

## École Nationale Polytechnique



Département d'Automatique  
Laboratoire de Commande des Processus

Mémoire de projet de fin d'études pour l'obtention  
des diplômes d'Ingénieur d'état en Automatique

---

# Modélisation et commande d'un système de forage en vue de rejet des perturbations vibratoires

---

Étudié par :

**Anes YAHIAOUI**  
**Seyyid ali BELMEDREK**

Présenté et Soutenu publiquement le 23 Juin 2018 devant le jury composé de :

Président	Mr. M.S. BOUCHERIT	Professeur	ENP Alger
Encadreur	M. TADJINE	Professeur	ENP Alger
Encadreur	M. CHAKIR	Docteur	ENP Alger
Promoteur	A. BOUGHUELOUM	Ingénieur	Sonatrach
Examineur	E.M. BERKOUK	Professeur	ENP Alger



## École Nationale Polytechnique



Département d'Automatique  
Laboratoire de Commande des Processus

Mémoire de projet de fin d'études pour l'obtention  
des diplômes d'Ingénieur d'état en Automatique

---

# Modélisation et commande d'un système de forage en vue de rejet des perturbations vibratoires

---

Étudié par :

**Anes YAHIAOUI**  
**Seyyid ali BELMEDREK**

Présenté et Soutenu publiquement le 23 Juin 2018 devant le jury composé de :

Président	Mr. M.S. BOUCHERIT	Professeur	ENP Alger
Encadreur	M. TADJINE	Professeur	ENP Alger
Encadreur	M. CHAKIR	Docteur	ENP Alger
Promoteur	A. BOUGHUELOUM	Ingénieur	Sonatrach
Examineur	E.M. BERKOUK	Professeur	ENP Alger

# Remerciements

Nombreux sont ceux que nous voudrions remercier pour nous avoir aidé, soutenu ou accompagné durant ces cinq années d'étude. C'est pour leur montrer toute notre reconnaissance que nous leur dédions ces quelques lignes.

Ce travail a été effectué au sein du Département d'Automatique de l'école nationale polytechnique sous la direction de Monsieur Mohamed TADJINE, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique, Monsieur Messaoud CHAKIR, Docteur à l'Ecole Nationale Polytechnique, et Monsieur Abdelwaheb BOUGHELLOUM, Cadre à SONATRACH, qui ont suivi de très près ce travail.

Cette thèse ne pourrait pas avoir été menée à bien sans la confiance, la patience et la générosité du Professor M.TADJINE, le docteur M.CHAKIR et monsieur A. BOUGHELLOUM, à qui nous voulons apporter nos remerciements tout particuliers. Ils ont su nous aider, nous soutenir et orienter nos recherches aux bons moments, avec un grand professionnalisme, rigueur et gentillesse. Nous leur apportons nos plus sincères gratitude pour le temps précieux qu'ils nous ont accordé tout au long de cette année.

Nous remercions également Monsieur le Professeur Med Sguir BOUCHERIT, Directeur de Recherche au CNRS de nous avoir fait l'honneur de présider notre jury de thèse. Je tiens également à remercier Monsieur le Professeur Abdelmajid. BERKOUK, d'avoir accepté de juger ce travail.

Nous remercions vivement Monsieur L.SAKKAT, Ingénieur, Sonatrach, division de forage Hassi Messaoud, pour sa précieuse prise en charge durant le stage effectué à Hassi Messaoud.

Nous ne saurions oublier nos collègues et amis, avec lesquelles nous avons partagé des très beaux moments à Polythèque. Merci et bonne chance à vous.

Enfin, nous ne saurions jamais suffisamment remercier nos parents, ma petite Chahinez ainsi qu'à toute notre famille que nous portons toujours avec nous dans nos pensées. Sans leur confiance immense, leurs conseils sans leur aide et leur amour, ne n'aurons pas pu aller au bout de notre projet. Qu'ils trouvent en nous leur enfant redevable toute vie.

## ملخص

الهدف الرئيسي لهذا التقرير هو السيطرة على نظام للتخلص من اهتزازات الانزلاق اللاصق في سلسلة الحفر المستخدمة في حفر آبار النفط والغاز. يحدث الانزلاق اللاصق أساسا بسبب مرونة سلسلة الحفر وقوى الاحتكاك المتغيرة. يؤدي الانزلاق إلى التخریب المفرط لاداة الحفر ، والفضل السابق لأوانه للأداة ، و اضعاف معدل اختراقها. ولتحقيق القدرة على إنشاء قوانين التحكم ، كان علينا أن نضع نموذجا لنظامنا ، ولذلك قمنا بتطوير طرازين مختلفين نموذج مركزي ونموذج موزع . ثم قمنا بتطبيق قوانين تحكم لكل طراز ، وبعد إجراء مقارنة مع المنظم المستخدم في الصناعة والمنظم القوي.

كلمات مفتاحية : التمثل ، التحكم ، الاهتزازات ، الحفر ، اداة الحفر.

## Abstract

The main focus of this report is the control of a system for the mitigation of the stick-slip vibration of the drillstring used to drill the oil and gaz wells. Stick-slip is mainly caused by elasticity of the drill string and changing frictional forces at the bit. Stick-slip leads to excessive bit wear, premature tool failures and poor rate of penetration.. To be able to establish the control laws, we had to model our system and for it we developed two different models: a centralized model and a distributed model. Then we applied a control laws for every model, and after we made a comparison with the regulator used in industry and the robust regulator  $\mathcal{H}_\infty$

**keywords:** modeling,control, vibration,drilling,bit.

## Résumé

L'objective principale de ce mémoire est la commande d'un système pour la prévention des vibrations stick-slip dans la chaîne de forage utilisé pour forer les puits du pétrole. Stick slip est principalement causé par l'élasticité du train de tiges et le changement des forces de frottement au niveau du trépan. Le stick-slip entraîne une usure excessive des outils, des défaillances prématurées et un affaibli le taux de pénétration. Afin de pouvoir établir les différentes lois de commande, on devait modéliser notre système et pour cela on a élaboré deux modèles différents : un modèle centralisé et un modèle distribué .Puis on a appliqué des lois de commande pour chaque modèle et après on a fait une comparaison avec le régulateur utilisé en industrie et le régulateur robuste  $\mathcal{H}_\infty$ .

**mots-clés :** modélisation,commande, vibration,forage,trépan.

# Table des matières

Table des matières

Table des figures

Liste des abréviations

Liste des symboles

<b>Introduction Générale</b>	<b>11</b>
<b>1 Système de forage rotary</b>	<b>13</b>
1.1 Système de forage rotary . . . . .	13
1.1.1 Le forage rotary . . . . .	13
1.1.2 Principe de forage rotary . . . . .	14
1.1.3 Description générale . . . . .	14
1.1.4 Principes de base du procédé de forage . . . . .	16
1.1.5 Paramètres de forage . . . . .	16
1.1.6 Éléments principaux d'un équipement de forage . . . . .	17
1.2 Vibrations de train de tiges . . . . .	19
1.3 Stick-Slip . . . . .	21
1.3.1 Stick-Slip dans le forage . . . . .	21
1.3.2 Autres exemples de stick-slip . . . . .	22
1.4 Atténuation des vibrations stick-slip . . . . .	23
<b>2 Modélisation de la chaîne de forage</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Modèle de frottement pour le forage rotary . . . . .	25

2.3	modèle à paramètres centralisés . . . . .	27
2.3.1	Modèle mathématique du système . . . . .	29
2.4	Modèle à paramètres distribués . . . . .	30
2.4.1	Comportement oscillatoire de la chaîne de forage . . . . .	30
2.4.2	Conditions aux limites cinématiques . . . . .	31
2.4.3	Résolution de l'équation d'onde (EDP) : . . . . .	32
2.5	Résultats des simulations . . . . .	33
2.5.1	Résultat de simulation du modèle centralisé . . . . .	33
2.5.2	Résultat de simulation du modèle distribué . . . . .	35
2.6	Validation des résultats . . . . .	35
2.6.1	Comparaison avec les résultats de modèle centralisé et distribué : . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Commande linéaire quadratique gaussienne LQG</b>	<b>38</b>
3.1	Introduction . . . . .	38
3.2	Estimateur de Kalman . . . . .	38
3.2.1	équations de modèle réduit : . . . . .	39
3.2.2	Observabilité du couple $A_a$ et $C_a$ : . . . . .	41
3.3	Commande linéaire quadratique LQR . . . . .	41
3.3.1	Commandabilité du couple $A_m$ et $B_m$ : . . . . .	41
3.4	Résultats des simulations et interprétations . . . . .	42
3.4.1	Simulation du modèle non-linéaire . . . . .	42
3.4.2	Simulation du l'estimateur de Kalman . . . . .	42
3.4.3	Simulation du système commandé . . . . .	44
3.5	Conception LQG/LTR . . . . .	45
3.5.1	Application . . . . .	46
3.6	Conclusion . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Commande <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>49</b>
4.1	Introduction . . . . .	49
4.2	Norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système linéaire stationnaire . . . . .	49
4.3	Commande $\mathcal{H}_\infty$ standard . . . . .	50
4.3.1	Problème standard . . . . .	50
4.3.2	Transformation Fractionnaire Linéaire . . . . .	51

4.3.3	Filtres de pondération . . . . .	52
4.4	Application au forage rotary . . . . .	54
4.5	Résultats de simulation . . . . .	58
4.6	Comparaison entre la commande $\mathcal{H}_\infty$ et STRS . . . . .	60
4.6.1	Etude comparative des indicateurs de performance . . . . .	60
4.6.2	Étude comparative des indicateurs de robustesse . . . . .	61
4.7	Conclusion . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Analyse et commande basé sur le modèle distribué « commande des systèmes à retard</b>	
	<b>»</b>	<b>63</b>
5.1	Préliminaires . . . . .	65
5.2	Stabilité des systèmes à retard neutre . . . . .	65
5.2.1	Approche de domaine fréquentiel . . . . .	66
5.2.2	Approche du domaine temporel . . . . .	68
5.3	Contrôle de Stick-Slip : approche basée sur Lyapunov-Krasovskii . . . . .	69
5.3.1	Contrôle basé sur la représentation multimodèle . . . . .	70
5.3.2	Stabilisation du système de forage . . . . .	73
5.4	Conclusion . . . . .	75
	<b>Conclusion Générale et Perspectives</b>	<b>77</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>
	<b>Annexes</b>	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>81</b>
A.1	calcul des coefficients de la chaîne . . . . .	81
A.1.1	calcul de coefficient de rigidité . . . . .	81
A.1.2	calcul du moment d'inertie . . . . .	82
A.1.3	les donnée réelles de la chaîne . . . . .	82
A.2	soft torque . . . . .	82
A.2.1	commande par strs . . . . .	82

# Table des figures

1.1	système de forage . . . . .	15
1.2	Schéma des éléments principaux du forage rotary . . . . .	17
1.3	train de tiges . . . . .	18
1.4	Les types de trépan en forage pétrolier . . . . .	19
1.5	vibrations de train de tige . . . . .	20
1.6	résultat de simulations d'une tige de forage illustrant le phénomène stick-slip. . . . .	22
2.1	Modèle de coulomb et frottements statiques . . . . .	26
2.2	Modèle de forage rotary . . . . .	28
2.3	simulations en boucle ouverte . . . . .	33
2.4	Simulation du couple de Top drive . . . . .	34
2.5	simulation en boucle ouverte du modèle distribué . . . . .	35
2.6	Simulation en boucle ouverte de la vitesse de trépan par <i>WellScan Software</i> . . . . .	36
3.1	Modèle réduit de la chaîne de forage . . . . .	39
3.2	simulation en boucle ouverte du modèle réduit . . . . .	43
3.3	Schéma de l'estimateur de Kalman . . . . .	43
3.4	Vitesse de rotation estimée et «réelle» pendant le stick-slip . . . . .	44
3.5	Schéma de la stratégie de contrôle en boucle fermée. . . . .	45
3.6	Résultats de simulation en boucle fermée . . . . .	46
3.7	frottement "réel" et "estimé" . . . . .	47
3.8	Les marges de stabilité de LQR . . . . .	47
3.9	diagrammes de Bode en boucle ouverte pour différentes valeurs de $q$ . . . . .	48
4.1	Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard . . . . .	50
4.2	Exemple de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ par pondérations fréquentielles . . . . .	53

---

4.3	Traduction fréquentielle des spécifications temporelles . . . . .	54
4.4	structure de la commande . . . . .	55
4.5	Fonction de sensibilité $H_{11}$ et le gabarit $\frac{1}{w_1V_1}$ . . . . .	57
4.6	Transfert $H_{22}$ et le gabarit $\frac{1}{w_2V_2}$ . . . . .	58
4.7	la vitesse de l'outil "avant" et "après" l'application de la commande $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	59
4.8	Couple de surface "avant" et "après" l'application de la commande $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	59
4.9	La vitesse de trépan en appliquant les deux stratégies de commande $\mathcal{H}_\infty$ et STRS .	60
4.10	variation de la commande dans les deux stratégies $\mathcal{H}_\infty$ et STRS . . . . .	61
4.11	Test de robustesse sur les deux stratégies de contrôle . . . . .	62
5.1	Résultat de simulation en boucle ouverte et en boucle fermée . . . . .	76

# Liste des abréviations

<b>BHA</b>	"Botom hole assembly" assemblage du fond
<b>ROP</b>	"rate of penetration" taux de pénétration
<b>TOB</b>	"torque on bit" couple sur l'outil
<b>WOB</b>	weight on bit" poids sur l'outil
<b>PDC</b>	"Polycrystalline Diamond Compact" Compact de diamant polycristallin
<b>LMI</b>	<b>L</b> inear <b>M</b> atrix <b>I</b> nequality
<b>LFT</b>	"Linear Fractional Transformation" Transformation Fractionnaire Linéaire
<b>LQG</b>	linéaire quadratique gaussienne
<b>EDP</b>	Equation aux Dérivées Partielles
<b>LQR</b>	linéaire quadratique régulateur
<b>DDL</b>	degre de liberté

# Liste des symboles

$\varphi_r$	position angulaire de top drive
$\dot{\varphi}_r$	vitesse angulaire de top drive
$\ddot{\varphi}_r$	accélération angulaire de top drive
$J_r$	inertie de la table de rotation
$d_p$	constante d'amortissement visqueux au niveau de train de tiges
$k_p$	constante de la rigidité de torsion au niveau de train de tiges
$\varphi_p$	position angulaire de train de tiges
$\dot{\varphi}_p$	vitesse angulaire de train de tiges
$\ddot{\varphi}_p$	accélération angulaire de train de tiges
$J_p$	inertie de train de tiges
$\varphi_b$	position angulaire du <i>BHA</i>
$\dot{\varphi}_b$	vitesse angulaire du <i>BHA</i>
$\ddot{\varphi}_b$	accélération angulaire du <i>BHA</i>
$J_p$	inertie du <i>BHA</i>
$d_b$	constante d'amortissement visqueux au niveau de <i>BHA</i>
$k_b$	constante de la rigidité de torsion au niveau du <i>BHA</i>
$T_m$	couple de surface
$T_{TOB}(\dot{\varphi}_b)$	couple exercé par la formation sur le trépan

# Introduction Générale

L'énergie pétrolière a une importance considérable sur le plan économique, à cette importance plusieurs recherches et travaux ont été menés pour améliorer et optimiser les procédures de prospection, d'extraction et de transport de cette ressource.

De plus, l'augmentation de la capacité de production, nécessite des moyens performantes et fiables. Le système forage rotary est à la base du processus d'extraction du pétrole.

Un système de forage est un ensemble des éléments dont l'objectif principale est de détruire la formation, généralement la roche pour enfin forer un puits.

Cette ensemble est constitué d'un moteur qui fait tourner une table de rotation qui fait tourner des tiges raccorder l'une à l'autre pour une longueur qui peut aller jusqu'à quelques kilomètres.

A cet effet la tige du forage se comporte comme un fil ce qui rend le contrôle de sa dynamique difficile. Pour donner une image sur quelle point la tige est longue et mince : une tige de 5000 mètres a le même comportement qu'un fil d'un diamètre d'1mm et de 40 mètres de longueur.

A la fin de ces tiges se place l'outil de forage « trépan ». Sous certaines conditions de fonctionnement, la vitesse de rotation de cette outil prend des allures dites stick-slip.

Ce phénomène s'explique par les lois de coulomb du frottement. Ces lois font intervenir le coefficient de frottement statique ou coefficient d'adhérence et le coefficient de frottement dynamique. Le premier (statique) intervient lorsque la vitesse de glissement entre les deux surfaces est non nulle.

Le second entre en compte lorsque la vitesse est non nulle.

En forage le stick-slip est associé aux modes de vibrations en torsion, en réponse à l'excitation en rotation de la table de rotation.

Ces vibrations qui sont pas intentionnellement provoquer ont un effet destructif sur les performances du système et peuvent causer des dégâts au composants du système, et aussi causer des problèmes de sécurité, en effet ces oscillations peuvent provoquer des niveaux de couple capable d'endommager le système de forage, rendant ainsi l'opération très coûteuse.

Plusieurs études ont été réalisés afin de modéliser et contrôler la dynamique de la chaîne de forage

ces derniers siècles en utilisant plusieurs approches et différentes lois de commande.

Dans la littérature la plupart des études ont été basés sur le la commande du modèle centralisé en négligeant la nature distribuée du système qui introduit le phénomène du retard.

Dans cette thèse on va élaborer des commandes qui vont être appliquer a notre système.

Ce mémoire est composé de cinq chapitre :

- le chapitre 1 présente d'un point de vue générale une description du système de forage et ces différents paramètres et une description des vibrations en particulier les vibration de torsion .
- le deuxième chapitre traite la modélisation de la chaîne de forage par les deux approches de modélisation ainsi que la modélisation du frottement de l'outil avec la roche.
- Dans le chapitre suivant on s'intéresse à la commande LQG-LTR , on va commencer par la construction du filtre de kalman puis l'application de la commande optimale LQG et afin de récupérer les performance de la commande LQG on vas utiliser la théorie LQG-LTR.
- la commande hinfini est appliqué au chapitre 4, qui est une commande robuste, qui est très intéressante pour pouvoir éliminer l'effet du stick slip qui est néfaste pour le forage. Un choix des éléments essentielles est présenté ainsi que le choix des filtres de pondérations puis une comparaison entre les résultats de cette commande avec la commande utilisée en industrie « soft torque ».
- Le dernier chapitre est consacré à la commande des systèmes à retard. une étude de stabilité est présente au début du chapitre après l'application de la commande en utilisant l'approche basé sur lyapunov-Karasovski.

Une conclusion générale , des annexes et la bibliographie complètent ce document.

# Chapitre 1

## Systeme de forage rotary

Dans cette partie on va faire une description du système de forage : son principe et les éléments qui le composent ainsi les différents types de vibrations pouvant se produire lors de la phase du forage.

Concernant les types de vibration on distingue trois classes de vibrations classer suivant leurs plans d'évolution :

- Les vibrations latérales,
- Les vibrations longitudinales,
- Les vibrations de torsion.

Dans notre travail on va s'intéresser en particulier aux oscillations de torsion résultantes du phénomène stick-slip, ces vibrations sont les plus importantes, ayant un effet néfaste sur le fonctionnement du système, il est très important de mentionner que la commande de ce phénomène représente un objectif industrielle prioritaire.

### 1.1 Systeme de forage rotary

#### 1.1.1 Le forage rotary

Les puits de production de gaz et de pétrole sont réalisés à l'aide d'un système de forage rotary. La rotation, générée depuis la surface par la table de rotation, est transmise jusqu'au fond du puits (pétrole ou gaz) par l'intermédiaire des trains de tiges. Les copeaux générés lors de la destruction de la roche par l'outil sont évacués à la surface par la circulation d'un fluide de forage (boue ou air comprimé). Les différents types de vibrations des garnitures de forage jouent un rôle important

dans les dysfonctionnements des opérations de forage car elles conduisent à la rupture prématurée du train de tige, à l'endommagement de certains de leurs composants (par exemple le trépan) et à la baisse globale des performances de forage. Les vibrations des trains de tiges sont décrites en termes de déplacement entre l'outil (le trépan) et la table de rotation. Il existe trois types de vibrations : vibrations de torsion, vibrations latérales ou de flexion et vibrations axiales.

### 1.1.2 Principe de forage rotary

Afin d'accéder directement à la poche contenant les hydrocarbures tels que le pétrole ou le gaz naturel, les foreurs vont devoir réaliser un trou de forage. Il y a plus de 4000 ans, les Chinois foraient déjà les premiers puits à l'aide d'une tige de bambou : la pointe cognait la terre et perçait le sol. Cette technique consiste à soulever un outil très lourd et le laisser retomber sur la roche à perforer en chute libre. Elle est utilisée pendant des siècles avec quelques modifications sur les outils. Actuellement, la méthode de forage utilisée est celle du Rotary, bien plus rapide et efficace. Cette méthode consiste tout d'abord à mettre en place un appareil de forage. Celui-ci est très cher, coûtant trois millions d'euros en moyenne. Les procédés de forage rotary sont des mécanismes qui jouent un rôle important dans l'extraction de pétrole ou du gaz. La technique de forage rotary consiste à mettre en rotation un outil (appelé trépan) sur lequel on applique une force orientée dans le sens d'avancement souhaité. Une pompe hydraulique assure la circulation du fluide qui transite par le train de tige, et remonte par l'espace annulaire qui permet l'évacuation des déblais vers la surface.

### 1.1.3 Description générale

Le système de forage se compose de deux parties essentielles : l'installation de forage et la garniture, comme le montre la figure ci-dessus.

- L'installation de forage est la partie située sur le sol. Elle comprend une tour contient les équipements de levage et de plancher qui permettent la manutention le visage et le dévisage des tiges et le changement de l'outil, la table de rotation qui est responsable du mouvement de rotation de la chaîne de forage et une pompe pour injecter les fluides de forage dans la chaîne de forage.

- La garniture est la partie souterraine du système de forage, elle est essentiellement constituée de deux parties essentielles :

- La partie la plus longue : est la partie haute composer des trains de tiges ou (drill pipes).
- La deuxième partie est l'assemblage du fond ou (BHA : Botom Hole Assembly).

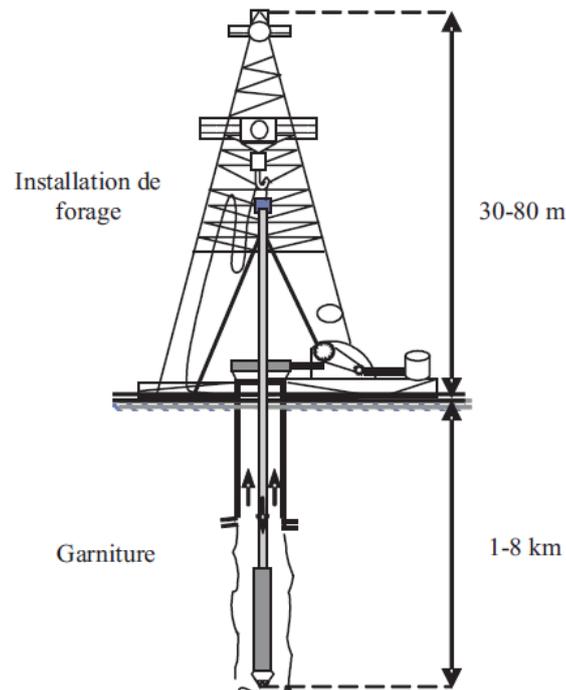


Figure 1.1 – système de forage

- La partie la plus longue : est la partie haute composé des trains de tiges ou (drill pipes).
- La deuxième partie est l'assemblage du fond ou (BHA : Bottom Hole Assembly). Pour permettre la manœuvre de la garniture de forage le système est conçu en incluant les systèmes suivants :

- Le système de suspension : il sert à faire monter et descendre l'équipement de forage .il permet aussi de fixer le poids appliqué au trépan en retenant partiellement le poids de l'ensemble de la garniture.

- Le système rotary : c'est le système responsable de la rotation de l'outil, il est composé de la table de rotation et sa motorisation pour les anciennes appareilles et le top drive pour les nouveaux système, la tige d'entraînement ainsi que le train de tige et la tête d'injection(trépan).

- Le système de circulation de boue : Il assure la circulation de la boue de forage et il est associé à une station de pompage servant au traitement du fluide de forage : la boue est en effet un mélange d'eau, d'argile et d'additifs. Une injection continue de boue dans le puits s'effectue pendant toute la durée du forage.

Les pompes à boue aspirent la boue des bassins par l'intermédiaire d'un tuyau flexible placé à l'intérieur du train de tiges et remontant par l'espace annulaire compris entre les tiges et le puits. La circulation de la boue contribue à la lubrification des pièces en mouvement, à leur refroidissement

et à l'excavation par évacuation vers la surface des fragments de roches arrachés par le trépan ; mais aussi à l'équilibre hydrostatique du puits et éventuellement à la rotation du trépan au travers d'une turbine. Enfin, la boue est d'une grande utilité pendant l'opération de forage car son analyse fournit des éléments sur la nature géologique des milieux traversés.

- Le système de production d'énergie : l'énergie est produite par des groupes électrogènes est transmise vers les différents systèmes de l'installation sous forme mécanique ou électrique.
- Le système de contrôle de puits : sert à détecter et gérer les apparitions soudaines des fluides sous pression, ces irrptions peuvent être extrêmement violentes.

#### 1.1.4 Principes de base du procédé de forage

Les puits de pétrole et de gaz sont forés principalement par le procédé de forage rotary. Le principe général du forage rotary consiste à mettre en rotation un outil en appliquant une force verticale orientée dans le sens d'avancement souhaité. Cet outil, appelé trépan, sert à tailler, strier et détruire la roche. La circulation continue de boue descendant par l'intérieur des tiges et remontant par l'espace annulaire compris entre les tiges et le trou évacue les débris de roche vers la surface. Cette boue joue un rôle important dans le travail d'attaque de la roche par le trépan.

#### 1.1.5 Paramètres de forage

Les paramètres de forage sont les différents facteurs mécaniques et hydrauliques pouvant agir sur la vitesse de progression notée *ROP* (Rate of Pénétration) ainsi que sur le comportement directionnel. Le *ROP* correspond à la profondeur (en mètres) forée par heure. L'optimisation du *ROP* est un aspect très important dans l'analyse du processus de forage car c'est directement lié au temps passé sur une installation onshore ou offshore. Les principaux paramètres mécaniques sont : le poids appliqué à l'outil, la vitesse de rotation et le couple exercé sur l'outil.

- poids sur l'outil *WOB* (Weight on Bit) : Ce paramètre désigne la force appliquée par la garniture sur l'outil suivant son axe de révolution. Cette force dépend du poids propre de la garniture, de la poussée d'Archimède due au fluide de forage et de la tension du câble de soutien de la garniture, en surface. Les grandeurs usuelles de *WOB* s'étendent typiquement entre  $10kN$  et  $103kN$  .
- La vitesse de rotation Le choix de la vitesse de rotation dépend de celui du *WOB*. En surface, elle peut être précisément contrôlée mais elle peut être différente de la vitesse de rotation du trépan. Les vitesses de rotation usuelles se situent entre 60 et 150 *RPM*(*tours/min*).

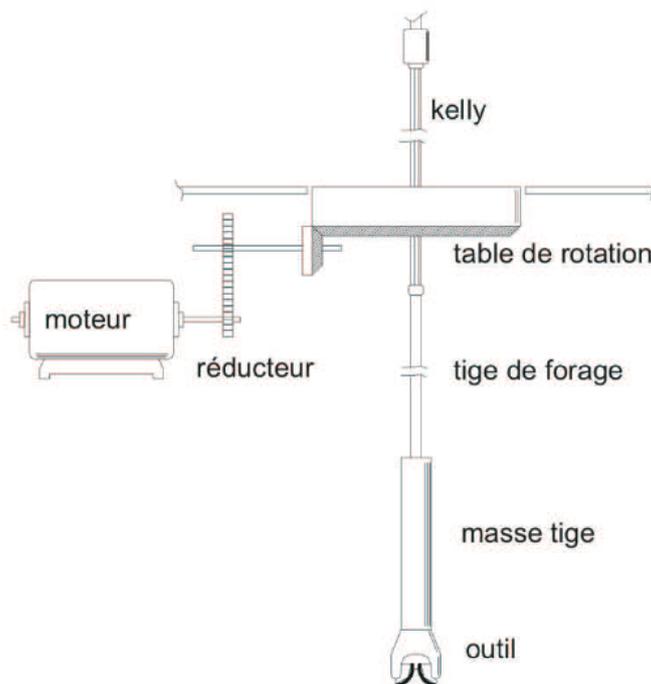


Figure 1.2 – Schéma des éléments principaux du forage rotary

- Le couple exercé sur l'outil *Tob* (Torque On Bit) Ce paramètre correspond au couple transmis par la garniture au trépan suivant son axe de révolution. Compte tenu des frottements du train de tiges contre la formation, ce couple est nettement inférieur à celui mesuré en surface. Ainsi, le couple *Tob* représente les effets combinés du couple réactif et des forces de frottement non linéaires sur la longueur du *BHA*.

### 1.1.6 Éléments principaux d'un équipement de forage

La figure suivante montre les éléments principaux qui composent un équipement de forage rotary. Le forage en mode dit "rotary" consiste à entraîner depuis la surface, un train de tiges transmettant au trépan, situé au fond du puits, un effort longitudinal de compression en fonctionnement normal (*WOB*) et un couple. Une certaine énergie est produite en surface pour maintenir cette rotation et permettre le travail de désagrégation de la roche par les taillants du trépan.

- La table de rotation :

Les moteurs qui fournissent l'énergie mécanique sont reliés soit à une table de rotation qui transmet le mouvement à la tige carrée [comme son nom l'indique, elle est carrée ou hexagonale pour permettre sa rotation ; cette tige est raccordée aux tiges de forage par un raccord d'usure, qui transmet le mouvement à l'outil de forage (bit en anglais)], soit à une tête de rotation qui transmet

le mouvement directement aux tiges de forage

- Le train de tiges :

Cette partie de la garniture est constituée d'une série de tiges d'acier raccordées les unes aux autres par des joints filés coniques. Le train de tiges permet de contrôler l'outil par la transmission du couple moteur fourni en surface, par l'intermédiaire de la table de rotation. En outre, il fournit la pression nécessaire pour percer dans la formation et abraser les roches avec une force *WOB* suffisante. Cet ensemble peut atteindre une longueur de plusieurs kilomètres (1 – 8km).

Les tiges de forage C'est un ensemble de tiges d'acier légères d'environ 10m de longueur, d'un



Figure 1.3 – train de tiges

diamètre extérieur pouvant aller de 9 à 15cm et d'une épaisseur de 1cm. L'ensemble des tiges de forage, entraîné à partir de la table de rotation est sollicité en traction et en torsion.

- Assemblage de fond *BHA* (Bottom Hole Assembly) :

C'est la partie inférieure de la structure de garniture, constituée de l'outil, des stabilisateurs et des masses-tiges. La longueur de cet ensemble varie typiquement de 100 à 300 m en fonction de la pression recherchée.

Les masses-tiges : Ce sont des tubes de fortes sections permettant d'exercer du poids sur le trépan. Les masses-tiges sont sollicitées en compression et en torsion. Les diamètres de ces tiges peuvent varier selon les puits, de 6 à 8 cm pour le diamètre intérieur et de 10 à 25 cm pour le diamètre extérieur pour une épaisseur de 6 à 16 cm, ce qui leur confère une bonne rigidité en torsion et en compression.

Les stabilisateurs : Ce sont des tubes de longueur nettement plus faible que celle des masses-tiges et dont le diamètre extérieur est voisin de celui du trépan. Ils sont placés au niveau des masses-tiges et parfois intercalés entre deux masses-tiges pour assurer le centrage et le guidage de l'assemblage de fond. Ils maintiennent le trépan perpendiculaire à la formation, ce qui augmente sa performance.

- Les trépan :



Figure 1.4 – Les types de trépan en forage pétrolier

Le trépan est monté à l'extrémité d'un train de tiges. C'est un outil qui sert à tailler et détruire la roche. Il existe différents types de trépans chaque type étant choisi pour une opération de forage spécifique, en fonction de la nature de la formation (la dureté) et de la résistance mécanique des terrains (stabilité des parois, comportement des argiles...). La mécanique de l'outil de forage influence directement la vitesse de progression ROP. Les plus utilisés sont les trépans PDC (Polycrystalline Diamond Compact) qui contiennent des pastilles de diamant (figure 1.4). Lorsqu'ils sont en bon état, ce mode de rupture est plus efficace et favorise l'extraction naturelle des débris rocheux. Ils s'avèrent plus performants lorsqu'ils sont bien utilisés, en d'autres termes bien commandés, sinon ces performances se dégradent. Les trépans PDC forent la formation par cisaillement, ce qui exige, de manière significative, moins d'énergie que la rupture de formation basée sur la compression. Les PDC sont stables pour des vitesses de rotation élevées mais instables pour des vitesses faibles. Cette instabilité conduit à des vibrations d'auto excitation comme par exemple les vibrations de type « stick-slip ».

## 1.2 Vibrations de train de tiges

Les vibrations de train de tiges (drillstrings) ont été étudiées dans la littérature durant ces dernières années. Connaître le mode de la vibration est extrêmement utile car on peut alors trouver plus aisément un moyen de les compenser. Les vibrations latérales dans l'assemblage de fond *BHA*

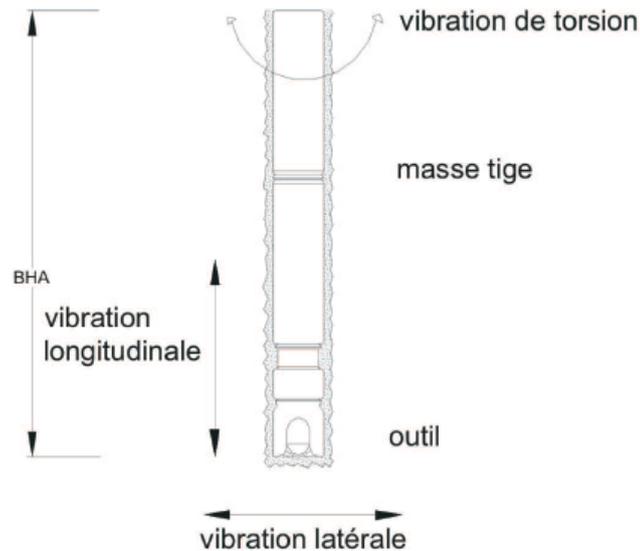


Figure 1.5 – vibrations de train de tige

sont nombreuses, cependant, elles sont rarement identifiées parce qu'elles n'influent pas au-delà d'un point dit de "non contrainte". Elles peuvent être limitées en évitant la vitesse de rotation critique et en plaçant de manière optimale les stabilisateurs. Le type le plus violent de vibrations, comme on l'a déjà souligné, est celui du « stick-slip » (collé-glissé). Il est produit par le frottement non linéaire entre le trépan et la roche.

La figure montre certains modes de vibrations de train de tiges durant le processus de forage. *BHA* est la partie la plus soumise aux vibrations. Celles du train de tiges peut être induites par le contact entre le trépan et la formation, le contact entre le train de tiges et le puits et par l'auto-induit. On peut distinguer les vibrations longitudinales, les vibrations latérales, les vibrations hydrauliques, et les vibrations de torsion. Ces vibrations peuvent engendrer une erreur prématurée l'équipement, une réduction de la vitesse de progression *ROP* et une augmentation du coût d'un puits.

- Vibrations longitudinales :

Une vibration longitudinale produit quand la vibration du milieu est parallèle à la direction du transfert d'énergie. Les vibrations longitudinales sont des alternances de compressions et de cotisations au rebondissement du trépan sur la formation rotation. Le mode de vibration longitudinale du train de tiges peut, dans certaines conditions de forage, dégénérer en rebonds avec séparation périodique au niveau du contact outil-roche. Ce phénomène de rebond intervient surtout avec un outil de type tricône dont l'énergie se développe plutôt dans le sens longitudinal.

- Vibrations latérales :

Cette vibration est aussi dite transversale, ou "tourbillonnante". Elle est causée par l'excentricité

des tiges qui mènent aux forces centripètes pendant la rotation. Le mouvement de synchrone tourbillonnant, se produisant par une même vitesse de rotation du mouvement précision et mouvement de l'outil sur lui-même. Ce type de vibration est auto limité par le puits, mais il peut conduire à un choc endommagé par contact avec le mur du puits.

- Vibrations de torsion

Ce type de vibrations est causé par le phénomène de «stick-slip» qui se produit quand une section de train de tiges est momentanément soumise à un frottement contre le puits. Les conséquences du «stick-slip» peuvent être assez graves dans la mesure où cela peut provoquer l'arrêt de la rotation du trépan. On s'intéresse à cette dernière à ce dernier type de vibrations.

## 1.3 Stick-Slip

### 1.3.1 Stick-Slip dans le forage

L'efficacité, la fiabilité, la performance et la sécurité sont des aspects importants dans le forage de puits profonds. L'un des principaux facteurs limitant la maximisation des performances de forage est la présence de vibrations de la tige de forage. Ces vibrations diminuent la qualité du forage, provoquent une usure prématurée de l'équipement du forage entraînant la fatigue et induisant des défaillances telles que la torsion des tiges de forage. En raison de la diminution des performances et de l'efficacité, les vibrations de chaîne de forage peuvent coûter des millions de dollars pour chaque compagnie de forage. Ainsi, l'atténuation des vibrations et l'amélioration des performances de forage est de grand intérêt économique pour l'industrie pétrolière. Dans le même temps, la sécurité reste la priorité absolue. En d'autres termes, atteindre une amélioration des performances (par exemple en réduisant les vibrations), et donc des coûts réduits, ne peut pas être obtenu au détriment de la fiabilité et de la sécurité. Les systèmes de forage sont connus pour présenter différents types de vibrations auto-excitées, Comme on l'a déjà mentionné dans les paragraphe précédents. Dans ce travail on va travailler sur les vibrations de torsion et en particulier sur l'atténuation des vibrations de torsion. Le stick-slip est caractérisé par des phases dans lesquelles le trépan arrive à un arrêt complet (bâton) et les phases dans lesquelles le bit tourne avec plusieurs fois la vitesse angulaire désirée (glissement). Un résultat de simulation d'une tige de forage, avec une vitesse angulaire désirée de *50RPM*, qui souffre des vibrations stick-slip est illustré dans la figure suivante.

Les cycles limites de stick-slip dans la réponse de la vitesse angulaire du bit peut être clairement

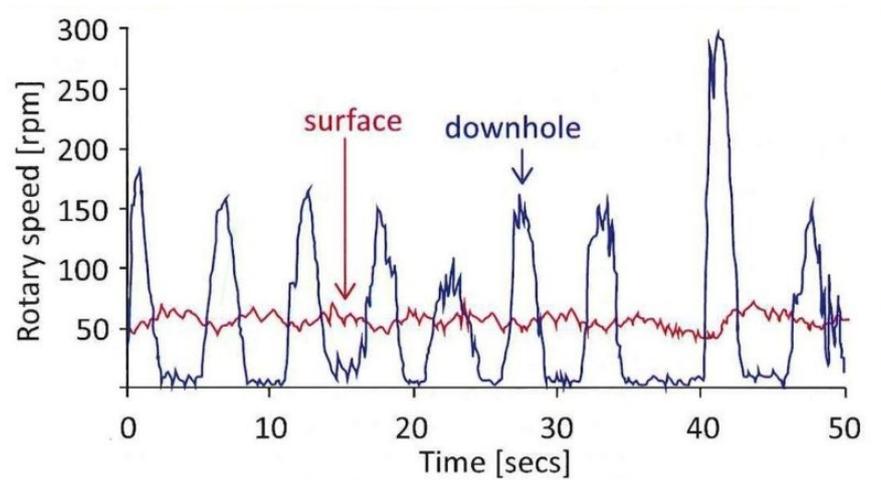


Figure 1.6 – résultat de simulations d’une tige de forage illustrant le phénomène stick-slip.

reconnue dans la figure 1.6 ; La courbe en bleu montre la vitesse de top drive entre 50 et 60RPM et la grise montre la vitesse de rotation du trépan. On peut remarquer que la vitesse de rotation du trépan peut atteindre 3 à 5 fois la vitesse du top drive et avec une période d’oscillations de 1 à 5 sec. Pendant cette période, le trépan arrive parfois à un arrêt complet au même temps, le top drive tourne à une vitesse moyenne d’environ 55 RPM, ce qui cause des fluctuations de torsion sur le train de tiges.

En pratique, la présence de vibrations de stick-slip peut être reconnue dans les mesures de fond et mesures de surface. Investigation de ces vibrations en termes de la modélisation, l’analyse et l’atténuation des vibrations constituent un aspect important du forage.

Le principal problème avec les vibrations stick-slip est le fait qu’il réduit l’efficacité de forage, entraînant une diminution du taux de pénétration (ROP). De plus, ce type de vibrations entraîne une usure excessive des trépan, ce qui est préjudiciable pour les outils dans l’assemblage du fond (BHA) à cause des vitesses qui sont atteintes pendant les phases de glissement. Pour ces raisons, le rejet de ces perturbations présente un grand intérêt.

### 1.3.2 Autres exemples de stick-slip

le stick slip est présent dans plusieurs domaines dans notre vie quotidienne, dans ce qui suit on va présenter quelques un :

### 1.3.2.1 Violon

Quand un violoniste fait de la belle musique, c'est les vibrations du stick-slip qui font chanter le violon. Le frottement entre l'arc et la corde provoque un patinage. Avec le frottement statique la corde "colle" à l'arc et l'arc entraîne la corde avec jusqu'à ce que l'énergie dans la corde est assez grande et la corde "glisse"; il freine librement de l'arc et passe devant avec un faible frottement cinétique. Quand la corde perd son énergie, elle colle encore à l'arc et le cycle continue. Quand le violoniste change le ton de l'instrument, il bouge son doigt va-et-vient le long du cou du violon tout en appuyant sur la corde contre le cou, ce qui change la longueur effective de la chaîne. Cette manœuvre oblige le stick-slip à se produire à différentes fréquences, et en effectuant ces variations de longueur de chaîne dans le bon sens, le violon fera de la belle musique. Aussi la vitesse de l'arc aura effet sur la fréquence du stick-slip, donc d'une manière simplifiée, il peut être vu que le violoniste a deux degrés de liberté pour manipuler le son.

### 1.3.2.2 Tremblement de terre

une autre situation dans la nature où on peut remarquer ce phénomène est dans les tremblements de terre. La coquille extérieure dure de la Terre est actuellement divisée en huit grandes, et beaucoup de plaques mineures. Un tremblement de terre tectonique est causé par une libération soudaine d'énergie dans la croûte terrestre qui crée des ondes sismiques. L'énergie est libérée à la suite d'un glissement soudain entre deux plaques. Comme les plaques ont des aspérités le long de leur frontières, ils auront tendance à se coller ou à se bloquer les uns avec les autres comme ils se déplacent. Le mouvement relatif suivant entre les plaques conduira à une contrainte croissante et une force est construite pour que les plaques se déforment élastiquement. Lorsque la force est suffisante pour libérer les plaques, l'énergie stockée est libérée sous forme d'ondes sismiques qui font vibrer le sol. Les plaques seront finalement collées et enfermées à nouveau dans un comportement de stick-slip et plus de tremblements de terre arrivent au fil du temps.

## 1.4 Atténuation des vibrations stick-slip

L'atténuation des vibrations peut être divisée en deux catégories : la méthode passive et la méthode active, la première catégorie est groupée en trois sous-catégories, l'optimisation de l'assemblage de fond (BHA), le choix du trépan et l'utilisation des équipements de fond. La méthode active est basée sur les techniques de contrôles.

Pour la méthode passive on va citer l'utilisation des outils de fond pour la suppression des vibrations et en particulier, sur les anti stick-slip en anglais (anti stick-slip tools) se sont des outils mécaniques qui vise à ajuster le couple de forage automatiquement et avec cela réduire les oscillations et augmenter l'efficacité du forage.

La deuxième solution est l'utilisation des différentes méthodes de contrôle. La technique la plus connue est Soft Torque . L'idée de cette technique est rendre le système de rotation en surface se comporte d'une manière soft. Pour la synthèse de ce régulateur le système de forage se comporte comme un pendule de torsion de deux degrés de libertés dont le premier mode de torsion peut être amortie par un régulateur PI basé sur les données de surface. . . . . Donc les régulateurs industriels actuels (comme soft torque) ne peuvent pas toujours éliminer les vibrations de type stick slip dans les puits les plus profonds et les puits inclinés aussi. Une autre raison pour la défaillance de ces régulateurs est l'incertitude dans l'interaction entre le trépan et la roche (non linéaire). Un autre aspect important dans la conception des régulateurs pour atténuer ces vibrations dans des systèmes de forage est le type de mesures utilisées pour le contrôle. En littérature, quelques méthodologies de conception de contrôleur se fondent sur des mesures de fond (down hole measurement). Cependant, ces mesures en temps réel ne sont pas disponibles dans la pratique, dues aux limitations sur les donnée, retard dans le temps, et les couts élevés.

# Chapitre 2

## Modélisation de la chaîne de forage

### 2.1 Introduction

Ce chapitre présente tout d'abord, de manière non exhaustive, une étude de modèle de frottement non-linéaire. Leur prise en compte est indispensable en particulier à basse vitesse pour valider un cahier des charges et permettre l'analyse des problèmes générés par ce phénomène afin d'orienter les solutions permettant de les résoudre. Ensuite, nous présentons deux types de modèles mathématiques associés au système de forage rotary : le premier modèle centralisé (Lumped) tandis que le second distribué qui tient en compte le retard due au propagation d'onde dans le train des tiges.

Pour la modélisation centralisé des trains de tiges, on utilise celle d'une ligne de transmission masse-ressort de 3-DDL (Top drive, train des tiges et BHA) c'est une discrétisation finie de la chaîne de forage. [15]

Pour la modélisation distribuée on utilise le modèle d'équation d'onde d'Alambert qui fournit une description réaliste des variables du système distribué, L'étude des équations à dérivées partielles nous a permis de trouver un modèle à équations ordinaires avec un retard de type neutre. [24]

### 2.2 Modèle de frottement pour le forage rotary

on sait que les frottements dans le système de forage s'expriment par une relation non linéaire entre le couple exercé sur le trépan  $T_{tob}$  et sa vitesse de rotation  $\phi_b$ . [26]

Commençons par une analyse simple de ce phénomène. La (figure 2.3) exhibe la relation entre la vitesse de rotation du trépan et le couple au trépan  $T_{tob}$ . L'augmentation du frottement à faible vitesse est connu comme un frottement statique et c'est la principale source des oscillations. Par contre, l'augmentation du frottement à vitesse élevée peut être contrôlée par l'amortissement. Plus précisément, dans cette figure, ce qui compte est le couple nécessaire pour mettre le trépan en rotation, et c'est ce qu'on appelle le couple statique  $T_s$ , qui est beaucoup plus grand que le frottement dynamique  $T_d$ . ou le frottement de Coulomb. On devrait considérer que le modèle ci-dessous est seulement un moyen pouvant expliquer les oscillations observées sachant que d'autres mécanismes peuvent également causer des effets semblables. Brièvement, le phénomène de collé-glissé peut

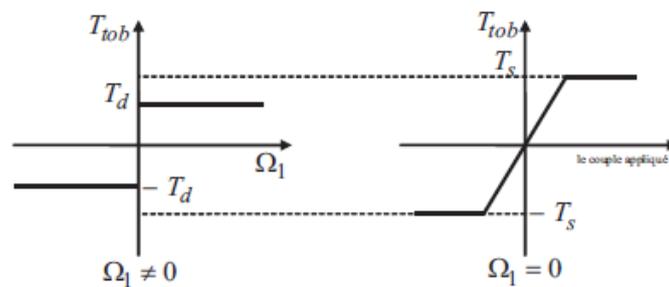


Figure 2.1 – Modèle de coulomb et frottements statiques

s'expliquer de la manière suivante :

1. quand le trépan s'arrête suite, par exemple, à l'augmentation soudaine du  $WOB$ , le frottement nécessaire pour remettre le  $BHA$  en mouvement sera  $T_s$  ;
2. vu que le top drive continue à tourner à une certaine vitesse, et que le train de tiges – en raison de sa longueur – est assez flexible, ce dernier va se tordre jusqu'à ce que le couple du train de tiges atteigne la valeur des frottements statiques  $T_s$ . Le trépan commence alors à se mouvoir .
3. il dépasse alors sa vitesse nominale et et comme l'amortissement de trépan est faible, il finira par s'arrêter, et le cycle se répète.

Plus récemment, certains auteurs ont étudié le phénomène de « stick-slip » et en ont présenté un modèle non linéaire approximé mais qui convient relativement bien, et que nous utiliserons tout au long de notre travail qui va suivre .

D'après [19] l'expression analytique du couple de ces frottements est :

$$T_{OB} = c_b \dot{\phi}_b + \text{sign}(\dot{\phi}_b) \cdot W_{OB} \cdot R \cdot (\mu_c + (\mu_s - \mu_c)) e^{-\gamma |\dot{\phi}_b|} \quad (2.1)$$

Tel que  $W_{OB} > 0$  représente le poids sur l'outil,  $R > 0$  le rayon de l'outil,  $c_b$  coefficient de frottement visqueux de la boue ( $\mu_s, \mu_c \in [0,1]$ ) coefficient du frottement statique et dynamique respectivement,  $\gamma \in [0, 1]$  une constante de temps.

### 2.3 modèle à paramètres centralisés

Le système de forage rotary peut être modélisé par trois inerties couplées par deux pendules de torsion linéaires de constante de raideur  $k_c$  et  $k_b$  et deux coefficients de frottement. Autrement dit, les tiges de forage sont représentées comme des ressorts de torsion et les masses-tiges se comportent comme un corps rigide. Ces pendules de torsion sont liés à deux dispositifs d'amortissement visqueux de constantes  $d_p$  et  $d_b$ , comme indiqué dans la figure (2.2)

L'assemblage de fond *BHA* est constitué de tubes à parois épaisses qui fournissent une force suffisante pour forer. Une tige d'entraînement transmet le couple moteur de top drive à la tige de forage. [20]

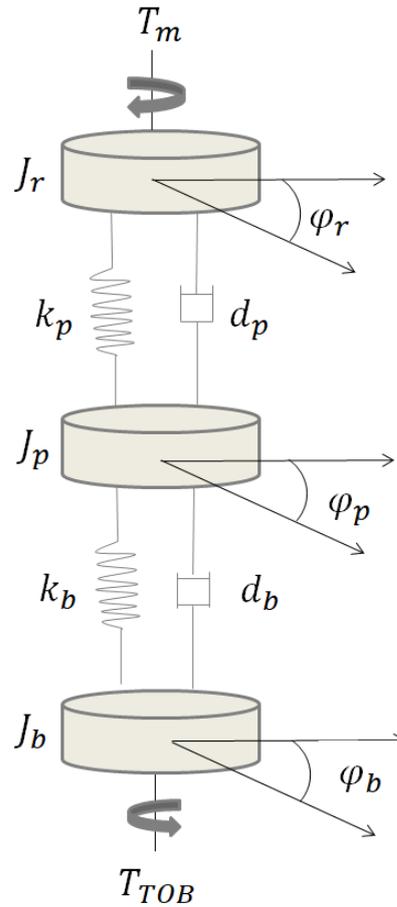


Figure 2.2 – Modèle de forage rotary

en va appliquer les lois fondamentale de la dynamique sur le système en haut pour aboutir aux équations de l'évolution de ce système.

les équations du mouvement pour ce système peuvent être obtenus à partir des équations de lagrange pour chaque vitesses  $\dot{\varphi}_r$ ,  $\dot{\varphi}_p$  et  $\dot{\varphi}_b$ . soit  $L'$  le lagrangien du système :

$$L = T - V \quad (2.2)$$

tel que  $U$  et  $T$  sont respectivement l'énergie potentielle et l'énergie cinétique d'où :

$$V = \frac{1}{2}k_p(\varphi_r - \varphi_p)^2 + \frac{1}{2}k_b(\varphi_p - \varphi_b)^2 \quad (2.3)$$

et :

$$T = \frac{1}{2}J_r\dot{\varphi}_r^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\varphi}_p^2 + \frac{1}{2}J_b\dot{\varphi}_b^2 \quad (2.4)$$

on remplaçant dans l'équation (2.2) :

$$L = \left( \frac{1}{2}J_r\dot{\varphi}_r^2 + \frac{1}{2}J_p\dot{\varphi}_p^2 + \frac{1}{2}J_b\dot{\varphi}_b^2 \right) - \left( \frac{1}{2}k_p(\varphi_r - \varphi_p)^2 + \frac{1}{2}k_b(\varphi_p - \varphi_b)^2 \right) \quad (2.5)$$

les équations de lagrange s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_r} = -d_p(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_p) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_p} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_p} = d_p(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_p) - d_b(\dot{\varphi}_p - \dot{\varphi}_b) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_b} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_b} = d_b(\dot{\varphi}_p - \dot{\varphi}_b) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

on remplaçant  $L$  dans l'équation (2.6) on aboutit aux équations différentielles du mouvement des trois masses :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}_r = -\frac{d_p}{J_r}(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_p) - \frac{k_p}{J_r}(\varphi_r - \varphi_p) + \frac{1}{J_r}T_m \\ \ddot{\varphi}_p = \frac{d_p}{J_p}(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_p) + \frac{k_p}{J_p}(\varphi_r - \varphi_p) - \frac{d_b}{J_p}(\dot{\varphi}_p - \dot{\varphi}_b) - \frac{k_b}{J_p}(\varphi_p - \varphi_b) \\ \ddot{\varphi}_b = \frac{d_b}{J_b}(\dot{\varphi}_p - \dot{\varphi}_b) + \frac{d_b}{J_b}(\varphi_p - \varphi_b) - \frac{1}{J_b}T_{TOB}(\dot{\varphi}_b) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où la désignation des variables est fournie par la liste des symboles :

### 2.3.1 Modèle mathématique du système

d'après les équations (2.7) on peut obtenir un modèle mathématique sous la représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_d T_{TOB} \quad (2.8)$$

posons  $x = [\varphi_r, \dot{\varphi}_r, \varphi_p, \dot{\varphi}_p, \varphi_b, \dot{\varphi}_b]^T$  et  $u$  représente la commande . D'après l'équation(2.7) les équations d'état du système :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_p}{J_r} & \frac{-d_p}{J_r} & \frac{k_p}{J_r} & \frac{-d_p}{J_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_p}{J_p} & \frac{-d_p}{J_p} & \frac{-k_p-k_b}{J_p} & \frac{-d_p-d_b}{J_p} & \frac{k_b}{J_p} & \frac{d_b}{J_p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{d_b}{J_b} & \frac{d_b}{J_b} & \frac{-k_b}{J_b} & \frac{-d_b}{J_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/J_r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (T_m) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J_b \end{pmatrix} (T_{TOB}) \quad (2.9)$$

après une validation de ce modèle dans la section (), on va l'utiliser comme un modèle a haute fidélité pour tester les commandes dans les chapitres qui suivent (STRS, LQG , LQG-LTR et  $\mathcal{H}_\infty$  )

## 2.4 Modèle à paramètres distribués

Pour résoudre le problème de retard, la dynamique de torsion de la chaîne de forage peut être représentée par une équation d'onde linéaire (équation d'onde d'Alambert) soumise à des conditions aux limites (non linéaires) due au frottement outil-formation.

À la connaissance de l'auteur, le premier modèle du forage rotary était développé dans les années 1960 à « Shell Development Company » par Bailey et Finnie, Ils ont proposé un modèle d'équation d'onde pour traiter analytiquement les vibrations longitudinales et celles de torsion. En raison de la précision de cette approche de modélisation dans la reproduction du comportement de forage, en ce qui concerne sa nature distribuée, elle constitue la base de plusieurs contributions récentes sur l'analyse et le contrôle du forage rotary.

La représentation de la colonne de forage par des équations d'ondes linéaires peut également être utilisée pour la conception de contrôleurs (résultats récents).

### 2.4.1 Comportement oscillatoire de la chaîne de forage

La propagation d'onde de torsion le long d'une chaîne de forage de longueur  $L$  peut être modélisée par l'équation aux dérivées partielles hyperbolique suivante [25] :

$$GJ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) - I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t}(x, t) = 0 \quad (2.10)$$

Comme la majeure partie de la dissipation d'énergie dans les systèmes de forage se produit au niveau des interactions outil-formation, alors le modèle de paramètres distribués (2.10) se réduit à

l'équation d'onde unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) \quad (2.11)$$

avec  $c = \sqrt{\frac{I}{GJ}}$

## 2.4.2 Conditions aux limites cinématiques

### 2.4.2.1 Au niveau de Top drive :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, t) = \Omega(t) \quad (2.12)$$

Tel que  $\Omega$  est la vitesse de rotation de l'arbre de moteur.

La vitesse angulaire provenant du rotor  $\Omega$  ne correspond pas à la vitesse de rotation de la charge  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, t)$  cette vitesse de glissement entraîne la torsion locale du train de tiges :

$$GJ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, t) = \beta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, t) - \Omega(t) \right) \quad (2.13)$$

où  $\beta$  désigne le moment angulaire à l'extrémité supérieure et  $\Omega(t)$  notre commande qui est la vitesse de rotation du rotor (l'arbre de moteur).

### 2.4.2.2 Au niveau de l'outil (bottom hole) :

La condition au niveau de l'outil de forage est la suivante :

$$I_B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(L, t) = -GJ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(L, t) - T \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, t) \right) \quad (2.14)$$

$I_B$  est le moment d'inertie de l'assemblage au fond du puit.

L'extrémité ( $x = L$ ), est soumise à un couple  $T$ , fonction du vitesse de l'outil.

Le modèle de  $T$  comprend un terme linéaire  $c_b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, t)$  représentant le couple d'amortissement visqueux qui se rapproche de l'influence de la boue et un terme non linéaire  $F \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, t) \right)$  représentant le couple de frottement sur l'outil qui modélise le contact outil-formation, c'est-à-dire :

$$T \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, t) \right) = c_b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, t) + F \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, t) \right) \quad (2.15)$$

avec :

$$F \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, t) \right) = WOB.R. (\mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-\gamma |\dot{\varphi}(L, t)|}) \quad (2.16)$$

### 2.4.3 Résolution de l'équation d'onde (EDP) :

#### 2.4.3.1 Résolution numérique :

##### méthode des éléments finis :

La discrétisation de l'équation d'onde aboutit à un modèle (Multi-DDL) à paramètres centralisés (Lumped), c'est-à-dire la représentation de la dynamique de la chaîne de forage est en éléments finis, bien entendu un choix approprié pour le nombre d'éléments dans une telle discrétisation dépend de l'application à portée de main.

Au lieu de discrétiser un modèle de dimension infinie pour obtenir un modèle multi-DDL (c'est-à-dire des représentations par la méthode des éléments finis) on peut également être basées sur les propriétés de la chaîne de forage.

En effet, ces modèles multi-DDL sont des extensions des modèles à pendule, où seule l'inertie de top drive, les tiges et BHA (Modèle à 3-DDL) sont prises en compte. On peut également penser à des modèles où les sections des tiges et/ou le BHA sont divisés en plusieurs sections, chaque section est alors représentée par une inertie équivalente et ces inerties sont regroupées pour représenter l'ensemble de la colonne de forage.

L'extension la plus simple des modèles à pendule est un modèle à trois degrés de liberté, avec une inertie supplémentaire pour représenter les tiges de forage (section précédente).

#### 2.4.3.2 Résolution analytique :

##### Modèle à retard de type neutre :

Le modèle d'équation d'onde fournit une description réaliste des variables du système distribué ; cependant, dans certaines circonstances il est commode de traiter un modèle relativement plus simple impliquant uniquement les variables d'intérêt primaires. [1]

Cette section présente une procédure directe pour dériver, à partir de l'équation d'onde à dérivés partielles, un modèle entrée-sortie équivalent décrit par une équation à dérivés ordinaires avec un retard de type neutre reliant les variables aux deux extrémités de la chaîne de forage.

En réduisant le problème à une équation retard de type neutre, nous sommes en mesure d'exploiter les techniques de la théorie des systèmes à retard pour mieux comprendre la complexité de l'analyse et de la simulation des modèles EDP.

La méthode d'Alembert fournit une solution à l'équation d'onde unidimensionnelle.

En introduisant les variables  $v = t + cx$  et  $\eta = t - cx$ , la solution générale de l'équation d'onde (2.11), décrivant le comportement de forage en torsion [22], est donné par :

$$\varphi(x, t) = \chi(v) + \psi(\eta) \quad (2.17)$$

Où  $v$  et  $\eta$  sont des fonctions réelles à valeurs arbitrairement différentiables, avec  $v$  représentant une onde ascendante et  $\eta$  une onde descendante.

On définit la vitesse de l'outil :

$$\dot{\varphi}_b(L, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(L, t) = \dot{v}(t + \tau) + \dot{\eta}(t - \tau) \quad (2.18)$$

avec :  $\tau = cL$  On remplaçons (2.17) et (2.18) dans les conditions aux limites (2.13) et (2.14) et après un développement on trouve :

$$\dot{\varphi}_b(t) = \Upsilon \dot{\varphi}_b(t - 2\tau) - \Psi \dot{\varphi}_b(t) - \Upsilon \Psi \dot{\varphi}_b(t - 2\tau) - \frac{1}{IB} T(\dot{\varphi}_b(t)) - \frac{\Upsilon}{IB} T(\dot{\varphi}_b(t - 2\tau)) + \Gamma \Omega(t - \tau) \quad (2.19)$$

avec :  $\Upsilon = \frac{\beta - cGJ}{\beta + cGJ}$ ,  $\Gamma = \frac{2\Psi}{\beta + cGJ}$ ,  $\Gamma = \frac{cGJ}{IB}$  et  $\dot{\varphi}_b$  est la vitesse de rotation de l'outil de forage.

## 2.5 Résultats des simulations

### 2.5.1 Résultat de simulation du modèle centralisé

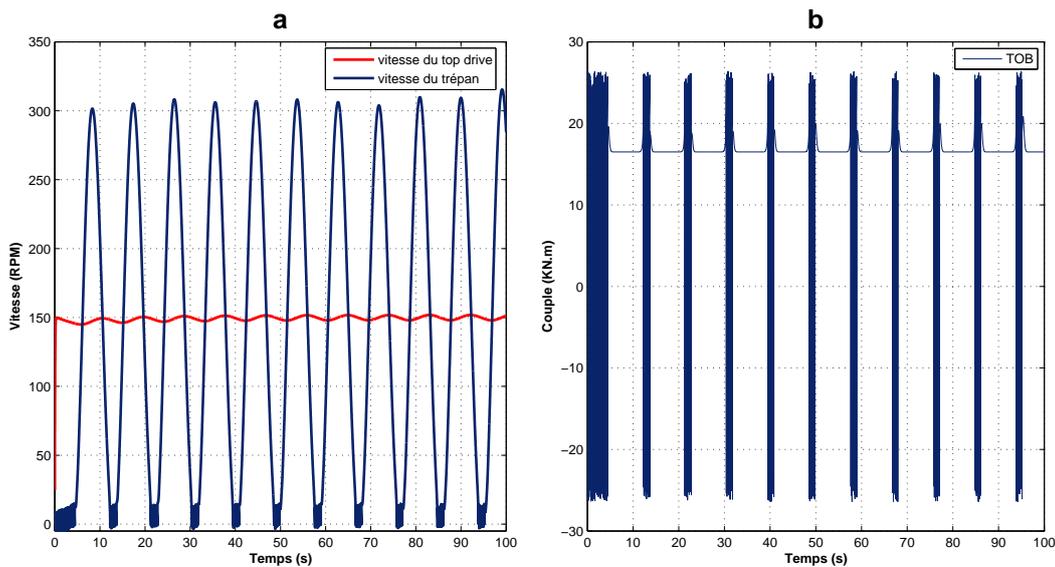


Figure 2.3 – a- Simulation de la vitesse de rotation du top drive et de trépan au fond de puit.

b- Simulation de friction non-linéaire au fond avec l'expression (2.1)

la figure (2.3.a) montre le phénomène de "Stick-Slip" au niveau de l'outil de forage tel que le top drive essaye toujours de garder sa vitesse constante malgré la présence d'un couple de frottement au niveau de trépan, la vitesse de ce dernier entre alors dans un cycle limite de vitesse très importante (plus que le double de la vitesse de top drive).

la figure (2.3.b) montre la variation du couple de frottement non-linéaire (2.1) en fonction de la vitesse de trépan, tel que si l'outil est en mode arrêt (stick) le couple varie entre  $+T_s$  et  $-T_s$  représente le frottement statique, la variation de signe c'est pour dire que le couple est toujours en opposition avec le sens du mouvement de l'outil et si l'outil est en mode de glissement (slip) le couple alors prend sa valeur dynamique  $T_d$ .

la figure 2.4 montre la variation du couple de surface (top drive) pendant les vibrations de stick-slip, ce régime oscillatoire est très néfaste pour les actionneurs.

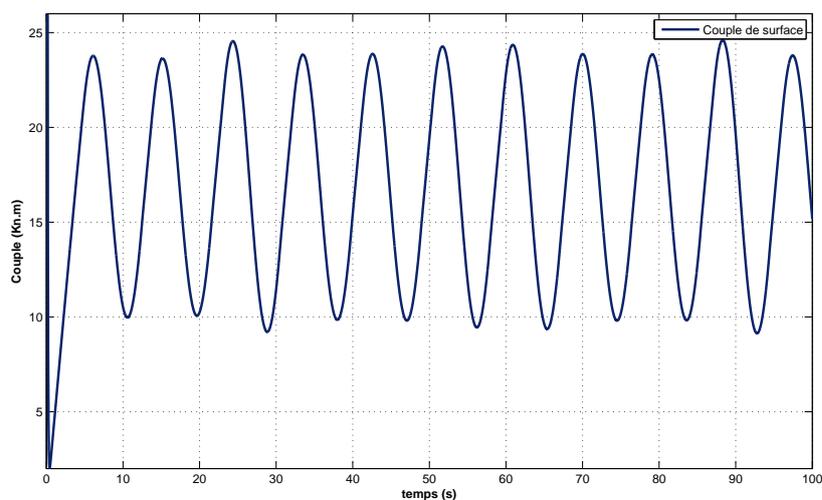


Figure 2.4 – Simulation du couple de Top drive

## 2.5.2 Résultat de simulation du modèle distribué

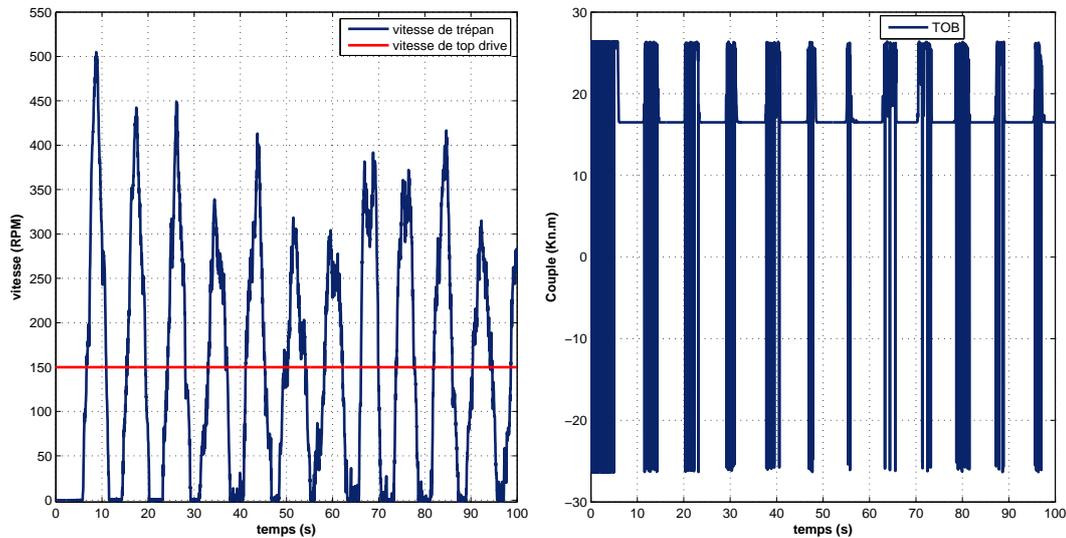


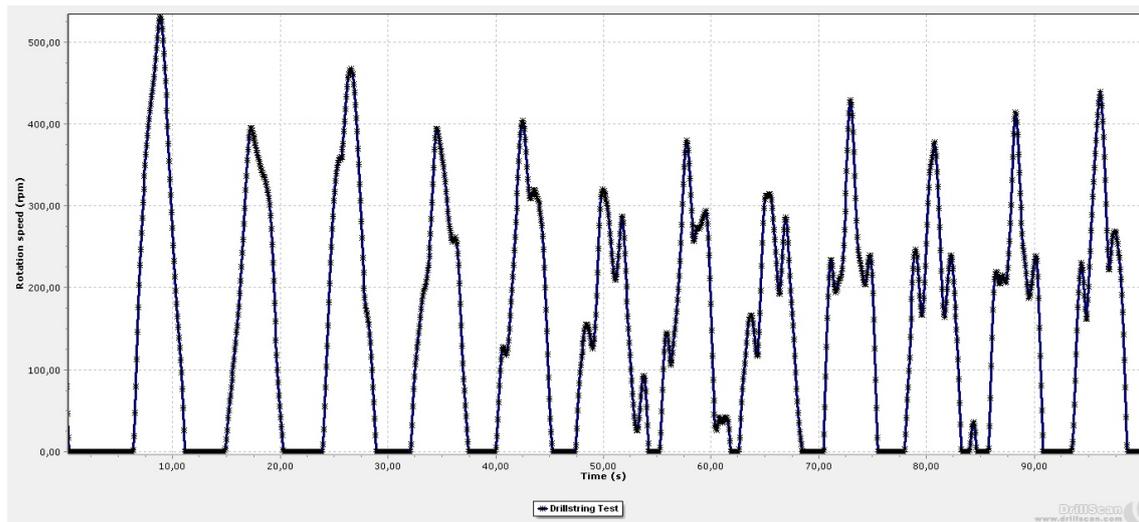
Figure 2.5 – a- Simulation de la vitesse de rotation du top drive et de trépan au fond de puit.

b- Simulation de friction non-linéaire au fond avec l'expression (2.15)

## 2.6 Validation des résultats

la validation a été élaborée par "*WellScan Software*" de la société DrillScan qui propose des solutions métier de premier plan dans la modélisation dynamique et mécanique des garnitures et outils de forage.

Après introduire la trajectoire et les paramètres de notre garniture voire *Annexe B*, Nous avons obtenu le résultat de simulation suivant :

Figure 2.6 – Simulation de la vitesse de trépan par *WellScan Software*

la figure (2.6) illustre le comportement du stick-slip dans la réponse de la vitesse angulaire du bit. Ce résultat est utilisé pour valider les résultats des modèles centralisé et distribué.

### 2.6.1 Comparaison avec les résultats de modèle centralisé et distribué :

Modèle		1 <sup>er</sup> Pick	2 <sup>eme</sup> Pick	3 <sup>eme</sup> Pick	4 <sup>eme</sup> Pick
WellScan	<i>stick</i>	0 – 6.25s	11.1 – 14.8s	20.33 – 23.91s	28.9 – 32.10s
	<i>slip</i>	6.25 – 11.1s	14.8 – 20.33s	23.91 – 29s	32.1 – 37.45s
	<i>RPM max</i>	530	395	467	393
Centralisé	<i>stick</i>	0 – 4.5s	12.2 – 13.6s	21.4 – 22.5s	30.3 – 31.9s
	<i>slip</i>	4.5 – 12.2s	13.6 – 21.4s	22.5 – 30.3s	31.9 – 39.6s
	<i>RPM max</i>	305	302	324	308
Distribué	<i>stick</i>	0 – 6s	11.5 – 14.4s	20.3 – 23.3s	29.2 – 31.2s
	<i>slip</i>	6 – 11.5s	14.4 – 20.3s	23.3 – 29.2s	31.2 – 37.7s
	<i>RPM max</i>	506	440	453	340

Tableau 2.1 – comparaison entre les modèles obtenus et le résultat de *WellScan*

D'après les résultats du tableau (2.2), le modèle distribué est plus proche de celui de *WellScan*,

la notion de retard apparaît dans le modèle distribué tel que la période de stick de 1<sup>er</sup> pick de modèle distribué est 6s par contre celui de centralisé est 4.5s, une différence de 1.5s  $\approx \tau = 1.2s$  avec  $\tau = cL$  (retard neutre de la chaîne de forage).

# Chapitre 3

## Commande linéaire quadratique gaussienne LQG

### 3.1 Introduction

les vibrations stick-slip au niveau de la chaîne de forage peuvent provoquer des défaillances prématurées des composants et des opérations de forage inefficaces. Des travaux de recherche antérieurs utilisent des mesures en temps réel de tous les états de la chaîne comme un feedback aux contrôleurs pour éliminer de telles vibrations. Alors que les mesures en temps réel sont facilement disponibles pour les composants en surface, seules des mesures limitées sont pratiquement disponibles pour les états de fond [2]. Pour répondre à l'exigence relative aux états de fond, cet article propose l'utilisation de l'estimateur de Kalman pour estimer la position et la vitesse du trépan de forage en fonction des mesures effectuées en surface. Dans la conception de l'estimateur, le couple de friction non linéaire au fond est approximé par un modèle linéaire de perturbation persistante. Une stratégie de contrôle linéaire-quadratique-gaussienne (LQG) est ensuite appliquée sur les états estimés pour atténuer les vibrations non désirées.

### 3.2 Estimateur de Kalman

la conception d'estimateur et de régulateur est basée sur un modèle réduit de deux DDL comme le montre la figure (3.1).

### 3.2.1 équations de modèle réduit :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_r = T - k_T(\varphi_r - \varphi_b) - d_T(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_b) \\ J_2 \ddot{\varphi}_b = k_T(\varphi_r - \varphi_b) - d_T(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_b) - T_{opp} \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $J_1 = J_r + J_p$  et  $\varphi_r$  dénotent l'inertie équivalente et le déplacement angulaire du top drive et les tiges de forage ; tandis que  $J_2 = J_b$  et  $\varphi_b$  sont l'inertie équivalente et le déplacement angulaire du BHA.  $k_T$  et  $c_T$  représentent respectivement la rigidité de torsion et l'amortissement équivalent, données par  $1/k_T = 1/k_p + 1/k_b$  et  $d_T = 0.08k_T$ .

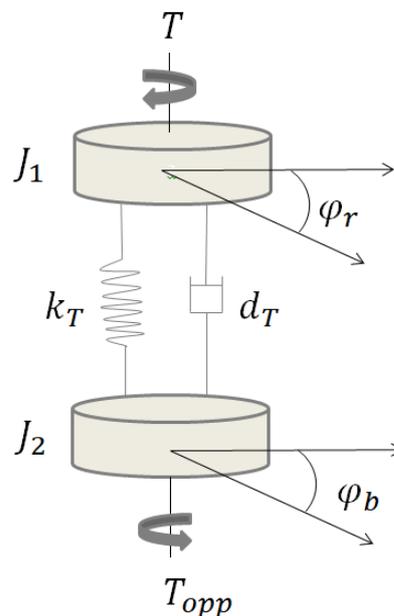


Figure 3.1 – Modèle réduit de la chaîne de forage

Il est à noter que le régulateur résultant est ensuite appliqué sur le modèle haute-fidélité développé dans le chapitre précédent, qui est supposé comme le vrai modèle de plante pour évaluer sa performance.

La représentation dans l'espace d'état du modèle d'ordre réduit peut s'écrire :

$$\dot{x} = A_m x + B_m T + B_{bm} T_{opp} \quad (3.2)$$

où  $x$  est le vecteur d'état défini comme :

$$\begin{bmatrix} \varphi_r \\ \dot{\varphi}_r \\ \varphi_b \\ \dot{\varphi}_b \end{bmatrix}$$

$A_m$  est la matrice d'état, tandis que  $B_m$  et  $B_{bm}$  sont respectivement les matrices de commande et de perturbation.

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_T}{J_1} & \frac{-d_T}{J_1} & \frac{k_T}{J_1} & \frac{d_T}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_T}{J_2} & \frac{d_T}{J_2} & \frac{-k_T}{J_2} & \frac{-d_T}{J_2} \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; B_{bm} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J_2} \end{bmatrix}$$

D'après [11] le couple opposé  $T_{opp}$  est l'estimation linéaire du friction non-linéaire du fond  $T_{OB}$ . On suppose que  $T_{opp}$  est une entrée de perturbation persistante dont la dynamique est représentée comme :

$$\begin{cases} \dot{x}_{bm} = w \\ x_{bm} = T_{opp} \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $x_{bm}$  est l'état de perturbation et  $w$  est un bruit blanc gaussien. Ainsi, la représentation de l'espace d'état augmentée du modèle de contrôle est :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= A_a x_a + B_a T + D_a w \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{bm} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_m & B_{bm} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{bm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ 0 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les équations de sortie peuvent être écrites en fonction du vecteur d'état augmenté  $x_a$ , qui contient les états de système et de perturbation du couple de frottement au fond

$$y = \begin{bmatrix} \varphi_r \\ \dot{\varphi}_r \end{bmatrix} = C_a x_a \quad (3.5)$$

avec  $C_a$  représente que seuls les états du mécanisme rotatif supérieur sont mesurés.

### 3.2.2 Observabilité du couple $A_a$ et $C_a$ :

La condition nécessaire et suffisante d'observabilité ci-après est appelé le Critère de Kalman pour l'observabilité. Le système considéré est observable si et seulement si :

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C_a \\ C_a A_a \\ \dots \\ C_a A_a^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (3.6)$$

dans notre cas la condition (3.6) est vérifiée et le  $\text{rang} = 5$ .

Ainsi, même si les états du trépan et de l'état de perturbation ne sont pas mesurés, un estimateur optimal tel que l'estimateur de Kalman peut être utilisé pour estimer ces états en choisissant correctement le gain de Kalman  $K$ . La dynamique de l'estimateur est alors écrite comme [10] :

$$\dot{\hat{x}} = A_a \hat{x} + B_a T + K(y - \hat{y}) \quad (3.7)$$

où le symbole " $\hat{\cdot}$ " représente les états estimés et la matrice de gain de Kalman  $K$  peut être calculée comme suit :  $K_f = P C_a^T R^{-1}$ . La covariance d'erreur d'estimation  $P = E[(x_a - \hat{x}_a)(x_a - \hat{x}_a)^T]$  est obtenue en résolvant l'équation de Riccati continue :

$$\dot{P} = A_a P + P A_a^T - K_f C_a P + D_a Q D_a^T \quad (3.8)$$

## 3.3 Commande linéaire quadratique LQR

### 3.3.1 Commandabilité du couple $A_m$ et $B_m$ :

La condition nécessaire et suffisante de commandabilité ci-après est appelée le Critère de Kalman pour la commandabilité. Le système considéré est commandable si et seulement si :

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} B_m & A_m B_m & \dots & A_m^{n-1} B_m \end{bmatrix} = n \quad (3.9)$$

dans notre cas la condition (3.9) est vérifiée et le  $\text{rang} = 4$ .

Ainsi, un LQR peut être conçu pour minimiser la fonction de coût suivante avec les facteurs de pondération  $Q_c$  et  $R_c$ ,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T Q_c x + R_c T^2 dt \quad (3.10)$$

Le but du contrôle est d'éliminer les vibrations de stick-slip tout en maintenant une vitesse désirée du top drive et du trépan  $\dot{\phi}_r$  et  $\dot{\phi}_b$ , par rapport à la vitesse de référence constante donnée  $\Omega_{ref}$ . Ainsi, l'entrée de commande est conçue comme [9] :

$$T = k_1 \int_0^t (\Omega_{ref} - \dot{\phi}_r) d\tau + k_2 (\Omega_{ref} - \dot{\phi}_r) + k_3 \int_0^t (\Omega_{ref} - \dot{\phi}_b) d\tau + k_4 (\Omega_{ref} - \dot{\phi}_b) \quad (3.11)$$

où la matrice de gain  $K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] = \frac{1}{R_c} B_m^T P_c$  résout l'équation de Riccati pour le contrôleur

$$A_m^T P_c + P_c A_m - \frac{1}{R_c} P_c B_m B_m^T P_c + Q_c = 0 \quad (3.12)$$

### 3.4 Résultats des simulations et interprétations

Les simulations sont implémentées dans l'environnement MATLAB/Simulink. Les paramètres de la chaîne de forage ont été choisis selon ceux d'une plate-forme de puits de pétrole typique. ils sont donnés dans *Annexe A*.

#### 3.4.1 Simulation du modèle non-linéaire

En tant que référence, la stratégie de contrôle PI industrielle commune a été appliquée pour réguler la vitesse du mécanisme rotatif supérieur à la surface. Le contrôleur PI classique, basé sur l'erreur dans la vitesse de rotation du top drive, a été réglé en utilisant Tuned PI controller, de sorte que le mécanisme rotatif supérieur suit une vitesse de référence constante de 150 RPM, qui est une vitesse de fonctionnement nominale typique des systèmes de forage. La figure (3.1) montre la vitesse de rotation simulée du mécanisme rotatif supérieur et celle du fond. Même si le mécanisme rotatif supérieur est commandé pour fonctionner à la valeur de référence constante, il y a une vibration de torsion évidente sur l'outil de forage. Des telles vibrations de torsion "stick-slip" se produisent souvent dans la pratique parce que l'accord du régulateur PI ne tient pas compte de la vitesse du trépan, qui est souvent indisponible pour les mesures. Par conséquent, bien que la vitesse du mécanisme rotatif supérieur soit régulée avec succès, la vitesse du trépan varie de 0 à 315 RPM.

#### 3.4.2 Simulation de l'estimateur de Kalman

Pour la conception de l'estimateur de Kalman, les facteurs de pondération Q et R représentent respectivement la confiance dans la mesure et le modèle. Les grandes valeurs de Q se rapportent à

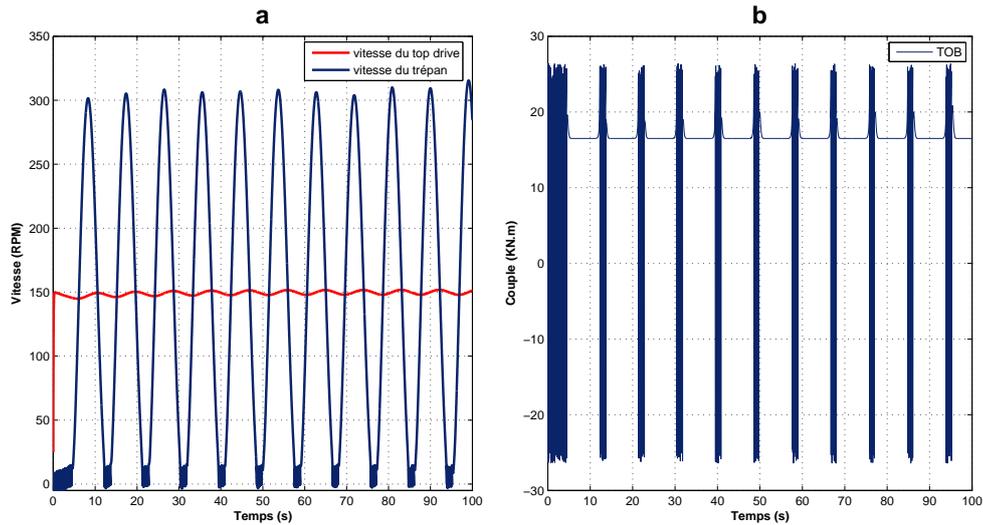


Figure 3.2 – a- Simulation de la vitesse de rotation du top drive et de trépan au fond de puits.

b- Simulation de friction non-linéaire au fond avec l'expression ()

une confiance accrue dans le signal de mesure par rapport à l'information du modèle. D'autre part, une grande valeur de R est liée à une moindre confiance dans le signal de mesure.

Dans cette étude, le facteur de pondération  $Q = 10$  et la matrice de poids  $R = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10^{-5} \end{bmatrix}$  ont été choisis en fonction de l'ajustement des résultats de la simulation pour calculer le gain de Kalman K.

Pour valider l'efficacité de l'estimateur de Kalman dans l'identification de l'occurrence du stick-slip (figure 3.2.b), le vrai modèle de plante décrit dans l'équation (2.7) avec un régulateur PI est augmenté avec un estimateur de Kalman (figure 3.3).

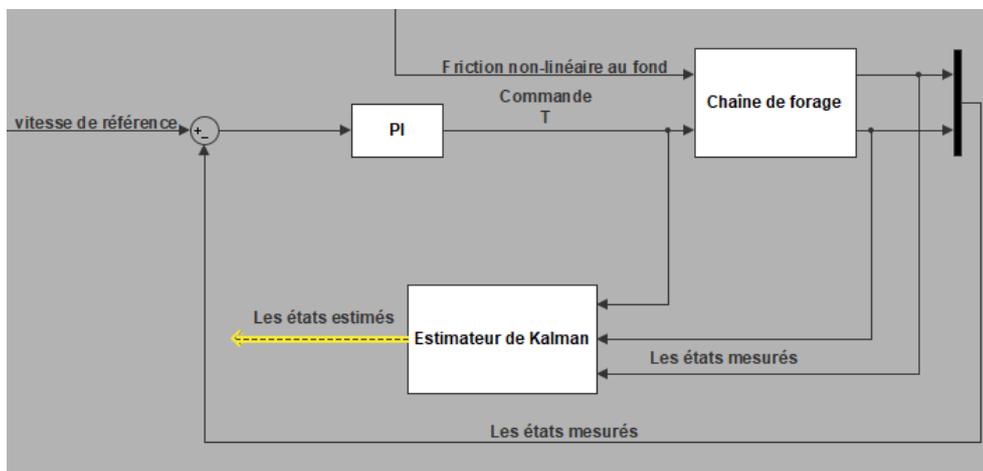


Figure 3.3 – Schéma de la chaîne de forage avec un régulateur PI et un estimateur de Kalman.

Les entrées de l'estimateur sont le couple d'entrée  $T$  et les mesures  $\varphi_r$  et  $\dot{\varphi}_r$ , qui sont disponible à partir de mesures sur le mécanisme rotatif supérieur.

La figure (3.4) compare la vitesse de rotation estimée et celle de la figure (3.2). On peut voir que l'estimateur linéaire de Kalman proposé est capable de refléter l'occurrence du stick-slip. Il fournit également une bonne estimation de l'amplitude du vitesse du bit, ce qui est essentiel pour évaluer la gravité des vibrations.

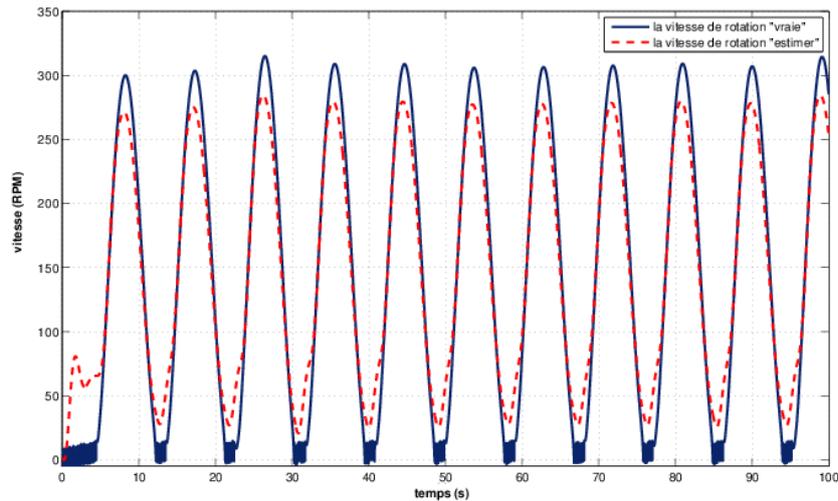


Figure 3.4 – Vitesse de rotation estimée et «réelle» pendant le stick-slip

### 3.4.3 Simulation du système commandé

Pour calculer le gain du contrôleur  $K$ , la matrice de pondération accordée

$$Q_c = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 \end{bmatrix} \quad \text{et le facteur de pondération } R_c = 0,01 \text{ a été utilisé. Ici, la matrice}$$

de pondération  $Q_c$  a été choisie comme matrice diagonale, où chaque terme diagonal reflète l'importance relative de l'état correspondant.

Par conséquent, le  $Q_c$  met un peu plus d'importance sur le contrôle de la vitesse plutôt que sur la position. Une grande valeur de  $R_c$  résulte en un effort de contrôle plus rigoureux. Cependant, il en résulte une réponse plus rapide du système, mais cela peut également conduire à une saturation de l'actionneur.

La figure (3.6) montre la réponse contrôlée de la chaîne de forage en utilisant la stratégie de contrôle

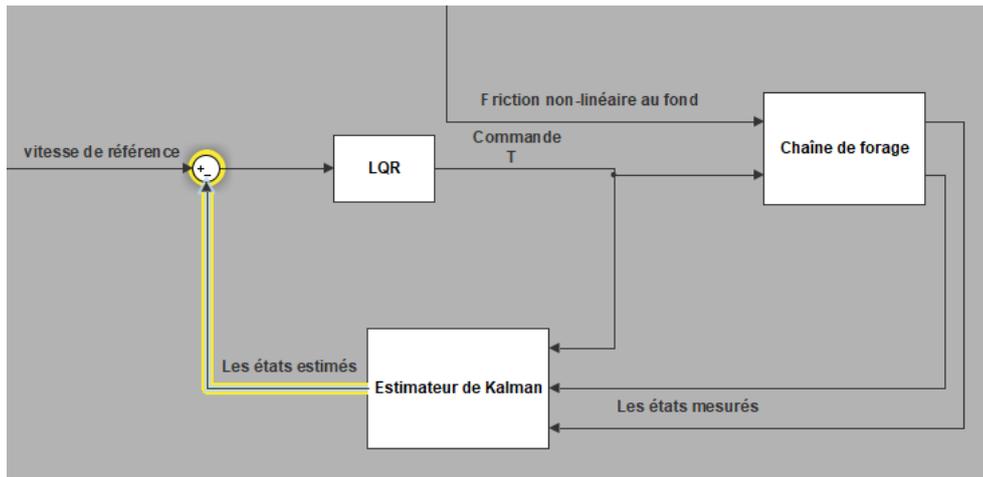


Figure 3.5 – Schéma de la stratégie de contrôle en boucle fermée.

LQG proposée (figure 3.4). Le régulateur est capable de supprimer toutes les vibrations excessives dans les 60s à partir du début de la simulation, en empêchant le trépan de retomber dans la région du stick-slip.

la capacité de la stratégie de contrôle LQG proposée à estimer les états et le frottement non-linéaire au fond permet une performance de contrôle fiable malgré le maintien d'une structure de contrôle linéaire. L'erreur entre le couple de frottement estimé et le couple de frottement réel représenté sur la figure (3.7) peut être due à la réduction de l'ordre du modèle et à la non-linéarité de la friction au fond.

### 3.5 Conception LQG/LTR

Il est bien connu que les propriétés de robustesse du LQR dans la figure (3.8) se détériorent considérablement si le LQR est implémenté avec un observateur d'état (soit l'observateur déterministe, soit le filtre de Kalman).

Loop Transfer Recovery (LTR) est une méthodologie permettant de récupérer les propriétés de robustesse LQG (en termes de gain en boucle ouverte et de marges de phase) pour s'approcher des LQR. Mathématiquement, ce problème peut être formulé en utilisant les fonctions de transfert en boucle ouverte avec LQR et LQG, respectivement.

$$\begin{cases} G_{LQ}(s) = K(sI - A)^{-1}B \\ G_{LQG}(s) = K(sI - A + BK + K_f C)^{-1}K_f C(sI - A)^{-1}B \end{cases} \quad (3.13)$$

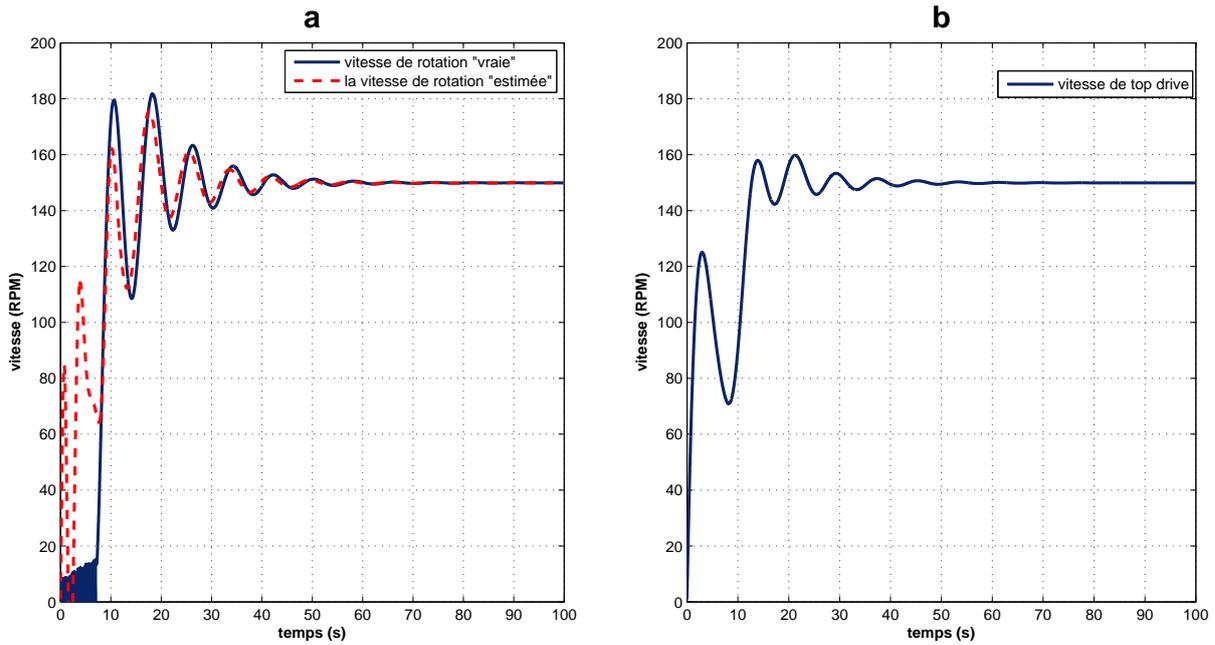


Figure 3.6 – a- Simulation de la vitesse "réel" et "estimée" de trépan au fond de puits.

b- Simulation de la vitesse de rotation du top drive

Bien que les fonctions de transfert dans (3.13) diffèrent considérablement, après des manipulations appropriées, il est possible de trouver comment ils peuvent se rapprocher les uns des autres.

Il a été démontré dans (*Lee, 1995, Camacho et al., 1997, Lewis, 1992*) qu'en choisissant de nouvelles matrices de pondération dans (3.8) comme suit

$$\begin{cases} Q_f = Q + q^2 BVB^T \\ R_f = R \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $V$  est une matrice non singulière et  $q \rightarrow \infty$  est un paramètre, et résolvant l'équation de Riccati (3.8).

il est possible de récupérer la robustesse et la performance en boucle fermée dans le cadre du LQG. L'application pratique des résultats ci-dessus est décrite dans la section suivante.

### 3.5.1 Application

L'effet de l'application de la procédure LTR est évident à partir du tableau 3.1 montrant comment le coefficient  $q$  affecte le gain du filtre de Kalman et les marges de stabilité, respectivement. Cet effet ressort de la figure (3.9).

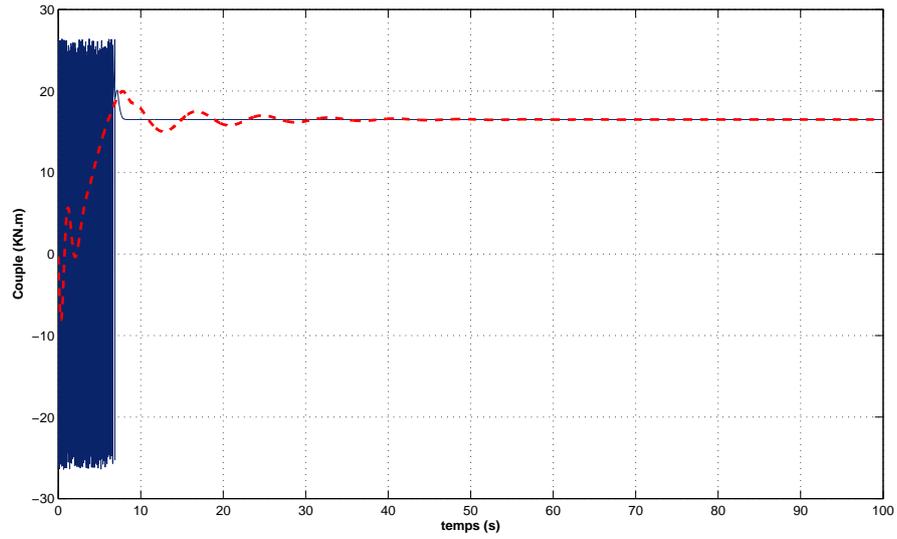


Figure 3.7 – frottement "réel" et "estimé"

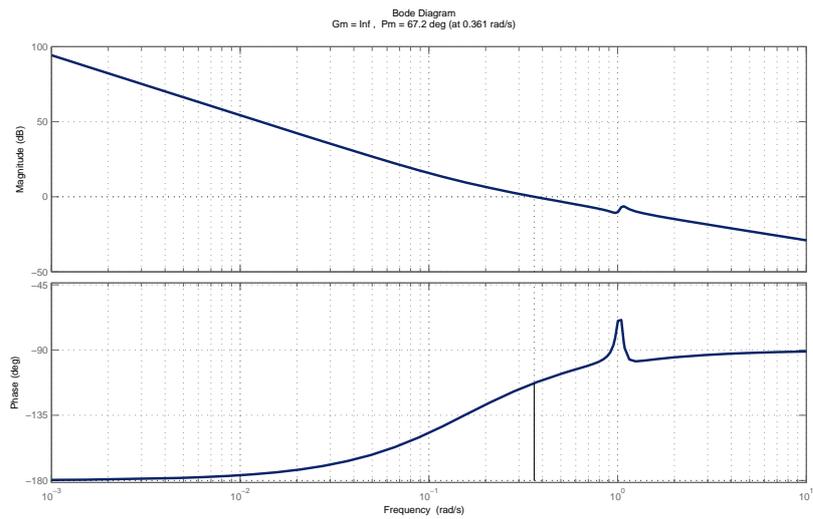


Figure 3.8 – Les marges de stabilité de LQR

q	Boucle ouverte selon LQ	Boucle ouverte selon LQG	10	50	100	500	1000
$G_m$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$P_m$	67	51.3	53.2	59.4	61.7	64.3	64.9

Tableau 3.1 – marge de gain  $G_m$ , marge de phase  $P_m$  dépendant de  $q$ .

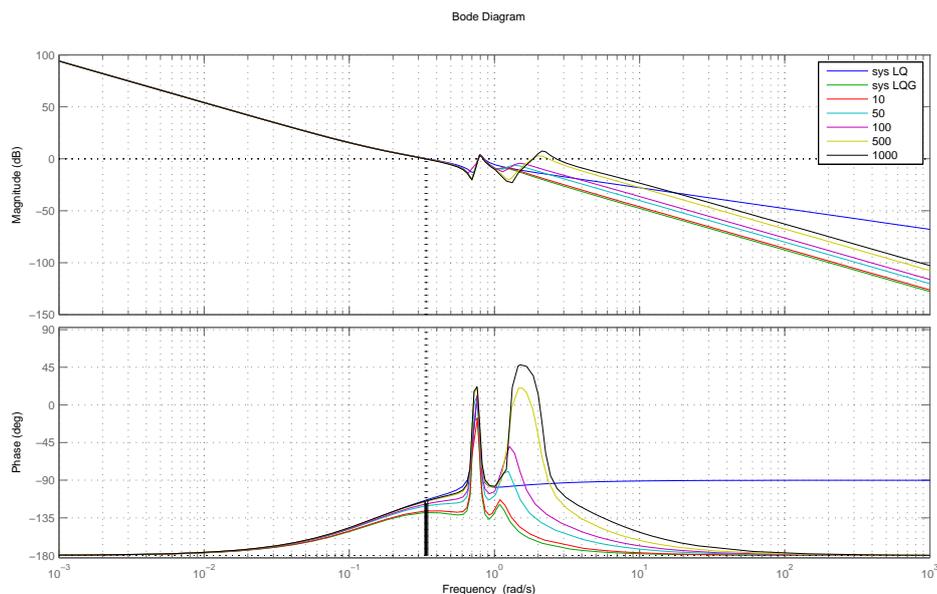


Figure 3.9 – Conception LQG / LTR : diagrammes de Bode en boucle ouverte pour différentes valeurs de  $q$ .

### 3.6 Conclusion

Les vibrations de torsions "Stick-slip" sont généralement à l'origine de défaillances prématurées des forets et d'une faible efficacité de forage. Pour atténuer ces vibrations, des régulateurs basés sur les états de la chaîne de forage ont été conçus, mais ils nécessitent habituellement des mesures de fond, qui ne sont pas faciles à mettre en œuvre. L'utilisation de l'estimateur de Kalman est proposée dans ce travail pour estimer les états de fond. Ce travail inclut un état pour modéliser le couple de frottement non linéaire au fond en tant que perturbation linéaire. Il a été démontré que l'estimateur peut effectivement identifier l'occurrence de la vibration du stick-slip. En outre, une stratégie LQG a été mise en œuvre sur les états estimés pour éviter les vibrations stick-slip, le régulateur est synthétisé en utilisant un modèle réduit de deux degrés de liberté, Un modèle à paramètres centralisés de la chaîne de forage a été développé pour valider les performances de contrôle proposées par des simulations numériques. Ce modèle étendu explique le mouvement de torsion des inerties rotatives du mécanisme rotatif supérieur, des tiges de forage, du collier de forage et du trépan. La force de friction du fond a également été considérée comme un modèle de friction non-linéaire. Les résultats de simulation indiquent l'efficacité du système de contrôle LQG proposé dans l'estimation des états de fond, l'atténuation des vibrations du stick-slip et la régulation de la vitesse du trépan.

# Chapitre 4

## Commande $\mathcal{H}_\infty$

### 4.1 Introduction

L'inconvénient des méthodes de commande linéaire classique comme le correcteur PID et moderne comme le LQG est qu'elles ne garantissent pas toujours la stabilité vis-à-vis des incertitudes. L'introduction de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  permet de garantir la stabilité en présence des erreurs de modélisation.

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  par approche standard constitue une méthode de construction de correcteurs utilisant des outils fréquentiels. Le système en boucle fermée, décrit également par des incertitudes, doit satisfaire des exigences formulées en termes d'objectifs de commande. Celles-ci sont alors réalisées grâce à l'étude des marges de stabilité et au modelage des transferts entrée/sortie du modèle de synthèse de façon à ce que le système commandé possède de bonnes propriétés de stabilité. Le théorème du petit gain est la base du développement des outils d'analyse qui permettent de mettre en oeuvre une stratégie de contrôle par optimisation  $\mathcal{H}_\infty$ . [3]

### 4.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système linéaire stationnaire

Soit un système linéaire stationnaire de représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

La matrice de transfert correspondante s'écrit  $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ . On suppose que le système est stable, i.e.  $G(s) \in \mathbb{RH}_\infty^{n \times m}$ .

Nous donnons la définition suivante : On définit la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de  $G(s)$  par la quantité

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \overline{\sigma}_{\omega \in \mathbb{R}}(G(s))$$

$\|G(s)\|_\infty$  est la valeur la plus élevée du gain du système sur l'ensemble des pulsations. Pour un système monovarié, c'est la valeur la plus élevée de  $|G(j\omega)|$ .

Le calcul de  $\|G(s)\|_\infty$  n'est pas toujours aisé : si on se restreint à un nombre fini de pulsations, on n'obtient qu'une borne inférieure. Le théorème 4.3.1 de la section qui suit permet d'obtenir un majorant  $\gamma$  de  $\|G(s)\|_\infty$ .

### 4.3 Commande $\mathcal{H}_\infty$ standard

La commande  $\mathcal{H}_\infty$  est une commande relativement récente, mais elle a eu un fort retentissement important, car elle peut apporter une amélioration en ce qui concerne la robustesse. De plus, on dispose d'une panoplie de définitions et d'outils mathématiques (Riccati, LMI,...etc).

#### 4.3.1 Problème standard

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  utilise la notion de problème standard, qui est représenté sur la figure 4.1 : la matrice de transfert  $G(s)$  modélise les interactions dynamiques entre deux ensembles d'entrées et deux ensembles de sorties : le vecteur  $w$  représente des entrées extérieures, telles que signaux de référence, perturbations, bruits ; le vecteur  $u$  représente les commandes ; les signaux  $z$  sont choisis pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement ; enfin  $y$  représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

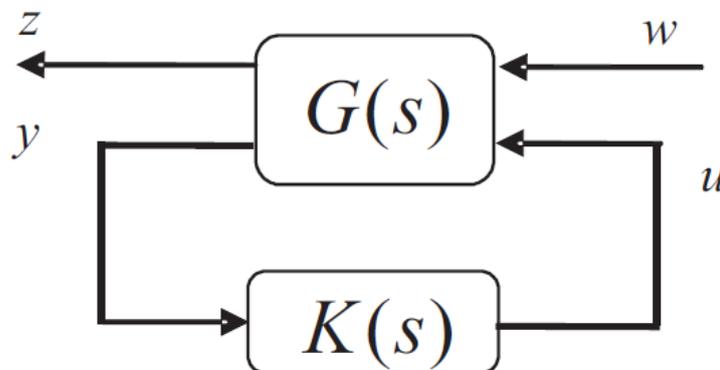


Figure 4.1 – Problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard

En effectuant une partition de la matrice  $G(s)$  de façon cohérente avec les dimensions de  $w, u, z, y$  sur la figure 4.1, on a

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{zw}(s) & G_{zu}(s) \\ G_{yw}(s) & G_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Dans un problème de commande  $\mathcal{H}_\infty$ , on veut minimiser la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du transfert entre les entrée exogènes  $w$  et les sorties exogènes  $z$  qui représentent, dans un problème de robustesse, les éléments de connexion avec la matrice de transfert des incertitudes.

Cette réduction se fait par le biais d'un bouclage, entre les sorties de mesure  $y$  et les entrées de commande  $u$ , moyennant un transfert du correcteur  $K$ . On note le système bouclé  $G_{zw}$ .

On rappelle que la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de  $G_{zw}$  entre  $w$  et  $z$  est :

$$|G_{zw}|_\infty = \sup_{w \in \mathcal{L}_2, w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$$

La méthode de calcul du correcteur  $\mathcal{H}_\infty$  standard, proposée par Doyle (plus connue sous l'algorithme de Glover-Doyle), est rappelée ci-après. Cette méthode repose sur la forme standard d'état de  $G_{zw}$  suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{cases} \quad (4.3)$$

### 4.3.2 Transformation Fractionnaire Linéaire

La notion de bouclage en automatique est prépondérante, car grâce au bouclage nous pouvons stabiliser un système et lui imposer une dynamique. De même que le système peut être stabilisé par un correcteur  $K$  (figure 4.1).

Le bouclage présenté dans la figure 4.1 est une Transformation Fractionnaire Linéaire, ou LFT (de l'anglais Linear Fractional Transformation); la LFT  $\mathcal{F}_\mathcal{L}(G, K)$  (figure 4.1) s'écrivent :

$$\mathcal{F}_\mathcal{L}(G, K) = G_{zw}(s) + G_{zu}(s)K(s)(I - G_{yu}(s)K(s))^{-1}G_{yw}(s) \quad (4.4)$$

Ce qui indique qu'il faut trouver un régulateur dynamique  $K$  qui rend la norme infini de la boucle fermée  $\mathcal{F}_\mathcal{L}(G, K)$  plus petite qu'une valeur prédéfinie  $\gamma$

$$\|\mathcal{F}_\mathcal{L}(G, K)\|_\infty < \gamma \quad (4.5)$$

Dans un problème  $\mathcal{H}_\infty$ , la valeur de  $\gamma$  n'est pas connue d'avance, alors la recherche de  $\gamma$  se fait par dichotomie. Afin que le problème  $\mathcal{H}_\infty$  puisse être résolu à chaque itération, des conditions doivent être vérifiées :

1.  $(A, B_2)$  est commandable et  $(C_2, A)$  est observable
2.  $\text{rang}[D_{12}] = m_2$  et  $\text{rang}[D_{21}] = p_2$
3.  $\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n_G + m_2$
4.  $\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n_G + p_2$

D'après la condition 2, on peut toujours choisir les sorties et les entrées exogènes telles que  $D_{12} = [0 \quad I]$  et  $D_{21} = [0 \quad I]$ . Suivant la partition de  $D_{12}, D_{22} = 0$  et  $D_{21}$ , on peut partitionner  $D_{11}$  comme suit :

$$D_{11} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix}$$

On donne dans *Annexe A* le théorème énoncé par Glover et Doyle, permettant de générer l'ensemble des correcteurs vérifiant la norme  $\mathcal{H}_\infty$  imposée par la condition de robustesse.

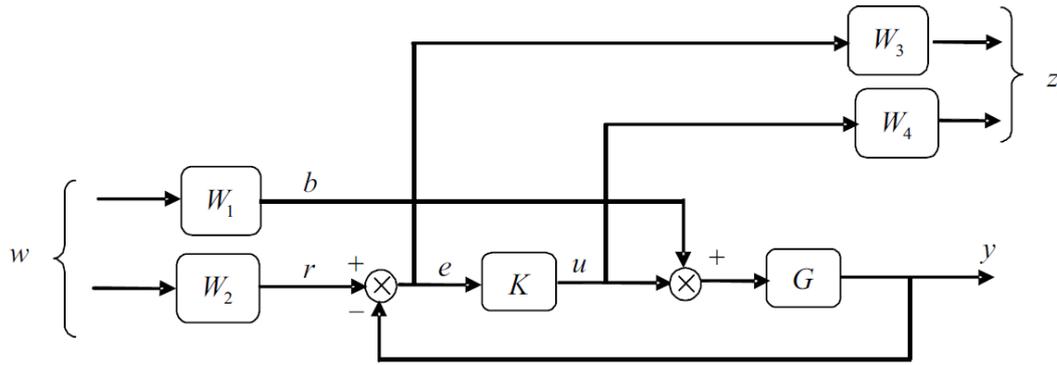
### 4.3.3 Filtres de pondération

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est fréquentielle, donc toute spécification doit être imposée par l'intermédiaire d'un gabarit fréquentiel, ainsi les filtres n'auront pas seulement pour rôle de spécifier la variation fréquentielle de l'incertitude, mais aussi d'imposer des performances temporelles (figure 4.3). Ce dernier point représente l'inconvénient de l'utilisation de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ .

On calcule aisément la matrice de transfert du système bouclé  $\mathcal{F}_\mathcal{L}(G, K)$  (voir éq. 4.4).

avec  $w = (w_1, w_2)^T = (r, b)^T$  et  $z = (z_1, z_2)^T = (e, u)^T$ , on a

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Figure 4.2 – Exemple de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  par pondérations fréquentielles

Le problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard qui en découle après avoir introduit les fonctions de pondérations est le suivant : déterminer un nombre  $\gamma > 0$ , et le correcteur  $K(s)$  stabilisant le système bouclé et assurant :

$$\left\| \begin{pmatrix} W_3 H_{11} W_2 & W_3 H_{12} W_1 \\ W_4 H_{21} W_2 & W_4 H_{22} W_1 \end{pmatrix} \right\| < 1 \quad (4.7)$$

Bien que plusieurs techniques de choix des filtres aient été utilisées, elles restent souvent spécifiques à un système donné, d'autant plus que dans le cas multivariable la norme  $\mathcal{H}_\infty$  ne permet pas de séparer les contraintes entre les différentes paires d'entrées/sorties, le choix des filtres devient alors difficile, et il peut induire un correcteur d'ordre élevé.

Si on considère le transfert en boucle ouverte entre la consigne et l'erreur de régulation, l'interprétation fréquentielle des performances temporelles est d'avoir un gain élevé pour réduire l'erreur de régulation, et élargir la bande passante pour diminuer le temps de réponse (figure 4.3.a). Pour une synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  standard, l'interprétation sur la boucle ouverte  $GK$  est transposée sur la fonction de sensibilité  $S = (I + GK)^{-1}$  (figure 4.3.b), en raisonnant par comportement asymptotique.

Le choix des filtres reste très difficile à concevoir surtout pour les problèmes de commande où des critères discordants doivent être considérés.

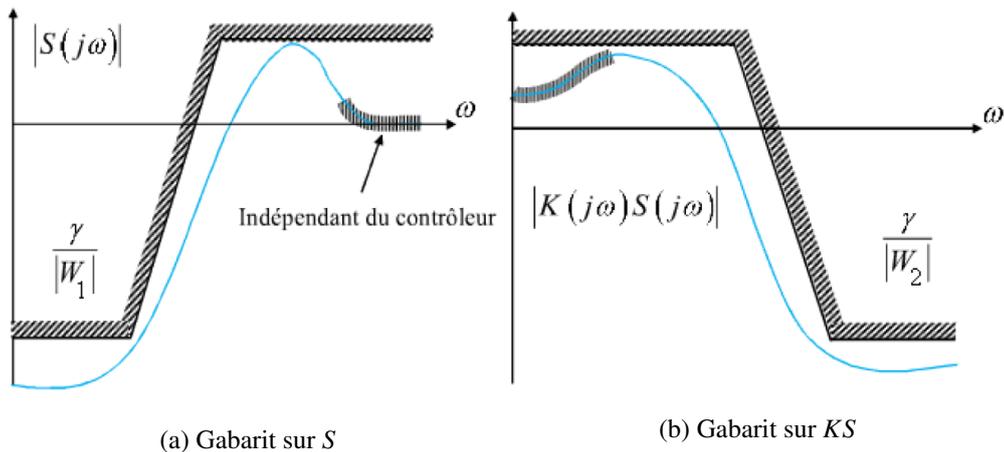


Figure 4.3 – Traduction fréquentielle des spécifications temporelles

## 4.4 Application au forage rotary

Dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , on considère comme entrées exogènes et sorties exogènes les variables :

$$w = \begin{pmatrix} \Omega_{ref} \\ T_{tob} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} \Omega_{ref} - \dot{\phi}_b \\ u \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \Omega_{ref} - \dot{\phi}_r \\ \Phi = \phi_r - \phi_b \end{pmatrix}$$

Les performances temporelles sont imposées par l'application d'un gabarit fréquentiel sur la fonction de sensibilité  $S$  qui est donnée pour le système de forage par le transfert entre  $\Omega_{ref}$  et  $\Omega_{ref} - \dot{\phi}_b$ . Le rajout de la sortie exogène  $u$  traduit la considération du transfert  $KS$ , ce qui permettra d'imposer un roll-off sur le système bouclé.

L'entrée  $T_{OB}$  a le rôle de spécifier la robustesse vis-à-vis de l'effet « stick-slip », qui est définie par une perturbation non-linéaire.

D'après [31] les hypothèses simplificatrices données dans le chapitre précédent, l'état  $x$  est choisi :  $x = [\dot{\phi}_r \quad \Phi \quad \dot{\phi}_b]^T$

les matrices de la forme standard (3.8) du modèle () sont :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-d_T}{J_1} & \frac{-k_T}{J_1} & \frac{-d_T}{J_1} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{d_T}{J_2} & \frac{k_T}{J_2} & \frac{-d_T}{J_2} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{J_2} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le schéma général de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est donné par la figure 4.4. Les points clés de cette synthèse sont la détermination des filtres  $V_1, V_2, W_1$  et  $W_2$ .

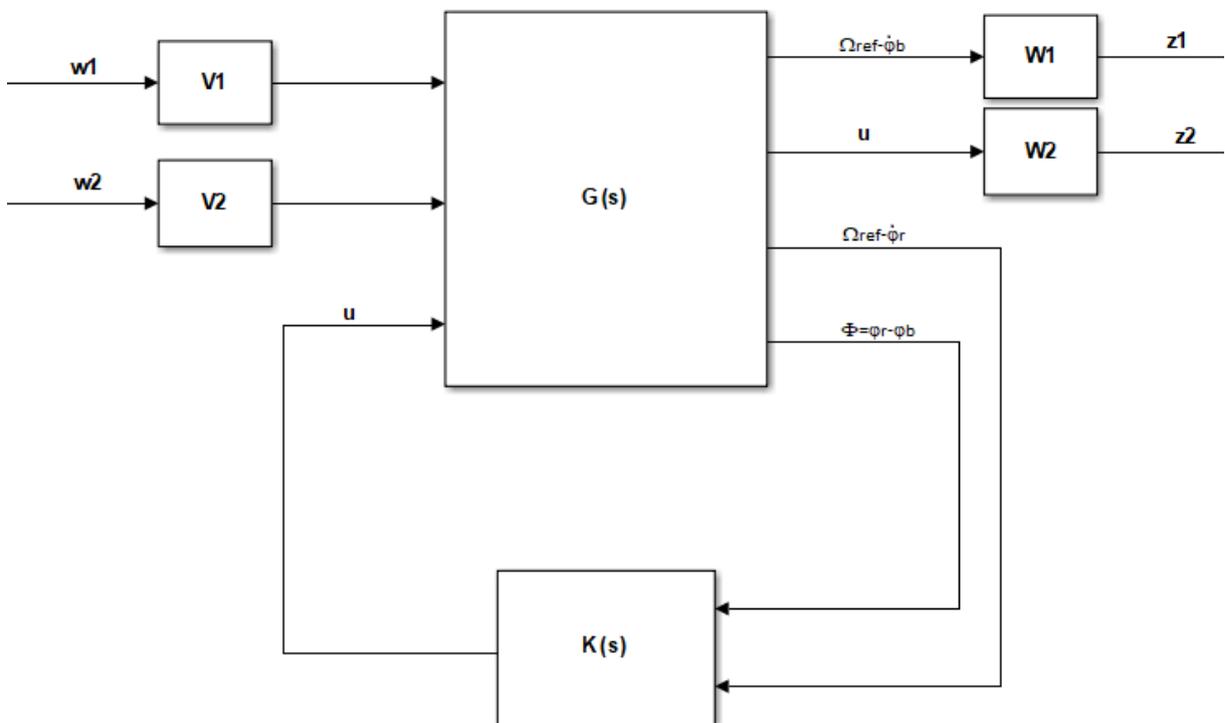


Figure 4.4 – structure de la commande

La bouclé fermée généralisée devient :

$$\begin{pmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* \\ H_{21}^* & H_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 H_{11} V_1 & W_1 H_{12} V_2 \\ W_2 H_{21} V_1 & W_2 H_{22} V_2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Les rôles des filtres de pondération  $W_1$  et  $W_2$  consistent à spécifier le comportement fréquentiel de la boucle fermée  $S$  et  $KS$ . En revanche, la fonction des filtres  $V_1$  et  $V_2$  est de définir la réponse

fréquentielle des entrées associées.

Ainsi pour le filtre  $V_1$ , nous le considérons unitaire, car la valeur imposée à  $\Omega_{ref}$  est un échelon de référence. Nous développerons dans ce qui suit le procédé de spécification des autres filtres.

### • Filtre $W_1$

Le filtre de pondération  $W_1$  agit sur les deux transferts  $S$  et celui de l'entrée  $T_{lob}$  vers l'erreur d'asservissement. Concernant ce deuxième transfert, le choix du filtre  $V_2$  permettra d'imposer un gabarit voulu entre l'entrée  $T_{lob}$  et l'erreur d'asservissement. On se contente d'agir seulement sur la fonction de sensibilité. Nous garantissons ainsi :

$$\|S\|_\infty < \frac{1}{|W_1|}$$

Comme le montre la figure 4.3.a, le filtre  $W_1$  permet de spécifier deux types de performances, la première est la bande passante définie par l'emplacement du pôle et du gain à l'infini. La deuxième est l'erreur relative maximale qui dépend du gain statique. Posons :

$$W_1(s) = k \frac{s + \alpha}{s + 10^{-4}} \quad (4.9)$$

Cette fonction du premier ordre limite à la fois l'ordre final du contrôleur et donne une interprétation claire des exigences de réponse, Ici,  $k = 0,01$  est choisi, ce qui donne la restriction  $\alpha > 0,93$ . En raison de l'amortissement très faible au niveau du trépan et de la bande passante limitée de l'actionneur, on ne peut pas s'attendre à ce que la réponse se produise sans dépassement. Par conséquent, une valeur plus élevée est choisie, c'est-à-dire  $\alpha = 5$ , afin de forcer la spécification du temps de réponse à être satisfaite en présence d'un dépassement. Une conséquence du choix de  $W_1$  dans (4.9) est que la fonction de transfert  $H_{11}$  doit être inférieure à 1 pour les fréquences inférieures à  $\frac{5}{100}$  [rad/s]. De plus, cela implique que l'erreur en régime permanent est de l'ordre de  $10^{-4}/(\alpha k) = 210^{-5}$  fois la vitesse de référence. Si le facteur  $10^{-4}$  est remplacé par 0, alors l'erreur en régime permanent doit être nulle. En utilisant la méthode de l'espace d'état, une telle entrée nulle est non pas autorisée et par conséquent le petit nombre plutôt arbitraire  $10^{-4}$  est choisi.

$$|H_{11}(j\omega)| < \frac{1}{|W_1(j\omega)V_1(j\omega)|} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

### • Filtre $V_2$

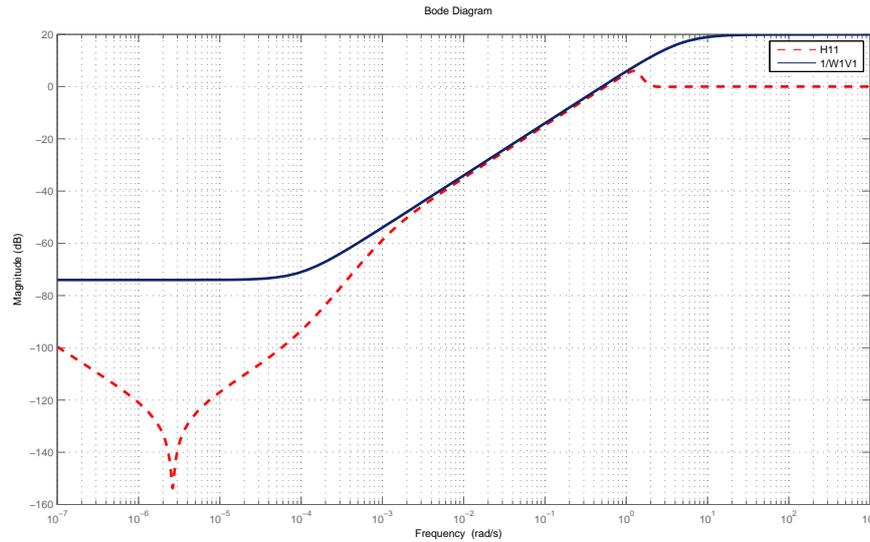


Figure 4.5 – Fonction de sensibilité  $H_{11}$  et le gabarit  $\frac{1}{W_1V_1}$

L'intérêt de ce filtre est de réduire le gain du transfert, entre la perturbation de l'effet « stick-slip » et l'erreur statique d'asservissement, au niveau de la bande passante de la réponse fréquentielle de cette perturbation. La fonction de transfert  $H_{12}$  doit être configurée de telle sorte qu'elle comprenne un amortissement suffisant pour éliminer les oscillations stick-slip, Nous allons donc imposer :

$$|H_{12}(j\omega)| < \frac{1}{|W_1(j\omega)V_2(j\omega)|} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (4.11)$$

$W_1(s)$  a déjà été choisi, et pour  $V_2(s)$  on propose la structure

$$30 \cdot 10^3 \frac{s^2 + s + \omega_m^2}{s^2 + \beta s + \omega_m^2} \quad (4.12)$$

Cette encoche permet la mise en forme désirée autour de la fréquence de résonance sans changer considérablement le clapet à d'autres fréquences. Le facteur  $30 \cdot 10^3$  est justifié selon ce qui suit. L'actionneur sature à  $30[KNm]$ . Pour un traitement concis de cette question. Le paramètre  $\beta$  fait que  $1/|V_2|$  a un supremum local à la fréquence  $\omega = \omega_m$ . Si  $\beta = 50$  est choisi avec la fréquence de supremum proche de la fréquence de stick-slip ( $1,08[rad/s]$ ) i.e  $\omega_m = 0,9$ , la spécification notée sera satisfaite si (4.11) est vérifiée.

- **Filtre  $W_2$**

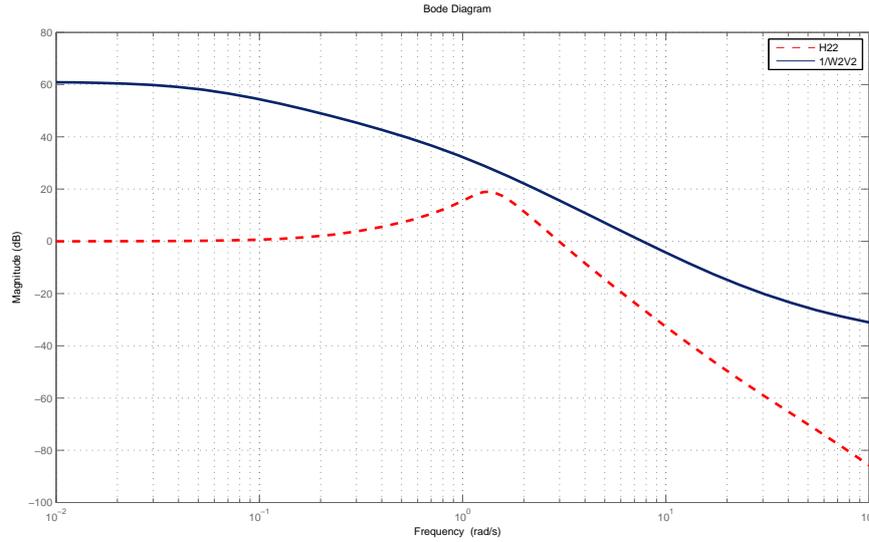


Figure 4.6 – Transfert  $H_{22}$  et le gabarit  $\frac{1}{W_2V_2}$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'intérêt du filtre  $W_2$  est d'imposer un roll-off entre la bande passante limitée de l'actionneur et un gain d'actionneur suffisant autour de la fréquence du stick-slip qui est déjà avérée être autour de la fréquence de résonance. Le filtre de roll-off est ainsi défini comme étant :

$$W_2 = \xi \frac{s}{s + \delta} \quad (4.13)$$

Comme l'atténuation des perturbations de  $T_{lob}$  est considérée comme l'objectif le plus important, la fonction de transfert  $H_{22}$  semble être la plus associée aux spécifications ci-dessus. Par conséquent, l'inégalité suivante doit tenir

$$|H_{22}(j\omega)| < \frac{1}{|W_2(j\omega)V_2(j\omega)|} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (4.14)$$

la valeur de  $\beta$  est donnée par la bande passante du roll-off imposée, soit  $\beta = 25 \text{ rad/sec}$ . La valeur de  $\xi$  est déterminée par tâtonnement après vérification de la valeur du couple. Après plusieurs essais, nous avons opté pour la valeur  $\xi = 0.002$ .

## 4.5 Résultats de simulation

Le correcteur  $\mathcal{H}_\infty$  résultant de l'application des pondérations données ci-dessus, permet d'avoir des résultats acceptables, comme le montre la figure 4.7,

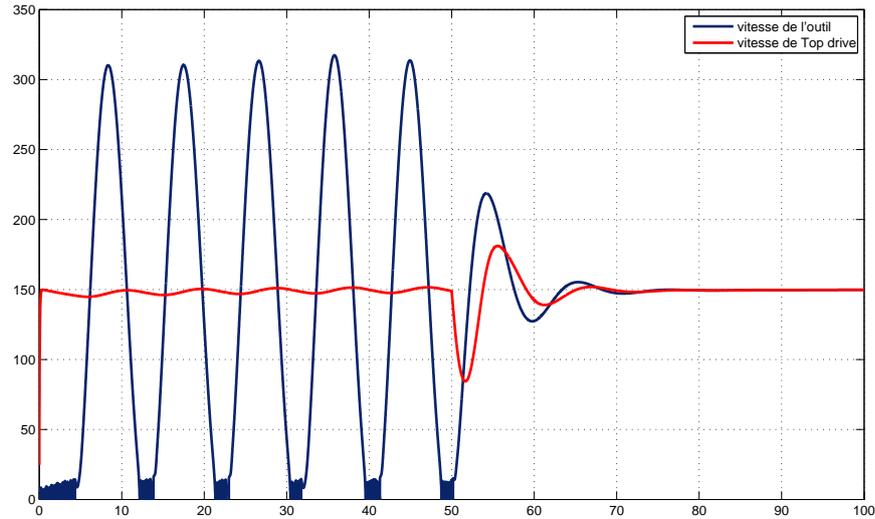


Figure 4.7 – la vitesse de l’outil "avant" et "après" l’application de la commande  $\mathcal{H}_\infty$

avant l’instant  $t = 50s$  le système fonctionne sans régulateur d’où on remarque bien le phénomène de « stick-slip », L’introduction de régulateur  $\mathcal{H}_\infty$  à l’instant  $t = 50s$  permet d’éliminer les vibrations de torsion dans une période de 20s tout en respectant la bande passante du pondération  $W_1$  définie auparavant. la figure 4.8 montre la variation du couple en surface, la variation temporelle

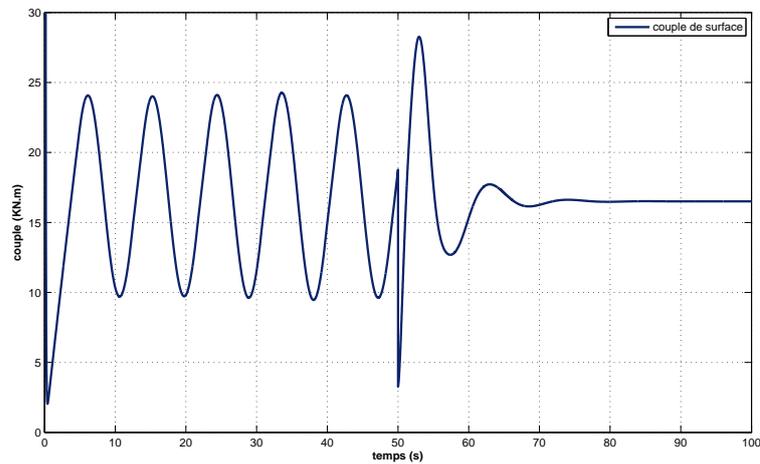


Figure 4.8 – Couple de surface "avant" et "après" l’application de la commande  $\mathcal{H}_\infty$

respecte le filtre  $W_2$  qui impose un compromis entre rejeter l’effet des bruits en hautes fréquences et prévenir d’une éventuelle saturation de la commande en base fréquences "30KN.m".

## 4.6 Comparaison entre la commande $\mathcal{H}_\infty$ et STRS

STRS est une commande industrielle basé sur un régulateur PI [14] utilisée pour la suppression de stick-slip (voir *Annexe A*).

### 4.6.1 Etude comparative des indicateurs de performance

#### 4.6.1.1 En terme de rapidité :

Dans la figure 4.9, les deux régulateurs sont comparés pour leurs propriétés d'amortissement dans le cas d'une perturbation persistante « stick-slip ». Le modèle cohérent (2.7) est utilisé pour simuler les implémentations. Jusqu'à  $t = 50s$ , le système fonctionne sans aucun contrôle, une oscillation stick-slip a été initiée, À  $t = 50s$ , les contrôleurs sont actifs et les oscillations stick-slip disparaissent dans les deux cas. Exception pour les différences d'amplitude, les deux régulateurs semblent utiliser

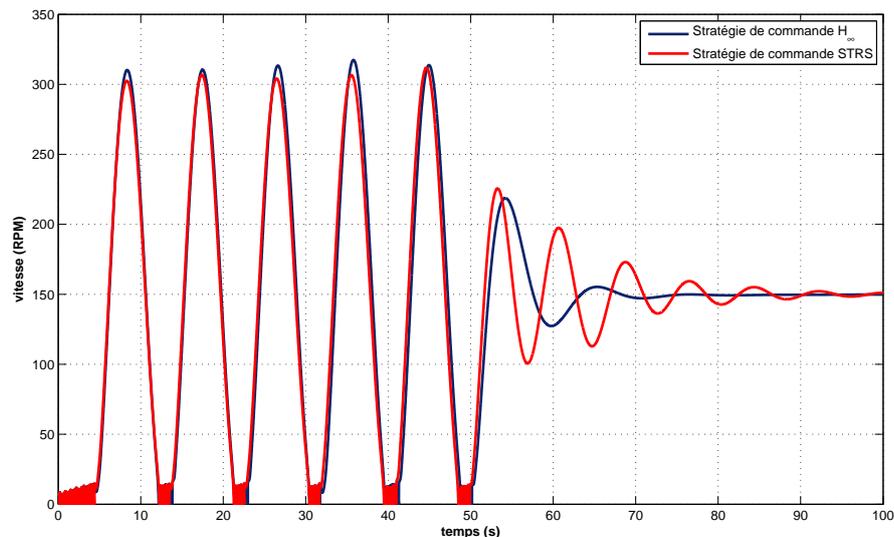


Figure 4.9 – La vitesse de trépan en appliquant les deux stratégies de commande  $\mathcal{H}_\infty$  et STRS

le même stratégie pour éliminer les vibrations « stick-slip ». Ceci est vu en comparant les phases des réponses entre 50 et environ 65s. Le régulateur  $\mathcal{H}_\infty$  amortit l'oscillation transitoire à un rythme beaucoup plus rapide que le régulateur STRS. À environ 70s le régulateur  $\mathcal{H}_\infty$  stabilise la vitesse de l'outil à celle donner comme référence ( $\Omega_{ref} = 150RPM$ ), alors que la stratégie STRS n'atteint cette situation qu'après 90s. Ainsi, le régulateur  $\mathcal{H}_\infty$  atténue les perturbations du « stick-slip »,

tandis que le régulateur STRS amortit mollement les oscillations.

#### 4.6.1.2 En terme de consommation des actionneurs

la figure 4.10 montre la variation du couple de surface dans les deux stratégies de commande,  $\mathcal{H}_\infty$  a une valeur maximale de  $28.3Kn.m$  en hautes fréquences par contre STRS est de  $23.1Kn.m$

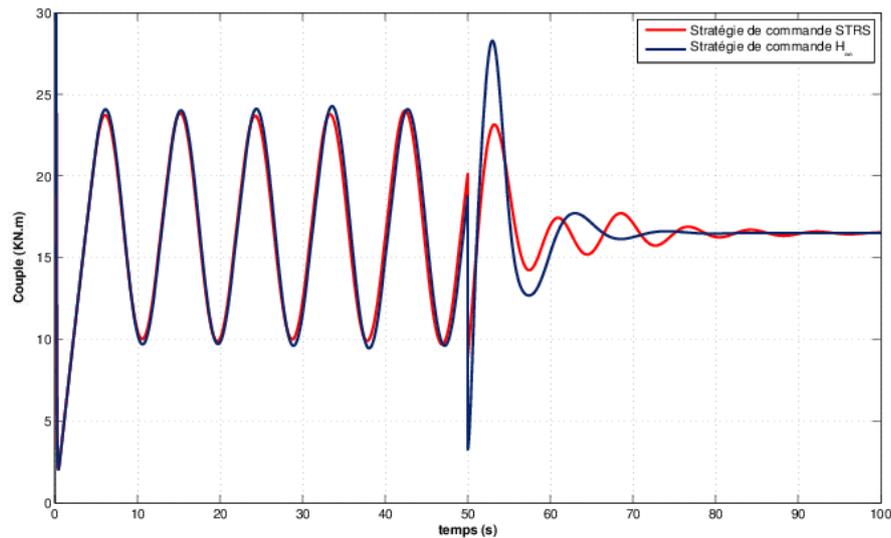


Figure 4.10 – variation de la commande dans les deux stratégies  $\mathcal{H}_\infty$  et STRS.

#### 4.6.2 Étude comparative des indicateurs de robustesse

pour tester la robustesse à partir de l'instant  $t = 50s$  le  $Wob$  dans la fonction non-linéaire de frottement (2.1) prend des valeurs aléatoire  $Wob \in [15tf, 20tf]$ . On remarque d'après la figure 4.11 que la stratégie de contrôle  $\mathcal{H}_\infty$  est plus robuste que celle de STRS qui n'a pas pu éliminer les vibrations de torsion.

### 4.7 Conclusion

Il a été montré que les oscillations « stick-slip » auto-excitées dans les puits de forage sont fortement rejetées par l'application  $\mathcal{H}_\infty$  contrôle. Le régulateur est linéaire et invariable dans le temps. Bien que le frottement au niveau du trépan soit fortement non linéaire, le choix d'un type

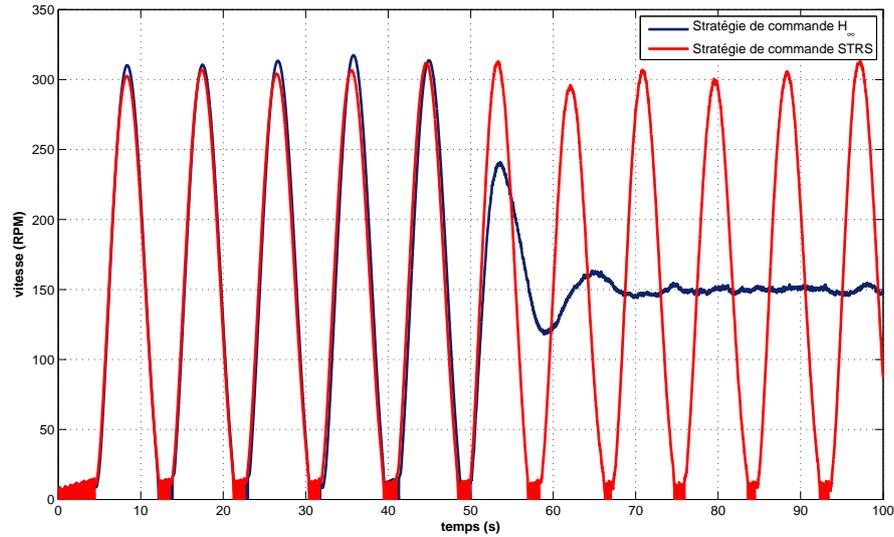


Figure 4.11 – Test de robustesse sur les deux stratégies de contrôle

de contrôleur linéaire est apparu efficace. Par l'utilisation de fonctions de pondération dynamique pour les deux signaux d'entrée et de sortie, il est possible de façonner les fonctions de transfert en boucle fermée de telle sorte que le domaine fréquentiel ainsi que les exigences de performance dans le domaine temporel soient respectés. La stabilité face aux perturbations de la longueur de la chaîne de forage et des coefficients d'amortissement a été garantie pour une large gamme. Le régulateur  $\mathcal{H}_\infty$  atténue progressivement la réponse transitoire de la vitesse du bit alors que le régulateur STRS atténue doucement cette réponse. Par conséquent, le temps de réponse du système commandé par  $\mathcal{H}_\infty$  est donc environ \*20s plus petit que pour le système commandé par STRS.[16][13]

Les résultats adressés ouvrent une perspective prometteuse pour l'application pratique de la solution proposée. Une amélioration supplémentaire de la conception du régulateur devrait se concentrer sur le développement de fonctions de pondération qui ont une relation plus transparente avec les paramètres du système (par exemple, la longueur de la chaîne de forage). Dans ce cas, le régulateur  $\mathcal{H}_\infty$  est également exprimé analytiquement en termes de modèle de forage variant dans le temps. En fonction de la longueur du train de tiges, le régulateur  $\mathcal{H}_\infty$  robuste correspondant peut alors facilement être trouvé.[8][6]

# Chapitre 5

## Analyse et commande basé sur le modèle distribué « commande des systèmes à retard

»

Les systèmes à retard sont connus sous le nom de systèmes à effet secondaire ou temps mort, Ils appartiennent à la classe des équations différentielles fonctionnelles (EDF) qui sont de dimension infinie, par opposition à les équations différentielles ordinaires l'EDO «standard».

Les systèmes à retard sont classés en trois types : retardé, neutre et avancé. Lorsque le taux de changement de l'état dépend des valeurs présentes et passées de l'état du système, le modèle correspond à une équation différentielle fonctionnelle retardée (EDFR). Lorsque le taux de changement de l'état dépend non seulement des valeurs actuelles et passées de l'état du système mais aussi de la valeur antérieure du changement de taux d'état (sous contraintes appropriées sur l'opérateur de différence de délai correspondant), l'équation correspondante est de type neutre, également connu sous le nom d'équation différentielle fonctionnelle neutre (NFDE). Lorsque le taux de changement d'état est déterminé par les valeurs futures de l'état, le système est décrit par une équation différentielle fonctionnelle avancée (AFDE). Il convient de mentionner que l'AFDE est rarement utilisé dans des applications pratiques.[23]

Il est bien connu que la plupart des processus incluent des phénomènes à retard dans leur dynamique. On en trouve des exemples en économie, physiologie, dynamique des populations, biologie, chimie, viscoélasticité, physique, technologies de l'information, mécanique, sciences de l'ingénieur, etc. Le travail de recherche sur les équations différentielles fonctionnelles croît

continuellement dans tous les domaines scientifiques.[18]

- En général, les régulateurs classiques ne sont pas nécessairement capables de stabiliser les systèmes à retard. Une technique courante pour éviter la complexité des systèmes à retards consiste à les rapprocher par des représentations de dimension finie ; cependant, négliger les effets secondaires n'est pas une "bonne" solution : dans le meilleur des cas (retards constants et connus), elle conduit au même degré de complexité dans la conception du contrôle, dans les pires situations (délais variables par exemple), il est potentiellement dangereux pour la stabilité du système.

- Les caractéristiques de retard sont surprenantes car plusieurs études ont montré que l'introduction volontaire de retards peut également bénéficier au contrôle.[17]

## 5.1 Préliminaires

Cette section présente quelques notions de base sur la théorie générale de la EDFN. Plusieurs représentations mathématiques ont été établies pour décrire un système à retard de type neutre, où une EDFN est définie comme :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(t, x_t) = f(t, x_t)$$

avec  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{G} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont deux fonctions continues données. La fonction  $\mathcal{G}$  est appelée opérateur de différence.

Nous nous intéressons à une classe particulière de EDFN ayant un opérateur de différence linéaire. Ainsi, dans la suite, nous considérons la représentation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left[x(t) - \sum_{i=1}^m D_i x(t - \tau_i)\right] = f(t, x_t) \quad (5.1)$$

où  $D_i$  sont des matrices  $n \times n$  et  $\tau_i (i = 1, \dots, m)$  sont des retards constants. Spécial attention sera accordée au cas où  $f(t, x_t)$  réécrit comme  $f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m))$ .

L'information requise pour caractériser une solution particulière du système consiste d'un instant initial  $t_0 \geq 0$  et une fonction initiale  $\varphi \in PC^1([-\bar{\tau}, 0], \mathbb{R}^n)$  tel que  $\varphi : [-\bar{\tau}, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\tau} = \max[\tau_1, \dots, \tau_m]$  et

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta) \quad (5.2)$$

L'état du système noté  $x(t, t_0, \varphi)$  ou  $x_t$  à  $t \geq t_0$  est défini comme :

$$x_t : \theta \rightarrow x(t + \theta), \theta \in [-\bar{\tau}, 0]$$

et, comme suggéré par Nikolai Nikolaevich Krasovskii (1924-2012) : L'opérateur de différence  $x(t, t_0, \varphi) - \sum_{i=1}^m D_i x(t - \tau_i, t_0, \varphi)$  agissant sur les trajectoires du système est continu et différentiable pour  $t \geq t_0$ . [12]

Alors la solution du problème (1.1) est donnée par :

$$\sum_{i=1}^m D_i x(t - \tau_i) + [\varphi(0) - \sum_{i=1}^m D_i \varphi(-\tau_i)] + \int_{t_0}^t f(s, x_s) ds \quad (5.3)$$

## 5.2 Stabilité des systèmes à retard neutre

En générale, un point d'équilibre est dit "stable" si toutes les solutions démarrent aux points "à proximité" rester "à proximité" ; sinon, il est instable. Il est asymptotiquement stable si toutes

les solutions partant des points voisins restent non seulement à proximité, mais tendent aussi au point d'équilibre lorsque le temps approche de l'infini. La stabilité exponentielle est une propriété plus forte puisqu'elle garantit que les solutions restent limitées par une fonction exponentielle décroissante.

### 5.2.1 Approche de domaine fréquentiel

Ce cadre d'analyse, souvent appelé approche dans le domaine de Laplace, est un outil puissant pour étudier la stabilité de la solution d'une EDFE linéaire donnée. Comme dans le cas des dimensions finies, on dit que la solution stationnaire est asymptotiquement stable si et seulement si les racines de l'équation caractéristique correspondante ont une partie réelle négative.

L'équation caractéristique d'un système à retard de type neutre de la forme :

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^m D_i \dot{x}(t - \tau_i) = \sum_{i=0}^m A_i x(t - \tau_i) \quad (5.4)$$

est donnée par  $\Delta(\lambda) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\Delta(s) = sI - \sum_{i=1}^m D_i s e^{-\tau_i s} - \sum_{i=0}^m A_i s e^{-\tau_i s} \quad (5.5)$$

Il est bien connu que la stabilité de l'opérateur de différence de système (5.4) est une condition nécessaire à la stabilité et à la stabilisation des systèmes à retard neutre.[5] Cette propriété, connue sous le nom de stabilité formelle [21]

Le système (5.4) est formellement stable si

$$\text{Rang}(I - \hat{D}(s)) = n \quad \forall s \quad \text{avec} \quad \text{Re}(s) \geq 0$$

avec

$$\hat{D}(s) = \sum_{i=1}^m D_i e^{-\tau_i s}$$

#### 5.2.1.1 Analyse de système de forage rotary

Comme on a discuté dans les chapitres précédents, le modèle distribué de la chaîne de forage est donnée l'équation différentielle à retard neutre suivante :

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_b(t) &= \Upsilon \ddot{\Phi}_b(t-2\tau) - \Psi \dot{\Phi}_b(t) - \Upsilon \Psi \dot{\Phi}_b(t-2\tau) \\ &\quad - \frac{1}{IB} T(\dot{\Phi}_b(t)) - \frac{\Upsilon}{IB} T(\dot{\Phi}_b(t-2\tau)) + \Gamma \Omega_0(t-\tau) \end{aligned} \quad (5.6)$$

avec  $\dot{\Phi}_b(t)$  est la vitesse angulaire de l'outil.

la forme linéaire du système (5.6) peut être réécrite comme :

$$\dot{x}(t) - D_1 \dot{x}(t-2\tau) = A_0 x(t) + A_1 x(t-2\tau) \quad (5.7)$$

avec  $x = \dot{\Phi}_b(t)$  et  $D_1 = \Upsilon$ ;  $A_0 = -\Psi$ ;  $A_1 = -\Upsilon \Psi$

dans l'étude de stabilité on met les entrées du système nulles (vitesse du rotor de moteur  $\Omega_0(t)$  et poids sur l'outil  $T(\dot{\Phi}_b(t))$ ). Le quasipolynomial caractéristique du modèle de forage rotary décrit par un EDFN de la forme (5.7) est donné par :

$$P(s) = \det(\Delta(s)) = (s - \Upsilon e^{-2\tau} + \Psi + \Upsilon \Psi e^{-2\tau}) \quad (5.8)$$

Le modèle de forage décrit par un EDFN de la forme (5.7) est formellement stable.

*démonstration* : Selon la définition 1.2.1,

$$\hat{D}(s) = \sum_{i=1}^1 D_i e^{-\tau_i s} = \Upsilon e^{-2\tau s}$$

on sait que :

$$\text{Rang}(I - \hat{D}(s)) = n \iff \det(I - \hat{D}(s)) \neq 0 \quad (5.9)$$

on a

$$\det(I - \hat{D}(s)) = (1 - \Upsilon e^{-2\tau s}) \quad (5.10)$$

*application numérique* :

$$\Upsilon = \frac{\beta_r - cGJ}{\beta_r + cGJ} = 0.9729$$

alors :

$$\det(I - \hat{D}(s)) \neq 0$$

et donc le système est *formellement stable*.

Une proposition utile pour déterminer la stabilité d'un type neutre scalaire à retard unique. on considère le système (5.7) avec le quasipolynomial caractéristique (5.8) : Les racines de l'équation caractéristique  $\Delta(s) = 0$  se situent dans le plan complexe gauche  $\mathbb{C}$  si et seulement si :

- (i)  $-\Psi\tau < 1 - \Upsilon$
- (ii)  $\Psi + \Upsilon\Psi > 0$

$$(iii) -\Upsilon\Psi > -\frac{\delta}{\tau} \sin \delta + \Psi \cos \delta$$

avec  $\delta$  est la solution de l'équation :

$$\frac{1}{\tau} \cos \delta + \frac{\Psi}{\delta} \sin \delta - \frac{\Upsilon}{\tau} = 0 \quad (5.11)$$

application numérique :

$$\Psi + \Upsilon\Psi = 1.9993, \quad -\Psi\tau = -1.1150 \text{ et } 1 - \Upsilon = 0.0271$$

la solution de l'équation (5.11) est

$$\delta = -226.4331$$

$$\text{donc } -\frac{\delta}{\tau} \sin \delta + \Psi \cos \delta = -47.6128 \text{ et } -\Upsilon\Psi = 0.9859$$

il est bien claire que les conditions (i),(ii) et (iii) sont vérifiées alors le systeme de forage rotary de type retard neutre est *Stable*.

## 5.2.2 Approche du domaine temporel

Cette section présente quelques résultats de stabilité de base dans le cadre des techniques du domaine temporel (approche de Lyapunov-Krasovskii) pour un système de type neutre de la forme (5.4). Un système neutre de la forme :

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t - \tau) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) \quad (5.12)$$

est asymptotiquement stable indépendant du retard si :

(i)  $A_0$  est une matrice Hurwitz stable, c'est-à-dire que chaque valeur propre de  $A_0$  a une partie réelle strictement négative ;

(ii)  $D$  est une matrice Schur-Cohn stable, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de  $D$  se trouvent dans le cercle unitaire ;

(iii) il y a deux matrices symétriques et définies positives  $R$  et  $Q$  telles que l'équation de Ricatti :

$$A_0^T P + P A_0 + S + Q + [P(A_0 D + A_1) + S D] R^{-1} [D^T S + (A_1^T + D^T A_0^T) P] = 0 \quad (5.13)$$

a une solution définie positive et symétrique  $P$ , et  $S$  est une matrice symétrique et définie positive

solution de l'équation de Lyapunov :

$$D^T S D - S + R = 0 \quad (5.14)$$

### 5.2.2.1 Analyse de système de forage rotary

On considère le système (5.7) dont on prend la dynamique de l'extrémité inférieur (resp supérieur), soit :

$$\dot{x}(t) - \Upsilon \dot{x}(t - 2\tau) = -\Psi x(t) - \Upsilon \Psi x(t - 2\tau) \quad (5.15)$$

avec  $x = \dot{\Phi}_b(t)$  (ou  $\dot{\Phi}_p(t)$ ) Le système à retard neutre (5.15) est asymptotiquement stable indépendant du retard si :

(i)  $-\Psi < 0$

(ii)  $|\Upsilon \Psi| < 1$

(iii)  $|\Upsilon \Psi| < |-\Psi|$  *Remarque* : Les énoncés (i), (ii) et (iii) de la proposition 5.2.4 découlent directement du théorème 1.2.1 en remplaçant les matrices D, A0 et A1 par les scalaires  $\Upsilon$ ,  $-\Psi$  et  $-\Upsilon \Psi$ .

*application numérique :*

$\Psi = 1.0134$ ,  $\Upsilon = 0.9729$ ,  $\Upsilon \Psi = 0.9859$  d'ou les conditions (i), (ii) et (iii) sont vérifiées alors le système de forage rotary est *asymptotiquement stable*.

## 5.3 Contrôle de Stick-Slip : approche basée sur Lyapunov-Krasovskii

Sur la base du modèle distribué de la chaîne de forage, Cette section aborde la conception de régulateurs visant à éliminer le phénomène du "stick-slip". Dans le cadre de la théorie de Lyapunov, deux approches de contrôle basées sur différentes représentations du système sont proposées :

**Contrôle basé sur la représentation multimodèle** : Cette stratégie est basée sur une approximation linéaire du modèle de forage en torsion de type neutre décrivant les vibrations de forage en torsion. Les conditions de stabilisation sont dérivées de l'approche du descripteur [7] et d'une proposition de Lyapunov-Krasovskii fonctionnelle.

Les deux stratégies conduisent à des conditions de type LMI [4] garantissant une convergence

exponentielle des trajectoires du système. Les simulations numériques illustrent une suppression efficace du stick-slip.

### 5.3.1 Contrôle basé sur la représentation multimodèle

La méthode de contrôle développée dans cette section est basée sur les techniques de Lyapunov-Krasovskii, elle s'applique à la classe des systèmes non linéaires à retard de type neutre qui peuvent être transformés en un système multimodèle, ce qui est le cas du modèle de système de forage introduit à Sect. 2.4. La stratégie introduite dans [27], conduit à une stabilisation exponentielle du système en boucle fermée.

Un système multimodèle est un ensemble de modèles linéaires non linéairement pondérés pouvant être représentés comme suit :

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t - \tau_1) = \sum_{i \in I^r} h_i(x_t) [A_i x(t) + A_{i\tau_1} x(t - \tau_1) + Bu(t)] \quad (5.16)$$

où  $\tau_1 > 0$  est un retard constant, l'ensemble  $I^r$  est l'ensemble des entiers  $1, \dots, r$ , où  $r$  est le nombre de sous-systèmes requis pour décrire le système multimodèle. Les fonctions  $h_i(\Delta)$  sont des fonctions de pondération scalaire satisfaisant les conditions de convexité :

$$\sum_{i \in I^r} h_i(x_t) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad h_i(x_t) > 0$$

#### 5.3.1.1 la stabilité exponentielle

Nous analysons d'abord la  $\alpha$ -stabilité du système autonome :

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t - \tau_1) = \sum_{i \in I^r} h_i(x_t) [A_i x(t) + A_{i\tau_1} x(t - \tau_1)] \quad (5.17)$$

Pour garantir que l'opérateur de différence est stable, on suppose  $|D| < 1$ .

Le changement de variable  $x_\alpha(t) = e^{\alpha t} x(t)$ , transforme le système (5.17) en :

$$\dot{x}_\alpha(t) D - e^{\alpha \tau_1} \dot{x}_\alpha(t - \tau_1) = \sum_{i \in I^r} h_i(x_t) [(A_i + \alpha I_n) x_\alpha(t) + e^{\alpha \tau_1} (A_{i\tau_1} - \alpha D) x_\alpha(t - \tau_1)] \quad (5.18)$$

La proposition consiste à trouver des conditions pour lesquelles la solution  $x_\alpha = 0$  du le système (5.18) est asymptotiquement stable. Clairement, ces conditions garantiront la stabilité exponentielle du système (5.17). Le théorème suivant fournit ces conditions de stabilité. La solution  $x(t) = 0$  du système (5.17) est  $\alpha$ -stable s'il existe des matrices  $0 < P_1 = P_T, P_2, P_3, Q = Q_T$ , et  $R = R_T$ , de

telle sorte que pour tout  $i \in I'$  la LMI suivante est satisfaite :

$$\begin{pmatrix} \Psi_i & P^T \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha\tau_1}(A_{i\tau_1} - \alpha D) \end{pmatrix} & P^T \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha\tau_1}D \end{pmatrix} \\ * & -R/\tau_1 & 0 \\ * & * & -Q \end{pmatrix} < 0$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}, \quad P_1 = P_1^T > 0,$$

$$\Psi_i = P^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{pmatrix}^T P + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 R + Q \end{pmatrix}$$

,

$$\Lambda_i = A_i + \alpha I_n + e^{\alpha\tau_1}(A_{i\tau_1} - \alpha D)$$

,

### 5.3.1.2 la stabilisation exponentielle

Après avoir déterminé les critères de stabilité exponentielle du système en boucle ouverte (5.17), l'étape suivante consiste à définir un algorithme permettant la synthèse d'un gain  $K$  tel que la loi de contrôle en retour d'état.

$$u(t - \tau_0) = Kx(t - \tau_1), \quad (5.19)$$

stabilise exponentiellement le système en boucle fermée

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t - \tau_1) = \sum_{i \in I'} h_i(x_t) [A_i x(t) + (A_{i\tau_1} + BK)x(t - \tau_1)] \quad (5.20)$$

avec un taux de décroissance garanti  $\alpha$ . En remplaçant la matrice  $A_{i\tau_1}$  par la matrice  $A_{i\tau_1} + BK$  dans le théorème 5.3.1, nous obtenons que la solution  $x(t) = 0$  du système (5.19) est  $\alpha$ -stable s'il existe des matrices  $0 < P_1 = P_T, P_2, P_3, Q = Q_T$ , et  $R = R_T$ , de telle sorte que pour tout  $i \in I'$  la BMI suivante est satisfaite :

$$\begin{pmatrix} \Psi_i & P^T \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha\tau_1}\chi \end{pmatrix} & P^T \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\alpha\tau_1}D \end{pmatrix} \\ * & -R/\tau_1 & 0 \\ * & * & -Q \end{pmatrix} < 0 \quad (5.21)$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}, \quad P_1 = P_1^T > 0,$$

$$\Psi_i = P^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ \Lambda_i & -I_n \end{pmatrix}^T P + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 R + Q \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_i = A_i + \alpha I_n + e^{\alpha \tau_1} (A_i \tau_1 - \alpha D),$$

$$\chi = A_i \tau_1 + BK - \alpha D$$

Une technique de synthèse de gain bien connue qui surmonte la bilinéarité du conditions (5.20) a été introduit par [30]. Il est constitué de l'ensemble  $P_3 = \varepsilon P_2$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , où  $P_2$  est une matrice non singulière, et  $\bar{P} = P_2^{-1}$ .

Définir  $\bar{P}_1 = \bar{P}^T P_1 \bar{P}$ ,  $\bar{R} = \bar{P}^T R \bar{P}$ , et  $Y = K \bar{P}$ . Multiplier le côté droit de (5.20) par  $\Delta_3 = \text{diag}[\bar{P}, \bar{P}, \bar{P}]$  et le côté gauche par  $\Delta_3^T$ , nous obtenons la condition de stabilisation de LMI indiquée dans le théorème suivant.

Le système (5.17) est  $\alpha$ -stabilisable s'il existe une constante positive  $\varepsilon$  et  $n \times n$  matrices  $\bar{P}_1 > 0$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q} = \bar{Q}^T$ ,  $\bar{R} = \bar{R}^T$ , et  $Y$  tel que pour tout  $i \in I'$  la LMI suivante est satisfaite :

$$\begin{pmatrix} \Phi_i & \begin{pmatrix} e^{\alpha \tau_1} \mathbf{v} \\ \varepsilon e^{\alpha \tau_1} \mathbf{v} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e^{\alpha \tau_1} D \bar{P} \\ \varepsilon e^{\alpha \tau_1} D \bar{P} \end{pmatrix} \\ * & -\bar{R}/\tau_1 & 0 \\ * & * & -\bar{Q} \end{pmatrix} < 0$$

avec :

$$\mathbf{v} = (A_i \tau_1 - \alpha D) \bar{P} + BY$$

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ * & \Phi_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{11} = (A_i + \alpha I_n + e^{\alpha \tau_1} (A_i \tau_1 - \alpha D)) \bar{P} + \bar{P}^T (A_i + \alpha I_n + e^{\alpha \tau_1} (A_i \tau_1 - \alpha D))^T + BY + Y^T B^T$$

$$\Phi_{12} = \bar{P}_1^T - \bar{P} + \varepsilon \bar{P}^T (A_i + \alpha I_n + e^{\alpha \tau_1} (A_i \tau_1 - \alpha D))^T + \varepsilon Y^T B^T$$

$$\Phi_{22} = -\varepsilon (\bar{P} + \bar{P}^T) + \alpha_1 \bar{R} + \bar{Q}$$

### 5.3.2 Stabilisation du système de forage

Les résultats de stabilisation exponentielle présentés sont appliqués au modèle distribué de la chaîne de forage (2.19) couplé au couple de frottement non linéaire (2.15).

Afin de déplacer le point de fonctionnement, nous introduisons la nouvelle variable  $x_1$  définie comme :

$$x_1(t) = \phi_b(t) - \Omega_0 \quad (5.22)$$

Le comportement du système de forage peut être décrit par l'équation non linéaire de type neutre suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) + d\dot{x}_1(t - 2\tau) &= a_0x_1(t) + a_1x_1(t - 2\tau) \\ + bu(t - \tau) - (c_2 + (c_1 - c_2)e^{-\gamma(x_1(t) + \Omega_0)}) \text{sign}(x_1(t) + \Omega_0) + \\ \Upsilon(c_2 + (c_1 - c_2)e^{-\gamma(x_1(t - 2\tau) + \Omega_0)}) \text{sign}(x_1(t - 2\tau) + \Omega_0) \end{aligned} \quad (5.23)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_0 &= -\Psi - \frac{c_b}{I_B} & a_1 &= \frac{\Upsilon c_b}{I_B} - \Upsilon\Psi \\ c_1 &= \frac{W_{ob}R\mu_s}{I_B} & c_2 &= \frac{W_{ob}R\mu_c}{I_B} \\ b &= \Gamma & d &= -\Upsilon \quad |d| < 1 \end{aligned}$$

Ensuite, une représentation polytopique du modèle non linéaire de type neutre (5.22) est obtenue. Considérez le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) \\ z_2(t) = e^{-\gamma z_1(t) + \Omega_0} \end{cases}$$

donc,

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \dot{x}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) = -\gamma \dot{z}_1(t) e^{-\gamma z_1(t) + \Omega_0} = -\gamma \dot{x}_1(t) z_2(t) \end{cases}$$

Le système (5.22) peut être écrit comme

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t - 2\tau) = A(x)x(t) + A_{2\tau}(x)x(t - 2\tau) + B_\tau u(t - \tau) \quad (5.24)$$

où  $x(t)$  est défini comme  $x(t) = [z_1(t)z_2(t)]^T$ , l'entrée de contrôle  $u(t)$  correspond à la vitesse angulaire fournie par le top drive et les matrices concernées sont donné par :

$$D = \begin{pmatrix} \Upsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\tau = \begin{pmatrix} \Gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\tau}(x) = \begin{pmatrix} \Upsilon(\frac{c_b}{I_B} - \Psi) & \Upsilon(c_2 + (c_1 - c_2)\text{sign}(x_1(t - 2\tau) + \Omega_0)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} -(\frac{c_b}{I_B} + \Psi) & -(c_2 + (c_1 - c_2))\text{sign}(x_1(t - 2\tau) + \Omega_0) \\ 0 & -\gamma\dot{z}_1(t) \end{pmatrix}$$

Notez que les entrées des matrices  $D$  et  $B_\tau$  sont constantes, et l'entrée  $(c_2 + (c_1 - c_2)\text{sign}(x_1(t - 2\tau) + \Omega_0))$  de la matrice  $A_{2\tau}(x)$  est bornée. Si nous considérons que  $\dot{z}_1(t)$  est une variable bornée, la matrice  $A(x)$  l'est aussi. Ensuite, nous pouvons obtenir une représentation polytopique des matrices  $A(x), A_{2\tau}(x)$  comme :

$$A(x)x(t) + A_{2\tau}(x)x(t - 2\tau_1) = \sum_{i \in I'} h_i(x_t) [A_i x(t) + A_{i2\tau_1} x(t - 2\tau_1)] \quad (5.25)$$

où  $A_i, A_{i2\tau}$  n'ont que des constantes [29]. Les fonctions  $h_i(x_t), i \in I'$  sont des fonctions de pondération scalaires pas nécessairement connues satisfaisant la propriété de convexité.

Clairement, le système de forage non linéaire (5.22) peut être écrit sous la forme polytopique (5.16). on utilisant les paramètres donnés dans le Tableau C.1 de l'Annexe C, les matrices  $A(x), A_{2\tau}(x), B_\tau$  et  $D$  du modèle de forage (5.23) prennent les valeurs suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 0.8169 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_\tau = \begin{pmatrix} 4.8568 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{2\tau}(x) = \begin{pmatrix} -2.1836 & (119.1506 + 71.4903\text{sign}(x_1(t - 2\tau) + \Omega_0)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} -2.6732 & -145.8631 - 87.5178\text{sign}(x_1(t - 2\tau) + \Omega_0) \\ 0 & -0.9\dot{z}_1(t) \end{pmatrix}$$

D'après [28], la représentation polytopique du système nécessite  $A(x)$  et  $A_{2\tau}(x)$  des fonctions bornées.

Notez qu'il existe trois fonctions indépendantes :  $\dot{z}_1(t), \text{sign}(z_1(t) + \Omega_0)$  et  $\text{sign}(x_1(t - 2\tau) + \Omega_0)$ . On a  $\dot{z}_1(t) = \dot{x}_1(t)$  représente l'accélération angulaire à l'extrémité inférieure du train de forage  $\dot{\varphi}_b$ , qui est clairement une variable bornée dans les applications réelles. Comme les fonctions  $\text{sign}(z_1(t) + \Omega_0)$  et  $\text{sign}(z_1(t - 2\tau) + \Omega_0)$  sont également des variables bornées, les matrices  $A(x)$  et

$A_{2\tau}(x)$  sont supposées être bornées.

La représentation polytopique (5.23) est obtenue avec  $i \in Ir = 23 = 8$ . Les matrices  $A_i(x)$  et  $A_{i2\tau}(x)$  sont données par :

$$A_i(x) = \begin{pmatrix} -2.6732 & a_{23}^i(x) \\ 0 & a_{33}^i(x) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} -233.38 &= a_{23}^1 \leq a_{23}^i \leq a_{23}^2 = 0 \\ -0.9a_{max} &= a_{33}^1 \leq a_{33}^i \leq a_{33}^2 = -0.9d_{max} \end{aligned}$$

où  $a_{max}$  et  $d_{max}$  représentent l'accélération et la décélération maximales, respectivement, et

$$A_i(x) = \begin{pmatrix} -2.1836 & a_{2\tau23}^i(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$0 = a_{2\tau23}^1 \leq a_{2\tau23}^i \leq a_{2\tau23}^2 = 190$$

Résultats numériques du théorème 5.3.2 pour le modèle de forage en torsion en boucle fermé avec la loi de contrôle (5.19) donne :

$$K = Y\bar{P}^{-1} = [0.345 - 3.8]$$

donc, la loi de contrôle de stabilisation pour le système de forage (5.23) est donnée par

$$u(t) = 0.345\dot{\phi}_b(t - \tau) - 3.8e^{-\gamma\phi_b(t-\tau)} + \Omega_0 \quad (5.26)$$

Le résultat de la simulation de la figure () montre une élimination efficace du phénomène de stick-slip au moyen de l'application du contrôleur.

## 5.4 Conclusion

Cette section a porté sur la conception d'une commande pour une classe de systèmes à retard de type neutre qui admettent une représentation multimodèle . La technique proposée peut être considérée comme une extension de la méthode employée dans[28] pour la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaire à retard temporel. La technique de représentation polytopique a été introduite dans [32] pour étudier la stabilité robuste et la stabilisation de systèmes linéaires sujets à des incertitudes polytopiques convexes.

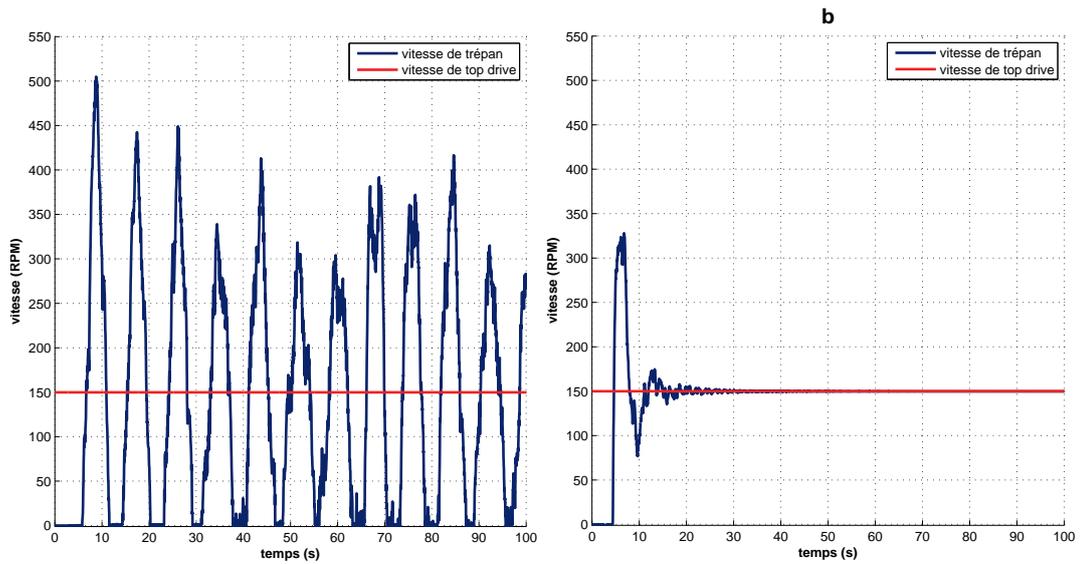


Figure 5.1 – a- Simulation de la vitesse de rotation de trépan sans régulateur.

b- Simulation de la vitesse de rotation de trépan après application du contrôleur

Suppression de Stick-Slip : approche basée sur Lyapunov Voir aussi [33], où des résultats améliorés sur la technique de stabilisation robuste sont présentés.

# Conclusion Générale et Perspectives

L'objectif principale dans ce mémoire est de développer une commande pour l'élimination des vibrations de torsion dans une chaîne de forage qui sont les causes majeures de l'usure du trépan et la diminution de l'efficacité de forage. Une modélisation a été faite par deux méthodes différentes afin de pouvoir rapprocher aux comportements réels de la chaîne de forage, un modèle centralisé basé sur les lois fondamentales de la dynamique, et un modèle distribué basé sur la résolution des équations aux dérivées partielles. La comparaison des résultats de simulation des deux modèles avec ceux du logiciel WellScan a montré la validation du modèle distribué.

Pour l'élimination de ces vibrations indésirables, des régulateurs basés sur la représentation d'état du modèle centralisé ont été conçus, mais cela demande des mesures du fond qui sont pas faciles à implémenter. Pour alléger l'exigence des mesures de fond, l'utilisation du filtre de Kalman a été proposée pour pouvoir estimer et observer les états non mesurables (vitesse du trépan). Il a été montré que le filtre de Kalman peut effectivement identifier l'occurrence du phénomène stick-slip. En outre une commande optimale LQG-LTR et une commande robuste  $H_\infty$  ont été implémentées sur les états estimés pour pouvoir éliminer les vibrations stick-slip. Tandis que ces régulateurs ont été conçus en utilisant un modèle réduit et appliqués après sur le modèle pour pouvoir valider la commande.

Une autre stratégie de commande (commande multi modèle) basée sur les théories de Lyapunov-kasovskii a été appliquée sur le modèle distribué.

Les résultats de simulation ont indiqué l'efficacité des régulateurs proposés pour l'élimination des vibrations stick-slip et la régulation de la vitesse de rotation du trépan.

# Bibliographie

- [1] ABDUL RAHMAN, N., MOHAIDEEN, A., BAKAR, F. H., TANG, K. H., MAURY, R., COX, P., LE, P., DONALD, H., BRAHMANTO, E., SUBROTO, B., ET AL. Solving stick-slip dilemma : Dynamic modeling system significantly reduces vibration, increases rop by 54%. In *Abu Dhabi International Petroleum Conference and Exhibition* (2012), Society of Petroleum Engineers.
- [2] AL-HIDDABI, S., SAMANTA, B., AND SEIBI, A. Non-linear control of torsional and bending vibrations of oilwell drillstrings. *Journal of sound and vibration* 265, 2 (2003), 401–415.
- [3] BALAS, G. J., DOYLE, J. C., GLOVER, K., PACKARD, A., AND SMITH, R.  $\mu$ -analysis and synthesis toolbox : For use with {MATLAB}.
- [4] BOYD, S., EL GHAOUI, L., FERON, E., AND BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, vol. 15. Siam, 1994.
- [5] BYRNES, C. I., SPONG, M. W., AND TARN, T.-J. A several complex variables approach to feedback stabilization of linear neutral delay-differential systems. *Mathematical systems theory* 17, 1 (1984), 97–133.
- [6] DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. P., AND FRANCIS, B. A. State-space solutions to standard  $h_2$  and  $h_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic control* 34, 8 (1989), 831–847.
- [7] DUNAYEVSKY, V., ABBASSIAN, F., JUDZIS, A., ET AL. Dynamic stability of drillstrings under fluctuating weight on bit. *SPE drilling & completion* 8, 02 (1993), 84–92.
- [8] FAN, X., AND JOHNSON, C. Eliminating limit cycles by using a disturbance accommodating control method. *International Journal of Control* 48, 6 (1988), 2209–2232.
- [9] FREUDENBERG, J., HOLLOT, C., AND LOOZE, D. A first graduate course in feedback control. *Course Notes, EECS 565* (2002).
- [10] GEORGE, J., SINGLA, P., AND CRASSIDIS, J. Stochastic disturbance accommodating control using a kalman estimator. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit* (2008), p. 6478.
- [11] GIRSANG, I. P., AND DHUPIA, J. S. Collective pitch control of wind turbines using stochastic disturbance accommodating control. *Wind Engineering* 37, 5 (2013), 517–533.
- [12] HALANAY, A. *Differential equations : Stability, oscillations, time lags*, vol. 23. Academic press, 1966.
- [13] HALSEY, G., KYLLINGSTAD, A., KYLLING, A., ET AL. Torque feedback used to cure slip-stick motion. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition* (1988), Society of Petroleum Engineers.
- [14] JANSEN, J., AND VAN DEN STEEN, L. Active damping of self-excited torsional vibrations in oil well drillstrings. *Journal of sound and vibration* 179, 4 (1995), 647–668.

- [15] JOHANNESSEN, M. K., AND MYRVOLD, T. Stick-slip prevention of drill strings using nonlinear model reduction and nonlinear model predictive control. Master's thesis, Institutt for teknisk kybernetikk, 2010.
- [16] MARRA, M., WALCOTT, B., ROUCH, K., AND TEWANI, S. H/sub/spl infin//vibration control for machining using active dynamic absorber technology. In *American Control Conference, Proceedings of the 1995* (1995), vol. 1, IEEE, pp. 739–743.
- [17] MICHIELS, W., NICULESCU, S.-I., AND MOREAU, L. Using delays and time-varying gains to improve the static output feedback stabilizability of linear systems : a comparison. *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 21, 4 (2004), 393–418.
- [18] MYSHKIS, V. K. A., AND KOLMANOVSKII, V. Applied theory of functional-differential equations. *Dordrecht, The Netherlands : Kluwer* (1992).
- [19] NAVARRO-LÓPEZ, E. M., AND CORTÉS, D. Sliding-mode control of a multi-dof oilwell drillstring with stick-slip oscillations. In *American Control Conference, 2007. ACC'07* (2007), IEEE, pp. 3837–3842.
- [20] NAVARRO-LÓPEZ, E. M., AND SUÁREZ, R. Practical approach to modelling and controlling stick-slip oscillations in oilwell drillstrings. In *Control Applications, 2004. Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on* (2004), vol. 2, IEEE, pp. 1454–1460.
- [21] PONTRYAGIN, L. S. On the zeros of some elementary transcendental functions. *Amer. Math. Soc. Transl* 2, 1 (1955), 95–110.
- [22] RASVAN, V. A method for distributed parameter control systems and electrical networks analysis. *Rev. Roumaine Sci. Techn. Serie Electrotechn. Energ* 20 (1975), 561–566.
- [23] RICHARD, J.-P. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *automatica* 39, 10 (2003), 1667–1694.
- [24] SALDIVAR, B., BOUSSAADA, I., MOUNIER, H., MONDIE, S., AND NICULESCU, S.-I. An overview on the modeling of oilwell drilling vibrations. *IFAC Proceedings Volumes* 47, 3 (2014), 5169–5174.
- [25] SALDIVAR, B., MONDIÉ, S., LOISEAU, J.-J., AND RASVAN, V. Stick-slip oscillations in oilwell drillstrings : distributed parameter and neutral type retarded model approaches. *IFAC Proceedings Volumes* 44, 1 (2011), 284–289.
- [26] SALDIVAR, M. B., MONDIÉ, S., AND LOISEAU, J. J. Reducing stick-slip oscillations in oilwell drillstrings. In *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009 6th International Conference on* (2009), IEEE, pp. 1–6.
- [27] SALDIVAR, M. B., SEURET, A., AND MONDIÉ, S. Exponential stabilization of a class of nonlinear neutral type time-delay systems, an oilwell drilling model example. In *Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 2011 8th International Conference on* (2011), IEEE, pp. 1–6.
- [28] SEURET, A. *Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lille ; Université des Sciences et Technologie de Lille-Lille I, 2006.
- [29] STAMOVA, I. M. Vector lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 325, 1 (2007), 612–623.

- [30] SUPLIN, V., FRIDMAN, E., AND SHAKED, U.  $H_{\infty}$  control of linear uncertain time-delay systems—a projection approach. *IEEE Transactions on Automatic Control* 51, 4 (2006), 680–685.
- [31] VAN DEN STEEN, L. Suppressing stick-slip-induced drillstring oscillations : A hyperstability approach.
- [32] XIA, Y., AND JIA, Y. Robust control of state delayed systems with polytopic type uncertainties via parameter-dependent lyapunov functionals. *Systems & Control Letters* 50, 3 (2003), 183–193.
- [33] YU, L. Comments and improvement on “robust control of state delayed systems with polytopic type uncertainties via parameter-dependent lyapunov functionals”. *Systems & Control Letters* 53, 3-4 (2004), 321–323.

# Annexe A

## Annexes

### A.1 calcul des coefficients de la chaîne

#### A.1.1 calcul de coefficient de rigidité

La barre de torsion est un des ressorts les plus simples. En mettant à profit l'élasticité des matériaux, il autorise de grandes déformations de structures, et permet la construction d'éléments d'une souplesse plus facile à contrôler. pour le calcul :

$$K = \frac{G.I}{L}$$

ou :

$L$  :longueur de la barre.

$G$  :Le module de cisaillement.

$I$  :moment quadratique.

### A.1.2 calcul du moment d'inertie

Pour le calcul de  $J$  on a :

$$J = \rho \cdot \pi \cdot h \cdot (R_e^2 - R_i^2)$$

tel que :

$\rho$  masse volumique,  $h$  la hauteur,  $R_i$  et  $R_e$  le rayon interne et externe respectivement.

### A.1.3 les données réelles de la chaîne

dans le tableau suivant on va mentionner les données pratiques d'une chaîne de forage de 3.5 km.

	équipement	De (in)	Di (in)	poids (kg)	longueur(m)	quantité	longueur total (m)
chaîne	tige	5	4.276	32.55	9.14	356	3253.84
BHA	poids lourd	5	3	73.4	9.14	6	54.84
BHA	masse tige	8	2 13/16	223.11	9.14	18	164.52
BHA	masse tige	9.5	3	323.16	9.14	3	27.42
	trépan	16		151		1	0.33
						longueur total	3500.95

Tableau A.1 – principaux composants de la chaîne

## A.2 soft torque

### A.2.1 commande par str

Le soft torque est un approche de commande très utilisé dans l'industrie du forage pour éliminer les vibrations de torsion. Ce régulateur a été développé par

SHELL dans les années 90<sup>s</sup>, il a une forme d'un régulateur PI mais il inclus un filtre passe haut. l'expression de ce régulateur est :

$$U = K_p e(t) + K_i \int e(t), \quad (\text{A.1})$$

avec

$$U = K_p e(t) + K_i \int e(t), \quad (\text{A.2})$$

$$e(t) = \Omega - hT_f(t) - \Phi_r, \quad (\text{A.3})$$

tell que h c'est un paramètre du régulateur ajouté et  $T_f$  est défini comme :

$$T_f(t) = T_{contact}(t) - T_c(t)$$

,

$T_c$  dénote la sortie du filtre passe bas appliquer au couple de contact.

$$T_{contact}(t) = -G_{top}(x(1) - x(3))$$

$$\dot{T}_c(t) = \omega_c(T_{contact}(t) - T_c(t))$$

.

## Tableau de valeurs

$J_r$	$2122\text{kg}/\text{m}^2$
$J_p$	$301.4793\text{kg}/\text{m}^2$
$J_b$	$298.3879\text{kg}/\text{m}^2$
$K_p$	$295.7121\text{Nm}/\text{rad}$
$K_b$	$22820\text{Nm}/\text{rad}$
$d_p$	$23.7\text{Nms}/\text{rad}$
$d_b$	$1825.6\text{Nms}/\text{rad}$
$\mu_c$	0.5
$\mu_s$	0.8
$\gamma$	0.9
$R$	$16.5\text{cm}$
$wob$	$200000\text{N}$

Tableau A.2 – tableau de valeurs