



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

École nationale polytechnique  
Département d'Automatique



## Projet de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'État en Automatique

# Commandes d'ordre fractionnaire par PID et mode de glissement appliquées au Twin Rotor MIMO System (TRMS)

*Réalisé par :*

M. ARAB Abdel-hakim

M. HAFDI Mohammed Habib Errahmane

*Encadré par :*

Pr. BOUKHETALA Djamel

Mr. ELBEY Abdeldjalil

*Présenté et soutenue publiquement le 4 Juillet 2023.*

### Membres du jury :

Président	Dr. CHAKIR MESSAOUD	ENP
Examineur	Dr. ACHOUR HAKIM	ENP
Promoteur	Pr. BOUKHETALA DJAMEL	ENP
Co-Promoteur	Mr. ELBEY ABDEL DJALIL	ENP





المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

École nationale polytechnique  
Département d'Automatique



## Projet de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'État en Automatique

# Commandes d'ordre fractionnaire par PID et mode de glissement appliquées au Twin Rotor MIMO System (TRMS)

*Réalisé par :*

M. ARAB Abdel-hakim

M. HAFDI Mohammed Habib Errahmane

*Encadré par :*

Pr. BOUKHETALA Djamel

Mr. ELBEY Abdeldjalil

*Présenté et soutenue publiquement le 4 Juillet 2023.*

### Membres du jury :

Président	Dr. CHAKIR MESSAOUD	ENP
Examineur	Dr. ACHOUR HAKIM	ENP
Promoteur	Pr. BOUKHETALA DJAMEL	ENP
Co-Promoteur	Mr. ELBEY ABDEL DJALIL	ENP

## ملخص

تم دراسة نظرية حساب التفاضل و التكامل الكسري على نطاق واسع على مدار سنوات عديدة. الهدف الرئيسي لهذا المشروع هو تطبيق هذه النظرية لتطوير قوانين التحكم لنظام مقلد طائرة الهليكوبتر ومقارنتها مع طرق التحكم التقليدية ذات الرتب الصحيحة. نبدأ البحث بتحليل النموذج الرياضي الغير الخطي لنظام مقلد طائرة الهليكوبتر بالتفصيل. ثم نقدم نظرة عامة على المفاهيم الرياضية المتعلقة بحساب التفاضل و التكامل الكسري وتطبيقه في التحكم في الأنظمة الديناميكية. بعد ذلك، نقوم بتصميم متحكمات PID ذات الرتب الصحيحة و ذات الرتب الكسرية لضمان استقرار النظام. قبل التطرق لأنواع أخرى من التحكم غير الخطي، و المتمثلة في التحكم المنزلق التقليدي والتحكم المنزلق ذو الرتب الكسرية. لتحسين أداء هذه المتحكمات، نستخدم خوارزمية سحابة الجزيئات. تظهر نتائج المحاكاة عموماً تفوق المتحكمات ذات الرتب الكسرية على نظرائها ذوي الرتب الصحيحة من حيث الأداء.

### كلمات مفتاحية :

حساب الكسري، مقلد الهليكوبتر، متحكم PID، متحكم FOPID، التحكم المنزلق، خوارزمية سحابة الجزيئات.

---

## Abstract

The fractional calculus theory has been extensively studied for many years. The main objective of this project is to apply this theory to design control laws for the Twin Rotor MIMO System (TRMS) and compare them with traditional integer order controls. The research starts by analyzing the mathematical model of the TRMS system in detail. Then, we provide a brief overview of the mathematical concepts related to fractional calculus and its application in controlling dynamic systems. Afterwards, we design both integer order and fractional order PID controllers to stabilize the system. Additionally, we propose two non linear control techniques : sliding mode control and fractional order sliding mode control. In order to optimize the performance of these controllers, we use a metaheuristic algorithm called Particle Swarm Optimization (PSO). Simulation results demonstrate that, in the majority of scenarios, fractional order controllers outperform their integer-order counterparts by achieving better system performance.

**Keywords :** fractional order calculus, TRMS, PID controller, FOPID controller, sliding mode control, PSO algorithm.

---

## Résumé

La théorie du calcul fractionnaire fait l'objet de multiples études depuis plusieurs années. L'objectif visé par le présent travail de ce mémoire est l'utilisation de cette théorie pour la synthèse des lois de commande pour le TRMS (Twin Rotor MIMO System), afin de comparer ses résultats avec les commandes d'ordre entier. Nous commençons par explorer le modèle mathématique analytique du système TRMS à travers une étude physique détaillée. Après, nous présentons un rappel sur les concepts mathématiques liés à la théorie du calcul fractionnaire et son utilisation en commande des systèmes dynamiques. Ensuite, des commandes de type PID d'ordre entier et d'ordre fractionnaire sont synthétisées afin de stabiliser le système. Avant de synthétiser d'autres types de commandes non linéaires, il s'agit de la commande par mode de glissement et le mode de glissement d'ordre fractionnaire. Les paramètres de l'ensemble des commandes proposées sont optimisés par un algorithme métaheuristique de type (PSO). Les résultats de simulation ont démontré la supériorité, en termes de performances, des commandes d'ordre fractionnaire, par rapport à celle d'ordre entier, dans la majorité des situations.

**Mots clés :** calcul d'ordre fractionnaire, TRMS, régulateur PID, régulateur FOPID, commande par mode glissants, algorithme PSO.

# Dédicaces

“

*Je dédie ce travail à ma mère, pour son amour inconditionnel, sa patience et son soutien indéfectible. Tu as été ma plus grande source d'inspiration et je te suis reconnaissant pour tous vos sacrifices,*

*À mon père, qui a été mon modèle de détermination et de persévérance. Tes sacrifices, ton amour inconditionnel et ton soutien constant ont été les piliers de ma réussite,*

*À mes chers frères Oussama et Zaki, ma sœur Soumia, vous êtes les piliers de ma vie et mes plus grands alliés. Chacun de vous est unique et précieux à sa manière. Que notre amour et notre lien familial perdurent pour toujours,*

*À mon binôme, Hakim nous avons parcouru un long chemin ensemble. Je te remercie d'avoir partagé cette expérience unique avec moi. Ce mémoire est le fruit de notre partenariat solide et de notre travail acharné,*

*À mes chers amis, que nos chemins continuent à se croiser et que notre amitié s'épanouisse. Vous avez été là pour moi, partageant les rires et les larmes. Je suis honoré de vous avoir à mes côtés,*

*Merci.*

”

- **Habib**

---

“

*Je réserve ce travail empreint de gratitude à l'égard de ma mère, qui incarne un amour inconditionnel, une patience sans faille et un soutien indéfectible. À toi, ma plus grande source d'inspiration, je suis profondément reconnaissant pour chacun de tes sacrifices consentis.*

*Je dédie également ce mémoire à mon père, véritable modèle de détermination et de persévérance. Tes sacrifices inestimables, ton amour inconditionnel et ton soutien constant ont été les piliers fondateurs de ma réussite.*

*À mes chers frères Abderrahmane, Mouad, Anes, à ma sœur Nesrine, et tout particulièrement à Kaouthar, vous êtes les fondations de ma vie et mes plus précieux alliés.*

*Chacun de vous détient une singularité et une valeur incommensurables.*

*À mon binôme Habib, compagnon de route tout au long de ce parcours. Je t'exprime ma gratitude d'avoir partagé cette expérience unique avec moi. Ce mémoire est l'aboutissement d'un partenariat solide et d'un travail acharné.*

*À mes chers amis, que nos chemins continuent de se croiser et que notre amitié s'épanouisse. Vous avez été présents à chaque instant, partageant les éclats de rire et les moments de tristesse. Je suis honoré de vous compter à mes côtés.*

*Je vous adresse à tous mes sincères remerciements pour votre soutien indéfectible.*

”

- **Hakim**

# Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience nécessaires à mener ce travail à son terme.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à nos encadrants **M. BOUKHE-TALA Djamel** et **M. EL BEY Abdeldjalil** pour leur précieux encadrement et leur soutien tout au long de notre parcours. Leur expertise et leur dévouement ont été essentiels à notre réussite. Nous leur sommes profondément reconnaissants pour leur contribution.

Nous souhaitons exprimer notre profonde gratitude aux membres de jury d'avoir accepté avec honneur d'examiner et de juger notre travail.

Nous tenons également à exprimer notre profonde gratitude envers tous nos enseignants de notre cursus. Leur dévouement et leur expertise ont eu un impact vital dans notre formation.

Nous souhaitons aussi remercier l'équipe pédagogique et administrative de l'ENP pour leurs efforts dans le but de nous offrir une excellente formation.

Pour finir, nous souhaitons remercier toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Table des matières

Table des figures . . . . .	
Liste des tableaux . . . . .	
Liste des sigles et acronymes . . . . .	
<b>Introduction générale . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>1 Présentation et Modélisation du système TRMS . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1 Introduction . . . . .	15
1.2 Présentation du système hélicoptère . . . . .	16
1.2.1 Les forces agissantes sur l'hélicoptère en vol . . . . .	16
1.2.2 Principe de vol de l'hélicoptère . . . . .	16
1.3 Description du simulateur . . . . .	17
1.4 Modélisation du système . . . . .	19
1.4.1 Le sous-système vertical . . . . .	19
1.4.2 Le sous-système horizontal . . . . .	22
1.4.3 Dynamiques des propulseurs . . . . .	25
1.5 Modèle d'états . . . . .	26
1.5.1 Le modèle découplé . . . . .	27
1.5.2 Paramètres du modèle . . . . .	28
1.6 Simulation en boucle ouverte . . . . .	29
1.6.1 Schéma bloc du modèle du TRMS . . . . .	29
1.6.2 Simulations en boucle ouverte . . . . .	30
1.7 Conclusion . . . . .	33
<b>2 Théorie du calcul d'ordre fractionnaire . . . . .</b>	<b>34</b>
2.1 Introduction . . . . .	35
2.2 Théorie du calcul d'ordre fractionnaire . . . . .	35
2.2.1 Pré-requis nécessaire pour le calcul fractionnaire . . . . .	35
2.2.2 Définitions de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire : . . . . .	36
2.2.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire . . . . .	38
2.2.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire : . . . . .	39
2.3 Systèmes d'ordre fractionnaire . . . . .	40
2.3.1 Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire . . . . .	40
2.3.1.1 Équation différentielle d'ordre fractionnaire . . . . .	40
2.3.2 Condition de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires . . . . .	41
2.3.2.1 Stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaires . . . . .	41



2.3.3	Simulation des systèmes d'ordre fractionnaire . . . . .	42
2.4	Systèmes non-linéaires d'ordre fractionnaire : . . . . .	45
2.5	Conclusion . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Commandes PID et FOPID optimisées . . . . .</b>	<b>46</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	La commande PID . . . . .	47
3.2.1	Optimisation par essaim de particules (PSO) . . . . .	48
3.2.2	Commande PID du TRMS . . . . .	50
3.2.3	Simulations et résultats . . . . .	51
3.2.4	Interprétation des résultats . . . . .	53
3.3	La commande PID fractionnaire (FOPID) . . . . .	54
3.3.1	Méthodes du réglage et la synthèse du régulateur FOPID . . . . .	54
3.3.2	La synthèse de la commande FOPID du TRMS . . . . .	56
3.3.3	Simulations et résultats . . . . .	56
3.3.4	Interprétation des résultats . . . . .	58
3.4	Étude comparative entre la commande PID et FOPID . . . . .	59
3.4.1	Interprétation des résultats . . . . .	62
3.5	Conclusion . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Commandes par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire optimisées . . . . .</b>	<b>64</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	La théorie de la commande par mode glissant . . . . .	65
4.2.1	Synthèse de la commande par mode glissant . . . . .	66
4.3	Commande par mode de glissement du TRMS . . . . .	68
4.3.1	Choix de la surface de glissement . . . . .	68
4.3.2	Calcul des lois de commande . . . . .	70
4.3.3	Résultats et simulations . . . . .	72
4.3.4	Interprétation des résultats . . . . .	74
4.4	Commande par mode glissant d'ordre fractionnaire du TRMS . . . . .	75
4.4.1	Calcul des lois de commande . . . . .	75
4.4.2	Résultats et simulations . . . . .	76
4.4.3	Interprétation des résultats . . . . .	78
4.5	Étude comparative entre la commande par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire . . . . .	79
4.5.1	Interprétation des résultats . . . . .	82
4.6	Conclusion . . . . .	83
	<b>Conclusion générale . . . . .</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>86</b>

# Table des figures

1.1	Forces agissant sur l'hélicoptère en vol . . . . .	16
1.2	Principe de vol de l'hélicoptère . . . . .	17
1.3	Présentation du TRMS . . . . .	17
1.4	Schéma du fonctionnement du propulseur . . . . .	18
1.5	les forces dans le plan vertical . . . . .	19
1.6	Représentation des forces dans le plan horizontal . . . . .	22
1.7	Schéma bloc des propulseurs . . . . .	26
1.8	Schéma bloc du modèle du TRMS . . . . .	29
1.9	Réponse libre du sous-système vertical . . . . .	30
1.10	Réponse libre du sous-système horizontal . . . . .	30
1.11	Réponse libre du système couplé . . . . .	31
1.12	Réponse indicielle du sous-système vertical . . . . .	31
1.13	Réponse indicielle du sous-système horizontal . . . . .	32
1.14	Réponse indicielle du système couplé . . . . .	32
2.1	Région de stabilité dans le plan ( $s^\alpha$ ) pour un système d'ordre fractionnaire.	42
2.2	tracé de Bode de l'intégrateur d'ordre fractionnaire et de ses approximations	43
2.3	tracé de Bode de dérivateur d'ordre fractionnaire et de ses approximations.	44
3.1	Schéma bloc de la commande PID en utilisant l'algorithme d'optimisation PSO . . . . .	51
3.2	Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante . . . . .	52
3.3	Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante . . . . .	52
3.4	Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante pour le système modifié . . . . .	53
3.5	Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante pour le système modifié . . . . .	53
3.6	Relation entre les deux correcteurs . . . . .	54
3.7	réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante . . . . .	57
3.8	réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante . . . . .	57
3.9	Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante pour le système modifié . . . . .	58
3.10	Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante pour le système modifié . . . . .	58
3.11	La trajectoire de référence du type signal carré pour le test de poursuite . . . . .	59
3.12	Réponse du sous-système vertical des deux différentes commandes pour une trajectoire carrée . . . . .	60

3.13	Réponse du sous-système horizontal des deux différentes commandes pour une trajectoire carrée . . . . .	60
3.14	Le signal de perturbation à appliquer aux deux sorties . . . . .	61
3.15	Réponse du sous-système horizontal pour les deux différentes commandes . . . . .	61
3.16	Réponse du sous-système horizontal pour les deux différentes commandes . . . . .	62
4.1	Convergence du système glissant . . . . .	65
4.2	Phénomène du Chattering . . . . .	67
4.3	Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante. . . . .	72
4.4	réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante. . . . .	73
4.5	Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante pour le système modifié . . . . .	73
4.6	Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante pour le système modifié . . . . .	74
4.7	réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante . . . . .	77
4.8	réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante . . . . .	77
4.9	Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante pour le système modifié . . . . .	78
4.10	Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante pour le système modifié . . . . .	78
4.11	La trajectoire de référence du type sinusoidale pour le test de poursuite . . . . .	79
4.12	Réponse du sous-système vertical des deux différentes commandes pour une poursuite . . . . .	80
4.13	Réponse du sous-système horizontal des deux différentes commandes pour une poursuite . . . . .	80
4.14	Le signal de perturbation à appliquer aux deux sorties . . . . .	81
4.15	Réponse du sous-système vertical pour les deux différentes commandes . . . . .	81
4.16	Réponse du sous-système horizontal pour les deux différentes commandes . . . . .	82

# Liste des tableaux

1.1	Paramètres physiques du système TRMS. . . . .	28
1.2	Constants des temps et gains statiques. . . . .	28
3.1	resultats pid . . . . .	51
3.2	Résultat du réglage des paramètres pour la commande FOPID . . . . .	57
3.3	Comparaison des performances des commandes PID et FOPID à travers le critère RMSE . . . . .	62
4.1	Résultat du réglage des paramètres pour la commande MG. . . . .	72
4.2	Résultat du réglage des paramètres pour la commande MG d'OF. . . . .	77
4.3	Comparaison des performances des commandes MG et MG d'OF avec RMSE	82

# Liste des sigles et acronymes

<b>TRMS</b>	<i>Twin Rotor MIMO System</i>
<b>MIMO</b>	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
<b>G-L</b>	<i>Grünwald-Letnikov</i>
<b>R-L</b>	<i>Riemann-Liouville</i>
<b>PSO</b>	<i>Particle Swarm Optimization</i>
<b>PID</b>	<i>Proportional Integral Derivative</i>
<b>FOPID</b>	<i>Fractional-Order Proportional Integral Derivative</i>
<b>RMSE</b>	<i>Root Mean Square Error</i>
<b>URSS</b>	<i>Union des républiques socialistes soviétiques</i>
<b>MG</b>	<i>Mode glissant</i>
<b>MG d'OF</b>	<i>Mode glissant d'ordre fractionnaire</i>

# Introduction générale

Grâce aux progrès technologiques dans tous les domaines, en particulier l'aéronautique, ont donné un élan important à l'automatique. De nombreux travaux de recherche ont été réalisés pour développer des lois de commande des différents systèmes, où l'application de certaines de ces méthodes aux avions et aux hélicoptères a démontré son efficacité.

Toutefois, avec la complexité croissante des systèmes à contrôler, les lois de commande deviennent elles-mêmes complexes et parfois difficiles à mettre en pratique. C'est pourquoi des prototypes ou simulateurs ont été développés pour tester de nouvelles lois de commande qui ne peuvent pas être directement appliquées aux systèmes réels. Le simulateur de vol d'hélicoptère TRMS (Twin Rotor MIMO System) est l'un de ces prototypes. Il s'agit d'un système multivariable avec deux entrées et deux sorties, caractérisé par une forte non-linéarité, un couplage important et une dynamique instable en boucle ouverte.

Au cours des dernières décennies, d'importants travaux de recherche ont été menés pour améliorer les performances des hélicoptères. Ces efforts ont conduit à l'émergence de nombreuses approches et techniques de commande, allant de la commande PID aux techniques les plus élaborées telles que la commande par mode de glissement.

La commande PID est une technique couramment utilisée dans le domaine de la régulation des systèmes dynamiques. Elle se caractérise par sa simplicité et son efficacité, basée sur trois actions principales : la proportionnelle, l'intégrale et la dérivée. Ces éléments agissent conjointement sur les trois caractéristiques : la réduction des oscillations indésirables, la régulation de l'erreur statique et l'amélioration de la stabilité.

La commande par mode glissant a aussi fait ses preuves dans les études théoriques et pratiques [1], [2] en termes d'efficacité. Cette commande non-linéaire, caractérisée par sa robustesse, a pour objectif de forcer la dynamique du système à suivre une trajectoire spécifique, définie par une hypersurface de glissement. Le principe de base de la commande de mode glissant est de commuter entre différentes lois de commande, généralement basées sur des variables d'état du système, de manière à maintenir l'état du système sur l'hypersurface de glissement. Lorsque le système se trouve sur cette hypersurface de glissement, il est en régime glissant, ce qui signifie que sa dynamique est contrainte à suivre celle définie par l'équation de l'hypersurface. En régime glissant, le système devient insensible aux erreurs paramétriques, tant que les conditions du régime glissant sont satisfaites. Malgré les différents avantages qu'elle présente cette commande, en termes de stabilité et robustesse face aux incertitudes des systèmes, sauf qu'elle a un inconvénient majeur, qui est connu par le phénomène de chattering, causé principalement par la nature discontinue de cette commande, il se manifeste par des oscillations rapides et non souhaitées dans les valeurs

de commande, ce qui peut entraîner une usure accrue des actionneurs et des vibrations indésirables. De nombreuses solutions ont été suggérées dans les travaux existants. Dans [3], pour pallier ce problème, les auteurs ont proposé une approche qui consiste à substituer la fonction de commutation de la commande par une fonction de saturation.

L'ensemble des lois de commande développées contenaient des dérivations et des intégrations d'ordre entier. De nombreuses recherches théoriques ont été réalisées depuis le siècle par Liouville, Riemann et Holmegren afin de généraliser cet ordre de dérivation et intégration à un ordre non entier, ce qu'on appelle l'ordre fractionnaire. Avant d'intégrer cette théorie de calcul fractionnaire pour l'expansion des commandes d'ordre entier à la commande d'ordre fractionnaire. Le calcul fractionnaire apporte une contribution significative à la théorie de commande. D'ailleurs, il permet de modéliser avec précision les comportements fractionnaires présents dans les systèmes réels, qui ne peuvent être décrits par des modèles d'ordre entier. De plus, les contrôleurs basés sur le calcul fractionnaire offrent une plus grande flexibilité dans la synthèse des commandes par rapport aux régulateurs d'ordre entier et offrent un niveau de robustesse élevé.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la modélisation et à la commande du TRMS en utilisant deux techniques principales : la commande PID et la commande par mode glissant. Nous nous concentrons sur l'extension de ces approches pour prendre en compte à la fois les deux commandes d'ordre entier et d'ordre fractionnaire.

Ce rapport se compose de quatre chapitres en plus de l'introduction et de la conclusion générale. Le premier chapitre présente un descriptif détaillé sur le système du TRMS, son principe de fonctionnement, ainsi que sa modélisation analytique, suivie finalement par quelques simulations en boucle ouverte. Le deuxième chapitre est consacré à la théorie de calcul fractionnaire, en étudiant les différentes approches et fondamentaux du calcul fractionnaire, comme un outil principal dans les deux derniers chapitres, où on va présenter respectivement des résultats comparatifs entre l'ordre entier et l'ordre fractionnaire des deux synthèses des commandes PID et mode de glissement en utilisant les algorithmes d'optimisation méthaheuristique.

# Chapitre 1

## Présentation et Modélisation du système TRMS



### 1.1 Introduction

Les processus impliqués dans les systèmes aéronautiques sont tellement complexes et coûteux qu'il devient impossible d'implémenter directement des commandes sur ces systèmes. Cependant, grâce au développement de l'électronique de puissance, il est désormais possible de concevoir des systèmes miniatures. Plusieurs prototypes sont ainsi utilisés pour tester les commandes avant de les transférer sur le système réel. Un exemple de tel prototype est le simulateur d'hélicoptère (TRMS).

Pour comprendre le comportement dynamique d'un système, il est essentiel de rechercher toutes les relations entre les entrées et les sorties du système. Ces relations forment un modèle mathématique qui exprime la dynamique du système en termes d'équations différentielles ordinaires, d'équations aux dérivées partielles ou d'équations aux différences.

Toutefois, en automatique, on se trouve souvent confronté à un manque d'informations sur le système, et dans ce cas on peut simplement reproduire son comportement d'entrée/sortie à partir de données expérimentales, considérant ainsi le système comme une "boîte noire". Ce processus est appelé "identification".

L'objectif est toujours d'avoir un modèle qui puisse prédire de manière précise le comportement du système sous différentes excitations (commandes, perturbations, etc.). Pour cela, un modèle détaillé est préférable, car il est plus fidèle au système. Cependant, un tel modèle complexifie l'étude et la synthèse des lois de commande. Ainsi, il est souvent nécessaire de faire des compromis en utilisant des hypothèses simplificatrices afin de répondre aux contraintes pratiques.

Dans ce chapitre, nous commencerons par une initiation au système d'hélicoptère et une brève description du principe du vol des hélicoptères, avec une présentation du simulateur. Ensuite, nous allons présenter une modélisation détaillée du TRMS, ainsi que les modèles découplés, et on terminera par quelques simulations en boucle ouverte.

## 1.2 Présentation du système hélicoptère

### 1.2.1 Les forces agissantes sur l'hélicoptère en vol

Dans le but de faciliter l'explication du vol de l'hélicoptère, nous faisons l'hypothèse que les pales du rotor principal sont disposées en forme de disque, avec l'axe passant par le centre de gravité de l'hélicoptère.

En vol, l'hélicoptère est soumis à trois forces (Voir figure (1.1)) :

- Le poids, appliqué au centre de gravité.
- La portance générée par les deux rotors (la résultante de la portance horizontale et la portance verticale).
- La traînée générale de l'appareil provoquée en vol de translation, par résistance de l'air sur la structure.

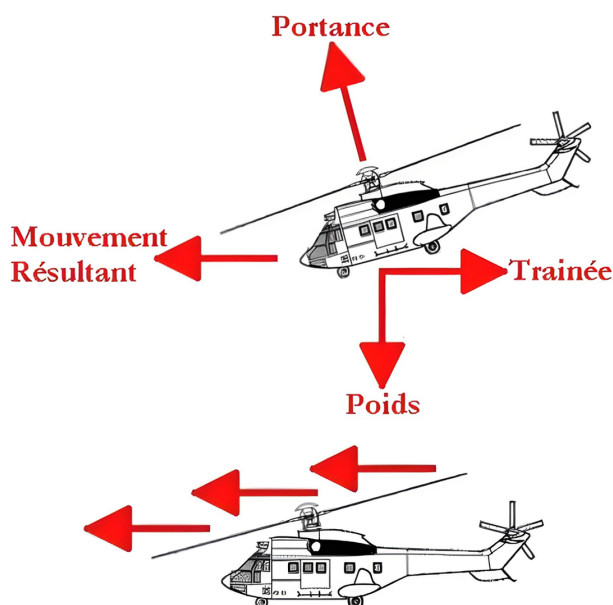


FIG. 1.1 : Forces agissant sur l'hélicoptère en vol

Afin d'assurer l'équilibre de l'hélicoptère, il est indispensable que la somme de la force de poids et de la force de traînée soit équivalente et opposée à la force générée par le rotor. Cette annulation de la résultante des forces permet la stabilisation du vol de l'hélicoptère. Ainsi, lorsque l'hélicoptère est immobile, il le reste, et s'il est en mouvement, il suit une trajectoire rectiligne. Les variations dans l'intensité et la direction de la force de portance produite par le rotor sont à l'origine des différents mouvements de l'hélicoptère.

### 1.2.2 Principe de vol de l'hélicoptère

Le principe de vol d'un hélicoptère repose sur la combinaison de deux forces aérodynamiques principales : la portance et la propulsion.

La portance est générée par les pales du rotor principal qui créent une différence de pression entre le dessus et le dessous de chaque pale. Cette différence de pression crée une force ascendante qui soulève l'hélicoptère dans les airs. Pour contrôler cette force, l'angle d'attaque des pales du rotor peut être modifié en temps réel grâce aux commandes de pas collectif (portance verticale) et de pas cyclique (portance horizontale).

La propulsion, quant à elle, est générée par le rotor de queue (secondaire), qui crée une poussée latérale qui permet de contrôler la direction de l'hélicoptère. En inclinant le rotor de queue, le pilote peut également contrôler la rotation de l'hélicoptère sur son axe vertical.

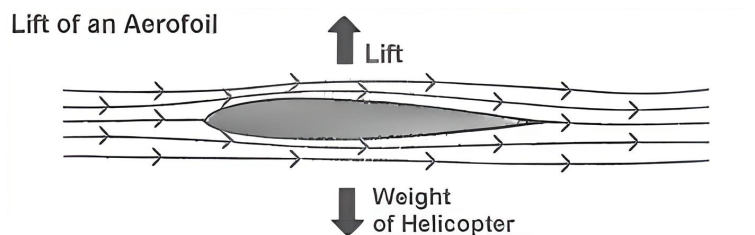


FIG. 1.2 : Principe de vol de l'hélicoptère

En résumé, l'hélicoptère est capable de voler en maintenant une sustentation constante grâce à la portance générée par le rotor principal, tandis que la propulsion générée par le rotor de queue permet de contrôler sa direction et sa rotation.

### 1.3 Description du simulateur

Le **Twin Rotor MIMO System (TRMS)** est un instrument de laboratoire développé par Feedback Instruments Ltd, conçu dans le but d'expérimenter de nouvelles lois de commandes. Son comportement est similaire à celui d'un hélicoptère [4]. Du point de vue commande c'est un exemple de système présentant une non-linéarité d'ordre supérieur fortement couplée.

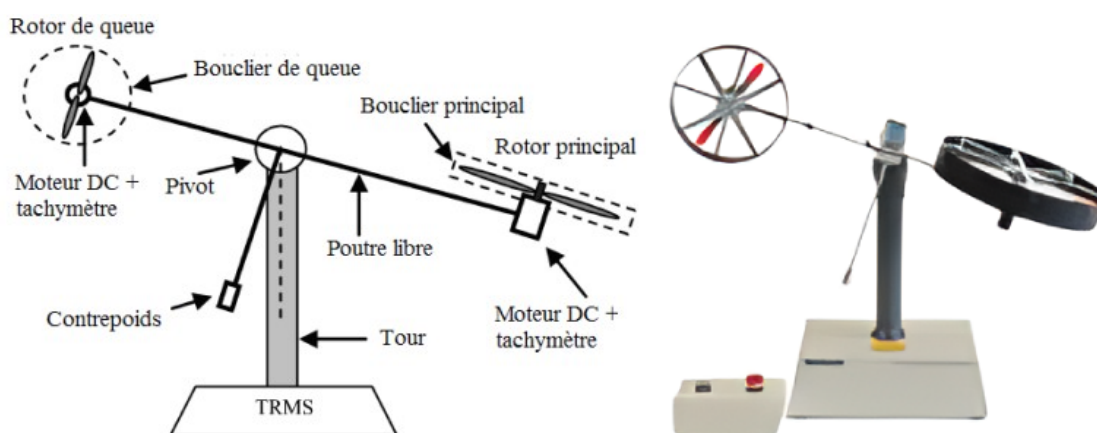


FIG. 1.3 : Présentation du TRMS

Le TRMS est formé de (Voir figure (1.3)) :

- **La base** : c'est l'élément sur lequel s'appuie le système, elle contient des circuits électroniques pour l'adaptation et le filtrage des signaux d'entrée et de sortie.
- **Une tour** : pour maintenir la poutre.
- **Une poutre** : peut pivoter sur sa base librement dans le plan horizontal et vertical.
- **Deux propulseurs (principal et secondaire)** : fixés sur les extrémités de la poutre, chacun formé d'une hélice, un moteur à courant continu et un bouclier pour la sécurité.
- **Un contrepoids** : fixé au milieu de la poutre pour diminuer les vibrations.
- **Un boîtier marche/arrêt** des moteurs.

Les valeurs mesurables du TRMS (représentant les sorties du système) consistent en l'angle horizontal  $\alpha_h$  appelé azimut produit principalement par la force propulsive du rotor de secondaire, et l'angle vertical  $\alpha_v$  appelé élévation produit principalement par la force propulsive du rotor principal. L'articulation sphérique permet à la poutre de pivoter simultanément dans le plan horizontal et vertical, c'est donc un système à deux degrés de liberté. Les commandes du système (c'est-à-dire les entrées du système) sont les alimentations en tension des moteurs  $u_v$  et  $u_h$ , elles varient dans une plage de  $[-2,5, +2,5]$ V.

Concernant la commande des moteurs, on utilise des moteurs à courant continu qui ont l'avantage que leur vitesse de rotation est proportionnelle à la tension qui leur est appliquée. Le mécanisme utilisé est un hacheur, qui est un convertisseur statique alimenté par une source de tension continue produisant aux bornes du moteur une tension de valeur moyenne réglable. Ce hacheur est commandé par des trains d'impulsions (MLI) qui sont générés à partir du signal de commande provenant du PC à travers la carte d'acquisition (Voir figure (1.4)).

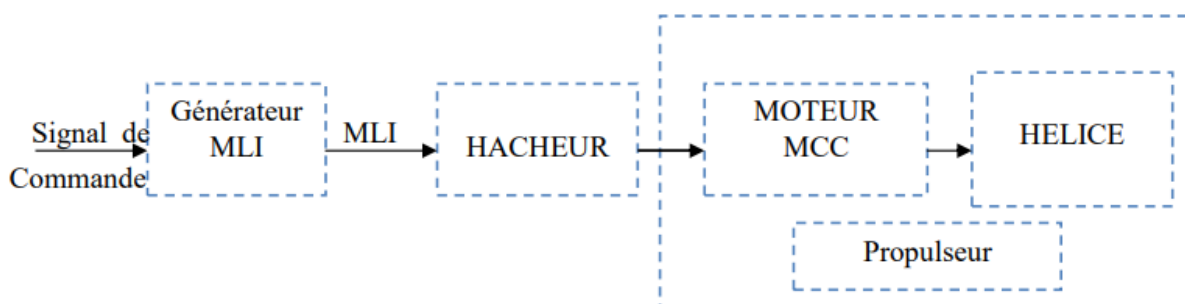


FIG. 1.4 : Schéma du fonctionnement du propulseur

## 1.4 Modélisation du système

Pour obtenir le modèle mathématique analytique du TRMS, nous allons le diviser en deux sous-systèmes en cascade : le premier décrivant la dynamique du système, et le second représentant le circuit d'interface avec les actionneurs.

Commençant par l'étude physique du système, en utilisant la deuxième loi de Newton sur le mouvement, nous pouvons établir des équations différentielles qui décrivent avec précision le comportement de notre système [5][6].

Puisque le système possède deux degrés de liberté, nous considérerons l'étude du mouvement dans chaque plan individuellement.

### 1.4.1 Le sous-système vertical

Initialement, nous considérons la rotation de la tige dans le plan vertical, c'est-à-dire autour de l'axe horizontal. La majorité des dynamiques dans le plan vertical sont causées par le rotor principal et la force de gravité qui tire les différentes parties de la configuration vers le bas. De plus, une force centrifuge est créée lorsque la poutre se déplace verticalement, accompagnée d'une force de friction dans la partie articulée. La figure suivante (1.5) illustre toutes les forces qui sont appliquées dans le plan vertical.

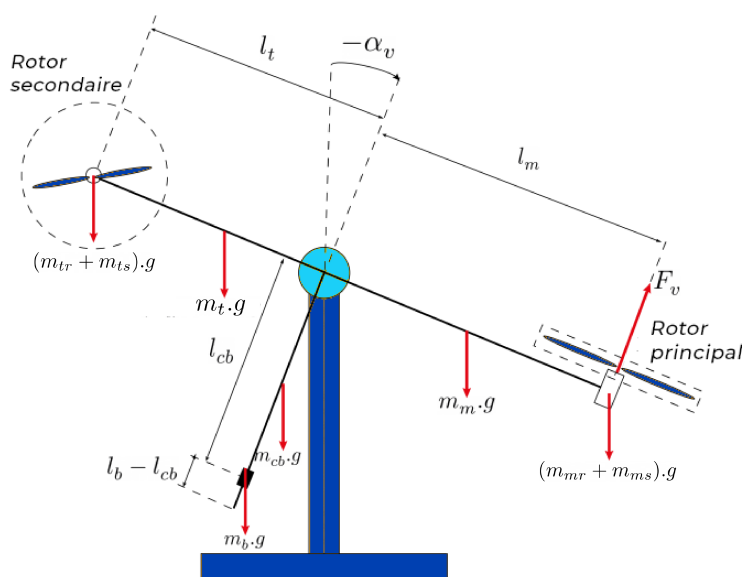


FIG. 1.5 : les forces dans le plan vertical

En appliquant la seconde loi de Newton, on obtient :

$$M_v = J_v \frac{d^2 \alpha_v}{dt^2} \quad (1.1)$$

Avec :

$$\begin{cases} M_v = \sum_{i=1}^4 M_{vi} \\ J_v = \sum_{i=1}^8 J_{vi} \end{cases} \quad (1.2)$$

Où :

$M_v$  : Moment de la résultante des forces dans le plan vertical.

$J_v$  : La somme des moments d'inertie par rapport à l'axe horizontal.

$\alpha_v$  : L'angle d'élévation de la poutre.

**Moment de la gravitation  $M_{v1}$  :**

D'après la figure (1.5) qui montre l'ensemble des forces du sous-système d'élévation, le moment gravitationnel résultant est la somme des moments de chaque force de gravité.

$$M_{v1} = g \left( \left[ \left( \frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t - \left( \frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m \right] \cos \alpha_v - \left( \frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right) \sin \alpha_v \right) \quad (1.3)$$

Qui peut être écrite sous la forme :

$$M_{v1} = g[(A - B)\cos\alpha_v - C\sin\alpha_v] \quad (1.4)$$

Avec :

$$\begin{cases} A = \left( \frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t \\ B = \left( \frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m \\ C = \left( \frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb} \right) \end{cases}$$

Où :

$m_{mv}$  : La masse du rotor principal.

$m_m$  : La masse de la partie principale de la poutre.

$m_{tr}$  : La masse du rotor secondaire.

$m_t$  : La masse de la partie secondaire de la poutre.

$m_{cb}$  : La masse du contrepoids.

$m_b$  : La masse de la poutre du contrepoids.

$m_{ms}$  : La masse de l'hélice principale.

$m_{ts}$  : La masse de l'hélice secondaire.

$l_m$  : La longueur de la partie principale de la poutre.

$l_t$  : La longueur de la partie secondaire de la poutre.

$l_b$  : La longueur de la poutre du contrepoids.

$l_{cb}$  : La distance entre le contrepoids et l'articulation.

$g$  : L'accélération gravitationnelle.

**Moment de la force aérodynamique  $M_{v2}$  :**

D'après toujours la figure (1.5) qui montre la direction de la force aérodynamique de portance dans le plan vertical. Cette force dépend de la vitesse angulaire du rotor principal dont la relation est déterminée expérimentalement, alors le moment de la force aérodynamique comme suit :

$$M_{v2} = l_m F_v(\omega_m) \quad (1.5)$$

Où :

$\omega_m$  : La vitesse angulaire du rotor principal.

$F_v(\omega_m)$  : la dépendance de la force aérodynamique de la vitesse angulaire du rotor principal.

**Moment de la force centrifuge  $M_{v3}$  :**

La masse de la poutre lorsqu'elle effectue un mouvement de rotation dans le plan horizontal génère une force orthogonale à la direction de rotation. Cette force est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de la poutre dans le plan horizontal, son expression mathématique est :

$$M_{v3} = -\Omega_h^2 \left[ \left( \frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t^2 + \left( \frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m^2 + \left( \frac{m_b}{2} l_b^2 + m_{cb} l_{cb}^2 \right) \right] \sin\alpha_v \cos\alpha_v \quad (1.6)$$

Avec :

$\Omega_h = \frac{d\alpha_h}{dt}$  : Vitesse angulaire de la poutre autour de l'axe vertical et  $\alpha_h$  est l'angle d'azimut de la poutre.

On peut écrire (1.6) sous forme compacte :

$$M_{v3} = -\Omega_h^2 (A l_t + B l_m + C^*) \sin\alpha_v \cos\alpha_v \quad (1.7)$$

**Moment de la force de friction  $M_{v4}$  :**

On considère le frottement de type visqueux, en d'autres termes, il est proportionnel à la vitesse de rotation du plan vertical.

La forme générale du moment de la force de frottement est :

$$M_{v4} = -\Omega_v k_v \quad (1.8)$$

Avec :

$\Omega_v = \frac{d\alpha_v}{dt}$  : Vitesse angulaire de la poutre autour de l'axe horizontal.

$k_v$  : Constante de friction à déterminer expérimentalement.

**Moment d'inertie  $J_v$  :**

On peut d'après la figure (1.5) déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{v_1} = m_{mr} l_m^2 \\ J_{v_2} = m_m \frac{l_m^2}{3} \\ J_{v_3} = m_{cb} l_{cb}^2 \\ J_{v_4} = m_b \frac{l_b^2}{3} \\ J_{v_5} = m_{tr} l_t^2 \\ J_{v_6} = m_t \frac{l_t^2}{3} \\ J_{v_7} = m_{ms} l_m^2 + \frac{m_{ms}}{2} r_{ms}^2 \\ J_{v_8} = m_{ts} l_t^2 + m_{ts} r_{ts}^2 \end{array} \right.$$

Où :

$r_{ms}$  : Le rayon de l'hélice principale.

$r_{ts}$  : Le rayon de l'hélice secondaire.

### 1.4.2 Le sous-système horizontal

De manière similaire au plan vertical, le rotor secondaire est responsable de la plupart des dynamiques horizontales. Étant donné que la gravité n'a pas d'effet dans ce plan, la force aérodynamique est la force majeure qui provoque le mouvement. De plus, lors des mouvements, des frottements existent toujours dans les joints et doivent être pris en compte comme montré la figure (1.6).

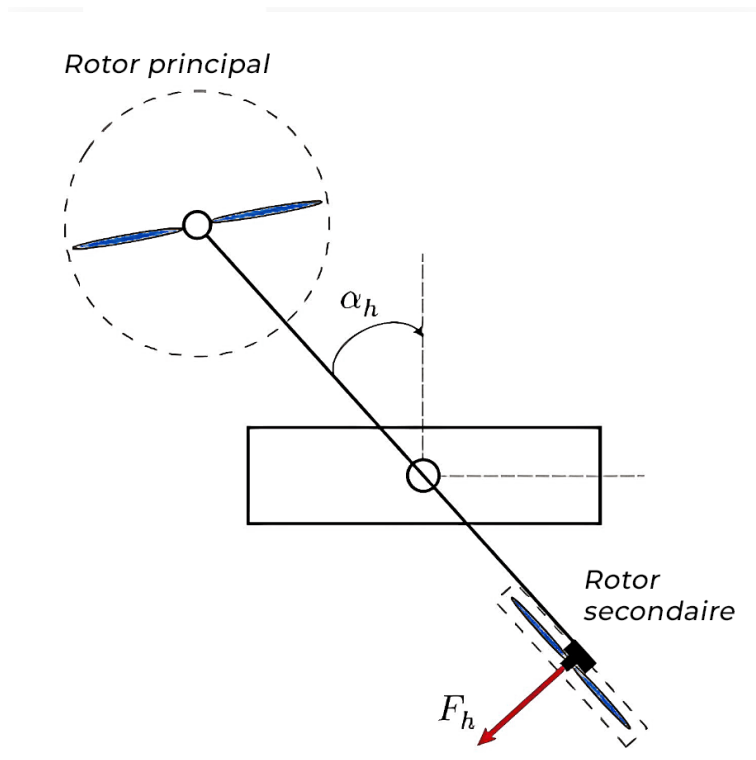


FIG. 1.6 : Représentation des forces dans le plan horizontal



En appliquant toujours la seconde loi de Newton, on obtient :

$$M_h = J_h \frac{d^2 \alpha_h}{dt^2} \quad (1.9)$$

Avec :

$$\begin{cases} M_h = \sum_{i=1}^2 M_{hi} \\ J_h = \sum_{i=1}^8 J_{hi} \end{cases} \quad (1.10)$$

Où :

$M_h$  : Moment de la résultante des forces dans le plan horizontal.

$J_v$  : La somme des moments d'inertie par rapport à l'axe vertical.

$\alpha_v$  : L'angle d'azimut de la poutre.

### Moment de la force aérodynamique $M_{h1}$ :

D'après la figure (1.6) qui montre la direction de la force aérodynamique, cette force dépend de la vitesse angulaire du rotor secondaire, alors le moment de la force aérodynamique est comme suit :

$$M_{v2} = l_t F_h(\omega_t) \cos \alpha_v \quad (1.11)$$

Où :

$\omega_t$  : La vitesse angulaire du rotor secondaire.

$F_h(\omega_t)$  : la dépendance de la force aérodynamique de la vitesse angulaire du rotor secondaire.

### Moment de la force de friction $M_{h2}$ :

On considère toujours le frottement de type visqueux, donc la forme générale du moment de la force de frottement est :

$$M_{h2} = -\Omega_h k_h \quad (1.12)$$

avec :

$\Omega_h = \frac{d\alpha_h}{dt}$  : Vitesse angulaire de la poutre autour de l'axe vertical.

$k_h$  : Constante de friction à déterminer expérimentalement.

### Moment d'inertie $J_h$ :

Les moments d'inertie par rapport à l'axe vertical sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{h_1} = \frac{m_m}{3}(l_m \cos \alpha_v)^2 \\ J_{h_2} = \frac{m_t}{3}(l_t \cos \alpha_v)^2 \\ J_{h_3} = \frac{m_b}{3}(l_b \sin \alpha_v)^2 \\ J_{h_4} = m_{tr}(l_t \cos \alpha_v)^2 \\ J_{h_5} = m_{mr}(l_m \cos \alpha_v)^2 \\ J_{h_6} = m_{cb}(l_{cb} \sin \alpha_v)^2 \\ J_{h_7} = m_{ms}r_{ms}^2 + m_{ms}(l_m \cos \alpha_v)^2 \\ J_{h_8} = \frac{m_{ts}}{2}r_{ts}^2 + m_{ts}(l_t \cos \alpha_v)^2 \end{array} \right.$$

Ou sous forme compacte :

$$J_h(\alpha_v) = D \cos^2 \alpha_v + E \sin^2 \alpha_v + F \quad (1.13)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \left( \frac{m_m}{3} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m^2 + \left( \frac{m_t}{3} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t^2 \\ E = \frac{m_b}{3} l_b^2 + m_{cb} l_{cb}^2 \\ F = m_{ms} r_{ms}^2 + \frac{m_{ts}}{2} r_{ts}^2 \end{array} \right.$$

### Effet gyroscopique :

Lorsqu'une hélice est mise en rotation autour d'un axe, cela engendre plusieurs phénomènes tels que l'effet gyroscopique. De plus, un objet en rotation possède un moment cinétique proportionnel à son inertie et sa vitesse angulaire, ce qui est exprimé par la formule  $\vec{S} = I \cdot \vec{\omega}$ . Le théorème de Koenig lie le moment cinétique et la somme des moments comme suit :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \sum_i^n \vec{M}(\vec{F}_i)$$

Dans un hélicoptère, l'hélice (masse) tourne autour d'un axe principal, tout comme dans un gyroscope. En cas de perturbation du système, il tentera de la compenser en entamant une rotation autour d'un axe horizontal parallèle à la force appliquée. Ainsi, toute force appliquée en dehors du centre de masse du système provoquera un mouvement résultant perpendiculaire. Les relations suivantes en découlent :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_v = J_v \Omega_v - J_{tr} \omega_t \\ S_h = J_h(\alpha_v) \Omega_h - J_{mr} \omega_m \alpha_v \end{array} \right.$$

Avec :

$J_{tr} \omega_t$  : est le moment cinétique généré par le rotor secondaire pour contrer l'effet gyroscopique.

pique dû à la rotation de l'hélice principale.

$J_{mr}\omega_m\alpha_v$  : est le moment cinétique généré par le rotor principal pour contrer l'effet gyroscopique dû à la rotation de l'hélice du rotor secondaire.

En remplaçant avec tous les résultats trouvés, on peut résumer la dynamique de notre système comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_v}{dt} = l_m F_v(\omega_m) - \Omega_h^2(A + B + C)\sin\alpha_v\cos\alpha_v - \Omega_v k_v \\ \quad + g[(A - B)\cos\alpha_v - C\sin\alpha_v] \\ \Omega_v = \frac{d\alpha_v}{dt} \\ S_v = J_v\Omega_v - J_{tr}\omega_t \\ \frac{dS_h}{dt} = l_t F_h(w_t)\cos(\alpha_v) - \Omega_h K_h \\ \Omega_h = \frac{d\alpha_h}{dt} \\ S_h = J_h(\alpha_v)\Omega_h - J_{mr}\omega_m\alpha_v \end{array} \right. \quad (1.14)$$

### 1.4.3 Dynamiques des propulseurs

Le Twin Rotor MIMO System (TRMS) est équipé de deux propulseurs, chacun composé d'un moteur à courant continu et d'une hélice. Bien que les deux moteurs soient identiques, ils ont des charges mécaniques différentes.

On considère le modèle simple d'une MCC avec une charge extérieure :

$$I\dot{\omega} = \frac{k_i}{R}(u - k_b\omega) - T_L$$

Avec :

$\omega$  : Vitesse angulaire du moteur (ras/s).

$u$  : Tension de commande (V).

$I$  : Moment d'inertie.

$R$  : Résistance de l'armature.

$k_b$  : Constante de la FEM.

$k_i$  : Constante du couple.

$T_L$  : Couple résistant généré par la charge.

La charge  $T_L$  englobe les frottements mécaniques et aérodynamiques qui résultent de la rotation des hélices. Puisque ces frottements sont complexes à modéliser, une nouvelle variable  $u_{vv}$  pour l'axe vertical et  $u_{hh}$  pour l'axe horizontal a été introduite, et deux fonctions non linéaires ont été déterminées expérimentalement pour caractériser leur comportement. De ce fait, les sous-systèmes propulseurs deviennent des systèmes de premier

ordre avec une fonction de sortie non linéaire comme suit [5] :

$$\begin{cases} \frac{du_{vv}}{dt} = \frac{1}{T_{mr}}(-u_{vv} + k_{mr}u_v) \\ \frac{du_{hh}}{dt} = \frac{1}{T_{tr}}(-u_{hh} + k_{tr}u_h) \end{cases} \quad (1.15)$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega_m = p_v(u_{vv}) \\ \omega_t = p_h(u_{hh}) \end{cases}$$

Où :

$T_{mr}$  : La constante du temps du moteur principal.

$T_{tr}$  : La constante du temps du moteur secondaire.

$k_{mr}$  : Le gain statique du moteur principal.

$k_{tr}$  : Le gain statique du moteur secondaire.

On peut illustrer tout ça dans la figure suivante(1.7)

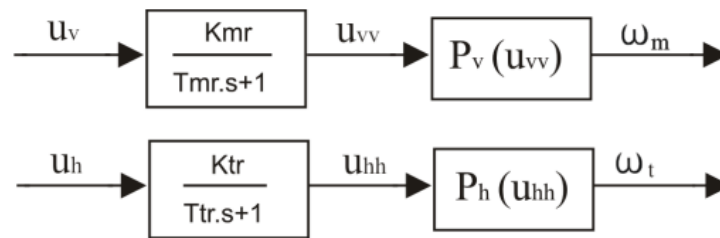


FIG. 1.7 : Schéma bloc des propulseurs

## 1.5 Modèle d'états

Un modèle d'espace d'état est un modèle qui inclut les commandes, les mesures et toute variable interne qui a une influence significative sur la dynamique du système, la stabilité, la commandabilité et l'observabilité. Dans notre cas, un bon choix de variables est le suivant :

- Vecteur d'entrée :  $U = [u_v \ u_h]^T$
- Vecteur d'état :  $X = [\alpha_v \ S_v \ u_{vv} \ \alpha_h \ S_h \ u_{hh}]^T$
- Vecteur de sortie :  $Y = [\alpha_v \ \alpha_h]^T$

Maintenant que nous avons défini nos variables et d'après (1.14) et (1.15) nous disposons de toutes les expressions et équations nécessaires pour créer le modèle d'espace d'états de

notre TRMS définit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{x_2 + J_{tr}P_h(x_6)}{J_v} \\ \dot{x}_2 = l_m F_v(P_v(x_3)) - k_v \left[ \frac{x_2 + J_{tr}P_h(x_6)}{J_v} \right] + g[(A - B)\cos(x_1) - C\sin(x_1)] \\ \quad - \frac{1}{2} \left[ \frac{x_5 + J_{mr}P_v(x_3)\cos(x_1)}{J_h(x_1)} \right]^2 (A + B + C)\sin(2x_1) \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{T_{mr}}(-x_3 + k_{mr}u_v) \\ \dot{x}_4 = \frac{x_5 + J_{mr}P_v(x_3)\cos(x_1)}{J_h(x_1)} \\ \dot{x}_5 = l_t F_h(P_h(x_6))\cos(x_1) - k_h \left[ \frac{x_5 + J_{mr}P_v(x_3)\cos(x_1)}{J_h(x_1)} \right] \\ \dot{x}_6 = \frac{1}{T_{tr}}(-x_6 + k_{tr}u_h) \end{array} \right. \quad (1.16)$$

### 1.5.1 Le modèle découplé

Lorsqu'on limite le mouvement de la tige à un seul plan, on obtient deux sous-modèles distincts : l'un vertical et l'autre horizontal, chacun possédant un degré de liberté.

#### A. Le modèle vertical

Ce modèle a été développé en se basant sur le modèle couplé, en fixant l'angle d'azimut  $\alpha_h$  et en posant  $u_h = 0$ , on a comme entrée  $U = u_v$ , la sortie  $Y = \alpha_v$  et comme vecteur d'état :  $X = [\alpha_v S_v u_{vv}]^T$  La représentation d'état est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{J_v} \\ \dot{x}_2 = l_m F_v(P_v(x_3)) - k_v \frac{x_2}{J_v} + g[(A - B)\cos(x_1) - C\sin(x_1)] \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{T_{mr}}(-x_3 + k_{mr}u_v) \end{array} \right. \quad (1.17)$$

#### B. Le modèle horizontal

De la même façon que pour le modèle vertical on pose  $\alpha_v = \alpha_{v0}$  et  $u_v = 0$ , on a comme entrée  $U = u_h$ , la sortie  $Y = \alpha_h$  et comme vecteur d'état :  $X = [\alpha_h S_h u_{hh}]^T$  La représentation d'état est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{J_h(\alpha_{v0})} \\ \dot{x}_2 = l_t F_h(P_h(x_3)) - k_h x_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{T_{tr}}(-x_3 + k_{tr}u_h) \end{array} \right. \quad (1.18)$$

## 1.5.2 Paramètres du modèle

Afin de simuler le modèle trouvé, on doit d'abord déterminer les paramètres du modèle.

- **Paramètres physiques :**

Le tableau suivant (1.1) donne toutes les valeurs des paramètres physiques du système :

TAB. 1.1 : Paramètres physiques du système TRMS.

Paramètre	Valeur numérique
$m_{tr}$	0.206
$m_{mr}$	0.228
$m_{cb}$	0.068
$m_t$	0.0155
$m_m$	0.0145
$m_b$	0.022
$m_{ts}$	0.165
$m_{ms}$	0.225
$J_v$	0.0055448
$J_{tr}$	$2.65 \cdot 10^{-5}$
$J_{mr}$	$1.6543 \cdot 10^{-5}$
$l_t$	0.25
$l_m$	0.24
$l_b$	0.26
$l_{cb}$	0.13
$r_{ms}$	0.155
$r_{ts}$	0.10

- **Les constants des temps et les gains statiques**

Il existe quelques paramètres physiques qui sont déterminés par une identification paramétrique, le tableau ci-dessous (1.2) illustre les valeurs de ces paramètres :

TAB. 1.2 : Constants des temps et gains statiques.

Paramètre	Valeur numérique
$k_v$	0.00545371
$k_h$	0.0095
$T_{mr}$	1.432
$T_{tr}$	0.3842
$k_{mr}$	1
$k_{tr}$	1
$S_f$	$8.4332 \cdot 10^{-4}$

### Les caractéristiques non linéaires

Une approche intéressante pour traiter les fonctions non linéaires de notre représentation a été introduite dans [7], où il a été prouvé que les polynômes approximatifs donnent

des résultats valides. Donc on a pris comme caractéristiques non linéaires des moteurs, les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} \omega_v = P_v(u_{vv}) = 90.99u_{vv}^6 + 599.73u_{vv}^5 - 129.26u_{vv}^4 - 1238.64u_{vv}^3 + 63.45u_{vv}^2 + 1283.41u_{vv} \\ \omega_h = P_h(u_{hh}) = 2020u_{hh}^5 - 194.69u_{hh}^4 - 4283.15u_{hh}^3 + 262.27u_{hh}^2 + 3796.83u_{hh} \end{cases} \quad (1.19)$$

Et comme fonctions aérodynamiques les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} F_v(\omega_m) = -3.48 \cdot 10^{-12} \omega_m^5 + 1.09 \cdot 10^{-9} \omega_m^4 + 4.123 \cdot 10^{-6} \omega_m^3 - 1.632 \cdot 10^{-4} \omega_m^2 + 9.544 \cdot 10^{-2} \omega_m \\ F_h(\omega_t) = -3 \cdot 10^{-14} \omega_t^5 - 1.595 \cdot 10^{-11} \omega_t^4 + 2.511 \cdot 10^{-7} \omega_t^3 - 1.808 \cdot 10^{-4} \omega_t^2 + 0.0801 \omega_t \end{cases} \quad (1.20)$$

## 1.6 Simulation en boucle ouverte

### 1.6.1 Schéma bloc du modèle du TRMS

La figure (1.8) représente le schéma bloc du modèle du TRMS implémenté en simulink :

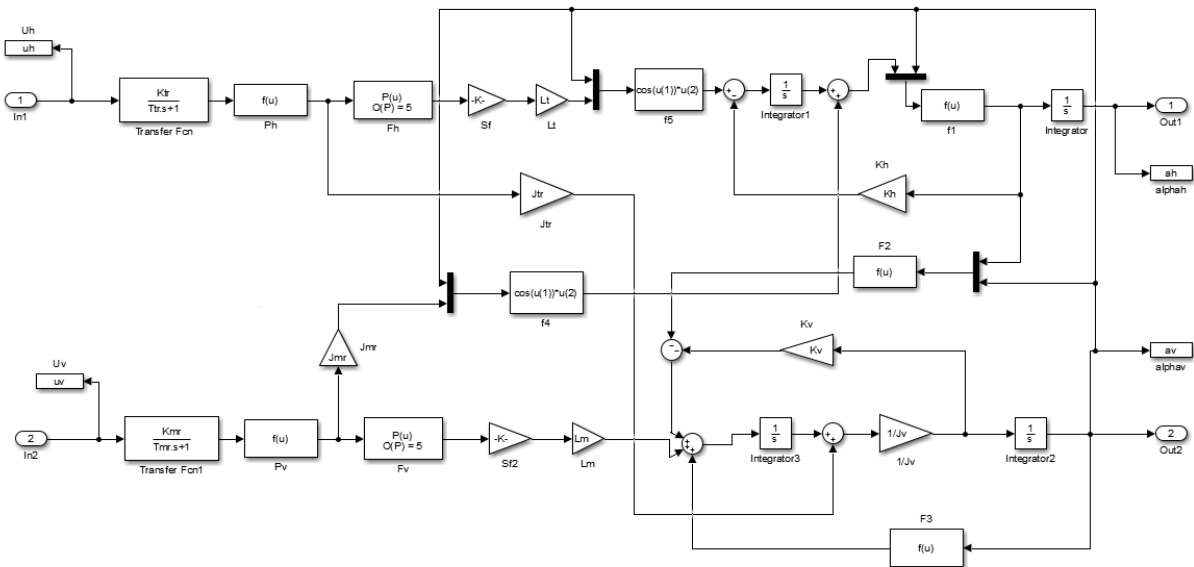


FIG. 1.8 : Schéma bloc du modèle du TRMS

### 1.6.2 Simulations en boucle ouverte

Les réponses du système en boucle ouverte (libres et indicielles), sont représentées ci-dessous, pour les deux sous-systèmes découplés ainsi que le système couplé.

- Pour la réponse libre :

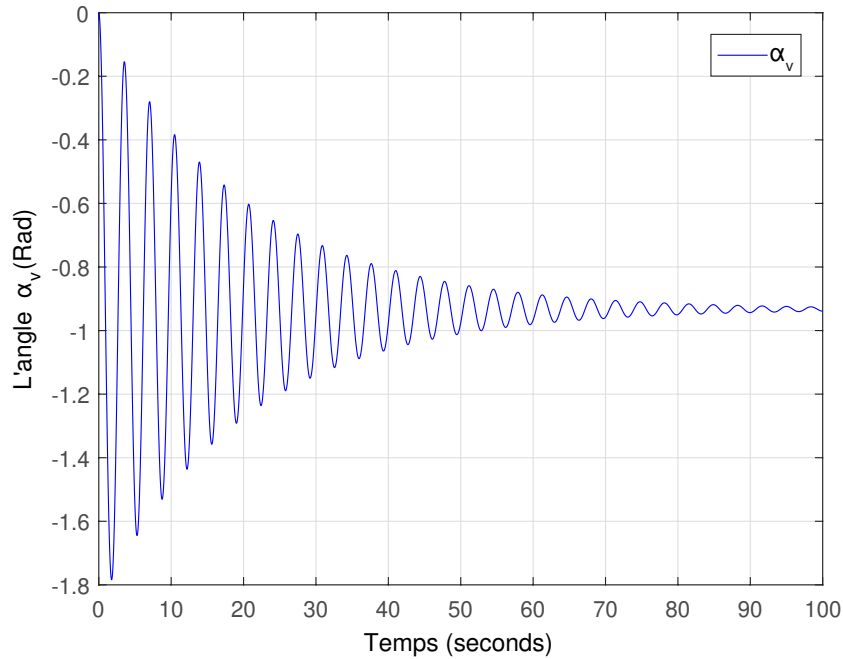


FIG. 1.9 : Réponse libre du sous-système vertical

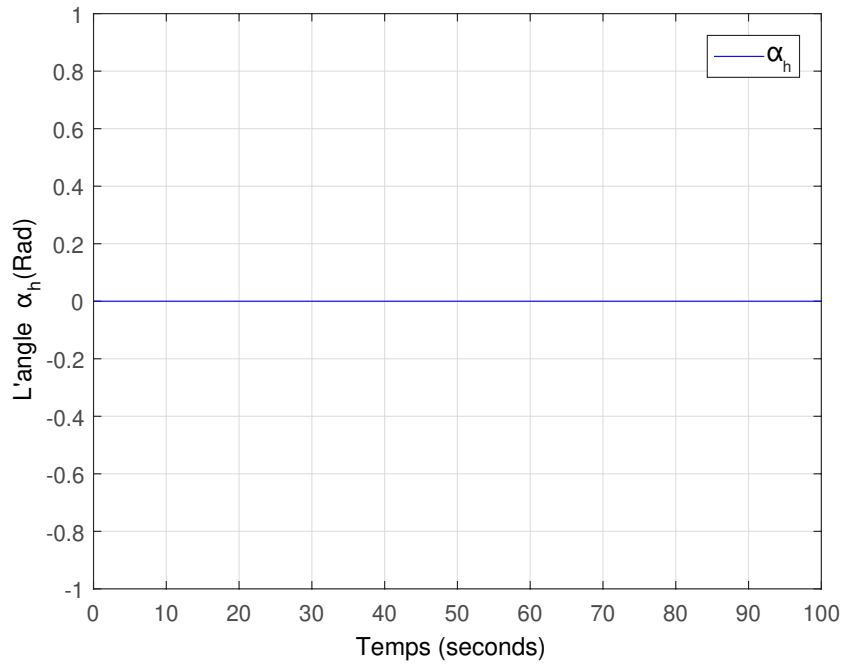


FIG. 1.10 : Réponse libre du sous-système horizontal



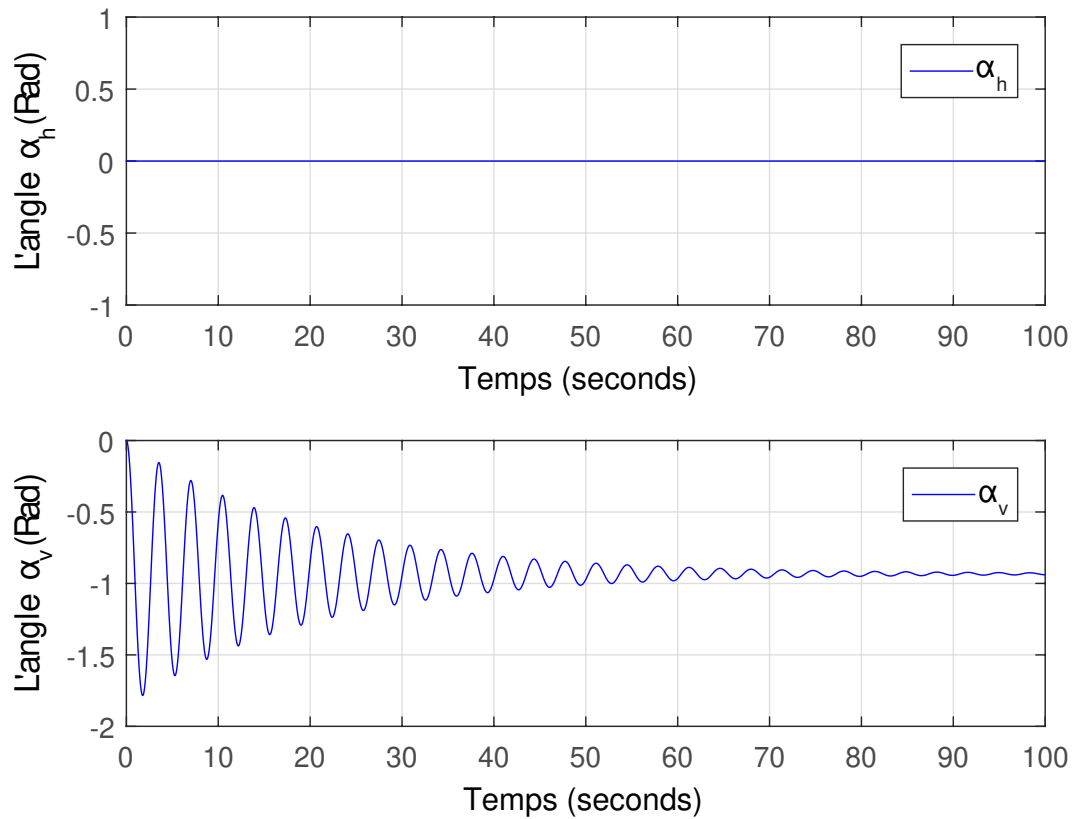


FIG. 1.11 : Réponse libre du système couplé

- Pour la réponse indicielle ( $u = 0.5 V$ ) :

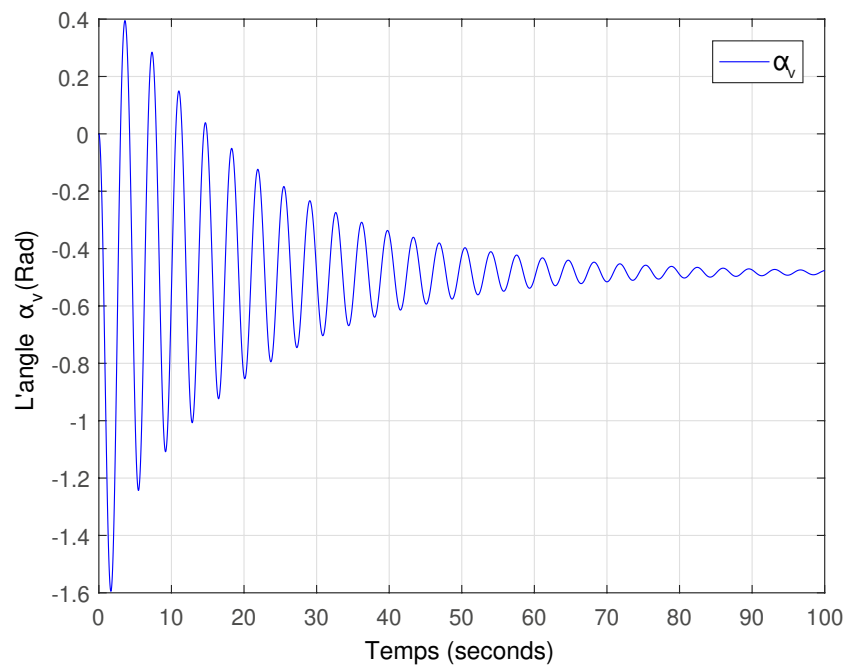


FIG. 1.12 : Réponse indicielle du sous-système vertical

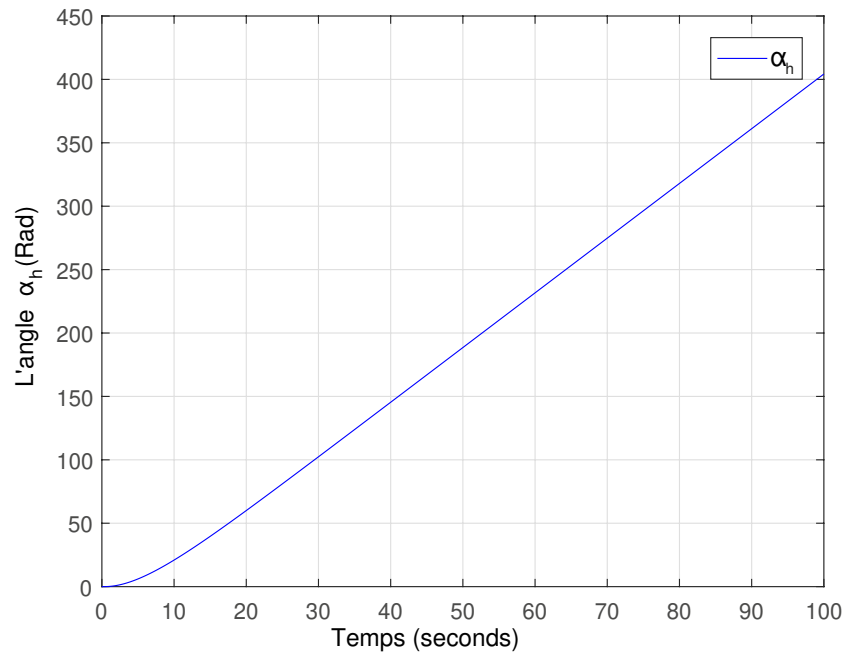


FIG. 1.13 : Réponse indicielle du sous-système horizontal

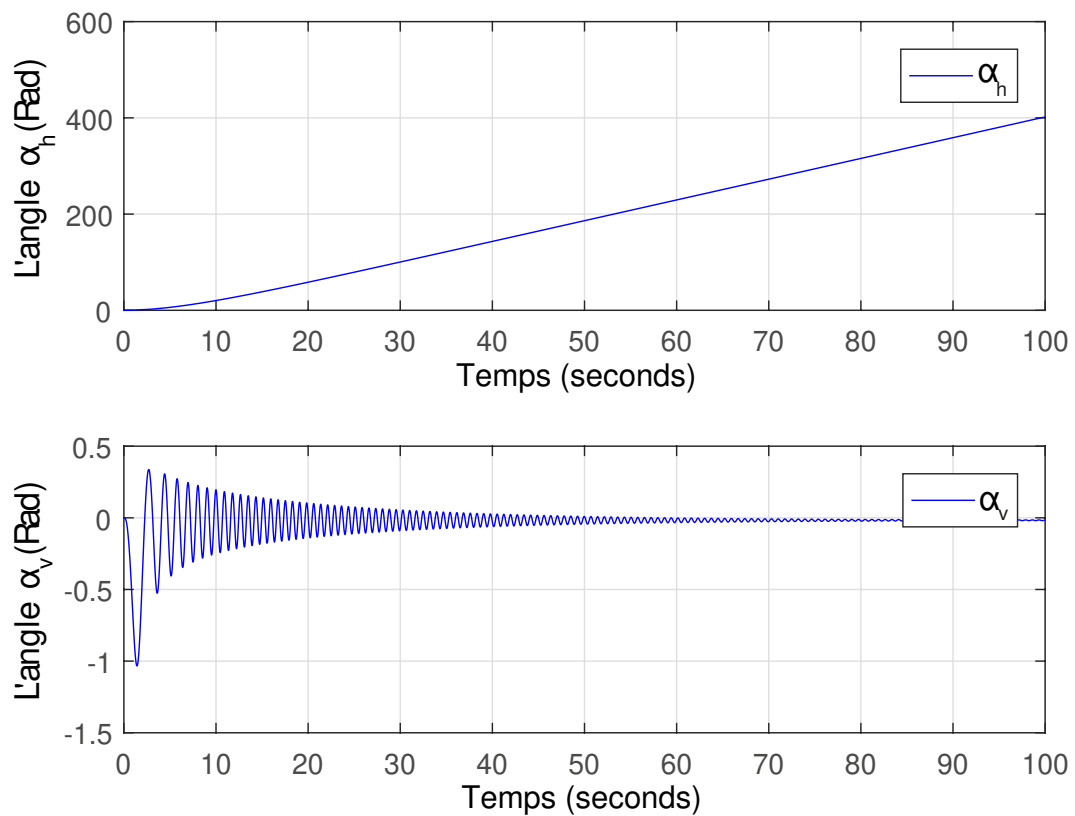


FIG. 1.14 : Réponse indicielle du système couplé

### Interprétation et observations

Pour le sous-système vertical :

- Le moment gravitationnel, qui ne fonctionne que dans le plan vertical, est la source

de la réponse oscillatoire amortie.

- Les forces de friction, en revanche, forcent le système à se stabiliser à un point d'équilibre ( $\alpha_{v0} = -0.95 \text{ rad}$ ).
- Ce sous-système fonctionne comme un système BIBO pour une excitation  $u_v \in [-2.5, +2.5]$ .

En ce qui concerne le sous-système horizontal :

- Il reste à son état initial tant qu'il n'est pas excité.
- Lorsque le système est excité, le sous-système vertical se dirige vers un nouveau point d'équilibre qui dépend de l'excitation appliquée.
- Le sous-système horizontal a le comportement d'un intégrateur, il a une infinité de points d'équilibre tout au long du plan horizontal et diverge même pour de petites excitations.

### 1.7 Conclusion

Le but de ce chapitre est de réaliser une étude physique approfondie du TRMS en vue de comprendre ses aspects mathématiques. Nous avons commencé par introduire le concept du vol d'un hélicoptère réel. Par la suite, nous avons décrit succinctement le simulateur TRMS et son principe de fonctionnement, avant d'aborder, finalement, à établir un modèle mathématique du simulateur d'hélicoptère TRMS, qui se révèle être une représentation d'état fortement non linéaire et couplée.

## Chapitre 2

# Théorie du calcul d'ordre fractionnaire

## 2.1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire est un domaine mathématique qui existe depuis plus de 300 ans. Il est basé sur l'idée de l'extension du calcul d'ordre entier vers des ordres fractionnaires. Les premières références à cette idée remontent à Leibniz et à l'Hôpital en 1695, où ils ont mentionné la dérivée d'ordre un demi ( $\frac{1}{2}$ ).

Actuellement, nous sommes témoins d'une rapide expansion de nombreuses applications du calcul fractionnaire. Ces phénomènes mathématiques nous offrent la possibilité de décrire et de modéliser de manière plus précise les objets réels par rapport aux méthodes classiques "entières". En effet, les objets réels ont souvent un caractère fractionnaire [8].

Dans ce chapitre, on aborde les définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire les plus couramment utilisées dans le domaine des mathématiques, ainsi que les fonctions qui leur sont associées. Nous examinons également leurs principales propriétés, qui seront utiles dans notre étude ultérieure. De plus, nous proposons une vue d'ensemble des systèmes linéaires et non linéaires d'ordre fractionnaire, en abordant leurs conditions de stabilité ainsi que quelques approches de commande.

## 2.2 Théorie du calcul d'ordre fractionnaire

### 2.2.1 Pré-requis nécessaire pour le calcul fractionnaire

Dans la théorie du calcul fractionnaire, deux fonctions sont largement utilisées pour fournir des solutions aux problèmes du calcul fractionnaire. Ces fonctions sont la fonction Gamma d'Euler et la fonction Mittag-Leffler. Elles jouent un rôle essentiel dans la résolution des équations fractionnaires [9].

#### La fonction Gamma

La fonction **Gamma** est l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise la factorielle  $\mathbf{n}!$ , et permet à  $\mathbf{n}$  de prendre des valeurs non entières. La définition de la fonction Gamma sous forme d'intégrale est donnée par l'équation suivante [10] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0 \quad (2.1)$$

Il est évident que cette intégrale converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , avec  $\Re(z) > 0$ .

À partir de l'intégration par parties de (2.1), on obtient la formule de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

Si on considère  $z$  comme un nombre naturel  $z \in \mathbb{N}$ , alors nous obtenons :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) = z(z - 1)\Gamma(z - 1) = z(z - 1)(z - 2)..1\Gamma(1) = z! \quad (2.3)$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle a des pôles simples pour  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

Son expression est :

$$\Gamma(z) = \varphi(z) + \frac{(-1)^0}{0!} \frac{1}{0+z} + \frac{(-1)^1}{1!} \frac{1}{1+z} + \frac{(-1)^2}{2!} \frac{1}{2+z} + \dots \quad (2.4)$$

Avec :

$$\varphi(z) = \int_1^{\infty} \exp^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.5)$$

Ceci signifie que pour des valeurs entières négatives, la fonction Gamma tend asymptotiquement vers l'infini.

### Mittag-Leffler :

Comme la fonction exponentielle  $\exp(z)$  joue un rôle important dans le calcul d'ordre entier, on trouve aussi que la fonction Mittag-Leffler joue également un rôle très important dans le calcul d'ordre fractionnaire.

On distingue dans la littérature deux fonctions usuelles :

- La fonction de Mittag-Leffler à un paramètre est donnée par la formule suivante :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0 \quad (2.6)$$

Cette fonction a été introduite par Mittag-Leffler en 1903 [10].

La fonction exponentielle usuelle correspond à une valeur de  $\alpha = 1$  [11].

- En 1953, la fameuse fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres [12],  $E_{\alpha,\beta}(z)$  a été introduite par Agarwal. Sa définition fut modifiée plus tard par Erdélyi et al. pour devenir :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.7)$$

## 2.2.2 Définitions de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire :

L'opérateur différo-intégral continu, noté  $aDt^{\alpha}$ , est une extension des opérations de dérivation et d'intégration classiques pour les fonctions et les équations qui ne sont pas nécessairement entièrement différentiables ou intégrables. Cet opérateur est défini dans le

cadre de la théorie des opérateurs d'ordre non entier, ce dernier est donné par [13] :

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \text{pour } \alpha > 0 \\ 1 & \text{pour } \alpha = 0 \\ \int_\alpha^t (d\Gamma)^\alpha & \text{pour } \alpha < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Plusieurs définitions des opérateurs d'ordre fractionnaire existent dans la littérature, mais parmi les plus couramment utilisées, on retrouve :

### Définition de Riemann-Liouville (R-L)

Soient  $t_0 \in R$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ .

L'intégrale d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure à  $t_0$  est définie par la formule suivante [14] :

$${}_{t_0} I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

La dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par la formule suivante :

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{1-(m-\alpha)}} d\tau, \quad (2.10)$$

Où le nombre entier  $m$  vérifie  $m - 1 < \alpha < m$ ,  $t > t_0$  et  $\Gamma(x)$  est la fonction **Gamma**.

### Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre définition de la dérivation d'ordre fractionnaire dont la formule est la suivante [15] :

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^m(\tau)}{(t - \tau)^{1-(m-\alpha)}} d\tau, \quad (2.11)$$

Où  $n - 1 < m < n$

Par rapport à celle proposée par Riemann-Liouville, la dérivée de Caputo est considérée comme la dérivée fractionnaire la plus adaptée pour modéliser des problèmes réels. En effet, contrairement à la dérivée de Riemann-Liouville, lors de la construction d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire, la dérivée de Caputo incorpore les conditions initiales  $f^{(k)}(t_0)$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$ , de la même manière que les dérivées d'ordre entier. En comparant les dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville, on peut établir la relation suivante :

$$RL_{t_0} D_t^\alpha T(t) = C_{t_0} D_t^\alpha T(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - t_0)^{k-\alpha}}{\Gamma(k - \alpha + 1)} f^{(k)}(t_0)$$

### Définition de Grünwald-Letnikov (G-L)

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $m > 0$  de  $G - L$  est donnée par [16] :

$${}_{t_0}D_t^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{k} f(t - k.h), \quad (2.12)$$

Où  $h$  est la période d'échantillonnage et :

$$\binom{m}{k} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)}$$

Si  $f$  est une fonction causale et le pas de discrétisation  $h$  est petit, on peut approximer :

$${}_{t_0}D_t^m f(t) = \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^k \binom{m}{k} f(t) \quad (2.13)$$

### 2.2.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes : [10][17][16][18][19] :

- Si  $f(t)$  est une fonction analytique de  $t$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  ${}_{t_0}D_t^\alpha f(t)$  est une fonction analytique de  $t$ ,  $\alpha$ .
- Pour  $\alpha = n$ , tel que  $n \in \mathbb{Z}^+$ , l'opération  ${}_{t_0}D_t^\alpha$  peut être interprétée comme étant  $\frac{d^n}{dt^n}$  la différenciation classique d'ordre entier  $n$ .
- L'opérateur d'ordre  $\alpha = 0$  est l'opérateur identité :  ${}_{t_0}D_t^0 f(t) = f(t)$
- La différenciation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérateurs linéaires, si  $a, b$  sont constants, alors :

$${}_{t_0}D_t^\alpha [af(t) + bg(t)] = a {}_{t_0}D_t^\alpha f(t) + b {}_{t_0}D_t^\alpha g(t). \quad (2.14)$$

- La loi additive (propriété du semi-groupe) :

$${}_{t_0}D_t^\alpha \left[ {}_{t_0}D_t^\beta f(t) \right] = {}_{t_0}D_t^\beta \left[ {}_{t_0}D_t^\alpha f(t) \right] = {}_{t_0}D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (2.15)$$

avec  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $\Re(\beta) > 0$  et valable sous certaines contraintes sur la fonction  $f(t)$

- La dérivée d'ordre fractionnaire commute avec la dérivée d'ordre entier :

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_{t_0}D_t^\alpha f(t)) = {}_{t_0}D_t^\alpha \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_{t_0}D_t^{\alpha+n} f(t), \quad (2.16)$$

sous la condition  $t = a$ , on a  $f^{(k)}(a) = 0$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) la condition ci-dessus sera vérifiée.



- Dérivées fractionnaires successives :

$$\begin{aligned} {}_{t_0}D_t^\alpha f(t) &= {}_{t_0}D_t^{\alpha_1} {}_{t_0}D_t^{\alpha_2} {}_{t_0}D_t^{\alpha_3} \dots {}_{t_0}D_t^{\alpha_n} f(t) \\ \alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, 0 < \alpha_i < 1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 2.2.4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire :

La transformée de Laplace est un outil essentiel en théorie de contrôle qui nous permet de passer facilement entre les domaines du temps et de la fréquence [17][20]. Les transformées de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire sont :

- L'intégrale d'ordre fractionnaire :

$$L [{}_{t_0}I_t^\alpha f(t)] = s^{-\alpha} F(s) \quad (2.18)$$

- La dérivée de Riemann-Liouville :

$$L [{}_{t_0}D_t^{-\alpha} f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k [{}_{t_0}D_t^{(\alpha-k-1)} f^k(t)_{t=0}] \quad (2.19)$$

Avec  $m - 1 < \alpha < m$

La transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue. Par contre, son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des conditions initiales.

- La dérivée de Caputo :

$$L [{}_0D_t^{-\alpha} f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^k(0) \quad (2.20)$$

Avec  $m - 1 < \alpha < m$

L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y$  etc.

De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à  $t = 0$

- La dérivée de Grünwald-Letnikov :

$$L [{}_0D_t^{-\alpha} f(t)] = s^\alpha F(s) \quad (2.21)$$

Pour des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo sont réduites à celle de Grünwald-Letnikov.

## 2.3 Systèmes d'ordre fractionnaire

Après avoir établi les définitions fondamentales du calcul fractionnaire et leurs propriétés dans la partie précédente, cette partie présente une vue générale sur les systèmes linéaires et non-linéaires d'ordre fractionnaire, leurs conditions de stabilité ainsi que leurs simulations.

### 2.3.1 Modélisation des systèmes d'ordre fractionnaire

Comme dans le cas entier, il existe différents modèles qui représentent les systèmes d'ordre fractionnaire. On cite principalement :

#### 2.3.1.1 Équation différentielle d'ordre fractionnaire

Comme dans le cas entier, un système d'ordre fractionnaire peut être décrit par une équation différentielle fractionnaire généralisée de la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=0}^n b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (2.22)$$

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t)$$

Avec  $u(t)$  et  $y(t)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système à l'instant  $t$ ,  $D^\alpha$  est l'opérateur de la dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$ .  $a_i$  et  $b_i$  sont les coefficients de l'équation différentielle et  $\alpha_i, \beta_i \in R^+$ .

#### Définition

Un système non entier est dit d'ordre **commensurable** lorsque tous les ordres de dérivation  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  de son équation différentielle sont multiples du même nombre non entier  $\alpha$ .

#### Fonction de transfert d'ordre fractionnaire

L'utilisation de la transformée de Laplace de l'équation (2.22), en considérant les conditions initiales nulles, permet de déduire la fonction de transfert d'ordre non entier suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.23)$$

Dans le cas d'un système *commensurable* d'ordre  $\alpha$ , la fonction de transfert généralisée de l'équation (2.23) devient [13] :

$$G(s) = \frac{b_m s^{m.\alpha} + b_{m-1} s^{(m-1).\alpha} + \dots + b_0}{a_n s^{n.\alpha} + a_{n-1} s^{(n-1).\alpha} + \dots + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i (s^\alpha)^i}{\sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i} \quad (2.24)$$

## Représentation d'état d'ordre fractionnaire

La représentation d'état d'ordre fractionnaire est définie comme dans le cas entier en remplaçant la dérivée entière d'ordre 1 par la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$ . la représentation d'état est donnée par [21] :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

Avec :

$$D^\alpha x(t) = [D_1^\alpha x_1(t) \ D_2^\alpha x_2(t) \ \dots \ D_n^\alpha x_n(t)]^T$$

Et  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^p$  le vecteur d'entrée et  $y \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{p \times r}$  sont respectivement les matrices d'état, d'entrée, de sortie et de rétroaction.

$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$  représente les ordres fractionnaires.

À partir de la représentation d'état (2.25), on peut obtenir la fonction de transfert correspondante, en appliquant la transformée de Laplace et en considérant les conditions initiales nulles, on obtient :

$$G(s) = C[(s^\alpha I_n - A)^{-1}]B + D \quad (2.26)$$

Avec :  $I_n$  est la matrice d'identité  $n.n$ .

## 2.3.2 Condition de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaires

### 2.3.2.1 Stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaires

Le système donné par la représentation d'état (2.25) est stable si la condition suivante est vérifiée [22] :

$$| \arg(\text{eig}(A)) | > \alpha \frac{\pi}{2} \quad (2.27)$$

Avec  $\text{eig}(A)$  qui représente l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A$ .

- On trouve les pôles en résolvant l'équation  $\det(s^\alpha I - A) = 0$ . Ainsi, on déduit facilement l'expression des pôles :

$$p_i = \lambda_i^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.28)$$

La figure suivante (2.1) illustre les domaine de stabilité et d'instabilité :

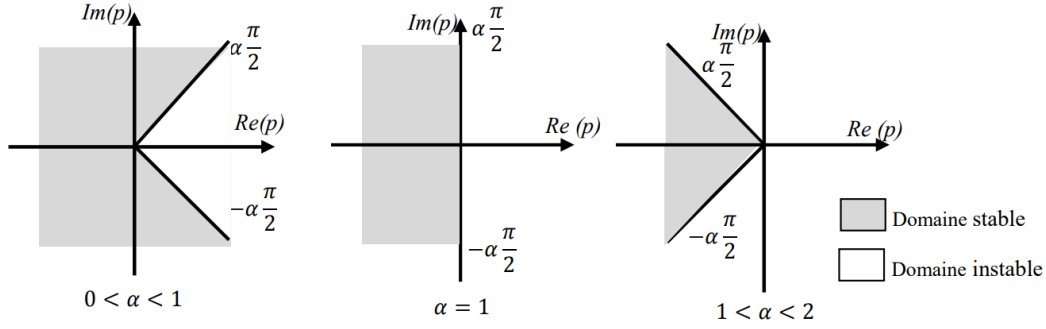


FIG. 2.1 : Région de stabilité dans le plan ( $s^\alpha$ ) pour un système d'ordre fractionnaire.

### 2.3.3 Simulation des systèmes d'ordre fractionnaire

La simulation d'un système d'ordre fractionnaire est dans la plupart des cas très compliquée. Plusieurs approches, permettant de simuler les systèmes d'ordre fractionnaire, ont été développées dans la littérature. La plupart d'entre elles sont basées sur l'approximation du système d'ordre fractionnaire par un modèle d'ordre entier. Les deux méthodes les plus connues de ces méthodes sont l'approximation de Charef et l'approximation d'Oustaloup cette dernière est la plus couramment utilisée, c'est pourquoi nous l'avons utilisée dans notre travail.

#### Méthode d'Oustaloup

Cette méthode repose sur l'approximation en temps continu de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $s^\alpha$ , par une fonction rationnelle (appelée aussi filtre récursif d'Oustaloup) en utilisant une distribution récursive de zéros et pôles d'ordre entier, répartis dans une bande de fréquence limitée[23].

L'approximation par la méthode d'Oustaloup de l'opérateur fractionnaire  $s^\alpha$  sur la bande de fréquence  $[\omega_b, \omega_h]$  est donnée par :

$$s^\alpha \approx \left( \frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^\alpha \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_k'}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \quad (2.29)$$

Avec :

$$\omega_u = \sqrt{\omega_b \omega_h}$$

$$\omega_k' = \omega_b \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{(k+N+0.5(1-\alpha))/(2N+1)}$$

$$\omega_k = \omega_b \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{(k+N+0.5(1+\alpha))/(2N+1)}$$

$2N + 1$  : est l'ordre du filtre.

#### Exemple d'approximation en utilisant la méthode d'Oustaloup

- **Intégrateur d'ordre fractionnaire  $\frac{1}{s^{0.5}}$  :**

La fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre fractionnaire est représentée dans

le domaine fréquentiel par la fonction suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{s^{0.5}}$$

Avec  $E$  et  $Y$  sont l'entrée et la sortie de l'intégrateur.

Les approximations de la fonction  $G(s)$  en utilisant le filtre d'Oustaloup avec des différents paramètres sont les suivants :

Pour  $N = 2, \omega_b = 10^{-2}$  et  $\omega_h = 10^2$  :

$$G_{o1}(s) = \frac{Y_o(s)}{E_o(s)} = \frac{0.1s^5 + 7.497s^4 + 76.85s^3 + 121.8s^2 + 29.8s + 1}{s^5 + 29.85s^4 + 121.8s^3 + 76.85s^2 + 7.497s + 0.1} \quad (2.30)$$

Pour  $N = 2, \omega_b = 10^{-3}$  et  $\omega_h = 10^3$  :

$$G_{o2}(s) = \frac{0.03162s^5 + 16.92s^4 + 537.1s^3 + 1072s^2 + 134.4s + 1}{s^5 + 134.4s^4 + 1072s^3 + 537.1s^2 + 16.92s + 0.03162} \quad (2.31)$$

Pour  $N = 3, \omega_b = 10^{-2}$  et  $\omega_h = 10^2$  :

$$G_{o3}(s) = \frac{0.1s^7 + 9.834s^6 + 204.5s^5 + 1079s^4 + 1499s^3 + 548.7s^2 + 50.94s + 1}{s^7 + 50.94s^6 + 548.7s^5 + 1499s^4 + 1079s^3 + 204.5s^2 + 9.834s + 0.1} \quad (2.32)$$

Le tracé de Bode des fonctions  $G(s)$  et les approximations  $G_{oi}(s)$  sont présentées dans la figure (2.2).

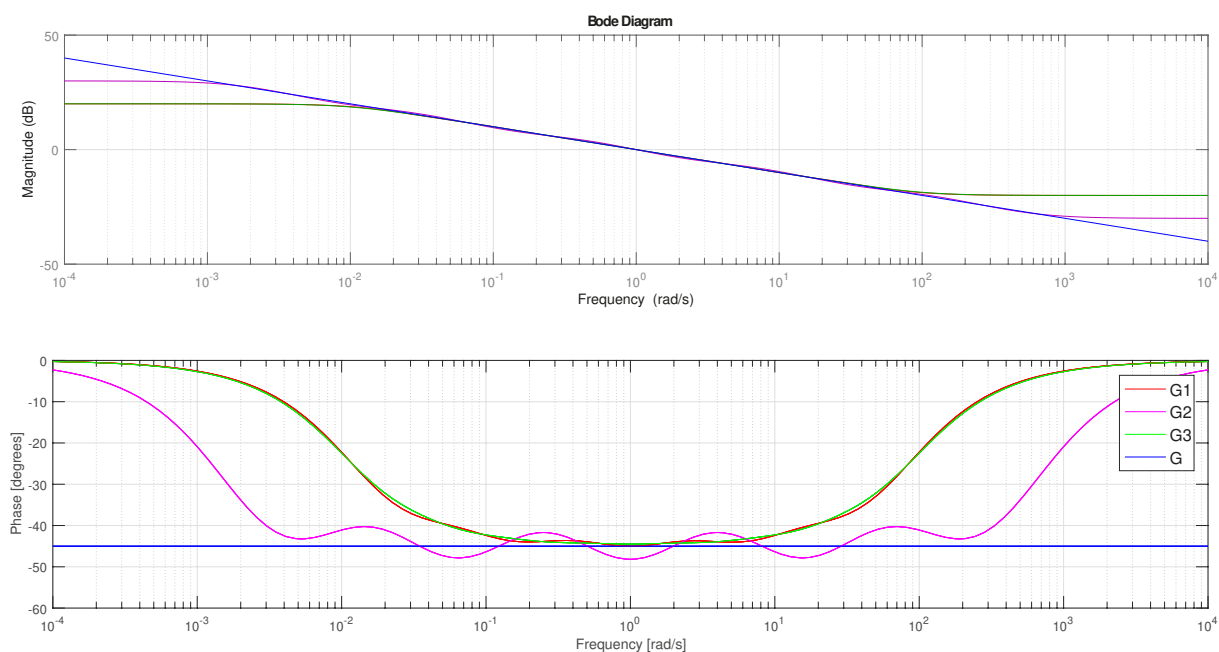


FIG. 2.2 : tracé de Bode de l'intégrateur d'ordre fractionnaire et de ses approximations

- **Dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^{0.5}$  :**

La fonction de transfert de dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction suivante :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = s^{0.5}$$

Avec  $E$  et  $Y$  sont toujours l'entrée et la sortie de dérivateur.

Les approximations de la fonction  $H(s)$  en utilisant le filtre d'Oustaloup avec des différents paramètres sont les suivants :

Pour  $N = 2, \omega_b = 10^{-2}$  et  $\omega_h = 10^2$  :

$$H_{o1}(s) = \frac{10s^5 + 298.5s^4 + 1218s^3 + 768.5s^2 + 74.97s + 1}{s^5 + 74.97s^4 + 768.5s^3 + 1218s^2 + 298.5s + 10} \quad (2.33)$$

Pour  $N = 2, \omega_b = 10^{-3}$  et  $\omega_h = 10^3$  :

$$H_{o2}(s) = \frac{31.62s^5 + 4250s^4 + 33897s^3 + 16983s^2 + 535s + 1}{s^5 + 535s^4 + 16983s^3 + 33897s^2 + 4250s + 31.62} \quad (2.34)$$

Pour  $N = 3, \omega_b = 10^{-2}$  et  $\omega_h = 10^2$  :

$$H_{o3}(s) = \frac{10s^7 + 509.4s^6 + 5487s^5 + 14990s^4 + 10790s^3 + 2045s^2 + 98.34s + 1}{s^7 + 98.34s^6 + 2045s^5 + 10790s^4 + 14990s^3 + 5487s^2 + 509.4s + 10} \quad (2.35)$$

Le tracé de Bode des fonctions  $H(s)$  et les approximations  $H_{oi}(s)$  est présenté dans la figure (2.3).

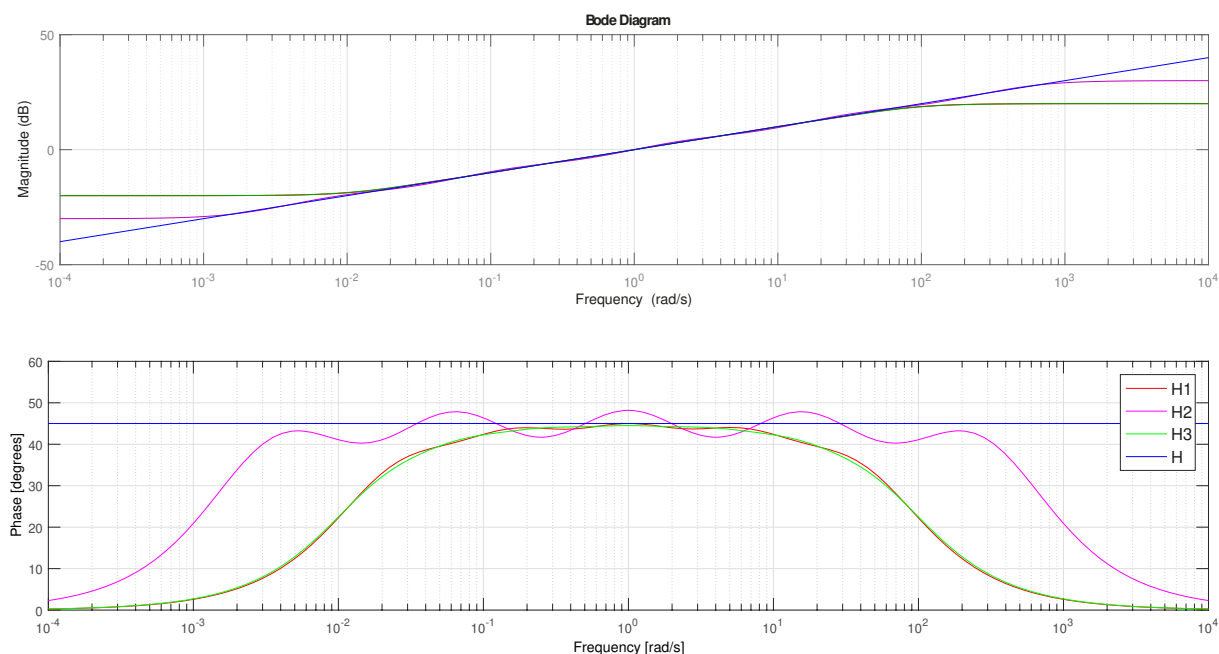


FIG. 2.3 : tracé de Bode de dérivateur d'ordre fractionnaire et de ses approximations.

D'après ces deux figures, on peut remarquer le suivant :

- En général, le filtre Oustaloup fournit une approximation précise des fonctions de transfert d'ordre fractionnaire dans la bande de fréquence souhaitée, que ce soit pour des cas d'intégrateurs ou de dérivés.
- Lorsque la bande de fréquence est élargie, des erreurs d'approximation se produisent, ce qui entraîne des oscillations des valeurs de phase et d'amplitude de la fonction approximée autour des valeurs correspondantes de la fonction réelle.

- En augmentant l'ordre du filtre, les erreurs d'approximation dans la bande de fréquence diminuent, mais cela entraîne également une augmentation du temps de calcul.
- La phase de la fonction approximée est plus sensible que l'amplitude, où l'on observe qu'elle ne correspond pas à la phase de la fonction réelle près des fréquences de transition  $w_b$  et  $w_h$ .

### 2.4 Systèmes non-linéaires d'ordre fractionnaire :

La représentation espace d'état est la représentation mathématique qui peut être déduite à partir des propriétés physiques. Cette représentation d'espace d'état prend la forme suivante [18] :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = F(x(t), u(t)) \\ y(t) = G(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.36)$$

Où :  $F$  et  $G$  sont des fonctions non linéaires de  $x(t)$  et  $u(t)$ .

L'étude de stabilité du système plus complexe que pour les systèmes linéaires, il existe cependant des théorèmes permettant l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire, la plupart ont été formulés par A.M. Lyapunov.

### 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé les concepts fondamentaux du calcul fractionnaire dans les domaines temporel et fréquentiel. Nous avons examiné les définitions mathématiques des opérateurs d'ordre fractionnaire ainsi que les propriétés et caractéristiques de la dérivée et de l'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction temporelle. Une méthode simple basée sur le filtre d'Oustaloup a été présentée pour approximer la dérivée ou l'intégrale d'ordre fractionnaire.

Nous avons également introduit une définition générale des systèmes linéaires et non linéaires d'ordre fractionnaire, ainsi que leurs conditions de stabilité. Ce chapitre a permis de poser les bases pour les chapitres suivants consacrés à l'analyse et à la synthèse des régulateurs fractionnaires pour la commande des systèmes non linéaires.

En résumé, nous avons exploré les principes fondamentaux de la dérivation et de l'intégration non entières, mettant en évidence leur pertinence pour les futurs chapitres portant sur l'analyse et la conception de régulateurs fractionnaires pour la commande du TRMS.

# Chapitre 3

## Commandes PID et FOPID optimisées



### 3.1 Introduction

La commande PID est la technique de commande la plus utilisée dans les applications industrielles. Elle a été introduite pour la première fois par Elmer Sperry en 1911 [24] et a été développée depuis lors. Cette commande est mise en œuvre dans les systèmes de régulation de vitesse de croisière des automobiles modernes, qui utilise des régulateurs PID pour réguler la vitesse du véhicule avec un taux de variation linéaire, les applications de ce régulateur dans les systèmes robotiques améliorent la précision de la planification des mouvements avec l'odométrie et permettent une commande plus précise des actionneurs.

Un développement intéressant des régulateurs PID ces dernières années consiste à introduire le calcul fractionnaire dans l'effet des actions intégrale et dérivée [13], et cela en utilisant certaines propriétés du calcul fractionnaire qu'on vient de voir dans le chapitre précédent.

La technique de commande PID est utilisée dans ce chapitre pour atteindre l'objectif de commande consistant à faire suivre les signaux de sorties, la trajectoire souhaitée ou à atteindre rapidement et précisément les emplacements requis. Cependant, pour les systèmes non-linéaires, ils existent certaines caractéristiques dans le modèle qui empêchent l'application directe des approches de la commande PID. Cela signifie que nous ne pouvons pas nous fier aux méthodes traditionnelles de réglage du PID, et cela inclut également le FOPID.

Une technique plus avancée et moderne consiste à estimer directement les paramètres du régulateur PID pour le système non linéaire en utilisant des algorithmes d'optimisation tels que l'algorithme d'optimisation par essaim de particules (PSO) [25], [26] l'algorithme génétique (GA) [27] et l'algorithme de la recherche Coucou (CS) [28]. Ces algorithmes sont utilisés pour minimiser une fonction de coût telle que l'erreur entre la référence d'entrée et la réponse en boucle fermée réglée en ajustant les paramètres du régulateur pour obtenir une meilleure réponse.

Dans ce chapitre, nous effectuerons une étude comparative de la commande du TRMS en utilisant les régulateurs PID d'ordre entier et d'ordre fractionnaire, tout en utilisant l'algorithme PSO pour estimer les paramètres des deux commandes autour du point d'équilibre.

### 3.2 La commande PID

La commande Proportionnelle-Intégrale-Dérivée (PID) est une technique de régulation en boucle fermée basée sur la rétroaction dynamique du système qui fournit une commande modulée en continu. Elle est couramment utilisée dans les systèmes industriels, les systèmes robotiques mobiles et l'automatisation. Cette technique calcule en temps réel la valeur d'erreur  $e(t)$  du système, qui correspond à la différence entre la consigne souhaitée  $y_r$  et une variable de processus mesurée  $y$ , puis applique une correction en fonction des termes proportionnel, intégral et dérivé.  $y_r$  représente essentiellement la sortie désirée du système, tandis que  $y$  est la sortie mesurée du système provenant d'un capteur ou d'un encodeur. L'objectif d'un régulateur PID est de réguler l'entrée du système afin de mi-

minimiser la valeur d'erreur du système et d'obtenir le comportement souhaité. La valeur d'erreur d'un système peut être obtenue en soustrayant la variable de processus mesurée de la consigne souhaitée :

$$e(t) = y_r(t) - y(t) \quad (3.1)$$

Une fois que la valeur d'erreur du système est obtenue, le régulateur PID applique une correction à l'entrée du système en utilisant les constantes  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$  du PID pour tenter d'obtenir la sortie désirée et de se rapprocher progressivement du comportement souhaité du système. La loi de commande PID est définie par l'équation différentielle en fonction de la valeur d'erreur et des gains  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$ , avec l'équation suivante :

$$u(t) = k_p + k_i \int e(t) dt + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.2)$$

Ces actions agissent sur les caractéristiques de la réponse en boucle fermée, telles que le délai temporel, le dépassement, les oscillations et l'erreur en régime permanent.

Comme on a déjà précisé dans l'introduction de ce chapitre, nous allons estimer les valeurs optimales des gains  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$  du régulateur PID en utilisant l'algorithme d'optimisation métaheuristique PSO.

### 3.2.1 Optimisation par essaim de particules (PSO)

Le principe est qu'un groupe de particules homogènes, composé de  $n$  individus, est utilisé pour résoudre un problème d'optimisation. Ces particules sont initialement réparties aléatoirement dans un espace de recherche  $D$  et chaque particule représente une solution potentielle. Chaque particule a une position  $x_i$  et se déplace avec une vitesse  $v_i$ . Ces dernières sont capables d'évaluer la qualité de leurs positions en utilisant une fonction objective  $f$ , et elles conservent en mémoire leur meilleure position visitée  $Pbest$ . De plus, les particules communiquent entre elles et suivent la meilleure position globale  $Gbest$  trouvée parmi l'ensemble du groupe. En parallèle, à chaque itération, chaque particule ajuste sa position et sa vitesse afin de converger vers l'optimum global.

Sachant qu'au départ, les positions et les vitesses sont initialisées aléatoirement dans l'intervalle des solutions candidates maximales et minimales, chaque particule  $i$  tente d'atteindre ensuite la meilleure performance enregistrée selon les équations suivantes :

$$\begin{cases} v_{i,j}^{k+1} = \omega v_{i,j}^k + c_1 r_{1i,j}^k (Gbest_{i,j}^k - x_{i,j}^k) + c_2 r_{2i,j}^k (Pbest_j^k - x_{i,j}^k) ; j \in \{1, \dots, D\} \\ x_{i,j}^{k+1} = x_{i,j}^k + v_{i,j}^{k+1} ; j \in \{1, \dots, D\} \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\omega$  est le coefficient d'inertie qui permet de définir la capacité d'exploration de chaque particule en vue d'améliorer la convergence de la méthode,  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes positives permettent de pondérer les tendances des particules à suivre leur instinct de conservation ou leur panurgisme, et  $r_1$ ,  $r_2$  sont des variables aléatoires évaluées à chaque itération suivant une loi uniforme sur le domaine  $[0; 1]$ .

Les positions  $Pbest$  et  $Gbest$  sont aussi, à chaque itération, mises à jour suivant les équations suivantes :

$$Pbest_i^{k+1} = \begin{cases} Pbest_i^k, & \text{si } f(x_i^{k+1}) \leq f(Pbest_i^k) \\ x_i^{k+1}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$Gbest_i^{k+1} = \arg \min_{Pbest_i} f(Pbest_i^{k+1}), \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.5)$$

En général, le critère d'arrêt peut être un nombre d'itérations fixe, en fonction de la fonction objective (fitness), ou bien lorsque les vitesses des particules tendent vers 0.

Les étapes essentielles de l'optimisation par essaim de particules sont présentées par l'algorithme suivant :

---

**Algorithm 1** Algorithme d'optimisation par essaim de particules

---

Initialisation des paramètres  $n, c_1, c_2, \omega$ , les bornes et le nombre d'itérations.

Initialisation aléatoire de la population, de la position et de la vitesse des particules.

**pour** chaque particule  $n$  **faire**

    Évaluer la position de la particule par la fonction objectif  $f$

    Calculer  $Pbest$ .

    Calculer  $Gbest$

**fin**

**tant que** la condition d'arrêt n'est pas satisfaite **faire**

**pour** chaque particule  $n$  **faire**

        Mettre à jour la vitesse.

        Mettre à jour la position.

        Évaluer la position de la particule par la fonction objectif  $f$ .

        Mettre à jour  $Pbest$ .

        Mettre à jour  $Gbest$ .

**fin**

**fin**

Retourner la solution optimale globale  $Gbest$ .

---

Un des problèmes qui se peuvent arriver lors de l'évolution de l'essaim est la possibilité qu'une particule diverge de l'espace de recherche défini, Plusieurs approches ont été proposées pour éviter ce problème, une de ces approches consiste sur la saturation de la vitesse maximale [29] afin de prévenir l'explosion des particules en dehors de l'espace de recherche.

De nombreuses études ont été menées sur la dynamique des particules concernant l'analyse des conditions de convergence de l'essaim, dont une autre approche [30], qui est adoptée pour assurer la bonne convergence des particules, consiste d'établir une certaine relation entre  $\omega, c_1$  et  $c_2$ . Cette combinaison des paramètres permet de régler l'équilibre entre les phases de diversification et d'intensification du processus de recherche. L'utilisation d'un coefficient de constriction  $\chi$  (ou facteur de constriction) permet de mieux

contrôler la divergence de l'essaim.

En utilisant ce coefficient, l'équation permettant de calculer la vitesse devient :

$$v_{i,j}^{k+1} = \chi [v_{i,j}^k + \phi_1 r_{1i,j}^k (Gbest_{i,j}^k - x_{i,j}^k) + \phi_2 r_{2i,j}^k (Pbest_j^k - x_{i,j}^k)] ; j \in \{1, \dots, D\} \quad (3.6)$$

où :

$$\begin{cases} \omega = \chi \\ c_1 = \omega \phi_1 \\ c_2 = \omega \phi_2 \end{cases}$$

tel que :

$$\chi = \frac{2}{|2 - \phi - \sqrt{\phi^2 - 4\phi}|}$$

avec :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 > 4$$

Typiquement, les valeurs optimales de cette approche sont  $\phi_1 = \phi_2 = 2.05$  [31], et le facteur de constriction est donc :

$$\chi = 0.7298844$$

D'après d'autres études menées par [32], il sera utile de fixer  $V_{max} = X_{max}$  en plus du coefficient de constriction, ce qui entraîne une amélioration des performances globales de l'algorithme.

Dans notre étude, on opte utiliser ces approches dans l'application de cet algorithme d'optimisation dans la commande PID et FOPID.

### 3.2.2 Commande PID du TRMS

Notre objectif est d'assurer la stabilisation et la poursuite des angles  $(\alpha_v, \alpha_h)$ , pour cela on utilise un régulateur PID pour chaque sous-système, l'horizontal et le vertical, définies par les lois de commande suivantes :

$$u_v(t) = k_{Pv} + k_{Iv} \int e_v(t) dt + k_{Dv} \frac{de_v(t)}{dt}, \quad e_v(t) = \alpha_{vr}(t) - \alpha_v(t) \quad (3.7)$$

$$u_h(t) = k_{Ph} + k_{Ih} \int e_h(t) dt + k_{Dh} \frac{de_h(t)}{dt}, \quad e_h(t) = \alpha_{hr}(t) - \alpha_h(t) \quad (3.8)$$

où  $e_{h,v}$  est l'erreur entre l'angle de référence et la sortie, et  $k_{Ph,v}$ ,  $k_{Ih,v}$  et  $k_{Dh,v}$  sont les gains des actions proportionnelle, intégrale et dérivée respectivement, sans oublier que le réglage de ces gains se fait par l'algorithme d'optimisation PSO, qui va estimer les valeurs

optimales de ces derniers.

On peut donc récapituler notre synthèse par le schéma présenté ci-dessous (4.2) :

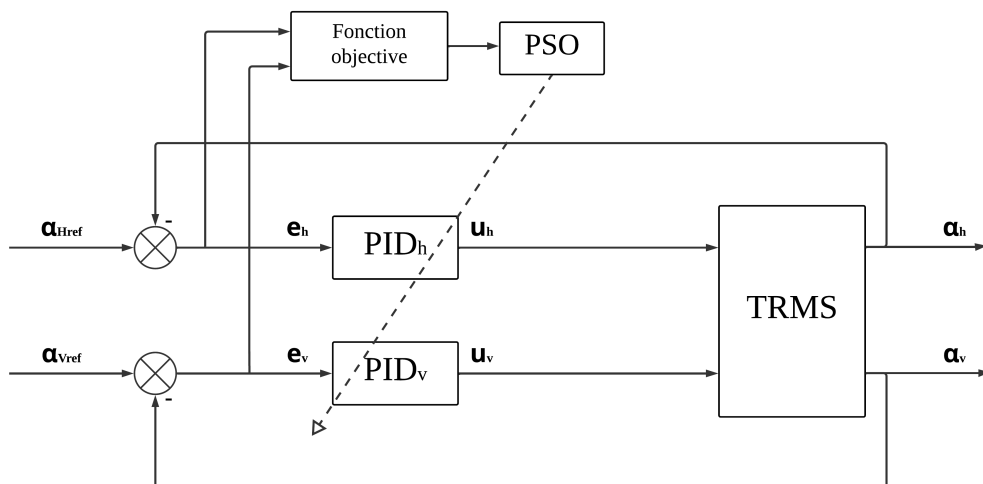


FIG. 3.1 : Schéma bloc de la commande PID en utilisant l'algorithme d'optimisation PSO

On implémente maintenant le schéma précédent, et en spécifiant tout d'abord les paramètres de l'algorithme PSO :

- Le vecteur des paramètres à estimer.  $K = [k_{Ph}, k_{Ih}, k_{Dh}, k_{Pv}, k_{Iv}, k_{Dv}]$
- Nombre de particules  $n = 50$ , et nombre d'itérations  $m = 100$ .
- Les bornes inférieures et supérieures des gains  $K(i) \in [0, 20]$ , avec  $i \in \{1, \dots, 6\}$  le nombre des gains.
- Le critère d'optimisation ( la fonction de coût ) :

$$f(m) = \sum_{j=1}^N (e_h(j)^2 + e_v(j)^2) \quad (3.9)$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons qui est égale au temps de simulation divisé par le pas d'intégration.

### 3.2.3 Simulations et résultats

Les gains optimaux estimés par l'algorithme PSO sont présentés, pour les deux sous-systèmes, par le tableau suivant (3.1) :

TAB. 3.1 : resultats pid

Paramètre	$k_p$	$k_i$	$k_d$
Sous-système vertical	0.7019	1.6529	1.8162
Sous-système horizontal	9.9434	0.005	9.1608

Les figures (3.2) et (3.3) représentent les résultats de la simulation en boucle fermée de la commande PID optimisée :

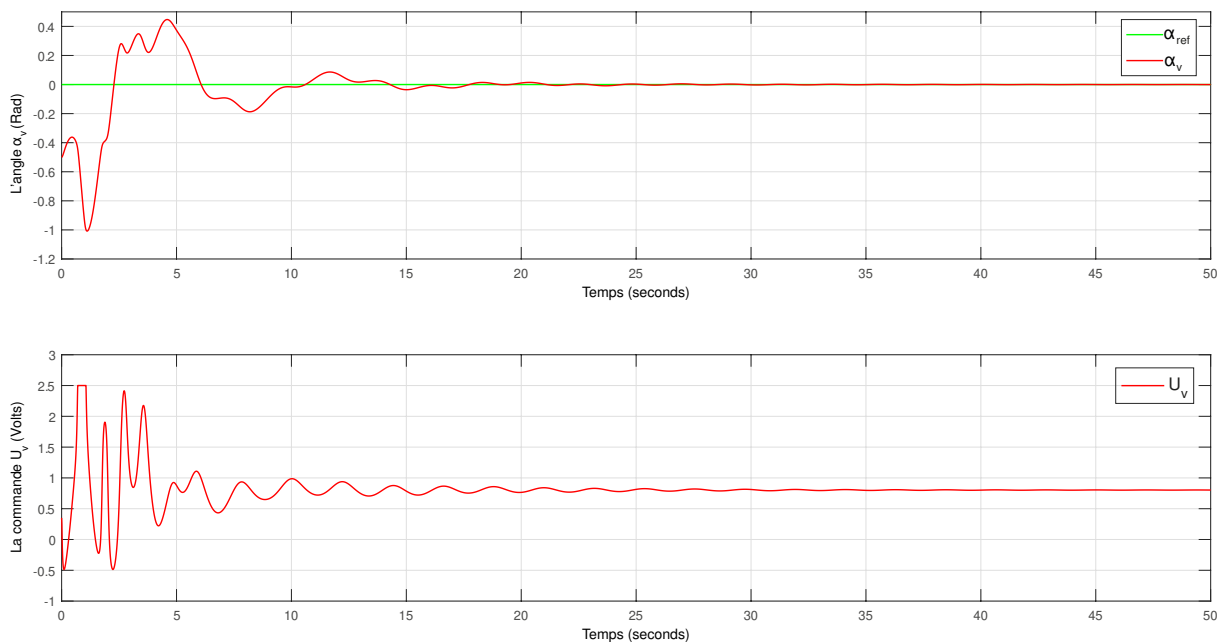


FIG. 3.2 : Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante

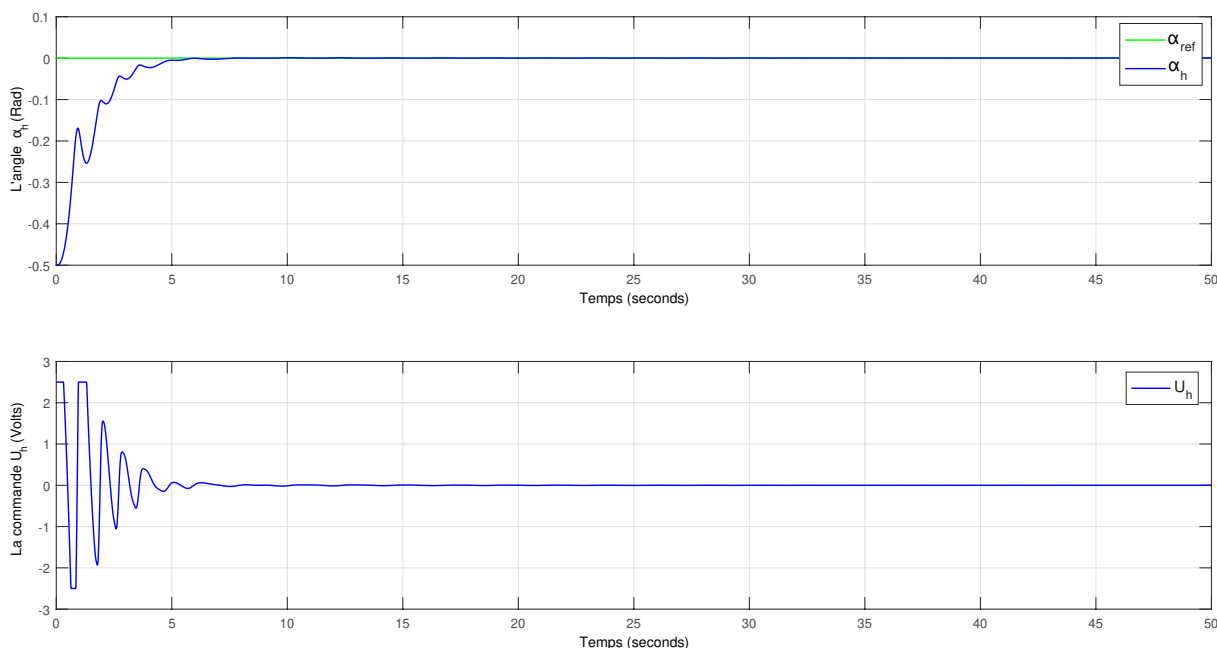


FIG. 3.3 : Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante

Afin de tester la robustesse de notre commande, nous procédons à des modifications des paramètres de notre TRMS. Nous ajoutons une masse supplémentaire à la représentation mathématique pour prendre en compte une erreur de modélisation, et nous varions la position du contrepoids de 7 cm. Les résultats des simulations des réponses à l'échelon dans ce cas sont les suivants (voir figure (3.4) et (3.5)) :

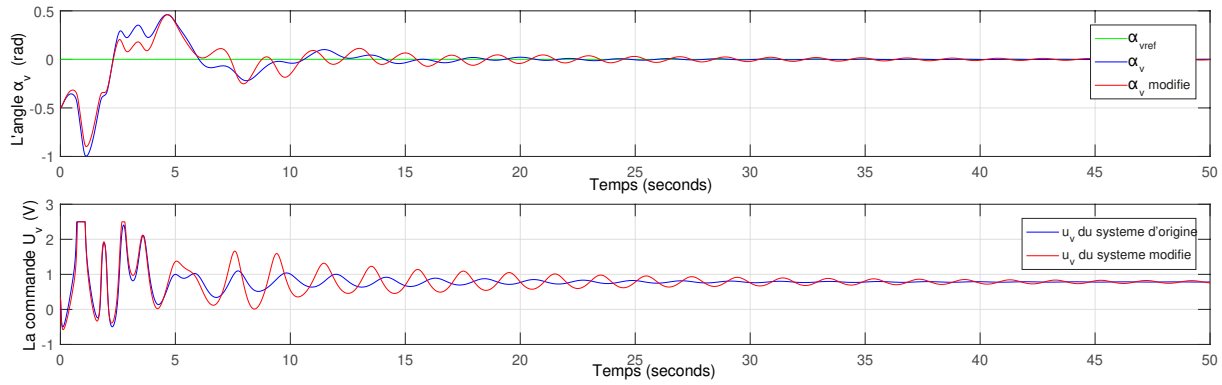


FIG. 3.4 : Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante pour le système modifié

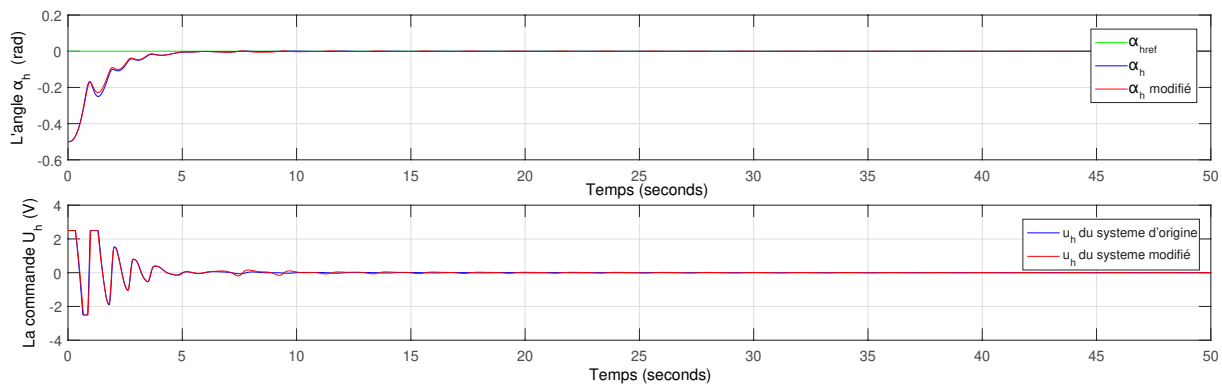


FIG. 3.5 : Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante pour le système modifié

### 3.2.4 Interprétation des résultats

D'après les résultats obtenus ci-dessus, on peut remarquer que :

- Les deux sous-systèmes convergent vers le point de stabilisation.
- Pour le système vertical, les oscillations sont toujours présentes, mais contrairement à la boucle ouverte, ils sont atténués au fur et à mesure avec le temps.
- Pour le système horizontal, le gain  $K_{Ih}$  estimé est nul. ce qui confirme notre hypothèse du comportement de ce sous-système comme un intégrateur, du coup, il sera utile de réduire la dimension des paramètres du PSO à estimer à 5.
- Pour le test robustesse, on voit bien quelques oscillations qui apparaissent pour le système modifié, surtout pour le sous-système vertical.
- Pour les signaux de commande, on peut remarquer l'effet de la saturation à  $\pm 2.5V$ .

### 3.3 La commande PID fractionnaire (FOPID)

Le régulateur PID, en plus de sa simplicité, est largement utilisé dans l'industrie. Cependant, ses performances deviennent insuffisantes dans certains cas, notamment en présence d'un retard significatif dans le modèle du processus ou lorsque les paramètres du processus varient. Dans de tels cas, d'autres algorithmes de réglage sont utilisés, tels que le réglage par retour d'état, le réglage par modèle interne et le réglage par mode glissant..., etc.

Récemment, Podlubny a proposé le régulateur fractionnaire FOPID comme une généralisation du régulateur PID conventionnel [33], dans lequel les actions dérivée et intégrale sont étendues respectivement pour des ordres réels positifs  $\lambda$  et  $\mu$ , afin d'améliorer le comportement du correcteur PID en termes de robustesse et performance. La fonction de transfert de ce régulateur peut être exprimée par :

$$C(s) = k_p + k_i \frac{1}{s^\lambda} + k_d s^\mu \quad (3.10)$$

avec  $k_p$  qui représente le gain proportionnel,  $k_i$  le gain de l'intégrateur et  $k_d$  le gain du dérivateur.

La figure (3.6) illustre comment le régulateur PID fractionnaire généralise et étend le régulateur PID classique d'un point à un plan (une infinité de points).

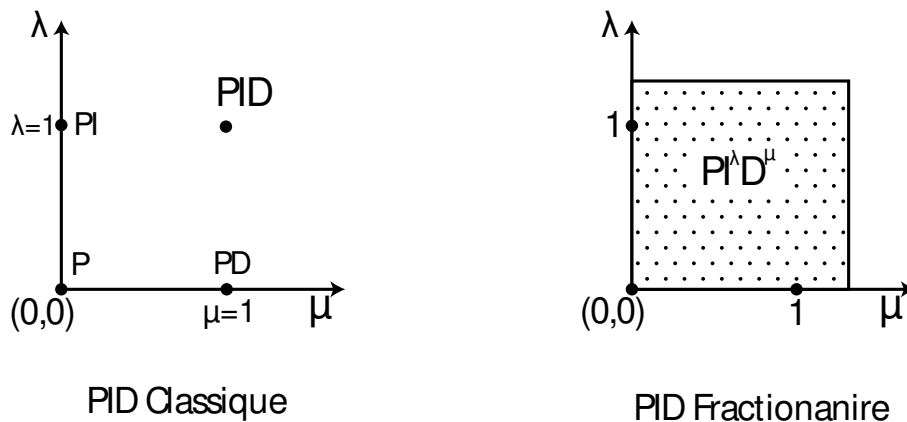


FIG. 3.6 : Relation entre les deux correcteurs

Clairement, pour  $\lambda = 1$  et  $\mu = 1$ , un correcteur PID classique peut être récupéré. Ainsi, on peut dire que ce type de correcteurs PID, y compris les deux régulateurs P et PI, sont des cas spéciaux du correcteur FOPID d'ordre fractionnaire. Cette expansion pourrait fournir une plus grande flexibilité dans la synthèse de la commande PID.

#### 3.3.1 Méthodes du réglage et la synthèse du régulateur FOPID

De nombreuses méthodes ont été proposées pour estimer les paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire (FOPID), notamment celles menées par Monje [34] et Valerio [35], où l'approche du premier consiste à formuler le problème de commande et de robustesse



en un problème d'optimisation à cinq inconnues. Ces cinq inconnues correspondent aux cinq paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire FOPID.

Une amélioration de cette méthode a été proposée par Valerio, dans cette technique, qui s'inspire de la méthode de Ziegler et Nichols utilisée pour le PID classique, une solution analytique pour le problème de commande et de robustesse du correcteur FOPID a été déterminée en utilisant la réponse indicielle du processus.

Il existe d'autres méthodes qui sont basées sur les techniques et les critères classiques utilisées pour la synthèse des régulateurs PID, on peut citer :

- **Spécifications de marge de phase ( $\phi_m$ ) et de gain de fréquence de coupure ( $\omega_c$ ) :**

Les conditions définissant la marge de phase et le gain de la fréquence de coupure sont les suivantes :

$$\begin{cases} |C(j\omega_c)G(j\omega_c)|_{dB} = 0 \text{ dB} \\ \arg(C(j\omega_c)G(j\omega_c)) = \phi_m - \pi \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $C(s)$  est la fonction de transfert du régulateur et  $G(s)$  est la fonction de transfert du système.

- **Spécification de la marge de gain :**

La marge de gain est donnée par :

$$\begin{cases} \arg(C(j\omega_{- \pi})G(j\omega_{- \pi})) = -\pi \\ M_g = \frac{1}{C(j\omega_{- \pi})G(j\omega_{- \pi})} \end{cases} \quad (3.12)$$

- **Spécification de la robustesse aux variations du gain du système :**

Cette condition vise à garantir que la phase de la boucle ouverte du système  $\arg(G_{C(s)G(s)})$  reste constante autour de  $\omega_c$ , assurant ainsi la robustesse face aux variations du gain du système. Pour cela, il faut vérifier la contrainte suivante :

$$\left. \frac{d \arg(C(j\omega)G(j\omega))}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = 0 \quad (3.13)$$

- **Rejet des perturbations :**

Afin d'assurer un bon rejet des perturbations en sortie, on impose que la fonction de sensibilité  $S_y(j\omega)$  satisfait la condition suivante :

$$\begin{aligned} |S_y(j\omega)|_{dB} &= \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq A \text{ dB} \\ \Rightarrow |S_y(j\omega)|_{dB} &= A \text{ dB} \quad \forall \omega \leq \omega_1 \text{ rad/sec} \end{aligned} \quad (3.14)$$

où  $A$  représente l'atténuation souhaitée des perturbations en sortie et  $\omega_1$  définit la plage de fréquences des perturbations à atténuer.

- **Rejet du bruit :**

Pour assurer le rejet du bruit, il est nécessaire que la fonction de sensibilité complémentaire  $T_y(j\omega)$  respecte la contrainte suivante :

$$|T_y(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} \leq B \text{ dB}$$

$$\Rightarrow |T_y(j\omega)|_{dB} = B \text{ dB} \quad \forall \omega \geq \omega_2 \text{ rad/sec} \quad (3.15)$$

où  $B$  correspond à l'atténuation désirée du bruit pour les fréquences  $\omega \geq \omega_2$ , rad/sec

Étant donné que dans notre cas que nous nous appuyons sur la représentation non linéaire du TRMS, et comme nous n'avons pas la représentation fréquentielle, nous ne pouvons pas utiliser directement les méthodes mentionnées ci-dessus, donc nous allons opter, comme la dernière partie de la commande PID d'ordre entier, pour utiliser d'algorithme révolutionnaire d'optimisation PSO pour déterminer les meilleurs paramètres.

### 3.3.2 La synthèse de la commande FOPID du TRMS

Pour notre système TRMS, les sorties des correcteurs FOPID d'ordre fractionnaire sont décrites, pour chaque sous-système, par les lois de commande suivantes :

$$u_v(t) = k_{Pv} + k_{Iv} D_t^{-\lambda_v} e_v(t) + k_{Dv} D_t^{\mu_v} e_v(t), \quad e_v(t) = \alpha_{vr}(t) - \alpha_v(t) \quad (3.16)$$

$$u_h(t) = k_{Ph} + k_{Ih} D_t^{-\lambda_h} e_h(t) + k_{Dh} D_t^{\mu_h} e_h(t), \quad e_h(t) = \alpha_{vr}(t) - \alpha_v(t) \quad (3.17)$$

Comme on a fait précédemment dans la commande PID, avec 4 paramètres supplémentaires à estimer, le vecteur des paramètres devient :

$$K = [k_{Ph}, k_{Ih}, k_{Dh}, k_{Pv}, k_{Iv}, k_{Dv}, \lambda_h, \lambda_v, \mu_h, \mu_v]$$

on limite l'espace de recherche avec :

$$0 \leq k_{Ph}, k_{Ih}, k_{Dh}, k_{Pv}, k_{Iv}, k_{Dv} \leq 15$$

$$0 \leq \lambda_h, \lambda_v, \mu_h, \mu_v \leq 2$$

le nombre de particules, le nombre d'itérations ainsi que la fonction de coût restent les mêmes De plus, d'après les résultats de la commande PID, on peut reformuler le problème d'optimisation sans inclure  $k_{Ih}$ , et donc  $\lambda_h$ , en diminuant la dimension du problème à 8.

### 3.3.3 Simulations et résultats

Les gains estimés par l'algorithme PSO sont présentés par le tableau suivant (3.2) :

TAB. 3.2 : Résultat du réglage des paramètres pour la commande FOPID

Paramètre	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$\lambda$	$\mu$
Sous-système vertical	8.9	2.075	4.814	1.1	1.4016
Sous-système horizontal	0.8746	0	0.5916	0	1.0586

Les figures (3.7) et (3.8) représentent les résultats de simulations pour la stabilisation :

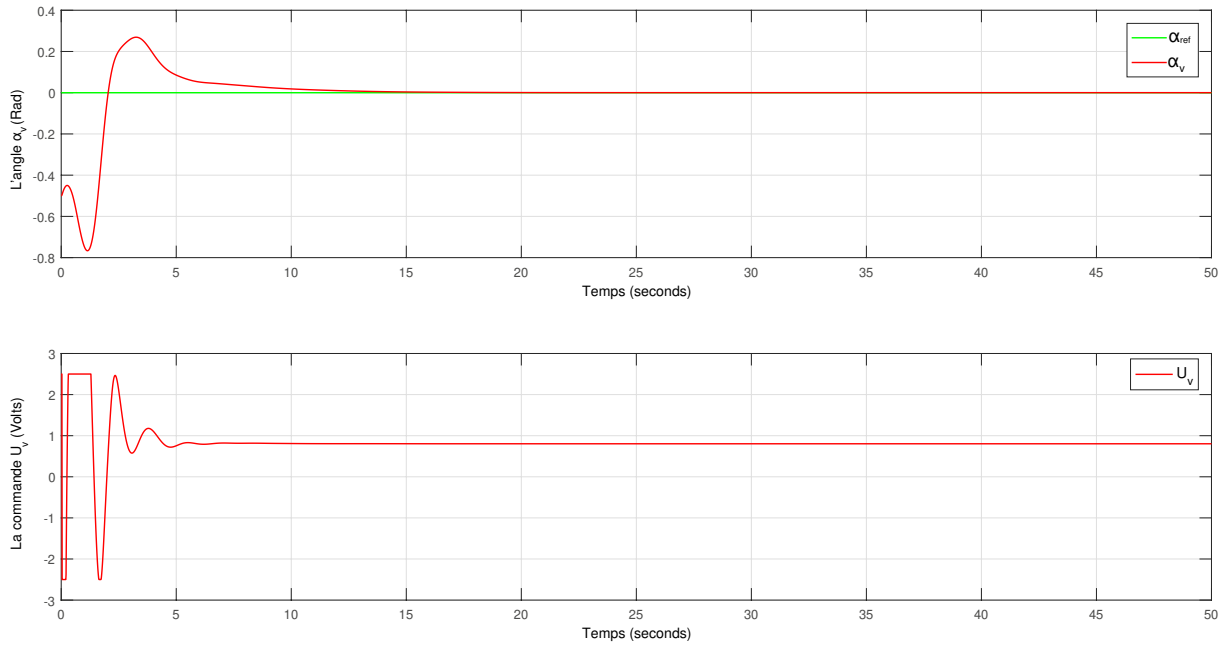


FIG. 3.7 : réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante

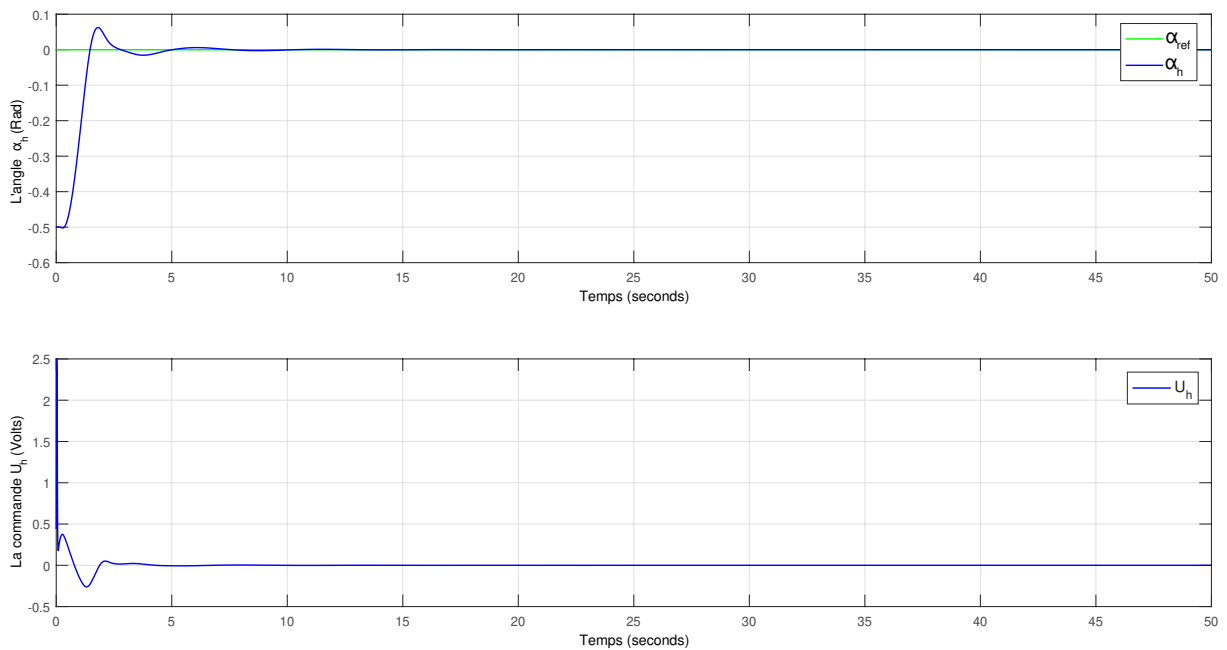


FIG. 3.8 : réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante

Afin de tester la robustesse de notre commande, nous appliquons la commande trouvée dans le système modifié défini précédemment. Les résultats des simulations sont les suivants (voir figure (3.9) et (3.10)) :

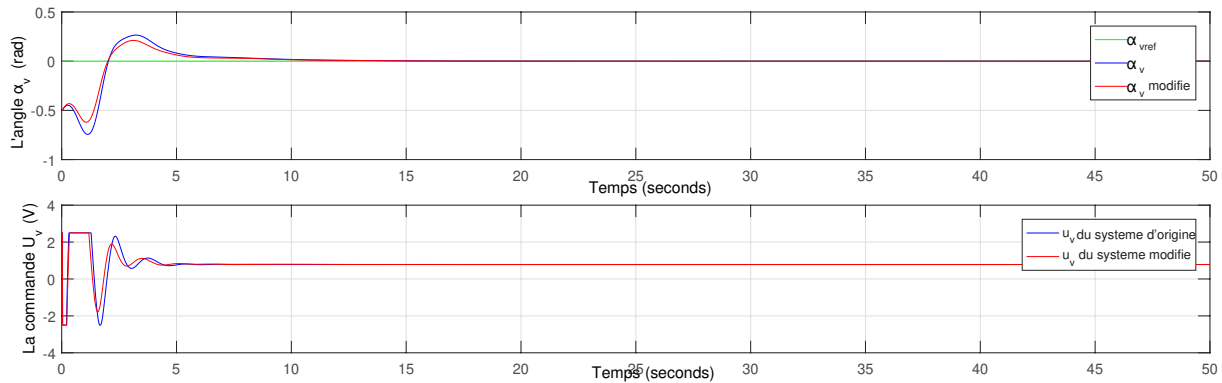


FIG. 3.9 : Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante pour le système modifié

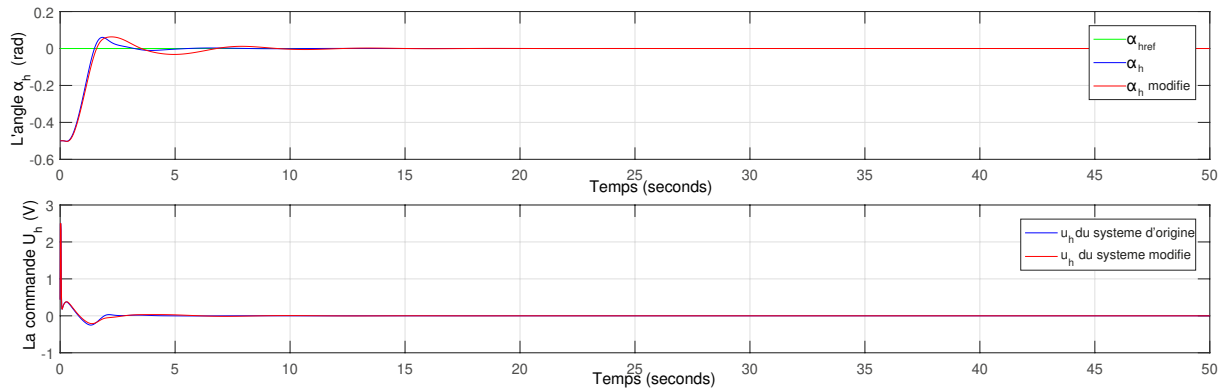


FIG. 3.10 : Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante pour le système modifié

### 3.3.4 Interprétation des résultats

Suite à ces résultats, on peut tirer les remarques suivantes :

- Les deux sous-systèmes convergent vers le point de stabilisation.
- Pour le sous-système vertical, on remarque une réponse plus lisse, avec une atténuation quasi-totale des oscillations.
- Pour le sous-système horizontal, le gain  $K_{Ih}$  estimé est toujours nul, ce qui néglige l'effet de  $\lambda_h$  dans la commande.
- Pour la robustesse, on voit bien que les deux sous-systèmes sont robustes et qu'ils donnent quasiment les mêmes résultats que le système original.
- Pour les signaux de commande, l'effet de la saturation est toujours actif dans les 3 premières secondes.

### 3.4 Étude comparative entre la commande PID et FOPID

Dans cette partie, nous allons faire une comparaison et analyse qualitative des deux régulateurs PID et FOPID. Les différentes simulations vont couvrir plusieurs aspects tels que la stabilisation, la poursuite de référence, la robustesse aux erreurs de modélisation, ainsi que le rejet des perturbations externes.

Cette analyse, qui est suivie par une étude quantitative a travers un critère RMSE, pourra fournir des indications précieuses pour comprendre les avantages et les limitations de chaque régulateur et peuvent aider à guider les décisions de conception et d'optimisation du système de commande.

On commence notre étude comparative par un test de poursuite ou en changeant l'entre avec un signal carré de la forme :

$$\begin{cases} 0.4, & \text{si } 20.(2m - 2) < t < 20.(2m - 1), m \in \mathbb{N}^* \\ -0.4, & \text{sinon} \end{cases}$$

comme montré ci-dessous dans la figure (3.11) :

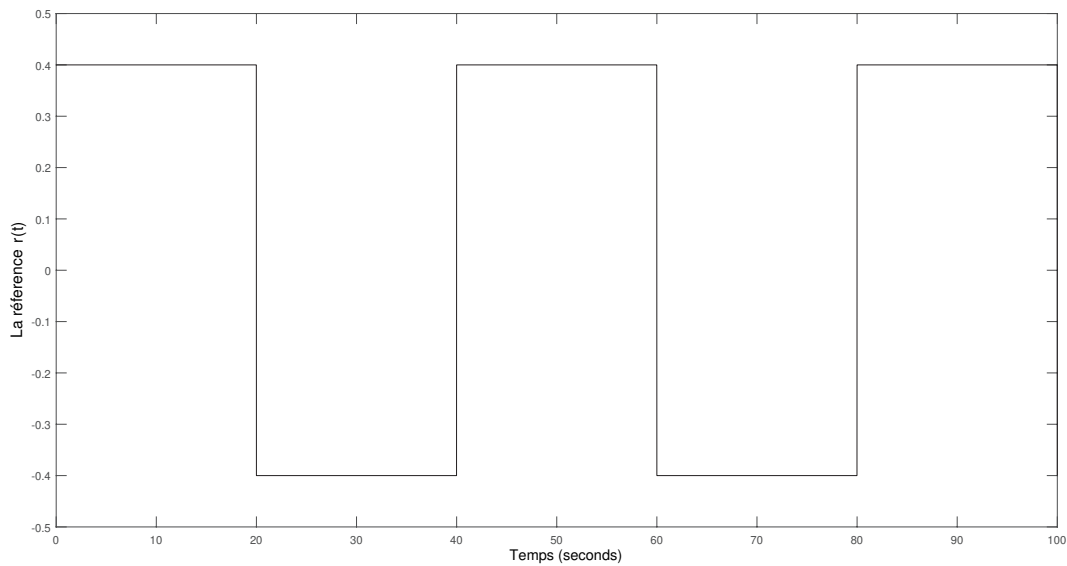


FIG. 3.11 : La trajectoire de référence du type signal carré pour le test de poursuite

On obtient les résultats suivants (Voir figure (3.12) pour le sous-système vertical et (3.13) pour le sous-système horizontal) :

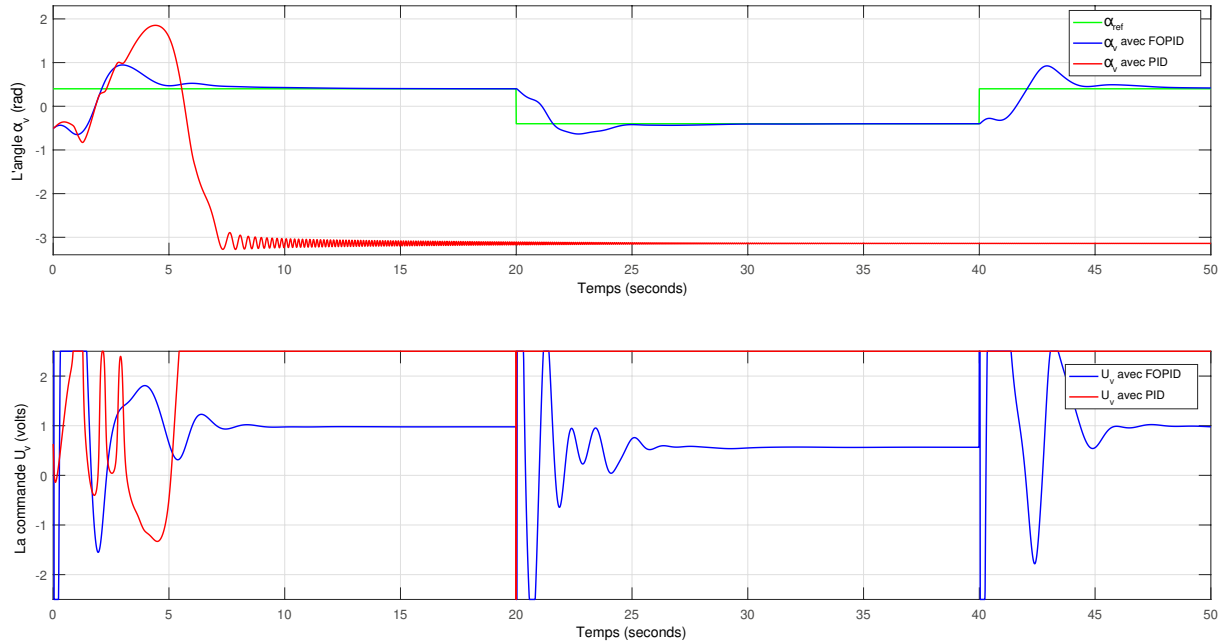


FIG. 3.12 : Réponse du sous-système vertical des deux différentes commandes pour une trajectoire carrée

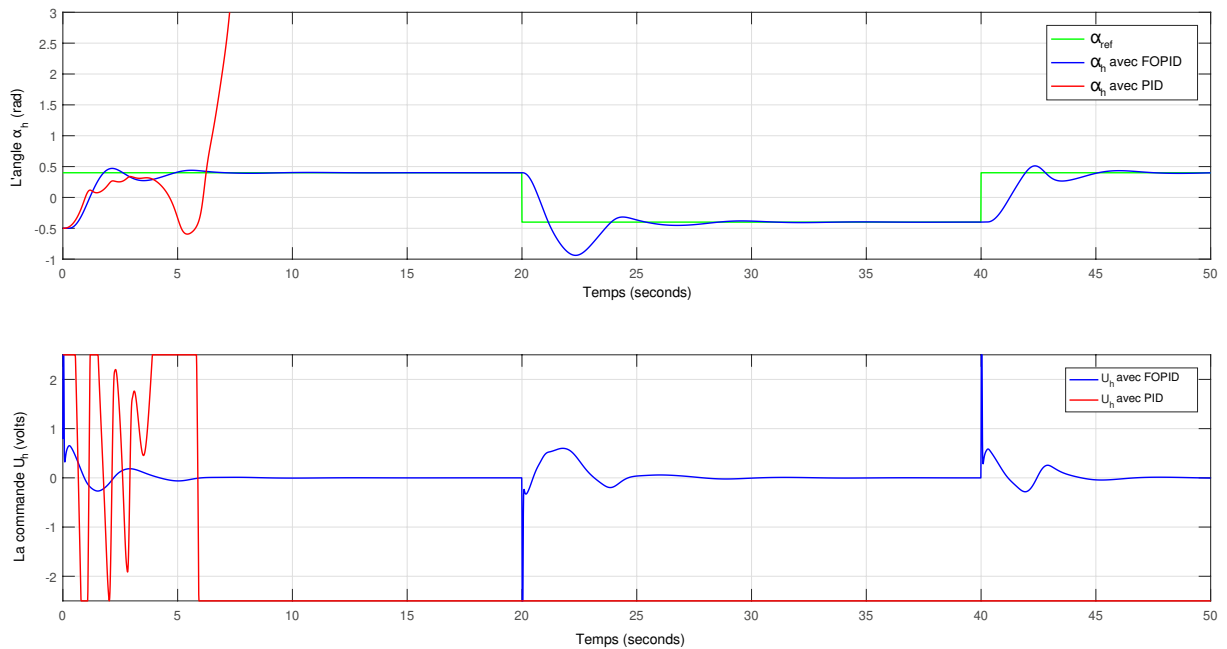


FIG. 3.13 : Réponse du sous-système horizontal des deux différentes commandes pour une trajectoire carrée

Pour le test de rejet de perturbations, on ajoute une grande perturbation externe sinusoïdale d'amplitude  $A = 1$  en sorties, pendant 8 sec et on visualise les résultats obtenus. La forme de la perturbation et la suivante :

$$d(t) = A \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

comme montré ci-dessous dans la figure (3.14) :

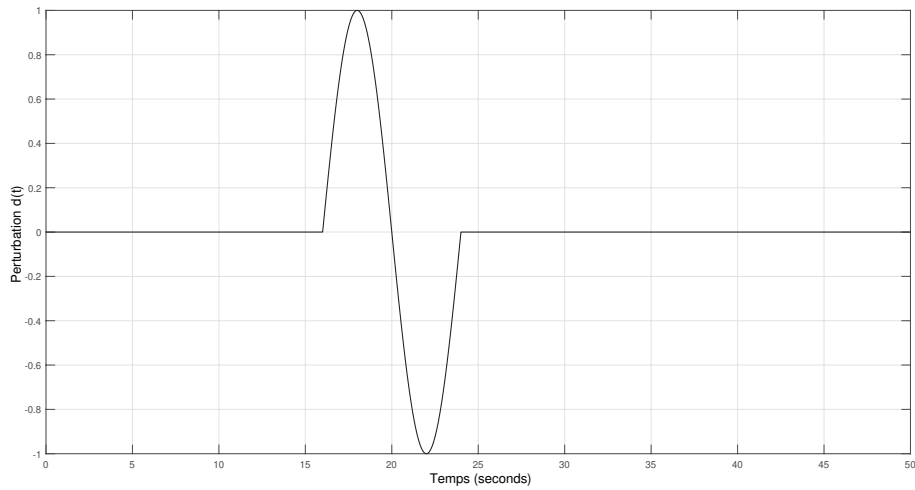


FIG. 3.14 : Le signal de perturbation à appliquer aux deux sorties

On obtient les résultats suivants (Voir figures (3.15) pour le sous-système vertical et (3.16) pour le sous-système horizontal) :

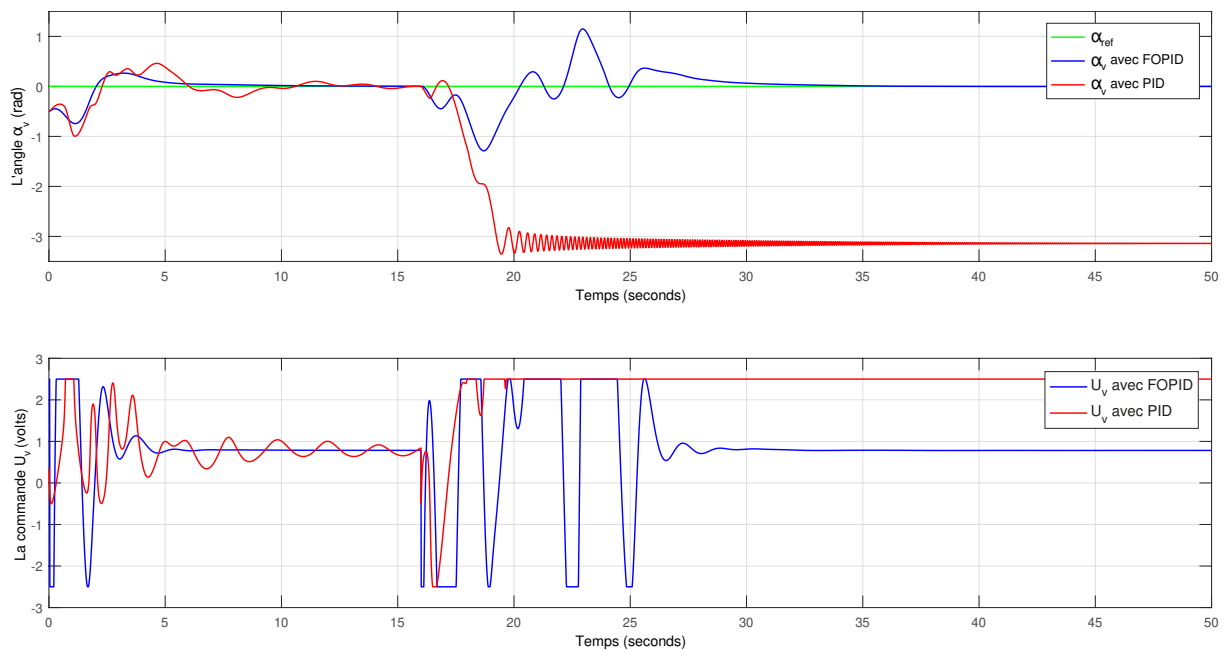


FIG. 3.15 : Réponse du sous-système horizontal pour les deux différentes commandes

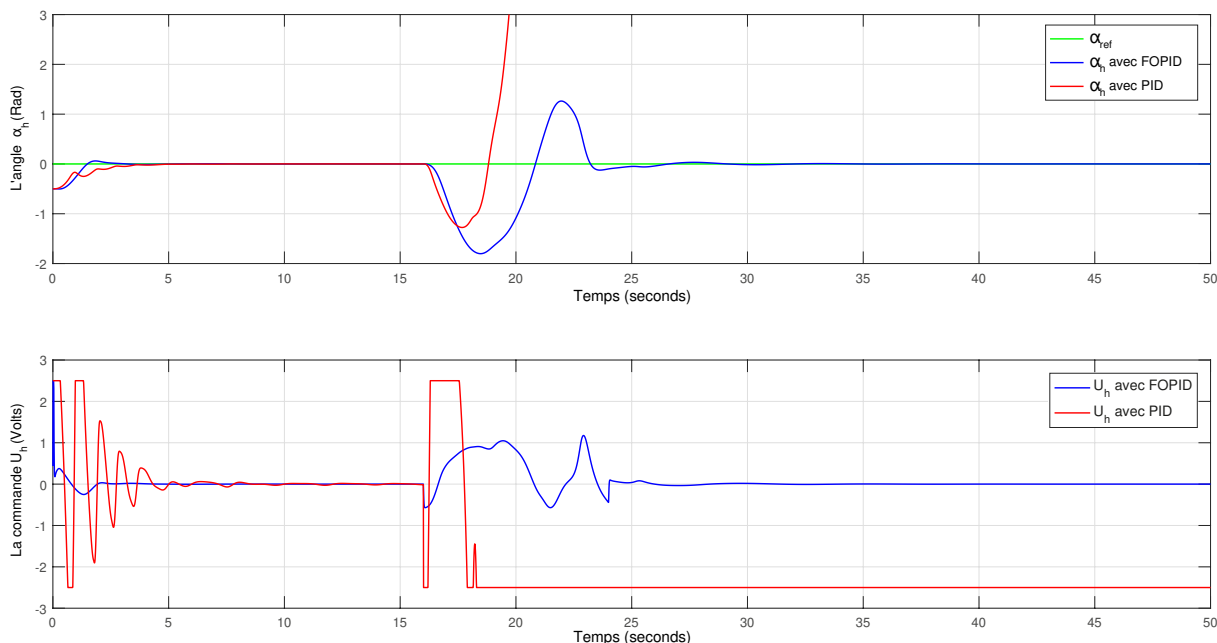


FIG. 3.16 : Réponse du sous-système horizontal pour les deux différentes commandes

### 3.4.1 Interprétation des résultats

Afin d'évaluer les performances du système, on a opté à utiliser le critère de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Square Error (RMSE)), qui est donnée comme suit :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((y_i - y_{d_i})^2)} \quad (3.18)$$

où  $y_d$  est la trajectoire désirée,  $y_i$  est la trajectoire actuelle et  $n$  désigne le nombre d'échantillons dans l'intervalle de simulation.

Le tableau (3.3) résume les performances obtenues :

TAB. 3.3 : Comparaison des performances des commandes PID et FOPID à travers le critère RMSE

Cas	PID		FOPID	
	$\alpha_v$	$\alpha_h$	$\alpha_v$	$\alpha_h$
Stabilisation	$4.8653 \cdot 10^{-4}$	$3.2088 \cdot 10^{-6}$	$2.1606 \cdot 10^{-4}$	$5.3912 \cdot 10^{-6}$
Robustesse	$2.9951 \cdot 10^{-3}$	$8.3124 \cdot 10^{-5}$	$2.3957 \cdot 10^{-4}$	$5.6665 \cdot 10^{-6}$
Poursuite	1.7675	$1.608 \cdot 10^2$	$8.708 \cdot 10^{-3}$	$1.2482 \cdot 10^{-3}$
Perturbation	3.137	$9.6153 \cdot 10^2$	$1.1892 \cdot 10^{-3}$	$1.8639 \cdot 10^{-4}$

Après avoir effectué plusieurs simulations de commande PID et de commande FOPID, des observations significatives ont été constatées, où on voit bien la supériorité des résultats obtenus par la commande FOPID par rapport à la commande PID, selon les différents



critères de performance. Les remarques suivantes résument les principales conclusions de l'analyse :

- Pour le test de stabilisation, la commande FOPID réduit instantanément et totalement les oscillations du sous-système d'élévation, tandis que le régulateur PID ne parvient à les réduire que partiellement au fil du temps.
- Le régulateur FOPID permet d'obtenir des réponses plus rapides et plus fluides par rapport au régulateur PID.
- Les signaux de commande du régulateur FOPID sont plus lisses.
- Les réponses du régulateur FOPID présentent un dépassement minimal, en particulier dans le sous-système d'élévation, ce qui est significativement inférieur à celui observé avec le régulateur PID.
- Pour la poursuite de référence, le régulateur FOPID montre une capacité acceptable de suivi de référence pour une référence variable aléatoire, tandis que le régulateur PID a du mal à la suivre et diverge.
- Pour la robustesse, le régulateur FOPID présente une plus grande robustesse aux erreurs de modélisation.
- Pour le rejet des perturbations externes, la commande FOPID est capable de rejeter parfaitement les perturbations de l'ordre de  $1 \text{ rad}$ , tandis que le système avec la commande PID diverge lorsqu'il est soumis à ces dernières.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé des régulateurs PID et FOPID pour le TRMS en utilisant l'algorithme PSO comme un outil d'optimisation, avec lequel on a pu estimer les gains optimaux des deux commandes PID et FOPID ainsi que les ordres de ce dernier. Nous avons également établi une comparaison quantitative et qualitative des résultats obtenus à partir de la réponse en boucle fermée des régulateurs PID et FOPID du TRMS, un système fortement non linéaire, où la commande FOPID a montré, à travers la grande flexibilité qu'elle offre dans la synthèse, des meilleures performances dans la plupart des aspects : le dépassement, le temps de réponse, les réponses lisses, la robustesse aux erreurs de modélisation, le suivi de référence, et le rejet de perturbations.

## Chapitre 4

Commandes par mode glissant et  
mode glissant d'ordre fractionnaire  
optimisées

## 4.1 Introduction

La commande par mode glissant est une approche largement reconnue pour son efficacité, comme en témoignent les études théoriques et pratiques réalisées. L'étude des modes de glissement a débuté en URSS et en Yougoslavie dans les années 60, et ces travaux ont été poursuivis ailleurs, soit pour développer l'étude théorique, soit pour explorer certaines applications potentielles [36][37].

Ce chapitre vise à exposer les concepts fondamentaux du formalisme de la commande par mode glissant. Nous commençons par une brève explication du principe de cette commande ainsi que du choix de la surface de glissement. De plus, nous introduisons également une commande de mode de glissement d'ordre fractionnaire, avant de procéder, finalement, à une étude comparative des résultats obtenus par la simulation de ces deux commandes, permettant ainsi de mettre en évidence les différences et les performances respectives.

## 4.2 La théorie de la commande par mode glissant

La technique de commande par modes glissants est une approche non linéaire de commande caractérisée par la présence d'une discontinuité dans la commande lors du passage par une surface de commutation appelée surface de glissement. L'idée principale derrière la technique des modes glissants est d'amener la trajectoire d'état d'un système vers cette surface de glissement et de la faire commuter de manière appropriée autour de celle-ci jusqu'à atteindre le point d'équilibre, ce qui donne lieu au phénomène de glissement (voir figure (4.1)).

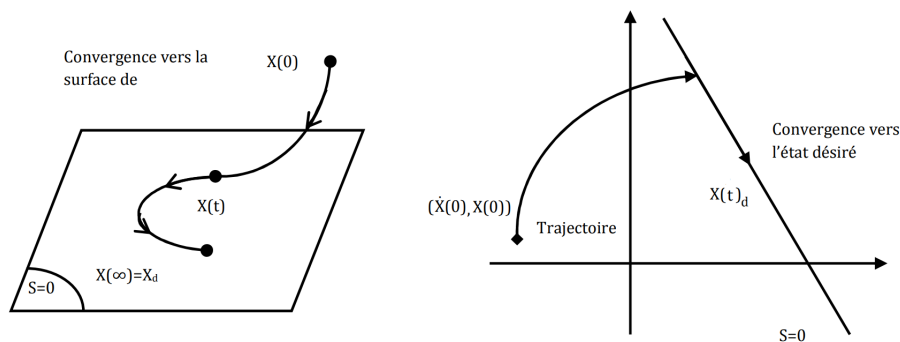


FIG. 4.1 : Convergence du système glissant

En résumé, une commande par modes glissants se divise en deux parties distinctes [38] :

- La détermination d'une région dans l'espace d'état, telle que lorsque le système se trouve dans cette région, il adopte le comportement désiré.
- La définition d'une loi de commande qui conduit le système jusqu'à cette surface.

### 4.2.1 Synthèse de la commande par mode glissant

On a le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

La synthèse d'un régulateur par mode de glissement pour le système (4.1) est fait comme suivant :

#### Choix de la surface de glissement

Le choix de la surface de glissement est conditionné par l'application et l'objectif visé. On trouve dans la littérature que Slotine a introduit une fonction scalaire donnée par [39] :

$$S(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{r-1} e(x) \quad (4.2)$$

Avec :

$x$  : La variable à commander.

$e(x) = x_d - x$  : l'erreur à éliminer.

$\lambda$  : Une constante positive qui interprétera la dynamique de la surface.

$r$  : Le degré relatif du système.

#### Condition d'existence du régime glissant

La condition d'attractivité est la condition selon laquelle la trajectoire d'état d'un système atteint la surface de glissement. Elle est également connue sous le nom de "condition d'accès à la surface de glissement". Il existe deux types de conditions d'accès à la surface de glissement : l'approche directe et l'approche de Lyapunov.

Dans ce contexte, nous utiliserons l'approche directe, qui est la plus ancienne et a été proposée par Emilyanov et Utkin [40]. Elle est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{S}(x) > 0 & \text{Lorsque } S(x) < 0 \\ \dot{S}(x) < 0 & \text{Lorsque } S(x) > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Ces deux conditions peuvent être reformulées en une seule condition, comme suit :

$$S(x)\dot{S}(x) < 0 \quad (4.4)$$

Cette condition garantit l'attractivité de la trajectoire de phase vers la surface  $S$ .

#### Établissement de la loi de commande

Dans le but de garantir que les états du système atteignent la surface de glissement et y restent, même en présence d'incertitudes et de perturbations, la commande  $u$  doit être composée de deux termes [41] comme suit :

- La commande équivalente est utilisée pour déterminer le comportement du système

lorsqu'un régime glissant idéal est établi. Elle peut être calculée en se basant sur la condition d'invariance de la surface :

$$\begin{cases} S(x, t) = 0 \\ \dot{S}(x, t) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Ce qui conduit au suivant :

$$u_{eq} = -\left[\frac{\partial S}{\partial x}g(x, t)\right]^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial x}f(x, t) + \frac{dS}{dt}\right) \quad (4.6)$$

- La deuxième commande correspond à une commande qui permet de garantir la condition d'attractivité :  $S(x)\dot{S}(x) < 0$ .

Elle est généralement de la forme d'une fonction discontinue comme suit :

$$u_{att} = -K \text{sign}(S) \quad (4.7)$$

Donc, la commande  $u$  sera :

$$u = -\left[\frac{\partial S}{\partial x}g(x, t)\right]^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial x}f(x, t) + \frac{dS}{dt}\right) - K \text{sign}(S) \quad (4.8)$$

### Le phénomène de Chattering

Un régime glissant idéal nécessite une commande capable de commuter à une fréquence infinie. Cependant, dans les applications pratiques, seule une commutation à une fréquence finie est réalisable, ce qui engendre un délai entre la mesure de la sortie et le calcul de la commande. En conséquence, le système peut sortir de la surface de glissement avant que la commande puisse réagir, comme le soulignent les références [38], [41].

Pendant le régime glissant, les discontinuités de la commande peuvent provoquer des oscillations à haute fréquence de la trajectoire du système autour de la surface de glissement. Ce phénomène est connu sous le nom de broutement ou chattering (Voir figure (4.2)). En conséquence, les performances et la robustesse du système sont altérées, ce qui peut éventuellement conduire à l'instabilité.

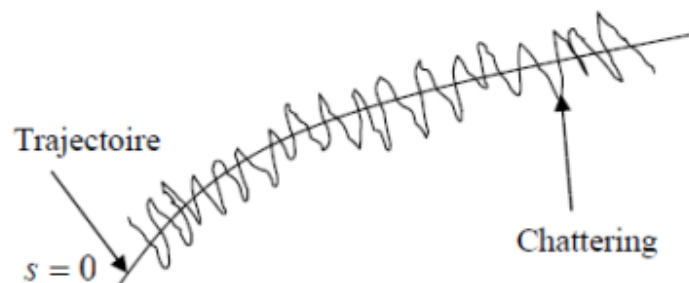


FIG. 4.2 : Phénomène du Chattering

Diverses approches ont été proposées pour réduire ou éliminer le phénomène de brou-

tement. Une méthode couramment utilisée est celle de la couche limite, qui consiste à remplacer la fonction signe de la loi de commande par une approximation continue à gain élevé dans une zone proche de la surface de glissement, tandis qu'elle est saturée en dehors de cette zone. Cela permet d'obtenir un régime glissant dit « pseudo-glissant » où le système n'est plus strictement confiné à la surface de glissement, mais plutôt à son voisinage. Cependant, ces méthodes entraînent une réduction de la robustesse de la commande. Afin d'obtenir un bon compromis entre la réduction du broutement et la préservation de la robustesse, on utilise un paramètre constant positif,  $\delta$ , qui peut être ajusté. Dans les méthodes présentées ci-dessous, plus  $\delta$  est petit, plus l'approximation se rapproche de la fonction signe, ces fonctions sont :

- La fonction saturation :

$$sat(\sigma, \delta) = \begin{cases} sign(\sigma) & si \quad |\sigma| \geq \delta \\ \frac{\sigma}{\delta} & si \quad |\sigma| \leq \delta \end{cases} \quad (4.9)$$

- La fonction pseudo-signe :

$$v(\sigma, \delta) = \frac{\sigma}{|\sigma| + \delta} \quad (4.10)$$

- La fonction arc tangente :

$$v(\sigma, \delta) = \frac{2}{\pi} arctan\left(\frac{\sigma}{\delta}\right) \quad (4.11)$$

- La fonction tangente hyperbolique :

$$v(\sigma, \delta) = tanh\left(\frac{\sigma}{\delta}\right) \quad (4.12)$$

## 4.3 Commande par mode de glissement du TRMS

### 4.3.1 Choix de la surface de glissement

La surface de glissement choisie est celle de Slotine qui a été présentée précédemment, dont son expression est :

$$S(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{r-1} e(x) \quad (4.13)$$

$S = 0$  représente une équation différentielle qui a comme solution :  $e = p(t)exp(-\lambda t)$ , on peut confirmer que cette solution vérifie bien les objectifs de poursuite car :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e = 0$$

Pour notre système, on a deux surfaces pour chaque sous-système :

$$\begin{cases} S_v = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_v\right)^{r_v-1} e_v \\ S_h = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_h\right)^{r_h-1} e_h \end{cases} \quad (4.14)$$

On calcule les degrés relatifs  $r_h$  et  $r_v$  pour chaque surface :

#### A. Le degré relatif de la surface verticale $r_v$

On a la représentation d'état dans le plan vertical comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_v x_2 \\ \dot{x}_2 = F_v(x_3) - G_v(x_1) - B_v x_2 \\ \dot{x}_3 = -C_v x_3 + D_v u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Avec :

$$A_v = \frac{1}{J_v}$$

$$B_v = \frac{k_v}{J_v}$$

$$C_v = \frac{1}{T_{mr}}$$

$$D_v = \frac{k_{mr}}{T_{mr}}$$

$$F_v(x_3) = l_m F_v(P_v(x_3))$$

$$G_v(x_1) = g((A - B)\cos(x_1) - C\sin(x_1))$$

On commence à dériver  $y$  jusqu'à l'apparition du terme de la commande  $u_v$  :

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{x}_1 = A_v x_2 \\ \ddot{y} = A_v \dot{x}_2 = A_v (F_v(x_3) - G_v(x_1) - B_v x_2) \\ \ddot{y} = A_v \left( \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} \dot{x}_3 - \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} - B_v \dot{x}_2 \right) = A_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} [-C_v x_3 + D_v u_v] \\ \quad - A_v^2 \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} x_2 - A_v B_v \dot{x}_2 \end{cases} \quad (4.16)$$

Comme la commande apparait dans la 3<sup>e</sup> dérivée de  $y$ , on peut conclure que le degré relatif du sous-système vertical est  $r_v = 3$ .

**B. Le degré relatif de la surface horizontale  $r_h$**

On a la représentation d'état dans le plan horizontal comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_h x_2 \\ \dot{x}_2 = F_h(x_3) - B_h x_2 \\ \dot{x}_3 = -C_h x_3 + D_h u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (4.17)$$

Avec :

$$A_h = \frac{1}{J_h(\alpha_{v0})}$$

$$B_h = \frac{k_h}{J_h(\alpha_{v0})}$$

$$C_h = \frac{1}{T_{tr}}$$

$$D_h = \frac{k_{tr}}{T_{tr}}$$

$$F_h(x_3) = l_t F_h(P_h(x_3))$$

On commence à dériver  $y$  jusqu'à l'apparition du terme de la commande  $u_h$  :

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{x}_1 = A_h x_2 \\ \ddot{y} = A_h \dot{x}_2 = A_h (F_h(x_3) - B_h x_2) \\ \dddot{y} = A_h \left( \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3} \dot{x}_3 - B_h \dot{x}_2 \right) = A_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3} [-C_h x_3 + D_h u_h] - A_h B_h \dot{x}_2 \end{cases} \quad (4.18)$$

Comme la commande apparaît dans la troisième dérivée de  $y$ , on peut conclure que le degré relatif du sous-système horizontal est  $r_h = 3$ .

Comme le degré relatif des deux sous systèmes (4.15) et (4.17) égale à 3, on obtient les deux surfaces de glissement suivantes :

$$\begin{cases} S_v = \ddot{e}_v + 2\lambda_v \dot{e}_v + \lambda_v^2 e_v \\ S_h = \ddot{e}_h + 2\lambda_h \dot{e}_h + \lambda_h^2 e_h \end{cases} \quad (4.19)$$

### 4.3.2 Calcul des lois de commande

**A. Calcul de la commande  $u_v$**

On a vu précédemment que  $u_v = u_{veq} + u_{vatt}$ , on commence par calculer  $u_{veq}$  en premier lieu, sur la surface de glissement on a  $\dot{S} = 0$ , d'après cette équation, et sachant que :

$$e_v = y - y_d = x_1 - x_{1d}$$



on peut tirer la commande  $u_{veq}$  comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{S}_v &= \lambda_v^2 \dot{e} + 2\lambda_v \ddot{e} + \ddot{e} \\ &= \lambda_v^2 \dot{e} + 2\lambda_v \ddot{e} + \ddot{x}_1 - \ddot{x}_{1d} \\ &= \lambda_v^2 \dot{e} + 2\lambda_v \ddot{e} - \ddot{x}_{1d} + A_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} [-C_v x_3 + D_v u_v] - A_v^2 \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} x_2 - A_v B_v \dot{x}_2\end{aligned}\quad (4.20)$$

Pour que  $\dot{S}_v = 0$ , la commande  $u_{veq}$  sera sous la forme :

$$u_{veq} = \frac{-1}{A_v D_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3}} \left[ \lambda_v^2 \dot{e} + 2\lambda_v \ddot{e} - \ddot{x}_{1d} - A_v C_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} x_3 - A_v^2 \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} x_2 - A_v B_v \dot{x}_2 \right] \quad (4.21)$$

Afin de garantir la condition d'attractivité  $S_v \dot{S}_v < 0$  et en ajoutant le terme  $u_{vatt}$ , la commande totale  $u_v$  devient :

$$u_v = \frac{-1}{A_v D_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3}} \left[ \lambda_v^2 \dot{e} + 2\lambda_v \ddot{e} - \ddot{x}_{1d} - A_v C_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} x_3 - A_v^2 \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} x_2 - A_v B_v \dot{x}_2 + K_v \text{sign}(S) \right] \quad (4.22)$$

On remplace cette commande dans  $S_v \dot{S}_v$  on trouve facilement :

$$S_v \dot{S}_v = -S_v K_v \text{sign}(S_v) < 0$$

ce qui vérifie la condition de convergence.

Afin d'éviter le phénomène du Chattering, on peut remplacer la fonction  $\text{sign}$  par la fonction du saturation  $\text{sat}$ , la commande devient :

$$u_v = \frac{-1}{A_v D_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3}} \left[ \lambda_v^2 \dot{e} + 2\lambda_v \ddot{e} - \ddot{x}_{1d} - A_v C_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} x_3 - A_v^2 \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} x_2 - A_v B_v \dot{x}_2 + K_v \text{sat}(S) \right] \quad (4.23)$$

## B. Calcul de la commande $u_h$

De la même manière que la commande  $u_v$  l'expression de  $u_h$  est :  $u_h = u_{heq} + u_{hatt}$ , on commence toujours par calculer  $u_{heq}$  :

On pose :  $e_h = y - y_d = x_1 - x_{1d}$

$$\begin{aligned}\dot{S}_h &= \lambda_h^2 \dot{e} + 2\lambda_h \ddot{e} + \ddot{e} \\ &= \lambda_h^2 \dot{e} + 2\lambda_h \ddot{e} + \ddot{x}_1 - \ddot{x}_{1d} \\ &= \lambda_h^2 \dot{e} + 2\lambda_h \ddot{e} - \ddot{x}_{1d} + A_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3} [-C_h x_3 + D_h u_h] - A_h B_h \dot{x}_2\end{aligned}\quad (4.24)$$

Pour que  $\dot{S}_h = 0$  la commande  $u_{heq}$  est sous la forme :

$$u_{heq} = \frac{-1}{A_h D_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3}} \left[ \lambda_h^2 \dot{e} + 2\lambda_h \ddot{e} - \ddot{x}_{1d} - A_h C_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3} x_3 - A_h B_h \dot{x}_2 \right] \quad (4.25)$$

Pour assurer la condition d'attractivité  $S_h \dot{S}_h < 0$  on ajoute le terme  $u_{hatt}$  à la commande  $u_{heq}$ , celle-ci nous donne la commande totale  $u_h$  comme suit :

$$u_h = \frac{-1}{A_h D_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3}} \left[ \lambda_h^2 \dot{e} + 2\lambda_h \ddot{e} - \ddot{x}_{1d} - A_h C_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3} x_3 - A_h B_h \dot{x}_2 + K_h \text{sat}(S) \right] \quad (4.26)$$

On peut aussi vérifier la condition de convergence facilement comme suit :

$$S_h \dot{S}_h = -S_h K_h \text{sat}(S_h) < 0$$

### 4.3.3 Résultats et simulations

La simulation a été effectuée en utilisant toujours l'outil MATLAB/Simulink, en étudiant la stabilisation de notre système autour du point d'équilibre  $(\alpha_v, \alpha_h) = (0, 0) \text{ rad}$  avec une condition initiale  $(-0.5, -0.5) \text{ rad}$ , avant réaliser la commande trouvé précédemment par le mode de glissement, il faut d'abord trouver les valeurs des paramètres  $[K_h, K_v, \lambda_h, \lambda_v]$  et pour cela et afin de trouver les valeurs optimales de ces paramètres, on fait appel à l'algorithme PSO introduit dans le chapitre précédent, en fixant ses paramètres comme suit : le nombre de particules est fixé à 30 particules, les paramètres d'algorithme sont aussi fixés comme précédent, et aussi les paramètres appartient à  $[0, 20]$ , on lance l'algorithme et en prenant les meilleurs paramètres avec la fonction coût minimale. On trouve alors les valeurs des paramètres estimés dans le tableau (4.1) suivants :

TAB. 4.1 : Résultat du réglage des paramètres pour la commande MG.

Paramètre	$K$	$\lambda$
sous-système vertical	2.5527	1.9988
sous-système horizontal	0.4483	1.9640

On obtient alors les résultats suivant (voir les figures (4.3) et (4.4)) ci-dessous qui affichent la réponse ainsi la commande pour les deux sous systèmes :

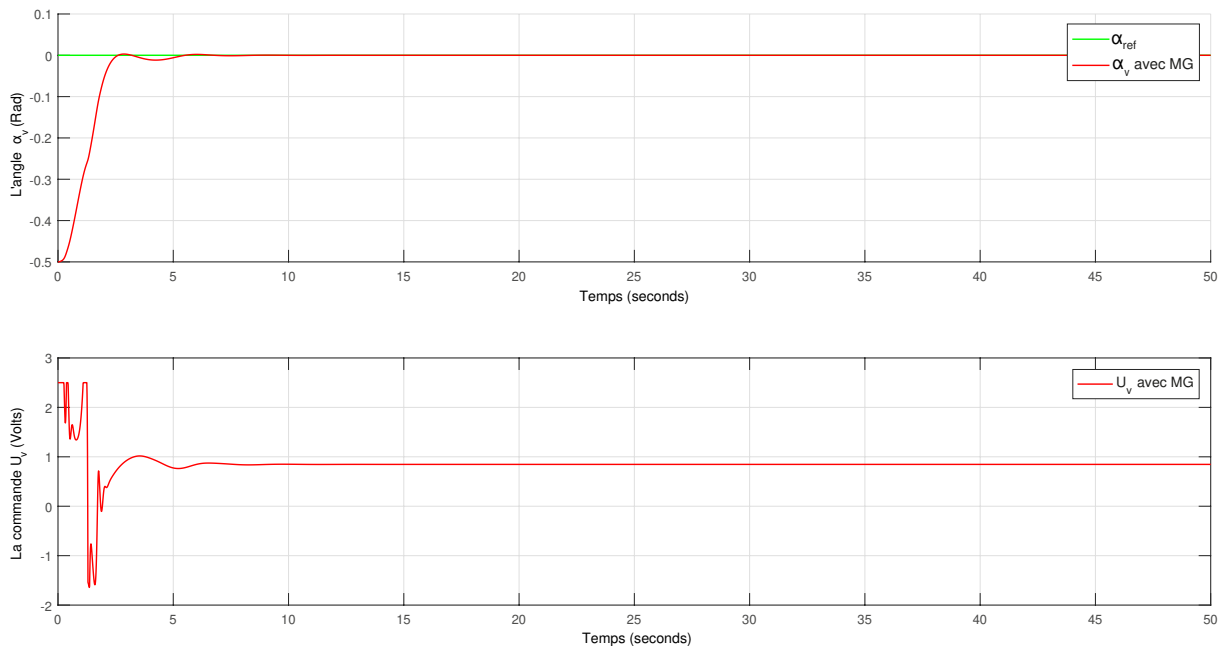


FIG. 4.3 : Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante.

## Chapitre 4. Commandes par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire optimisées

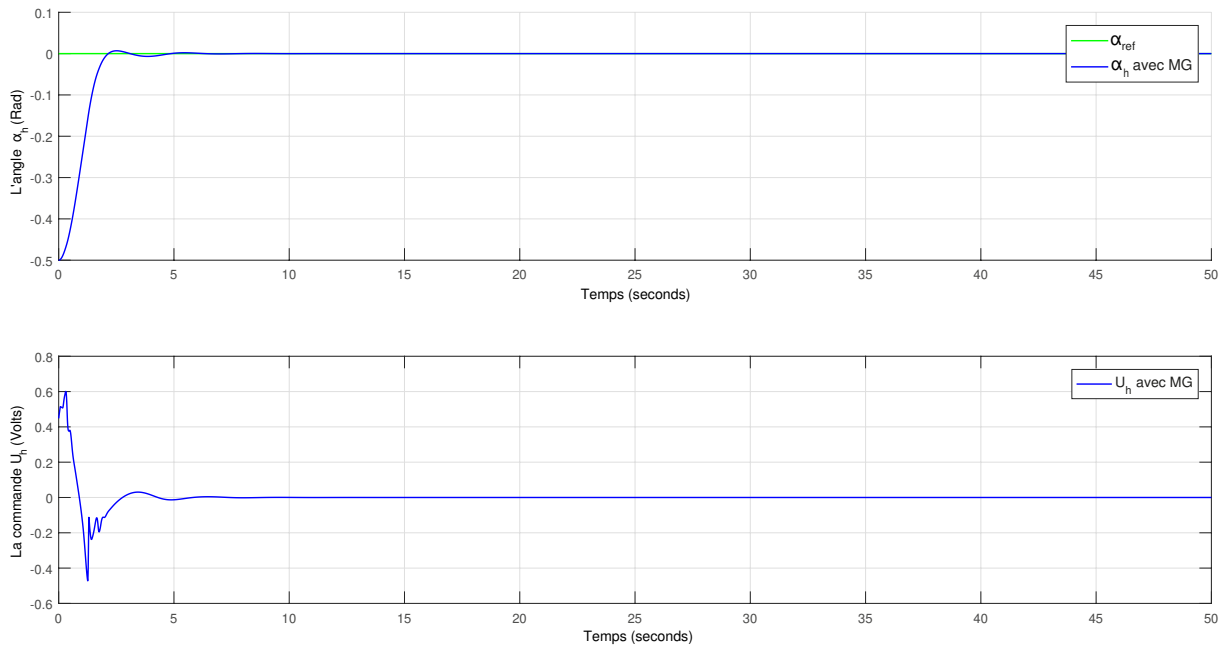


FIG. 4.4 : réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante.

Afin de tester la robustesse de notre commande, nous procédons à des modifications des paramètres de notre système comme on a fait précédemment dans le chapitre précédent, et cela en variant la position du contrepoids de 7 cm. Les résultats des simulations des réponses à l'échelon dans ce cas sont les suivants (voir figure (4.5) et (4.6)) :

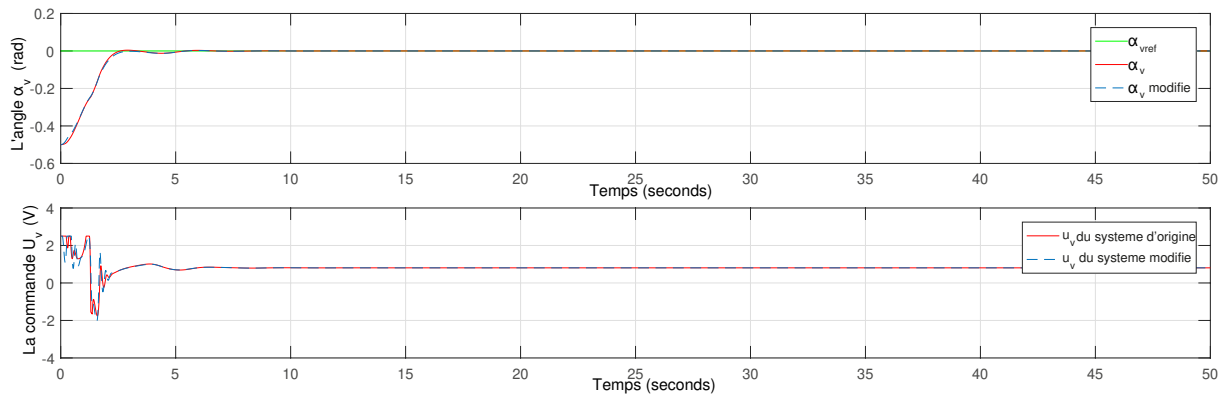


FIG. 4.5 : Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante pour le système modifié

## Chapitre 4. Commandes par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire optimisées

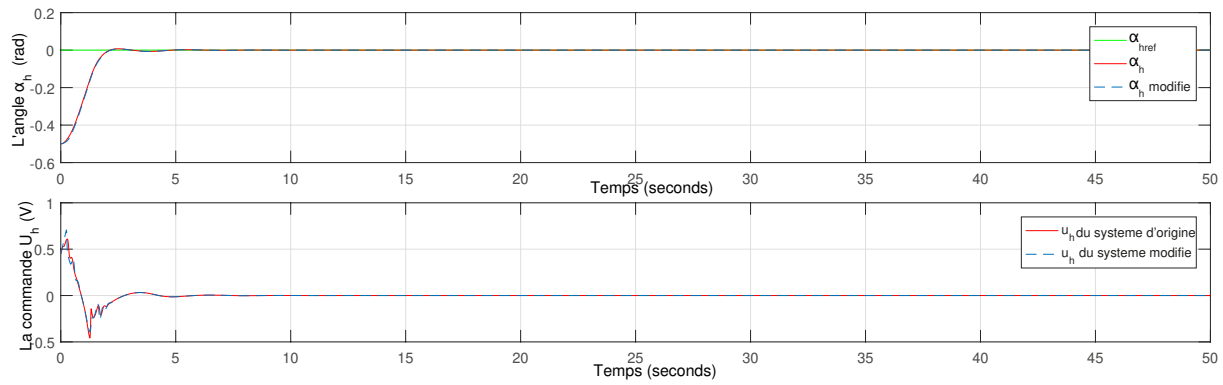


FIG. 4.6 : Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante pour le système modifié

### 4.3.4 Interprétation des résultats

D'après les résultats obtenus au-dessus, on peut remarquer que :

- Les deux sous-systèmes convergent parfaitement vers le point de stabilisation.
- Les deux sous-systèmes démontrent une robustesse parfaite face aux modifications paramétriques du modèle.
- Pour les signaux de commande, on peut remarquer l'effet de la saturation à  $\pm 2.5V$  pour le sous-système vertical qu'au début avec une absence totale du phénomène du Chattering.

## 4.4 Commande par mode glissant d'ordre fractionnaire du TRMS

Afin d'améliorer les performances déjà atteintes par la commande précédente, on développe la formule de Slotine avec des dérivées d'ordre fractionnaire comme suit [42] :

$$\begin{cases} S_v = (D_t^{\alpha_v} + \lambda_v)^{r_v-1} e_v \\ S_h = (D_t^{\alpha_h} + \lambda_h)^{r_h-1} e_h \end{cases} \quad (4.27)$$

On a calculé les degrés relatifs  $r_v$  et  $r_h$  qui ont la valeur 3, donc les deux surfaces deviennent :

$$\begin{cases} S_v = D_t^{2\alpha_v} e_v + 2\lambda_v D_t^{\alpha_v} e_v + \lambda_v^2 e_v \\ S_h = D_t^{2\alpha_h} e_h + 2\lambda_h D_t^{\alpha_h} e_h + \lambda_h^2 e_h \end{cases} \quad (4.28)$$

En utilisant la propriété de la commutation définie dans l'équation (2.16) nos deux surfaces de glissement deviennent :

$$\begin{cases} S_v = D_t^{2(\alpha_v-1)} \ddot{e}_v + 2\lambda_v D_t^{\alpha_v-1} \dot{e}_v + \lambda_v^2 e_v \\ S_h = D_t^{2(\alpha_h-1)} \ddot{e}_h + 2\lambda_h D_t^{\alpha_h-1} \dot{e}_h + \lambda_h^2 e_h \end{cases} \quad (4.29)$$

donc on peut calculer les lois de commandes pour les deux plans comme suit :

### 4.4.1 Calcul des lois de commande

#### A. Calcul de la commande $u_v$

On cherche en premier lieu la formule de la commande  $u_{veq}$ , à travers  $\dot{S} = 0$ , avec  $e_v = x_1 - x_{1d}$ , on a donc la formule de  $\dot{S}_v$  comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{S}_v &= D_t^{2(\alpha_v-1)} \ddot{e}_v + 2\lambda_v D_t^{\alpha_v-1} \dot{e}_v + \lambda_v^2 \dot{e}_v \\ &= D_t^{2(\alpha_v-1)} [\ddot{x}_1 - \ddot{x}_{1d}] + 2\lambda_v D_t^{\alpha_v-1} \dot{e}_v + \lambda_v^2 \dot{e}_v \\ &= D_t^{2(\alpha_v-1)} \left[ A_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} [-C_v x_3 + D_v u_v] - A_v^2 \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} x_2 - A_v B_v \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} \right] \\ &\quad + 2\lambda_v D_t^{\alpha_v-1} \dot{e}_v + \lambda_v^2 \dot{e}_v \end{aligned} \quad (4.30)$$

Afin de résoudre l'équation  $\dot{S} = 0$  et trouver la commande  $u_{veq}$  on multiplie les deux côtés de l'équation par  $D_t^{2(1-\alpha)v}$  et en utilisant la propriété des semi-groupes (2.15) on trouve :

$$A_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} [-C_v x_3 + D_v u_v] - A_v^2 \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} x_2 - A_v B_v \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} + 2\lambda_v D_t^{1-\alpha_v} \dot{e}_v + \lambda_v^2 D_t^{2(1-\alpha_v)} \dot{e}_v = 0 \quad (4.31)$$

On résout l'équation (4.31) on trouve la formule de  $u_{veq}$  :

$$\begin{aligned} u_{veq} &= \frac{-1}{A_v D_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3}} \left[ -C_v A_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} x_3 - A_v^2 \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} x_2 - A_v B_v \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} + 2\lambda_v D_t^{1-\alpha_v} \dot{e}_v \right. \\ &\quad \left. + \lambda_v^2 D_t^{2(1-\alpha_v)} \dot{e}_v \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

## Chapitre 4. Commandes par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire optimisées

---

Pour assurer la convergence vers la surface  $S_v$  on doit vérifier la condition  $S_v \dot{S}_v < 0$ , pour cela on pose la commande totale  $u_v$  comme suit en ajoutant le terme  $u_{vatt}$  :

$$u_v = \frac{-1}{A_v D_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3}} \left[ -C_v A_v \frac{\partial F_v(x_3)}{\partial x_3} x_3 - A_v^2 \frac{\partial G_v(x_1)}{\partial x_1} x_2 - A_v B_v \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} + 2\lambda_v D_t^{1-\alpha_v} \ddot{e}_v + \lambda_v^2 D_t^{2(1-\alpha_v)} \dot{e}_v + K_v D_t^{2(1-\alpha_v)} sat(S_v) \right] \quad (4.33)$$

en remplaçant cette commande dans  $S_v \dot{S}_v$  on obtient :

$$S_v \dot{S}_v = -S_v K_v sat(S_v) < 0$$

Ce qui vérifie la condition d'attractivité.

### B. Calcul de la commande $u_h$

De la même façon que la commande  $u_v$  on a la formule de  $\dot{S}_h$  :

$$\begin{aligned} \dot{S}_h &= D_t^{2(\alpha_h-1)} \ddot{e}_h + 2\lambda_h D_t^{\alpha_h-1} \ddot{e}_h + \lambda_h^2 \dot{e}_h \\ &= D_t^{2(\alpha_h-1)} [\ddot{x}_1 - \ddot{x}_{1d}] + 2\lambda_h D_t^{\alpha_h-1} \ddot{e}_h + \lambda_h^2 \dot{e}_h \\ &= D_t^{2(\alpha_h-1)} \left[ A_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3} [-C_h x_3 + D_h u_h] - A_h B_h \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} \right] + 2\lambda_h D_t^{\alpha_h-1} \ddot{e}_h \\ &\quad + \lambda_h^2 \dot{e}_h \end{aligned} \quad (4.34)$$

Pour  $\dot{S} = 0$ , et en utilisant la propriété des semi-groupes (2.15) on trouve :

$$A_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3} [-C_h x_3 + D_h u_h] - A_h B_h \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} + 2\lambda_h D_t^{1-\alpha_h} \ddot{e}_h + \lambda_h^2 D_t^{2(1-\alpha_h)} \dot{e}_h = 0 \quad (4.35)$$

donc :

$$u_{heq} = \frac{-1}{A_h D_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3}} \left[ -C_h A_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3} x_3 - A_h B_h \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} + 2\lambda_h D_t^{1-\alpha_h} \ddot{e}_h + \lambda_h^2 D_t^{2(1-\alpha_h)} \dot{e}_h \right] \quad (4.36)$$

on doit vérifier finalement la condition  $S_h \dot{S}_h < 0$  en posant la commande totale  $u_h$  comme suit :

$$u_h = \frac{-1}{A_h D_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3}} \left[ -C_h A_h \frac{\partial F_h(x_3)}{\partial x_3} x_3 - A_h B_h \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} + 2\lambda_h D_t^{1-\alpha_h} \ddot{e}_h + \lambda_h^2 D_t^{2(1-\alpha_h)} \dot{e}_h + K_h D_t^{2(1-\alpha_h)} sat(S_h) \right] \quad (4.37)$$

qui vérifie toujours la condition de convergence :

$$S_h \dot{S}_h = -S_h K_h sat(S_h) < 0$$

### 4.4.2 Résultats et simulations

De la même manière que le mode glissant d'ordre entier, on applique l'algorithme PSO pour trouver les paramètres de la commande, on trouve les valeurs dans le tableau (4.2) :

## Chapitre 4. Commandes par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire optimisées

TAB. 4.2 : Résultat du réglage des paramètres pour la commande MG d'OF.

Paramètre	$K$	$\lambda$	$\alpha$
sous-système vertical	2.2922	2.7321	0.97
sous-système horizontal	0.25	2.25	0.87

On obtient donc les résultats suivant (figures (4.7) et (4.8)) :

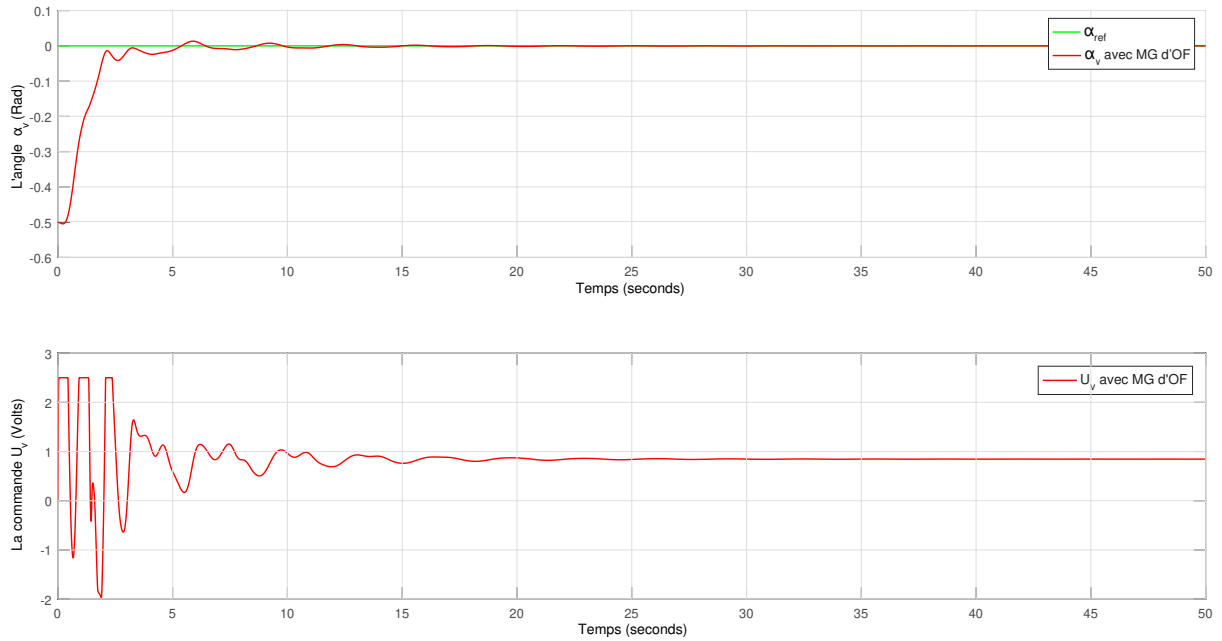


FIG. 4.7 : réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante

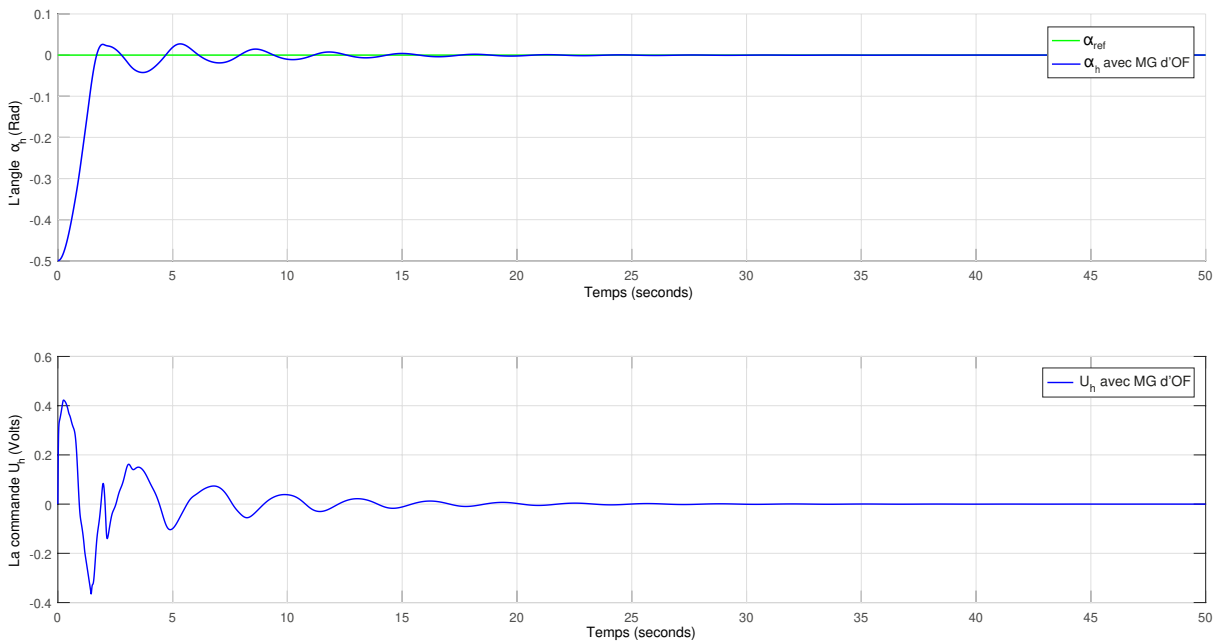


FIG. 4.8 : réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante

## Chapitre 4. Commandes par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire optimisées

Afin de tester la robustesse de notre commande, nous appliquons la commande trouvée sur le système modifié défini précédemment. Les résultats des simulations sont les suivants (voir figure (4.9) et (4.10)) :

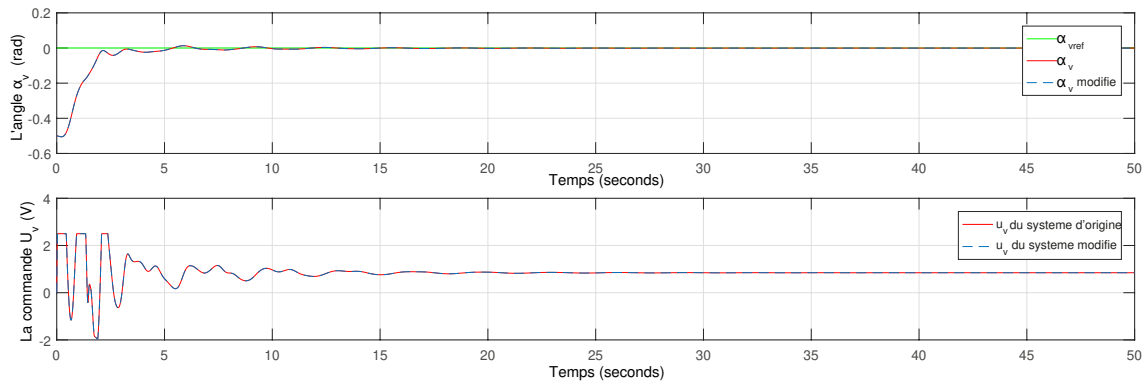


FIG. 4.9 : Réponse du sous-système vertical pour une commande stabilisante pour le système modifié

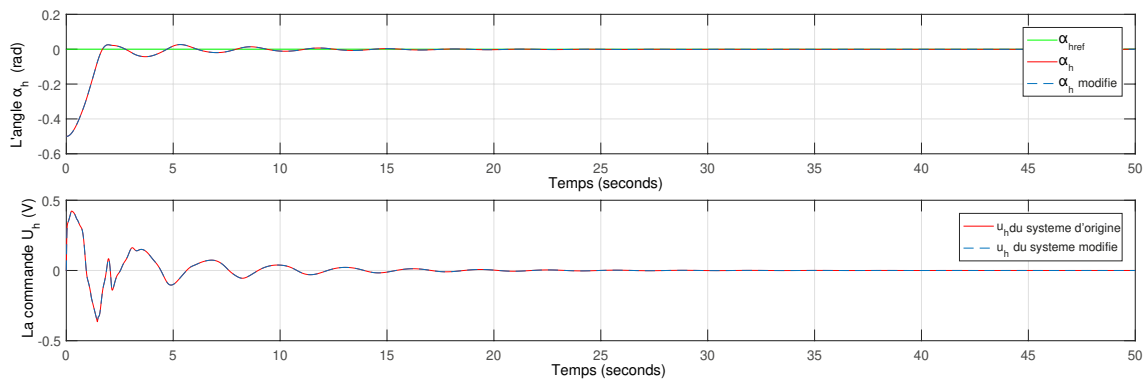


FIG. 4.10 : Réponse du sous-système horizontal pour une commande stabilisante pour le système modifié

### 4.4.3 Interprétation des résultats

Suite à ces résultats, on peut tirer les remarques suivantes :

- Les deux sous-systèmes convergent vers le point de stabilisation.
- Une réponse moins lisse pour les deux systèmes, par rapport à la commande classique, avec un petit dépassement et quelques oscillations d'ordre de  $10^{-2}$  au début, un peu moins pour le sous-système vertical, mais qui sont vite amorties.
- Pour la robustesse, le même cas que la commande d'ordre entier, les deux sous-systèmes sont parfaitement robustes aux erreurs de modélisation.
- Pour les signaux de commande, l'effet de la saturation est toujours actif dans les 3 premières secondes, avec une absence totale du phénomène du Chattering.



## 4.5 Étude comparative entre la commande par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire

Dans cette partie, nous allons faire une comparaison et analyse qualitative des deux régulateurs par mode de glissement et mode de glissement d'ordre fractionnaire. Les différentes simulations vont couvrir plusieurs aspects tels que la stabilisation, la poursuite de référence, la robustesse aux erreurs de modélisation, ainsi que le rejet des perturbations externes.

Cette analyse pourra fournir des indications précieuses pour comprendre les avantages et les limitations de chaque régulateur et peuvent aider à guider les décisions de conception et d'optimisation du système de commande.

De plus, nous allons faire une étude quantitative à travers le critère RMSE afin d'améliorer davantage la qualité de cette étude.

On commence notre étude comparative par un test de poursuite ou en changeant l'entre avec un signal sinusoïdale de la forme :

$$R(t) = 0.5\sin(0.25t)$$

comme montré ci-dessous dans la figure (4.11) :

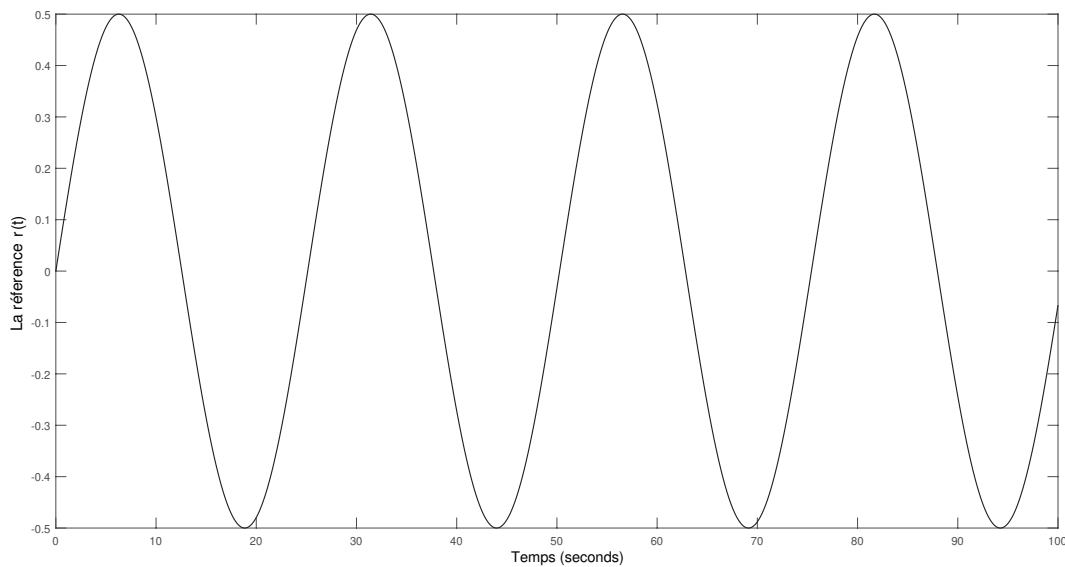


FIG. 4.11 : La trajectoire de référence du type sinusoïdale pour le test de poursuite

## Chapitre 4. Commandes par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire optimisées

On obtient les résultats suivants (Voir figure (4.12) pour le sous-système vertical et (4.13) pour le sous-système horizontal) :

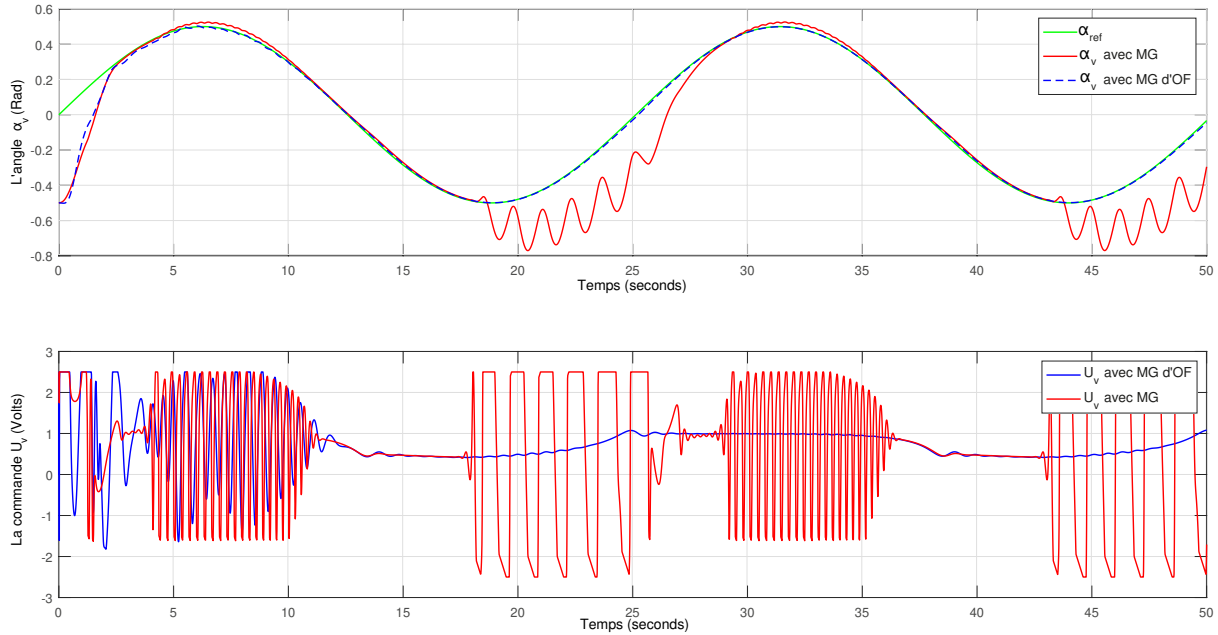


FIG. 4.12 : Réponse du sous-système vertical des deux différentes commandes pour une poursuite

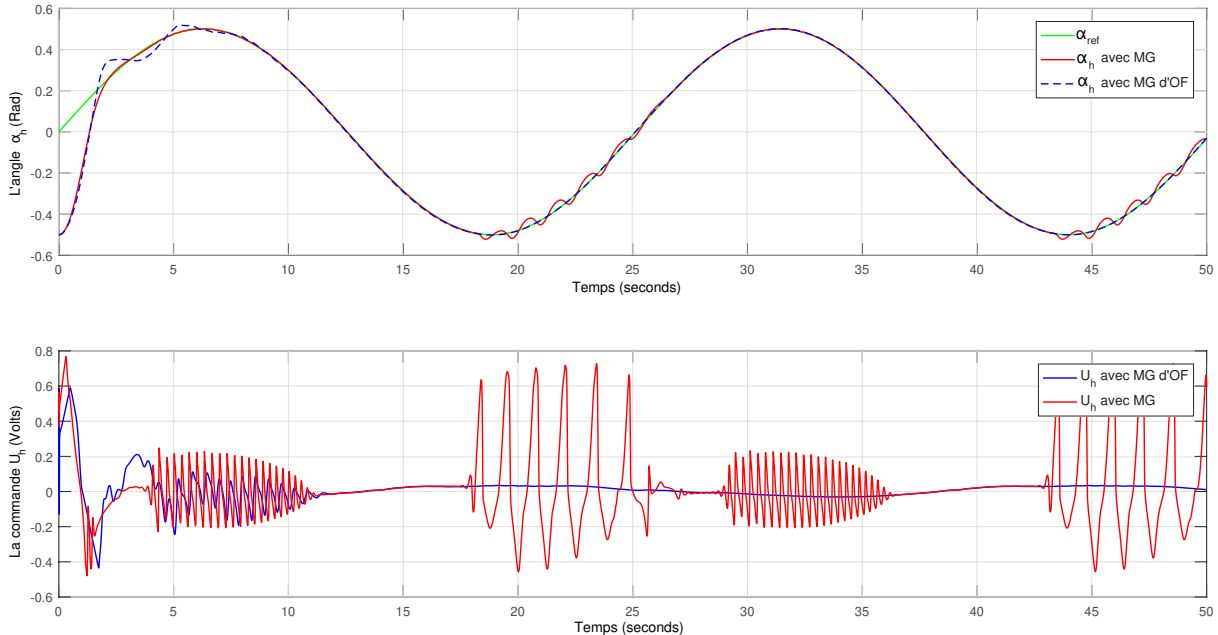


FIG. 4.13 : Réponse du sous-système horizontal des deux différentes commandes pour une poursuite

## Chapitre 4. Commandes par mode glissant et mode glissant d'ordre fractionnaire optimisées

Pour le test de rejet de perturbations, on ajoute une grande perturbation externe sinusoïdale d'amplitude  $A = 1$  en sorties, pendant 8 sec et on visualise les résultats obtenus, la forme de perturbation et la suivante :

$$d(t) = A \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

comme montré ci-dessous dans la figure (4.14) :

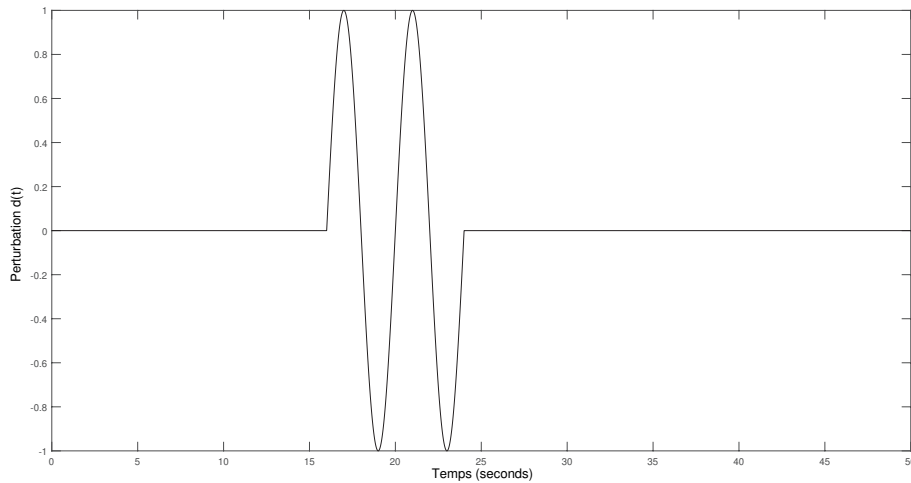


FIG. 4.14 : Le signal de perturbation à appliquer aux deux sorties

On obtient les résultats suivants (Voir figures (4.15) pour le sous-système vertical et (4.16) pour le sous-système horizontal) :

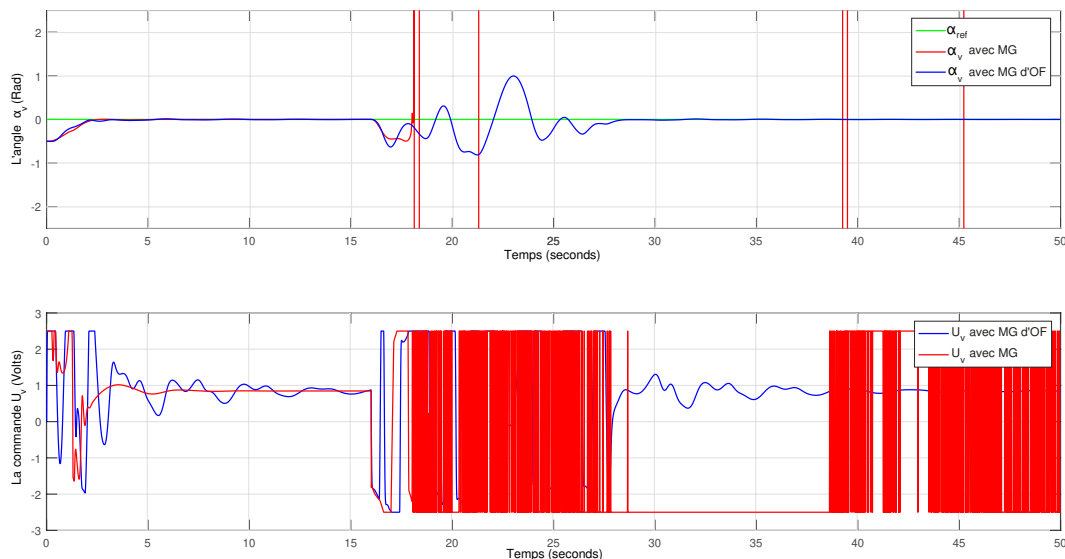


FIG. 4.15 : Réponse du sous-système vertical pour les deux différentes commandes

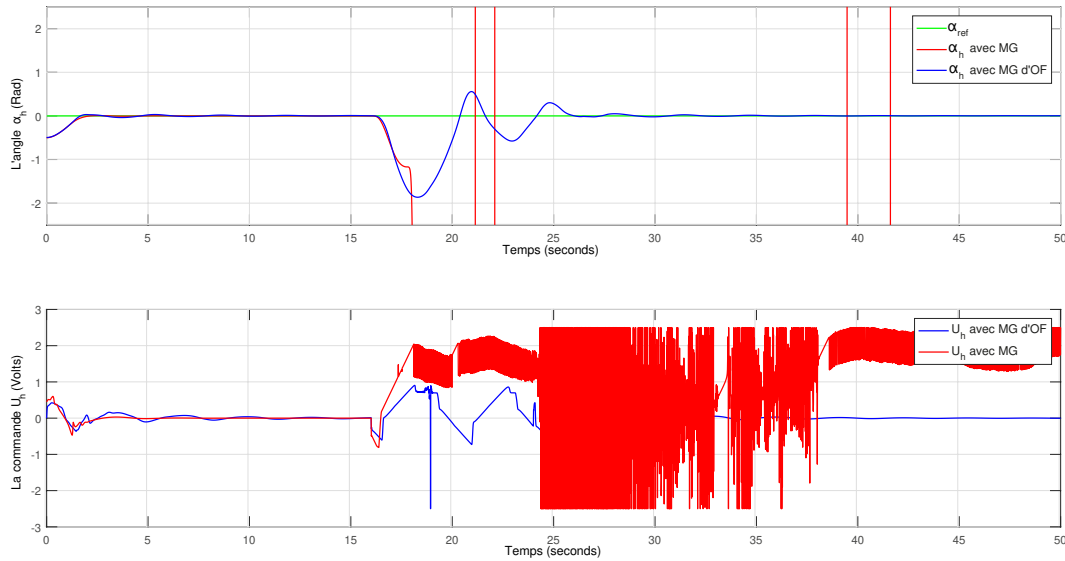


FIG. 4.16 : Réponse du sous-système horizontal pour les deux différentes commandes

#### 4.5.1 Interprétation des résultats

Afin d'évaluer les performances de poursuite, la robustesse, et le rejet de perturbations, on utilise le critère de l'erreur quadratique moyenne :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{d_i})^2} \quad (4.38)$$

Les valeurs du critère obtenues pour les simulations ci-dessous sont données par le tableau (4.3) :

TAB. 4.3 : Comparaison des performances des commandes MG et MG d'OF avec RMSE

Cas	MG		MG d'OF	
	$\alpha_v$	$\alpha_h$	$\alpha_v$	$\alpha_h$
Stabilisation	$1.2834 \cdot 10^{-8}$	$4.08 \cdot 10^{-8}$	$3.775 \cdot 10^{-5}$	$4.7528 \cdot 10^{-5}$
Robustesse	$1.2834 \cdot 10^{-8}$	$4.08 \cdot 10^{-8}$	$3.775 \cdot 10^{-5}$	$4.7528 \cdot 10^{-5}$
Poursuite	$4.03 \cdot 10^{-1}$	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$9.2 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$
Perturbation	$1.541 \cdot 10^{12}$	$9.518 \cdot 10^6$	$1.0745 \cdot 10^{-3}$	$1.33 \cdot 10^{-3}$

Après avoir effectué plusieurs simulations de commande par mode glissant des deux ordres, entier et fractionnaire, et en utilisant les résultats présentées par le tableau ci-dessus, des observations significatives ont été faites. Les remarques suivantes résument les principales conclusions de l'analyse :

- Pour le test de stabilisation, la commande par mode glissant classique, avec un temps de réponse et dépassement minimaux, s'avère être plus performant que celle d'ordre fractionnaire, qui présente aux premières secondes quelques oscillations de moins de  $10^{-2} \text{ rad}$  avant de rapidement converger.

- Pour la poursuite de référence, le régulateur par mode glissant fractionnaire montre une capacité parfaite de suivi de référence pour une trajectoire sinusoïdal par rapport au régulateur classique, surtout pour le sous-système vertical qui a du mal à la suivre au niveau de l'alternance négative.
- une absence du phénomène du Chattering, qui est dû grâce à la fonction de saturation.
- Pour la robustesse, les deux régulateurs présentent une robustesse parfaite aux erreurs de modélisation, ce qui est logique, car la robustesse est une des caractéristiques du mode glissant.
- Pour le rejet des perturbations, la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire est capable de réaliser un rejet total des fortes perturbations externes (d'amplitude de  $1 \text{ rad}$ ), tandis que le système avec la commande d'ordre entier diverge instantanément.
- La commande par mode de glissement d'ordre fractionnaire est beaucoup moins sensible aux changements instantanés, que ce soit de la référence ou des perturbations, ce qu'on voit bien dans les signaux de commande qui sont lisses.

### 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé la synthèse des régulateurs par la commande en mode glissant d'ordre entier et d'ordre fractionnaire pour le TRMS, en utilisant l'algorithme PSO comme un outil d'optimisation, pour trouver les paramètres optimaux des commandes.

Une comparaison quantitative et qualitative des résultats obtenus a été établie à partir de la réponse en boucle fermée du TRMS, où la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire a montré majoritairement des meilleures performances en ce qui concerne notamment la fluidité des signaux d'entrée, la robustesse aux erreurs de modélisation, la poursuite de la trajectoire et le rejet de fortes perturbations externes.

La commande d'ordre fractionnaire a donc prouvé une autre fois des bonnes performances par rapport à la commande classique, qu'on peut largement considérer comme satisfaisants, pour un système assez complexe, et ça grâce à sa flexibilité de synthèse, offrant des paramètres supplémentaires qui nous donnent plus de liberté et de choix dans la synthèse.

# Conclusion générale

Le travail présenté dans cette thèse concerne la modélisation et la commande du Twin Rotor MIMO System, en mettant en œuvre pour chaque type de commande étudié l'ordre fractionnaire ainsi que l'optimisation par l'algorithme PSO.

Le calcul fractionnaire généralise l'opérateur intégral-différentiel pour tout ordre réel positif, ouvrant ainsi un large éventail d'applications et offre de nombreux avantages dans plusieurs domaines scientifiques, notamment la théorie de commande, qui est notre principal intérêt. Par conséquent, nous avons défini les propriétés et les outils fondamentaux nécessaires permettant de passer de la théorie classique du contrôle d'ordre entier à une version d'ordre fractionnaire.

En ce qui concerne la section application de ce travail, elle comprend deux types de commande, la commande PID et la commande par mode de glissement, où pour chacune deux versions de régulateurs, un régulateur d'ordre entier classique, et un régulateur d'ordre fractionnaire ont été synthétisés. En raison de la nature non linéaire du système, nous avons utilisé l'algorithme d'optimisation par essaim de particules (PSO) afin de trouver les paramètres optimaux de nos régulateurs, et cela comprend les gains pour le PID, les constantes des surfaces du glissement pour la commande par mode glissant, ainsi que les ordres fractionnaires. Ce qui nous a conduit aux meilleurs résultats possibles pour les lois de commande élaborées.

Pour le PID et le FOPID, une étude comparative a été menée, par laquelle les résultats de l'approche fractionnaire ont montré une grande supériorité en plusieurs aspects : la stabilité, l'amortissement des oscillations, robustesse aux erreurs de modélisation et rejet de fortes perturbations externes.

Pour le mode glissant, une contribution dans l'élaboration de loi de commande d'ordre fractionnaire a été réalisée, et qui a prouvé majoritairement son efficacité par rapport à l'ordre entier. Le mode glissant étant une commande robuste, on a eu également une grande robustesse aux erreurs de modélisation pour les deux régulateurs, voire globalement par rapport au PID et FOPID. Cependant, en ce qui concerne la poursuite de trajectoire, la commande par mode glissant d'ordre fractionnaire a démontré de meilleures performances, et a même réussi à rejeter parfaitement les fortes perturbations externes, contrairement à la commande classique qui tendait à diverger.

Tout au long de ce travail, les régulateurs d'ordre fractionnaire ont prouvé leur efficacité dans la commande de systèmes non linéaires tels que le TRMS. Ils ont également démontré une grande flexibilité en ce qui concerne la synthèse des contrôleurs, en utilisant un signal d'entrée lisse qui s'adapte parfaitement aux actionneurs en pratique. De plus, ces contrôleurs ont affiché d'excellentes performances dans différents aspects.

## Conclusion générale

---

Pour l'amélioration de ce travail, il est suggéré d'explorer les perspectives suivantes :

- Développement d'autres types de commandes d'ordre entier en ordre fractionnaire.
- Exploration d'autres types de surfaces du glissement.
- L'application pratique de ces techniques de commandes sur le simulateur du laboratoire de commandes des processus.

# Bibliographie

1. BÜHLER, H. *Réglage par mode de glissement* (PPUR presses polytechniques, 1986).
2. EDWARDS, C. & SPURGEON, S. *Sliding mode control : theory and applications* (Crc Press, 1998).
3. SHTESSEL, Y. B. & LEE, Y.-J. *New approach to chattering analysis in systems with sliding modes in Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control* **4** (1996), 4014-4019.
4. TOHA, S., TOKHI, M. & HUSSAIN, Z. *ANFIS modelling of a twin rotor system in UKACC International Conference on Control* (2008), P125.
5. TWIN ROTOR, M. System Advanced Teaching Manual 1 (33-007-4M5). *Feedback Instruments Ltd, Crowborough, UK* (1998).
6. NGUYEN, H. N. *Modelling, simulation, and calibration of twin rotor mimo system* mém. de mast. (Universitat Politècnica de Catalunya, 2007).
7. FEEDBACKS. Twin Rotor Mimo System, Advanced Teaching Manual 1, vol. 33-007-4M5. **Ed01**.
8. NAKAGAWA, M. & SORIMACHI, K. Basic characteristics of a fractance device. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences* **75**, 1814-1819 (1992).
9. N'DOYE, I. *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires* thèse de doct. (Université Henri Poincaré-Nancy I ; Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca, 2011).
10. DAS, S. *Functional fractional calculus* (Springer, 2011).
11. SI AMMOUR, A. *Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire* thèse de doct. (Université Mouloud Mammeri, 2011).
12. AGARWAL, R. P. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. *CR Acad. Sci. Paris* **236**, 2031-2032 (1953).
13. MONJE, C. A., CHEN, Y., VINAGRE, B. M., XUE, D. & FELIU-BATLLE, V. *Fractional-order systems and controls : fundamentals and applications* (Springer Science & Business Media, 2010).
14. LADACI, S. *et al.* Contribution a la Commande Adaptative d'ordre Fractionnaire (2017).
15. CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal International* **13**, 529-539 (1967).



16. GORENFLO, R., MAINARDI, F. & PODLUBNY, I. Fractional differential equations. *Academic Press* **8**, 683-699 (1999).
17. OLDHAM, K. & SPANIER, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order* (Elsevier, 1974).
18. PETRÁŠ, I. *Fractional-order nonlinear systems : modeling, analysis and simulation* (Springer Science & Business Media, 2011).
19. LI, C. & DENG, W. Remarks on fractional derivatives. *Applied mathematics and computation* **187**, 777-784 (2007).
20. MILLER, K. S. & ROSS, B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. (*No Title*) (1993).
21. PETRÁŠ, I. *Fractional-order nonlinear systems : modeling, analysis and simulation* (Springer Science & Business Media, 2011).
22. MATIGNON, D. *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing in Computational engineering in systems applications* **2** (1996), 963-968.
23. OUSTALOUP, A., LEVRON, F., MATHIEU, B. & NANOT, F. M. Frequency-band complex noninteger differentiator : characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications* **47**, 25-39 (2000).
24. BORASE, R. P., MAGHADE, D., SONDKAR, S. & PAWAR, S. A review of PID control, tuning methods and applications. *International Journal of Dynamics and Control* **9**, 818-827 (2021).
25. EBERHART, R. & KENNEDY, J. *Particle swarm optimization in Proceedings of the IEEE international conference on neural networks* **4** (1995), 1942-1948.
26. MARINI, F. & WALCZAK, B. Particle swarm optimization (PSO). A tutorial. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* **149**, 153-165 (2015).
27. SRINIVAS, M. & PATNAIK, L. M. Genetic algorithms : A survey. *computer* **27**, 17-26 (1994).
28. ADEL, T., BILEL, K. & CHAARI, A. PID Control for Nonlinear Processes (mai 2023).
29. CAI, X. & TAN, Y. A study on the effect of v<sub>max</sub> in particle swarm optimisation with high dimension. *International Journal of Bio-Inspired Computation* **1**, 210-216 (2009).
30. CLERC, M. & KENNEDY, J. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE transactions on Evolutionary Computation* **6**, 58-73 (2002).
31. LIM, S. Y., MONTAKHAB, M. & NOURI, H. A constriction factor based particle swarm optimization for economic dispatch (2009).
32. ZEMZAMI, M. *et al.* Electrical power transmission optimization based on a new version of PSO algorithm. *Published* **22**, 02-17 (2016).
33. VINAGRE, B. M., PODLUBNY, I., DORCAK, L. & FELIU, V. On fractional PID controllers : a frequency domain approach. *IFAC Proceedings Volumes* **33**, 51-56 (2000).

34. MONJE, C. *et al.* *Proposals for fractional PID $\mu$  tuning in Proceedings of the first IFAC symposium on fractional differentiation and its applications (FDA04)* (2004), 115-120.
35. VALÉRIO, D. & DA COSTA, J. S. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler–Nichols-type rules. *Signal processing* **86**, 2771-2784 (2006).
36. SLOTINE, J.-J. E., LI, W. *et al.* *Applied nonlinear control* **1** (Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991).
37. UTKIN, V. I. *Sliding modes in control and optimization* (Springer Science & Business Media, 2013).
38. BRÉGEAULT, V. *Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants* thèse de doct. (Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2010).
39. SLOTINE, J.-j. E., HEDRICK, J. & MISAWA, E. *Nonlinear state estimation using sliding observers in 1986 25th IEEE Conference on Decision and Control* (1986), 332-339.
40. UTKIN, V. Communication and Control Engineering Series. *Sliding Modes in Control and Optimization* (1992).
41. NEDJMI, D. R. *Commande hybride avec observation d'un UAV de type quadrotor* thèse de doct. (Thèse de Magistère, École Militaire Polytechnique, Alger, Algérie, 2010).
42. BOUARROUDJ, N., BOUKHETALA, D. & BOUDJEMA, F. Sliding-mode controller based on fractional order calculus for a class of nonlinear systems. *International Journal of Electrical and Computer Engineering* **6**, 2239 (2016).

# Bibliographie

1. BÜHLER, H. *Réglage par mode de glissement* (PPUR presses polytechniques, 1986).
2. EDWARDS, C. & SPURGEON, S. *Sliding mode control : theory and applications* (Crc Press, 1998).
3. SHTESSEL, Y. B. & LEE, Y.-J. *New approach to chattering analysis in systems with sliding modes in Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control* **4** (1996), 4014-4019.
4. TOHA, S., TOKHI, M. & HUSSAIN, Z. *ANFIS modelling of a twin rotor system in UKACC International Conference on Control* (2008), P125.
5. TWIN ROTOR, M. System Advanced Teaching Manual 1 (33-007-4M5). *Feedback Instruments Ltd, Crowborough, UK* (1998).
6. NGUYEN, H. N. *Modelling, simulation, and calibration of twin rotor mimo system* mém. de mast. (Universitat Politècnica de Catalunya, 2007).
7. FEEDBACKS. Twin Rotor Mimo System, Advanced Teaching Manual 1, vol. 33-007-4M5. **Ed01**.
8. NAKAGAWA, M. & SORIMACHI, K. Basic characteristics of a fractance device. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences* **75**, 1814-1819 (1992).
9. N'DOYE, I. *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires* thèse de doct. (Université Henri Poincaré-Nancy I ; Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca, 2011).
10. DAS, S. *Functional fractional calculus* (Springer, 2011).
11. SI AMMOUR, A. *Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire* thèse de doct. (Université Mouloud Mammeri, 2011).
12. AGARWAL, R. P. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. *CR Acad. Sci. Paris* **236**, 2031-2032 (1953).
13. MONJE, C. A., CHEN, Y., VINAGRE, B. M., XUE, D. & FELIU-BATLLE, V. *Fractional-order systems and controls : fundamentals and applications* (Springer Science & Business Media, 2010).
14. LADACI, S. *et al.* Contribution a la Commande Adaptative d'ordre Fractionnaire (2017).
15. CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II. *Geophysical Journal International* **13**, 529-539 (1967).

16. GORENFLO, R., MAINARDI, F. & PODLUBNY, I. Fractional differential equations. *Academic Press* **8**, 683-699 (1999).
17. OLDDHAM, K. & SPANIER, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order* (Elsevier, 1974).
18. PETRÁŠ, I. *Fractional-order nonlinear systems : modeling, analysis and simulation* (Springer Science & Business Media, 2011).
19. LI, C. & DENG, W. Remarks on fractional derivatives. *Applied mathematics and computation* **187**, 777-784 (2007).
20. MILLER, K. S. & ROSS, B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. (*No Title*) (1993).
21. PETRÁŠ, I. *Fractional-order nonlinear systems : modeling, analysis and simulation* (Springer Science & Business Media, 2011).
22. MATIGNON, D. *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing in Computational engineering in systems applications* **2** (1996), 963-968.
23. OUSTALOUP, A., LEVRON, F., MATHIEU, B. & NANOT, F. M. Frequency-band complex noninteger differentiator : characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications* **47**, 25-39 (2000).
24. BORASE, R. P., MAGHADE, D., SONDKAR, S. & PAWAR, S. A review of PID control, tuning methods and applications. *International Journal of Dynamics and Control* **9**, 818-827 (2021).
25. EBERHART, R. & KENNEDY, J. *Particle swarm optimization in Proceedings of the IEEE international conference on neural networks* **4** (1995), 1942-1948.
26. MARINI, F. & WALCZAK, B. Particle swarm optimization (PSO). A tutorial. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* **149**, 153-165 (2015).
27. SRINIVAS, M. & PATNAIK, L. M. Genetic algorithms : A survey. *computer* **27**, 17-26 (1994).
28. ADEL, T., BILEL, K. & CHAARI, A. PID Control for Nonlinear Processes (mai 2023).
29. CAI, X. & TAN, Y. A study on the effect of v<sub>max</sub> in particle swarm optimisation with high dimension. *International Journal of Bio-Inspired Computation* **1**, 210-216 (2009).
30. CLERC, M. & KENNEDY, J. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. *IEEE transactions on Evolutionary Computation* **6**, 58-73 (2002).
31. LIM, S. Y., MONTAKHAB, M. & NOURI, H. A constriction factor based particle swarm optimization for economic dispatch (2009).
32. ZEMZAMI, M. *et al.* Electrical power transmission optimization based on a new version of PSO algorithm. *Published* **22**, 02-17 (2016).
33. VINAGRE, B. M., PODLUBNY, I., DORCAK, L. & FELIU, V. On fractional PID controllers : a frequency domain approach. *IFAC Proceedings Volumes* **33**, 51-56 (2000).

34. MONJE, C. *et al.* *Proposals for fractional PID $\mu$  tuning in Proceedings of the first IFAC symposium on fractional differentiation and its applications (FDA04)* (2004), 115-120.
35. VALÉRIO, D. & DA COSTA, J. S. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler–Nichols-type rules. *Signal processing* **86**, 2771-2784 (2006).
36. SLOTINE, J.-J. E., LI, W. *et al.* *Applied nonlinear control* **1** (Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991).
37. UTKIN, V. I. *Sliding modes in control and optimization* (Springer Science & Business Media, 2013).
38. BRÉGEAULT, V. *Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants* thèse de doct. (Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2010).
39. SLOTINE, J.-j. E., HEDRICK, J. & MISAWA, E. *Nonlinear state estimation using sliding observers in 1986 25th IEEE Conference on Decision and Control* (1986), 332-339.
40. UTKIN, V. Communication and Control Engineering Series. *Sliding Modes in Control and Optimization* (1992).
41. NEDJMI, D. R. *Commande hybride avec observation d'un UAV de type quadrotor* thèse de doct. (Thèse de Magistère, École Militaire Polytechnique, Alger, Algérie, 2010).
42. BOUARROUDJ, N., BOUKHETALA, D. & BOUDJEMA, F. Sliding-mode controller based on fractional order calculus for a class of nonlinear systems. *International Journal of Electrical and Computer Engineering* **6**, 2239 (2016).