



Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Automatique
Laboratoire de Commande des
Processus



Thèse de Doctorat en Sciences

Présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur
en Sciences en Génie Electrique

Spécialité : Automatique

Par :

Hakim ACHOUR

Magister en Automatique, ENP

Commande Robuste et Tolérante aux Défauts. Approche Multimodèle

Sous la direction de M. Djamel BOUKHETALA Professeur à l'ENP

Présentée et soutenue publiquement le 10/12/2022

Composition du Jury :

Président :	M. BOUDJEMA Farès	Professeur	à l'ENP
Directeur de thèse :	M. BOUKHETALA Djamel	Professeur	à l'ENP
Examineurs :	M. CHAKIR Messaoud	MCA	à l'ENP
	M. BALI Noureddine	Professeur	à l'USTHB
	M. BENHADOUGA Seddik	Professeur	à l'université de Bordj Bouarreridj
	M. MEKKI Hamza	MCA	à l'université de M'Sila



Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Automatique
Laboratoire de Commande des
Processus



Thèse de Doctorat en Sciences

Présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur
en Sciences en Génie Electrique

Spécialité : Automatique

Par :

Hakim ACHOUR

Magister en Automatique, ENP

Commande Robuste et Tolérante aux Défauts. Approche Multimodèle

Sous la direction de M. Djamel BOUKHETALA Professeur à l'ENP

Présentée et soutenue publiquement le 10/12/2022

Composition du Jury :

Président :	M. BOUDJEMA Farès	Professeur	à l'ENP
Directeur de thèse :	M. BOUKHETALA Djamel	Professeur	à l'ENP
Examineurs :	M. CHAKIR Messaoud	MCA	à l'ENP
	M. BALI Noureddine	Professeur	à l'USTHB
	M. BENHADOUGA Seddik	Professeur	à l'université de Bordj Bouarreridj
	M. MEKKI Hamza	MCA	à l'université de M'Sila



Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer mes remerciements et ma gratitude à celui qui m'a donné la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail "ALLAH".

Le présent travail a été effectué au sein du Laboratoire de Commande des Processus (LCP) de l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP), sous la direction de Monsieur le Professeur Djamel Boukhetala, que je tiens à remercier très chaleureusement pour son encadrement, ses directives, son assistance, ses conseils et surtout pour la confiance qu'il m'a accordé.

Je remercie vivement, le président du jury Mr. Farès BOUDJEMA Professeur à l'ENP, les membres du jury, Mr. Messaoud CHAKIR Maître de Conférences à l'ENP, Mr. Nouredine BALI Professeur à l'USTHB, Mr. Seddik BENHADOUGA Professeur à l'université de Bordj Bouarreridj, et Mr. Hamza MEKKI Maître de Conférences à l'université de M'Sila, pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de faire partie du jury de thèse.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département d'Automatique, et tous les membres du LCP pour leurs encouragements et leur soutien.

Sans oublier tous les membres de ma chère famille pour leur patience et soutien permanent.

Je tiens également à remercier tous mes amis pour leur soutien et leur encouragement.

ملخص:

تتناول هذه الأطروحة نظام تحكم متحمل للخلل (FTC) للأنظمة الغير خطية الممثلة بنماذج ضبابية من نوع Takagi-Sugeno (T-S) ذات متغيرات الفرضية غير قابلة للقياس. تم اعتماد إستراتيجية نظام FTC للنماذج الضبابية ذات الإرتياب والخطأ وكذلك للنماذج ذات خلل في العضو المنفذ للتحكم. قمنا بإقتراح نظام FTC شامل للأنظمة الغير دقيقة الموصفة بنماذج ضبابية من نوع T-S ذات متغيرات الفرضية غير قابلة للقياس. تم عرض النتيجة الرئيسية لهذا النظام على شكل متراجحة مصفوفة خطية. قمنا بحل هذه المتراجحة باستخدام خوارزمية PSO باستعمال إعداد واحد مثبت مسبقاً. في حالة وجود خلل مؤثر في ديناميكية النظام، إعتدنا نظام FTC نشط. في هذا السياق، إستخدمنا راصد من نوع PI و PMI في نظام التحكم من أجل ضمان إستعاب خلل العضو المنفذ للتحكم. كما قمنا بإقتراح إستراتيجية نظام FTC متن من أجل ضمان المتانة في حالة وجود الإضطرابات الخارجية. تم عرض نتيجة هذه الإستراتيجية على شكل متراجحة مصفوفة خطية.

كلمات مفتاحية: نموذج Takagi-Sugeno، متعدد النماذج، متغيرات الفرضية، تحكم متن، متراجحة مصفوفة خطية (LMI)، معيار H_{∞} ، نظام تحكم متحمل للخلل، خوارزمية PSO، نظام لا خطي.

Abstract:

This thesis deals with the fault tolerant control problem of nonlinear systems described by Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems with unmeasurable premise variables. The fault tolerant control strategy is considered in the case of T-S models with uncertainties and also with actuator faults. A passive FTC design approach is proposed for uncertain systems described by T-S models with unmeasurable premise variables. The main result is formulated in term of LMI constraints. These later are solved using Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm with only one predefined parameter. An active FTC approach is considered in the case of consistent faults that can modify the system dynamic. In this context, PI and PMI observers are used in the control scheme to ensure actuator faults compensation. In order to ensure robustness with respect to external disturbances, a robust FTC control strategy is proposed. The result of this control strategy is formulated in term of linear matrix inequalities (LMI).

Keywords: Takagi-Sugeno model, multimodel, premise variables, robust control, linear matrix inequality, H_{∞} criterion, fault tolerant control, PSO algorithm, nonlinear system.

Résumé:

Cette thèse traite le problème de la commande tolérante aux défauts (FTC) des systèmes non linéaires représentés par les systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S) à variables de prémisses non mesurables. La stratégie de commande tolérante aux défauts est considérée dans le cas de modèles T-S avec incertitudes de modélisation et en présence de défauts actionneur. Une synthèse de commande FTC passive est proposée pour les systèmes incertains décrits par des modèles T-S à variables de prémisses non mesurables. Le résultat principal est présenté sous forme de contraintes LMI. Ces contraintes sont résolues en utilisant l'algorithme PSO avec un seul paramètre prédéfini. Une approche FTC active est considérée dans le cas de défauts ayant un impact important sur la dynamique du système. Dans ce contexte, les observateurs PI et PMI sont utilisés dans le schéma de commande afin de permettre à la loi de commande de compenser les défauts actionneur. Afin d'assurer la robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures, une stratégie de commande FTC robuste est proposée. Le résultat de cette stratégie de commande est présenté sous forme de contraintes LMI.

Mot clés: Modèle de Takagi-Sugeno, multimodèle, variables de prémisses, commande robuste, LMI, critère H_{∞} , commande tolérante aux défauts, algorithme PSO, système non linéaire.

Table des matières

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Liste des Abréviations

Introduction générale..... 13

Chapitre 1 : Tolérance aux défauts dans les systèmes dynamiques

1.1 Introduction..... 17

1.2 Généralités sur le diagnostic..... 17

1.2.1 Classification des défauts..... 19

a. Défauts actionneurs..... 19

b. Défauts capteurs..... 19

c. Défauts système..... 19

1.2.2 Génération de résidus..... 20

1.3 Méthodes de diagnostic à base d'observateurs 21

1.3.1 Détection des défauts actionneurs avec la structure DOS 22

1.3.2 Détection des défauts actionneurs avec la structure GOS 23

1.3.3 Détection des défauts capteurs avec la structure DOS 23

1.3.4 Détection des défauts capteurs avec la structure GOS 24

1.4 Systèmes tolérants aux défauts..... 25

1.4.1 Approche passive..... 25

1.4.2 Approche active..... 26

1.5 Conclusion..... 28

Chapitre 2 : Modélisation et commande des systèmes décrits par des modèles T-S

2.1 Introduction..... 30

2.2 Représentation des systèmes dynamiques par les modèles T-S..... 31

2.3 Construction de modèles T-S..... 31

2.4 Etude de la stabilité des systèmes décrits par des modèles T-S..... 33

2.5 Stabilisation par une commande de type PDC..... 33

2.5.1 Relaxation des conditions de stabilisation..... 34

2.5.2	Stabilisation avec observateur flou.....	35
2.5.3	Stabilisation avec l'approche H^∞	36
2.5.4	Stabilisation à base d'observateur et approche H^∞	37
2.6	Conclusion.....	41

Chapitre 3 : Commande robuste des systèmes flous de type T-S incertains et perturbés

3.1	Introduction.....	43
3.2	Stabilisation des systèmes décrits par des modèles T-S incertains à VPM.....	44
3.2.1	Exemple 1.....	47
3.3	Synthèse de commande avec observateur T-S	49
3.3.1	Exemple 2.....	54
3.4	Stabilisation des systèmes décrits par des modèles T-S incertains à VPNM.....	55
3.4.1	Cas particulier de matrices de sortie constantes	61
3.4.2	Relaxation des conditions de stabilité.....	62
3.4.3	Algorithme d'optimisation PSO.....	66
3.4.4	Exemple 1.....	67
3.4.5	Exemple 2.....	70
3.5	Conclusion.....	75

Chapitre 4 : Commande tolérante aux défauts des systèmes flous de type T-S

4.1	Introduction.....	77
4.2	Commande tolérante aux défauts.....	78
4.3	Commande tolérante aux défauts actionneurs à VPM.....	79
4.3.1	Observateur PI.....	80
4.3.2	Observateur PMI.....	83
4.3.3	Exemple 1.....	86
4.4	Commande tolérante aux défauts actionneurs à VPNM.....	92
4.4.1	Observateur PI.....	93
4.4.2	Observateur PMI.....	101
4.4.3	Exemple 2.....	107
4.5	Commande robuste tolérante aux défauts actionneurs à VPNM.....	113
4.5.1	Observateur PI.....	113
4.5.2	Observateur PMI.....	119

4.5.3 Exemple 3.....	123
4.6 Conclusion.....	129
Conclusion générale et perspectives.....	131
Références bibliographiques.....	134
Annexe A.....	143
Annexe B.....	146

Liste des Figures

Figure	Titre	Page
Figure 1.1	Evolution temporelle d'un défaut: a) brusque, b) graduel et c) intermittent	20
Figure 1.2	Structure DOS pour la détection et la localisation de défauts d'actionneurs	22
Figure 1.3	Structure GOS pour la détection et la localisation de défauts d'actionneurs	23
Figure 1.4	Structure DOS pour la détection et la localisation de défauts de capteurs	23
Figure 1.5	Structure GOS pour la détection et la localisation de défauts de capteurs	24
Figure 1.6	Classification des techniques FTC	25
Figure 1.7	Principe de la commande tolérante aux défauts	26
Figure 2.1	Schéma de commande avec observateur	38
Figure 3.1	Allure des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$	49
Figure 3.2	Allure des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et de leurs estimées	54
Figure 3.3	Fonctions d'activations des sous modèles flous	69
Figure 3.4	Signal de commande $u(t)$	70
Figure 3.5	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) en présence de perturbations et d'incertitudes de modélisation	70
Figure 3.6	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) dans le cas de matrices de sortie égales en tenant compte des gains obtenus par [ASE13]	73
Figure 3.7	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) dans le cas de matrices de sortie égales	73
Figure 3.8	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) dans le cas de matrices de sortie non égales en tenant compte des gains obtenus par [ASE13]	74
Figure 3.9	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) dans le cas de matrices de sortie non égales	74
Figure 3.10	Signal de perturbation $w(t)$	75
Figure 4.1	Signal de commande $u_1(t)$ (a) - défaut $f_1(t)$ et son estimée avec un PI (b)	88
Figure 4.2	Signal de commande $u_2(t)$ (a) - défaut $f_2(t)$ et son estimée avec un PI (b)	88
Figure 4.3	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)	90
Figure 4.4	Signal de commande $u_1(t)$ (a) - défaut $f_1(t)$ et son estimée avec un PMI (b)	91
Figure 4.5	Signal de commande $u_2(t)$ (a) - défaut $f_2(t)$ et son estimée avec un PMI (b)	91
Figure 4.6	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)	92

Liste des Figures

Figure 4.7	Signal de bruit $w(t)$	108
Figure 4.8	Commande tolérante aux défauts (a) - défaut et son estimée avec un PI (b)	109
Figure 4.9	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)	109
Figure 4.10	Commande tolérante aux défauts (a) - défaut et son estimée avec un PI (b)	111
Figure 4.11	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)	111
Figure 4.12	Commande tolérante aux défauts (a) - défaut et son estimée avec un PMI (b)	112
Figure 4.13	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)	112
Figure 4.14	Commande tolérante aux défauts (a) - défaut et son estimée avec un PI (b)	124
Figure 4.15	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)	125
Figure 4.16	Commande tolérante aux défauts (a) - défaut et son estimée avec un PI (b)	126
Figure 4.17	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)	126
Figure 4.18	Commande tolérante aux défauts (a) - défaut et son estimée avec un PMI (b)	127
Figure 4.19	Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)	128
Figure 4.20	Perturbation (a) - bruit (b)	128

Liste des Tableaux

Tableau	Titre	Page
Tableau 3.1	Nombre de variables de décision des Corollaires 3.1 et 3.2	65
Tableau 3.2	Tau d'atténuation η pour différentes approches	72

Liste des Abréviations

Acronyme	Signification
T-S	Takagi-Sugeno
PDC	Parallel Distributed Compensation
LMI	Linear Matrix Inequality
BMI	Bilinear Matrix Inequality
LTI	Linear Time Invariant
PI	Proportionnel Intégral
PMI	Proportionnel Multi Intégral
VPM	Variables de Prémisses Mesurables
VPNM	Variables de Prémisses Non Mesurables
FTC	Fault Tolerant Control
PFTC	Passive Fault Tolerant Control
AFTC	Active Fault Tolerant Control
FDD	Fault Detection and Diagnosis
PSO	Particle Swarm Optimization
DOS	Dedicated Observer Scheme
GOS	Generalized Observer Scheme

Introduction générale

Introduction générale

La modernisation, visant principalement à accroître la qualité des produits et la productivité des systèmes industriels, nécessite la mise en œuvre de systèmes de commande sophistiqués de plus en plus complexes. En parallèle, les exigences accrues en termes de sécurité, de fiabilité et de performance de ces systèmes constituent un véritable défi à surmonter. Le grand souci des concepteurs est de proposer des systèmes performants, sûrs et sans défauts pendant leur fonctionnement. En pratique, les défauts sont généralement inévitables. Ils peuvent réduire les performances du système et parfois même provoquer des accidents catastrophiques. La prévention de ces situations nécessite la mise en place de systèmes d'alarme et de surveillance performants. Plusieurs techniques pour la surveillance et le diagnostic des défauts dans les systèmes dynamiques ont été développées [PAT01], [BLA06], [ICH09]. Cependant la plupart de ces techniques sont dédiées à la surveillance du système sans tenir compte de l'interaction avec le dispositif de commande. Dans la plupart des systèmes réels, en particulier les systèmes de commande autonomes, la surveillance seule n'est pas suffisante pour assurer les objectifs de la mission. Selon la gravité de la situation, l'impact d'un défaut peut conduire à des performances dégradées voir même à l'instabilité du système. Dans le cas d'un défaut de faible effet, une commande robuste peut suffire pour maintenir les performances désirées. Par contre, dans le cas de défauts critiques, il est nécessaire de mettre en œuvre une stratégie de commande tolérante aux défauts. Le rôle principal de cette stratégie est de compenser automatiquement l'effet du défaut sur le système.

Dans la littérature, il existe deux approches différentes de commande tolérante aux défauts (FTC) : l'approche passive et l'approche active [ZHA98], [ZHO01], [ZHA08]. L'approche FTC passive utilise les méthodes de commande robuste [PAT97], [ZHO98]. Dans ce contexte, les défauts de faible effet peuvent être considérés comme étant des incertitudes paramétriques et/ou des perturbations extérieures. En revanche, en présence de défauts majeures, la technique FTC active est considérée afin de stabiliser le système et maintenir son fonctionnement [ZHA08]. En effet, l'approche active permet l'adaptation de la loi de commande au défaut survenu afin de compenser son effet et ainsi maintenir la stabilité et les performances nominales du système globale. La commande FTC active des systèmes non linéaires reste encore peu traitée dans la littérature dans la mesure où la plupart des techniques proposées sont développés pour le diagnostic et la surveillance afin de détecter et de localiser les défauts [ICH09], [DIN21].

Le travail présenté dans cette thèse rentre dans ce contexte. Il s'agit de proposer une stratégie de commande tolérante aux défauts (FTC) dans sa version passive et active possédant la propriété d'atténuer, voire d'annuler, l'effet des défauts sur le système. La loi de commande FTC active assurera le maintien de la stabilité ainsi que les performances nominales du système en présence de défauts majeures. En revanche, dans le cas de défauts de faible

gravité, la robustesse de la loi de commande FTC passive est suffisante pour assurer la stabilité du système globale. Tous les résultats développés dans ce manuscrit sont basés sur les systèmes flous de type Takagi-Sugeno (T-S) [TAK85]. L'approche T-S permet de réécrire un système non linéaire d'une manière plus simple et bien maîtrisable. L'idée principale de ces systèmes est d'approcher le comportement dynamique d'un système non linéaire par la concaténation de sous-systèmes linéaires. Elle offre ainsi la possibilité d'étendre de nombreux concepts de l'automatique des systèmes linéaire au cas des systèmes non linéaires. Les modèles T-S sont divisés en deux catégories distinctes: les modèles T-S à états découplés et les modèles T-S à état unique. Pour la première catégorie, la dimension du vecteur d'état des sous-modèles peut être indépendante les uns des autres [ORJ08], [FIL91]. Ce type de modèles s'adapte particulièrement à la modélisation des systèmes présentant des non-linéarités et des changements de structure liés à des modes de fonctionnement différents. Le modèle T-S global est caractérisé par la concaténation des différentes sorties des sous-modèles à travers des fonctions d'activation non linéaires. La seconde catégorie de modèles T-S, dite à états couplés, est la plus étudiée dans la littérature. Dans cette dernière, le modèle T-S global est décrit par un ensemble de sous-modèles partageant un vecteur d'état unique [TAK85]. La représentation d'un système non linéaire sous forme de modèle T-S est établie par trois approches différentes : par identification, par linéarisation autour de plusieurs points de fonctionnement et par transformation en secteurs non linéaires [TAN01]. La dernière approche permet de fournir un modèle T-S représentant de manière exacte le modèle non linéaire dans un compact de l'espace d'état contrairement aux deux méthodes citées précédemment qui donnent seulement une approximation du modèle non linéaire. La capacité des modèles T-S à représenter ou à approcher le comportement dynamique d'un système non linéaire a été largement reconnue. Afin de représenter une classe plus large de systèmes non linéaire, les modèles T-S considérés dans ce travail sont obtenus par la méthode de transformation en secteurs non linéaires [TAN01]. Avec cette méthode, les variables de prémisses (appelées aussi variables de décision) du modèle T-S s'écrivent souvent en fonction de variables d'état. Ainsi, deux classes sont considérées selon la nature des variables de prémisses intervenant dans les fonctions d'activation. En effet, ces variables peuvent être connues (entrée ou sortie du système) ou inconnues (état du système). La classe des modèles T-S à variables de prémisses mesurables (VPM) a fait l'objet de nombreux développements. Des résultats variés sont ainsi proposés dans divers domaines notamment en commande, stabilisation, estimation d'état et diagnostic [XIA03], [YON06], [AKH04], [GAO08], [ZHA09]. En revanche, la seconde classe à variables de prémisses non mesurables (VPNM) est peu traitée aussi bien pour l'estimation d'état et le diagnostic que la conception de lois de commande robuste et/ou tolérante aux défauts.

L'objectif du présent travail est d'exploiter la structure T-S à variables de prémisses non mesurables (VPNM) afin de concevoir des lois de commande robustes et tolérantes aux défauts (FTC). Le problème de stabilisation robuste en présence d'incertitudes de modèle et de perturbations extérieures est traité avec une commande FTC passive. Cette dernière est suffisante pour maintenir les performances désirées dans le cas de défauts de faibles effets. Par la suite, une loi de commande FTC active est proposée afin d'assurer le maintien de la stabilité ainsi que les performances nominales du système en présence de défauts majeures.

La synthèse de la loi de commande exploite des observateurs de type PI et PMI. Ces derniers sont utilisés pour la détection, la localisation et l'estimation des défauts actionneurs. A travers ces informations, des commandes tolérantes aux défauts actives sont élaborés. Nous proposons ainsi d'étendre un certain nombre de résultats connus pour les systèmes T-S à VPM au cas des systèmes T-S à VPNM.

Le présent mémoire de thèse est organisé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques concepts de base concernant le diagnostic et la commande tolérante aux défauts. La première partie du chapitre présente quelques notions propres au diagnostic. Nous décrivons ensuite les principales méthodes de diagnostic à base d'observateurs. La dernière partie de ce chapitre est consacrée au problème de commande tolérante aux défauts dans ses deux versions active et passive.

Le deuxième chapitre présente les notions de base concernant les multimodèles flous de Takagi-Sugeno (T-S) [TAK85], [MUR97]. Ces modèles serviront pour la représentation exacte dans un espace de variables d'état des systèmes non linéaires. La première partie du chapitre est dédiée à l'étude de la stabilité et la stabilisation des systèmes décrits par des modèles T-S. Le problème de la stabilisation avec critère H^∞ pour le cas sans et avec observateur est aussi abordé.

Dans le chapitre trois, quelques résultats sur la stabilisation robuste des systèmes décrits par des modèles T-S incertains et perturbés sont proposées. La synthèse de la loi de commande concerne aussi bien le cas où les variables de prémisses sont mesurables que celui où ces variables ne le sont pas. Dans ce contexte, l'utilisation des techniques de transformations matricielles a permis d'étendre les résultats existant dans la littérature. Un résultat est donc proposé en terme de conditions LMI moins conservatives avec uniquement un seul paramètre prédéfini. Afin de résoudre ces conditions LMI, un algorithme PSO est utilisé. L'approche développée assure la stabilité du système ainsi que la robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation et des perturbations extérieures.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous traitons le problème de la commande tolérante aux défauts active en considérant la structure T-S à variables de prémisses non mesurables. La synthèse de la loi de commande exploite des observateurs de type PI et PMI. Ces derniers fournissent directement l'estimation des états ainsi que celles des défauts. Par conséquent, la compensation de l'effet du défaut pourra être réalisée. La stratégie FTC adoptée à pour but de s'accommoder automatiquement de l'effet des défauts actionneurs. En d'autre terme, elle agit directement sur la loi de commande en adaptant ses paramètres dans le but de maintenir la stabilité et les performances nominales du système global. Deux approches de commande FTC active à base d'observateurs PI et PMI sont alors proposées. Une méthode permettant la compensation des défauts tout en atténuant l'effet des perturbations extérieures est aussi présentée. Cette méthode permet l'estimation et la compensation des défauts ainsi que l'atténuation des perturbations selon un critère de performance H^∞ . On obtient donc une loi de commande tolérante aux défauts (FTC) active et robuste.

Chapitre 1 :

Tolérance aux défauts dans les
systèmes dynamiques

Chapitre 1 : Tolérance aux défauts dans les systèmes dynamiques

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, Nous rappelons quelques concepts de base concernant le diagnostic et la commande tolérante aux défauts. Nous présentons, tout d'abord, quelques notions propres au diagnostic, ensuite, nous donnons brièvement une description des différents types de défauts pouvant affecter un système. Le problème de génération des résidus servant à la détection et à la localisation des défauts est aussi exposé. La suite du chapitre est consacrée à la description des principales méthodes de diagnostic à base d'observateurs. Nous présentons ensuite les techniques de diagnostic par bancs d'observateurs pour la détection et la localisation des défauts capteurs et actionneurs. La dernière partie de ce chapitre est consacrée au problème de la commande tolérante aux défauts dans ses deux versions active et passive.

1.2 Généralités sur le diagnostic

Durant ces dernières années, un intérêt croissant est accordé au diagnostic de défauts à cause de la complexité des systèmes industriels et de leurs exigences de plus en plus élevées en termes de fiabilité, de sécurité, de performance et de disponibilité de fonctionnement. On trouve dans la littérature deux grandes catégories de méthodes de diagnostic [ISE07], [VEN03]: méthodes sans modèle et méthodes à base de modèle. Parmi les méthodes sans modèle, la redondance matérielle est l'une des plus fiables. L'idée consiste à multiplier le nombre de capteurs mesurant une même grandeur. Dans ce cas, la détection d'un défaut peut être assurée avec deux capteurs alors que la localisation nécessite au moins trois capteurs. Actuellement, la redondance matérielle est très utilisée dans des domaines où les exigences de la sécurité humaine et du procédé sont plus importantes que les contraintes économiques. Ces méthodes sont utilisées dans des domaines sensibles tels que le nucléaire, l'aéronautique ou l'aérospatial. L'inconvénient majeur de cette technique est dans son coût et l'encombrement des systèmes réalisés.

La deuxième catégorie concerne les méthodes de diagnostic à base de modèle. La structure générale de ces méthodes repose sur l'idée de la redondance analytique à base d'un modèle mathématique régissant le comportement du système. Ce modèle est développé en utilisant les lois fondamentales de la physique. Des algorithmes de diagnostic sont ainsi définis dans le but de fournir des informations permettant de définir en ligne l'état actuel du système. Parmi les approches de diagnostic à base de modèle, on peut citer: l'espace de parité, l'identification paramétrique, l'estimation de sortie et l'estimation d'état [FRA98], [ISE07], [PAT01]. D'autres techniques n'utilisant pas de modèles sont également mises en œuvre. Le raisonnement de base de ces techniques permet d'exprimer le lien entre un composant d'un processus donné et son comportement. Citons par exemple: l'analyse en composantes principales [OJA92], l'analyse spectrale [BAS97] et l'arbre de défaillances [VIL88].

▪ **Notions et définitions de base :**

Reprenons les définitions de quelques notions propres au diagnostic proposées par le comité technique SAFEPROCESS de l'IFAC (*International Federation of Automatic Control*) [ISE97].

Défaut : déviation non acceptable d'au moins une caractéristique d'un système par rapport à sa valeur nominale.

Défaillance : interruption permanente de la capacité du système à accomplir sa mission dans des conditions de fonctionnements opérationnelles spécifiques, conséquence d'un ou plusieurs défauts.

Panne : état d'un système incapable d'assurer sa fonction suite à une défaillance.

Résidu : indicateur d'anomalie fonctionnelle ou comportementale.

Détection de défaut (*Fault Detection*) : fonction consistant à déterminer l'apparition et l'instant d'occurrence d'un défaut. Cette fonction peut être obtenue en utilisant le résidu généré en comparant le comportement du modèle du système à celui du système réel. Idéalement, un résidu est nul lorsque le système est en fonctionnement normal et il diffère de zéro en cas de défaut.

Isolation de défaut (*Fault Isolation*) : détermination du type de défaut, sa localisation et son instant d'occurrence.

Redondance analytique : détermination d'une variable par la mesure ou par l'utilisation d'un modèle mathématique du processus considéré.

Modélisation du défaut : détermination d'un modèle mathématique pour décrire un effet spécifique du défaut.

Identification : détermination de la taille et du comportement temporel d'un défaut. C'est une estimation de la valeur du défaut à chaque instant.

Diagnostic : détermination du type de défaut, son amplitude, sa localisation et son instant d'occurrence. Il inclut la détection, l'isolation et l'identification des défauts.

1.2.1 Classification des défauts

- a. **Défauts actionneurs** : un défaut d'actionneur peut être partiel ou totale conduisant à la dégradation ou à la perte d'une action de commande sur le système. Une perte totale d'une action de commande peut se produire, par exemple, à la suite d'une vanne bloquée ne répondant plus au signal de commande. Un défaut partiel de la vanne peut être la conséquence d'un vieillissement des composants de la partie électrique (au niveau de l'électrovanne) ou de la partie mécanique (par frottements) conduisant à une baisse d'efficacité de l'action de commande.
- b. **Défauts capteurs** : un défaut de capteur se manifeste par une erreur dans la mesure d'une grandeur physique. Il peut être partiel ou total suivant le type de défaut. Un capteur totalement défectueux fournit une mesure ne correspondant pas à la valeur réelle de la grandeur physique mesurée. Dans ce cas, la mesure obtenue peut être figée à une valeur quelconque ou totalement aléatoire. La perte totale d'un capteur peut être due, par exemple, à un blocage du mécanisme de fonctionnement de ce dernier ou à la perte de liaison physique avec le capteur suite à une coupure de fils électriques. Un défaut partiel du capteur peut être dû à un défaut de calibrage ou à une baisse d'efficacité. La mesure fournie par le capteur est ainsi biaisée et/ou présentant une dérive. Une technique très efficace permettant la tolérance aux défauts capteurs est l'utilisation de la redondance matérielle. Les principaux inconvénients de cette technique sont l'encombrement et le coût.
- c. **Défauts système** : Ce type de défauts apparaît au niveau des composants du système lui même sans actionneurs et sans capteurs. Il entraîne des changements dans les paramètres du système, ce qui se traduit par un changement du comportement dynamique du système. Les techniques d'identification en ligne sont utilisées afin de diagnostiquer ce type de défauts. L'idée repose sur une comparaison des valeurs des paramètres estimés en ligne avec leurs valeurs nominales du système sans défauts.

Les défauts peuvent être également classés selon leurs évolutions temporelles :

Défauts brusques (biais): c'est un défaut instantané caractéristique d'une panne brutale de l'élément en question. Il est souvent dû à un dommage matériel et peut conduire à un arrêt total ou partiel du système.

Défauts graduels (dérives): c'est un défaut caractéristique d'un changement lent des valeurs des paramètres du système. Il peut être le résultat d'usure d'une pièce ou de vieillissement

d'un composant. Il est très difficile à détecter à cause de sa dynamique lente qui peut être confondue à une modification paramétrique représentant la non stationnarité du procédé.

Défauts intermittents: c'est un défaut qui apparaît et disparaît d'une façon aléatoire. Il peut être le résultat de faux contact ou de câblage partiellement endommagé.

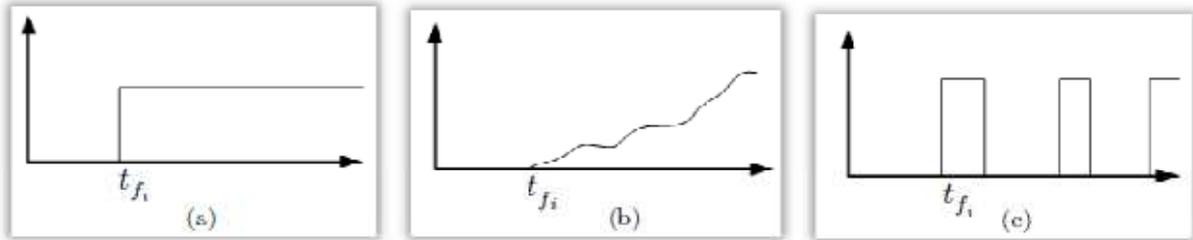


Figure 1.1. Evolution temporelle d'un défaut: a) brusque, b) graduel et c) intermittent.

Du point de vue modélisation, les défauts sont représentés par des modèles additifs, multiplicatifs ou les deux [ISE07]. A partir de cette représentation, les défauts sont classés en défauts additifs et défauts multiplicatifs. Ces types de défauts sont désignés dans la littérature du diagnostic par les termes défauts paramétriques pour les défauts multiplicatifs et non paramétriques pour les défauts additifs. Les défauts non paramétriques représentent les signaux d'entrées inconnues au système tandis que les défauts paramétriques se définissent par des changements de la valeur des paramètres dans les matrices d'état du système. Les défauts actionneurs et capteurs sont généralement représentés par des modèles additifs, cependant, les défauts système sont modélisés par des défauts multiplicatifs. Dans la littérature, les défauts additifs sont les plus utilisés du fait de leur simplicité de traitement par rapport aux défauts multiplicatifs. Pour cette raison, l'idée de transformer les défauts multiplicatifs sous forme additive est considérée dans la plupart des travaux [NOU00], [ROD05].

1.2.2 Génération de résidus

On se basant sur un modèle analytique reliant les entrées et les sorties d'un système, l'idée principale s'appuie sur la comparaison du comportement observé par des grandeurs mesurées et du comportement prédit par le modèle analytique. Dans les méthodes de diagnostic à base d'observateurs, la comparaison entre les sorties estimées et celles mesurées permet de générer des résidus qui vont servir d'indicateurs d'occurrence de défauts sur le système. Idéalement, ce résidu doit être sensiblement nul en fonctionnement normal sans défauts. En revanche, dans le cas de l'apparition d'un défaut sur le système (défauts de capteurs ou d'actionneurs), il doit s'écarter significativement de sa valeur nulle. De façon générale, le résidu est représenté par l'expression suivante :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (1.1)$$

La détection d'un défaut $f(t)$ est assurée si la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{cases} r(t) = 0 & \text{si } f(t) = 0, \forall t \\ r(t) \neq 0 & \text{si } f(t) \neq 0, \forall t \end{cases} \quad (1.2)$$

En pratique, à cause des bruits de mesure, le résidu généré en fonctionnement normal sans défauts présente une moyenne nulle. En présence de défauts, une moyenne différente de zéro est observée. En plus, la présence de perturbations et d'incertitudes de modélisation peut générer des fausses alarmes. Afin de pouvoir détecter un défaut de manière correcte, le résidu $r(t)$ est comparé à un seuil J . La valeur de ce seuil est adaptée de façon à éviter les fausses alarmes générées par ces entrées non désirées. Dans ce cas, la détection du défaut peut être assurée comme suit :

$$\begin{cases} r(t) < J, & \text{pas de défaut} \\ r(t) \geq J, & \text{présence de défaut} \end{cases} \quad (1.3)$$

Après la détection de défauts, il est souvent nécessaire de procéder à l'isolation des défauts afin de localiser exactement les composants affectés. Un seul résidu peut suffire pour la détection de défauts. Cependant, plusieurs résidus sont souvent requis pour isoler les défauts. En pratique, pour des raisons techniques et économiques, l'hypothèse selon laquelle les variables d'état du système sont accessibles à la mesure n'est pas toujours vérifiée. Des méthodes à base d'observateurs sont alors utilisés afin d'estimer ces états à partir de données entrées-sorties [NOU00]. Le principe de diagnostic à base d'observateurs est donc d'identifier l'écart entre le système réel et son modèle.

1.3 Méthodes de diagnostic à base d'observateurs

Grâce à leur efficacité, les méthodes de diagnostic à base d'observateurs ont attirés l'attention de la communauté scientifique durant ces dernières années. Dans ce contexte, différents types d'observateurs ont été utilisés. On peut citer l'observateur à entrées inconnues par découplage, l'observateur proportionnel intégral, l'observateur à modes glissants, l'observateur adaptatif,...etc. L'observateur à entrées inconnues (*Unknown Input Observer*) a été considéré dans [KOE01], [AKH04], [CHE07]. Le système de diagnostic construit à partir de ce type d'observateur permet de générer des résidus sensibles aux défauts et insensibles aux perturbations considérées comme des entrées inconnues. L'observateur proportionnel intégral (*Proportional Integral Observer*) a été utilisé par de nombreux chercheurs [MAR03], [KOE05], [ORJ08], [HAM11]. En présence de défauts, le système de diagnostic construit à partir d'un observateur PI permet de générer des résidus à partir de l'estimation simultanée de l'état et du défaut survenu. Les observateurs à mode glissant ont eu un grand succès dans le cadre du diagnostic de défauts grâce à de leur robustesse par rapport aux incertitudes de modélisation [FLO04], [CHE07], [AKH08]. Ce type d'observateur est utilisé de deux façons différentes dans les problèmes de détection et de localisation de défauts. Soit pour rendre l'erreur de sortie insensible aux incertitudes de modélisation ou dans le but d'estimer les défauts. Les observateurs adaptatifs sont aussi utilisés dans les problèmes de détection et de localisation de défauts [DIN93], [JIA02], [CHE07].

La détection de l'occurrence de défauts sur le système est en général un problème délicat. En revanche, la localisation de la grandeur d'entrée ou de sortie sur laquelle est intervenu le défaut est plus complexe. La technique la plus fréquemment utilisée s'appuie sur l'élaboration de bancs d'observateurs pilotés par un ensemble de grandeurs d'entrées-sorties différent, sous réserve de satisfaire les conditions de commandabilité et d'observabilité. La comparaison en ligne entre les variables estimées et celles mesurées permet de générer des résidus qui vont servir d'indicateurs de comportement du système. L'analyse de ces résidus suivant une logique de décision permettra la localisation des défauts. En général, la localisation des défauts passe par la structuration des résidus. L'idée consiste à mettre au point une technique par découplage des entrées et/ou des sorties afin qu'un résidu ne soit sensible (ou insensible) qu'à un seul défaut. L'utilisation de plusieurs observateurs dont chacun est construit à partir d'une partie des entrées et/ou des sorties permet d'atteindre cet objectif. La technique la plus répandue pour la localisation de défauts multiples est basée sur l'utilisation de bancs d'observateurs. L'analyse des résidus issus de ces observateurs couplée à une logique de décision permet de bien localiser les défauts. Dans ce qui suit, nous présentons deux structures de diagnostic par bancs d'observateurs pour la détection et la localisation des défauts capteurs et actionneurs, à savoir, la structure DOS (*Dedicated Observer Scheme*) et GOS (*Generalized Observer Scheme*) [CHE91], [ISE07], [DIN08], [ICH09].

1.3.1 Détection des défauts actionneurs avec la structure DOS

Avec la structure d'observateurs dédiés (DOS), représentée par la figure 1.2, le $i^{\text{ème}}$ observateur reçoit en ses entrées uniquement la $i^{\text{ème}}$ entrée de commande et toutes les sorties du système à surveiller. Par contre, les entrées de commande restantes sont considérées comme des entrées inconnues. Dans ce cas, la sortie de ce $i^{\text{ème}}$ observateur est insensible aux défauts des entrées de commande non utilisées.

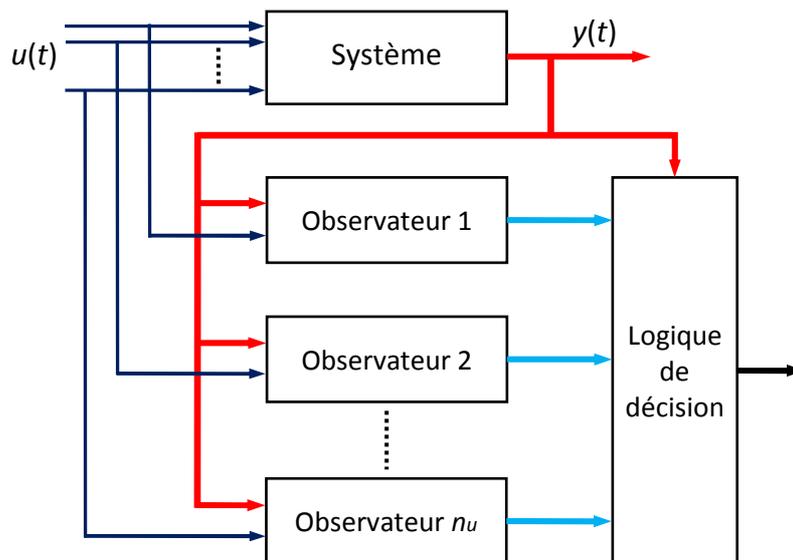


Figure 1.2. Structure DOS pour la détection et la localisation de défauts d'actionneurs

1.3.2 Détection des défauts actionneurs avec la structure GOS

Avec la structure d'observateurs généralisés (GOS), représentée sur la figure 1.3, le $i^{\text{ème}}$ observateur reçoit en ses entrées toutes les sorties du système à surveiller et toutes les entrées de commande sauf la $i^{\text{ème}}$ entrée qui est considérée comme une entrée inconnue. Dans ce cas, la sortie de ce $i^{\text{ème}}$ observateur est sensible aux défauts de toutes les entrées de commande sauf la $i^{\text{ème}}$ entrée.

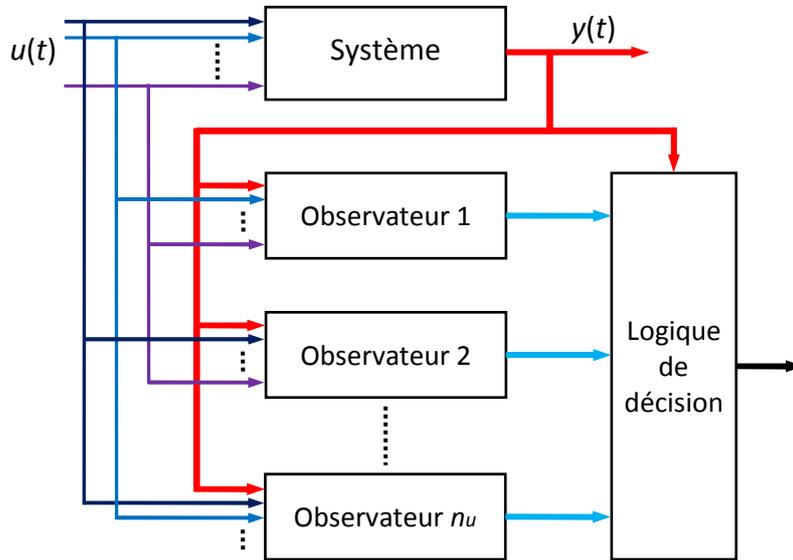


Figure 1.3. Structure GOS pour la détection et la localisation de défauts d'actionneurs

1.3.3 Détection des défauts capteurs avec la structure DOS

Avec la structure d'observateurs dédiés (DOS), représentée sur la figure 1.4, le $i^{\text{ème}}$ observateur reçoit en ses entrées seulement la $i^{\text{ème}}$ sortie et toutes les entrées de commande. Dans ce cas, la sortie de ce $i^{\text{ème}}$ observateur est insensible aux défauts des sorties non utilisées.

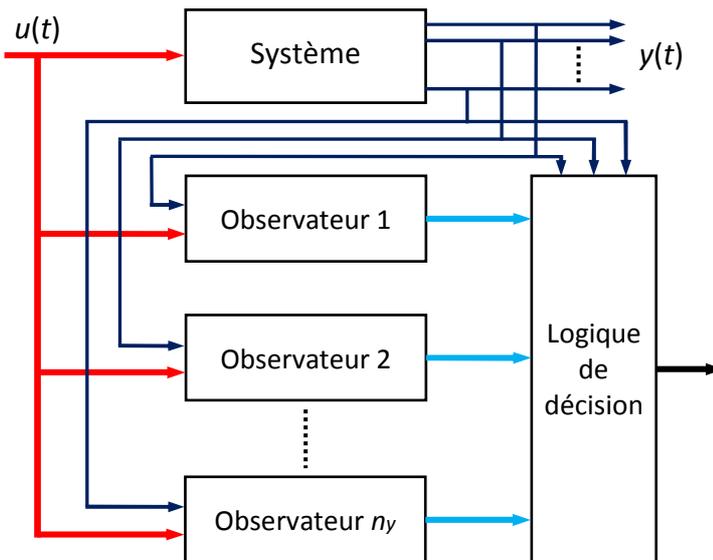


Figure 1.4. Structure DOS pour la détection et la localisation de défauts de capteurs

1.3.4 Détection des défauts capteurs avec la structure GOS

Avec la structure d'observateurs généralisés (GOS), représentée sur la figure 1.5, le $i^{\text{ème}}$ observateur reçoit en ses entrées toutes les entrées de commande et toutes les sorties du système à surveiller sauf la $i^{\text{ème}}$ sortie. Dans ce cas, la sortie de ce $i^{\text{ème}}$ observateur est sensible aux défauts de toutes les sorties sauf la $i^{\text{ème}}$ sortie.

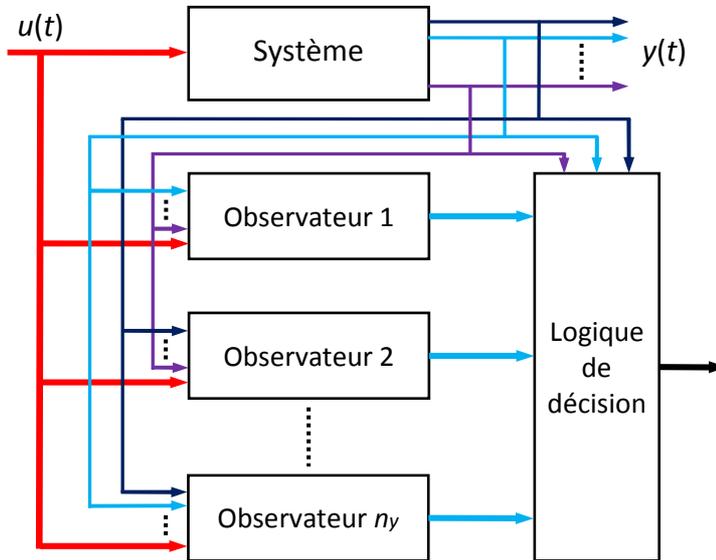


Figure 1.5. Structure GOS pour la détection et la localisation de défauts de capteurs

L'utilisation de la technique par bancs d'observateurs permet de construire, à partir de la comparaison entre les sorties réelles et les sorties estimées par chaque observateur, les résidus suivant :

$$r_{ij}(t) = y_j(t) - \hat{y}_j^i(t) \quad (1.4)$$

Avec i désigne le numéro de l'observateur et j désigne le numéro de la sortie.

Notons qu'il est souvent nécessaire, dans les problèmes de la commande tolérante aux défauts, d'avoir une estimation de la valeur du défaut à chaque instant. Cela implique la connaissance de l'amplitude et de la forme du signal de défaut afin de mieux le compenser. Cela n'est évidemment possible que si l'information sur le défaut est intégrée dans le modèle du système étudié. Le signal de défaut estimé n'est en fait que l'image du défaut agissant sur le système, et ne représente pas le défaut lui-même.

Par conséquent, la détection et la localisation peut être assurée car les estimées des défauts sont exploités en terme de résidus. Dans ce cas, l'estimé du $i^{\text{ème}}$ défaut permet de fournir la valeur du $i^{\text{ème}}$ résidu :

$$r_i(t) = f_i(t), \quad \forall t \quad (1.5)$$

Généralement, un module de détection et de diagnostic de défauts FDD (voir figure 1.7) doit permettre de prendre en compte les différents types de défauts intervenant sur le système (défauts d'actionneurs, capteurs ou système) et d'assurer la fiabilité de ses informations afin d'éviter une dégradation des performances ou une instabilité du système suite à une fausse alarme ou à un défaut non détecté. Dans le cas d'une commande tolérante aux défauts, le module FDD doit être suffisamment robuste pour atteindre une reconfiguration de la loi de commande effective en un temps minimal dans le but d'assurer des performances acceptables du système en défaut.

1.4 Systèmes tolérants aux défauts

Un système tolérant aux défauts possède la capacité de maintenir les performances désirées en dépit de l'apparition d'un défaut. Il doit notamment garantir la stabilité du système ainsi que des performances acceptables non seulement en l'absence de défauts mais également en présence de composants défaillants. Par conséquent, les objectifs à atteindre durant ces deux modes de fonctionnement sont différents. En effet, dans le mode nominal, des objectifs de qualité sont à assurer, en revanche en présence de défauts, des performances dégradées peuvent être acceptées. Un correcteur conventionnel peut s'avérer très limité à assurer les performances désirées lors de l'occurrence d'un défaut et peut même amener à l'instabilité.

Pour éviter des conséquences néfastes et catastrophiques, des lois de commande tolérantes aux défauts ont été développées afin de maintenir au mieux les performances du système ainsi que sa stabilité.

La commande tolérante aux défauts (FTC) est classée en deux approches distinctes comme illustrées à la figure 1.6 : les méthodes de commande passives (PFTC) et les méthodes de commande actives (AFTC) [OUD08].

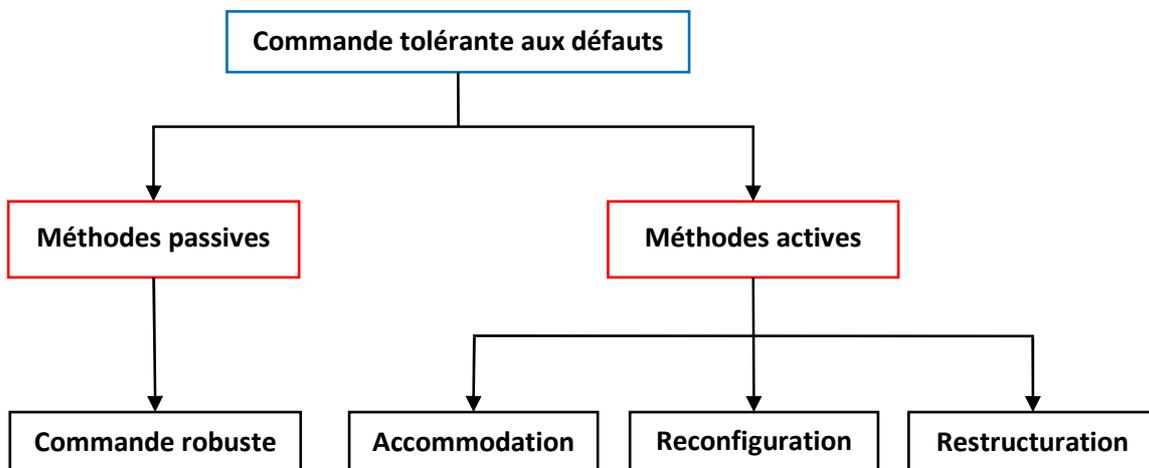


Figure 1.6. Classification des techniques FTC

1.4.1 Approche passive

L'approche passive emploie les techniques de commandes robustes (commande H_∞ , commande à mode glissant . . .) [PAT97], [ZHO98], [NIE05]. La loi de commande est conçue de façon à ce que le système en boucle fermée soit robuste par rapport à certains défauts spécifiques. La méthode s'inspire sur l'idée simple que les défauts représentent des perturbations et/ou des incertitudes que la loi de commande doit prendre en considération dès sa phase de conception initiale. Cette approche ne nécessite aucun module de diagnostic pour la détection de défauts ni aucune reconfiguration de la loi de commande et/ou des paramètres du système mais sa capacité de tolérance est restreinte à quelques défauts de faibles amplitudes.

1.4.2 Approche active

L'approche active réagit aux défauts d'une manière plus efficace en reconfigurant en ligne la loi de commande suivant les informations fournies par un module de diagnostic (module FDD). L'objectif est de maintenir la stabilité et si possible les performances nominales du système. Par rapport aux méthodes passives, les méthodes actives peuvent tolérer des défauts plus sévères. Un module de diagnostic permet la détection et l'isolation des défauts intervenant. Cette fonction peut être accomplie par un observateur permettant d'estimer les états du système ainsi que le défaut survenu. Une fois que le défaut est apparu, le module FDD active un module FTC et fournit en ligne les informations concernant le défaut et l'état du système. En se basant sur ces informations, le module FTC génère une nouvelle loi de commande (régulateur reconfigurable) et, si nécessaire, ajuste les entrées (ou références) afin de garantir les objectifs nominaux prédéfinis [ZHA08].

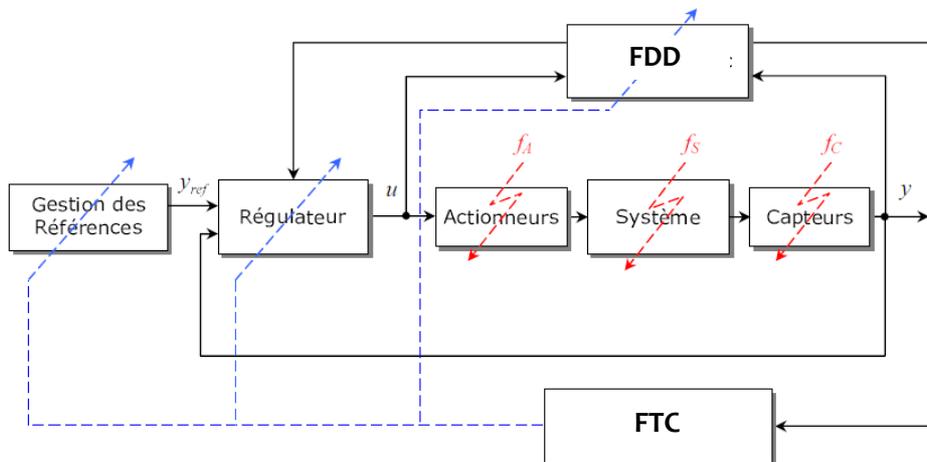


Figure 1.7. Principe de la commande tolérante aux défauts

Les techniques actives sont généralement classées en trois types selon leur mécanisme d'action sur le système et selon le type de défaut qui intervient : l'accommodation au défaut, la reconfiguration et la restructuration du système de commande.

La technique d'accommodation considère le principe de compensation de l'effet du défaut pour des situations de perte partielle des capacités d'opération du système. Avec cette technique, le système à contrôler, le nombre de sorties à asservir et le nombre d'entrées de commande restent inchangés. La structure de la loi de commande n'est pas modifiée, par

contre, un ajustement en ligne des paramètres de la loi de commande [BLA06] est réalisé dès l'apparition d'un défaut. L'ajustement se manifeste par un recalcul des gains de la loi de commande ou par une compensation de l'effet des défauts dans le but de garantir les objectifs nominaux prédéfinis. Cette approche permet de bien compenser les défauts actionneurs. Cependant, dans certains cas critiques, les actionneurs peuvent être fortement sollicités jusqu'à saturation. Pour éviter cette situation néfaste, deux solutions peuvent être envisagées, soit changer la trajectoire du système, donc agir sur l'entrée de référence, soit augmenter le temps de réponse des sorties.

La reconfiguration de la loi de commande est utilisée dans le cas où les parties défaillantes (actionneurs, capteurs ou système) ne peuvent pas être accommodées [BLA06], [BOS03]. Après l'apparition d'un défaut, le module de diagnostic détecte et localise le défaut dans un sous-système, ainsi, par hypothèse, une nouvelle structure du système peut être proposée. Par conséquent, une nouvelle formulation du problème de commande est alors synthétisée de façon à compenser le défaut. Cependant, il est nécessaire, lors de l'apparition d'un défaut actionneur, de vérifier la commandabilité du système avec les actionneurs encore en bon état avant de recalculer une nouvelle loi de commande.

La restructuration est utilisée dans le cas où le problème de commande n'a pas de solution avec l'accommodation et la reconfiguration [STA01], [THE03]. Ceci signifie que les objectifs de maintien de la stabilité et des performances nominales ne sont plus préservés en présence de défauts. Dans ce cas, la seule possibilité est de commander le procédé en mode dégradé. L'objectif est de maintenir un comportement sécurisé en considérant le meilleur compromis possible entre tous les objectifs nominaux et, dans le pire des cas, assurer l'arrêt total du système en toute sécurité.

Afin de synthétiser le régulateur, plusieurs méthodes FTC active existent dans la littérature pour les systèmes linéaires et non linéaires. Nous pouvons citer à titre d'exemple la méthode du pseudo inverse [GAO91] qui consiste à déterminer un nouveau gain de retour d'état capable de minimiser un critère de telle sorte que la dynamique du système défaillant en boucle fermée soit approximativement similaire à celle du système nominal. Cependant, cette méthode ne garantit pas la stabilité du système en boucle fermée. Afin de résoudre ce problème, une extension de la méthode a été proposée dans [GAO92].

La commande tolérante aux défauts avec l'approche par placement de structure propre est proposée par [JIA94] et [LIU98]. Dans cette approche, on s'intéresse à calculer les gains de la loi de commande de manière à avoir les valeurs propres du système bouclé avec défauts proches de celles du système nominal sans défauts. Le but est d'assurer des performances désirées du système en boucle fermée en minimisant la norme 2 entre les vecteurs propres des matrices d'état correspondants. L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode du pseudo inverse réside dans le fait que la solution obtenue, si elle existe, garantit la stabilité en boucle fermée du système défaillant.

Une technique, basée sur la loi de commande par séquençement de gain, a été développée dans [RUG92]. L'idée principale consiste à calculer un ensemble de gains de retour d'état pour un ensemble de modèles linéaires, où chaque scénario de défaut est décrit par un modèle différent. Un seul régulateur est alors actif par un mécanisme de commutation agissant en fonction des différentes situations de défauts prédéfinis. L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'on a un nombre limité de défauts qui peut être pris en charge par la loi de commande. La prise en compte des incertitudes de modélisation dans cette approche constitue un avantage majeur par rapport aux méthodes du pseudo inverse et de placement de structure propre.

La méthode à base de poursuite de modèle de référence est une autre approche FTC active qui considère un modèle de bon fonctionnement du système (le modèle de référence). L'objectif de la loi de commande est de forcer le système réel en défaut à se comporter comme le système de référence en minimisant l'erreur de poursuite de trajectoire.

Notons qu'une grande partie des travaux existants concernant la synthèse de lois de commande tolérantes aux défauts considère dans leur traitement un modèle linéaire ou linéarisé autour de différents points de fonctionnement. Afin d'améliorer les performances des systèmes, il faut concevoir un système de commande FTC performant. Cela n'est possible que si on tient compte du comportement dynamique non linéaire du système. En réalisant un système de commande tolérant aux défauts, basé sur un modèle linéarisé, les résultats obtenus seront dégradés dans le cas où nous nous éloignons du point de fonctionnement. Ces raisons ont motivés le recours à des systèmes non linéaires représentés par la structure floue de Takagi-Sugeno [TAK85], [TAN01]. Cette structure, dite aussi multimodèle, permet de décrire le comportement dynamique du système sur une large plage de fonctionnement. Elle est basée sur un ensemble de modèles linéaires liés par des fonctions non linéaires décrivant le système dans différentes zones de fonctionnement. Cette approche est très intéressante dans la mesure où elle offre la possibilité d'étendre les résultats obtenus dans le cadre des systèmes linéaires.

1.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la présentation de quelques notions de base concernant le diagnostic et la commande tolérante aux défauts. Nous avons rappelé brièvement les concepts de base concernant le diagnostic. Nous avons ensuite présenté les méthodes de diagnostic à base d'observateurs. Dans ce sens, deux structures de diagnostic par bancs d'observateurs pour la détection et la localisation des défauts capteurs et actionneurs ont été présentées. Ce type de structure est principalement utilisé pour détecter et localiser les défauts multiples. La dernière partie du chapitre a été consacrée au problème de commande tolérante aux défauts. Notre attention s'est focalisée sur les approches FTC en concordance avec l'objet de cette thèse, à savoir, les approches passives et les approches actives. Le choix entre ces deux approches dépend d'un cahier de charge contenant les critères exigés en termes de performances, sécurité,...etc.

Chapitre 2 :

Modélisation et commande des
systèmes décrits par des modèles
T-S

Chapitre 2 : Modélisation et commande des systèmes décrits par des modèles T-S

2.1 Introduction

Actuellement, la plupart des techniques de commande développées se basent sur les modèles non linéaires. Cependant, une modélisation non linéaire conduit souvent à des techniques de commande plus complexes que dans le cas d'une modélisation linéaire. En général, des techniques de modélisation visant à obtenir un modèle simple et bien représentatif du système en tenant compte des non-linéarités du système sont souvent adoptées pour la conception d'observateurs ainsi que la synthèse de lois de commande. Parmi les méthodes développées, on peut citer l'approche multimodèle utilisant les modèles flous de Takagi-Sugeno (T-S) [TAK85]. La structure T-S est adoptée en tant qu'approche de modélisation permettant la description du comportement non linéaire avec une forme simple inspirée des modèles linéaires. La capacité des multimodèles de Takagi-Sugeno à approcher le comportement dynamique d'un système non linéaire par des modèles linéaires est largement prouvée. Par conséquent, les techniques développées aux systèmes linéaires restent applicables dans le cadre des systèmes décrits par des multimodèles de type T-S. Les travaux présentés dans ce manuscrit concernent, en grande partie, la synthèse de lois de commande stabilisantes et tolérantes aux défauts faisant appel aux modèles flous de type Takagi-Sugeno. Ainsi, une approche de commande non linéaire à base de modèles flous T-S est traitée.

Dans ce chapitre, l'analyse de la stabilité des systèmes décrits par des modèles T-S est exposée suivant le formalisme des inégalités matricielles linéaires (LMI). La loi de commande assurant la stabilisation des systèmes décrits par des modèles T-S perturbés est ensuite abordée. Elle est basée sur un problème de minimisation de type H_∞ . Dans ce contexte, un résultat est présenté dans le cas de la commande sans observateur. Un résultat est également donné dans le cas de la stabilité de l'ensemble de la boucle de commande avec observateur.

2.2 Représentation des systèmes dynamiques par les modèles T-S

Un système non linéaire peut être représenté par un modèle flou T-S de structure simple (2.1). Celui-ci est composé d'un ensemble de sous-modèles linéaires interpolés par des fonctions non linéaires, appelées fonctions de pondération, vérifiant la propriété de la somme convexe [TAK85]. Ces fonctions définissent la contribution de chaque sous-modèle à décrire le comportement dynamique global du système non linéaire.

Le modèle flou T-S est donné par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \quad (2.2)$$

avec $0 \leq h_i(z(t)) \leq 1$, pour tout t .

$x(t) \in R^n$ représente le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ le vecteur des entrées et $y(t) \in R^p$ le vecteur des sorties. Les matrices $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times m}$, $C_i \in R^{p \times n}$, $i \in \{1, \dots, r\}$ sont constantes représentant les r modèles linéaires. Les fonctions d'activation $h_i(z(t))$ déterminent le degré d'activation du $i^{\text{ème}}$ sous modèle. Le vecteur $z(t) \in R^z$ est appelé vecteur des prémisses. Ce dernier peut être composé de variables d'état, des entrées ou des sorties.

2.3 Construction de modèles T-S

Trois différentes méthodes existent pour l'obtention d'un modèle T-S à partir d'un modèle non linéaire.

La première méthode, dite par identification, permet à partir de données expérimentales sur les entrées et les sorties d'un système d'identifier les paramètres des modèles locaux linéaires et des fonctions d'activation correspondant aux différents points de fonctionnement [TAK85], [TAN96(b)].

La deuxième méthode, dite par linéarisation, se base sur un modèle mathématique non linéaire du processus physique. Ce modèle est linéarisé autour d'un ensemble de points de fonctionnement choisis judicieusement [TAN01], [MUR97], [GAS00]. Dans ce cas, il s'agit de modèles locaux linéaires affines pour lesquels le modèle flou est obtenu par interpolation des modèles locaux avec des fonctions d'activation non linéaires.

La troisième méthode, dite approche par secteur non linéaire [TAN01], permet de passer d'un modèle non linéaire à un modèle T-S. Cette approche est basée sur une transformation polytopique convexe des fonctions scalaires originaires des non linéarités du modèle. L'approche par secteur non linéaire permet d'obtenir une forme T-S équivalente au modèle

non linéaire sans perte d'information. Il ne s'agit pas d'une approximation, le modèle T-S obtenu représente de manière exacte le modèle non linéaire dans un compact de l'espace d'état.

Le passage d'un modèle non linéaire à un modèle de type T-S est obtenu en suivant les démarches données ci-dessous.

Considérons le modèle d'état affine en la commande suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t))x(t) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t))x(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires.

Tout d'abord, les termes non linéaires existant dans les fonctions non linéaires de (2.3) doivent être bornés. Pour ce faire, supposons qu'il existe un compact des variables de prémisses $z(t) \in c \subset R^z$ sur lequel les non linéarités sont bornées.

Soient $nl_i(t) \in [nl_i^-, \bar{nl}_i]$, $i \in \{1, \dots, k\}$ les bornes *inf* et *sup* des termes non linéaires, on peut alors écrire dans $c \subset R^z$ [TAN01], [KRU06] :

$$nl_i(z_i(t)) = \bar{nl}_i w_0^i(z_i(t)) + nl_i^- w_1^i(z_i(t)) \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{cases} w_0^i(z_i(t)) = \frac{nl_i(z_i(t)) - nl_i^-}{\bar{nl}_i - nl_i^-} \\ w_1^i(z_i(t)) = \frac{\bar{nl}_i - nl_i(z_i(t))}{\bar{nl}_i - nl_i^-} \end{cases} \quad (2.5)$$

et les fonction d'appartenances $w_0^i(z_i(t)) \geq 0$, $w_1^i(z_i(t)) \geq 0$ et $w_0^i(z_i(t)) + w_1^i(z_i(t)) = 1$.

Les fonctions d'activation $h_i(z(t))$, $i \in \{1, \dots, r\}$ du modèle T-S (2.1) se calculent à partir de :

$$h_{1+i_1+i_2 \times 2 + \dots + i_k \times 2^{k-1}}(z(t)) = \prod_{j=1}^k w_{i_j}^j(z_j(t)) \quad (2.6)$$

Le nombre de règles floues du modèle T-S est fonction du nombre de non linéarités (k) considérées dans le modèle (2.3). Il est donné par ; $r = 2^k$. Les règles du modèle flou T-S peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$R_i : \text{si } z_1(t) \text{ est } w_{1,0}^1(z_1(t)) \text{ et } \dots \text{ et } z_k(t) \text{ est } w_{1,0}^k(z_k(t)) \text{ alors}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}, i = 1, \dots, r$$

2.4 Etude de la stabilité des systèmes décrits par des modèles T-S

Considérons un modèle T-S d'un système autonome de la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (2.7)$$

L'étude de la stabilité du système décrits par (2.7) s'appuie sur le choix d'une fonction de Lyapunov candidate dite quadratique :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad P = P^T > 0 \quad (2.8)$$

La stabilité quadratique est assurée si la contrainte suivante est vérifiée :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt} (x(t)^T P x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0 \quad (2.9)$$

En remplaçant (2.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right) < 0 \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t) < 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Par conséquent, la stabilité quadratique du modèle (2.7) est assurée si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) x(t)^T (A_i^T P + P A_i) x(t) < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (2.11)$$

Théorème 2.1 [TAN92] :

Le modèle T-S (2.7) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P > 0$ telle que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (2.12)$$

Sachant que $h_i(z(t)) \geq 0$, on en déduit que l'inégalité (2.11) est vraie si et seulement si (2.12) est vérifiée.

La contrainte LMI (2.12) constitue une condition suffisante assurant la convergence asymptotique de l'état $x(t)$, à partir d'une condition initiale $x(0) = x_0 \neq 0$, vers le point d'équilibre $x(t) = 0$.

2.5 Stabilisation par une commande de type PDC

La loi de commande PDC (*Parallel Distributed Compensation*) (2.13) considérée pour la stabilisation correspond à un retour d'état non linéaire qui utilise les mêmes fonctions d'activation $h_i(z(t))$ que le modèle flou T-S et des gains constants :

$$u(t) = -\sum_{j=1}^r h_j(z(t)) K_j x(t) \quad (2.13)$$

Pour montrer la convergence du modèle T-S en boucle fermée, il faut déterminer les gains des retours d'états correspondants à chaque modèle LTI composant le modèle T-S. A partir de la fonction de Lyapunov quadratique considérée, on peut trouver une matrice définie positive P commune à tous les modèles locaux en boucle fermée.

Le modèle T-S en boucle fermée est obtenu en appliquant la commande PDC (2.13) au modèle T-S (2.1). Ainsi, on obtient le modèle suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} x(t) \quad (2.14)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (2.15)$$

Théorème 2.2 [TAN94] :

Le modèle T-S décrit en (2.14) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique et définie positive P et des matrices $K_i, i \in \{1, \dots, r\}$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, \quad i < j \quad (2.17)$$

avec $h_i(z(t)) h_j(z(t)) \neq 0, \quad t > 0$

Les conditions du Théorème 2.2 sont des contraintes de type BMI (*Bilinear Matrix Inequality*) (ils ne sont pas linéaires en les variables P et K_i).

Pour transformer les inégalités précédentes en un problème équivalent prenant la forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI), nous multiplions à gauche et à droite par P^{-1} les conditions (2.16) et (2.17), on obtient ainsi les expressions LMI suivantes en fonction des variables X et N_i :

$$\begin{cases} XA_i^T + A_i X - N_i^T B_i^T - B_i N_i < 0, & i = 1, \dots, r \\ XA_i^T + A_i X + XA_j^T + A_j X - N_j^T B_i^T - B_i N_j - N_i^T B_j^T - B_j N_i \leq 0, & i < j \end{cases} \quad (2.18)$$

Cette transformation est réalisée en adoptant le changement de variables suivant : $X = P^{-1}$ et $N_i = K_i X$.

2.5.1 Relaxation des conditions de stabilisation

Si le nombre de règles r est grand, il devient difficile de trouver une matrice de Lyapunov P commune. La solution la plus couramment utilisée est de relaxer les conditions de stabilité. Le théorème suivant permet de réduire le conservatisme des conditions (2.16) et

(2.17) en tenant compte des interactions entre les modèles locaux voisins caractérisés par le nombre s de modèles locaux actifs à chaque instant.

Théorème 2.3 [TAN98] :

Le modèle T-S (2.14) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques $P > 0$, $M \geq 0$ et des matrices $K_i, i = 1, \dots, r$ vérifiant les inégalités suivantes:

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)M < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - M \leq 0, \quad i < j \quad (2.20)$$

avec $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$, $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ et s étant le nombre maximal de modèles locaux actifs simultanément telle que $1 < s \leq r$.

D'autres théorèmes peuvent être utilisés pour réduire le degré de conservatisme (pour plus de détails, voir [KRU06]).

2.5.2 Stabilisation avec observateur flou

La loi de commande considérée est basée sur la connaissance de tout le vecteur d'état. Cependant, en pratique, l'état du système n'est pas toujours mesurable. Dans ce cas, la structure de commande par retour d'état nécessite un observateur afin d'estimer ce dernier. Dans le cas des modèles T-S, l'interpolation de plusieurs observateurs locaux de type Luenberger permet d'avoir une structure simple d'un observateur T-S. Ce dernier est décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

où $\hat{x}(t)$ et $z(t)$ représentent respectivement l'état estimé de l'observateur flou et le vecteur de prémisses supposé mesurable, et L_i les gains de l'observateur.

L'erreur d'estimation du vecteur d'état est définie par l'équation suivante :

$$e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.22)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est définie par :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \theta_{ij} e_o(t) \quad (2.23)$$

avec :

$$\theta_{ij} = A_i - L_i C_j \quad (2.24)$$

La détermination des gains locaux L_i permet d'assurer la convergence asymptotique vers zéro de la dynamique de l'erreur d'estimation (2.23).

Le retour d'état s'écrit :

$$u(t) = -\sum_{j=1}^r h_j(z(t)) K_j \hat{x}(t) \quad (2.25)$$

Le modèle T-S en boucle fermée s'exprime comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (G_{ij} x(t) + B_i K_j e_o(t)) \quad (2.26)$$

où $G_{ij} = A_i - B_i K_j$.

Le modèle augmenté (2.27) est obtenue en combinant (2.26) et (2.23):

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{G}_{ij} \bar{x}(t) \quad (2.27)$$

avec :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e_o(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & B_i K_j \\ 0 & \theta_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Etant donné que toutes les variables de prémisses $z(t)$ sont mesurables, il a été démontré que le principe de séparation est garanti dans le cas des modèles flous T-S [MA98]. L'application de cette propriété de séparation consiste à calculer séparément les gains K_i et L_i à partir des conditions suivantes :

$$\begin{cases} G_{ii}^T P_1 + P_1 G_{ii} + (s-1) M_1 < 0, & i = 1, \dots, r \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P_1 + P_1 \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - M_1 < 0, & i < j \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} \theta_{ii}^T P_2 + P_2 \theta_{ii} + (s-1) M_2 < 0, & i = 1, \dots, r \\ \left(\frac{\theta_{ij} + \theta_{ji}}{2} \right)^T P_2 + P_2 \left(\frac{\theta_{ij} + \theta_{ji}}{2} \right) - M_2 < 0, & i < j \end{cases} \quad (2.30)$$

avec $h_i(z(t)) h_j(z(t)) \neq 0$, $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, $\theta_{ij} = A_i - L_i C_j$ et s étant le nombre maximal de modèles locaux actifs simultanément telle que $1 < s \leq r$. Si les conditions (2.29) et (2.30) sont vérifiées, alors il existe des matrices symétriques $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$ et des gains L_i et K_i , $i=1, \dots, r$ permettant d'assurer la stabilité asymptotique du système augmenté (2.27).

2.5.3 Stabilisation avec l'approche H_∞

Dans cette section, une loi de commande permettant la stabilisation des systèmes perturbés décrits par des modèles T-S est présentée. Cette dernière est basée sur le problème de minimisation du critère H_∞ [TAN96(b)], [XIA03].

Soit le modèle T-S d'un système perturbé suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + \phi(t)) \quad (2.31)$$

où $\phi(t)$ est une perturbation externe bornée.

Le critère H_∞ correspondant peut être défini comme suit:

$$\int_0^{\infty} x(t)^T Q x(t) dt < x(0)^T P x(0) + \eta^2 \int_0^{\infty} \phi(t)^T \phi(t) dt \quad (2.32)$$

où Q est une matrice définie positive, $x(0)$ est le vecteur des conditions initiales et η est le taux d'atténuation des perturbations extérieures à minimiser.

En supposant des conditions initiales nulles, le critère H_∞ (2.32) devient :

$$\int_0^{\infty} x(t)^T Q x(t) dt < \eta^2 \int_0^{\infty} \phi(t)^T \phi(t) dt \quad (2.33)$$

Le système en boucle fermée (2.34) est obtenu en appliquant la commande par retour d'état (2.13) :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (G_{ij} x(t) + \phi(t)) \quad (2.34)$$

avec G_{ij} défini en (2.15).

La synthèse de la loi de commande permettant de stabiliser et d'atténuer les perturbations du système (2.34) est basée sur la satisfaction des conditions du théorème suivant :

Théorème 2.4 [MAN05] :

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t)) h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe des matrices symétriques et définies positives $P > 0, Q > 0$ et une constante positive $\gamma > 0$, tels que les conditions suivantes sont vérifiées.

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + \gamma^{-1} P P + Q < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.35)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + \gamma^{-1} P P + Q < 0, \quad i < j \quad (2.36)$$

Alors, le critère H_∞ (2.33) est satisfait pour le modèle (2.34) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique est garantie.

2.5.4 Stabilisation à base d'observateur et approche H_∞

Dans ce paragraphe, le problème de stabilisation des systèmes perturbés décrits par des modèles T-S est traité de la même manière que la section précédente. Un observateur flou

T-S est utilisé pour estimer les états du système. Pour calculer les gains de la commande K_i et de l'observateur L_i , le théorème de séparation est considéré afin de calculer séparément les gains K_i et L_i . Notons que pour pouvoir appliquer ce théorème, les variables de prémisses doivent être mesurables.

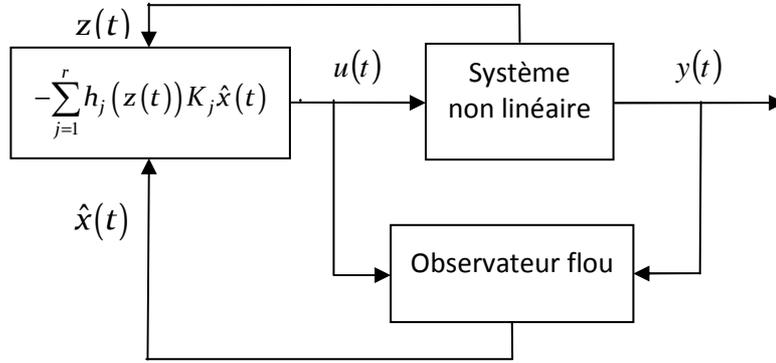


Figure 2.1. Schéma de commande avec observateur

Le modèle T-S perturbé s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + \phi(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t) + v(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

où $\phi(t)$ est une perturbation externe bornée et $v(t)$ un bruit de mesure.

En considérant l'observateur T-S (2.21), et à partir de (2.37) et (2.22), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))((A_i - L_i C_j)e_o(t) - L_i v(t) + \phi(t)) \quad (2.38)$$

En tenant compte de (2.25), le modèle en boucle fermée est donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))((A_i - B_i K_j)x(t) + B_i K_j e_o(t) + \phi(t)) \quad (2.39)$$

Par conséquent, à partir des dynamiques (2.38) et (2.39), nous pouvons définir le système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(\bar{G}_{ij}\bar{x}(t) + \bar{F}_i\bar{\varphi}(t)) \quad (2.40)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ij} &= \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j & 0 \\ B_i K_j & A_i - B_i K_j \end{bmatrix}, & \bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} e_o(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \\ \bar{F}_i &= \begin{bmatrix} -L_i & I \\ 0 & I \end{bmatrix}, & \text{et } \bar{\varphi}(t) &= \begin{bmatrix} v(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ainsi, en tenant compte de l'état augmenté, le critère H_∞ (2.33) peut être modifié comme suit :

$$\int_0^\infty \bar{x}(t)^T \bar{Q} \bar{x}(t) dt < \eta^2 \int_0^\infty \bar{\varphi}(t)^T \bar{\varphi}(t) dt \quad (2.42)$$

où $\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ et $\bar{\varphi}(t)^T \bar{\varphi}(t) = \phi(t)^T \phi(t) + v(t)^T v(t)$.

L'objectif est de chercher d'une part, les conditions sur les gains K_i et L_i assurant la stabilité quadratique du système augmenté (2.40) en absence de perturbations et d'autre part de garantir l'atténuation des perturbations $\bar{\varphi}(t)$ suivant la performance H_∞ (2.42). Le théorème suivant propose des conditions suffisantes assurant la stabilité avec atténuation des perturbations.

Théorème 2.5 [MAN05] :

Pour $t > 0$ et $h_i(z(t))h_j(z(t)) \neq 0$,

S'il existe des matrices symétriques et définies positives $P > 0, M > 0, Q > 0$ et une constante positive γ , tels que les conditions suivantes sont vérifiées.

$$\bar{G}_{ii}^T P + P \bar{G}_{ii} + \gamma^{-1} P \bar{F}_i \bar{F}_i^T P + (s-1)M + sQ < 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, r \quad (2.43)$$

$$(\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji})^T P + P (\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ji}) + \gamma^{-1} P (\bar{F}_i \bar{F}_i^T + \bar{F}_j \bar{F}_j^T) P - 2M < 0, \quad \text{pour } i < j \leq r \quad (2.44)$$

Alors, le critère H_∞ (2.42) est assuré pour le système augmenté (2.40) pour une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité quadratique est garantie.

Les conditions du Théorème 2.5 sont des BMI. La solution considérée consiste, par application du principe de séparation, à résoudre ce problème en deux étapes. Considérons d'abord une forme diagonale pour les matrices P et M .

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

En substituant (2.45) dans (2.43) et (2.44), les conditions du Théorème 2.5 deviennent :

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12}^T & I_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.46)$$

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12}^T & J_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad i < j \leq r \quad (2.47)$$

où :

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= (A_i - L_i C_i)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_i) + \gamma^{-1} P_1 (L_i L_i^T + I) P_1 + (s-1) M_1 \\
 I_{12} &= (B_i K_i)^T P_2 + \gamma^{-1} P_1 P_2 \\
 I_{12}^T &= P_2 (B_i K_i) + \gamma^{-1} P_2 P_1 \\
 I_{22} &= (A_i - B_i K_i)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_i) + \gamma^{-1} P_2 P_2 + (s-1) M_2 + sQ \\
 J_{11} &= (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + (A_j - L_j C_i)^T P_1 + P_1 (A_j - L_j C_i) + \gamma^{-1} P_1 (L_i L_i^T + L_j L_j^T + 2I) P_1 - 2M_1 \\
 J_{12} &= (B_i K_j)^T P_2 + (B_j K_i)^T P_2 + 2\gamma^{-1} P_1 P_2 \\
 J_{12}^T &= P_2 (B_i K_j) + P_2 (B_j K_i) + 2\gamma^{-1} P_2 P_1 \\
 J_{22} &= (A_i - B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i)^T P_2 + P_2 (A_j - B_j K_i) + 2\gamma^{-1} P_2 P_2 - 2M_2
 \end{aligned}$$

avec $\gamma = \eta^2$

En appliquant un complément de Schur et avec le changement de variable $y_i = P_1 L_i$, (2.46) et (2.47) deviennent :

$$\begin{bmatrix} D_{11} & P_1 & y_i & I_{12} \\ P_1 & -\gamma I & 0 & 0 \\ y_i^T & 0 & -\gamma I & 0 \\ I_{12}^T & 0 & 0 & I_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.48)$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & P_1 & y_i & y_j & J_{12} \\ P_1 & -\frac{\gamma}{2} I & 0 & 0 & 0 \\ y_i^T & 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ y_j^T & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ J_{12}^T & 0 & 0 & 0 & J_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad i < j \leq r \quad (2.49)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_i^T y_i^T - y_i C_i + (s-1) M_1 \\
 E_{11} &= A_i^T P_1 + P_1 A_i + A_j^T P_1 + P_1 A_j - C_j^T y_i^T - y_i C_j - C_i^T y_j^T - y_j C_i - 2M_1
 \end{aligned}$$

Pour résoudre les inégalités (2.48) et (2.49), on procédera en deux étapes dont chacune consiste à résoudre une LMI. La première étape consiste à trouver P_2 , K_i et M_2 à partir des blocs diagonaux I_{22} et J_{22} comme suit :

$$I_{22} = (A_i - B_i K_i)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_i) + \gamma^{-1} P_2 P_2 + (s-1) M_2 + sQ < 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, r \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
 J_{22} &= (A_i - B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_j) + (A_j - B_j K_i)^T P_2 + P_2 (A_j - B_j K_i) + 2\gamma^{-1} P_2 P_2 - 2M_2 < 0, \\
 &\text{pour } i < j \leq r
 \end{aligned} \quad (2.51)$$

On effectue une congruence de (2.50) et (2.51) avec P_2^{-1} , ensuite avec un complément de Schur, les inégalités (2.50) et (2.51) sont respectivement équivalentes à :

$$\left[\begin{array}{ccc} X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_i^T B_i^T - B_i N_i + (s-1) M x_2 & X_2 & I \\ (*) & -Q^{-1} / s & 0 \\ (*) & 0 & -\gamma I \end{array} \right] < 0, \quad (2.52)$$

pour $i = 1, \dots, r$

$$\left[\begin{array}{ccc} X_2 A_i^T + A_i X_2 + X_2 A_j^T + A_j X_2 - N_j^T B_i^T - B_i N_j - N_i^T B_j^T - B_j N_i + 2 M x_2 & I \\ (*) & & -\frac{\gamma}{2} I \end{array} \right] < 0, \quad (2.53)$$

pour $i < j \leq r$

La notation (*) correspond à la transposée d'un élément d'une matrice symétrique.

Les LMI (2.52) et (2.53) sont obtenues en adoptant les changements de variables suivants : $X_2 = P_2^{-1}$, $N_i = K_i X_2$ et $M x_2 = X_2 M_2 X_2$. En résolvant les LMI (2.52) et (2.53), on obtient la valeur des matrices X_2 , N_i et $M x_2$.

Dans la deuxième étape, on substitue P_2 , K_i et M_2 dans (2.48) et (2.49) puis on résout la nouvelle LMI obtenue en P_1 , M_1 et y_i (où $y_i = P_1 L_i$). Alors, s'il existe des matrices définies positives P_1 , P_2 , M_1 et M_2 tels que (2.48) et (2.49) sont vérifiées, le critère H_∞ (2.42) est assuré avec une atténuation $\gamma = \eta^2$, et la stabilité du système augmenté (2.40) est garantie.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, des notions de bases relatives aux modèles T-S ainsi que des conditions suffisantes de stabilité ont été présentés. Ces dernières se basent sur la théorie de Lyapunov et sont écrites sous forme de conditions LMI pouvant être résolues pas les outils classiques de l'optimisation convexe. La première partie du chapitre à été consacrée à l'étude de la stabilisation des systèmes décrits par des modèles T-S. Ensuite, nous avons présenté une synthèse de la commande H_∞ pour la stabilisation des systèmes perturbés. Le problème de stabilisation avec observateur a été ensuite détaillé. Les variables de prémisses sont considérées mesurables, par conséquent, le principe de séparation garanti pour les modèles flous T-S permet de calculer séparément les gains de la commande et de l'observateur. Ainsi, des conditions suffisantes assurant la stabilité avec atténuation des perturbations ont été présentées sous forme de contraintes LMI pouvant être résolues en deux étapes.

Chapitre 3 :

Commande robuste des systèmes
flous de type T-S incertains et
perturbés

Chapitre 3 : Commande robuste des systèmes flous de type T-S incertains et perturbés

3.1 Introduction

Dans la littérature, plusieurs travaux ont été développés concernant la synthèse de lois de commande robustes pour les systèmes décrits par des modèles T-S incertains et/ou perturbés. On peut citer par exemple les travaux qui traitent de la stabilisation pour les modèles incertains [BES07], [CEN00], [MAN09], [YON06] et perturbés [FEN06], [HUA06], [NGU06], [YON06]. Afin de représenter une classe plus large de systèmes non linéaires, les modèles T-S considérés dans ce travail sont obtenus par la technique de secteur non linéaire [TAN01]. Avec cette technique, les variables de prémisses du modèle T-S s'écrivent en fonction des variables d'état. En pratique, les états du système ne sont pas directement mesurables, ainsi, les sorties qui sont disponibles à la mesure sont exploités. Dans ce cas, des lois de commande par retour de sortie statique, retour de sortie dynamique et retour de sortie à base d'observateur sont utilisés. Dans le cas de la loi de commande stabilisante avec observateur, deux situations se distinguent. La première considère les variables de prémisses mesurables. Ainsi, le principe de séparation peut être considéré afin de calculer séparément les gains de retour d'état et d'observateur [TAN01], [XIA03], [YON00]. Cependant, cette situation n'est pas toujours satisfaite du fait que les variables de prémisses sont en général en fonction de variables d'état qui ne sont pas mesurables. On se trouve, donc, dans la situation de variables de prémisses non mesurables qui rend invalide le principe de séparation. De plus, lorsqu'il s'agit de modèles T-S incertains, le principe de séparation est aussi non valide. Dans ce contexte, plusieurs travaux ont traité le problème de la stabilisation robuste des systèmes décrits par des modèles T-S incertains et/ou perturbés avec observateur et variables de prémisses mesurables [CHA11], [KCH15], [MAN09], [YON06], [ACH14]. En revanche, dans le cas où les variables de prémisses ne sont pas mesurables, peu de travaux se sont

intéressés au problème de stabilisation robuste avec observateur pour les systèmes T-S incertains et/ou perturbés [ASE13], [ASE15], [YON09]. Néanmoins, malgré les résultats obtenus, le problème du conservatisme des conditions LMI reste encore posé. Cette dernière remarque a motivé le présent travail. Nous proposons ainsi des conditions LMI moins conservatives que celles présentées dans la littérature en traitant le problème de stabilisation avec observateur et variables de prémisses non mesurables avec une technique basée sur des transformations matricielles et l’algorithme PSO (*Particle Swarm Optimisation*) [ACH20].

Ce chapitre est consacré à la présentation d’une loi de commande robuste prenant en compte un critère de performance de type H_∞ ainsi que des incertitudes de modélisation. On s’intéresse principalement à la stabilisation des systèmes décrits par des modèles T-S incertains et perturbés avec variables de prémisses non mesurables. La première partie de ce chapitre est consacrée au problème de stabilisation dans le cas où tous les états sont disponibles. Dans ce cas, les conditions obtenues se mettent directement sous forme LMI. La deuxième partie considère la commande dans son ensemble, i.e. avec observateur et variables de prémisses mesurables. Les résultats sont également exprimés sous forme LMI. La dernière partie est consacrée à la présentation d’une loi de commande plus générale considérant les variables de prémisses non mesurables. Notons que le fait de considérer ces variables de prémisses non mesurables rend le problème de commande plus complexe. Les résultats obtenus sont exprimés sous forme de conditions LMI avec uniquement un seul paramètre prédéfini. La résolution de ces conditions LMI fait appel à l’algorithme PSO. La méthode proposée pour la stabilisation des systèmes décrits par des modèles T-S incertains et perturbés avec variables de prémisses non mesurables aboutit à des conditions LMI moins conservatives que celles présentées dans la littérature, ceci constitue la principale contribution du chapitre. Un exemple de simulation est présenté à la afin de chaque résultat permettant d’illustrer la faisabilité des conditions LMI proposées.

3.2 Stabilisation des systèmes décrits par des modèles T-S incertains à VPM

Le modèle T-S incertain et perturbé avec variables de prémisses mesurables (VPM) est défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))((A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + D_1\phi(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))((C_i + \Delta C_i)x(t) + D_2\phi(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous supposons dans cette section que l’état entier est disponible. Les matrices A_i, B_i, C_i, D_1 et D_2 sont constantes et de dimensions appropriées. Le vecteur $\phi(t)$ caractérise les perturbations et les bruits de mesures. Les matrices $\Delta A_i, \Delta B_i$ et ΔC_i représentent les incertitudes du modèle, pouvant être des incertitudes paramétriques ou dues à des erreurs de modélisation. Ces dernières peuvent être exprimées comme suit :

$$\Delta A_i = H_a F_{ai}(t) E_{ai}, \Delta B_i = H_b F_{bi}(t) E_{bi} \text{ et } \Delta C_i = H_c F_{ci}(t) E_{ci} \quad (3.2)$$

avec $H_a, H_b, H_c, E_{ai}, E_{bi}$ et E_{ci} des matrices constantes. Les matrices incertaines $F_{ai}(t), F_{bi}(t)$ et $F_{ci}(t)$ sont bornées de la manière suivante :

$$F_{ai}(t)^T F_{ai}(t) \leq I, F_{bi}(t)^T F_{bi}(t) \leq I \text{ et } F_{ci}(t)^T F_{ci}(t) \leq I \quad (3.3)$$

L'atténuation H^∞ est définie comme suit :

$$\int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt < \eta^2 \int_0^\infty \phi(t)^T \phi(t) dt \quad (3.4)$$

où Q est une matrice définie positive et η est le taux d'atténuation à minimiser.

La loi de commande utilisée est de type PDC :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) K_j x(t) \quad (3.5)$$

Le modèle en boucle fermée (3.6) est obtenu en appliquant la commande PDC (3.5) au modèle T-S (3.1).

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (G_{ij} x(t) + F \phi(t)) \quad (3.6)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j \text{ et } F = D_1 \quad (3.7)$$

Nous considérons pour l'étude de la stabilité la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \text{ avec } P = P^T > 0 \quad (3.8)$$

Le système en boucle fermée (3.6) est stable et la performance H^∞ (3.4) est garantie si la contrainte suivante est vérifiée :

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + x(t)^T Q x(t) - \eta^2 \phi(t)^T \phi(t) < 0 \quad (3.9)$$

D'après (3.6) et (3.8), l'inégalité (3.9) devient :

$$x(t)^T (G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q) x(t) + \phi(t)^T F^T P x(t) + x(t)^T P F \phi(t) - \eta^2 \phi(t)^T \phi(t) < 0 \quad (3.10)$$

L'inégalité (3.10) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q & PF \\ F^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q & PF \\ F^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

En remplaçant les matrices de (3.7) dans (3.12), on obtient :

$$\begin{bmatrix} (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j)^T P + P(A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) + Q & P D_1 \\ D_1^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

L'inégalité (3.13) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Pi + \Delta \Pi < 0 \quad (3.14)$$

avec :

$$\Pi = \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) + Q & P D_1 \\ D_1^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

et

$$\Delta \Pi = \begin{bmatrix} (\Delta A_i - \Delta B_i K_j)^T P + P(\Delta A_i - \Delta B_i K_j) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

En remplaçant les incertitudes données par (3.2), (3.16) devient :

$$\Delta \Pi = \begin{bmatrix} E_{ai}^T F_{ai}(t)^T H_a^T P + P H_a F_{ai}(t) E_{ai} - K_j^T E_{bi}^T F_{bi}(t)^T H_b^T P - P H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta \Pi$ peut être majorée en utilisant le lemme A.3 de l'annexe A de la façon suivante :

$$\Delta \Pi \leq \begin{bmatrix} \tau_1 E_{ai}^T E_{ai} + \tau_1^{-1} P H_a H_a^T P + \tau_2 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + \tau_2^{-1} P H_b H_b^T P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

avec τ_1 et τ_2 sont des constantes positives.

En substituant (3.17), l'inégalité (3.14) devient équivalente à :

$$\begin{bmatrix} P(A_i - B_i K_j) + I + Q + \tau_1 E_{ai}^T E_{ai} + \tau_1^{-1} P H_a H_a^T P + \tau_2 K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + \tau_2^{-1} P H_b H_b^T P & P D_1 \\ D_1^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

avec $I = (A_i - B_i K_j)^T P$.

Afin d'avoir une contrainte LMI, nous multiplions à gauche et à droite l'inégalité (3.18) par la matrice $\text{diag}[X \ I]$, tel que $X = P^{-1}$ et $N_i = K_i X$ sont des changements de variables. Ainsi, en posant :

$$S_{ij} = X A_i^T + A_i X - N_j^T B_i^T - B_i N_j + \tau_1^{-1} H_a H_a^T + \tau_2^{-1} H_b H_b^T + X Q X + \tau_1 X E_{ai}^T E_{ai} X + \tau_2 N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j,$$

(3.18) devient :

$$\begin{bmatrix} S_{ij} & D_1 \\ D_1^T & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.19)$$

Enfin, avec des compléments de Schur, on trouve l'inégalité suivante :

$$\left[\begin{array}{ccccc} XA_i^T + A_iX - N_j^T B_i^T - B_i N_j + \tau_1^{-1} H_a H_a^T + \tau_2^{-1} H_b H_b^T & X & XE_{ai}^T & N_j^T E_{bi}^T & D_1 \\ & X & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ & E_{ai}X & 0 & -\tau_1^{-1}I & 0 \\ & E_{bi}N_j & 0 & 0 & -\tau_2^{-1}I \\ & D_1^T & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (3.20)$$

$\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}$

L'inégalité (3.20) est exprimée sous forme de conditions LMI. Le Théorème suivant propose des conditions suffisantes assurant la stabilité du système en boucle fermée (3.6) avec atténuation des perturbations.

Théorème 3.1 :

S'il existe une matrice $X = X^T > 0$ et des constantes positives τ_1, τ_2 et σ , tel que la condition suivante est vérifiée, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}$

$$\left[\begin{array}{ccccc} XA_i^T + A_iX - N_j^T B_i^T - B_i N_j + \tau_1^{-1} H_a H_a^T + \tau_2^{-1} H_b H_b^T & X & XE_{ai}^T & N_j^T E_{bi}^T & D_1 \\ & X & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ & E_{ai}X & 0 & -\tau_1^{-1}I & 0 \\ & E_{bi}N_j & 0 & 0 & -\tau_2^{-1}I \\ & D_1^T & 0 & 0 & -\sigma I \end{array} \right] < 0 \quad (3.21)$$

avec $\sigma = \eta^2$

alors, le système en boucle fermée (3.6) est asymptotiquement stable et assure la performance H_∞ (3.4) avec un taux d'atténuation η . Les gains de commande sont donnés par $K_i = N_i X^{-1}$.

3.2.1 Exemple 1:

Considérons le modèle T-S incertain décrit par deux modèles locaux [LAU03].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) ((A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + D_1\phi(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) (C_i x(t) + D_2\phi(t)) \end{cases} \quad (3.22)$$

où :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ -1,5 & -3 + (1 + \rho)b \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \quad 0], \quad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -1,5 & -3 + \frac{1+\rho}{2}b \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{a}{2} - 2 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [1 \quad 0], \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 f_1(x_2) \\ 0 & (1-\rho)b f_2(x_2) \end{bmatrix}, \quad \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 f_1(x_1) \\ 0 & \frac{1-\rho}{2}b f_2(x_2) \end{bmatrix}, \quad \Delta B_1 = \Delta B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} f_1(x_2) \end{bmatrix}.$$

avec $a=1$, $b=-0.5$ et $\rho=-0.2172$.

Les perturbations sont définies par : $\phi(t) = [w(t) \quad v(t)]^T$ tel que $w(t)$ représente les perturbations externes et $v(t)$ le bruit de mesure.

D'après la structure des incertitudes (3.2), on peut avoir :

$$H_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E_{b1} = E_{b2} = \frac{a}{2},$$

$$E_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & (1-\rho)b \end{bmatrix}, \quad E_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & \frac{1-\rho}{2}b \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont données par :

$$h_1(x_1(t)) = \frac{1}{1+x_1^2}, \quad h_2(x_1(t)) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} \quad (3.23)$$

Dans l'exemple, on suppose une perturbation sur la première composante du vecteur d'état de la forme :

$$w(t) = \begin{cases} 0,5 & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les gains de la loi de commande sont obtenus en résolvant la LMI (3.21) en tenant compte de la relaxation de Tanaka et Sano [TAN94] (Voir annexe B) avec un taux de décroissance α .

Ainsi, en fixant $\alpha=0.25$ et $Q = \text{diag}[10^{-4} \quad 10^{-4}]$, on obtient :

$$K_1 = [26,9630 \quad 3,6295], \quad K_2 = [5,9850 \quad 1,0783] \quad \text{et} \quad \eta = 0.1634.$$

Les résultats de simulation de l'application de la loi de commande PDC sont donnés par la figure 3.1 avec la condition initiale $x(0)^T = (-1, 1)$. D'après cette figure, en l'absence de perturbations, la loi de commande permet d'assurer la convergence des états vers le point d'équilibre. Dans le cas de l'application de la perturbation $w(t)$ d'amplitude 0,5 entre les instants 1 à 2s, la loi de commande permet de maintenir des performances acceptables avec une bonne atténuation de la perturbation.

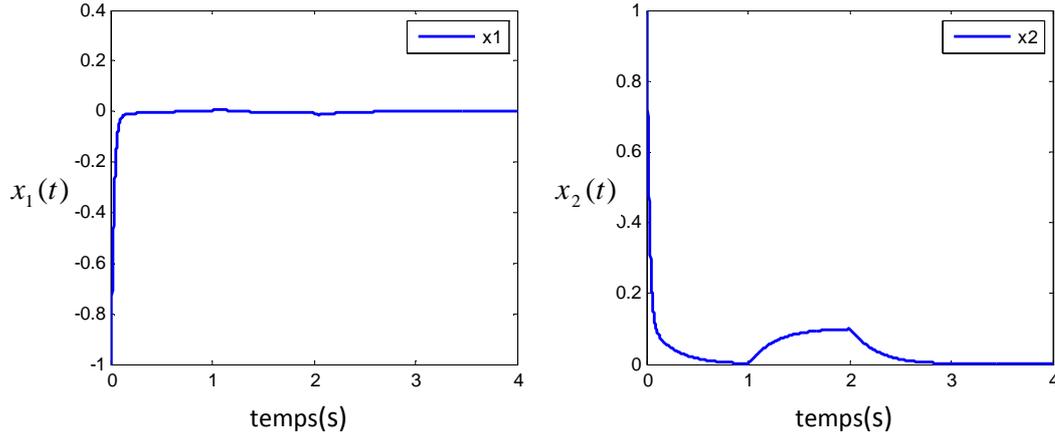


Figure 3.1. Allure des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$

3.3 Synthèse de commande avec observateur T-S

Dans cette partie, on s'intéresse à la synthèse de la commande avec un observateur de structure T-S à VPM. Ce dernier utilise la même représentation d'état qu'un observateur de type Luenberger. L'observateur T-S est exprimé par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.24)$$

La loi de commande PDC s'écrit comme suit :

$$u(t) = - \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) K_j \hat{x}(t) \quad (3.25)$$

On considère le modèle T-S incertain (3.1). L'erreur d'observation est donnée par l'équation $e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Ainsi, à partir des dynamiques (3.1) et (3.24), la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par :

$$\dot{e}_o(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[(A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j) x(t) + (D_1 - L_i D_2) \phi(t) \right] \quad (3.26)$$

En appliquant la commande (3.25) au modèle T-S (3.1), on obtient la dynamique en boucle fermée suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left[(A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j) x(t) + (B_i K_j + \Delta B_i K_j) e_o(t) + D_1 \phi(t) \right] \quad (3.27)$$

Par conséquent, à partir des dynamiques (3.26) et (3.27), nous pouvons définir le système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (G_{ij} \bar{x}(t) + F_i \phi(t)) \quad (3.28)$$

avec :

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j & \Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j \\ B_i K_j + \Delta B_i K_j & A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} D_1 - L_i D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} e_o(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Le critère H_∞ (3.4) est réécrit suivant la structure du système augmenté :

$$\int_0^\infty \bar{x}(t)^T \bar{Q} \bar{x}(t) dt \leq \eta^2 \int_0^\infty \phi(t)^T \phi(t) dt \quad (3.30)$$

où $\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$.

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\bar{x}(t)) = \bar{x}(t)^T P \bar{x}(t) \text{ avec } P = P^T > 0 \quad (3.31)$$

Le système en boucle fermée (3.28) est stable et la performance H_∞ (3.30) est garantie avec un taux d'atténuation η si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} + \bar{x}(t)^T \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 \phi(t)^T \phi(t) < 0 \quad (3.32)$$

D'après (3.28) et (3.31), l'inégalité (3.32) devient :

$$\bar{x}(t)^T (G_{ij}^T P + P G_{ij} + \bar{Q}) \bar{x}(t) + \phi(t)^T F_i^T P \bar{x}(t) + \bar{x}(t)^T P F_i \phi(t) - \eta^2 \phi(t)^T \phi(t) < 0 \quad (3.33)$$

L'inégalité (3.33) est réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_{ij}^T P + P G_{ij} + \bar{Q} & P F_i \\ F_i^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} G_{ij}^T P + P G_{ij} + \bar{Q} & P F_i \\ F_i^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.35)$$

Choisissons $P = \text{diag}[P_1 \quad P_2]$ et remplaçons les matrices augmentées de (3.29) dans (3.35), on obtient :

$$\begin{bmatrix} (A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j)^T P_1 + \psi_1 & (B_i K_j + \Delta B_i K_j)^T P_2 + P_1 (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j) & P_1 (D_1 - L_i D_2) \\ (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j)^T P_1 + P_2 (B_i K_j + \Delta B_i K_j) & (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j)^T P_2 + \psi_2 & P_2 D_1 \\ (D_1 - L_i D_2)^T P_1 & D_1^T P_2 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

avec $\psi_1 = P_1 (A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j)$ et $\psi_2 = P_2 (A_i + \Delta A_i - B_i K_j - \Delta B_i K_j)$.

L'inégalité (3.36) est réécrite sous la forme suivante :

$$\Pi + \Delta \Pi < 0 \quad (3.37)$$

avec :

$$\Pi = \begin{bmatrix} (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) & (B_i K_j)^T P_2 & P_1 (D_1 - L_i D_2) \\ P_2 (B_i K_j) & (A_i - B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_j) + Q & P_2 D_1 \\ (D_1 - L_i D_2)^T P_1 & D_1^T P_2 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

et

$$\Delta \Pi = \begin{bmatrix} (\Delta B_i K_j)^T P_1 + P_1 (\Delta B_i K_j) & (\Delta B_i K_j)^T P_2 + P_1 (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j) & 0 \\ (\Delta A_i - L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j)^T P_1 + P_2 (\Delta B_i K_j) & (\Delta A_i - \Delta B_i K_j)^T P_2 + P_2 (\Delta A_i - \Delta B_i K_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

En remplaçant les incertitudes données par (3.2), (3.39) devient :

$$\Delta \Pi = \begin{bmatrix} P_1 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j + \theta_1 & K_j^T E_{bi}^T F_{bi}^T(t) H_b^T P_2 + P_1 H_a F_{ai}(t) E_{ai} - P_1 L_i H_c F_{cj}(t) E_{cj} - P_1 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j & 0 \\ (*) & P_2 H_a F_{ai}(t) E_{ai} - P_2 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j + \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\theta_1 = (P_1 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j)^T$ et $\theta_2 = (P_2 H_a F_{ai}(t) E_{ai} - P_2 H_b F_{bi}(t) E_{bi} K_j)^T$.

$\Delta \Pi$ peut être bornée comme suit en utilisant le lemme A.3 de l'annexe A:

$$\Delta \Pi \leq \text{diag}[d_1 \quad d_2 \quad 0] \quad (3.40)$$

avec :

$$d_1 = (\tau_1 + \tau_4^{-1}) K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1}) P_1 H_b H_b^T P_1 + \tau_5^{-1} P_1 H_a H_a^T P_1 + \tau_6^{-1} P_1 L_i H_c H_c^T L_i^T P_1$$

$$d_2 = (\tau_2 + \tau_5) E_{ai}^T E_{ai} + (\tau_3 + \tau_7) K_j^T E_{bi}^T E_{bi} K_j + (\tau_3^{-1} + \tau_4) P_2 H_b H_b^T P_2 + \tau_2^{-1} P_2 H_a H_a^T P_2 + \tau_6 E_{cj}^T E_{cj}$$

En utilisant (3.40), l'inégalité (3.37) devient :

$$\begin{bmatrix} (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + d_1 & (B_i K_j)^T P_2 & P_1 (D_1 - L_i D_2) \\ P_2 (B_i K_j) & (A_i - B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_j) + Q + d_2 & P_2 D_1 \\ (D_1 - L_i D_2)^T P_1 & D_1^T P_2 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.41)$$

Pour faciliter la résolution, les termes de la matrice (3.41) doivent être réarrangés en permutant les lignes et les colonnes de cette matrice suivant l'ordre 1, 3 et 2. Pour cela, on effectue une congruence de la matrice (3.41) par la matrice (3.42).

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + d_1 & P_1 (D_1 - L_i D_2) & (B_i K_j)^T P_2 \\ (D_1 - L_i D_2)^T P_1 & -\eta^2 I & D_1^T P_2 \\ P_2 (B_i K_j) & P_2 D_1 & (A_i - B_i K_j)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_j) + Q + d_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.43)$$

En réalisant une congruence par la matrice $\text{diag}[X_2 \ I \ X_2]$ et en effectuant les changements de variable $X_2 = P_2^{-1}$, $N_j = K_i X_2$ et $y_i = P_1 L_i$, (3.43) devient :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \Omega_1 \left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} N_j^T B_i^T \\ D_1^T \end{array} \right] \\ \hline B_i N_j & D_1 & \Omega_2 \end{array} \right] < 0 \quad (3.44)$$

avec :

$$\Omega_1 = \left[\begin{array}{cc} (A_i - L_i C_j)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C_j) + (\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1}) P_1 H_b H_b^T P_1 + \tau_5^{-1} P_1 H_a H_a^T P_1 + \tau_6^{-1} y_i H_c H_c^T y_i^T & P_1 D_1 - y_i D_2 \\ D_1^T P_1 - D_2^T y_i^T & -\eta^2 I \end{array} \right]$$

$$\Omega_2 = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_j^T B_i^T - B_i N_j + X_2 Q X_2 + (\tau_3^{-1} + \tau_4) H_b H_b^T + \tau_2^{-1} H_a H_a^T + (\tau_2 + \tau_5) X_2 E_{ai}^T E_{ai} X_2 + (\tau_3 + \tau_7) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j + \tau_6 X_2 E_{cj}^T E_{cj} X_2$$

On procède maintenant à l'élimination des termes non LMI de la matrice (3.44). En appliquant le lemme A.1 (annexe A) sur le premier bloc diagonal de (3.44), on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \Omega_1 \left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] &\leq -2\alpha_1 \left[\begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] - \alpha_1^2 \Omega_1^{-1} + \left[\begin{array}{cc} (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} -2\alpha_1 X_2 + (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 I \end{array} \right] - \alpha_1^2 \Omega_1^{-1} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ensuite, avec un complément de Schur, (3.45) devient :

$$\left[\begin{array}{cccc} -2\alpha_1 X_2 + (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j & 0 & \alpha_1 I & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 I & 0 & \alpha_1 I \\ \alpha_1 I & 0 & (A_i - L_i C_j)^T P_1 + v_1 + (\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1}) P_1 H_b H_b^T P_1 + \tau_5^{-1} P_1 H_a H_a^T P_1 + \tau_6^{-1} y_i H_c H_c^T y_i^T & v_2 \\ 0 & \alpha_1 I & (*) & -\eta^2 I \end{array} \right] \quad (3.46)$$

Avec $v_1 = P_1 (A_i - L_i C_j)$ et $v_2 = P_1 D_1 - y_i D_2$.

Enfin, en substituant la matrice (3.46) dans (3.44), on obtient :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} T_{11} & 0 & \alpha_1 I & 0 & N_j^T B_i^T \\ 0 & -2\alpha_1 I & 0 & \alpha_1 I & 0 \\ \alpha_1 I & 0 & T_{33} & P_1 D_1 - y_i D_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 I & D_1^T P_1 - D_2^T y_i^T & -\eta^2 I & D_1^T \\ B_i N_j & 0 & 0 & D_1 & T_{55} \end{array} \right] < 0 \quad (3.47)$$

avec :

$$T_{11} = -2\alpha_1 X_2 + (\tau_1 + \tau_4^{-1}) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j$$

$$T_{33} = A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_j^T y_i^T - y_i C_j + (\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1}) P_1 H_b H_b^T P_1 + \tau_5^{-1} P_1 H_a H_a^T P_1 + \tau_6^{-1} y_i H_c H_c^T y_i^T$$

$$T_{55} = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_j^T B_i^T - B_i N_j + X_2 Q X_2 + (\tau_3^{-1} + \tau_4) H_b H_b^T + \tau_2^{-1} H_a H_a^T + (\tau_2 + \tau_5) X_2 E_{ai}^T E_{ai} X_2 \\ + (\tau_3 + \tau_7) N_j^T E_{bi}^T E_{bi} N_j + \tau_6 X_2 E_{cj}^T E_{cj} X_2$$

En appliquant des compléments de Schur sur les blocs diagonaux T_{11} , T_{33} et T_{55} , on obtient l'inégalité suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \Gamma & & & (*) \\ \hline B_i N_j & 0_{1 \times 7} & D_1 & \\ \hline 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 7} & 0_{6 \times 1} & \Lambda \end{array} \right] < 0, \quad (3.48)$$

avec :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2\alpha_1 X_2 & (*) & (*) & 0 & (*) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & -\tau_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & 0 & -\tau_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha_1 X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (*) \\ \alpha_1 I & 0 & 0 & 0 & A_i^T P_1 + P_1 A_i - C_j^T y_i^T - y_i C_j & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_b^T P_1 & -(\tau_1^{-1} + \tau_7^{-1})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_a^T P_1 & 0 & -\tau_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_c^T y_i^T & 0 & 0 & -\tau_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 I & D_1^T P_1 - D_2^T y_i^T & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}$$

et

$$\Lambda = \begin{bmatrix} X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_j^T B_i^T - B_i N_j + (\tau_3^{-1} + \tau_4) H_b H_b^T + \tau_2^{-1} H_a H_a^T & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ X_2 & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} X_2 & 0 & -\tau_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} X_2 & 0 & 0 & -\tau_5^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & 0 & 0 & 0 & -\tau_3^{-1} & 0 & 0 \\ E_{bi} N_j & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_7^{-1} & 0 \\ E_{cj} X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_6^{-1} \end{bmatrix}$$

On peut ainsi énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.2 :

S'il existe des matrices définies positives $P_1 = P_1^T > 0$ et $X_2 = X_2^T > 0$ et des constantes positives $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7, \alpha_1$ et η , tel que la condition suivante est vérifiée, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}$

$$\gamma_{ij} < 0, \quad i, j = 1, \dots, r \quad (3.49)$$

avec γ_{ij} est définie en (3.48).

alors, le système augmenté (3.28) est asymptotiquement stable et assure la performance H^∞ (3.30) avec un taux d'atténuation η . Les gains de commande et d'observateur étant donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $L_i = P_1^{-1} y_i$.

3.3.1 Exemple 2:

Considérons le modèle T-S incertain de l'exemple 1. Pour réduire d'avantage le conservatisme de la LMI (3.49), on ajoute la contrainte (3.50) aux conditions LMI (3.49) du Théorème 3.2:

$$X_3 > X_2, \quad \alpha_1 > 1 \quad (3.50)$$

où X_3 est une matrice symétrique et définie positive introduite à la place de $\alpha_1 X_2$ dans la LMI (3.49). De plus, la relaxation de Tanaka et Sano [TAN94] est considérée avec un taux de décroissance $\alpha = 0.764$. Ainsi, en fixant $Q = \text{diag}[10^{-3} \quad 10^{-3}]$, $\tau_1 = \tau_5 = \tau_7 = 10^{-4}$, $\tau_6 = 1$ et $\alpha_1 = 10^{-2}$, on obtient les gains suivants :

$$K_1 = [250,8347 \quad 66,1322], K_2 = [125,4906 \quad 33,2564], L_1 = \begin{bmatrix} 22.7690 \\ -1.9253 \end{bmatrix} \text{ et } L_2 = \begin{bmatrix} 22.7690 \\ -1.9253 \end{bmatrix}.$$

les paramètres $\tau_2 = 0.0329$, $\tau_3 = 0.0193$, $\tau_4 = 2.6365 \times 10^{-5}$, et le taux d'atténuation $\eta = 0.5194$

Afin de vérifier le comportement du système par rapport aux perturbations, on considère un signal de perturbation externe $w(t)$ d'amplitude 0.5 apparaissant entre les instants 1 et 2s et $v(t)$ un bruit de mesure de moyenne nulle et de variance égale à 0.01.

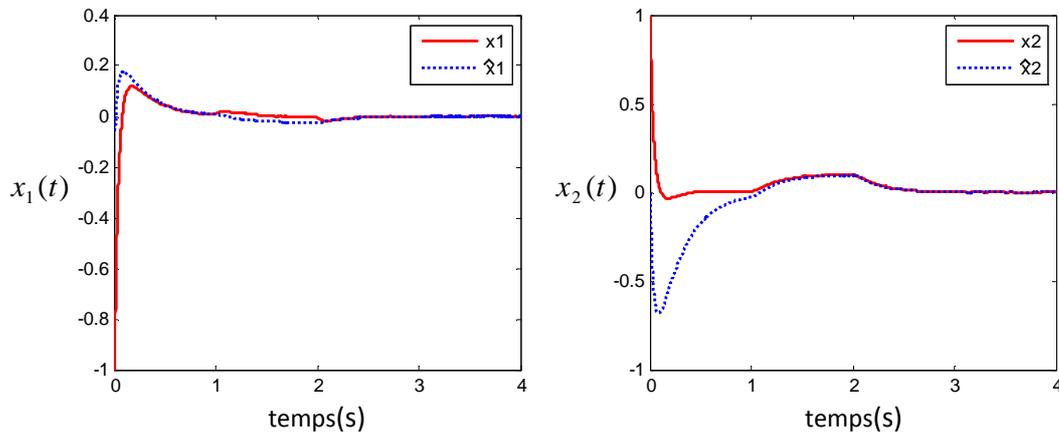


Figure 3.2. Allure des états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et de leurs estimées

La simulation de l'application de la loi de commande PDC avec observateur est donnée par la figure 3.2 avec la condition initiale $x(0)^T = (-1, 1)$. D'après les résultats de la figure 3.2, lorsqu'il n'y a pas de perturbations affectant le système, la loi de commande permet d'assurer la convergence des états et de leur estimation vers le point d'équilibre. Dans le cas de

présence de la perturbation $w(t)$, la loi de commande permet de maintenir des performances acceptables avec une bonne atténuation de la perturbation.

3.4 Stabilisation des systèmes décrits par des modèles T-S incertains à VPNM

Dans cette partie, le problème de conception de la commande robuste à base d'observateur est abordé dans le cas où les variables de prémisses sont non mesurables (VPNM).

Soit le modèle T-S incertain et perturbé à VPNM suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + D_1\phi(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) + D_2\phi(t) \end{cases} \quad (3.51)$$

Les incertitudes ΔA_i et ΔB_i sont définis dans l'équation (3.2).

Afin d'obtenir les conditions de stabilisation, on considère l'observateur T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))] \\ \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^r h_k(\hat{z}(t)) C_k \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.52)$$

où $\hat{z}(t) = [\hat{z}_1(\hat{x}(t)) \cdots \hat{z}_q(\hat{x}(t))]^T$ est le vecteur de prémisses estimé, $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état estimé et L_i est le gain de l'observateur.

La synthèse de la loi de commande pour la stabilisation robuste du système (3.51) est basée sur la loi de commande suivante :

$$u(t) = -\sum_{k=1}^r h_k(\hat{z}(t)) K_k \hat{x}(t) \quad (3.53)$$

où K_k est un gain constant de dimension approprié.

Pour l'étude de la stabilité, on considère une variable augmenté $\bar{x}(t)^T = [x(t)^T \quad e_o(t)^T]^T$ avec $e_o(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Ainsi, en tenant compte de la commande (3.53) et des modèles (3.51) et (3.52), on obtient le système augmenté suivant :

$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(z) h_j(\hat{z}) h_k(\hat{z}) (G_{ijk} \bar{x}(t) + F_j \phi(t)) \quad (3.54)$$

avec :

$$G_{ijk} = \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i - B_i K_k - \Delta B_i K_k & B_i K_k + \Delta B_i K_k \\ \tilde{A}_{ij} + \Delta A_i - L_j \tilde{C}_{ik} - \tilde{B}_{ij} K_k - \Delta B_i K_k & A_j - L_j C_k + \tilde{B}_{ij} K_k + \Delta B_i K_k \end{bmatrix}, \quad F_j = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_1 - L_j D_2 \end{bmatrix},$$

où $\tilde{A}_{ij} = A_i - A_j$, $\tilde{B}_{ij} = B_i - B_j$ et $\tilde{C}_{ik} = C_i - C_k$.

L'atténuation des perturbations est assurée par le critère H^∞ (3.4). Ainsi, en tenant compte de la variable augmenté, le critère H^∞ (3.4) peut être modifié comme suit :

$$\int_0^\infty \bar{x}(t)^T \bar{Q} \bar{x}(t) dt \leq \eta^2 \int_0^\infty \phi(t)^T \phi(t) dt, \quad \text{avec } \bar{Q} = \text{diag}[Q \quad 0] \quad (3.55)$$

Afin de vérifier la stabilité, on applique la seconde loi de Lyapunov. Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\bar{x}(t)) = \bar{x}(t)^T P \bar{x}(t), \quad \text{avec } P = P^T > 0. \quad (3.56)$$

Pour montrer la stabilité du système (3.54) tout en garantissant la performance H^∞ (3.55), nous devons assurer la contrainte suivante :

$$\frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} + \bar{x}(t)^T \bar{Q} \bar{x}(t) - \eta^2 \phi(t)^T \phi(t) < 0 \quad (3.57)$$

En dérivant la fonction de Lyapunov (3.56) et d'après (3.54), l'inégalité (3.57) devient :

$$\bar{x}(t)^T (G_{ijk}^T P + P G_{ijk} + \bar{Q}) \bar{x}(t) + \phi(t)^T F_j^T P \bar{x}(t) + \bar{x}(t)^T P F_j \phi(t) - \eta^2 \phi(t)^T \phi(t) < 0 \quad (3.58)$$

L'inégalité (3.58) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\sum_{i,j,k=1}^r h_i h_j h_k \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_{ijk}^T P + P G_{ijk} + \bar{Q} & P F_j \\ F_j^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.59)$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} G_{ijk}^T P + P G_{ijk} + \bar{Q} & P F_j \\ F_j^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.60)$$

En remplaçant les matrices du système (3.54), le premier block de l'inégalité (3.60) devient :

$$(*) + P \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i - B_i K_k - \Delta B_i K_k & B_i K_k + \Delta B_i K_k \\ \tilde{A}_{ij} + \Delta A_i - L_j \tilde{C}_{ik} & A_j - L_j C_k \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{B}_{ij} K_k & \tilde{B}_{ij} K_k \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta B_i K_k & \Delta B_i K_k \end{bmatrix} + \bar{Q} \quad (3.61)$$

avec (*) indique la transposé des matrices de (3.61).

Supposons $P = \text{diag}[P_2 \quad P_1]$. Afin de faciliter la résolution, le premier terme de l'inégalité (3.61) est traité séparément. Ainsi, les incertitudes du premier terme de (3.61) peuvent être séparées comme suit :

$$(*) + \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i - B_i K_k - \Delta B_i K_k & B_i K_k + \Delta B_i K_k \\ \tilde{A}_{ij} + \Delta A_i - L_j \tilde{C}_{ik} & A_j - L_j C_k \end{bmatrix} = \Psi_{ijk} + \Delta \Psi_{ijk} \quad (3.62)$$

avec :

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_k)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_k) & P_2 (B_i K_k) \\ (B_i K_k)^T P_2 & (A_j - L_j C_k)^T P_1 + P_1 (A_j - L_j C_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (\tilde{A}_{ij} - L_j \tilde{C}_{ik})^T P_1 \\ P_1 (\tilde{A}_{ij} - L_j \tilde{C}_{ik}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

et

$$\Delta \Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} (\Delta A_i - \Delta B_i K_k)^T P_2 + P_2 (\Delta A_i - \Delta B_i K_k) & \Delta A_i P_1 + P_2 (\Delta B_i K_k) \\ P_1 \Delta A_i + (\Delta B_i K_k)^T P_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

En utilisant les incertitudes définies en (3.2) et la propriété du Lemme A.3, (3.62) peut être majorée comme suit :

$$\Psi_{ijk} + \Delta \Psi_{ijk} \leq \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_k)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_k) + d_{1ijk} + S_{1ik} & P_2 (B_i K_k) \\ (B_i K_k)^T P_2 & (A_j - L_j C_k)^T P_1 + P_1 (A_j - L_j C_k) + d_{2ijk} + S_{2ik} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

avec

$$S_{1ik} = (\tau_{2i} + \tau_5^{-1}) E_{ai}^T E_{ai} + \tau_{3i} K_k^T E_{bi}^T E_{bi} K_k + (\tau_{3i}^{-1} + \tau_{4i}^{-1}) P_2 H_{bi} H_{bi}^T P_2 + \tau_{2i}^{-1} P_2 H_{ai} H_{ai}^T P_2, \\ S_{2ik} = \tau_{4i} K_k^T E_{bi}^T E_{bi} K_k + \tau_5 P_1 H_{ai} H_{ai}^T P_1, d_{1ijk} = \varepsilon_2 \tilde{A}_{ij}^T \tilde{A}_{ij} + \varepsilon_3 \tilde{C}_{ik}^T \tilde{C}_{ik}, d_{2ijk} = \varepsilon_2^{-1} P_1^2 + \varepsilon_3^{-1} P_1 L_j L_j^T P_1, \\ \text{où } \tau_1, \tau_{2i}, \tau_{3i}, \tau_{4i}, \tau_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ et } \varepsilon_3 \text{ sont des paramètres constants.}$$

Les derniers termes de l'inégalité (3.61) peuvent aussi être majorés comme suit :

$$(*) + \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{B}_{ij} K_k & \tilde{B}_{ij} K_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1^{-1} P_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_k^T \tilde{B}_{ij}^T \\ K_k^T \tilde{B}_{ij}^T \end{bmatrix} \varepsilon_1 \begin{bmatrix} -\tilde{B}_{ij} K_k & \tilde{B}_{ij} K_k \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$(*) + \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta B_i K_k & \Delta B_i K_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1^{-1} P_1 H_{bi} H_{bi}^T P_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_k^T E_{bi}^T \\ K_k^T E_{bi}^T \end{bmatrix} \tau_1 \begin{bmatrix} -E_{bi} K_k & E_{bi} K_k \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

A partir de (3.65), (3.66) et (3.67), (3.61) devient:

$$G_{ijk}^T P + P G_{ijk} + \bar{Q} \leq S_1 (\varepsilon_1^{-1})^{-1} S_1^T + S_2 (\tau_1^{-1})^{-1} S_2^T + \begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & P_2 (B_i K_k) \\ (B_i K_k)^T P_2 & \Phi_{2ijk} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

avec

$$S_1^T = \begin{bmatrix} -\tilde{B}_{ij} K_k & \tilde{B}_{ij} K_k \end{bmatrix}, S_2^T = \begin{bmatrix} -E_{bi} K_k & E_{bi} K_k \end{bmatrix}, \\ \Phi_{1ijk} = (A_i - B_i K_k)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_k) + d_{1ijk} + S_{1ik} + Q, \\ \Phi_{2ijk} = (A_j - L_j C_k)^T P_1 + P_1 (A_j - L_j C_k) + \varepsilon_1^{-1} P_1^2 + \tau_1^{-1} P_1 H_{bi} H_{bi}^T P_1 + d_{2ijk} + S_{2ik}.$$

En appliquant un complément de Schur, (3.68) devient :

$$G_{ijk}^T P + P G_{ijk} + \bar{Q} \leq \begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & (*) & (*) & (*) \\ (B_i K_k)^T P_2 & \Phi_{2ijk} & (*) & (*) \\ -\tilde{B}_{ij} K_k & \tilde{B}_{ij} K_k & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 \\ -E_{bi} K_k & E_{bi} K_k & 0 & -\tau_1^{-1} I \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

En remplaçant la contrainte (3.69) dans (3.60), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ (B_i K_k)^T P_2 & \Phi_{2ijk} & (*) & (*) & (*) \\ -\tilde{B}_{ij} K_k & \tilde{B}_{ij} K_k & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 & 0 \\ -E_{bi} K_k & E_{bi} K_k & 0 & -\tau_1^{-1} I & 0 \\ D_1^T P_2 & (D_1 - L_j D_2)^T P_1 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.70)$$

Pour remettre la matrice (3.70) sous forme homogène du point de vue des variables inconnues à rechercher, on effectue une congruence par la matrice (3.71) en faisant permuter les lignes et les colonnes de la matrice (3.70) suivant l'ordre 1, 4, 2, 3 et 5.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Ainsi, l'inégalité (3.70) devient :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ -\tilde{B}_{ij} K_k & -\varepsilon_1^{-1} I & (*) & (*) & 0 \\ -E_{bi} K_k & 0 & -\tau_1^{-1} I & (*) & 0 \\ (B_i K_k)^T P_2 & K_k^T \tilde{B}_{ij}^T & K_k^T E_{bi}^T & \Phi_{2ijk} & (*) \\ D_1^T P_2 & 0 & 0 & (D_1 - L_j D_2)^T P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.72)$$

On procède maintenant à un changement de variable $X_2 = P_2^{-1}$, $N_i = K_i X_2$ et $Y_i = P_1 L_i$ et en pré et post multipliant l'inégalité (3.72) par la matrice $diag[X_2 \quad I \quad I \quad X_2 \quad X_2]$, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \Omega_{1ijk} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ -\tilde{B}_{ij}N_k & -\varepsilon_1^{-1}I & 0 & (*) & 0 \\ -E_{bi}N_k & 0 & -\tau_1^{-1}I & (*) & 0 \\ \hline N_k^T B_i^T & N_k^T \tilde{B}_{ij}^T & N_k^T E_{bi}^T & \begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \Omega_{2ijk} & \begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} + \Omega_{3ik} \\ X_2 D_1^T & 0 & 0 & & \end{array} \right] < 0 \quad (3.73)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Omega_{1ijk} = & X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k + X_2 Q X_2 + (\tau_{3i}^{-1} + \tau_{4i}^{-1}) H_{bi} H_{bi}^T \\ & + \tau_{2i}^{-1} H_{ai} H_{ai}^T + (\tau_{2i} + \tau_5^{-1}) X_2 E_{ai}^T E_{ai} X_2 + \tau_{3i} N_k^T E_{bi}^T E_{bi} N_k \\ & + \varepsilon_2 X_2 \tilde{A}_{ij}^T \tilde{A}_{ij} X_2 + \varepsilon_3 X_2 \tilde{C}_{ik}^T \tilde{C}_{ik} X_2, \end{aligned}$$

$$\Omega_{2ijk} = \begin{bmatrix} \Omega_{2ijk}(1,1) & P_1(D_1 - L_j D_2) \\ (D_1 - L_j D_2)^T P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix}, \quad \Omega_{3ik} = \begin{bmatrix} \tau_{4i} N_k^T E_{bi}^T E_{bi} N_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Omega_{2ijk}(1,1) = & A_j^T P_1 + P_1 A_j - C_k^T Y_j^T - Y_j C_k + \varepsilon_1^{-1} P_1^2 + \tau_1^{-1} P_1 H_{bi} H_{bi}^T P_1 + \varepsilon_2^{-1} P_1^2 \\ & + \varepsilon_3^{-1} Y_j Y_j^T + \tau_5 P_1 H_{ai} H_{ai}^T P_1. \end{aligned}$$

Pour éliminer les termes non LMI de l'inégalité (3.73), on applique le lemme A.1 sur le dernier bloc diagonal de (3.73). On obtient :

$$\begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \Omega_{2ijk} \begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} + \Omega_{3ik} \leq \begin{bmatrix} \tau_{4i} N_k^T E_{bi}^T E_{bi} N_k - 2\alpha_1 X_2 & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 X_2 \end{bmatrix} - \alpha_1^2 \Omega_{2ijk}^{-1} \quad (3.74)$$

En appliquant un complément de Schur sur le coté droit de (3.74), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tau_{4i} N_k^T E_{bi}^T E_{bi} N_k - 2\alpha_1 X_2 & 0 & (*) & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 X_2 & 0 & (*) \\ \alpha_1 I & 0 & \Omega_{2ijk}(1,1) & (*) \\ 0 & \alpha_1 I & D_1^T P_1 - D_2^T Y_j^T & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Enfin, en injectant la contrainte (3.75) dans (3.73), on obtient l'inégalité suivante :

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} \Theta_{ijk}(1,1) & (*) & (*) & (*) & 0 & 0 & (*) \\ -\tilde{B}_{ij}N_k & -\varepsilon_1^{-1}I & 0 & (*) & 0 & 0 & 0 \\ -E_{bi}N_k & 0 & -\tau_1^{-1}I & (*) & 0 & 0 & 0 \\ N_k^T B_i^T & N_k^T \tilde{B}_{ij}^T & N_k^T E_{bi}^T & \Theta_{ijk}(4,4) & 0 & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha_1 X_2 & 0 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 I & 0 & \Theta_{ijk}(6,6) & (*) \\ X_2 D_{1i}^T & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 I & D_1^T P_1 - D_2^T Y_j^T & -\eta^2 I \end{array} \right] < 0 \quad (3.76)$$

avec :

$$T_{jk}^i = \begin{bmatrix} T_{jk}^i(1,1) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ P_1 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{bi}^T P_1 & 0 & 0 & -\tau_1 & 0 & 0 & 0 \\ H_{ai}^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\tau_5^{-1} & 0 & 0 \\ Y_j^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 & 0 \\ T_{jk}^i(7,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

$$T_{jk}^i(1,1) = A_j^T P_1 + P_1 A_j - C_k^T Y_j^T - Y_j C_k, \quad T_{jk}^i(7,1) = D_1^T P_1 - D_2^T Y_j^T,$$

$$\Gamma_{jk}^i(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k + (\tau_{3i}^{-1} + \tau_{4i}^{-1}) H_{bi} H_{bi}^T + \tau_{2i}^{-1} H_{ai} H_{ai}^T.$$

L'objectif principal est de calculer les gains K_i et L_i assurant la stabilité asymptotique du système augmenté (3.54) tout en garantissant la performance H_∞ (3.55). Le théorème suivant, exprimé sous forme de conditions LMI, permet d'assurer les performances désirées.

Théorème 3.3 :

Etant donné des constantes positives $\tau_1, \tau_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et α_1 , le système augmenté (3.54) est asymptotiquement stable et assure la performance H_∞ (3.55) avec un taux d'atténuation η s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0, X_2 = X_2^T > 0, N_i, Y_i$, des scalaires positifs $\tau_{2i}, \tau_{3i}, \tau_{4i}$ et η , tels que les conditions LMI suivantes sont vérifiées

$$\Upsilon_{jk}^i < 0, \quad i, j, k = 1, \dots, r \quad (3.81)$$

avec Υ_{jk}^i est définie en (3.78).

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de la commande et de l'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $L_i = P_1^{-1} Y_i$.

3.4.1 Cas particulier de matrices de sortie constantes

Dans le cas où les matrices de sortie sont constantes, (i.e. $C_i = C$), la stabilité asymptotique du système en boucle fermée (3.54) peut être assurée par le théorème suivant.

Théorème 3.4 :

Etant donné des constantes positives $\tau_1, \tau_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ et α_1 , le système augmenté (3.54) est asymptotiquement stable et assure la performance H_∞ (3.55) avec un taux d'atténuation η s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0, X_2 = X_2^T > 0, N_i, Y_i$, des scalaires positifs $\tau_{2i}, \tau_{3i}, \tau_{4i}$ et η , tels que les conditions LMI suivantes sont vérifiées

$$\Upsilon_{jk}^i < 0, \quad i, j, k = 1, \dots, r \quad (3.82)$$

avec :

$$Y_{jk}^i = \begin{bmatrix} & & \Gamma_{jk}^i & & & (*) & & (*) \\ N_k^T B_i^T & 0_{1 \times 5} & N_k^T \tilde{B}_{ij}^T & N_k^T E_{bi}^T & -2\alpha_1 X_2 & (*) & 0 & \\ 0 & 0_{1 \times 5} & 0 & 0 & E_{bi} N & -\tau_{4i}^{-1} & 0 & (*) \\ 0 & 0_{1 \times 5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha_1 X_2 & \\ 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 5} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & \alpha_1 I & 0 & 0 & \\ 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 5} & 0_{4 \times 1} & T_{jk}^i \\ X_2 D_1^T & 0_{1 \times 5} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0 & 0 & \alpha_1 I & \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

tel que Γ_{jk}^i et T_{jk}^i sont donnés par (3.84) et (3.85)

$$\Gamma_{jk}^i = \begin{bmatrix} \Gamma_{jk}^i(1,1) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ X_2 & -Q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} X_2 & 0 & -\tau_{2i}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{ai} X_2 & 0 & 0 & -\tau_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{bi} N_k & 0 & 0 & 0 & -\tau_{3i}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{A}_{ij} X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2^{-1} & 0 & 0 \\ -\tilde{B}_{ij} N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1} & 0 \\ -E_{bi} N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_1^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

$$T_{jk}^i = \begin{bmatrix} T_{jk}^i(1,1) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ P_1 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ H_{bi}^T P_1 & 0 & 0 & -\tau_1 & 0 & 0 \\ H_{ai}^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\tau_5^{-1} & 0 \\ T_{jk}^i(6,1) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

$$T_{jk}^i(1,1) = A_j^T P_1 + P_1 A_j - C^T Y_j^T - Y_j C, \quad T_{jk}^i(6,1) = D_1^T P_1 - D_2^T Y_j^T,$$

$$\Gamma_{jk}^i(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k + (\tau_{3i}^{-1} + \tau_{4i}^{-1}) H_{bi} H_{bi}^T + \tau_{2i}^{-1} H_{ai} H_{ai}^T.$$

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de la commande et de l'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $L_i = P_1^{-1} Y_i$.

Démonstration : la démonstration de ce théorème est similaire à celle du Théorème 3.3.

3.4.2 Relaxation des conditions de stabilité

Dans cette partie, nous proposons de réduire le conservatisme des Théorème 3.3 et 3.4 en appliquant la relaxation de [XIA03]. La technique de [COR98] est considérée dans le Corollaire 3.3. Le résultat principal est proposé dans ce dernier Corollaire avec uniquement un

seul paramètre prédéfini. Par rapport aux résultats proposés dans la littérature, notre approche présente moins de paramètres à fixer d'avance. Des conditions LMI moins conservatives sont alors proposées [ACH20].

Corollaire 3.1 :

Etant donné des constantes positives $\tau_1, \tau_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et α_1 , le système augmenté (3.54) est asymptotiquement stable et assure la performance H_∞ (3.55) avec un taux d'atténuation η s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $X_2 = X_2^T > 0$, $N_i, Y_i, M_{jk}^i, Q_{jk}^i$ des scalaires positifs $\tau_{2i}, \tau_{3i}, \tau_{4i}$ et η , tels que les conditions LMI suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} Y_{jj}^i < 0, & i, j = 1, \dots, r \\ Y_{jk}^i + Y_{kj}^i < 0, & 1 \leq j < k \leq r \end{cases} \quad (3.86)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11}^i & M_{12}^i & \dots & M_{1r}^i \\ (*) & M_{22}^i & \dots & M_{2r}^i \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (*) & (*) & \dots & M_{rr}^i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.87)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{12}^i & \dots & Q_{1r}^i \\ (*) & Q_{22}^i & \dots & Q_{2r}^i \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (*) & (*) & \dots & Q_{rr}^i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.88)$$

avec Y_{jk}^i est définie en (3.78)

$$T_{jk}^i(1,1) = A_j^T P_1 + P_1 A_j - C_k^T Y_j^T - Y_j C_k + M_{jk}^i,$$

$$\Gamma_{jk}^i(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k + (\tau_{3i}^{-1} + \tau_{4i}^{-1}) H_{bi} H_{bi}^T + \tau_{2i}^{-1} H_{ai} H_{ai}^T + Q_{jk}^i$$

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de commande et d'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $L_i = P_1^{-1} Y_i$.

On suivant la même démarche du Corollaire 3.1, on peut aussi réduire le conservatisme du Théorème 3.4. Le corollaire suivant donne des conditions LMI suffisantes assurant la stabilité du système augmenté (3.54).

Corollaire 3.2 :

Etant donné des constantes positives $\tau_1, \tau_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ et α_1 , le système augmenté (3.54) est asymptotiquement stable et assure la performance H_∞ (3.55) avec un taux d'atténuation η s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $X_2 = X_2^T > 0$, $N_i, Y_i, M_{jk}^i, Q_{jk}^i$ des scalaires positifs $\tau_{2i}, \tau_{3i}, \tau_{4i}$ et η , tels que les conditions LMI suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} Y_{jj}^i < 0, & i, j = 1, \dots, r \\ Y_{jk}^i + Y_{kj}^i < 0, & 1 \leq j < k \leq r \end{cases} \quad (3.89)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11}^i & M_{12}^i & \dots & M_{1r}^i \\ (*) & M_{22}^i & \dots & M_{2r}^i \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (*) & (*) & \dots & M_{rr}^i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.90)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{12}^i & \dots & Q_{1r}^i \\ (*) & Q_{22}^i & \dots & Q_{2r}^i \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (*) & (*) & \dots & Q_{rr}^i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.91)$$

avec Y_{jk}^i est définie en (3.83)

$$T_{jk}^i(1,1) = A_j^T P_1 + P_1 A_j - C^T Y_j^T - Y_j C + M_{jk}^i,$$

$$\Gamma_{jk}^i(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k + (\tau_{3i}^{-1} + \tau_{4i}^{-1}) H_{bi} H_{bi}^T + \tau_{2i}^{-1} H_{ai} H_{ai}^T + Q_{jk}^i$$

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de commande et d'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $L_i = P_1^{-1} Y_i$.

Afin de réduire le nombre de paramètres prédéfinis à l'avance dans les contraintes LMI, l'idée considérée consiste à ajouter une contrainte égalité $\alpha_i^{-1} = \tilde{\alpha}_i$ pour un paramètre $\alpha_i > 0$. Afin de résoudre cette contrainte avec la LMI toolbox de Matlab, la technique de [COR98] est considérée permettant d'avoir une approximation de la contrainte égalité sous la forme d'un problème d'optimisation :

$$\min \delta, \quad \text{tel que} \quad \begin{bmatrix} \delta + \tilde{\alpha}_i & I \\ I & \alpha_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\alpha \quad (3.92)$$

Remarque : Les matrices additionnelles M_{jk}^i et Q_{jk}^i peuvent conduire à un grand nombre de variables de décision, en particulier pour un nombre élevé de variable d'état n et de règles r .

Dans ce cas, la complexité du problème LMI devient inadaptée avec les solveurs LMI actuels.

Afin de réduire le nombre de variables de décision des Corollaires 3.1 et 3.2, on considère $M_{jk}^i = M$ et $Q_{jk}^i = Q$ [DEL07]. Dans ce cas, le nombre de variables de décision est réduit de $r^2(r+1)n^2$ à $2n^2$. Le Tableau 3.1 montre la réduction du nombre de variables de décision pour des valeurs arbitraires de n et r .

Nous proposons de réduire le conservatisme des Corollaires 3.1 et 3.2 en appliquant la relaxation de [XIA03] ainsi que la technique de [COR98]. Le résultat proposé considère uniquement un seul paramètre à fixer d'avance. Dans ce cas, en considérant les matrices

additionnelles M et Q , le corollaire suivant présente des conditions LMI suffisantes et moins conservatives assurant la stabilité du système augmenté (3.54).

Tableau 3.1. Nombre de variables de décision des Corollaires 3.1 et 3.2

Nombre de règles r	Variable d'état n	M_{jk}^i, Q_{jk}^i	M, Q
2	2	48	8
2	4	192	32
4	2	320	8
4	4	1280	32

Corollaire 3.3 :

Etant donné une constante positive α_1 , le système augmenté (3.54) est asymptotiquement stable et assure la performance H_∞ (3.55) avec un taux d'atténuation η s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0, X_2 = X_2^T > 0, N_i, Y_i, M > 0, Q > 0$, des scalaires positifs $\tau_1, \tau_{2i}, \tau_{3i}, \tau_{4i}, \tau_5, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_5, \tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_3, \delta$ et η , tels que les conditions LMI suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} Y_{jj}^i < 0, & i, j = 1, \dots, r \\ Y_{jk}^i + Y_{kj}^i < 0, & 1 \leq j < k \leq r \end{cases} \quad (3.93)$$

$$\begin{bmatrix} \delta + \tilde{\tau}_{i_1} & I \\ I & \tau_{i_1} \end{bmatrix} > 0, \quad i_1 = 1, 5, \quad (3.94)$$

$$\begin{bmatrix} \delta + \tilde{\varepsilon}_{i_2} & I \\ I & \varepsilon_{i_2} \end{bmatrix} > 0, \quad i_2 = 1, 2 \text{ si } C_i = C, \quad (3.95)$$

$$\begin{bmatrix} \delta + \tilde{\varepsilon}_{i_2} & I \\ I & \varepsilon_{i_2} \end{bmatrix} > 0, \quad i_2 = 1, 2, 3 \text{ si } C_i \neq C, \quad (3.96)$$

avec Y_{jk}^i est définie en (3.78) ((3.83) si $C_i = C$) tel que

$$T_{jk}^i(1,1) = A_j^T P_1 + P_1 A_j - C_k^T Y_j^T - Y_j C_k + M,$$

$$\Gamma_{jk}^i(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k + (\tau_{3i}^{-1} + \tau_{4i}^{-1}) H_{bi} H_{bi}^T + \tau_{2i}^{-1} H_{ai} H_{ai}^T + Q$$

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de commande et d'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $L_i = P_1^{-1} Y_i$.

Le solveur utilisé (LMI Toolbox de Matlab) pour résoudre les conditions LMI du Corollaire 3 donne des valeurs inadéquates aux paramètres $\tilde{\tau}_{i_1}$ et $\tilde{\varepsilon}_{i_2}$, ce qui signifie que l'objectif d'approximation de la contrainte (3.92) n'est pas atteint. Cette inégalité est alors améliorée afin que l'erreur entre les paramètres $\tilde{\alpha}_i$ et α_i^{-1} soit proche de zéros. Ainsi, (3.92) devient:

$$\begin{bmatrix} \mu_j^2 (\delta + \tilde{\alpha}_i) & I \\ I & \alpha_i \end{bmatrix} > 0, \quad j=1, \dots, n_\mu. \quad (3.97)$$

avec $\mu_j, j=1, \dots, n_\mu$ sont des coefficients de pondération positifs.

Dans la section suivante, les valeurs des coefficients de pondération μ_j minimisant les erreurs $\tilde{\tau}_{i_1} - \tau_{i_1}^{-1}$ et $\tilde{\varepsilon}_{i_2} - \varepsilon_{i_2}^{-1}$ sont obtenus via l'application de l'algorithme d'optimisation PSO.

3.4.3 Algorithme d'optimisation PSO

L'algorithme d'optimisation par essaims de particules (*Particle Swarm Optimization*) est une technique d'optimisation puissante inspirée du comportement social des oiseaux à la recherche de la nourriture en essaim [KEN95], [ENG07].

Cette technique s'appuie sur le concept de coopération entre plusieurs agents biologiques (oiseux, poissons,...etc.), devant atteindre un objectif commun, dans un environnement donné. Les agents, appelés particules, se déplacent dans un espace à plusieurs dimensions en recherchant des sites intéressants (optimaux) par rapport à leurs objectifs communs.

Dans ce travail de thèse, l'application de l'algorithme d'optimisation PSO est décrite par les étapes suivantes :

Etape 1: initialisation des paramètres de l'algorithme PSO:

Taille de la population (n_s) = 30

Nombre d'itérations (N) = 300

Coefficients d'accélération $C_1 = 1.38$ et $C_2 = 1.38$

Coefficient d'inertie $W = W_{\max} - \frac{iter \times (W_{\max} - W_{\min})}{N}$, où $W_{\max} = 0.6$, $W_{\min} = 0.4$ et $iter$ est l'itération actuelle.

Etape 2: Définir les bornes de l'espace de recherche des coefficients de pondération:

$0 < \mu_j < 2000$ pour $j=1, \dots, n_\mu$ où $n_\mu = 4$ (si $C_i = C$), $n_\mu = 5$ (si $C_i \neq C$).

Step3: Initialisation d'un ensemble aléatoire de solutions. Les solutions sont générées à partir de l'équation suivante:

$$X_1^i = X_{\min}^i + rand(i, n_\mu) \times (X_{\max}^i - X_{\min}^i) \quad (3.98)$$

où $i = 1, \dots, n_s$, et $rand(\)$ est un nombre aléatoire qui prend des valeurs entre 0 et 1.

Etape 4: Calcul de la fonction objective via les conditions (3.93)-(3.96) du Corollaire 3.3:

$$F = |\tilde{\tau}_1 - \tau_1^{-1}| + |\tilde{\tau}_5 - \tau_5^{-1}| + |\tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1^{-1}| + |\tilde{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2^{-1}|, \quad (\text{si } C_i = C), \quad (3.99)$$

$$F = |\tilde{\tau}_1 - \tau_1^{-1}| + |\tilde{\tau}_5 - \tau_5^{-1}| + |\tilde{\varepsilon}_1 - \varepsilon_1^{-1}| + |\tilde{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2^{-1}| + |\tilde{\varepsilon}_3 - \varepsilon_3^{-1}|, \text{ (si } C_i \neq C). \quad (3.100)$$

Etape 5: Mise à jour des valeurs $Pbest_k^i$ et $Gbest_k^i$.

Etape 6: Mise à jour de la vitesse de chaque particule selon l'équation suivante:

$$V_{k+1}^i = w \times V_k^i + C_1 \times rand() \times (Pbest_k^i - X_k^i) + C_2 \times rand() \times (Gbest_k^i - X_k^i) \quad (3.101)$$

Etape 7: Mise à jour de la position de chaque particule selon l'équation suivante:

$$X_{k+1}^i = X_k^i + V_{k+1}^i \quad (3.102)$$

Etape 8: Répéter les étapes 4 à 7 jusqu'à atteindre le nombre d'itérations prédéfinies. Les gains de commande et d'observateur sont alors obtenus à la dernière itération.

3.4.4 Exemple 1:

Considérons le modèle T-S incertain décrit par deux modèles locaux ($r=2$) paramétrés par $(a, b, \rho) = (2, -0.7143, 2/\pi)$ et $g=9.81 \text{ m/s}^2$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) [(A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t) + D_1 \phi(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) C_i x(t) + D_2 \phi(t) \end{cases} \quad (3.103)$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bg \frac{1+\rho}{2} & ba \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bg \frac{1+\rho}{2} & -ba \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1 = \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bg \frac{1-\rho}{2} \Delta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta(t) = \frac{1}{1-\rho} \left(2 \frac{\sin x_3(t)}{x_3(t)} - 1 - \rho \right),$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Les incertitudes ΔA_1 et ΔA_2 peuvent s'écrire comme suit :

$$\Delta A_1 = H_a F_{a1}(t) E_{a1}, \quad \Delta A_2 = H_a F_{a2}(t) E_{a2},$$

avec :

$$H_a = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T, E_{a1} = E_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -bg \frac{1-\rho}{2} & 0 \end{bmatrix}, F_{a1}(t) = F_{a2}(t) = \Delta(t).$$

Les fonctions d'appartenance du modèle flou sont :

$$w_0^1(z(t)) = \frac{x_1(t)x_4(t)+2}{4}, \quad w_1^1(z(t)) = 1 - w_0^1(z(t)), \quad \text{avec } z(t) = (x_1(t), x_4(t)).$$

Les fonctions d'activation sont données comme suit :

$$h_1(z(t)) = w_0^1(z(t)) \text{ et } h_2(z(t)) = w_1^1(z(t)).$$

Afin de vérifier la robustesse de la loi de commande vis-à-vis du vecteur des perturbations $\phi(t) = [w(t) \quad 0 \quad 0 \quad v(t)]^T$, on considère $w(t) = \sin 2\pi t$ comme signal de perturbation externe et $v(t)$ un bruit de mesure de moyenne nulle et de variance égale à 0.01.

On considère les valeurs suivantes des paramètres prédéfinis du Corollaire 3.1 :

$$\tau_1 = 0.1, \tau_5 = 10, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0.01, \varepsilon_3 = 1.$$

Afin d'avoir des solutions plus relaxés, on ajoute la contrainte (3.104) aux conditions LMI du Corollaire 3.1 :

$$X_3 > X_2, \quad \alpha_1 > 1 \tag{3.104}$$

où X_3 est une matrice symétrique et définie positive introduite à la place de $\alpha_1 X_2$ dans les LMI du Corollaire 3.1.

Un cas très fréquent avec les solveurs actuel se manifeste au niveau des gains de la loi de commande. En effet, ces solveurs peuvent fournir des valeurs très grandes aux gains K_i conduisant ainsi à une amplitude très élevée du signal de commande. Afin de réduire cette amplitude, la technique de [TAN01] est considérée telle que la contrainte $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ soit appliquée selon les conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X_2 & N_i^T \\ N_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, r. \tag{3.105}$$

avec $x(0)$ est le vecteur des conditions initiales.

Dans cet exemple, la borne du signal de commande considérée est $\mu = 30$.

En utilisant la LMI toolbox de Matlab, la solution du Corollaire 3.1 selon un problème de minimisation sous contraintes ((3.86)-(3.88)) est donnée par les gains suivant :

$$K_1 = [-5.5077 \quad -11.8372 \quad 47.0972 \quad 10.5903], K_2 = [-5.3310 \quad -11.5026 \quad 46.2446 \quad 10.5075],$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 82.0254 & -3.4312 \\ 311.1793 & -31.7049 \\ -3.2324 & 68.7606 \\ -3.4902 & 177.5491 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 81.9185 & -3.5406 \\ 310.7853 & -32.1050 \\ -3.3274 & 68.6622 \\ -3.7474 & 177.2806 \end{bmatrix},$$

les paramètres $\alpha_1 = 1.0928$, $\tau_{21} = 0.1737$, $\tau_{22} = 0.0922$, $\tau_{31} = \tau_{32} = \tau_{41} = \tau_{42} = 6.6804 \times 10^{-4}$, et le taux d'atténuation minimisé $\eta = 0.0906$.

La figure 3.5 présente l'allure des courbes des états réels et estimés pour les conditions initiales $x(0) = (1, 0, 0.1, 0)$ et $\hat{x}(0) = (0, 0, 0, 0)$ en tenant compte des incertitudes de modélisation, des perturbations externes et du bruit de mesure. On peut voir que les états $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ sont uniformément globalement bornés. Le Corollaire 3.1 assure la stabilité asymptotique du système en boucle fermée si le vecteur des perturbations $\phi(t)$ est nul. On peut voir que les signaux de perturbation $w(t)$ et $v(t)$ et ainsi $\phi(t)$ sont tous bornés. Ainsi, tant que les perturbations externes restent bornées, les états $x(t)$ et $\hat{x}(t)$ resteront uniformément globalement bornés. Le signal de commande est donné à la figure 3.4. On peut bien constater qu'il ne dépasse pas la borne considérée. La figure 3.3 montre les évolutions des fonctions d'activation $h_i(\hat{z}(t))$ correspondant au cas du système perturbé.

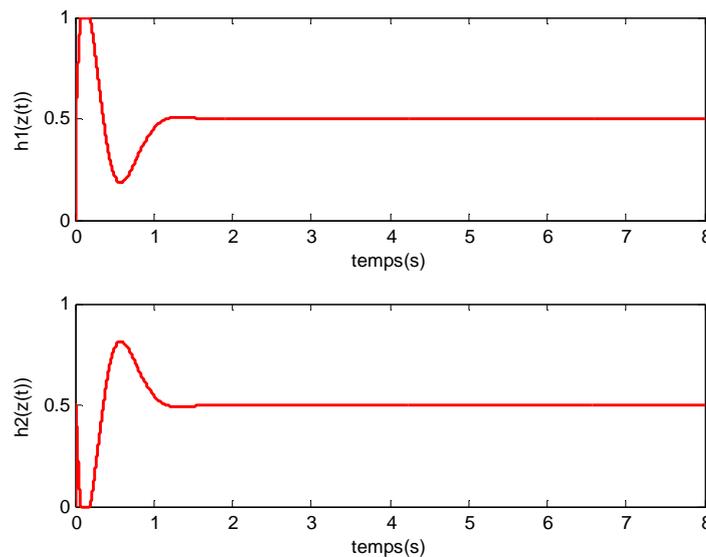


Figure 3.3 Fonctions d'activations des sous modèles flous

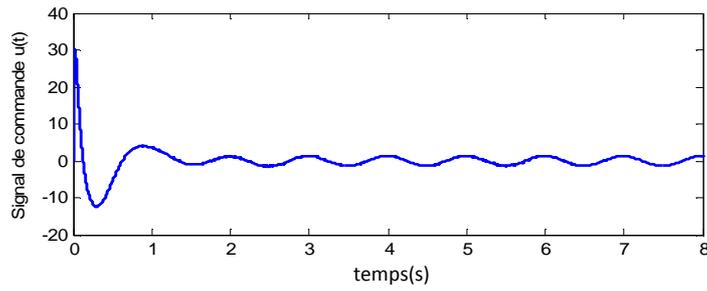


Figure 3.4 Signal de commande $u(t)$

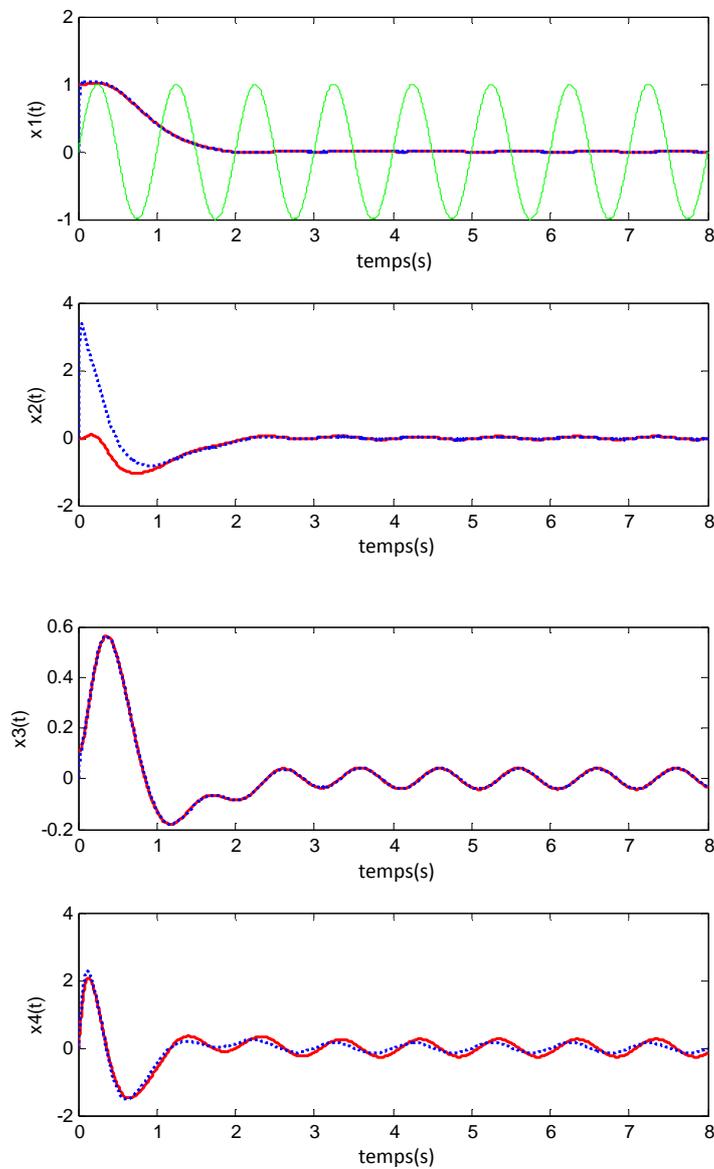


Figure 3.5 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) en présence de perturbations et d'incertitudes de modélisation

3.4.5 Exemple 2:

Considérons le modèle T-S décrit avec deux règles [ASE13].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t) + D_1 \phi(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) C_i x(t) + D_2 \phi(t) \end{cases} \quad (3.106)$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ -2.3 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [10 \quad 2].$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = [0 \quad 1], \Delta A_1 = \Delta A_2 = 0, \Delta B_1 = \Delta B_2 = 0.$$

Les fonctions d'activation sont données comme suit:

$$h_1(x_2(t)) = 0.5 + \arctan(x_2(t)) / \pi, \quad h_2(x_2(t)) = 1 - h_1(x_2(t)), \quad \text{avec } z(t) = x_2(t).$$

$\phi(t) = [w(t) \quad v(t)]^T$ est le vecteur des perturbations où $w(t) = 2 \sin 2\pi t$ est un signal de perturbation externe et $v(t)$ un bruit de mesure de moyenne nulle et de variance égale à 0.01.

Dans cet exemple, on réalise une comparaison des résultats de simulation avec les gains obtenus par notre approche et les gains de l'approche de [ASE13]. Ainsi, une simulation est réalisée en tenant compte des gains obtenus par [ASE13]:

$$K_1 = [64.6762 \quad -37.6079], \quad K_2 = [63.7702 \quad -36.0766],$$

$$L_1^T = [2.36942 \quad -1.1982], \quad L_2^T = [2.63800 \quad -1.2833].$$

Avant de résoudre les LMI du Corollaire 3.3, les matrices additionnelles M_{jk}^i et Q_{jk}^i sont considérés ainsi que la condition (3.104).

Ainsi, en fixant le paramètre $\eta = 0.0548$ et en utilisant l'algorithme PSO avec le Corollaire 3.3, on obtient les résultats suivants :

$$K_1 = [2541.2 \quad -132.3], \quad K_2 = [2544.1 \quad -133.5],$$

$$L_1^T = [19.8781 \quad -1.1132], \quad L_2^T = [21.8621 \quad -1.3404],$$

$$\delta = 1.6065 \times 10^{-5}, \quad \tau_{21} = \tau_{31} = \tau_{41} = 106.1597, \quad \tau_{22} = \tau_{32} = \tau_{42} = 106.0793, \quad \alpha_1 = 1.0136,$$

$$\tilde{\tau}_1 = 452.2203 \times 10^{-5}, \quad \tilde{\tau}_5 = 451.7038 \times 10^{-5}, \quad \tilde{\epsilon}_1 = 473.0975 \times 10^{-5}, \quad \tilde{\epsilon}_2 = 473.0973 \times 10^{-5},$$

$$\tau_1 = 221.1312, \quad \tau_5 = 221.3840, \quad \epsilon_1 = 211.3729, \quad \epsilon_2 = 211.3730.$$

Une deuxième comparaison est effectuée dans le cas de matrices de sortie non égales telle que $C_1 = [10 \quad 2]$ et $C_2 = [9 \quad 1]$. Ainsi, afin de comparer les résultats, on réalise une deuxième simulation en tenant compte des gains obtenus par [ASE13]:

$$K_1 = 10^2 \times [0.6988 \quad -8.5224], \quad K_2 = 10^2 \times [0.6378 \quad -6.9091],$$

$$L_1^T = [0.8944 \quad -0.024], \quad L_2^T = [0.9273 \quad 0.0381].$$

En fixant $\eta = 0.0707$ et en utilisant l'algorithme PSO avec le Corollaire 3.3, on obtient les résultats suivants :

$$K_1 = [2110.3 \quad -266.0], \quad K_2 = [2117.2 \quad -255.5],$$

$$L_1^T = [8.6194 \quad -0.4804], \quad L_2^T = [8.3939 \quad -0.5175].$$

$$\delta = 2.8654 \times 10^{-5}, \quad \tau_{21} = \tau_{31} = \tau_{41} = 71.0070, \quad \tau_{22} = \tau_{32} = \tau_{42} = 70.5662, \quad \alpha_1 = 1.0171,$$

$$\tilde{\tau}_5 = 661.3991 \times 10^{-5}, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = 686.0117 \times 10^{-5}, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = 686.0121 \times 10^{-5}, \quad \tilde{\varepsilon}_3 = 662.8377 \times 10^{-5},$$

$$\tau_5 = 151.1946, \quad \varepsilon_1 = 145.7701, \quad \varepsilon_2 = 145.7700, \quad \varepsilon_3 = 150.8665, \quad \tilde{\tau}_1 = 661.8380 \times 10^{-5}, \quad \tau_1 = 151.0944.$$

Notons que la méthode proposée par [ASE13] donne une solution avec un taux d'atténuation H_∞ égal à $\eta = 2.7$. Néanmoins, cette valeur très élevée du taux d'atténuation conduit à une faible atténuation des perturbations. En revanche, la méthode proposée dans notre travail permet d'avoir la valeur 0.0707 du taux d'atténuation H_∞ . Evidemment, ce résultat offre une meilleure atténuation des perturbations. Les résultats précédents sont présentés dans le Tableau 3.2.

Tableau 3.2. Tau d'atténuation η pour différentes approches

Methode	$\eta (C_1 = C_2)$	$\eta (C_1 \neq C_2)$
Methode de [BES07]	1.0949	-
Methode de [ASE13]	0.9537	2.7
Corollaire 3.3	0.0548	0.0707

Les figure 3.7 et 3.9 montrent les réponses du système en boucle fermée pour les conditions initiales $x(0) = (1, 1)$ et $\hat{x}(0) = (0, 0)$. Les figures 3.6 et 3.8 montrent les réponses obtenues du système en boucle fermée en tenant compte des gains donnés dans [ASE13] avec les mêmes conditions initiales. Le signal de perturbation est donné dans la figure 3.10.

A partir de ces figures, la convergence des états et de leurs estimées vers le point d'équilibre est bien assurée quand la perturbation est nulle, mais dès qu'un signal de perturbation est appliqué, la meilleure atténuation des perturbations apparait clairement dans les figure 3.7 et 3.9. Par rapport aux résultats donnés dans [ASE13], la loi de commande floue proposée ne garantie pas uniquement la stabilité du système non linéaire mais elle assure aussi une forte robustesse vis à vis des perturbations externes et des incertitudes de modélisation.

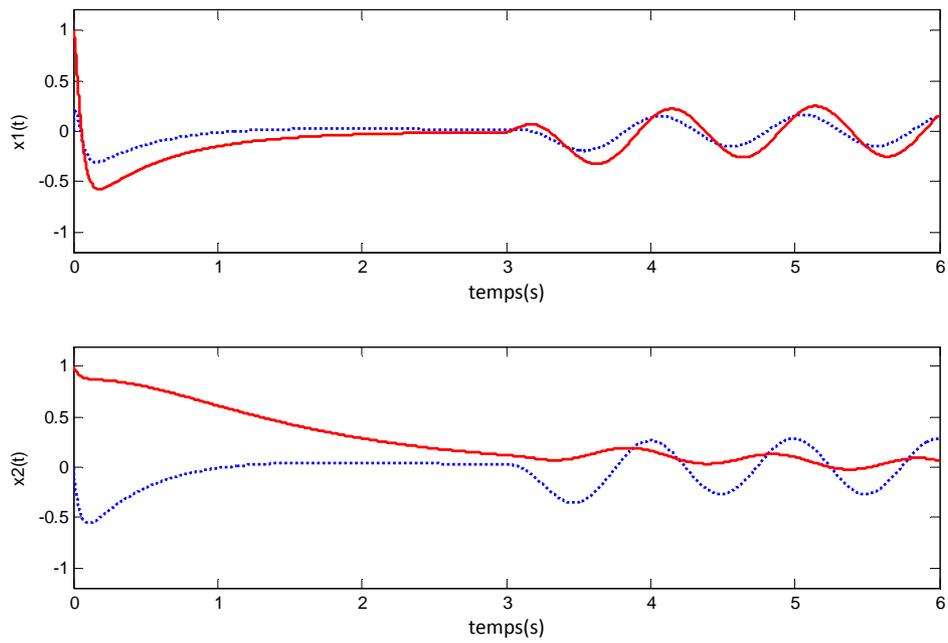


Figure 3.6 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) dans le cas de matrices de sortie égales en tenant compte des gains obtenus par [ASE13]

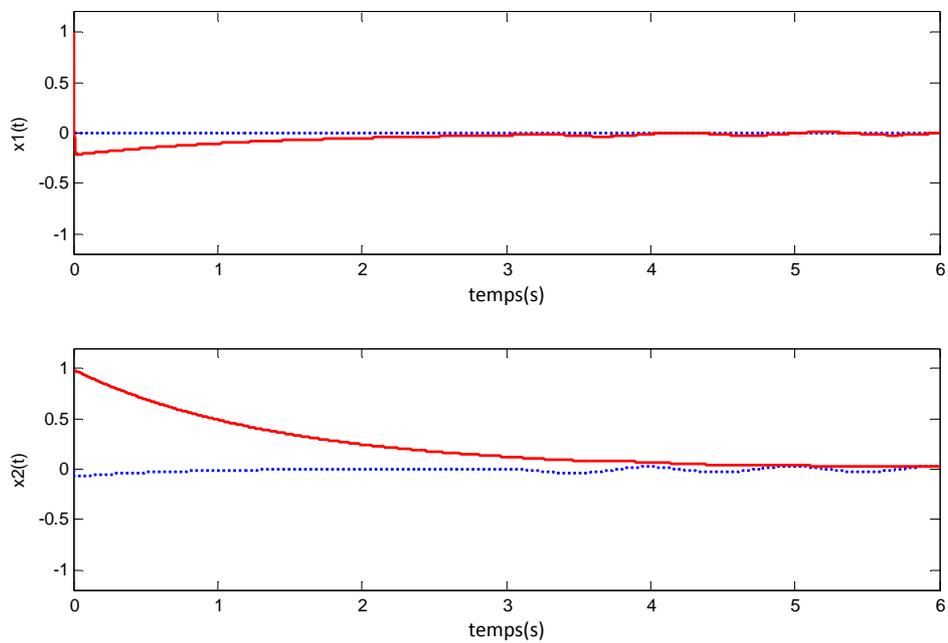


Figure 3.7 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) dans le cas de matrices de sortie égales

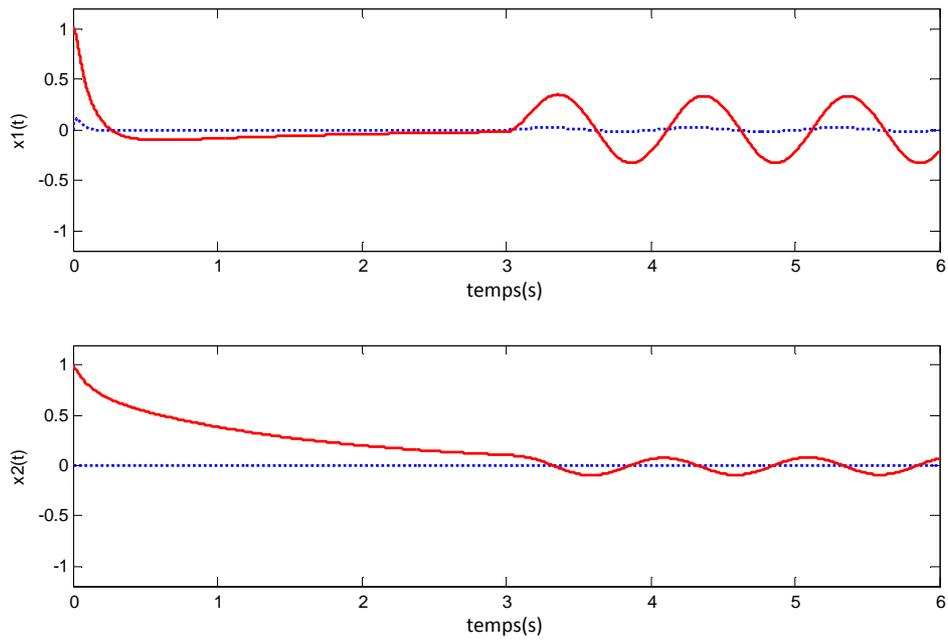


Figure 3.8 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) dans le cas de matrices de sortie non égales en tenant compte des gains obtenus par [ASE13]

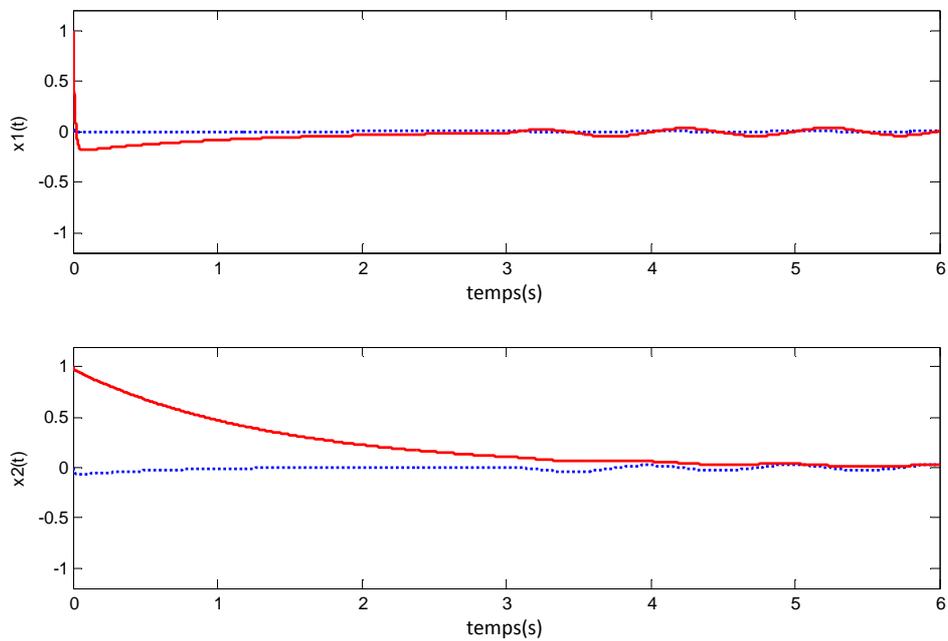


Figure 3.9 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu) dans le cas de matrices de sortie non égales

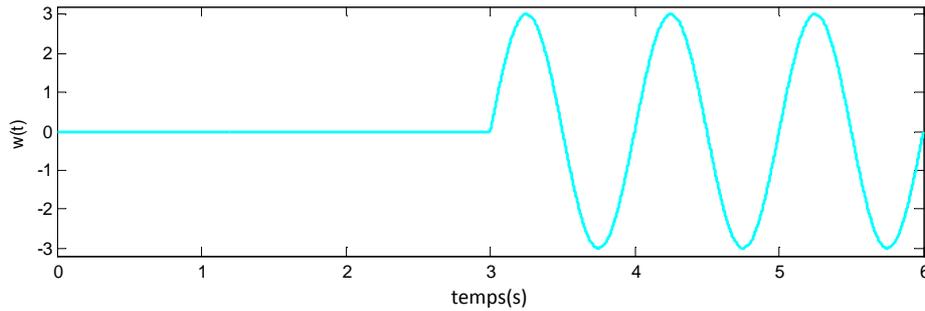


Figure 3.10 Signal de perturbation $w(t)$

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, des résultats concernant la stabilisation robuste des systèmes dynamiques incertains modélisés par des systèmes flous de type T-S ont été proposées. L'étude menée concerne en premier lieu les modèles T-S incertains et perturbés à variables de prémisses mesurables. Le cas des variables de prémisses non mesurables a été ensuite abordé. Un résultat utilisant des propriétés matricielles moins conservatrices a été proposé en terme de conditions LMI moins conservatives avec un seul paramètre prédéfini. Dans ce contexte, l'utilisation des techniques de transformation matricielle a permis d'étendre les résultats existants. En effet, le résultat proposé possède la particularité d'avoir moins de paramètres prédéfinis par rapport aux résultats existants dans la littérature. L'algorithme d'optimisation PSO est utilisé pour la résolution des conditions LMI. Afin de vérifier la faisabilité des conditions LMI proposées, un exemple académique a été présenté à la fin de chaque résultat. Les simulations effectuées ont montré des résultats tout à fait satisfaisants en terme de robustesse par rapport aux erreurs de modélisation et aux perturbations extérieures.

Chapitre **4** :

Commande tolérante aux défauts
des systèmes flous de type T-S

Chapitre 4 : Commande tolérante aux défauts des systèmes flous de type T-S

4.1 Introduction

Actuellement, la commande tolérante aux défauts à base de modèles T-S devient largement appliquée à une large classe de systèmes non linéaires [TAN98], [NGU03], [WEI09], [GAO12], [AMI19]. Plusieurs travaux sont consacrés à la conception de lois de commande tolérantes aux défauts pour ce type de modèles [HAJ17], [KÜH17], [RUA21]. Dans [HAJ17], une commande FTC est conçue pour les systèmes T-S affecté par des défauts capteur. Une loi de commande tolérante aux défauts actionneur et capteur à base d'observateur proportionnel multi-intégral est proposée dans [KÜH17]. Une commande FTC adaptative est proposée dans [RUA21] pour les systèmes flous T-S affectés par des défauts actionneur. La prise en compte des perturbations externes dans la loi de commande FTC est primordiale afin d'assurer une bonne tolérance aux défauts. En effet, les perturbations non prises en compte peuvent engendrés de graves erreurs d'estimation (d'état et de défaut) pouvant ainsi conduire à une dégradation des performances et même à l'instabilité du système. Par conséquent, la conception d'une commande FTC robuste s'avère nécessaire Cette question est considérée dans certains travaux. Par exemple, dans [HAN16], un observateur flou d'ordre réduit est proposé afin d'estimer les états, les défauts actionneurs et les défauts capteurs tout en atténuant l'influence des perturbations. Cependant, dans cette approche, les variables de prémisses sont supposés mesurables et le calcul des gains de la commande et de l'observateur est réalisé d'une manière séparé en deux étapes. Les conditions LMI proposés sont donc conservatives. En plus, puisque les variables de prémisses sont mesurables, cela limite son application à une classe restreinte de modèles T-S. Dans [LI17], une méthode est proposée sur la base d'une combinaison entre une commande FTC par retour de sortie dynamique et l'observateur adaptatif flou. Cette méthode assure la tolérance aux défauts actionneur et capteur pour les systèmes T-S perturbés, mais les variables de prémisses sont aussi supposés mesurables. Dans la littérature, le cas de variables de prémisses non mesurable reste peu traité en raison de la complexité de traitement de l'approche. En général, les résultats existants sont soit conservatifs ou dédiés à des systèmes à structures particulières.

Par exemple dans [LI21], une loi de commande tolérante aux défauts actionneur et capteur à base d'observateur à modes glissants, reconnue pour sa robustesse par rapport aux incertitudes de modélisation, est proposée pour les systèmes flous T-S quantifiés. Dans [ZIN19], une approche FTC par poursuite de trajectoire à base d'observateur proportionnel intégral est proposée pour les systèmes T-S incertains et perturbés avec défauts capteur. Cette dernière consiste à réécrire le modèle T-S original avec prémisses non mesurables sous une forme multimodèle à variables de prémisses mesurables. Cependant, cette approche considère la technique par atténuation des perturbations qui est conservative.

L'objectif des stratégies de commande précédentes est, d'une part, de rechercher la solution réalisable (*feasible solution*) en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI et, d'autre part, de calculer des gains de commande et d'observateur permettant de garantir les objectifs de la loi de commande FTC. Cependant, pour un système donné, la possibilité d'aboutir à des gains adéquats dépend du degré de conservatisme des conditions LMI proposées. Le grand souci des scientifiques à l'heure actuelle est la relaxation de ses conditions afin de garantir les objectifs de la loi de commande. Par ailleurs, malgré les divers travaux publiés, le problème du conservatisme des conditions de stabilité est toujours posé. Notre contribution dans ce chapitre consiste à considérer les variables de prémisses non mesurables et à présenter les résultats directement sous forme LMI pouvant être résolus en une seule étape. Afin de valider les résultats proposés, des exemples de simulation sont présentés à la fin de chaque résultat.

Dans ce chapitre, nous proposons une loi de commande tolérante aux défauts (FTC) actionneurs à base d'observateurs visant à la détection, l'estimation et la compensation des défauts affectant un système non linéaire décrit par un modèle T-S. Les méthodes développées exploitent les observateurs PI et PMI permettant de fournir simultanément l'estimation des états et des défauts, ce qui permet leur compensation. Deux approches de commande FTC active à base d'observateurs PI et PMI sont alors proposées. La première considère les variables de prémisses mesurables, alors que dans la deuxième approche, ils sont en fonction des variables d'état qui sont non mesurables. Une méthode tenant compte du formalisme H^∞ est aussi présentée. Elle permet l'estimation et la compensation des défauts tout en atténuant l'effet des perturbations extérieures. On obtient à la fin une loi de commande tolérante aux défauts active et robuste.

4.2 Commande tolérante aux défauts

Un système physique est souvent soumis à des défauts de différentes natures (défaut actionneur, capteur ou système) non directement mesurables qui peuvent modifier la dynamique du système et entraîner le dysfonctionnement de ce dernier. Une commande tolérante aux défauts est donc nécessaire dès l'apparition du défaut afin de garantir la sécurité des personnes, du procédé et son environnement et préserver les performances désirées. Un système physique affecté par un défaut s'écarte de sa trajectoire de référence. Cela conduit à des performances dégradées pouvant provoquer l'instabilité selon la sévérité du défaut. Dans

le cas de défauts de faible amplitude, une commande robuste peut suffire pour maintenir les performances désirées. On parle alors d'approche passive. Par contre, dans le cas des défauts critiques, il est nécessaire de mettre en œuvre une stratégie de commande tolérante aux défauts (FTC) active. La commande FTC active agit de manière à compenser l'effet du défaut sur le système. L'objectif de la stratégie de commande FTC active consiste à limiter, voire annuler, l'effet des défauts sur le système. En pratique, l'objectif de compenser tous les défauts n'est pas forcément réalisables. Dans le cas de défauts d'actionneurs ayant un impact grave comme une perte totale d'un ou plusieurs actionneurs, une nouvelle loi de commande peut être synthétisée avec les actionneurs sains si la condition de commandabilité est vérifiée. On parle alors de reconfiguration de la loi de commande permettant de générer une nouvelle loi de commande pour les actionneurs sains afin de ramener le système à sa trajectoire de référence. En revanche, dans le cas d'un défaut qui se manifeste par une perte d'efficacité des actionneurs, cela veut dire que les actionneurs fonctionnent toujours mais avec des performances dégradées, la nouvelle loi de commande est générée par adaptation en ligne de ses paramètres. On parle dans ce cas de l'accommodation de défauts. En effet, la loi de commande exploite la valeur estimée du défaut. Par conséquent, la tâche de compensation de ce dernier peut être réalisée. Ce dernier point est traité dans ce chapitre en utilisant les modèles T-S ainsi que les observateurs PI et PMI. Ces observateurs ont été initialement proposés afin de fournir une estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues du système. Les premiers travaux portant sur les observateurs PI pour les systèmes linéaires SISO à temps invariant datent des années 70 [WOJ78]. Ces travaux ont été ensuite étendus aux systèmes linéaires MIMO variants dans le temps [KAC79]. Toutefois, la synthèse de ce type d'observateurs est basée sur l'hypothèse d'entrées inconnues constantes. Afin de prendre en compte des formes plus générales de signaux d'entrées inconnues (échelon, rampe,...etc.), l'observateur PI a été généralisé en considérant plusieurs intégrateurs au lieu d'un seul dans la structure de l'observateur [JIA00]. Cette nouvelle structure est dite : observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI). Grâce à cette structure, l'observateur est adapté à l'estimation de signaux de forme polynomiale ayant une q ème dérivée nulle ou bornée. Plusieurs types de défauts peuvent être ainsi estimés (biais, dérive,...etc.) avec des qualités d'observation bien meilleures.

4.3 Commande tolérante aux défauts actionneurs à VPM

Dans cette partie, les variables de prémisses sont supposés mesurables (VPM). La stratégie de commande tolérante aux défauts est étudiée pour deux types d'observateurs, le premier concerne l'observateur proportionnel intégral (PI) et le second porte sur l'observateur proportionnel multi-intégral (PMI).

Considérons le système sans défaut décrit par le modèle T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ le vecteur des entrées, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représente le vecteur de sortie. Les matrices A_i, B_i, C_i et D_i sont constantes et de dimensions appropriées. Les fonctions $h_i(x(t))$ représentent les fonctions d'activation qui dépendent de l'état du système. Nous supposons dans cette section que l'état est complètement mesurable.

Le système affecté par les défauts actionneurs s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i (u(t) + f(t))) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (C_i x(t) + D_i (u(t) + f(t))) \end{cases} \quad (4.2)$$

avec $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ est le vecteur de défauts.

Le but est de concevoir une loi de commande FTC telle que l'état $x(t)$ du système en défaut (4.2) converge vers l'état du système sans défaut (4.1).

La loi de commande FTC proposée est donnée sous la forme suivante :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) K_i \hat{x}(t) - \hat{f}(t) \quad (4.3)$$

Les matrices K_i sont déterminées pour garantir la stabilité du système en boucle fermée.

La loi de commande (4.3) nécessite l'estimation du vecteur de défauts $f(t)$. L'estimation de ce dernier est obtenue à travers un observateur PI estimant simultanément l'état du système ainsi que le vecteur de défauts.

4.3.1 Observateur PI

La structure de l'observateur PI pour le système (4.2) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i (u(t) + \hat{f}(t)) + L_{pi} (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (C_i \hat{x}(t) + D_i (u(t) + \hat{f}(t))) \\ \dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) L_{li} (y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (4.4)$$

où L_{pi} représente les gains des actions proportionnelles et L_{li} les gains des actions intégrales de l'observateur (4.4).

Hypothèse 4.1. Tout au long de cette section, le défaut $f(t)$ est supposé constant. En d'autre terme, la 1^{ère} dérivée de $f(t)$ est nulle :

$$\dot{f}(t) = 0 \quad (4.5)$$

On définit l'erreur d'estimation d'état $e_x(t)$ et de défaut $e_f(t)$ comme suit :

$$\begin{cases} e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \\ e_f(t) = f(t) - \hat{f}(t) \end{cases} \quad (4.6)$$

L'erreur de sortie entre le système en défaut (4.2) et l'observateur (4.4) est donnée par :

$$y(t) - \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (C_i e_x(t) + D_i e_f(t)) \quad (4.7)$$

En utilisant (4.2) et (4.4) et en tenant compte de l'hypothèse 4.1, les dynamiques de l'erreur d'estimation d'état et de défaut sont données par :

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) ((A_i - L_{pi} C_j) e_x(t) + (B_i - L_{pi} D_j) e_f(t)) \\ \dot{e}_f(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (-L_{fi} C_j e_x(t) - L_{fi} D_j e_f(t)) \end{cases} \quad (4.8)$$

Le système en boucle fermée est obtenu en appliquant la commande (4.3) au modèle (4.2). Ce dernier s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (G_{ij} x(t) + B_i K_j e_x(t) + B_i e_f(t)) \quad (4.9)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (4.10)$$

A partir des dynamiques (4.8), on introduit la dynamique de l'erreur augmentée suivante :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(z(t)) F_{ij} \bar{e}(t) \quad (4.11)$$

avec :

$$F_{ij} = (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}_j) \quad (4.12)$$

où :

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_i = \begin{bmatrix} L_{pi} \\ L_{fi} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_j = [C_j \quad D_j], \quad \bar{e}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Le système en boucle fermée (4.9) est aussi réécrit en fonction de l'erreur d'estimation augmentée $\bar{e}(t)$. Ainsi, le système (4.9) devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (G_{ij} x(t) + B_i \bar{K}_j \bar{e}(t)) \quad (4.14)$$

avec :

$$\bar{K}_j = [K_j \quad I] \quad (4.15)$$

La concaténation de l'erreur d'estimation augmentée $\bar{e}(t)$ et de l'état $x(t)$ permet d'écrire, à partir de (4.11) et de (4.14), le système augmenté suivant :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \tilde{G}_{ij} \tilde{x}(t) \quad (4.16)$$

avec :

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{e}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & B_i \bar{K}_j \\ 0 & F_{ij} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Dans cette section, l'objectif principal est de calculer les gains K_i et \bar{L}_i qui assurent la stabilité asymptotique du système augmenté (4.16) tout en garantissant la compensation des défauts affectant les actionneurs. L'étude de la stabilité du système (4.16) permet d'énoncé le théorème suivant :

Théorème 4.1 :

S'il existe des matrices $X_1 = X_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, Y_i et une constante positive τ telle que la condition LMI suivante soit vérifiée.

$$\begin{bmatrix} X_1 A_i^T + A_i X_1 & B_i \bar{K}_j & -B_i K_j & X_1 \\ * & \bar{A}_i^T P_2 + P_2 \bar{A}_i - \bar{C}_j^T Y_i^T - Y_i \bar{C}_j & 0 & 0 \\ * & 0 & -\tau^{-1} I & 0 \\ * & 0 & 0 & -\tau I \end{bmatrix} < 0, \quad i, j = 1, \dots, r \quad (4.18)$$

Alors, le système augmenté (4.16) est asymptotiquement stable et assure la convergence asymptotique vers zéro des états ainsi que des erreurs d'estimation d'état et de défaut. Avec les changements de variables bijectifs X_1 , et Y_i i.e. $P_1 = X_1^{-1}$, et $\bar{L}_i = P_2^{-1} Y_i$.

Démonstration : Considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t) \quad \text{avec } P = P^T > 0 \quad (4.19)$$

La matrice P est choisie sous forme diagonale :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Afin de vérifier la stabilité du système (4.16), nous devons vérifier que la dérivée de la fonction de Lyapunov $\dot{V}(\tilde{x}(t))$ soit négative.

En dérivant la fonction de Lyapunov (4.19) et d'après (4.16), $\dot{V}(\tilde{x}(t))$ se met sous la forme :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \tilde{x}(t)^T (\tilde{G}_{ij}^T P + P \tilde{G}_{ij}) \tilde{x}(t) < 0 \quad (4.21)$$

D'après la propriété de somme convexe des fonctions d'activation, l'inégalité (4.21) est vraie si la condition suivante est vérifiée :

$$\tilde{G}_{ij}^T P + P \tilde{G}_{ij} < 0 \quad (4.22)$$

En remplaçant les matrices définies en (4.17) et (4.20), (4.22) devient :

$$\begin{bmatrix} G_{ij}^T P_1 + P_1 G_{ij} & P_1 B_i \bar{K}_j \\ \bar{K}_j^T B_i^T P_1 & F_{ij}^T P_2 + P_2 F_{ij} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

Pour aboutir à une condition LMI, nous effectuons un changement de variable en pré-multipliant et post-multipliant (4.23) par $\text{diag}[P_1^{-1} \quad I]$ avec $X_1 = P_1^{-1}$. On obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} X_1 A_i^T + A_i X_1 - X_1 (B_i K_j)^T - (B_i K_j) X_1 & B_i \bar{K}_j \\ \bar{K}_j^T B_i^T & (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}_j)^T P_2 + P_2 (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}_j) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.24)$$

(4.24) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & B_i \bar{K}_j \\ \bar{K}_j^T B_i^T & \Omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_i K_j \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B_i K_j \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (4.25)$$

où :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= X_1 A_i^T + A_i X_1 \\ \Omega_2 &= \bar{A}_i^T P_2 + P_2 \bar{A}_i - \bar{C}_j^T Y_i^T - Y_i \bar{C}_j \end{aligned} \quad (4.26)$$

avec $Y_i = P_2 \bar{L}_i$ un changement de variable.

En utilisant la propriété (A.9) du Lemme A.3, (4.25) peut être majorée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & B_i \bar{K}_j \\ \bar{K}_j^T B_i^T & \Omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B_i K_j \\ 0 \end{bmatrix} \tau \begin{bmatrix} -B_i K_j \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tau^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (4.27)$$

où τ est une constante positive.

En appliquant le complément de Schur, on retrouve la LMI du Théorème 4.1.

Dans le cas où on a des variations rapides des défauts, la qualité de l'estimation de l'état et des défauts par un observateur PI, tel que développé dans la section précédente, risque d'être dégradée. Dans la section suivante, un observateur PMI est considéré permettant de prendre en compte une classe plus large de défauts affectant le système.

4.3.2 Observateur PMI

La structure de l'observateur PMI permettant l'estimation des états et des défauts affectant le système (4.2) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i (u(t) + \hat{f}(t)) + L_{Pi} (y(t) - \hat{y}(t)) \right) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left(C_i \hat{x}(t) + D_i (u(t) + \hat{f}(t)) \right) \\ \dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left(\hat{f}_1(t) + L_{fi} (y(t) - \hat{y}(t)) \right) \\ \dot{\hat{f}}_j(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \left(\hat{f}_{j+1}(t) + L_{fi}^j (y(t) - \hat{y}(t)) \right), \quad j = 1, \dots, q-1 \end{cases} \quad (4.28)$$

où L_{p_i} représente les gains proportionnels, L_{I_i} et $L_{I_i}^j$ les gains intégraux de l'observateur (4.28).

Hypothèse 4.2. Tout au long de cette section, le défaut $f(t)$ est supposé variable dans le temps et sa $q^{ème}$ dérivée est nulle :

$$f^{(q)}(t) = 0 \quad (4.29)$$

En considérant $f^{(q)}(t) = f_q(t)$, les dérivées successives de $f(t)$ peuvent être définies sous la forme d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{f}(t) \\ \dot{f}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{f}_{q-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_q(t) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

A partir de (4.30), tenant compte de (4.29), le système (4.2) peut être mis sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (\bar{C}_i \bar{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (4.31)$$

avec :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_{q-1}(t) \end{bmatrix}, \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_f} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_{n_f} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_i = [C_i \quad D_i \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.32)$$

L'observateur PMI (4.28) peut aussi se mettre sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\bar{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (\bar{A}_i \hat{\bar{x}}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{L}_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (\bar{C}_i \hat{\bar{x}}(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (4.33)$$

avec :

$$\hat{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{f}(t) \\ \hat{f}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{f}_{q-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_i = \begin{bmatrix} L_{pi} \\ L_{li} \\ L_{li}^1 \\ \vdots \\ L_{li}^{q-2} \\ L_{li}^{q-1} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

On définit l'erreur d'estimation augmentée comme suit :

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t) \quad (4.35)$$

L'erreur de sortie entre le système (4.31) et l'observateur (4.33) est donnée par :

$$y(t) - \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) \bar{C}_i \bar{e}(t) \quad (4.36)$$

En utilisant (4.31), (4.33) et (4.35), la dynamique de l'erreur d'estimation augmentée s'écrit comme suit :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) F_{ij} \bar{e}(t) \quad (4.37)$$

avec :

$$F_{ij} = (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}_j) \quad (4.38)$$

Le système en boucle fermée est obtenu en appliquant la commande (4.3) au modèle (4.2). Ce dernier s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) (G_{ij} x(t) + B_i \bar{K}_j \bar{e}(t)) \quad (4.39)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (4.40)$$

$$\bar{K}_j = [K_j \quad I \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.41)$$

À partir de (4.37) et de (4.39), la concaténation de l'erreur d'estimation augmentée $\bar{e}(t)$ et de l'état $x(t)$ permet d'écrire le système augmenté suivant :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) \tilde{G}_{ij} \tilde{x}(t) \quad (4.42)$$

avec :

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{e}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & B_i \bar{K}_j \\ 0 & F_{ij} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Dans cette section, l'observateur PMI est utilisé pour estimer simultanément les états ainsi que les défauts. Cet observateur est adapté à l'estimation de signaux de forme polynomiale ayant une q ème dérivée nulle. La conception de la commande tolérante aux défauts consiste à calculer les gains K_i et \bar{L}_i permettant d'assurer la stabilité asymptotique du système augmenté (4.42) tout en garantissant la compensation des défauts affectant les actionneurs.

En considérant la structure augmentée des matrices \bar{A}_i , \bar{C}_i , \bar{L}_i et \bar{K}_i , le Théorème 4.2 suivant, ayant des conditions LMI plus relaxées par rapport aux conditions du Théorème 4.1, peut être énoncé :

Théorème 4.2 :

S'il existe des matrices $X_1 = X_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, Y_i et une constante positive τ tel que les conditions LMI suivantes soient vérifiées.

$$\begin{cases} \Upsilon_{ii} < 0, & i, j = 1, \dots, r \\ \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, & i < j \end{cases} \quad (4.44)$$

avec :

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} X_1 A_i^T + A_i X_1 & B_i \bar{K}_j & -B_i K_j & X_1 \\ * & \bar{A}_i^T P_2 + P_2 \bar{A}_i - \bar{C}_j^T Y_i^T - Y_i \bar{C}_j & 0 & 0 \\ * & 0 & -\tau^{-1} I & 0 \\ * & 0 & 0 & -\tau I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.45)$$

Alors, le système augmenté (4.42) est asymptotiquement stable et assure la convergence asymptotique vers zéro des états ainsi que des erreurs d'estimation d'état et de défaut. Avec les changements de variables bijectifs X_1 , et Y_i i.e. $P_1 = X_1^{-1}$, et $\bar{L}_i = P_2^{-1} Y_i$.

Démonstration : La démonstration est similaire à celle du Théorème 4.1.

4.3.3 Exemple 1

Afin de vérifier l'efficacité de l'approche FTC proposée, nous considérons le modèle T-S affecté par des défauts actionneurs suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i (u(t) + f(t))) \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (4.46)$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont définies par :

$$\begin{cases} h_1(x_1(t)) = (1 - \arctan(x_1(t))) / 2 \\ h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(z(t)) \end{cases},$$

Le système présenté dans cet exemple est soumis à deux défauts $f_1(t)$ et $f_2(t)$ affectant les actionneurs 1 et 2 respectivement.

$$f_1(t) = \begin{cases} -2(1 - e^{-5(t-5)}) + 4(1 - e^{-(t-4.2)}) & \text{pour } 5 < t < 15 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} -2(1 - e^{-5(t-20)}) + 4(1 - e^{-(t-19.2)}) & \text{pour } 20 < t < 30 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Afin d'obtenir une bonne vitesse de convergence des erreurs d'estimation de l'état et du défaut, la résolution de la LMI du Théorème 4.1 est considérée avec un placement de pôles dans des régions LMI (voir [CHI96]).

Ainsi, en fixant la constante $\alpha_1 = 100$ et les paramètres de placement de pôles $\alpha = 0.6$, $R = 9$ et $\theta = \pi/100$, la résolution de la LMI du Théorème 4.1 en tenant compte de la relaxation de [TAN94] permet d'avoir les gains suivants :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5.6448 & 29.2179 & 0.2782 \\ 0.5828 & 0.3154 & 21.8703 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 6.4358 & 29.1089 & -0.0372 \\ -0.7728 & 0.7373 & 23.6096 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} 0.9971 & 0.0149 \\ 15.6915 & -15.6761 \\ 1.0701 & 3.5844 \\ 33.4093 & -33.2845 \\ 0.7125 & 32.3079 \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_2 = \begin{bmatrix} 1.9857 & -3.9685 \\ 15.7178 & -15.6622 \\ 2.1091 & 6.5545 \\ 33.6691 & -33.3470 \\ 0.8533 & 32.3838 \end{bmatrix}.$$

La figure 4.1(a) représente le signal de commande $u_1(t)$. Le défaut $f_1(t)$ et son estimée sont donnés par la figure 4.1(b). Le signal de commande $u_2(t)$ est donné par la figure 4.2(a). Le défaut $f_2(t)$ et son estimée sont présentés par la figure 4.2(b). La figure 4.3 montre l'allure des états et de leurs estimées pour les conditions initiales $x^T(0) = [-0.5 \quad 0.5 \quad 1.5]$ et $\hat{x}^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$.

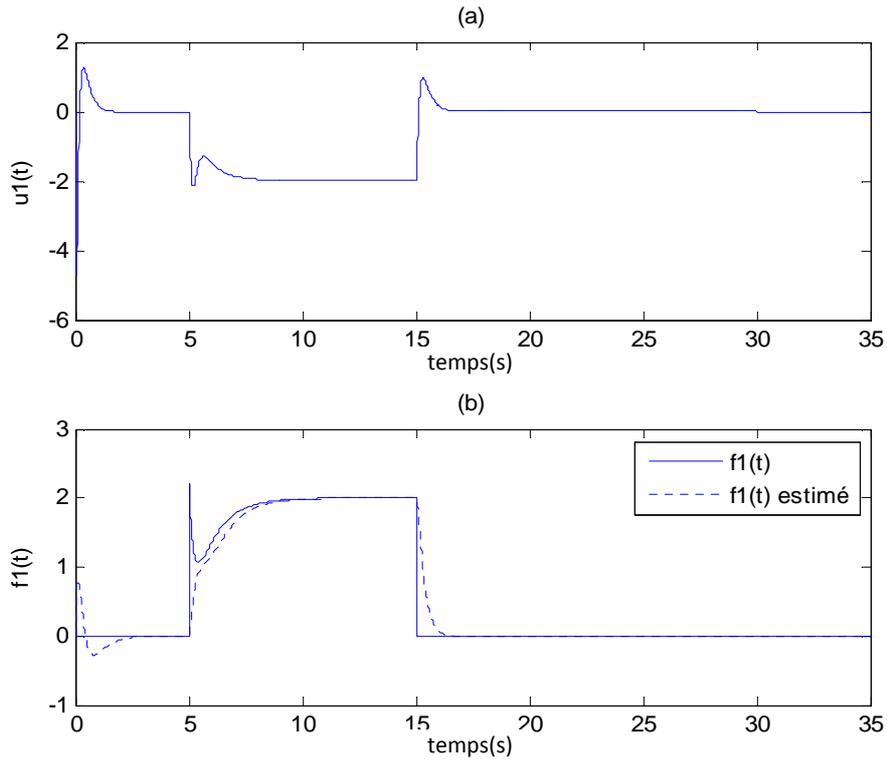


Figure 4.1 Signal de commande $u_1(t)$ (a) – défaut $f_1(t)$ et son estimée avec un PI (b)

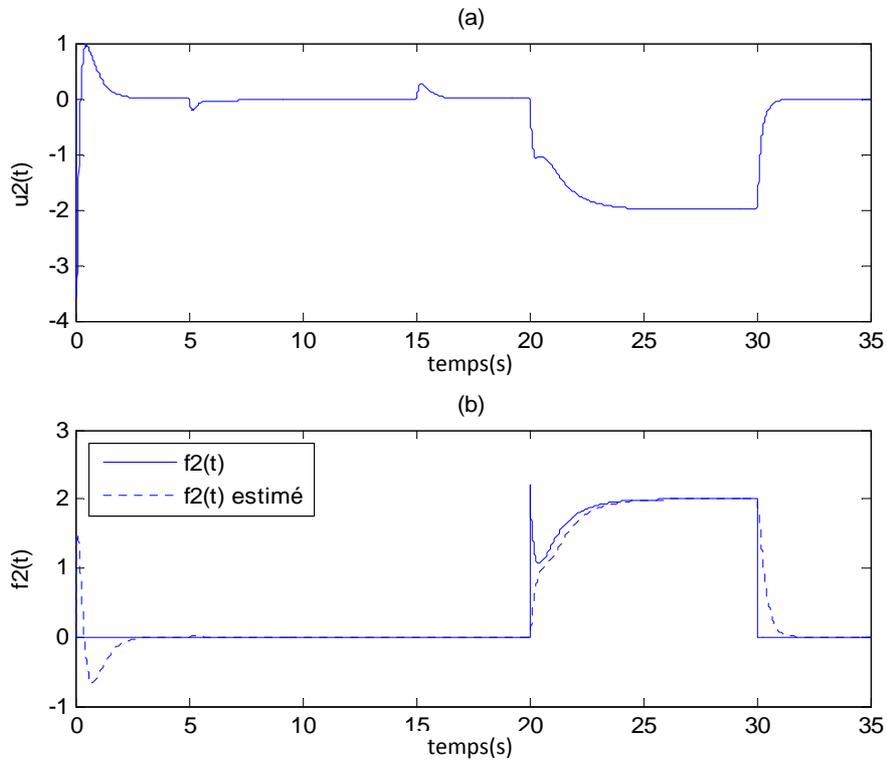


Figure 4.2 Signal de commande $u_2(t)$ (a) – défaut $f_2(t)$ et son estimée avec un PI (b)

A partir de ces figures, la convergence des états et de leurs estimées vers le point d'équilibre est bien assurée quand le défaut est nul, mais dès qu'un signal de défaut est appliqué, la commande tolérante aux défauts compense bien ce dernier et permet ainsi au système de maintenir ses performances. On constate une bonne estimation du signal de défaut, ainsi la compensation de ce dernier est bien assurée, cela permet au système d'atteindre son objectif même en présence de défauts.

L'approche de commande FTC avec observateur PI permet une très bonne compensation de défauts constants. Par contre, dans le cas de défauts variants dans le temps, l'observateur PI fournit des performances dégradées. L'approche de commande FTC avec observateur PMI quant à elle compense parfaitement ce type de défauts et permet ainsi d'avoir des performances bien meilleures. Dans la suite, le système est soumis à des défauts variables de la forme :

$$f_1(t) = \begin{cases} \sin(t+2.1)+15 & \text{pour } 5 < t < 15 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \sin((t-20)+2.1)+15 & \text{pour } 20 < t < 30 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On considère cette fois-ci la résolution des conditions LMI du Théorème 4.2 avec un placement de pôles dans trois régions LMI. Ainsi, en fixant $\alpha_1 = 1000$ et les paramètres de placement de pôles $\alpha = 0.41$, $R = 25$ et $\theta = \pi/100$, la résolution des LMI du Théorème 4.2 permet d'avoir les gains suivants :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 20.9804 & 144.5190 & 2.3009 \\ 1.5250 & 2.6736 & 105.7199 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 24.4580 & 144.0920 & 2.8055 \\ -1.4823 & 2.7715 & 110.3011 \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.0010 & -0.0000 \\ 0.0492 & -0.0491 \\ 0.0012 & 0.0381 \\ 0.6472 & -0.6439 \\ 0.0063 & 0.6756 \\ 3.0052 & -2.9961 \\ 0.0272 & 3.1629 \\ 3.5002 & -3.5301 \\ -0.0234 & 3.6897 \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.0020 & -0.0040 \\ 0.0492 & -0.0491 \\ 0.0022 & 0.0411 \\ 0.6470 & -0.6432 \\ 0.0067 & 0.6745 \\ 3.0035 & -2.9910 \\ 0.0306 & 3.1543 \\ 3.4980 & -3.5231 \\ -0.0200 & 3.6801 \end{bmatrix}$$

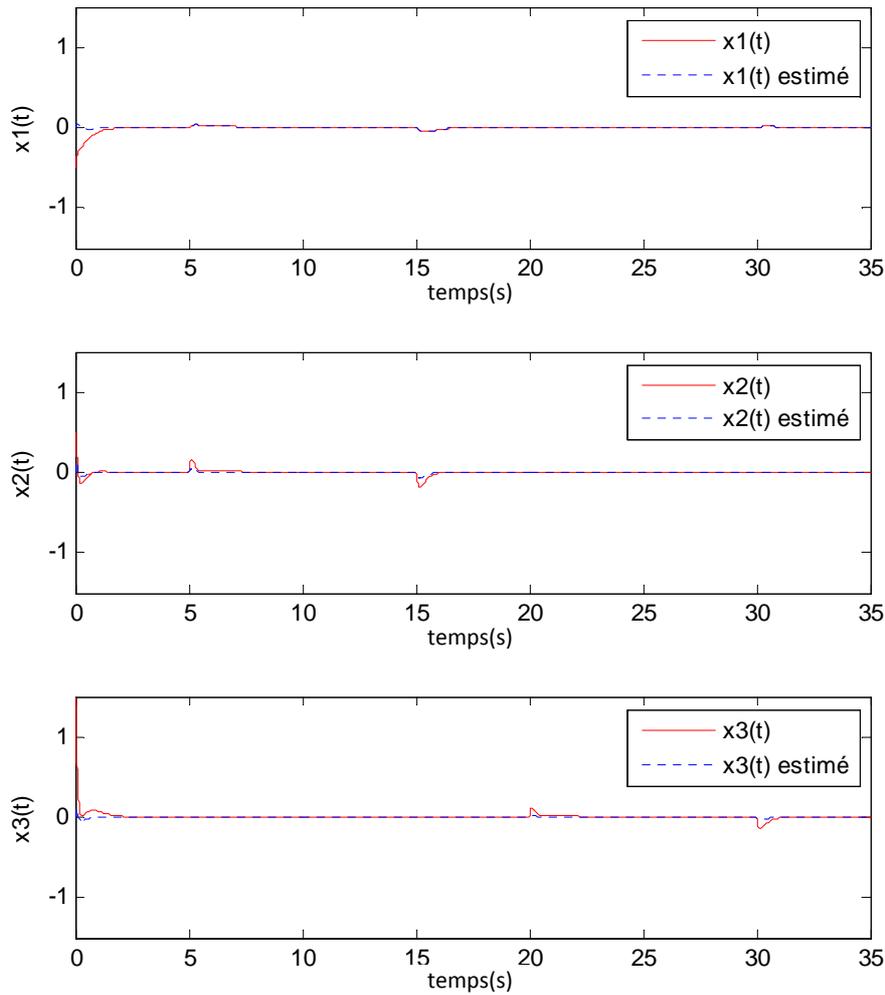


Figure 4.3 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)

La figure 4.4(a) représente le signal de commande $u_1(t)$. L'estimation du défaut $f_1(t)$ de la figure 4.4(b) est obtenue avec un observateur PMI d'ordre trois ($q=3$). Le signal de commande $u_2(t)$ est donné par la figure 4.5(a). Le défaut $f_2(t)$ et son estimée sont présentés dans la figure 4.5(b). La figure 4.6 montre l'allure des états et de leurs estimées pour les conditions initiales $x^T(0) = [-0.5 \quad 0.5 \quad 1.5]$ et $\hat{x}^T(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$. On constate une très bonne estimation du signal de défaut avec l'observateur PMI. Ce résultat permet une meilleure compensation de ce dernier. En effet, le système assure parfaitement la convergence des états vers l'origine malgré la présence d'un défaut variant dans le temps.

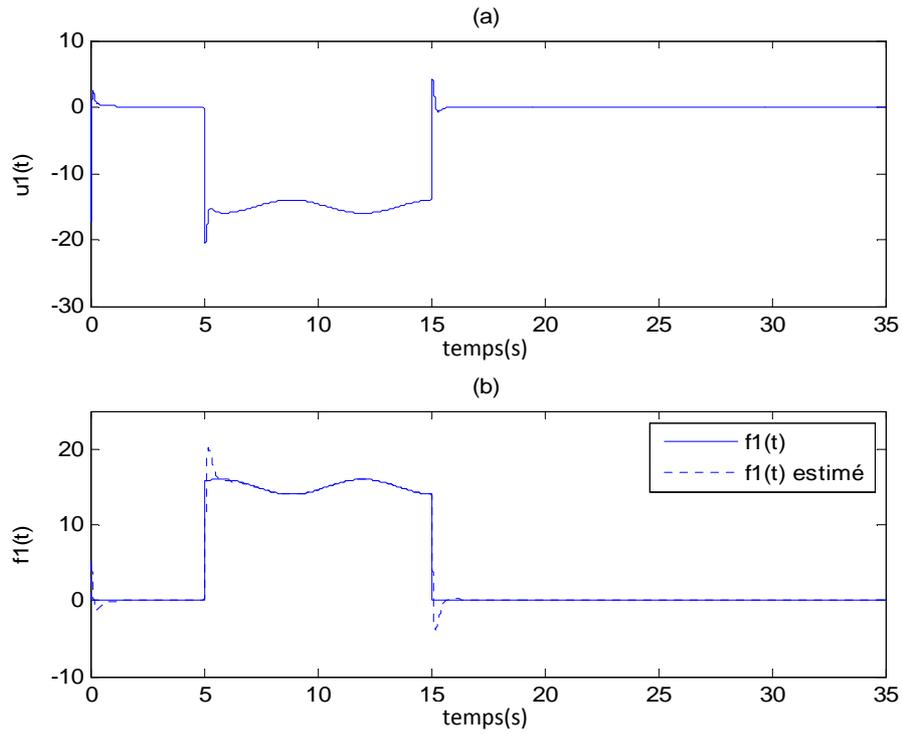


Figure 4.4 Signal de commande $u_1(t)$ (a) – défaut $f_1(t)$ et son estimée avec un PMI (b)

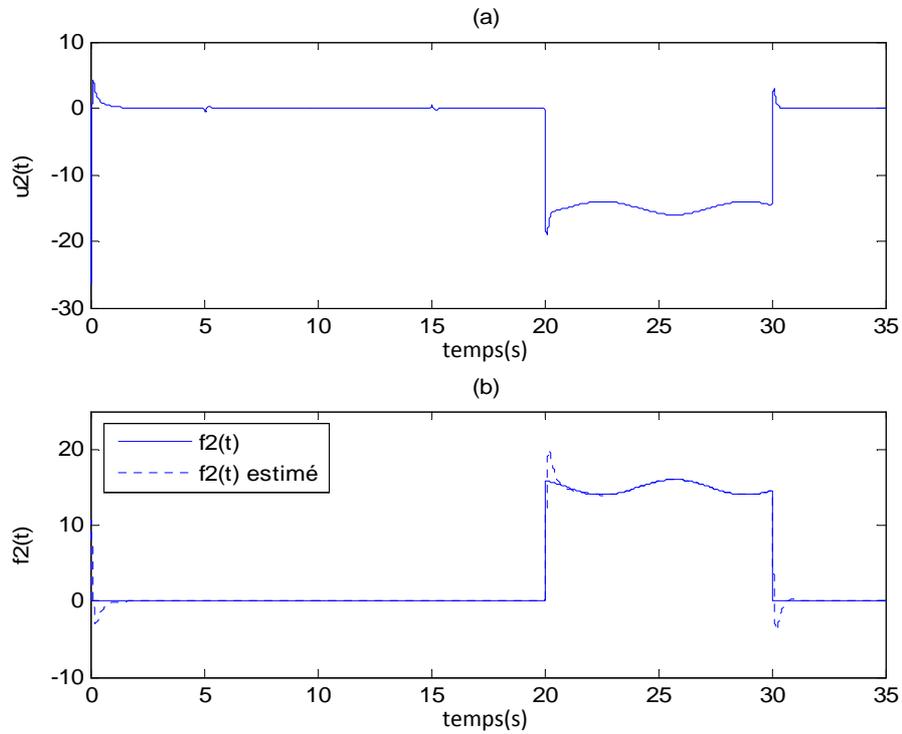


Figure 4.5 Signal de commande $u_2(t)$ (a) – défaut $f_2(t)$ et son estimée avec un PMI (b)

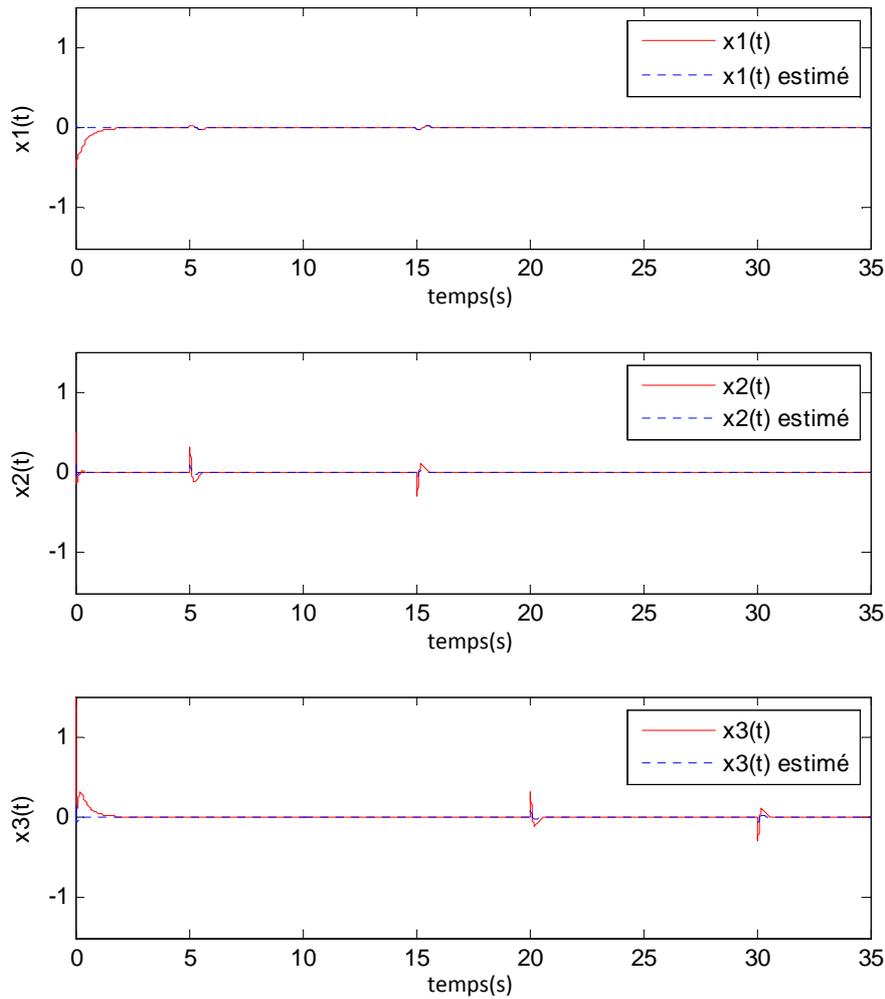


Figure 4.6 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)

4.4 Commande tolérante aux défauts actionneurs à VPNM

Dans cette section, les variables de prémisses sont supposées non mesurables. La stratégie de commande tolérante aux défauts actionneur est étudiée pour deux types d'observateurs: le premier concerne l'observateur proportionnel intégral (PI) et le second porte sur l'observateur proportionnel multi-intégral (PMI). Nous considérons le cas où les fonctions d'activation dépendent de l'état du système.

Le système sans défaut est décrit par le modèle T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (C_i x(t) + H w(t)) \end{cases} \quad (4.47)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente le vecteur des entrées et $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ est un bruit de mesure. Les matrices A_i, B_i, C_i et H sont constantes et de dimensions appropriées. Les fonctions d'activation $h_i(x(t))$ dépendent de l'état du système qui n'est pas mesurable.

Le système affecté par les défauts actionneurs s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i (u(t) + f(t))) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (C_i x(t) + H w(t)) \end{cases} \quad (4.48)$$

avec $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ et le vecteur de défauts.

La loi de commande FTC proposée pour stabiliser et compenser les défauts actionneurs est donnée sous la forme suivante :

$$u(t) = - \sum_{k=1}^r h_k(\hat{x}(t)) K_k \hat{x}(t) - \hat{f}(t) \quad (4.49)$$

Les matrices K_k sont déterminées pour garantir la stabilité du système en boucle fermée.

La loi de commande (4.49) nécessite l'estimation du vecteur de défauts $f(t)$. Dans cette partie, l'estimation du vecteur de défauts est obtenue à travers un observateur PI.

4.4.1 Observateur PI

La structure de l'observateur PI pour le système (4.48) à VPNM est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\hat{x}(t)) (A_j \hat{x}(t) + B_j (u(t) + \hat{f}(t)) + L_{p_j} (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^r h_k(\hat{x}(t)) C_k \hat{x}(t) \\ \dot{\hat{f}}(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\hat{x}(t)) L_{i_j} (y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (4.50)$$

où L_{p_j} représente les gains proportionnels et L_{i_j} les gains intégraux de l'observateur (4.50).

L'observateur (4.50) ne peut pas utiliser les mêmes variables de prémisses que le système (3.48) car elles ne sont pas mesurables. D'où la difficulté de la conception d'observateur pour les systèmes flous T-S à VPNM.

Puisque l'observateur (4.50) utilise l'état estimé $\hat{x}(t)$ comme variable de prémisses, le système (4.48) est réécrit sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (A_i x(t) + B_i (u(t) + f(t))) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (C_i x(t) + H w(t)) \end{cases} \quad (4.51)$$

L'observateur (4.50) peut se mettre également sous une forme équivalente :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (A_j \hat{x}(t) + B_j (u(t) + \hat{f}(t)) + L_{pj} (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) C_k \hat{x}(t) \\ \dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) L_{lj} (y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (4.52)$$

En tenant compte de l'hypothèse 4.1, le système (4.51) peut être mis sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (\bar{C}_i \bar{x}(t) + H w(t)) \end{cases} \quad (4.53)$$

avec :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f(t) \end{bmatrix}, \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_i = [C_i \quad 0] \quad (4.54)$$

L'observateur PI (4.52) peut aussi se mettre sous une forme augmentée :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\bar{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (\bar{A}_j \hat{\bar{x}}(t) + \bar{B}_j u(t) + \bar{L}_j (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) \bar{C}_k \hat{\bar{x}}(t) \end{cases} \quad (4.55)$$

avec :

$$\hat{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{f}(t) \end{bmatrix}, \bar{L}_j = \begin{bmatrix} L_{pj} \\ L_{lj} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

On définit l'erreur d'estimation augmentée comme suit :

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t) \quad (4.57)$$

Qui peut encore s'écrire en fonction des variables non augmentées :

$$\bar{e}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

avec :

$$\begin{cases} e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \\ e_f(t) = f(t) - \hat{f}(t) \end{cases} \quad (4.59)$$

L'erreur de sortie entre le système (4.53) et l'observateur (4.55) s'écrit :

$$y(t) - \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (\tilde{C}_{ik} x(t) + C_k e_x(t) + Hw(t)) \quad (4.60)$$

avec :

$$\tilde{C}_{ik} = (C_i - C_k) \quad (4.61)$$

En utilisant (4.51), (4.52), (4.58) et (4.59), la dynamique de l'erreur d'estimation augmentée est donnée par :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

avec :

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = \sum_{i,j,k} h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left((\tilde{A}_{ij} - \tilde{B}_{ij} K_k - L_{pj} \tilde{C}_{ik}) x(t) - (A_j + \tilde{B}_{ij} K_k - L_{pj} C_k) e_x(t) \right. \\ \quad \left. + (B_j + \tilde{B}_{ij}) e_f(t) - L_{pj} Hw(t) \right) \\ \dot{e}_f(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left(-L_{lj} \tilde{C}_{ik} x(t) - L_{lj} C_k e_x(t) - L_{lj} Hw(t) \right) \end{cases} \quad (4.63)$$

tel que :

$$\tilde{A}_{ij} = (A_i - A_j), \quad \tilde{B}_{ij} = (B_i - B_j) \quad (4.64)$$

A partir des dynamiques de l'équation (4.63), la dynamique de l'erreur d'estimation augmentée est donnée par :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left((\bar{A}_{ij} - \bar{L}_j \bar{C}_k + \bar{B}_{ij} \bar{K}_k) \bar{e}(t) + (\tilde{A}_{ij} - \tilde{B}_{ij} K_k - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik}) x(t) - \bar{L}_j Hw(t) \right) \quad (4.65)$$

avec :

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$\bar{K}_k = [K_k \quad I] \quad (4.67)$$

tel que $\bar{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f) \times n_x}$, $\bar{B}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f) \times n_u}$

En appliquant la commande FTC (4.49) au modèle T-S à VPNM (4.51), on obtient le système en boucle fermée suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) h_k(\hat{x}(t)) (G_{ik} x(t) + B_i \bar{K}_k \bar{e}(t)) \quad (4.68)$$

avec :

$$G_{ik} = A_i - B_i K_k \quad (4.69)$$

A partir des dynamiques (4.65) et (4.68), on obtient le système augmenté suivant :

$$\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) h_k(\hat{x}(t)) (\Psi_{ijk} x_a(t) - \bar{L}_j \bar{H}w(t)) \quad (4.70)$$

avec :

$$T_2 = \begin{bmatrix} T_2(1,1) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ P_1 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ Y_j^T & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 \\ -H^T Y_j^T & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}, \quad (4.76)$$

$$T_1(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k,$$

$$T_2(1,1) = \bar{A}_j^T P_1 + P_1 \bar{A}_j - \bar{C}_k^T Y_j^T - Y_j \bar{C}_k + Q,$$

$$I_x = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_x+n_f) \times n_x}, I_f = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_f} \end{bmatrix}_{(n_x+n_f) \times n_f}$$

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de la commande et de l'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $\bar{L}_i = P_1^{-1} Y_i$.

On rappelle que la stabilité du système augmenté (4.70) assure la convergence asymptotique vers zéro des états ainsi que des erreurs d'estimation de l'état et du défaut.

Démonstration : En tenant compte de la variable augmentée $x_a(t)$, le critère H_∞ (4.72) peut être modifié comme suit :

$$\int_0^\infty x_a(t)^T \bar{Q} x_a(t) dt \leq \eta^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt, \text{ avec } \bar{Q} = \text{diag}[0 \quad Q] \quad (4.77)$$

Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x_a(t)) = x_a(t)^T P x_a(t), \text{ avec } P = P^T > 0. \quad (4.78)$$

Pour montrer la stabilité du système augmenté (4.70) tout en garantissant la performance H_∞ (4.72), nous devons assurer la contrainte suivante :

$$\dot{V}(x_a(t)) + x_a(t)^T \bar{Q} x_a(t) - \eta^2 w(t)^T w(t) < 0 \quad (4.79)$$

En dérivant la fonction de Lyapunov (4.78) et d'après (4.70), l'inégalité (4.79) devient :

$$x_a(t)^T (\Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q}) x_a(t) - w(t)^T \bar{H}^T \bar{L}_j^T P x_a(t) - x_a(t)^T P \bar{L}_j \bar{H} w(t) - \eta^2 w(t)^T w(t) < 0 \quad (4.80)$$

L'inégalité (4.80) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\sum_{i,j,k=1}^r \hat{h}_i \hat{h}_j \hat{h}_k \begin{bmatrix} x_a(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q} & -P \bar{L}_j \bar{H} \\ -\bar{H}^T \bar{L}_j^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.81)$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q} & -P \bar{L}_j \bar{H} \\ -\bar{H}^T \bar{L}_j^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.82)$$

En remplaçant les matrices du modèle (4.71), le premier block de l'inégalité (4.82) devient :

$$(*) + P \begin{bmatrix} A_i - B_i K_k & B_i \bar{K}_k \\ \bar{A}_{ij} - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik} & \bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix} + \bar{Q} \quad (4.83)$$

Supposons $P = \text{diag}[P_2 \ P_1]$. Afin de faciliter la résolution, le premier terme de (4.83) est séparé comme suit :

$$\Gamma_{ijk} = \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_k)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_k) & P_2 (B_i \bar{K}_k) \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k)^T P_1 + P_1 (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (\bar{A}_{ij} - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik})^T P_1 \\ P_1 (\bar{A}_{ij} - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik}) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

En utilisant la propriété (A.9) du Lemme A.3, (4.84) peut être majorée comme suit :

$$\Gamma_{ijk} \leq \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_k)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_k) + d_{1ijk} & P_2 (B_i \bar{K}_k) \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k)^T P_1 + P_1 (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k) + d_{2ijk} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

avec :

$$d_{1ijk} = \varepsilon_2 \bar{A}_{ij}^T \bar{A}_{ij} + \varepsilon_3 \tilde{C}_{ik}^T \tilde{C}_{ik}, \quad d_{2ijk} = \varepsilon_2^{-1} P_1^2 + \varepsilon_3^{-1} P_1 \bar{L}_j \bar{L}_j^T P_1.$$

où ε_2 et ε_3 sont des paramètres positifs.

Le dernier terme de l'inégalité (4.83) peut aussi être majoré comme suit :

$$(*) + \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1^{-1} P_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_k^T \bar{B}_{ij}^T \\ \bar{K}_k^T \bar{B}_{ij}^T \end{bmatrix} \varepsilon_1 \begin{bmatrix} -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

avec ε_1 est un paramètre positif.

A partir de (4.85) et (4.86), (4.83) devient:

$$\Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q} \leq S_1 (\varepsilon_1^{-1})^{-1} S_1^T + \begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & P_2 (B_i \bar{K}_k) \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & \Phi_{2ijk} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

avec

$$S_1^T = \begin{bmatrix} -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{1ijk} = (A_i - B_i K_k)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_k) + d_{1ijk},$$

$$\Phi_{2ijk} = (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k)^T P_1 + P_1 (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k) + \varepsilon_1^{-1} P_1^2 + d_{2ijk} + Q.$$

En appliquant un complément de Schur, (4.87) devient :

$$\Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q} \leq \begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & (*) & (*) \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & \Phi_{2ijk} & (*) \\ -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k & -\varepsilon_1^{-1} I \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

En remplaçant la contrainte (4.88) dans (4.82), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & (*) & (*) & 0 \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & \Phi_{2ijk} & (*) & (*) \\ -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 \\ 0 & -H^T \bar{L}_j^T P_1 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.89)$$

Pour remettre la matrice (4.89) sous forme homogène du point de vue des variables inconnues à rechercher, on effectue une congruence par la matrice (4.90) en faisant permuter les lignes et les colonnes de la matrice (4.89) suivant l'ordre 1, 3, 2 et 4.

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Ainsi, l'inégalité (4.89) devient :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & (*) & (*) & 0 \\ -\bar{B}_{ij} K_k & -\varepsilon_1^{-1} I & (*) & 0 \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & \bar{K}_k^T \bar{B}_{ij}^T & \Phi_{2ijk} & (*) \\ 0 & 0 & -H^T \bar{L}_j^T P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.91)$$

On procède maintenant à un changement de variable $X_2 = P_2^{-1} N_k = K_k X_2$, $\bar{N}_k = \bar{K}_k \bar{X}_2$ et $Y_j = P_1 \bar{L}_j$, et en pré et post multipliant l'inégalité (4.91) par la matrice $\text{diag} [X_2 \quad I \quad \bar{X}_2 \quad X_2]$, avec $\bar{X}_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f)}$, $\bar{N}_k \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+n_f)}$, on obtient :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{1ijk} & (*) & (*) & 0 \\ -\bar{B}_{ij} N_k & -\varepsilon_1^{-1} I & (*) & 0 \\ \hline \bar{N}_k^T B_i^T & \bar{N}_k^T \bar{B}_{ij}^T & \begin{bmatrix} \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \Omega_{2jk} & \begin{bmatrix} \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \end{array} \right] < 0 \quad (4.92)$$

avec :

$$\Omega_{1ijk} = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k + \varepsilon_2 X_2 \bar{A}_{ij}^T \bar{A}_{ij} X_2 + \varepsilon_3 X_2 \bar{C}_{ik}^T \bar{C}_{ik} X_2,$$

$$\Omega_{2jk} = \begin{bmatrix} \Omega_{2jk}(1,1) & -P_1 \bar{L}_j H \\ -H^T \bar{L}_j^T P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_k = [N_k \quad I],$$

$$\Omega_{2ijk}(1,1) = \bar{A}_j^T P_1 + P_1 \bar{A}_j - \bar{C}_k^T Y_j^T - Y_j \bar{C}_k + \varepsilon_1^{-1} P_1^2 + \varepsilon_2^{-1} P_1^2 + \varepsilon_3^{-1} Y_j Y_j^T + Q.$$

Pour éliminer les termes non LMI de l'inégalité (4.92), on applique le lemme A.1 sur le dernier bloc diagonal de (4.92). On obtient :

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \Omega_{2jk} \begin{bmatrix} \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -2\alpha_1 \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 X_2 \end{bmatrix} - \alpha_1^2 \Omega_{2jk}^{-1} \quad (4.93)$$

En appliquant un complément de Schur sur le coté droit de (4.93), on obtient :

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_1 \bar{X}_2 & 0 & (*) & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 X_2 & 0 & (*) \\ \alpha_1 I & 0 & \Omega_{2,jk}(1,1) & (*) \\ 0 & \alpha_1 I & -H^T Y_j^T & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Enfin, en substituant la contrainte (4.94) dans (4.92), on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{1ijk} & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{B}_{ij} N_k & -\varepsilon_1^{-1} I & (*) & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_k^T B_i^T & \bar{N}_k^T \bar{B}_{ij}^T & -2\alpha_1 \bar{X}_2 & 0 & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha_1 X_2 & 0 & (*) \\ 0 & 0 & \alpha_1 I & 0 & \Omega_{2,jk}(1,1) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 I & -H^T Y_j^T & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.95)$$

Enfin, avec des compléments de Schur sur les blocs diagonaux Ω_{1ijk} et $\Omega_{2,jk}(1,1)$, et en tenant compte des matrices (4.96), on retrouve la LMI du Théorème 4.3.

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_k = [N_k \quad I] \quad (4.96)$$

Cas particulier :

Dans le cas où les bruits de mesure sont considérés nuls, (i.e. $w(t) = 0$), la stabilité asymptotique du système augmentée (4.70) peut être assurée par le théorème suivant.

Théorème 4.4:

Etant donné des constantes positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et α_1 , le système augmentée (4.70) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $X_2 = X_2^T > 0$, N_i et Y_i tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées.

$$\Upsilon_{jk}^i < 0, \quad i, j, k = 1, \dots, r \quad (4.97)$$

avec :

$$\Upsilon_{jk}^i = \begin{bmatrix} S_1 & & & (*) & & (*) \\ \hline N_k^T B_i^T & 0_{1 \times 2} & N_k^T \bar{B}_{ij}^T & -2\alpha_1 X_2 & 0 & \\ B_i^T & 0_{1 \times 2} & \bar{B}_{ij}^T & 0 & -2\alpha_1 I & (*) \\ \hline 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & \alpha_1 I_x & \alpha_1 I_f & \\ 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & S_2 \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

tel que S_1 et S_2 sont donnés par :

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_1(1,1) & (*) & (*) & (*) \\ \bar{A}_{ij}X_2 & -\varepsilon_2^{-1}I & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{ik}X_2 & 0 & -\varepsilon_3^{-1}I & 0 \\ -\bar{B}_{ij}N_k & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1}I \end{bmatrix}, \quad (4.99)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} S_2(1,1) & (*) & (*) & (*) \\ P_1 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ Y_j^T & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix}, \quad (4.100)$$

avec :

$$S_1(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k, \quad S_2(1,1) = \bar{A}_j^T P_1 + P_1 \bar{A}_j - \bar{C}_k^T Y_j^T - Y_j \bar{C}_k,$$

$$I_x = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_x+n_f) \times n_x}, \quad I_f = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_f} \end{bmatrix}_{(n_x+n_f) \times n_f}$$

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de la commande et de l'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $\bar{L}_i = P_1^{-1} Y_i$.

Démonstration : La démonstration de ce théorème est similaire à celle du Théorème 4.3.

Dans la section suivante, un observateur PMI est considéré permettant de prendre en compte une classe plus large de défauts affectant le système. Les signaux de défauts variants dans le temps peuvent être ainsi estimés avec une bonne précision.

4.4.2 Observateur PMI

La structure de l'observateur PMI pour le système (4.48) à VPNM est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\hat{x}(t)) \left(A_j \hat{x}(t) + B_j \left(u(t) + \hat{f}(t) \right) + L_{pj} (y(t) - \hat{y}(t)) \right) \\ \hat{y}(t) = \sum_{k=1}^r h_k(\hat{x}(t)) C_k \hat{x}(t) \\ \dot{\hat{f}}(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\hat{x}(t)) \left(\hat{f}_1(t) + L_{lj} (y(t) - \hat{y}(t)) \right) \\ \dot{\hat{f}}_m(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\hat{x}(t)) \left(\hat{f}_{m+1}(t) + L_{lj}^m (y(t) - \hat{y}(t)) \right), \quad m = 1, \dots, q-1 \end{cases} \quad (4.101)$$

où L_{pj} représente les gains proportionnels, L_{lj} et L_{lj}^m les gains intégraux de l'observateur (4.101).

Le système (4.48) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (A_i x(t) + B_i (u(t) + f(t))) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (C_i x(t) + H w(t)) \end{cases} \quad (4.102)$$

L'observateur PMI peut se mettre sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (A_j \hat{x}(t) + B_j (u(t) + \hat{f}(t)) + L_{pj} (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) C_k \hat{x}(t) \\ \dot{\hat{f}}_1(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (\hat{f}_1(t) + L_{1j} (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \dot{\hat{f}}_m(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (\hat{f}_{m+1}(t) + L_{mj}^m (y(t) - \hat{y}(t))), \quad m = 1, \dots, q-1 \end{cases} \quad (4.103)$$

En tenant compte de l'hypothèse 4.2, le système (4.102) peut être mis sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (\bar{C}_i \bar{x}(t) + H w(t)) \end{cases} \quad (4.104)$$

avec :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_{q-1}(t) \end{bmatrix}, \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_f} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_{n_f} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_i = [C_i \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.105)$$

L'observateur PMI (4.103) peut aussi se mettre sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\bar{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (\bar{A}_j \hat{\bar{x}}(t) + \bar{B}_j u(t) + \bar{L}_j (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) \bar{C}_k \hat{\bar{x}}(t) \end{cases} \quad (4.106)$$

avec :

$$\hat{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{f}(t) \\ \hat{f}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{f}_{q-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_j = \begin{bmatrix} L_{pj} \\ L_{lj} \\ L_{lj}^1 \\ \vdots \\ L_{lj}^{q-2} \\ L_{lj}^{q-1} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

On définit l'erreur d'estimation augmentée comme suit :

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t) \quad (4.108)$$

Qui peut encore s'écrire en fonction des variables suivantes :

$$\bar{e}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_f(t) \\ e_{f_1}(t) \\ \vdots \\ e_{f_{q-1}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

avec :

$$\begin{cases} e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \\ e_f(t) = f(t) - \hat{f}(t) \\ e_{f_1}(t) = f_1(t) - \hat{f}_1(t) \\ \vdots \\ e_{f_{q-1}}(t) = f_{q-1}(t) - \hat{f}_{q-1}(t) \end{cases} \quad (4.110)$$

L'erreur de sortie entre le système (4.102) et l'observateur (4.103) s'écrit :

$$y(t) - \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (\tilde{C}_{ik} x(t) + C_k e_x(t) + Hw(t)) \quad (4.111)$$

avec :

$$\tilde{C}_{ik} = (C_i - C_k) \quad (4.112)$$

En utilisant (4.102), (4.103), (4.109), (4.110) et (4.111), la dynamique de l'erreur d'estimation augmentée est donnée par :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_f(t) \\ \dot{e}_{f_1}(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_{f_{q-1}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_x(t) = \sum_{i,j,k}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left((\tilde{A}_{ij} - \tilde{B}_{ij} K_k - L_{pj} \tilde{C}_{ik}) x(t) - (A_j + \tilde{B}_{ij} K_k - L_{pj} C_k) e_x(t) \right. \\ \quad \left. + (B_j + \tilde{B}_{ij}) e_f(t) - L_{pj} H w(t) \right) \\ \dot{e}_f(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left(-L_{lj} \tilde{C}_{ik} x(t) - L_{lj} C_k e_x(t) - L_{lj} H w(t) \right) \\ \dot{e}_{f_1}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left(-L_{lj}^1 \tilde{C}_{ik} x(t) - L_{lj}^1 C_k e_x(t) - L_{lj}^1 H w(t) \right) \\ \vdots \\ \dot{e}_{f_{q-1}}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left(-L_{lj}^{q-1} \tilde{C}_{ik} x(t) - L_{lj}^{q-1} C_k e_x(t) - L_{lj}^{q-1} H w(t) \right) \end{array} \right. \quad (4.114)$$

où :

$$\tilde{A}_{ij} = (A_i - A_j), \quad \tilde{B}_{ij} = (B_i - B_j) \quad (4.115)$$

A partir des dynamiques de l'équation (4.114), la dynamique de l'erreur d'estimation augmentée est donnée par :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left((\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k + \bar{B}_{ij} \bar{K}_k) \bar{e}(t) + (\bar{A}_{ij} - \bar{B}_{ij} K_k - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik}) x(t) - \bar{L}_j H w(t) \right) \quad (4.116)$$

avec :

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

$$\bar{K}_k = [K_k \quad I \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.118)$$

tel que $\bar{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n_x + q \times n_f) \times n_x}$, $\bar{B}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n_x + q \times n_f) \times n_u}$

En appliquant la commande FTC (4.49) au modèle T-S à VPNM (4.102), on obtient le système en boucle fermée suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) h_k(\hat{x}(t)) (G_{ik} x(t) + B_i \bar{K}_k \bar{e}(t)) \quad (4.119)$$

avec :

$$G_{ik} = A_i - B_i K_k \quad (4.120)$$

A partir des dynamiques (4.116) et (4.119), on obtient le système augmenté suivant :

$$\dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) h_k(\hat{x}(t)) (\Psi_{ijk} x_a(t) - \bar{L}_j \bar{H} w(t)) \quad (4.121)$$

avec :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{e}(t) \end{bmatrix}, \quad \Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} G_{ik} & B_i \bar{K}_k \\ \bar{A}_{ij} - \bar{B}_{ij} K_k - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik} & \bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k + \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

La conception de la commande tolérante aux défauts consiste à calculer les gains K_k et \bar{L}_j permettant d'assurer la stabilité asymptotique du système augmenté (4.121) tout en garantissant la compensation des défauts affectant les actionneurs.

L'analyse de la stabilité du système (4.121) assurant les performances désirées permet d'énoncer le Théorème 4.5 suivant :

Théorème 4.5:

Etant donné des constantes positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et α_1 , le système augmenté (4.121) est asymptotiquement stable et assure la performance H_∞ (4.72) avec un taux d'atténuation η s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0, X_2 = X_2^T > 0, N_i, Y_i$ et un scalaire positif η tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées.

$$\Upsilon_{jk}^i < 0, \quad i, j, k = 1, \dots, r \quad (4.123)$$

avec :

$$\Upsilon_{jk}^i = \left[\begin{array}{ccc|cccccc|c} & Z_1 & & & & & & & (*) \\ \hline N_k^T B_i^T & 0_{1 \times 2} & N_k^T \tilde{B}_{ij}^T & -2\alpha_1 X_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (*) \\ B_i^T & 0_{1 \times 2} & \tilde{B}_{ij}^T & 0 & -2\alpha_1 I & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & 0 & 0 & -2\alpha_1 I & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & (*) \\ 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2\alpha_1 I & 0 & \\ 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2\alpha_1 X_2 & \\ \hline 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & \alpha_1 I_x & \alpha_1 I_f & \alpha_1 I_{f_1} & \dots & \alpha_1 I_{f_{q-1}} & 0 & \\ 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & \dots & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & Z_2 \\ 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 I & \end{array} \right] \quad (4.124)$$

tel que Z_1 et Z_2 sont donnés par :

$$Z_1 = \begin{bmatrix} Z_1(1,1) & (*) & (*) & (*) \\ \tilde{A}_{ij} X_2 & -\varepsilon_2^{-1} I & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{ik} X_2 & 0 & -\varepsilon_3^{-1} I & 0 \\ -\tilde{B}_{ij} N_k & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1} I \end{bmatrix}, \quad (4.125)$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} Z_1(1,1) & (*) & (*) & (*) \\ \bar{A}_{ij} X_2 & -\varepsilon_2^{-1} I & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{ik} X_2 & 0 & -\varepsilon_3^{-1} I & 0 \\ -\bar{B}_{ij} N_k & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1} I \end{bmatrix}, \quad (4.129)$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} Z_2(1,1) & (*) & (*) & (*) \\ P_1 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 \\ Y_j^T & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix}, \quad (4.130)$$

avec :

$$Z_1(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k, \quad Z_2(1,1) = \bar{A}_j^T P_1 + P_1 \bar{A}_j - \bar{C}_k^T Y_j^T - Y_j \bar{C}_k,$$

$$I_x = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_x+q \times n_f) \times n_x}, \quad I_f = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_f} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_x+q \times n_f) \times n_f}, \quad I_{f_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n_f} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_x+q \times n_f) \times n_f}, \quad \dots, \quad I_{f_{q-1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_{n_f} \end{bmatrix}_{(n_x+q \times n_f) \times n_f}$$

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de la commande et de l'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $\bar{L}_i = P_1^{-1} Y_i$.

Démonstration : La démonstration des Théorème 4.5 et 4.6 est similaire à celle du Théorème 4.3. En revanche, les matrices suivantes doivent être considérer afin d'aboutir au résultat final :

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_k = [N_k \quad I \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

4.4.3 Exemple 2

Afin de vérifier l'efficacité de l'approche de commande tolérante aux défauts exploitant les observateurs PI et PMI, nous considérons le modèle T-S affecté par un défaut actionneur suivant [ASE13] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) [A_i x(t) + B_i (u(t) + f(t))] \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) C_i x(t) + H w(t) \end{cases} \quad (4.131)$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ -2.3 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [10 \quad 2], H = 0.02.$$

Les fonctions d'activation sont données comme suit:

$$h_1(x_2(t)) = 0.5 + \arctan(x_2(t))/\pi, \quad h_2(x_2(t)) = 1 - h_1(x_2(t)).$$

$w(t)$ est un bruit de mesure de moyenne nulle et de variance égale à 0.03. Le défaut $f(t)$ est un échelon d'amplitude 5 apparaissant à l'instant 10s.

Avant de résoudre les LMI du Théorème 4.3, la relaxation de [TUA01] (voir Annexe B) est considérée avec un taux de décroissance α . Ainsi, en fixant les paramètres $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1000$, $\alpha_1 = 120$ et $\alpha = 0.01$, la résolution des LMI du Théorème 4.3 donne les résultats suivants :

$$K_1 = [82.8230 \quad -17.6429], \quad K_2 = [82.8230 \quad -17.6429],$$

$$\bar{L}_1^T = [5.2297 \quad -0.2851 \quad 8.3983], \quad \bar{L}_2^T = [5.7193 \quad -0.3070 \quad 9.1826],$$

et $\eta = 0.0975$ est le taux d'atténuation minimisé.

La figure 4.8(a) présente l'entrée de commande tolérante aux défauts. L'observateur PI fournit l'estimation du défaut sur la figure 4.8(b). Le signal de bruit considéré est donné dans la figure 4.7. La figure 4.9 montre les réponses du système en boucle fermée pour les conditions initiales $x(0)^T = [1 \quad 1]$ et $\hat{x}(0)^T = [0 \quad 0]$.

A partir de ces figures, la convergence des états et de leurs estimées vers le point d'équilibre est bien assurée quand le défaut est nul et lorsqu'un signal de défaut est appliqué, la commande tolérante aux défauts compense bien ce dernier. En effet, on constate une bonne estimation du signal de défaut, ainsi la compensation de ce dernier est bien assurée, cela permet au système d'atteindre son objectif même en présence de défaut.

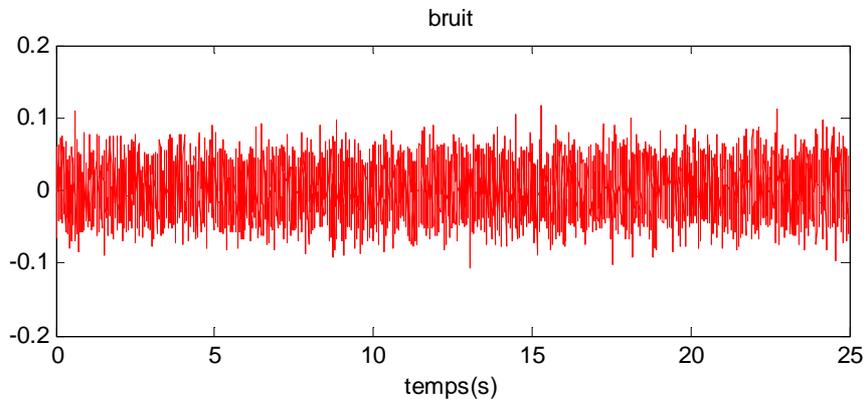


Figure 4.7 Signal de bruit $w(t)$

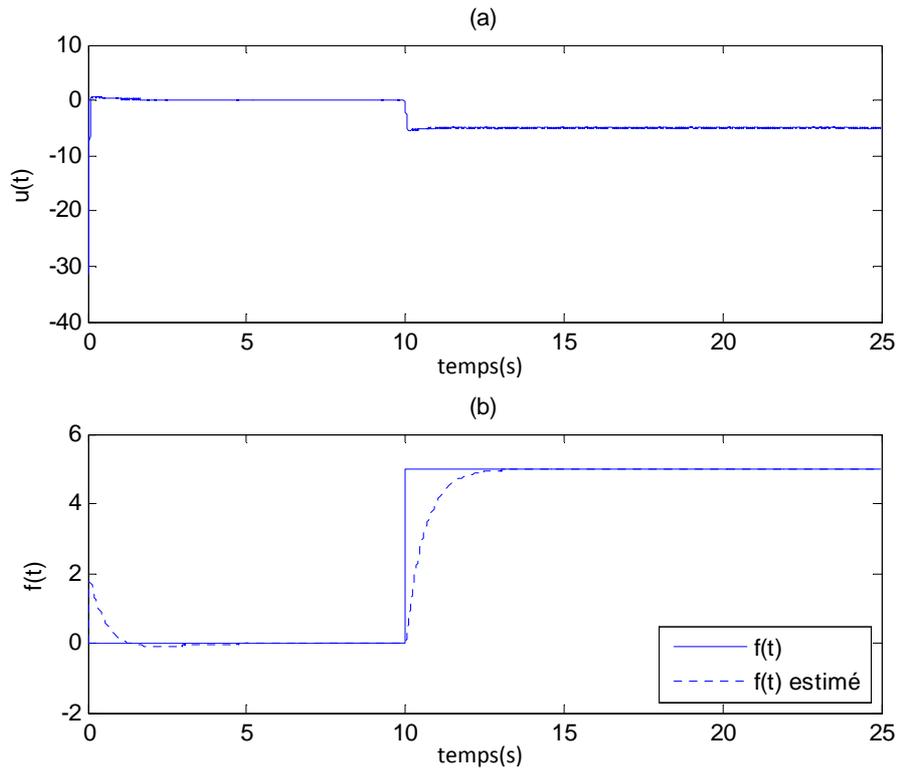


Figure 4.8 Commande tolérante aux défauts (a)-défaut et son estimée avec un PI (b)

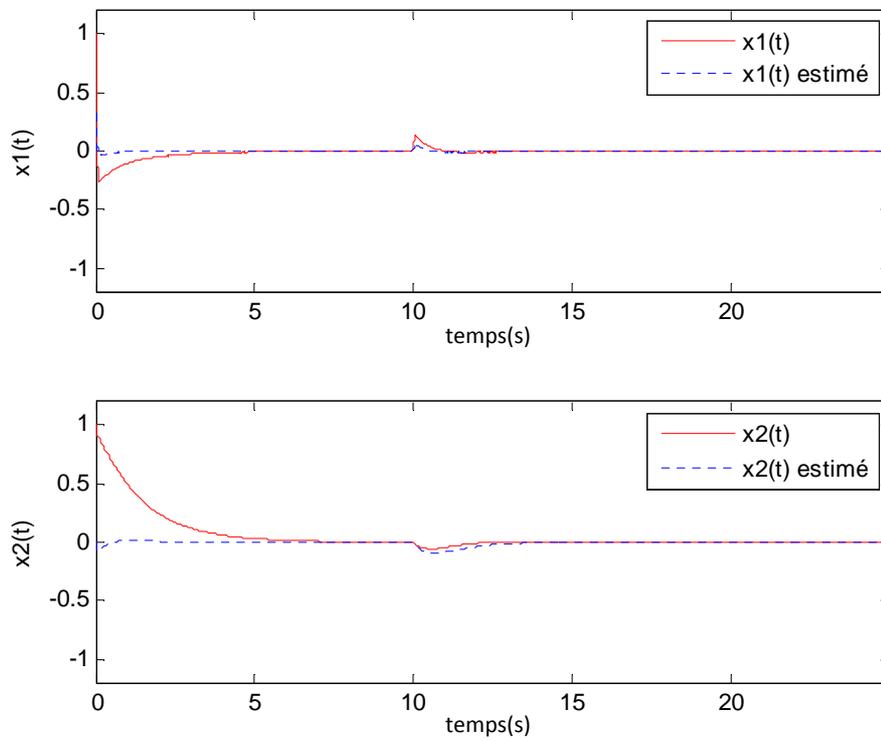


Figure 4.9 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)

Afin de tester la validité de la loi de commande FTC pour des défauts variant dans le temps, on considère cette fois-ci un défaut $f(t) = \sin(t+2,1)+15$ apparaissant à l'instant 10s.

La figure 4.10(a) représente l'entrée de commande tolérante aux défauts. L'observateur PI fourni l'estimation du défaut sur la figure 4.10(b). La figure 4.11 montre les réponses du système en boucle fermée pour les mêmes conditions initiales et avec le même signal de bruit (figure 4.7). On constate que la loi de commande FTC avec observateur PI assure une compensation du signal de défaut variant dans le temps avec des performances dégradées. Dans le but d'améliorer l'estimation du signal de défaut, et ainsi avoir une meilleure compensation de ce dernier, on considère dans le test de simulation suivant un observateur PMI.

On considère cette fois-ci la résolution des conditions LMI du Théorème 4.5 avec la relaxation de [XIA03] auquel est ajouté un taux de décroissance α .

Ainsi, en fixant les paramètres $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1000$, $\alpha_1 = 34$ et $\alpha = 0.01$, la résolution des LMI du Théorème 4.5 donne les résultats suivants :

$$K_1 = [23.8587 \quad -4.9320], \quad K_2 = [30.8740 \quad -6.7982],$$

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} 021.6207 \\ 002.5781 \\ 212.6304 \\ 439.3220 \\ 402.8071 \\ 153.2865 \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_2 = \begin{bmatrix} 022.1506 \\ 002.6146 \\ 217.6986 \\ 449.7974 \\ 412.4126 \\ 156.9418 \end{bmatrix},$$

et $\eta = 0.0557$ est le taux d'atténuation minimisé.

La figure 4.12(a) représente l'entrée de commande tolérante aux défauts. L'observateur PMI d'ordre quatre (q=4) fourni l'estimation du défaut sur la figure 4.12(b). La figure 4.13 montre les réponses du système en boucle fermée pour les mêmes conditions initiales. On constate une très bonne estimation du signal de défaut avec l'observateur PMI par rapport à l'observateur PI. Ce résultat permet une meilleure compensation de ce dernier. En effet, le système assure parfaitement la convergence des états vers l'origine même en présence d'un défaut variant. Les simulations effectuées ont montré des résultats tout à fait satisfaisants en termes de performances temporelles.

A partir des résultats de simulation de l'approche FTC avec observateurs PMI, La loi de commande proposée assure parfaitement la stabilité du système non linéaire ainsi que la compensation des défauts actionneurs.

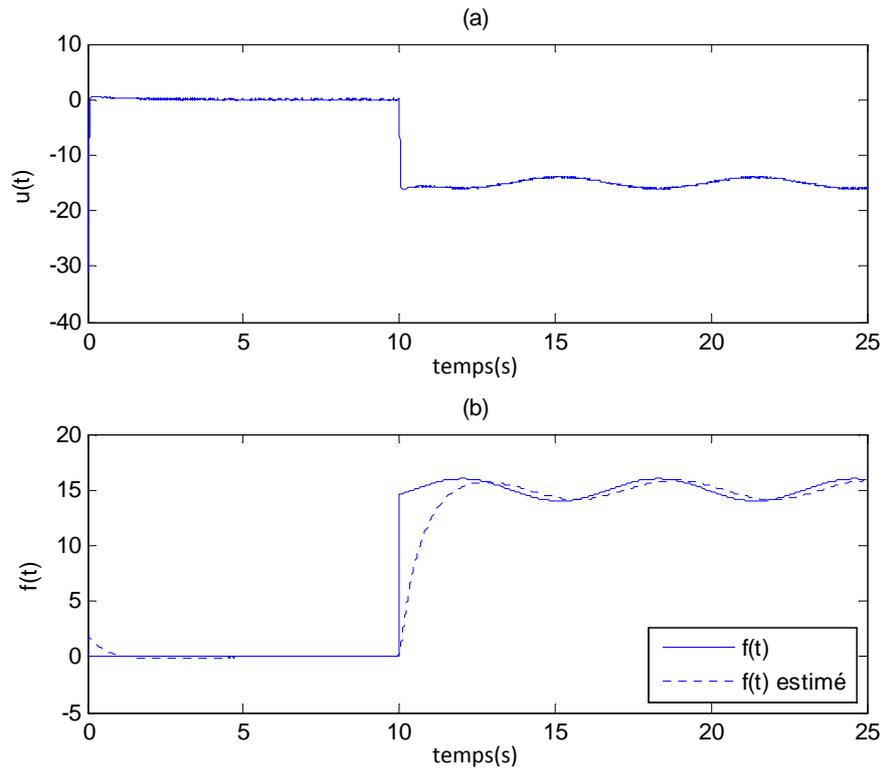


Figure 4.10 Commande tolérante aux défauts (a)-défaut et son estimée avec un PI (b)

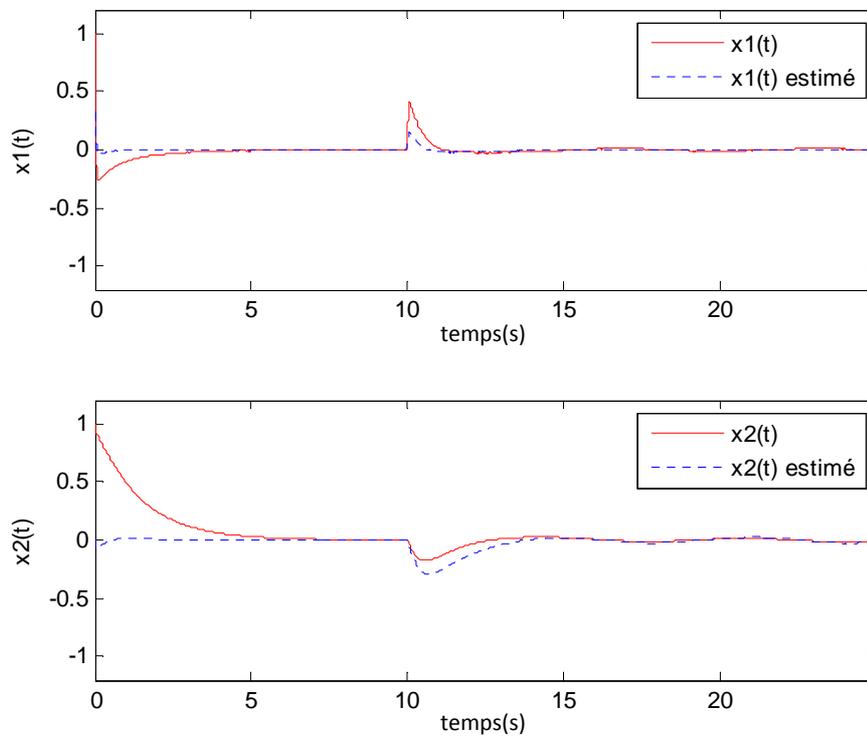


Figure 4.11 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)

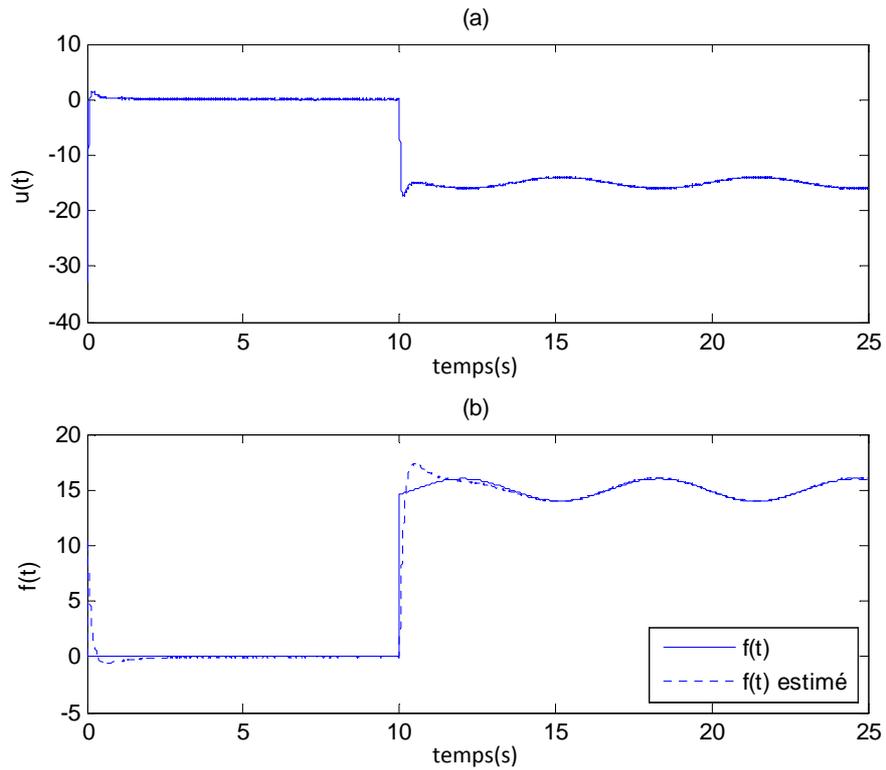


Figure 4.12 Commande tolérante aux défauts (a)-défaut et son estimée avec un PMI (b)

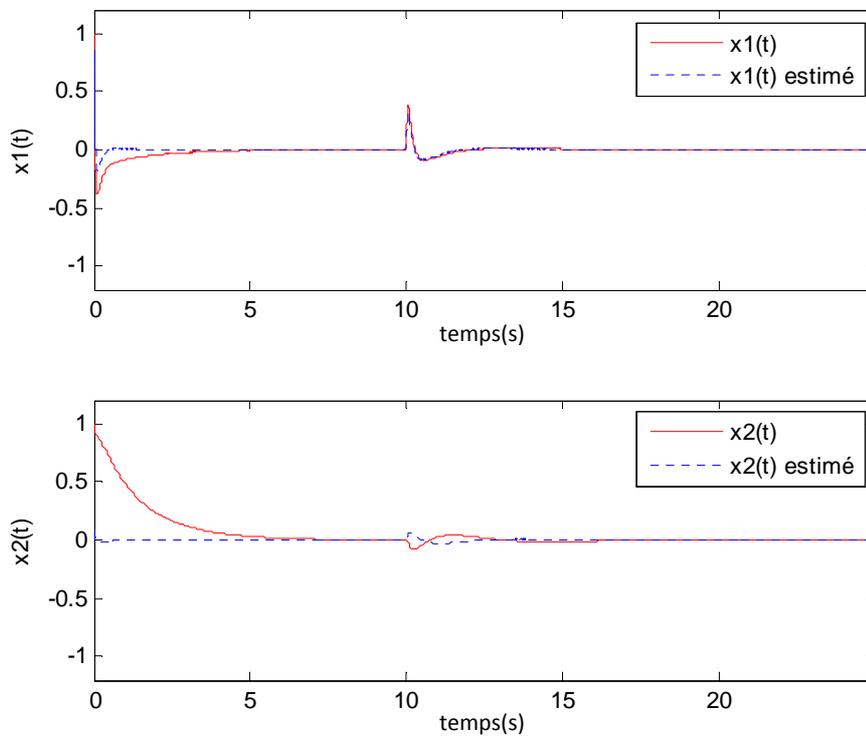


Figure 4.13 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)

4.5 Commande robuste tolérante aux défauts actionneurs à VPNM

Dans cette section, la conception d'une commande FTC robuste à base d'observateur est abordée dans le cas où les variables de prémisses sont non mesurables. D'une manière analogue à la section précédente, nous considérons deux types d'observateurs, à savoir, l'observateur PI et l'observateur PMI.

Le système perturbé sans défaut s'écrit sous la forme suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + H_1 w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (C_i x(t) + H_2 w(t)) \end{cases} \quad (4.132)$$

Les matrices A_i, B_i, C_i, H_1 et H_2 sont constantes et de dimensions appropriées. Le vecteur $w(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ correspond aux perturbations et aux bruits de mesure.

Le système perturbé affecté par les défauts actionneurs s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (A_i x(t) + B_i (u(t) + f(t)) + H_1 w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) (C_i x(t) + H_2 w(t)) \end{cases} \quad (4.133)$$

avec $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ et le vecteur de défauts.

Le but est de concevoir une loi de commande permettant d'assurer la convergence des états et de leurs estimées vers le point d'équilibre en absence de perturbations. En revanche, dans le cas de présence de perturbations affectant le système, la loi de commande doit maintenir des performances acceptables avec une bonne atténuation des perturbations. Dans ce qui suit, nous présentons une commande FTC robuste à base d'observateur PI permettant de compenser les défauts actionneurs et d'atténuer les perturbations extérieures.

4.5.1 Observateur PI

L'observateur PI considéré dans (4.50) est exploité dans cette section. On s'intéresse à sa forme équivalente (4.52) ainsi que sa forme augmentée (4.55).

Le système (4.133) est réécrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (A_i x(t) + B_i (u(t) + f(t)) + H_1 w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (C_i x(t) + H_2 w(t)) \end{cases} \quad (4.134)$$

En tenant compte de l'hypothèse 4.1, le système (4.134) peut se mettre sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{H}_1 w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (\bar{C}_i \bar{x}(t) + H_2 w(t)) \end{cases} \quad (4.135)$$

avec :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f(t) \end{bmatrix}, \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{H}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_i = [C_i \quad 0] \quad (4.136)$$

On considère l'erreur d'estimation augmentée suivante :

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{x}(t) \quad (4.137)$$

Qui peut encore s'écrire :

$$\bar{e}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ f(t) - \hat{f}(t) \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

A partir de (4.134), (4.52) et (4.138), la dynamique de l'erreur d'estimation augmentée est donnée par :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_f(t) \end{bmatrix} \quad (4.139)$$

avec :

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = \sum_{i,j,k}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left((\tilde{A}_{ij} - \tilde{B}_{ij} K_k - L_{pj} \tilde{C}_{ik}) x(t) - (A_j + \tilde{B}_{ij} K_k - L_{pj} C_k) e_x(t) \right. \\ \quad \left. + (B_j + \tilde{B}_{ij}) e_f(t) - L_{pj} H_2 w(t) + H_1 w(t) \right) \\ \dot{e}_f(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left(-L_{lj} \tilde{C}_{ik} x(t) - L_{lj} C_k e_x(t) - L_{lj} H_2 w(t) \right) \end{cases} \quad (4.140)$$

tel que :

$$\tilde{A}_{ij} = (A_i - A_j), \tilde{B}_{ij} = (B_i - B_j), \tilde{C}_{ik} = (C_i - C_k) \quad (4.141)$$

A partir des dynamiques de l'équation (4.140), la dynamique de l'erreur d'estimation augmentée s'écrit :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left((\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k + \bar{B}_{ij} \bar{K}_k) \bar{e}(t) + (\bar{A}_{ij} - \bar{B}_{ij} K_k - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik}) x(t) - \bar{L}_j H_2 w(t) + \bar{H}_1 w(t) \right) \quad (4.142)$$

avec :

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

$$\bar{K}_k = [K_k \quad I] \quad (4.144)$$

tel que $\bar{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f) \times n_x}$, $\bar{B}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f) \times n_u}$

En appliquant la commande (4.49) au système (4.134), on obtient le système en boucle fermée suivant :

tel que T_1 et T_2 sont donnés par :

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_1(1,1) & (*) & (*) & (*) \\ \bar{A}_{ij}X_2 & -\varepsilon_2^{-1}I & 0 & 0 \\ \bar{C}_{ik}X_2 & 0 & -\varepsilon_3^{-1}I & 0 \\ -\bar{B}_{ij}N_k & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1}I \end{bmatrix}, \quad (4.151)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} T_2(1,1) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ P_1 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ Y_j^T & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 \\ -H_2^T Y_j^T + \bar{H}_1^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}, \quad (4.152)$$

$$T_1(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k, \quad T_2(1,1) = \bar{A}_j^T P_1 + P_1 \bar{A}_j - \bar{C}_k^T Y_j^T - Y_j \bar{C}_k + Q,$$

$$I_x = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_x+n_f) \times n_x}, \quad I_f = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_f} \end{bmatrix}_{(n_x+n_f) \times n_f}$$

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de la commande et de l'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $\bar{L}_i = P_1^{-1} Y_i$.

Démonstration : On considère la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(x_a(t)) = x_a(t)^T P x_a(t), \text{ avec } P = P^T > 0. \quad (4.153)$$

Le critère H^∞ (4.72) est réécrit en fonction de la variable augmentée $x_a(t)$ comme suit :

$$\int_0^\infty x_a(t)^T \bar{Q} x_a(t) dt \leq \eta^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt, \text{ avec } \bar{Q} = \text{diag}[0 \quad Q] \quad (4.154)$$

La stabilité du système (4.147) est assurée et la performance H^∞ (4.154) est garantie si la contrainte suivante est vérifiée:

$$\dot{V}(x_a(t)) + x_a(t)^T \bar{Q} x_a(t) - \eta^2 w(t)^T w(t) < 0 \quad (4.155)$$

D'après (4.147), l'inégalité (4.155) devient :

$$x_a(t)^T (\Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q}) x_a(t) - w(t)^T (\bar{L}_j \bar{H}_2 - \bar{H}_1)^T P x_a(t) - x_a(t)^T P (\bar{L}_j \bar{H}_2 - \bar{H}_1) w(t) - \eta^2 w(t)^T w(t) < 0 \quad (4.156)$$

L'inégalité (4.156) est réécrite sous la forme suivante :

$$\sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \begin{bmatrix} x_a(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q} & -P(\bar{L}_j \bar{H}_2 - \bar{H}_1) \\ -(\bar{L}_j \bar{H}_2 - \bar{H}_1)^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ w(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.157)$$

L'inégalité (4.157) est assurée si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q} & -P(\bar{L}_j \bar{H}_2 - \bar{H}_1) \\ -(\bar{L}_j \bar{H}_2 - \bar{H}_1)^T P & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.158)$$

En remplaçant les matrices de (4.148), le premier block de l'inégalité (4.158) devient :

$$(*) + P \begin{bmatrix} A_i - B_i K_k & B_i \bar{K}_k \\ \bar{A}_{ij} - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik} & \bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix} + \bar{Q} \quad (4.159)$$

En supposant $P = \text{diag} [P_2 \quad P_1]$, le premier terme de (4.159) est séparé comme suit :

$$\Gamma_{ijk} = \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_k)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_k) & P_2 (B_i \bar{K}_k) \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k)^T P_1 + P_1 (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (\bar{A}_{ij} - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik})^T P_1 \\ P_1 (\bar{A}_{ij} - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik}) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

D'après la propriété (A.9) du Lemme A.3, (4.160) devient :

$$\Gamma_{ijk} \leq \begin{bmatrix} (A_i - B_i K_k)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_k) + d_{1ijk} & P_2 (B_i \bar{K}_k) \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k)^T P_1 + P_1 (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k) + d_{2ijk} \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

avec :

$d_{1ijk} = \varepsilon_2 \bar{A}_{ij}^T \bar{A}_{ij} + \varepsilon_3 \tilde{C}_{ik}^T \tilde{C}_{ik}$, $d_{2ijk} = \varepsilon_2^{-1} P_1^2 + \varepsilon_3^{-1} P_1 \bar{L}_j \bar{L}_j^T P_1$, où ε_2 et ε_3 sont des constantes positives.

En utilisant la propriété (A.9), le dernier terme de (4.159) devient:

$$(*) + \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1^{-1} P_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_k^T \bar{B}_{ij}^T \\ \bar{K}_k^T \bar{B}_{ij}^T \end{bmatrix} \varepsilon_1 \begin{bmatrix} -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix} \quad (4.162)$$

avec ε_1 est une constante positive.

A partir de (4.161) et (4.162), (4.159) devient:

$$\Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q} \leq S_1 (\varepsilon_1^{-1})^{-1} S_1^T + \begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & P_2 (B_i \bar{K}_k) \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & \Phi_{2ijk} \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

avec

$$S_1^T = \begin{bmatrix} -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix}, \quad \Phi_{1ijk} = (A_i - B_i K_k)^T P_2 + P_2 (A_i - B_i K_k) + d_{1ijk},$$

$$\Phi_{2ijk} = (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k)^T P_1 + P_1 (\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k) + \varepsilon_1^{-1} P_1^2 + d_{2ijk} + \bar{Q}.$$

Avec un complément de Schur, (4.163) s'écrit :

$$\Psi_{ijk}^T P + P \Psi_{ijk} + \bar{Q} \leq \begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & (*) & (*) \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & \Phi_{2ijk} & (*) \\ -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k & -\varepsilon_1^{-1} I \end{bmatrix} \quad (4.164)$$

En remplaçant la contrainte (4.164) dans (4.158), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & (*) & (*) & (*) \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & \Phi_{2ijk} & (*) & (*) \\ -\bar{B}_{ij} K_k & \bar{B}_{ij} \bar{K}_k & -\varepsilon_1^{-1} I & 0 \\ H_1^T P_2 & -H_2^T \bar{L}_j^T P_1 + \bar{H}_1^T P_1 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.165)$$

Afin de réorganiser les éléments de la matrice (4.165), on multiplie à gauche et à droite la matrice (4.165) par la matrice (4.166) suivante :

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.166)$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{1ijk} & (*) & (*) & 0 \\ -\bar{B}_{ij} K_k & -\varepsilon_1^{-1} I & (*) & 0 \\ (B_i \bar{K}_k)^T P_2 & \bar{K}_k^T \bar{B}_{ij}^T & \Phi_{2ijk} & (*) \\ 0 & 0 & -H_2^T \bar{L}_j^T P_1 + \bar{H}_1^T P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.167)$$

En multipliant à gauche et à droite l'inégalité (4.167) par la matrice diagonale (4.168) :

$$\begin{bmatrix} X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_2 \end{bmatrix} \quad (4.168)$$

Et en utilisant les changements de variables suivants :

$$X_2 = P_2^{-1}, \quad N_k = K_k X_2, \quad \bar{N}_k = \bar{K}_k \bar{X}_2 \quad \text{et} \quad Y_j = P_1 \bar{L}_j \quad (4.169)$$

On obtient :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{1ijk} & (*) & (*) & 0 \\ -\bar{B}_{ij} N_k & -\varepsilon_1^{-1} I & (*) & 0 \\ \hline \bar{N}_k^T B_i^T & \bar{N}_k^T \bar{B}_{ij}^T & \begin{bmatrix} \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \Omega_{2,jk} & \begin{bmatrix} \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \end{array} \right] < 0 \quad (4.170)$$

avec $\bar{X}_2 \in \mathbb{R}^{(n_x+n_f)}$, $\bar{N}_k \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+n_f)}$,

$$\Omega_{1ijk} = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_i N_k + \varepsilon_2 X_2 \bar{A}_{ij}^T \bar{A}_{ij} X_2 + \varepsilon_3 X_2 \bar{C}_{ik}^T \bar{C}_{ik} X_2,$$

$$\Omega_{2,jk} = \begin{bmatrix} \Omega_{2,jk}(1,1) & (*) \\ -H_2^T \bar{L}_j^T P_1 + \bar{H}_1^T P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_k = [N_k \quad I],$$

$$\Omega_{2ijk}(1,1) = \bar{A}_j^T P_1 + P_1 \bar{A}_j - \bar{C}_k^T Y_j^T - Y_j \bar{C}_k + \varepsilon_1^{-1} P_1^2 + \varepsilon_2^{-1} P_1^2 + \varepsilon_3^{-1} Y_j Y_j^T + Q.$$

Afin d'éliminer les termes non LMI de l'inégalité (4.170), on applique le Lemme A.1 sur le deuxième bloc diagonal de (4.170).

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \Omega_{2,jk} \begin{bmatrix} \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -2\alpha_1 \bar{X}_2 & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 X_2 \end{bmatrix} - \alpha_1^2 \Omega_{2,jk}^{-1} \quad (4.171)$$

En utilisant un complément de Schur, (4.171) devient :

$$\begin{bmatrix} -2\alpha_1 \bar{X}_2 & 0 & (*) & 0 \\ 0 & -2\alpha_1 X_2 & 0 & (*) \\ \alpha_1 I & 0 & \Omega_{2,jk}(1,1) & (*) \\ 0 & \alpha_1 I & -H_2^T Y_j^T + \bar{H}_1^T P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix} \quad (4.172)$$

En substituant (4.172) dans (4.170), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Omega_{1,ijk} & (*) & (*) & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{B}_{ij} N_k & -\varepsilon_1^{-1} I & (*) & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_k^T B_i^T & \bar{N}_k^T \bar{B}_{ij}^T & -2\alpha_1 \bar{X}_2 & 0 & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha_1 X_2 & 0 & (*) \\ 0 & 0 & \alpha_1 I & 0 & \Omega_{2,jk}(1,1) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 I & -H_2^T Y_j^T + \bar{H}_1^T P_1 & -\eta^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.173)$$

Enfin, avec des compléments de Schur sur les blocs diagonaux $\Omega_{1,ijk}$ et $\Omega_{2,jk}(1,1)$, et en tenant compte des matrices de (4.174), on obtient les conditions LMI du Théorème 4.7.

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{N}_k = [N_k \quad I] \quad (4.174)$$

L'hypothèse considérée selon lesquels les défauts sont constants ou à dynamiques lentes est très restrictive. D'un point de vue pratique, l'observateur PI manque en précision quand à l'estimation de défaut variables dans le temps. Dans la section suivante, un observateur PMI est considéré permettant ainsi de prendre en compte une classe plus large de défauts affectant le système.

4.5.2 Observateur PMI

Dans cette partie, la structure de l'observateur PMI de l'équation (4.101) est exploitée. On s'intéresse principalement à sa forme équivalente (4.103) ainsi que sa forme augmentée (4.106). La structure équivalente (4.134) du système (4.133) est aussi considérée.

En tenant compte de l'hypothèse 4.2, le système (4.134) peut être mis sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{H}_1 w(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_k(\hat{x}(t)) (\bar{C}_i \bar{x}(t) + H_2 w(t)) \end{cases} \quad (4.175)$$

avec :

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f(t) \\ f_1(t) \\ \vdots \\ f_{q-1}(t) \end{bmatrix}, \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_f} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_{n_f} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{H}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C}_i = [C_i \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (4.176)$$

On définit l'erreur d'estimation augmentée comme suit :

$$\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_f(t) \\ e_{f_1}(t) \\ \vdots \\ e_{f_{q-1}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.177)$$

avec :

$$\begin{cases} e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \\ e_f(t) = f(t) - \hat{f}(t) \\ e_{f_1}(t) = f_1(t) - \hat{f}_1(t) \\ \vdots \\ e_{f_{q-1}}(t) = f_{q-1}(t) - \hat{f}_{q-1}(t) \end{cases} \quad (4.178)$$

A partir de (4.103), (4.134) et (4.178), la dynamique de l'erreur d'estimation augmentée est donnée par :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_f(t) \\ \dot{e}_{f_1}(t) \\ \vdots \\ \dot{e}_{f_{q-1}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.179)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_x(t) = \sum_{i,j,k}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left((\tilde{A}_{ij} - \tilde{B}_{ij} K_k - L_{pj} \tilde{C}_{ik}) x(t) - (A_j + \tilde{B}_{ij} K_k - L_{pj} C_k) e_x(t) \right. \\ \quad \left. + (B_j + \tilde{B}_{ij}) e_f(t) - L_{pj} H_2 w(t) + H_1 w(t) \right) \\ \dot{e}_f(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left(-L_{lj} \tilde{C}_{ik} x(t) - L_{lj} C_k e_x(t) - L_{lj} H_2 w(t) \right) \\ \dot{e}_{f_1}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left(-L_{lj}^1 \tilde{C}_{ik} x(t) - L_{lj}^1 C_k e_x(t) - L_{lj}^1 H_2 w(t) \right) \\ \vdots \\ \dot{e}_{f_{q-1}}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left(-L_{lj}^{q-1} \tilde{C}_{ik} x(t) - L_{lj}^{q-1} C_k e_x(t) - L_{lj}^{q-1} H_2 w(t) \right) \end{array} \right. \quad (4.180)$$

tel que :

$$\tilde{A}_{ij} = (A_i - A_j), \quad \tilde{B}_{ij} = (B_i - B_j), \quad \tilde{C}_{ik} = (C_i - C_k) \quad (4.181)$$

D'après (4.179) et (4.180), la dynamique de l'erreur d'estimation augmentée s'écrit :

$$\dot{\bar{e}}(t) = \sum_{i,j,k=1}^r h_i \hat{h}_j \hat{h}_k \left((\bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k + \bar{B}_{ij} \bar{K}_k) \bar{e}(t) + (\bar{A}_{ij} - \bar{B}_{ij} K_k - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik}) x(t) - (\bar{L}_j H_2 - \bar{H}_1) w(t) \right) \quad (4.182)$$

avec :

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{ij} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.183)$$

$$\bar{K}_k = [K_k \quad I \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.184)$$

où $\bar{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n_x + q \times n_f) \times n_x}$, $\bar{B}_{ij} \in \mathbb{R}^{(n_x + q \times n_f) \times n_u}$

En appliquant la commande (4.49) au système (4.134), on obtient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) h_k(\hat{x}(t)) (G_{ik} x(t) + B_i \bar{K}_k \bar{e}(t) + H_1 w(t)) \quad (4.185)$$

avec :

$$G_{ik} = A_i - B_i K_k \quad (4.186)$$

A partir des dynamiques (4.182) et (4.185), on obtient le système augmenté suivant :

$$\dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r h_i(x(t)) h_j(\hat{x}(t)) h_k(\hat{x}(t)) \left(\Psi_{ijk} x_a(t) - (\bar{L}_j \bar{H}_2 - \bar{H}_1) w(t) \right) \quad (4.187)$$

avec :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \bar{e}(t) \end{bmatrix}, \quad \Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} G_{ik} & B_i \bar{K}_k \\ \bar{A}_{ij} - \bar{B}_{ij} K_k - \bar{L}_j \tilde{C}_{ik} & \bar{A}_j - \bar{L}_j \bar{C}_k + \bar{B}_{ij} \bar{K}_k \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_1 = \begin{bmatrix} H_1 \\ \bar{H}_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (4.188)$$

La conception de la loi de commande FTC robuste consiste à calculer les gains K_k et \bar{L}_j permettant d'assurer la stabilité asymptotique du système augmenté (4.187) tout en garantissant la compensation de l'effet des défauts sur le système ainsi que l'atténuation des perturbations extérieurs. En supposant les perturbations bornées, la méthode adoptée pour l'analyse de la stabilité du système (4.187) permet d'énoncer le Théorème 4.8 suivant :

Théorème 4.8:

Etant donné des constantes positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ et α_1 , le système augmenté (4.187) est asymptotiquement stable et assure la performance H_∞ (4.72) avec un taux d'atténuation η s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0$, $X_2 = X_2^T > 0$, N_i, Y_i et un scalaire positif η tels que les conditions LMI suivantes soient vérifiées.

$$\Upsilon_{jk}^i < 0, \quad i, j, k = 1, \dots, r \quad (4.189)$$

avec :

$$\Upsilon_{jk}^i = \left[\begin{array}{ccc|cccccc|c} & Z_1 & & (*) & & & & & (*) \\ \hline N_k^T B_i^T & 0_{1 \times 2} & N_k^T \bar{B}_{ij}^T & -2\alpha_1 X_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B_i^T & 0_{1 \times 2} & \bar{B}_{ij}^T & 0 & -2\alpha_1 I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & 0 & 0 & -2\alpha_1 I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2\alpha_1 I & 0 \\ 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2\alpha_1 X_2 \\ \hline 0 & 0_{1 \times 2} & 0 & \alpha_1 I_x & \alpha_1 I_f & \alpha_1 I_{f_1} & \dots & \alpha_1 I_{f_{q-1}} & 0 \\ 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & \dots & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} \\ X_2 H_1^T & 0_{1 \times 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 I \end{array} \right] Z_2 \quad (4.190)$$

tel que Z_1 et Z_2 sont donnés par :

$$Z_1 = \begin{bmatrix} Z_1(1,1) & (*) & (*) & (*) \\ \bar{A}_{ij} X_2 & -\varepsilon_2^{-1} I & 0 & 0 \\ \tilde{C}_{ik} X_2 & 0 & -\varepsilon_3^{-1} I & 0 \\ -\bar{B}_{ij} N_k & 0 & 0 & -\varepsilon_1^{-1} I \end{bmatrix}, \quad (4.191)$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} T_2(1,1) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ P_1 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ Y_j^T & 0 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 \\ -H_2^T Y_j^T + \bar{H}_1^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\eta^2 I \end{bmatrix}, \quad (4.192)$$

avec :

$$Z_1(1,1) = X_2 A_i^T + A_i X_2 - N_k^T B_i^T - B_{ik}, \quad Z_2(1,1) = \bar{A}_j^T P_1 + P_1 \bar{A}_j - \bar{C}_k^T Y_j^T - Y_j \bar{C}_k + Q,$$

$$I_x = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_x+q \times n_f) \times n_x}, I_f = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_f} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_x+q \times n_f) \times n_f}, I_{f_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n_f} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n_x+q \times n_f) \times n_f}, \dots, I_{f_{q-1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_{n_f} \end{bmatrix}_{(n_x+q \times n_f) \times n_f}$$

De plus, si les conditions LMI sont résolues, les gains de la commande et de l'observateur sont donnés par $K_i = N_i X_2^{-1}$ et $\bar{L}_i = P_1^{-1} Y_i$.

Démonstration : La démonstration du Théorème 4.8 est similaire à celle du Théorème 4.7. En revanche, les matrices suivantes doivent être considérer afin d'aboutir au résultat final.

$$\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \bar{N}_k = [N_k \quad I \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

4.5.3 Exemple 3

Afin de montrer l'intérêt de l'approche FTC robuste, on ajoute des perturbations au modèle T-S de l'exemple 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) [A_i x(t) + B_i (u(t) + f(t)) + H_1 w(t)] \\ y(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x(t)) C_i x(t) + H_2 w(t) \end{cases} \quad (4.193)$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ -2.3 & -1 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = [10 \quad 2], \\ H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = [0 \quad 1].$$

Les fonctions d'activation sont données comme suit :

$$h_1(x_2(t)) = 0.5 + \arctan(x_2(t)) / \pi, \quad h_2(x_2(t)) = 1 - h_1(x_2(t)).$$

Afin de vérifier la robustesse de la loi de commande FTC vis-à-vis du vecteur des perturbations $w(t) = [p(t) \quad v(t)]^T$, on considère $p(t) = 0.5 \sin 2\pi t$ comme signal de perturbation externe apparaissant à l'instant 20s et $v(t)$ un bruit de mesure de moyenne nulle et de variance égale à 0.03. Le défaut $f(t)$ est un échelon d'amplitude 5 introduit à l'instant 10s.

Avant de résoudre les LMI du Théorème 4.7, la relaxation de [TUA01] (voir Annexe B) est considérée avec un taux de décroissance α . Pour réduire d'avantage le conservatisme des conditions LMI du Théorème 4.7, on ajoute la contrainte (3.50) aux conditions LMI (4.149). Ainsi, en fixant les paramètres $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1000$, $\varepsilon_3 = 100$ et $\alpha = 0.06$, la résolution des LMI du Théorème 4.7 donne les résultats suivants :

$$K_1 = [172.3245 \quad -0.1940], \quad K_2 = [172.3245 \quad -0.1940],$$

$$\bar{L}_1^T = [6.5402 \quad -0.5253 \quad 10.0574], \quad \bar{L}_2^T = [7.0367 \quad -0.5708 \quad 10.7075],$$

et $\eta = 0.086$ est le taux d'atténuation minimisé.

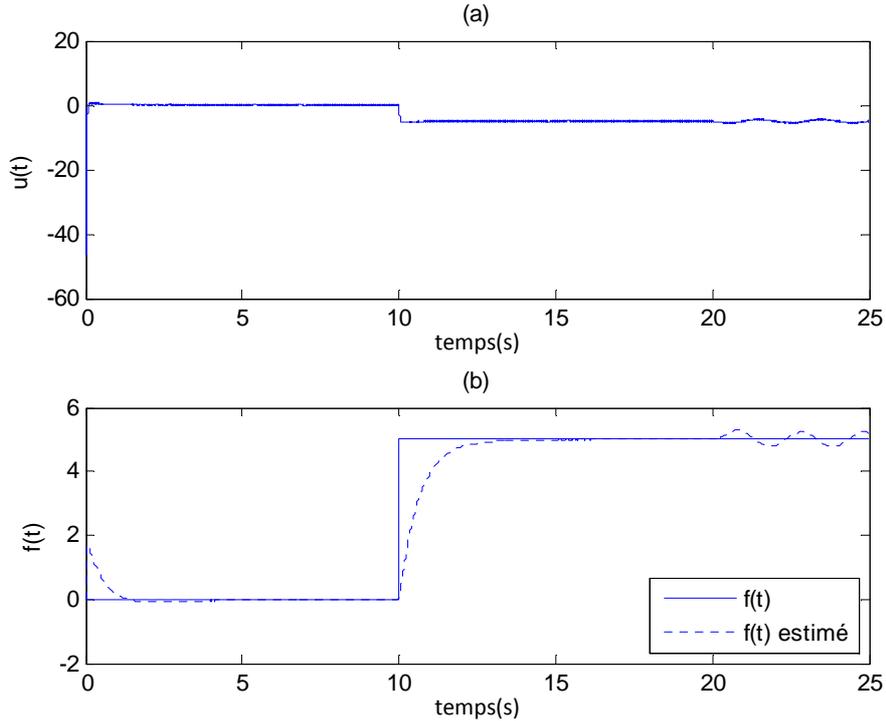


Figure 4.14 Commande tolérante aux défauts (a) - défaut et son estimée avec un PI (b)

La figure 4.14(a) représente l'entrée de commande tolérante aux défauts. L'observateur PI fourni l'estimation du défaut sur la figure 4.14(b). La figure 4.15 montre l'allure des courbes des états et des états estimés pour les conditions initiales $x(0)^T = [1 \quad 1]$ et $\hat{x}(0)^T = [0 \quad 0]$ en tenant compte du défaut d'actionneur, de la perturbation externe et du bruit de mesure. Les signaux de perturbation et de bruit, considérés dans la simulation, sont donnés dans la figure 4.20.

A partir de ces figures, la convergence des états et de leurs estimées vers le point d'équilibre est bien assurée quand le défaut est nul mais dès qu'un signal de défaut est appliqué, la commande tolérante aux défauts compense bien ce dernier et permet ainsi au système de commande d'assurer les objectifs souhaités. On constate une bonne estimation du signal de défaut, ainsi la compensation de ce dernier est bien assurée. Cela permet au système

d'atteindre son objectif même en présence du défaut. On remarque de bonnes performances malgré l'application d'un signal de perturbation, cela apparaît clairement dans la figure 4.15.

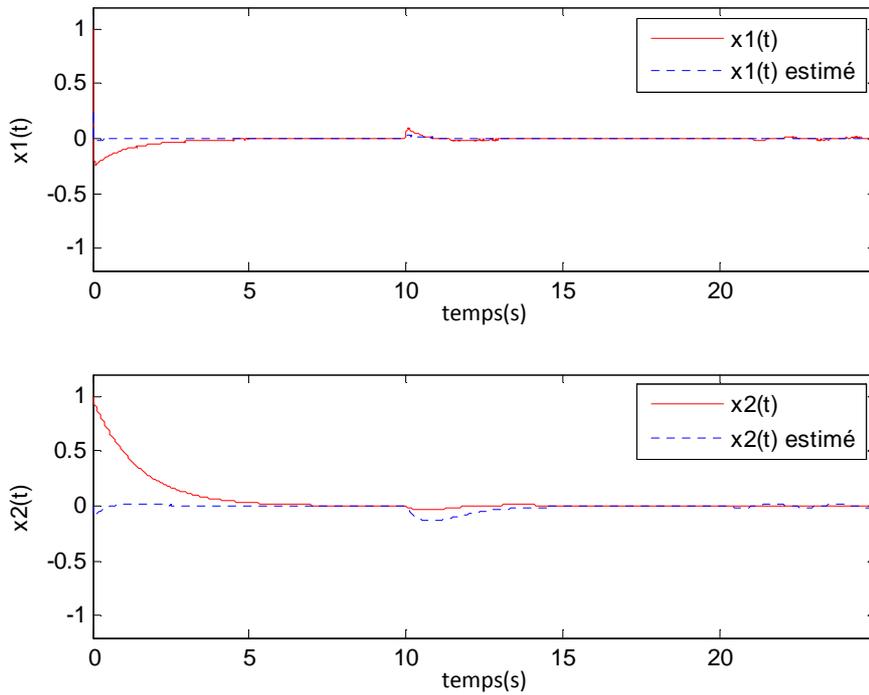


Figure 4.15 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)

Afin de tester la validité de la loi de commande FTC pour des défauts variant dans le temps, on considère cette fois-ci un défaut $f(t) = \sin(t+2,1)+15$ apparaissant à l'instant 10s.

La figure 4.16(a) présente l'entrée de commande tolérante aux défauts. L'observateur PI fourni l'estimation du défaut sur la figure 4.16(b). La figure 4.17 montre les réponses du système en boucle fermée avec les mêmes conditions initiales que celles considérées dans la simulation précédente et en tenant compte aussi de la même perturbation externe et du même bruit de mesure.

A partir des résultats de simulation, la loi de commande FTC avec observateur PI assure une compensation moyenne du défaut variant dans le temps. Afin d'améliorer la compensation de ce type de défaut, on doit avoir une estimation plus précise du signal de défaut. On peut utiliser pour cela un observateur PMI.

La démarche suivie pour la construction de l'observateur PMI consiste à résoudre le Théorème 4.8 avec la relaxation de [XIA03] ainsi que la contrainte (3.50). Ainsi, en fixant les paramètres $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10000$, on obtient :

$$K_1 = [31.9289 \quad -0.3632], \quad K_2 = [41.0451 \quad -0.4726],$$

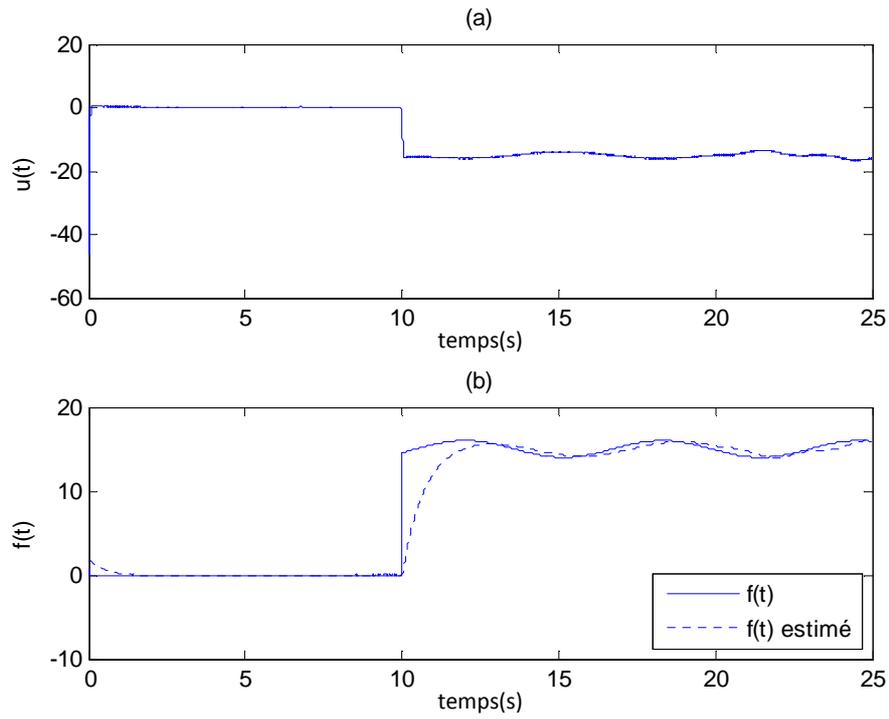


Figure 4.16 Commande tolérante aux défauts (a)-défaut et son estimée avec un PI (b)

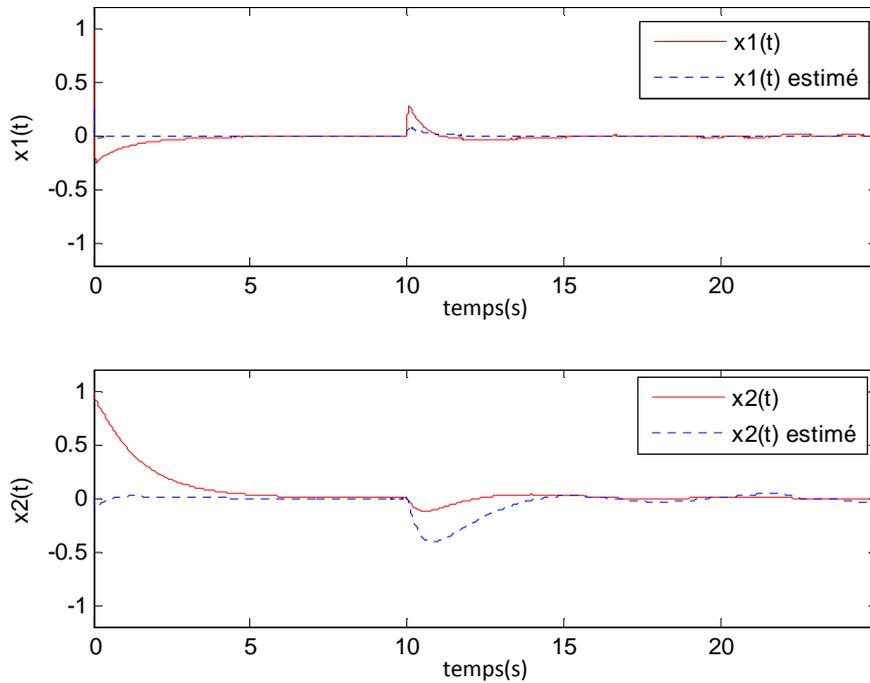


Figure 4.17 États (trait plein) et états estimés (trait discontinu)

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} 015.0694 \\ 001.0680 \\ 131.6531 \\ 248.3608 \\ 214.3392 \\ 077.9510 \end{bmatrix}, \bar{L}_1 = \begin{bmatrix} 014.2808 \\ 000.8489 \\ 123.8032 \\ 233.5736 \\ 201.5808 \\ 073.3108 \end{bmatrix}, \eta = 0.0949.$$

La figure 4.18(a) montre l'entrée de commande tolérante aux défauts. L'observateur PMI d'ordre quatre (q=4) fourni l'estimation du défaut sur la figure 4.18(b). La figure 4.19 présente la réponse des états réels et des états estimés en tenant compte du défaut d'actionneur, de la perturbation externe et du bruit de mesure.

A partir des résultats de simulation, la convergence des états et des états estimés vers le point d'équilibre est bien assurée quand le défaut est nul mais dès qu'un signal de défaut est appliqué, la commande tolérante aux défauts compense bien ce dernier. En effet, on constate une très bonne estimation du signal de défaut avec l'observateur PMI par rapport à l'observateur PI, ainsi la compensation de ce dernier est bien meilleure. Cela permet au système de commande d'assurer les objectifs souhaités même en présence de défauts variants dans le temps. On remarque aussi une bonne atténuation de la perturbation, cela apparait clairement dans la figure 4.19. Les simulations effectuées ont montré des résultats tout à fait satisfaisants en termes de performances temporelles. En effet, la loi de commande FTC proposée ne garantie pas uniquement la stabilité du système non linéaire mais elle assure aussi une très bonne compensation du défaut actionneur ainsi que l'atténuation des perturbations extérieures.

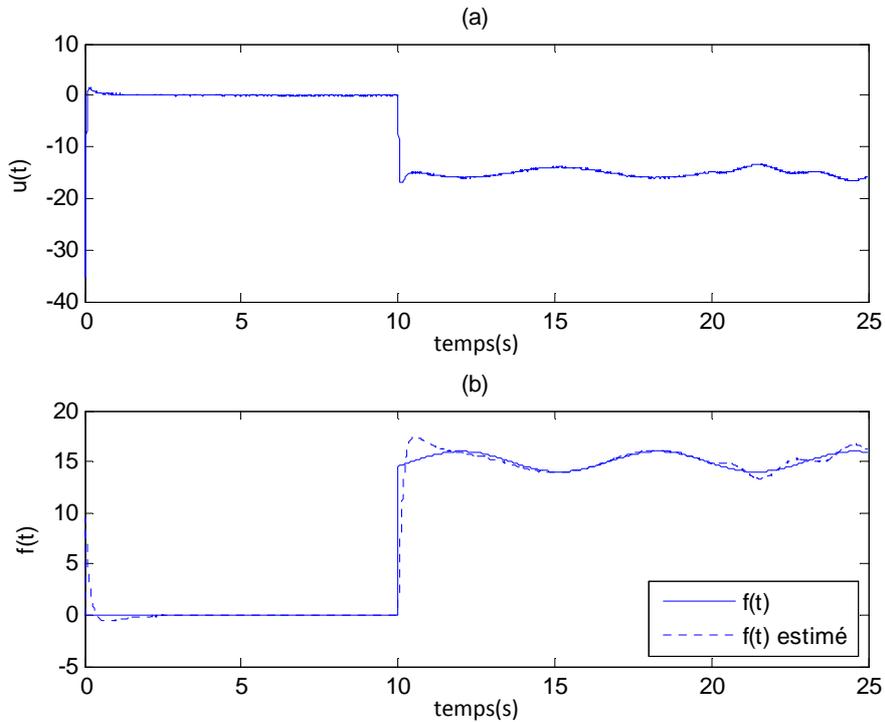


Figure 4.18 Commande tolérante aux défauts (a)-défaut et son estimée avec un PMI (b)

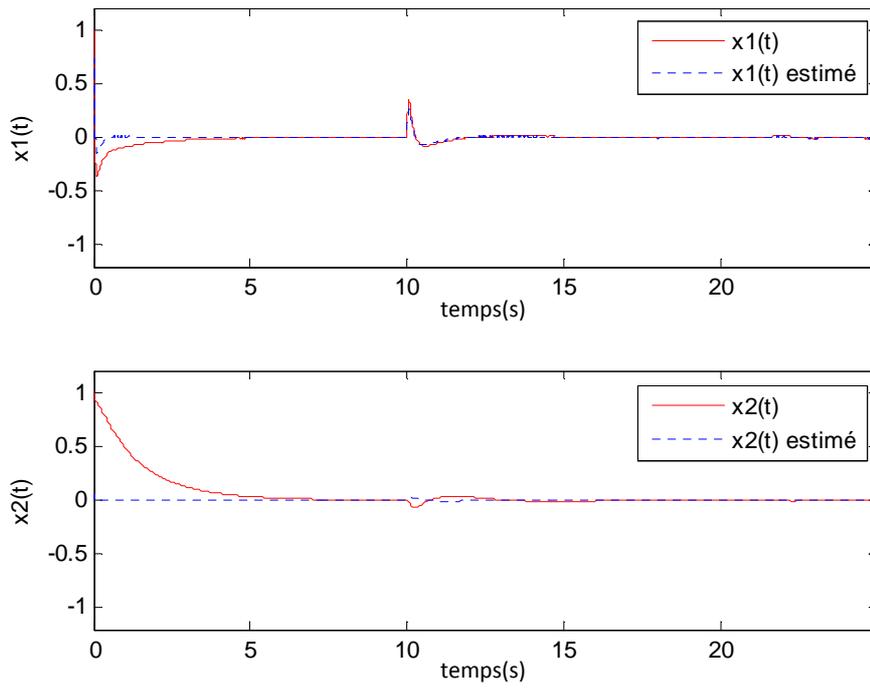


Figure 4.19 Etats (trait plein) et états estimés (trait discontinu)

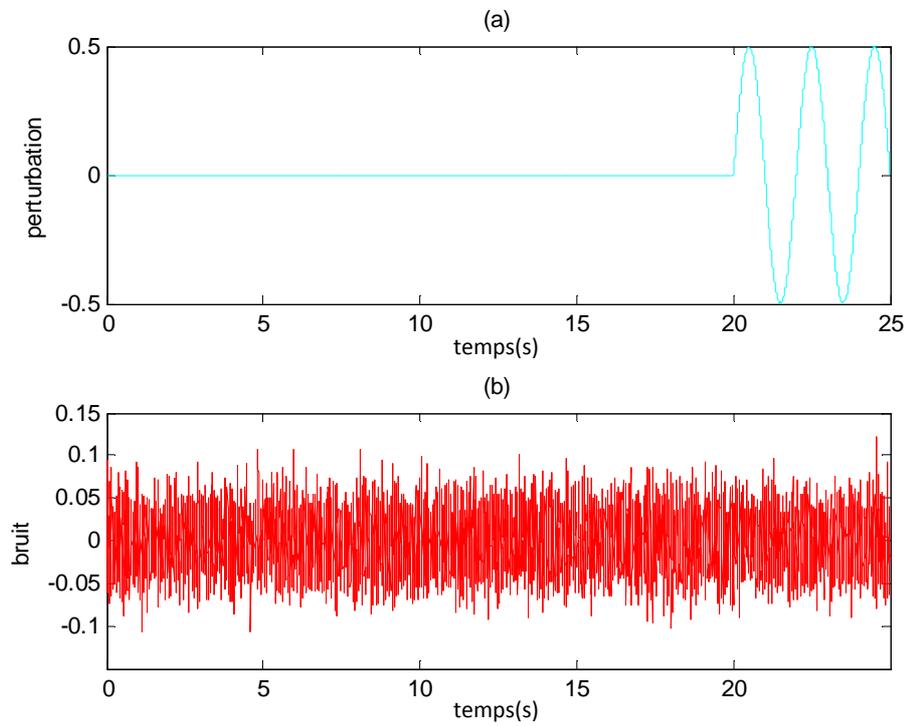


Figure 4.20 Perturbation (a) - bruit (b)

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, des résultats concernant la commande tolérante aux défauts actionneurs des systèmes représentés par des modèles T-S à variables de prémisses non mesurables ont été proposés. La technique FTC considérée agit de manière directe sur la loi de commande en ajustant en ligne les paramètres de cette dernière dans le but de maintenir la stabilité et les performances nominales du système globale. L'étude menée exploite les observateurs PI et PMI. Ces derniers fournissent directement l'estimation des états ainsi que des défauts, par conséquent, la tâche de compensation de l'effet du défaut peut être réalisée. Deux approches de commande FTC active à base d'observateurs PI et PMI ont été proposées. Enfin, une loi de commande tolérante aux défauts robuste a été présentée. Cette dernière permet l'estimation et la compensation des défauts tout en atténuant l'effet des perturbations extérieures. La théorie de Lyapunov est utilisée pour l'étude de la stabilité. De nouvelles conditions suffisantes en terme de contraintes LMI ont été alors établies permettant d'assurer la convergence asymptotique vers zéros des états ainsi que des erreurs d'estimation d'états et de défauts.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse concernent la synthèse de lois de commande tolérantes aux défauts pour les systèmes non linéaires modélisés selon l'approche multimodèle de Takagi-Sugeno. La synthèse des lois de commande concerne aussi bien le cas où les variables de prémisses sont mesurables que celui où ces variables ne le sont pas. La majeure partie des résultats proposés porte sur les systèmes T-S à VPNM. Ces derniers offrent l'avantage de représenter une classe plus large de systèmes non linéaires par rapport aux modèles T-S à VPM. De nouvelles conditions suffisantes ont été proposées en termes de conditions LMI permettant de garantir l'efficacité de la loi de commande FTC passive et active à compenser les défauts.

Après un bref rappel des aspects généraux de l'approche multimodèle T-S, deux méthodes de commande FTC passives ont été proposées. La première concerne une loi de commande robuste par retour d'état reconstruit en prenant en considération les modèles T-S incertains et perturbés à variables de prémisses mesurables (VPM). Ainsi, un résultat a été obtenu sous forme de conditions LMI pouvant être résolus en une seule étape. La seconde approche concerne la conception d'une loi de commande plus générale pour les systèmes T-S incertains et perturbés avec variables de prémisses non mesurables (VPNM). Un résultat moins conservatif a été proposé en termes de conditions LMI avec uniquement un seul paramètre prédéfini. L'algorithme d'optimisation PSO a été utilisé pour piloter la résolution de ces conditions LMI. La méthode développée exploitant l'algorithme PSO représente une solution intéressante au problème de conservatisme lié aux paramètres prédéfinis. En effet, cette méthode peut être appliquée à une variété de résultats en particulier ceux possédant un nombre élevé de paramètres prédéfinis. En revanche, la méthode utilisée dans la majorité des travaux publiés consiste à fixer ces paramètres de manière arbitraire. Néanmoins, cette manière de procéder est difficile à appliquer, et même si elle aboutit à des résultats, ils sont le plus souvent très conservatifs.

Afin de s'affranchir des limites de l'approche FTC passive, nous nous sommes intéressés à la stabilisation des systèmes non linéaires en utilisant la technique FTC active tout en exploitant l'approche multimodèle T-S. Dans ce cas, les défauts qui sont considérés comme sévères permettant de modifier la dynamique du système et ne pouvant pas être atténués par l'approche passive peuvent être compensés par la technique active. Ainsi, deux techniques de commande tolérante aux défauts actionneurs ont été proposées pour le cas général de la non disponibilité des variables de prémisses. La loi de commande proposée nécessite l'estimation du vecteur d'état et de défaut afin de le compenser et ainsi maintenir la stabilité et les performances nominales du système. Dans ce contexte, les observateurs PI et PMI ont été utilisés dans la mesure où ils permettent d'estimer simultanément les états ainsi que les défauts. Afin d'assurer la robustesse de la stratégie de commande FTC proposée, le cas du

rejet des perturbations selon un critère de performance H_∞ est présenté. Cette approche permet l'estimation et la compensation des défauts tout en atténuant l'effet des perturbations. On aboutit donc une loi de commande tolérante aux défauts active et robuste.

A l'issue des développements effectués et des résultats obtenus, de nombreuses perspectives se dégagent :

- Le développement d'une loi de commande robuste et tolérante aux défauts combinant le mode glissant, connu pour ses propriétés de robustesse vis-à-vis des perturbations externes et des incertitudes de modélisation, et la représentation T-S, connue par ses propriétés d'approximateur universel.
- Explorer d'autres structures de multimodèles, notamment la structure à état découplé qui réduirait le nombre de LMI à résoudre, ainsi des résultats moins contraignants peuvent être proposés.
- Extension des résultats proposés aux systèmes présentant des retards constants ou variables.
- Explorer les fonctions de Lyapunov non quadratiques dans l'étude de la stabilité. Ces dernières offrent l'avantage de réduire le conservatisme des conditions LMI.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [ACH20] H. Achour, D. Boukhetala and H. Labdelaoui. An observer-based robust H_∞ controller design for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy systems with unknown premise variables using particle swarm optimisation. *International Journal of Systems Science*, vol. 51(14), pp. 2563-2581, 2020.
- [ACH14] H. Achour and D. Boukhetala. Output robust stabilization of uncertain and disturbed Takagi–Sugeno models: an LMI approach. *The Second International Conference on Electrical Engineering and Control Applications (ICEECA)*, Constantine, Algeria, 2014.
- [AKH08] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, D. Fault detection and isolation using sliding mode observer for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy model. In *16th Mediterranean Conference on Control and Automation Congress Centre*, Ajaccio, France, 2008.
- [AKH06] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, D. Maquin. Synthèse d'un multiobservateur robuste pour multimodèle incertain à entrées inconnues : approche LMI. *CIFA*, Bordeaux, France, 2006.
- [AKH04] A. Akhenak. Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : Application au diagnostic. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2004.
- [AMI19] A. A. Amin and K. M. Hasan. A review of Fault Tolerant Control Systems: Advancements and applications. *Measurement*, vol. 143, pp. 58-68, 2019.
- [ASE15] M. H. Asemani and V. J. Majd. A robust H_∞ -tracking design for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy systems with unknown premise variables using descriptor redundancy approach. *International Journal of Systems Science*, vol. 46(16), pp. 2955-2972, 2015.
- [ASE13] M. H. Asemani and V. J. Majd. Robust H_∞ observer-based controller design for uncertain T–S fuzzy systems with unknown premise variables via LMI. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 212, pp. 21-40, 2013.
- [ASS08] W. Assawinchaichote, S. K. Nguang, P. Shi, E. Boukas. H_∞ fuzzy state-feedback control design for nonlinear systems with D -stability constraints: An LMI approach. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 78, pp. 514-531, 2008.
- [BAS97] M. Basseville. Information criteria for residual generation and fault detection and isolation. *Automatica*, vol. 33(5), pp. 783-803, 1997.
- [BER02] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov. Observers for Takagi–Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, vol. 32(1), 2002.
- [BES07] A. H. Besheer, H. M. Emara, M. M. Abdel Aziz. Robust-based output-feedback H_∞ control for uncertain nonlinear systems: an LMI approach. *IET Control Theory and Application*, vol. 1, pp. 1176-1185, 2007.
- [BLA06] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze and M. Staroswiecki. *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer, 2006.

- [BLA00] Y. Blanco, W. Perruquetti, P. Borne. Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno's fuzzy models. IEEE 0-7803-5877-5, 2000.
- [BOS03] J. D. Boskovic and R. K. Mehra. Failure detection, identification and reconfiguration system for a redundant actuator assembly. Proceedings of the 5th Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFE- PROCESS'2003, pp. 429-434, 2003.
- [CEN00] B.S. Chen, C.S. Tseng and H.J. Uang. Mixed H_2/H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: An LMI approach. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 8(3), pp. 249-265, 2000.
- [CHA02] M. Chadli. Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles. Thèse de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2002.
- [CHA11] W.J. Changa, W.Y. Wua and C.C Ku. H_∞ constrained fuzzy control via state observer feedback for discret-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with multiplicative noises. ISA Transactions, vol. 50(1), pp. 37-43, 2011.
- [CHE07] W. Chen and M. Saif. Design of a TS based fuzzy nonlinear unknown input observer with fault diagnosis applications. In American Control Conference, New York City, USA, 2007.
- [CHE07A] W. Chen and M. Saif. Actuator fault detection and isolation in uncertain systems. In American Control Conference, New York City, USA, 2007.
- [CHE07] W. Chen. Model-Based fault diagnosis in complex control systems - Robust and adaptive approaches. Thèse de doctorat, Simon Frazer University, Canada, 2007.
- [CHE91] J. Chen and H. Zhang. Robust detection of faulty actuators via unknown input observers. International Journal of Systems Science, vol. 22(10), pp. 1829-1839, 1991.
- [CHI96] M. Chilali and P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 41(3), pp. 358-367, 1996.
- [COR98] M. Corless, J. Tu. State and input estimation for a class of uncertain systems. Automatica, vol. 34(6), pp. 757-764, 1998.
- [DEL05] S. Delprat, P.F. Toulotte, T.M. Guerra, J. Boonaert. Robust pole placement in LMI region for Takagi-Sugeno models: application to an automated vehicle. IFAC Triennial World Congress, Prague, République Tchèque, 2005.
- [DEL07] F. Delmotte, T. M. Guerra, M. Ksantini. Continuous Takagi-Sugeno's models: reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics. IEEE Transactions on Fuzzy System, vol. 15(3), pp. 426-438, 2007.
- [DIN21] S. X. Ding, Advanced Methods for Fault Diagnosis and Fault-tolerant Control. Springer, 2021.
- [DIN93] X. Ding and P. M. Frank. An adaptive observer-based fault detection scheme for nonlinear dynamic systems. In Proceedings of the IFAC world congress'93, vol. 8, pp. 307-311, 1993.
- [DIN08] S. X. Ding. Model-based fault diagnosis techniques design schemes, algorithms, and tools. Springer-Verlag, 2008.
- [ENG07] A. P. Engelbrecht. Computational intelligence. An introduction. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2007.

- [FEN06] G. Feng. A survey on analysis and design of modelbased fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, vol. 14(5), pp. 676-697, 2006.
- [FIL91] D. Filev. Fuzzy mode of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 5(3), pp. 281-290, 1991.
- [FLO04] T. Floquet, J. Barbot, W. Perruquetti and M. Djemai. On the robust fault detection via a sliding mode observer. *International Journal of Control*, vol. 77, pp. 622-629, 2004.
- [FRA98] P. M. Frank. The application of fuzzy logic to fault diagnosis and supervision. *LFA*, pp. 59-87, 1998.
- [GAH95] P. Gahinet, A. Nemirowski, A. Laub, M. Chilali. *LMI Control Toolbox*. The MathWors Inc., Natick, MA, 1995.
- [GAO08] Z. Gao, X. Shi and S. X. Ding. Fuzzy state/disturbance observer design for T-S fuzzy systems with application to sensor fault estimation, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, vol. 38(3), pp. 875-880, 2008.
- [GAO92] Z. Gao and P.J. Antsaklis. Reconfigurable control system design via perfect model-following. *International Journal of Control*, vol. 56, 1992.
- [GAO91] Z. Gao and P.J. Antsaklis. Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems. *International Journal of Control*, vol. 53(3), pp. 717-729, 1991.
- [GAO12] Q. Gao, X. Zeng, G. Feng, Y. Wang and J. Qiu. T-S fuzzy model-based approximation and controller design for general nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, vol. 42(4), pp. 1143-1154, 2012.
- [GAS00] K. Gasso. *Identification des systèmes dynamiques non-linéaires : approche multi-modèles*. Thèse de doctorat de l'INPL, France, 2000.
- [GRI07] V-H. Grisales Palacio. *Modélisation et commande floues de type Takagi-Sugeno appliquées à un bioprocédé de traitement des eaux usées*. Thèse de l'Université Paul Sabatier - Toulouse III et l'Université de los Andes, Colombie, France, 2007.
- [GUE03a] K. Guelton. *Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en œuvre d'observateurs flous sous forme descripteur*. Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, France, 2003.
- [GUE08] K. Guelton, S. Delprat, T-M. Guerra. An alternative to inverse dynamics joint torques estimation in human stance based on a Takagi– Sugeno unknown-inputs observer in the descriptor form. *Control Engineering Practice*, vol. 16, pp. 1414-1426, 2008.
- [HAJ17] B.I. Haj, M. Chaabane, M. Driss. Fault-tolerant control for T-S fuzzy descriptor systems with sensor faults: an LMI approach. *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 19(2), pp. 516-527, 2017.
- [HAM11] H. Hamdi, M. Rodrigues, C. Mechmeche, D. Theilliol and N. B. Braiek. Fault detection and isolation for linear parameter varying descriptor systems via proportional integral observer. *International Journal on Adaptive Control Signal Process*, pp. 2-16, 2011.
- [HAN16] J. Han, H. Zhangn, Y. Wang and X. Liu. Robust state/fault estimation and fault tolerant control for T-S fuzzy systems with sensor and actuator faults. *Journal of the Franklin Institute*, vol. 353, pp. 615-641, 2016.

- [HEN99] D. Henrion. Stabilité des systèmes linéaires incertains à commande contrainte. Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, France, 1999.
- [HOR02] T. Hori, K. Tanaka, H.O. Wang. A piecewise Takagi-Sugeno fuzzy model construction and relaxation of stability conditions. Proceeding of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, USA, 2002.
- [HUA06] D. Huang and S.K. Nguang. Robust H-infinity static output feedback control of fuzzy systems: An ILMI approach. IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics Part B Cybernetics, vol. 36(1), pp. 216-222, 2006.
- [ICH09] D. Ichalal. Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno. Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2009.
- [ING05] G. A. Ingram, M.A. Franchek, V. Balakrishnan, G. Surnilla. Robust SISO H_∞ controller design for nonlinear systems. Control Engineering Practice, vol. 13, pp. 1413-1423, 2005.
- [ISE07] R. Isermann. Fault-diagnosis systems: An introduction from fault detection to fault tolerance. Springer, 2007.
- [ISE97] R. Isermann and P. Balle, P. Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. Control Engineering Practice, vol. 5(5), pp. 709-719, 1997.
- [JIA94] J. Jiang. Design of reconfigurable control systems using eigenstructure assignment. International Journal of Control, vol. 59(2), pp. 395-410, 1994.
- [JIA00] G. Jiang, S. Wang and W. Song. Design of observer with integrators for linear systems with unknown input disturbances. IEE Electronics Letters, vol. 36(13), pp. 1168-1169, 2000.
- [JIA02] B. Jiang, J. L. Wang, Y.C. Soh. An adaptive technique for robust diagnosis of faults with independent effect on system outputs. Internal Journal of Control, vol. 75, pp. 792-802, 2002.
- [KAC79] T. Kaczorek. Proportional-integral observers for linear multivariable time-varying systems. Regelungstechnik, vol. 27, pp. 359-362, 1979.
- [KCH15] M. Kchaou, A. El Hajjaji and A.Toumi. Non-fragile H_∞ output feedback control design for continuous-time fuzzy systems. ISA Transactions, vol. 54, pp. 3-14, 2015.
- [KCH12] M. Kchaou, M. Souissi and A. Toumi. A new approach to non-fragile H_∞ observer-based control for discrete-time fuzzy systems. International Journal of Systems Science, vol. 43(1), pp. 9-20, 2012.
- [KEN95] J. Kennedy, R.C. Eberhart. Particle swarm optimization. In Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks IV, pp. 1942-1948, Piscataway, NJ, 1995.
- [KOE05] D. Koenig. Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems: application to state and fault estimation. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50(2), pp. 212-217, 2005.
- [KOE01] D. Koenig and S. Mammar. Design a class of reduced order unknown input nonlinear observer for fault diagnosis. In American Control Conference, Arlington, USA, 2001.
- [KRU06] A. Kruszewski. Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI. Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, France, 2006.

- [KÜH17] P. Kühne, F. Pöschke, H. Schulte. Fault estimation and fault tolerant control of the FAST NREL 5 MW reference wind turbine using proportional multi-integral observer. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2017. Doi:10.1002/acs.
- [LAB02] Y. Labit. Contribution a la commande non linéaire par des approches linéaires. Thèse de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, France, 2002.
- [LI17] X. Li, D. Lu, G. Zeng, J. Liu, W. Zhang. Integrated fault estimation and non-fragile fault-tolerant control design for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy systems with actuator fault and sensor fault. *IET Control Theory & Applications*, vol. 11(10), pp. 1542-1553, 2017.
- [LI21] A. Li, G. Duan, M. Liu and J. Fu. Fault-tolerant quantized sliding mode observers design for a class of Takagi-Sugeno fuzzy system with unmeasurable premise variable. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2021. Doi:10.1109/TFUZZ.2021.3079956.
- [LIN07] C. Lin, Q-G.Wang, T. H. Lee, Y. He. LMI Approach to analysis and control of Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay. Springer, 2007.
- [LIU98] G. Liu, R. Patton. *Eigenstructure Assignment for Control Systems Design*. John Wiley & Sons, 1998.
- [LO04] J-C. Lo, M-L. Lin. Robust H_∞ nonlinear modeling and control via uncertain fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 143, pp. 189-209, 2004.
- [LAU03] J. Lauber. Moteur à allumage commandé avec EGR : modélisation et commande non linéaires. Thèse de l'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, LAMIH, France, 2003.
- [MA98] X.J. Ma, Z. Q. Sun, Y.Y. He. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, n°1, pp. 41-50, 1998.
- [MAN05] B. Mansouri. Contribution à la synthèse de lois de commandes en poursuite de trajectoire pour les systèmes flous de type Takagi Sugeno incertains. Thèse de l'Université de Reims Champagne-Ardenne. U.F.R des Sciences Exactes et Naturelles, France, 2005.
- [MAN09] B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, A. Kruszewski, T.M. Guerra. Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T–S models. *Information Sciences*, vol. 179, pp. 446 – 457, 2009.
- [MAR03] B. Marx, D. Koenig, and D. Georges. Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers. In *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, USA, 2003.
- [MOU04] O. Mouhib. (In-) validation de modèles de systèmes incertains. Thèse. Service Automatique de Supélec, Université Paris XI U.F.R Scientifique D'orsay, France, 2004.
- [MUR97] R. MURRAY-SMITH, T. JOHANSEN. *Multiple model approaches to modeling and control*. Taylor & Francis, London, UK, 1997.
- [NGU06] S.K. Nguang, and P. Shi. Robust H_∞ output feedback control design for fuzzy dynamic systems with quadratic D-stability constraints: An LMI approach. *Information Sciences*, vol. 176(15), pp. 2161-2191, 2006.
- [NGU03] S.K. Nguang, and P. Shi. H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear systems: An LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11(3), pp. 331-340, 2003.

- [NIE05] H. Niemann and J. Stoustrup. Passive fault tolerant control of a double inverted pendulum a case study. *Control Engineering Practice*, vol. 13(8), pp.1047-1059, 2005.
- [NOU00] H. Noura, D. Sauter, F. Hamelon, D. Theilliol. Fault-tolerant control in dynamic systems: Application to a winding machine. *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 20(1), pp. 33-49, 2000.
- [OJA92] E. Oja, H. Ogawa, J. Wangviwattana. Principal component analysis by homogeneous neural networks, part I & part II: the weighted subspace criterion. *IEEE Transactions INF & Syst.*, vol. 75(3), pp. 366-381, 1992.
- [ORJ08] R. Orjuela, B. Marx, J. Ragot, et D. Maquin. State estimation for non-linear systems using a decoupled multiple model. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, vol. 4(1), pp. 59-67, 2008.
- [OUD08] M. Oudghiri. Commande multi-modèles tolérante aux défauts : Application au contrôle de la dynamique d'un véhicule automobile. Thèse de doctorat de l'université de Picardie Jules Verne, France, 2008.
- [OUD08] R. Orjuela. Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles. Thèse de doctorat de l'INPL, France, 2008.
- [PAT01] R. Patton, P. Frank and R. Clark, R. *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer, 2001.
- [PAT01] R. Patton. Fault tolerant control systems: the situation. In *IFAC Safe Process*, 1997.
- [PEA00] D. Peaucelle. Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. Thèse de l'Université Toulouse III - Paul Sabatier, LAAS-CNRS, France, 2000.
- [PON97] R. Pons and L. Travé-Massuyès. Causal Ordering for multiple mode system. 11th International Workshop on Qualitative Reasoning, Italie, 1997.
- [ROD05] M. Rodrigues. Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires. Thèse de doctorat de l'Université Henri Poincaré, France, 2005.
- [RUA21] Z. Ruan, Q. Yang, S. S. Ge and Y. Sun. Adaptive fuzzy fault tolerant control of uncertain MIMO nonlinear systems with output constraints and unknown control directions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2021. Doi:10.1109/TFUZZ.2021.3055336.
- [RUG92] W.J. Rugh. Analytical framework for gain scheduling. *IEEE Control System Magazine*, vol. 11, pp. 79-84, 1992.
- [SON95] E. D. Sontag, Y. Wang. On characterizations of the input to state stability property. *System and Control Letters*, vol. 24, pp. 351-359, 1995.
- [SOU06] H.Souley Ali, M. Darouach, M. Zasadzinski. Approche LMI pour la synthèse des filtres H_∞ non biaisés. Cifa-HAL, 2006.
- [STA01] M. Staroswiecki and A. Gehin. From control to supervision. *Annual Reviews in Control*, vol. 25, pp. 1-11, 2001.
- [TAK85] T. Takagi, M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control. *IEEE Transactions on SMC*, vol. 15, pp. 116-132, 1985.

- [TAN92] K. Tanaka et M. Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, pp. 135-156, 1992.
- [TAN94] K. Tanaka et M. Sano. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 2, pp. 119-134, 1994.
- [TAN96(a)] K. Tanaka I, T. Ikeda and H. Wang. Design of fuzzy control systems based on relaxed LMI stability conditions. Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, December 1996.
- [TAN96(b)] K. Tanaka I, T. Ikeda and H. Wang. Robust stabilisation of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stability, H_∞ control theory and LMIs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4(1), pp. 1-12, 1996.
- [TAN98] K. Tanaka I, T. Ikeda and H. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, vol. 6(2), pp. 250-265, 1998.
- [TAN01] K. Tanaka, H.O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, Inc., New York, Wiley-Interscience, 2001.
- [THE03] D. Theilliol. Contribution à l'étude et au développement des systèmes tolérants aux défauts : diagnostic et accommodation à base de modèles linéaires et au-delà. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Henri Poincaré, France, 2003.
- [TOU06] P.F. Toulotte. Attelage virtuel pour véhicules automatisés. Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, France, 2006.
- [TOU07] P.F. Toulotte, S. Delprat, T.M. Guerra, J. Boonaert. Vehicle spacing control using robust fuzzy control with pole placement in LMI region. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2007.
- [TUA01] H.D Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, Y. Yamamoto. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* vol.9, pp. 324-332, 2001.
- [VEN03] V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, K. Yin, S. N. Kavuri. A review of process fault detection and diagnosis. *Computers & Chemical Engineering*, vol. 27, pp. 293-346, 2003.
- [VIL88] A. Villemeur. *Sureté de fonctionnement des systèmes industriels. Fiabilité Facteurs humains Informatisation*. Eyrolles, 1988.
- [WEI09] G. Wei, G. Feng and Z. Wang. Robust H_∞ control for discrete time fuzzy systems with infinite-distributed delays. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, vol. 17(1), pp. 224-232, 2009.
- [WOJ78] B. Wojciechowski. Analysis and synthesis of proportional-integral observers for single input single output time-invariant continuous systems. Thèse de doctorat, Technical University of Gliwice, Pologne, 1978.
- [XIA03] L. Xiaodong, Z. Qingling. New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, vol. 39(9), pp. 1571-1582, 2003.
- [YON00] J. Yoneyama, M. Nishikawa, H. Katayama, A. Ichikawa. Output stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 111, pp. 253-266, 2000.

- [YON06] J. Yoneyama. Robust H_∞ control analysis and synthesis for Takagi–Sugeno general uncertain fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157(16), pp. 2205-2223, 2006.
- [YON07] J. Yoneyama. Robust stability and stabilization for uncertain Takagi–Sugeno fuzzy time-delay systems. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, pp. 115-134, 2007.
- [YON09] J. Yoneyama. H_∞ filtering for fuzzy systems with unmeasurable premise variables: An uncertain system approach. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 160(12), pp. 1738-1748, 2009.
- [ZAD65] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [ZHA08] Y. Zhang, J. Jiang. Bibliographical review on reconfigurable fault tolerant control systems. *Annual Reviews in Control*, vol. 32, pp. 229-252, 2008.
- [ZHA05] Y. Zhang, J. Jiang, Z. Yang and A. Hussain. Managing performance degradation in fault tolerant control systems. in *Proceedings of 16th IFAC World Congress*, 2005.
- [ZHA98] Q. Zhao and J. Jiang. Reliable state feedback control systems design against actuator failures. *Automatica*, vol. 34 (10), pp. 1267-1272, 1998.
- [ZHA09] Y. Zhao, J. Lam and H. Gao. Fault detection for fuzzy systems with intermittent measurements, *IEEE Transactions on fuzzy systems*, vol. 17(2), pp. 398-410, 2009.
- [ZHO01] K. Zhou and Z. Ren. A new controller architecture for high performance, robust, and fault-tolerant control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46 (10), pp. 1613-1618, 2001.
- [ZHO98] K. Zhou, J. C. Doyle. *Essentials of robust control*. Prentice Hall, 1998.
- [ZIN19] H. Ben Zina, M. Bouattour and M. Chaabane. Robust Takagi-Sugeno sensor fault tolerant control strategy for nonlinear system. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, vol. 16(6), pp. 177-189, 2019.

Annexes

Annexe A

Problèmes BMI et LMI

A.1. Les inégalités matricielles bilinéaires

Il n'existe pas de méthodes exactes pour résoudre les inégalités matricielles bilinéaires (BMI), mais des heuristiques sont mises en place dans différents cadres. D'une façon générale, une BMI est définie comme suit :

Définition A.1 : On appelle BMI en $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$, une contrainte de la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j P_{ij} < 0 \quad (\text{resp. } \leq 0) \quad (\text{A.1})$$

où les matrices P_i et P_{ij} appartenant à $R^{p \times p}$ sont symétriques.

Ce type de contrainte, constitue un problème d'optimisation non convexe. Il peut y avoir plusieurs solutions locales qui ne se résolvent pas par les techniques d'optimisation convexe comme celles de résolution des LMI. Pour ce genre de problèmes, des méthodes itératives, sans garantir la convergence, permettent de résoudre certaines classes de BMI.

Certaines BMI peuvent se ramener facilement à des LMI. Dans cette issue, plusieurs méthodes sont envisageables. On distingue la méthode de changement de variable judicieux et les techniques d'élimination des variables.

A.2. Les inégalités matricielles linéaires

La description d'une contrainte LMI est présentée dans la définition suivante :

Définition A.2 : étant donnée une famille de matrice symétriques P_0 et $P_i, i \in \{1, \dots, n\}$ de $R^{p \times p}$ et un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$, une LMI stricte (resp. non stricte) en $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$ s'écrit sous la forme :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i < 0 \quad (\text{resp. } \leq 0) \quad (\text{A.2})$$

L'ensemble des solutions $S = \{x \in R^n, F(x) < 0\}$ est convexe, ce qui nous amène à considérer une contrainte LMI comme une contrainte convexe.

Un problème de faisabilité LMI s'écrit :

$$\text{Trouver } x_i, i \in \{1, \dots, n\} \text{ tels que } F(x) < 0. \quad (\text{A.3})$$

Dans beaucoup de problèmes de commande, les conditions sur la stabilité ne sont pas données sous forme de LMI directement. Pour cela, elles nécessitent quelques transformations matricielles. Dans la suite, nous présentons quelques techniques de transformation matricielle utiles pour les résultats établis dans cette thèse. Différents lemmes sont aussi présentés. Ils permettent de manipuler les inégalités matricielles afin de les rendre linéaires en les inconnues quand cela est possible.

a. Congruence :

Si $P(x) > 0$ et X est régulière, alors : $X^T P(x) X > 0$

b. Complément de Schur :

Soient trois matrices $R(x) = R(x)^T$, $Q(x) = Q(x)^T$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x . les LMI suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \\ \text{ii)} \quad & R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \\ \text{iii)} \quad & Q(x) > 0, \quad R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1}S(x) > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

c. Complément de Schur généralisé :

Soient R , S , Y , X et U des matrices de taille appropriée. Les LMI suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \begin{bmatrix} Y & X & U \\ X^T & R & 0 \\ U^T & 0 & S \end{bmatrix} > 0 \\ \text{ii)} \quad & R > 0, \quad S > 0, \quad Y - X R^{-1} X^T - U S^{-1} U^T > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

d. Contrainte quadratique convexe :

La contrainte sur la norme $\|Z(x)\| < 1$ où $Z(x) \in R^{p \times q}$ est affine par rapport à la variable $x \in R^p$ est représentée par :

$$\begin{bmatrix} I_p & Z(x) \\ Z(x) & I_q \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.6})$$

Lemme A.1 :

Soit une matrice définie négative $\Omega < 0$.

Quelque soit une matrice x de dimension approprié telle que $X^T \Omega X < 0$ alors ; $\exists \alpha \in R$ telle que :

$$\alpha > 0 \text{ et } X^T \Omega X \leq -2\alpha X - \alpha^2 \Omega^{-1} \quad (\text{A.7})$$

Lemme A.2 : Soient F_0, \dots, F_p des fonctions quadratiques de la variable $\xi \in R^m$ avec :

$$F_i(\xi) = \xi^T T_i \xi + 2u_i^T \xi + v_i \quad (\text{A.8})$$

où $T_i = T_i^T \in R^p, i \in \{0, \dots, p\}$.

Alors la proposition (1) implique la proposition (2) :

$$(1) \text{ il existe } \tau_i \geq 0, i \in \{1, \dots, p\} \text{ tels que } \begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & v_i \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(2) F_0(\xi) \geq 0 \text{ pour tout } \xi \neq 0 \text{ tel que } F_i(\xi) \geq 0, i \in \{1, \dots, p\}.$$

Ce Lemme, dit Lemme de S- procédure, permet d'approcher un ensemble de contraintes quadratiques par une seule contrainte quadratique.

Lemme A.3 : Soit deux matrices A et B de dimensions appropriées, on a

$$A^T B + B^T A \leq \gamma A^T A + \gamma^{-1} B^T B \quad (\text{A.9})$$

où γ est une constante positive.

Pour réduire le conservatisme, cette propriété peut être également écrite en fonction d'une matrice définie positive $M > 0$.

$$A^T B + B^T A \leq A^T M A + B^T M^{-1} B \quad (\text{A.10})$$

Les propriétés (A.9) et (A.10) du Lemme A.3 ont l'avantage de pouvoir éliminer les termes anti-diagonaux des matrices.

Annexe B

Différentes formes de relaxations

La plupart des problèmes de stabilité et de stabilisation rencontrés concernent des quantités utilisant une somme de la forme de l'équation (B.1), ou trois sommes voire plus. Les différents résultats assurant le caractère négatif de la somme sont présentés dans la partie suivante. Dans toute cette partie on suppose que la seule connaissance disponible sur les h_{ij} est la propriété de somme convexe.

Dans le cas d'une double somme, avec γ_{ij} des matrices de taille appropriée, il s'agit de trouver des conditions suffisantes assurant :

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \gamma_{ij} < 0 \quad (\text{B.1})$$

Par conséquent, le résultat suivant est utilisé :

Lemme B.1 : Soit γ_{ij} des matrices de taille appropriée, (B.1) est vérifiée si :

$$\gamma_{ij} < 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{B.2})$$

Remarque B.1 : Notons que les conditions du Lemme B.1 ne sont que suffisantes et introduisent forcément du conservatisme.

B.1. Relaxations

Le problème fondamental qui se pose lors de la synthèse de la loi de commande est celui du conservatisme des conditions LMI. Par conséquent, dans le but d'avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, des techniques de relaxations existent pour améliorer le lemme B.1. Ces relaxations peuvent être groupées en deux catégories. La première catégorie est celle des relaxations qui n'introduisent aucune variable supplémentaire. La deuxième catégorie regroupe les autres types de relaxations. La principale différence en termes d'efficacité est que les relaxations introduisant des variables supplémentaires produisant des problèmes LMI qui sont moins conservatifs mais plus longs à résoudre. Nous présentons dans la suite les deux résultats qui offrent un meilleur compromis entre qualité de la solution et compatibilité avec les solveurs actuels.

Lemme B.2 [TAN94] : Soient γ_{ij} des matrices de taille appropriée. (B.1) est vérifiée si :

$$\gamma_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}, i < j \quad (\text{B.4})$$

avec $h_i(\cdot)h_j(\cdot) \neq 0$.

Le lemme suivant est issu de [TUA01]. Le domaine des solutions satisfaisant ses conditions inclut les domaines des solutions du lemme B.2.

Lemme B.3 [TUA01] : Soient γ_{ij} des matrices de taille appropriée. (B.1) est vérifiée si :

$$\gamma_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{2}{r-1} \gamma_{ii} + \gamma_{ij} + \gamma_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}, i \neq j \quad (\text{B.6})$$

Des relaxations plus efficaces existent en termes de taille des domaines de solutions. Néanmoins, elles nécessitent l'introduction de variables additionnelles. Leur nombre fait croître la complexité du problème à résoudre, et même pour des problèmes de taille faible on peut atteindre les limites des solveurs actuels. Le lemme suivant est issu de [XIA03]. Il représente un bon compromis entre conservatisme et complexité.

Lemme B.4 [XIA03] : Soient γ_{ij} des matrices de taille appropriée. (B.1) est vérifiée s'il existe des matrices $Q_{ij} > 0$ et $Q_{ij} = Q_{ji}^T$ telle que :

$$\gamma_{ii} + Q_{ii} < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{B.7})$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} + Q_{ij} + Q_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}, i < j \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & Q_{(r-1)r} \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{r(r-1)} & Q_{rr} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.9})$$