

M0035/98A

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

*Département de Génie Civil*

**Thèse**

Présentée par

**BADAoui M'HAMMED**

Ingenieur d'Etat en Génie Civil  
de l'Ecole Nationale Polytechnique  
**BIBLIOTHEQUE**  
**Ecole Nationale Polytechnique**

Pour obtenir le titre de

**MAGISTER**

*en Génie Civil*

**THEME**

**INVESTIGATION ANALYTIQUE ET NUMERIQUE DU  
PHENOMENE D'INTERACTION DYNAMIQUE DANS LES  
SYSTEMES SOL MULTICOUCHES - STRUCTURES MULTIPLES**

Soutenue publiquement en Novembre 1998 devant le jury composé de :

Président	: Mr. <b>B. TILIOUINE</b>	Professeur, E.N.P.
Rapporteur	: Mr. <b>M. K. BERRAH</b>	Maître de conférences, E.N.P.
Examineurs	: Mr. <b>S. BELKACEMI</b>	Maître de conférences, E.N.P.
	Mr. <b>M. HAMMOUTENE</b>	Maître de conférences, E.N.P.
	Mr. <b>M. DEMIDEM</b>	Chargé de cours, E.N.P.

Novembre 1998

Ecole Nationale Polytechnique  
10, Avenue Hassan Badi El Harrach, Alger

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

A ma mère

A la mémoire de mon père

A tous mes amis

M'hammed

## Remerciements



*Le présent travail n'aurait pu être mis au point sans l'aide et l'orientation prodiguées par mon directeur de thèse Mr. M. K. BERRAH, envers lequel j'adresse tous mes remerciements pour ses précieux conseils et recommandations.*

*Je remercie également les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce modeste travail en exprimant ma vive gratitude à Mr le professeur B. TILIOUINE pour en avoir accepté la présidence.*

*Que messieurs S. BELKACEMI maître de conférences (ENP), M. HAMOUTENE maître de conférences (ENP) et M. DEMIDEM chargé de cours (ENP) trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.*

*J'adresse également mes vifs remerciements envers mes amis: Karim, Hassan, Nacer, Kamel et Hakim.*

*Je ne saurais oublier de rendre hommage à la compréhension et la serviabilité de l'ensemble du personnel travaillant à la bibliothèque et au centre de calcul, en particulier, Salah, Krimo, et Hocine.*

*Enfin, dans le soucis de n'oublier personne, tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin que ce soit par leur amitié, leurs conseils ou leur soutien moral, trouvent dans ces quelques lignes l'expression de ma gratitude.*

## ملخص

إن الهدف من هذه الدراسة هو البحث عن تأثيرات الهياكل المدفونة في التربة المتعددة الطبقات، وخاصة تأثير الأنفاق على الحركات في السطح و على الهياكل القريبة منه. هذه الدراسة أجريت بواسطة نموذج ديناميكي للتربة و للنفق قائم على أساس طريقة المعادلات التكاملية على الحدود. الحلول الأساسية اللازمة في هذه الحالة تنتج عن طريقة الطبقات الصغيرة الإرتفاع التي هي خوارزم متقطع لدوال "جرين". هذه الدراسة أظهرت أن تعدد الطبقات ينتج عنه تقريبا كل ظواهر عدم الإنتظام الملاحظة في الحركات و كذلك ظاهرة التزايد في الحركة. الحركات الناتجة عن تطبيق قوى العربات على السطح هي أكبر من تلك الناتجة عن قوى داخل النفق. حركات الأساس هي أكبر عندما يكون إتجاه دورانها معاكسا لإتجاه دوران النفق.

## Abstract

The objective of this study was an assessment of the influence of buried structures on multilayered soils, and particularly, the effect of tunnels on the severity motions on the surface and on neighbouring structures. The analysis was carried out by means of dynamic model for the soil and the underground tunnel which was based on a boundary element formulation. Fundamental solutions result from the thin layer method who is a discrete algorithm for the Green's functions.

It was found that the stratification of soil was responsible of the almost totality of the irregularities on surface movements, as well as amplification. Displacements caused by surface traffic loads were more important than that those induced by underground ones. The movements of the foundation were important where it rotates in out of phase with the tunnel

## Résumé

L'objectif de cette étude est l'investigation de l'influence des structures enterrées implantées dans des sols multicouches, et particulièrement l'effet des tunnels, sur les mouvements à la surface et sur les structures voisines. L'analyse est réalisée par un modèle dynamique du sol et du tunnel basé sur une formulation en équations intégrales aux frontières. Les solutions fondamentales nécessaires dans une telle formulation découlent de la méthode des couches minces qui est un algorithme discret pour les fonctions de Green.

Cette étude a montré que la stratification était responsable de la quasi totalité des irrégularités observées dans les déplacements, ainsi que du phénomène d'amplification. Les déplacements induits par des charges de trafic en surface se sont révélés plus importants que ceux causés par des charges souterraines. Et finalement, les mouvements d'une fondation sont plus importants lorsque la rotation de celle-ci est en anti-phase avec celle du tunnel.

# SOMMAIRE



<b>1. Introduction</b>	1
<b>2. Méthode des couches minces</b>	6
2.1. Introduction	6
2.2. Formulation théorique de la TLM	8
2.2.1. Equation d'onde continue	8
2.2.2. Equation d'onde discrète	11
2.3. Résolution de l'équation discrète du mouvement	16
2.4. Résolution pour les déplacements	24
2.5. Méthode des couches minces dans le domaine temporel	25
2.5.1. Formulation	26
2.5.2. Réponse dans le cas de déformations planes	29
2.6. Cas particulier	30
2.6.1. Cas axisymétrique	30
2.6.2. Cas tridimensionnel	33
2.7. Conclusion	36
<b>3. Réponse dynamique d'un demi-espace élastique multicouches</b>	37
3.1. Introduction	37
3.2. Dérivation de l'approximation paraxiale	38
3.3. Caractéristiques de l'approximation paraxiale	41
3.3.1. Cas anti-plan	41
3.3.2. Cas in-plan	45
3.4. Effet d'une ou plusieurs couches posées sur un demi-espace	52
3.5. Comparaison des comportements des couches sur une base rigide et du demi-espace élastique multicouches	55
3.5.1. Validation de l'approximation paraxiale	58
3.6. Comportement statique du demi-espace	60
3.6.1. Cas anti-plan	60
3.6.2. Cas in-plan	68
3.6.3. Déplacements dus à des charges statiques	73
3.7. Conclusion	75
<b>4. Réponse dynamique du demi-espace élastique multicouches anisotrope</b>	76
4.1. Introduction	76
4.2. Equation du mouvement	78
4.2.1. Mouvement anti-plan	79
4.2.2. Mouvement in-plan	80
4.3. Matrice de rigidité algébrique	83
4.3.1. Matrice de rigidité d'une couche	83
4.3.2. Matrice de rigidité du demi-espace	84
4.4. Matrice de rigidité statique du demi-espace	85
4.5. Conditions sur les constantes élastiques	86
4.6. Conclusion	87



<b>5. Méthode des équation intégrales aux frontières</b>	88
5.1. Introduction	88
5.2. Formulation générale	88
5.2.1. Cas continu	89
5.2.2. Cas discret	92
5.3. Détermination des fonctions de Green	96
5.3.1. Fonctions de Green pour les déplacements	96
5.3.2. Fonctions de Green pour les contraintes	96
5.4. Evaluation des intégrales aux frontières	99
5.4.1. Charge virtuelle hors de l'élément	99
5.4.2. Charge virtuelle à l'intérieur de l'élément	101
5.5. Réponse d'une structure rigide	104
5.6. Conclusion	107
<b>6. Etude paramétrique</b>	108
6.1. Introduction	108
6.2. Réponse à des mouvements harmoniques	109
6.2.1. Introduction	109
6.2.2. Effet du tunnel	111
6.2.3. Effet de la base	120
6.2.4. Effet de la masse du tunnel	128
6.2.5. Effet de la configuration du sol	134
6.2.6. Effet de l'anisotropie	143
6.2.7. Charges statiques – charges dynamiques	148
6.3. Etude du comportement du système sol-tunnel à des charges de trafic	152
6.3.1. Introduction	152
6.3.2. Trafic en surface – trafic souterrain	154
6.3.3. Effet de la profondeur du tunnel	162
6.4. Interaction structure-sol-structure	162
6.5. Conclusion	171
<b>7. Conclusion</b>	172
<b>Bibliographie</b>	175
<b>Annexe A</b>	179
<b>Annexe B</b>	184
<b>Annexe C</b>	186

# Chapitre 1

## INTRODUCTION



L'étude des vibrations dans les sols est un sujet aussi vaste que complexe et qui depuis des années a fait l'objet de recherches très nombreuses sous bien des angles d'attaque. Le problème qui se pose, en effet, est celui de définir un modèle théorique : milieu élastique ou viscoélastique, stratifié ou non, milieu infini, semi-infini, plaque reposant sur un milieu élastique, pieux,... etc. La nature et la géométrie des modèles peuvent être très variées suivant le type de sol, la structure envisagée et les moyens analytiques et numériques dont on dispose.

En amont même de la modélisation se pose d'ailleurs aussi le problème de la mesure effective des paramètres du sol, de leur intervalle de confiance compte tenu des essais pratiques, voire même de leur signification qui n'est pas la même en dynamique qu'en statique (sans parler de leur modification par effet dynamique : perte de "résistance, liquéfaction,... etc.).

En dépit des difficultés à peine esquissées ici, les modèles dont on dispose tentent de résoudre globalement deux types de problèmes différents :

- celui de la résistance d'une fondation à un séisme : c'est alors le sol qui communique de l'énergie à la structure ;
- celui du comportement d'un sol qui reçoit des vibrations (de l'énergie) par l'intermédiaire d'un ouvrage de génie civil.

L'étude du premier problème, outre celles déjà citées, se heurte aux difficultés d'un calcul statistique et probabiliste dont les données géotechniques et tectoniques ne sont pas toutes éclaircies. L'étude du second problème a par contre l'avantage de se fonder sur des données mieux quantifiées (puisque prévues en principe par le maître de l'ouvrage) et d'utiliser ses modèles pour résoudre le premier.

Une variété d'outils mathématiques a été développée pour l'analyse de modèles composés d'un entassement de couches homogènes surplombant un demi-espace, et pour

comprendre les processus mécaniques associés à la génération des ondes élastiques à la source et leur transformation lorsqu'elles se propagent à travers les couches [2]. La pierre angulaire des méthodes développées est la théorie de la propagation des ondes dans un solide élastique ou viscoélastique. Cette théorie a connu une évolution remarquable depuis 1904, lorsque Lamb publia son étude sur la vibration d'un solide élastique semi-infini (demi-espace) due à une charge concentrée (problème dynamique de Boussinesq) [22]. Sur un plan théorique, nombreux sont les travaux qui partent de la théorie de Lamb, qui est unanimement reconnue comme la meilleure synthèse des connaissances analytiques. Les traitements analytiques de problèmes plus complexes incluant une ou plusieurs couches ont continué pendant toute la première moitié du siècle. Love [32] donna le premier un traitement détaillé du cas d'un demi-espace élastique surplombé par une couche unique. Il calcula la dispersion des ondes de Rayleigh et montra l'existence d'une nouvelle onde de surface qui porte son nom. Une compréhension des processus physiques qui surviennent durant la génération et la propagation des ondes élastiques dans des milieux multicouches, est obtenue à partir de ces traitements analytiques. Une excellente description de ces recherches est présentée par Ewing et al [15]. Mais ces solutions ne sont pas usuellement applicables aux problèmes de l'ingénieur à cause des restrictions de la géométrie du sol.

Reissner en 1936 entreprit ce qui est considéré comme la première application aux sciences de l'ingénieur [16], sa publication sur la réponse d'un disque reposant sur un demi-espace chargé verticalement, marque le début de la dynamique des sols moderne. Cette théorie a offert une contribution majeure en révélant l'existence de l'amortissement radiatif, un phénomène non suspecté avant mais aujourd'hui clairement identifié.

Les premières solutions « exactes » sont apparues dans les années soixante lorsque le système vibrant sol-fondation fut analysé comme un problème aux conditions aux frontières mixtes. La découverte par Hsieh et Lysmer que le comportement dynamique d'une fondation massive verticalement chargée pouvait être représenté par un oscillateur « masse-ressort-dashpot » à un degré de liberté avec des coefficients de rigidité et d'amortissement dépendant de la fréquence, fut sans doute à égale importance avec les développements théoriques

susmentionnés [16], [40]. Le succès de l'approximation de Lysmer (communément appelée 'analogue de Lysmer') [33] à reproduire avec une très grande précision la réponse du système a eu un profond effet sur le développement ultérieur et les applications pratiques des théories du demi-espace. Essentiellement à cause de sa simplicité, cette approximation a eu un grand impact sur son application, car ceci a montré que cette théorie rationnelle pouvait être le point de départ d'une méthode plus simple et plus maniable.

Cependant, La géométrie complexe des structures et la stratification conduisirent à l'utilisation des méthodes numériques, parmi lesquelles la Méthode des Eléments Finis est la plus importante. Cette dernière est basée sur la discrétisation du milieu continu en un certain nombre d'éléments de taille relativement petite [43]. Les détails de cette méthode sont largement connus et il n'est pas nécessaire de les reporter ici [5], [33]. Cependant, l'analyse de milieux de dimensions infinies avec des méthodes discrètes telle celle des éléments finis, nécessite l'utilisation de frontières artificielles spéciales qui sont communément appelées frontières absorbantes, silencieuses, nonreflechissantes ou transmettantes, ou encore éléments infinis [14], [33], [53]. Le but de l'utilisation de ces éléments spéciaux est de prévenir les réflexions d'ondes à l'extrémité des modèles mathématiques utilisés, dont les dimensions doivent, nécessairement, demeurer finies. Ces conditions aux frontières sont particulièrement utiles dans l'étude des effets de l'interaction sol-structure via la méthode des éléments finis.

Dans plusieurs cas, il est possible de formuler des solutions exactes (exactes dans le sens des éléments finis) dans lesquelles le comportement des frontières et leurs effets sur le sol discrétisé est complètement équivalent à celui d'une succession infinie d'éléments finis au-delà des extrémités artificielles du modèle. Dans ce cas les frontières sont dites consistantes [17], [8].

Thomson et puis Haskell ont développé une approche matricielle basée sur la matrice de transfert pour l'étude de la propagation d'onde en milieux multicouches [21],[10]. Cette approche présente, en plus du fait d'aboutir à des équations algébriques et non plus à des équations différentielles, l'avantage d'exprimer le vecteur d'état à n'importe quelle élévation (interface) en fonction du vecteur d'état en surface [46].

Cette approche fut aussi le point de départ d'une autre méthode basée sur la matrice de rigidité [21].

La stratification ajoute plus de complexité aux problèmes, ce qui rend prohibitifs les traitements théoriques par des méthodes classiques. Ce qui nécessite l'élaboration de techniques plus adaptées à ce type de problèmes. Une méthode qui paraît être une assez bonne alternative est la Méthode des Couches Minces [22], [27].

Dans le présent travail de recherche on se propose d'examiner le comportement des structures enterrées implantées dans des sols multicouches. Cet objectif est réalisé en appliquant la méthode des équations intégrales aux frontières aux phénomènes d'interaction dynamique sols multicouches-structures multiples.

Ces structures peuvent consister en une ou plusieurs structures, souterraines ou en surface. Pour cela, nous donnerons en premier lieu la solution fondamentale (fonction de Green) discrète, obtenue par la Méthode des Couches Minces.

Cette dernière est basée sur la linéarisation du champ des déplacements dans le sens de la stratification, ce qui élimine la dépendance du problème envers cette variable, conduisant à un système d'équation polynomial dans le domaine des fréquences-nombres d'onde, dont la solution est obtenue par décomposition spectrale. Ce qui nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres quadratique. Ces solutions fondamentales discrètes, utilisées dans la méthode des équations intégrales aux frontières, conduisent à des expressions explicites, évitant ainsi l'intégration numérique.

Ce travail est composée de 5 parties: La première, correspondant au chapitre 2, va consister à poser la formulation théorique de la Méthode des Couches Minces pour le cas de couches multiples sur une base rigide. La 2<sup>ème</sup> partie, c'est-à-dire le chapitre 3, sera consacrée au problème de couches multiples sur des demi-espaces élastiques, en montrant ces avantages ainsi que ses limites. On présente dans la 3<sup>ème</sup> partie, donc le chapitre 4, la formulation pour le cas de sol anisotrope. Dans la 4<sup>ème</sup> partie, le chapitre 5, sera posée une formulation explicite en équation intégrales aux frontières adaptée aux cas de structures enfouies dans des sols

multicouches en utilisant les solutions fondamentales élaborées dans les chapitres précédents. Une étude paramétrique sera ensuite menée dans la 5<sup>ème</sup> partie correspondant au chapitre 6 pour cerner le comportement de tels systèmes à différents cas de chargement. Le chapitre 7 sera consacré à la conclusion et aux perspectives entrevues par la présente étude.

## Chapitre 2

# METHODE DES COUCHES MINCES

### 2.1.Introduction

L'étude de la propagation d'ondes dans des solides stratifiés est un sujet qui a son importance dans une variété d'application : en géophysique, en sismologie etc... Ainsi, une variété d'outils mathématiques a été développée pour l'analyse des différents modèles idéalisés et la compréhension des processus associés à la génération des ondes élastiques à la source et à leurs transformations durant leur propagation à travers les différentes couches.

Les méthodes adoptées pour la résolution de tels problèmes sont essentiellement de deux types : les méthodes analytiques et les méthodes numériques. Pour ce qui est de la première catégorie, leur inconvénient majeur est l'impossibilité de prendre en compte (modéliser) d'une façon réaliste tous les phénomènes à cause de la grande complexité des paramètres concernés. La seconde catégorie, dont la plus répandue est la Méthode des Eléments Finis, permet de simplifier la modélisation des différents paramètres mais, à cause de la complexité introduite par la stratification et la diffusion des ondes à l'infini, induit un effort numérique substantiel, ce qui nous oblige à procéder à des simplifications qui ne reproduisent pas généralement la réalité [33].

De tels inconvénients ont conduit les chercheurs à s'orienter vers d'autres pistes, parmi lesquelles figure la méthode de Thomson-Haskell [21], qui est une formulation matricielle analytique « rigoureuse ». A partir de cette méthode, Kausel et Rôesset [21] développèrent une méthode impliquant la matrice de rigidité. Cependant, cette dernière conduit à un problème aux valeurs propres contenant des fonctions transcendantes dont la résolution nécessite des techniques numériques onéreuses, reprenant ainsi les inconvénients des méthodes numériques. Pour palier à cet inconvénient, Waas [51] et Kausel et Rôesset [21] proposèrent une nouvelle approche consistant à linéariser les termes de rigidité pour obtenir des expressions plus simples et diminuer ainsi le nombre de paramètres à considérer. Ses expressions étant valables pour des épaisseurs faibles des couches, cette méthode a reçu la dénomination de « Méthodes des Couches Minces » (Thin Layer Method).

L'avantage principal de cette méthode sur celles qui l'ont précédée est qu'elle induit des simplifications dans le comportement du milieu considéré (linéarisation des déplacements...etc.) permettant de considérer un grand nombre de paramètres (avantage des méthodes numériques) et qu'elle induit des intégrations analytiques (transformées de Fourier) diminuant ainsi l'effort numérique nécessaire. Ainsi, la TLM associe les avantages des deux catégories.

Un autre avantage, qui est à notre avis très important, est le fait que la TLM introduit des outils mathématiques généralement réservés à la mécanique des structures (problèmes aux valeurs propres, matrice de rigidité...etc.) dans la mécanique des sols.

La TLM a trouvé diverses applications dans le génie parasismique et en sismologie de l'ingénieur. Parmi ses applications les plus fréquentes nous citons les essais de pavé non-destructifs, la propagation d'ondes dans des plaques stratifiées et dans les sols (incluant les milieux anisotropes et poroélastiques), interaction sol-structure et fluide-structure et dans la simulation de l'action sismique.

La méthode fut d'abord utilisée par Lysmer [34] pour l'étude de la propagation des ondes de Rayleigh dans un milieu constitué de couches. Waas [51] développa une extension très substantielle des travaux de Lysmer pour le cas de déformation plane et Kausel [17] étendit cette formulation au cas axisymétrique et trouva que les problèmes aux valeurs propres associés à ce cas étaient la combinaison de deux problèmes aux valeurs propres l'un dans le plan et l'autre anti-plan. Cette méthode fut appliquée à l'étude de la réponse dynamique et sismique des fondations [19], [18] et à l'étude des milieux multicouches de profondeur finie [20].

L'avancée la plus fondamentale vint au début des années 80, lorsque Tajimi, Waas et Kausel [28], ont mis en œuvre indépendamment cette méthode pour obtenir la réponse d'un système multicouche de profondeur finie à des sources concentrées agissant à l'intérieur ou à la surface du milieu. Kausel et Peek [22] ont présenté des fonctions de Green pour des sources ponctuelles de types variés. Un nombre important d'applications et d'extensions ont suivi, incluant les réponses de milieux infinis, comme pour le cas de couches reposant sur un

demi-espace élastique [41], [25], [42], et l'étude de l'anisotropie dans les domaines fréquentiel [24] et temporel [27].

Tassoulas [45] développa des éléments finis de largeur arbitraire pour l'analyse des problèmes plans et cylindriques. D'autres versions ont été introduites pour le calcul de l'impédance des fondations enterrées dans un sol multicouche [52], [53] et pour l'étude des impulsions sismiques [28]. Récemment, des applications ont inclus l'interaction sol-fluide-structure [31], [44] et la réponse des milieux poroélastiques [29].

La présente étude a pour but d'examiner le comportement des structures enterrées implantés dans des sols stratifiés, ce qui nécessite la connaissance des fonctions de Green qui sont déterminées par la TLM et introduite dans le cadre d'une étude en éléments frontières.

## 2.2. Formulation théorique de la TLM

Dans ce qui suit, nous abordons l'établissement de l'outil mathématique associé à la TLM conduisant aux expressions des déplacements et des contraintes dans un massif de sol multicouches dus à des charges situées en surface ou à l'intérieur de ce milieu. Pour cela, l'équation d'onde sera résolue dans le domaine des fréquences-nombres d'onde après avoir linéarisé le champ des déplacements par rapport à la direction de la stratification, les transformations inverses, pour retrouver les expressions dans le domaine temporel seront réalisées analytiquement.

### 2.2.1. Equation d'onde continue

Considérons un milieu horizontalement stratifié, localement homogène, linéairement élastique, anisotrope et dont les extrémités latérales sont infinies. Un tel système est soumis à des charges dynamiques (ou statiques) pouvant être localisées en n'importe quelle position dans le sol. Les lois gouvernantes et les équations constitutives sont

$$L^T \sigma + f - \gamma \ddot{u} = 0 \tag{2.1}$$

$$\sigma = D\varepsilon \quad (2.2)$$

$$\varepsilon = Lu \quad (2.3)$$

Les grandeurs apparaissant dans ces équations sont définies comme suit

$$u = \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^T \quad \text{vecteur des déplacements}$$

$$\sigma = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}\}^T \quad \text{vecteur des contraintes}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}\}^T \quad \text{vecteur des déformations}$$

$$f = \{f_x \quad f_y \quad f_z\}^T \quad \text{vecteur des forces volumiques}$$

$$D = \{d_{ij}\} \quad i,j=1..6 \quad \text{matrice constitutive}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \frac{\partial}{\partial x} \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \end{bmatrix} \quad \text{opérateur différentiel}$$

et  $\gamma$  est la masse volumique.

En substituant les équations (2.2) et (2.3) dans l'équation (2.1) nous aboutissons à l'équation d'onde en coordonnées cartésiennes

$$\gamma \ddot{u} - L^T D L u = f \quad (2.4)$$

D'autre part, l'opérateur différentiel peut être écrit sous la forme

$$L = L_x \frac{\partial}{\partial x} + L_y \frac{\partial}{\partial y} + L_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.5)$$

où les matrices  $L_x, L_y$ , et  $L_z$  sont trivialement composées de zéros et uns, et sont obtenues à partir de l'opérateur différentiel par simple inspection. Nous pouvons donc réécrire le produit  $L^T DL$  sous la forme

$$L^T DL = D_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + D_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2D_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2D_{xz} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2D_{yz} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \quad (2.6)$$

Les matrices  $D_{\alpha\beta}$  dépendent uniquement des propriétés du matériau et sont définies par

$$D_{\alpha\beta} = L_\alpha^T DL_\beta \quad (2.7)$$

D'autre part le vecteur des contraintes internes dans un plan horizontal est donné par la relation suivante

$$s = L_z^T \sigma = L_z^T DLu \quad (2.8)$$

dont les composantes sont

$$s = \left\{ \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad \sigma_{zz} \right\}^T \quad (2.9)$$

Et finalement, les conditions aux limites dans les régions où les contraintes externes  $t$  sont prescrites sont de la forme

$$t - s_n = 0 \quad (2.10)$$

où  $s_n$  est le vecteur des contraintes associé à la normale  $\vec{n}$ . Pour une extrémité supérieure  $s_n = s$ , alors que pour une extrémité inférieure  $s_n = -s$ .

### 2.2.2. Equation d'onde discrète

Le milieu physique est constitué de plusieurs couches, nous commençons par subdiviser ces dernières en sous-couches d'épaisseurs égales dites « minces » au sens des éléments finis de telle façon à pouvoir supposer que le champ de déplacements suive une loi polynomiale dans la direction verticale comme le montre la figure (2.1). Le nombre de sous-couches, s'il y a plusieurs, dépendra de l'ordre de l'interpolation choisie.

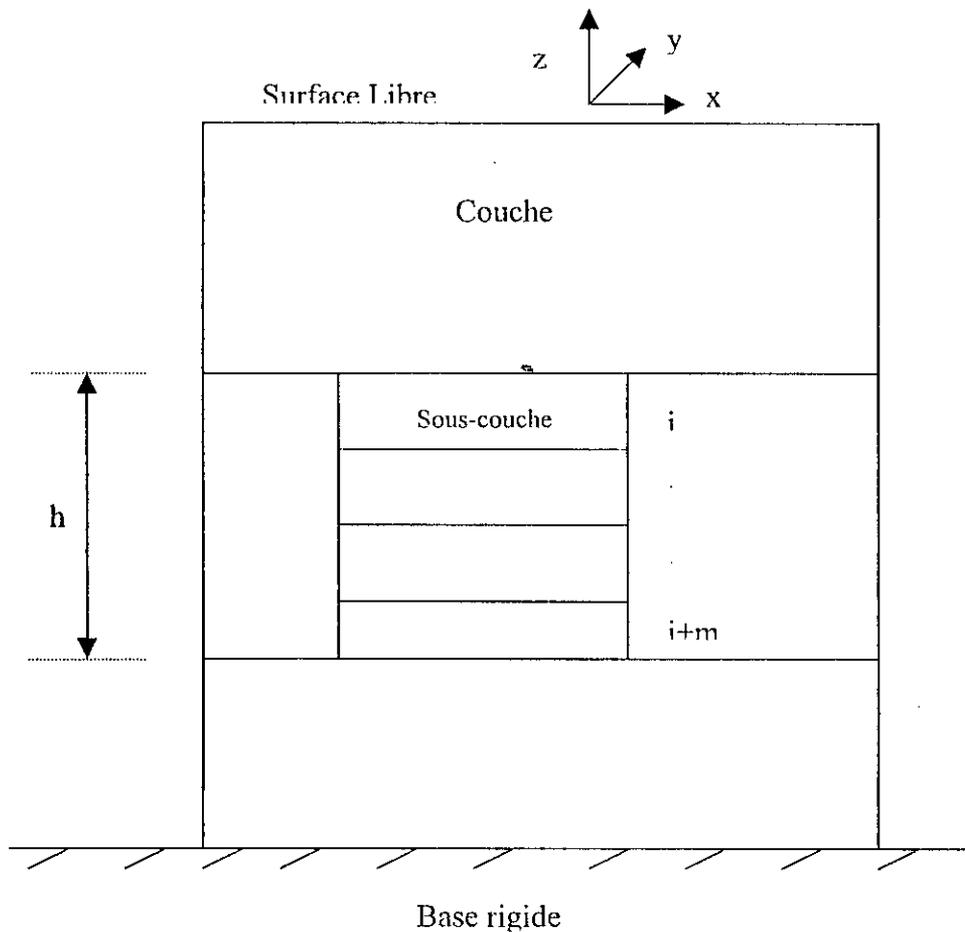


Figure (2.1) : discrétisation du sol en couches et sous-couches

Nous isolons une couche, en affectant des indices aux sous-couches :  $i, i+1, \dots, i+m$  (de haut vers le bas),  $m$  étant l'ordre d'interpolation (cet ordre d'interpolation étant égal au nombre de sous-couches). Le nombre de sous-couches dans notre cas est équivalent au nombre d'éléments dans la Méthode des Eléments Finis. Nous rétablissons l'équilibre en appliquant des contraintes  $t_i$  et  $t_m$  sur les surfaces supérieure et inférieure de la couche de façon à équilibrer les contraintes internes figure (2.2).

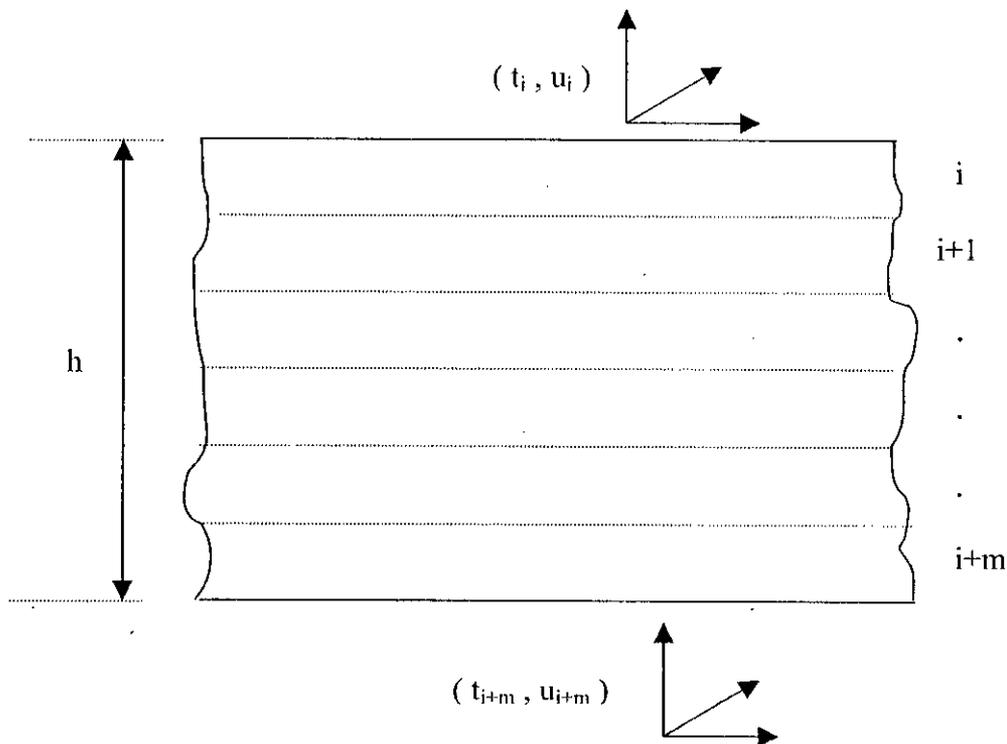


Figure (2.2) : Equilibre d'une couche isolée

A ce stade nous approximons le champ de déplacement à l'intérieur d'une couche par l'interpolation suivante

$$u = NU \tag{2.11}$$

avec  $N = N(z)$  est une matrice contenant les polynômes d'interpolation.  $U = U(x, y, t)$  étant un vecteur colonnes composé des vecteurs déplacements aux interfaces

$$U = \begin{pmatrix} U_i \\ U_{i+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{i+m} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Par exemple, pour une interpolation linéaire ( $m=1$ ), les expressions de la matrice d'interpolation sont

$$N = [\xi I \quad (1-\xi)I] \quad (2.13a)$$

Et pour une interpolation quadratique ( $m=2$ ), ces expressions deviennent

$$N = [\xi(2\xi-1)I \quad 4\xi(1-\xi)I \quad (1-\xi)(1-2\xi)I] \quad (2.13b)$$

où  $I$  est une matrice identité de dimensions  $3 \times 3$  et  $\xi = z/h$ ,  $h$  étant la hauteur de la couche considérée.

La solution discrète devient divergente lorsque la longueur d'onde de l'onde de cisaillement quatre fois l'épaisseur de la sous-couche [33]. Considérons des ondes de cisaillement planes avec une fréquence  $f$  et une longueur d'onde  $\lambda$ , nous avons

$$f\lambda = c_s \quad (2.14)$$

ce qui conduit, pour une interpolation linéaire pour laquelle la sous-couche n'est autre que la couche même, à la condition suivante

$$\lambda \geq 4h \quad (2.15)$$

L'équation (2.13) représente une discrétisation partielle du champ de déplacement dans le sens de la stratification (direction verticale). Cependant, en substituant cette équation dans l'équation d'onde (2.4) et dans l'équation (2.10) représentant les conditions aux limites, ces dernières ne sont plus identiquement satisfaites du fait de l'approximation introduite, mais exhibent à la fois des forces volumiques résiduelles  $f_r = f_r(x, y, z, t)$  et des contraintes résiduelles au niveau des extrémités de la couche  $t_r = t_r(x, y, z, t)$ . Ainsi, les équations (2.4) et (2.10) deviennent

$$f - \gamma \ddot{u} + L^T D L u = f_r \quad (2.16a)$$

$$t - s_n = t_r \quad (2.16b)$$

Pour rétablir l'équilibre, nous appliquons le principe des travaux virtuels à la couche, ce qui impose que le travail fourni par les forces résiduelles à travers un élément de la couche de volume  $(dx dy dz)$  soit nul, c'est-à-dire

$$\left[ \delta U_i^T t_{r,i} + \delta U_{i+m}^T t_{r,i+m} + \int_0^h \delta u^T f_r dz \right] dx dy = 0 \quad (2.17)$$

Les deux premiers termes représentent le travail virtuel réalisé par les contraintes résiduelles aux interfaces supérieures et inférieures de la couche, alors que le troisième terme correspond à la contribution des forces volumiques résiduelles. En substituant les équations (2.11) et (2.16) dans l'équation (2.17) en supposant que cette expression est valable pour une variation arbitraire du déplacement et après intégration, nous obtenons l'équation suivante de l'équilibre dynamique d'une couche mince

$$P = M\ddot{U} - A_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - A_{xy} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - A_{yy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \bar{B}_x \frac{\partial U}{\partial x} - \bar{B}_y \frac{\partial U}{\partial y} + GU \quad (2.18)$$

qui peut être écrite sous la forme conventionnelle matricielle suivante

$$P = M\ddot{U} + KU \quad (2.19)$$

Le terme gauche  $P$  représente les forces dues aux contraintes externes agissant sur les interfaces d'une sous-couche. Pour ce qui est des termes de droite, le premier représente les forces d'inertie et les autres sont les forces élastiques de déformation. Les matrices apparaissant dans l'équation (2.18) sont données par

$$M = \int_0^h N^T N \gamma dz \quad (2.20a)$$

$$A_{\alpha\alpha} = \int_0^h N^T D_{\alpha\alpha} N dz \quad \alpha=x,y \quad (2.20b)$$

$$A_{xy} = \int_0^h N^T (D_{xy} + D_{yx}) N dz \quad (2.20c)$$

$$\bar{B}_\alpha = \int_0^h N^T D_{\alpha z} N' dz - \int_0^h N^T D_{z\alpha} N dz \quad (2.20d)$$

$$G = \int_0^h N^T D_{zz} N' dz \quad (2.20e)$$

Dans ce qui précède,  $N'$  indique la dérivée de la matrice d'interpolation par rapport à  $z$ . Il faut noter que les matrices  $M, A_{\alpha\alpha}$  et  $G$  sont symétriques, alors que les matrices  $\bar{B}_\alpha$  sont antisymétriques.

A ce stade, nous procédons à l'assemblage des résultats de chaque couche avec ceux de toutes les autres exactement de la même manière que pour la matrice de rigidité dans une formulation en éléments finis. Le système résultant a strictement la même forme que celui présenté pour une couche isolée ce qui nous permet de garder la même notation avec toutefois la remarque que les grandeurs utilisées sont celles du système global et pas ceux d'une couche isolée.

Une autre remarque concernant le système résultant est le fait qu'il soit constitué de matrices bandes, avec un nombre de degrés de liberté  $3N$ , où  $N$  est le nombre total d'interfaces.

### 2.3. Résolution de l'équation discrète de mouvement

nous rappelons ici que l'objectif recherché est la détermination de la réponse du milieu en tout point. Il est clair que la discrétisation introduite dans l'équation d'onde dans le sens de la stratification élimine sa dépendance par rapport à la coordonnée  $z$  mais conduit à un système d'équations différentielles partielles (équation (2.29)) dont la résolution resta délicate à cause de la présence des dérivées partielles. Pour éliminer cet inconvénient, la résolution doit se faire dans le domaine des fréquences-nombres d'onde.

A présent, nous effectuons une transformation du domaine temps-espace vers le domaine fréquence-nombre d'onde par une transformée de Fourier temporelle simple (temps vers fréquences) et une autre bidimensionnelle en fonction de  $x$  et de  $y$  (espace  $x$  et  $y$  vers nombres d'onde  $k_x$  et  $k_y$ )  $\{U \rightarrow U^*$  et  $P \rightarrow P^*\}$ . L'étoile indiquant que la grandeur considérée est représentée dans le domaine fréquence-nombre d'onde.

Cette transformation résulte en un système d'équation de la forme

$$P^* = (k_x^2 A_{xx} + k_x k_y A_{xy} + k_y^2 A_{yy} + ik_x \bar{B}_x + ik_y \bar{B}_y + G - \omega^2 M) U^* \quad (2.21)$$

Pour plus de simplicité, nous considérons dans un premier temps le cas de déformation plane, ce qui élimine la dépendance du problème considéré par rapport à la coordonnée  $y$ . Les autres cas seront traités ultérieurement. L'expression (2.21) devient

$$P^* = (k_x^2 A_{xx} + ik_x \bar{B}_x + G - \omega^2 M) U^* \quad (2.22)$$

Nous procédons à une modification qui consiste à multiplier les composantes verticales du déplacement et de la charge ( $U_z^*$  et  $P_z^*$ ) par  $i = \sqrt{-1}$ , et en notant  $k = k_x$ , nous aboutissons à l'expression suivante

$$P^* = (k^2 A + kB + G - \omega^2 M) U^* \quad (2.23)$$

Dans cette dernière expression, la matrice  $B$  est symétrique. Les expressions des matrices précédentes sont données en Annexe A1. Nous pouvons écrire l'équation (2.23) comme suit

$$P^* = KU^* \quad (2.24)$$

$K$  étant la matrice de rigidité, fonction de  $\omega$  et  $k$ .

La matrice de rigidité globale est obtenue par assemblage des matrices de rigidité des couches aux degrés de liberté communs. Pour le cas de couches reposant sur une base rigide, les trois degrés de liberté à l'interface du rocher rigide sont nuls et donc éliminés du problème étudié. Notons que lorsque le nombre d'onde  $k$  est nul (pas de propagation dans la direction horizontale  $x$ ), la matrice de rigidité  $(G - \omega^2 M)$  est celle d'une poutre vibrante (au cisaillement) modélisée en éléments finis avec une matrice masse consistante. Ainsi, les strates ont les mêmes fréquences de résonance que la dite poutre. La forme de la matrice de rigidité globale est donnée en figure (2.3).

Les déplacements  $U^*$  sont obtenus par inversion de cette matrice de rigidité.

$$U^* = K^{-1}P^* \quad (2.25)$$

En pratique, cette inversion est réalisée par décomposition spectrale de la matrice de rigidité. Ce qui nécessite la résolution du problème aux valeurs propres quadratique et qui revient à annuler le vecteur des charges. Ce qui se traduit par

$$K\Phi = 0 \quad (2.26)$$

qui nécessite la résolution du problème aux valeurs propres quadratique suivant

$$(Ak^2 + Bk + G - \omega^2 M)\Phi = 0 \quad (2.27)$$

Les valeurs propres sont les nombres d'onde et les vecteurs propres sont les modes de propagation. Nous commençons par traiter le problème d'un sol multicouche reposant sur une base rigide. Si ce sol contient  $N$  sous-couches, la résolution du problème (2.27) conduit à  $2N$  valeurs propres pour le cas anti-plan et  $4N$  valeurs propres pour le cas dans le plan. Ces valeurs se présentent en paires  $\pm k_j$ , ce qui correspond respectivement aux ondes se propageant de la source vers l'infini et de l'infini vers la source.

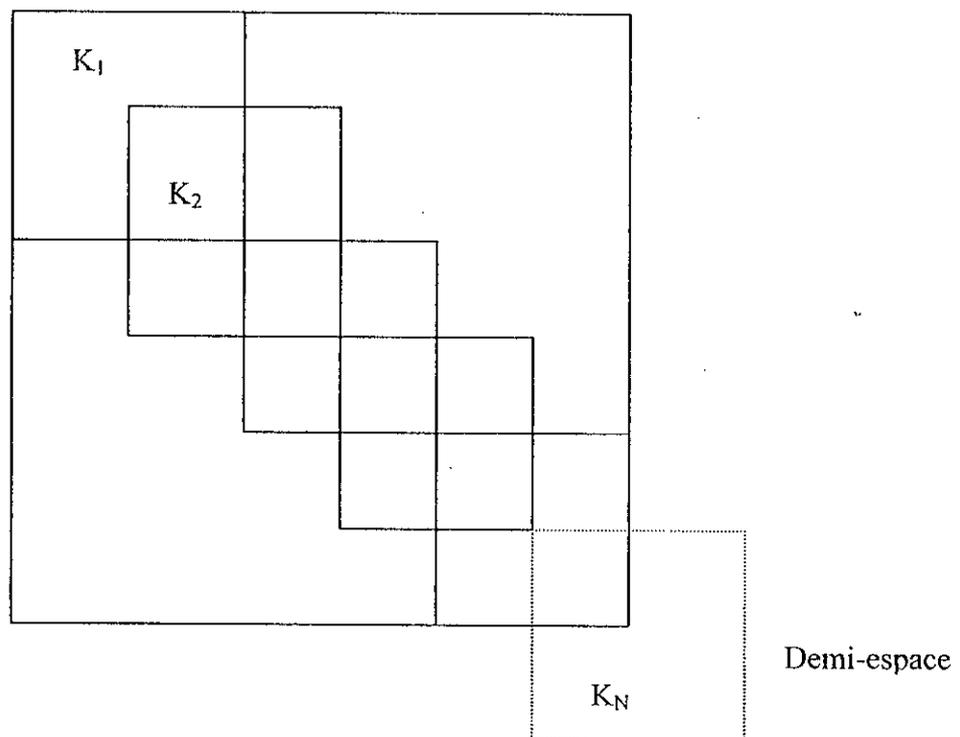


Figure (2.3) : Structure de la matrice de rigidité du sol.

Les nombres d'onde choisis correspondent aux ondes se propageant de la source vers l'infini. Ce choix correspond aux nombres d'onde pour lesquels les déplacements à l'infini sont nuls, alors que pour les nombres éliminés ces déplacements sont infinis.

Nous choisissons  $3N$  valeurs propres  $k_j$  qui satisfont aux conditions suivantes [22]:

1. pour les nombres complexes, nous prenons celles dont la partie imaginaire est négative ;
2. pour les nombres réels, nous gardons celles qui sont positifs.

Il est à noter qu'un problème aux valeurs propres quadratique peut toujours être résolu comme un problème aux valeurs propres linéaire de dimension double, ce qui n'est pas nécessaire dans notre cas en raison de la structure particulière des matrices considérées.

Réarrangeons les lignes et les colonnes des matrices par degrés de liberté plutôt que par interfaces, c'est-à-dire, nous groupons d'abord les degrés de liberté horizontaux (suivant  $x$ ), ensuite les verticaux (suivant  $z$ ) et enfin les anti-plans (suivant  $y$ ), ce qui nous donne la configuration suivante par les différentes matrices

$$A = \begin{bmatrix} A_x & \cdot & \cdot \\ \cdot & A_z & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_y \end{bmatrix} \quad (2.28a)$$

$$B = \begin{bmatrix} \cdot & B_{xz} & \cdot \\ B_{xz}^T & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.28b)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_x & \cdot & \cdot \\ \cdot & C_z & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_y \end{bmatrix} \quad (2.28c)$$

Comme dans [22] nous réécrivons le problème précédent sous la forme suivante

$$(\tilde{A}k_j^2 + \tilde{C})Z_j = 0 \quad (2.29a)$$

$$Y_j^T(\tilde{A}k_j^2 + \tilde{C}) = 0 \quad (2.29b)$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_x & \cdot & \cdot \\ B_{xz}^T & A_z & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_y \end{bmatrix} \quad (2.30a)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_x & B_{xz} & \cdot \\ \cdot & C_z & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_y \end{bmatrix} \quad (2.30b)$$

Les vecteurs propres gauche et droite  $Z_j$  et  $Y_j$  sont définis par

$$Z_j = \begin{Bmatrix} \phi_{xj} \\ k_j \phi_{zj} \\ \phi_{yj} \end{Bmatrix} \quad (2.31a)$$

$$Y_j = \begin{Bmatrix} k_j \phi_{xj} \\ \phi_{zj} \\ \phi_{yj} \end{Bmatrix} \quad (2.31b)$$

sous forme matricielle, le problème précédent peut s'écrire

$$(\tilde{A}K^2 + \tilde{C})Z = 0 \quad (2.32a)$$

$$(\tilde{A}^T K^2 + \tilde{C}^T)Y = 0 \quad (2.32b)$$

avec

$$Z = \{Z_j\} = \begin{bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_z K_R \\ \Phi_y \end{bmatrix} \quad (2.33a)$$

$$Y = \{Y_j\} = \begin{bmatrix} \Phi_x K_R \\ \Phi_z \\ \Phi_y \end{bmatrix} \quad (2.33b)$$

$$K = \text{diag}(k_j) = \begin{bmatrix} K_R & \\ & K_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{"mode de Rayleigh"} & \\ & \text{"mode de Love"} \end{bmatrix} \quad (2.33c)$$

$$K = \text{diag}(k_j) = \begin{bmatrix} K_R & \\ & K_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{"mode de Rayleigh"} & \\ & \text{"mode de Love"} \end{bmatrix} \quad (2.33c)$$

Arrivés à ce point, il nous faut choisir des conditions de normalité pour les matrices précédentes, nous optons pour celle établies dans [22], à savoir

$$Y^T \tilde{A} Z = \begin{bmatrix} K_R & \\ & I \end{bmatrix} = J \quad (2.34a)$$

$$Y^T \tilde{C} Z = \begin{bmatrix} -K_R^3 & \\ & -K_L^2 \end{bmatrix} = -JK^2 \quad (2.34b)$$

où  $I$  est matrice identité de dimensions  $(N \times N)$ .

Si le sol est dissipatif, les matrices précédentes sont inversables. De (2.34a) et (2.34b) nous obtenons

$$\tilde{A}^{-1} = Z J^{-1} Y^T \quad (2.35a)$$

$$\tilde{C}^{-1} = -Z K^{-2} J^{-1} Y^T \quad (2.35b)$$

Les détails des éléments de  $\tilde{A}^{-1}$  et  $\tilde{C}^{-1}$  sont donnés en Annexe A2.

Notons que  $\Phi_y$  est une matrice carrée de dimensions  $(N \times N)$ , alors que  $\Phi_x$  et  $\Phi_z$  sont des matrices rectangulaires de dimensions  $(N \times 2N)$ .

A présent, considérons l'équations d'équilibre (2.24) avec les modifications citées plus haut, ce qui nous conduit à une nouvelle expression

$$\tilde{K} U^* = (\tilde{A} k^2 + \tilde{C}) U^* = P^* \quad (2.36)$$

avec

$$U^* = \begin{Bmatrix} U_x^* \\ kiU_z^* \\ U_y^* \end{Bmatrix} \quad (2.37a)$$

$$P^* = \begin{Bmatrix} P_x^* \\ kiP_z^* \\ P_y^* \end{Bmatrix} \quad (2.37b)$$

Après quelques manipulations, nous arrivons aux résultats suivants

$$U^* = ZJ^{-1}(kI - K^2)Y^T P^* \quad (2.38)$$

ou encore

$$\begin{Bmatrix} U_x^* \\ iU_z^* \\ U_y^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_x D_R \Phi_x^T & k\Phi_x K_R^{-1} D_R \Phi_z^T & . \\ \frac{1}{k} \Phi_z K_R D_R \Phi_x^T & \Phi_z D_R \Phi_z^T & . \\ . & . & \Phi_y D_L \Phi_y^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x^* \\ iP_z^* \\ P_y^* \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

avec

$$D_R = (k^2 I - K_R^2)^{-1} \quad (2.40a)$$

$$D_L = (k^2 I - K_L^2)^{-1} \quad (2.40b)$$

Il est à remarquer que  $\frac{1}{k} \Phi_z K_R D_R \Phi_x^T = k \Phi_x K_R^{-1} D_R \Phi_z^T$ , ce qui indique que la matrice dans l'équation (2.39) est symétrique. Cette matrice représente la matrice de flexibilité dont les éléments sont

$$F_{xx} = \{f_{xx}^{mn}\} = \Phi_x D_R \Phi_x^T \quad (2.41a)$$

$$F_{xz} = \{f_{xz}^{mn}\} = \begin{cases} k\Phi_x K_R^{-1} D_R \Phi_z^T \\ \frac{1}{k} \Phi_x K_R D_R \Phi_z^T \end{cases} \quad (2.41b)$$

$$F_{zx} = F_{xz}^T \quad (2.41c)$$

$$F_{zz} = \{f_{zz}^{mn}\} = \Phi_z D_R \Phi_z^T \quad (2.41d)$$

$$F_{yy} = \{f_{yy}^{mn}\} = \Phi_y D_L \Phi_y^T \quad (2.41e)$$

$m, n = 1..N$ .

Les coefficients cités plus haut représentent les flexibilités à l'interface  $m$  dues à une charge unité (dans le domaine des nombres d'onde) appliquée à l'interface  $n$ . Ces éléments sont donnés par les expressions suivantes

$$f_{xx}^{mn} = \sum_{l=1}^{2N} \phi_x^{ml} \phi_x^{nl} a_l^R \quad (2.42a)$$

$$f_{xz}^{mn} = \sum_{l=1}^{2N} \phi_x^{ml} \phi_z^{nl} b_l^R = \sum_{l=1}^{2N} \phi_x^{ml} \phi_z^{nl} c_l^R \quad (2.42b)$$

$$f_{zx}^{mn} = \sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml} \phi_x^{nl} b_l^R = \sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml} \phi_x^{nl} c_l^R \quad (2.42c)$$

$$f_{zz}^{mn} = \sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml} \phi_z^{nl} a_l^R \quad (2.42d)$$

$$f_{yy}^{mn} = \sum_{l=1}^N \phi_y^{ml} \phi_y^{nl} a_l^L \quad (2.42e)$$

avec

$$a_l = \frac{1}{k^2 - k_l^2} \quad (2.43a)$$

$$b_l = \frac{k}{k_l(k^2 - k_l^2)} \quad (2.43b)$$

$$c_l = \frac{k_l}{k(k^2 - k_l^2)} \quad (2.43c)$$

Les indices supérieurs  $R$  et  $L$  indiquent l'utilisation des modes de Rayleigh ou de Love ( $k_l = k_l^R$  ou  $k_l = k_l^L$ ). La dite matrice de flexibilité se présente sous la forme

$$F^{mn} = \begin{bmatrix} f_{xx}^{mn} & \cdot & f_{xz}^{mn} \\ \cdot & f_{yy}^{mn} & \cdot \\ f_{zx}^{mn} & \cdot & f_{zz}^{mn} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

## 2.4. Résolution pour les déplacements

La réponse recherchée est dans le domaine des espaces (domaine réel), celui des nombres d'onde n'est qu'un passage pour simplifier la formulation. Nous nous intéressons, donc à présent, aux déplacements dans le domaine fréquence-espace, pour cela nous commençons par résoudre le problème (2.39) dans le domaine fréquence-nombre d'onde et ensuite par l'intermédiaire d'une transformée de fourrier inverse nous aboutissons aux déplacements dans le domaine des espaces.

Ainsi, les déplacements à l'interface  $m$  dus à une charge appliquée à l'interface  $n$  dans le domaine spatial sont obtenus par la transformée

$$U^{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U^{*mn} e^{-ikx} dk \quad (2.45)$$

ce qui est équivalent à

$$U^{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{mn} P^{*m} e^{-ikx} dk \quad (2.46)$$

où  $P^{*m}$  est le vecteur charges appliquées à l'interface  $n$  dans le domaine  $(\omega-k)$ .

Notons que les modes de propagation  $\phi_x^{ml}$ ,  $\phi_y^{ml}$  et  $\phi_z^{ml}$  avec leurs valeurs propres associées sont indépendants du nombre d'onde  $k$  (variable d'intégration). Ainsi, la transformée précédente peut être réalisée analytiquement.

Nous donnons en Annexe A3, [4], les déplacements dus à deux cas de charges, charges réparties sur un intervalle de longueur  $2b$  et charges concentrées (ce dernier cas se déduit du précédent lorsque  $b$  tend vers zéro).

## 2.5. Méthode des couches minces dans le domaine temporel

Dans les sections précédentes, les déplacements ont été obtenus dans le domaine fréquentiel, la réponse dans le domaine temporel étant obtenue par des transformations numériques, c'est-à-dire par l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT).

Une formulation alternative à la précédente dans le domaine des temps fut proposée par Kausel [27] offrant des avantages pour les systèmes avec un amortissement faible ou nul et consistant à inverser l'ordre d'intégration décrit dans la version fréquentielle de la TLM. Ceci requiert la résolution d'un problème linéaire aux valeurs propres en fonction de la fréquence. L'intégration par rapport à cette dernière grandeur est réalisée analytiquement, quant à celle réalisée par rapport au nombre d'onde, elle est réalisée numériquement. Cette

stratégie permet d'éviter l'utilisation de l'algèbre complexe (contenant des nombres complexes) et conduit à des résultats directement dans le domaine temporel.

La contrepartie, est que la dernière étape, à savoir la transformée de Fourier inverse sur le nombre d'onde, doit être réalisée numériquement. Ce fait inévitable implique qu'à la fois les charges (sources), et les déplacements (solutions) doivent être périodiques en fonction de la variable espace.

### 2.5.1. Formulation

Nous démarrons de l'équation (2.19), qui est analogue à l'équation dynamique conventionnelle d'un système discret avec une matrice masse  $M$  et une matrice de rigidité  $K$ , excepté que cette dernière n'est pas réelle, mais hermetienne (c'est-à-dire que sa partie réelle est symétrique et que sa partie imaginaire est antisymétrique). Cette analogie suggère que cette équation peut être résolue par superposition modale impliquant le problème aux valeurs propres suivant

$$K\psi = \varepsilon M\psi \quad (2.47)$$

dont le quotient de Rayleigh est

$$\varepsilon = \frac{\psi^* K \psi}{\psi^* M \psi} \quad (2.48)$$

Dans cette dernière équation  $\psi^*$  est le conjugué du transposé de  $\psi$ . Comme  $K$  est hermetienne, et  $M$  réelle, symétrique et définie positive, alors le numérateur et le dénominateur sont réels. Ainsi, toutes les valeurs propres le sont aussi, alors que les vecteurs propres peuvent être complexes. Le numérateur de  $\varepsilon$  étant proportionnel à l'énergie de déformation et le dénominateur est proportionnel à l'énergie cinétique, et comme les énergies ne peuvent pas être négatives, nous en concluons que toutes les valeurs propres doivent être non négatives. Si, en plus, le système n'admet pas de mode rigide (cas de couches sur une

base rigide), les valeurs propres nulles ne peuvent pas survenir, dans un tel cas seules les valeurs propres positives existent.

En procédant à la modification déjà opérée, consistant à multiplier les coordonnées verticales des charges et des déplacements par  $i$ , la matrice de rigidité  $K$  devient réelle et symétrique, et le problème aux valeurs propres prend la forme

$$K\phi_j = \omega_j^2 M\phi_j \quad j = 1, 2, \dots, 3N \quad (2.49)$$

Les vecteurs propres ainsi calculés satisfont aux conditions de normalisation standards, et peuvent être supposés normalisés par rapport à la matrice masse, c'est-à-dire

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (2.50a)$$

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \quad (2.50b)$$

Avec

$$\Phi = \{\phi_j\} \quad \text{et} \quad \Omega = \text{diag}(\omega_j) \quad j = 1, 2, \dots, 3N \quad (2.51)$$

Finalement, si la charge  $P^*$  est supposée à variables séparables, c'est-à-dire qu'elle s'écrit de la forme

$$P^* = P_0^*(k_x, k_y) f(t) \quad (2.52)$$

La superposition modale conventionnelle conduit à la solution suivante de l'équation (2.19) dans le domaine temps-nombre d'onde comme

$$U^* = \sum_{j=1}^{3N} \eta_j \hbar_j^* f\phi_j \quad (2.53)$$

avec

$$\eta_j = \phi_j^T P_0^* \quad \text{facteur de participation modale} \quad (2.54a)$$

$$\hat{h}_j = \frac{1}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \quad \text{fonction de réponse impulsive modale} \quad (2.54b)$$

et le symbole \* indique un produit de convolution.

A ce stade, il est possible de généraliser cette solution pour inclure une loi d'amortissement visqueux ou proportionnel. Ceci est accompli simplement en changeant la fonction  $\hat{h}_j$  par

$$\hat{h}_j = \frac{1}{\omega_{dj}} e^{-\xi_j \omega_j t} \sin(\omega_{dj} t) \quad (2.55)$$

avec

$$\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (2.56)$$

Le facteur  $\xi_j$  est une fraction de l'amortissement modal visqueux. Notons que l'amortissement dépend de la fréquence, c'est-à-dire qu'à chaque mode  $\omega_j$  correspond une fraction  $\xi_j$ . Mais comme  $\hat{h}_j$  est pratiquement la même pour un amortissement visqueux et hysteretique, alors nous pouvons simuler un amortissement hysteretique simplement en prenant des fractions identiques dans chaque mode.

Finalement, la solution dans le domaine spatial est obtenue en appliquant (numériquement) une transformée de Fourier inverse à l'équation (2.53).

### 2.5.2. Réponse dans le cas de déformation plane

L'algorithme décrit dans la section précédente est particulièrement efficace dans les problèmes en déformations planes, car dans de tels cas la transformée de Fourier spatiale requise dans la dernière étape est unidimensionnelle, et le nombre de degrés de liberté est réduit d'un tiers. Les équations gouvernantes sont identiques à celles de la section précédente, sauf que les composantes « in-plan » et anti-plane sont découplées, ce qui conduit à une expression de la matrice de rigidité de la forme

$$K = k_x^2 A_{xx} + k_x B_x + G \quad (2.57)$$

Pour un matériau en déformation plane, la structure des matrices est telle qu'un changement de signe du nombre d'onde horizontal n'affecte pas les valeurs propres dans l'équation (2.49), mais change simplement le signe des composantes verticales des vecteurs propres, c'est-à-dire

$$\phi_x^{mj}(-k_x) = \phi_x^{mj}(k_x) \quad (2.58a)$$

$$\phi_z^{mj}(-k_x) = -\phi_z^{mj}(k_x) \quad (2.58b)$$

Ce qui nous permet de déterminer les grandeurs uniquement pour les nombres d'onde positifs, les autres étant déterminés par symétrie.

Pour obtenir la réponse dans le domaine spatial, la transformation peut être réalisée numériquement (FFT) ou analytiquement. Le choix du type de transformée dépend du nombre de points pour lesquels nous cherchons la réponse et de leur espacement. Si la réponse dans le domaine des temps est calculée pour un nombre important de points, une transformation directe (analytique) sera plus efficace, mais si par contre, le nombre de points est important, la transformation sera réalisée avec un algorithme de FFT conventionnel.

Pour conclure cette section, nous déduisons de ce qui précède que la formulation temporelle de la TLM est particulièrement efficace lorsque nous cherchons la réponse d'un nombre limité de points, lorsque la charge dynamique ne varie pas beaucoup dans l'espace (c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas beaucoup de nombres d'onde à prendre en compte), lorsque la charge est impulsive (pas de convolution) et lorsque le matériau exhibe peu ou pas d'amortissement. A contrario, la formulation classique fréquence-nombre d'onde est plus efficace lorsque nous cherchons la réponse en plusieurs points, lorsque la forme de la charge est très variable dans l'espace et lorsque ces charges ne varient pas dans le temps (c'est-à-dire charges harmoniques).

Mais l'avantage principal que présente la formulation temporelle sur la formulation fréquentielle est que la première conduit à un problème aux valeurs propres réel, symétrique et avec des matrices bandes, alors que la seconde conduit à un problème aux valeurs propres quadratique avec des valeurs propres complexes et donc un effort de calcul plus important.

## 2.6. Cas particuliers

### 2.6.1. Cas axisymétrique

Tous ces problèmes sont formulés en coordonnées cylindriques, les vecteurs déplacements et contraintes étant les suivants

$$U = \begin{Bmatrix} U_\rho \\ U_\theta \\ U_z \end{Bmatrix} \quad (2.59a)$$

$$S = \begin{Bmatrix} \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} \quad (2.59b)$$

Les champs de déplacements et de contraintes précédents doivent être développés en séries de Fourier en fonction de la coordonnée azimutale  $\theta$ , de façon à séparer les modes symétriques et les modes antisymétriques [21], [22], [30]. Ce qui permet aussi d'éliminer la dépendance du problème par rapport à la coordonnée  $\theta$ . Ce développement s'exprime comme suit

$$U = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( \begin{matrix} U_{\rho,\mu}^s \\ U_{\theta,\mu}^s \\ U_{z,\mu}^s \end{matrix} \right) T_{\mu}^s + \begin{matrix} U_{\rho,\mu}^a \\ U_{\theta,\mu}^a \\ U_{z,\mu}^a \end{matrix} T_{\mu}^a \quad (2.60a)$$

$$S = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left( \begin{matrix} S_{\rho,\mu}^s \\ S_{\theta,\mu}^s \\ S_{z,\mu}^s \end{matrix} \right) T_{\mu}^s + \begin{matrix} S_{\rho,\mu}^a \\ S_{\theta,\mu}^a \\ S_{z,\mu}^a \end{matrix} T_{\mu}^a \quad (2.60b)$$

où  $T_{\mu}^s$  et  $T_{\mu}^a$  sont définis dans les équations (2.62).

Les « exposants »  $s$  et  $a$  exprimant les modes symétriques et anti-symétriques respectivement. La procédure de résolution dans le cas présent est strictement identique à celle du cas de déformation plane [8] avec une différence au niveau de la transformée opérée du domaine spatial vers celui des nombres d'onde, car dans le cas axisymétrique nous utilisons une transformée de Hankel, qui est donnée par les expressions suivantes

$$U^* = a_{\mu} \int_0^{\infty} \rho C_{\mu} \int_0^{2\pi} T_{\mu} U d\theta d\rho \quad (2.61a)$$

$$U = \sum_{\mu=0}^{\infty} T_{\mu} \int_0^{\infty} k C_{\mu} U_{\mu}^* dk \quad (2.61b)$$

et des relations similaires pour les charges. Dans ces équations, la matrice diagonale  $T_{\mu}$  est donnée par [22]

$$T_\mu = T_\mu^s = \begin{bmatrix} \cos(\mu\theta) & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\sin(\mu\theta) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cos(\mu\theta) \end{bmatrix} \quad (2.62a)$$

si les déplacements (et les contraintes) sont symétriques par rapport à l'axe x, ou

$$T_\mu = T_\mu^a = \begin{bmatrix} \sin(\mu\theta) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos(\mu\theta) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sin(\mu\theta) \end{bmatrix} \quad (2.62b)$$

si ces derniers sont antisymétriques. La matrice  $C_\mu$  étant donnée par la relation [22]

$$C_\mu = \begin{bmatrix} \frac{d}{d(k\rho)} J_\mu(k\rho) & \frac{\mu}{k\rho} J_\mu(k\rho) & \cdot \\ \frac{\mu}{k\rho} J_\mu(k\rho) & \frac{d}{d(k\rho)} J_\mu(k\rho) & \cdot \\ \cdot & \cdot & -J_\mu(k\rho) \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

dans laquelle  $J_\mu(k\rho)$  sont des fonctions de Bessel de première espèce et d'ordre  $\mu$ . Le facteur de normalité  $a_\mu$  est donné par

$$a_\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = 0 \\ 2\pi & \\ \frac{1}{\pi} & \text{si } \mu \neq 0 \end{cases} \quad (2.64)$$

Comme nous l'avons fait remarquer dans une section précédente, la matrice de rigidité calculée à l'aide de la TLM d'un sol multicouche en coordonnées cylindriques (problème axisymétrique) est identique à celle exprimée en coordonnées cartésiennes (problème plan). De la même manière, le vecteur déplacements est exprimé par la relation

$$U^*{}^m = F^{mn} P^*{}^n \quad (2.65)$$

Nous aboutissons, en général [22], à des expressions de la forme

$$U_\rho^m = \left( \sum_{l=1}^{2N} \gamma_R^{nl} \phi_x^{ml} \frac{d}{d\rho} f_l^R + \frac{\mu}{\rho} \sum_{l=1}^N \gamma_L^{nl} \phi_y^{ml} f_l^L \right) \begin{Bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{Bmatrix} \quad (2.66a)$$

$$U_\theta^m = \left( \frac{\mu}{\rho} \sum_{l=1}^{2N} \gamma_R^{nl} \phi_x^{ml} f_l^R + \sum_{l=1}^N \gamma_L^{nl} \phi_y^{ml} \frac{d}{d\rho} f_l^L \right) \begin{Bmatrix} -\sin(\mu\theta) \\ \cos(\mu\theta) \end{Bmatrix} \quad (2.66b)$$

$$U_z^m = - \left( \sum_{l=1}^{2N} \gamma_R^{nl} \phi_z^{ml} f_l^R k_l \right) \begin{Bmatrix} \cos(\mu\theta) \\ \sin(\mu\theta) \end{Bmatrix} \quad (2.66c)$$

Les différents coefficients de ces expressions sont donnés dans [22].

### 2.6.2. Cas tridimensionnel

Dans le cas tridimensionnel, et contrairement au cas de déformation plane, nous ne pouvons pas éliminer la dépendance du problème par rapport à la coordonnée horizontale  $y$ . Dans ce cas, nous réécrivons les nombres d'onde  $k_x$  et  $k_y$  sous la forme [24]

$$k_x = k \cos(\theta) \quad (2.67a)$$

$$k_y = k \sin(\theta) \quad (2.67b)$$

Nous aboutissons avec cette notation, à l'équation d'équilibre suivante

$$\begin{Bmatrix} P_x^* \\ P_y^* \\ iP_z^* \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & \cdot \\ A_{yx} & A_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_{zz} \end{bmatrix} k^2 + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & B_{xz} \\ \cdot & \cdot & B_{yz} \\ B_{xz}^T & B_{yz}^T & \cdot \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & \cdot \\ C_{yx} & C_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_{zz} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_x^* \\ U_y^* \\ iU_z^* \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

avec

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & \cdot \\ C_{yx} & C_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{xx} & G_{xy} & \cdot \\ G_{yx} & G_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & G_{zz} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_x & \cdot & \cdot \\ \cdot & M_y & \cdot \\ \cdot & \cdot & M_z \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Les sous-matrices étant données par les expressions suivantes [27]

$$A_{xx} = A_x \cos^2(\theta) + A_y \sin^2(\theta) \quad (2.70a)$$

$$A_{yy} = A_x \sin^2(\theta) + A_y \cos^2(\theta) \quad (2.70b)$$

$$A_{zz} = A_z \quad (2.70c)$$

$$A_{xy} = (A_x - A_y) \sin(\theta) \cos(\theta) \quad (2.70d)$$

$$B_{xz} = B \cos(\theta) \quad (2.70e)$$

$$B_{yz} = B \sin(\theta) \quad (2.70f)$$

$$G_{xx} = G_{yy} = G \quad (2.70g)$$

$$G_{zz} = G_z \quad (2.70h)$$

$$M_x = M_y = M_z = M \quad (2.70i)$$

Pour un matériau isotrope, l'équation caractéristique des modes naturels (problème aux valeurs propres) de la propagation des ondes dans un milieu tridimensionnel horizontalement stratifié est

$$\left( \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & \cdot \\ A_{yx} & A_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_{zz} \end{bmatrix} k^2 + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & B_{xz} \\ \cdot & \cdot & B_{yz} \\ B_{xz}^T & B_{yz}^T & \cdot \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} C_x & \cdot & \cdot \\ \cdot & C_y & \cdot \\ \cdot & \cdot & C_z \end{bmatrix} \right) \Phi = 0 \quad (2.71)$$

Nous cherchons une solution (un vecteur propre) sous la forme

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_x \cos(\theta) & -\phi_y \sin(\theta) \\ \phi_x \sin(\theta) & \phi_y \cos(\theta) \\ \phi_z & . \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

De la même manière que pour le cas de déformation plane, nous interchangeons les coordonnées  $y$  et  $z$  pour avoir la configuration qui présente les variables in-plane en premier suivies des variables anti-planes, ce qui correspond à la forme suivante du vecteur propre

$$\Phi = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & . & -\sin(\theta) \\ . & 1 & . \\ \sin(\theta) & . & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x & . \\ \phi_z & . \\ . & \phi_y \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Ce qui nous permet de réécrire l'équation (2.71) sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & . & -\sin(\theta) \\ . & 1 & . \\ \sin(\theta) & . & \cos(\theta) \end{bmatrix} (Ak^2 + Bk + G - \omega^2 M)\phi = 0 \quad (2.74)$$

Nous aboutissons, ainsi, au problème aux valeurs propres suivant

$$(Ak^2 + Bk + G - \omega^2 M)\phi = 0 \quad (2.75)$$

qui n'est autre que le problème traité en déformation plane.

La suite de la résolution est en tous points identique à celle déjà traitée, avec la différence que dans le cas présent nous réalisons une transformée de Fourier bidimensionnelle.

## 2.7. Conclusion

L'avantage le plus significatif de la TLM par rapport à celle de la matrice de rigidité exacte est que nous pouvons disposer de l'intégration analytique en fonction des nombres d'onde. Car la linéarisation fait disparaître les fonctions transcendentales. Ainsi, les transformées intégrales peuvent être évaluées exactement, ne nécessitant pas de quadrature numérique, et n'étant pas sujet à « aliasing » spatial ou à des erreurs numériques associées à la troncature ou à des oscillations larges et rapides de l'intégrand particulièrement lorsque la source et le receveur sont à la même élévation.

Ainsi, nous remarquons que la procédure de calcul des déplacements avec la TLM est simple, et consiste en les étapes suivantes :

- a). Assemblage de la matrice de rigidité globale ;
- b). Résolution du problème aux valeurs propres ;
- c). choix des modes propres admissibles ;
- d). Evaluation des formules des déplacements données dans la section 4.2.

# Chapitre 3

## REPONSE DYNAMIQUE D'UN DEMI-ESPACE ELASTIQUE MULTICOUCHES

### 3.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi la formulation de la TLM pour le cas de couches multiples reposant sur une base rigide. Lorsque cette base est élastique, c'est-à-dire non infiniment rigide, il est nécessaire d'inclure sa contribution au système global. De plus, la modélisation de la propagation joue un rôle important sur le coût informatique de la méthode dans son ensemble étant donné le nombre de données à traiter et la dimension des domaines considérés. Il est donc nécessaire d'avoir un simulateur numérique qui soit performant tout en générant un coût informatique moindre et qui permette une extension « naturelle » au cas de base élastique.

Les techniques les plus couramment utilisées pour l'étude des milieux multicouche sous l'effet des charges statiques ou dynamiques impliquent des transformations intégrales qui doivent être évaluées numériquement.

Une alternative pour décrire le comportement d'un demi-espace multicouche est de modéliser ce dernier en une couche de grande épaisseur. Cependant, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les grandes épaisseurs des couches introduisent des imprécisions numériques dans la solution. Mais, la TLM introduite dans le chapitre précédent, paraît être une bonne alternative à ces méthodes dont le coût informatique est très élevé. Cependant, il faut trouver des approximations algébriques pour la rigidité du demi-espace et de les assembler directement à la matrice de rigidité globale du système. La procédure de résolution étant identique à celle déjà développée en chapitre 2. Cette approximation est appelée « approximation paraxiale ».

### 3.2. Dérivation de l'approximation paraxiale

Les rigidités « exactes » obtenues par Kausel et Roësset [21] sont des fonctions transcendantes dont l'introduction dans le système polynomial établi grâce à la TLM détruit la structure de ce dernier. Il faut donc donner à ces rigidités une forme polynomiale ce qui est possible à l'aide de l'approximation paraxiale.

Les rigidités exactes d'un demi-espace sont pour le cas anti-plan

$$K = ksG_r \quad (3.1)$$

et pour le cas in-plan

$$K = 2kG_r \left( \frac{1-s^2}{2(1-rs)} \begin{bmatrix} r & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.2)$$

où  $G_r$  est le module de cisaillement du demi-espace [21]. Les paramètres  $r$  et  $s$  sont définis comme suit

$$r = \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{kc_p} \right)^2} \quad (3.3a)$$

$$s = \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{kc_s} \right)^2} \quad (3.3b)$$

avec  $\omega$  fréquence d'excitation et  $c_p$  et  $c_s$  sont les vitesses des ondes de compression et de cisaillement du demi-espace.

En comparant les équations (3.1) et (3.2) pour la demi-espace à l'équation (2.21) pour le cas de couches reposant sur une base rigide, il est clair que la structure n'est pas polynomiale. Ainsi, pour un système multicouches reposant sur un demi-espace élastique, la

contribution de ce dernier, détruit la forme polynomiale du système d'équation obtenu grâce à la méthode de la couche mince.

Donc, pour pouvoir appliquer la méthode de la couche mince au système de couches multiples reposant sur un demi-espace élastique, il est nécessaire de représenter la rigidité réelle du demi-espace par le biais d'une approximation polynomiale dont la structure ressemble à celle des matrices de rigidité des couches supérieures.

Dans le cadre qui nous intéresse, nous voulons une bonne approximation des équations (3.1) et (3.2) pour des ondes se propageant quasiment verticalement, c'est-à-dire pour

$$\sin(\vartheta) = \frac{k_x c}{\omega} \ll 1 \quad (3.4)$$

$\vartheta$  étant l'angle entre la direction de propagation des ondes et la verticale,  $k_x$  nombre d'onde dans la direction  $x$  et  $c$  la vitesse de propagation de l'onde considérée [11].

L'idée est alors de faire un développement de Taylor au voisinage de  $k = 0$ , en gardant les trois premiers termes [41], ce qui donne naissance à de nouvelles équations polynomiales de la forme

$$K(k) \approx K(0) + kK'(0) + \frac{1}{2}k^2K''(0) \quad (3.5)$$

Cette équation correspond à la relation de dispersion suivante

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.6)$$

qui est le développement de Taylor de la relation de dispersion, pour un champ se propageant vers les  $z$  positifs, suivante

$$\frac{ck_z}{\omega} = \left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Cette approximation est appelée « approximation paraxiale », car elle est valide pour des ondes se propageant le long d'un cône d'axe  $z$ , donc proches de la verticale.

L'approximation paraxiale permet donc de décrire la propagation des ondes dans une direction privilégiée. Elle est définie par un ordre d'approximation qui décrit le cône des directions de propagation pour lequel la solution est une bonne approximation.

Cette approximation va donc absorber toutes les ondes se propageant verticalement, et à un degré moindre, celles ayant une certaine inclinaison (faible) par rapport à la verticale. Elle joue un rôle important sur le coût informatique de la méthode, car dans le cas qui nous concerne, l'hypothèse qui consiste à dire que la direction de propagation n'est pas éloignée de la verticale est raisonnable à cause des discontinuités horizontales (stratification), qui tendent à polariser les ondes vers cette direction [11]. Ce qui fait de cette approximation un outil bien adapté à ce type d'applications.

Pour le cas anti-plan, les opérations qu'implique l'équation (3.5) sont simples, alors que le calcul des dérivées pour le cas in-plan est plus long et plus fastidieux.

Dans le cas anti-plan, l'approximation paraxiale de l'équation (3.1) donne

$$K(k) \approx i \frac{G_r \omega}{c_s} - i \frac{G_r c_s}{2\omega} k^2 \quad (3.8)$$

Quant au cas in-plan, l'équation (3.2) devient

$$K(k) \approx i\omega\gamma_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} + G_r \frac{(1-2\alpha)}{\alpha} k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + i \frac{G_r c_s}{2\alpha\omega} k^2 \begin{bmatrix} -(2-\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{(1-2\alpha)}{\alpha^2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

où  $\alpha = \frac{c_s}{c_p}$  est le rapport de la vitesse de l'onde de cisaillement à celle de l'onde de dilatation

L'utilisation de l'approximation paraxiale pour représenter un demi-espace fut d'abord proposée par Clayton et Engquist, et utilisée par Seale [41] dans une formulation en TLM,

d'ailleurs Seale a montré que les deux formulations étaient équivalentes, mais sans indications sur leurs précisions et leur applicabilité.

Ainsi, la forme de l'approximation de la rigidité du demi-espace est similaire aux matrices de rigidité des couches déterminées par la TLM. Effectivement, les termes en  $k^0$  et  $k^2$  sont présents sur la diagonale, alors que ceux en  $k^1$  hors de la diagonale. Ce qui nous permet d'incorporer ces approximations dans la matrice de rigidité globale sans modifier la forme de celle-ci et sans affecter surtout la solvabilité du problème aux valeurs propres. Ainsi, toutes les techniques décrites dans le chapitre précédent restent valables pour le cas présent.

Remarquons que la matrice de rigidité comme fonction de  $k=0$  représente le comportement du demi-espace lorsque les déplacements sont fonction uniquement de la fréquence, c'est-à-dire dans la situation d'ondes stationnaires.

Le terme  $i\omega$  indique que le demi-espace agit comme un dashpot, absorbant l'énergie sous forme de radiation (amortissement).

### 3.3. Caractéristiques de l'approximation paraxiale

L'introduction de l'approximation paraxiale induit des erreurs qu'il faut quantifier et surtout limiter. Dans cette section nous allons étudier l'effet de cette approximation sur les résultats obtenus.

#### 3.3.1. Cas anti-plan

Les équations paraxiales sont, comme nous l'avons déjà vu, basées sur l'approximation du terme  $\left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  qui renvoie à la relation de dispersion de l'équation d'onde (3.6). Ainsi, les modes correspondant à

$$\left| \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} \right| > 1 \quad (3.10)$$

sont des modes exponentiellement décroissants ou modes évanescents pour l'équation d'onde mais deviennent des modes propagatifs pour les équations paraxiales.

Pour des vitesses d'ondes supérieures à la vitesse de l'onde de cisaillement propre du matériau, des ondes évanescents sont obtenues. Ce caractère dissipatif n'est pas physiquement possible pour des demi-espaces non-amortis.

Nous définissons le paramètre sans dimension  $\lambda_0$  comme suit

$$\lambda_0 = \frac{c_s k}{\omega} = \frac{c_s}{c} \quad (3.11)$$

En fonction du terme  $\lambda$ , la rigidité exacte du demi-espace est

$$K(\lambda_0) = \omega \gamma c_s \sqrt{\lambda_0^2 - 1} \quad (3.12)$$

L'approximation paraxiale pour ce cas est

$$K(\lambda_0) = i \omega \gamma c_s \left( 1 - \frac{\lambda_0^2}{2} \right) \quad (3.13)$$

Les parties réelles exacte (équation (2.12)) et approximée (équation(3.13)) de la rigidité du demi-espace sont tracées en figure (3.1), et les parties imaginaires en figure (3.2).

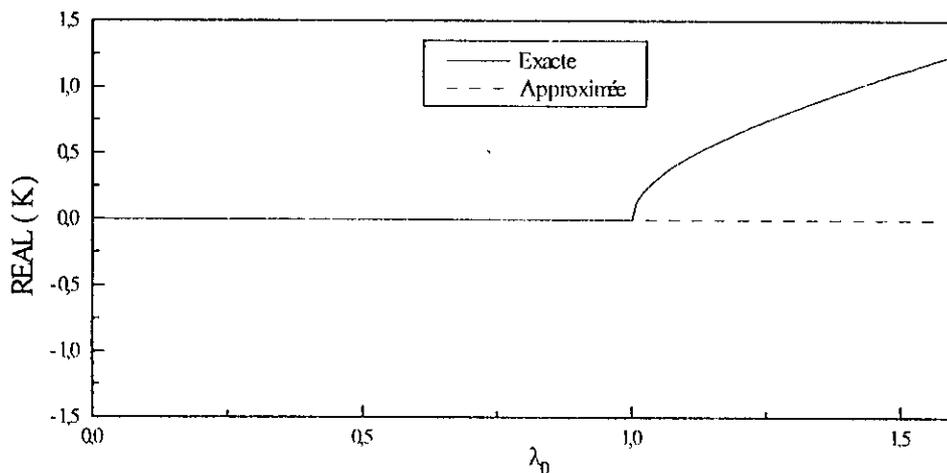


Figure (3.1) : Partie réelle de la rigidité anti-plane.

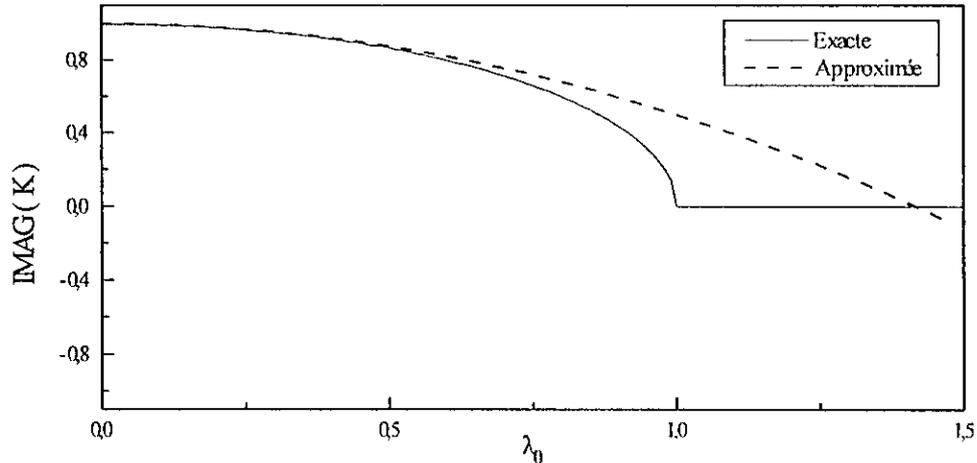


Figure (3.2) : Partie imaginaire de la rigidité anti-plane

La figure (3.1) montre que dans les deux cas, la partie réelle est nulle pour  $\lambda_0 < 1$ , alors que pour  $\lambda_0 > 1$ , la partie réelle de la rigidité exacte est croissante tandis que celle de son approximation demeure nulle. Ce qui montre une concordance entre les deux résultats pour  $\lambda_0 < 1$ , et une divergence pour  $\lambda_0 > 1$ . Le dernier cas étant en dehors du domaine d'application qui nous intéresse. Les mêmes remarques peuvent être faites pour les parties imaginaires en figure (3.2).

Un autre test de la qualité de l'approximation paraxiale, est l'investigation des racines de la matrice de rigidités, en posant le déterminant de celle-ci égal à zéro, nous obtenons les vitesses avec lesquelles les ondes se propagent parallèlement à la surface du demi-espace. Pour le cas anti-plan, la procédure consiste tout simplement à poser  $K(\lambda_0) = 0$ .

L'équation (3.12) implique que  $K(\lambda_0)$  s'annule pour  $\lambda_0 = 1$ . En d'autres termes, les ondes de cisaillement anti-planes se propagent parallèlement à la surface du demi-espace à la vitesse de l'onde de cisaillement propre du sol lui-même. Alors que l'approximation (3.13) donne une racine  $\lambda_0 = \sqrt{2}$ , c'est-à-dire des ondes de cisaillement se propageant approximativement à une vitesse 1.41 fois celle du cas précédent.

Une troisième mesure alternative de la qualité de l'approximation à modéliser le comportement du demi-espace est l'énergie dissipée pendant un cycle de mouvement du système représenté par l'approximation paraxiale. Nous pouvons montrer que l'énergie

moyenne dissipée par un système ayant une matrice de rigidité symétrique  $K$  est donné par la relation suivante [51], [35], [26], la démonstration est donnée en Annexe B1.

$$E_j = \frac{\omega}{2} U_{cf}^T(k) \text{Im}(K_j(k)) U_j(k) \quad (3.14)$$

où  $U_j(k)$  est le vecteur déplacements en surface,  $U_{cf}^T(k)$  est le transposé de son conjugué et  $K_j(k)$  est la matrice de rigidité du demi-espace.

Si nous calculons la densité d'énergie dissipée dans un demi-espace, le signe de celle-ci reflète uniquement le signe de la partie imaginaire de la matrice de rigidité du demi-espace. En particulier, le déterminant de cette dernière doit être positif pour garantir une transmission d'énergie positive pour des déplacements arbitraires. Sous forme matricielle, cette condition s'écrit

$$\text{Det}(\text{Im}(k)) > 0 \quad (3.15)$$

La figure (3.3) montre la variation de l'énergie du système en fonction du facteur  $\lambda_0$ .

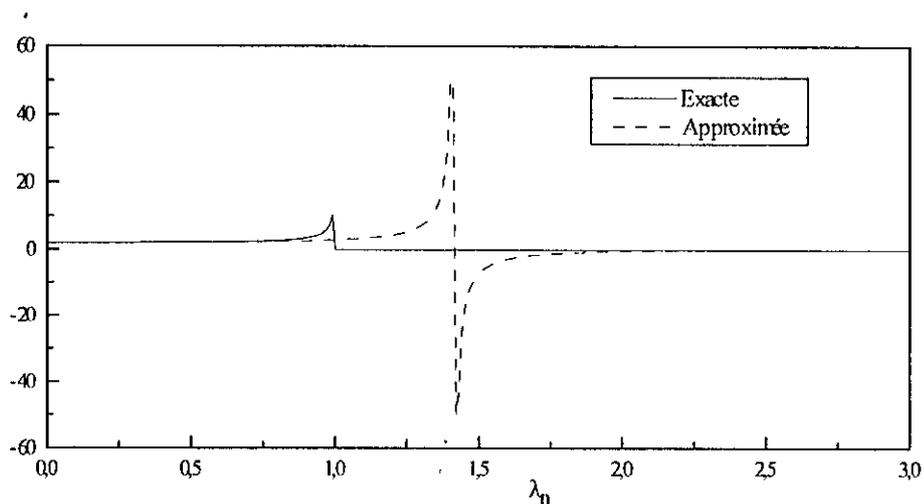


Figure (3.3) : Energie dans un semi-espace élastique.

Pour  $\lambda_0 < 1$ , la partie imaginaire de  $K(\lambda_0)$  dans l'équation (3.12) est

$$\omega \gamma_s \sqrt{1 - \lambda_0^2} \quad (3.16)$$

Cette expression possède une énergie positive concentrée autour de  $\lambda_0 = 1$ .

La partie imaginaire de l'approximation est quant à elle

$$\omega \gamma c_s \left( 1 - \frac{\lambda_0^2}{2} \right) \quad (3.17)$$

Cette approximation suit raisonnablement la solution exacte pour les faibles valeurs de  $\lambda_0$  (c'est-à-dire les faibles valeurs du nombre d'onde), mais se détériore rapidement après  $\lambda_0 = 1$  et exhibe une large dissipation d'énergie négative pour  $\lambda_0 > \sqrt{2}$ . Ainsi, l'approximation paraxiale possède une valeur de  $\lambda_0$  transitoire ( $\lambda_0 = \sqrt{2}$ ) au-delà de laquelle elle exhibe une énergie négative.

### 3.3.2. Cas in-plan

En terme du coefficient  $\lambda_0$ , la matrice de rigidité exacte du demi-espace dans le cas in-plan est

$$K(\lambda_0) = \omega \gamma c_s \lambda_0 \left\{ \frac{1-s^2}{1-rs} \begin{bmatrix} r & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.18)$$

Avec

$$s = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_0^2}} \quad (3.19a)$$

$$r = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\lambda_0^2}} \quad (3.19b)$$

L'approximation paraxiale donne pour ce cas l'expression suivante

$$K(\lambda_0) = \omega \gamma c_s \left\{ i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} + \lambda_0 \frac{(1-2\alpha)}{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2\alpha} \lambda_0^2 \begin{bmatrix} -(2-\alpha) & 0 \\ 0 & \frac{(1-2\alpha)}{\alpha^2} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.20)$$

Pour plus de clarté, nous reproduisons les expressions (3.18) et (3.20) sous la forme suivante

$$K(\lambda_0) = \omega \gamma c_s \begin{bmatrix} K_{11}(\lambda_0) & K_{12}(\lambda_0) \\ K_{21}(\lambda_0) & K_{22}(\lambda_0) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Les figures (3.4) à (3.9) montrent les éléments de la matrice de rigidité en fonction de  $\lambda_0$  pour les expressions exactes et approximées. Ces éléments sont calculés pour un coefficient de Poisson  $\nu$  égal à 0.25 ( $\alpha \approx 0.57735$ ).

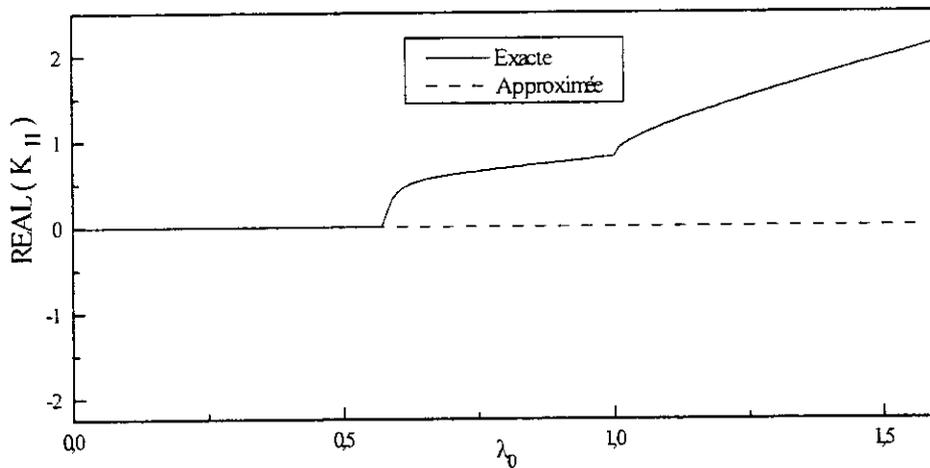


Figure (3.4) : Partie réelle de la rigidité  $K_{11}$

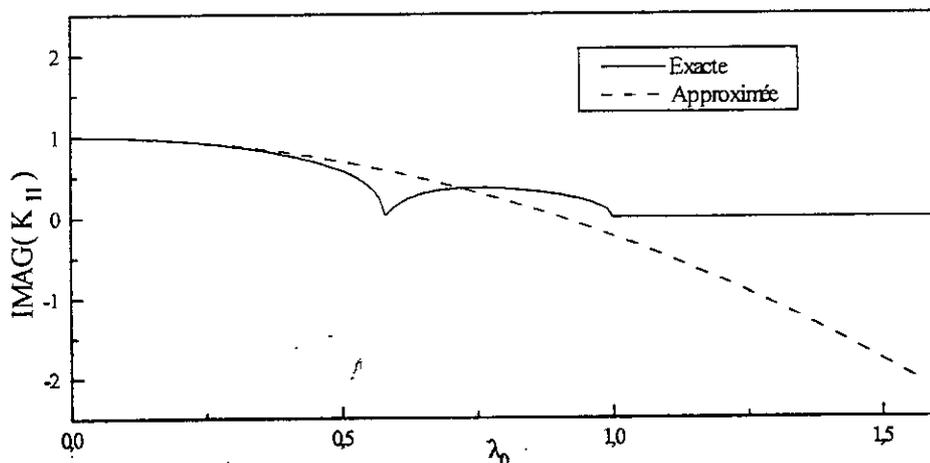


Figure (3.5) : Partie imaginaire de la rigidité  $K_{11}$

Pour  $\lambda_0 < \alpha$ , les rigidités exactes  $K_{11}$  et  $K_{22}$  sont purement imaginaires, lorsque  $\alpha < \lambda_0 < 1$ , ces dernières sont complexes, et finalement pour  $\lambda_0 > \alpha$ , elles sont réelles.

Des figures (3.4) à (3.7), nous remarquons que l'approximation paraxiale approche assez bien les rigidités exactes pour les valeurs de  $\lambda_0$  inférieures à 1, alors que pour des valeurs supérieures à l'unité, cette concordance n'a plus lieu.

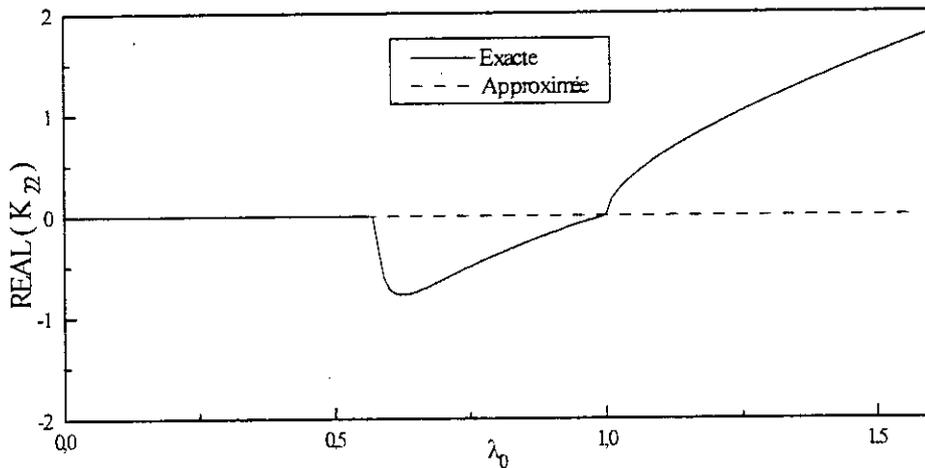


Figure (3.6) : Partie réelle de la rigidité  $K_{22}$

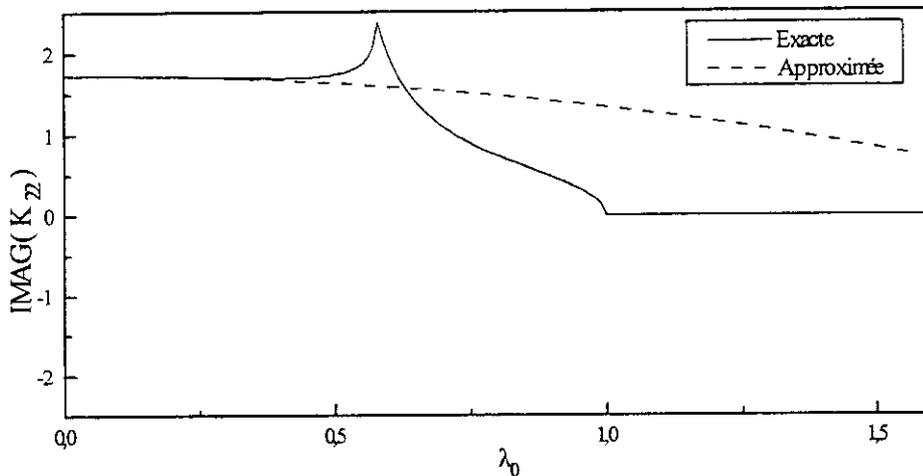


Figure (3.7) : Partie imaginaire de la rigidité  $K_{22}$

Le terme exact de la rigidité  $K_{12}$  est réel pour  $\lambda_0 < 1$ , dans l'intervalle  $\alpha < \lambda_0 < 1$ , il est complexe, alors que pour des valeurs de  $\lambda_0$  supérieures à l'unité, ce terme est, comme pour le

premier cas, encore une fois réel. L'approximation est très proche de la rigidité exacte lorsque cette dernière est réelle sauf pour  $\lambda = \alpha$  et  $\lambda = 1$ . Dans l'intervalle où  $K_{12}$  est complexe, l'approximation, quant à elle est purement réelle, ceci est explicité dans les figures (3.8) et (3.9).

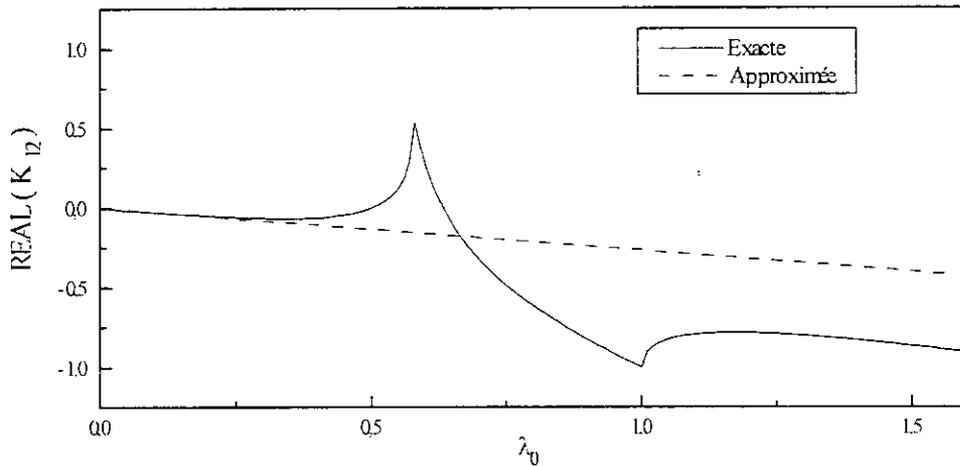


Figure (3.8) : Partie réelle de la rigidité  $K_{12}$

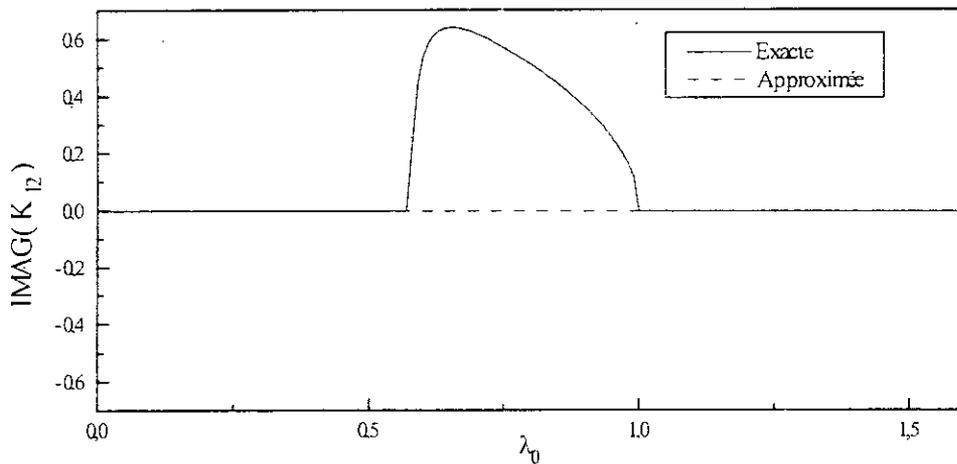


Figure (3.9) : Partie imaginaire de la rigidité  $K_{12}$

Nous examinons à présent les racines de l'équation caractéristique de la matrice de rigidité, correspondant donc aux valeurs qui annulent le déterminant de celle-ci. Pour ce qui est de la rigidité exacte, le déterminant de cette matrice est donné par la relation

$$\text{Det}(K) = 4rs - (1 + s^2)^2 \quad (3.22)$$

qui n'est rien d'autre que la fonction de Rayleigh.

Le fait d'annuler cette expression conduit à l'équation suivante [21]

$$\chi^3 - 8\chi^2 + 8(3 - 2\alpha^2)\chi - 16(1 - \alpha^2) = 0 \quad (3.23)$$

Dont la solution est donnée par

$$\chi = \frac{c_R}{c_s} \quad (3.24)$$

$c_R$  étant la vitesse de l'onde de Rayleigh.

Donc, cette équation admet une solution unique, qui correspond à l'onde de Rayleigh.

L'équation caractéristique de l'approximation paraxiale, quant à elle, est [41]

$$-(2 - \alpha)(1 - 2\alpha)\lambda_0^4 + 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \alpha + 8\alpha^2)\lambda_0^2 + 4\alpha^3 = 0 \quad (3.25)$$

Comme l'équation (3.25) est quadratique en  $\lambda_0^2$ , alors pour chaque valeur de  $\alpha$ , il y a deux racines de  $\lambda_0^2$ . Donc, l'approximation paraxiale introduit une racine supplémentaire, qui est une racine fictive (mode de propagation) dans le problème aux valeurs propres.

Une autre caractéristique de l'équation (3.25) est que pour  $\alpha = 1/2$  ( $\nu = 1/3$ ), le coefficient de  $\lambda_0^4$  s'annule et la seconde racine tend vers l'infini. Pour  $\alpha < 1/2$  ( $\nu > 1/3$ ), le coefficient de  $\lambda_0^4$  est négatif et la seconde racine est aussi négative. Ceci a pour effet de rendre le demi-espace plus rigide. Pour  $\alpha > 0.66178$  ( $\nu < 0.110394$ ), les deux racines de l'équation (3.25) sont complexes, impliquant des modes d'ondes évanescentes. Par conséquent, l'approximation paraxiale se détériore pour les coefficients de Poisson inférieurs à cette valeur. La figure (3.10) montre les racines réelles (vitesse d'onde de Rayleigh) et les racines obtenues par l'approximation paraxiale. Cette figure montre que cette dernière est meilleure pour les petites valeurs de  $\nu$  qu'elle ne l'est pour celles proches du cas incompressible ( $\nu = 0.5$ ). La racine supplémentaire, quant à elle, est décrite en figure (3.11).

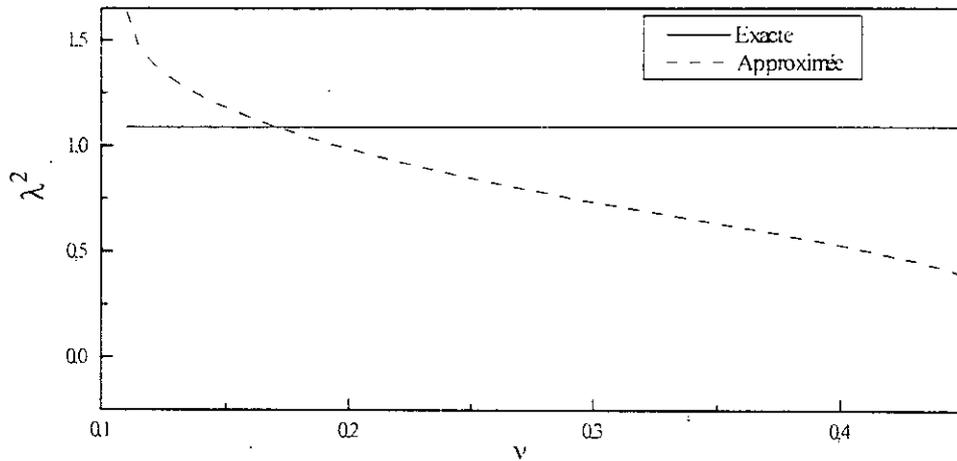


Figure (3.10) : Racines de l'onde de Rayleigh.

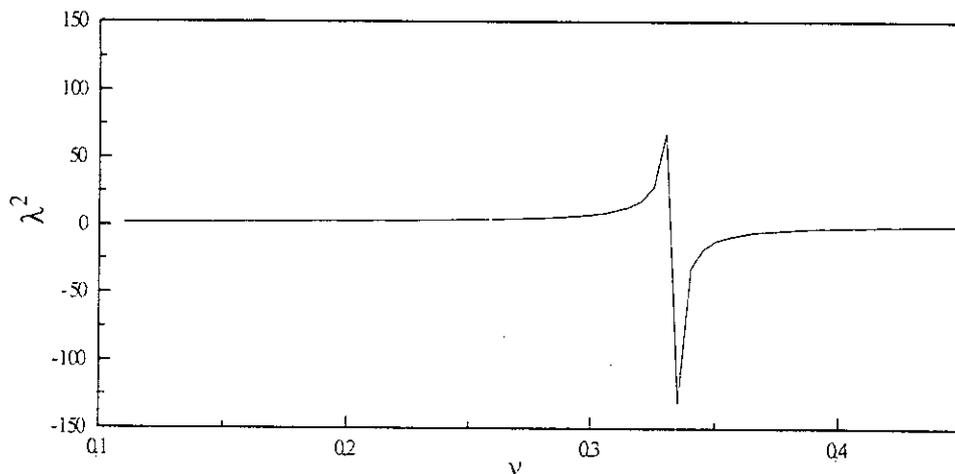
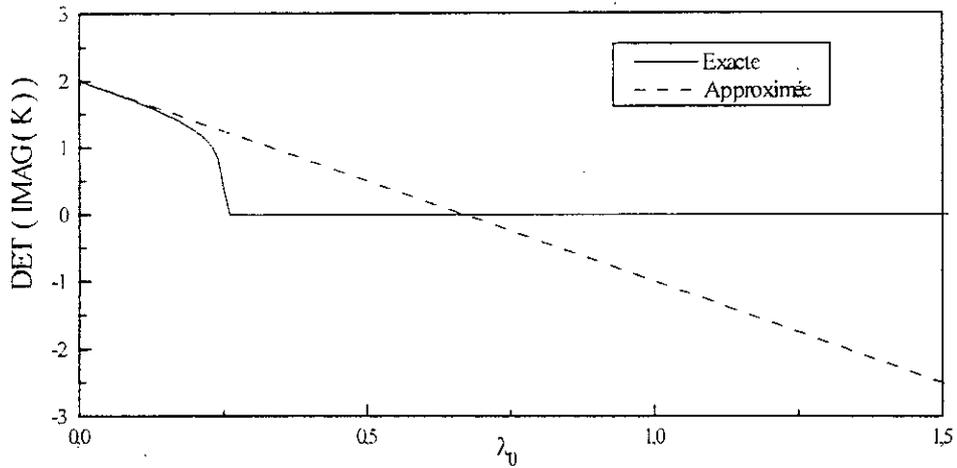
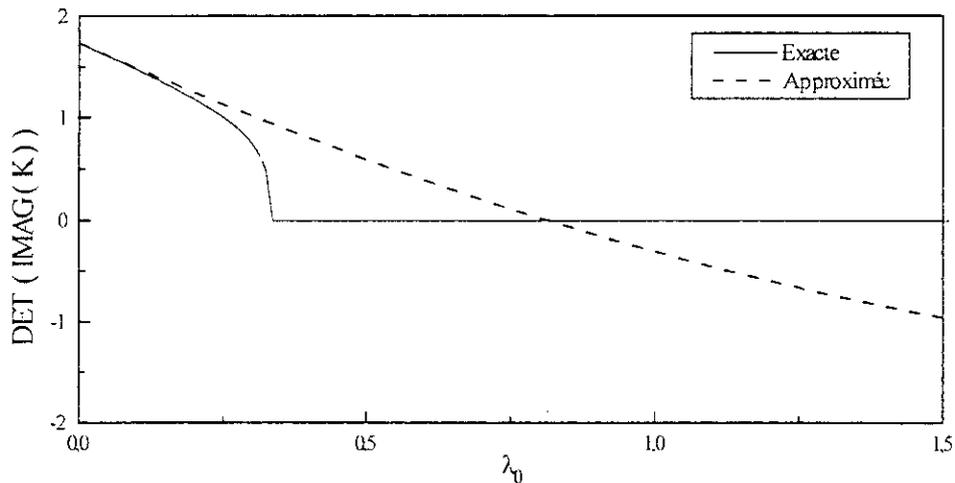


Figure (3.11) : Racine supplémentaire de l'approximation paraxiale

Pour examiner les caractéristiques d'absorption de l'énergie, nous devons examiner le déterminant de la partie imaginaire de la matrice de rigidité. Ce dernier est tracé en figure (3.12) pour la rigidité exacte et son approximation pour  $\nu = \frac{1}{4}$  et en figure (3.13) pour  $\nu = \frac{1}{3}$ . Le comportement de ces courbes est similaire à celui du cas anti-plan.

Ce déterminant est positif jusqu'à  $\lambda_0^2 = \alpha^2$ , valeur à laquelle le nombre d'onde vertical devient imaginaire, et devient nul après.

Figure (3.12) : Déterminant de la partie imaginaire de la rigidité pour  $\nu=1/3$ Figure (3.13) : Déterminant de la partie imaginaire de la rigidité pour  $\nu=1$ 

Finalement, la figure (3.14) montre la relation de dispersion exacte (équation (3.7)) et son approximation (équation (3.6)). Nous remarquons, que la courbe parabolique de l'approximation approche assez bien le cercle de la relation de dispersion lorsque  $k_x$  est petit.

Comme nous venons de le voir dans cette section, l'approximation paraxiale du demi-espace introduit des imperfections dans la formulation entreprise. Pour corriger ces erreurs, nous allons introduire une ou plusieurs couches supplémentaires posées sur le demi-espace. Le comportement du demi-espace avec cette/ces couche(s) est étudié dans la section suivante.

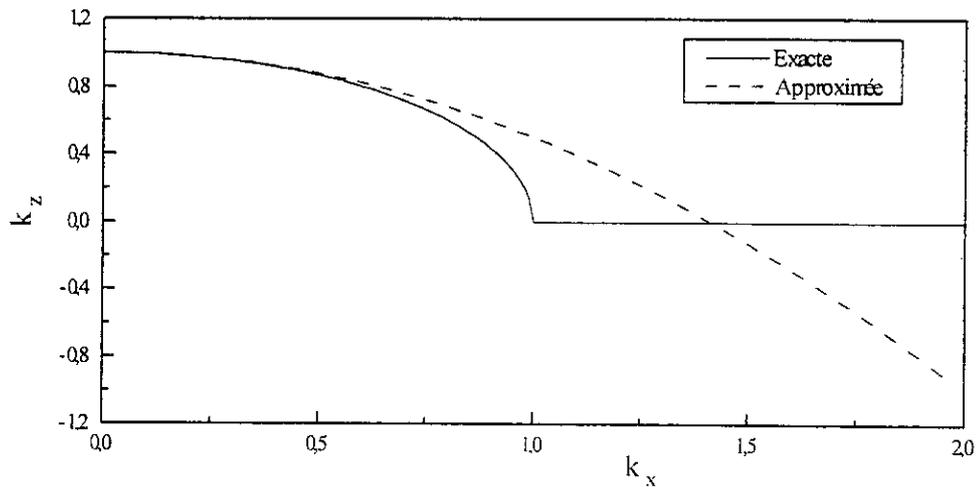


Figure (3.14) : Relation de dispersion exacte et son approximation

### 3.4. Effet d'une ou plusieurs couche(s) posée(s) sur un demi-espace

Lorsqu'une couche d'épaisseur  $H_1$  ayant les mêmes propriétés mécaniques que le demi-espace est interposée sur celui-ci, le système résultant constitue toujours un demi-espace homogène. Cependant, lorsque ce demi-espace est représenté au moyen d'une approximation paraxiale, la combinaison est seulement une représentation approximative du système considéré (couche + demi-espace).

La rigidité effective  $K_{eff}$  du système résultant est la combinaison des rigidités de la couche et du demi-espace. Cette combinaison est réalisée en ajoutant la rigidité du demi-espace à celle correspondant au dernier nœud (interface) de la dite couche [35].

Prenons le cas anti-plan, il suffit, dans le cas présent, d'ajouter la rigidité du demi-espace (équation (3.8)) au dernier élément de la matrice de rigidité des couches. Après manipulation, le résultat est le suivant

$$K_{eff} = K_{ex} \frac{1 + R \coth(k_y H_1)}{R + \coth(k_y H_1)} \quad (3.26)$$

avec les données suivantes

$$k_y = \sqrt{k^2 - (k_0)^2} \quad (3.27)$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\frac{\gamma}{G_r}} \quad (3.28)$$

$K_{ex}$  est la rigidité exacte du demi-espace (équation (3.1)) et  $R = \frac{K_{app}}{K_{ex}}$  est le rapport de la rigidité approximée (calculée avec l'approximation paraxiale) à la rigidité exacte.

Evidemment, si  $R = 1$ , alors  $K_{app} = K_{ex}$ . Cependant, si  $K_{app}$  est donnée par l'équation (3.8) (c'est-à-dire que  $K_{app}$  représente l'approximation paraxiale), alors ce rapport ne sera pas égal à l'unité. En d'autres termes, comme la transformée de Fourier d'une charge concentrée est une constante dans le domaine des nombres d'onde, alors le rapport des rigidités  $F = \frac{K_{ex}}{K_{eff}}$ , représente le rapport des déplacements approximés (calculés à partir de l'approximation paraxiale) aux déplacements exacts du système considéré. Idéalement, ce rapport doit être le plus proche possible de l'unité pour toutes les valeurs du nombre d'onde.

La figure (3.15) montre la valeur absolue du rapport  $F$  pour le cas d'un demi-espace seul (sans couche intermédiaire). La figure (3.16), par ailleurs, montre ce même rapport pour un demi-espace pour lequel nous avons rajouté une couche intermédiaire. Cette étude est réalisée pour plusieurs valeurs de l'épaisseur de la couche. La dite épaisseur est normalisée par la longueur d'onde de cisaillement  $L_s = \frac{c_s}{f}$ , (avec  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ).

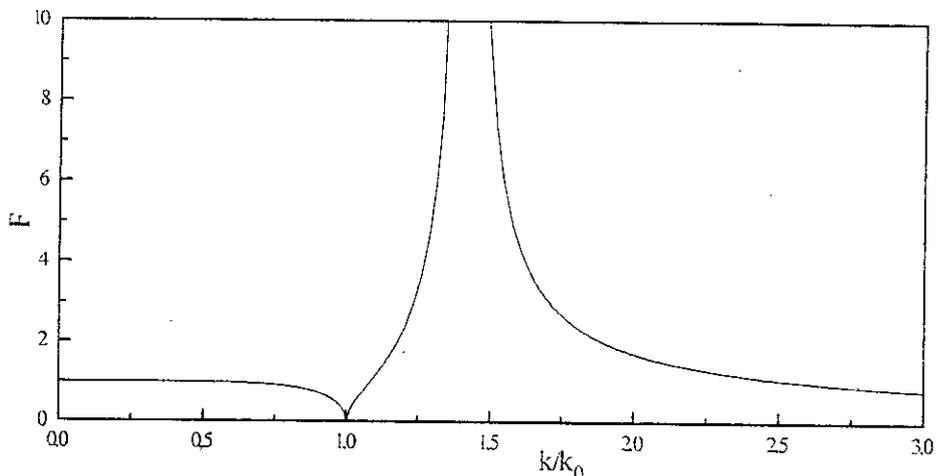


Figure (3.15) : Rapport des déplacements exact et approximé à la surface d'un semi-espace sans couche supérieure

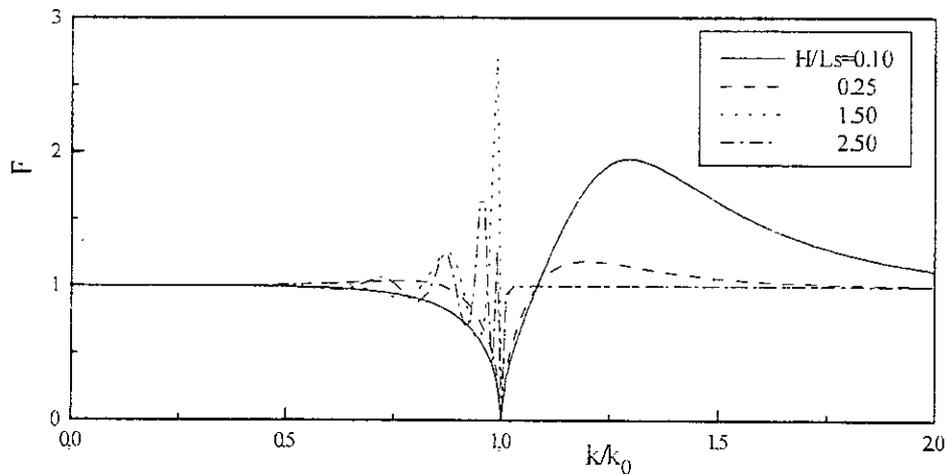


Figure (3.16) : Rapport des déplacements exacts et approximatifs à la surface d'un semi-espace modélisé avec une couche à sa surface.

Il est clair de ces deux figures que la présence de la couche intermédiaire améliore substantiellement les résultats pour l'approximation paraxiale. De plus, cette amélioration est d'autant plus significative pour les grandes valeurs du nombre d'onde, qui représente la région des ondes évanescentes et qui est aussi comme nous l'avons déjà vu la région où cette approximation donne les plus mauvais résultats. Donc, l'utilisation de la couche intermédiaire est très efficace pour supprimer les défauts de l'approximation paraxiale car elle confère à cette dernière un aussi bon comportement pour les grandes valeurs du nombre d'onde que celui exhibé par les petites valeurs.

Nous nous intéressons à présent à l'étude de la dissipation d'énergie, la figure (3.17) montre l'énergie totale moyenne dissipée dans un cycle de mouvement par un système constitué d'une couche reposant sur un demi-espace et soumis à des charges harmoniques. Ce système est modélisé exactement (rigidité exacte) et par une approximation paraxiale. Si l'on compare cette figure à la figure (3.15), il est clair que cette couche intermédiaire est très efficace pour corriger la génération fictive de l'énergie pour les grandes valeurs du nombre d'onde exhibée par l'approximation paraxiale.

La raison en est que ces nombres d'onde correspondent à des ondes non homogènes qui déclinent exponentiellement à l'intérieur de la couche intermédiaire, donc, ces ondes ne 'touchent' pas l'approximation paraxiale. L'expérimentation numérique avec d'autres

rapports  $\frac{H_1}{L_1}$  montrent des améliorations similaires du comportement. Il est à remarquer que cette amélioration est d'autant plus importante que l'épaisseur de la couche est grande.

Sur la base de l'étude faite sur le rapport  $F$  et la dissipation d'énergie, il apparaît que l'utilisation d'une ou plusieurs couches intermédiaires est plus efficace pour la correction des déficiences de l'approximation paraxiale.

Ainsi, en optant pour ce choix, nous pouvons dire que cette approximation est appropriée pour représenter un demi-espace élastique dans la méthode de la couche mince.

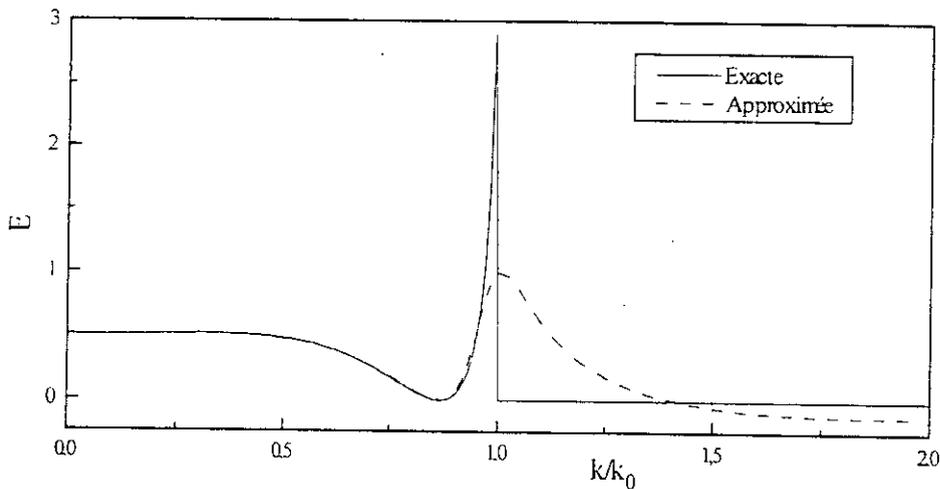


Figure (3.17) : Energie moyenne dissipée dans un cycle pour un semi-espace avec une couche supérieure ( $H/L_s=0.5$ )

### 3.5. Comparaison des comportements des couches sur une base rigide et du demi-espace élastique multicouches

Dans le but de comparer la solution pour un demi-espace avec les résultats pour une couche simple, les déplacements sont déterminés en un point distant de la charge de  $x = 1$  et soumis à une charge impulsive uniformément répartie sur une longueur  $2b = 1$ . Etant donné que la charge est impulsive, sa transformée de Fourier temporelle est constante.

Les caractéristiques du matériau sont  $\lambda = G = h = c_v = \gamma = 1.0$ , et  $\beta = 0.05$ . Les déplacements sont exposés en figures (3.18) à (3.23).

La figure (3.18) et (3.19) expriment les parties réelle et imaginaire du déplacement suivant la direction  $x$  dus à une charge suivant la même direction. Ces figures montrent une concordance parfaite en les deux cas pour les fréquences supérieures à 0.5. Pour les fréquences inférieures à cette valeur, les deux courbes sont assez éloignées dans leur forme et leur amplitude, car le cas des strates exhibe des vibrations alors que celui du demi-espace sa courbe est lisse. Ceci est dû aux réflexions des ondes qui prennent naissance au niveau de la base rigide impliquant ainsi des perturbations au niveau de la surface. Ceci est visible aussi pour l'amplitude qui est plus importante pour le cas des strates car pour le cas du demi-espace, le phénomène de radiation contribue à atténuer les vibrations.

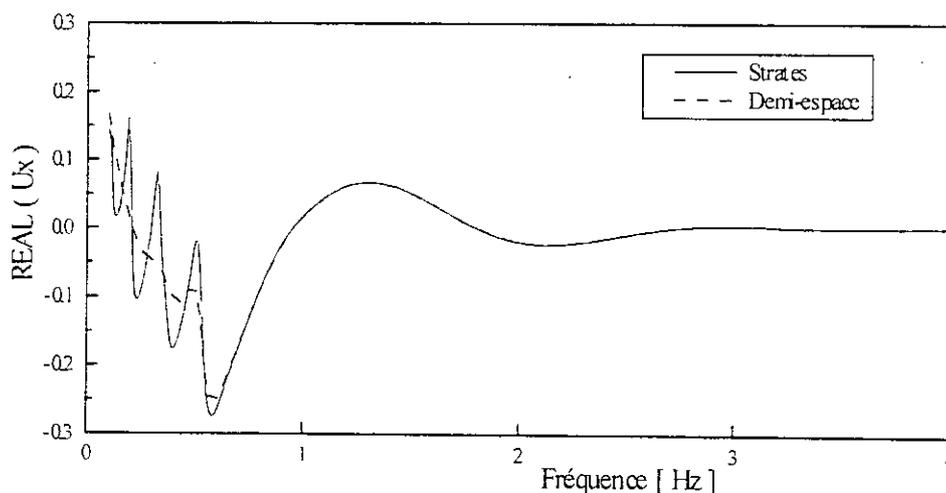


Figure (3.18) : Partie réelle du déplacement suivant  $x$  du à une charge répartie dans la même direction

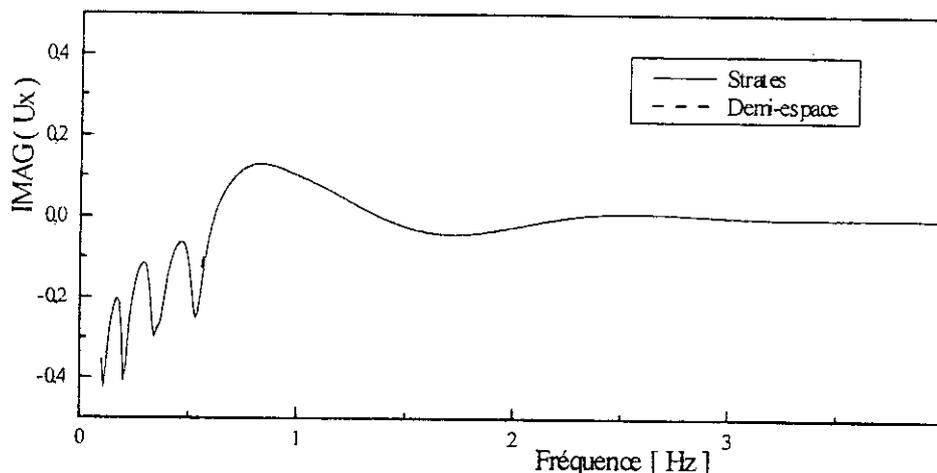


Figure (3.19) : Partie imaginaire du déplacement suivant  $x$  du à une charge répartie suivant la même direction

Pour le cas du déplacement horizontal dû à une force verticale, le décalage entre les deux courbes s'étend sur un intervalle plus important figures (3.20) et (3.21).

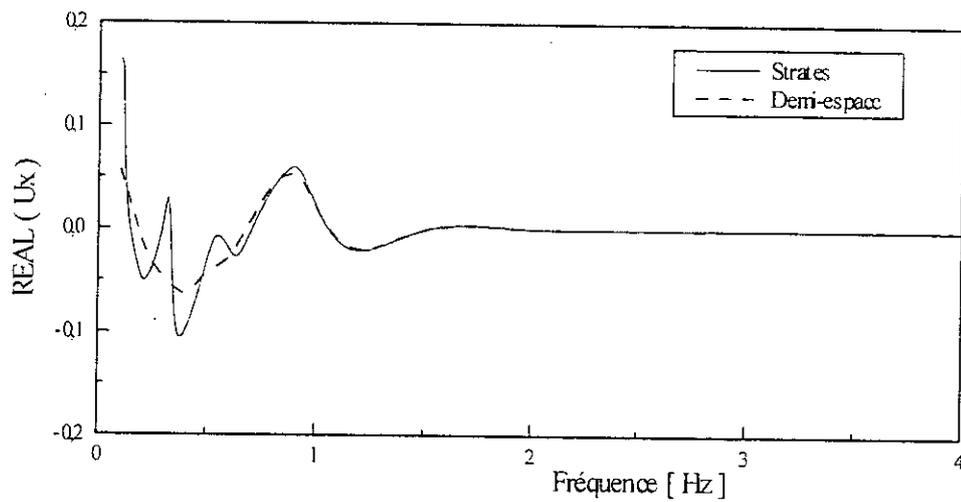


Figure (3.20) : Partie réelle de  $U_x$  due à une charge verticale répartie

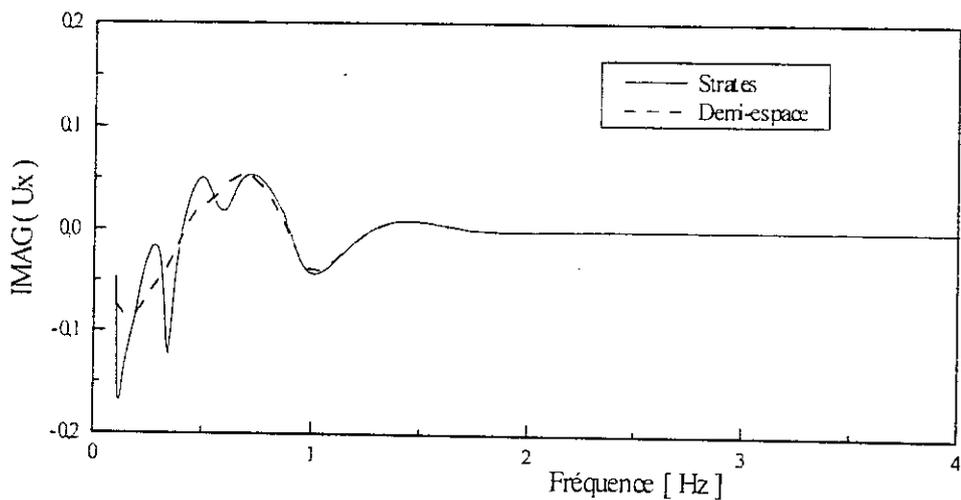
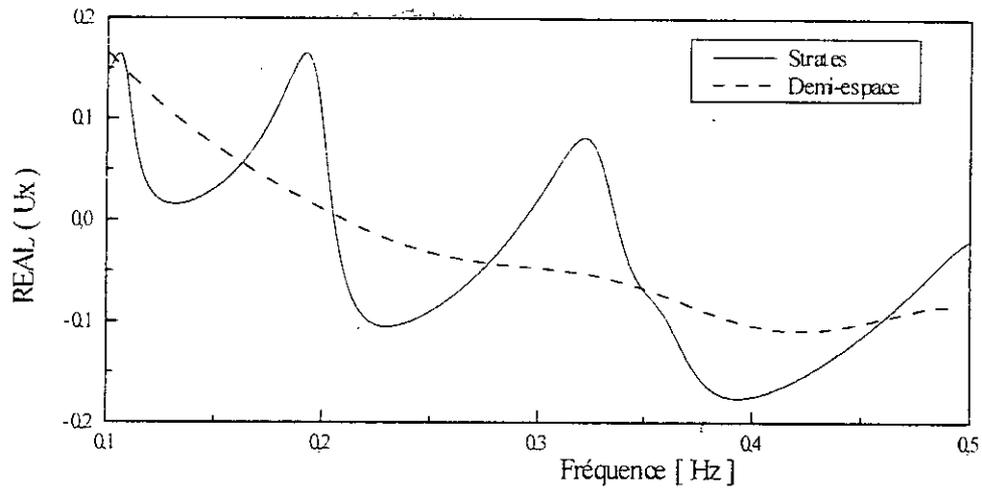
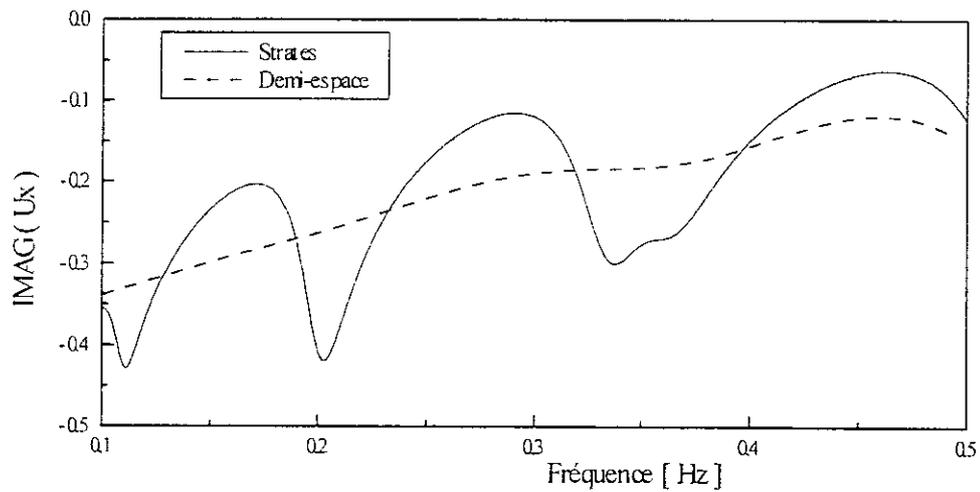


Figure (3.21) : Partie imaginaire de  $U_x$  due à une force verticale répartie

Les figures (3.22) et (3.23) donnent les détails des déplacements en figures (3.18) et (3.19) mais sur l'intervalle des fréquences entre les valeurs 0,1 et 0,5. Ces courbes confirment les conclusions émises pour les figures (3.18) et (3.19).

Figure (3.22) : Partie réelle de  $U_x$  due à une charge horizontaleFigure (3.23) : Partie imaginaire de  $U_x$  due à une charge horizontale

### 3.5.1. Validation de l'approximation paraxiale

Considérons un demi-espace soumis à une charge impulsive anti-plane. La solution en déplacements de ce problème est donnée par la relation suivante [26]

$$U_y(x) = \frac{q_0}{4iG_r} H_0^{(2)}(kx) \quad (3.29)$$

$H_0^{(2)}$  est la seconde fonction de Hankel d'ordre zéro [1], et

$$\kappa = \omega/c_s \quad (3.30)$$

et  $q_0$  étant l'intensité de la charge.

Pour le cas présent, nous considérons les données suivantes  $G_r = 10^6 \text{ KN/m}^2$ ,  $\gamma = 2. \text{ t/m}^3$ ,  $H = 100. \text{ m}$  et le facteur d'amortissement  $\beta = 0.05$ . L'étude sera faite en utilisant la solution exacte (3.29) et la TLM avec des nombres de couches 6, 12 et 14. Les résultats sont exposés en figures (3.24) et (3.25).

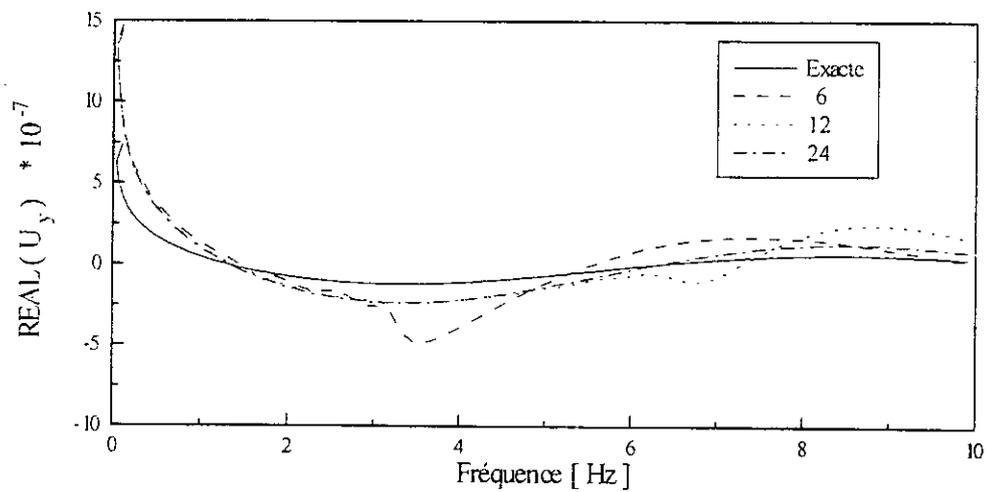


Figure (3.24) : Partie réelle du déplacement anti-plan du à une force impulsive

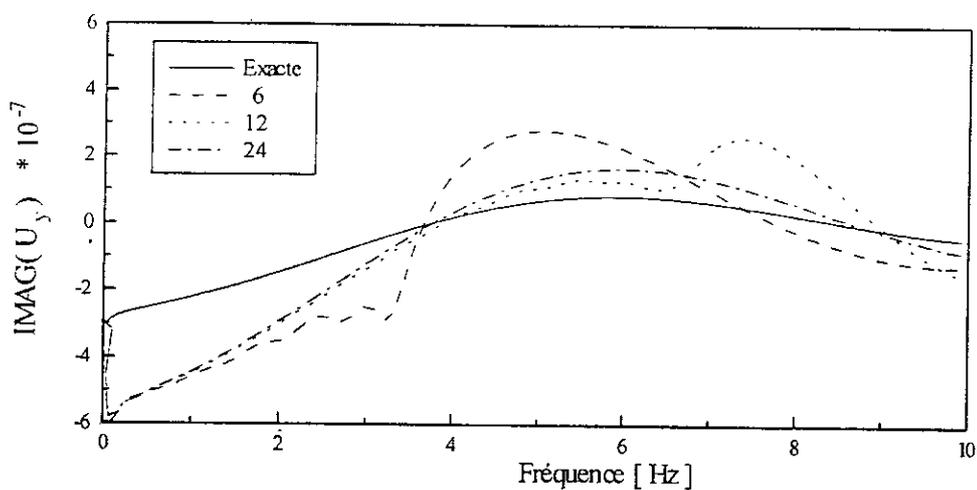


Figure (3.25) : Partie imaginaire du déplacement anti-plan du à une charge impulsive

Comme nous sommes appelés à utiliser des fonctions de Hankel avec des arguments complexes, nous utilisons les développements exposés dans [1].

Nous remarquons des figures (3.24) et (3.25) que l'approximation est assez proche de la solution exacte pour les faibles fréquences sauf au voisinage des fréquences propres du système où nous remarquons des pics pour les solutions approximées qui sont d'autant plus important que le nombre de couches est faible. Pour les fréquences importantes seules les solutions approximées avec un nombre de couches de 24 reste assez proche de la solution exacte.

### 3.6. Comportement statique du demi-espace

La méthode de la couche mince peut être appliquée à la résolution pour les déplacements dues à des charges statiques dans un sol multicouche reposant sur un demi-espace élastique. Nous n'avons pas besoin d'approximer la matrice de rigidité statique du demi-espace, car les fonctions transcendantales se réduisent en des fonctions algébriques en fonction du nombre d'onde lorsque la fréquence est nulle. Nous traiterons les cas anti-plan et in-plan séparément.

#### 3.6.1. Cas anti-plan

##### a). Problème aux valeurs propres

En se référant à [21], la rigidité anti-plane d'un demi-espace avec une fréquence nulle et un nombre d'onde non nul est

$$K = |k|G_r \quad (3.31)$$

où  $G_r$  est le module de cisaillement du demi-espace.

Considérons d'abord le cas des nombres d'onde positifs. Dans ce cas, la rigidité du demi-espace s'écrit simplement

$$K = kG, \quad (3.32)$$

Le problème aux valeurs propres pour le cas anti-plan constitué par (N-1) couches reposant sur un demi-espace élastique devient

$$(Ak_j^2 + Bk_j + C)\Phi_j = 0 \quad (3.33)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices de dimension  $N \times N$ . Les matrices  $A$  et  $C$  sont les mêmes que pour le cas de strates (chapitre 2). Seule la matrice  $B$  diffère du cas de strates (où cette matrice est nulle) du fait que dans le cas qui nous intéresse dans ce chapitre, nous devons ajouter la contribution du demi-espace qui n'est autre que l'expression de l'équation (3.32). D'où l'expression suivante de la matrice  $B$

$$B = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, G_r) \quad (3.34)$$

La matrice  $C$ , quant à elle, est égale à la matrice  $G$  du chapitre 2 car  $\omega = 0$ .

La matrice  $G$  est singulière, ce qui conduit à une caractéristique intéressante du problème aux valeurs propres statique. Considérons le cas où  $k_j = 0$ . Le problème dans l'équation (3.33) se réduit à

$$C\Phi_j = 0 \quad (3.35)$$

Par inspection, nous choisissons un vecteur de dimension  $N$ , satisfaisant à l'équation (3.35), de la forme [41]

$$X_j = E = (1, 1, \dots, 1)^T \quad (3.36)$$

dont tous les éléments sont égaux à l'unité.

Ce vecteur de déplacements égaux représente la contribution du mode rigide du système du sol multicouche.

Le problème quadratique aux valeurs propres de l'équation (3.33) peut être écrit sous la forme d'un problème linéaire aux valeurs propres de dimension  $2N$ , sous la forme

$$k_j \begin{bmatrix} 0 & A \\ A & B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_j \Phi_j \\ \Phi_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_j \Phi_j \\ \Phi_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Nous définissons les matrices suivantes

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A & B \end{bmatrix} \quad (3.38a)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad (3.38b)$$

et la matrice propre

$$Z = \begin{bmatrix} \Phi K \\ \Phi \end{bmatrix} \quad Z_j = \begin{Bmatrix} \Phi_j k_j \\ \Phi_j \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

où  $\Phi$  est une matrice de dimension  $N \times 2N$ , contenant les vecteurs propres et  $K$  une matrice diagonale de dimension  $2N \times 2N$  contenant les valeurs propres. Ce qui nous permet de réécrire l'équation (3.38) sous la forme

$$k_j \bar{A} Z_j + \bar{C} Z_j = 0 \quad (3.40)$$

Puisque les deux matrices  $\bar{A}$  et  $\bar{C}$  sont symétriques, les vecteurs propres satisfont les conditions d'orthogonalisation standard qui sont définies par

$$Z_i^T \bar{C} Z_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \text{constante} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.41)$$

Nous choisissons la condition suivante, écrite sous forme matricielle

$$Z^T \bar{C} Z = -2K^2 \quad (3.42)$$

En définissant la matrice suivante

$$\bar{K} = \text{diag}\left(\frac{G_r}{2}, k_2, k_3, \dots, k_{2N}\right) = K + \frac{1}{2} G_r J \quad (3.43)$$

où  $J = \text{diag}(1, 0, 0, \dots, 0)$ . La seconde condition d'orthogonalité est

$$Z^T \bar{A} Z = 2\bar{K} \quad (3.44)$$

Comme les matrices  $\bar{A}$  et  $C$  ne sont pas singulières, nous tirons de l'équation (3.44)

$$\text{Det}(Z) \cdot \text{Det}(\bar{A}) \cdot \text{Det}(Z) = \text{Det}(2\bar{K}) \neq 0 \quad (3.45)$$

Ainsi,  $\text{Det}(Z) \neq 0$  et  $Z$  est non singulière. Donc,  $Z$  peut être inversée.

### b). Valeurs propres

Les valeurs propres dans le cas présent sont des réels ou des paires de complexes conjugués. Pour le cas anti-plan, le nombre de ces valeurs est  $2N$  :  $(N-1)$  paires de conjugués complexes, une valeur réelle et une valeur nulle. Comme les charges statiques produisent des déplacements réels, les modes complexes n'ont pas de signification physique et doivent être considérés comme des artifices mathématiques. En outre, le mode réel unique est aussi dépourvu de signification physique.

Bien que les modes n'aient pas de sens individuellement, ils doivent être considérés collectivement pour pouvoir avancer une quelconque interprétation. En effet, la contribution

globale de ces modes aux déplacements est un nombre réel, puisque les parties imaginaires des complexes conjugués s'annulent les unes les autres.

Un tracé des valeurs propres  $k_j$  pour un demi-espace homogène est représenté en figure (3.26). Les propriétés du matériau sont  $\gamma = \lambda = G = c_s = 1$  et la couche supérieure a une épaisseur  $H = 1$ . Cette figure contient 12 courbes correspondant à la subdivision de la couche en sous-couches au nombre de 1 à 12 pour chaque.

La figure montre seulement une branche des paires de nombres complexes. Les parties réelles des valeurs propres sont toujours négatives et diminuent en valeurs absolues lorsque les parties imaginaires augmentent. La forme de la courbe des valeurs propres varie avec les propriétés du matériau et les épaisseurs des sous-couches.

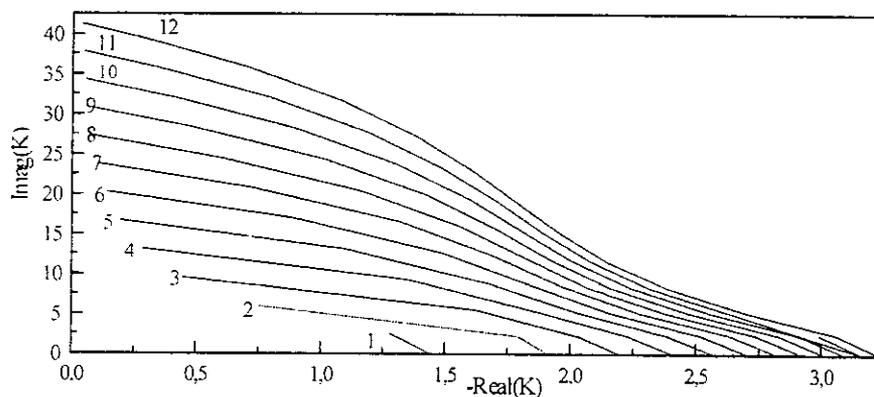


Figure (3.26) : Valeurs propres statiques anti-plans pour un semi-espace

### c). Chargement

Considérons l'équation d'équilibre du problème considéré dans le domaine des nombres d'onde

$$(Ak^2 + Bk + C)U^* = P^* \quad (3.46)$$

sous forme linéaire, cette équation devient

$$\left( k \begin{bmatrix} 0 & A \\ A & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} kU^* \\ U^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P^* \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

ou

$$(\bar{A}k + \bar{C})\bar{U}^* = \bar{P}^* \quad (3.48)$$

En développant  $\bar{U}^*$  en fonction des modes propres, nous aboutissons à l'expression suivante

$$\bar{U}^* = Z\Gamma = \sum_{j=1}^{2N} \gamma_j Z_j \quad (3.49)$$

ou encore

$$U^* = \Phi\Gamma \quad (3.50)$$

où les termes  $\gamma_j$  sont les facteurs de participation et  $\Phi$  la matrice contenant les vecteurs propres. En substituant (3.49) dans (3.48) nous aboutissons à la relation suivante

$$(\bar{A}k + \bar{C})Z\Gamma = \bar{P}^* \quad (3.51)$$

A présent, multiplions par  $Z^T$  la dernière expression, pour aboutir à

$$Z^T(\bar{A}k + \bar{C})Z\Gamma = Z^T\bar{P}^* \quad (3.52)$$

Et finalement, nous appliquons les conditions d'orthogonalité (3.42) et (3.44), pour aboutir aux expressions suivantes

$$(2\bar{K}k - 2K^2)\Gamma = Z^T\bar{P}^* = \Phi^T P^* \quad (3.53)$$

Les facteurs de participation sont donnés par le résultat suivant

$$\Gamma = \frac{1}{2}(kl - K)^{-1} \bar{K}^{-1} \Phi^T P^* \quad (3.54)$$

Ce qui conduit finalement aux expressions suivantes des déplacements

$$U = \frac{1}{2} \Phi (kl - K)^{-1} \bar{K}^{-1} \Phi^T P^* \quad (3.55)$$

Cette dernière équation peut être écrite comme suit

$$U^* = FP^* \quad (3.56)$$

où  $F = \{f_{yy}^{mn}\}$  est la matrice des coefficients de flexibilité à l'interface  $m$  due à des charges unités à l'interface  $n$ . Les éléments de cette matrice sont donnés par

$$f_{yy}^{mn} = \frac{1}{G_r k} + \sum_{l=2}^{2N} \phi_y^{ml} \phi_y^{nl} \frac{1}{2k_l^L (k - k_l^L)} \quad (3.57)$$

où l'indice  $L$  indique le mode de Love.

Le premier terme de l'équation (3.57) est la contribution du mode rigide ( $k_y = 0$ ) à la matrice de flexibilité du système. Notons que c'est l'inverse de rigidité du demi-espace. Nous définissons le coefficient suivant

$$a_l^L = \frac{1}{2k_l^L (k - k_l^L)} \quad (3.58)$$

La flexibilité devient

$$f_{yy}^{mn} = \frac{1}{G_r k} + \sum_{l=2}^{2N} \phi_y^{ml} \phi_y^{nl} a_l^L \quad (3.59)$$

Considérons, à présent, le cas des nombres d'onde négatifs. L'équation (3.31) devient

$$K = -kG_r \quad (3.60)$$

et le problème aux valeurs propres (3.33) pour ce cas est

$$(Ak_j^2 - Bk_j + C)\Phi_j = 0 \quad (3.61)$$

Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont les mêmes que pour le cas précédent.

Le problème (3.61) peut être réécrit de la manière suivante

$$(A(-k_j)^2 + B(-k_j) + C)\Phi_j = 0 \quad (3.62)$$

Nous retrouvons, ainsi, l'équation (3.33) avec comme valeurs propres  $(-k_j)$  et comme vecteurs propres  $\Phi_j$ . Donc, si nous désignons par  $k_j^-$  et  $\Phi_j^-$  les valeurs propres et les vecteurs propres pour  $k < 0$  respectivement, et par  $k_j$  et  $\Phi_j$  les mêmes grandeurs correspondant à  $k > 0$ , la relation entre ces grandeurs est donnée par

$$k_j^- = -k_j \quad (3.63a)$$

$$\Phi_j^- = \dagger\Phi_j \quad (3.63b)$$

Après des manipulations similaires à celles effectuées pour le cas des nombres d'onde positifs, nous aboutissons aux termes de flexibilité suivants

$$f_{yy}^{mn} = -\frac{1}{G_r k} - \sum_{l=2}^{2N} \phi_y^{ml} \phi_y^{nl} b_l^L \quad (3.64)$$

avec

$$b_l^L = \frac{1}{2.k_l^L(k + k_l^L)} \quad (3.65)$$

### 3.6.2. Cas in-plan

#### a). Problème aux valeurs propres

La procédure que nous suivront pour le présent cas est similaire à celle développée dans le cas anti-plan. A partir de [21], la rigidité du demi-espace avec une fréquence nulle et un nombre d'onde non nul est, pour  $k > 0$

$$K = \frac{2kG_r}{(1 + \alpha_r^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r^2 \\ -\alpha_r^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

pour  $k < 0$ , cette expression est

$$K = \frac{2kG_r}{(1 + \alpha_r^2)} \begin{bmatrix} -1 & -\alpha_r^2 \\ -\alpha_r^2 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Avec  $G_r$  module de cisaillement du demi-espace et  $\alpha_r$  le rapport de la vitesse des ondes de cisaillement à celle des ondes de compression du demi-espace. Donc la rigidité s'exprime uniquement en fonction des propriétés du matériau.

Le problème aux valeurs propres pour le cas in plan est

$$(Ak_j^2 + Bk_j + C)\Phi_j = 0 \quad (3.68)$$

Avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont des dimensions  $2N \times 2N$ . La matrice  $B$  est, dans le cas présent, la somme des contributions des strates et du demi-espace.

$$B = B_{Strates} + B_{Demi-espace} \quad (3.69)$$

Commençons d'abord par le cas des nombres d'onde positifs. Pour le cas dynamique ou celui de strates sur une base rigide, comme nous l'avons déjà vu en chapitre 2, les matrices ont les structures suivantes

$$A = \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_z \end{bmatrix} \quad (3.70a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{xz} \\ B_{xz}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70b)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_z \end{bmatrix} \quad (3.70c)$$

Avec l'addition de la contribution du demi-espace pour le cas statique, les structures des matrices  $A$  et  $C$  restent inchangées, seule la structure de la matrice  $B$  est modifiée et devient,

$$B = \begin{bmatrix} B_x & B_{xz} \\ B_{xz}^T & B_z \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

avec

$$B_x = B_z = \text{diag} \left( 0, 0, \dots, 0, \frac{2G_r}{(1 + \alpha_r^2)} \right) \quad (3.72)$$

Nous aboutissons au problème aux valeurs propres suivant

$$\left( \begin{bmatrix} A_x & 0 \\ 0 & A_z \end{bmatrix} k_j^2 + \begin{bmatrix} B_x & B_{xz} \\ B_{xz}^T & B_z \end{bmatrix} k_j + \begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_z \end{bmatrix} \right) \Phi_j = 0 \quad (3.73)$$

Le vecteur propre  $\Phi_j$  a la structure suivante

$$\Phi_j = \begin{Bmatrix} \phi_{xj} \\ \phi_{zj} \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

La matrice  $C$  est singulière, donc lorsqu'on pose  $k_j = 0$ , nous obtenons

$$\begin{bmatrix} C_x & 0 \\ 0 & C_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{xy} \\ \phi_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Il existe deux solutions de l'équation (3.75)

$$\Phi_j = \begin{Bmatrix} E \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ E \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

Il y a donc deux modes rigides et  $k_j = 0$  est une racine double. Les modes rigides actuels sont des combinaisons linéaires de ceux donnés en (3.76), c'est-à-dire

$$\Phi_j = c_1 \begin{Bmatrix} E \\ 0 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ E \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

où les coefficients  $c_1$  et  $c_2$  doivent être déterminés à partir des conditions d'orthogonalité.

En utilisant les mêmes notations que pour le cas anti-plan, le problème linéaire aux valeurs propres est pour ce cas

$$(\bar{A}k_j + \bar{C})Z_j = 0 \quad (3.78)$$

où les relations (3.38), (3.39) et (3.40) sont les mêmes, sauf que les dimensions des matrices dans le problème actuel sont le double de ceux étudiées dans la section précédente.

Les vecteurs propres correspondant aux modes rigides sont

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} E \\ E \end{Bmatrix} \quad (3.79a)$$

$$\Phi_2 = \begin{Bmatrix} E \\ -E \end{Bmatrix} \quad (3.79b)$$

Dans le premier mode, les déplacements dans les directions  $x$  et  $z$  sont égaux, et dans le second, ces derniers sont égaux en magnitude et opposés en signes. Dans le premier cas, les déplacements sont en phase, et dans le deuxième en anti-phase.

Les conditions d'orthogonalité sont

$$Z^T \bar{C} Z = -2K^2 \quad (3.80a)$$

$$Z^T \bar{A} Z = 2\bar{K} \quad (3.80b)$$

### b). Valeurs propres

Les valeurs propres sont au nombre de  $4N$  : deux sont nuls, deux réels et  $(2N-2)$  paires de complexes conjugués. Comme pour le cas anti-plan, les modes réels et complexes sont des artifices mathématiques et n'ont pas de signification physique. Les valeurs propres  $k_j$  pour un système de strates reposant sur un demi-espace élastique sont tracés en figure (3.27) pour un nombre de couches égal à 12. Les valeurs propres anti-planes correspondantes sont aussi tracées sur la même figure. Nous remarquons que les valeurs propres se divisent en deux groupes distincts, la moitié ayant la forme de la courbe anti-plane et l'autre moitié rassemblés au voisinage de la plus petite racine réelle. Les valeurs propres anti-planes se trouvent entre ces deux groupes. Il est à remarquer que les parties réelles des valeurs propres dans le cas in-plane sont aussi négatives.

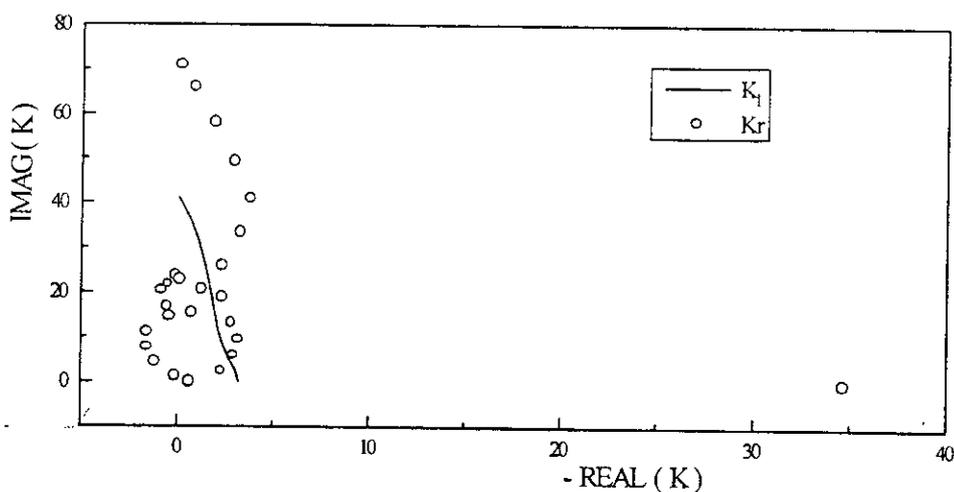


Figure (3.27) : Valeurs propres  $K_r$

### c). Chargement

En suivant la même procédure que pour le cas anti-plan, nous obtenons la matrice de flexibilité suivante pour  $k > 0$

$$F = \frac{1}{2} \Phi (kI - K)^{-1} \bar{K}^{-1} \Phi^T \quad (3.81)$$

Ce qui donne les termes de flexibilité suivantes

$$f_{xx}^{mn} = \frac{1}{2kG_r(1-\alpha_r^2)} + \sum_{l=3}^{4N} \phi_x^{ml} \phi_x^{nl} a_l^R \quad (3.82a)$$

$$f_{xz}^{mn} = \frac{\alpha_r^2}{2kG_r(1-\alpha_r^2)} + \sum_{l=3}^{4N} \phi_x^{ml} \phi_z^{nl} a_l^R \quad (3.82b)$$

$$f_{zz}^{mn} = \frac{1}{2kG_r(1-\alpha_r^2)} + \sum_{l=3}^{4N} \phi_z^{ml} \phi_z^{nl} a_l^R \quad (3.82c)$$

$$f_{zx}^{mn} = \frac{\alpha_r^2}{2kG_r(1-\alpha_r^2)} + \sum_{l=3}^{4N} \phi_z^{ml} \phi_x^{nl} a_l^R \quad (3.82d)$$

Pour le cas des nombres d'onde négatifs, et en poursuivant un cheminement similaire au cas des nombres positifs, nous aboutissons aux expressions suivantes des flexibilité

$$f_{xx}^{mn} = -\frac{1}{2kG_r(1-\alpha_r^2)} - \sum_{l=3}^{4N} \phi_x^{ml} \phi_x^{nl} b_l^R \quad (3.83a)$$

$$f_{xz}^{mn} = -\frac{\alpha_r^2}{2kG_r(1-\alpha_r^2)} - \sum_{l=3}^{4N} \phi_x^{ml} \phi_z^{nl} b_l^R \quad (3.83b)$$

$$f_{zz}^{mn} = -\frac{1}{2kG_r(1-\alpha_r^2)} - \sum_{l=3}^{4N} \phi_z^{ml} \phi_z^{nl} b_l^R \quad (3.83c)$$

$$f_{zx}^{mn} = -\frac{\alpha_r^2}{2kG_r(1-\alpha_r^2)} - \sum_{l=3}^{4N} \phi_z^{ml} \phi_x^{nl} b_l^R \quad (3.83d)$$

### 3.6.3. Déplacements dus à des charges statiques

A partir des termes de flexibilité données par les équations (3.82) et (3.83), nous pouvons obtenir les déplacements dus à des charges statiques pour des strates reposant sur un demi-espace élastique. Nous utilisons la même procédure que celle du chapitre 2. Le vecteur déplacements en coordonnées cartésiennes, dans le domaine des nombres d'onde est,

$$U^* = \begin{Bmatrix} U_x^* \\ U_y^* \\ U_z^* \end{Bmatrix} \quad (3.84)$$

Commençons par calculer les déplacements dus à une charge répartie sur une longueur de (2b), le cas d'une charge concentrée étant obtenu en faisant tendre  $b$  vers zéro.

#### a). Charge répartie suivant la direction $x$

$$U_x^{mn} = \frac{q}{\pi} \left\{ \frac{1}{G_r(1-\alpha_r^2)} J_{11}^R + \sum_{l=3}^{4N} \frac{\phi_x^{ml} \phi_x^{nl}}{2k_l^R} J_{1l}^R \right\} \quad (3.85a)$$

$$U_y^{mn} = 0 \quad (3.85b)$$

$$U_z^{mn} = \frac{q}{\pi} \left\{ \frac{\alpha_r^2}{G_r(1-\alpha_r^2)} J_{21}^R + \sum_{l=3}^{4N} \frac{\phi_z^{ml} \phi_x^{nl}}{2k_l^R} J_{2l}^R \right\} \quad (3.85c)$$

**b). Charge répartie suivant la direction y**

$$U_x^{mm} = 0 \quad (3.86a)$$

$$U_y^{mm} = \frac{q}{\pi} \left\{ \frac{1}{G_r} J_{11}^L + \sum_{l=2}^{2N} \frac{\phi_y^{ml} \phi_y^{nl}}{2k_l^L} J_{1l}^L \right\} \quad (3.86b)$$

$$U_z^{mm} = 0 \quad (3.86c)$$

**c). Charge répartie suivant la direction z**

$$U_x^{mm} = \frac{q}{\pi} \left\{ \frac{\alpha_r^2}{G_r(1-\alpha_r^2)} J_{21}^R + \sum_{l=3}^{4N} \frac{\phi_x^{ml} \phi_z^{nl}}{2k_l^R} J_{2l}^R \right\} \quad (3.87a)$$

$$U_y^{mm} = 0 \quad (3.87b)$$

$$U_z^{mm} = \frac{q}{\pi} \left\{ \frac{1}{G_r(1-\alpha_r^2)} J_{11}^R + \sum_{l=3}^{4N} \frac{\phi_z^{ml} \phi_z^{nl}}{2k_l^R} J_{1l}^R \right\} \quad (3.87c)$$

Les coefficients de ces expressions sont donnés en Annexe B2.

Les termes constants des déplacements dans les équations (3.85), (3.86) et (3.87) représentent la contribution des modes rigides à la solution, c'est-à-dire les déplacements qui auraient résulté à la surface du demi-espace s'il n'y avait de strates sur celui-ci.

La remarque que nous pouvons faire sur les résultats précédents est que ceux-ci sont infinis pour les termes couplés, c'est-à-dire, le déplacement suivant la direction x (z ou y) dû à une charge suivant x (z ou y). Ceci est dû au fait que les termes de flexibilité correspondant sont infinis lorsque  $k$  tend vers zéro. D'où le fait que l'introduction des sous-matrices  $B_x$  et  $B_z$  dans la matrice  $B$  conduit au ce que la matrice de rigidité totale soit singulière, ce qui n'est

pas le cas pour des strates reposant sur un demi-espace élastique et soumis à des charges dynamiques [55].

Ainsi, seuls les termes découplés ont des valeurs finies. Considérons le cas de ces déplacements. Les intégrales à calculer sont [4].

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(kb) \cdot \sin(kx)}{k^2} dk = \begin{cases} \frac{\pi x}{2} & \text{si } 0 < x < b \\ \frac{\pi b}{2} & \text{si } b < x \end{cases} \quad (3.88)$$

### 3.7. Conclusion

La prise en compte de la rigidité exacte du demi-espace élastique détruit la structure particulière de la matrice de rigidité établie par la TLM. Pour contourner cet inconvénient, nous développons la dite rigidité en série de Taylor pour aboutir à une expression algébrique qu'il suffit d'assembler avec les matrices de rigidité des couches. Cependant, cette approximation introduit des erreurs tant au niveau du calcul des déplacements qu'au niveau de l'énergie, où nous observons une énergie négative, particulièrement pour les fréquences importantes. Le fait d'ajouter une ou plusieurs couches sur le demi-espace contribue à diminuer considérablement ces erreurs surtout pour le cas des fréquences supérieures.

## Chapitre 4

# REPONSE DYNAMIQUE DU DEMI-ESPACE ELASTIQUE MULTICOUCHES ANISOTROPE

### 4.1. Introduction

Les matériaux isotropes présentent l'avantage de la simplicité de leur étude. Cependant, beaucoup de matériaux ne sont pas isotropes car ils n'exhibent pas de symétrie par rapport à n'importe quel plan de référence. C'est pourquoi la propagation des ondes dans des milieux anisotropes a trouvé beaucoup d'applications dans plusieurs domaines techniques. Nous pouvons citer les exemples de la géophysique, des ondes acoustiques et des structures composées de matériaux composites. Il n'est pas nécessaire de s'étendre sur ce fait tellement il est évident.

La plupart des sols et des roches naturels possèdent des caractéristiques de déformation anisotropes. Cette anisotropie provient du fait que la structure du sol est intimement liée au processus mécanique ayant lieu durant sa formation, qui implique des systèmes de contraintes anisotropes. Ainsi, par exemple, dépôt d'argile naturelle formé par sédimentation et, par conséquent, consolidation unidimensionnelle sur une longue période acquière une structure caractérisée par des particules orientées dans une disposition horizontale. Cette orientation privilégiée donne à l'argile un axe de symétrie vertical. De la même manière, la structure anisotrope dans les sables provient de l'influence des forces de gravité, alors que dans les roches c'est le résultat de la formation différentielle des minéraux.

Il existe, cependant, beaucoup de difficultés associées à l'analyse des ondes dans un milieu anisotrope en plus de celles rencontrées dans le cas des milieux isotropes. Il serait utile de les revoir afin de clarifier les perspectives du présent chapitre.

L'équation constitutive pour un matériau anisotrope est

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \tag{4.1}$$

Dans laquelle  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$  sont les tenseurs contraintes et déformations et  $C_{ijkl}$  est la matrice constitutive du matériau [6]. Pour la forme la plus générale de l'anisotropie [32], il existe 21 coefficients indépendants. Lorsque nous les comparons aux deux coefficients du cas isotrope, il est clair que ce fait entraîne énormément d'effort supplémentaire.

Du point de vue du comportement, contrairement aux ondes dans un milieu isotrope où trois mouvements d'ondes polarisées orthogonales sont possibles (deux de cisaillement et un de dilatation), la propagation des ondes dans un milieu anisotrope implique trois ondes couplées, chacune possédant des ingrédients des trois composantes. Une autre manifestation de l'anisotropie est que la direction de la propagation ne coïncide pas, en général, avec la normale du front d'onde. Lorsque le milieu considéré est limité par des surfaces, les réflexions multiples contribuent d'avantage aux difficultés dans un problème donné. La technique de résolution d'un problème aux valeurs limites requière la définition des conditions aux limites pour la résolution des équations de mouvement. D'où résultent des équations transcendantes, à partir desquelles les fréquences et les vitesses de phase peuvent être extraites. Pour les milieux stratifiés, aucun dispositif conceptuel additionnel n'est nécessaire, uniquement les conditions requises de continuité des déplacements et des contraintes aux interfaces, en plus des conditions de surface. Cependant, les détails algébriques dans une telle procédure d'analyse sont très encombrants, ce qui complique l'étude analytique d'un tel problème.

Un type particulier d'anisotropie est l'isotropie transverse, qui est caractérisée par cinq constantes élastiques [16], [54]: un module de Young  $E_v$  dans la direction verticale; un module de Young  $E_H$  dans la direction horizontale ( $E_H = na E_v$ ,  $na$  indice d'anisotropie); un coefficient de Poisson  $\nu_{vH}$  pour l'effet de la direction verticale sur la direction horizontale; un coefficient de Poisson  $\nu_{HH}$  pour l'effet de chaque direction horizontale sur l'autre; et un module de cisaillement  $G_{vH} = G_{Hv}$ . Dans un solide isotrope transverse avec un axe vertical  $z$ , tous les plans verticaux sont des plans de symétrie élastique [24], [27], [41], [26]. Donc tous les plans  $x$ - $y$  parallèles au plan  $z = 0$  sont des plans d'isotropie. Le solide exhibe une symétrie radiale élastique telle que toutes les quantités sont indépendantes de  $y$ . C'est de cette propriété que vient la dénomination « isotropie transverse ». Beaucoup de matériaux qui sont formés avec une orientation verticale exhibent une isotropie transverse. Cette catégorie inclue les

métaux formés de pellicules et les sédiments déposés en couches. Effectivement, un solide composé de plusieurs couches minces et isotropes peut être modélisé comme un solide homogène, isotrope transverse [13].

La matrice des constantes élastiques pour l'isotropie transverse est

$$D = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{44} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{44} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{66} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Une autre notation alternative, introduite par Love [32] est

$$D = \begin{bmatrix} A & A-2N & F & \cdot & \cdot & \cdot \\ A-2N & A & F & \cdot & \cdot & \cdot \\ F & F & C & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & L & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & N \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Dans le cas isotrope,  $A = C = \lambda + 2G$ ,  $F = A - 2N = \lambda$  et  $N = L = G$ . Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons la notation (4.3). Les expressions de ces coefficients en fonctions des caractéristiques mécaniques du matériau sont donnés en Annexe C1

## 4.2. Equation de mouvement

La distinction dans la propagation des ondes planes dans des milieux anisotropes avec ceux dans des milieux isotropes est, qu'en général, la solution ne peut être séparée en des ondes de cisaillement pures et de compression pure. En d'autres termes, pour les ondes planes, le mouvement de particule n'est pas polarisé en une onde de compression dans la direction de phase et une onde de cisaillement avec un mouvement perpendiculaire à la phase. Mais pour le cas de matériaux isotropes transverses cette polarisation existe.

Comme pour le cas isotrope, nous cherchons à déterminer des matrices de rigidité algébriques en fonction du nombre d'onde horizontal  $k$ . Donc, nous devons obtenir les éléments de ces matrices en fonction des constantes élastiques anisotropes, la formulation de la détermination des déplacements étant identique à celle déjà établie dans le cas isotrope. En d'autres termes, l'isotropie transverse affecte uniquement les éléments des matrices de rigidité et la formulation pour résoudre les déplacements statiques et dynamiques étant déjà connue.

#### 4.2.1. Mouvement anti-plan

De la même manière que pour le chapitre 2, nous faisons l'hypothèse que les déplacements sont indépendants de la coordonnée  $y$ . Ainsi, les mouvements in-plans et anti-plans sont découplés.

L'équation d'équilibre dans ce cas est [26]

$$\gamma \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} = N \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} \quad (4.4)$$

Considérons que le solide est soumis à une charge harmonique, ainsi le déplacement prend la forme suivante

$$U_y = a e^{i(\omega x - kx - qz)} \quad (4.5)$$

avec  $\text{Im}(q) \leq 0$  pour que les déplacements soient finis lorsque  $z$  tend vers l'infini, et  $\text{Re}(q) \geq 0$  pour satisfaire la condition de radiation.

En remplaçant (4.5) dans (4.4), nous obtenons l'équation algébrique suivante

$$\gamma \omega^2 = N k^2 + L q^2 \quad (4.6)$$

Le résultat de la résolution de cette équation en fonction de  $q$  est donné par

$$q = \frac{\pm i}{\sqrt{L}} \sqrt{Nk^2 - \gamma\omega^2} = \pm iq^* \quad (4.7)$$

En considérant les conditions imposées sur  $q$ , nous arrivons à l'expression suivante

$$U_y = ae^{q^*z} e^{i(\omega t - kx)} \quad (4.8)$$

Pour obtenir la matrice de rigidité, nous calculons la contrainte de cisaillement

$$\tau_{yz} = L \frac{\partial U_y}{\partial z} = Lq^* U_y \quad (4.9)$$

Ainsi, la rigidité anti-plane exacte est

$$K_{yy}(k) = Lq^* = \sqrt{L} \sqrt{Nk^2 - \gamma\omega^2} \quad (4.10)$$

#### 4.2.2. Mouvement in-plan

Le cas in-plan est plus compliqué que celui de la section précédente. L'équation d'onde est donnée dans le cas présent par l'équation matricielle suivante

$$\gamma \ddot{U} - L^T D L U = 0 \quad (4.11)$$

avec

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.12a)$$

$$L^T D L = D_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{xz} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + D_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.12b)$$

Les matrices  $D_{xx}$ ,  $D_{xz}$  et  $D_{zz}$  sont données par les relations suivantes

$$D_{xx} = \begin{bmatrix} A & \cdot \\ \cdot & L \end{bmatrix} \quad (4.13a)$$

$$D_{xz} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cdot & F+L \\ F+L & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.13b)$$

$$D_{zz} = \begin{bmatrix} L & \cdot \\ \cdot & C \end{bmatrix} \quad (4.13c)$$

En remplaçant les expressions (4.12) et (4.13) dans (4.11), nous obtenons le système suivant  
Supposons une onde de la forme

$$U = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} e^{-qz} e^{i(\omega t - kx)} \quad (4.14)$$

Nous aboutissons au système suivant

$$\begin{bmatrix} -\gamma\omega^2 + k^2 A - k^2 q^2 L & -ik^2 q(F+L) \\ -ik^2 q(F+L) & -\gamma\omega^2 + k^2 L - k^2 q^2 C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Les racines de  $q$  peuvent être trouvées en posant le déterminant égal à zéro. Nous aboutissons à l'équation quadratique suivante

$$a^* q^4 + b^* q^2 + c^* = 0 \quad (4.16)$$

avec

$$a^* = CL \quad (4.17a)$$

$$b^* = (F+L)^2 + \gamma\omega^2(C+L) - AC - L^2 \quad (4.17b)$$

$$c^* = (\gamma\omega^2 - A)(\gamma\omega^2 - L) \quad (4.17c)$$

La solution de l'équation (4.16) est donnée par

$$q^2 = \frac{-b^* \pm \sqrt{b^{*2} - 4a^*c^*}}{2a^*} \quad (4.18)$$

Supposons que  $r^2$  soit la racine positive et  $s^2$  la racine négative de l'équation (4.18). Ces valeurs sont équivalentes à celles des équations (1.8a) et (1.8b) (en fait il y a un signe moins entre ces valeurs). A présent, nous pouvons résoudre le système (4.15), pour déterminer les amplitudes  $a$  et  $c$  correspondantes à chacune des racines  $r$  et  $s$ . Enfin, en considérant uniquement les ondes se propageant dans la direction des  $z$  positifs, les déplacements sont donnés par

$$\begin{Bmatrix} U_x \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-krz} & e^{-ksz} \\ \frac{-if}{r} e^{-krz} & \frac{-ig}{s} e^{-ksz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \quad (4.19)$$

avec

$$f = \frac{-\gamma C^2 + A - r^2 L}{F + L} \quad (4.20a)$$

$$g = \frac{-\gamma C^2 + A - s^2 L}{F + L} \quad (4.20b)$$

Les contraintes sont données par

$$\tau_{xz} = L \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \quad (4.21a)$$

$$\sigma_{zz} = F \frac{\partial U_x}{\partial x} + C \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (4.21b)$$

En opérant de la même manière que pour le cas anti-plan, nous obtenons la matrice de rigidité suivante

$$K(k) = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} = \frac{k}{gr - fs} \begin{bmatrix} L(r^2g - s^2f) & L(r^2s + fs - s^2r - gr) \\ F(gr - fs) + Cgf(s - r) & Crs(g - f) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Ces expressions se réduisent à ceux trouvées en annexe A pour le cas isotrope.

### 4.3. Matrices de rigidité algébrique

Nous présentons dans cette section les matrices des couches en utilisant la même procédure que celle des chapitres 2 et 3 [41], [42], [52], [24], [27].

#### 4.3.1. Matrice de rigidité d'une couche

Les matrices de rigidité pour les couches discrètes pour le cas isotrope sont généralisées au cas isotrope transverse. Comme pour le cas isotrope, nous procédons à une linéarisation du champ de déplacements dans la direction verticale

$$U = \frac{z}{h}U_1 + \left(1 - \frac{z}{h}\right)U_2 \quad (4.23)$$

L'équation d'onde sous forme matricielle est

$$W = \gamma\ddot{U} - L^T DLU \quad (4.24)$$

Nous balançons les forces internes en énergie

$$\delta V^T T = \delta V^T S + \int_0^h \delta U^T W dz \quad (4.25)$$

avec  $\delta T = \begin{Bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \end{Bmatrix}$  vecteur des déplacements aux interfaces de la couche,  $T$  vecteur des charges (contraintes) externes et  $S$  vecteur des contraintes aux interfaces.

L'équation (4.23) devient sous forme matricielle

$$U' = NV = \begin{bmatrix} \frac{z}{h} I & \left(1 - \frac{z}{h}\right) I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (4.25) et en considérant des charges et des déplacements harmoniques, nous obtenons la relation de rigidité suivante

$$T^* = (Ak^2 + Bk + G - \omega^2 M)V^* \quad (4.27)$$

Les matrices  $A$ ,  $B$  et  $G$  pour le cas isotrope transverse sont présentés en annexe C1. La matrice  $M$  reste inchangée dans le cas présent, car elle est fonction uniquement de l'épaisseur et de la densité de la couche.

### 4.3.2. Matrices de rigidité du demi-espace

Comme pour le chapitre 3, nous procédons au développement en série de Taylor autour de  $k = 0$  des rigidités exactes. L'approximation paraxiale de la rigidité anti-plane est

$$K_{xy}(k) \approx i\omega\sqrt{\gamma L} - i\frac{N}{\omega}k^2 \quad (4.28)$$

Pour le cas anti-plan, nous aboutissons aux résultats suivants

$$K_{xz} = i\omega\sqrt{\gamma L} + \frac{1}{2}k^2 \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{L}{\gamma}} \left( \frac{(F+L)^2}{(\sqrt{C} + \sqrt{L})^2} - A \right) \quad (4.29a)$$

$$K_{zx} = k \frac{F\sqrt{L} - L\sqrt{C}}{\sqrt{C} + \sqrt{L}} \quad (4.29b)$$

$$K_{zz} = i\omega\sqrt{\gamma C} + \frac{1}{2}k^2 \frac{i}{\omega} \sqrt{\frac{C}{\gamma}} \left( \frac{(F+L)^2}{(\sqrt{C} + \sqrt{L})^2} - L \right) \quad (4.29c)$$

### 3.4. Matrice de rigidité statique du demi-espace

Pour le cas d'un demi-espace soumis à des charges statiques, il n'est pas nécessaire de recourir aux approximations de la rigidité car la rigidité statique est linéaire en fonction du nombre d'onde [41], [42], [26].

Pour le cas anti-plan, la rigidité est donnée par l'expression suivante

$$K_{yy} = |k|\sqrt{NL} \quad (4.30)$$

et pour le cas in-plan, ces expressions sont données par

$$K_{xx} = \frac{L(p_1 b_2 - p_2 b_1)}{(b_2 - b_1)} \quad (4.31a)$$

$$K_{xz} = K_{zx} = \frac{-L[i(p_2 - p_1) + k(b_2 - b_1)]}{(b_2 - b_1)} \quad (4.31b)$$

$$K_{zz} = \frac{C(b_2 p_2 - b_1 p_1)}{(b_2 - b_1)} \quad (4.31c)$$

avec

$$p_j = |k|f_j \quad (4.32)$$

où

$$f_1 = \sqrt{\frac{AC + L^2 - (F + L)^2 + \sqrt{(AC - L^2)^2 + [(F + L)^2 - 2(AC + L)^2]}(F + L)^2}{2LC}} \quad (4.33a)$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{AC + L^2 - (F + L)^2 - \sqrt{(AC - L^2)^2 + [(F + L)^2 - 2(AC + L)^2]}(F + L)^2}{2LC}} \quad (4.33b)$$

et

$$b_j = \text{sgn}(k) \frac{i (A - f_j^2 L)}{f_j (F + L)} \quad (4.34)$$

$\text{sgn}(k)$  indiquant le signe de  $k$ .

Deux problèmes cependant, apparaissent dans le cas présent. D'abord, les termes diagonaux  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  et  $K_{zz}$  détruisent la structure spéciale de la matrice de rigidité globale. Le deuxième problème rencontré est le fait que la matrice de rigidité globale est singulière. Mais ces inconvénients sont similaires à ceux rencontrés pour le cas isotrope, et la généralisation de la méthode de résolution au cas présent est simple.

#### 4.5. Conditions sur les constantes élastiques

Comme la fonction de densité d'énergie de déformation doit être une forme quadratique et positive des déformations, il s'en suit que la matrice  $D$  (équation (4.3)) doit être définie positive. Ceci établit les restrictions suivantes [26]

- a). Toutes les constantes du matériau sont positives.
- b).  $A > N$ .
- c).  $AC > F^2 + NF > F^2$ .

Cependant, ces contraintes ne sont pas suffisantes pour garantir une solution analytique à l'équation (4.18), ou pour prédire la nature de ses racines. En utilisant les expressions (4.17), nous trouvons que l'expression (4.18) est parfaitement carrée seulement si

$$(A - L)(C - L) - (F + L)^2 = 0 \quad (4.35)$$

La satisfaction de cette restriction supplémentaire, ce qui est le cas du solide isotrope, implique que l'existence d'éventuelles racines complexes (pour certaines valeurs de  $k$  et  $\omega$ ) dépend du signe du terme dans l'équation (4.35).

### 3.6. Conclusion

La méthode d'analyse des milieux multicouche décrite aux chapitres 2 et 3 est généralisée au cas du demi-espace multicouche anisotrope. Ce cas introduit plusieurs complications par rapport au cas isotrope, la plus importantes est le fait que les mouvements anti-plans et in-plans sont couplés, ce qui handicape l'application de la TLM. Pour remédier à cet inconvénient, nous nous sommes limité au cas particulier d'anisotropie qui est le cas isotrope transverse pour lequel les mouvements sont découplés est les expressions obtenues sont similaires à celles obtenues dans les chapitres 2 et 3.

## Chapitre 5

# METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

### 5.1. Introduction

Lorsqu'un sol exhibe un entassement de couches horizontales distinctes du fait du processus de sédimentation, la modélisation d'un tel système comme un demi-espace homogène est inadéquate et la présence de structures dans un tel milieu complique d'avantage le problème. Bien que la Méthode des Eléments Finis puisse être appliquée pour résoudre de tels problèmes, cette dernière induit un nombre élevé de variables nécessaires pour une modélisation réaliste du domaine (qui s'étend vers l'infini dans la direction horizontale), même si des techniques plus sophistiquées, tels que des frontières consistantes, sont utilisées, une grande partie du milieu doit être discrétisée, ce qui limite la dimension et le raffinement des problèmes à analyser, ainsi que leur précision. Une approche plus puissante est l'utilisation de la Méthode des Eléments aux Frontières, qui ne nécessite qu'une discrétisation de la frontière [7], [9], [3]. Cependant, cette méthode requière l'utilisation de certaines solutions fondamentales, appelées fonctions de Green, qui sont, en général, très difficiles à obtenir, et ne sont connues que pour quelques cas de géométrie simple [65].

Kausel et Peek [23], [49] ont développé une solution pour les fonctions de Green correspondant au cas de charges dynamiques dans des milieux horizontalement stratifiés, qui apparaît idéale pour ce type de problèmes.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats théoriques de la formulation précédente en Eléments Frontières pour le cas de structure dans un milieu multicouches.

### 5.2. Formulation générale

Nous nous intéressons dans ce qui suit à donner les expressions explicites régissant le comportement de structures rigides dans des milieux stratifiés horizontalement, en utilisant une formulation discrète permettant une réduction considérable du nombre de variables.

### 5.2.1. Cas continu

Considérons un sol multicouches de profondeur finie, avec une cavité ou une excavation comme dans la figure (5.1). L'équation de l'équilibre dynamique s'écrit comme suit

$$\sigma_{ij,j} + f_i - \gamma \ddot{u}_i = 0 \quad (5.1)$$

où la virgule indique une différentiation et  $f_i$  sont les forces volumiques.

Considérons un autre champ de déplacements, noté  $u_i^*$ , qui est de nature virtuelle mais qui satisfait l'équation d'onde (5.1). En multipliant l'équation (5.1) par  $u_i^*$  et en intégrant sur tout le volume nous obtenons

$$\iiint_V (\sigma_{ij} + f_i - \gamma \ddot{u}_i) u_i^* dV = 0 \quad (5.2)$$

Après intégration par partie, cette dernière équation devient

$$\iint_S t_i u_i^* dS - \iiint_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV + \iiint_V (f_i - \gamma \ddot{u}_i) u_i^* dV = 0 \quad (5.3)$$

dans laquelle  $t_{ij} = \alpha_{ij} \sigma_{ij}$  est la contrainte sur la surface  $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ , ( $\alpha_{ij}$  est le cosinus directeur entre la normale à cette surface et le vecteur  $\vec{i}$ ).

En interchangeant les rôles de  $u_i$  et  $u_i^*$ , nous pouvons écrire

$$\iint_S t_i^* u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* dV + \iiint_V (f_i^* - \gamma \ddot{u}_i^*) u_i dV = 0 \quad (5.4)$$

Pour des charges harmoniques, avec une fréquence  $\omega$ , nous avons les données suivantes

$$\ddot{u}_i = -\omega^2 u_i \quad (5.5a)$$

$$\ddot{u}_i^* = -\omega^2 u_i^* \quad (5.5b)$$

Ainsi, nous en concluons

$$\ddot{u}_i u_i^* = u_i \ddot{u}_i^* = -\omega^2 u_i u_i^* \quad (5.6)$$

D'autre part, la symétrie de la matrice constitutive du matériau implique

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} \quad (5.7)$$

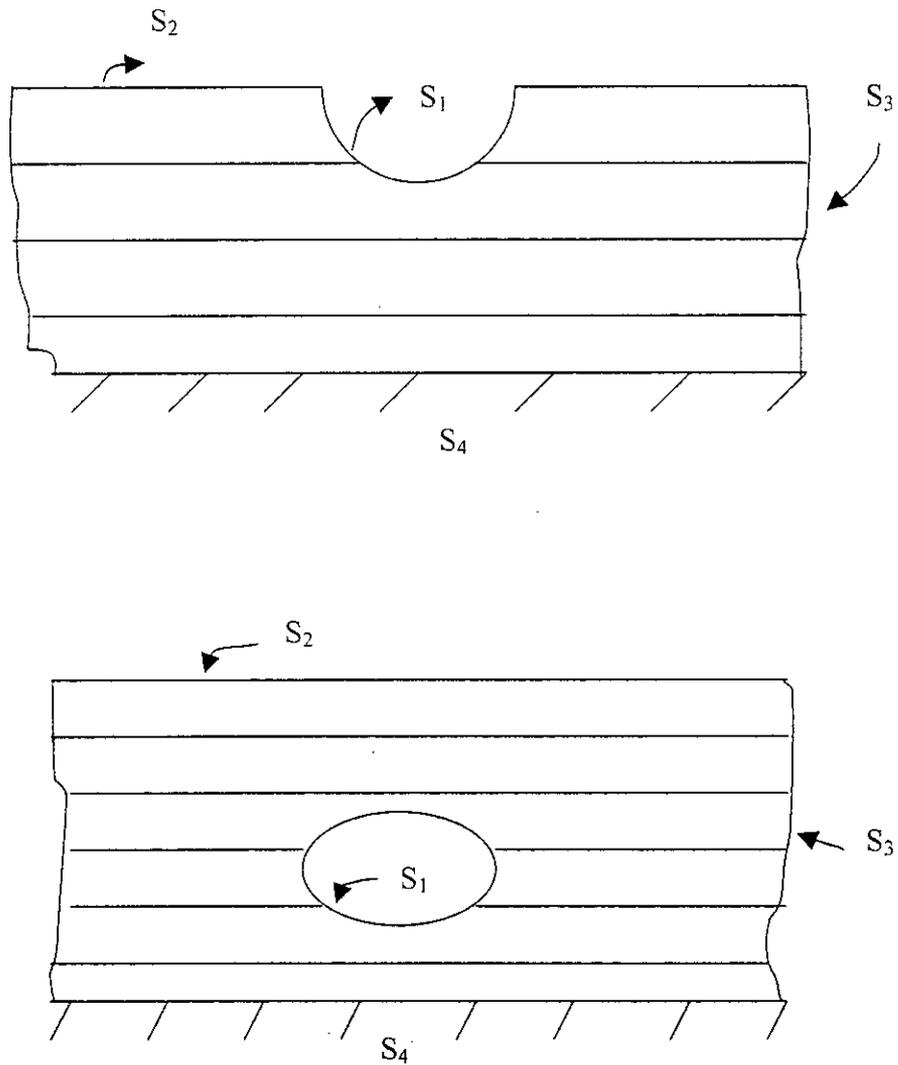


Figure (5.1) : Sol multicouches avec une cavité ou une excavation

Nous obtenons

$$\iiint_V f_{ij}^* u_i dV = u_j(\underline{x}_0) \quad (5.13)$$

Et l'équation (5.11) devient

$$u_j(\underline{x}_0) = \iint_{S_1} t_i u_{ij}^* dS - \iint_{S_1} t_{ij}^* u_i dS \quad (5.14)$$

Cette dernière équation donne le déplacement dans la direction  $j$  au point  $\underline{x} = \underline{x}_0$  dans  $V$  en termes des états actuel et virtuel à l'extrémité  $S_1$ .

### 5.2.2. Cas discret

Les fonctions de Green pour les sols multicouches que nous utilisons dans le présent travail ne sont pas des fonctions exactes pour le solide continu mais des approximations obtenues par discrétisation du champ de déplacements dans la direction de la stratification. Donc, une contrepartie de l'équation (5.14) doit être développée à cet effet, où des formes arbitraires des excavations peuvent être considérées. Les expressions développées dans ce travail seront réduites aux cavités avec des extrémités horizontales et verticales uniquement. D'autre part, les plans horizontaux doivent coïncider avec les interfaces des couches, les murs verticaux, par contre, peuvent avoir des génératrices arbitraires.

Considérons un système discret multicouches (figure (5.2)). Nous isolons une couche de faible épaisseur et de dimensions latérales infinies, et ayant une perforation de forme arbitraire (figure (5.3)). En considérant le principe des déplacements virtuels, qui est satisfait par la solution fondamentale discrète, nous pouvons écrire

$$\iiint_V \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV + \iiint_V \delta u_i (\gamma \ddot{u}_i - f_i) dV - \iint_S \delta u_i t_i dS = 0 \quad (5.15)$$

en substituant  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  et en intégrant par parties, nous arrivons à l'expression

$$\iint_S \delta u_i (\alpha_{ij} \sigma_{ij} - t_i) dS - \iiint_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + f_i + \gamma \ddot{u}_i) dV = 0 \quad (5.16)$$

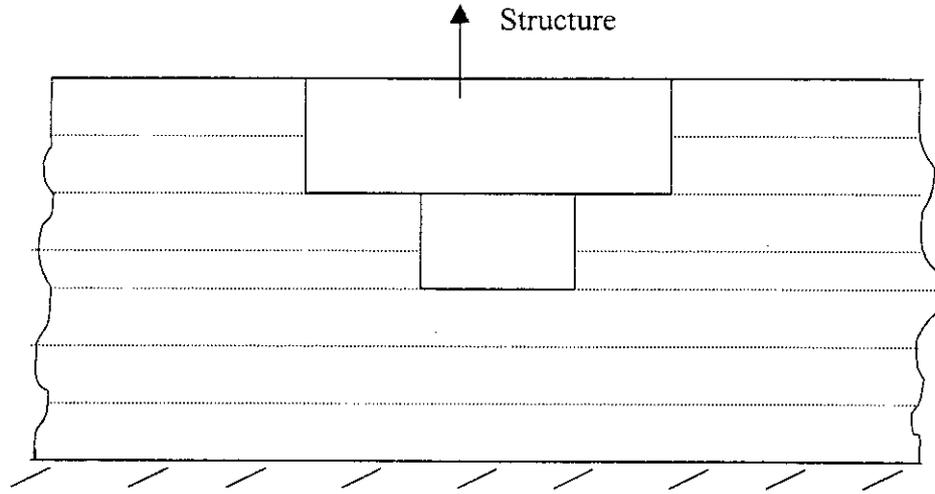


Figure (2.2) : Structure encastrée dans un sol multicouches

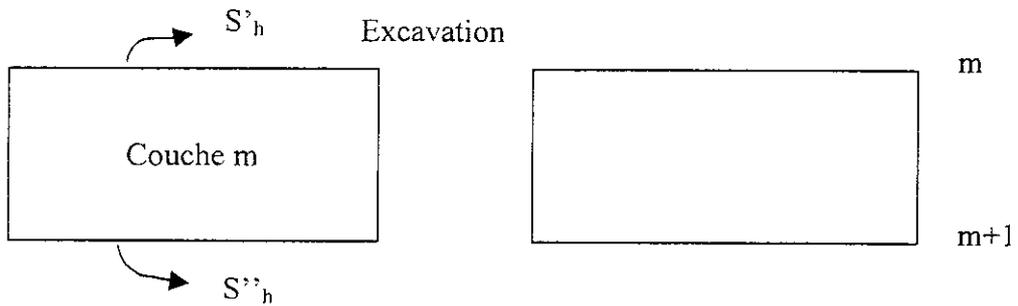


Figure (5.3) : Géométrie d'une couche isolée

Définissons le vecteur des contraintes consistantes aux interfaces sur les surfaces verticales de la couche m

$$T_V = \left\{ \begin{matrix} T_{Vm} \\ T_{Vm+1} \end{matrix} \right\} \quad \text{où} \quad T_{Vm} = \left\{ \begin{matrix} T_{Vx} \\ T_{Vy} \\ T_{Vz} \end{matrix} \right\}_m = \{T_{Vi}\}_m \quad (5.17)$$

ainsi que le vecteur des déplacements aux interfaces

$$V = \left\{ \begin{matrix} u_m \\ u_{m+1} \end{matrix} \right\} \quad \text{où} \quad u_m = \left\{ \begin{matrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{matrix} \right\}_m = \{u_i\}_m \quad (5.18)$$

tel que pour des déplacements arbitraires  $\delta u$ , la relation suivante soit satisfaite

$$\delta V^T T_V = \int_0^h \delta u_i t_i dz = \alpha_{ij} \int_0^h \delta u_i \sigma_{ij} dz \quad (5.19)$$

Ces intégrales sont évaluées sur les surfaces verticales. Ce qui implique l'expression suivante

$$\iint_{S_V} \delta u_i (t_i - \alpha_{ij} \sigma_{ij}) dS = 0 \quad (5.20)$$

$S_V$  étant la surface verticale.

Des équations (5.16) et (5.20), il s'en suit

$$\iint_{S'_h + S''_h} \delta u_i t_i dS = \iint_{S'_h + S''_h} \delta u_i \alpha_{ij} \sigma_{ij} dS - \iiint_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + f_i - \gamma \ddot{u}_i) dV \quad (5.21)$$

Nous définissons aussi le vecteur contraintes consistantes aux interfaces sur les surfaces horizontales dans la couche m

$$T_H = \left\{ \begin{matrix} T_{Hm} \\ T_{Hm+1} \end{matrix} \right\} \quad \text{où} \quad T_{Hm} = \left\{ \begin{matrix} T_{Hx} \\ T_{Hy} \\ T_{Hz} \end{matrix} \right\}_m = \{T_{Hi}\}_m \quad (5.22)$$

et le vecteur des contraintes internes aux interfaces

$$S = \begin{Bmatrix} S_m \\ S_{m+1} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad S_m = \begin{Bmatrix} \tau_{z1} \\ \tau_{z2} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}_m \quad (5.23)$$

tel que pour des déplacements arbitraires  $\delta u$ , nous avons

$$\delta V^T T_H = \delta V^T S - \int_0^h \delta u_i (\sigma_{ij,j} + f_i - \gamma \ddot{u}_i) dz \quad (5.24)$$

Les termes entre parenthèses dans l'intégrales représentent la  $i^{\text{ème}}$  équation d'onde, qui est nulle pour tout point dans la solution exacte, ce qui n'est pas le cas pour la solution discrétisée ici. Donc, les contraintes consistantes aux interfaces  $T_H$  ne sont pas égales aux contraintes internes.

Les équations (5.19) et (5.24) sont utilisées pour calculer les contraintes consistantes aux interfaces à la position  $x$ . Les intégrales sont calculées en développant les déplacements  $\delta u_i$  et  $u_i$  à l'intérieur de la couche en fonction des déplacements aux interfaces  $\delta U$  et  $U$  en utilisant une interpolation linéaire.

En considérant, à présent, des couches avec une excavation (figure (5.3)). Un tel système est, en essence, un ensemble de couches perforées, chacune satisfaisant l'équation (5.16). Il suffit d'assembler les contributions des différentes couches pour former les équations correspondantes pour le système de couches. D'autre part, les contraintes  $T_H$  et  $T_H^*$  sont continues aux interfaces, ainsi, leurs contributions à l'intégrales s'annulent à l'assemblage, sauf pour les régions des plans horizontaux qui sont exposées à l'excavation.

La procédure peut être achevée en discrétisant les surfaces horizontales et verticales en « éléments » ou en « nœuds » dans lesquels les déplacements et les contraintes sont supposées uniformes, ce qui nous conduit à un système d'équations linéaires de la formes [38]

$$\tilde{A}U = \tilde{B}P \quad (5.25)$$

où

Ainsi, en substituant l'équation (5.4) dans l'équation (5.3) et en considérant les relations (5.6) et (5.7), nous arrivons au résultat suivant

$$\iint_S t_i u_i^* dS + \iiint_V f_i u_i^* dV = \iint_S t_i^* u_i dS + \iiint_V f_i^* u_i dV \quad (5.8)$$

En choisissant comme état virtuel le problème des charges dynamiques à l'intérieur du solide sans excavation, et en considérant les conditions aux limites suivantes

$$t_i = t_i^* = 0 \quad \text{sur } S_2 \text{ (surface libre)} \quad (5.9a)$$

$$u_i = u_i^* = 0 \quad \text{sur } S_3 \text{ (extrémités latérales) et } S_4 \text{ (base rigide)} \quad (5.9b)$$

$$f_i = 0 \quad (\text{pas de force volumiques}) \quad (5.9c)$$

nous obtenons

$$\iint_{S_1} t_i u_i^* dS = \iint_{S_1} t_i^* u_i dS + \iiint_V f_i^* u_i dV \quad (5.10)$$

Les termes  $t_i^*$  et  $u_i^*$  dans l'équation (5.10) représentent les fonction de Green pour les forces les forces volumiques  $f_i^*$ . Si nous avons plus d'un état virtuel ( $f_i^*$ ,  $t_i^*$  et  $u_i^*$ ), notés ( $f_{ij}^*$ ,  $t_{ij}^*$  et  $u_{ij}^*$ ) où  $j$  identifie l'état virtuel, l'équation (5.10) devient

$$\iint_{S_1} t_{ij} u_{ij}^* dS = \iint_{S_1} t_{ij}^* u_{ij} dS + \iiint_V f_{ij}^* u_{ij} dV \quad (5.11)$$

Considérons, à présent, le cas d'une charge ponctuelle (concentrée) dans la direction  $j$  appliquée à la coordonnée  $\underline{x}_0$  ( $\underline{x}_0$  vecteur coordonnées).

Les forces volumiques  $f_{ij}^*$  s'expriment comme suit

$$f_{ij}^* = \delta(\underline{x} - \underline{x}_0) \quad (5.12)$$

$U$  est le vecteur des déplacements aux nœuds ;

$P$  est le vecteurs des contraintes aux nœuds ;

$\tilde{A}$  est la matrice dont les éléments  $\tilde{a}_{ij}$  représentent les contraintes au nœud  $j$  dues à une charge unité appliquée au direction  $i$  ; et

$\tilde{B}$  est la matrice dont les éléments  $\tilde{b}_{ij}$  représentent les déplacements au nœud  $j$  dus à une charge unité appliquée au nœud  $i$ .

Nous allons, à présent, établir les expressions conduisant à l'équation (5.25). nous commençons d'abord par établir les expressions explicites des fonctions de Green.

### 5.3. Détermination des fonctions de Green

Les matrices  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  impliquent des intégrales qui peuvent être évaluées avec l'hypothèse que les déplacements et les contraintes réels sont uniformes (constants) dans les plans horizontaux et varient linéairement avec la coordonnée verticale. Des expressions des contraintes en fonctions des déplacements sont indispensables, ainsi que les fonctions de Green associées au problème de charges dynamiques ponctuelles à l'intérieur d'un milieu multicouches.

#### 5.3.1. Fonctions de Green pour les déplacements

Ces fonctions sont données en Annexes A3.2 pour les différentes charges (horizontale, verticale et anti-plane).

#### 5.3.2. Fonctions de Green pour les contraintes

##### a). Contraintes sur les plans verticaux

Le vecteur des contraintes sur une face verticale est donné par la relation

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\lambda + 2G) & \cdot & \cdot \\ \cdot & G & \cdot \\ \cdot & \cdot & G \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & \lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ G & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

En utilisant la relation (5.19) avec l'hypothèse de linéarité des déplacement avec la coordonnée verticale à l'intérieur d'une couche qui se traduit par

$$\begin{cases} \delta u = \xi \delta U_m + (1 - \xi) \delta U_{m+1} \\ u = \xi U_m + (1 - \xi) U_{m+1} \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (5.27)$$

Nous arrivons au résultat suivant

$$T_{i'}^* = \left( A_m \frac{\partial}{\partial x} + D_m \right) U^* \quad (5.28)$$

La matrice  $D_m$  est donnée en Annexe A1.

L'étoile \* indique que c'est une fonction de Green (solution fondamentale).

### b). Contraintes sur les plans horizontaux

Dans cette section, nous utilisons l'équation (5.24) que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\begin{Bmatrix} \delta u_m^T & \delta u_{m+1}^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{Hm} \\ T_{Hm+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta u_m^T & \delta u_{m+1}^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_m \\ S_{m+1} \end{Bmatrix} - \int_0^h \delta u^T w dz \quad (5.29)$$

Avec  $w$  étant l'équation d'onde. Nous avons les données suivantes

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot & \cdot & G \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \cdot & \cdot \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{Bmatrix} G & \cdot & \cdot \\ \cdot & G & \cdot \\ \cdot & \cdot & (\lambda + 2G) \end{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

et

$$w = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc} (\lambda + 2G) & \cdot & \cdot \\ \cdot & G & \cdot \\ \cdot & \cdot & G \end{array} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[ \begin{array}{ccc} G & \cdot & \cdot \\ \cdot & G & \cdot \\ \cdot & \cdot & (\lambda + 2G) \end{array} \right] \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ & \left[ \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & (\lambda + G) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (\lambda + G) & \cdot & \cdot \end{array} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \gamma \omega^2 \left[ \begin{array}{ccc} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right\} \end{aligned} \right. \quad (5.31)$$

Le résultat pour ce cas est

$$T_H^* = \left( -A_m \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{B}_m \frac{\partial}{\partial x} + G_m - \omega^2 M_m \right) V^* \quad (5.32)$$

Ces expressions donnent les contraintes aux interfaces pour  $x \neq 0$ . Au point d'application de la charge ponctuelle ( $x = 0$ ) une singularité se développe qui doit être considérée séparément.

En considérant le cas d'une charge uniformément répartie de longueur  $2b$ , nous retrouvons le cas d'une charge concentrée lorsque  $b \rightarrow 0$ . Dans le travail actuel, nous sommes intéressés par les expressions suivantes

$$\Delta f_{\alpha x} = \int_0^b T_{Hx} dx \quad (5.33a)$$

$$\Delta f_{\alpha y} = \int_0^b T_{Hy} dx \quad \alpha = x, y, z \quad (5.33b)$$

$$\Delta f_{\alpha z} = \int_0^b T_{Hz} dx \quad (5.33c)$$

Dans le cas qui nous intéresse, les termes extra-diagonaux sont nuls. Les résultats combinés pour les interfaces supérieure et inférieure de la  $m^{\text{ième}}$  couche sont donc

$$\begin{Bmatrix} \Delta f_{xx}^m \\ \Delta f_{xx}^{m+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{h}{6} (\lambda + 2G) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{mn}^{-x} \\ a_{m+1,n}^{-x} \end{Bmatrix} \quad (5.34a)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta f_{yy}^m \\ \Delta f_{yy}^{m+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{h}{6} G \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{mn}^{-y} \\ a_{m+1,n}^{-y} \end{Bmatrix} \quad (5.34b)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta f_{zz}^m \\ \Delta f_{zz}^{m+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{h}{6} G \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{mn}^{-z} \\ a_{m+1,n}^{-z} \end{Bmatrix} \quad (5.34c)$$

où  $a_{mn}^{-x}$ ,  $a_{mn}^{-y}$  et  $a_{mn}^{-z}$  sont des représentation symboliques des éléments de la matrice inverse de A, c'est-à-dire

$$A_x^{-1} = \{a_{mn}^{-x}\} = \phi_x \phi_x^T \quad (5.35a)$$

$$A_y^{-1} = \{a_{mn}^{-y}\} = \phi_y \phi_y^T \quad (5.35b)$$

$$A_z^{-1} = \{a_{mn}^{-z}\} = \phi_z \phi_z^T \quad (5.35c)$$

Ainsi, les équations précédentes capturent complètement la singularité à l'origine.

## 5.4. Evaluation des intégrales aux frontières

L'équation (5.25) requière l'évaluation de deux types d'intégrales distinctes : dans le terme de gauche, ces intégrales sont de type (contraintes virtuelles) x (déplacements réels), alors que dans le terme de droite, ces intégrales sont de type (déplacements virtuels) x (contraintes réelles). Celles-ci seront calculées dans ce qui suit.

### 5.4.1. Charge virtuelle hors de l'élément

Pour l'intégration sur un élément qui ne coïncide pas avec la localisation des charges ponctuelles virtuelles, la méthode la plus expéditive est de prendre simplement le produit de la

longueur de l'élément et la valeur de la fonction sous le signe intégrale évaluée au centre de cet élément. Ceci est basé sur l'hypothèse que les déplacements et les contraintes virtuels varient uniformément telles que leurs valeurs moyennes sur l'élément soient approximativement égales à la valeur au centre du dit élément.

Pour un élément horizontal de longueur  $2a$ , nous avons les expressions suivantes

$$\int_{2a} t_{ij}^* u_i dx = \left( \int_{2a} t_{ij}^* dx \right) u_i = (2a) \tilde{t}_{ij}^* u_i \quad (5.36)$$

$$\int_{2a} u_{ij}^* t_i dx = \left( \int_{2a} u_{ij}^* dx \right) t_i = (2a) \tilde{u}_{ij}^* t_i \quad (5.37)$$

où  $\tilde{u}_{ij}^*$  et  $\tilde{t}_{ij}^*$  sont respectivement les valeurs moyennes des déplacements et des contraintes sur l'élément horizontal de longueur  $2a$ . Et puisque la charge virtuelle n'est pas sur l'élément considéré, les déplacements et les contraintes sur un tel élément sont monotones, les valeurs moyennes peuvent être approximées par les valeurs au centre de l'élément.

Pour ce qui est des éléments verticaux, et en considérant le fait de les déplacements et les contraintes réels varient linéairement suivant la coordonnée  $z$ , nous arrivons au résultats suivants

$$\int_0^h t_{ij}^* u_i dz = \left[ \left( A_m \frac{\partial}{\partial x} + D_m \right) V^* \right]^T \begin{Bmatrix} u_m \\ u_{m+1} \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\int_0^h u_{ij}^* t_i dz = \left\{ \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & . & . & 1 & . & . \\ . & 2 & . & . & 1 & . \\ . & . & 2 & . & . & 1 \\ 1 & . & . & 2 & . & . \\ . & 1 & . & . & 2 & . \\ . & . & 1 & . & . & 1 \end{bmatrix} V^* \right\} \begin{Bmatrix} t^m \\ t^{m+1} \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

5.4.2. Charges virtuelle à l'intérieur de l'élément

Lorsque le chemin d'intégration contient une charge virtuelle, la fonction sous le signe intégrale exhibe une singularité qui doit être levée en isolant un petit élément au voisinage de la charge. Pour la solution discrète considérée, une considération particulière est donnée au points d'intégration sur la même verticale que la charge virtuelle (i.e., les points ayant la même coordonnée x). Dans les sections suivantes, nous allons évaluer ces intégrales pour les cas qui nous intéressent.

a). Contraintes virtuelles x Déplacements réels

Nous commençons par l'intégration sur un élément vertical. Lorsque la charge virtuelle existe sur l'élément considéré, une singularité apparaît pour les points situés sur la même vertical que le point source. Soit le secteur de largeur a considéré en figure (5.2), Ce secteur est limité par deux plans verticaux et deux autres horizontaux. Nous nous intéressons aux intégrales sur les plans verticaux. Pour éviter la singularité sue l'axe, nous découpons un secteur d'épaisseur ε, la valeur de l'intégrale est donnée par

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_1} t_{ij}^* u_j dz \tag{5.40}$$

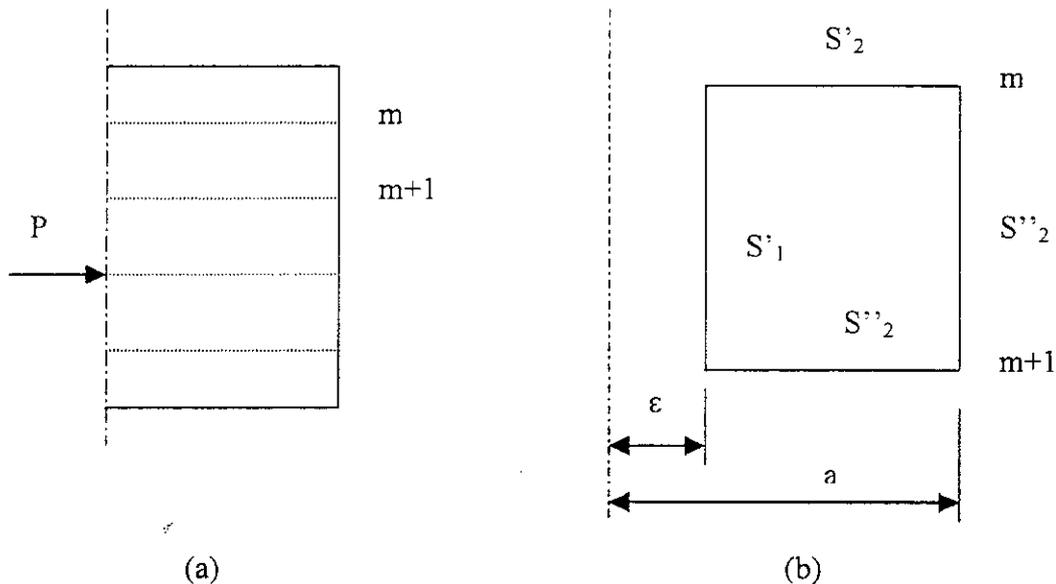


Figure (5.4) : Configuration des éléments contenant une charge virtuelle

En appliquant le principe des déplacements virtuels en inversant les rôles des champs virtuel et réel, et en considérant le fait que les champs réels et virtuels sont linéaire suivant la coordonnée  $z$  et que le champs réel est constant suivant la coordonnée  $x$ , nous aboutissons au résultat suivant

$$\int_{S_j^*} t_{ij}^* u_i dz = \begin{Bmatrix} F_m^* \\ F_{m+1}^* \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_m \\ u_{m+1} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

avec

$$\begin{Bmatrix} F_m^* \\ F_{m+1}^* \end{Bmatrix} = -A_m \frac{\partial}{\partial x} V^* \Big|_{x=\pm a} - D_m^T V^* \Big|_{x=\pm \varepsilon} + (G_m - \omega^2 M_m) \int_{\pm \varepsilon}^{\pm a} V^* dx \quad (5.42)$$

En ce qui concerne l'élément horizontal, nous utilisons l'équation (5.42) et en suivant le même raisonnement précédent nous aboutissons au résultat suivant

$$\begin{Bmatrix} F_m^* \\ F_{m+1}^* \end{Bmatrix} = -2A_m \text{Diag} \left( \frac{\partial}{\partial x} V^* \Big|_{\varepsilon}^a \right) + 2\bar{B}_m \text{Ediag} \left( V^* \Big|_{\varepsilon}^a \right) + 2(G_m - \omega^2 M_m) \int_{\varepsilon}^a \text{Diag}(V^*) dx \quad (5.43)$$

où *Diag* indique les éléments diagonaux et *Ediag* les élément anti-diagonaux.

Il reste une partie de l'intégrale entre  $\varepsilon$  et  $a$  qui est donnée par les équations (5.34).

### b). Déplacements virtuels x Contraintes réelles

Ces intégrales sont plus simples à évaluer que celle de la section précédente, car les déplacements virtuels sont « moins singuliers » que les contraintes virtuelles. Cependant, un inconvénient existe pour ce cas qui est le fait que les contraintes réelles (inconnues) ne sont pas définies en un point, mais ont une surface associée avec une direction donnée.

Pour les plans verticaux, nous obtenons les résultats suivants

$$\int_0^h u_{ij}^* t_i dz = \left( \left\{ \begin{array}{c} u_m^* \\ u_{m+1}^* \end{array} \right\} \right)_{x=\varepsilon}^T \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & . & . & 1 & . & . \\ . & 2 & . & . & 1 & . \\ . & . & 2 & . & . & 1 \\ 1 & . & . & 2 & . & . \\ . & 1 & . & . & 2 & . \\ . & . & 1 & . & . & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} t^m \\ t^{m+1} \end{array} \right\} \quad (5.44)$$

En ce qui concerne les plan horizontaux, les résultats sont encore plus simple avec l'hypothèse que les contraintes réelles sont uniforme sur l'élément horizontal, et les seuls termes non nuls sont les suivants

$$\int_{-a}^a t_x u_{xx}^* dx = t_x \int_{-a}^a u_{xx}^* dx = t_x (2a) \tilde{u}_{xx}^* \quad (5.45a)$$

$$\int_{-a}^a t_y u_{yy}^* dx = t_y \int_{-a}^a u_{yy}^* dx = t_y (2a) \tilde{u}_{yy}^* \quad (5.45b)$$

$$\int_{-a}^a t_z u_{zz}^* dx = t_z \int_{-a}^a u_{zz}^* dx = t_z (2a) \tilde{u}_{zz}^* \quad (5.45c)$$

où les termes  $\tilde{u}_{xx}^*$ ,  $\tilde{u}_{yy}^*$  et  $\tilde{u}_{zz}^*$  représentent les fonctions de Green pour les déplacements au centre de l'élément.

Il est à noter que dans le cas présent, et à cause du fait que les déplacements varient linéairement avec la coordonnée  $z$ , les singularités au voisinage de la charge concentrée sont des fonctions de Dirac qui sont plus simple à intégrer, contrairement au cas d'une formulation continue où la singularité est de type logarithmique qui nécessite une quadrature d'intégration spéciale. Les deux cas in-plan et anti-plan sont totalement découplés, alors nous réalisons deux programmes distincts.

### 5.5. Réponse d'une structure rigide

Pour étudier la réponse d'une fondation rigide ou d'un tunnel à des charges dynamiques, la solution peut être divisée en deux étapes. D'abord, en utilisant le mouvement en champ libre (sans tunnel) dû aux charges appliquées, les déplacements et les contraintes correspondants ( $U'$  et  $P'$ ) sur la frontière « imaginaire » de la structure sont calculés. Dans une deuxième étape, les équations aux frontières sont résolues pour des déplacements et des contraintes incrémentaux ( $U - U'$  et  $P - P'$ ). Ces valeurs incrémentales doivent correspondre aux variations des conditions aux frontières à l'interface sol-structure, et doivent satisfaire, donc, à l'équation aux frontières (5.25), i.e. [38]

$$\tilde{A}(u - u') = \tilde{B}(P - P') \quad (5.46)$$

Lorsque les structures sont très rigides en comparaison avec le sol, nous pouvons supposer que ces derniers se déplacent « rigidement », et ainsi les déplacements sur la frontière peuvent être obtenus à partir des mouvements de corps rigides par l'intermédiaire d'une matrice de transformation  $T$ , qui dépend uniquement des coordonnées relatives des nœuds aux frontières par rapport à un point de référence dans le tunnel. L'expression est donnée par

$$u = T u_0 \quad (5.47)$$

où  $u_0$  est le vecteur déplacements de corps rigides du tunnel.

En supposant que le point référence ait des coordonnées zéros, les sous-matrice de  $T$  correspondant à chaque nœud  $j$  sont données par

$$T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_j \\ 0 & 1 & x_j \end{bmatrix} \quad (5.48a)$$

$$u_0 = [u_x^1 \quad u_z^1 \quad u_\theta^1 \quad u_x^2 \quad u_z^2 \quad u_\theta^2 \quad \dots \quad \dots]^T \quad (5.48b)$$

pour le cas in-plan, où les indices indiquent le numéro de la structure, et  $x_j$  et  $z_j$  sont les coordonnées relatives des nœuds du tunnel par rapport au point de référence. Et

$$T_j = [1] \quad (5.48c)$$

$$u_0 = [u_y^1 \quad u_y^2 \quad \dots]^T \quad (5.48d)$$

pour le cas anti-plan.

En introduisant l'équation (5.47) dans l'équation (5.46) et en réarrangeant quelques termes, nous obtenons

$$\tilde{A}T u_0 = \tilde{A}U' + \tilde{B}(P - P') \quad (5.49)$$

En prémultipliant par  $T^T \tilde{B}^{-1}$  et avec les définitions suivantes

$$K = T^T \tilde{B}^{-1} \tilde{A}T \quad (5.50a)$$

$$H = \tilde{B}^{-1} \tilde{A} \quad (5.50b)$$

nous arrivons au résultat suivant

$$K u_0 - T^T P = T^T (H U' - P') \quad (5.51)$$

Le terme  $T^T P$  représente les forces et les moments résultants dans le sol entourant chaque structure. Comme nous n'avons pas de charges externes appliquées aux structures, ces forces résultantes doivent égaier les forces d'inertie

$$T^T P = \omega^2 \tilde{M} u_0 \quad (5.52)$$

où  $\tilde{M}$  est la matrice masse des structures considérées et est explicitement donnée par

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & -z_1 m_1 & & & \\ & m_1 & x_1 m_1 & & 0 & \\ & & J_1 & & & \\ & & & m_2 & 0 & -z_2 m_2 \\ Sym & & & & m_2 & x_2 m_2 \\ & & & & & J_2 \end{bmatrix} \quad (5.53a)$$

pour le cas in-plan, et

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (5.53b)$$

pour le cas anti-plan. Où  $m_i$  représente la masse de la structure  $i$  et  $J_i$  le moment d'inertie massique de celle-ci par rapport à un axe passant par le point de référence,  $(x_i, z_i)$  sont les coordonnées du centre de la structure par rapport au point de référence. Ainsi, l'équation (5.51) devient

$$(K - \omega^2 \tilde{M})u_0 = T^T(HU' - P') \quad (5.54)$$

Après avoir obtenu les mouvements rigides de chaque structure, les déplacements résultants aux points à l'intérieur du domaine peuvent être calculés en appliquant une charge fictive à la position et dans la direction du déplacement désirés. En désignant par  $\tilde{A}^i$  la matrice ligne des contraintes résultantes aux nœuds de la frontière des structures, et  $\tilde{B}^i$  la matrice ligne des déplacements résultants, le déplacement inconnu  $u_i$  est donné par

$$u_i - u_i' = -\tilde{A}^i(Tu_0 - U') + \tilde{B}^i(P - P') \quad (5.55)$$

## Chapitre 6

# ETUDE PARAMÉTRIQUE

### 6.1. Introduction

L'étude des effets qu'un obstacle massif, tel qu'un tunnel, peut exercer sur la forme et l'intensité des ondes arrivant au niveau de cet obstacle, est un phénomène très important en elastodynamique. Ce problème est appelé dans la littérature technique « dispersion des ondes par une inclusion rigide » [39], [55], [48].

L'étude des ondes dispersées par une inclusion rigide dans un milieu stratifié est un problème très complexe qui doit, en général, être résolu en utilisant des procédures numériques. La situation est considérablement simplifiée, cependant, si une analyse bi-dimensionnelle est considérée. Pour la situation qui nous intéresse, une solution bi-dimensionnelle paraît être suffisante pour une bonne compréhension du comportement du système, au moins du point de vue qualitatif, et de juger si une analyse plus détaillée est nécessaire.

Dans ce qui suit nous allons étudier le comportement du sol dans différentes situations, d'abord nous explorons la possibilité d'altération du mouvement en surface par la présence du tunnel, l'objectif étant de comprendre de quelle manière la présence du tunnel augmente ou diminue la réponse dynamique d'un système de sol. Dans la deuxième partie nous étudions le cas spécial d'une charge de trafic et enfin, dans la troisième partie, nous examinons le cas d'interaction structure-sol-structure avec la présence d'une fondation en surface en plus du tunnel.

## 6.2. Réponse à des mouvements harmoniques

### 6.2.1. Introduction

Un semi-espace homogène n'est approprié comme modèle de sol que comme première approximation. La théorie de propagation d'onde résultant dans un semi-espace homogène ne peut, en effet, expliquer tous les phénomènes ayant lieu dans le sol. En considérant un semi-espace multicouches, par contre, il est possible d'établir une corrélation entre la théorie de la propagation d'onde et les phénomènes observés.

Les ondes élastiques sont partiellement réfléchies à l'interface entre deux milieux, et si une stratification horizontale dans un semi-espace est considérée, une partie de l'énergie provenant de la surface et se propageant dans ce milieu retourne en surface. S'il existe plus d'une interface, les ondes seront réfléchies vers la surface au niveau de chaque couche. Et lorsque l'onde retourne à la surface celle-ci rencontre l'interface entre le solide et l'air et est totalement réfléchi. Une multitude de réflexions totale induisent des résonances pour des fréquences particulières, et cela même si le flux d'énergie à travers le milieu est faible, l'intensité du signal transmis sera significative à cause des interférences constructives.

Dans la présente section, nous étudions l'influence du tunnel sur le comportement du sol soumis à des charges concentrées impulsives (charges unités dans le domaine des fréquences), ce qui nous donne la fonction de transfert. Cette charge est positionnée en surface à une abscisse  $x = -10\text{ m}$  de l'axe transversal du tunnel. Le sol considéré dans la présente étude est constitué de trois couches distinctes surplombant un sol plus rigide situé à une profondeur de 41 m. La première est composée par un sol très lâche ayant une vitesse de propagation des ondes de cisaillement de l'ordre de 76 m/s et une épaisseur de 31 m, suivie par une mince couche intermédiaire de 3 m ayant une vitesse des ondes de cisaillement presque le double de la couche précédente et enfin une troisième couche avec des propriétés similaire à ceux de la première couche.

Le tunnel est modélisé par un rectangle rigide avec une hauteur de 8.3 m et une largeur de 9.4 m. La figure (6.1) montre la géométrie du sol et du tunnel [39].

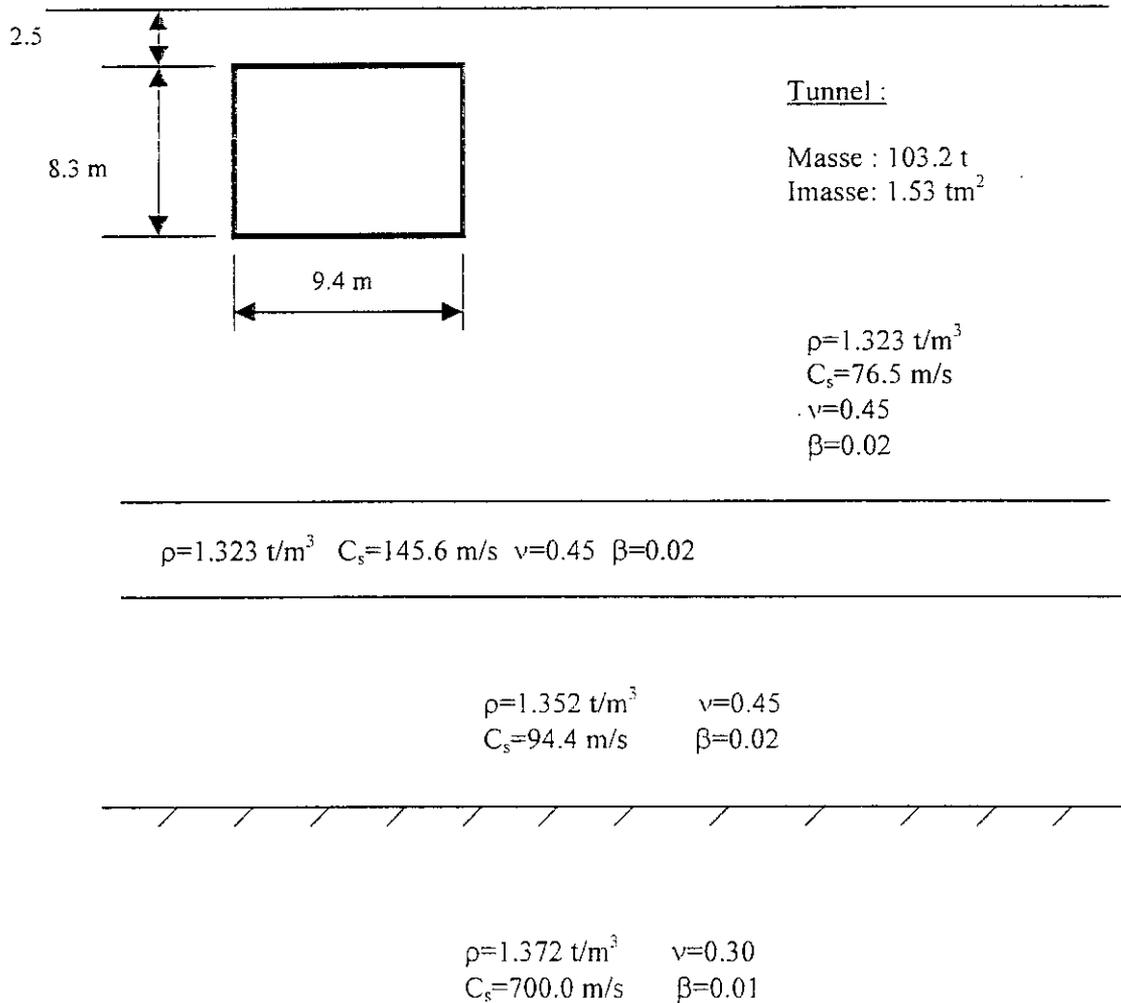


Figure (6.1) : Propriétés géométriques et physiques du sol et du tunnel

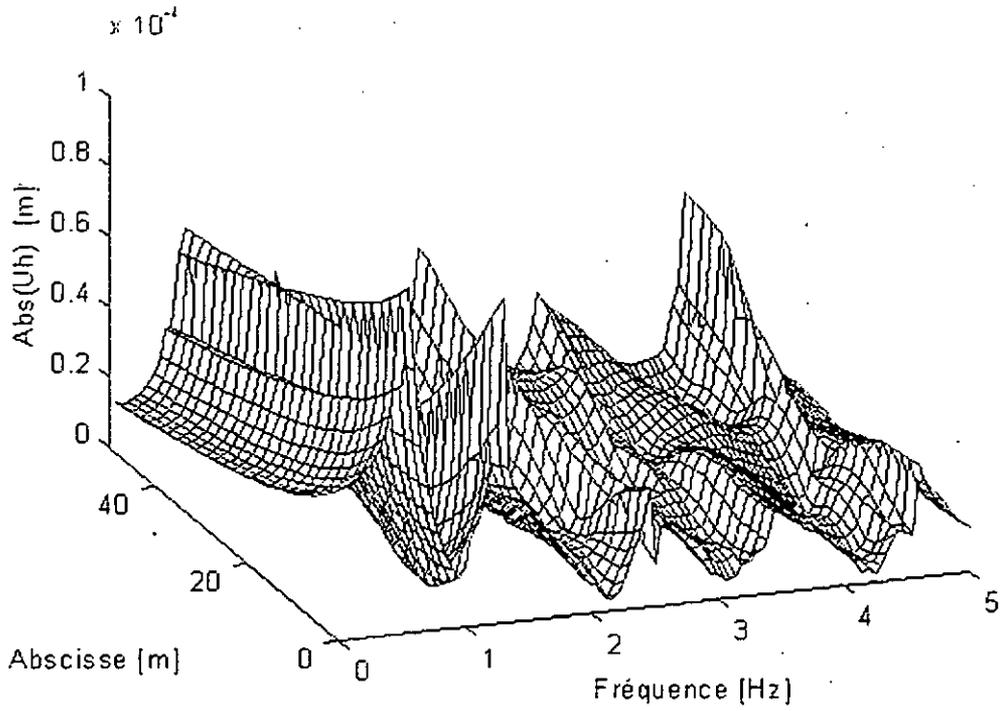
L'interface sol-tunnel est discrétisée en 8 éléments linéaires suivant les surfaces verticales et en 5 éléments constants suivants les surfaces horizontales. Ne seront considérés dans cette étude que les fréquences jusqu'à 5 Hz. Car pour une fréquence de 5 Hz, la longueur d'onde correspondant à une vitesse d'onde de 70 m/s (vitesse inférieure à la plus petite vitesse d'onde dans le sol) est 14 m, qui est plus grande, par un facteur de 4, que la dimension des éléments frontières choisis, ainsi, les résultats fournis par ce modèle peuvent être retenus.

### 6.2.2. Effet du Tunnel

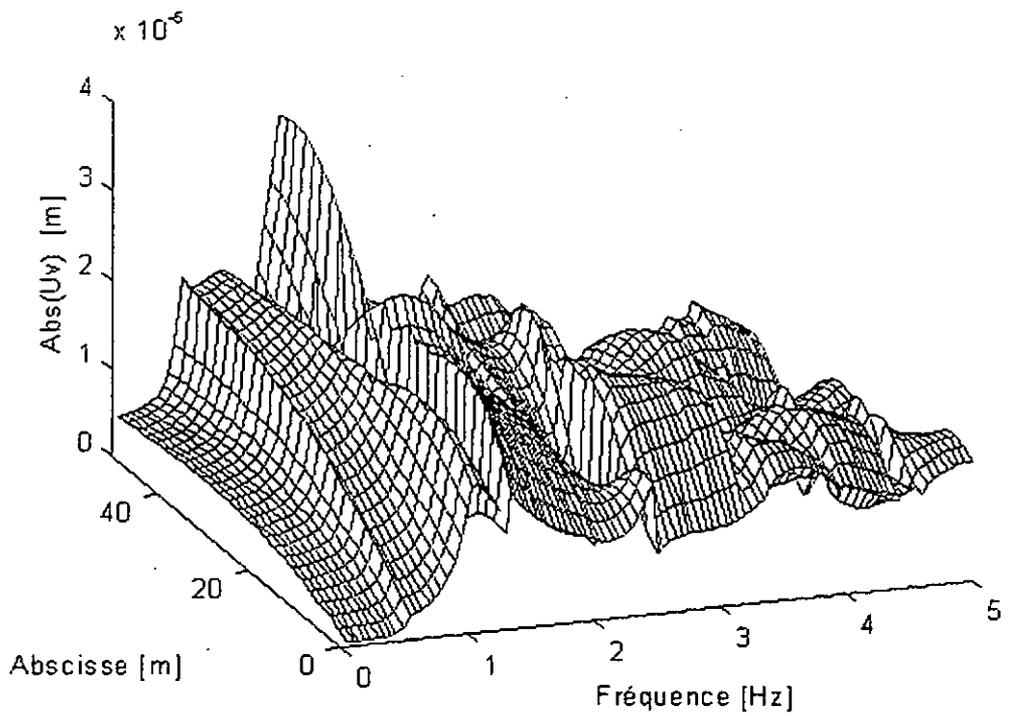
Considérons d'abord une situation « in-plane ». Dans ce cas, les déplacements sont dans un plan perpendiculaire à l'axe longitudinal du tunnel, impliquant que seuls trois degrés de liberté du tunnel sont actifs : les déplacements horizontal et vertical, et la rotation plane (autour de l'axe longitudinal du tunnel). L'influence du tunnel sur le mouvement résultant en surface est l'objectif principal de cette étude. Les figures (6.4) et (6.5) donnent les amplitudes des déplacements en surface dus à des charges concentrées horizontale et verticale en fonction de la distance de l'axe du tunnel (axe transversal) et de la fréquence du mouvement, pour un intervalle des fréquences de 0 à 5 Hz.

En comparant ces résultats avec les figures (6.2) et (6.3) donnant les réponse en champ libre, nous pouvons conclure que pour des fréquences inférieures à 2 Hz, la présence du tunnel n'influe pas énormément sur le mouvement, alors que pour les fréquences plus importantes, une réduction substantielle du mouvement a lieu au voisinage du tunnel. Ceci peut être expliqué en considérant les dimensions maximums du tunnel suivant les directions de propagation des ondes, qui sont 8.3 m et 9.4 m, qui excèdent le quart de la longueur d'onde uniquement pour les fréquences supérieures à  $C_s / \lambda$  (2.3 Hz pour 8.3 m et 2 Hz pour 9.4 m). pour les fréquences supérieures à ces valeurs, le sol au voisinage du tunnel se déforme substantiellement, et à cause du fait que le tunnel est rigide et ne peut s'accommoder de telles distorsions, il s'en suit que les déplacements au voisinage du tunnel souffre d'interaction considérables.

Les figures (6.2) à (6.5) montrent que les déplacements pour de faibles fréquences ont des formes assez régulières en fonction des abscisses et que pour les grandes fréquences, ces formes deviennent très irrégulières, impliquant que les effet des interférences constructives et destructives n'apparaît d'une façon significative que pour les grandes fréquences. Ceci peut être en partie expliqué par le fait que le demi-espace agit plutôt pour les faibles fréquences contrairement aux couches dont l'influence est importantes essentiellement pour les valeurs importantes. Or, la majeure partie de ces interférences provient des réflexion au niveau des couches supérieures.

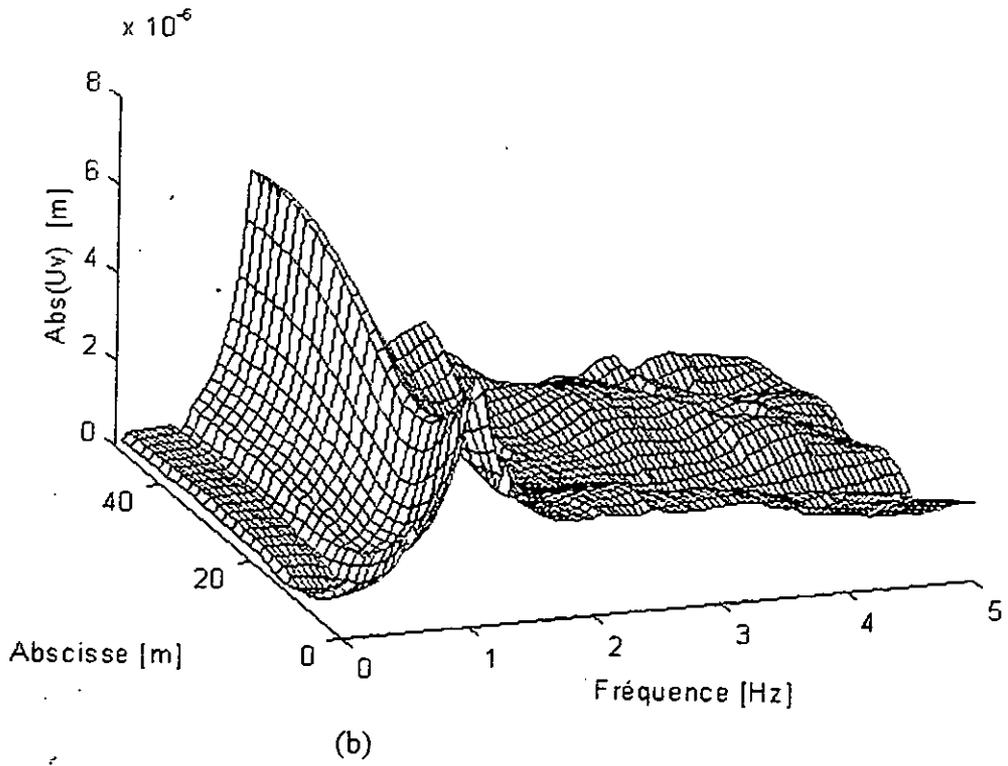
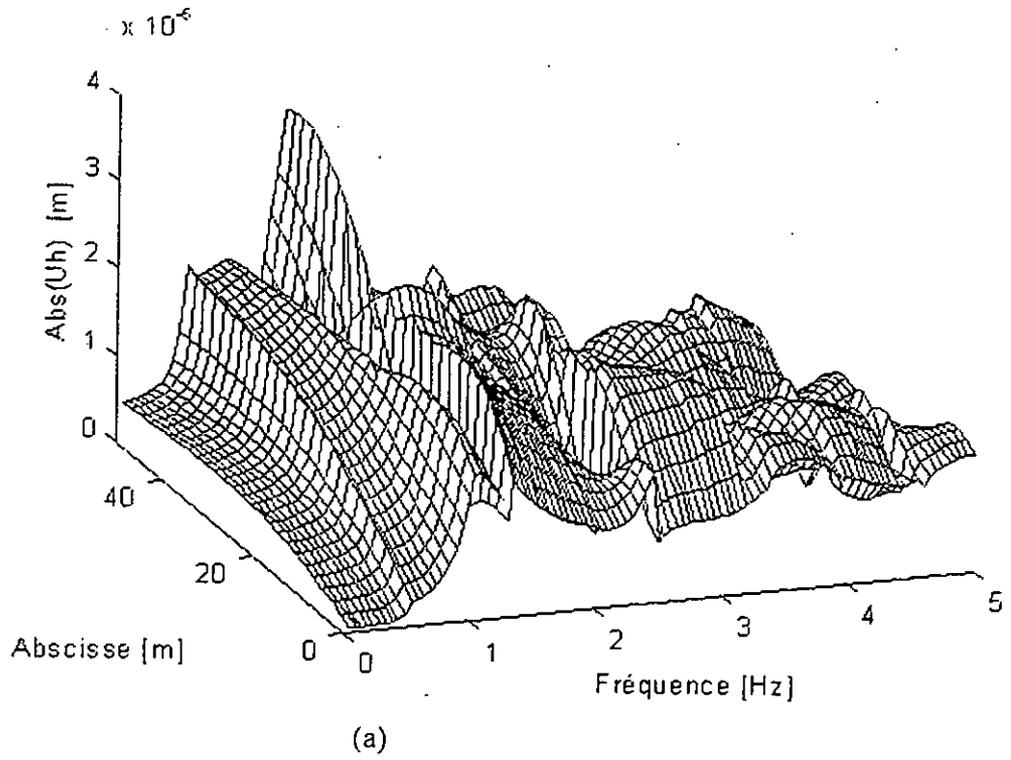


(a)

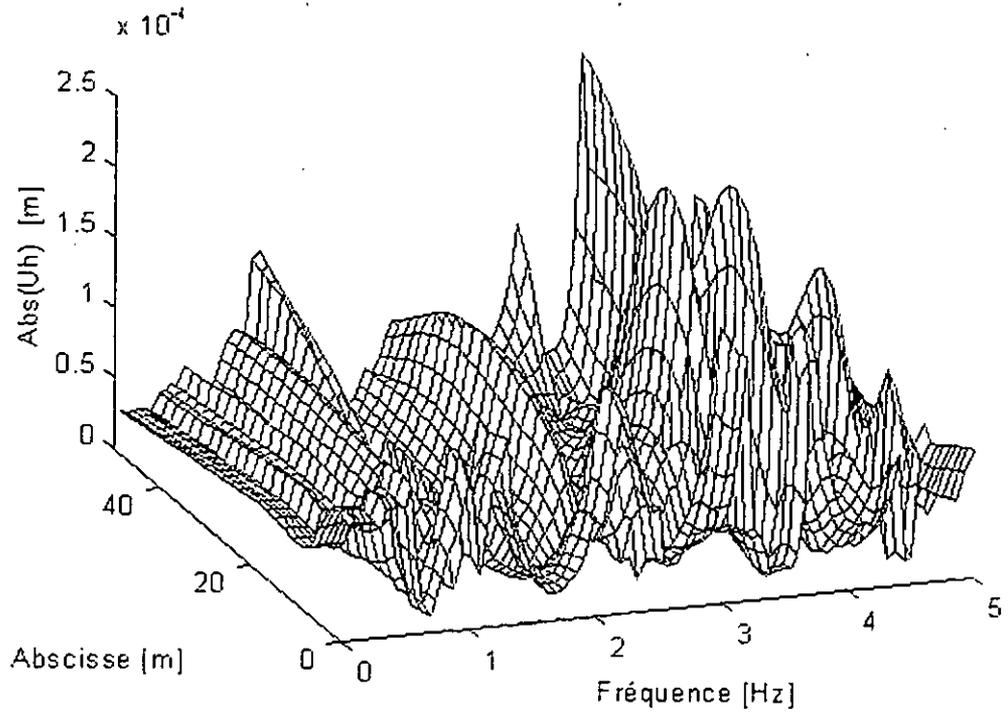


(b)

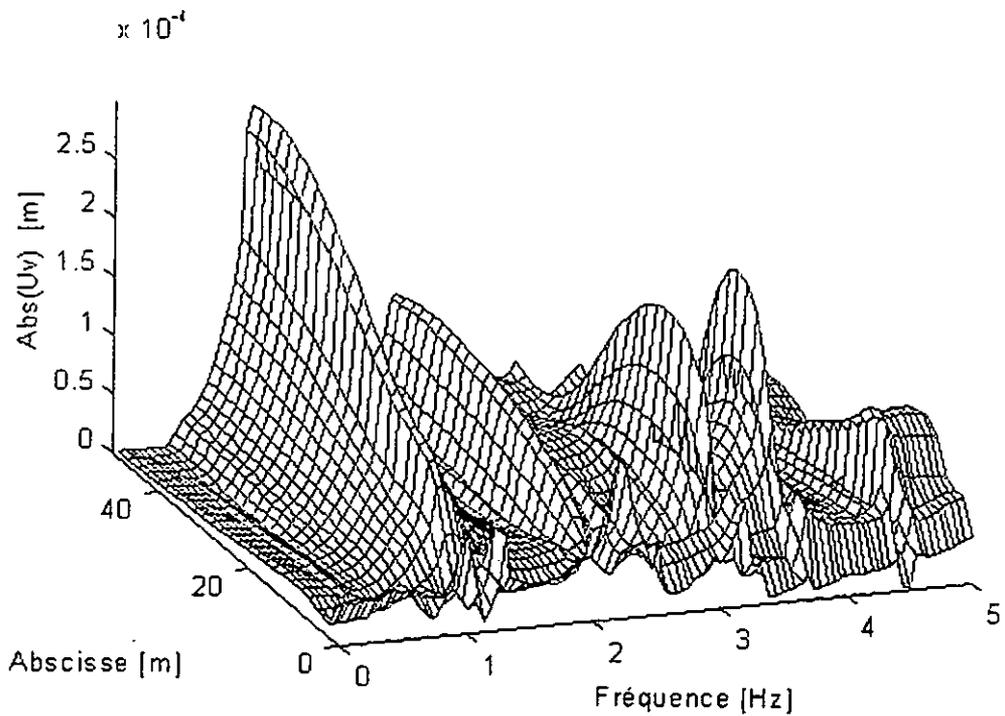
Figure(6.2) : Déplacements en champ libre dus à une charge unité horizontale :  
 (a) : déplacement horizontal et (b) déplacement vertical.



Figure(6.3) : Déplacements en champ libre dus à une charge unité verticale :  
 (a) : déplacement horizontal et (b) déplacement vertical.

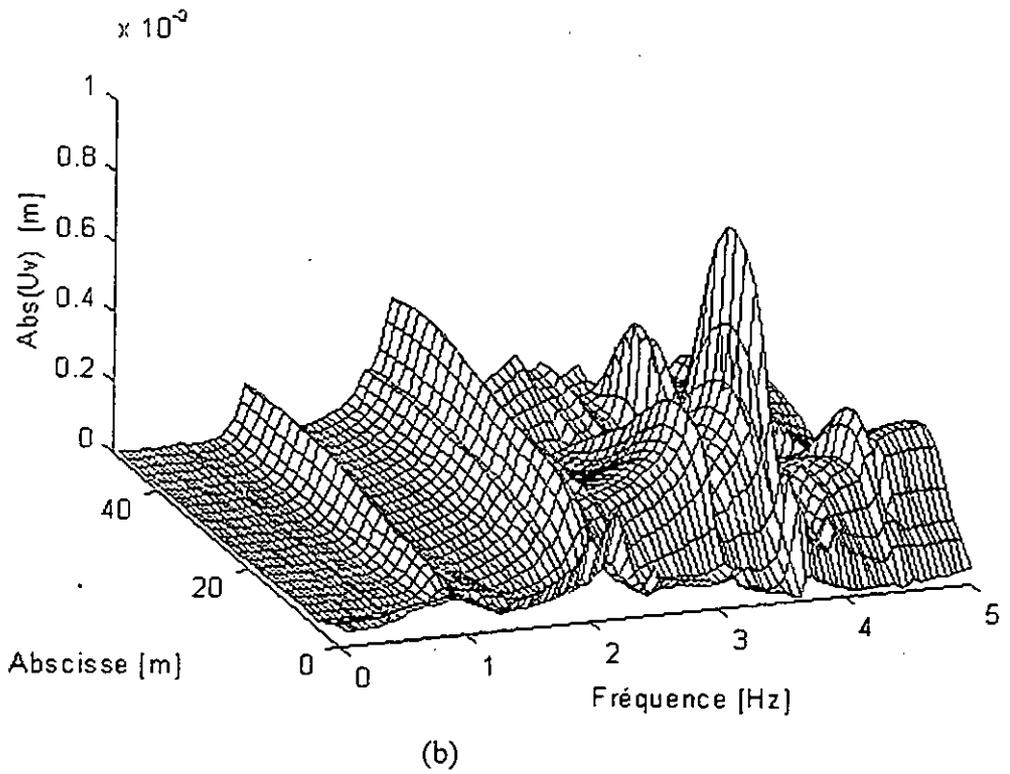
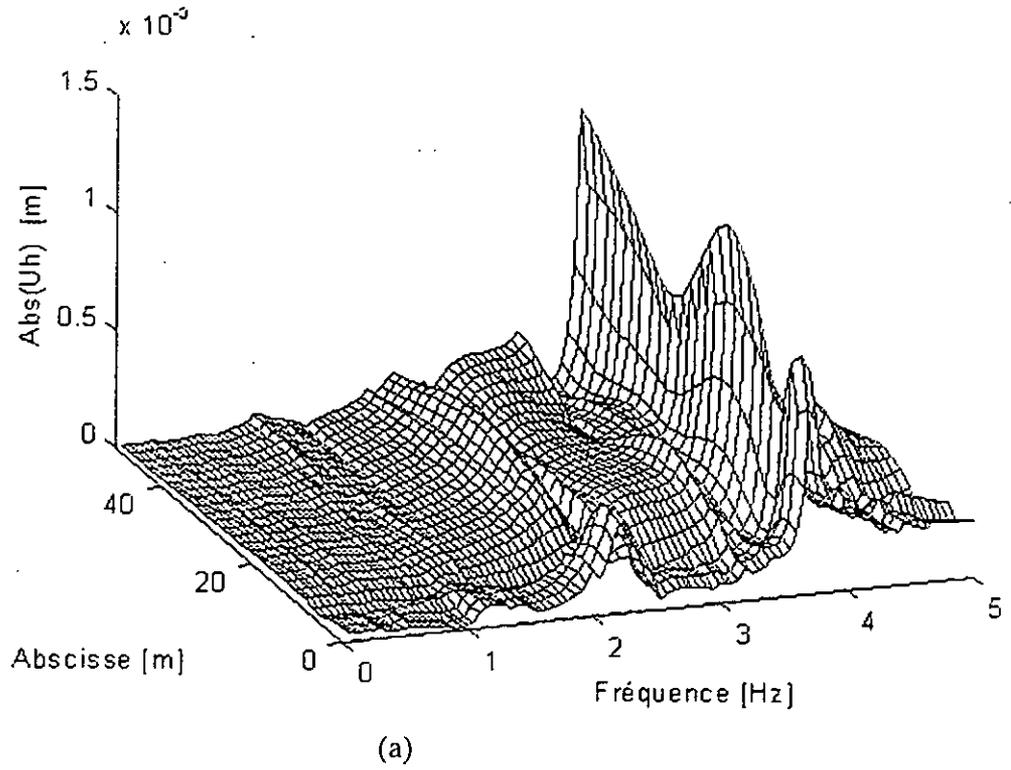


(a)

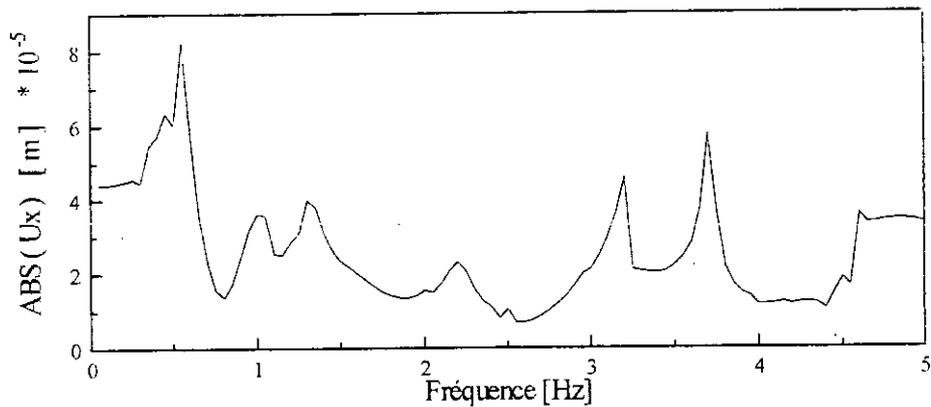


(b)

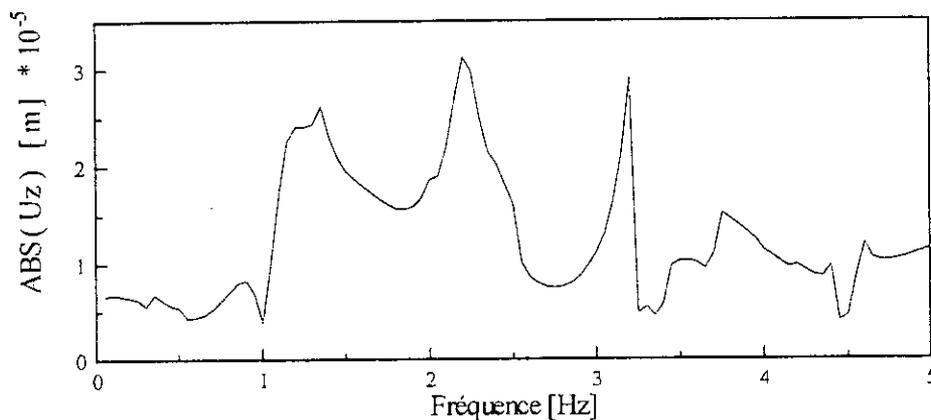
Figure(6.4) : Déplacements à une charge unité horizontale en présence du Tunnel:  
(a) : déplacement horizontal et (b) déplacement vertical.



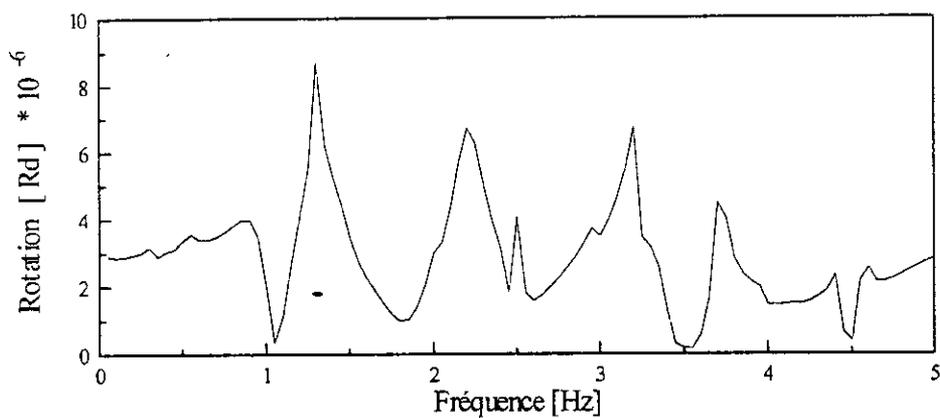
Figure(6.5) : Déplacements à une charge unité verticale en présence du Tunnel:  
 (a) : déplacement horizontal et (b) déplacement vertical.



(a)

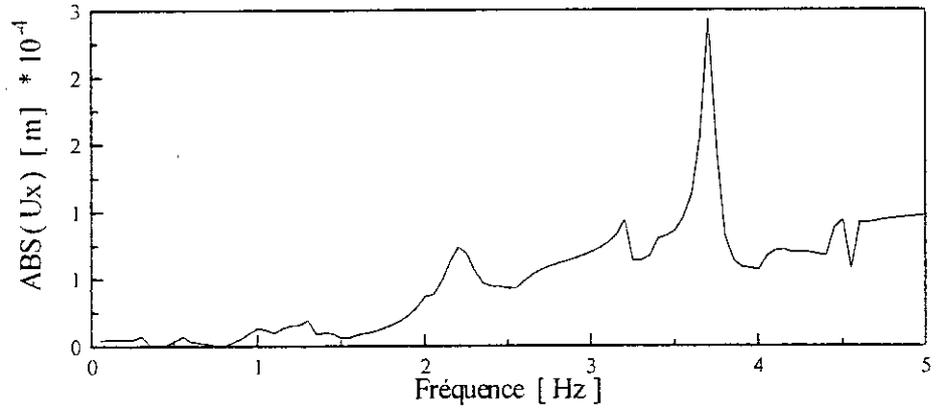


(b)

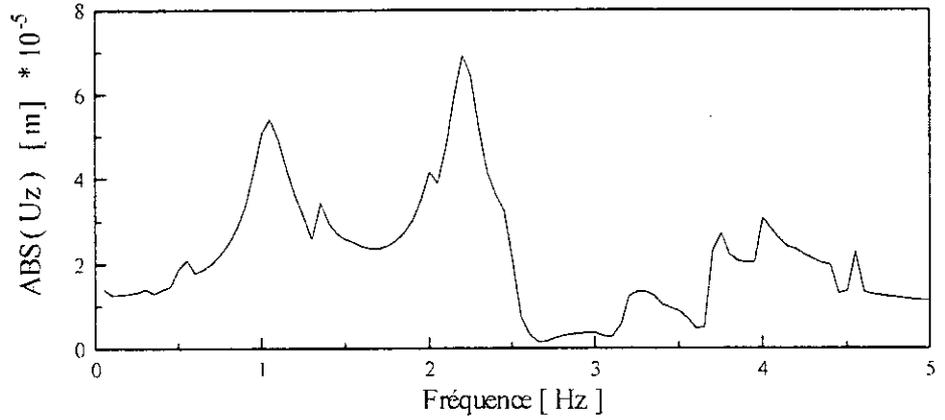


(c)

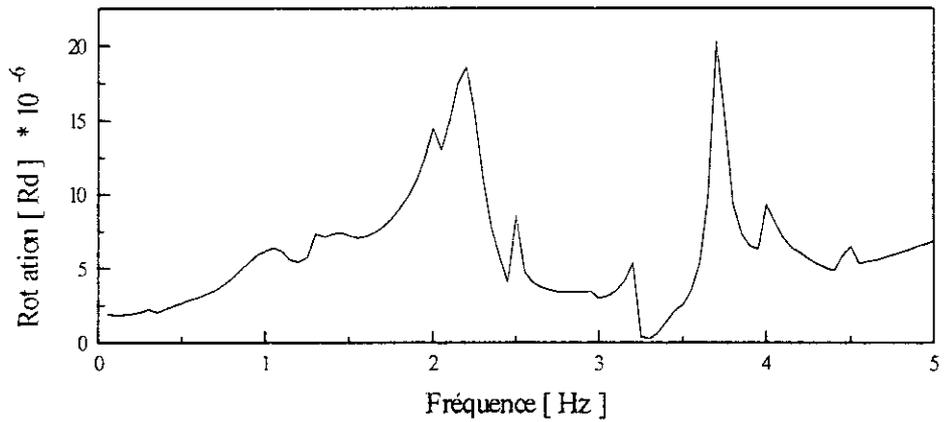
Figure (6.6) : Amplitude du mouvement du Tunnel à une force horizontale in-plane  
 (a) : déplacement horizontal, (b) : déplacement vertical et (c) : rotation.



(a)

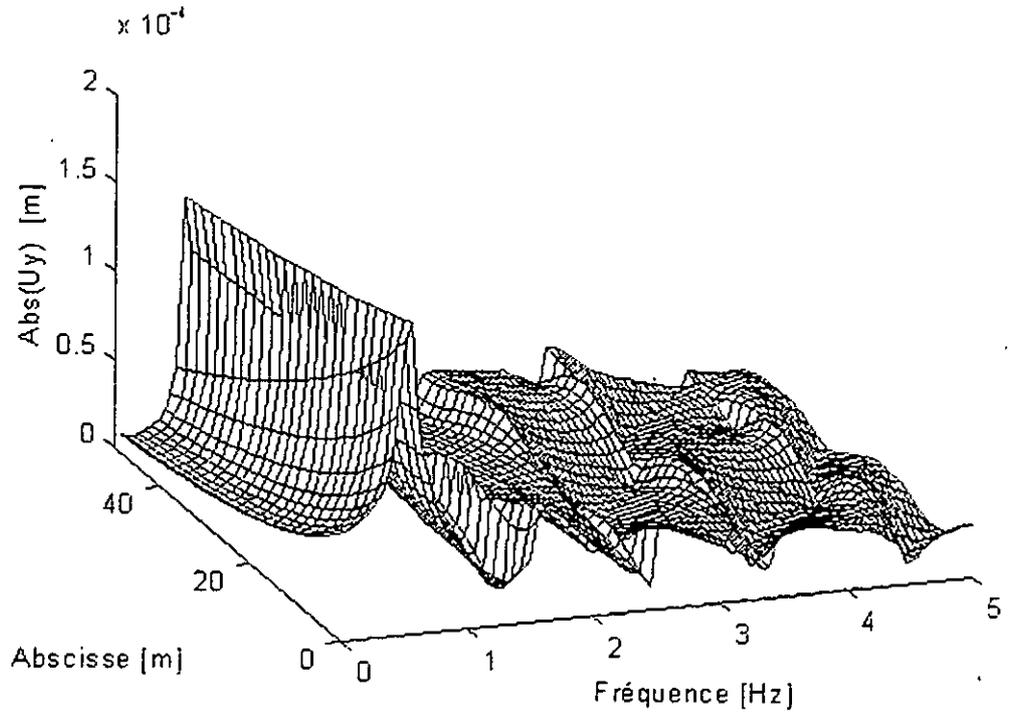


(b)



(c)

Figure (6.7) : Amplitude du mouvement du Tunnel à une force verticale in-plane  
(a) : déplacement horizontal, (b) : déplacement vertical et (c) : rotation.



Figure(6.8) : Réponse anti-plane en champ libre à une force unité.

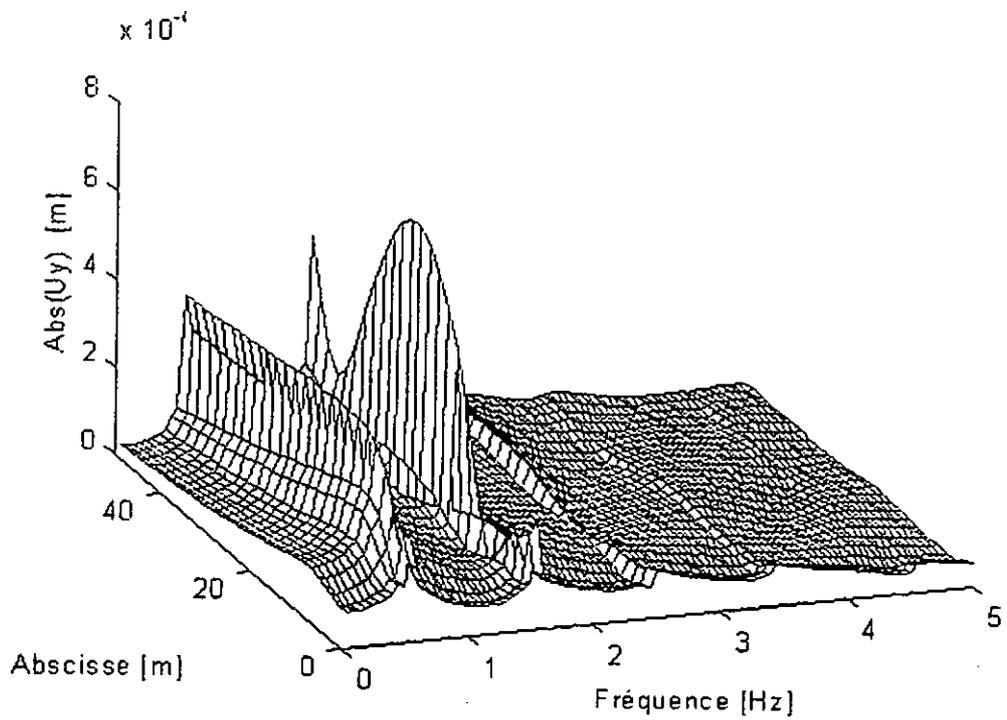


Figure (6.9) : Réponse anti-plane à une charge unité.

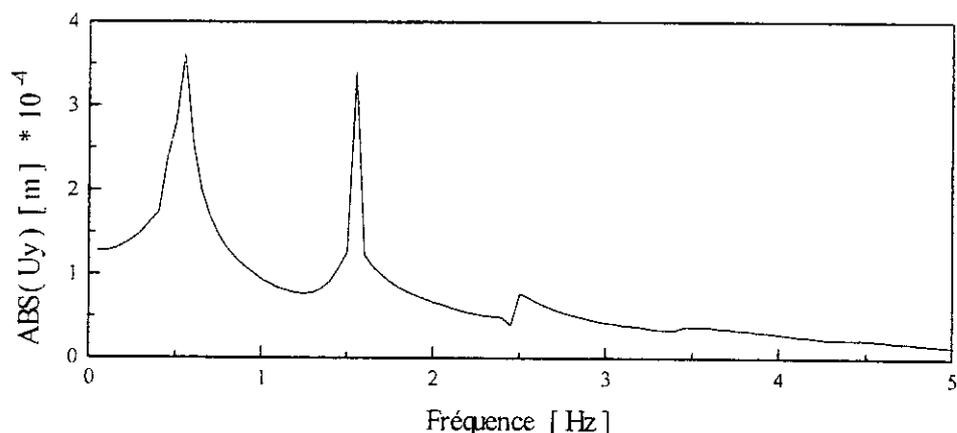


Figure (6.10) : déplacement anti-plan du Tunnel à une charge unité.

D'autre part, les mouvements du tunnel en figures (6.6) et (6.7) peuvent induire des déplacements différentiels en surface, ces derniers peuvent atteindre des valeurs importantes, spécialement à cause de la rotation du tunnel qui agit significativement sur le mouvement vertical en surface.

Effectivement, pour les grandes fréquences et, spécialement pour les fréquences propres du sol, des rotations importantes sont induites dans le tunnel qui se traduisent par des déplacements verticaux significatifs en surface. Cependant, si la fréquence augmente encore, la rotation moyenne du tunnel tend vers une configuration d'amplitude de plus en plus faible, ce qui se traduit par une diminution des déplacements verticaux en surface.

En ce qui concerne le cas anti-plan, les déplacements du tunnel sont confinés dans la direction longitudinale de celui-ci (figure (6.10)). Les résultats, pour ce cas, sont exposés en figures (6.8) et (6.9). Ces figures montrent que, pour les fréquences propres une amplification importante du mouvement en surface résulte de la présence du tunnel, essentiellement pour la première fréquence propre alors que pour le cas « in-plan », cette amplification est plus importante pour la deuxième fréquence propre. De même que pour le cas « in-plan », nous observons une réduction substantielle du mouvement au voisinage du tunnel.

En comparant les cas « in-plan » et anti-plan, l'atténuation importante observée dans le deuxième cas peut être expliquée en considérant le fait que dans le premier cas, le tunnel peut

tourner autour de son axe longitudinal pour s'accommoder des déplacements différentiels le long de direction verticale causant ainsi des mouvements résiduels en surface, alors que pour les mouvements anti-plans, ce n'est pas le cas.

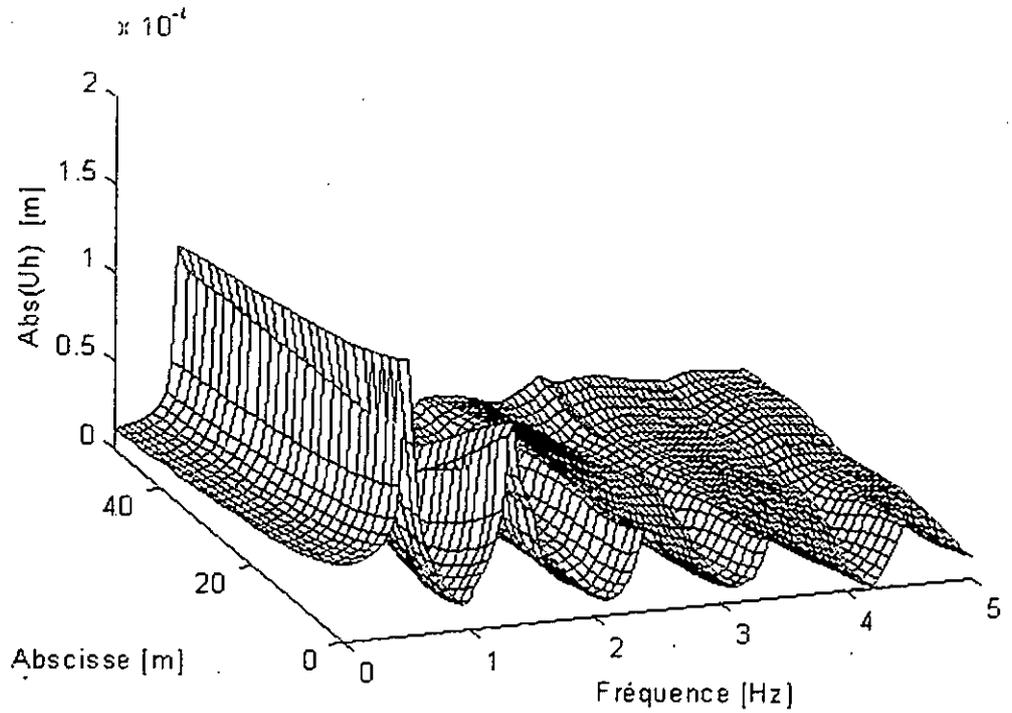
### 6.2.3. Effet de la base

Le semi-espace élastique et le sol multicouches sur une base rigide sont deux idéalizations extrêmes de profils de sol. Nous considérons dans la présente section l'effet de la base, pour cela nous considérons deux profils : celui de la figure (6.1) représentant la base élastique et un deuxième état dans lequel le semi-espace est supposé infiniment rigide, c'est-à-dire que les déplacements au niveau de l'interface entre les couches supérieur et ce semi-espace sont nuls.

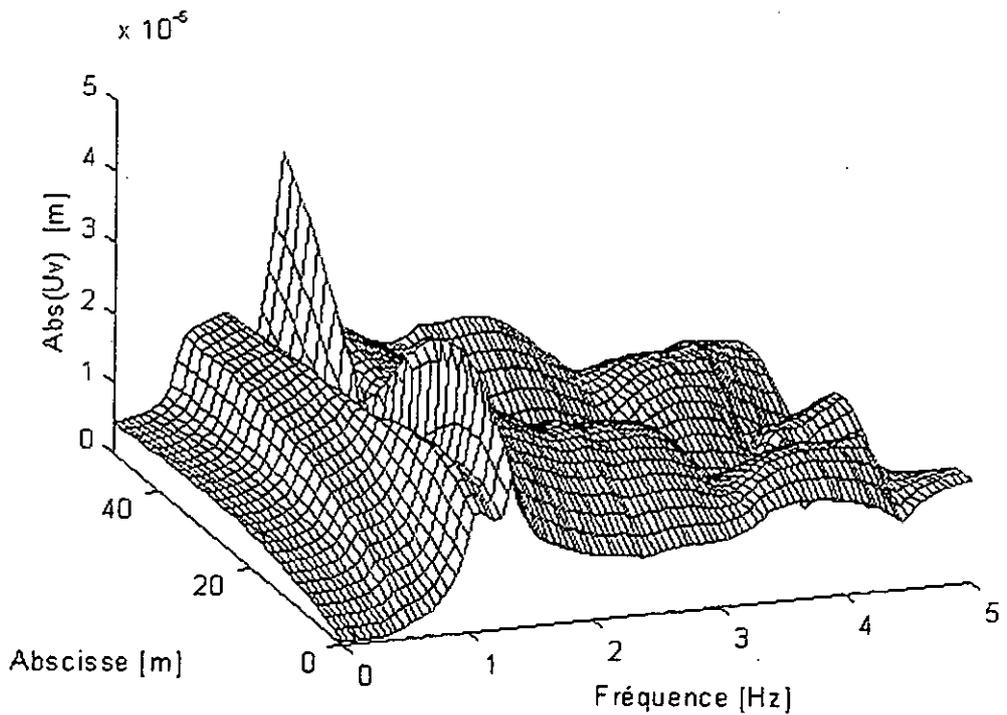
Les résultats pour la base élastique sont donnés en figures (6.2) à (6.5) et ceux correspondant à la base rigide en figures (6.11) à (6.14). Une inspection de ces figures indique la présence, dans le cas de base rigide, de pics et de vallées qui sont apparemment le résultat de résonances dues à des réflexions totales au niveau de cette base, qui ne sont pas présents dans le cas du demi-espace élastique. Ce qui indique que cette configuration est responsable de la disparition de certains pics et vallées et de l'émergence de certains autres. Tout ceci étant essentiellement dû au phénomène d'interférence puisque le cas de base implique une réflexion totale des ondes au niveau de cette base induisant des interférences supplémentaires.

En outre, les effets d'altération des mouvements exhibent une dépendance étroite vis à vis de la fréquence. Car, pour les faibles fréquences, les mouvements sont relativement indifférents aux variations de base (dans des limites réalistes), mais le phénomène s'inverse pour les fréquences importantes.

En ce qui concerne les mouvements du tunnel en figures (6.15) et (6.16), il est à remarquer que, comme attendu, les amplitudes rigides sont plus importantes mais étrangement les deux mouvements ont sensiblement la même forme pour les faibles fréquences, ce qui indique que pour ce cas, la base rigide agit essentiellement sur l'amplitude du mouvement et non pas sur sa forme. Mais pour les grandes fréquences, les deux mouvements divergent sensiblement jusqu'à des valeurs des fréquences de l'ordre de 4 Hz et puis une assez bonne concordance est remarquée.



(a)



(b)

Figure (6.11) : Déplacements en champ libre dus à une charge unité horizontale pour le cas de base rigide, (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical.

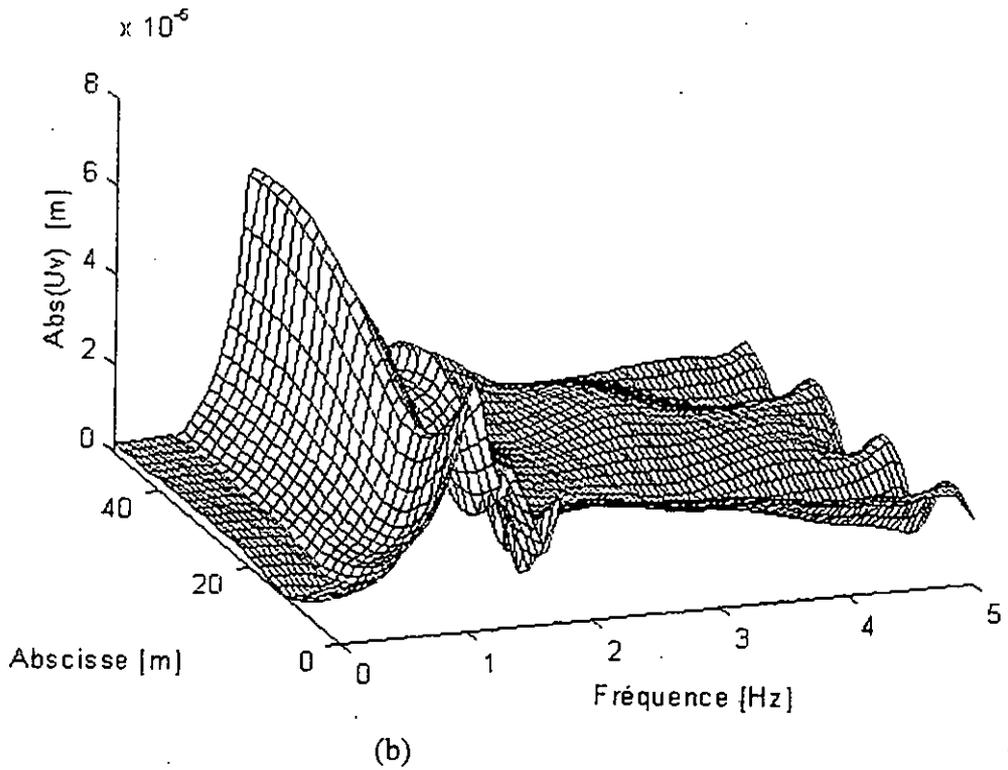
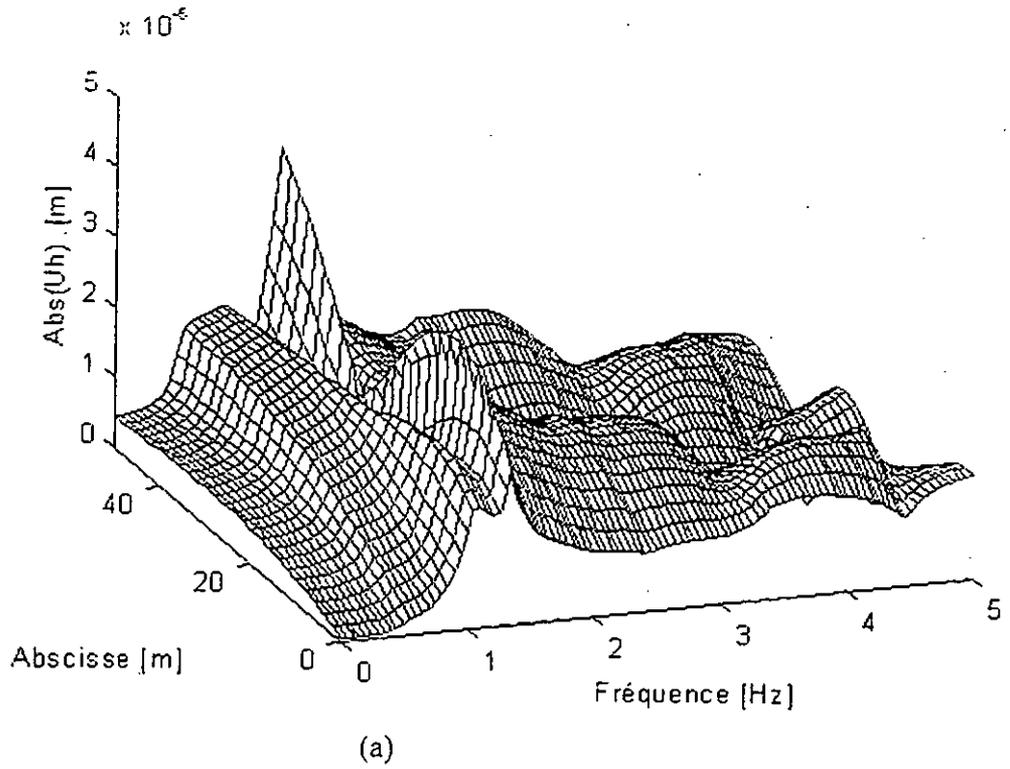
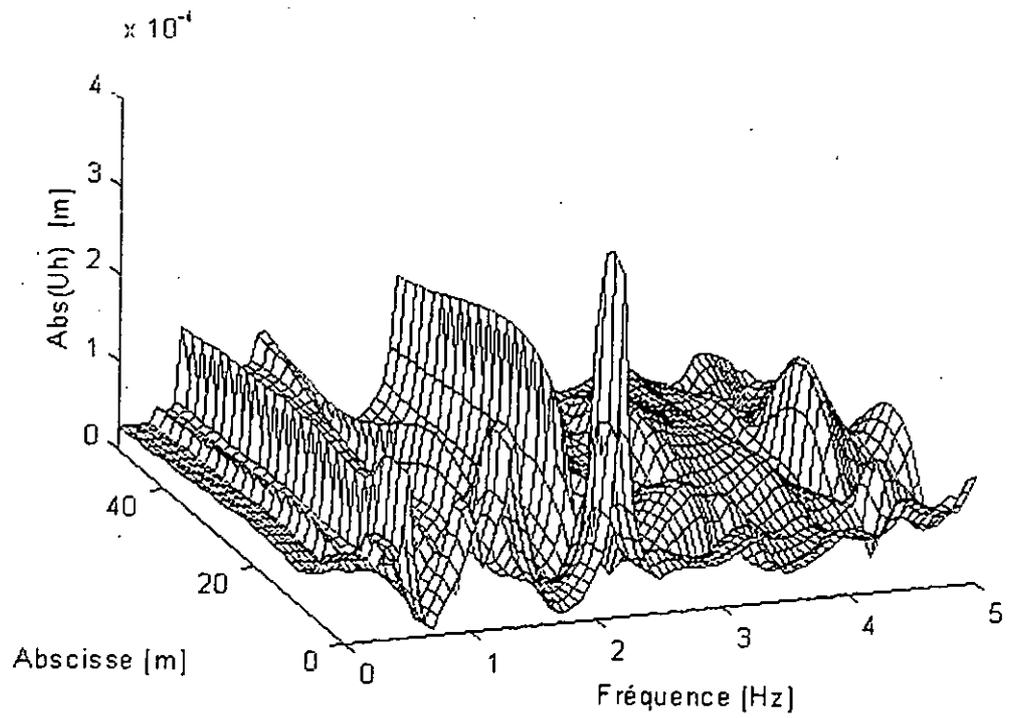
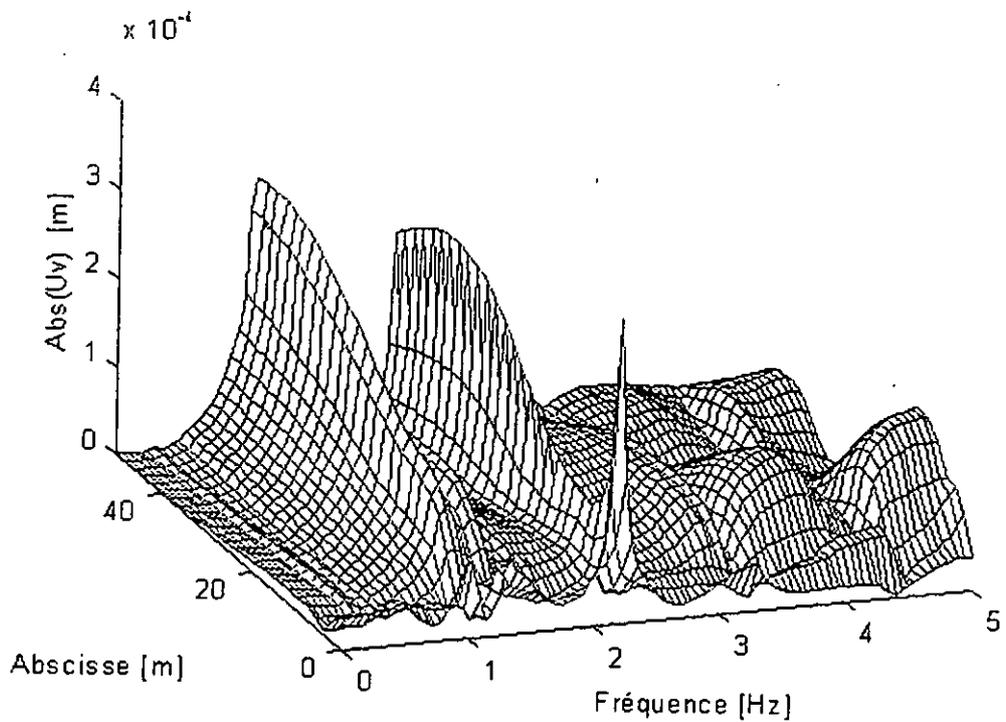


Figure (6.12) : Déplacements en champ libre dus à une charge unité verticale pour le cas de base rigide, (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical.

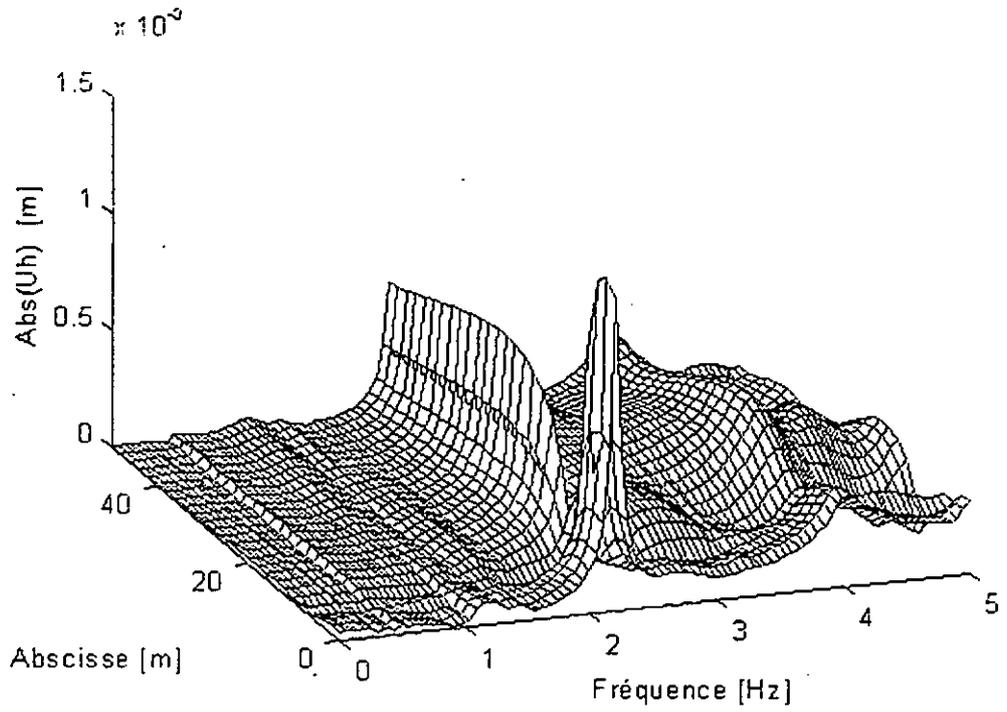


(a)

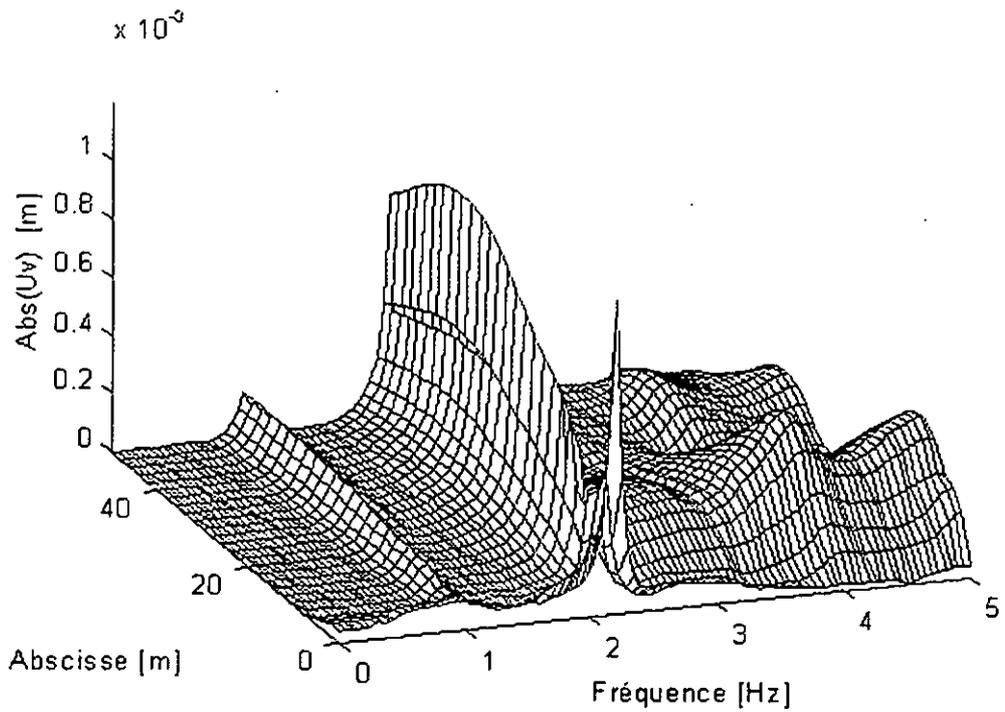


(b)

Figure (6.13) : Déplacements dus à une charge unité horizontale pour le cas de base rigide  
(a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical.

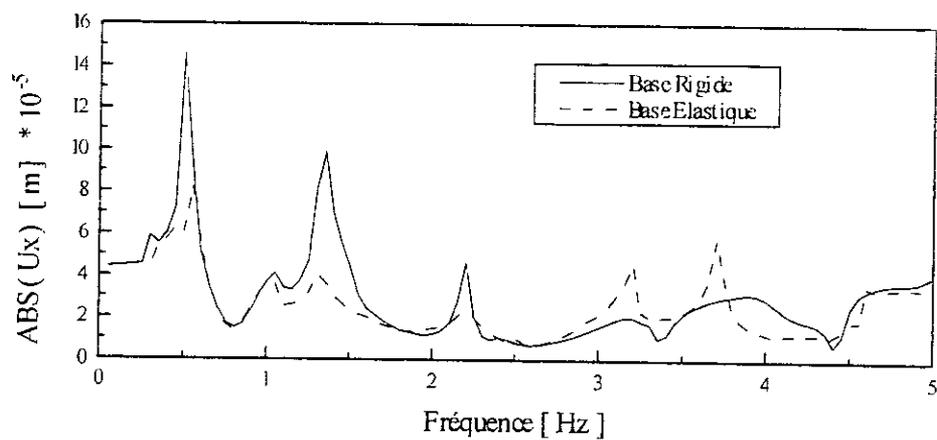


(a)

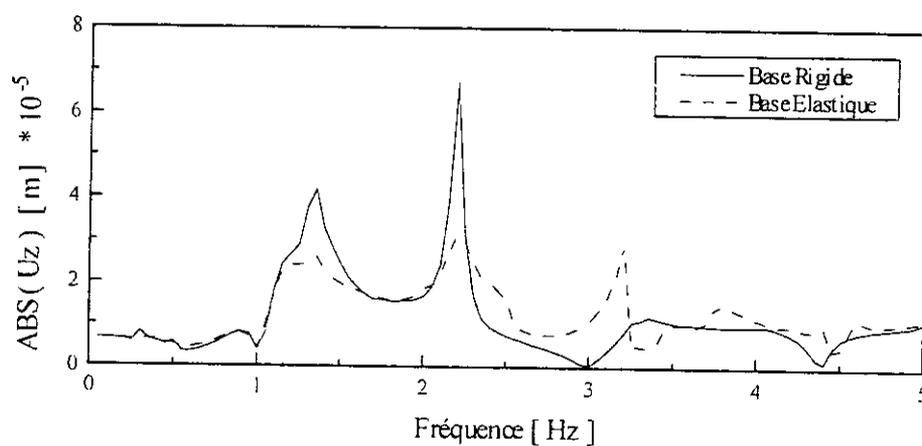


(b)

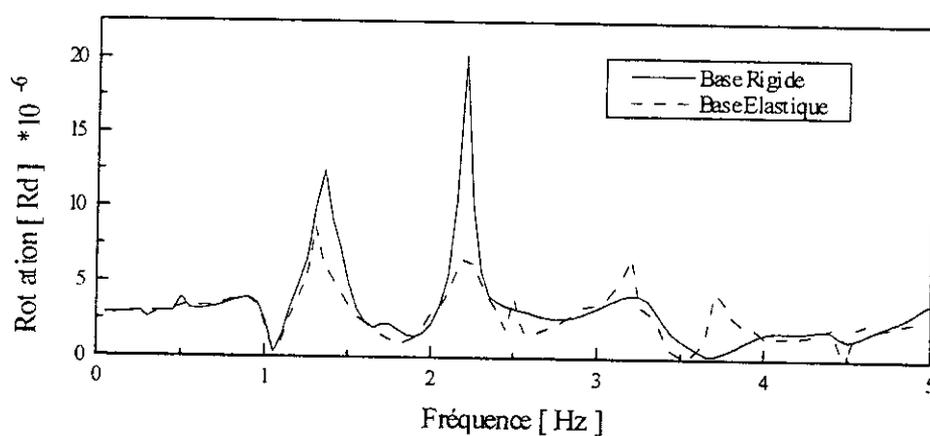
Figure (6.14) : Déplacements dus à une charge unité verticale pour le cas de base rigide  
 (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical.



(a)

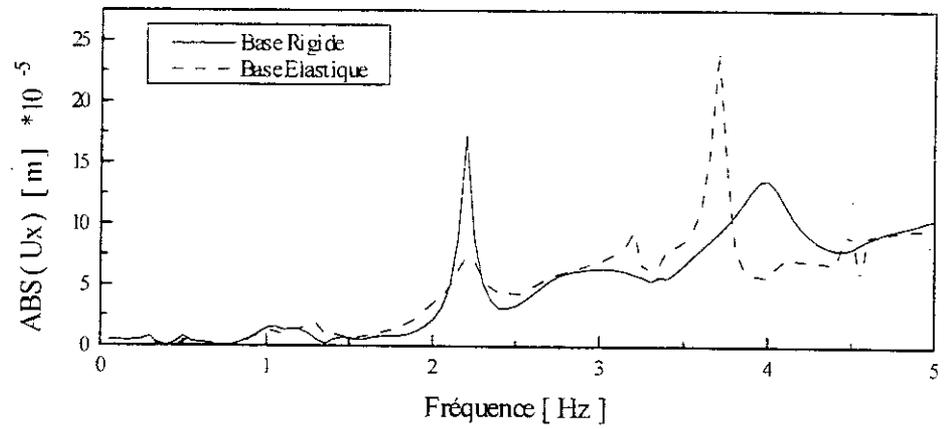


(b)

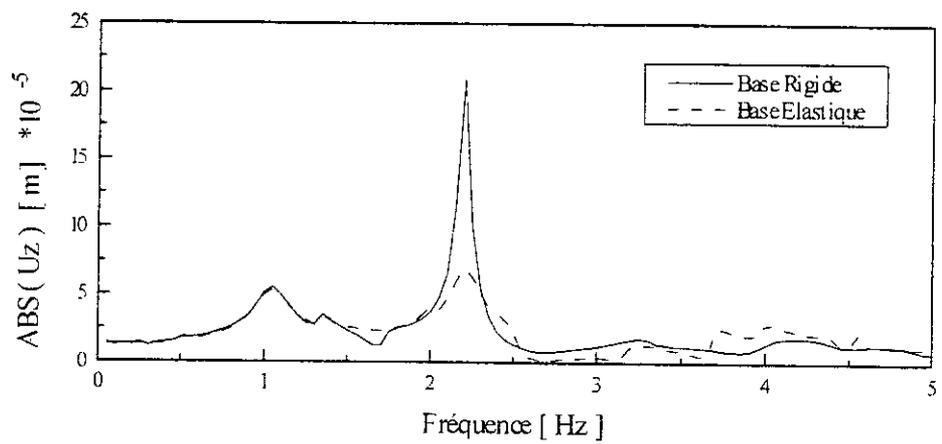


(c)

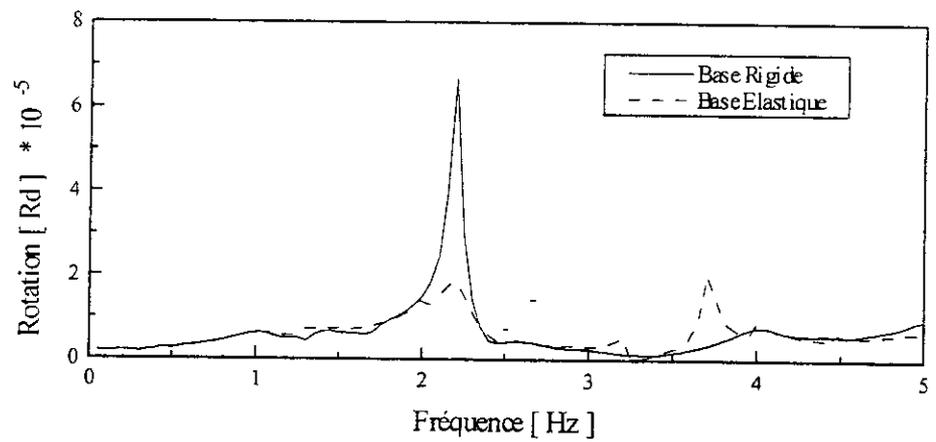
Figure (6.15) : Déplacements du Tunnel dus à une force unité horizontale pour le cas de base rigide, (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical, (c) : rotation.



(a)



(b)



(c)

Figure (6.16) : Déplacements du Tunnel dus à une force unité verticale pour le cas de base rigide, (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical, (c) : rotation.

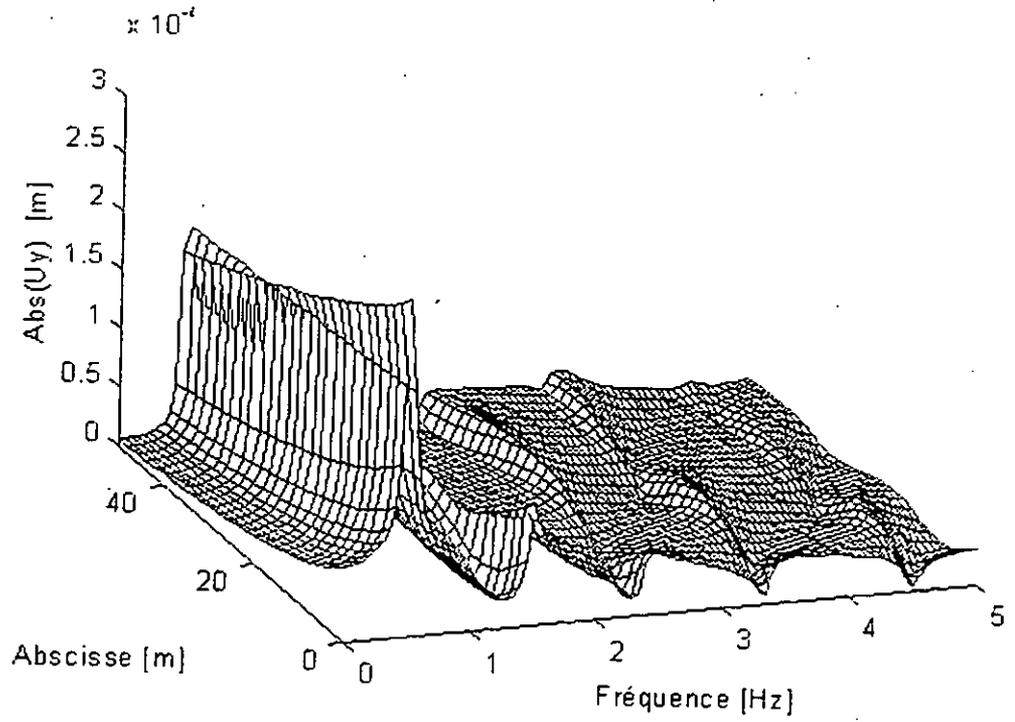


Figure (6.17) : Déplacement anti-plan en champ libre pour le cas da base rigide

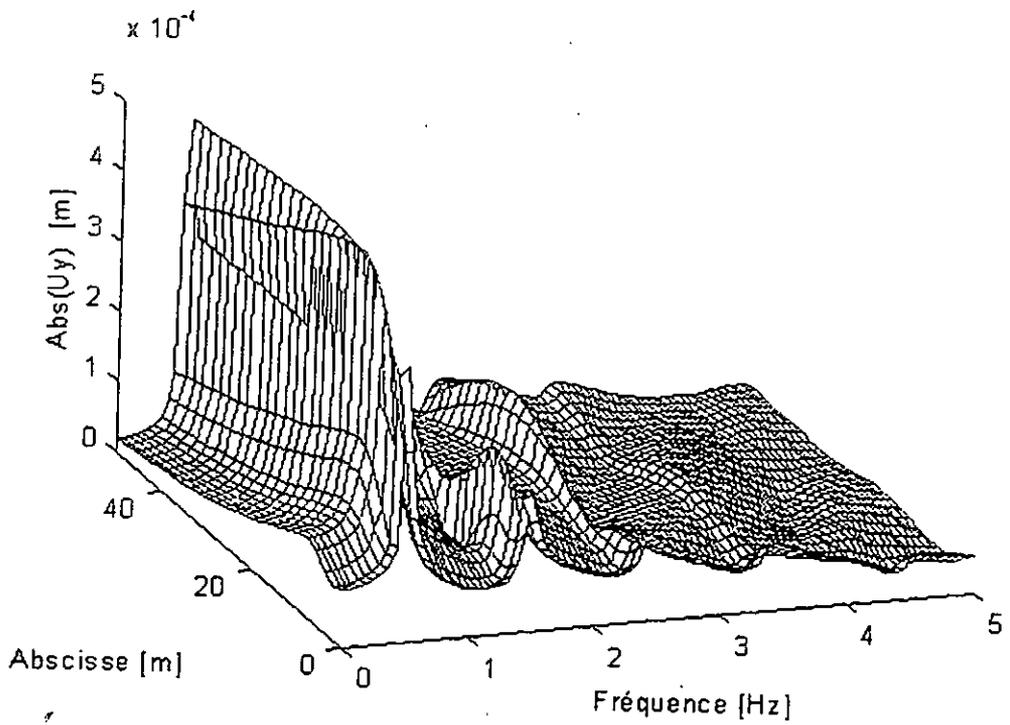


Figure (6.18) : Déplacement anti-plan pour le cas da base rigide

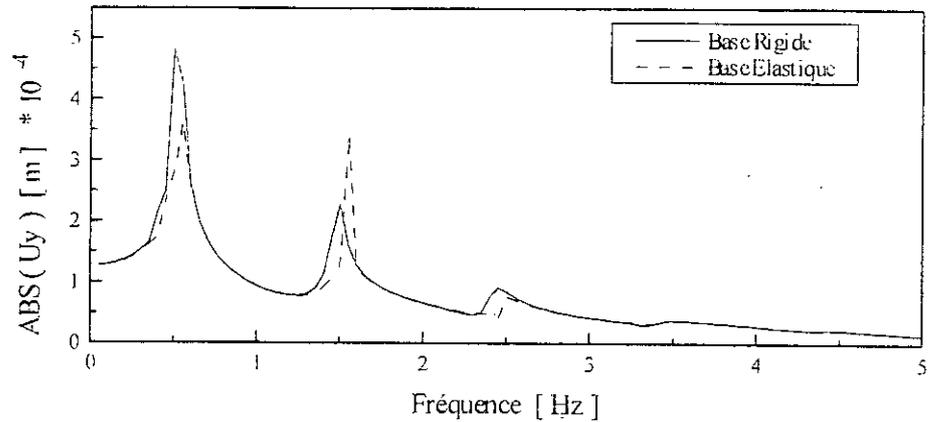


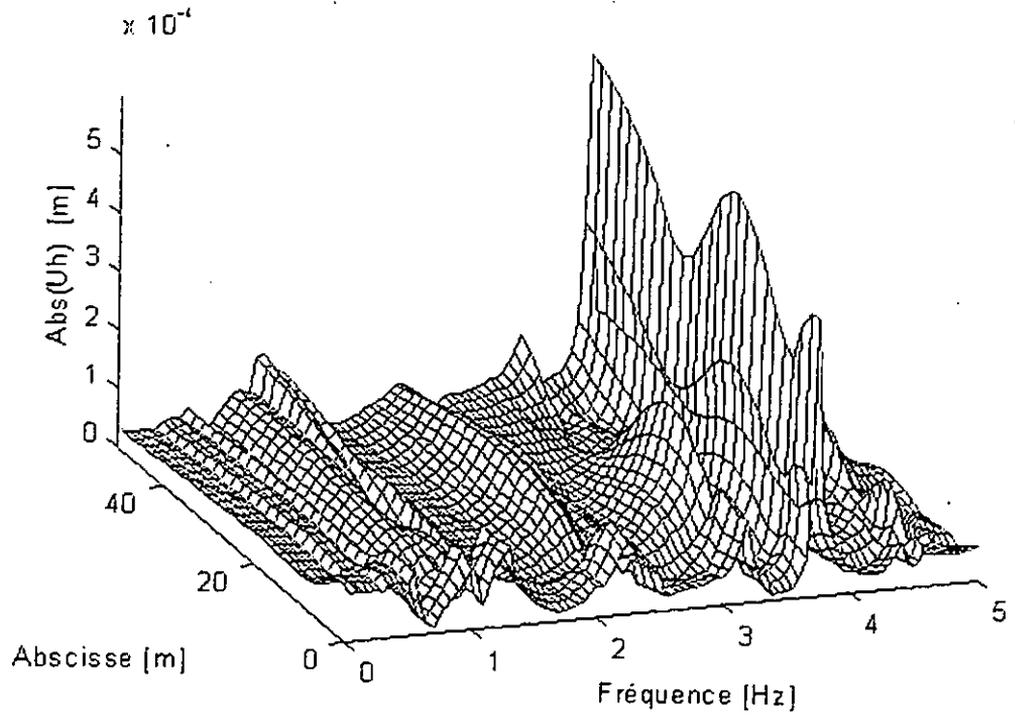
Figure (6.19) : Déplacement anti-plan du tunnel du à une charge unité pour le cas de base rigide.

Il est à noter que dans l'exemple traité, la base possède une rigidité très importante par rapport aux couches supérieures, ce qui suggère que pour des demi-espaces moins rigides, les phénomènes précités s'amplifient encore plus. Mais, ce cas n'est pas très réaliste.

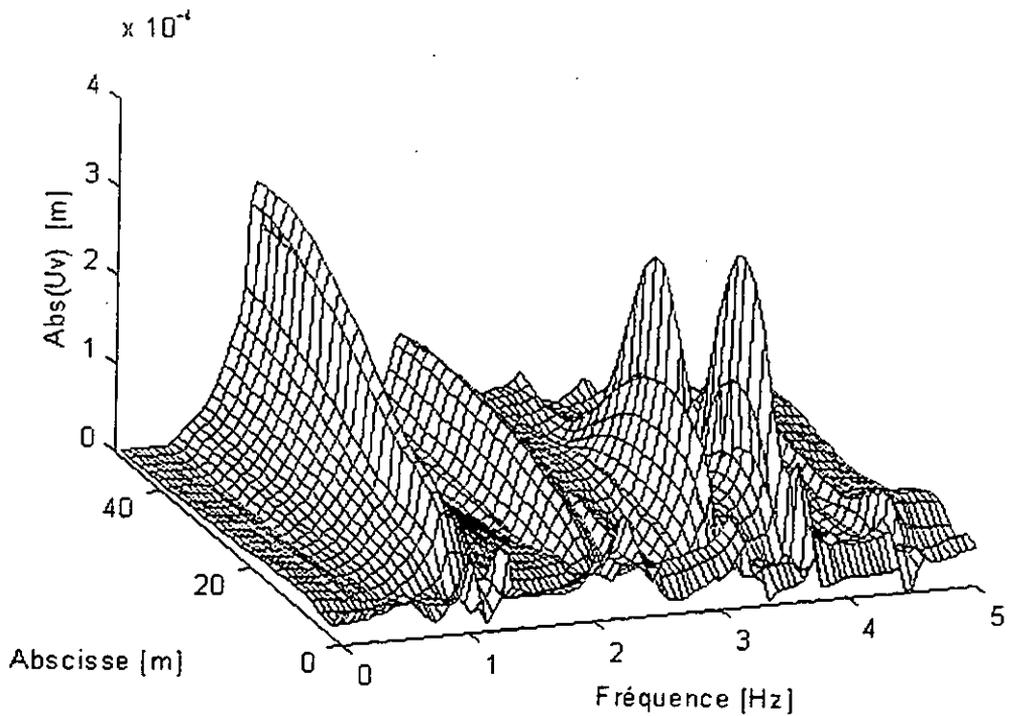
Pour ce qui est du cas anti-plan, les figures (6.17) et (6.18) montrent que la base rigide amplifie énormément le mouvement pour la première fréquence propre et des fréquences voisines mais que son effet est faible pour les grandes fréquences. Quand au mouvement du tunnel en figure (6.19), la base rigide agit essentiellement sur son amplitude et non sur sa forme.

#### 6.2.4. Effet de la masse du tunnel

La sensibilité des résultats à la masse du tunnel est étudiée dans cette section en considérant le cas du tunnel massique en figure (6.1) et le cas extrême de ce même tunnel sans masse. Ce qui se traduit par une matrice masse  $\tilde{M}$  nulle dans l'équation (5.54). Les déplacements correspondants au dernier cas sont exposés en figures (6.20) à (6.23) pour le cas « in-plan » et en figures (6.24) et (6.25) pour le cas anti-plan.

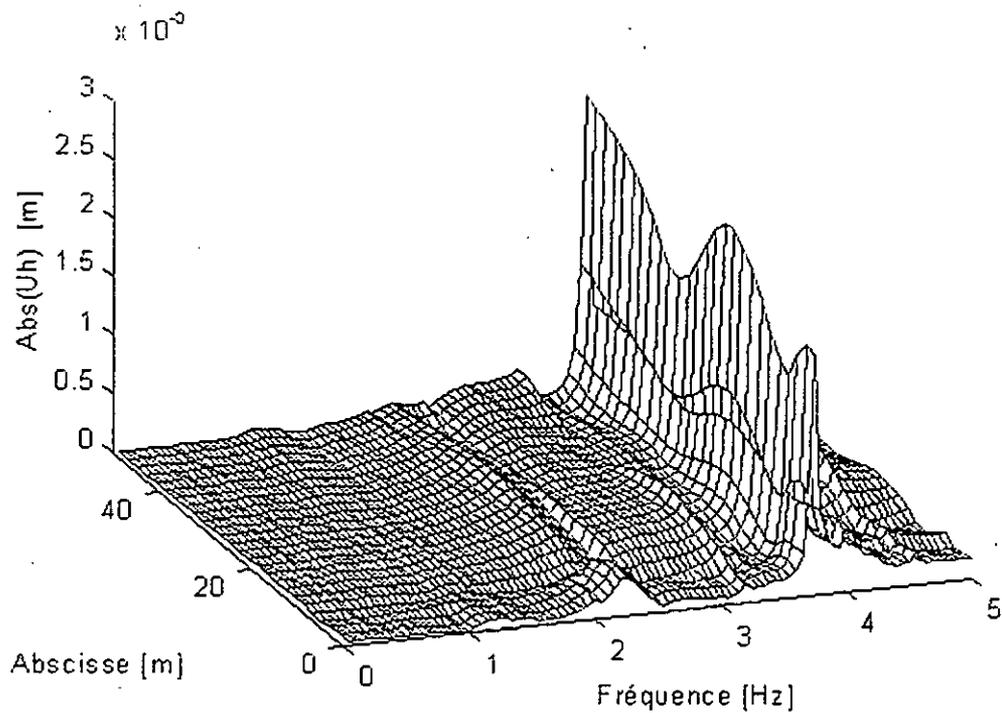


(a)

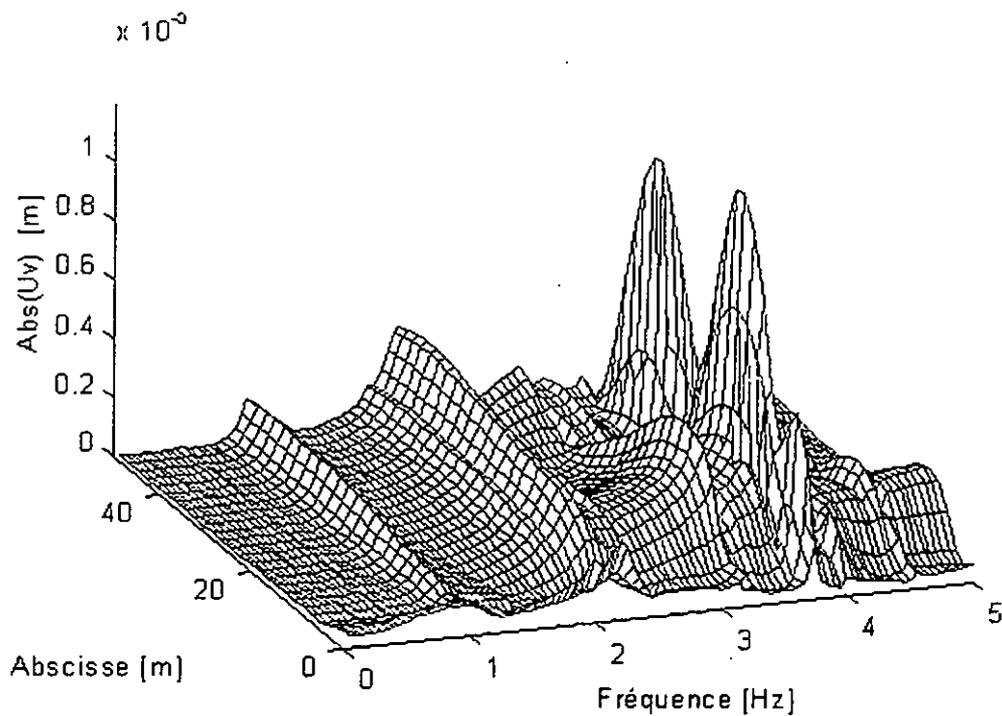


(b)

Figure (6.20) : Déplacements dus à une charge unité horizontale pour le cas de Tunnel sans masse, (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical.

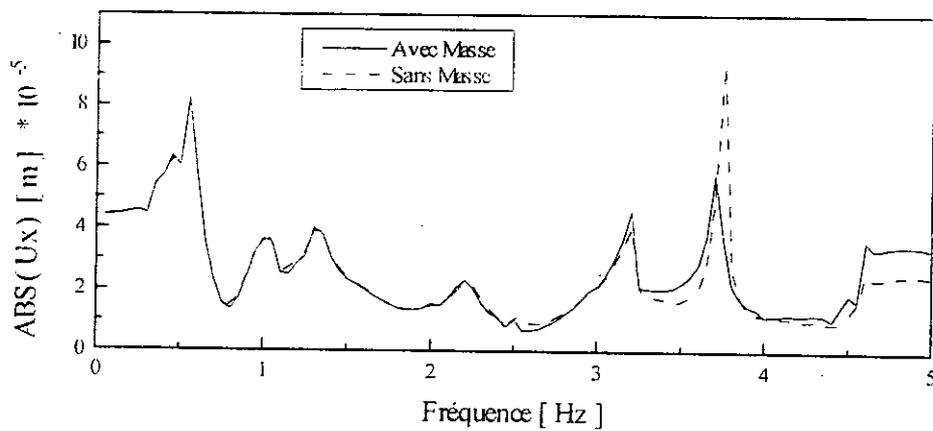


(a)

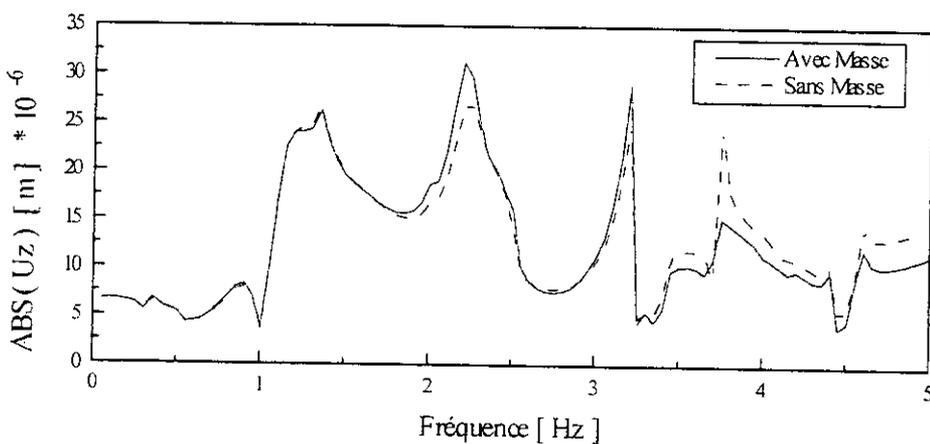


(b)

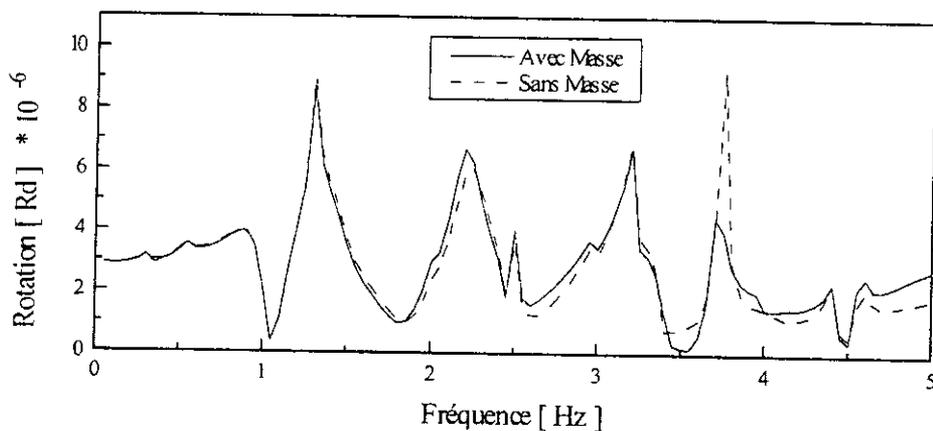
Figure (6.21) : Déplacements dus à une charge unité verticale pour le cas de Tunnel sans masse, (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical.



(a)



(b)



(c)

Figure (6.22) : Déplacements du Tunnel sans masse dus à une charge unité horizontale  
 (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical, (c) : rotation.

Il est clair que, dans tous les cas, la correspondance de ces résultats avec les figures (6.2) à (6.5) pour le cas « in-plan » et avec les figures (6.8) et (6.9) pour le cas anti-plan est très marquée sauf pour des valeurs discrètes de la fréquences qui représentent les fréquences propres du tunnel, et pour lesquels des pics d'amplitudes sont observés.

En effet, l'effet de la masse du tunnel ne prend de l'ampleur que pour des fréquences importantes pour lesquelles se manifestent les forces d'inertie qui prennent de grandes valeurs, étant proportionnelles au carré de la fréquence.

Cette remarque est valable aussi pour les mouvements du tunnel en figures (6.22) et (6.23), ainsi que la figure (6.25) où la concordance entre les deux cas (avec et sans masse) est parfaite pour les faibles fréquences. Pour ce qui est des fréquences importantes, une dispersion relative est remarquée et spécialement au voisinage de 3.75 Hz c'est-à-dire pour des fréquences proches de la fréquence propre du tunnel.

Cependant, cette dispersion diminue lorsqu'on considère une masse approximée du tunnel. Ce indique que la connaissance de la masse exacte du tunnel n'est pas indispensable, une valeur approchée de cette grandeur conduit à des résultats très satisfaisants.

Pour le cas anti-plan, la dispersion apparaît pour une fréquences de l'ordre de 1.6 Hz, mais les mêmes remarques que celles émises précédemment peuvent être formulées pour ce cas.

### 6.2.5 Effet de la configuration du sol

Cette section a été dictée par les valeurs importantes des déplacements que donne la configuration choisie (qui en fait la configuration moyenne du sol de la ville de Mexico). Pour se faire nous considérons, en plus du profil de la figure (6.1), un autre profil plus « stable » exposé en tableau (6.1) [36], les caractéristiques du tunnel étant les mêmes que celles de l'exemple précédent sauf que dans le cas présent le tunnel est à une profondeur de 5.0 m. Les résultats de ce dernier cas sont exposées en figures (6.26) à (6.31) pour le cas « in-plan » et en figures (6.32) à (6.34) pour le cas anti-plan.

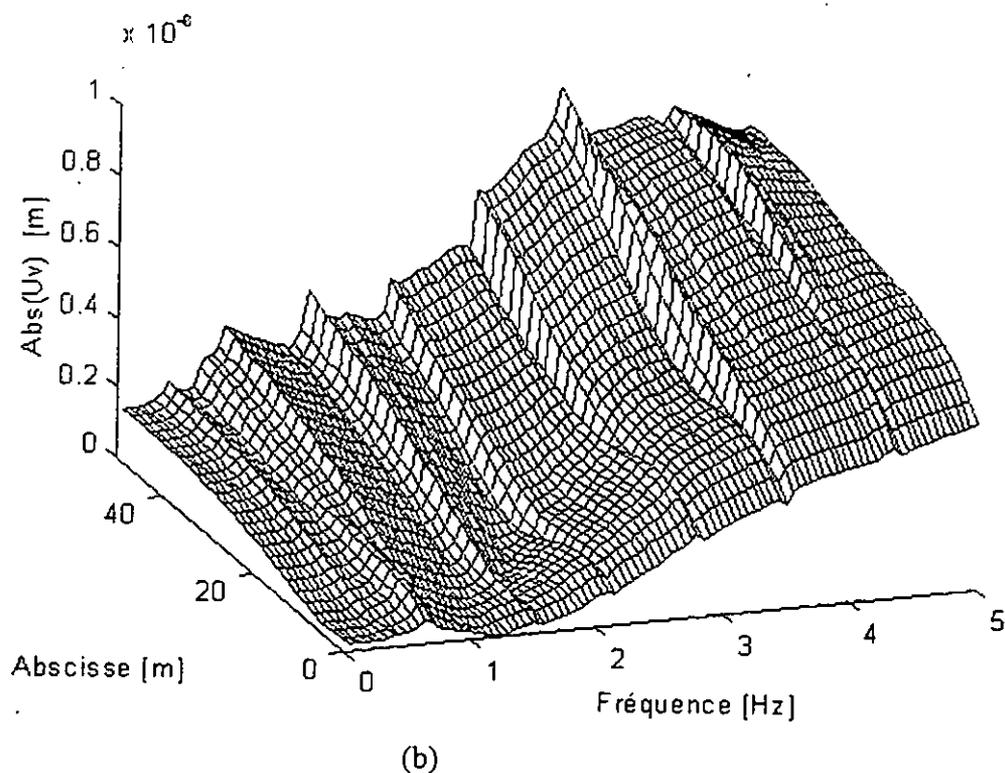
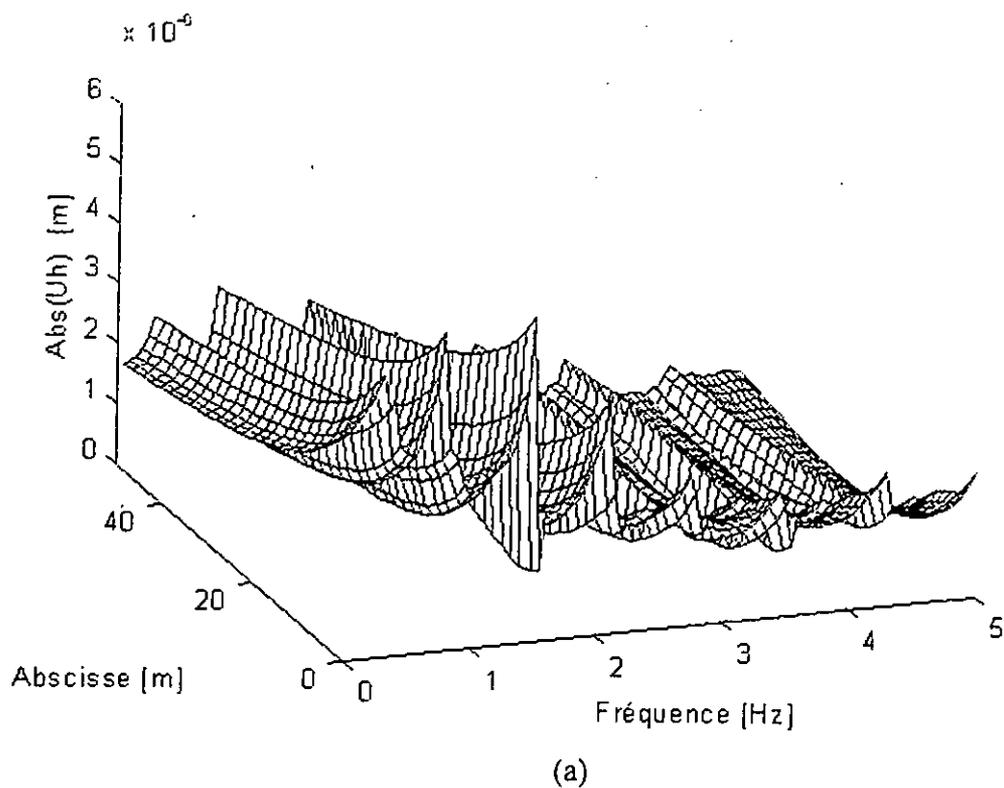
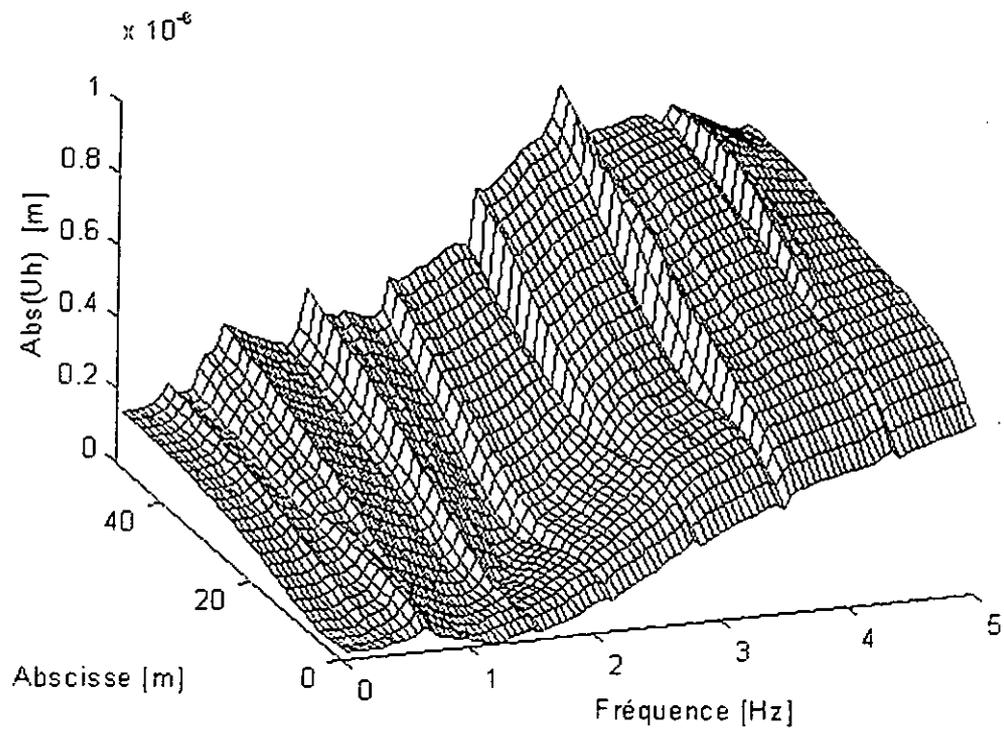
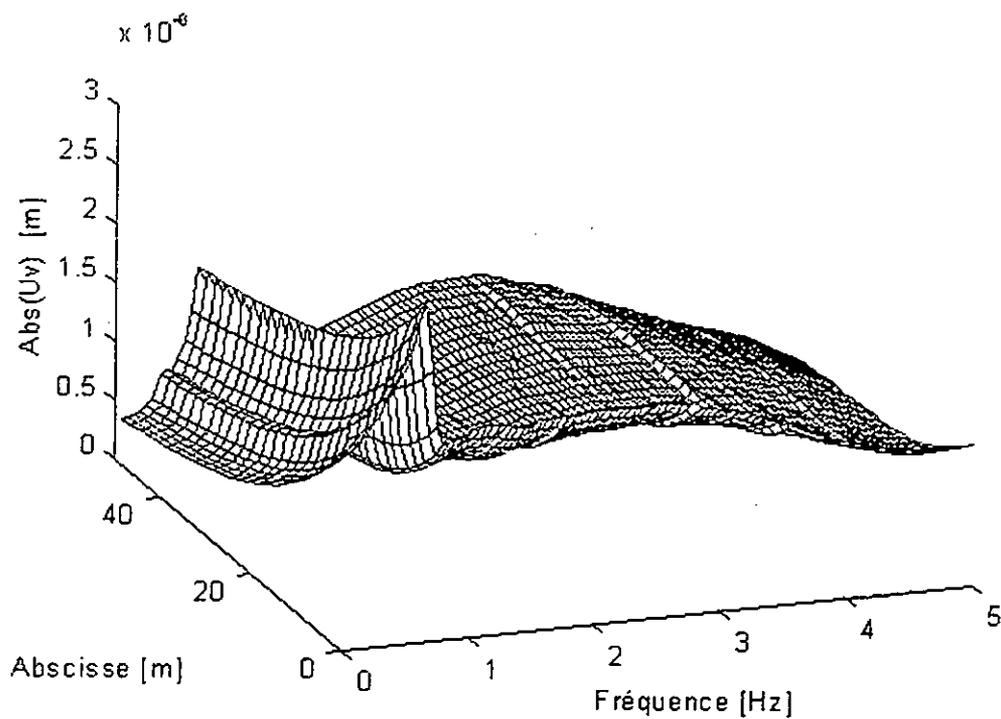


Figure (6.26) : Déplacements en champ libre dus à une charge horizontale unité pour le sol 2, (a) : déplacement horizontal, (b) : déplacement vertical



(a)



(b)

Figure (6.27) : Déplacements en champ libre du à une charge verticale unité pour le sol 2, (a) : déplacement horizontal, (b) : déplacement vertical

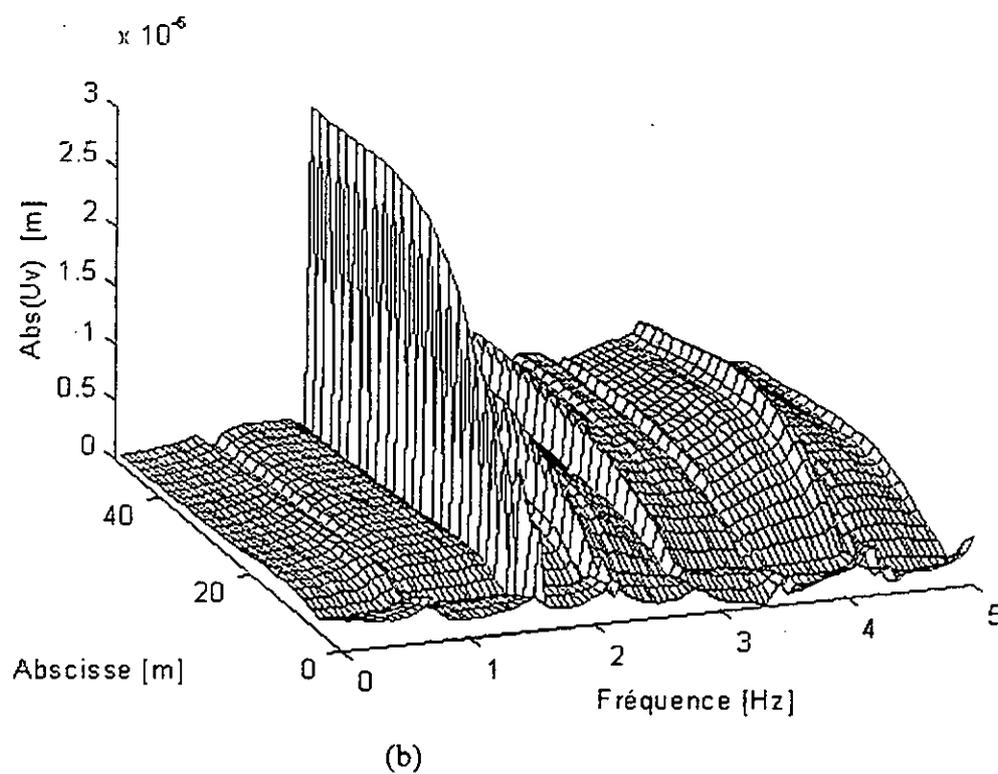
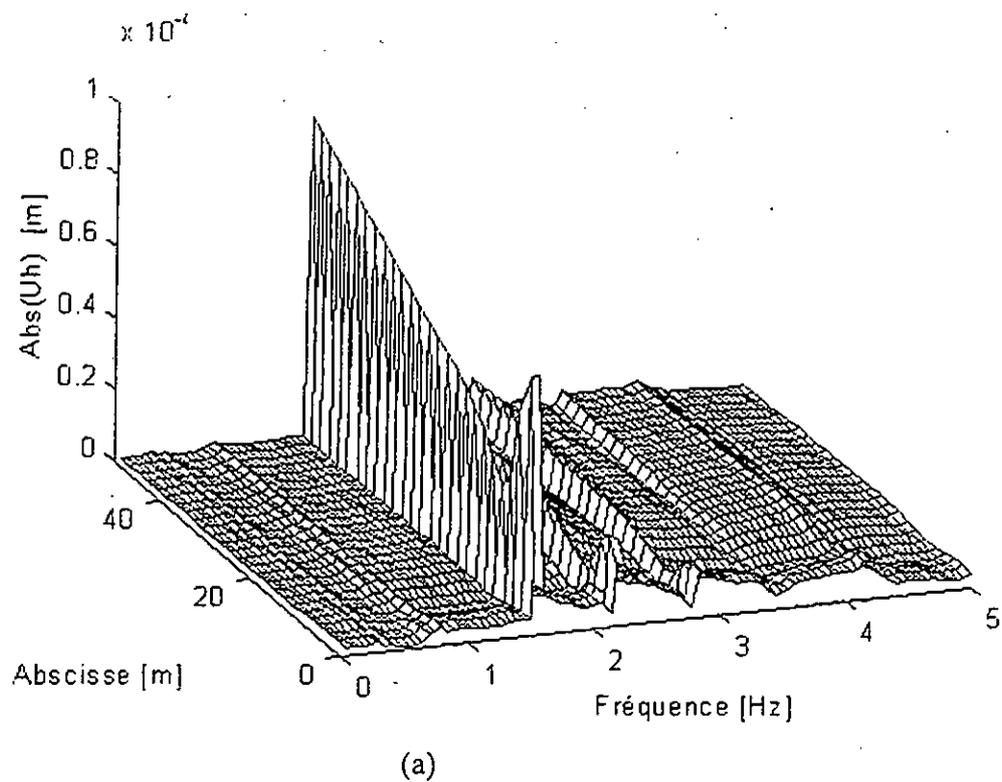
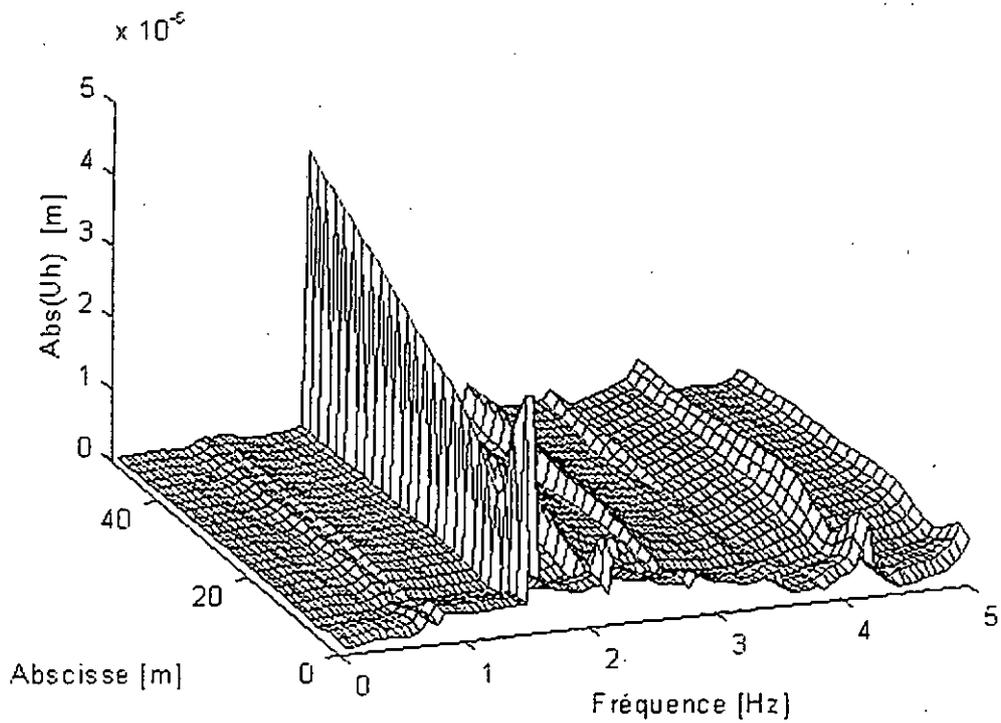
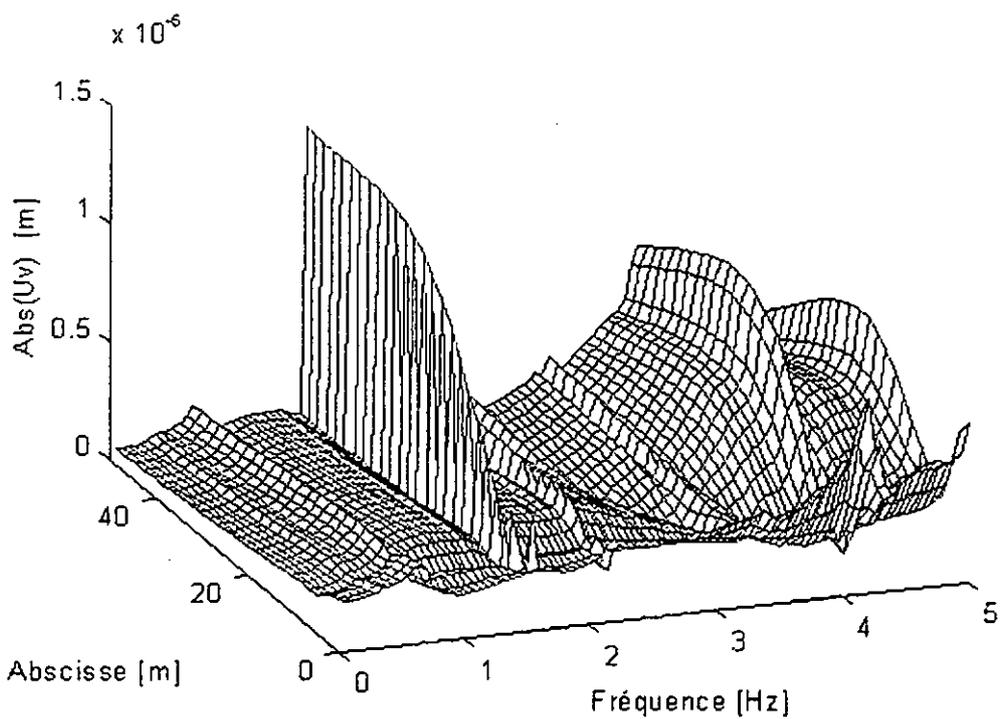


Figure (6.28) : Déplacements dus à une charge horizontale unité pour le sol 2  
(a) : déplacement horizontal, (b) : déplacement vertical

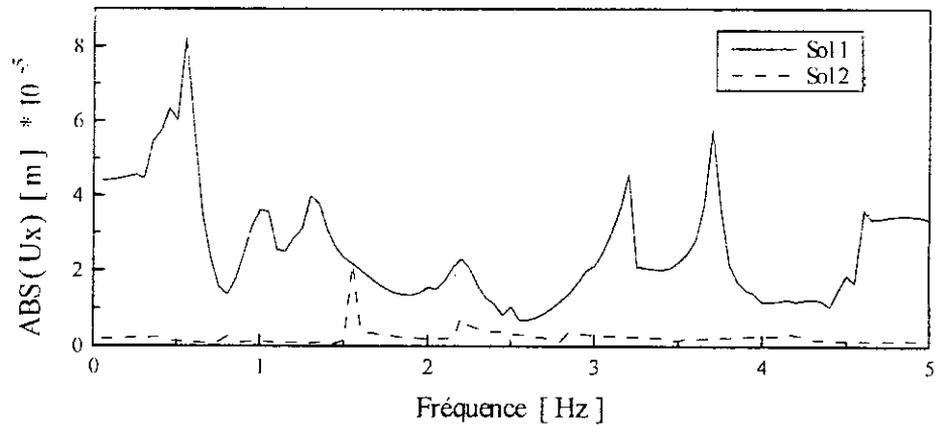


(a)

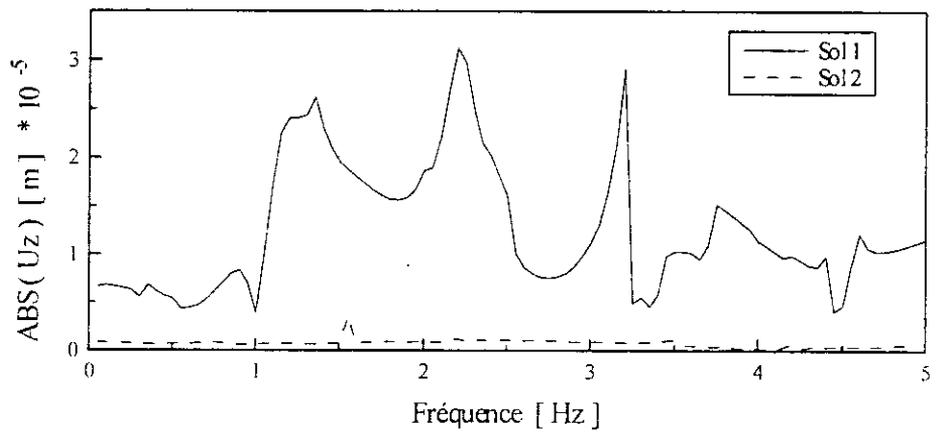


(b)

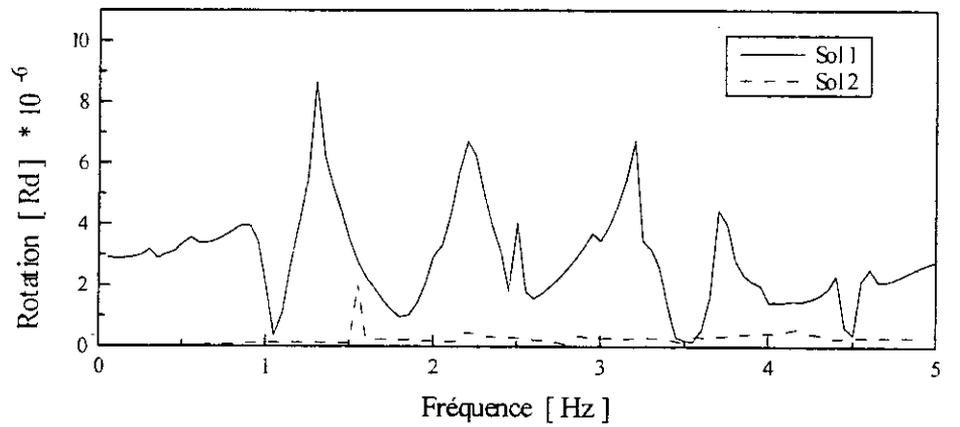
Figure (6.29) : Déplacements dus à une charge verticale unité pour le sol 2  
 (a) : déplacement horizontal, (b) : déplacement vertical



(a)

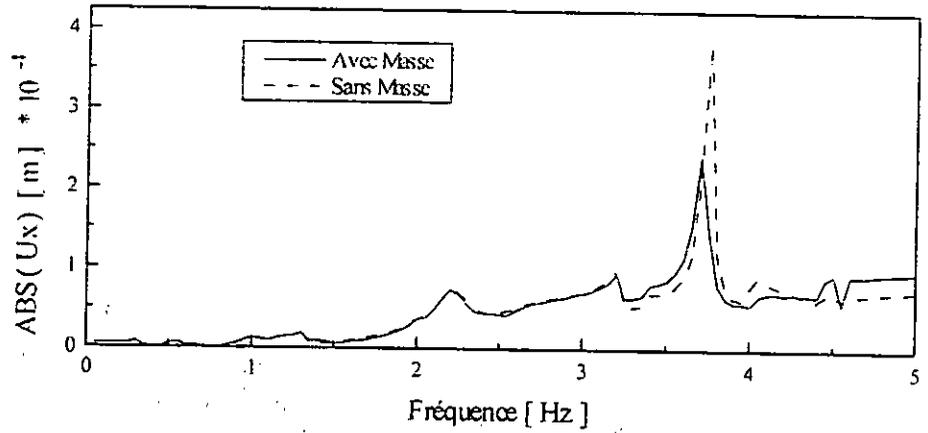


(b)

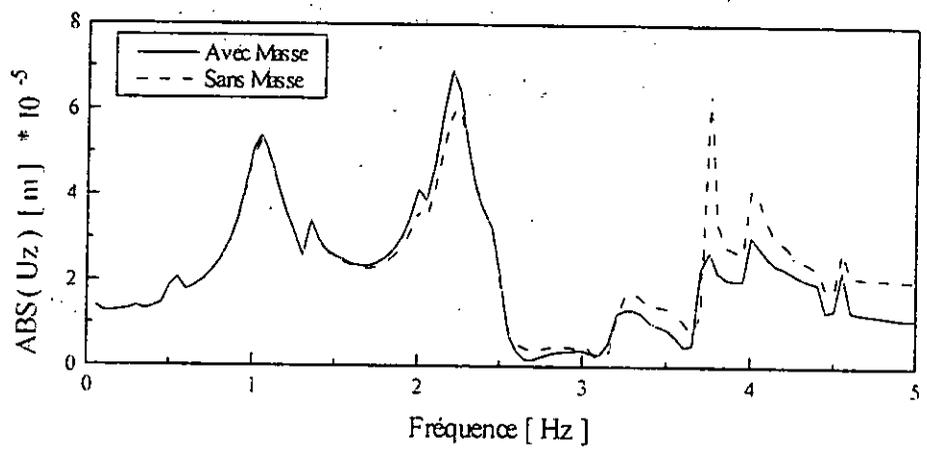


(c)

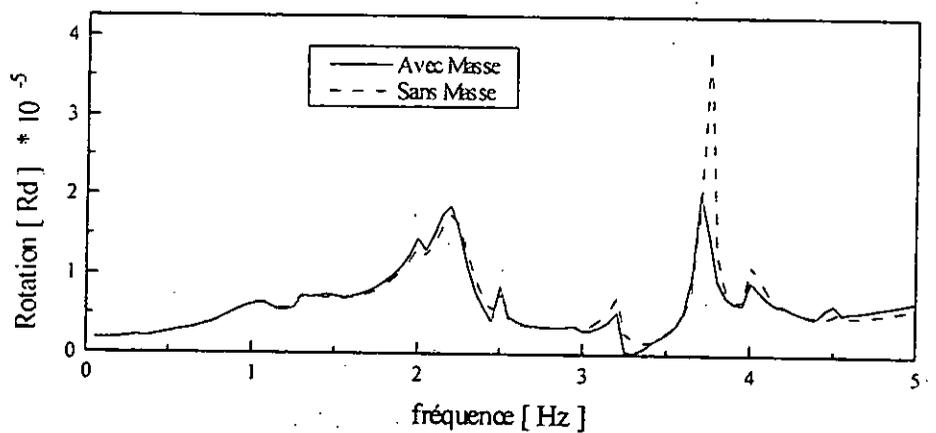
Figure (6.30) : Déplacements du Tunnel dus à une force horizontale unité pour le cas de sol 2, (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical ; (c) : rotation.



(a)



(b)



(c)

Figure (6.23): Déplacements du Tunnel sans masse dus à une charge unité verticale  
 (a) : déplacement horizontal ; (b) : déplacement vertical, (c) : rotation.

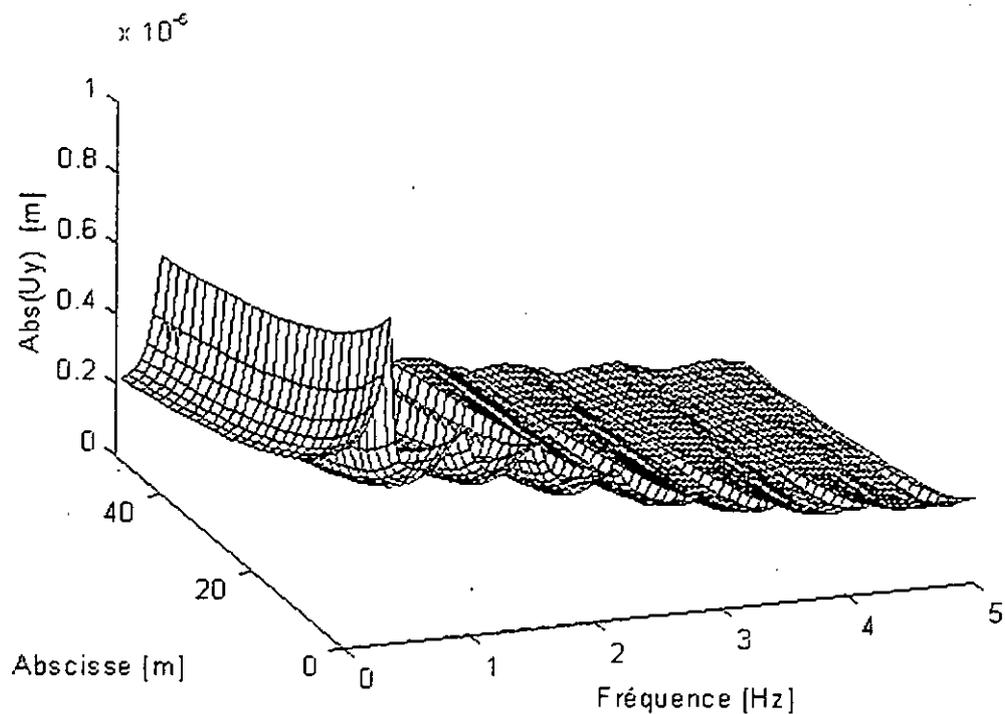


Figure (6.32) : Déplacement anti-plan en champ libre dans le sol 2

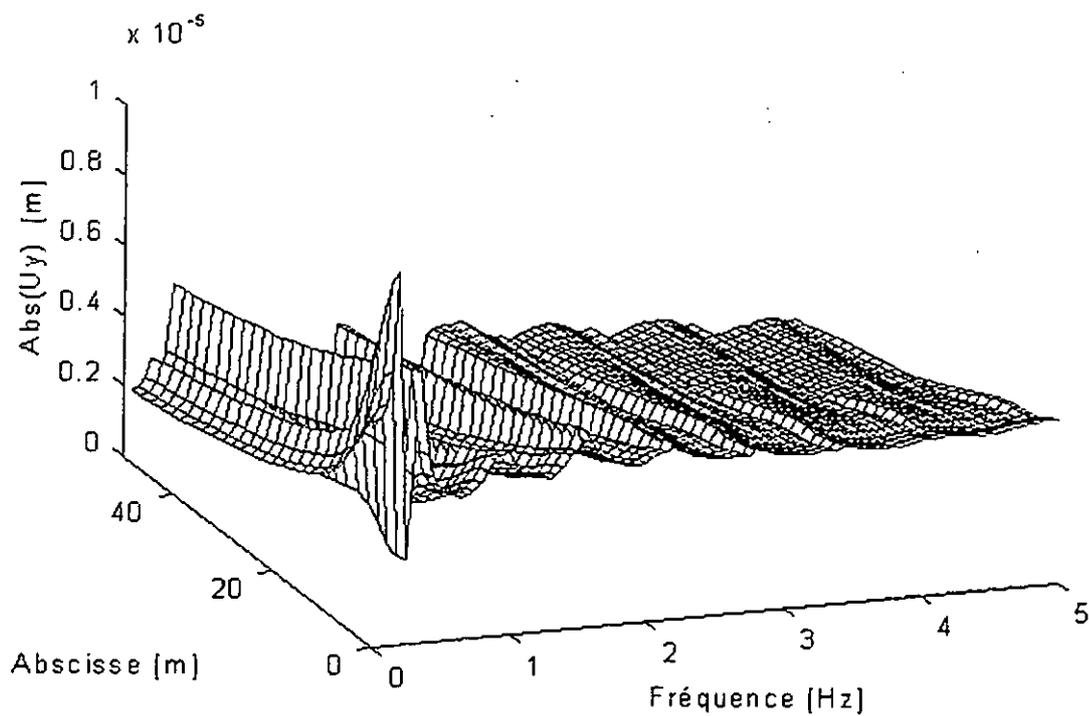


Figure (6.33) : Déplacement anti-plan dans le sol 2

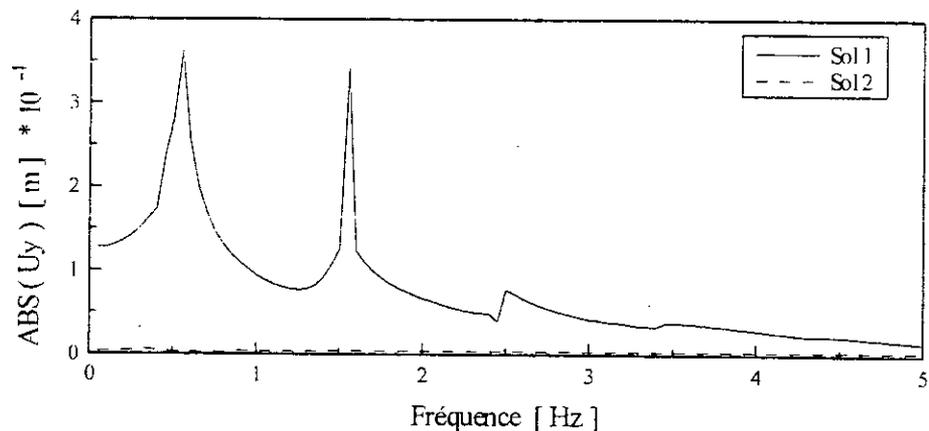


Figure (6.34) : Déplacement anti-plan du Tunnel dans le sol 2

No couche	Epaisseur [m]	$C_s$ [m/s]	$\gamma$ [t/m <sup>3</sup> ]	$\beta$
1	3	218	1.633	0.10
2	36	274	1.959	0.07
3	21	366	2.041	0.02
4	150	397	2.041	0.02
5	125	457	2.143	0.02
Demi-espace		2440	2.450	0.01

Tableau (6.1)

Il est clair de ces figures comparées aux figures (6.2) à (6.10) que les déplacements dans ce dernier cas sont plus faibles que ceux de la configuration précédente. Cette remarque peut être expliquée par le fait que le sol du tableau (6.1) soit plus rigide et donc à situation de chargement identique avec le sol de la figure (6.1), celui-ci se déforme moins. Il y a aussi le facteur d'amortissement plus élevé dans le deuxième cas ce qui tend à dissiper les ondes émises en surface.

Mais sans doute le facteur le plus important, c'est la présence dans la première configuration de la troisième couche, moins rigide que les deux couches qui la limitent en haut et en bas, ce qui induit des réflexions importantes pour les ondes ascendantes ou descendantes et par conséquent l'onde est « emprisonnée » au niveau de cette couche ce qui

induit des interférences constructives importantes, et qui augmente considérablement les amplitudes des ondes même pour des signaux de faible intensité.

Cependant une remarque est à faire pour la deuxième configuration est le faite que la présence du tunnel tend à amplifier considérablement le mouvement à certaines fréquence propres tout en restant en déca des amplitudes de la première configuration.

### 6.2.6. Effet de l'anisotropie

Nous nous intéressons, à présent, à l'effet de l'anisotropie su le comportement des sols en présence de tunnel. A cet effet, nous considérons trois cas, correspondants à trois valeurs du coefficient d'anisotropie  $\nu_a = 0.5$ ,  $\nu_a = 1.0$  (cas isotrope) et  $\nu_a = 2.0$ .

Dans tous les cas la rigidité du sol augmente substantiellement avec la coefficient  $\nu_a$ . En fait pour des valeurs de  $\nu_a$  tendant vers 4, toutes les rigidités tendent vers l'infini, et l'énergie de déformation d'un tel matériau est nulle pour tout système de charge extérieur [16].

Pour ce cas , ne sont exposés que les résultats « in-plan » des mouvements verticaux en surface dus à des charges verticales, étant donné que ce qui nous intéresse dans la présente étude c'est le coté qualitatif beaucoup plus que le coté quantitatifs. Alors que pour les mouvements du tunnel nous considérons les charges horizontales et verticales pour le cas « in-plan ». Les résultats sont exposés en figures (6.35) à (6.40).

Ces résultats indiquent que l'effet de l'anisotropie est plus marqué pour les déplacements horizontaux que pour les mouvements verticaux (figures (6.39) et (6.40)).

Dans tous les cas, l'amplitude du mouvement diminue avec le coefficient d'anisotropie  $\nu_a$ . Cette règle est accompagnée d'un déplacement des fréquences propres vers la droite.

A certaines grandes fréquences (fréquences propres), cependant, ces déplacements augmentent mais néanmoins leurs amplitudes restent assez faibles.

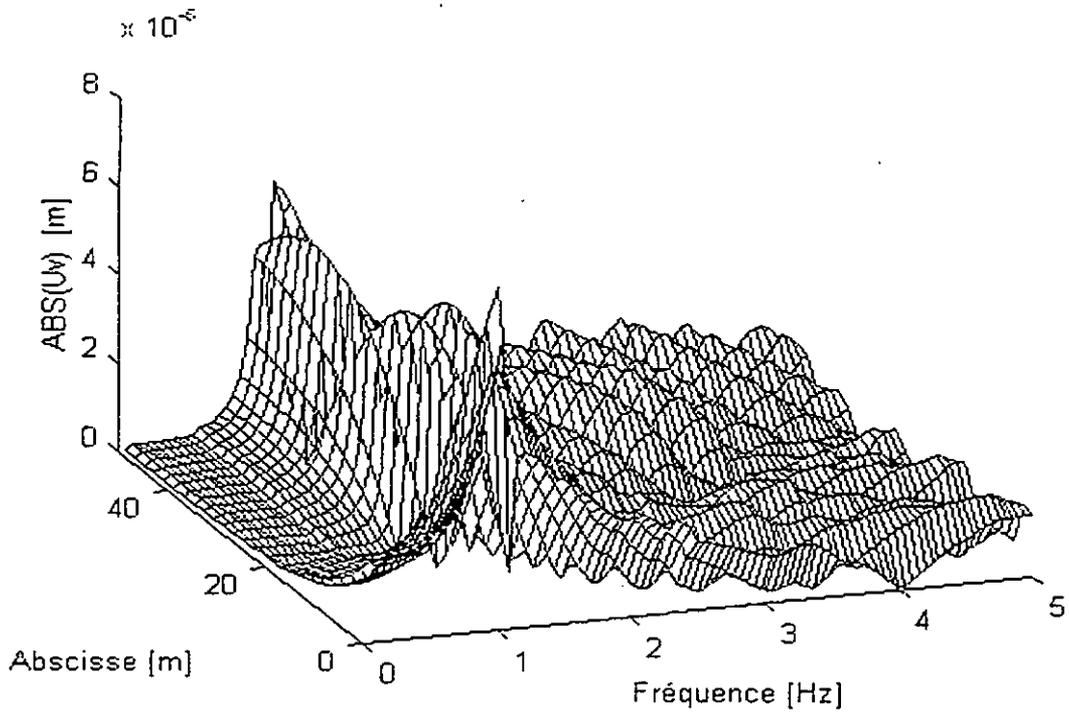


Figure (6.35) : Déplacement vertical en champ libre du à une force verticale pour  $n_a = 0.5$

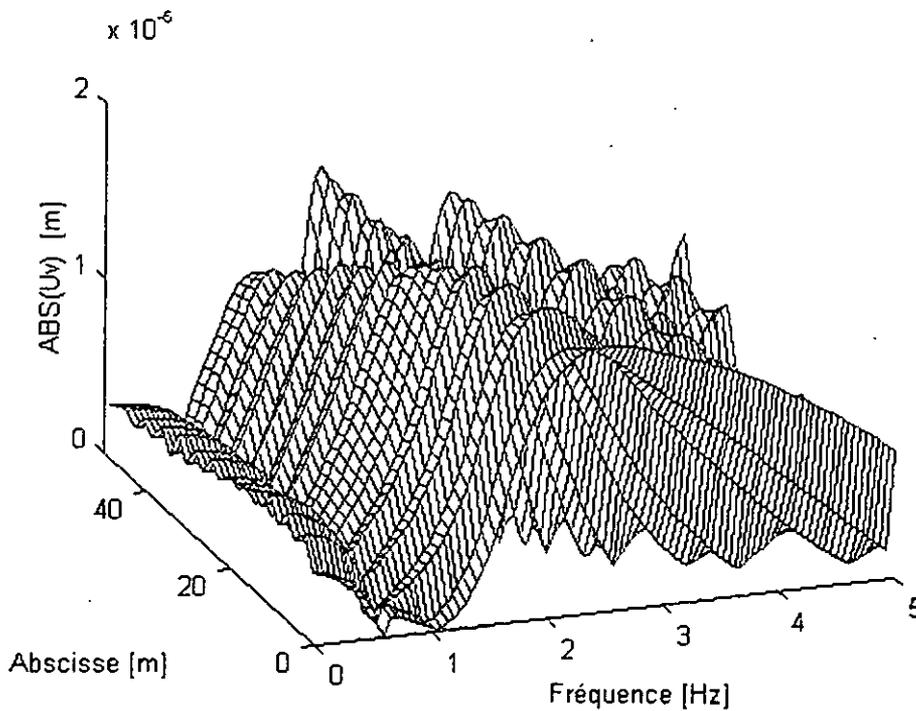


Figure (6.36) : Déplacement vertical en champ libre du à une force verticale pour  $n_a = 2.0$

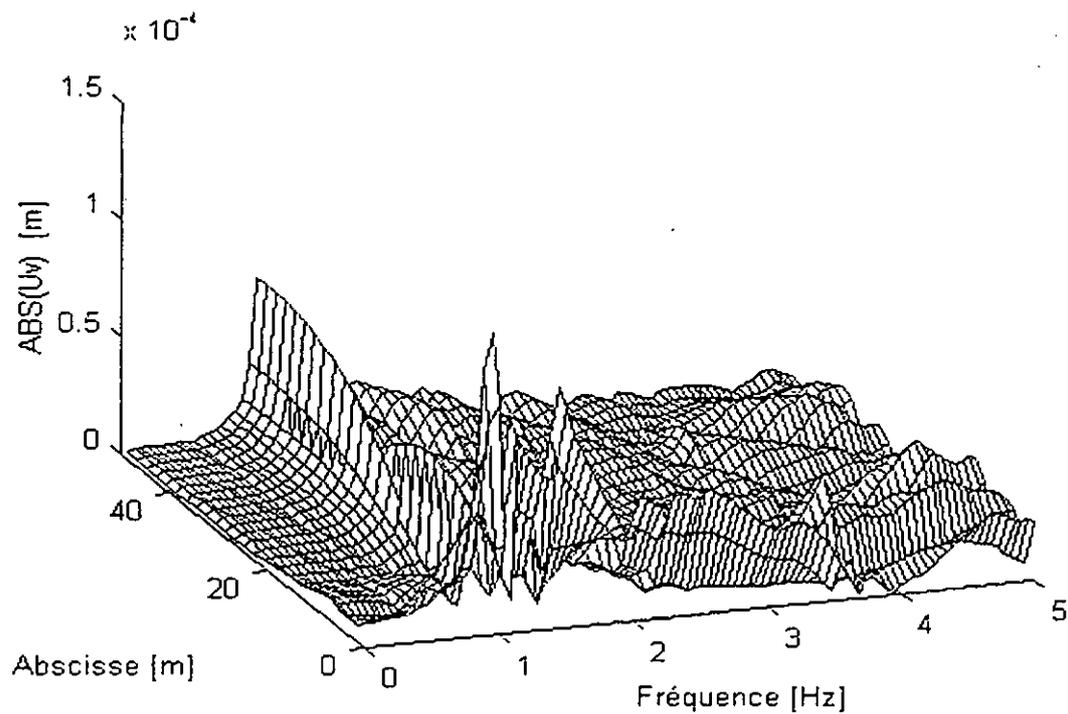


Figure (6.37) : Déplacement vertical du à une force verticale pour  $n_a = 0.5$

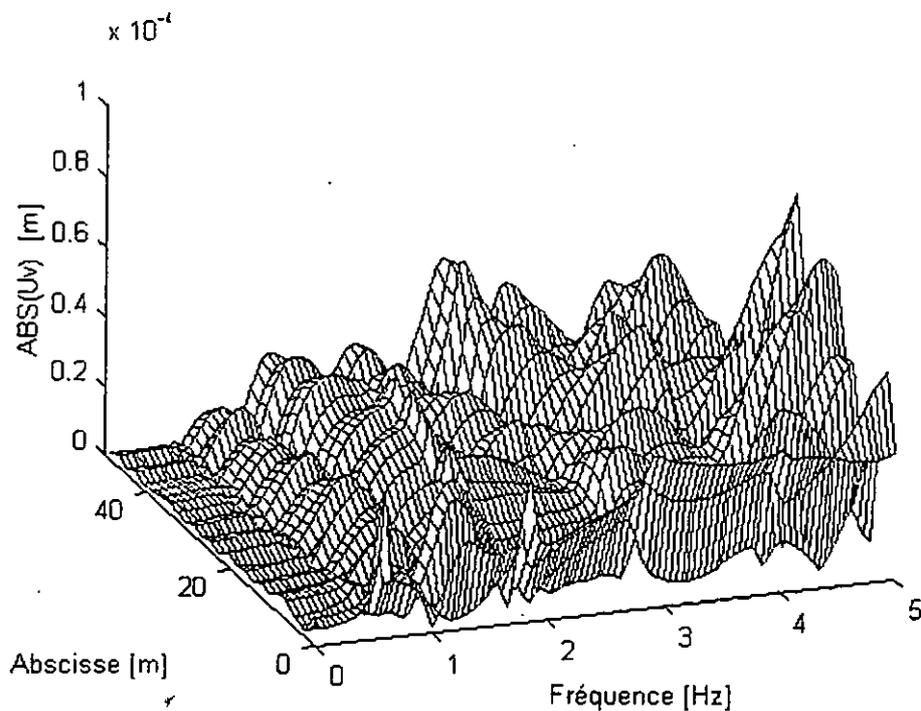
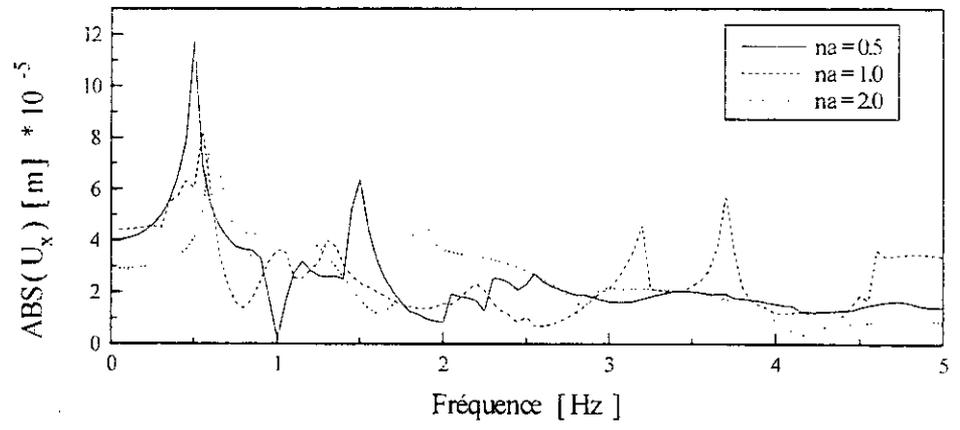
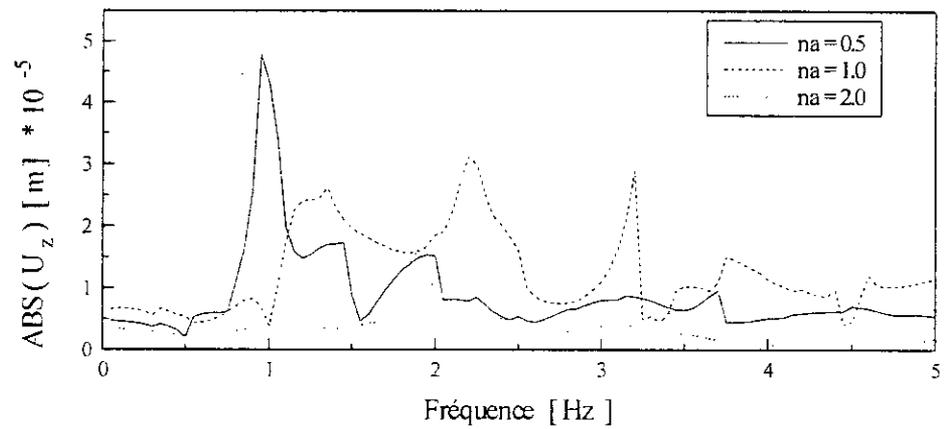


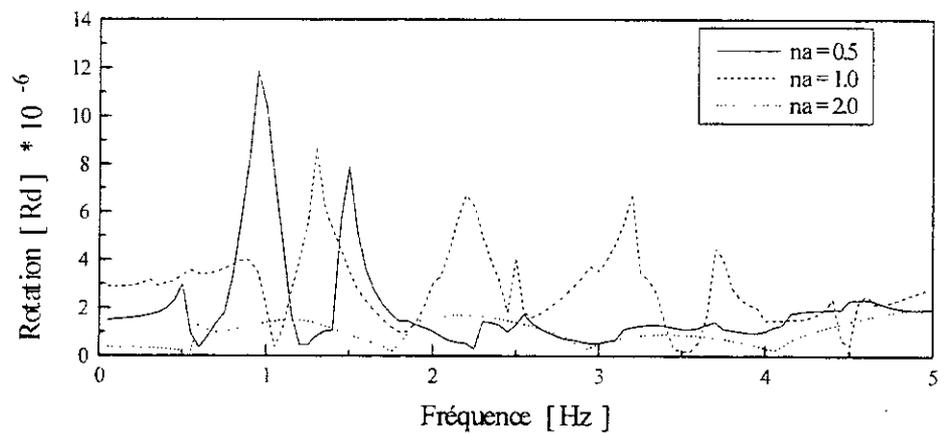
Figure (6.38) : Déplacement vertical du à une force verticale pour  $n_a = 2.0$



(a)

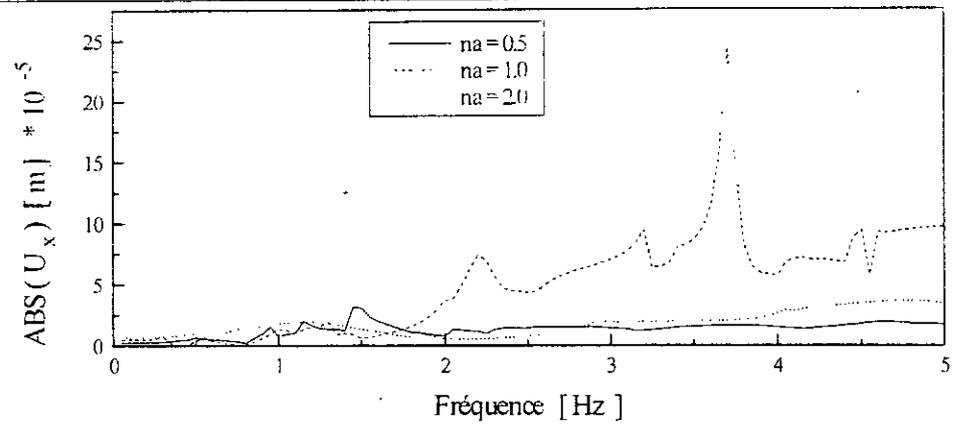


(b)

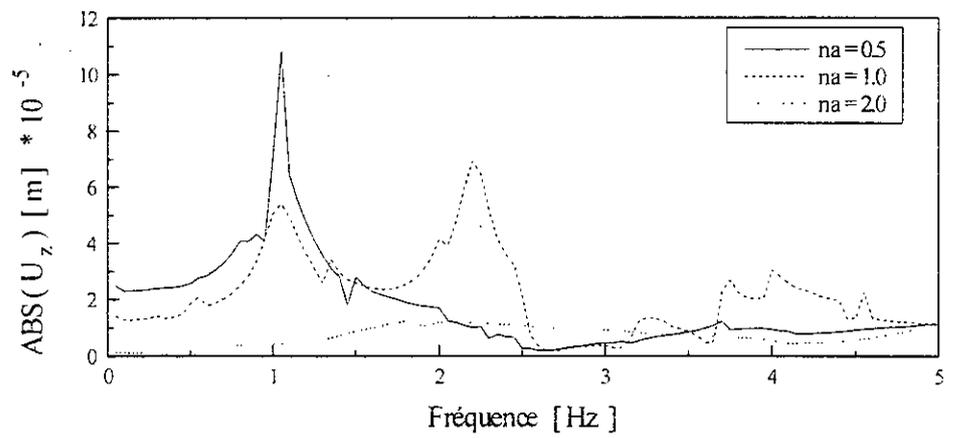


(c)

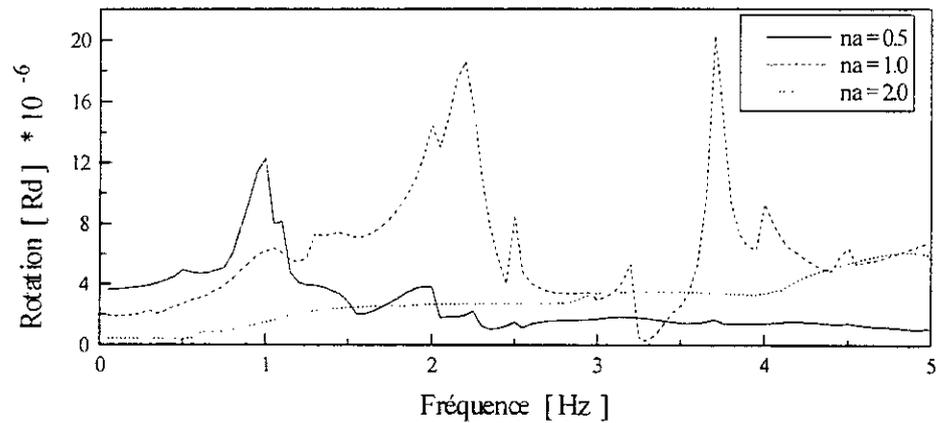
Figure (6.39) : Déplacement du Tunnel du à une force horizontale sous l'effet des l'anisotropie



(a)



(b)



(c)

Figure (6.40) : Déplacement du Tunnel du à une force verticale sous l'effet de l'anisotropie

### 6.2.7. Charges statiques-charges dynamiques

Dans cette section, nous étudions l'effet des charges dynamiques en comparaison avec les charges statiques. Idem que pour le cas précédent, cette étude est essentiellement qualitative car les résultats dépendent étroitement de la fréquence choisie. Ainsi, nous considérons trois valeurs des fréquences : la fréquence nulle (cas statique), 2 et 5 Hz.

Les résultats sont exposés en figures (6.41) à (6.49). Ces figures donnent les courbes comparatives des mouvements en surface à différents cas de charges en fonction de la position des points par rapport à l'axe transversal du tunnel pour les trois valeurs des fréquences.

La remarque principale que nous pouvons émettre est que les courbes « dynamiques » décrivent des trajectoires vibratoires plus ou moins sinusoïdales, dont l'amplitude diminue avec l'abscisse, alors que les courbes statiques sont essentiellement décroissantes, et cette décroissance est quasi-exponentielle.

La diminution de des déplacements au voisinage du tunnel, remarquée dans les sections précédentes, est présente dans le cas présent sans pouvoir émettre une règle quand à un éventuel lien avec la fréquence du mouvement.

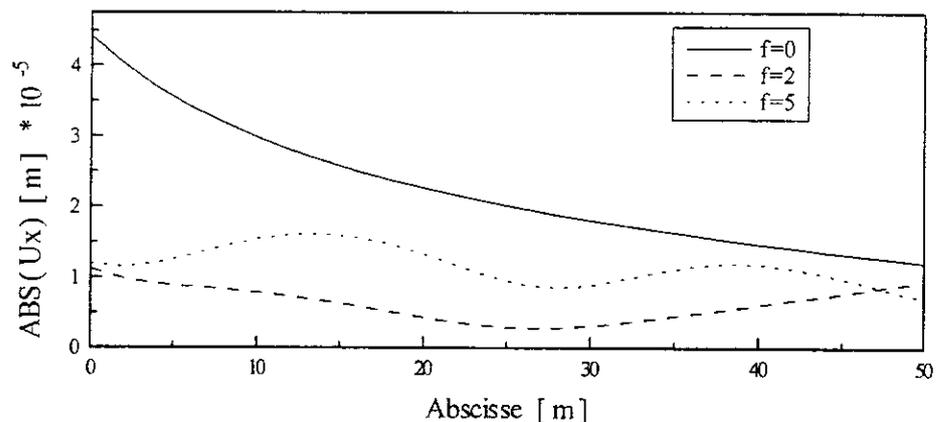


Figure (6.41) : Déplacement horizontal en champ libre du à une force horizontale pour différentes fréquences

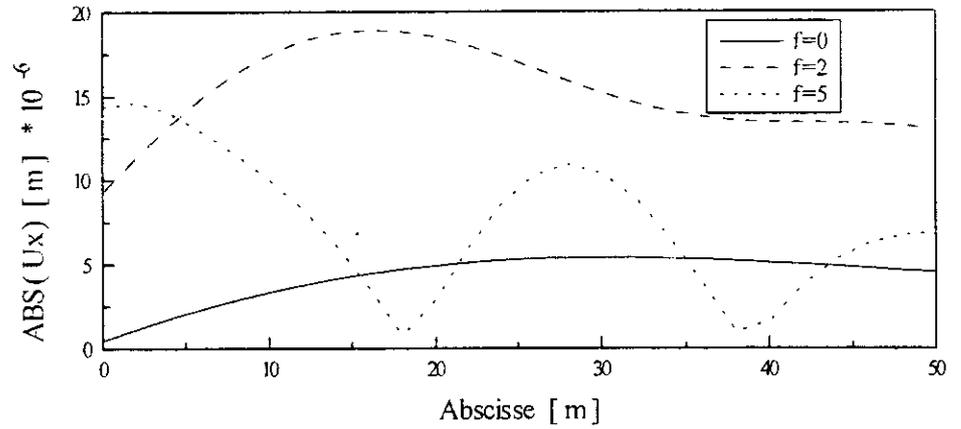


Figure (6.42) : Déplacement horizontal en champ libre du à une force verticale = déplacement vertical du à une force verticale pour différentes fréquences

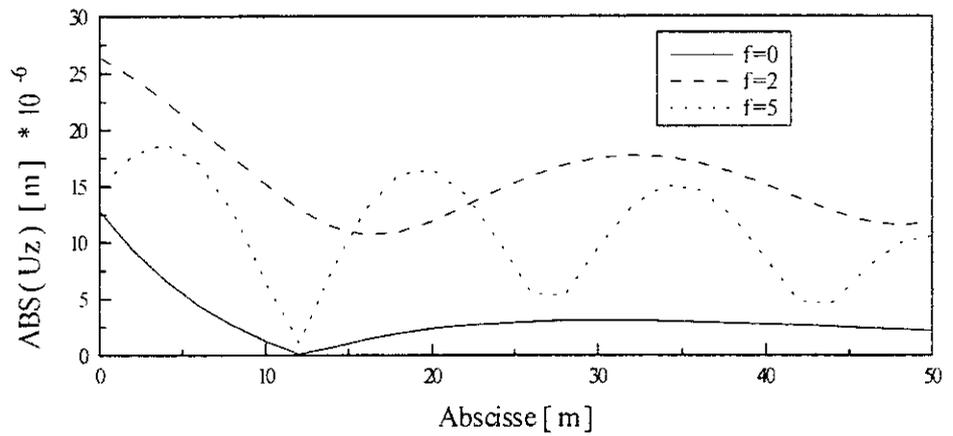


Figure (6.43) : Déplacement vertical en champ libre du à une force verticale pour différentes fréquences

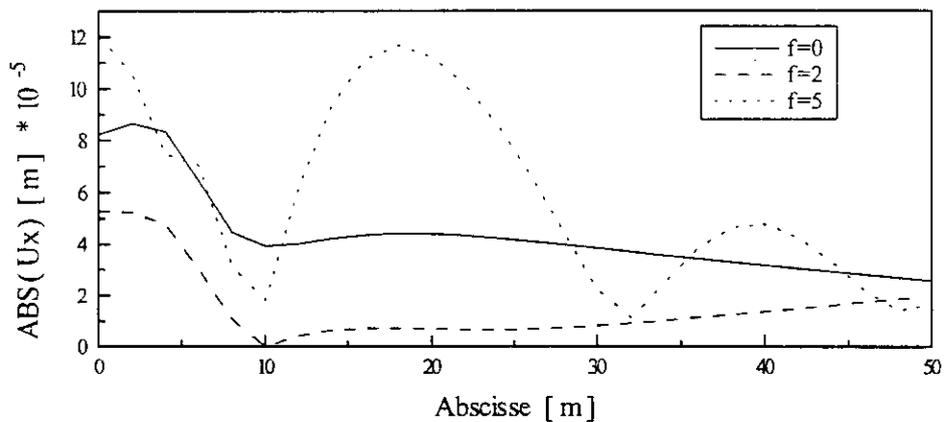


Figure (6.44) : Déplacement horizontal du à une force horizontale pour différentes fréquences

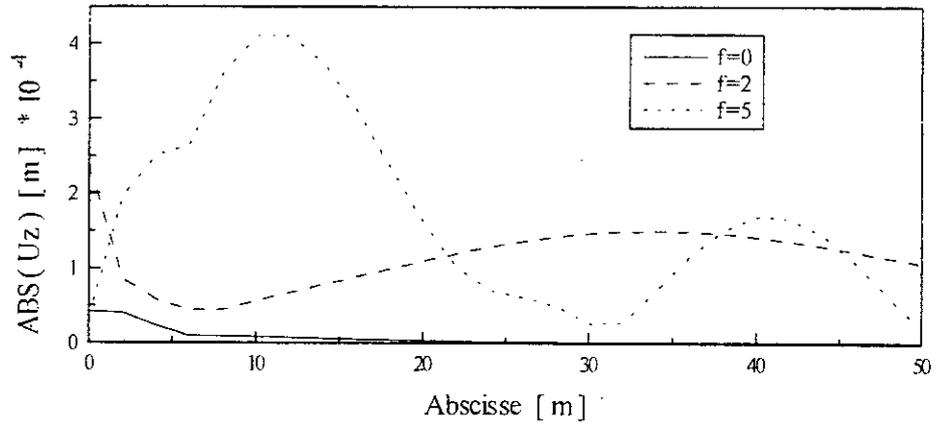


Figure (6.45) : Déplacement vertical du à une force horizontale pour différentes fréquences

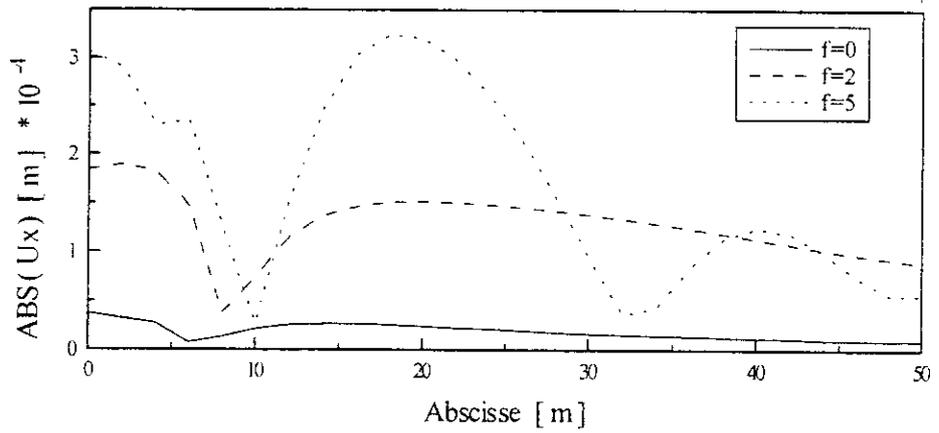


Figure (6.46) : Déplacement horizontal du à une force verticale pour différentes fréquences

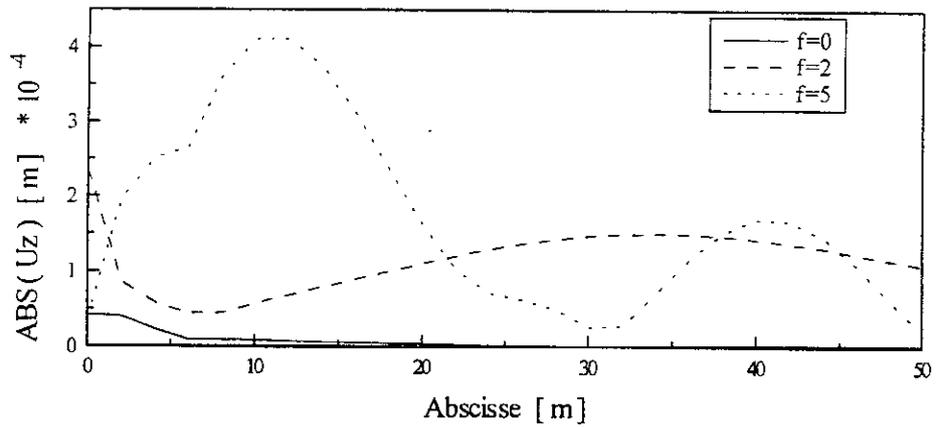


Figure (6.47) : Déplacement vertical du à une force verticale pour différentes fréquences

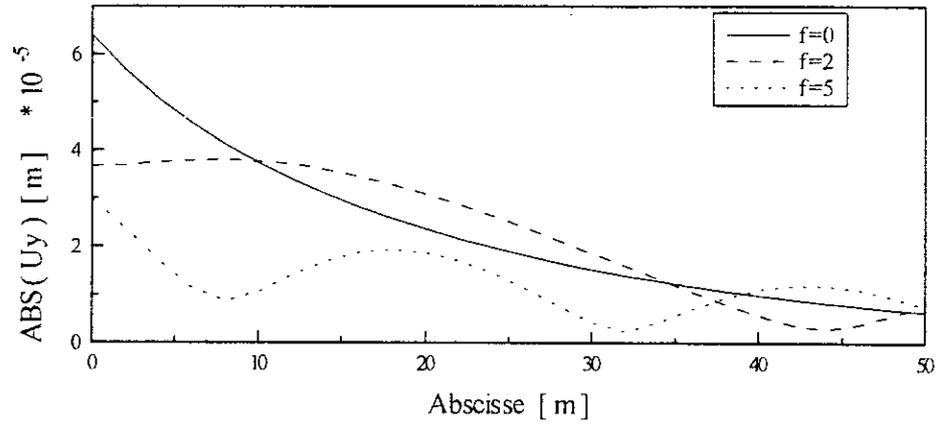


Figure (6.48) : Déplacement anti-plane en champ libre pour différentes fréquences

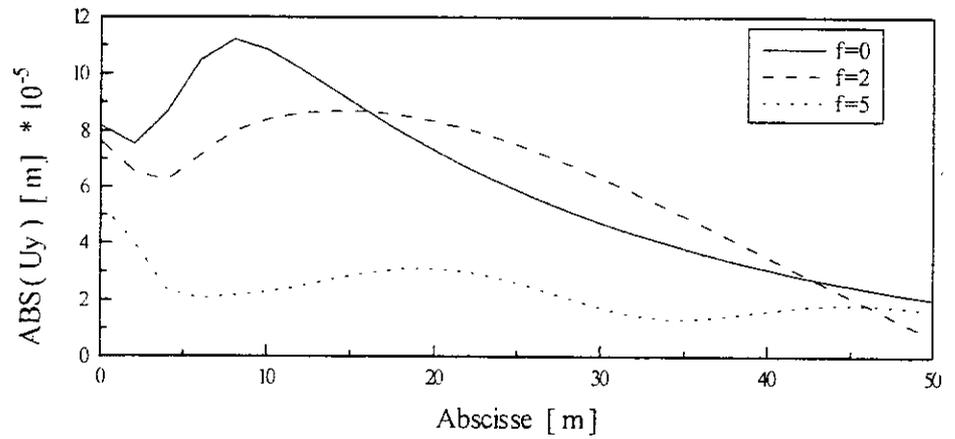


Figure (6.49) : Déplacement anti-plan pour différentes fréquences

### 6.3. Etude du comportement du système sol-tunnel à des charges de trafic

#### 6.3.1. Introduction

Les mouvements des véhicules en surface ou dans un tunnel induisent des ondes qui sont transmises à travers le sol affectant les structures avoisinantes ainsi que les personnes. Une conception correcte des systèmes de trafic urbains incluant le trafic en surface et dans les tunnels est très difficile à cause du phénomène d'interaction dynamique entre les différentes composantes du système [50]. Ainsi, nous traitons du comportement du sol et des structures qu'il contient sous l'effet des charges de trafic. Cette charge de trafic est modélisée en une charge uniformément répartie sur une longueur de 2.0 m avec une intensité de 50 kN/m.

La figure (6.50) expose les données géométrique et de chargement considérés dans la présente étude.  $P^s$  indique une charge en surface et  $P^t$  une charge souterraine (dans le tunnel). Ces charges suivent une loi de type « Ricker wavelet » dont représentation en fonction du temps est donné par l'expression

$$f(t) = (1 - 2\tau^2)e^{-\tau^2} \quad (6.1)$$

avec  $\tau = (t - t_s) / t_0$ ,  $t_s$  étant le temps correspondant au maximum de la fonction et  $\pi t_0$  correspond à la période dominante. La transformée de Fourier de  $f(t)$ ,  $F(\omega)$ , est donnée par

$$F(\omega) = 2\sqrt{\pi}t_0 e^{-i\omega t_s} \Omega^2 e^{-\Omega^2} \quad (6.2)$$

où  $\Omega = \omega t_0 / 2$ . Cette charge a été choisie à cause du fait que dans les deux domaine temporel et fréquentiel l'amplitude tend vers zéro. Les figures (6.51) et (6.52) donnent le comportement de cette charge dans les deux domaines temporel et fréquentiel respectivement.

Les caractéristiques du sol et du tunnel sont les même que celles considérées dans les sections précédentes. L'objectif de la présente section est d'analyser l'effet des charges de trafic sur le comportement du tunnel et des points A et B en surface.

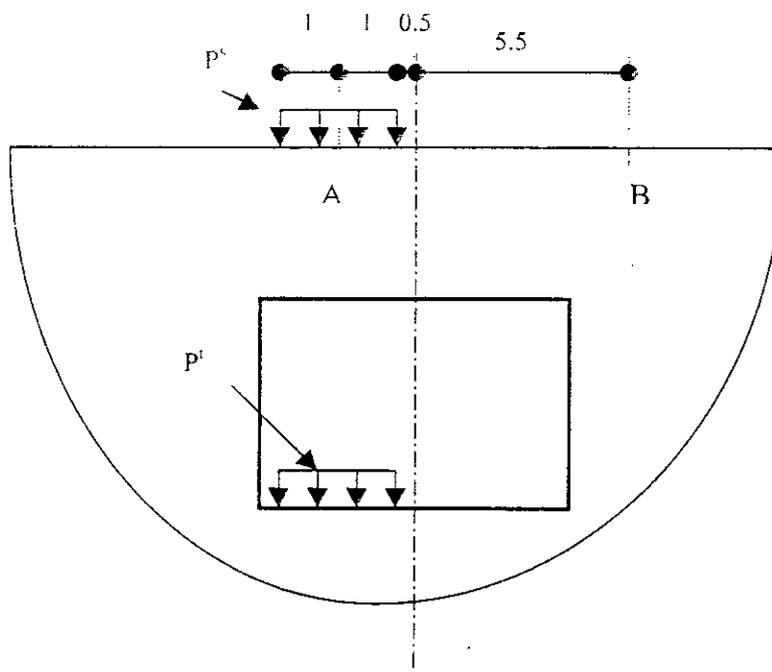


Figure (6.50) : Charges de trafic en surface et souterraine.

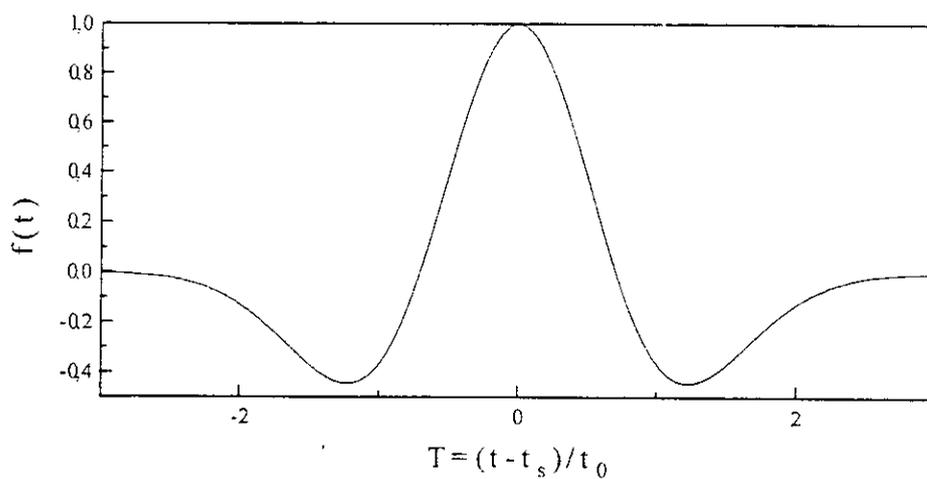


Figure (6.51) : Ricker Wavelet dans le domaine des temps.

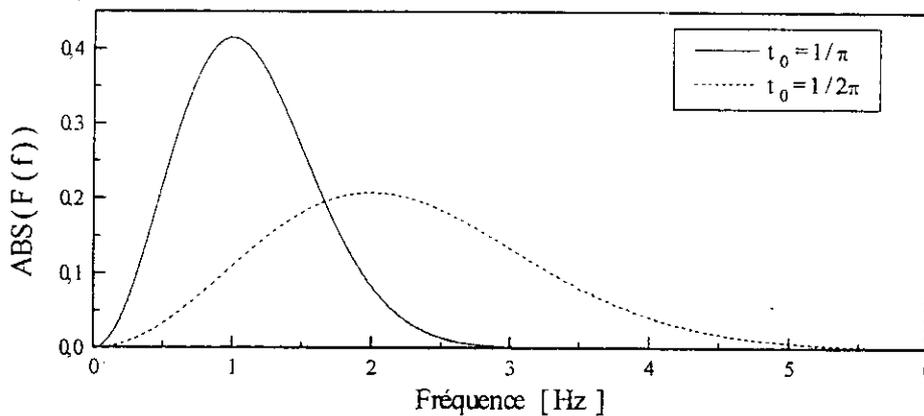


Figure (6.52) : Ricker Wavelet dans le domaine des fréquence

### 6.3.2. Trafic en surface – Trafic souterrain

Le but de cette section est l'étude de l'influence de la position de la charge de trafic (en surface ou dans le tunnel) sur le comportement du tunnel et de son voisinage.

En considérant les figures (6.53) à (6.56) donnant les déplacements des points A et B, nous pouvons observer que les déformations maximales en ces points sont causées par les charges en surface. Pour les déplacements horizontaux, les courbes ont des formes similaires avec, toutefois, des pics très prononcés pour le cas de trafic en surface pour les grandes fréquences.

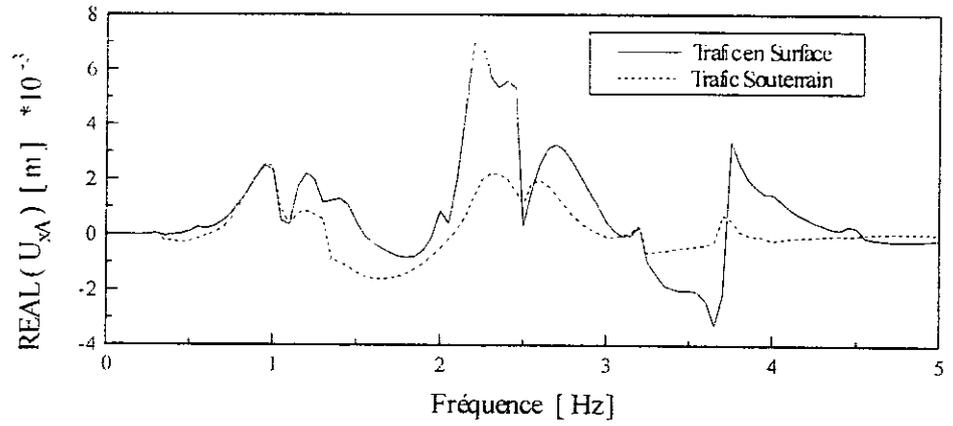
L'amplitude maximale du mouvement horizontal intervient pour les deux points à la même fréquence ( $\approx 2.25 \text{ Hz}$ ).

Pour les faibles fréquences les comportements dans les deux cas (cas de charges en surface et souterrain) sont identiques, c'est à partir d'une fréquence voisine de 1 Hz que les deux courbes divergent.

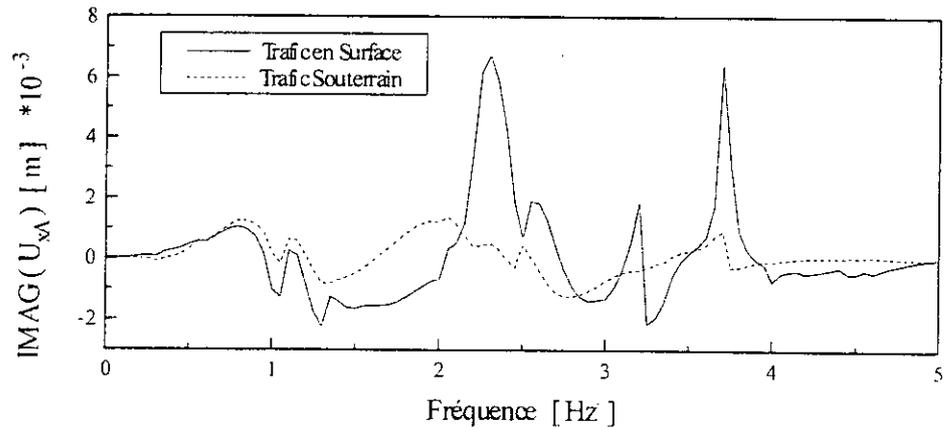
Les amplitudes des déplacements horizontaux aux points A et B sont du même ordre alors que pour les déplacements verticaux ces amplitudes sont plus importantes au point A qu'au point B.

Les déplacements du tunnel sont donnés en figures (6.57) à (6.59). Nous remarquons que comme pour les points A et B, les actions du trafic en surface et souterrain sont très similaires pour les faibles fréquences, et que les amplitudes pour le cas de trafic en surface sont plus importantes que ceux du trafic souterrain.

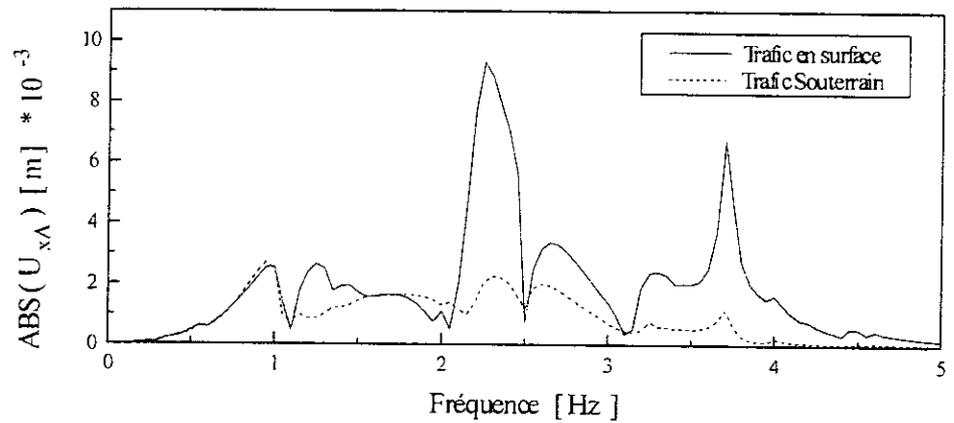
Une autre remarque, est le fait que les pics de déplacements du tunnel coïncident avec ceux des points A et B ce qui implique une relation de cause à effet entre les mouvements du tunnel et ceux enregistrés en surface.



(a)

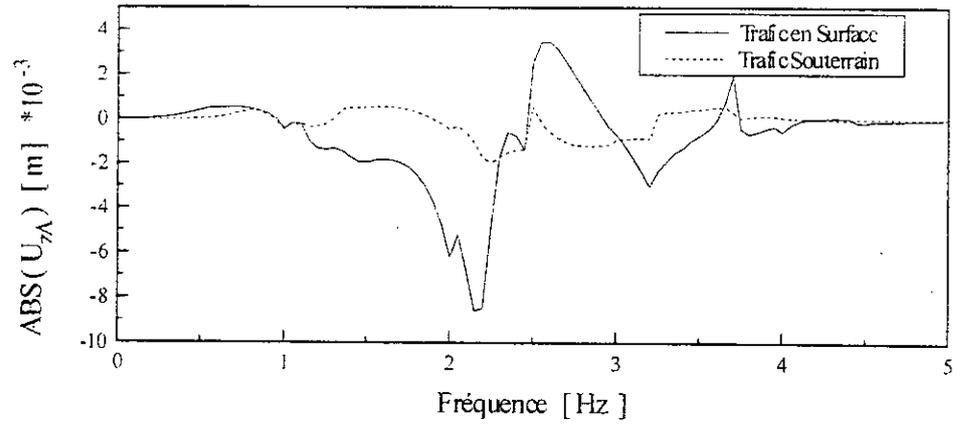


(b)

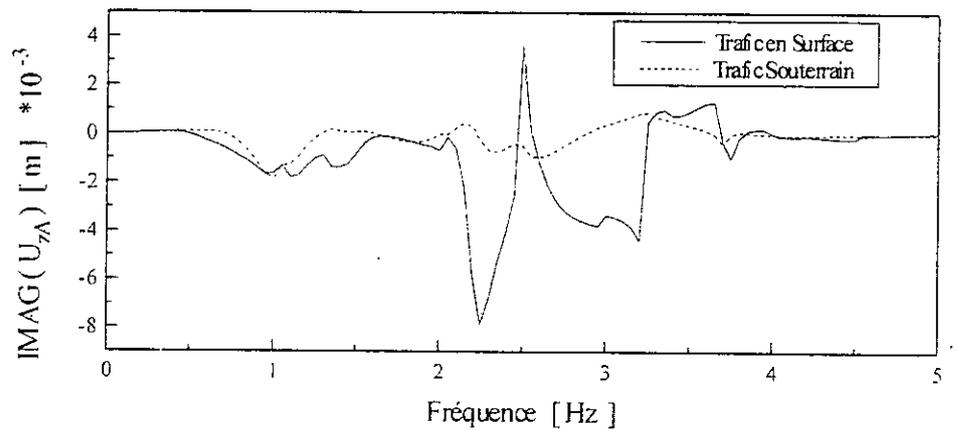


(c)

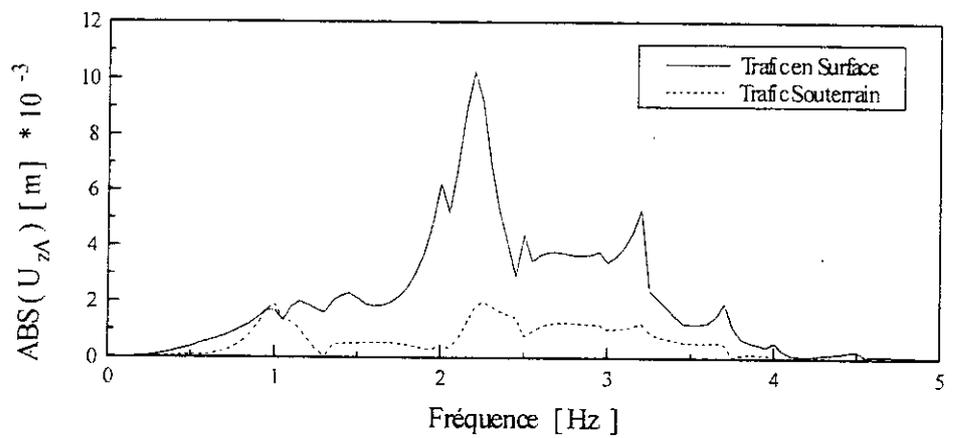
Figure (6.53) : Déplacement horizontal du point A pour des charges de trafic en surface et souterraine : (a) partie réelle ; (b) partie imaginaire et (c) amplitude



(a)

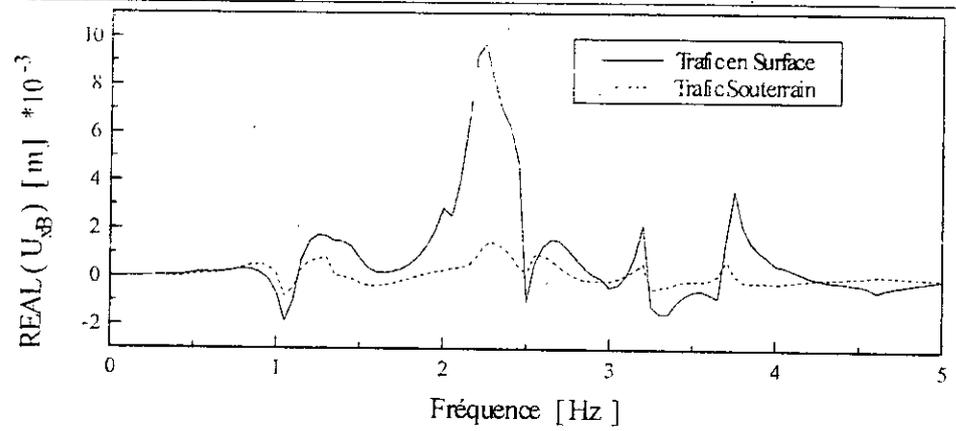


(b)

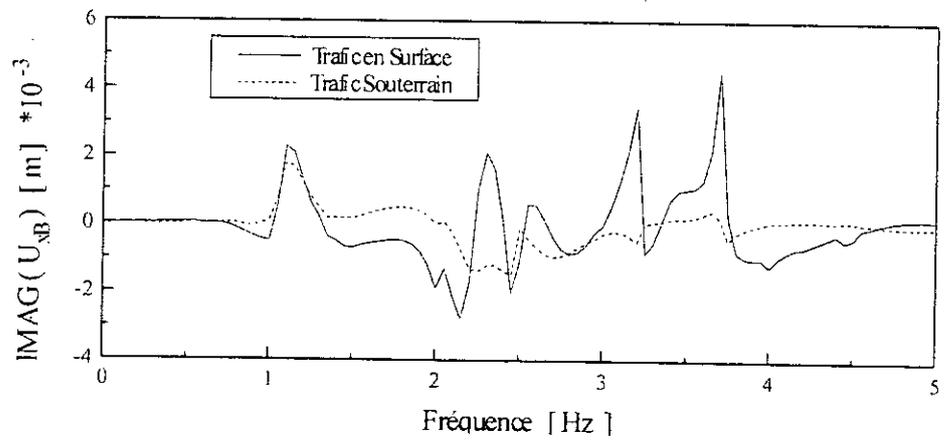


(c)

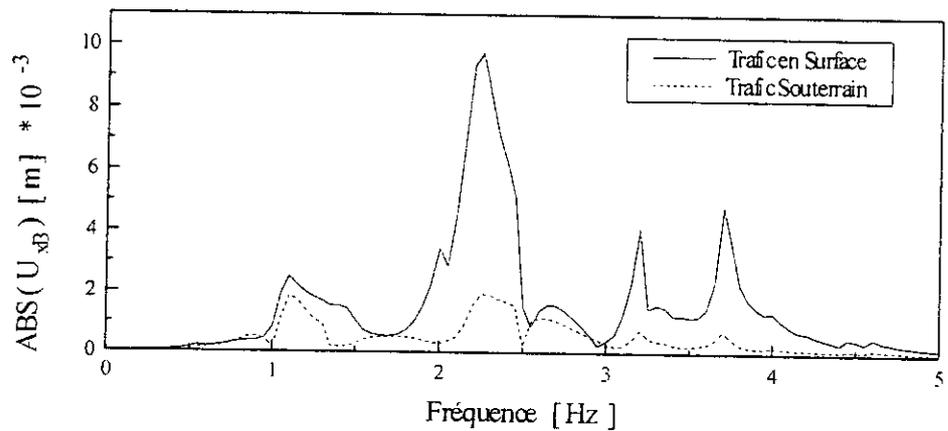
Figure (6.54) : Déplacement vertical du point A pour des charges de trafic en surface et souterraine : (a) partie réelle ; (b) partie imaginaire et (c) amplitude



(a)

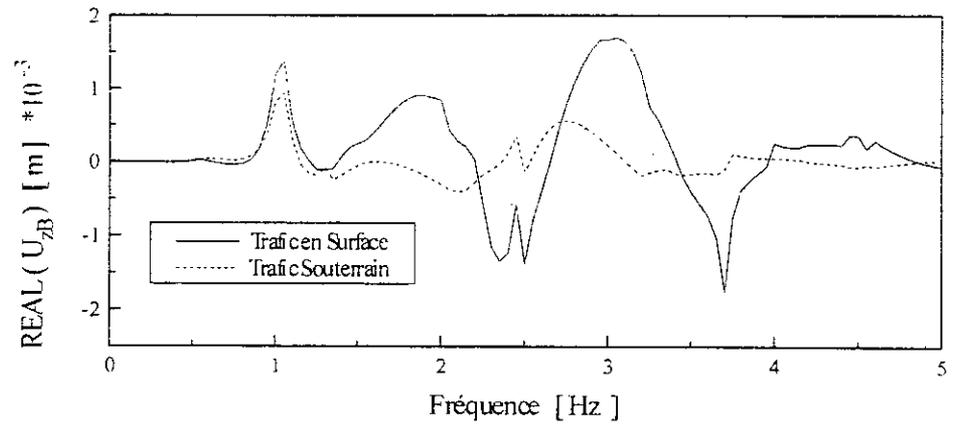


(b)

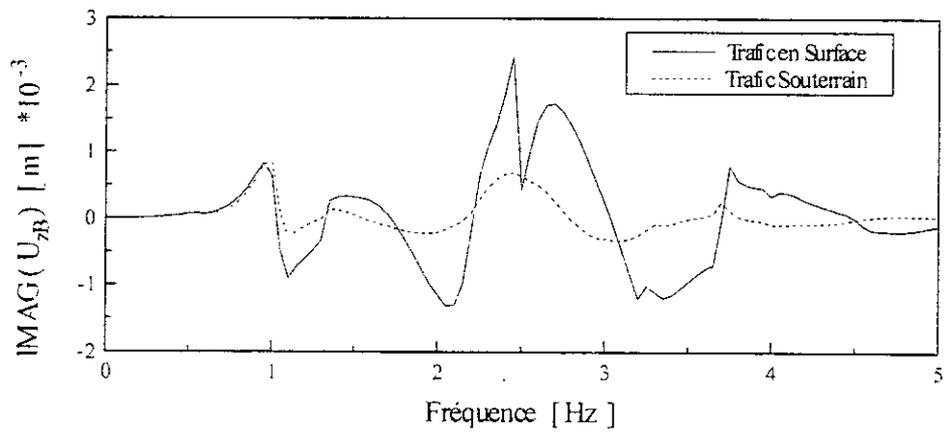


(c)

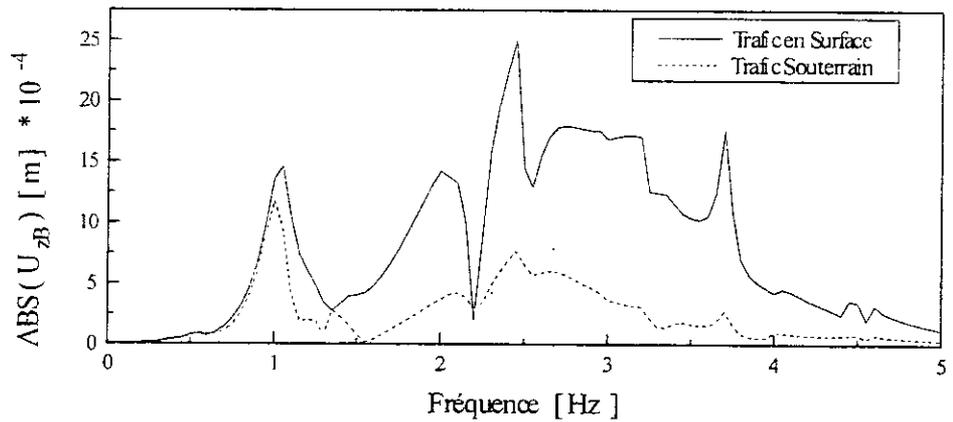
Figure (6.55) : Déplacement horizontal du point B pour des charges de trafic en surface et souterraine : (a) partie réelle ; (b) partie imaginaire et (c) amplitude



(a)



(b)



(c)

Figure (6.56) : Déplacement vertical du point B pour des charges de trafic en surface et souterraine : (a) partie réelle ; (b) partie imaginaire et (c) amplitude

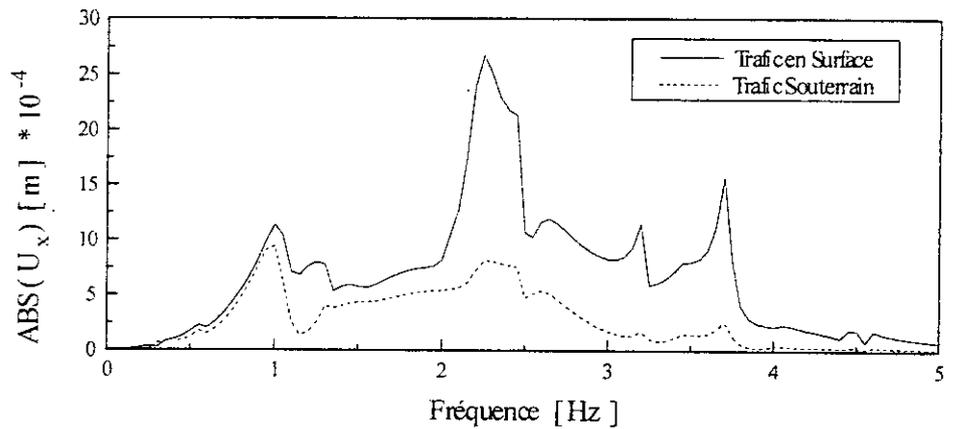
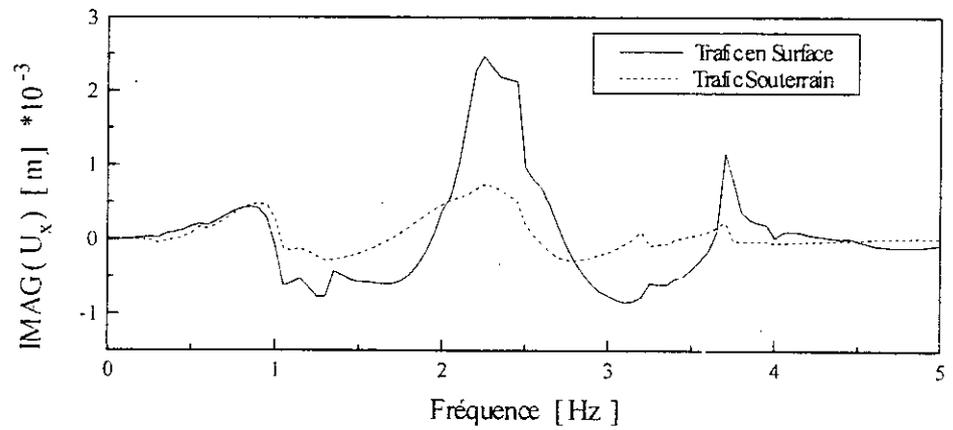
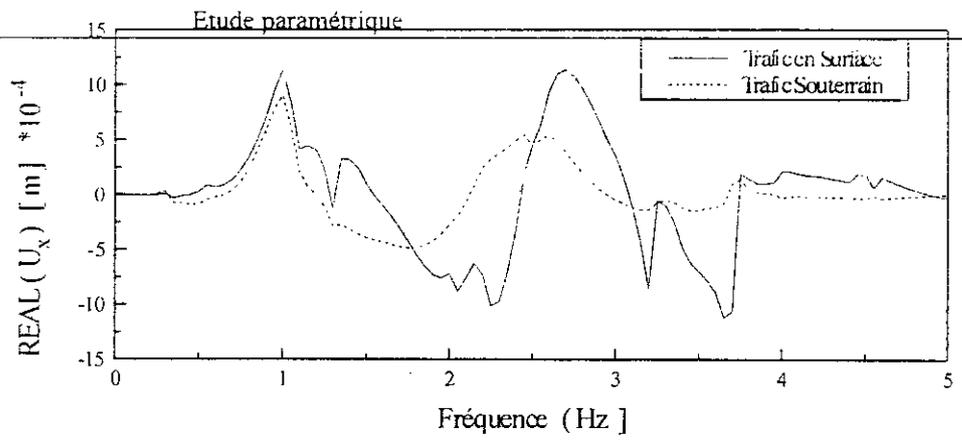
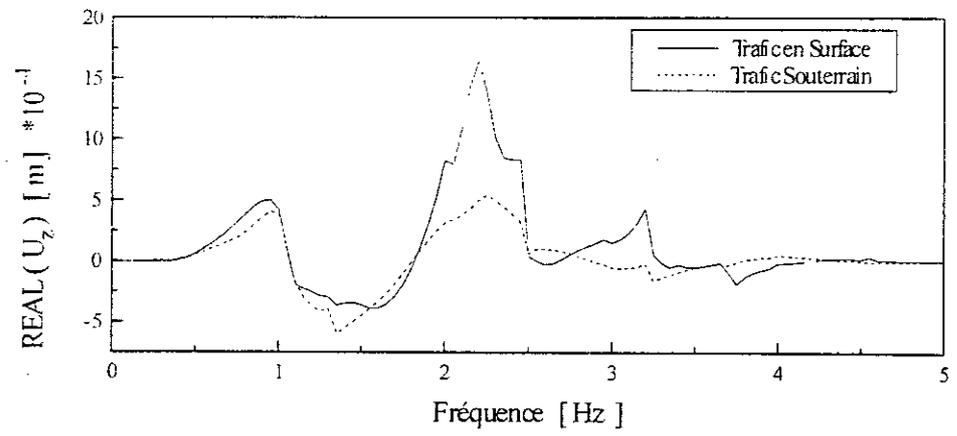
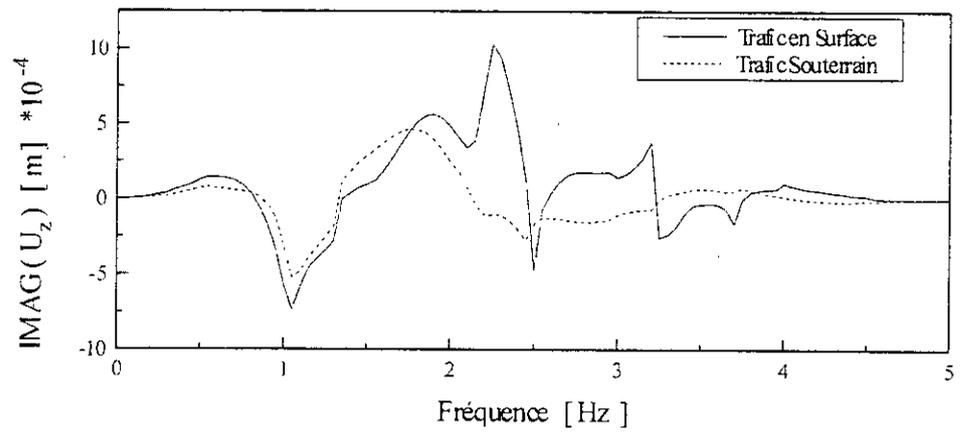


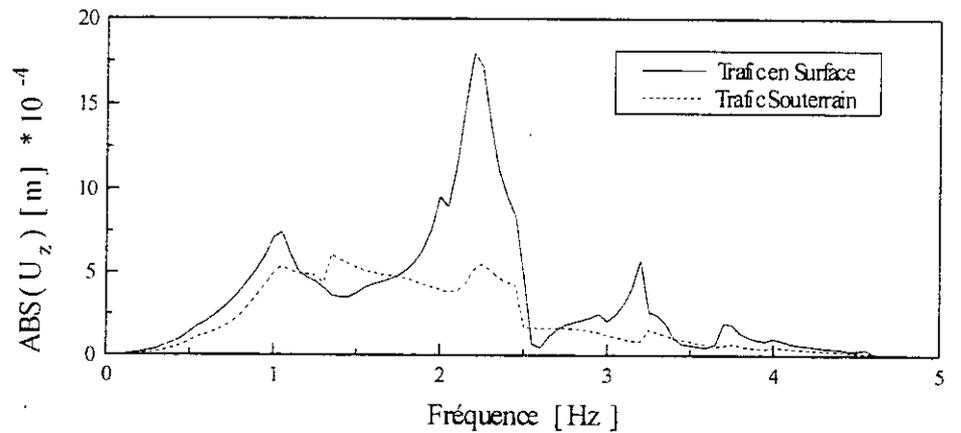
Figure (6.57) : Déplacement horizontal du Tunnel pour des charges de trafic en surface et souterraine : (a) partie réelle; (b) partie imaginaire et (c) amplitude



(a)

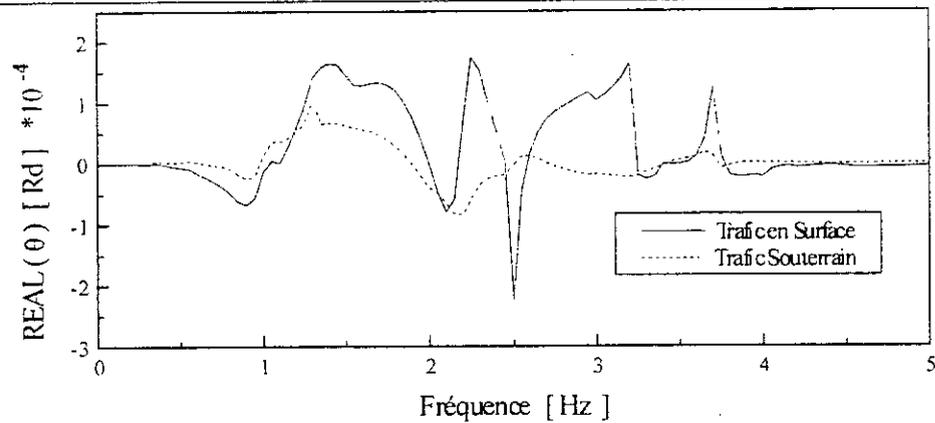


(b)

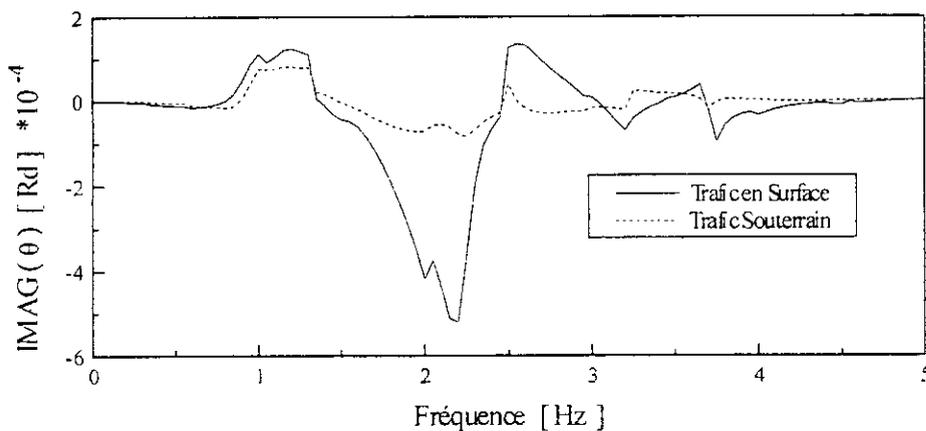


(c)

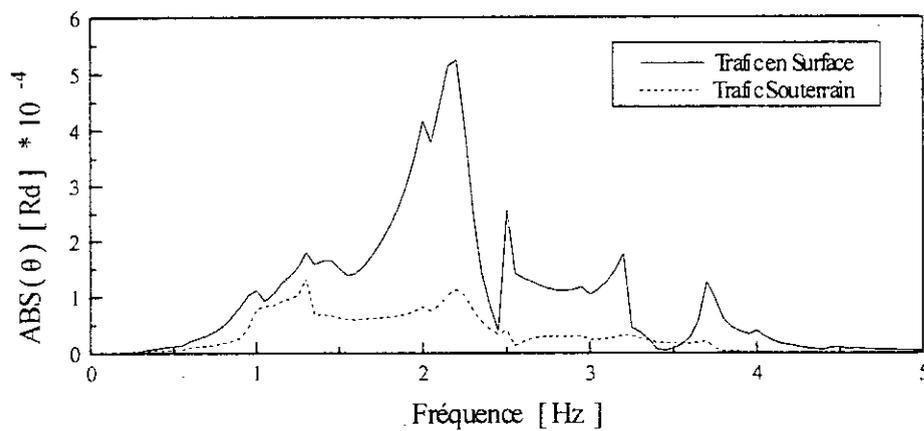
Figure (6.58) : Déplacement horizontal du tunnel pour des charges de trafic en surface et souterraine : (a) partie réelle ; (b) partie imaginaire et (c) amplitude



(a)



(b)



(c)

Figure (6.59) : Rotation du tunnel pour des charges de trafic en surface et souterraine : (a) partie réelle ; (b) partie imaginaire et (c) amplitude

### 6.3.3. Effet de la profondeur du tunnel

Dans cette section nous étudions le comportement des réponses aux points A et b, ainsi que ceux du tunnel pour différentes profondeurs de ce dernier (2.5 m, 4.0 m et 6.0 m). Les figures (6.60) à (6.63) montrent dans tous les cas de profondeur du tunnel, des comportements similaires pour les fréquences voisines de zéro et de 5 Hz

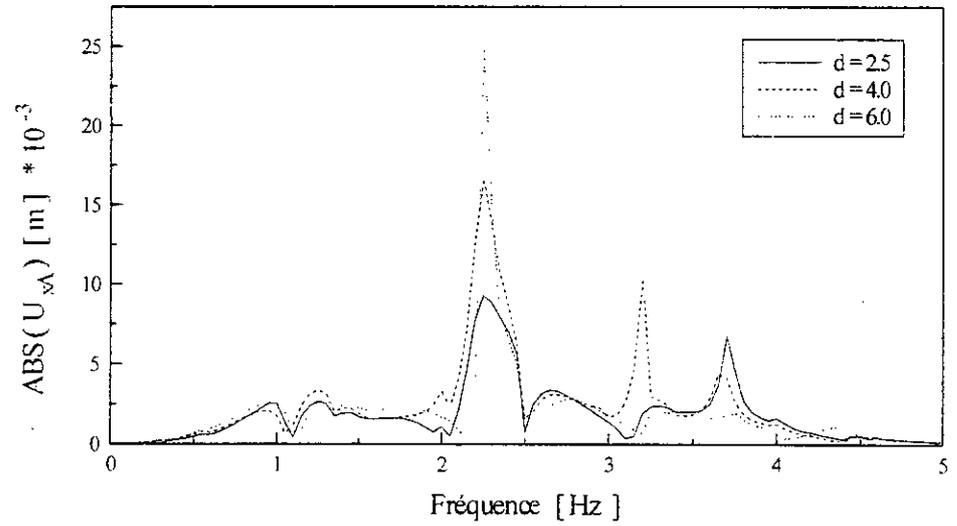
Dans le cas d'une profondeur de 6.0 m et pour des fréquences voisines de 2 Hz, le point A exhibe un pic très prononcé qui finit par s'atténuer pour les fréquences importantes, alors que pour les deux autres cas les comportements sont similaires avec quelques pics à certaines fréquences.

En ce qui concerne le point B, nous pouvons faire les mêmes remarques que celles émises pour le point A pour les mouvements horizontaux, alors que les déplacements verticaux exhibent des comportements similaires pour toutes les plages de fréquences. Dans ce dernier cas et contrairement au cas du point A, le maximum apparaît pour une profondeur de tunnel de 4.0 m.

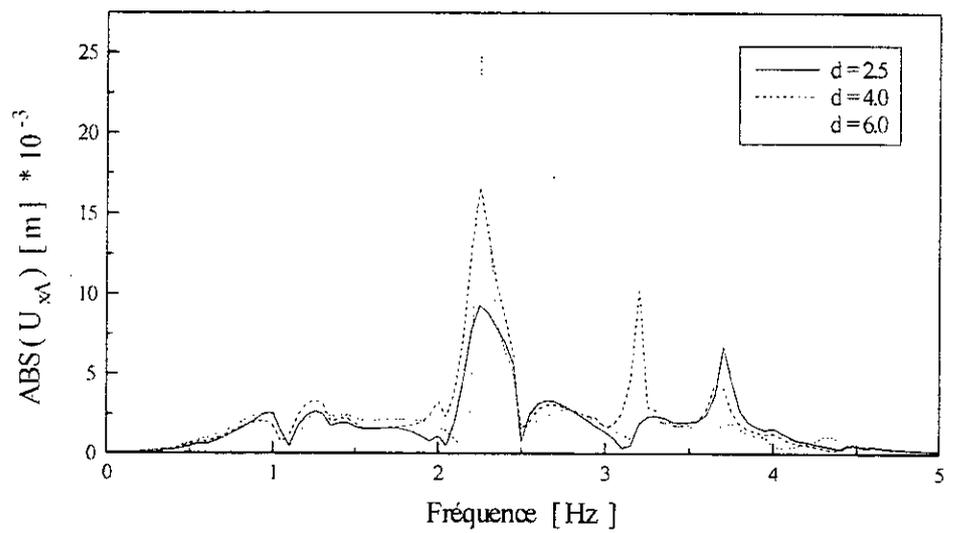
Il est à noter que, dans le cas du point A, l'onde réfléchie réduit significativement l'amplitude des mouvements pour les faibles profondeurs du tunnel.

### 6.4. Interaction structure-sol-structure

Dans cette section, nous analysons l'influence qu'exercent des structures voisines les unes sur les autres [10], cette influence étant réalisée, bien entendu, par l'intermédiaire du sol. Nous traitons d'un cas typique de système constitué d'une fondation en surface et d'un tunnel. La figure (6.64) montre la géométrie du système considéré. Ce dernier est constitué d'une fondation rigide et sans masse, encastree sur une profondeur de 4.5m situé dans le voisinage du tunnel et ayant une largeur de 12 m. Les mouvements de la fondation sont repris au point de référence de celle-ci (équation (5.48)). Nous considérons le même cas de charge que pour la section précédente.

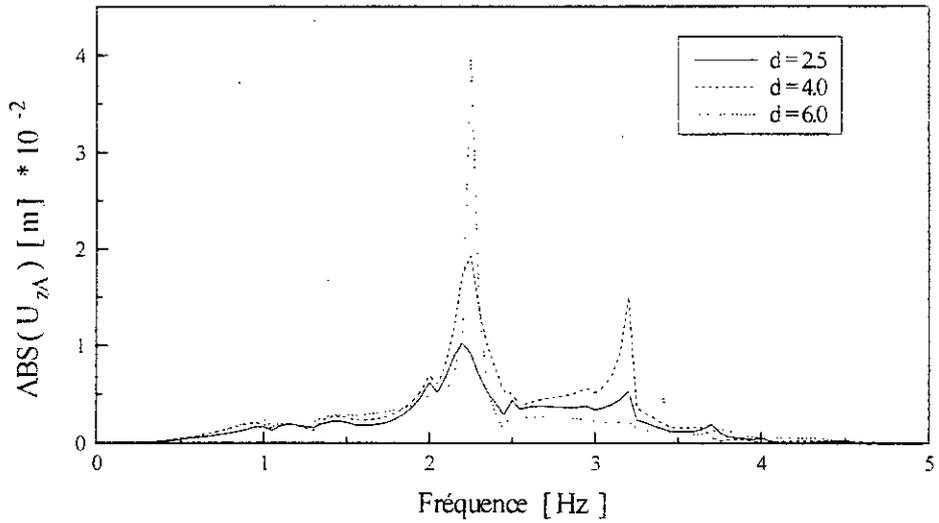


(a)

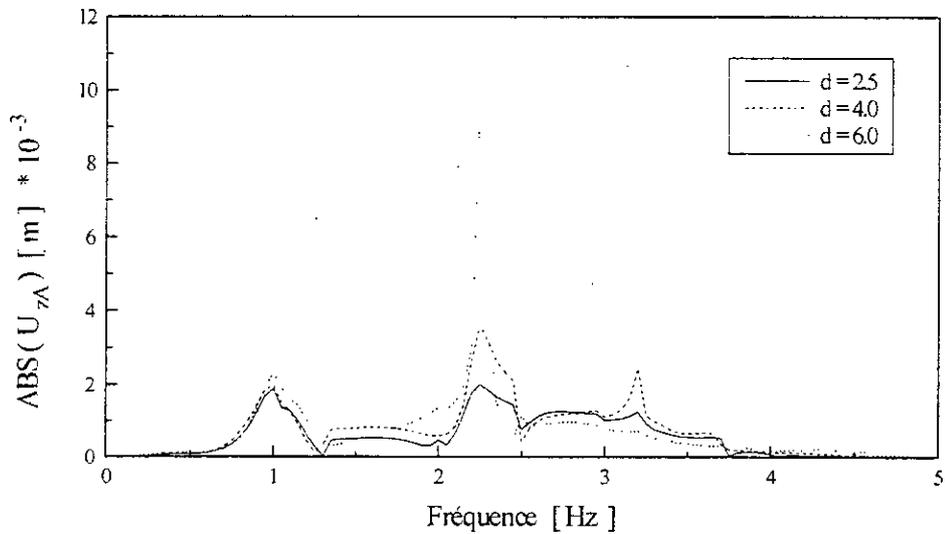


(b)

Figure (6.60) : Effet de la profondeur du Tunnel sur le déplacement horizontal au point A pour (a) trafic en surface et (b) trafic souterrain

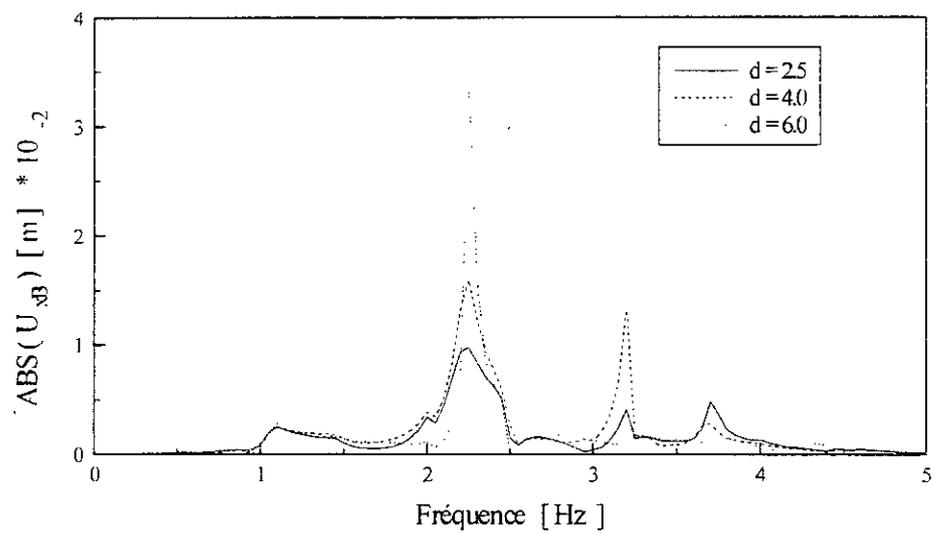


(a)

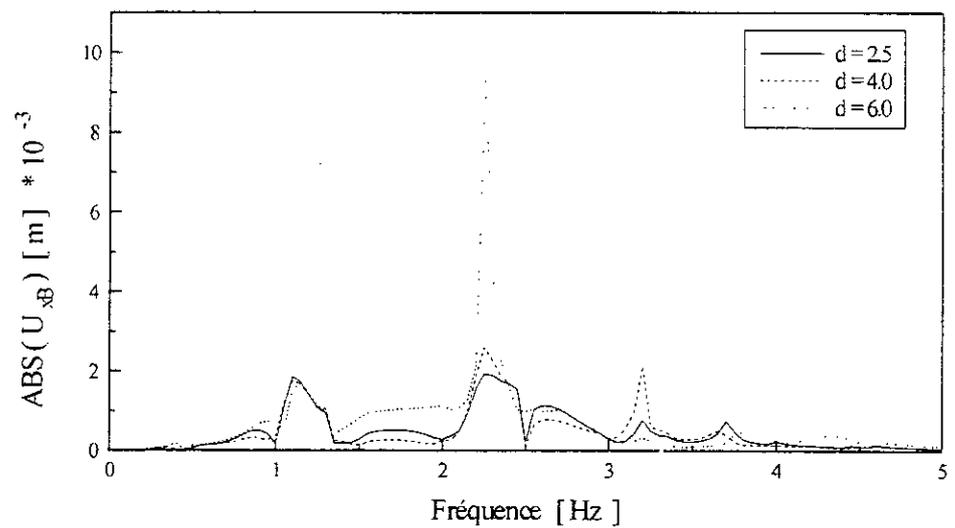


(b)

Figure (6.61) : Effet de la profondeur du Tunnel sur le déplacement vertical au point A pour (a) trafic en surface et (b) trafic souterrain

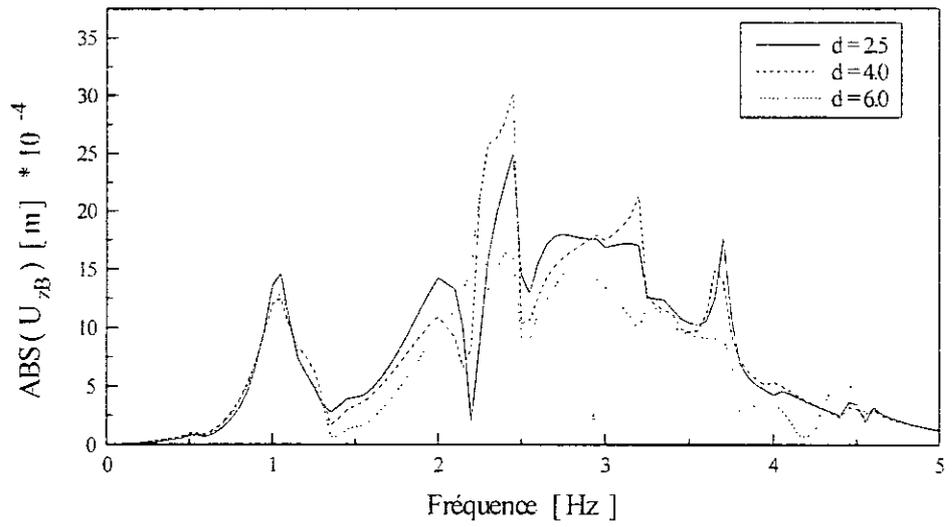


(a)

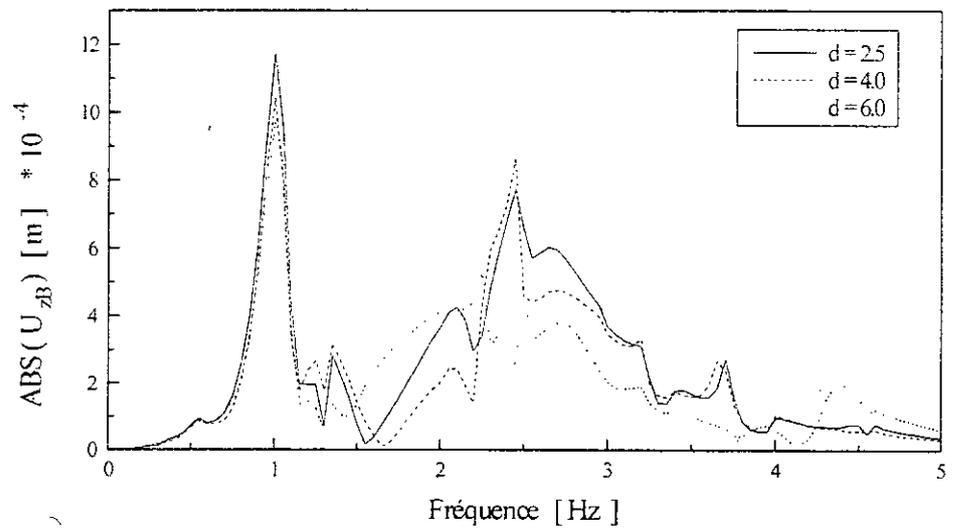


(b)

Figure (6.62) : Effet de la profondeur du Tunnel sur le déplacement horizontal au point B pour (a) trafic en surface et (b) trafic souterrain



(a)



(b)

Figure (6.63) : Effet de la profondeur du Tunnel sur le déplacement horizontal au point B pour (a) trafic en surface et (b) trafic souterrain

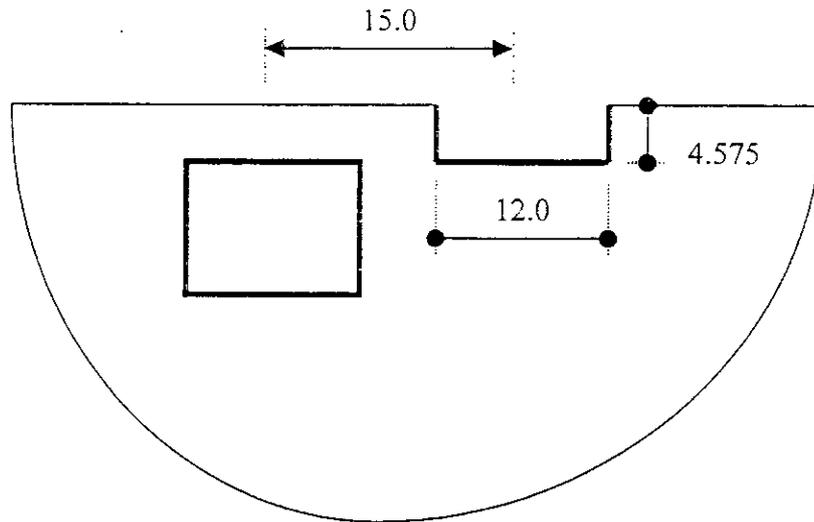
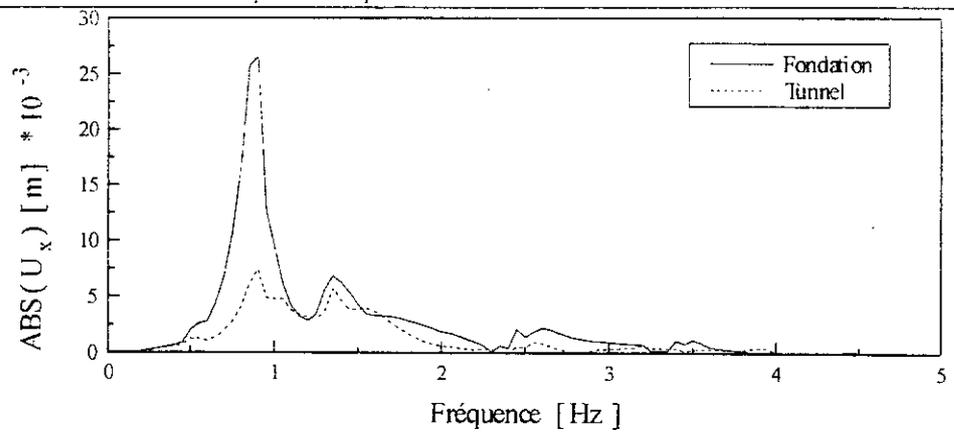


Figure (6.64) : Données géométriques sur la fondation en surface.

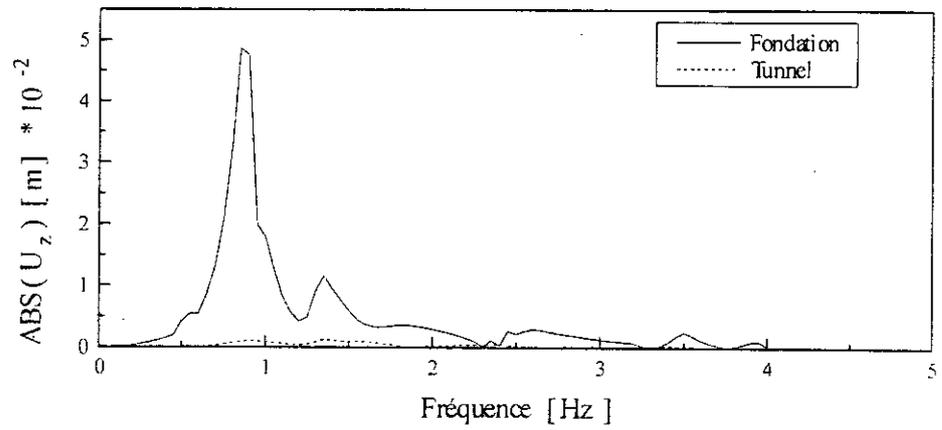
Les caractéristiques géométriques et mécaniques du sol et du tunnel sont celles des sections précédentes.

Les figures (6.65) et (6.66) donnent les mouvements de la fondation et du tunnel pour les cas de trafic en surface et souterrain. Ces figures indiquent que pour les faibles fréquences, les mouvements horizontal et vertical sont continue, mais pour une fréquence de l'ordre de 0.8 Hz, c'est-à-dire lorsque les rotations du tunnel et de la fondation sont en anti-phase, l'amplitude du mouvement vertical de la fondation augmente sensiblement. La même remarque peut être faite pour les autres fréquences avec, cependant, des amplitudes plus faible. Ce qui implique que le tunnel exerce une influence très importante sur le mouvement de la fondation par l'intermédiaire de sa rotation. Car cette dernière a un effet double, d'abord elle diminue les mouvements de la fondation lorsqu'elle se trouve en phase avec celle de la fondation et les augmente pour des rotation en anti-phase.

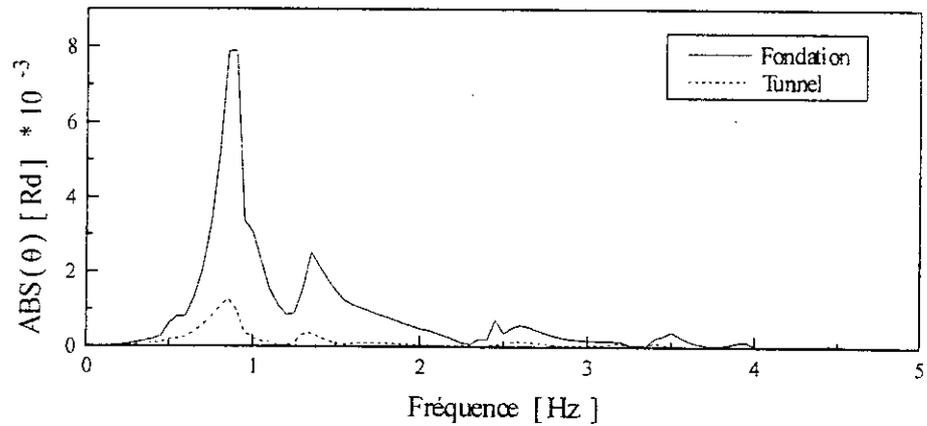
La figure (6.67) donne le comportement de la fondation à des charges de trafic en surface et en profondeur, les deux mouvements sont similaires pour les très faibles fréquences et les grandes fréquences, ce n'est que pour des fréquences entre 1.25 Hz et 3 Hz que ces mouvements divergent dans de faibles proportions.



(a)

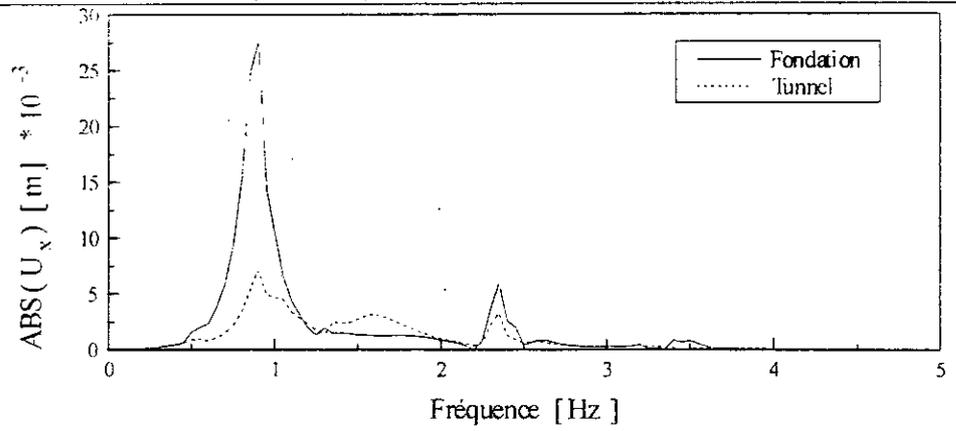


(b)

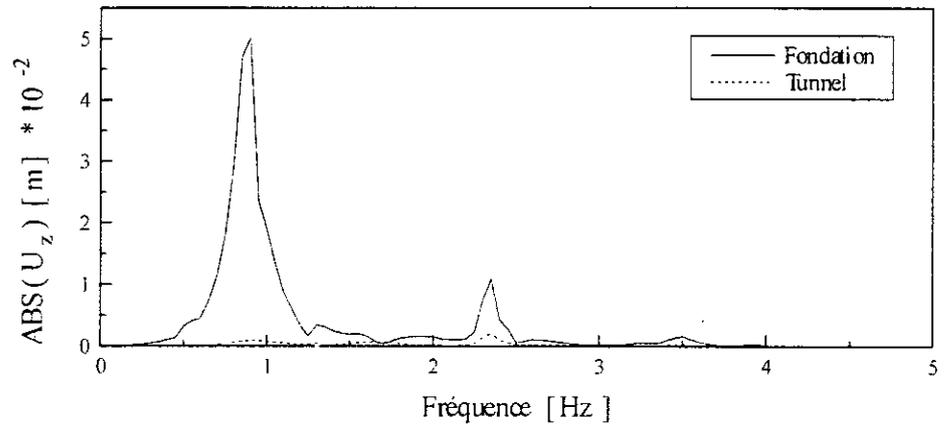


(c)

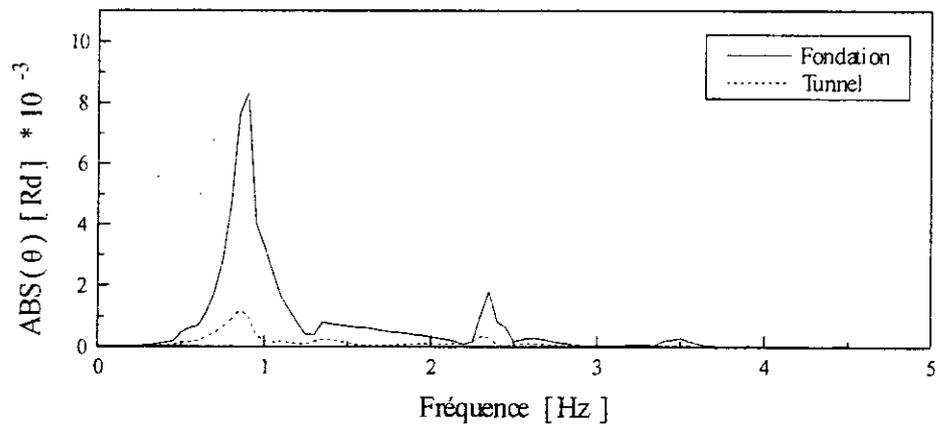
Figure (6.65) : Déplacements de la Fondation et du Tunnel sous l'effet de charge de trafic en surface



(a)

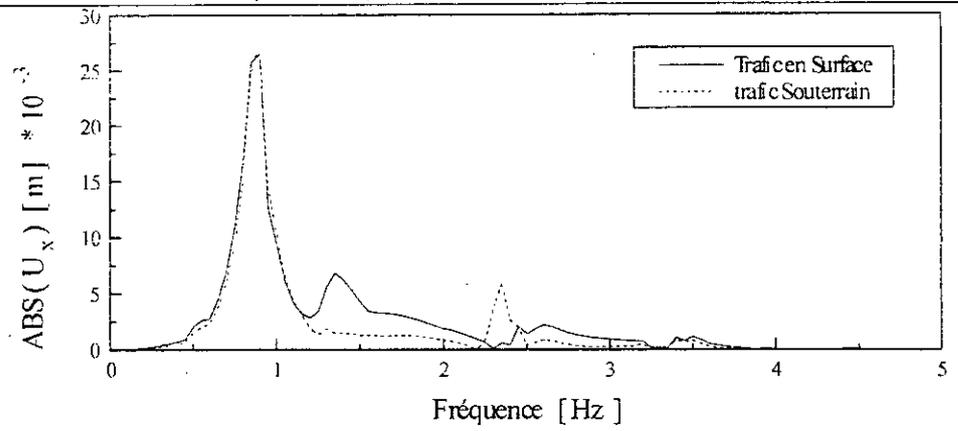


(b)

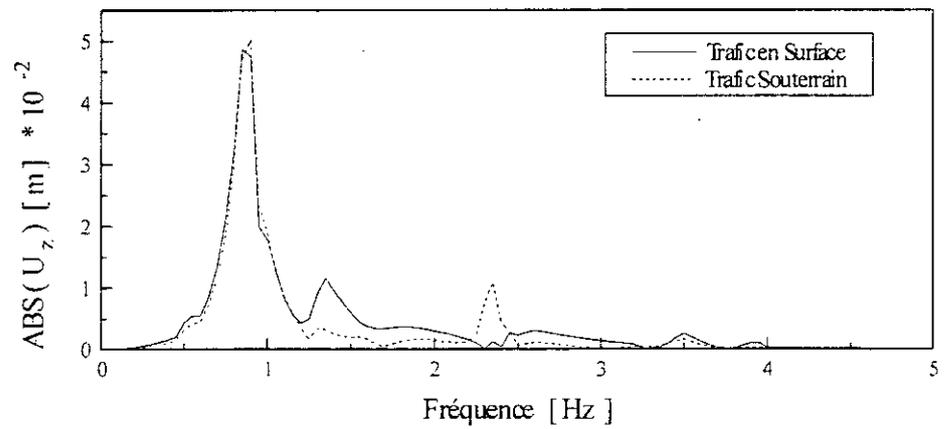


(c)

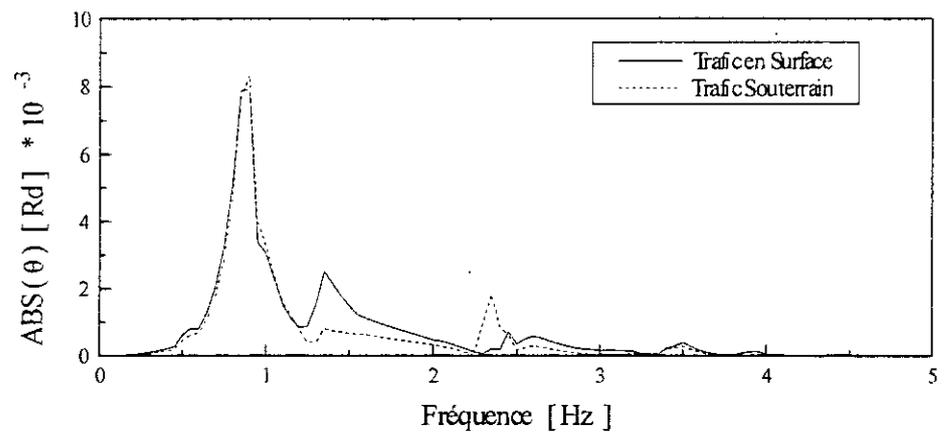
Figure (6.66) : Déplacements de la Fondation et du Tunnel sous l'effet de charge de trafic souterraine



(a)



(b)



(c)

Figure (6.67) : Déplacements de la Fondation sous l'effet des charges de trafic  
En surface et souterraine

## 6.5. Conclusion

L'étude paramétrique réalisée a permis de caractériser les effets d'un certains nombre de paramètres tels que la nature de la base, la masse du tunnel, les types de charges...etc. L'analyse a été divisée en trois grands axes : l'étude du comportement du système sol-tunnel à des charges harmoniques donnant les fonctions de transfert, l'effet des charges des véhicules en surface et l'interaction structure-sol-structure

Nous pouvons conclure de cette étude que la stratification du sol est la cause principale de la quasi-totalité des phénomènes observés dans un sol multicouches. Les autres paramètres ayant des effets secondaires.

Nous pouvons aussi déduire que les charges de trafic en surface produisent des amplitudes de mouvements en surface plus importants que celles produites par des charges souterraines de mêmes nature et de même intensité. La dernière remarque importante que nous pouvons émettre, est l'interaction tunnel-fondation induit des déplacements importants au niveau de celle-ci lorsque sa rotation est en anti-phase avec celle du tunnel.

## Chapitre 7

### CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Depuis fort longtemps, les observateurs ont remarqué des anomalies dans la répartition des désordres provoqués par un séismes. L'idée s'est donc progressivement forgée que les conditions de sites étaient souvent déterminants dans les désordres causés par les séismes. Deux types de facteurs ont été identifiés comme responsables de la modification du signal vibratoire :

1. le premier, lié aux caractéristiques physiques des terrains et notamment à leur rigidité ;
2. le second, lié à la géométrie du site.

Un facteur qui n'a pas reçu la même attention que les précédents est la présence de structures rigides souterraines qui peuvent modifier le signal transmis dans le sol. C'est le cas des tunnels, dont l'étude de leur influence sur les structures voisines durant un séismes ou à des charges de trafic, peut expliquer certains contrastes entre les intensités ses dommages causés à ces structures.

La configuration du sol, constitué généralement d'une multitude de couches de caractéristiques physiques et mécaniques différentes reposant sur un demi-espace élastique, rend le traitement théorique d'un tel problème prohibitif du fait de l'impossibilité de prise en compte réaliste de tous les paramètres intervenants dans l'étude. Quand aux méthodes numériques autres que la méthode des équations intégrales aux frontières, celles-ci conduisent à un nombre de variables très élevé, rendant ce traitement quasi-impossible.

D'où l'intérêt présenté par la méthode des équations intégrales aux frontières pour ce types de problèmes, car la discrétisation, dans ce cas, est limitée à la frontière de l'ouvrage. Mais cette méthode nécessite la détermination de certaines fonctions (fonctions de Green ou solutions fondamentales) qui ne sont connues que pour des cas de géométrie très simple. Kausel et Peek [22], [23] ont développé une méthode explicite donnant ces fonctions pour le

cas de sols stratifiés, basée sur la linéarisation des déplacements dans le sens de la stratification.

La méthode fut d'abord élaborée pour le cas de couches multiples sur une base rigide. Mais son extension au cas de couches multiples sur un demi-espace élastique est réalisée par l'intermédiaire de l'approximation paraxiale. Cette dernière, cependant, introduit des erreurs qui peuvent être significativement réduites en ajoutant sur le demi-espace une ou plusieurs couches ayant les mêmes caractéristiques physiques et mécaniques que celui-ci. Pour le cas de charges statiques, cette approche, pour ce cas précis, conduit à des expressions infinies suggérant sa non validité pour ce cas.

Cette méthode est utilisée pour l'étude de l'effet de la présence d'un tunnel sur le mouvement des points en surface libre ainsi que sur les structures voisines.

De cette étude, nous pouvons conclure que la stratification du sol est le principal responsable des phénomènes d'amplification des mouvements observés, mais d'autres facteurs peuvent aussi influencer à des degrés différents. La considération d'une base rigide, inclue des réflexions totales des ondes au niveau de cette base impliquant des interférences supplémentaires et donc, l'amplification de certains pics, leur disparition et l'apparition d'autres à de nouvelles fréquences. La masse du tunnel n'agit que très faiblement sur les résultats, d'autant que la connaissance exacte de cette grandeur n'est pas indispensable, une valeur approchée de celle-ci donnant des résultats très satisfaisant. L'anisotropie tend à déplacer les fréquences propres vers la droite avec diminution de l'amplitude. La présence du tunnel, agit sur les mouvements en surface surtout par l'intermédiaire de sa rotation. Ainsi, les amplitudes des mouvements des points en surface au voisinage du tunnel diminuent considérablement à cause de l'interaction avec le tunnel.

Le comportement d'un tel système, sous l'effet de charges de trafic, a montré que les charges en surface donnaient, en général, des amplitudes en surface plus importantes que celles induites par des charges souterraines.

Enfin, l'étude de l'interaction structure-sol-structure, réalisée en considérant un tunnel et une fondation, a révélé que les mouvements de la fondation étaient très importants lorsque

la rotation de celle-ci était en anti-phase avec celle du tunnel, et qu'inversement ces mouvements étaient faibles pour des rotations en anti-phase.

Des perspectives intéressantes s'offrent à cette méthode, en premier lieu la prise en compte des forces volumiques, qui induit un calcul supplémentaire d'intégrale sur le volume. Il serait aussi intéressant de voir l'effet de la rigidité du tunnel sur le comportement du système entier, en effet ce dernier subit des déformations que l'on peut inclure par un couplage éléments finis-éléments frontières [47], [57]. Et voir ainsi la validité de l'hypothèse de rigidité infinie du tunnel.

Une autre alternative, serait d'associer cette procédure aux algorithmes de résolution de problèmes non-linéaires, permettant la prise en compte de lois de comportement elasto-plastiques pour le matériau de la zone interfaciale, et éventuellement pour le matériau sol.

L'extension de la méthode à des situations cylindriques ou même tridimensionnelles est très aisée et permet de considérer des situations autres que celles de déformations planes.

Enfin, il serait très intéressant de considérer l'éventualité de la présence d'un fluide [31], [44], permettant ainsi de traiter des situations d'interaction sol-fluide-structure, ce qui est le cas par exemple pour un barrage.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Abramowitz A. and Stegun I.A.** « *Handbook of Mathematical Functions* ». Dover, (1972).
- [2] **Achenbach J.D.** « *Wave Propagation in Elastic Solids* ». North-Holland (1987).
- [3] **Antes H.** « *A Boundary Element Procedure for Transient Wave Propagations in Two-Dimensional Isotropic Elastic Media* ». *Finit Elem. Anal. Design*, Vol. 1 pp. 313-322 (1985).
- [4] **Bateman H.** « *Tables of Integral Transforms : volume I* ». McGraw-Hill Book Company (1954).
- [5] **Bathe K.** « *Finite Element Procedures in Engineering Analysis* ». Prentice-Hall (1982).
- [6] **Berrah M.K.** « *Cours de Mécanique des Milieux Continus* ». ENP (1991).
- [7] **Beskos D.E.** « *Boundary Element Methods in Dynamic Analysis* ». *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 40, N° 1, pp. 1-23 (1987).
- [8] **Boumekik A.** « *Fonctions impédances d'une fondation vibrante en surface ou partiellement encastrée dans un sol multicouche* ». Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles (1985).
- [9] **Brebbia C.A., Telles J.C.F. and Wrobel L.C.** « *Boundary Element Techniques* ». Springer-Verlag (1984).
- [10] **Bufler H.** « *Theory of Elasticity of a Multilayered Medium* ». *Journal of Elasticity*, Vol. 1, no 2, pp. 125-143 (1971).
- [11] **Collino F. et Lavaud B.** « *Peut-on obtenir des amplitudes correctes avec les équations paraxiales ?* ». Rapport de Recherche N° 3004, INRIA (1996).
- [12] **Dangla P.** « *Couplage éléments finis-équations intégrales en élastodynamique et interaction sol-structure* ». Rapport du Lab. Centr. Ponts Chaus. (1990).
- [13] **Dong S.B.** « *Plane Waves in Anisotropic Plates* ». *Jour. Eng. Mech. Div.*, Vol. 104, N° EM4, pp. 801-817 (1978).
- [14] **Ettouney M.** « *Transmitting Boundaries : A Comparison* ». Dept. Civ. Eng., Publication N° R76-8, MIT. (1976).
- [15] **Ewing W.M., Jardetzky W.S. and Press F.** « *Elastic Waves in Layered Media* ». McGraw-Hill Book Company (1957).

- [16] **Gazetas G.** « *Analysis of Machine Foundation Vibrations : state of the art* ». Soil Dyn. Earth. Eng., Vol. 2, N° 1, pp. 2-42 (1983).
- [17] **Kausel E.** « *Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media* ». Technical Report R74-11, Soil Publication N° 336; Dept. Civ. Eng., MIT (1974).
- [18] **Kausel E., Roësset J.M. and Waas G.** « *Dynamic Analysis of Footings on Layered Media* ». Jour. Eng. Mech. Div., Vol. 101, N° EM5, pp.679-693 (1975).
- [19] **Kausel E. and Roësset J.M.** « *Dynamic Stiffness of Circular Foundations* ». Jour. Eng. Mech. Div., Vol. 101, N° EM6, pp. 771-785 (1975).
- [20] **Kausel E. and Roësset J.M.** « *Semianalytic Hyperelement for Layered Strata* ». Jour. Eng. Mech. Div., Vol 103, N°. EM4, pp. 569-588 (1977).
- [21] **Kausel E. and Roësset J.M.** « *Stiffness Matrices for Layered Soils* ». Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 71, N°. 6, pp. 1743-1761 (1981).
- [22] **Kausel E. and Peek R.** « *Dynamic Loads in the Interior of Layered Stratum : an explicit solution* ». Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 72, N°. 5, pp. 1459-1481 (1982).
- [23] **Kausel E. and Peek R.** « *Boundary Integral Method for Stratified Soils* ». Research Report R82-50, Order N°. 746, Dept. Civ. Eng.,MIT (1982).
- [24] **Kausel E.** « *Wave Propagation in Anisotropic Layered Media* ». Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 23, pp. 1567-1578 (1986).
- [25] **Kausel E. and Seale S.H.** « *Static Loads in Layered Halfspaces* ». Jour. Appl. Mech., Vol. 109, pp. 403-408 (1987).
- [26] **Kausel E. and Seale S.H.** « *Dynamic and Static Impedances of Cross-Anisotropic Halfspaces* ». Soil Dyn. Earth. Eng., Vol. 9, N°. 4, pp. 172-177 (1990).
- [27] **Kausel E.** « *Thin Layer Method : formulation in the time domain* ». Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 37, pp. 927-941 (1994).
- [28] **Kausel E.** « *Discussion : Propagation of Normal Modes due to Impulsive Loading to 3-D Medium on a Rigid Basement* ». Earth. Eng. Str. Dyn., Vol. 25, pp. 1011-1013 (1996).
- [29] **Kausel E.** « *Discussion : Dynamic Response of a Multilayered Poroelastic Medium* ». Earth. Eng. Str. Dyn., Vol 25, pp. 1165-1167 (1996).
- [30] **Liou G.** « *Analytic Solutions for Soil-Structure Interaction in Layered Media* ». Earth. Eng. Str. Dyn., Vol. 18, pp. 667-686 (1989).
- [31] **Lotfi Y., Roësset J.M. and Tassoulas J.L.** « *A Technique for the Analysis of the Response of Dams to Earthquakes* ». Earth. Eng. Str. Dyn., Vol. 15, pp. 463-490 (1987).

- [32] **Love A.E.H.** « *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* ». Dover Publications (1944).
- [33] **Lysmer J.** « *Analytical Procedures in Soil Dynamics* ». Report N°. UCB/EERC-78/29, University of California, Berkeley (1978).
- [34] **Lysmer J. and Drake L.A.** « *The Propagation of Love Waves Across Non-Horizontally Layered Structures* ». Report N°. EERC 70-6, University of California, Berkeley (1970).
- [35] **Maeda T. and Kausel E.** « *On the Accuracy of some Approximate Antiplane Halfspace Stiffnesses* ». Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 81, N°. 4, pp. 1340-1359 (1991).
- [36] **Milutinovic Z.** « *Basic Principles in the Seismology and Earthquake Engineering* ». Thirteenth International Twelve-Week Course on Aseismic Design and Construction CADAC/94, Skopje, Macedoine (1994).
- [37] **Ottenstreuer M. and Schmid G.** « *Boundary Elements Applied to Soil-Foundation Interaction* ». Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Seminar on Boundary Element Methods, Irvine, CA, pp. 293-309 (1981).
- [38] **Pais A.L.** « *Dynamic Coupling of Multiple Structures Through Soil* ». PhD. Thesis, MIT, Dept. of Civ. Eng. (1988).
- [39] **Pais A.L. and Kausel E.** « *Effect of Underground Tunnel on Seismic Motions in Mexico City* ». Research Report R89-07, Dept. Civ. Eng., MIT (1989).
- [40] **Richart F.E., Woods R.D. et Hall J.R.** « *Vibrations of Soils and Foundations* ». Prentice-Hall (1970).
- [41] **Seale S.H.** « *Dynamic Loads in Layered Halfspaces* ». Phd. Thesis, MIT, Dept. of Civ. Eng. (1985).
- [42] **Seale S.H. and Kausel E.** « *Point Loads in Cross-Anisotropic Layered Halfspaces* ». Jour. Eng. Mech., Vol. 115, N°. 3, pp. 509-523 (1989).
- [43] **Swaddiwudhipong S., Chow Y.K., Tan S.C. and Phoon K.F.** « *Dynamic Response of Surface Foundations on Layered Media* ». Earth. Eng. Str. Dyn., Vol. 20, pp. 1065-1081 (1991).
- [44] **Tan H.H.** « *Displacement Approach for Generalized Rayleigh Waves in Layered Solid-Fluid Media* ». Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 79, N°. 4, pp. 1251-1263 (1989).
- [45] **Tassoulas J.L. and Kausel E.** « *Elements for the Numerical Analysis of Wave Motion in Layered Media* ». Research Report R81-2, Dept. Civ. Eng., MIT (1981).
- [46] **Tzong T. and Penzien J.** « *Hybrid Modelling of Soil-Structure Interaction in Layered media* ». Report N°. UCB/EERC-83/22, University of California, Berkeley (1983).

- [47] **Von Estorff O.** and **Kausel E.** « *Coupling of Boundary and Finite Elements for Soil-Structure Interaction Problems* ». *Earth. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 18, pp. 1065-1075 (1989).
- [48] **Von Estorff O.** and **Antes H.** « *Dynamic Response of Tunnel Structures* ». in *Structural Dynamics*, Krätzig et al. (eds), Balkema, Rotterdam (1990).
- [49] **Von Estorff O., Pais A.L.** and **Kausel E.** « *Some Observations on Time Domain and Frequency Domain Boundary Elements* ». *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 29, pp. 785-800 (1990).
- [50] **Von Estorff O., Stamos A.A., Beskos D.E.** and **Antes H.** « *Dynamic Interaction Effects in Underground Traffic Systems* ». *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 8, N° 4, pp. 167-175 (1991).
- [51] **Waas G.** « *Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamics Problems in Semi-Infinite Layered Media* ». PhD. Thesis, University of California, Berkeley (1972).
- [52] **Waas G., Riggs H.R.** and **Werkle H.** « *Displacement Solutions for Dynamic Loads in Transversely-Isotropic Stratified Media* ». *Earth. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 13, pp. 173-193 (1985).
- [53] **Werkle H.** « *Dynamic Finite Element Analysis of Three-Dimensional Soils Models with Transmitting Element* ». *Earth. Eng. Str. Dyn.*, Vol. 14, pp. 41-60 (1986).
- [54] **Wideberg J.** and **Benitez F.G.** « *Elastic Stress and Displacement Distribution in an Orthotropic Layer due to a Concentrated Load* ». *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol. 17, pp. 205-221 (1996).
- [55] **Wolf J.P.** « *Dynamic Soil-Structure Interaction* ». Prentice-Hall (1985).
- [56] **Xu P.C.** and **Mal A.K.** « *Calculation of the Inplane Green's Functions for a Layered Viscoelastic solid* ». *Bull. Seim. Soc. Am.*, Vol. 77, N° 5, pp. 1823-1837 (1987).
- [57] **Zienkiewicz O.C., Kelly D.W.** and **Bettess P.** « *The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures* ». *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp. 355-375 (1977).

## Annexe A

### A1. Matrices de rigidité d'une couche

$$A_m = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2(\lambda+2G) & \cdot & \cdot & (\lambda+2G) & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2G & \cdot & \cdot & G & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2G & \cdot & \cdot & G \\ (\lambda+2G) & \cdot & \cdot & 2(\lambda+2G) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & G & \cdot & 2G & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & G & \cdot & 2G \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$B_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & (\lambda-G) & \cdot & \cdot & -(\lambda+G) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\lambda-G) & \cdot & \cdot & (\lambda+G) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & (\lambda+G) & \cdot & \cdot & -(\lambda-G) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(\lambda+G) & \cdot & \cdot & -(\lambda-G) & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$G_m = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} G & \cdot & \cdot & -G & \cdot & \cdot \\ \cdot & G & \cdot & \cdot & -G & \cdot \\ \cdot & \cdot & (\lambda+2G) & \cdot & \cdot & -(\lambda+2G) \\ -G & \cdot & \cdot & G & \cdot & \cdot \\ \cdot & -G & \cdot & \cdot & G & \cdot \\ \cdot & \cdot & -(\lambda+2G) & \cdot & \cdot & (\lambda+2G) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$M_m = \frac{\gamma h}{6} \begin{bmatrix} 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{B}_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -(\lambda - G) & \cdot & \cdot & (\lambda + G) \\ (\lambda - G) & \cdot & \cdot & -(\lambda + G) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -(\lambda + G) & \cdot & \cdot & (\lambda - G) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(\lambda + G) & \cdot & \cdot & -(\lambda - G) & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$D_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & -\lambda \\ G & \cdot & \cdot & -G & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda & \cdot & \cdot & -\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G & \cdot & \cdot & -G & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

## A2. Inversion des matrices modifiées

L'équation (2.35a) est  $\tilde{A}^{-1} = ZJ^{-1}Y$ . Or

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} A_x^{-1} & \cdot & \cdot \\ -A_z^{-1} B_{xz}^T A_x^{-1} & A_z^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_y^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

et

$$ZJ^{-1}Y = \begin{bmatrix} \Phi_x \Phi_x^T & \Phi_x K_R^{-1} \Phi_z^T & \cdot \\ \Phi_z K_R \Phi_x^T & \Phi_z \Phi_z^T & \cdot \\ \cdot & \cdot & \Phi_y \Phi_y^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

En comparant (A.7) et (A.8), nous en concluons

$$A_x^{-1} = \Phi_x \Phi_x^T \quad (\text{A.9a})$$

$$A_z^{-1} = \Phi_z \Phi_z^T \quad (\text{A.9b})$$

$$A_y^{-1} = \Phi_y \Phi_y^T \quad (\text{A.9c})$$

$$A_z^{-1} B_{xz}^T A_x^{-1} = -\Phi_z K_R \Phi_x^T \quad (\text{A.9d})$$

$$0 = \Phi_x K_R^{-1} \Phi_z^T \quad (\text{A.9e})$$

Un développement analogue pour la deuxième équation donne les résultats suivants

$$C_x^{-1} = -\Phi_x K_R^{-2} \Phi_x^T \quad (\text{A.10a})$$

$$C_z^{-1} = -\Phi_z K_R^{-2} \Phi_z^T \quad (\text{A.10b})$$

$$C_y^{-1} = \Phi_y K_L^{-2} \Phi_y^T \quad (\text{A.10c})$$

$$C_z^{-1} B_{xz} C_x^{-1} = \Phi_x K_R^{-3} \Phi_z^T \quad (\text{A.10d})$$

$$0 = \Phi_z K_R^{-1} \Phi_x^T \quad (\text{A.10e})$$

### A3. Déplacements en m dus à des charges réparties et concentrées en n

#### A3.1. Charges réparties

##### a). Charges suivant la direction x

$$U_x = \frac{2q}{\pi} \sum_{l=1}^{2N} \phi_x^{ml} \phi_x^{nl} I_{2l}^R \quad (\text{A.11a})$$

$$U_y = 0 \quad (\text{A.11b})$$

$$U_z = \frac{2q}{\pi} \sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml} \phi_x^{nl} \frac{I_{1l}^R}{k_l^R} \quad (\text{A.11c})$$

##### b). Charges suivant la direction y

$$U_x = 0 \quad (\text{A.12a})$$

$$U_y = \frac{2q}{\pi} \sum_{l=1}^N \phi_y^{ml} \phi_y^{nl} I_{2l}^L \quad (\text{A.12b})$$

$$U_z = 0 \quad (\text{A.12c})$$

##### c). Charges suivant la direction z

$$U_x = \frac{2q}{\pi} \sum_{l=1}^{2N} \phi_x^{ml} \phi_z^{nl} \frac{I_{1l}^R}{k_l^R} \quad (\text{A.13a})$$

$$U_y = 0 \quad (\text{A.13b})$$

$$U_z = \frac{2q}{\pi} \sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml} \phi_z^{nl} I_{2l}^R \quad (\text{A.13c})$$

Les coefficients de ces expressions sont données en Annexe A4.

### A3.2. Charges concentrées

#### a). Charges suivant la direction x

$$U_x = \frac{q}{2i} \sum_{l=1}^{2N} \phi_x^{ml} \phi_x^{nl} \frac{e^{-ik_l^R x}}{k_l^R} \quad (\text{A.14a})$$

$$U_y = 0 \quad (\text{A.14b})$$

$$U_z = \frac{q}{2} \sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml} \phi_x^{nl} \frac{e^{-ik_l^R x}}{k_l^R} \quad (\text{A.14c})$$

#### b). Charges suivant la direction y

$$U_x = 0 \quad (\text{A.15a})$$

$$U_y = \frac{q}{2i} \sum_{l=1}^N \phi_y^{ml} \phi_y^{nl} \frac{e^{-ik_l^L x}}{k_l^L} \quad (\text{A.15b})$$

$$U_z = 0 \quad (\text{A.15c})$$

#### c). Charges suivant la direction z

$$U_x = \frac{q}{2} \sum_{l=1}^{2N} \phi_x^{ml} \phi_z^{nl} \frac{e^{-ik_l^R x}}{k_l^R} \quad (\text{A.16a})$$

$$U_y = 0 \quad (\text{A.16b})$$

$$U_z = \frac{q}{2i} \sum_{l=1}^{2N} \phi_z^{ml} \phi_z^{nl} \frac{e^{-ik_l^R x}}{k_l^R} \quad (\text{A.16c})$$

### A.4. Intégrales utilisées pour le calcul des déplacements dynamiques

$$I_{ll} = \int_0^\infty \frac{\sin(kb) \sin(kx)}{(k^2 - k_l^2)} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2k_l} e^{-ik_l b} \sin(k_l x) & 0 \leq x \leq b \\ \frac{\pi}{2k_l} e^{-ik_l x} \sin(k_l b) & b \leq x \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$$I_{2l} = \int_0^{\infty} \frac{\sin(kb) \cos(kx)}{k(k^2 - k_l^2)} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2k_l^2} e^{-ik_l b} \cos(k_l x) - \frac{\pi}{2k_l^2} & 0 \leq x \leq b \\ \frac{\pi}{2ik_l^2} e^{-ik_l x} \sin(k_l b) & b \leq x \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$I_{3l} = \int_0^{\infty} \frac{k \sin(kb) \cos(kx)}{(k^2 - k_l^2)} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-ik_l b} \cos(k_l x) & 0 \leq x \leq b \\ \frac{\pi}{2i} e^{-ik_l x} \sin(k_l b) & b \leq x \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

## Annexe B

### B1. Formule de la transmission d'énergie

L'énergie moyenne transmise par cycle de mouvement est

$$E = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \operatorname{Re}(\tau_{xz} e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\dot{U}_x e^{i\omega t}) + \operatorname{Re}(\tau_{yz} e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\dot{U}_y e^{i\omega t}) + \operatorname{Re}(\sigma_{zz} e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\dot{U}_z e^{i\omega t}) \right] dt \quad (\text{B.1})$$

avec  $\dot{U}_\alpha = i\omega U_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) (composantes de la vitesse).

Maintenant

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{Re}(\sigma_{zz} e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\dot{U}_z e^{i\omega t}) dt &= \int_0^T \operatorname{Im}(\sigma_{zz} e^{i\omega t}) \operatorname{Im}(\dot{U}_z e^{i\omega t}) dt \\ &= \int_0^T \operatorname{Re}(i\sigma_{zz} e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(i\dot{U}_z e^{i\omega t}) dt \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Il s'en suit que

$$E = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \operatorname{Re}(P^T e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\dot{U} e^{i\omega t}) \right] dt \quad (\text{B.3})$$

$P$  et  $U$  définis par l'équation (2.39). Mais

$$\operatorname{Re}(P e^{i\omega t}) = \frac{1}{2} (P e^{i\omega t} + P_c e^{-i\omega t}) \quad (\text{B.4})$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\dot{U} e^{i\omega t}) &= \operatorname{Re}(i\omega U e^{i\omega t}) \\ &= -\omega \operatorname{Im}(U e^{i\omega t}) \\ &= -\frac{\omega}{2i} (U e^{i\omega t} - U_c e^{-i\omega t}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

L'indice  $c$  indique le conjugué complexe.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
E &= -\frac{\omega}{4iT} \int_0^T [(P^T e^{i\omega t} + P_c^T e^{-i\omega t})(U e^{i\omega t} - U_c e^{-i\omega t})] dt \\
&= -\frac{\omega}{4iT} \int_0^T (P^T U e^{2i\omega t} - P_c^T U_c^T e^{-2i\omega t} + P_c^T U - P^T U_c) dt \\
&= -\frac{\omega}{4i} (P^T U_c - P_c^T U)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Ou en exprimant le vecteur charge  $P$  en fonction du vecteur déplacement  $U$  par l'équation (2.24)

$$E = \frac{\omega}{4i} (U^T K^T U_c - U_c^T K_c^T U) \tag{B.7}$$

Et comme le transposé d'un scalaire est aussi un scalaire, nous avons

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\omega}{2} \frac{U_c^T K U - U^T K U_c}{2i} \\
&= \frac{\omega}{2} \text{Im}(U_c^T K U)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

C'est une forme hermitienne impliquant une matrice  $K$  complexe et symétrique, ainsi, sa partie imaginaire dépend uniquement de la partie imaginaire de  $K$ . Le résultat final est donc

$$E = \frac{\omega}{2} U_c^T \text{Im}(K) U \tag{B.9}$$

## B2. Intégrales rencontrées dans le cas statique

$$J_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(kb) \cos(kx)}{k^2} dk \tag{B.10}$$

$$J_{1l} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(kb) \cos(kx)}{k(k - k_l)} dk \tag{B.11}$$

$$J_{21} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(kb) \sin(kx)}{k^2} dk \tag{B.12}$$

$$J_{2l} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(kb) \sin(kx)}{k(k - k_l)} dk \tag{B.13}$$

## Annexe C

### Matrices de rigidité d'une couche ayant un matériau isotrope transverse

#### C1. Coefficients isotrope transverse

$$A = \frac{(1 - \nu_{HH}^2) \nu_{HH} E_V}{(1 + \nu_{HH})[-\nu_{HH} + (1 - 2\nu_{VH}^2)]} \quad (C.1)$$

$$F = \frac{\nu_{VH} E_V}{[-\nu_{HH} + (1 - 2\nu_{VH}^2)]} \quad (C.2)$$

$$C = \frac{(1 - \nu_{HH}) E_V}{[-\nu_{HH} + (1 - 2\nu_{VH}^2)]} \quad (C.3)$$

$$L = G_{HV} \quad (C.4)$$

$$N = \frac{(1 - \nu_{HH} - 2\nu_{HH}^2) \nu_{HH} E_V}{2(1 + \nu_{HH})[-\nu_{HH} + (1 - 2\nu_{VH}^2)]} \quad (C.5)$$

#### C2. Matrice de rigidité isotrope transverse

Pour ce cas, l'expression de la matrice de rigidité est donnée par

$$K_m = A_m k^2 + B_m k + G_m - \omega^2 M_m \quad (C.6)$$

avec

$$A_m = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2A & . & . & A & . & . \\ . & 2N & . & . & N & . \\ . & . & 2L & . & . & L \\ A & . & . & 2A & . & . \\ . & N & . & . & 2N & . \\ . & . & L & . & . & 2L \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

$$B_m = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & (F-L) & \cdot & \cdot & -(F+L) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F-L & \cdot & \cdot & F+L & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & F+L & \cdot & \cdot & -(F-L) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(F+L) & \cdot & \cdot & -(F-L) & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$G_m = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} L & \cdot & \cdot & -L & \cdot & \cdot \\ \cdot & L & \cdot & \cdot & -L & \cdot \\ \cdot & \cdot & C & \cdot & \cdot & -C \\ -L & \cdot & \cdot & L & \cdot & \cdot \\ \cdot & -L & \cdot & \cdot & L & \cdot \\ \cdot & \cdot & -C & \cdot & \cdot & C \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

La matrice  $M_m$  est la même que celle du cas isotrope.