2

Algorithmes d'estimation de l'angle d'arrivée

Nous avons vu précédemment que la résolution angulaire offerte par le radar MIMO FMCW était de $2/N_R N_T$ rad où N_R est le nombre d'antennes réceptrices et N_T est le nombre d'antennes émettrices. Nous allons couvrir ici l'algorithme MUSIC qui permet d'atteindre des résolutions angulaires au-delà de la limite précédente, et ceci en exploitant la matrice de covariance des données.

2.1 L'Algorithme MUSIC

Soit le modèle de données suivant

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, 2, \dots, N_S. \quad (2.1)$$

avec $\mathbf{a}(\theta_k) = [\exp(j\pi \sin(\theta_k)) \quad \exp(j2\pi \sin(\theta_k)) \quad \dots \quad \exp(jM\pi \sin(\theta_k))]^T$, $M = N_R N_T$, et $\mathbf{n}(t)$ modélise le bruit blanc thermique présent dans le récepteur.

Nous pouvons donc réécrire Eq. 3.9 comme suit

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \dots \quad \mathbf{a}(\theta_K)] \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.2)$$

Avec les hypothèses suivantes

- Les signaux sont non-corrélés entre eux, i.e. $\mathbb{E}(s_i s_j) = 0$ pour $i \neq j$.
- Les signaux sont décorrélés du bruit, i.e. $\mathbb{E}(s_i n_j) = 0 \quad \forall i, j$.

- Le bruit est blanc gaussien suivant une distribution normale $\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$.

La matrice de covariance de \mathbf{y} sera alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\mathbf{yy}} &= \mathbb{E}(\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)) \\
&= \mathbb{E}\left(\left[\mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)\right]\left[\mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)\right]^H\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left[\mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)\right]\left[\mathbf{s}^H(t)\mathbf{A}^H + \mathbf{n}^H(t)\right]\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{A}\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\mathbf{A}^H + \mathbf{n}(t)\mathbf{s}^H(t)\mathbf{A}^H + \mathbf{A}\mathbf{s}(t)\mathbf{n}^H(t) + \mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbf{A}\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\mathbf{A}^H\right) + \underbrace{\mathbb{E}\left(\mathbf{n}(t)\mathbf{s}^H(t)\mathbf{A}^H\right)}_{=\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbb{E}\left(\mathbf{A}\mathbf{s}(t)\mathbf{n}^H(t)\right)}_{=\mathbf{0}} + \mathbb{E}\left(\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)\right) \\
&= \mathbf{A}\mathbb{E}(\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t))\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \\
&= \boxed{\mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{SS}}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}} \tag{2.3}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{SS}} = \mathbb{E}(\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t))$ est la matrice de covariance des signaux sources et \mathbf{I} est une matrice identité de taille M . L'algorithme MUSIC [7] (**M**U**L**tiple **S**I**G**nal **C**lassification) pour l'estimation des angles θ_k est défini comme suit

1. Trouver les vecteurs propres \mathbf{v}_k , $k = 1, 2, \dots, M$ de la matrice de covariance $\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}$.
2. Ordonner les valeurs propres λ_k correspondant aux vecteurs propres \mathbf{v}_k en ordre décroissant, i.e.,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K \geq \lambda_{K+1} \geq \dots \geq \lambda_M$$

3. Construire la matrice de taille $M \times M - K$ du *sous-espace bruit* \mathbf{E}_n définie comme suit

$$\mathbf{E}_n = [\mathbf{v}_{K+1} \quad \mathbf{v}_{K+2} \dots \mathbf{v}_M]$$

4. Calculer le spectre de MUSIC $P_{MUSIC}(\theta)$ défini comme suit [7]

$$\boxed{P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\|\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{E}_n\|}} \tag{2.4}$$

avec $\mathbf{a}(\theta) = [1 \quad \exp(j\pi \sin(\theta)) \dots \exp(jM\pi \sin(\theta))]^T$. Les angles d'arrivées θ_k vont correspondre aux pics de $P_{MUSIC}(\theta)$.

Exemple: Soit un réseau de 20 antennes, et deux signaux $s_1(t)$ et s_2 arrivant des directions 30 deg et 54 deg, respectivement. La valeur du SNR = $10 \log \left(\frac{P_{sig}}{P_{bruit}} \right) = 20$ dB. Pour $P_{sig} = 1$, alors $P_{bruit} = \sigma^2 = 0.01$. La figure 2.1 montre le spectre de MUSIC, $P_{MUSIC}(\theta)$.

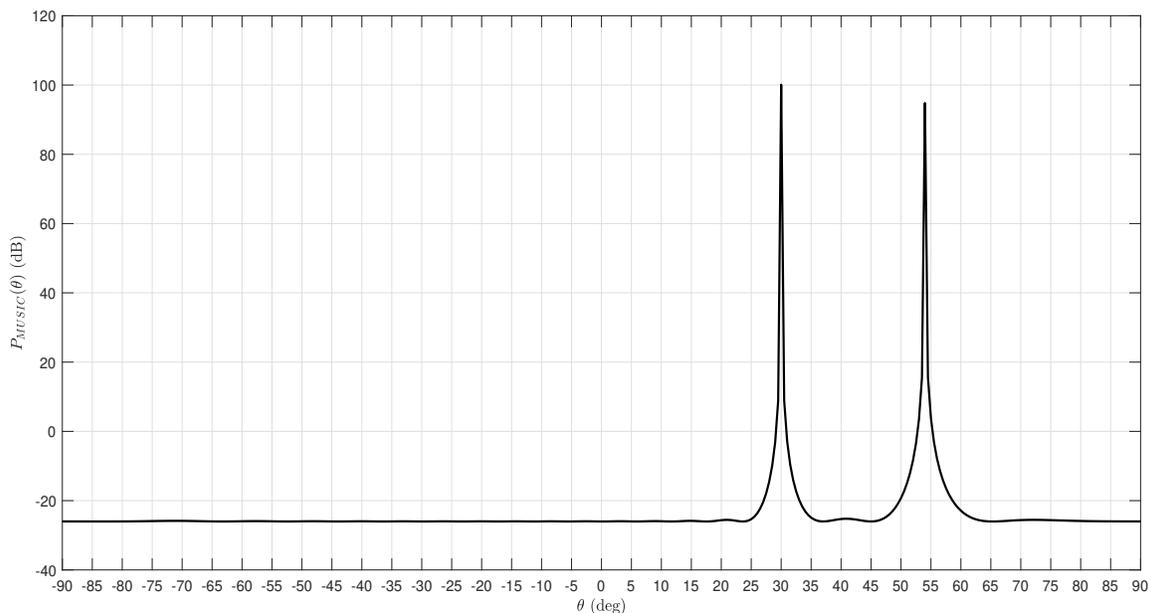


Figure 2.1: $P_{MUSIC}(\theta)$ en dB. Deux signaux arrivant des directions 30 deg et 54 deg.

La figure 2.2 est une comparaison montrant la différence de performances entre la méthode d'estimation de l'angle d'arrivée basée sur une FFT et celle basée sur MUSIC sur le même réseau de 20 éléments.

On voit bien que le pouvoir de résolution de MUSIC est supérieur à celui d'une simple FFT. Idéalement, dans le cas sans bruit, le pouvoir de résolution de MUSIC est infini, en pratique avec un SNR suffisamment élevé, on parle de probabilité de résolution [8]. Mais sans avoir recours à la formule de la probabilité de résolution, nous pouvons empiriquement constater que la résolution angulaire offerte par MUSIC est au-dessus de celle d'une FFT.

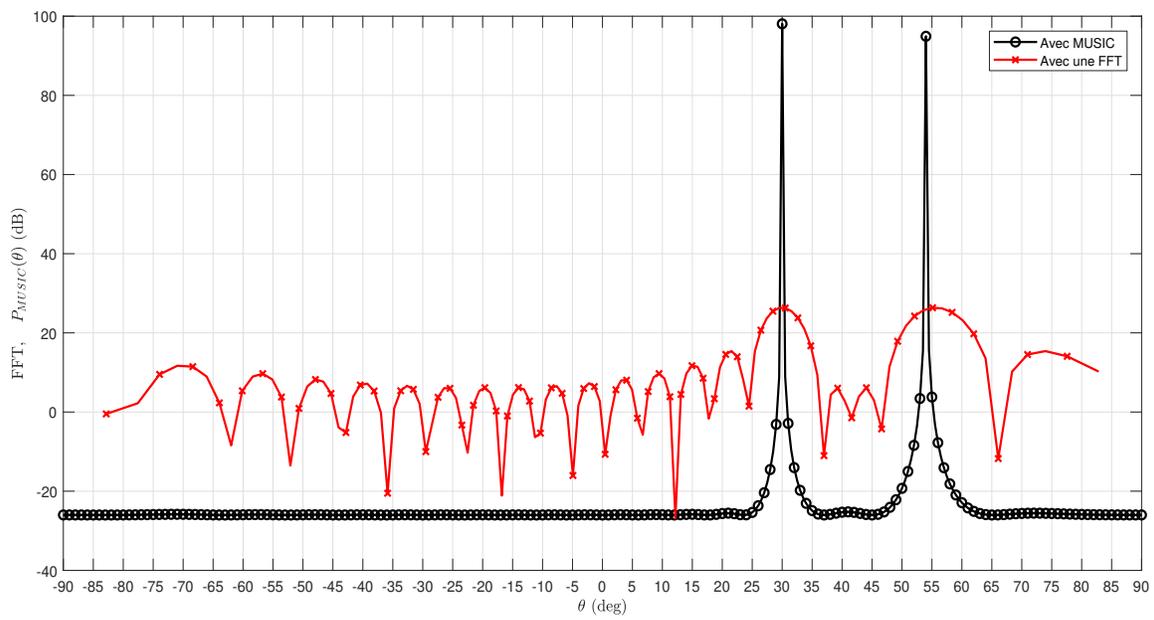


Figure 2.2: $P_{MUSIC}(\theta)$ vs FFT en dB. Deux signaux arrivant des directions 30 deg et 54 deg.

Chapitre 3

Sources cohérentes et décorrélation avec le spatial smoothing

Nous avons vu précédemment que la résolution angulaire supérieure qu'offre MUSIC comparé à une estimation basée sur une FFT. L'algorithme MUSIC est cependant vulnérable au problème de cohérence quand deux cibles se trouvent à la même portée mais à des positions angulaires différentes, détériorant ainsi le SNR jusqu'à environ 5 dB. Pour pallier à ce problème, on applique la méthode du spatial smoothing qui consiste à subdiviser le réseau total en sous-réseaux, et à ensuite appliquer l'algorithme MUSIC sur la moyenne des matrices de covariances de chaque sous-réseaux. On pourra ainsi obtenir un SNR de l'ordre de 120 dB après application du spatial smoothing, et les positions angulaires seront correctement estimées.

3.1 Sources cohérentes et MUSIC

Deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont dits cohérents s'ils sont linéairement proportionnels, i.e.

$$s_2(t) = cs_1(t), \quad c \in \mathbb{C} \tag{3.1}$$

Nous remarquons alors que quand il y'a plusieurs cibles se situant à des angles différents mais à la *même portée* R , alors pour les radar FMCW et selon Eq. 1.35 les signaux reçus seront alors cohérents.

Soit deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ venant des directions θ_1 et θ_2 , respectivement. Le signal

total $\mathbf{y}(t)$ reçu sur un réseau de taille M sera alors

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(\theta_1)s_1(t) + \mathbf{a}(\theta_2)s_2(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, 2, \dots, N_S. \quad (3.2)$$

avec $\mathbf{a}(\theta) = [1, \exp(j\pi \sin(\theta)), \dots, \exp(jM \sin(\theta))]$. Si maintenant $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont cohérents, alors Eq. 4.2 devient

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{a}(\theta_1)s_1(t) + \mathbf{a}(\theta_2)cs_1(t) + \mathbf{n}(t) \\ &= (\mathbf{a}(\theta_1) + c\mathbf{a}(\theta_2))s_1(t) + \mathbf{n}(t) \\ &= \mathbf{z}s_1(t) + \mathbf{n}(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

On voit bien que malgré qu'on ait originalement deux vecteurs directionnels $\mathbf{a}(\theta_1)$ et $\mathbf{a}(\theta_2)$ correspondant aux directions θ_1 et θ_2 , la cohérence des signaux sources fait que le signal reçu est équivalent à un nouveau vecteur $\mathbf{z} = \mathbf{a}(\theta_1) + c\mathbf{a}(\theta_2)$. Le nouveau vecteur \mathbf{z} n'est pas un pur vecteur directionnel, et donc nous n'aurons pas un pic distinct pour une valeur de θ donnée, mais vu que c'est une combinaison linéaire des deux vecteurs directionnels $\mathbf{a}(\theta_1)$ et $\mathbf{a}(\theta_2)$, nous aurons plutôt deux pics dominant à θ_1 et θ_2 avec un *seuil réduit* comparé au cas non-cohérent. De plus, il y'aura des faux pics qui ne correspondent à aucune direction réelle qui apparaîtront dans le spectre de MUSIC.

Exemple 1: Soit un réseau de 20 éléments. Deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ arrivent des directions 30 deg et 54 deg. Les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont cohérents telle que $s_2(t) = (0.7 + j0.7)s_1(t)$, et le SNR est fixé à 20 dB. La figure ci-dessous montre comment le spectre de MUSIC P_{MUSIC} se détériore en présence de la cohérence entre les signaux sources. (voir figure 3.1 pour comparer avec le même scénario mais sans cohérence).

En examinant la figure d'en haut, on constate que l'effet de la cohérence se manifeste sous deux formes essentiellement

1. Le seuil du bruit est réduit. En haut par exemple le seuil vaut approximativement 7 dB. Sans dire que pour le cas sans cohérence (Figure 2.2), le seuil est de 120 dB.
2. Il y'a apparition de faux pics qui ne correspondent à aucune direction d'arrivée, comme le pic en haut à -70 deg.

Le problème de cohérence peut aussi être vu sous une autre perspective, et ceci en utilisant la matrice de covariance des signaux sources \mathbf{R}_{SS} . \mathbf{R}_{SS} , qui est une matrice carrée de taille K pour K signaux, est définie comme suit [9]

$$[\mathbf{R}_{SS}]_{ij} = \mathbb{E}(s_i s_j^*) \quad (3.4)$$

Pour des signaux non-corrélés, i.e. $\mathbb{E}(s_i s_j^*) = 0$ pour $i \neq j$, \mathbf{R}_{SS} est une matrice diagonale

$$\mathbf{R}_{SS} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_K \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

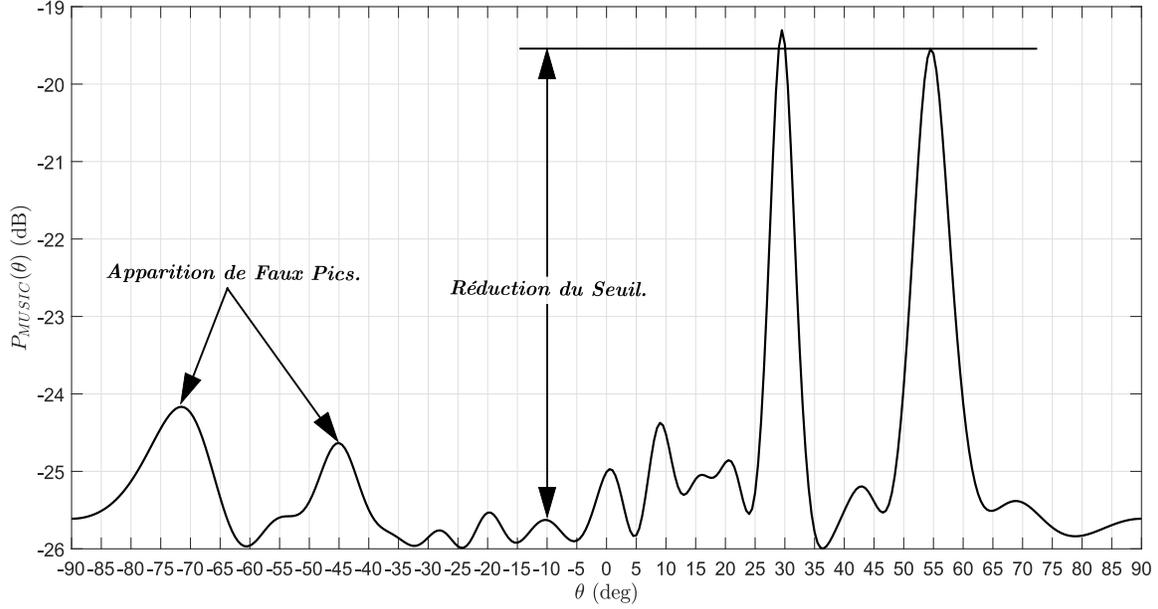


Figure 3.1: $P_{MUSIC}(\theta)$ pour deux signaux cohérents arrivant des directions 30 deg et 54 deg sur un réseau de 20 éléments (SNR=20 dB).

avec $p_i = \mathbb{E}(s_i s_i^*) = \mathbb{E}(|s_i|^2)$, et $i = 1, 2, \dots, K$. Et le rang de \mathbf{R}_{SS} vaut exactement K . Quand les signaux sont cohérents, \mathbf{R}_{SS} aura un rang *inférieur* à K , on dit alors que \mathbf{R}_{SS} est *rank deficient*.

Par exemple, pour deux signaux non-cohérents, le rang de \mathbf{R}_{SS} sera de 2. par contre avec deux signaux sources $s_1(t)$ et $s_2(t)$ qui sont cohérents

$$s_2(t) = c s_1(t) \quad c \in \mathbb{C} \quad (3.6)$$

\mathbf{R}_{SS} aura la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{SS} &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}(s_1 s_1^*) & \mathbb{E}(s_1 s_2^*) \\ \mathbb{E}(s_2 s_1^*) & \mathbb{E}(s_2 s_2^*) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}(s_1 s_1^*) & \mathbb{E}(s_1 (c^* s_1^*)) \\ \mathbb{E}((c s_1) s_1^*) & \mathbb{E}((c s_1) (c^* s_1^*)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}(s_1 s_1^*) & c^* \mathbb{E}(s_1 s_1^*) \\ c \mathbb{E}(s_1 s_1^*) & c c^* \mathbb{E}(s_1 s_1^*) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_1 & c^* p_1 \\ c p_1 & c c^* p_1 \end{bmatrix} \\ &= p_1 \begin{bmatrix} 1 & c^* \\ c & c c^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec $p_1 = \mathbb{E}(s_1 s_1^*)$. On voit en Eq. 3.7 que la deuxième colonne de la matrice \mathbf{R}_{SS} peut être obtenue en multipliant la première colonne par c^* , c'est à dire que les colonnes

une et deux ne sont pas linéairement indépendantes, et donc le rang de \mathbf{R}_{SS} vaut 1. De plus \mathbf{R}_{SS} n'est plus diagonale.

Le fait que la matrice de covariance des signaux sources \mathbf{R}_{SS} ne soit plus *diagonale* à un effet direct sur les performances de l'algorithme MUSIC, parce que MUSIC repose sur la matrice de covariance \mathbf{R}_{yy} et selon Eq. 2.11,

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}. \quad (3.8)$$

3.2 Le spatial smoothing

Une méthode proposée pour palier à ce problème de cohérence des sources s'appelle *spatial smoothing* [12]. Cette méthode permet de *décorréliser* les signaux sources, et de restituer à la matrice \mathbf{R}_{yy} sa forme diagonale.

L'algorithme du spatial smoothing est défini comme suit

1. Subdiviser le réseau d'antennes ayant une taille M en L sous-réseaux, la taille de chaque sous-réseau sera alors de $M - L + 1$.
2. Le i -ème sous réseau commence de l'antenne i et s'étend jusqu'à l'antenne $i + M - L$. En reprenant le modèle de données défini en Eq. 3.9, on construit la matrice de covariance correspondant au i -ème, $\mathbf{R}_{yy,i}$ comme suit

$$\mathbf{R}_{yy,i} = \mathbb{E}(\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^H) \approx \frac{1}{N_S} \sum_{t=1}^{N_S} \mathbf{y}_i(t)\mathbf{y}_i^H(t) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, L. \quad (3.9)$$

avec

$$\mathbf{y}_i(t) = \begin{bmatrix} y_i(t) \\ y_{i+1}(t) \\ \vdots \\ y_{i+M-L}(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

y_k étant le k -ème élément du vecteur $\mathbf{y}(t)$ défini dans le modèle de données en Eq. 2.9.

3. Une fois les $\mathbf{R}_{yy,i}$, pour $i = 1, 2, \dots, L$ obtenues, on construit la matrice de covariance moyenne $\bar{\mathbf{R}}_{yy}$ définie comme suit

$$\bar{\mathbf{R}}_{yy} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{R}_{yy,i} \quad (3.11)$$

4. On applique l'algorithme MUSIC sur $\bar{\mathbf{R}}_{yy}$ pour estimer les angles d'arrivée θ_k .

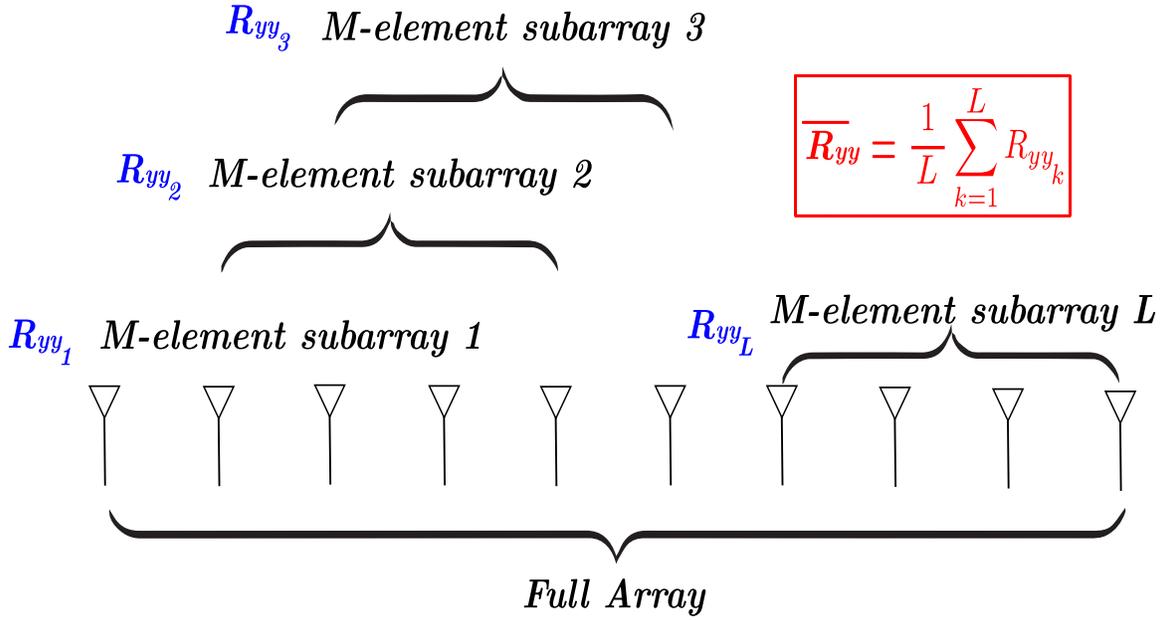


Figure 3.2: Principe du Spatial Smoothing

Pour voir comment le spatial smoothing arrive à redonner à la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{SS}}$ une forme diagonale, reprenons l'exemple précédent des deux signaux sources cohérents, i.e. $s_1(t)$ et $s_2(t)$ arrivant des directions θ_1 et θ_2 , respectivement, avec $s_2(t) = cs_1(t)$. Le signal reçu sur le réseau, $\mathbf{y}(t)$, s'écrit

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(\theta_1)s_1(t) + \mathbf{a}(\theta_2)s_2(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3.12)$$

avec

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi \sin(\theta)) \\ \vdots \\ \exp(j\pi \sin(M\theta)) \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

et $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$.

Le signal $\mathbf{y}_i(t)$ arrivant sur le i -ème réseau qui commence à l'antenne i et se termine à l'antenne $i + M - L$ s'écrit

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{a}_i(\theta_1)s_1(t) + \mathbf{a}_i(\theta_2)s_2(t) + \mathbf{n}_i(t) \quad (3.14)$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_i(\theta) &= \begin{bmatrix} \exp(ji\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j(i+1)\pi \sin(\theta)) \\ \vdots \\ \exp(j(i+M-L)\pi \sin(\theta)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j1\pi \sin(\theta)) \\ \vdots \\ \exp(j(M-L)\pi \sin(\theta)) \end{bmatrix} \exp(ji\pi \sin(\theta)) \\
&= \exp(ji\pi \sin(\theta)) \mathbf{a}'(\theta)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

avec $\mathbf{a}'(\theta) = [1, \exp(j\pi \sin(\theta)), \dots, \exp(j(M-L)\pi \sin(\theta))]^T$. Aussi, vus que le bruit blanc possède la même distribution pour toutes les antennes, i.e. $n_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ pour $i = 1, 2, \dots, M$, nous pouvons alors poser

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_i(t) &= \begin{bmatrix} n_i(t) \\ n_{i+1}(t) \\ \vdots \\ n_{i+M-L}(t) \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{n}'(t) \triangleq \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_{M-L+1}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

En remplaçant Eq. 4.15 et 4.16 dans Eq. 4.14, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_i(t) &= \exp(ji\pi \sin(\theta_1)) \mathbf{a}'(\theta_1) s_1(t) + \exp(ji\pi \sin(\theta_2)) \mathbf{a}'(\theta_2) s_2(t) + \mathbf{n}'(t) \\
&= \mathbf{a}'(\theta_1) \left(\exp(ji\pi \sin(\theta_1)) s_1(t) \right) + \mathbf{a}'(\theta_2) \left(\exp(ji\pi \sin(\theta_2)) s_2(t) \right) + \mathbf{n}'(t) \\
&= [\mathbf{a}'(\theta_1) \quad \mathbf{a}'(\theta_2)] \begin{bmatrix} \exp(ji\pi \sin(\theta_1)) s_1(t) \\ \exp(ji\pi \sin(\theta_2)) s_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{n}'(t) \\
&= \mathbf{A}' \mathbf{s}'_i(t) + \mathbf{n}'(t)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

avec $\mathbf{A}' = [\mathbf{a}'(\theta_1) \quad \mathbf{a}'(\theta_2)]$ et $\mathbf{s}'_i(t) = [\exp(ji\pi \sin(\theta_1)) s_1(t) \quad \exp(ji\pi \sin(\theta_2)) s_2(t)]^T$.

La matrice de covariance $\mathbf{R}_{yy,i}$ du i -ème sous-réseau sera alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{yy,i} &= \mathbb{E}(\mathbf{y}_i(t)\mathbf{y}_i^H(t)) \\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbf{A}'\mathbf{s}'_i(t) + \mathbf{n}'(t))(\mathbf{A}'\mathbf{s}'_i(t) + \mathbf{n}'(t))^H\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\mathbf{A}'\mathbf{s}'_i(t) + \mathbf{n}'(t))(\mathbf{s}'_i{}^H(t)\mathbf{A}'^H + \mathbf{n}'^H(t))\right] \\
&= \mathbf{A}'\mathbb{E}[\mathbf{s}'_i(t)\mathbf{s}'_i{}^H(t)]\mathbf{A}'^H + \mathbb{E}[\mathbf{n}'(t)\mathbf{n}'^H(t)] \\
&= \mathbf{A}'\mathbf{R}'_{SS,i}\mathbf{A}'^H + \sigma^2\mathbf{I}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

avec $\mathbf{R}'_{SS,i} = \mathbb{E}(\mathbf{s}'_i(t)\mathbf{s}'_i{}^H(t))$. En reprenant la notation d'Eq. 4.7, et en introduisant la notation

$\Omega_i = \pi \sin(\theta_i)$ pour $i = 1, 2$, nous pouvons alors réécrire $\mathbf{R}'_{SS,i}$ comme suit

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}'_{SS,i} &= p_1 \begin{bmatrix} 1 & c^* \exp(ji(\Omega_1 - \Omega_2)) \\ c \exp(ji(\Omega_2 - \Omega_1)) & cc^* \end{bmatrix} \\
&= p_1 \begin{bmatrix} 1 & c^* \exp(ji\Delta\Omega) \\ c \exp(-ji\Delta\Omega) & cc^* \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

avec $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$. La matrice moyenne de covariance $\bar{\mathbf{R}}_{yy}$ de taille $M - L + 1$, définie en Eq. 4.11, et sur laquelle MUSIC sera appliquée est alors donnée par

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{R}}_{yy} &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{R}_{yy,i} \\
&= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [\mathbf{A}'\mathbf{R}'_{SS,i}\mathbf{A}'^H + \sigma^2\mathbf{I}] \\
&= \mathbf{A}' \left[\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{R}'_{SS,i} \right] \mathbf{A}'^H + \sigma^2\mathbf{I} \\
&= \boxed{\mathbf{A}'\bar{\mathbf{R}}'_{SS}\mathbf{A}'^H + \sigma^2\mathbf{I}}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

avec la matrice moyenne de covariance des signaux sources, $\bar{\mathbf{R}}'_{SS}$, définie comme suit

$$\bar{\mathbf{R}}'_{SS} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{R}'_{SS,i} \tag{3.21}$$

En injectant Eq. 4.19 dans Eq. 4.21, on obtient

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{R}}'_{SS} &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \mathbf{R}'_{SS,i} \\
&= p_1 \begin{bmatrix} 1 & c^* \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \exp(ji\Delta\Omega) \\ c \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \exp(-ji\Delta\Omega) & cc^* \end{bmatrix} \\
&= p_1 \begin{bmatrix} 1 & c^* \frac{1 - \exp(jL\Delta\Omega)}{1 - \exp(j\Delta\Omega)} \\ c \frac{1 - \exp(-jL\Delta\Omega)}{1 - \exp(-j\Delta\Omega)} & cc^* \end{bmatrix} \\
&= p_1 \begin{bmatrix} 1 & c^* \exp\left(j \frac{(L-1)\Delta\Omega}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{L\Delta\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\Omega}{2}\right)} \\ c \exp\left(-j \frac{(L-1)\Delta\Omega}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{L\Delta\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\Omega}{2}\right)} & cc^* \end{bmatrix} \\
&= p_1 \begin{bmatrix} 1 & c^* \rho \\ c \rho^* & cc^* \end{bmatrix} \tag{3.22}
\end{aligned}$$

avec

$$\rho = \exp\left(-j \frac{(L-1)\Delta\Omega}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{L\Delta\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\Omega}{2}\right)} \tag{3.23}$$

et

$$|\rho| = \left| \frac{\sin\left(\frac{L\Delta\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\Omega}{2}\right)} \right| \tag{3.24}$$

On peut à présent voir comment les éléments *non-diagonaux* de la matrice de covariance des signaux \mathbf{R}_{SS} définie en Eq. 4.7 sont atténués grâce au spatial-smoothing. Les éléments non-diagonaux sont multipliés par un nouveau facteur ρ dont le module *décroit* avec le nombre de sous-réseaux L . Pour un nombre de sous-réseaux suffisamment large L , $|\rho| \approx 0$, et ainsi $[\bar{\mathbf{R}}'_{SS}]_{12} \approx 0$ et $[\bar{\mathbf{R}}'_{SS}]_{21} \approx 0$.

Nous noterons aussi en passant que $|\rho|$ dépend également de la séparation entre les angles d'arrivée θ_1 et θ_2 à cause de la variable $\Delta\Omega$ étant donné que

$$\Delta\Omega = \pi(\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)). \quad (3.25)$$

Généralement, plus les angles d'arrivée θ_1 et θ_2 sont proches, plus il faut augmenter le nombre de sous-réseaux L pour pouvoir effectivement atténuer les éléments non-diagonaux de \mathbf{R}_{SS} .

La figure 4.3 montre le comportement de $|\rho|$ en fonction de L et de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

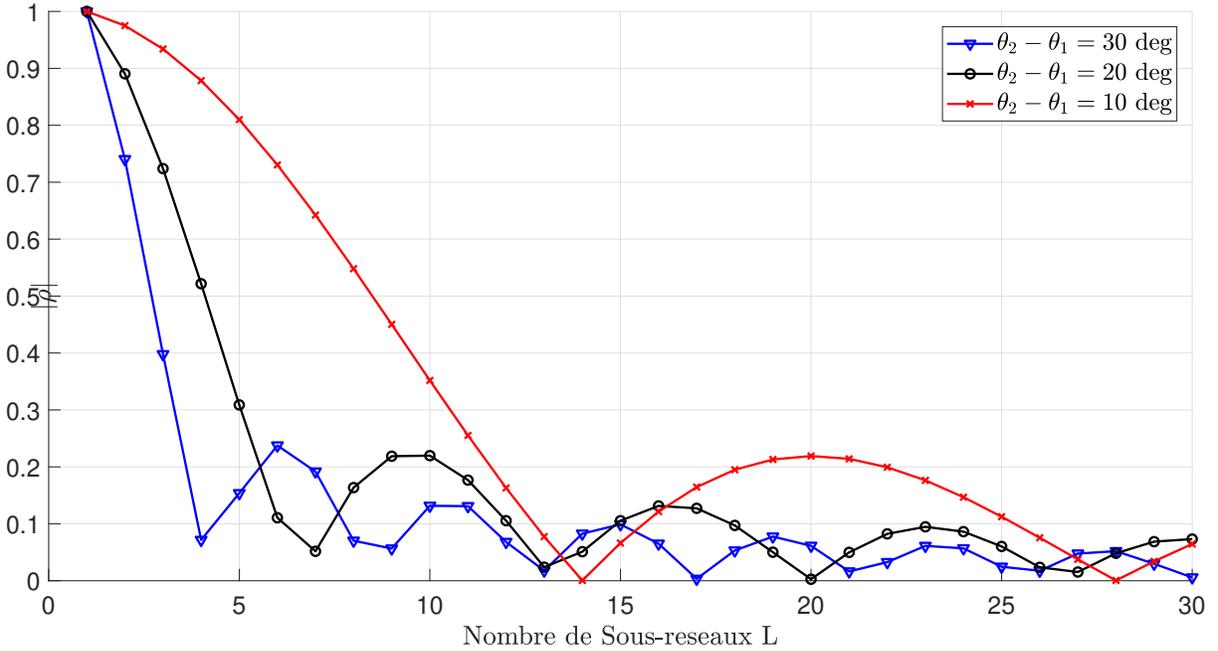


Figure 3.3: $|\rho|$ en fonction du nombre de sous-réseaux et de la séparation entre les angles d'arrivée $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Exemple 2: En appliquant l'algorithme du spatial smoothing au cas de l'exemple 1, deux sources cohérentes arrivant de 30 deg et 54 deg sur un réseau de $M = 20$ éléments avec une subdivision en $L = 10$ sous-réseaux, chaque sous-réseau ayant alors une taille de $M - L + 1 = 11$ antennes, on obtient le nouveau spectre de MUSIC suivant (à comparer avec Figure 4.1)

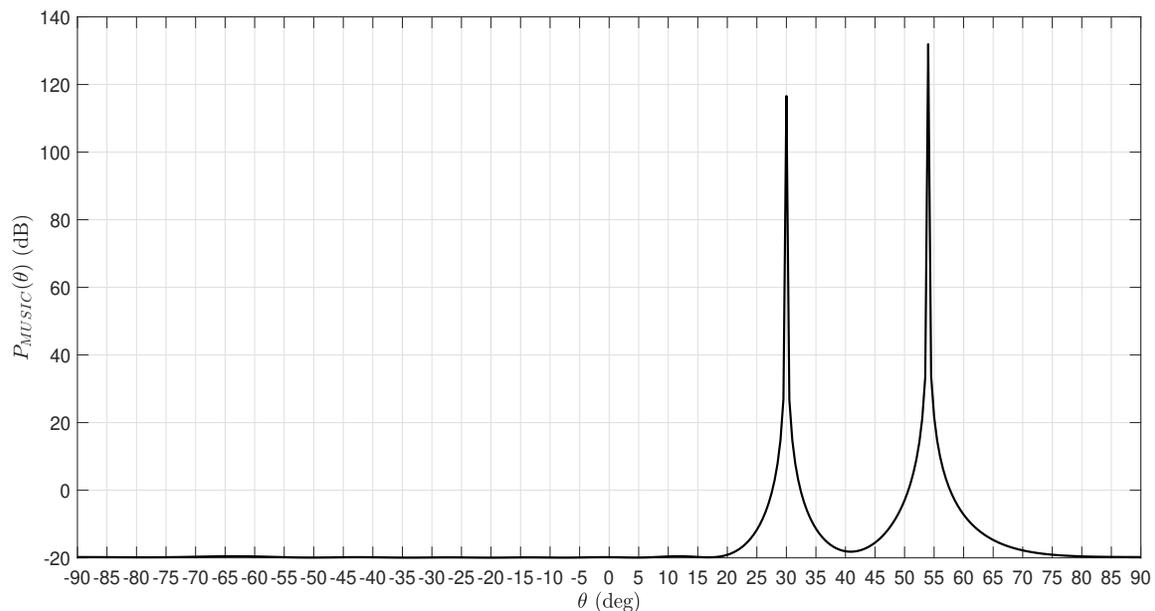


Figure 3.4: $P_{MUSIC}(\theta)$ après application du spatial smoothing avec $M = 20$, $L = 10$, $\theta_1 = 30$ deg, $\theta_2 = 54$ deg, et SNR=20 dB.

Chapitre 4

Gain et phase mismatch et la calibration

Idéalement, un signal reçu sur un réseau d'antennes sera amplifié par le même gain, et la différence de phase entre les signaux *ne sera due qu'à* la direction d'arrivée. En pratique, les antennes ont un gain G qui n'est pas uniforme à travers le réseau, et qui varie d'antennes à antennes, ce qu'on appelle *gain mismatch*. De même, une phase aléatoire ϕ variant d'antennes à antenne vient se rajouter à la phase qui est seulement due à la direction d'arrivée, ce qu'on appelle *phase mismatch*. Le gain et phase mismatch suivent des distributions *gaussiennes*. Ces imperfections en gain et en phase ont un effet dégradant sur les performances de l'algorithme MUSIC. La *calibration* permet de compenser ces imperfections en gain et phase et d'améliorer les performances de MUSIC en présence de ce mismatch. Un dispositif expérimental de trois cibles à 5, 6 et 10 deg à 2 mètres est présenté avec une calibration à 0 deg. Il est établi que MUSIC arrive à correctement séparer ces cibles après calibration et après spatial smoothing.

4.1 Gain et phase mismatch

Soit un signal arrivant sur un réseau *idéal* de M antennes, en reprenant le modèle défini en Eq. 1.18, le signal reçu et démodulé sur la i -ème antenne $y_i(t)$ s'écrit

$$y_{ideal,i}(t) = D \exp\left(j2\pi i \frac{d \sin(\theta)}{\lambda}\right) \exp(jS\tau t), \quad (4.1)$$

avec $\tau = 2R/c$, D est une constante complexe, et d est l'espacement entre les antennes de réception, et $i = 1, 2, \dots, M$. En prenant $d = \lambda/2$, on obtient

$$y_{ideal,i}(t) = D \exp(ji\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau t), \quad (4.2)$$

Un réseau réel, cependant, sera affecté d'imperfections en gain G_i et en phase ϕ_i qui varient d'antennes à antennes. En prenant le premier élément du réseau comme

référence, Eq. 4.2 deviendra donc [13]

$$y_1(t) = D \exp(j\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau t) \quad (4.3)$$

pour $i = 1$ et

$$y_i(t) = G_{i-1} \exp(j\phi_{i-1}) D \exp(ji\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau t) \quad (4.4)$$

pour $i = 2, \dots, M$, avec $G_i > 0$ et $-\pi < \phi_i < \pi$.

Le vecteur de données reçu $\mathbf{y}(t)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_M(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times D \exp(j\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau t) \\ G_1 \exp(j\phi_1) \times D \exp(j2\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau t) \\ \vdots \\ G_{M-1} \exp(j\phi_{M-1}) \times D \exp(jM\pi \sin(\theta)) \exp(jS\tau t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_1 \exp(j\phi_1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & G_{M-1} \exp(j\phi_{M-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(j\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j2\pi \sin(\theta)) \\ \vdots \\ \exp(jM\pi \sin(\theta)) \end{bmatrix} D \exp(jS\tau t) \\ &= \boxed{\mathbf{\Gamma} \mathbf{a}(\theta) s(t)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

avec $\mathbf{\Gamma}$ la matrice modélisant le gain et phase mismatch

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_1 \exp(j\phi_1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & G_{M-1} \exp(j\phi_{M-1}) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

et $\mathbf{a}(\theta)$ étant le vecteur directionnel *idéal* correspondant à la direction θ

$$\mathbf{a}(\theta) = \begin{bmatrix} \exp(j\pi \sin(\theta)) \\ \exp(j2\pi \sin(\theta)) \\ \vdots \\ \exp(jM\pi \sin(\theta)) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

et $s(t) = D \exp(jS\tau t)$.

La matrice du gain/phase mismatch $\Gamma(\theta)$ dépend généralement de l'angle d'arrivée θ , i.e. $\Gamma = \Gamma(\theta)$.

4.2 Caractérisation expérimentale du gain et phase mismatch

Afin de comprendre le comportement des coefficients de $\Gamma(\theta)$ en fonction de θ , une mesure expérimentale a été effectuée avec le radar MIMO TI AWR2243 ayant 16 antennes R_X et 9 antennes T_X , donc ce radar est équivalent à un radar SIMO de $16 \times 9 = 144$ antennes Rx. Parmi ces 144 éléments, un sous ensemble de 82 éléments a été choisit pour la caractérisation, et donc $M = 82$ dans le modèle en Eq (4.4).

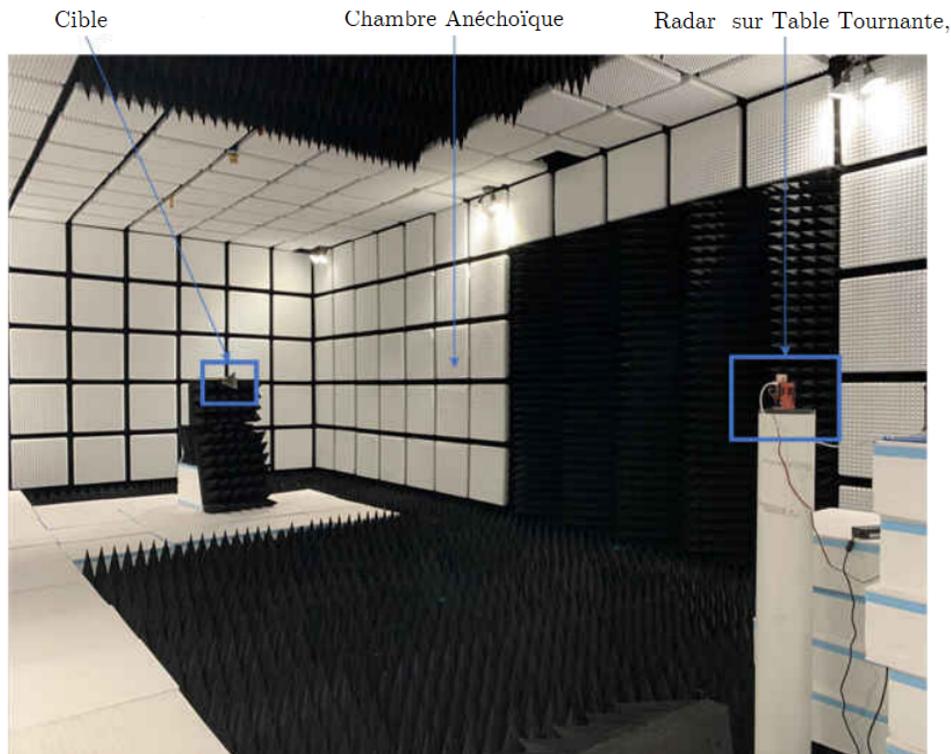


Figure 4.1: Dispositif expérimental de la mesure de l'angle d'arrivée.

Le but étant de voir comment les imperfections en gain et en phase, $G_i(\theta)$ et $\phi_i(\theta)$ dans Eq. 4.6, changent en fonction de l'angle d'arrivée θ . A cet effet, une série de mesure a été effectuée sur l'intervalle $[-40, 40]$ deg avec un pas de 5 deg.

Le radar est alors positionné sur une table tournante, et une cible ayant un RCS (Radar Cross Section) de 10 dBsm est positionnée à 2 mètres du radar.

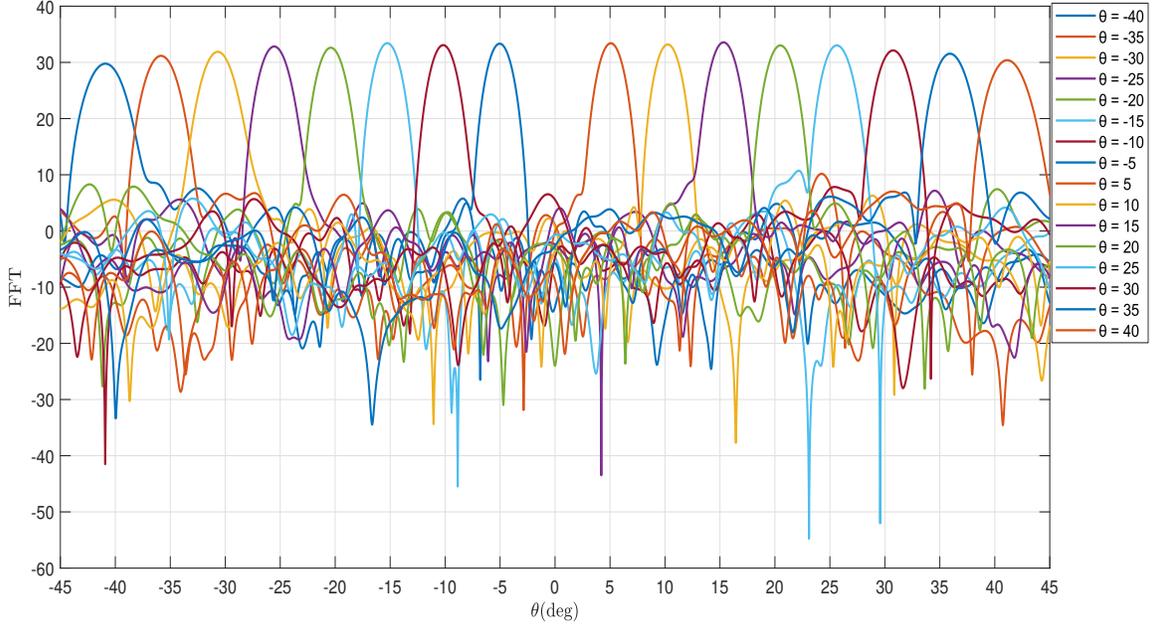


Figure 4.2: FFT des mesures montrant la position angulaire de la cible.

Nous allons d'abord définir les vecteurs

$$\mathbf{g}(\theta) = \begin{bmatrix} G_1(\theta) \\ G_2(\theta) \\ \vdots \\ G_{M-1}(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

et

$$\boldsymbol{\phi}(\theta) = \begin{bmatrix} \phi_1(\theta) \\ \phi_2(\theta) \\ \vdots \\ \phi_{M-1}(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Ensuite, nous allons prendre la moyenne des $\mathbf{g}(\theta_k)$ et $\boldsymbol{\phi}(\theta_k)$ pour les mesures $k = 1, 2, \dots, N$, avec $N = 17$.

$$\bar{\mathbf{G}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{g}(\theta_k) \quad (4.10)$$

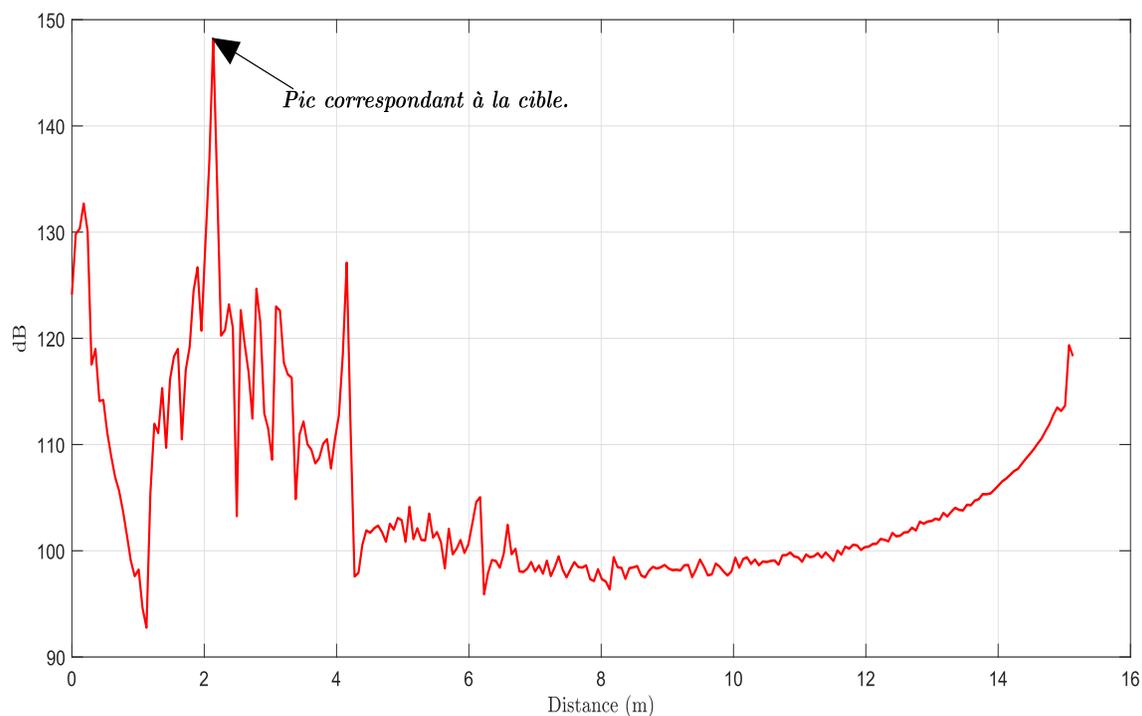


Figure 4.3: Range profile montrant la position radiale de la cible

aussi

$$\bar{\phi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi(\theta_k) \quad (4.11)$$

Nous pouvons aussi définir, pour un angle d'arrivée donné θ , pour $\theta = -40, -35, \dots, 40$ deg, la moyenne du mismatch en gain $\bar{G}(\theta)$ définie comme suit

$$\bar{G}(\theta) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} G_i(\theta) \quad (4.12)$$

et la moyenne du phase mismatch $\bar{\phi}(\theta)$

$$\bar{\phi}(\theta) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} \phi_i(\theta) \quad (4.13)$$

On constate bien en figure 5.6 que l'imperfection en gain est comprise entre 1.25 et 0.85, c'est à dire des déviations en gain allant de -0.7 dB jusqu'à 1 dB. Étant donné que $\bar{G}(\theta)$ est une variable aléatoire, et avec $N = 17$ mesures correspondantes aux angles

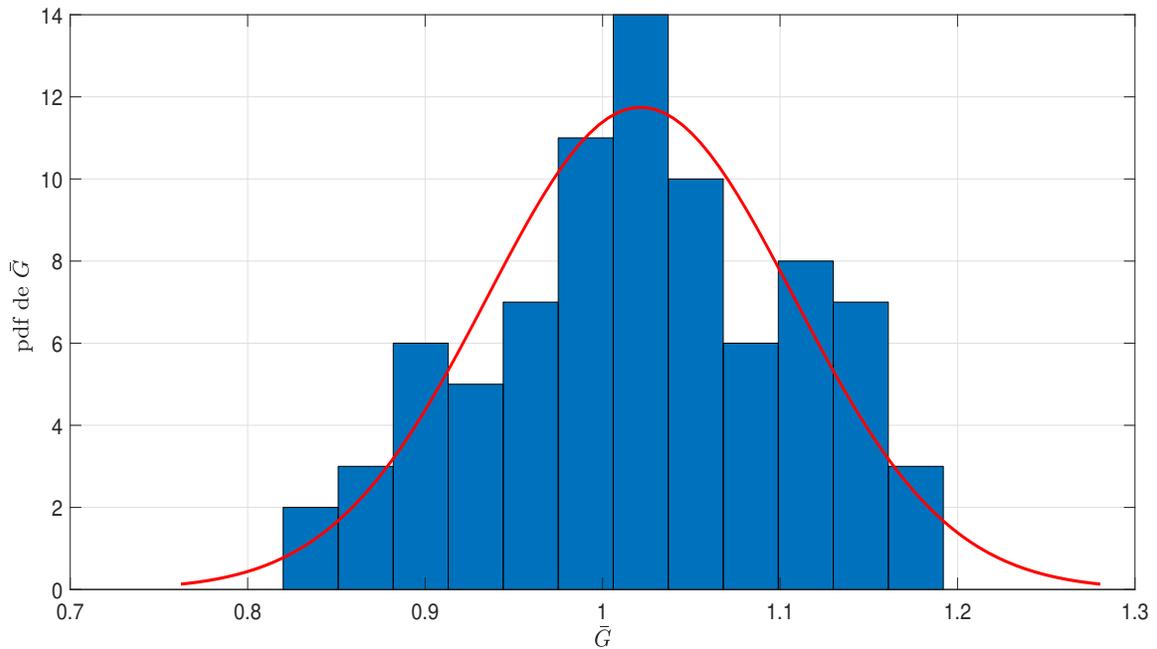


Figure 4.4: Pdf du gain mismatch \bar{G}

d'arrivée allant de -40 deg jusqu'à 40 deg par pas de 5 deg, nous pouvons alors la caractériser avec une moyenne $\mu_{\bar{G}}$ et une variance $\sigma_{\bar{G}}$, avec

$$\mu_{\bar{G}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{G}(\theta_k) = \frac{1}{17} \sum_{k=1}^{17} \bar{G}(\theta_k) = 1.04. \quad (4.14)$$

et

$$\sigma_{\bar{G}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\bar{G}(\theta_k) - \mu_{\bar{G}})^2} = 0.1 \quad (4.15)$$

Nous pouvons aussi modéliser le gain mismatch G comme étant une variable aléatoire normalement distribuée avec $G \sim \mathcal{N}(1, 0.01)$. De même, pour la phase $\bar{\phi}(\theta)$, les mesures donnent la courbe en figure 5.7. On constate bien que le phase mismatch est essentiellement compris entre -10 deg et 10 deg.

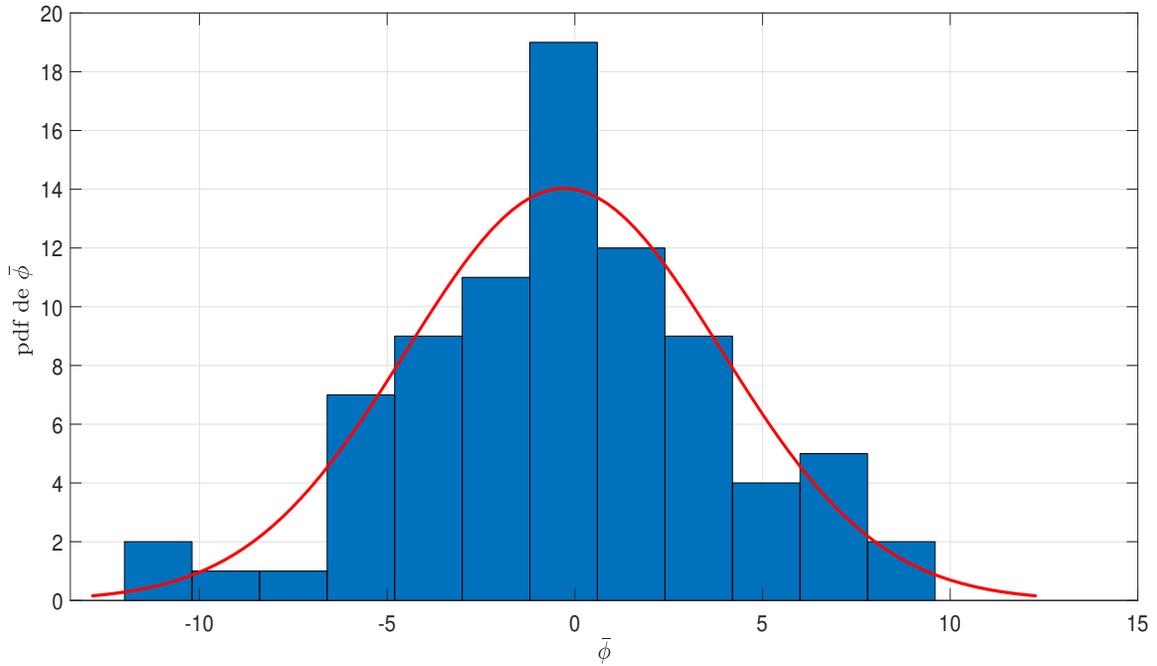


Figure 4.5: Pdf du phase mismatch $\bar{\phi}$

La moyenne $\mu_{\bar{\phi}}$ ainsi que la variance $\sigma_{\bar{\phi}}$ vaudront

$$\mu_{\bar{\phi}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\phi}(\theta_k) = \frac{1}{17} \sum_{k=1}^{17} \bar{\phi}(\theta_k) = -0.11 \text{ deg.} \quad (4.16)$$

$$\sigma_{\bar{\phi}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\bar{\phi}(\theta_k) - \mu_{\bar{\phi}})^2} = 9 \text{ deg} \quad (4.17)$$

et nous pouvons donc modéliser le phase mismatch par une variable normale, en deg, avec $\phi \sim \mathcal{N}(-0.11, 81)$.

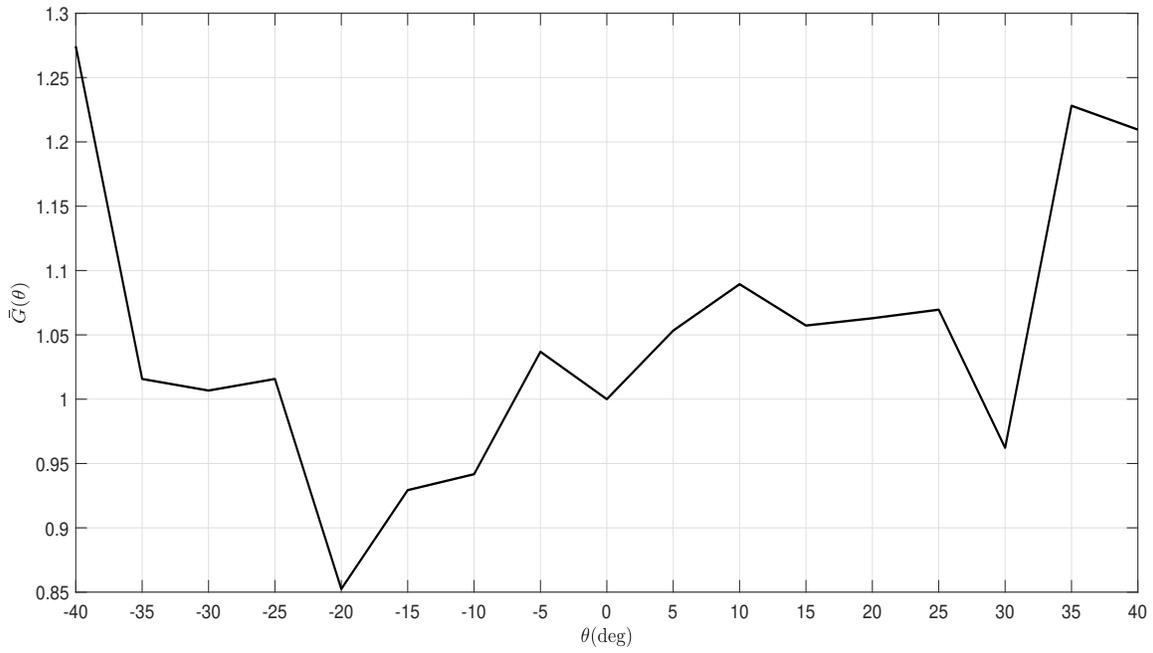


Figure 4.6: Évolution de $\bar{C}(\theta)$ en fonction de θ

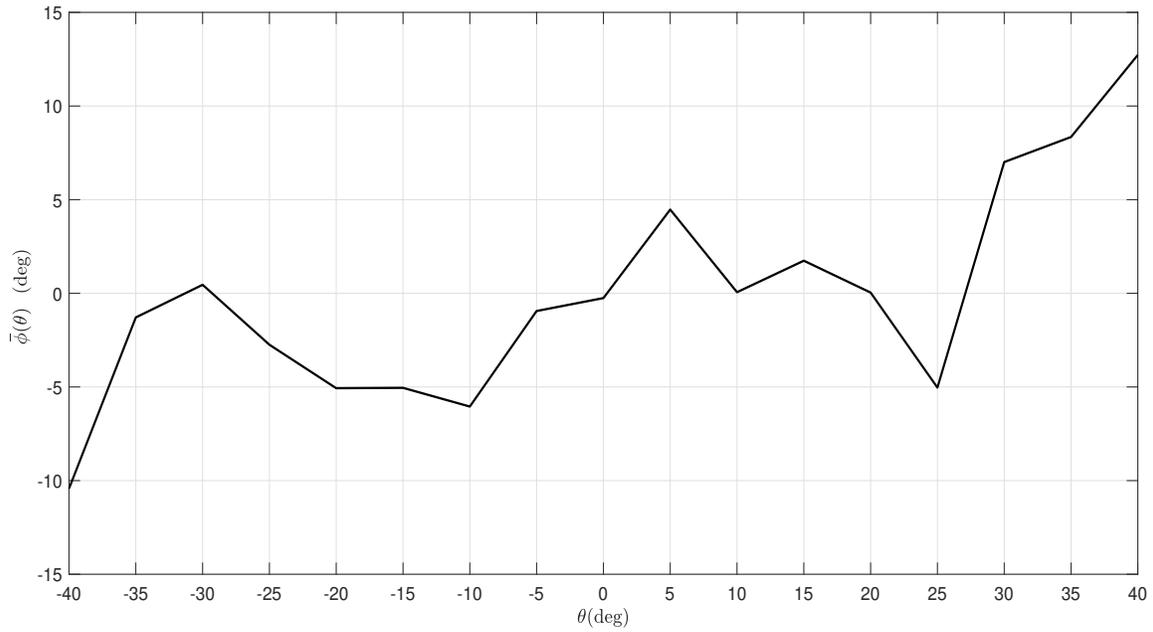


Figure 4.7: Évolution de $\bar{\phi}(\theta)$ en fonction de θ

4.3 Influence du gain et phase mismatch sur MU-SIC et calibration

Le modèle de données correspondant au cas où le réseau n'est pas parfait s'obtient en injectant le résultat obtenu en Eq. 5.5 dans Eq. 3.9. Pour K sources arrivant sur le réseau non-idéal de taille M , le signal reçu sera alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \sum_{k=1}^K \mathbf{\Gamma}(\theta_k) \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{n}(t) \\
&= [\mathbf{\Gamma}(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{\Gamma}(\theta_2) \mathbf{a}(\theta_2) \quad \dots \quad \mathbf{\Gamma}(\theta_K) \mathbf{a}(\theta_K)] \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(t) \\
&= [\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_K] \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \\
&= \mathbf{Z} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

avec $\mathbf{z}_i = \mathbf{\Gamma}(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_i)$, et $\mathbf{n}(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$.

La matrice de covariance des données reçues sera alors, en reprenant le même raisonnement utilisé pour obtenir Eq. 3.11 mais cette fois-ci avec \mathbf{Z} au lieu de \mathbf{A} , on obtient

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbb{E}(\mathbf{y}(t) \mathbf{y}^H(t)) = \boxed{\mathbf{Z} \mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}} \mathbf{Z}^H + \sigma^2 \mathbf{I}} \tag{4.19}$$

Vue que maintenant les nouveaux vecteurs directionnels sont $\mathbf{\Gamma}(\theta) \mathbf{a}(\theta)$ au lieu de $\mathbf{a}(\theta)$, Eq. 3.8 sera alors

$$\boxed{[\mathbf{\Gamma}(\theta_i) \mathbf{a}(\theta_i)]^H \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k; j = k + 1, k + 2, \dots, N.} \tag{4.20}$$

et le nouveau spectre de MUSIC en prenant en compte ces imperfections devient alors [10]

$$\boxed{P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\|[\mathbf{\Gamma}(\theta) \mathbf{a}(\theta)]^H \mathbf{E}_n\|}} \tag{4.21}$$

La calibration exploite le spectre définie en Eq. 4.21 au lieu de Eq. 2.11 pour obtenir des estimations plus exactes des angles d'arrivée.

Exemple : Soit un réseau de 36 antennes, et deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ arrivant des directions 38 deg et 45 deg, respectivement. La valeur du SNR vaut 15 dB. La figure 5.8 montre l'effet des imperfections en gain et en phase sur le spectre de MUSIC définie en Eq. 2.12. Dans le cas ci-dessous, les éléments de $\mathbf{\Gamma}(\theta)$ satisfaisent $G_i \sim \mathcal{N}(1, 0.01)$ et $\phi_i \sim \mathcal{N}(0, 400)$.

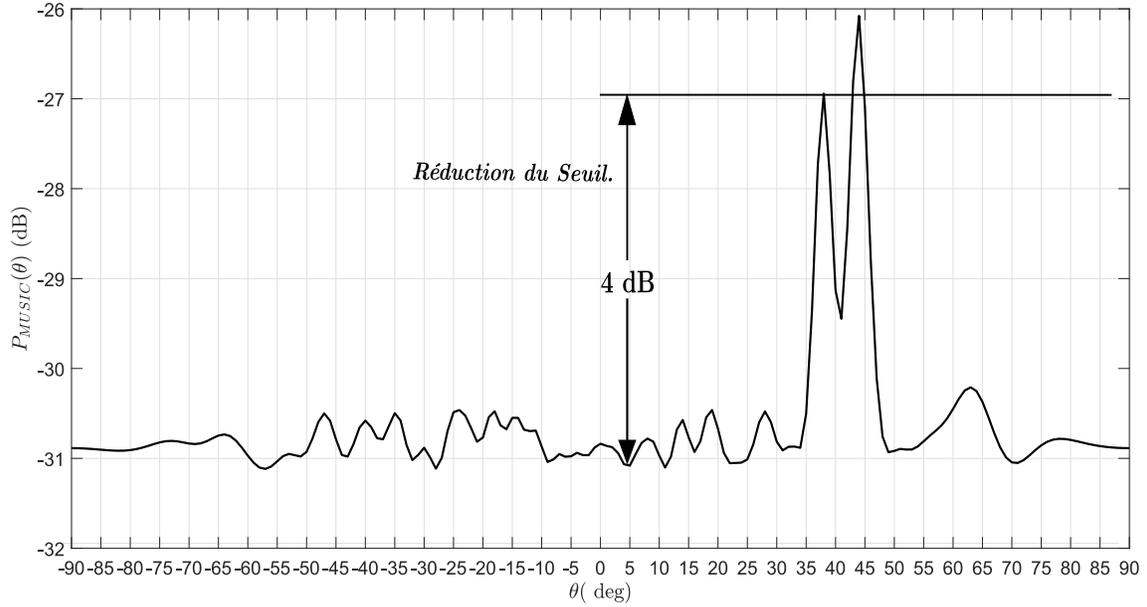


Figure 4.8: Effet des imperfections en gain et en phase sur le spectre de MUSIC définie en Eq. 2.11

On peut remarquer que le gain et phase mismatch réduisent le seuil du bruit du spectre de MUSIC. Nous pouvons aussi constater une augmentation de la largeur des lobes principaux (à comparé avec la figure 2.2), et donc la résolution angulaire est également diminuée en présence de ces imperfections.

Et donc, pratiquement, après avoir expérimentalement caractérisé et enregistré les valeurs de $\mathbf{\Gamma}(\theta)$, en emploie alors eq. 4.21 pour estimer les positions angulaires des cibles.

Durant les mesures, et spécifiquement pour le radar AWR2243 avec le réseau MIMO ayant 82 éléments, il a été constaté que $\mathbf{\Gamma}(\theta)$ ne change pas drastiquement en fonction de θ , et est approximativement constant, et donc une calibration peut tout simplement être faite avec $\mathbf{\Gamma}(0)$. La figure 4.9 montre le spectre de MUSIC obtenu avec trois cibles se trouvant à la même portée $R = 2$ m, figure 4.3, mais à des angles de 5 deg, 6 deg et 10.2 deg, et donc trois cibles cohérentes, avant la calibration et avant le spatial

smoothing. D'abord une calibration a été faite en multipliant $\mathbf{y}(t)$ par $\mathbf{\Gamma}^{-1}(0)$, la figure 4.10 montre le spectre de MUSIC appliqué sur $\mathbf{\Gamma}^{-1}(0)\mathbf{y}(t)$, et enfin un spatial smoothing avec des sous-réseaux de taille $M = 41$ est effectué après la calibration sur $\mathbf{\Gamma}^{-1}(0)\mathbf{y}(t)$, figure 4.11.

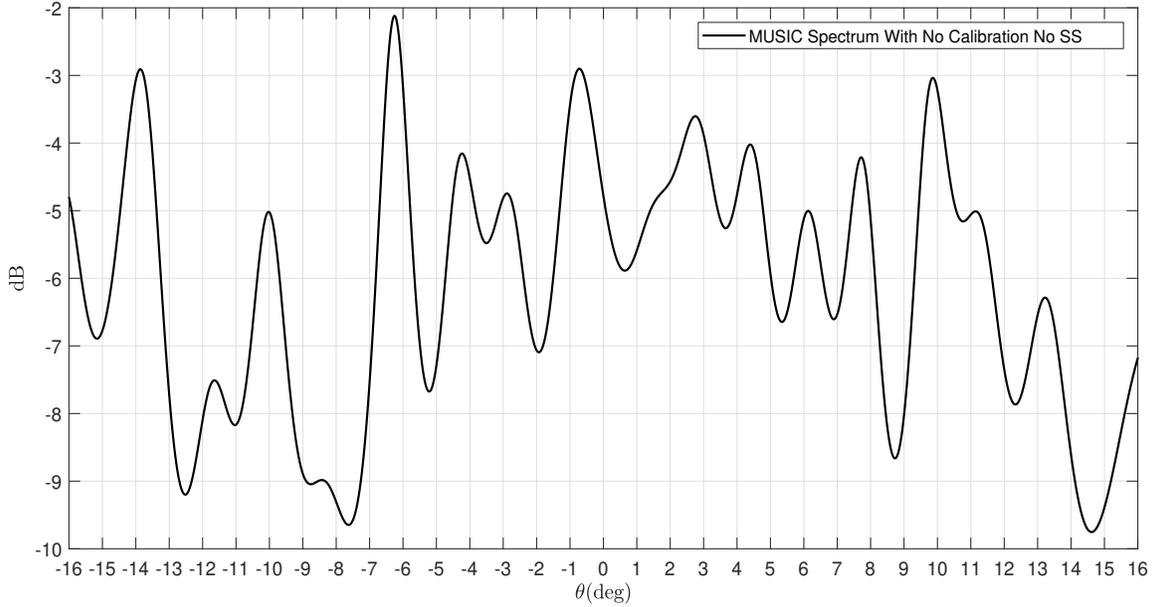


Figure 4.9 : Spectre de MUSIC pour trois cibles à la même portée de 2 mètres et à des angles de 5, 6, et 10.2 deg, avant la calibration et avant le spatial smoothing.

la figure 4.10 établit une comparaison entre la résolution de MUSIC contre celle d'une FFT pour le radar MIMO de 82 éléments après calibration et après spatial smoothing. On rappelle que pour un réseau de taille N la résolution d'une FFT est de $2/N$ rad, et donc de 1.4 deg pour le réseau de 82 éléments. Les cibles se situant à 5 deg et 6 deg ne sont pas séparées avec la FFT, mais sont séparées avec MUSIC, d'où le nom d'*algorithme super-résolution*.

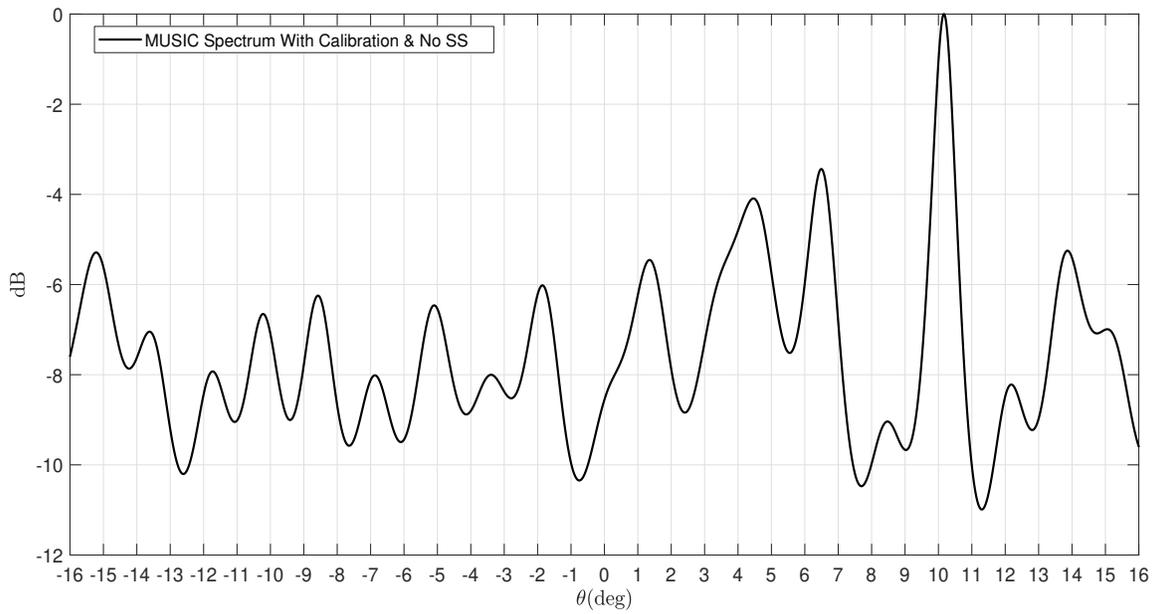


Figure 4.10: Spectre de MUSIC pour trois cibles à la même portée de 2 mètres et à des angles de 5, 6, et 10.2 deg, après la calibration avec $\Gamma^{-1}(0)$ et avant le spatial smoothing.

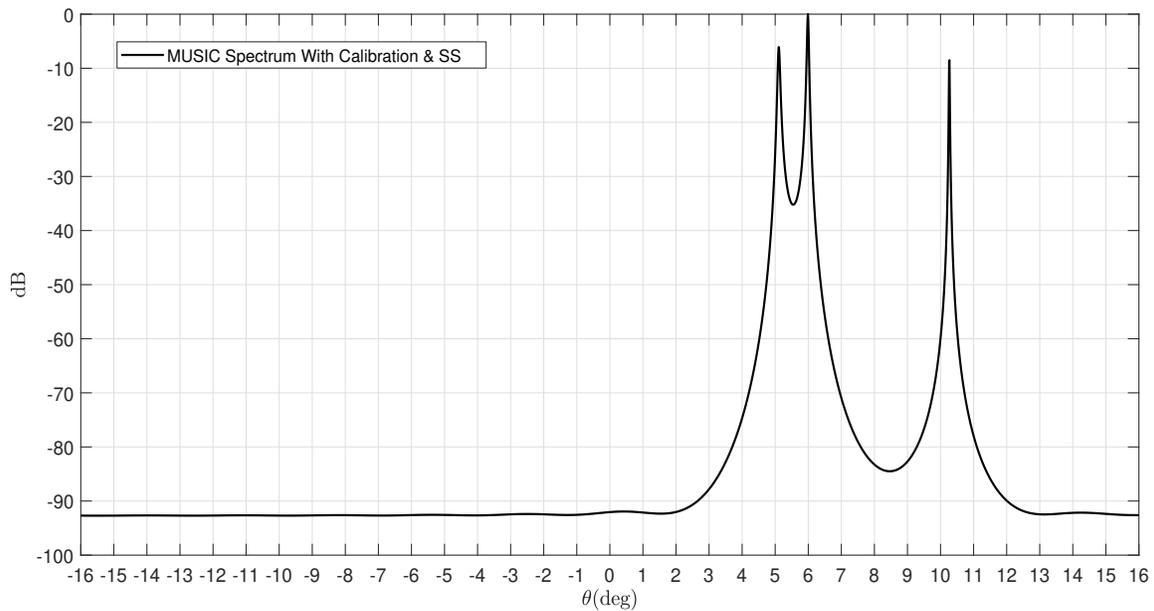


Figure 4.11: Spectre de MUSIC pour trois cibles à la même portée de 2 mètres et à des angles de 5, 6, et 10.2 deg, après la calibration avec $\Gamma^{-1}(0)$ et après le spatial smoothing.

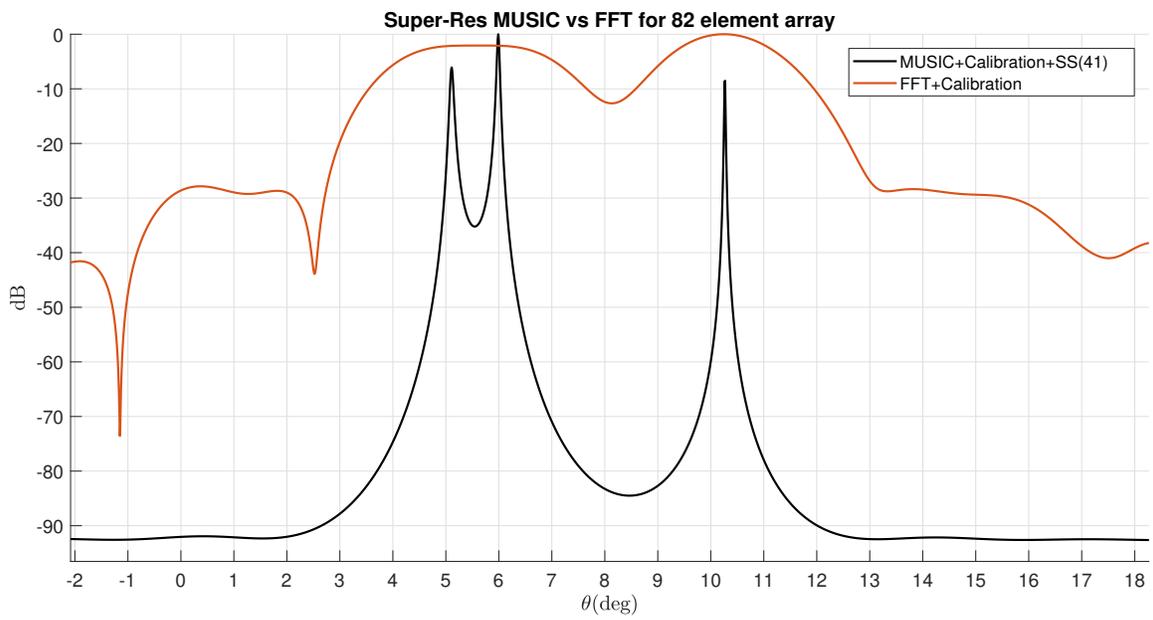


Figure 4.12: Comparaison de la résolution de MUSIC vs une FFT pour le réseau de 82 éléments du radar AWR2243 après calibration et après spatial smoothing

Conclusion

Pour résumer, nous avons vu dans le premier chapitre le principe de fonctionnement du radar FMCW, le radar SIMO-FMCW et enfin MIMO-FMCW. Puis nous avons introduit la méthode d'estimation des angles d'arrivée avec une FFT, méthode très répondu en pratique à cause de la simplicité de son implémentation. Nous avons aussi constaté que la résolution de la méthode FFT était cependant limité par le nombre d'antennes réceptrices. Pour obtenir une résolution angulaire supérieure, l'algorithme MUSIC, appartenant à la famille des algorithmes dite super-résolution, a été introduit au second chapitre.

Le troisième et quatrième chapitres ont ensuite traité de deux problèmes rencontrés souvent qui détériorent les performances de l'algorithme MUSIC, à savoir le problème de cohérence des signaux sources ainsi que le problème du gain et phase mismatch du réseau d'antenne du radar MIMO. Nous avons par la suite introduit le spatial smoothing pour remédier au problème de cohérence des signaux sources qui, pour les radar FMCW, se produit quand les cibles se trouvent à la même portée, et ensuite la méthode de calibration pour adresser le problème d'imperfections en gain et en phase.

Un axe de recherche qui serait intéressant à poursuivre serait l'étude d'implémentations efficace de l'algorithme MUSIC ayant un court temps d'exécution. Les algorithmes super-résolutions permettent d'augmenter la résolution angulaire comparer à une FFT mais au détriment du temps d'exécution. En effet, vus que ces radars MIMO-FMCW seront déployer pour des applications automotive, il est impératif que le radar soit en mesure d'estimer les positions angulaire des cibles dans une intervalle de temps suffisamment courte pour permettre à l'ordinateur de bord d'avoir assez de temps pour prendre une décision en cas d'une éventuelle collision.

Bibliographie

- [1] Jelena Kocić, Nenad Jovičić, and Vujo Drndarević. Sensors and sensor fusion in autonomous vehicles. In *2018 26th Telecommunications Forum (TELFOR)*, pages 420–425, 2018.
- [2] Jorge Vargas, Suleiman Alswiss, Onur Toker, Rahul Razdan, and Joshua Santos. An overview of autonomous vehicles sensors and their vulnerability to weather conditions. *Sensors*, 21(16):5397, 2021.
- [3] Sandeep Rao. Introduction to mmwave sensing: Fmcw radars. *Texas Instruments (TI) mmWave Training Series*, pages 1–11, 2017.
- [4] Karthik Ramasubramanian and T Instruments. Using a complex-baseband architecture in fmcw radar systems. *Texas Instruments*, 19, 2017.
- [5] Xinrong Li, Xiaodong Wang, Qing Yang, and Song Fu. Signal processing for tdm mimo fmcw millimeter-wave radar sensors. *IEEE Access*, 9:167959–167971, 2021.
- [6] Sandeep Rao. Mimo radar. *Texas Instruments*, SWRA554A, May 2017–Revised July 2018.
- [7] R. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(3):276–280, 1986.
- [8] QT Zhang. Probability of resolution of the music algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(4):978–987, 1995.
- [9] Tie-Jun Shan, M. Wax, and T. Kailath. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(4):806–811, 1985.
- [10] Michael Schoor and Bin Yang. Subspace based doa estimation in the presence of correlated signals and model errors. In *2009 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 2161–2164, 2009.

- [11] Mats Viberg, Maria Lanne, and Astrid Lundgren. Chapter 3 - calibration in array processing. In T. Engin Tuncer and Benjamin Friedlander, editors, *Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation*, pages 93–124. Academic Press, Boston, 2009.
- [12] S.U. Pillai and B.H. Kwon. Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 37(1):8–15, 1989.
- [13] A. Paulraj and T. Kailath. Direction of arrival estimation by eigenstructure methods with unknown sensor gain and phase. In *ICASSP '85. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 10, pages 640–643, 1985.
- [14] Harry L Van Trees. *Optimum array processing: Part IV of detection, estimation, and modulation theory*. John Wiley & Sons, 2004.

Annexe

Ce qui suit est un ensemble de définitions et rappels d'algèbre linéaire nécessaire pour comprendre le principe derrière l'algorithme MUSIC [14].

Rappels et Définitions d'Algèbre Linéaire

- On dit qu'un vecteur \mathbf{v} est un *vecteur propre* de la matrice \mathbf{A} avec une valeur propre λ si \mathbf{v} satisfait la relation suivante

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (5.1)$$

- L'hermitien d'une matrice \mathbf{A} , dénoté \mathbf{A}^H , est défini comme étant le conjugué de la transposée de \mathbf{A} , i.e. $\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^T)^*$.
- Soit une séquence de vecteurs $\mathbf{y}(t)$, avec $t = 1, 2, \dots, N_S$, et soit $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1) \ \mathbf{y}(2) \ \dots \ \mathbf{y}(N_S)]$ La matrice de covariance du vecteur \mathbf{y} est définie comme suit

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbb{E}(\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)). \quad (5.2)$$

En pratique, avec un nombre finis d'échantillons, on utilise une *estimée* de la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ définie comme suit

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \approx \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \frac{1}{N_S} \sum_{t=1}^{N_S} \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t) = \frac{1}{N_S} \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H. \quad (5.3)$$

- Le rang d'une matrice \mathbf{A} est le nombre de colonnes indépendantes de \mathbf{A} .
- Une matrice carrée $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_N]$ de taille N et ayant un rang $k < N$ peut se décomposer comme suit

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H \quad (5.4)$$

où \mathbf{v}_k sont les vecteurs propres de \mathbf{A} , et λ_k les valeurs propres correspondantes. $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_k]$ et $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$

- Le *column space* d'une matrice $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_N]$ est défini comme suit

$$\text{Column Space}(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N\} \quad (5.5)$$

c'est l'ensemble engendré par les combinaisons linéaires des colonnes de \mathbf{A} .

- Le *null space* d'une matrice \mathbf{A} est l'ensemble de vecteurs \mathbf{v}_k satisfaisants

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad (5.6)$$

- Une matrice carrée \mathbf{A} s'écrivant $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^H$, où \mathbf{a}_i est de taille $N \times 1$ et $\sigma_i > 0$, a un rang $k < N$ et satisfait les relations suivantes

- \mathbf{A} possède k vecteurs propres \mathbf{v}_i correspondants à une valeur propre $\lambda_i > 0$, pour $i = 1, 2, \dots, k$.
- $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} = \text{Column Space}(\mathbf{A})$
- \mathbf{A} possède $N - k$ vecteurs propres \mathbf{v}_i correspondants à une valeur propre nulle $\lambda_i = 0$, pour $i = k + 1, k + 2, \dots, N$, i.e.

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, N. \quad (5.7)$$

- $\text{span}\{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_N\} = \text{Null Space}(\mathbf{A})$
- Les vecteurs propres \mathbf{v}_i , pour $i = 1, 2, \dots, N$ étant orthogonaux entre eux, nous avons alors la relation suivante sur laquelle l'algorithme MUSIC se base [7]

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} \perp \{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \dots, \mathbf{v}_N\} \\ \implies & \boxed{\mathbf{a}_i^H \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k; j = k + 1, k + 2, \dots, N.} \end{aligned} \quad (5.8)$$

i.e. les colonnes de \mathbf{A} sont orthogonales aux $N - k$ vecteurs propres $\mathbf{v}_i, i = k + 1, k + 2, \dots, N$ de \mathbf{A} correspondants à la valeur propre 0.

- Si la matrice \mathbf{A} est hermitienne, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$, alors toutes les valeurs propres de \mathbf{A} seront positives, i.e. $\lambda_i \geq 0$, et la plus petite valeur propre sera au plus nulle.
- Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A} + \sigma^2 \mathbf{I}$, avec $\sigma \geq 0$, sont $\lambda_i + \sigma^2$, où $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$ sont les valeurs propres de \mathbf{A} , et les vecteurs propres de $\mathbf{A} + \sigma^2 \mathbf{I}$ sont les mêmes que les vecteurs propres \mathbf{v}_i de \mathbf{A} .