

M0026/98A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Département : Génie Mécanique

Option : Construction

THESE DE MAGISTER

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE
DU COMPORTEMENT DES STRUCTURES EN
POUTRES ÉLANCÉES.
APPLICATION SUR LE CHÂSSIS DE LA
LOCOMOTIVE "GÉNÉRAL MOTORS"

Proposée et dirigée par:

Pr. S. RECHAK

par:

Mr. A. BELKACEMI
Ingénieur d'état en
Génie Mécanique

Soutenue devant le jury :

A. CHARIF
S. RECHAK
M. BOUAZIZ
Y. BELKACEMI

Professeur
Professeur
Maître de conférences
Chargé de cours

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur

Septembre 1998

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



Département : Génie Mécanique

Option : Construction

THESE DE MAGISTER

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE
DU COMPORTEMENT DES STRUCTURES EN
POUTRES ÉLANCÉES.
APPLICATION SUR LE CHÂSSIS DE LA
LOCOMOTIVE "GÉNÉRAL MOTORS"

Proposée et dirigée par:

Pr. S. RECHAK

par:

Mr. A. BELKACEMI
Ingénieur d'état en
Génie Mécanique

Soutenue devant le jury :

A. CHARIF
S. RECHAK
M. BOUAZIZ
Y. BELKACEMI

Professeur
Professeur
Maître de conférences
Chargé de cours

Président
Rapporteur
Examinateur
Examinateur

Septembre 1998

<u>CHAPITRE 1 : INTRODUCTION ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE</u>	1
<u>CHAPITRE 2 : CALCUL DES CONTRAINTES INITIALES</u>	
2.1- Introduction	11
2.2- Définition des données du problème	14
2.2.1- Description du châssis	14
2.2.2- chargement du châssis	14
2.2.3- position des charges et dimensions du châssis	16
2.3- Modélisation en élément poutre	16
2.3.1- Définition d'une poutre	16
2.3.2- Hypothèses de la théorie des poutres	17
2.3.2.1- Hypothèses géométriques	18
2.3.3- Mise en équation	18
2.3.3.1- Concept de la méthode des éléments finis	18
2.3.3.2- Procédure générale	19
2.3.3.3- Equation d'équilibre de l'élément poutre	20
2.3.3.4- Matrice de rigidité globale	25
2.3.4- Modélisation	25
2.3.5- Répartition des charges	27
2.3.6- Résultat et interprétation	28
2.4- Modélisation en élément plaque	30
2.4.1- Introduction	30
2.4.2- Définition de la plaque membranaire	31
2.4.2.1- Hypothèses simplificatrices	31
2.4.3- Mise en équation	32
2.4.4- Définition de l'élément plaque fléxionnelle	35
2.4.4.1- Hypothèses simplificatrices	35
2.4.5- Mise en équation	36
2.4.6- Modélisation en élément plaque mixte membranaire-fléxionnelle	39
2.4.7- Répartition des charges	40
2.4.8- Résultat et interprétation	40
2.4.9- Conclusion	46
<u>CHAPITRE 3 : ANALYSE GEOMETRIQUE NON-LINEAIRE DE L'EQUILIBRE</u>	
<u>DES POUTRES A PAROIS MINCES ET DE SECTION DROITE OUVERTE</u>	
3.1- Introduction	48
3.2- Définition de l'élément poutre à parois minces	51
3.3- Hypothèses simplificatrices	53

3.4- Déformation non-linéaire des poutres à parois minces	55
3.4.1- Déformation axiale	57
3.4.2- Torsion pure	60
3.4.3- Phénomène de gauchissement	61
3.4.4- Déplacement longitudinale dû au gauchissement	62
3.4.5- Déformation axiale due au gauchissement	64
3.5- Formulation de l'équation d'équilibre	69
3.5.1- Equation d'équilibre	69
3.5.2- Méthode de résolution des systèmes d'équations non linéaires	72
3.5.3- Formulation en élément fini de l'équation d'équilibre	73
3.5.3.1- Fonction de déplacement	73
3.5.3.2- Déformation	74
3.5.3.3- Matrice de rigidité	74
3.5.3.4- Formulation de la matrice de rigidité tangente	76

CHAPITRE 4 : CALCUL DES MATRICES DE RIGIDITE

4.1- Calcul de la matrice \bar{b}	80
4.1.1- Calcul de la matrice b_0	82
4.1.2- Calcul de la matrice b_L	89
4.2- Calcul de la matrice \bar{B}	93
4.2.1- Calcul de la matrice B_L	95
4.3- Calcul de la matrice $\delta\bar{B}$	97
4.4- Calcul de la matrice de rigidité K	100
4.4.1- Matrice K_0	101
4.4.2- Matrice K_1	102
4.4.2.1- Matrice K_1	102
4.4.2.2- Matrice K_2	102
4.4.2.3- Matrice K_3	102
4.4.3- Calcul du vecteur forces de l'équation d'équilibre	104
4.4.3.1- Vecteur forces internes dues aux contraintes σ_0	104
4.4.3.2- Vecteur forces extérieures	106
4.5- Calcul de la matrice de rigidité tangente K_T	110
4.5.1- Matrice K_0	111
4.5.2- Matrice K_L	111
4.5.2.1- Matrice K_1 et K_3	111
4.5.2.2- Matrice K_2	112
4.5.3- Matrice K_σ	112
4.5.4- Matrice K_{σ_0}	113
4.5.5- Matrice des charges K_P	115
4.6- Changement de repère	117

CHAPITRE 5 : ANALYSE DE L'INSTABILITE DES POUTRES A PAROIS

MINCES

5.1- Introduction	122
5.2- Equation d'énergie	126
5.3- Formulation en élément fini de l'équation $\delta^2 V$	132
5.4- Programmation	137
5.4.1- Introduction	137
5.4.2- Programmation du calcul des termes de la matrice de rigidité	138
5.4.2.1- Interprétation des termes de la matrice de rigidité	138
5.4.2.2- Présentation des termes de la matrice de rigidité	139
5.4.2.3- Description du programme	141
5.4.2.4- Organigramme	142
5.4.3- Programmation du calcul de l'équation d'équilibre	148
5.4.3.1- Introduction	148
5.4.3.2- Description du programme	149
5.4.3.3- Organigramme	151
5.4.3.4- Description du fichier des données	154
5.4.4- Expérimentation numérique du programme MEF	156
5.4.4.1- Introduction	156
5.4.4.2- Présentation de l'exemple référence	159
5.4.4.3- Résultats et interprétations	160
5.4.4.4- Présentation du longeron du châssis	169
5.4.4.5- Résultats et interprétations	170
CONCLUSION	172
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	177
ANNEXES	179
Annexe 1	179
Annexe 2	182
Annexe 3	202

C H A P I T R E 1

I N T R O D U C T I O N

L'étude des structures constitue un domaine de recherche très vaste. Son champ d'application s'élargit pour toucher un grand nombre de disciplines existantes dans le monde industriel (tels que : automobile , ferroviaire , maritime , aéronautique , nucléaire , genie-civil , etc..). Ce domaine n'a pas cessé , jusqu'à ce jour , de connaître le progrès dans les méthodes et procédés de calcul .

En plus de l'évolution dans le domaine de la connaissance du comportement des matériaux et des structures , le progrès technologique , d'une manière générale , a permis dans ce domaine de développer les moyens de calcul et d'analyse par l'introduction de l'outil informatique .

Nous pouvons résumer que , le calcul de structure est passé de l'ère des anciennes méthodes de calcul classique, dont une partie de ces méthodes reste toujours valable et utilisée, à une nouvelle ère qui se distingue par les exigences en économie de matière première , la qualité , la sécurité et les performances élevées qui conduisent à la nécessité d'affiner le calcul des structures par la mise en oeuvre de méthodes nouvelles dont la plus répandue est la méthode des éléments finis . Ces méthodes se sont développées sur la base de modélisation détaillée aboutissant à l'élaboration de logiciels informatique .

Ces derniers deviennent désormais un moyen de calcul simple à utiliser , efficace et rapide à la portée des ingénieurs

des bureaux d'étude .

L'exploitation de ces logiciels ne nécessite pas la maîtrise de cette méthode . Seulement , une formation sur la mise en oeuvre et l'interprétation des résultats suffisent pour utiliser correctement ces logiciels .

Pour en revenir à la définition du calcul des structures, nous dirons qu'il a pour fonction de vérifier la résistance de celles-ci lorsqu'elles sont soumises à des sollicitations. Cette vérification consiste à contrôler si les contraintes sont faibles pour qu'il n'y ait pas de rupture, ni de flambage ou de résonance .

La vérification à la rupture ou aux déformations plastiques se traduit par la comparaison entre la contrainte calculée et une fraction de la limite élastique, en introduisant le coefficient de sécurité .

La vérification au flambement consiste à chercher des charges critiques et de les comparer à celles qui sollicitent la structure . Par contre le phénomène de résonance est vérifié, en procédant à la comparaison des fréquences propres de la structure à la fréquence d'excitation .

Parmi les domaines qui sont concernés par le calcul des structures, on trouve le ferroviaire. Ce secteur est composé d'un grand nombre de discipline à savoir l'infrastructure (voie, bâtiment, ouvrage d'art, ..etc), le matériel (locomotive, voiture de voyageur, wagon) et la signalisation.

Comme tout autre entreprise nationale , le chemin de fer algérien se propose d'intégrer un certain nombre d'éléments de la voie, du matériel et de la signalisation .

Pour cela, la S.N.T.F nous a proposé l'étude d'un élément

important dans le matériel qui est le châssis de la locomotive . Depuis des années , l'unité de maintenance connaît plus en plus des progrès dans la remise en bon état des châssis endommagés où en voie de réforme .

Cette maîtrise n'est accompagnée d'aucune méthode , ni de moyen de calcul . C'est dans cet objectif , que notre recherche a pour intérêt d'élaborer une notice de calcul qui contribuera à la réparation des châssis et aussi à l'étude d'intégration de cet élément .

Seulement , connaissant la complexité du milieu dans lequel travaille le châssis et vu qu'il n'existe pas de tradition de recherche dans les structures ferroviaires au niveau local nous nous sommes , alors , confronté à un domaine de recherche vierge et très large .

Dans ce cas , nous avons limité au départ ce thème aux objectifs suivants :

- a) - recherche d'une meilleure modélisation pour ce genre de structure
- b) - retrouver les positions d'équilibre du châssis avec la formulation de la nouvelle modélisation
- c) - mettre en équation la formulation donnant les charges critiques et procéder au calcul .

Cette approche de recherche est de nature théorique .

Le but essentiel visé par ce travail , c'est la modélisation de cette structure pour une éventuelle étude du comportement statique et dynamique .

Au niveau national , il existe des travaux de recherche , qui ont traité ce genre de structure par la méthode des éléments

finis .

On a utilisé jusqu' à présent deux modèles d'éléments finis. le premier consiste à discrétiser les éléments du châssis en éléments poutres de section droite dans l'espace. Pour ce modèle ,il a été considéré que la section droite reste toujours droite durant la déformation , les charges extérieures passent par le centre de gravité et que la résultante des forces de cisaillement passe ,aussi,par le centre de gravite (quand la poutre est soumise à une flexion non uniforme). La dernière hypothèse implique que la notion du centre de cisaillement est négligée.

A partir de ce modèle, on a pu aboutir aux calculs des efforts suivants :

- effort de traction-compression, de flexion suivant les deux axes transversaux et la contrainte de cisaillement due à la torsion pure autour du centre de gravité .

Ce modèle a donné jusqu'à`présent des résultats satisfaisants. Seulement, il n'a pas été mis à l'épreuve pour des conditions de chargement et d'appui complexes .

Néanmoins, nous pourrions exploiter un résultat intéressant par cette première modélisation est que, le comportement des châssis classiques (châssis composés de deux longerons et traverses) est dominé par le comportement des longerons .

Sur la base de ce résultat, nous nous sommes intéressé à l'étude du longeron seul [2],[3],[23].

Dans le but de parfaire et d' affiner le calcul de ce genre de structure , on a utilisé une seconde modélisation composée d'éléments mixtes pour le longeron uniquement .

Suivant les prédictions des déformations des semelles inférieures et supérieures et de l'âme du longeron , on a discrétisé les semelles en éléments finis plaques minces (ou flexionnelles) et l'âme en plaques membranaires [2],[4],[5] . Cette modélisation a permis de localiser et maintenir les charges à l'endroit où celles-ci s'appliquent . En même temps elle permet de donner des précisions sur le calcul des efforts à n'importe quels points sur la paroi de l'âme ou les semelles . Nous indiquons , qu'il s'est posé un problème de choix des degrés de liberté des noeuds se situant sur la frontière de liaison des éléments plaques flexionnelles et éléments plaques membranaires . Nous ajoutons aussi, que le phénomène de distorsion a été négligé dans ce deuxième modèle . En conclusion, nous pensons que cette modélisation n'est pas aussi parfaite que la première. De plus, le temps d'exécution de la résolution est beaucoup plus grand .

A travers notre modeste recherche bibliographique , nous avons trouvé que ces deux modèles sont des approches pour le calcul de ce genre de structure d'une manière générale et ils sont idéals pour certains cas de ces structures .

Dans ce cadre , nous avons vu qu'il est intéressant de rechercher un autre modèle qui se rapproche le plus de la réalité du comportement de la classe des structures à laquelle appartient le châssis de la locomotive et surtout lorsqu'elles s'exposent à des conditions d'exploitation très sévères exemple :

- Majoration de la forme du chargement dynamique et choc sévère pour le châssis de la locomotive .

- Coup de vent violent et tremblement de terre pour les ponts routiers et de chemin de fer en construction métallique .

Pour cela , nous sommes retourné à la définition des classes des structures , pour en déterminer les caractéristiques de chacunes et, ainsi connaître l'appartenance de la classe du châssis de la locomotive .

Parmi les auteurs , nous trouvons " VLASOV " [7] l'un des spécialistes qui définit les différentes conception de calcul des pièces suivant leur forme géométrique .

Il différencie l'ensemble des éléments constitutifs d'une construction en quatre grandes classes .

- a) - les corps pleins, se sont des pièces continues dont les trois dimensions dans l'espace sont du même ordre de grandeur , la détermination des efforts internes, et les déformations font l'objet de la théorie d'élasticité .
- b) - Les plaques et enveloppes du type voûte ou coque sont constituées par des voiles minces dont deux des trois dimensions sont du même ordre de grandeur et la troisième est très petite par rapport aux autres (appelée épaisseur). L'étude du phénomène de résistance ,de stabilité et de vibrations, fait l'objet de la théorie des plaques minces et enveloppes .
- c) - Les pièces allongées pleines du type poutre ou tige , se sont des éléments qui, leur étendue dans l'espace est caractérisée par le fait que deux des des trois dimensions sont du même ordre de grandeur

et la troisième est très grande par rapport aux deux autres (appelée longueur).

Pour l'étude de cette classe de structure, on introduit une série d'hypothèse purement géométrique supplémentaire permettant de modéliser la tige en schéma facile à calculer.

Donc, pendant la flexion et la traction, on suppose que les sections droites restent plane après déformation. Lors de la torsion, on néglige l'allongement dans le plan transversal et aussi l'allongement dans le plan longitudinal.

En résumé, la théorie élémentaire de la traction flexion, et la torsion pure fait l'objet de la théorie pratique des poutres pleines.

Soulignons, que l'élément poutre utilisé dans la première modélisation du châssis appartient à cette troisième classe.

- d) - La quatrième classe est composée par des voiles longues, prismatiques ou cylindriques. Leurs caractéristiques distinctives est que, l'ordre de grandeur des trois dimensions est différent.

La particularité de ces éléments est qu'ils peuvent subir des déformations longitudinales lorsqu'ils sont sollicités à la torsion. Ce qui induira des contraintes longitudinales proportionnelles à ces déformations. Ce phénomène de déviation (déplanation) de la section droite est appelé "gauchissement" de la section droite. Les tensions peuvent atteindre de très grandes valeurs aussi bien pour les pièces

longues en voiles minces à profil ouvert (rigide ou déformable) que pour celles à profil fermé déformable.

Depuis les années 40 , Cette dernière schématisation a reçu un intérêt particulier et d'attention de la part des chercheurs en structures .

Les méthodes de calcul utilisées pour l'étude du comportement de ce modèle se sont développées par des procédures de calcul analytique (en particulier les travaux de " VLASOV " [7]). Dans le même axe de recherche , nous trouvons un auteur " TIMOSHENKO " [7] qui a mis en évidence des problèmes de stabilité de ce modèle de structure.

Il a dévoilé , d'une manière parfaite , les phénomènes de flambement à la torsion , flambement à la flexion-torsion et le flambement latéral , qui peuvent apparaître dans les poutres à parois minces pour un chargement bien déterminé . De plus , il a introduit de nouvelles propriétés de section relatives aux phénomènes sus-cités .

Il existe , actuellement , des solutions pour plusieurs problèmes d'instabilité de flexion et de flexion-torsion, obtenues à partir d'un calcul analytique , comprenant des conditions de chargement relativement simple [7] .

Par contre dans ces dernières années, beaucoup de chercheurs ont repris l'analyse de ces phénomènes par la méthode des éléments finis [8],[9],[10],[11],[12] .

Ils ont modélisé les éléments de structure en voiles minces longues , par une discrétisation en éléments finis nouveaux appelés : " éléments poutres à parois minces et de section droite ouverte " .

Cet élément admet un degré de liberté de gauchissement , en plus aux degrés de liberté de la poutre classique dans l'espace. Certains d'entre-eux, on introduit les déformations non-linéaire pour ce modèle [1],[4],[13] .

Dans tous le contexte , cette thèse a pour objectif d'exploiter ce nouveau élément pour l'analyse de l'équilibre statique et de stabilité du longeron, ainsi le comparer avec les deux premières modélisations (élément poutre simple et élément mixte plaque membranaire-flexionnelle).

Nous introduisons , aussi , les déformations non-linéaires déduites par " ROBERTS " [8] dans toute la formulation .

Puisque nous avons à étudier une structure en précontrainte, nous tiendrons en compte les contraintes initiales dans l' expression de la contrainte du matériau (le châssis ayant une forme en cambrure sans qu'il soit chargé).

Cette thèse comprendra ,donc, les chapitres suivants :

Après cette brève introduction et recherche bibliographique résumé en chapitre I, le deuxième chapitre sera consacré au calcul des contraintes initiales. Vu que le châssis aura une position horizontale lorsqu' il sera chargé avec tous les oragnes de la locomotive, nous supposons que les contraintes initiales dans les longerons sont celles développées dans les poutres rectilignes sollicitées par le chargement de ces mêmes organes de la locomotive .

Dans ce travail, nous exploiterons les deux modèles suivants: élément poutre simple et élément mixte plaque membranaire-flexionnelle , dans l'intention de faire une comparaison de l'efficacité de ces modèles .

Puisqu'il existe un logiciel qui calcule ces modélisations, nous passerons directement à son utilisation [40] .

Le troisième chapitre comprendra la définition du nouveau élément poutre à parois minces et de section droite ouverte ainsi que les déformations non-linéaire . En même temps, nous développerons la formulation de l'équation d'équilibre en appliquant la méthode des éléments finis .

Le quatrième chapitre comportera une description détaillée de la construction des matrices de rigidité intervenantes dans le système d'équations d'équilibre , qui sont de nature non-linéaire .

Le cinquième chapitre comprendra la formulation de l'équation d'instabilité par une modélisation en éléments finis poutres à parois minces . Aussi, nous donnerons un résumé du travail de programmation informatique pour calculer tous les termes des matrices de rigidité et pour calculer la position d'équilibre stable et les charges critiques. IL renfermera , à la fin , les résultats de l' expérimentation numérique et l'interprétation de ces résultats .

Nous trouvons en annexe un travail qui reprend la définition de certaines propriétés de section connues déjà [7] et surtout la définition de nouvelles propriétés de section qui interviennent dans ce modèle poutre à parois minces avec des déformations non-linéaire [19] . Ensuite toujours en annexe, nous présentons les résultats de calcul des expressions des propriétés de section de quelques formes les plus utilisées dans la pratique .

CALCUL DES CONTRAINTES INITIALES

2.1- Introduction

Nous réservons ce chapitre à l'étude d'une question posée par la conception du châssis (recherche des contraintes initiales) .

Cette question sera traitée par la méthode des éléments finis, en utilisant des modélisations déjà appliquées pour ce genre de structure . En même temps , nous aborderons la comparaison entre les deux modèles et , nous donnerons l'avantage , et l'inconvénient de chacun d'eux .

Le châssis est conçu initialement en forme de cambrure (flèche vers le haut). Le constructeur a calculé judicieusement la flèche qu'on doit donner au châssis afin que celle-ci s'annulera lorsqu'on monte l'ensemble des organes de la locomotive sur le châssis .

Cette déformation est considérée comme condition nécessaire pour le fonctionnement de ce type de locomotive (Général-Motors). Plus exactement ,cette déformation est conditionnée par:

- l'alignement des organes moteur diesel, alternateur.
- permettre au châssis de vibrer autour d' une flèche nulle .
- la conception (dimension et position)du réservoir.

Après une analyse des informations recoupées entre des techniciens concernés par ce problème (S.N.T.F) et un

spécialiste canadien , nous avons abouti à la conclusion suivante :

La forme du châssis a été obtenue par déformation des longerons en cambrure , ce qui nous laisse admettre que les longerons sont des éléments de structure en précontraints .

Donc , il est impérativement indispensable de connaître les contraintes initiales , avant toute étude éventuelle sur le châssis. C'est dans cet ordre d'idée, que nous avons ciblé cet objectif au début de ce thème de recherche. Nous ajoutons que ces contraintes peuvent être de nature thermique (procédé des points de chauffage) ou mécanique (déformation au delà de la limite élastique) .

Pour résoudre ce problème , nous avons posé l'hypothèse suivante :

Nous supposons que , pour arriver à annuler la flèche du longeron , sous le chargement des organes de la locomotive , il faut que le longeron ait initialement des contraintes de sens opposé à celles provoquées par le chargement en question .

A partir de là , nous avons orienté notre recherche vers le calcul des contraintes développées dans un longeron (droit) soumis au même chargement de la locomotive .

Dans ce cas , la question est rendue comme une étude classique. Le calcul de ce type de structure de châssis classique (deux longerons reliés par des traverses) a fait l'objet de deux modélisations différentes ; à savoir :

- modélisation châssis complet en élément poutre dans l'espace .

- modélisation des longerons en élément mixte plaque membranaire - flexionnelle .

Vu que la formulation de ces modélisations est devenue familière pour les ingénieurs (surtout la première) et qu 'il existe actuellement des programmes et des logiciels de calcul, nous donnons brièvement les étapes de formulation de ces modélisations , et nous passerons directement à l'exploitation d'un logiciel (appelé S A P 80) .

La comparaison entre ces modélisations portera sur la valeur de la flèche trouvée et les contraintes initiales recherchées seront calculées avec le modèle donnant une flèche qui se rapproche le plus à celle du constructeur .

2.2- Définition des données du problème

2.2.1- Description du châssis

Le châssis de la locomotive G M est une structure métallique composée de deux poutres principales appelées longerons, se sont des profilés en forme de "I" dissymétrique reconstitués par des plaques d'épaisseurs différentes assemblées par soudage . Les longerons sont reliés par des traverses de section différentes . La liaison entre le longeron et les traverses est rigide indémontable assurée par soudage.

Le châssis repose sur deux appuis appelés (pivot) qui sont situés au milieu de deux traverses à l' avant et l'arrière de la locomotive . Ce qui explique les grandes dimensions de ces traverses. Donc parmi les traverses les plus importantes sont les traverses des pivots , du moteur et de têtes . Par contre , le reste des plaques fixées sur le châssis, jouent un rôle de support pour certains organes ou d'étanchéité et n'influent en aucun cas sur la rigidité de cette structure .

2.2.2- Chargement du châssis

En réalité , le châssis supporte un nombre considérable d'organes . Nous avons choisi uniquement les organes ayant un poids influençable sur la flèche du châssis en charge.

La schématisation des forces-poids de ces organes est basée sur la nature de l'assise de chaque organe. Pour le cas de la locomotive "GM" , les organes les plus importants reposent sur des appuis finis (discrètes) voir annexel fig 1.

Dans ce cas, les organes seront schématisés par des charges concentrées à la position d'appui voir annexel fig 2.

Par contre, les organes qui reposent indirectement sur le châssis par l'intermédiaire de la carrosserie, et que cette dernière est bridée tout le long du châssis soit par soudage ou par boulonnage. Leurs assises sont définies comme des appuis continus. Donc, la représentation schématique de ces organes seront des charges continues.

Ajoutons de plus, que la plupart des organes pris en considération s'appuient de la même manière sur les deux longerons. Ce qui implique que la répartition de charge est symétrique sur les deux longerons tout le long du châssis. Cette dernière remarque, nous permet de faire l'analyse d'un seul longeron. Nous trouvons dans l'annexel figure 2, la répartition des charges sur le châssis.

Concernant l'intensité des charges, nous trouvons dans les documents du constructeur les poids de la plupart des organes de la locomotive. Néanmoins, nous avons effectué un calcul approximatif pour évaluer le poids des organes qui ne figurent pas sur les documents du constructeur.

Le tableau 1 en annexel, dresse les différents éléments de la locomotive, pris en considération dans l'étude avec les informations relatives aux nombres d'éléments par type et nombre d'appuis et l'intensité des charges.

2.2.3- Position des charges et dimensions du châssis

Parmi les documents technique du constructeur , il existe un dessin de fabrication du châssis . Nous avons relevé sur ce dessin le maximum de détail relatif à la forme ,positions des appuis de certains organes et les dimensions du châssis. Aussi, nous étions obligé de prendre certaines mesures directement sur le châssis d'une locomotive .

Nous signalons, que les vecteurs charges ne passent pas le le centre de gravité de la section droite .

Nous remarquons que certains organes sont fixés sur la semelle supérieure du longeron et d'autres sur la semelle inférieure .

Dans la figure 2 de l'annexel, nous retrouvons toutes les dimensions du châssis ainsi que les positions des charges.

2.3- Modélisation en élément poutre

2.3.1- Définition d'une poutre

Une poutre est un solide engendré par une aire plane A (fig 2.1) qui se meut dans l'espace de manière que, durant son mouvement, son centre de gravité G parcourt une ligne donnée L et que l'aire reste constamment normale à cette ligne .

La ligne L appelée axe ou fibre moyenne de la poutre , peut être une ligne quelconque de l'espace , en général, celle-ci est une courbe plane et souvent une ligne droite .

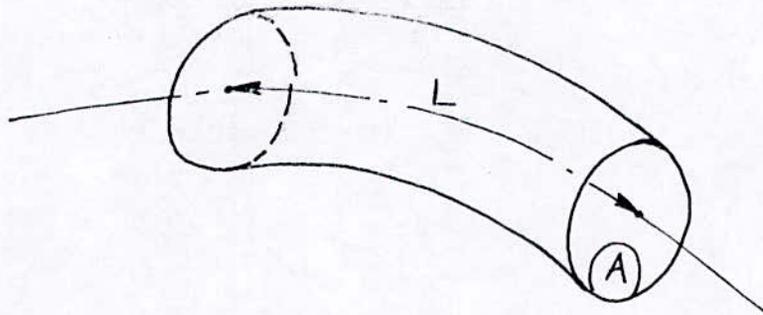


fig 2.1 - Élément poutre

La section droite peut changer de grandeur, et de forme, au cours du mouvement, mais seulement d'une manière faible.

2.3.2- hypothèses de la théorie des poutres

Dans la théorie des poutres, on introduit une série d'hypothèses relatives au comportement et à la géométrie de cet élément. Les hypothèses générales du comportement sont:

a) Le matériau de la poutre est considéré homogène et isotrope qui, sous l'action des forces extérieures, ne subit que des déformations réversibles et infiniment petites.

b) Les déplacements des points matériels sont suffisamment faibles pour être négligé, lors de l'écriture des équations d'équilibre (théorie dite de premier ordre).

Il en résulte de ces hypothèses la loi de "HOOKE" et le principe de superposition.

c) selon le principe de "SAINT-VENANT" les contraintes dans une section, éloignées des points d'applications des forces extérieures, ne dépendent que des éléments de réduction du système de forces appliquées d'un seul côté de Σ (les éléments de réduction étant le tenseur des forces internes caractérisé par des composantes de forces et des

composantes de moment) .

d) D'après le principe de "NAVIER-BERNOULLI" ,les sections planes avant déformation restent planes ,après déformation .

e) Dans l'étude de la torsion pure de ces éléments , on néglige l'allongement, le glissement dans le plan de la section transversale ainsi que l'allongement dans le sens longitudinal .

2.3.2.1- hypothèses géométriques

a) les dimensions transversales d'une poutre doivent être petites par rapport à la longueur . Elles ne doivent pas cependant être trop petites, car les déplacements sont supposés faibles . Le domaine de la classe des poutres est borné approximativement par les limites suivantes :

- poutre droite: H / L compris dans l'intervalle $] 1/30, 1/5 [$
 - poutre arc: H / L compris dans l'intervalle $] 1/100, 1/5 [$
- H et L désignent respectivement hauteur et longueur de la poutre [37] .

b) Le rayon de courbure de la fibre moyenne devra être supérieur à cinq fois la hauteur.

c) Dans le cas d'une poutre de section variable ,la variation doit être progressive le long de la fibre moyenne .

2.3.3- Mise en équation

2.3.3.1- Concept de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est un procédé général de discrétisation des problèmes continus décrits par des

relations mathématiques . Elle constitue une méthode d'approximation des problèmes continus. Son principe de base est de subdiviser le milieu continu en un nombre fini de parties (appelés éléments finis). Dont le comportement est connu à partir d'un nombre fini de paramètres .La solution du système complet constitué de l'assemblage de ses éléments suit précisément les mêmes règles que celles applicables aux problèmes discrets standards .

2.3.3.2- Procédure générale

Nous présentons ici la procédure de calcul de la méthode des éléments finis basée sur la méthode de déplacement .

Cette procédure aboutit à des équations dont les paramètres sont les déplacements, elle se décrit comme suit :

- le milieu continu est subdivisé par des lignes ou des surfaces imaginaires en un certain nombre d'éléments finis . les éléments sont supposés reliés entre eux en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières . Les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème, exactement comme un simple calcul des structures discrètes .

- On choisit les fonctions permettant de définir de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur de chaque " élément fini " en fonction des déplacements de ses noeuds.

- Les fonctions de déplacement définissent maintenant sans ambiguïté l'état des déformations à l'intérieur d'un élément en fonction des déplacements nodaux.Ces déformations, jointes à d'éventuelles déformations initiales , et compte tenu

des propriétés élastiques du matériau , définissent l'état de contrainte en tout point de l'élément, et par voie de conséquence également sur ses frontières .

- On détermine un système de forces concentrées aux noeuds qui équilibre les contraintes s'exerçant aux frontières et d'éventuelles forces réparties . Il en résulte une relation de rigidité de la forme

$$q = k . a + f_p + f_o \quad (2.1)$$

q = vecteur forces s'exerçant sur les noeuds

k = matrice de rigidité

a = vecteur déplacements nodaux .

f_p = vecteur charges réparties appliquées à l'élément

f_o = vecteur forces nodales nécessaire pour compenser les déformations initiales .

Dans la suite de ce chapitre , nous n'allons pas nous étaler sur des démonstrations qui expliquent comment nous aboutissons à l'expression finale de l'équation d'équilibre, puisque les modèles choisis pour la recherche de la flèche du longeron sont très connus . Par contre , nous nous contenterons de rappeler les résultats finaux de la formulation de l'équation d'équilibre de chaque élément .

2.3.3.3- Equation d'équilibre de l'élément poutre

L'élément poutre dans l'espace est modélisé par une droite rectiligne caractérisant la ligne moyenne de la poutre limitée dans l'espace par deux points (appelés noeuds).

Chaque noeud admet six degrés de liberté (trois translations et trois rotations). Cela sous-entend, que le noeud est sollicité par six efforts (trois forces et trois moments).

Le vecteur déplacement de l'élément est :

$$\{ \delta \} = \{ U_{xA}, U_{yA}, U_{zA}, \theta_{xA}, \theta_{yA}, \theta_{zA}, U_{xB}, U_{yB}, U_{zB}, \theta_{xB}, \theta_{yB}, \theta_{zB} \}$$

Le vecteur force de l'élément est :

$$\{ F \} = \{ F_{xA}, F_{yA}, F_{zA}, M_{xA}, M_{yA}, M_{zA}, F_{xB}, F_{yB}, F_{zB}, M_{xB}, M_{yB}, M_{zB} \}$$

Les fonctions de déplacement des différents degrés de liberté d'un point à l'intérieur de l'élément sont :

$$U_x = \alpha_1 + \alpha_2 X$$

$$U_y = \alpha_3 + \alpha_4 X + \alpha_5 X^2 + \alpha_6 X^3$$

$$U_z = \alpha_7 + \alpha_8 X + \alpha_9 X^2 + \alpha_{10} X^3$$

$$\theta_x = \alpha_{11} + \alpha_{12} X$$

$$\theta_y = \frac{\partial U_z}{\partial x} = \alpha_8 + 2 \alpha_9 X + 3 \alpha_{10} X^2$$

$$\theta_z = \frac{\partial U_y}{\partial x} = \alpha_4 + 2 \alpha_5 X + 3 \alpha_6 X^2$$

$$\{ \delta(x) \} = [f(x)] \{ \alpha_i \} \quad (2.2)$$

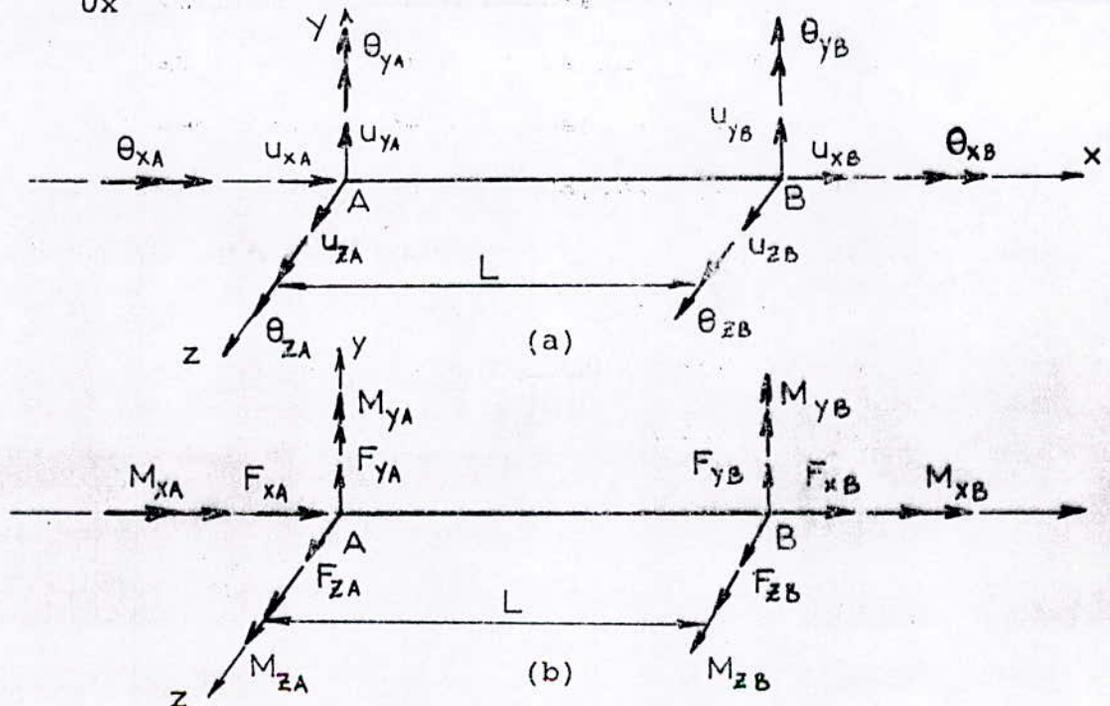


fig 2.2-Elément poutre: (a) degrés de liberté, (b) forces nodales

En appliquant les conditions aux limites, on peut déterminer les coefficients inconnus des fonctions de déplacement de chaque degré de liberté .

Rappelons les C . A . L :

$$\left. \begin{array}{l} \text{à } x = 0 \quad \{ \delta (x=0) \} = [f (x=0)] \{ \alpha_i \} \\ x = L \quad \{ \delta (x=L) \} = [f (x=L)] \{ \alpha_i \} \end{array} \right\} \{ \delta_i \} = [A] \{ \alpha_i \}$$

Donc nous aboutissons à un système d'équations linéaire dont le nombre d'équations est équivalent au nombre d'inconnues. En utilisant la méthode de la matrice inverse , nous calculerons les constantes $\{ \alpha_i \}$:

$$\{ \alpha_i \} = [A]^{-1} \{ \delta_i \} \quad (2.3)$$

En substituant la relation (2.3) dans (2.2) ; on obtient :

$$\{ \delta (x) \} = [f(x)] [A]^{-1} \{ \delta_i \}$$

ou encore

$$\{ \delta (x) \} = [N (x)] \{ \delta_i \} \quad (2.4)$$

$N(x)$: appelée fonction de forme de déplacement .

Donc, le vecteur déplacement $\{ \delta(x) \}$ d'un point de l'élément est relié au vecteur $\{ \delta_i \}$ regroupant tous les déplacements nodaux de l'élément par l'intermédiaire de la matrice $[N(x)]$. L'équation d'équilibre sera déterminée à partir de l'application du principe des travaux virtuels qui s'annonce comme suit :

Pour n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total des charges nodales doit être égale au travail interne total des contraintes .

le travail interne des contraintes est aussi appelé énergie de déformation .

soit le vecteur de déplacements nodaux virtuel de l'élément poutre:

$$\{\delta\} = \{U_{xa}, U_{ya}, U_{za}, \theta_{xa}, \theta_{ya}, \theta_{za}, U_{xb}, U_{yb}, U_{zb}, \theta_{xb}, \theta_{yb}, \theta_{zb}\}$$

Le travail extérieur des forces nodales est :

$$W_{ext} = \{U_{xa}\} \{F_{xa}\} + \{U_{ya}\} \{F_{ya}\} + \dots + \{\theta_{xa}\} \{M_{xa}\} + \{\theta_{zb}\} \{M_{zb}\} \quad (2.5)$$

Le travail interne des contraintes est :

$$\int W_{int} \, dv = \int \{ \epsilon(x) \}^T \cdot \{ \sigma(x) \} \, dv \quad (2.6)$$

Avec $\{ \epsilon(x) \}$: déformations produites par les déplacements imposés . Evaluant maintenant $\{ \epsilon(x) \}$ et $\{ \sigma(x) \}$.

Les déformations définient pour l'élément poutre sont des déformations axiales (longitudinales) dues aux efforts de compression et de flexion dans les deux plans et des déformations de cisaillement dues au moment de torsion. Pour ce modèle de poutre nous négligeons les effets de cisaillement dus aux efforts tranchants ; nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon \\ \beta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} dU_x/dx, \quad d^2 U_y/dx^2, \quad d^2 U_z/dx^2 \\ d\theta_x/dx \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

en utilisant les résultats de (2.4) ; nous aurons

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon \\ \beta \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0, & 1, & 0, & 0, & -2, & -6x, & 0, & 0, & -2, & -6x, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right] [A]^{-1} \{\delta_i\}$$

[C]

on peut écrire aussi :

$$\{ \epsilon(x) \} = [B] \{ \delta_i \} \quad (2.8)$$

avec $[B] = [C] [A]^{-1}$

Relation qui lie les deux déformations et les déplacements nodaux . Dans la mesure où il n'y a pas de contraintes initiales les contraintes et les déformations sont reliées par l'expression :

$$\{ \sigma(x) \} = [D] \{ \epsilon(x) \} \quad (2.9)$$

Où [D] est une matrice carrée symétrique dont les termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux . En remplaçant $\epsilon(x)$ par son expression donnée en (2.8); on a

$$[\sigma(x)] = [D] [B] [\delta i] \quad (2.10)$$

Pour le cas de la poutre :

$$[D] = \begin{bmatrix} E & , & 0 \\ 0 & , & G \end{bmatrix}$$

En utilisant les expressions (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), (2.10) ; on obtient

$$\{ \delta i \}^T \{ F_i \} = \int \{ \delta i \}^T [B]^T [D] [B] \{ \delta i \} dv \quad (2.11)$$

Les vecteurs nodaux sont des valeurs indépendants des variables d'intégration .On peut écrire :

$$\{ \delta i \}^T \{ F_i \} = \{ \delta i \}^T \int [B]^T [D] [B] dv \{ \delta i \} \quad (2.12)$$

Finalement, l'équation d'équilibre de la structure globale est

$$[F_i] = [K] [\delta i] \quad (2.13)$$

avec

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] dv \quad (2.14)$$

[K] appelée matrice de rigidité de l'élément poutre qui

sera donné dans la page 26 .

2.3.3.4- Matrice de rigidité globale

Rappelons que l'équation d'équilibre précédente est déterminée pour un élément quelconque de la structure dans l'espace et le repère considéré est celui défini pour l'élément en question (appelé repère local). Pour cela, avant de passer au calcul de la structure complète, il est indispensable de réécrire les équations d'équilibre de chaque élément dans le système global défini pour la structure. Ensuite, on effectue l'assemblage des matrices de rigidité élémentaire des vecteurs des déplacements et des vecteurs forces exprimés dans le repère global pour établir l'équation de toute la structure.

2.3.4- Modélisation

Le longeron est discrétisé en un maillage d'élément poutre irrégulier. C'est à dire les longueurs des éléments sont différents. Les noeuds qui délimitent ces longueurs ont été choisis aux points de connections entre traverses et longerons du châssis. Aussi, nous définissons des noeuds aux endroits où il y a changement de section droite et aux appuis du longeron. Pour ce longeron, nous avons onze éléments poutres. Donc, nous avons douze noeuds dont les noeuds (4) et (9) caractérisent les points de changement de section. Précisant, que le noeud (9) se trouve approximé d'une connection traverse-longeron, Par conséquent, il définit en

$$[K_0] = \begin{bmatrix}
 a, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -a, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 & b, & 0, & 0, & 0, & -h, & 0, & -b, & 0, & 0, & 0, & h \\
 & & c, & 0, & i, & 0, & 0, & 0, & -c, & 0, & i, & 0 \\
 & & & d, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & -d, & 0, & 0 \\
 & & & & e, & 0, & 0, & 0, & -i, & 0, & -k, & 0 \\
 & & & & & f, & 0, & -h, & 0, & 0, & 0, & l \\
 & & & & & & a, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
 & & & & & & & b, & 0, & 0, & 0, & -h \\
 & & & & & & & & c, & 0, & -i, & 0 \\
 & & & & & & & & & d, & 0, & 0 \\
 & & & & & & & & & & e, & 0 \\
 & & & & & & & & & & & f
 \end{bmatrix}$$

matrice symétrique

$$a = E A/L$$

$$h = 6 E I_z/L^2$$

$$b = 12 E I_z/L^3$$

$$i = 6 E I_y/L^2$$

$$c = 12 E I_y/L^2$$

$$k = 2 E I_y/L$$

$$d = G J/L$$

$$l = 2 E I_z/L$$

$$e = 4 E I_y/L$$

$$f = 4 E I_z/L$$

même temps une connection et un changement de section .
Vu que les appuis du châssis se situent sous des traverses (appelées traverses pivots) les noeuds (3) et (5) caractérisent des connections traverse - longeron et appui du longeron (voir figure de la discrétisation page 29). Concernant la numérotation, nous n'avons aucune remarque, ni spécification à donner, car le maillage est simple et linéaire .

2.3.5- Répartition des charges

Suivant le principe théorique de la méthode des éléments finis , les charges d'une structure discrétisée en éléments finis ,doivent être modélisées comme des forces (moments) concentrés aux noeuds de la structure .

Pour les deux cas de chargement concentrés et repartis qui soumettent le châssis,nous utiliserons la méthode des charges concentrées pour modéliser les charges . Donc les charges appliquées sur la structure seront ramener uniquement à des forces concentrées sur les noeuds se trouvant de part et d'autre de la charge en question. Nous donnerons dans le tableau 1 et la fig1 de l'annexe1,les informations relatives aux organes considérés dans cette modélisation.

2.3.6- Résultat et interprétation

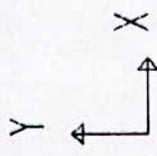
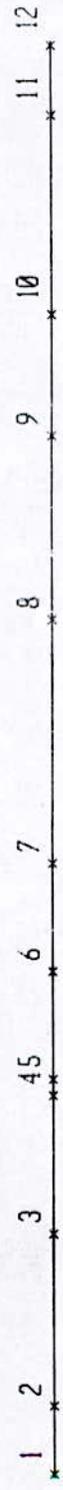
Nous avons utilisé un logiciel de la méthode des éléments finis (SAP 80) pour le calcul de la flèche du longeron modélisé en éléments poutres . Le calcul a donné une flèche maximum de 23,45 mm au milieu du longeron voir page suivante. Cette valeur est considérée comme une bonne approche à la valeur donnée par le constructeur qui est de 25,4 mm .

Cette approximation nous confirme l'hypothèse posée au début de ce chapitre qui est :

La valeur de la flèche du constructeur est équivalente à la déformation produite sur un châssis plan par un chargement égale à celui de la locomotive .

Le fichier des résultats (déplacements et déformée) de la modélisation en élément poutre sera donné dans les pages qui vont suivre .

A partir de là , nous allons passé à une autre modélisation qui est plus précise que l'élément poutre pour essayer de se rapprocher encore plus à la flèche du constructeur, et ainsi calculer les contraintes initiales recherchées dans ce chapitre .

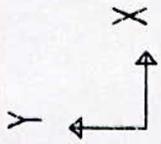
	<p>poutre UNDEFORMED SHAPE</p>	<p>OPTIONS JOINT IDS ALL JOINTS WIRE FRAME</p>	<p>SAP90</p>
			

Nom du fichier "POUTRE"

J O I N T D I S P L A C E M E N T S

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	R(Z)
1	.000000	19.818768	-.005928
2	.000000	14.186904	-.005928
3	.000000	.000000	-.005930
4	.000000	-11.317133	-.005197
5	.000000	-12.541701	-.005040
6	.000000	-19.342790	-.003617
7	.000000	-23.458642	-.001647
8	.000000	-21.208195	.002822
9	.000000	-9.914046	.005436
10	.000000	.000000	.005885
11	.000000	15.687861	.005797
12	.000000	21.190831	.005795



poutre
DEFORMED
SHAPE
LOAD



MINIMA
X .0000E+00
Y -.2346E+02
Z .0000E+00
MAXIMA
X .0000E+00
Y .2119E+02
Z .0000E+00

SAP90

2.4- Modélisation en élément plaque

2.4.1- Introduction

Comme nous l'avons constaté , la valeur maximum de la flèche trouvée avec la modélisation en élément poutre est inférieure à celle donnée par le constructeur . Néanmoins , cette différence n'est pas très grande puisque la valeur calculée s'approche à celle du constructeur, nous confirmons que l'hypothèse posée au début du chapitre, relative à la démarche qui conduit aux calculs des contraintes initiales, est valable. Pour cela , nous allons choisir une modélisation donnant une meilleure précision de calcul par rapport au modèle poutre. Parmi les modèles connus qui s'accommodent à la forme et aux dimensions de cette structure est le modèle plaque . Ce dernier permet d'affiner la discrétisation du longeron en élément petit (fin) et ainsi calculer les paramètres recherchés (déplacements, contraintes) pour un très grand nombre de positions sur le longeron.

Connaissant le comportement du longeron du châssis sous un chargement dans un seul plan , nous sommes contraints d'utiliser deux modèles de plaques , pour pouvoir approcher au mieux le comportement de cette structure .

Nous utiliserons un maillage mixte composé des éléments :

- Plaque membranaire : cas des plaques soumises à un chargement perpendiculaire au plan moyen
- Plaque flexionnelle : cas des plaques soumises à un chargement perpendiculaire au plan moyen .

Sachant que la forme du longeron est constitué de trois

éléments une plaque rectangulaire longue appelée âme assemblée perpendiculairement avec deux autres plaques rectangulaires longues appelées semelles .

Puisque les vecteurs charges agissent dans un plan parallèle au plan de l'âme , donc perpendiculaire aux semelles , nous discrétisons alors l ' âme en éléments finis plaques membranaires et les semelles en plaques flexionnelles .

2.4.2- Définition de la plaque membranaire

Toute plaque soumise à des efforts dans le plan moyen de celles-ci et développant ainsi un état de contrainte plane sont appelées plaques membranaires . Les seuls degrés de liberté définissant les déplacements possibles d'un point de la plaque sont deux translations dans les directions des axes , définissant le plan de la plaque . La forme de la plaque choisie est une plaque rectangulaire . Nous avons préféré celle-ci par rapport à la plaque triangulaire pour les avantages suivants :

- Résultats légèrement plus précis
- Pour un nombre moindre d'éléments , nous obtenons des résultats meilleurs par rapport à la plaque triangulaire.

2.4.2.1- Hypothèses simplificatrices

Les seules déformations et contraintes à prendre en compte sont les trois composantes du plan $x - y$ et les autres composantes des contraintes sont nulles , et ne contribuent donc pas au travail interne .

2.4.3- Mise en équation

L'élément plaque est modélisé par un rectangle caractérisant la surface moyenne de la plaque limitée dans l'espace par quatre droites dont l'intersection donnent les quatre noeuds de la plaque. Chaque noeud peut être sollicité par deux efforts suivant les directions du plan de la plaque .

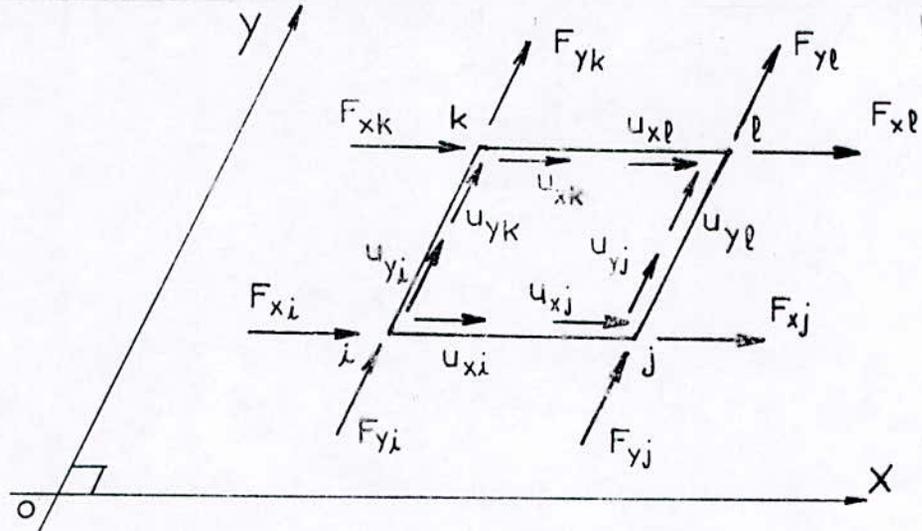


fig 2.3 Elément fini plaque membranaire

Le vecteur déplacement nodal de l'élément est :

$$\{ \delta \} = \{ U_{xi} , U_{yi} , U_{xj} , U_{yj} , U_{xk} , U_{yk} , U_{xl} , U_{yl} \}$$

Le vecteur force nodal de l'élément est :

$$\{ F \} = \{ F_{xi} , F_{yi} , F_{xj} , F_{yj} , F_{xk} , F_{yk} , F_{xl} , F_{yl} \}$$

Les fonctions déplacements des degrés de liberté d'un point donné sont :

$$\begin{cases} U_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x y \\ U_y = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 x y \end{cases} \quad \{ \delta(x,y) \} = \{ f(x,y) \} \{ \alpha_i \} \quad (2.15)$$

Nous suivrons le même procédé que pour l'élément poutre. Nous rappelons l'état de déformation et des contraintes planes à l'intérieur de l'élément :

$$\{\epsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial U_x / \partial x \\ \partial U_y / \partial y \\ \partial U_x / \partial y + \partial U_y / \partial x \end{Bmatrix} \text{ ou } \{\epsilon(x,y)\} = [B] \{\delta_i\} \quad (2.16)$$

$$\{\sigma(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

μ : étant le coefficient de poisson .

En utilisant aussi le principe des travaux virtuels :

$$dW = dU \quad (2.18)$$

avec dW = travail des forces extérieures

dU = travail des forces internes

$$\{\delta_i\}^T \{F_i\} = \int_V \{\epsilon(x,y)\}^T \sigma(x,y) dv \quad (2.19)$$

Nous aboutissons aussi à l'équation d'équilibre sous la forme suivante :

$$\{F_i\} = [K] \{\delta_i\} \quad (2.20)$$

d'ou la matrice de rigidité :

$$[K] = t \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy \quad (2.21)$$

t : étant l'épaisseur de la plaque

2.4.4- Définition de l'élément plaque flexionnelle

Une plaque mince soumise à un chargement perpendiculaire au plan moyen , est appelée plaque flexionnelle. L'état de contrainte développé à l'intérieur de la plaque tient compte uniquement des contraintes dues à la flexion et néglige les contraintes membranaires dues au même chargement . Chaque noeud possède trois degrés de liberté et qui sont : un déplacement suivant l'axe perpendiculaire de la plaque et deux rotations autour des axes définissant le plan de la plaque. Nous choisissons aussi pour cet élément une forme rectangulaire .

2.4.4.1- Hypothèses simplificatrices

- Les forces extérieures peuvent être considérées comme appliquées au plan moyen .
- La contrainte normale σ_z est négligeable sur tout élément parallèle au plan moyen .
- Le plan moyen ne subit aucune contraction ou extension lors de la flexion de la plaque .Le déplacement d'un point du plan moyen de la plaque se réduit ,donc, à une seule composante normale U_z ,appelée flèche de la plaque .
- Une normale au plan moyen reste normale à ce dernier pendant la déformation .

2.4.5- Mise en équation

Cet élément est schématisé aussi par un rectangle définissant le plan moyen de la plaque. Chaque noeud est sollicité par trois efforts, qui sont ; une force suivant l'axe Z et deux moments autour de OX et OY (voir fig 2.8). Le vecteur déplacement et force de l'élément sont :

$$\{ \delta \} = \{ U_{zi}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, U_{zj}, \theta_{xj}, \theta_{yj}, U_{zk}, \theta_{xk}, \theta_{yk}, U_{zl}, \theta_{xl}, \theta_{yl} \}$$

$$\{ F \} = \{ F_{zi}, M_{xi}, M_{yi}, F_{zj}, M_{xj}, M_{yj}, F_{zk}, M_{xk}, M_{yk}, F_{zl}, M_{xl}, M_{yl} \}$$

L'hypothèse de la théorie de flexion des plaques minces permet d'écrire, en tout points, l'égalité de la pente de la surface moyenne et du déplacement angulaire.

$$\theta_x = \frac{\partial U_z}{\partial y} \quad \theta_y = - \frac{\partial U_z}{\partial x} \quad (2.22)$$

les fonctions de déplacement des degrés de liberté d'un point donné sont :

$$\begin{aligned} U_z &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y \\ &\quad + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} xy^2 \\ \theta_x &= \alpha_3 + \alpha_5 x + 2 \alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2 \alpha_9 xy + 3 \alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 \\ &\quad + 3 \alpha_{12} xy^2 \\ \theta_y &= -(\alpha_2 + 2 \alpha_4 x + \alpha_5 y + 3 \alpha_7 x^2 + 2 \alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3 \alpha_{11} x^2 y \\ &\quad + \alpha_{12} y^3) \end{aligned}$$

$$\{ \delta(x,y) \} = [f(x,y)] \{ \alpha_i \} \quad (2.23)$$

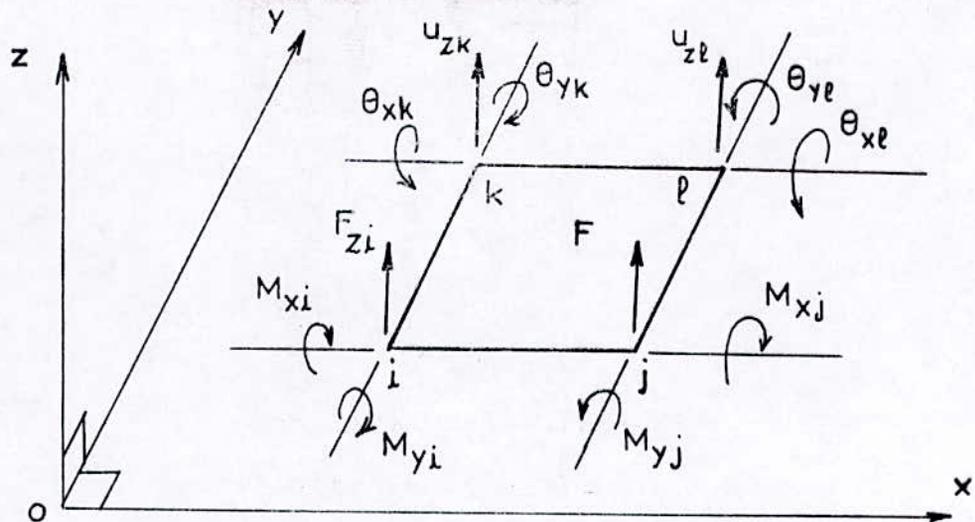


fig 2.4 Elément fini plaque flexionnelle

Nous rappelons l'état de déformation et de contrainte à l'intérieur de l'élément :

$$\{ \epsilon(x,y) \} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [B] \{ \delta_i \} \quad (2.24)$$

$$\{ \sigma(x,y) \} = -D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

avec $D = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}$

En passant par le principe des travaux virtuels, nous aboutissons à la même forme de l'équation finale.

$$\{ F_i \} = [K] \{ \delta_i \} \quad (2.26)$$

d'ou la matrice de rigidité de l'élément :

$$[K] = \int_0^b \int_0^a \int_{-t/2}^{t/2} [B]^T [D] [B] dz dy dx \quad (2.27)$$

2.4.6- Modélisation en élément plaque mixte membranaire- flexionnelle

Le longeron du châssis est un profilé reconstitué en trois plaques formant une section de forme en " I ". Les plaques horizontales sont appelées semelles et la plaque verticale est appelée âme . Toutes les charges du longeron agissent dans un plan perpendiculaire aux semelles . Certaines charges s'appliquent sur la semelle supérieure et d'autres sur la semelle inférieure. Donc suivant la conception du longeron et les orientations des charges appliquées par rapport à la disposition de la section droite , les semelles supérieures et inférieures travaillent à la flexion. Donc elles seront modélisées en plaques flexionnelles à quatre noeuds et à trois degrés de liberté par noeud . Par contre , l'âme se déforme dans le plan de sa surface et elle sera modélisée en plaques membranaires à quatre noeuds et à deux degrés de liberté par noeud.

Nous discrétisons le longeron en un maillage irrégulier (c.à.d des éléments plaques de dimensions différentes). Dans le but de maintenir les charges sur leurs positions d'application et aussi, pour définir des noeuds à l'endroit des appuis du longeron .

Dans la modélisation poutre , les appuis du longeron étaient caractérisés par un seul noeud . Par contre dans le cas de cette modélisation , il est difficile de choisir un nombre donné de noeuds, définissant les appuis du longeron .

2.4.7- Répartition des charges

Nous utiliserons dans cette deuxième modélisation la méthode des charges concentrées pour modéliser le chargement du longeron . Les charges réparties seront remplacées par des charges concentrées aux noeuds sans ajouter des moments . Par contre, les charges concentrées seront maintenues à leurs positions, puisqu'on définit des noeuds à l'endroit de ces charges . Dans la modélisation poutre , les charges sont supposées être appliquées sur la ligne moyenne de la poutre. Par contre, la modélisation en élément plaque du longeron , nous offre la possibilité de garder la disposition réelle des charges sur le longeron . C'est à dire certaines charges seront appliquées sur la semelle supérieure, et d'autre sur la semelle inférieure . Donc la répartition des charges sera différente à celle de la modélisation en élément poutre . Cette modélisation , nous permet de poser plusieurs variantes suivant les considérations citées dans ces deux derniers paragraphes relatives à la forme de l'appui, disposition des charges et dimensions des plaques .

2.4.8- Résultat et interprétation

Pour la même structure, le passage d'une modélisation en élément poutre à une modélisation en élément plaque, nous a obligé de revoir toutes les considérations relatives aux dispositions des charges, forme des appuis, degrés de liberté de certains noeuds et aux dimensions de la structure .

Sur la base de cela , nous avons défini plusieurs variantes

des données du problème . Puis nous avons exécuté tous les fichiers de ces variantes, par ordre de précision croissante, jusqu' à l 'aboutissement à la valeur de la flèche recherchée . Nous considérons, ici, les variantes les plus intéressantes, et nous donnerons les résultats de chacune d'elles .

Première variante des fichiers de données :

Maillage irrégulier du longeron. Degrés de liberté des noeuds situés à l'intersection âme-semelle sont ceux des noeuds d'une plaque flexionnelle (U_y, θ_x, θ_z) et en choisissant une rangée de trois noeuds superposées pour définir chaque appui . La flèche trouvée au milieu de l'âme est égale 1,225mm . Un résultat insignifiant devant celui recherché et qui est égale à 25,4mm .

Deuxième variante des fichiers de données :

Maillage irrégulier. Degrés de liberté des noeuds situés à l'intersection âme-semelle sont ceux des noeuds d'une plaque Membranaire ($U_x, U_y,$) et en maintenant le même nombre de noeuds , caractérisant les appuis . La flèche trouvée est égale à 41,07mm . Un résultat ayant un sens par rapport au précédent mais beaucoup supérieur à celui recherché .

Troisième variante des fichiers de données :

Maillage irrégulier . Degrés de liberté des noeuds à l' intersection âme-semelle sont ceux d' une plaque membranaire (U_x, U_y) . Seulement , le nombre de noeuds caractérisant l'appui est choisi, de telle manière qu'il

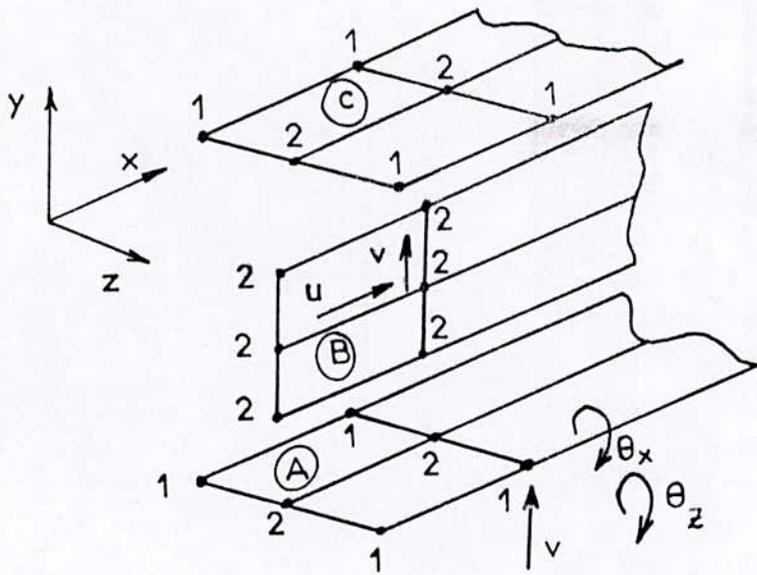
trace la forme de la traverse appui et ces goussets par 11 noeuds . La flèche calculée est égale à 35.98 mm . Cette valeur converge vers la valeur de la flèche recherchée .

Quatrième variante des fichiers de données :

Cette variante est similaire à la précédente . Seulement on ajoute des spécifications relatives à la variation de l'épaisseur de la semelle inférieure du longeron . Sachant que l' épaisseur de la partie centrale de la semelle inférieure est presque le double à celles des parties extrêmes. La flèche retrouvée au milieu de l'âme est égale 25,53 mm . Cette dernière valeur est le meilleur résultat trouvé parmi toutes les variantes établies. Car elle concorde parfaitement avec la valeur de la flèche du constructeur. Nous dirons que la valeur recherchée a été trouvé qu' après avoir englobé toutes les spécifications relatives à la conception du longeron (conditions d'appuis et conditions de chargement) voir figures 2.5 et 2.6 .

Cet aboutissement nous confirme une fois de plus que l'hypothèse posée au début du chapitre , et qui consiste à supposer que la cambrure initiale du châssis est équivalente à la flèche produite sur un châssis raide (sans contraintes initiales) sous le même chargement de la locomotive .

De ce résultat nous pouvons conclure que , l'énergie de déformation développée dans les longerons par flexion sous le chargement des organes de la locomotive est égale à l'énergie de déformation existante initialement dans le longeron , due aux contraintes initiales . Suite à cette conclusion , nous pouvons poser une hypothèse utile pour



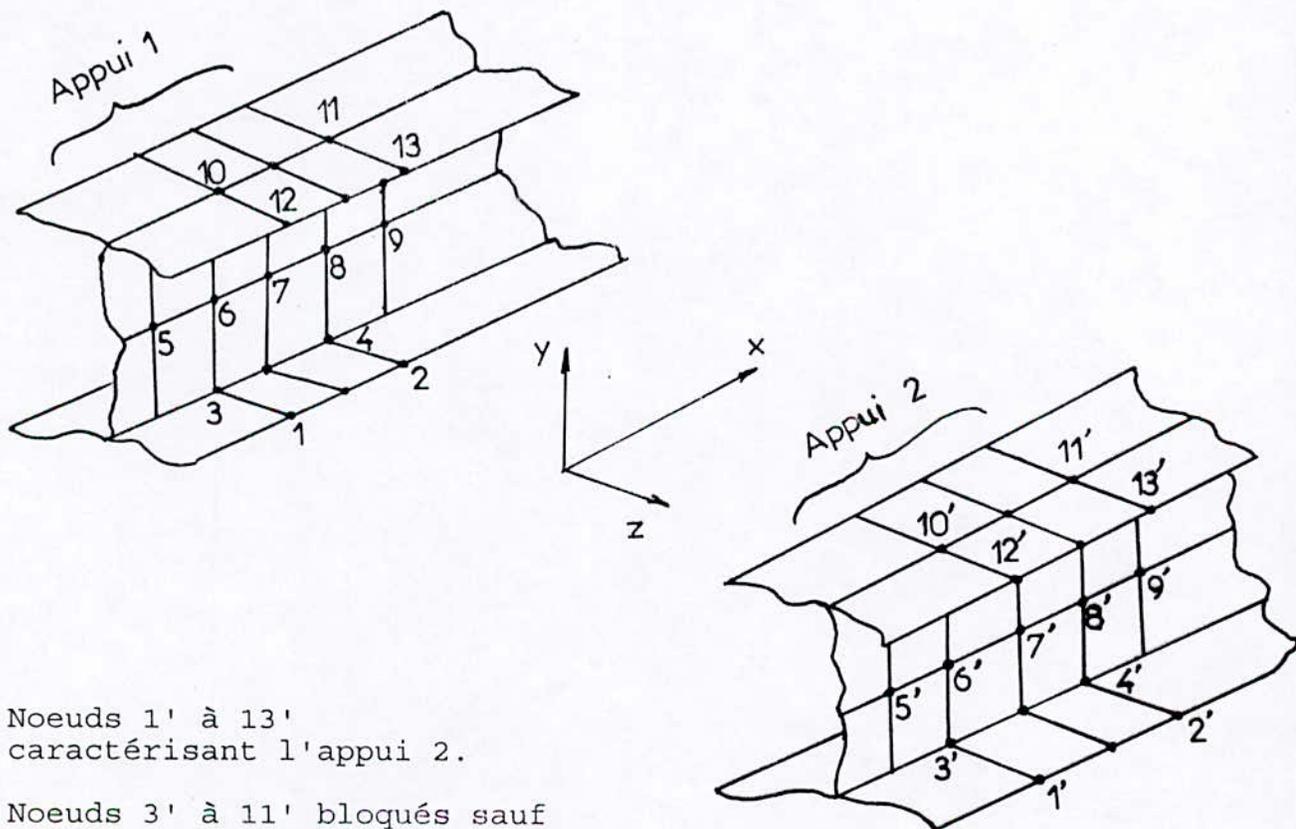
A-C : plaque flexionnelle
 B : plaque membranaire

Noeuds type 1 : ont des degrés de liberté de la plaque flexionnelle.

Noeuds type 2 : ont des degrés de liberté de la plaque membranaire.

Fig 2.5 : Schématisation des conditions aux limites des déplacements

Noeuds de 1 à 13 caractérisant l'appui 1. Tous les degrés de liberté de ces noeuds sont bloqués.



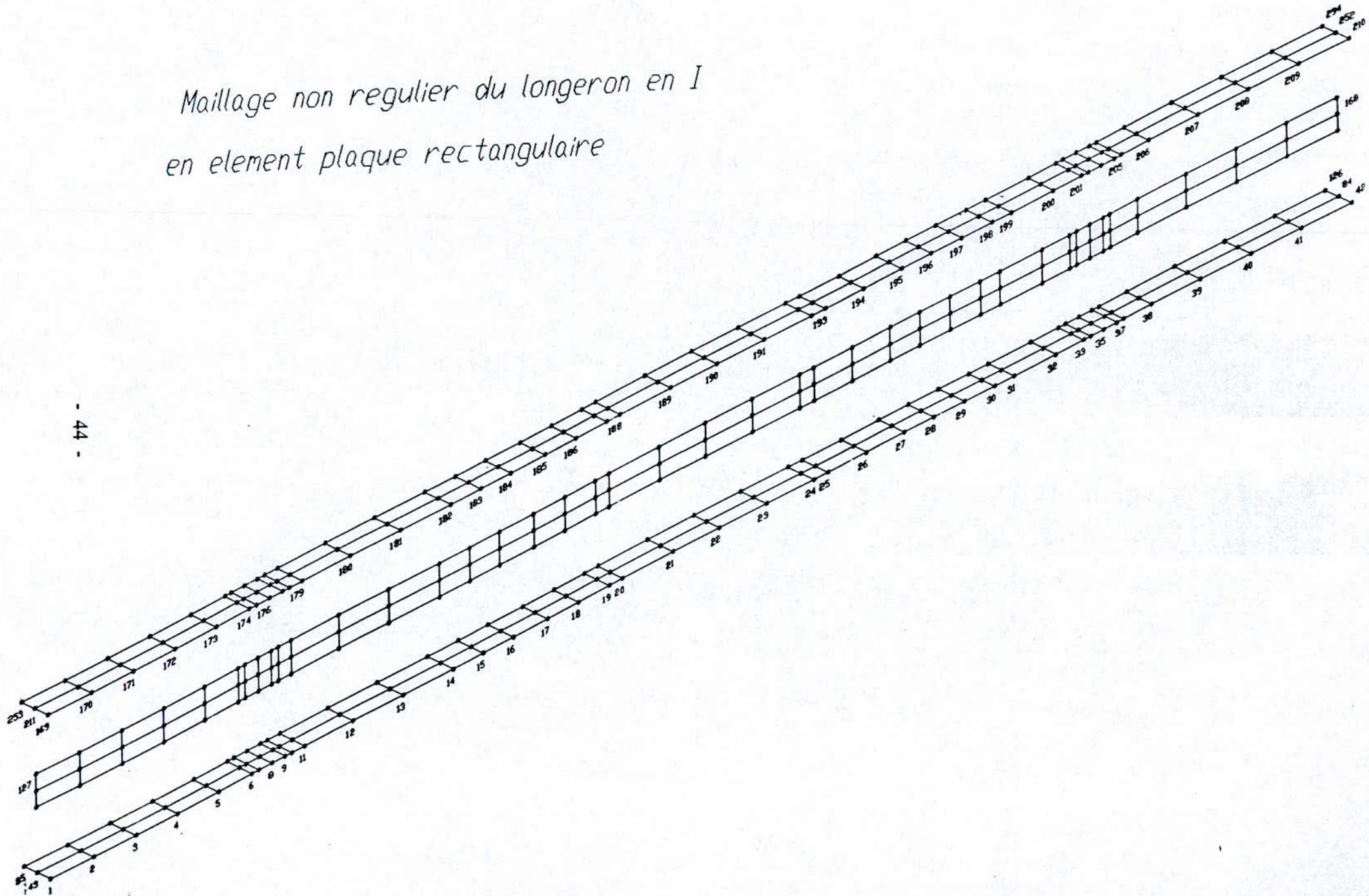
Noeuds 1' à 13' caractérisant l'appui 2.

Noeuds 3' à 11' bloqués sauf en déplacement suivant x.

Noeuds 1', 2', 12', 13' bloqués sauf en rotation autour de z.

Fig 2.6 : Schématisation des conditions d'appui du longeron

Maillage non regulier du longeron en I
en element plaque rectangulaire



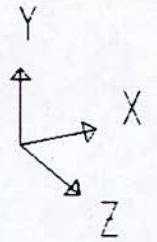
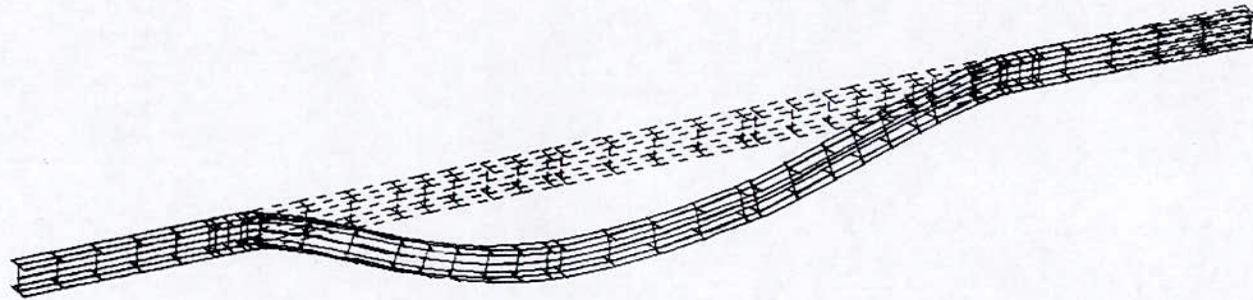
FICHER DE DONNEES DE LA MODELISATION EN ELEMENT PLAQUE

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	R(X)	R(Z)
127	.004889	.133280	.000000	.000000
128	.004887	.110351	.000000	.000000
129	.004912	.086309	.000000	.000000
130	.004720	.059841	.000000	.000000
131	.005808	.029964	.000000	.000000
132	.000000	.000000	.000000	.000000
133	.000000	.000000	.000000	.000000
134	.000000	.000000	.000000	.000000
135	.000000	.000000	.000000	.000000
136	.000000	.000000	.000000	.000000
137	.046764	-.598955	.000000	.000000
138	.049436	-4.592838	.000000	.000000
139	.048089	-9.996257	.000000	.000000
140	.046229	-15.651549	.000000	.000000
141	.044005	-18.821116	.000000	.000000
142	.047929	-21.565035	.000000	.000000
143	.051069	-24.122153	.000000	.000000
144	.049254	-25.851970	.000000	.000000
145	.051943	-26.918616	.000000	.000000
146	.053093	-27.091620	.000000	.000000
147	.052898	-26.898247	.000000	.000000
148	.053761	-25.900852	.000000	.000000
149	.051814	-24.218580	.000000	.000000
150	.058040	-21.944033	.000000	.000000
151	.059033	-21.166374	.000000	.000000
152	.053816	-18.169669	.000000	.000000
153	.057135	-14.647229	.000000	.000000
154	.057532	-11.836264	.000000	.000000
155	.057557	-9.026752	.000000	.000000
156	.056619	-6.302793	.000000	.000000
157	.054665	-4.624241	.000000	.000000
158	.053985	-1.401755	.000000	.000000
159	.055251	.000000	.000000	.000000
160	.055437	.000000	.000000	.000000
161	.055364	.000000	.000000	.000000
162	.055606	.000000	.000000	.000000
163	.055496	.000000	.000000	.000000
164	.055510	-.069712	.000000	.000000
165	.055660	-.317075	.000000	.000000
166	.055752	-.634928	.000000	.000000
167	.055855	-.975432	.000000	.000000
168	.055981	-1.316462	.000000	.000000

NB : Les déplacements des noeuds sus-mentionnes representent les déplacements du milieu de l'ame.



plaque
DEFORMED
SHAPE
LOAD 1

MINIMA
X -.1499E+01
Y -.2709E+02
Z .0000E+00
MAXIMA
X .1595E+01
Y .1337E+00
Z .0000E+00

SAP90

la suite de l'étude , et, qui consiste à supposer que le longeron , tel qu'il est conçu (flèche initiale) aura une flèche nulle lorsqu'il sera chargé par l'ensemble des organes de la locomotive , et on obtient ainsi, un état de contrainte nul . Les résultats de cette dernière variante seront donnés dans la page suivante . Par contre le fichier des données sera donné dans l'annexe .

2.4.9- Conclusion

Jusqu' à présent , les châssis à longerons des véhicules roulants ont fait l'objet d'analyse par la méthode des éléments finis à l'aide de deux modélisations(modèle poutre et plaque). Dans ce chapitre, nous avons procédé à l'exploitation de ces modèles dans l'objectif de connaître la précision de calcul de chacun d'eux, de voir le modèle le plus descriptif du comportement réel de la structure étudiée et de calculer en dernier les contraintes initiales recherchées .

D'après l' analyse de ces modèles , nous avons abouti aux constatations suivantes :

1° La modélisation en élément poutre convient bien au modèle réel du longeron de par sa conception (point de vue dimensionnel). L'avantage donné par ce modèle, est d'avoir un temps d'exécution de calcul rapide pour une précision appréciable du résultat recherché. En raison des déformations complexes que subissent certaines structures composées de longerons de longue envergure (tels que: châssis de locomotive, ponts-suspendus, etc..) travaillant dans des conditions de

chargement complexe , nous dirons que les hypothèses simplificatrices de ce modèle ne sont pas applicables pour ces structures . Néanmoins, l'utilisation du modèle poutre pleine reste valable pour le dimensionnement de certains cas de structure simple .

2° La modélisation en éléments plaques donne une meilleure précision de calcul que celle en éléments poutres.

Seulement , la discrétisation du longeron ne peut pas être rationnelle vu que l'une des dimensions (longueur) est très grande, devant les dimensions transversales de la section droite. Nous confirmons que l'utilisation du modèle plaque est parfaite pour le calcul des forces internes dans une zone sur le longeron.

3° La modélisation en élément plaque admet des insuffisances justificatif du comportement des :

- a) noeuds situés sur l'âme (choix des degrés de liberté)
- b) noeuds situés sur la jonction âme-semelle (choix des degrés de liberté) .

C H A P I T R E 3

ANALYSE GEOMETRIQUE NON - LINEAIRE DE L'EQUILIBRE DES POUTRES A PAROIS MINCES ET DE SECTION DROITE

OUVERTE

3.1- Introduction

Suivant les conclusions du chapitre précédent et malgré l'aboutissement au résultat de la flèche recherchée, nous ne pouvons pas déduire que les modèles sont parfaits pour analyser la structure du châssis puisque l'état dans lequel ont été calculées les contraintes initiales n'est pas un état de sollicitations complexes ou critiques .

Sachant que le châssis de locomotive est considéré comme une structure susceptible de travailler à des conditions de chargement intenses pendant les vibrations amplifiées dues aux irrégularités de la voie et chocs sévères (durant un accident) .Pour cette raison ,nous étions dans le besoin de chercher un autre modèle plus crédible ,qui puisse répondre aux insuffisances des modèles connus .

Cette obligation nous a conduit à retourner à la théorie de base des éléments de structure .

Dans la bibliographie classique , les constitutifs d'une structure sont définis suivant leur mode de calcul en trois classes géométrique principalement .

- 1)- les corps pleins
- 2)- des plaques minces et enveloppes
- 3)- Les pièces longues du type poutre ou tige .

Cette dernière classe, comprend une large gamme d'éléments de

structure, de telle manière que la modélisation en élément poutre ou tige de certaines structures, constituées d'éléments de longues envergures, ne peut pas décrire réellement le comportement de ces structures. Pour cela, dans les cours approfondis en structure, nous trouvons des auteurs (tels que : références [6] et [7]) qui définissent à partir de la 3^{ème} classe une autre famille d'éléments appelés voiles minces.

Cette famille d'éléments constitue une nouvelle classe de construction très différente de part sa conception des tiges et poutres à section pleines (ex : ponts - poutre ou arc, ponts suspendus, etc..).

Pour en distinguer les différences entre les modèles de la troisième et cette nouvelle classe, nous citerons les Particularités de chacune d'elles.

Concernant la troisième classe, on introduit deux hypothèses géométriques supplémentaires à celles qui définissent les grandeurs dimensionnelles de ces éléments :

1)- on suppose que pendant la flexion ou la traction, les sections planes avant déformation, restent planes après déformation (loi des sections planes). Cela signifie, qu'on ne considère qu'une seule composante de déformation des six composantes du tenseur de déformation, qui est l'allongement axial pour les sollicitations de flexion et traction longitudinale.

2)- Pendant la torsion, nous supposons qu'il n'existe aucun allongement, ni de glissement, dans le plan de la section transversale, et qu'on néglige aussi l'allongement dans le plan dans le sens longitudinal (théorie de la torsion pure).

Cette théorie permet uniquement de déterminer les contraintes tangentielles , qui prennent naissance sur des éléments de surface d'une section transversale de la tige ou poutre pleine .

En résumé, cette classe est limitée par l'ensemble des structures dans le plan ou dans l'espace (isostatique ou hyperstatique) composés de tiges travaillant à la flexion , selon la loi des sections planes et à la torsion suivant la théorie de la torsion pure .

Par contre , les éléments de la nouvelle classe , se sont des pièces de longue envergure ayant des dimensions transversales qui ne sont pas de même grandeur , contrairement au cas des éléments de la troisième classe. La section droite est un ensemble d'aires appelé section droite ouverte ou fermée . Pour cette classe , les éléments sont des pièces longues en voiles minces , susceptibles de travailler aux mêmes sollicitations du modèle poutre pleine ou tige .

Ils peuvent travailler à la traction, flexion, cisaillement, et torsion autour d'un axe.

Leurs particularités distinctives résident sur le fait que la section droite, après déformation de la pièce, ne reste pas plane, et cela est vraie, surtout pour une sollicitation de torsion .

Dans les ouvrages classiques, les auteurs étudient les profilés métalliques laminés ou reconstitués par soudage ou rivetage (ex : forme en I , U , T), comme des éléments de la troisième classe et on leur applique la théorie des sections planes et celle de la torsion pure . Si on analyse ces profilés nous allons nous rendre compte que, du point de vue

configuration, il n'est pas évident d'assimiler ces éléments à des poutres à section pleine, et en particulier, lorsque la section droite ne présente aucune symétrie suivant les deux axes de son plan. Par contre, leur comportement est plus proche de celui des pièces longues en voiles minces, qui engendrent des phénomènes nouveaux pour des sollicitations de torsion ou de flexion sous charge critique.

Vu que le châssis de la locomotive est composé de profilés reconstitués, nous considérons que l'étude du longeron avec une modélisation en éléments poutres en voiles minces est plus adéquate pour l'analyse de cette structure.

Dans cette optique, nous allons consacrer la suite de cette thèse, à l'analyse des éléments poutres en voiles minces, plus particulièrement, à section droite ouverte.

Ce chapitre comprendra l'établissement des équations de ce modèle, en utilisant la méthode des éléments finis. Considérant cette poutre en voiles minces dans l'espace et introduisant les déformations non-linéaires, déduites par la réf [8]. L'auteur a défini ces déformations géométriques non-linéaires pour étudier l'instabilité élastique de ce modèle. Puisque nous sommes intéressés, en premier, par l'analyse de l'équilibre des longerons avec des contraintes initiales nous allons développer les équations d'équilibre avec des déformations non-linéaires. Dans un autre chapitre, nous reprendrons l'étude de l'instabilité de ce modèle.

3.2- Définition de l'élément poutre à parois minces

Le modèle poutre à parois minces est constitué par des corps

se présentant sous forme de voiles longues prismatiques , ou cylindriques .

La configuration du modèle est caractérisée par le fait que les dimensions suivant les trois directions de l'espace sont très différentes l'une de l'autre. C'est à dire l'épaisseur du voile est plus petite que la largeur de la section transversale, qui à son tour doit être petite par rapport à la longueur du voile .

La particularité distinctive du modèle poutre à parois minces est, qu'elle peut subir des déformations longitudinales (allongement variable d'un point à un autre) dues à la torsion . Cela induit , que la section droite ne reste pas plane , après un effort de torsion .

Ce phénomène est appelé gauchissement de la section transversale (appelée aussi déplanation de la section) .

Les tensions (ou contraintes) qui résultent de la naissance des déformations longitudinales sont considérables pour les éléments poutres à parois minces à profil ouvert (rigide ou déformable) , que pour ceux à profil fermé déformable.

Certains auteurs (tel que ZLASOV) donnent les limites dimensionnelles approximatives de ces modèles .

Soient δ : l'épaisseur du voile

d : dimension caractéristique de section transversale
(largeur , hauteur)

L : longueur du voile (voir fig 3.1)

lorsque, les dimensions relatives de l'élément, sont exprimées par l'ordre de grandeur suivant :

$$\frac{\delta}{d} \leq 0,1 \quad ; \quad \frac{d}{L} \leq 0,1$$

nous classons la construction dans la catégorie des poutres à parois minces .

Nous citerons, quelques éléments de structure, ou ouvrages qui appartiennent, à la catégorie des poutres à parois minces ;

à savoir :- profilés métalliques, laminés, soudés ou rivetés

- ponts poutre , ou en arc , ayant des liaisons transversales rigides , ponts suspendus .e.t.c.

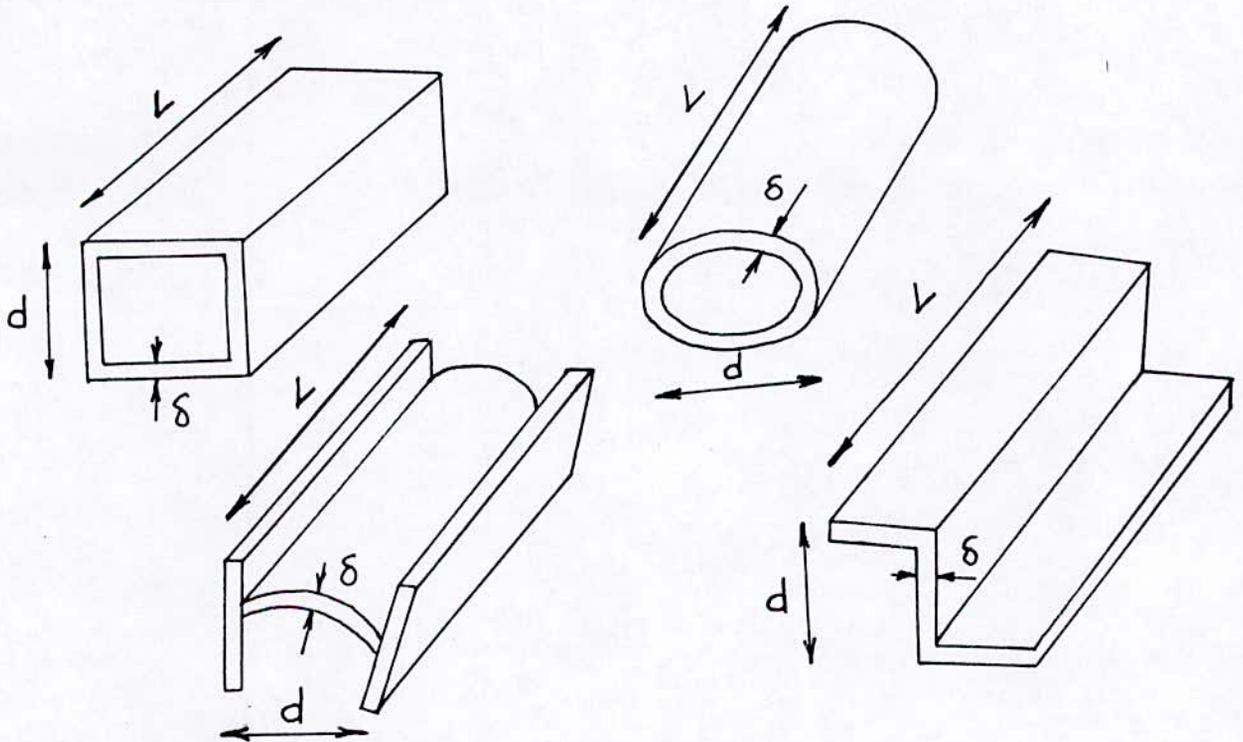


fig 3.1 Poutres à parois minces

3.3- Hypothèses simplificatrices

a) -Considérons que la poutre à parois minces, est constituée par un nombre fini de plaque mince et étroite (plane ou curvilignes). On suppose que les liaisons entre plaques le long des arêtes sont rigides, de telle manière que les déplacements d'une plaque par rapport à la plaque voisine sont impossibles.

- b) - Soit on définit la surface moyenne de l'élément, comme étant la surface passant par le milieu des épaisseurs des plaques constituant la poutre à parois minces. L'ensemble des droites formant cette surface sont appelées génératrices de la surface moyenne. Aussi on définit la directrice du profil comme la courbe plane résultante de l'intersection de la surface moyenne et un plan perpendiculaire à une génératrice (voir fig 3.2). Nous prenons ces génératrices et directrices pour lignes de coordonnées. On aura un système de coordonnées orthogonales permettant la détermination unique d'un point quelconque sur la surface moyenne. L'origine des coordonnées "x" est l'extrémité de la poutre. Par contre l'origine des coordonnées "s" peut être n'importe quelle génératrice. Nous prendrons en général la génératrice contenue dans le plan symétrie du profil, s'il est symétrique, ou bien celle d'un bord longitudinale de la pièce à profil quelconque.
- c) - la poutre à parois minces à profil ouvert est considérée comme rigide , c.à.d indéformable dans le plan de la section transversale de la pièce.
- d) - On néglige la déformation par distorsion de la surface moyenne de la poutre, c.à.d que l'angle droit, formé par les lignes de coordonnées $x = \text{cte}$ et $s = \text{cte}$, reste droit après déformation, ou encore, même si la section droite ne reste pas plane après déformations , les lignes génératrices restent perpendiculaires aux lignes directrices après déformations.

- e) - Dans le cas où la poutre est chargée par un nombre quelconque de forces appliquées en différents points de la ligne du profil de la section à $x = \text{cte}$ (plusieurs forces dans le plan de la directrice) peuvent être remplacées par une résultante unique, ayant une ligne d'action bien déterminée.
- f) - L'ensemble des contraintes normales résultantes du gauchissement de la section droite peut être réduit à une force unique qui représentera un système de contraintes longitudinales s'équilibrant mutuellement. Cette force généralisée, étendue à la section transversale, appelée : "bimoment longitudinale" de la poutre.

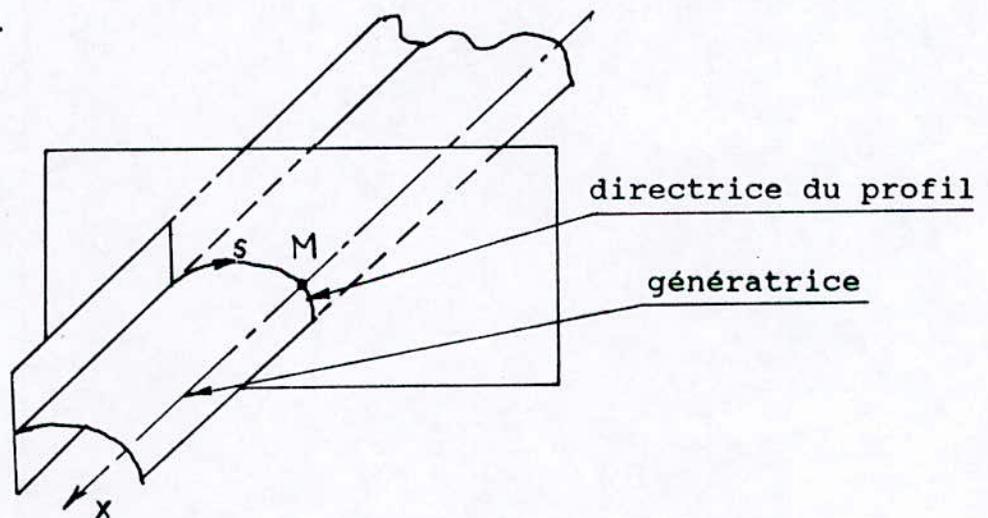


fig 3.2 Schéma du profil de la poutre à parois minces

3.4- Déformation non-linéaire des poutres à parois minces

Dans les problèmes de calcul des structures en profilés reconstitués (tels : châssis de véhicule roulant, ponts...) abordés jusqu'à présent, les déplacements et déformations de la structure ont été supposés implicitement petits.

D'un point de vue pratique , ceci veut dire que la géométrie des éléments reste quasiment inchangée, lorsque ceux-ci sont soumis à des sollicitations. On peut, par conséquent, utiliser au premier ordre les approximations de déformations linéaires infinésimales.

En pratique , de telles hypothèses sont fréquemment mises en défaut, même lorsque les déformations restent petites et que la limite élastique des matériaux ordinaires n'est pas dépassée.

Si l'on veut connaître avec précision les déplacements pour certaines structures, il est nécessaire de tenir compte des non-linéarités géométriques.

Ces considérations géométriques peuvent influencer sur la valeur des déplacements obtenus dans l'hypothèse de linéarité. Pour certains cas, cette influence se traduit par une diminution de la valeur du déplacement, bien que celui-ci puisse être encore petit. Réciproquement , on peut se trouver dans le cas où , au delà d'un certain chargement , les déplacements augmentent beaucoup plus rapidement que le ne prévoit la solution linéaire. En fait, on peut aboutir à un état dans lequel la possibilité qu'a le matériau à supporter les charges extérieures décroît continûment avec la déformation. Ce problème classique est celui de la stabilité des structures, et bien évidemment a beaucoup d'implications pratiques.

Il est clair que la considération de tels effets a une importance considérable dans le domaine de conception de fours de refroidissement, de caissons de ponts ou d'autres structures élancées.

Dans ce cadre , nous trouvons un auteur réf [8] qui a défini une expression complète des déformations non-linéaires pour les poutres à parois minces de section droite ouverte. Cette expression des déformations exclue les déformations de cisaillement dues à la flexion non-uniforme et à la distorsion de la section droite.

3.4.1- Déformations axiales

Soit une poutre à parois minces et de section droite ouverte (fig 3. 3 a) les axes x , y , z passent par le centre de cisaillement de la section qui est noté par O . Les axes Oy et Oz sont parallèles aux axes principaux de la section passant par le centre de gravité.

Le centre de cisaillement est le point à travers lequel la force de cisaillement résultante agit quand la poutre est soumise à une flexion non-uniforme.

u , v et w sont les déplacements du centre de cisaillement dans les directions x , y , z et θ est la rotation, dans le sens d'une aiguille d'une montre , de la section autour du centre de cisaillement.

Le système d'axe qui définit la position de la poutre et initialement coïncide avec les axes fixes x , y et z peut se mouvoir avec la section droite vers une nouvelle position définie par les axes \bar{x} , \bar{y} et \bar{z} pendant la translation et rotation de la section (voir fig 3.3 (b) à (d)).

Les déplacements dans les directions \bar{x} , \bar{y} et \bar{z} sont notés par \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} et la rotation autour de l'axe est notée par $\bar{\theta}$.

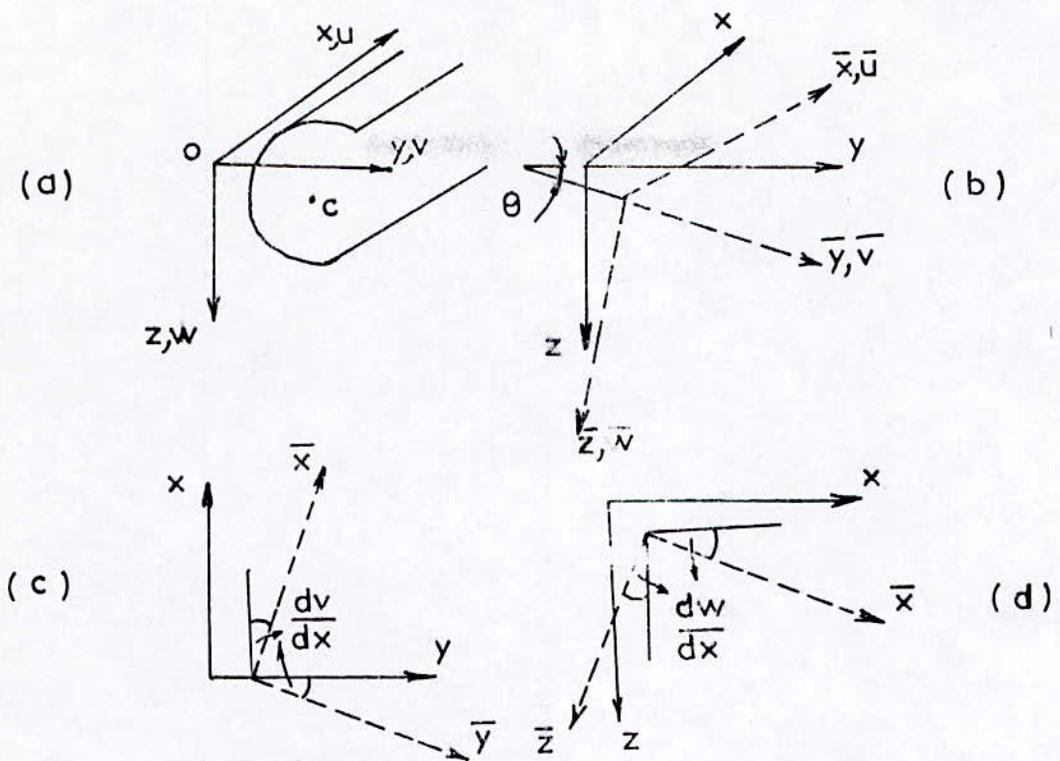


fig 3.3 Axes fixes et locaux

Les déformations axiales uniformes d'un petit élément de la poutre de longueur dx , dues aux déplacements u, v et w peuvent être déduites de la figure 3.4.

Les déplacements du point "a" sont u, v, w et du point b sont $u + du, v + dv, w + dw$. La déformation axiale due au déplacement dans la direction de x est simple du/dx .

La déformation axiale due aux déplacements dans les directions y et z peut être déterminée en considérant l'allongement de l'élément de longueur initiale dx à une longueur finale ds . De la figure 3,4, ds est donné par :

$$ds^2 = dx^2 + dv^2 + dw^2 \quad (3.1)$$

Après transformation, nous obtenons l'expression de la déformation due aux déplacements v et w :

$$(ds - dx)/dx = 1/2 (dv/dx)^2 + 1/2 (dw/dx)^2 \quad (3.2)$$

La résultante des déformations axiales dans la direction \bar{x} \bar{e}_x , est par conséquent :

$$\bar{\epsilon}_x = du/dx + 1/2 (dv/dx)^2 + 1/2 (dw/dx)^2 \quad (3.3)$$

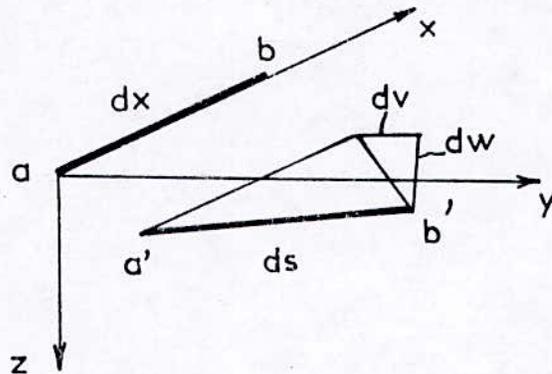


fig 3.4 Déformation axiale due aux déplacements v et w

La rotation $\bar{\theta}$ de la poutre autour de l'axe \bar{x} produit une déformation axiale de second ordre, qui peut être déduite de la figure 3.5. Due à la rotation, L'élément longitudinal ab de longueur $d\bar{x}$ appartenant à la paroi de la poutre à la distance $\bar{\rho}$ du centre de rotation, est déplacé à une nouvelle position définie par a' b'. Le déplacement du point "a" est $\bar{\rho} \bar{\theta}$ et du point "b" et $\bar{\rho} (\bar{\theta} + d\theta)$ et en procédant à une transformation comme pour l'équation (3.1)-(3.3); on obtient

$$\bar{\epsilon}_x = 1/2 \bar{\rho}^2 (d\bar{\theta} / d\bar{x})^2 \quad (3.4)$$

Le déplacement général u, v, w et θ peuvent produire des courbures.

Les relations linéaires connues pour les déformations dues à la courbure sont valables uniquement pour des déplacements relatifs aux axes locaux $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Ces courbures produisent des déformations axiales additionnelles dans la barre qui varient linéairement avec la distance du centre de gravité de la section et sont données par :

$$\bar{\epsilon}_x = -\bar{y} \left(\frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{x}^2} \right) - \bar{z} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) \quad (3.5)$$

Où les distances \bar{y} et \bar{z} sont mesurées du centre de gravité et les déplacements \bar{v} et \bar{w} sont relatives aux axes \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} . Le signe négatif indique que les courbures positives produisent une déformation de compression quand \bar{y} et \bar{z} sont positives. Nous introduisons ici un phénomène important se développant dans les poutres à parois minces de section droite ouverte et les déformations qui peuvent en être engendrées.

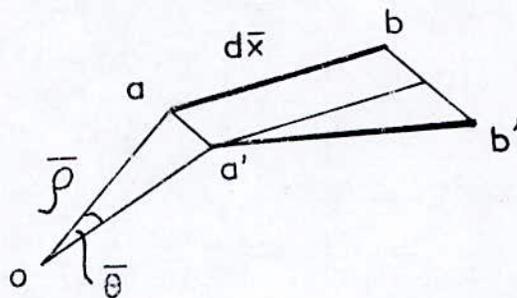


fig 3.5 Déformation axiale due à la rotation $\bar{\theta}$

3.4.2- Torsion pure

D'une manière générale, la torsion pure est définie par l'existence de couples appliqués aux extrémités et dans des plans normaux à l'axe de la poutre et dont les extrémités sont libres de se mouvoir. Cette sollicitation engendre, uniquement, des contraintes de cisaillement. La distribution des contraintes dépend de la section droite et elle est similaire pour toutes les sections.

La déformation de cisaillement qui résulte de la torsion pure (appelée torsion de SAINT-VENANT), varie linéairement suivant l'épaisseur de la section droite et elle est définie comme suit: pour une bande rectangulaire étroite, comme le montre figure 3.6, soumise à la rotation $\bar{\theta}$ par rapport à

un axe longitudinal qui est parallèle à l'axe \bar{x} , la déformation de cisaillement $\bar{\beta}$ à la distance du centre de l'épaisseur donnée par:

$$\bar{\beta} = 2 \int d\bar{\theta} / d\bar{x} \quad (3.6)$$

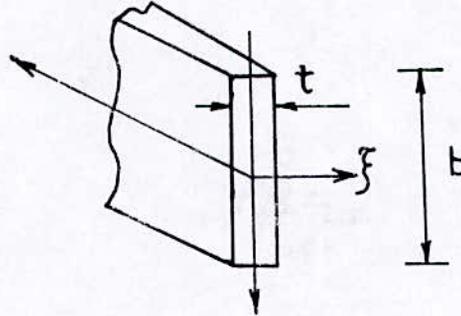


fig 3.6 bande rectangulaire mince

3.4.3- Phénomène de gauchissement

Pour n'importe quelle pièce soumise à une sollicitation de torsion pure, nous constatons que les fibres longitudinales initialement droites, se déforment sous formes d'hélices qui sont ramenées à des lignes inclinées par rapport à l'axe de rotation. En plus des deux hypothèses suivantes :

- déformation de distorsion négligeable,
- la section droite ne reste pas dans son plan après déformation,

la déformation des fibres longitudinales entraînent le déplacement des points de la ligne moyenne (directrice du profil) dans le sens de l'axe de rotation. Ce phénomène est appelé gauchissement de la section droite (voir fig 3.7). Donc, on définit le gauchissement des poutres par le déplacement, dans le sens longitudinal, des points de la section droite, sous l'effet d'un couple constant le long de la poutre.

Cet état de la poutre n'induit aucune déformation axiale dans la poutre. Il n'existera que des déformations de cisaillement dues à la torsion pure (torsion de Saint-venant).

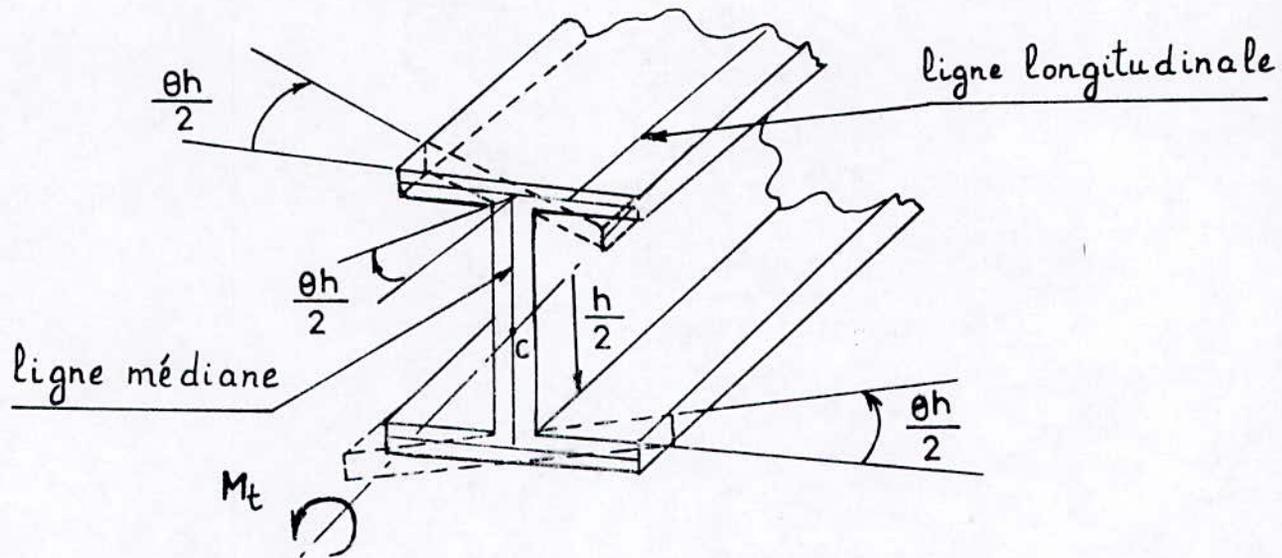


fig 3.7 Représentation du gauchissement de la section droite de forme en "I"

3.4.4- Déplacement longitudinal dû au gauchissement

soit une poutre à parois minces et de section droite quelconque (voir fig 3.8).

$\bar{\rho}$: distance entre axe de rotation à une fibre donnée

$\bar{\theta}$: angle de rotation de la section autour de l'axe passant par A.

La fibre longitudinale au point N s'incline d'un angle $\bar{\rho} \bar{\theta}$. La tangente de la ligne médiane au point N est perpendiculaire à la fibre longitudinale. L'angle entre la tangente et le plan x,y est, après torsion, $\bar{\rho} \bar{\theta} \cos \alpha = r \bar{\theta}$. On considère que la distance r est positive si le vecteur porté par la tangente, se dirige vers les S croissants, avance dans le sens trigonométrique par rapport à l'axe de rotation.

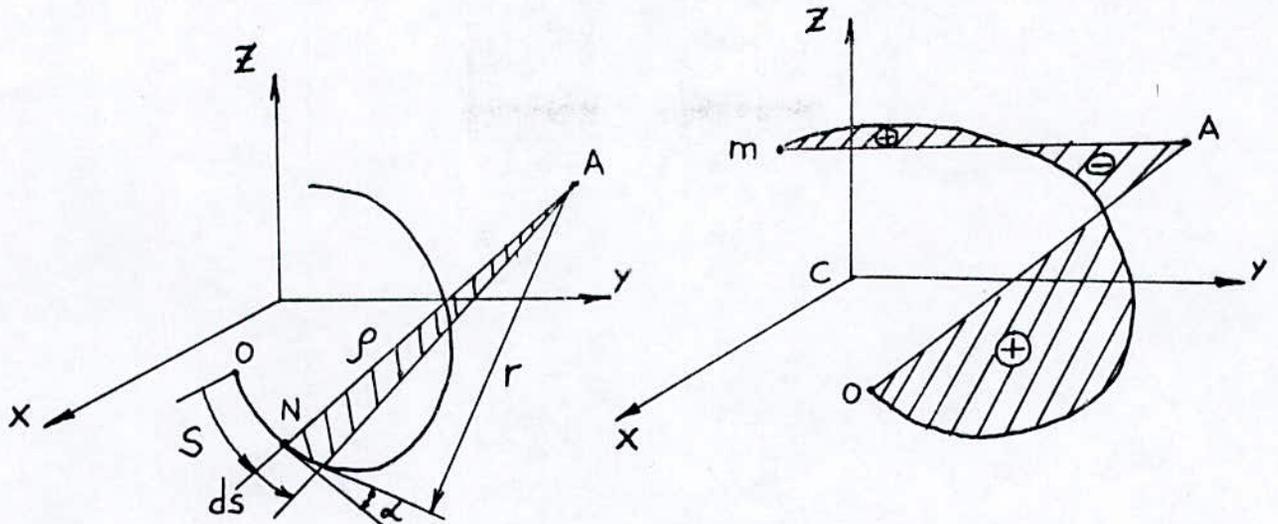


fig 3.8 Poutre à parois minces

Désignons par u le déplacement de la ligne médiane dans la direction des x .

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -r \bar{\theta} \quad (3.7)$$

Le signe moins désigne la variation négative du déplacement u suivant le choix du système d'axe et le couple positif.

$$u = u_0 - \bar{\theta} \int_0^s r ds \quad (3.8)$$

Avec u_0 : déplacement de l'origine de l'abscisse curviligne s .

Remarque : Dans le cas de la torsion pure, la position de l'axe de rotation n'importe pas et que toute ligne parallèle à l'axe central peut être prise comme axe de rotation.

Plus précisément, le déplacement du centre de rotation engendre une variation du déplacement d'une quantité qui varie linéairement. Donc, il ne nécessite pas de déformation supplémentaire de la poutre.

Evaluons maintenant le déplacement de la section par rapport au plan de gauchissement moyen.

soit la valeur moyenne du déplacement u :

$$\bar{u} = 1/m \int_0^m u \, ds = u_0 - \bar{\theta}/m \int_0^m \left[\int_0^s r \, ds \right] ds \quad (3.9)$$

soustrayant (3.9) de (3.8) , on obtient :

$$u - \bar{u} = \bar{\theta}/m \int_0^m \left[\int_0^m r \, ds \right] ds - \bar{\theta} \int_0^s r \, ds \quad (3.10)$$

désignons par :

$$u_s = \int_0^s r \, ds \quad : \text{ fonction de gauchissement}$$

$$\bar{u}_s = 1/m \int_0^m u_s \, ds \quad : \text{ la valeur moyenne de la fonction de gauchissement .}$$

Nous pouvons écrire le déplacement u par rapport au nouveau plan de référence (plan de gauchissement moyen) :

$$u = \bar{\theta}/m \int_0^m \left[\int_0^s r \, ds \right] ds - \bar{\theta} \int_0^s r \, ds = \bar{\theta} (\bar{u}_s - u_s)$$

$$u = \bar{\theta} (\bar{u}_s - u_s) \quad (3.11)$$

Remarque :

Pour les sections constituées de fins éléments rectangulaires qui convergent en un point commun O (tels que les poutres en forme de T, L, V...etc) et si l'axe de rotation passe par le point O , la distance r s'annule pour tout point de la ligne médiane et il n'y a, donc, pas gauchissement pendant la torsion .

3.4.5- Déformation axiale due au gauchissement

Dans le cas de la torsion pure , le déplacement longitudinal des points de la section n'induit aucune déformation axiale

de la poutre. On dit aussi que le gauchissement est constant et ,il n'existera que des déformations de cisaillement .

Par contre si la torsion est non uniforme , qui peut être produite en immobilisant une des sections droites ou bien par variation du couple de torsion de la poutre , le gauchissement variera le long de la poutre et il y aura donc torsion ou compression des fibres longitudinales .

Cet état de torsion résultera , en plus des déformations de cisaillement , des déformations axiales additionnelles.

On remplace, alors , l' angle de torsion par unite de longueur $\bar{\theta}$ par $d\bar{\theta}/dx$ et on obtient :

$$u = (\bar{u}_s - u_s) d \bar{\theta}/dx \quad (3.12)$$

Donc, la déformation axiale est donnée par :

$$\epsilon_x = du/ dx \quad (3.13)$$

puisque les quantités \bar{u}_s et u_s sont indépendantes de x , on aura :

$$\epsilon_x = (\bar{u}_s - u_s) d^2 \bar{\theta}/ dx^2$$

ou encore

$$\epsilon_x = a_w d^2 \bar{\theta}/ dx^2 \quad (3.14)$$

avec $a_w = (\bar{u}_s - u_s)$

finalement , la déformation axiale totale dans une poutre à parois minces est obtenue en additionnant les composantes données par les équations (3.3),(3.4),(3.5)et(3.14) . Ainsi

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x = & -\bar{y} (d^2 \bar{v}/dx^2) - \bar{z} (d^2 \bar{w}/dx^2) + a_w (d^2 \bar{\theta}/dx^2) + \bar{\Gamma}/2 (d\bar{\theta}/dx)^2 \\ & + du/dx + 1/2 (dv/dx)^2 + 1/2 (dw/dx)^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

De la figure 3.3 (b), (c) et (d), les déplacements \bar{v} , \bar{w} et $\bar{\theta}$ peuvent être reliées aux déplacements v, w et θ par les équations suivantes. Les termes contenant u ayant été négligés.

$$\bar{v} = v \cos (\theta) + w \sin (\theta) \quad (3.16)$$

$$\bar{w} = w \cos (\theta) - v \sin (\theta) \quad (3.17)$$

$$\bar{\theta} = \theta - dw/dx (dv/dx) + dv/dx (dw/dx) \quad (3.18)$$

Les termes entre parenthèses dans les équations (3.16), à , (3.18) définissent les orientations des axes \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} relatives aux axes x, y, z et devront être considérés comme constant, quand on prend les dérivées de \bar{v} , \bar{w} et $\bar{\theta}$. Nous pouvons prendre $d\bar{x} = dx$ et d'ici

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dx^2} \cos \theta + \frac{d^2 w}{dx^2} \sin \theta \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = \frac{d^2 w}{dx^2} \cos \theta - \frac{d^2 v}{dx^2} \sin \theta \quad (3.20)$$

$$d\bar{\theta}/d\bar{x} = d\theta/dx - \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)(dv/dx) + \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)(dw/dx) \quad (3.21)$$

$$\frac{d^3 \bar{\theta}}{dx^3} = \frac{d^3 \theta}{dx^3} - \left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right)(dv/dx) + \left(\frac{d^3 v}{dx^3}\right)(dw/dx) \quad (3.22)$$

La distance du centre de cisaillement ou centre de gravité de la section droite, à n'importe quel point de la section droite ne change pas et d'ici la distinction entre \bar{y} et y , \bar{z} et z ,...etc, peut être omise.

La déformation axiale totale est maintenant obtenue en substituant les équations (3.19) à (3.22) dans (3.15), on aura :

$$\begin{aligned}
\epsilon_x = & -y \{ d^2 v/dx^2 \cos \theta + d^2 w/dx^2 \sin \theta \} - z \{ d^2 w/dx^2 \cos \theta \\
& - d^2 v/dx^2 \sin \theta \} + \{ d^2 \theta//dx^2 - (d^3 w/dx^3)(dv/dx) \\
& + (d^3 v/dx^3)(dw/dx) \} + du/dx + 1/2 (dv/dx)^2 \\
& + 1/2 (dw/dx)^2 + \beta^2 / 2 (d\theta/dx)^2 \quad (3.23)
\end{aligned}$$

N.B: Les termes du troisième ordre dans l'expression de $\frac{d^2}{dx^2} (\theta/dx)$ ont été négligés.

En utilisant l'équation (3.21) dans l'équation (3.6) et en remplaçant $\bar{\beta}$ par β ; nous obtenons :

$$\beta = 2 \int \{ d^2 \theta//dx^2 - (d^2 w/dx^2)(dv/dx) + (d^2 v/dx^2)(dw/dx) \} \quad (3.24)$$

Dans la suite du calcul, nous aurons à utiliser les variations premières et secondes des expressions de déformations dans les équations d'équilibre où de stabilité (dans la résolution des problèmes d'équilibre et de stabilité). Nous donnerons, ici, la variation première et seconde des déformations et soulignons que les termes du troisième ordre seront négligés. Ajoutons, aussi, que les déplacements u, v, w et θ sont exprimés comme des fonctions linéaires des variables de déplacement. Alors $\delta^2 u, \delta^2 v, \delta^2 w$ et $\delta^2 \theta$ s'annulent.

$$\begin{aligned}
\delta \epsilon = & -y \{ -d^2 v/dx^2 \sin \theta \delta \theta + d^2 \delta v/dx^2 \cos \theta + d^2 w/dx^2 \cos \theta \delta \theta \\
& + d^2 \delta w/dx^2 \sin \theta \} - z \{ -d^2 w/dx^2 \sin \theta \delta \theta + d^2 \delta w/dx^2 \cos \theta \\
& - d^2 v/dx^2 \cos \theta \delta \theta - d^2 \delta v/dx^2 \sin \theta \} + \alpha w \{ d^2 \delta \theta/dx^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{d}{dx} \left(\frac{w}{dx} \right)^3 (d\delta v/dx) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta w}{dx} \right)^3 (dv/dx) + \frac{d}{dx} \left(\frac{v}{dx} \right)^3 (d\delta w/dx) \\
& + \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta v}{dx} \right)^3 (dw/dx) \} + d\delta u/dx + dv/dx (d\delta v/dx) \\
& + dw/dx (d\delta w/dx) + \rho \frac{d\theta}{dx} (d\delta\theta/dx) \quad (3.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 \epsilon = & -y \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{v}{dx} \right)^2 \cos \theta \delta\theta \delta\theta - 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta v}{dx} \right)^2 \sin \theta \delta\theta \right. \\
& \left. - \frac{d}{dx} \left(\frac{w}{dx} \right)^2 \sin \theta \delta\theta \delta\theta + 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta w}{dx} \right)^2 \cos \theta \delta\theta \right) \\
& -z \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{w}{dx} \right)^2 \cos \theta \delta\theta \delta\theta - 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta w}{dx} \right)^2 \sin \theta \delta\theta \right. \\
& \left. + \frac{d}{dx} \left(\frac{v}{dx} \right)^2 \sin \theta \delta\theta \delta\theta - 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta v}{dx} \right)^2 \cos \theta \delta\theta \right) \\
& + \alpha w \left(-2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta w}{dx} \right)^3 (d\delta v/dx) + 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta v}{dx} \right)^3 (d\delta w/dx) \right) \\
& + (d\delta v/dx)^2 + (d\delta w/dx)^2 + \rho^2 (d\delta\theta/dx)^2 \quad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 \beta = & 2 \int \left(d\delta\theta/dx - \frac{d}{dx} \left(\frac{w}{dx} \right)^2 (d\delta v/dx) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta w}{dx} \right)^2 (dv/dx) \right. \\
& \left. + \frac{d}{dx} \left(\frac{v}{dx} \right)^2 (d\delta w/dx) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta v}{dx} \right)^2 (dw/dx) \right) \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\delta^2 \beta = 2 \int \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta w}{dx} \right)^2 (d\delta v/dx) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta v}{dx} \right)^2 (d\delta w/dx) \right) \quad (3.28)$$

3.5- Formulation de l'équation d'équilibre

3.5.1- Equation d'équilibre

Quelque soit le problème à étudier dans la mécanique, qu'il soit un problème à loi de comportement linéaire ou non linéaire, il est nécessaire que les conditions d'équilibre entre forces internes et externes soient satisfaisantes.

L'équation d'équilibre peut être obtenue par le théorème de l'énergie potentielle ou bien par le principe des travaux virtuels .

Soit une structure soumise à des forces externes, P_i , avec des déplacements correspondants r_i .

Le travail des forces externes est donné par :

$$W_e = \sum P_i . r_i \quad (3.29)$$

désignons par σ la force interne (contrainte) et ϵ les déformations correspondantes, le travail des forces internes est :

$$W_i = \int \epsilon^T \sigma \, dv \quad (3.30)$$

Considérons une petite variation des déplacements des points d'application des forces et entraînant , ainsi, une variation des déformations, le principe des travaux virtuels nous donne :

$$\delta W_i = \delta W_e$$

$$\int_V \delta \epsilon^T \sigma \, dv = \sum P_i \delta r_i \quad (3.31)$$

L' équation (3.31) décrit l'équilibre d'une structure d'une manière générale, qui peut être mise sous la forme suivante:

$$\delta a^T \Psi = \int_V \delta \epsilon^T \sigma^T dv - \sum P_i \delta r_i = 0 \quad (3.32)$$

La fonction Ψ représente , aussi , la somme des forces généralisées externes et internes.

L' expression générale de la contrainte selon la loi de " HOOKE " est donnée par la formule suivante :

$$\sigma = D (\epsilon - \epsilon_0) + \sigma_0 \quad (3.33)$$

Avec ϵ_0 et σ_0 représente, respectivement, déformations et contraintes initiales.

D représente l'ensemble des constantes élastique.

N.B : Nous considérons le matériau linéaire élastique et isotrope.

Notant que dans l'équation (3.32) ; les quantités σ et ϵ comprennent, en même temps , les contraintes et déformations axiales et de cisaillement.

Dans cette étude , nous nous intéresserons aux problèmes des structures avec des contraintes initiales uniquement.

Donc , nous maintiendrons dans l'expression (3.33) le terme relatif aux contraintes initiales (P_0) et nous éliminerons le terme représentant les déformations initiales (ϵ_0).

La connaissance de l'état de contrainte initiale et le mode de sollicitation , auquel la structure sera soumise , définiront le signe des contraintes σ_0 . Nous aurons :

$$\sigma = D \epsilon + \sigma_0 \quad (3.34)$$

En remplaçant (3.34) dans (3.32), nous obtenons :

$$\delta a^T \Psi = \int_V \delta \epsilon^T (D \epsilon + \sigma_0) dv - \Sigma P_i \delta r_i = 0$$

$$\delta a^T \Psi = \int_V \delta \epsilon^T D \epsilon dv + \int_V \delta \epsilon^T \sigma_0 dv - \Sigma P_i \delta r_i = 0 \quad (3.35)$$

Puisque nous avons développé des déformations non-linéaires pour le modèle poutre à parois minces, nous aboutirons, donc, à une équation d'équilibre de type non-linéaire.

Les variables de déplacement dans l'équation (3.35) ne sont plus des variables séparées.

Dans ces dernières années, l'utilisation des programmes d'éléments finis pour résoudre des problèmes non-linéaires en statique et dynamique, a tendance à s'étendre, malgré le coût important de ces études comparées aux calculs statiques linéaires.

Le facteur prédominant dans ce coût demeure l'étape de résolution des systèmes d'équations non-linéaires.

Nous trouvons dans les références [6] [25] une large présentation des méthodes numériques de résolution des problèmes à lois de comportement non - linéaire.

L'objet de ce travail ne consiste pas à rechercher la méthode la plus efficace, mais par contre, de mettre en évidence l'analyse du comportement géométrique non-linéaire des structures élancées.

Parmi ces méthodes, nous avons porté notre choix sur l'une des méthodes utilisée, par la plupart des grands codes d'éléments finis. C'est la méthode de Newton-Raphson.

Cette méthode possède un bon taux de convergence, mais son coût de calcul, est plus important par rapport aux autres méthodes, car elle nécessite le calcul de la matrice tangente et sa triangulation à chaque itération, comme nous allons le voir dans la description de cette méthode.

3.5.2- Méthode de résolution des systèmes d'équations non-linéaire " Méthode de NEWTON RAPHSON "

Soit un ensemble d'équations algébriques non-linéaires écrit sous la forme suivante :

$$\psi(a) = P(a) + f = k(a) \cdot a + f = 0 \quad (3.36)$$

Le paramètre a représente la variable du problème.
Soit a^n un estimé proche de la solution de l'équation (3.36).
On peut avoir une meilleure approximation en utilisant un développement de " TAYLOR tronqué " comme :

$$\psi(a^{n+1}) = \psi(a^n) + (d\psi/da) \Big|_n \delta a^n = 0 \quad (3.37)$$

avec $a^{n+1} = a^n + \delta a^n$

Dans ce qui précède :

$$d\psi/da = dP/da = K_T(a) \quad (3.38)$$

cas où f représente un terme constant $K_T(a)$ est la matrice dite tangente.

La nouvelle approximation a^{n+1} peut s'obtenir en calculant :

$$\delta a^n = - (d\psi/da)_n^{-1} \psi(a^n) = - (K_T)^{-1} \psi(a^n)$$

ou encore :

$$\delta a^n = - \left(\frac{d \psi}{da} \right)_n^{-1} (P(a^n) + f) = - \left(K_T \right)_n^{-1} (p(a^n) + f) \quad (3.39)$$

Dans cette méthode, la résolution est aussi de type itérative et le processus de calcul s'arrêtera lorsque $U(a^n)$ devient suffisamment petit .

En résumé , il est nécessaire de résoudre à chaque itération un nouveau système d'équations linéaires pour obtenir δa^n (c.à.d : le système $(d \psi / da)_n \delta a^n = \psi^n$).

L'application de cette méthode nécessite , donc, l'évaluation explicite des matrices $K(a)$ et $K_T(a)$.

3.5.3- Formulation en élément fini de l'équation d'équilibre

Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre , nous allons utiliser la méthode des éléments finis pour analyser les structures à comportement géométrique non-linéaire . Nous réécrirons, donc, l'équation d'équilibre du système discret .

D'après le modèle choisi préalablement pour la modélisation du longeron du châssis , le système continu sera discrétisé en un ensemble de poutre à parois minces de nombre fini dont la liaison entre deux éléments est un noeud .

Les variables du système discret seront donc les déplacements nodaux " appelés aussi paramètres nodaux " .

3.5.3.1- Fonction de déplacement

Les déplacements désignés par " u " d'un point quelconque

intérieur à l'élément sont définis de manière approchée sous la forme d'un vecteur colonne qui est :

$$u = \sum N_i a_i = [N_i, N_j, \dots] \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = N \cdot a \quad (3.40)$$

Expression dans laquelle les composantes de N sont en général des fonctions des positions et " a " est un vecteur formé de l'ensemble des déplacements nodaux de l'élément considéré.

3.5.3.2- Déformation

Lorsque l'on connaît les déplacements en tout point intérieur à l'élément, on peut déterminer les déformations en un point quelconque .

Cela se traduira toujours par une relation qui peut être écrite en notation matricielle sous la forme .

$$\epsilon = \bar{b} \cdot a \quad (3.41)$$

Nous avons surligné la précédente notation pour indiquer que, si les déformations sont des fonctions non-linéaires des déplacements, et que dans ce cas, la matrice \bar{b} dépendra des déplacements nodaux " a " .

Alors , la variation de la déformation donnera :

$$\delta \epsilon = \bar{B} \cdot \delta a \quad (3.42)$$

Expressions dans laquelle \bar{B} n'est pas identique à \bar{b} , tout en étant fonction des déplacements nodaux " a " .

3.5.3.3- Matrice de rigidité

Remplaçant les expressions (3.41) et (3.42) dans (3.35), on

obtient :

$$\delta \mathbf{a}^T \psi = \int \{ \delta \mathbf{a} \}^T \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{b}} \{ \mathbf{a} \} dv + \int \{ \delta \mathbf{a} \}^T \bar{\mathbf{B}}^T \sigma_0 dv - \sum P_i \delta r_i = 0 \quad (3.43)$$

Ajoutons que, dans la méthode des éléments finis les charges P_i sont considérées à être appliquées sur les noeuds des éléments. Donc, les déplacements r_i seront remplacés par les paramètres nodaux a_i .

Pour unifier l'écriture matricielle de l'équation (3.43), nous transformerons le terme $\sum P_i \delta r_i$ par le produit vectoriel $\{ \delta \mathbf{a} \}^T \{ \mathbf{P} \}$. Cette transformation est basé sur le principe de transfert des effets des charges sur les noeuds de la structure.

En rappelant que le vecteur $\{ \delta \mathbf{a} \}$ est indépendant des paramètres d'intégration, nous obtenons donc :

$$\delta \mathbf{a}^T \psi = \{ \delta \mathbf{a} \}^T \left\{ \int \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{b}} dv \right\} \{ \mathbf{a} \} + \{ \delta \mathbf{a} \}^T \int \bar{\mathbf{B}}^T \sigma_0 dv - \{ \delta \mathbf{a} \}^T \{ \bar{\mathbf{P}} \} = 0 \quad (3.44)$$

En raison de l'annulation de la fonction ψ à la position d'équilibre, nous pourons simplifier le vecteur $\{ \delta \mathbf{a} \}^T$.

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$\psi = \left\{ \int \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{b}} dv \right\} \{ \mathbf{a} \} + \int \bar{\mathbf{B}}^T \sigma_0 dv - \{ \bar{\mathbf{P}} \} = 0 \quad (3.45)$$

En faisant l'analogie entre l'équation (3.45) et (3.36), nous pouvons écrire :

$$\psi = [\mathbf{K}] \{ \mathbf{a} \} + \mathbf{f} \quad (3.46)$$

avec

$$K = \left\{ \int \bar{B}^T D \bar{b} dv \right\} \{ a \} \quad (3.47)$$

$$f = \int \bar{B}^T \sigma_0 dv - \{ \bar{P} \} \quad (3.48)$$

K : matrice de rigidité de l'équation d'équilibre .

Elle est dépendante des variables de déplacement a_i .

On peut la décomposer en une somme de deux matrices comme :

$$K = k_0 + k_1$$

k_0 : représente la matrice de rigidité linéaire pour les déplacements axiaux, flexionnelles et torsionnelles.

k_1 : représente la matrice des grands déplacements . Elle comprend des termes qui sont fonctions des variables de déplacements a_i .

f : représente la somme des forces , dont le premier terme correspond aux forces dues aux contraintes initiales et le second terme comprend les charges extérieures nodales .

Nous avons surligné le vecteur des charges extérieures pour indiquer que , lui aussi est dépendant des variables de déplacement a_i , comme nous allons le montrer dans le chapitre suivant .

3.5.3.4- Formulation de la matrice de rigidité tangente

L'utilisation de la méthode de " NEWTON-RAPHSON " nécessite la détermination de la matrice de rigidité tangente . Pour cela , il faut trouver les relations entre δU et δa , comme nous l'avons vu dans la description de la méthode.

Reprenant l'équation de la somme des forces généralisées

sous la forme suivante :

$$\{\delta a\}^T \cdot \{\Psi\} = \int \delta \epsilon^T \cdot \sigma \, dv - \{\delta a\}^T \{\bar{P}\} \quad (3.49)$$

Ainsi , en prenant les variations appropriées des termes de (3.49) par rapport à δa , nous avons :

$$\{\delta a\}^T \cdot \{\delta \Psi\} = \int \delta \epsilon^T \cdot \sigma \, dv + \int \delta^2 \epsilon^T \cdot \sigma \, dv - \{\delta a\}^T \{\bar{P}\} \quad (3.50)$$

Dans cette dernière expression , nous remarquons que la variation seconde du travail des forces extérieures (représentée par le terme $\{\delta a\}^T \cdot \{\bar{P}\}$) ne disparaît pas parce que le vecteur force est dépendant des variables de déplacements $\{a_i\}$, comme nous allons le voir au prochain chapitre . D'après la relation (3.42) , nous avons :

$$\delta \sigma = D \cdot \delta \bar{\epsilon} = D \cdot \bar{B} \cdot \delta a \quad (3.51)$$

De plus , nous pouvons mettre les expressions (3,26) et (3,28) sous la forme suivante :

$$\delta^2 \epsilon = \delta \bar{B} \cdot \delta a \quad (3.52)$$

Remplaçant les expressions (3.33), (3.42), (3.51), (3.52) dans (3.50) , nous avons :

$$\begin{aligned} \{\delta a\}^T \{\delta \Psi\} &= \{\delta a\}^T \left(\int \bar{B}^T D \bar{B} \, dv \right) \{\delta a\} + \{\delta a\}^T \int \delta \bar{B}^T \sigma \, dv \\ &+ \{\delta a\}^T \int \delta \bar{B}^T \sigma \, dv - \{\delta a\}^T \{\delta \bar{P}\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Le premier terme est une matrice symétrique désigné par :

$$\bar{K} = \int \bar{B}^T D \bar{B} \, dv \quad (3.54)$$

Cette matrice peut être décomposée en une somme de deux

matrices ; qui sont :

$$\bar{K} = K_0 + K_1 \quad (3.55)$$

La matrice K_0 représente la matrice de rigidité correspondante aux petits déplacements (déformation linéaire) .

La matrice K_1 provient des grands déplacements , elle ne contient que les termes qui sont linéaires ou quadratique en a . Elle est connue sous le vocable de matrice des grands déplacements .

Le second terme de l'équation (3.53) peut se décomposer en deux sous-termes, si nous considérons que la poutre comprend des contraintes initiales qui prennent naissance lorsque aucun déplacement nodal n'est possible , en plus des contraintes dues aux sollicitations extérieures .

En utilisant la relation (3.33) , nous pouvons écrire le second terme ainsi :

$$\int \delta \bar{B}^T \sigma dv + \int \delta \bar{B}^T \sigma_0 dv = K\sigma \{ \delta a \} + K\sigma_0 \{ \delta a \} \quad (3.56)$$

$K\sigma$: est une matrice symétrique fonction des contraintes intérieures produites par les déplacements nodaux .

$K\sigma_0$: est aussi une matrice symétrique fonction des contraintes initiales . Celles-ci peuvent être des constantes où des fonctions variables .

Dans le cas où elles varient suivant les directions x , y et z , il faut , donc , remplacer l'expression de ces contraintes avant le calcul de l'intégrale des termes de la matrice $K\sigma_0$. Pour ce qui est du terme relatif aux forces extérieures , nous devons le représenter sous la forme de produit

matriciel afin d'en factoriser le vecteur variation des déplacements nodaux .

$$\{ \delta a \}^T \{ \delta \bar{P} \} = \{ \delta a \}^T K_p \{ \delta a \} \quad (3.57)$$

L'expression de chaque matrice sera déterminée au chapitre 4. En utilisant les expressions (3,55) , (3,56) et (3,57) et en procédant à la simplification du vecteur $\{ \delta a \}^T$, l'expression (3.53) devient :

$$\{ \delta \Psi \} = [K_0 + K_1 + K_\sigma + K_{\sigma 0} - K_p] \{ \delta a \} \quad (3.58)$$

Nous pouvons réécrire (3.58) sous la forme :

$$\{ \delta \Psi \} = K_T(P) \cdot \{ \delta a \} \quad (3.59)$$

K_T est la matrice de rigidité tangente .

Elle se présente sous une forme générale à celle définie dans les publications [8],[9] . Car elle tient compte des problèmes de structure avec des contraintes initiales , en plus des problèmes de structure soumises à des charges excentrées par rapport au centre de cisaillement.

Cette matrice est définie dans notre cas par :

$$K_T(P) = K_0 + K_1 + K_\sigma + K_{\sigma 0} - K_p \quad (3.60)$$

Arrivée là , nous allons déterminer explicitement la matrice de rigidité de l'équation d'équilibre K et la matrice de rigidité tangente $K_T(P)$. Tout d'abord, nous devons abordé le calcul des matrices $(b$ et $B)$ reliant les déformations aux déplacements nodaux . Ensuite, nous passerons au calcul des termes de l'expression de K et K_T .

C H A P I T R E 4

CALCUL DES MATRICES DE RIGIDITE

D'après les expressions (3.45) et (3.59) relatives aux matrices de rigidité K et K^T , nous remarquons que les termes de ces expressions dépendent essentiellement des matrices reliant les déformations aux déplacements nodaux \bar{b} et \bar{B} . Pour cela, nous devons commencer à calculer les matrices \bar{b} et \bar{B} pour passer ensuite au calcul de chaque terme des expressions K et K^T .

4.1- Calcul de la matrice \bar{b}

Nous allons réunir les expressions des déformations axiales (3.23) et de cisaillement (3.24) dans une seule relation écrite en notation matricielle.

Puisque les déplacements sont assumés à être petit, par conséquent, nous pouvons approximer le $\cos \theta$ à 1 et $\sin \theta$ à θ . nous aurons alors :

$$\epsilon = \begin{array}{c} \epsilon_x \\ \beta \end{array} = \begin{array}{c} -y \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{d w}{dx} \right) \theta \right\} - z \left\{ \frac{d^2 w}{dx^2} - \left(\frac{d v}{dx} \right) \theta \right\} \\ + \alpha w \left\{ \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \left(\frac{d w}{dx} \right) \frac{dv}{dx} + \left(\frac{d v}{dx} \right) \frac{dw}{dx} \right\} \\ + \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \\ 2 \int \frac{d\theta}{dx} - 2 \int \left(\frac{d w}{dx} \right) \frac{dv}{dx} + 2 \int \left(\frac{d v}{dx} \right) \frac{dw}{dx} \end{array} \quad (4.1)$$

il est possible de réécrire ce dernier vecteur en une somme de deux vecteurs :

$$\epsilon = \left[\begin{array}{c} -y d^2 v/dx^2 - z d^2 w/dx^2 \\ + \alpha w d^2 \theta/dx^2 + du/dx \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -y (d^2 w/dx^2) \theta + z (d^2 v/dx^2) \\ - \alpha w \{ (d^3 w/dx^3) dv/dx + (d^3 v/dx^3) dw/dx \} \\ + 1/2 (dv/dx)^2 + 1/2 (dw/dx)^2 \\ + \rho^2 / 2 (d\theta/dx)^2 \\ - 2 \int (d^2 w/dx^2) dv/dx \\ + 2 \int (d^2 v/dx^2) dw/dx \end{array} \right]$$

On peut écrire :

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_L \quad (4.2)$$

Expression dans laquelle le premier terme représente la partie linéaire de la déformation que nous avons déjà rencontré maintes fois, et le second terme ϵ , fait apparaître les composantes non-linéaires de la déformation. Nous constatons le terme linéaire ϵ_0 comprend une nouvelle composante $(\alpha w d^2 \theta/dx^2)$ caractérisant la déformation linéaire due au phénomène de gauchissement de la section droite.

il est clair que l'expression ci-dessus peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\epsilon = b_0 a + b_L a \quad (4.3)$$

En factorisant le vecteur des déplacements nodaux ;

$$\epsilon = [b_0 + b_L] \{ a \} \quad (4.4)$$

Dans laquelle b_0 est une matrice indépendante des déplacements et identique à celle que l'on obtient dans les cas d'un problème linéaire en petites déformations.

bL étant une matrice dépendante des déplacements .

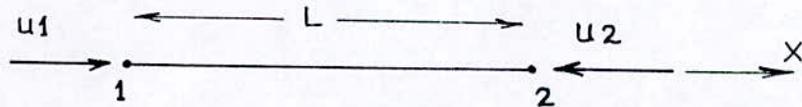
4.1.1- Calcul de la matrice bo

L' introduction d' une nouvelle composante de déformation linéaire dans ϵ_0 , nous incite à reprendre le calcul individuel de bo relative à chaque sollicitation, dans l'intérêt de mettre en évidence la manière de déterminer la matrice bo commune au phénomène de torsion et de gauchissement .

a/ Déformation traction - compression .

Le vecteur des déplacements nodaux :

$$ac = (u_1 , u_2)$$



La fonction de déplacement ne comprend que deux degrés de liberté (paramètres généralisés) ; à savoir

$$u (x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (4.5)$$

Conditions aux limites :

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad u (0) = u_1 \\ x = L & \quad u (L) = u_2 \end{aligned}$$

Les fonctions de forme sont :

$$N_1 = 1 - x/L \quad \text{et} \quad N_2 = x/L \quad (4.6)$$

$$\text{D'ou} \quad u = (1 - x/L) u_1 + x/L u_2 \quad (4.7)$$

La déformation de traction - compression

$$\epsilon = du/dx \quad (4.8)$$

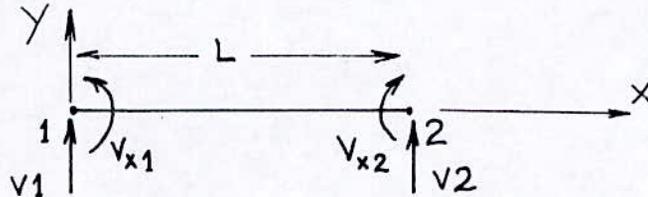
nous avons donc

$$\epsilon = \{ -1/L, 1/L \} \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

D'ou, on a b_0 de la déformation traction-compression :

$$b_0 = \{ -1/L ; 1/L \} \quad (4.10)$$

b/- Déformation de flexion plane x o y :



le vecteur des déplacements nodaux

$$a_f = \{ v1, vx1, v2, vx2 \}$$

L'indice inférieur "x" caractérise la dérivée du déplacement v par rapport à x . La fonction de déplacement comprend quatre paramètres généralisés.

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (4.11)$$

Conditions aux limites

$$x = 0 \quad v(0) = v1 \quad ; \quad vx(0) = vx1$$

$$x = L \quad v(L) = v2 \quad ; \quad vx(L) = vx2$$

les fonctions des formes sont :

$$N1 = 1 + 2/L \cdot x^3 - 3/L \cdot x^2 \quad ; \quad N2 = x + 1/L \cdot x^2 - 2/L \cdot x^3$$

$$N3 = \frac{3}{L} x^2 - \frac{2}{L} x^3 ; \quad N4 = -\frac{1}{L} x^2 + \frac{1}{L} x^3 \quad (4.12)$$

$$v(x) = N1 v1 + N2 vx1 + N3 v2 + N4 vx2 \quad (4.13)$$

La déformation de flexion suivant le plan xoy :

$$\epsilon = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4.14)$$

nous obtenons b_o :

$$b_o = -y \left(\begin{array}{l} -6/L^2 + 12/L^3 x ; -4/L + 6/L^2 x ; \\ 6/L^2 - 12/L^3 x ; -2/L + 6/L^2 x \end{array} \right) \quad (4.15)$$

c/- Déformation de flexion plane xoz :

La déformation est analogue à la précédente ; nous aurons :

$$b_o = -z \left(\begin{array}{l} -6/L^2 + 12/L^3 x ; -4/L + 6/L^2 x ; \\ 6/L^2 - 12/L^3 x ; -2/L + 6/L^2 x \end{array} \right) \quad (4.16)$$

d/- Déformations dues à la rotation θ :

Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.4 , la torsion non uniforme des poutres à parois minces engendre deux sollicitations internes en même temps . Ce sont les contraintes de cisaillement dues à la torsion et les contraintes normales dues au gauchissement. Plus précisément, la sollicitation de torsion est engendrée par la rotation de la section droite autour de l'axe x .

Par contre la sollicitation de gauchissement est engendrée par la différentielle de la rotation " θ " par rapport à l'axe des x (voir figure 4.1). Donc , le déplacement " θ " sera représenté par une fonction d'interpolation polynomiale

de degré 3 afin d'introduire quatre coordonnées généralisées, on pose :

$$\theta(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (4.18)$$

donc

$$d\theta(x)/dx = \alpha_2 + 2 \alpha_3 x + 3 \alpha_4 x^2 \quad (4.19)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \theta(0) = \theta_1 & ; & \quad \theta_x(0) = \theta_{x1} \\ x = L & \quad \theta(L) = \theta_2 & ; & \quad \theta_x(L) = \theta_{x2} \end{aligned}$$

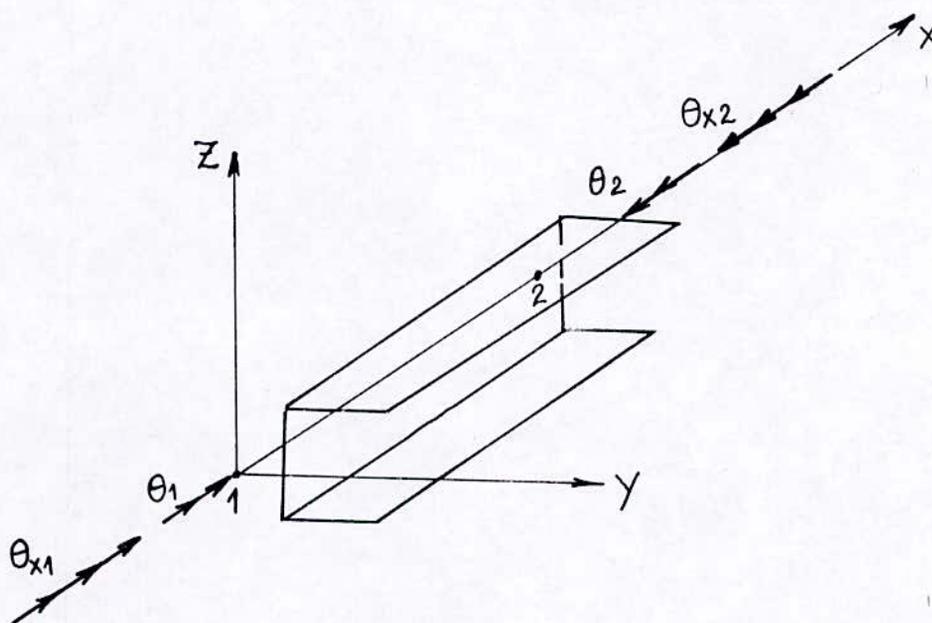


Fig 4.1 : Déplacements nodaux dus à une torsion non uniforme

La recherche des fonctions de forme nous conduit au même résultat à celui de la flexion. Ce qui nous permet d'écrire:

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \left(1 + \frac{2}{L} x - \frac{3}{L} x^2 \right) \theta_1 + \left(x + \frac{1}{L} x^2 - \frac{2}{L} x^3 \right) \theta_{x1} \\ & + \left(\frac{3}{L} x^2 - \frac{2}{L} x^3 \right) \theta_2 + \left(-\frac{1}{L} x^2 + \frac{1}{L} x^3 \right) \theta_{x2} \end{aligned}$$

$$\theta(x) = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_{x1} + N_3 \theta_2 + N_4 \theta_{x2} = N \cdot a \quad (4.20)$$

La déformation de cisaillement due à la torsion est donnée par :

$$\beta = 2 \int d\theta/dx \quad (4.21)$$

La matrice bo relative à la déformation précédente n'est plus la matrice habituelle composée de deux termes constants. Par contre, elle est devenue une fonction de la variable de position x . Nous avons :

$$\beta = 2 \int d(N \cdot a)/dx = 2 \int dN/dx \cdot a \quad (4.22)$$

alors

$$bo_T = 2 \int dN/dx \cdot a \quad (4.23)$$

Nous obtenons :

$$bo_T = 2 \int \left(\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ (-6/L & x+6/L & x^2) \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 & 2 \\ (1 & -4/L x + 3/L x^2) \end{matrix} \right); \\ \left(\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ (6/L & x - 6/L & x^2) \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 & 2 \\ (-2/L x + 3/L x^2) \end{matrix} \right) \quad (4.24)$$

La déformation due au gauchissement est :

$$\epsilon_x = \alpha w \frac{d^2 \theta/dx^2}{dx} = \alpha w \frac{d^2 N/dx^2}{dx} \cdot a \quad (4.25)$$

nous aurons :

$$bo_G = \alpha w \frac{d^2 N/dx^2}{dx} \cdot a \quad (4.26)$$

en remplaçant l'expression de $N(x)$ dans bo_G , nous trouvons:

$$bo_G = \alpha w \left\{ \begin{matrix} 2 & 3 \\ (-6/L & +12/L x) \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 \\ (-4/L + 6/L x) \end{matrix} \right\}; \\ \left(\begin{matrix} 2 & 3 \\ (6/L & -12/L x) \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 \\ (-2/L + 6/L x) \end{matrix} \right) \quad (4.27)$$

Après avoir calculer les matrices b_0 relatives à chaque déformation linéaire, nous pouvons rassembler ces matrices dans une seule matrice globale b_0 , qui, multiplié par le vecteur des déplacements nodaux global donne l'expression générale de la déformation linéaire des poutres à parois minces et de sections droites ouvertes ϵ_0 .

Le vecteur des déplacements nodaux global s'étend à 14 degrés de liberté pour une poutre à parois minces, et cela en ajoutant au vecteur de déplacement habituel les dérivées de la rotation due à la torsion par rapport à l'axe " x ".

IL s'écrit maintenant comme suit :

$$a = \{ w_i, w_{xi}, v_i, v_{xi}, u_i, \theta_i, \theta_{xi}, w_j, w_{xj}, v_j, v_{xj}, u_j, \theta_j, \theta_{xj} \} \quad (4.28)$$

La matrice b_0 est donnée dans la page suivante .

	wi	wxi	vi	vxi	ui
[bo]=	$-Z\left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2}\right)$ L L	$-Z\left(\frac{6x}{2} - \frac{4}{L}\right)$ L L	$-Y\left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2}\right)$ I L	$-Y\left(\frac{6x}{2} - \frac{4}{L}\right)$ L L	$-\frac{1}{L}$
	0	0	0	0	0

	θi	θxi	wj	wxj
	$\alpha w \left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2}\right)$ L L	$\alpha w \left(\frac{6x}{2} - \frac{4}{L}\right)$ L L	$Z\left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2}\right)$ L L	$-Z\left(\frac{6x}{2} - \frac{2}{L}\right)$ L L
	$2\int \left(\frac{6x}{3} - \frac{6x}{2}\right)$ L L	$2\int \left(1 + \frac{3x}{2} - \frac{4x}{L}\right)$ L L	0	0

	vj	vxj	uj	θj	θxj
	$Y\left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2}\right)$ L L	$-Y\left(\frac{6x}{2} - \frac{2}{L}\right)$ L L	$\frac{1}{L}$	$\alpha w \left(-\frac{12x}{3} + \frac{6}{2}\right)$ L L	$\alpha w \left(\frac{6x}{2} - \frac{2}{L}\right)$ L L
	0	0	0	$2\int \left(-\frac{6x}{3} + \frac{6x}{2}\right)$ L L	$2\int \left(\frac{3x}{2} - \frac{2x}{L}\right)$ L L

bo = Matrice de dimensions (2 * 14)

4.1.2- Calcul de la matrice bL

Cette matrice est déduite des termes du second ordre des déformations ϵ_x et β . Les composantes de la déformation non linéaire peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\epsilon_L = \begin{bmatrix} -\alpha w \, dv/dx ; \alpha w \, dw/dx ; -y \, \theta ; z \, \theta ; \\ 1/2 \, dw/dx ; 1/2 \, dv/dx ; 0 ; \beta^2 / 2 \, d\theta/dx \\ \hline 0 ; 0 ; -2 \int \, dv/dx ; 2 \int \, dw/dx ; \\ 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 3 & 3 \\ d & w/dx \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 3 \\ d & v/dx \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 2 \\ d & w/dx \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 2 \\ d & v/dx \end{matrix} \\ dw/dx \\ dv/dx \\ \theta \\ d\theta/dx \\ \{ U \} \end{matrix}$$

[M]

$$\epsilon_L = [M] \{ U \} \quad (4.29)$$

M : étant une matrice composée de terme fonction des déplacements .

U : vecteur composé de terme qui sont des dérivées des déplacements u , v , w et θ

A partir de la définition des fonctions de forme de la flexion suivant l'axe y , z et de la torsion , nous avons:

$$v = Nfy \cdot a ; w = Nfz \cdot a ; \theta = Nt \cdot a \quad (4.30)$$

Dans ce cas le vecteur "U" peut être relié aux déplacements nodaux par la relation suivante :

$$\{ U \} = [G] \{ a \} \quad (4.31)$$

Avec G une matrice dont les termes sont les différentielles des fonctions de forme, et donc des termes dépendant des coordonnées de position . Cette matrice sera donnée dans la page suivante .

Remplaçant l'expression de U dans ϵ_L , nous écrivons :

$$\epsilon_L = [M] . [G] . \{ a \} \quad (4.32)$$

ainsi on obtient :

$$\epsilon_L = [b_L] . \{ a \} \quad (4.33)$$

avec $[b_L] = [M] [G] \quad (4.34)$

Nous retrouverons ,aussi , la matrice b_L dans la page 92 .
 Finalement , après avoir déterminer explicitement les matrices b_0 et b_L liant la déformation avec les déplacements nodaux , nous obtenons l'expression analytique sous la forme matricielle de la déformation totale des poutres à parois minces de sections droites ouvertes .

$$\epsilon = \left[[b_0] + [b_L] \right] \{ a \} \quad (4.35)$$

on pose

$$[\bar{b}] = \left[[b_0] + [b_L] \right] \quad (4.36)$$

d'ou ;

$$\epsilon = [\bar{b}] \{ a \} \quad (4.37)$$

w_i	w_{xi}	v_i	v_{xi}	u_i	θ_i	θ_{xi}
$\frac{12}{3} \frac{dv}{dx} - \gamma \theta \left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{dw}{dx} \left(\frac{6x}{3} - \frac{6x}{2} \right)$	$\frac{6}{2} \frac{dv}{dx} - \gamma \theta \left(\frac{6x}{2} - \frac{4}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{dw}{dx} \left(\frac{3x}{2} - \frac{4x}{2} \right)$	$\frac{12}{3} \frac{dw}{dx} + z \theta \left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} \left(\frac{6x}{3} - \frac{6x}{2} \right)$	$\frac{6}{2} \frac{dw}{dx} + z \theta \left(\frac{6x}{2} - \frac{4}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} \left(\frac{3x}{2} - \frac{4x}{2} \right)$	0	$\rho \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{6x}{3} - \frac{6x}{2} \right)$	$\rho \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{3x}{2} - \frac{4x}{2} \right)$
$-2 \int \frac{dv}{dx} \left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2} \right)$	$-2 \int \frac{dv}{dx} \left(\frac{6x}{2} - \frac{4}{2} \right)$	$2 \int \frac{dw}{dx} \left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2} \right)$	$2 \int \frac{dw}{dx} \left(\frac{6x}{2} - \frac{4}{2} \right)$	0	0	0

w_i	w_{xi}	v_i	v_{xi}	u_i	θ_i	θ_{xi}
$\frac{12}{3} \frac{dv}{dx} + \gamma \theta \left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{dw}{dx} \left(\frac{6x}{3} - \frac{6x}{2} \right)$	$\frac{6}{2} \frac{dv}{dx} + \gamma \theta \left(\frac{6x}{2} - \frac{2}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{dw}{dx} \left(\frac{3x}{2} - \frac{2x}{2} \right)$	$\frac{12}{3} \frac{dw}{dx} - z \theta \left(\frac{12x}{3} - \frac{6}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} \left(\frac{6x}{3} - \frac{6x}{2} \right)$	$\frac{6}{2} \frac{dw}{dx} - z \theta \left(\frac{6x}{2} - \frac{2}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} \left(\frac{3x}{2} - \frac{2x}{2} \right)$	0	$\rho \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{6x}{3} - \frac{6x}{2} \right)$	$\rho \frac{d\theta}{dx} \left(\frac{3x}{2} - \frac{2x}{2} \right)$
$-2 \int \frac{dv}{dx} \left(-\frac{12x}{3} + \frac{6}{2} \right)$	$-2 \int \frac{dv}{dx} \left(\frac{6x}{2} - \frac{2}{2} \right)$	$2 \int \frac{dw}{dx} \left(-\frac{12x}{3} + \frac{6}{2} \right)$	$2 \int \frac{dw}{dx} \left(\frac{6x}{2} - \frac{2}{2} \right)$	0	0	0

b1 = Matrice de dimensions (2 * 14)

4.2- Calcul de la matrice \bar{B}

La matrice \bar{B} a été définie à partir de l'expression de la variation première de la déformation qui est :

$$\delta \epsilon = \bar{B} \cdot \delta a \quad (4.38)$$

Comme précédemment, nous réunissons les expressions (3.25) et (3.27) dans une seule relation écrite en notation matricielle. Aussi, nous approximations $\cos \theta$ à 1 et $\sin \theta$ à θ ; nous avons :

$$\begin{array}{l} \delta \epsilon_x \\ \delta \epsilon \\ \delta \beta \end{array} = \begin{array}{l} -y \left(-d^2 v/dx^2 \theta \delta \theta + d^2 \delta v/dx^2 + d^2 w/dx^2 \delta \theta + d^2 \delta w/dx^2 \right) \\ -z \left(-d^2 w/dx^2 \theta \delta \theta + d^2 \delta w/dx^2 - d^2 v/dx^2 \delta \theta - d^2 \delta v/dx^2 \right) \\ + \alpha w \left(d^3 \delta \theta/dx^3 - d^3 w/dx^3 (d\delta v/dx) - d^3 \delta w/dx^3 (dv/dx) \right. \\ \left. + d^3 v/dx^3 (d\delta w/dx) + d^3 \delta v/dx^3 (dw/dx) \right) + d\delta u/dx \\ + dv/dx (d\delta v/dx) + dw/dx (d\delta w/dx) + \rho^2 d\theta/dx (d\delta \theta/dx) \\ \hline 2 \int \left(d\delta \theta/dx - d^2 w/dx^2 (d\delta v/dx) - d^2 \delta w/dx^2 (dv/dx) \right. \\ \left. + d^2 v/dx^2 (d\delta w/dx) + d^2 \delta v/dx^2 (dw/dx) \right) \end{array} \quad (4.3)$$

Dans cette relation, nous pouvons séparer les termes linéaires et des termes non-linéaires afin de mettre $\delta \epsilon$ sous la forme :

$$\delta \epsilon = \delta \epsilon_0 + \delta \epsilon_L \quad (4.40)$$

Expression dans laquelle , le premier terme peut s'écrire

$$\delta \epsilon_0 = B_0 \delta a \quad (4.41)$$

et le second terme peut être mis sous la forme :

$$\delta \epsilon_L = B_L \delta a \quad (4.42)$$

Il vient alors :

$$\delta \epsilon = B_0 \delta a + B_L \delta a \quad (4.43)$$

où :

$$\delta \epsilon = [B_0 + B_L] \delta a \quad (4.44)$$

En posant :

$$\bar{B} = B_0 + B_L \quad (4.45)$$

nous aboutissons à la première expression :

$$\delta \epsilon = \bar{B} \delta a \quad (4.46)$$

B_0 : est une matrice indépendante des déplacements et identique à la matrice b_0 . Car elle est déterminée à des mêmes termes linéaires de la déformation totale.

Dans ce cas , nous passerons directement au calcul de la matrice B_L .

4.2.1- Calcul de la matrice BL

Soit la variation des termes non-lineaires

$$\begin{aligned}
 \delta \epsilon L = & \left[\begin{aligned}
 & -y \left(-\frac{d^2 v}{dx^2} \theta \delta \theta + \frac{d^2 w}{dx^2} \delta \theta + \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \theta \right) - z \left(-\frac{d^2 w}{dx^2} \theta \delta \theta \right. \\
 & \left. - \frac{d^2 v}{dx^2} \delta \theta - \frac{d^2 \delta v}{dx^2} \theta \right) + \alpha w \left(-\frac{d^3 w}{dx^3} (d\delta v/dx) \right. \\
 & \left. - \frac{d^3 \delta w}{dx^3} (dv/dx) + \frac{d^3 v}{dx^3} (d\delta w/dx) + \frac{d^3 \delta v}{dx^3} (dw/dx) \right) \\
 & \left. + \frac{d^2 v}{dx^2} (d\delta v/dx) + \frac{d^2 w}{dx^2} (d\delta w/dx) + \rho \frac{d^2 \theta}{dx^2} (d\delta \theta/dx) \right. \\
 & \left. - \frac{d^2 w}{dx^2} (d\delta v/dx) - \frac{d^2 \delta w}{dx^2} (dv/dx) \right. \\
 & \left. + \frac{d^2 v}{dx^2} (d\delta w/dx) + \frac{d^2 \delta v}{dx^2} (dw/dx) \right] \quad (4.47)
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

factorisons le vecteur variation des déplacements en produit matriciel voir (4.48) de la page suivante :

$$\delta \epsilon L = [NL] \{ \delta U \} \quad (4.49)$$

D'après la relation qui lie les déplacements aux déplacements nodaux ;

$$\{ U \} = [G] \{ a \} \quad (4.50)$$

Alors , il vient :

$$\{ \delta U \} = [G] \{ \delta a \} \quad (4.51)$$

La matrice G a été déjà évaluée précédemment. En remplaçant δU dans $\delta \epsilon L$, nous obtenons :

$$\delta \epsilon L = [NL] [G] \{ \delta a \} \quad (4.52)$$

$$\delta \epsilon L = \begin{bmatrix}
a w \frac{d v}{d x} & ; & a w \frac{d w}{d x} & ; & y \cdot 0 & ; & z \cdot 0 & ; & a w \frac{d^3 v}{d x^3} + \frac{d w}{d x} & ; & \vdots \\
0 & ; & 0 & ; & 2 \int \frac{d v}{d x} & ; & 2 \int \frac{d w}{d x} & ; & 2 \int \frac{d^2 v}{d x^2} & ; & \vdots \\
- a w \frac{d^3 v}{d x^3} + \frac{d v}{d x} & ; & y \frac{d^2 v}{d x^2} \theta - y \frac{d^2 w}{d x^2} + z \frac{d^2 w}{d x^2} \theta + z \frac{d^2 v}{d x^2} & ; & \int \frac{d \theta}{d x} & ; & \vdots \\
- 2 \int \frac{d^2 w}{d x^2} & ; & 0 & ; & 0 & ; & 0 & ; & \vdots
\end{bmatrix} \begin{array}{l}
\frac{d^3 \delta w}{d x^3} \\
\frac{d^3 \delta v}{d x^3} \\
\frac{d^2 \delta w}{d x^2} \\
\frac{d^2 \delta v}{d x^2} \\
d \delta w / d x \\
d \delta v / d x \\
\delta \theta \\
d \delta \theta / d x \\
\{ \delta U \}
\end{array} \quad (4.48)$$

[NL]

Où [NL] : Matrice de dimensions (2 * 8)

et { δU } : Vecteur de dimensions (8 * 1)

Ou encore

$$\delta \epsilon L = [BL] \{ \delta a \} \quad (4.53)$$

Avec

$$[BL] = [NL] [G] \quad (4.54)$$

La matrice BL sera donnée dans la page 98 .

4.3- Calcul de la matrice $\delta \bar{B}$

Cette matrice découle de l'expression de la variation seconde de la déformation . Dans ce cas, nous reprenons les expressions (3.26) et (3.28), en les assemblant dans un seul vecteur comme précédemment et en approximant $\cos \theta$ à 1 et $\sin \theta$ à θ . nous avons :

$$\delta \epsilon = \left[\begin{array}{l} - y \left(-d^2 v/dx^2 \delta \theta^2 - 2 d \delta v/dx \delta \theta - d^2 w/dx^2 \delta \theta^2 \right) + 2 d^2 \delta w/dx^2 \delta \theta^2 - z \left(-d^2 w/dx^2 \delta \theta^2 - 2 d \delta w/dx \delta \theta \right) + d^2 v/dx^2 \delta \theta^2 - 2 d \delta v/dx \delta \theta + \alpha w \left(-2 d^3 \delta w/dx^3 (d\delta v/dx) + 2 d^3 \delta v/dx^3 (d\delta w/dx) \right) + (d\delta v/dx)^2 + (d\delta w/dx)^2 + \rho^2 (d\delta \theta/dx)^2 \\ \hline 4 \int \left(-d^2 \delta w/dx^2 (d\delta v/dx) + d^2 \delta v/dx (d\delta w/dx) \right) \end{array} \right] \quad (4.55)$$

Nous procédons de la même manière que pour le vecteur $\delta \epsilon$. Nous décomposons le vecteur $\delta \epsilon$ sous une forme de produit matriciel voir page 99 (4.56). nous pouvons écrire :

$$\delta \epsilon = [N] \{ \delta U \} \quad (4.57)$$

	w_i	w_{xi}	v_i	v_{xi}	u_i
$[BL] =$	$-aw \frac{12}{3} \frac{dv}{dx} - y\theta \left(\frac{12x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6}{2} \right) + aw \left(\frac{d}{dx} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} - \frac{6x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$	$-aw \frac{dv}{dx} - y\theta \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4}{2} \right) + aw \left(\frac{d}{dx} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} - \frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4x}{2} \right)$	$aw \frac{12}{3} \frac{dv}{dx} + z\theta \left(\frac{12x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6}{2} \right) + aw \left(\frac{d}{dx} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} - \frac{6x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$	$aw \frac{dw}{dx} + z\theta \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4}{2} \right) + aw \left(\frac{d}{dx} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} - \frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4x}{2} \right)$	0
	$-2 \int \frac{dv}{dx} \left(\frac{12x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6}{2} \right) + 2 \int \frac{d}{dx} \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$	$-2 \int \frac{dv}{dx} \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4}{2} \right) + 2 \int \frac{d}{dx} \left(\frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4x}{2} \right)$	$2 \int \frac{dw}{dx} \left(\frac{12x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6}{2} \right) - 2 \int \frac{d}{dx} \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$	$2 \int \frac{dw}{dx} \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4}{2} \right) - 2 \int \frac{d}{dx} \left(\frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4x}{2} \right)$	0

θ_i	θ_{xi}	w_i
$\left(y\theta \frac{2}{dx} - y \frac{d}{dx} + z\theta \frac{2}{dx} + z \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{2x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{3x}{2} \right) + \rho \frac{2}{dx} \left(\frac{d}{dx} - \frac{6x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$	$\left(y\theta \frac{2}{dx} - y \frac{d}{dx} + z\theta \frac{2}{dx} + z \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2x}{2} \right) + \rho \frac{2}{dx} \left(\frac{d}{dx} - \frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4x}{2} \right)$	$aw \frac{12}{3} \frac{dv}{dx} + y\theta \left(\frac{12x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6}{2} \right) - aw \left(\frac{d}{dx} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} - \frac{6x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$
0	0	$-2 \int \frac{dv}{dx} \left(\frac{12x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6}{2} \right) + 2 \int \frac{d}{dx} \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$

w_{xi}	v_i	v_{xi}	u_i
$-aw \frac{dv}{dx} - y\theta \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2}{2} \right) + aw \left(\frac{d}{dx} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} - \frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2x}{2} \right)$	$-aw \frac{12}{3} \frac{dv}{dx} - z\theta \left(\frac{12x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6}{2} \right) + aw \left(\frac{d}{dx} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} - \frac{6x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$	$aw \frac{6x}{2} \frac{dv}{dx} + z\theta \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2}{2} \right) + aw \left(\frac{d}{dx} + \frac{3}{2} \right) \left(\frac{dw}{dx} - \frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2x}{2} \right)$	0
$-2 \int \frac{dv}{dx} \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2}{2} \right) + 2 \int \frac{d}{dx} \left(\frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2x}{2} \right)$	$-2 \int \frac{dw}{dx} \left(\frac{12x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6}{2} \right) + 2 \int \frac{d}{dx} \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$	$2 \int \frac{dw}{dx} \left(\frac{6x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2}{2} \right) - 2 \int \frac{d}{dx} \left(\frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2x}{2} \right)$	0

θ_i	θ_{xi}
$\left(y\theta \frac{2}{dx} - y \frac{d}{dx} + z\theta \frac{2}{dx} + z \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{2x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{3x}{2} \right) + \rho \frac{2}{dx} \left(\frac{d}{dx} - \frac{6x}{3} \frac{d}{dx} - \frac{6x}{2} \right)$	$\left(y\theta \frac{2}{dx} - y \frac{d}{dx} + z\theta \frac{2}{dx} + z \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{2x}{2} \right) + \rho \frac{2}{dx} \left(\frac{d}{dx} - \frac{3x}{2} \frac{d}{dx} - \frac{4x}{2} \right)$
0	0

BL = Matrice de dimensions (2 * 14)

En utilisant la relation qui relie la variation des déplacements à la variation des déplacements nodaux, à savoir:

$$\{ \delta U \} = [G] \{ \delta a \} \quad (4.58)$$

nous pouvons écrire :

$$\{ \delta \epsilon \} = [N] [G] \{ \delta a \} \quad (4.59)$$

finalement , nous obtenons :

$$\{ \delta \epsilon \} = [\delta \bar{B}] \{ \delta a \} \quad (4.60)$$

avec

$$[\delta \bar{B}] = [N] [G] \quad (4.61)$$

comme nous le constatons dans l'expression de $\delta \epsilon$. Malgré qu'on a factorisé le vecteur variation des déplacements $\{ \delta U \}$, la matrice $[N]$ contiendra encore des termes fonctions de la variation des déplacements δU_i .

Pour plus de commodité de calcul , nous donnerons le développement du produit matriciel de l'expression de $[\delta \bar{B}]$ dans le paragraphe calcul de la matrice K_σ .

4.4- Calcul de la matrice de rigidité K

La matrice de rigidité d'un élément poutre soumis à des contraintes initiales est définie, selon la relation (3.48);

$$K = \int_V \bar{B}^T D \bar{b} \, dv \quad (4.62)$$

Nous avons démontré , précédemment, que les matrices \bar{b} et \bar{B} peuvent être décomposées en une somme de deux matrices; à savoir :

$$\bar{b} = b_0 + b_L \quad \text{et} \quad \bar{B} = B_0 + B_L \quad (4.63)$$

Remplaçons ces relations dans l'expression (4.62), nous aurons :

$$K = \int_V [B_0 + B_L]^T D [b_0 + b_L] dv = k_0 + k_L \quad (4.64)$$

Expression dans laquelle k_0 représente la matrice de rigidité habituelle correspondante aux petits déplacements.

$$k_0 = \int_V B_0^T D b_0 dv \quad (4.65)$$

La matrice k_1 provient de la partie non-linéaire des déformations. Elle est donnée par :

$$k_1 = \int_V [B_0^T D b_L + B_L^T D b_L + B_L^T D b_0] dv \quad (4.66)$$

$$k_1 = k_1 + k_2 + k_3 \quad (4.67)$$

k_1, k_2, k_3 représentent, respectivement, le premier, le second et le troisième terme de l'expression (4.66).

4.4.1- Matrice k_0

Cette matrice comprendra uniquement des termes constants qui dépendent des coefficients de rigidité et des propriétés de la section droite. Pour un matériau à comportement élastique linéaire et pour le cas de structures en poutres, la matrice reliant les contraintes aux déformations est :

$$D = \begin{bmatrix} E & , & 0 \\ 0 & , & G \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

La matrice de rigidité correspondante aux petits déplacements prend une nouvelle forme (voir page 103) . Nous remarquons que la matrice K_0 s'étend pour comprendre , en plus du phénomène de compression , flexion et torsion , le phénomène de gauchissement . Elle comprend , donc , de nouveaux termes contenant une nouvelle propriété de section C_w , relative au gauchissement de la section droite .

4.4.2- Matrice K_1

La décomposition de cette matrice en trois matrices permet de calculer chacune des matrices séparément. Vu l'importance des termes qui se développent, nous n'avons pas jugé utile de les porter.

4.4.2.1- Matrice K_1

$$K_1 = \int_V \begin{matrix} T \\ B_0 \end{matrix} D \, b_1 \, dv \quad (4.69)$$

Les termes de cette matrice ont été calculés par le programme que nous allons décrire dans le cinquième chapitre.

4.4.2.2- Matrice K_2

$$K_2 = \int_V \begin{matrix} T \\ B_L \end{matrix} D \, b_1 \, dv \quad (4.70)$$

Les termes de cette matrice ont été calculés par le programme que nous allons décrire dans le cinquième chapitre.

4.4.2.3- Matrice K_3

$$K_3 = \int_V \begin{matrix} T \\ B_L \end{matrix} D \, b_0 \, dv \quad (4.71)$$

Les termes de cette matrice ont été calculés par le programme que nous allons décrire dans le cinquième chapitre.

$$[K_0] = \begin{bmatrix}
 a, h, 0, 0, 0, 0, 0, -a, h, 0, 0, 0, 0, 0 \\
 b, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -h, k, 0, 0, 0, 0, 0 \\
 c, i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -c, i, 0, 0, 0, 0 \\
 d, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -i, l, 0, 0, 0, 0, 0 \\
 e, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -e, 0, 0, 0, 0 \\
 f, j, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -f, j, 0, 0, 0 \\
 g, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -j, m, 0, 0, 0 \\
 a, -h, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\
 b, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\
 c, -i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\
 d, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\
 e, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\
 f, -j, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\
 g, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
 \end{bmatrix}$$

matrice symétrique

$$a = 12 E I_y / L^3$$

$$h = 6 E I_y / L^2$$

$$b = 4 E I_y / L$$

$$i = 6 E I_z / L^2$$

$$c = 12 E I_z / L^3$$

$$j = 6 E C_w / L^2 + G J / 10$$

$$d = 4 E I_z / L$$

$$k = 2 E I_y / L$$

$$e = E A / L$$

$$l = 2 E I_z / L$$

$$f = 12 E C_w / L^3 + 6 G J / 5L$$

$$m = 2 E C_w / L - G J L / 30$$

$$g = 4 E C_w / L + 2 G J L / 15$$

4.4.3- Calcul du vecteur forces de l'équation d'équilibre

Dans l'équation d'équilibre, il intervient deux types de forces (voir équation 3.48). Il s'agit des forces extérieures appliquées sur la structure et les forces internes dues aux contraintes initiales σ_0 , qui constituent des données du problème.

4.4.3.1- Vecteur forces internes dues aux contraintes σ_0

Le travail des forces internes sera exprimé, dans notre cas, en fonction des déformations linéaires ϵ_0 . C'est à dire que nous allons remplacer les contraintes σ_0 , dans le premier terme de l'équation (3.48), en fonction des déformations linéaires. Et cela, parce que ces contraintes seront calculées à partir d'un problème de poutre à comportement linéaire.

Pour tenir compte du cas général, nous considérons toutes les déformations linéaires qui peuvent se développer dans une poutre à l'exception des déformations de cisaillement dues à la flexion. Nous avons donc :

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{x0} \\ \tau_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \left(\left. \frac{du}{dx} \right|_0 - y \cdot \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_0 - z \cdot \left. \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_0 + \alpha w \cdot \left. \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right|_0 \right) \\ G \cdot 2 \cdot \int \cdot \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Le signe de ces contraintes dépend du sens de l'orientation des axes choisi. Pour le cas de notre problème, le sens des contraintes initiales est contraire à celui des contraintes développées sous l'effet des charges extérieures. Selon la représentation des contraintes, le signe de celles-ci sera affecté aux fonctions de déplacements.

L'expression du travail des forces internes dues aux

contraintes σ_0 peut se décomposer en deux expressions comme:

$$\delta W(\sigma_0) = \{\delta a\}^T \left\{ \int_0^L B_0^T \sigma_0 dv + \int_0^L B_L^T \sigma_0 dv \right\} \quad (4.73)$$

La première expression est un vecteur composé de termes linéaires et la seconde expression est un vecteur comprenant des termes nonlinéaires.

$$\int B_0 \sigma_0 dv = \left[\begin{array}{l} E.IY \int_0^L (-6/L + 12x/L)^2 d w/dx^2 .dx \\ E.IY \int_0^L (-4/L + 12x/L)^2 d w/dx^2 .dx \\ E.IZ \int_0^L (-6/L + 12x/L)^2 d v/dx^2 .dx \\ E.IZ \int_0^L (-4/L + 12x/L)^2 d v/dx^2 .dx \\ - E.A/L \int_0^L du/dx . dx \\ ECW \int_0^L (-6/L + 12x/L)^2 d \theta/dx^2 .dx + GJ \int_0^L (-6x/L + 6x^2/L) d\theta/dx .dx \\ ECW \int_0^L (-4/L + 12x/L)^2 d \theta/dx^2 .dx + GJ \int_0^L (1-4x/L + 3x^2/L) d\theta/dx .dx \\ - E.IY \int_0^L (-6/L + 12x/L)^2 d w/dx^2 .dx \\ E.IY \int_0^L (-2/L + 6x/L)^2 d w/dx^2 .dx \\ - E.IZ \int_0^L (-6/L + 12x/L)^2 d v/dx^2 .dx \\ E.IZ \int_0^L (-2/L + 6x/L)^2 d v/dx^2 .dx \\ E.A/L \int_0^L du/dx . dx \\ -ECW \int_0^L (-6/L + 12x/L)^2 d \theta/dx^2 .dx - GJ \int_0^L (-6x/L + 6x^2/L) d\theta/dx .dx \\ ECW \int_0^L (-2/L + 6x/L)^2 d \theta/dx^2 .dx + GJ \int_0^L (-2x/L + 3x^2/L) d\theta/dx .dx \end{array} \right]$$

Les termes de l'expression $\int_{BL}^T \sigma_0 dv$, seront donnés dans l'ANNEXE .

4.4.3.2- Vecteur forces extérieures

Dans le cas des poutres à porois minces, la somme des travaux des forces extérieures se présentera sous une nouvelle forme par l'introduction de deux expressions. La première est liée à la nouvelle charge extérieure produisant le septième degré de liberté " $d\theta/dx$ ", et la seconde expression est relative à la production d'un travail additionnel pour les forces transversales appliquées d'une manière excentrée par rapport au centre de cisaillement . Concernant la première expression , nous avons vu dans le paragraphe (4.1.1-d) que la torsion non uniforme engendre deux sollicitations qui sont proportionnelles à deux déplacements . Le premier déplacement est une rotation autour de l'axe x " θ ", et le second est défini par la dérivée de la rotation autour de x " $d\theta/dx$ " . Le septième degré de liberté caractérise un mouvement de torsion de la section droite autour d'un des axes transversaux de plus faible rigidité . Ce mouvement est défini à partir du déplacement axiale des points de la section droite . Il engendre ainsi une déformation de type axiale , appelée déformation de gauchissement (voir éq 3.14)

$$\epsilon_x = \alpha_w \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (4.74)$$

On obtient les contraintes par la loi de HOOKE :

$$\sigma_x = E \epsilon_x = E \alpha_w \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (4.75)$$

θ : étant l'angle de torsion qui varie le long de l'axe des x.

La force extérieure qui équilibre la force interne due au gauchissement est appelée le " BIMOMENT ". Il est définie par :

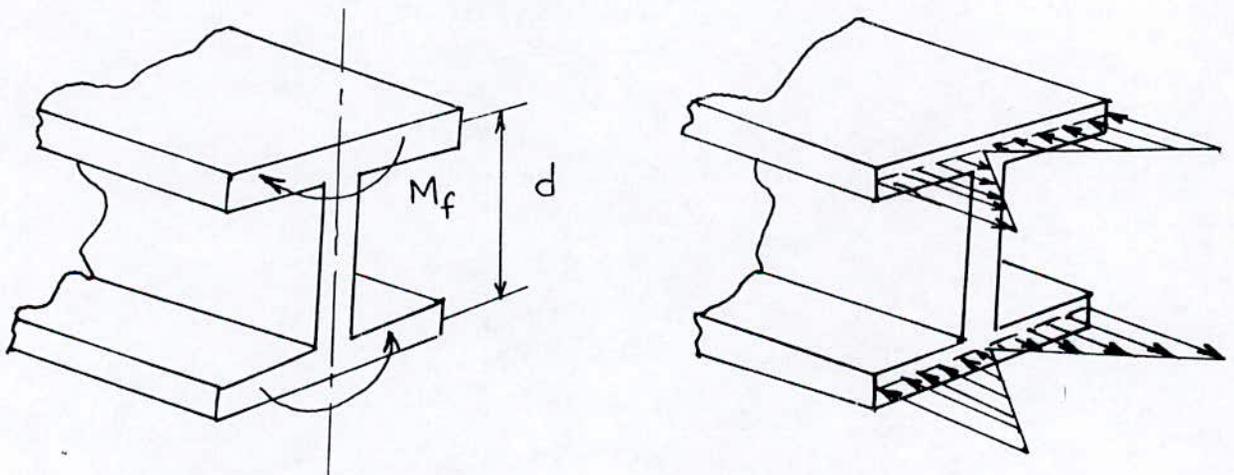
$$B = \int \sigma x \alpha w \, dA \quad (4.76)$$

En remplaçant (4.75) dans (4.76) et en utilisant la propriété de la section $C_w = \int \alpha w^2 \, dA$; nous aurons :

$$B = E C_w d^2 \theta / dx^2 \quad (4.77)$$

Il a la dimension d'un moment multiplié par une longueur . On peut le caractériser par deux couples opposés autour de l'axe transversal de plus faible rigidité , séparés d'une distance " d " .

Prenons l'exemple d'une poutre en I symétrique , nous avons la présentation de l'effort Bimoment et les contraintes qui en résultent :



$$B = M_f \cdot d$$

Bimoment

Répartition des contraintes normales

Fig 4.2 : Poutre en forme de I symétrique

Finalement, le vecteur champ des forces extérieures pour des poutres à parois minces devient :

$$F = (P_x , P_y , P_z , M_x , M_y , M_z , B) \quad (4.78)$$

B : étant la septième force " Bimoment ".

Rappelons que le vecteur champ des déplacements s'étend lui aussi à sept composantes ; à savoir :

$$U = (u , v , w , \theta_x , \theta_y , \theta_z , \theta_x') \quad (4.79)$$

θ_x' : est la dérivée de la rotation θ_x par rapport à l'axe x . La deuxième particularité importante, introduite dans le travail des forces extérieures, est relative aux charges transversales déportées par rapport au centre de cisaillement et aussi des charges axiales déportées par rapport au centre de gravité.

Soit une charge dirigée d'une manière quelconque par rapport aux axes locaux de la poutre, appliquée à une distance "d" en dessus et "h" à droite du centre de cisaillement. Le point d'application de la charge est repéré par rapport au centre de gravité C de la section par C_y et C_z (voir fig 4.3).

Le déplacement vertical " r " de la force P, est donné par :

$$r = w + h \theta + d (1 - \cos\theta) \approx w + h \theta + (d/2) \theta^2 \quad (4.80)$$

Comme nous le constatons le déplacement "r" est une fonction nonlinéaire des variables de déplacement.

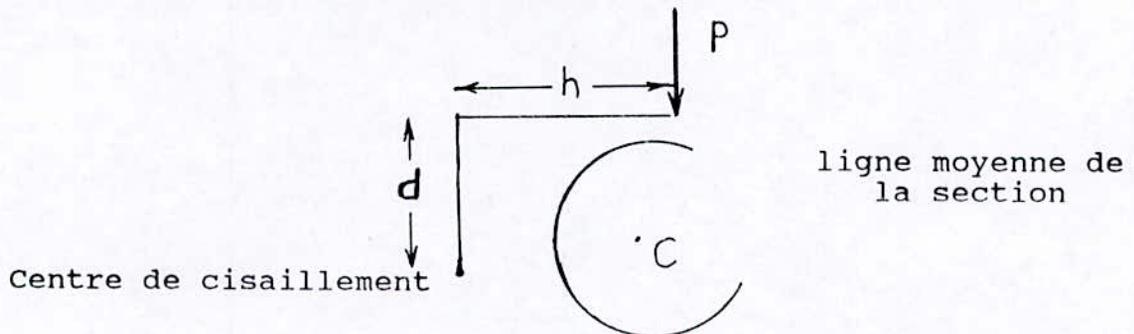


Fig 4.3 : Charge déportée par rapport au centre de cisaillement

La variation du déplacement donne :

$$\delta r = \delta w + h \delta \theta + d \theta \delta \theta \quad (4.81)$$

Ou bien

$$\delta r = \delta w + (h + d \theta) \delta \theta \quad (4.82)$$

Donc la charge P engendre un travail de flexion le deuxième de torsion . Finalement, prenons le cas général d'une poutre soumise à des forces axiales P_x , transvesales P_y et P_z déportées par rapport à C , des moments de flexion M_y et M_z , un moment de torsion M_x et un " Bimoment ". La variation du travail de ces forces appliquées sur un noeud i voir fig 4.4 :

$$\begin{aligned} \Sigma P_i \delta r_i = & \{ P_{xi}.u_i + P_{yi}.[\delta v_i + (h_{zi} + d_{yi}.\theta_{xi}) \delta \theta_{xi}] + \\ & P_{zi}.[\delta w_i + (h_{yi} + d_{zi}.\theta_{xi}) \delta \theta_{xi}] + M_{xi} \delta \theta_{xi} + \\ & M_{yi} \delta \theta_{yi} + M_{zi} \delta \theta_{zi} + B_i \delta \theta_{xi}' \} \quad (4.83) \end{aligned}$$

Avec : $\theta_y = dw/dx$; $\theta_z = dv/dx$; $\theta_x = d\theta_x/dx$

En factorisant le travail sous la forme d'un produit vectoriel , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \{\delta a\}^T \{\bar{P}\} = & \left(\begin{array}{cccc} \delta w_i, \delta w_{xi}, \delta v_i, \delta v_{xi}, \\ \delta u_i, \delta \theta_{xi}, \delta \theta_{xi}' \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} P_{zi} \\ M_{yi} \\ P_{yi} \\ M_{zi} \\ P_{xi} \\ M_{xi} + (h_{yi} + d_{zi}.\theta_i) P_{zi} + \\ (h_{zi} + d_{yi}.\theta_i) P_{yi} \\ B_i \end{array} \right] \quad (4.84) \end{aligned}$$

Comme nous remarquons , le vecteur des charges extérieures depend d'un paramètre de déplacement.

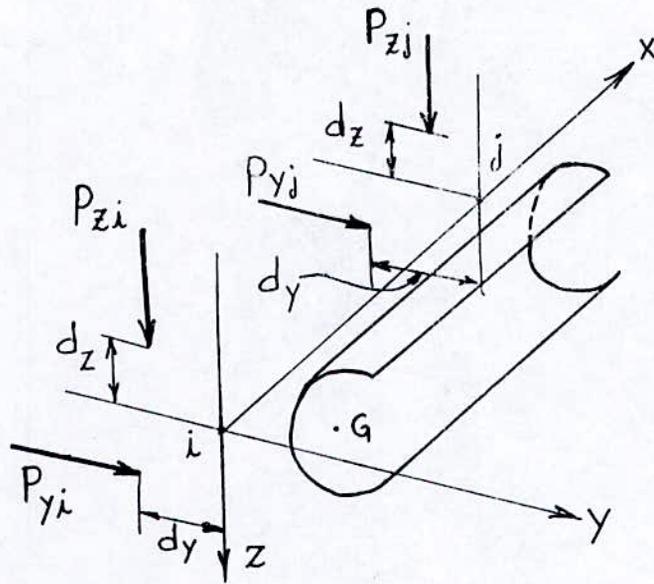


Fig 4.4 : Configuration des charges considérées

4.5- Calcul de la matrice de rigidité tangente K_T

L' expression de la matrice de rigidité tangente est donnée par la formule (3.69); qui est :

$$K_T = K_o + K_L + K_\sigma + K_{\sigma o} - K_P \quad (4.85)$$

Rappelons que les matrices K_o et K_L découlent de la relation (3.61) qui donne :

$$\bar{K} = \int_V \bar{B}^T D \bar{B} dv \quad (4.86)$$

En utilisant l'expression (4.45); on obtient :

$$\bar{K} = \int_V B_o D B_o dv + \int_V (B_o^T D B_L + B_L^T D B_L + B_L^T D B_o) dv \quad (4.87)$$

ou encore

$$\bar{K} = K_o + K_L \quad (4.88)$$

avec
$$K_0 = \int_V \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 \, dv \quad (4.89)$$

et
$$K_L = \int_V (\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0) \, dv \quad (4.90)$$

En ce qui concerne la matrice K_σ , elle est définie par la relation (3.60) .

4.5.1- Matrice K_0

Cette matrice est identique à la matrice k_0 donnée dans le paragraphe (4.4.1) car les matrices b_0 et B_0 sont déterminées à partir des mêmes termes de la déformation totale (termes linéaires) .

4.5.2- Matrice K_L

Le calcul de la matrice K_L nécessite la décomposition de celle-ci en une somme de sous-matrices comme suit :

$$K_L = K_1 + K_2 + K_3 \quad (4.91)$$

ou K_1, K_2 et K_3 : représentent le premier, le second et le troisième terme de l'expression (4.90). Nous pouvons déduire facilement que la sous-matrice K_3 est la transposée de K_1 .
Donc nous calculerons seulement les sous matrices K_1 et K_2 .

4.5.2.1- Matrice K_1

cette matrice est donnée par le terme suivant:

$$K1 = \int_V B_0^T D BL dv \quad (4.92)$$

4.5.2.2- Matrice K2

cette matrice est définie par le terme suivant:

$$K2 = \int_V BL^T D BL dv \quad (4.93)$$

4.5.3- Matrice $k\sigma$

La matrice $k\sigma$ a été définie par l'expression (3.60), nous avons :

$$k\sigma \cdot \delta a = \int_V \delta \bar{B}^T \sigma dv \quad (4.94)$$

Rappelons que la matrice $\delta \bar{B}$ est établie par la relation (4.61), par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\delta \bar{B}^T = [G]^T [N]^T \quad (4.95)$$

Nous remplaçons l'expression (4.86) dans (4.85), ce qui donne

$$k\sigma \cdot \delta a = \int_V [G]^T [N]^T \{ \sigma \} dv \quad (4.96)$$

Le vecteur contrainte σ comprend deux composantes qui sont appelées contrainte axiale (σ_x) et contrainte de cisaillement (τ).

Ces dernières sont en général exprimées comme des fonctions linéaires des déplacements u, v, w et θ telle que :

$$\{ \sigma \} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E (du/dx - y d^2 v/dx^2 - z d^2 w/dx^2 + \alpha w d^2 \theta/dx^2) \\ 2 \int G d\theta/dx \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

La matrice $[N]$ comprend des termes qui sont fonctions des variations des déplacements δU_i . Il est possible d'écrire :

$$[N]^T \{ \sigma \} = [\sigma n] \{ \delta U \} \quad (4.98)$$

Expression dans laquelle $[\sigma n]$ est une matrice carrée fonction des contraintes voir page suivante. En utilisant la relation (4.58), nous aurons :

$$[N]^T \{ \sigma \} = [\sigma n] [G] \{ \delta a \} \quad (4.99)$$

Remplaçant (4.99) dans (4.96) , nous obtenons :

$$k\sigma \cdot \delta a = \left(\int_V [G]^T [\sigma n] [G] dv \right) \{ \delta a \} \quad (4.100)$$

Finalement la matrice $k\sigma$, après simplification du vecteur des déplacements nodaux $\{ \delta a \}$, s'écrit :

$$k\sigma = \int_V [G]^T [\sigma n] [G] dv \quad (4.101)$$

$k\sigma$: est une matrice symétrique qui est fonction du niveau des contraintes .

4.5.4- Matrice $K\sigma$

Cette matrice est utilisée uniquement pour les problèmes qui admettent des contraintes initiales . Comme nous l'avons vu au paragraphe 4.4.3, nous considérons le cas des contraintes, suivant les directions x , y et z , générées par des sollicitations de compression , de flexion ou de torsion. Donc nous exprimons ces contraintes à partir des fonctions suivantes :

[σ_n] =

0	0	0	0	0	$aw \sigma_x$	0	0
0	0	0	0	$aw \sigma_x$	0	0	0
0	0	0	0	0	$2\tau \tau$	$-y \sigma_x + z \theta \sigma_x$	0
0	0	0	0	$2\tau \tau$	0	$y \theta \sigma_x + z \sigma_x$	0
0	$aw \sigma_x$	0	$2\tau \tau$	σ_x	0	0	0
$aw \sigma_x$	0	$2\tau \tau$	0	0	σ_x	0	0
0	0	$-y \sigma_x + z \theta \sigma_x$	$y \theta \sigma_x + z \sigma_x$	0	0	$(y d^2 v / dx^2 + y \theta d^2 w / dx^2 + z d^2 w / dx^2 - z \theta d^2 v / dx^2) \sigma_x$	0
0	0	0	0	0	0	0	$\rho^2 \sigma_x$

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{x0} \\ \tau_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \left[\left. \frac{du}{dx} \right|_0 - y \cdot d \left. \frac{v}{dx} \right|_0 - z \cdot d \left. \frac{w}{dx} \right|_0 + \alpha w \cdot d \left. \frac{\theta}{dx} \right|_0 \right] \\ G \cdot 2 \cdot \int \cdot d\theta/dx \Big|_0 \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

Aussi, ces fonctions peuvent s'écrire directement en fonction des déplacements nodaux. Le signe de ces contraintes sera introduit avec la valeur des déplacements.

Pour ce qui est de l'expression de $K_{\sigma\sigma}$, celle-ci sera identique que K_{σ} . Seulement les déplacements nodaux qui interviennent dans les termes de la matrice $[\sigma n]$, seront remplacés par les déplacements nodaux initiales $\{a_0\}$ qui seront proportionnels aux contraintes initiales σ_0 .

Cela sous-entend, qu'il faut rechercher les déplacements nodaux initiales, avant de procéder à la résolution du problème non-linéaire avec des contraintes initiales.

4.5.5- Matrice des charges KP

Nous avons vu que, dans le cas des charges excentrées par rapport au centre de cisaillement, le déplacement transversal (v ou w) s'exprime en une fonction non-linéaire (fig 4.5).

Ceci nous a conduit à trouver un vecteur force dépendant du paramètre de déplacement θ (voir éq 4.84), après calcul de la variation première du travail des forces extérieures.

En conséquence, la variation seconde du travail des forces extérieures ne s'annule pas. On obtient pour un élément ij l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \left(\delta \bar{P} \right)^T = & \left(0, 0, 0, 0, 0, (dy_i \cdot Py_i + dz_i \cdot Pz_i) \cdot \delta \theta_i, \right. \\ & \left. 0, 0, 0, 0, 0, (dy_j \cdot Py_j + dz_j \cdot Pz_j) \cdot \delta \theta_j \right)^T \quad (4.103) \end{aligned}$$

Nous pouvons transformer cette expression sous une forme matricielle afin d'introduire les termes de charge dans la matrice de rigidité tangente . Nous écrivons donc :

$$\{ \delta \bar{P} \}^T = [KP] \{ \delta a \} \quad (4.104)$$

La matrice KP comprendra des termes nuls partout sauf ceux qui sont facteur du déplacement $\delta\theta$. Elle s'écrit ainsi:

$$[KP] = \begin{bmatrix} 0,0,0,0,0, & 0 & ,0,0,0,0,0,0, & 0 & ,0 \\ 0,0,0,0, & 0 & ,0,0,0,0,0,0, & 0 & ,0 \\ 0,0,0, & 0 & ,0,0,0,0,0,0, & 0 & ,0 \\ 0,0, & 0 & ,0,0,0,0,0,0, & 0 & ,0 \\ 0, & 0 & ,0,0,0,0,0,0, & 0 & ,0 \\ & dy1.Pyi & & & \\ & +dz1.Pz1 & ,0,0,0,0,0,0, & 0 & ,0 \\ & & 0,0,0,0,0,0, & 0 & ,0 \\ & & 0,0,0,0,0, & 0 & ,0 \\ & matrice symétrique & 0,0,0,0, & 0 & ,0 \\ & & 0, & 0 & ,0 \\ & & & dy2.Py2 & \\ & & & +dz2.Pz2 & ,0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

4.6- Changement de repère

Le problème essentiel qu'a fait l'objet de notre thème de recherche est l'étude du comportement non-linéaire des poutres rectilignes à parois minces. En principe, la résolution des équations d'équilibre pour l'étude du longeron par la méthode des éléments finis ne nécessite pas l'introduction de la notion de matrice de passage d'un repère local à un repère global, vu que chaque élément de la structure décrit est défini dans le même repère que celui de la structure assemblée.

Seulement, le longeron que nous sommes entrain d'étudier n'est pas parfaitement rectiligne. Il admet une courbure initiale. Donc, nous avons le choix de simuler le longeron en une poutre en forme d'arc ou bien rectiligne droite, tout dépend de la grandeur de la flèche (voir fig 4.5). Suivant l'ordre de grandeur de cette dernière, nous voyons qu'elle est très significative et elle ne peut être négligée. Dans ce cas et afin d'en tenir compte, nous avons discrétisé le longeron en éléments poutres rectilignes orientées suivant la courbure initiale donnée par le constructeur.

Cette discrétisation nous amène à introduire la notion de changement de coordonnées dans l'espace. Puisqu'on utilise, presque, le même modèle que la poutre habituelle, nous aboutissons au même changement de coordonnées et à la même matrice de passage.

Néanmoins, nous devons ajouter un nouveau terme dans la matrice de passage, qui est relatif au septième degré de liberté défini par la dérivée de la rotation de la section

l'élément poutre dans l'espace , nous aurons besoin de deux angles d'EULER uniquement (voir fig 4.7) , à savoir :

β étant l'angle de rotation du repère autour de l'axe y .

θ étant l'angle de rotation du repère autour de l'axe z .

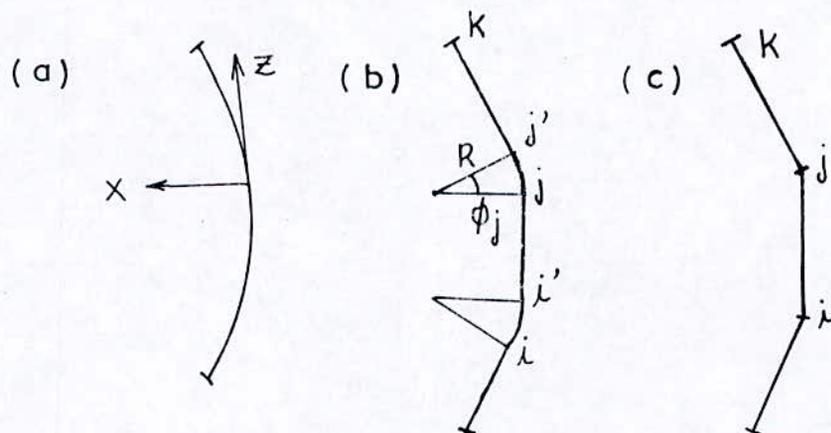


fig 4.6 : a) Modèle poutre courbée , b) Discrétisation en éléments poutres droites séparées par des segments arc, c) Discrétisation en éléments poutres rectilignes

Appelant x,y,z repère global et x_2,y_2,z_2 repère local .

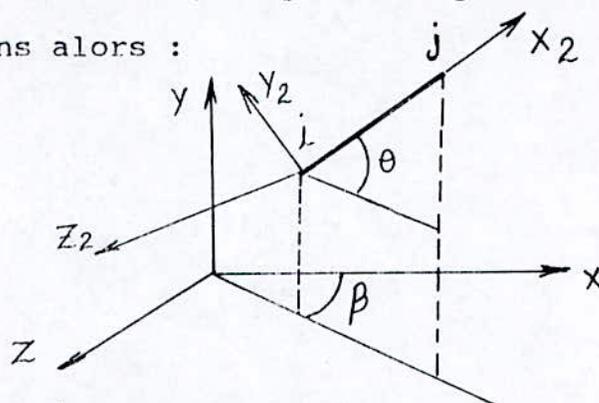
Exprimons les coordonnées x_1,y_1,z_1 en fonction de x,y,z (voir fig 4.7) ; nous aurons :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & , & 0 & , & \sin \beta \\ 0 & , & 1 & , & 0 \\ -\sin \beta & , & 0 & , & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

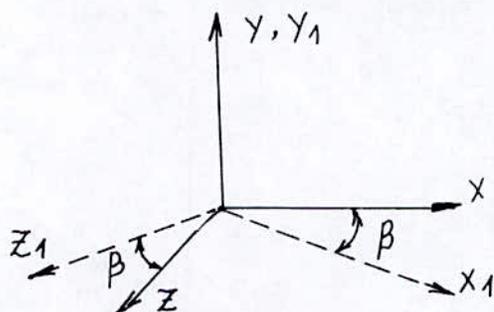
Exprimons les coordonnées x_2,y_2,z_2 en fonction de x,y,z (voir fig 4.8) ; nous aurons :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & , & \sin \theta & , & 0 \\ -\sin \theta & , & \cos \theta & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

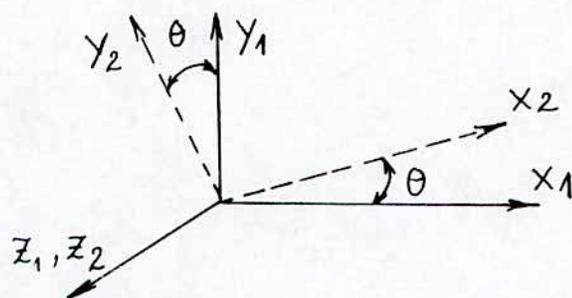
Donc pour exprimer les coordonnées du repère local x_2, y_2, z_2 en fonction des coordonnées du repère global x, y, z , nous devons remplacer le vecteur $\{ x_1, y_1, z_1 \}$ par la relation (4.107), nous obtenons alors :



a) Schématisation de l'élément poutre



b) Rotation autour de y



c) Rotation autour de z

fig 4.7 : Angle d'EULER pour repérer un élément poutre

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \beta & , & \sin \theta & , & \cos \theta \sin \beta \\ -\sin \theta \cos \beta & , & \cos \theta & , & -\sin \theta \sin \beta \\ -\sin \beta & , & 0 & , & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

D'où on détermine la matrice R , donnée par :

$$R = \begin{bmatrix} l_x & , & m_x & , & n_x \\ l_y & , & m_y & , & n_y \\ l_z & , & m_z & , & n_z \end{bmatrix}$$

avec $l_x = \cos \theta \cos \beta$, $m_x = \sin \theta$, $n_x = \cos \theta \sin \beta$

$l_y = -\sin \theta \cos \beta$, $m_y = \cos \theta$, $n_y = -\sin \theta \sin \beta$

$l_z = -\sin \beta$, $m_z = 0$, $n_z = \cos \beta$

ANALYSE DE L'INSTABILITE DES POUTRES A PAROIS MINCES

5.1- Introduction

Il est très utile, pour certaines structures composées d'éléments tige ou poutre , de vérifier le flambement de ces éléments et ainsi connaître les charges critiques dont ils constituent des conditions limites de stabilité de la structure .

Vu que la théorie de l'instabilité des tiges et poutres simples présente une facilité dans la compréhension et la maîtrise, elle est devenue une notion classique à enseigner. On la trouve , presque , dans tous les ouvrages de résistance des matériaux .

De cette théorie , il a été établi des critères de résistance au flambement utilisé dans la pratique pour vérifier la résistance des structures , et , cela est couramment exploité dans les calculs des structures métallique, ou en béton armé en génie civil et de certains système mécanique .

Le flambement des tiges longues est défini, par la compression sous une charge axiale qui , au delà d'une certaine valeur, la déformation de compression se transforme en une déformation de flexion . Cette valeur seuil est appelée charge critique .

Le flambement des tiges présente plusieurs modes de déformations donnés par les différentes conditions d'appui d'une poutre à colonne .

Parmi les chercheurs qui ont consacré des travaux important dans le développement des principes de la théorie de la stabilité des structures, nous trouvons " TIMOSHENKO ".

En plus de l'analyse de plusieurs cas de flambement des tiges ou poutres simple ainsi la combinaison de flexion et de compression. Cet auteur a traité dans les chapitres 5 et 6 de cet ouvrage, le flambement des éléments appartenant à la quatrième classe de structure définie par " VLASOV ", à savoir : " les voiles longues appelées aussi poutres à parois minces de section droite ouverte ".

En premier l'auteur a mis en évidence le concept de gauchissement de la section droite, qui ne reste pas plane après la déformation de la poutre . Comme nous l'avons vu au chapitre 1 , ce phénomène est le trait caractéristique de ce modèle par rapport au tige longue ou poutre simple .

Rappelons que pour le cas de la torsion pure, le gauchissement n'entraîne aucune déformation (contrainte) supplémentaire .

Par contre pour la torsion non-uniforme , obtenue par empêchement ou gauchissement d'une ou plusieurs sections ou encore variation du couple de torsion , il se produit des déformations (contraintes) de nature axiales dépendantes de la variation de l'angle de torsion le long de l'axe de la poutre .

Ensuite sur la base de ce phénomène, l'auteur a élaboré de nouvelles notions de flambement spécifiques à ses poutres. Il a commencé par la définition de la notion du flambement à la torsion . Ce phénomène se caractérise par la rotation des sections droites de la poutre autour de l'axe de torsion

sans qu'il y ait déviation de ce dernier qui est initialement droit . Le flambement à la torsion s'applique pour les cas de poutres constituées de fins éléments rectangulaire (sous formes d'ailes) , ayant le centre de torsion qui coïncide avec le centre de gravité et soumis à des forces de compression axiale uniforme .

Pour ce cas de poutre , il ne faut pas se contenter de vérifier le flambement à la torsion , car la poutre peut flamber aussi latéralement par rapport aux axes de la section droite pour la valeur d'EULER de la contrainte .

IL existera donc trois valeurs de la charge critique et seule la plus petite valeur présente un intérêt pratique .

Ensuite, l'auteur a traité le second cas de poutres ayant le centre de torsion qui ne coïncide pas avec le centre de gravité . Pour cela , la poutre sous l'effet d'une compression avec une poussée centrale est susceptible de flamber par flexion dans les deux plans de la section droite et par torsion en même temps, c'est le cas le plus fréquemment rencontré .

L' étude de ce deuxième nouveau phénomène de flambement a abouti à un système de trois équations différentielles qui peut permettre de déterminer les charges critiques du flambement par flexion et torsion .

La résolution du système d'équations fournit trois valeurs de charges critiques dont seule , la plus faible sera pratiquement utilisée dans la vérification de la structure.

En dernier, l'auteur a terminé l'étude de stabilité des poutres à parois minces par l'analyse d'un autre concept de flambement spécifique à ce genre de poutre qui est le

flambement latéral .

Ce phénomène est généré non pas par des charges axiales, mais par des forces latérales .

Le flambement latéral est décrit par ceci :

Supposant qu'une poutre chargée par des forces dans le plan de plus grande rigidité et donc il se produira une flexion dans le plan des charges . Cet état de déformation ne reste pas stable si l'on accroît la charge continuellement .

Au delà d'une certaine valeur appelée charge critique, la poutre initialement fléchie, subira encore une déformation de flexion dans le plan perpendiculaire au premier avec une torsion de la section droite .

Ce phénomène est important à étudier pour les cas de structure qui présentent des exigences au point de vue sécurité et un coût économique élevé . Généralement ce sont des structures dont leur intensité de charge limite est inconnue et difficile à estimer (forces naturelles , coup de vent, ...etc) .

Le phénomène du flambement à la torsion, flexion-torsion et latéral a été traité par la méthode d'énergie et d'équilibre. Les premiers travaux des chercheurs ont développés des résolutions analytiques des équations différentielles .

Les solutions existantes, sont ceux des problèmes comprenant des conditions de chargements et d'appuis simple[TIMOSHENKO]. Dans ces dernières années, d'autres chercheurs ont repris l'étude de ces problèmes en utilisant une résolution numérique qui est la méthode des éléments finis pour résoudre des cas de flambement avec des conditions de chargement et d'appuis plus complexes .

Au chapitre 3 , nous avons montré que la structure , faisant l'objet de notre étude, qui est le longeron du châssis de la locomotive, appartient à la classe des poutres à parois minces .

En plus de la flexion sous les charges transversales, cette structure travaille, aussi, à la compression sous de fortes charges axiales et en cas d'accident , elle subit des chocs axiaux très violents . Aussi, le châssis fait partie de la famille des structures à haute coefficient de sécurité .

Dans cet esprit , que nous avons jugé nécessaire de compléter l'étude du longeron par le calcul des charges critiques et de les vérifier avec les charges appliquées .

Dans ce chapitre , nous allons reprendre la formulation en éléments finis de l'équation d'instabilité des poutres à parois minces, et, en tenant compte des déformations non-linéaires déduites par " ROBERTS " .

De plus, dans l'expression de la contrainte de préflambement, nous tiendrons compte des contraintes initiales existantes dans les longerons .

5.2- Equation d'énergie

La variation de l'énergie potentielle totale (V) est égale au travail virtuel correspondant aux variations des déplacements δa (a : étant les déplacements nodaux. réf [5]). L'état d'équilibre stable d'une structure est définie par la condition que la première variation de l'énergie potentielle totale , dénoté par δV , est nulle (réf [5] et [15]).

Pour une structure soumise à des forces internes , P_i , avec

les déplacements correspondants r_i , l'état d'équilibre peut être donc représenté par l'équation suivante (les forces extérieures étant supposées stationnaire dans l'état d'équilibre stable)

$$\delta V = - \sum P_i \delta r_i + \int \sigma_i \delta \epsilon_i dvol \quad (5.1)$$

Dans laquelle σ_i : correspondent aux contraintes (forces internes) dans la structure à l'état d'équilibre ,
et $\delta \epsilon_i$: est la variation des déformations .

L'intégrale est sur le volume de la structure . Nous pouvons constater que l'équation (5.1) est bien équivalente à l'équation d'équilibre (somme des forces généralisées(3.34)), ainsi ;

$$\delta V = \delta a^T \psi (a) \quad (5.2)$$

Pour l'équilibre stable , nous avons donc :

$$\delta V = 0 \quad (5.3)$$

Cette condition correspond à la valeur minimum de la fonction énergie potentielle totale. Aussi, nous savons que la variation seconde de l'énergie potentielle V , dénoté par $\delta^2 V$, est définie positive pour l'état d'équilibre stable, c'est à dire positive pour toutes variations admissible dans les déplacements et déformations .

La variation seconde de V s'écrit :

$$\delta^2 V = \sum P_i \delta^2 r_i + \int \sigma_i \delta^2 \epsilon_i + \delta \sigma_i \delta \epsilon_i dvol \quad (5.4)$$

Les conditions critiques d'une structure sont définies par l'annulation de l'équation (5.4) :

$$\delta^2 V = 0 \quad (5.5)$$

Ceci indique que la structure peut passer de l'état d'équilibre stable à un état d'équilibre instable, d'où le critère de stabilité.

Une structure est considérée dans un état stable lorsque la variation seconde de (V) est positive et, inversement lorsque $\delta^2 V$ est négative la structure est instable. Dans le cas de structure en poutre, les contraintes (déformations) qui interviennent dans l'équation d'énergie (ou d'équilibre) sont de deux natures ; contrainte (resp déformation) axiale et contrainte (resp déformation) tangentielle dans le plan de la section droite.

Pour la poutre à parois minces, la seconde variation de l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$\delta^2 V = -\sum P_i \delta^2 r_i + \int_x \int_A \{ \sigma_x \cdot \delta^2 \epsilon_x + \tau \cdot \delta^2 \beta + \delta \sigma_x \cdot \delta \epsilon_x + \delta \tau \cdot \delta \beta \} dA dx \quad (5.6)$$

D'après la loi de " HOOKE " , et pour un matériau élastique, nous avons :

$$\begin{aligned} \delta \sigma_x &= E \delta \epsilon_x \\ \delta \tau &= G \delta \beta \end{aligned} \quad (5.7)$$

Nous remarquons que le terme relatif à la contrainte initiale σ_0 disparaît dans (5.7), car elle est considérée comme une constante. E et G étant respectivement module

d'élasticité longitudinale et transversale du matériau .

Les contraintes qui interviennent dans les deux premiers termes de l'intégrale de l'expression (5.6) sont respectivement contrainte axiale et de cisaillement due à la torsion de " Saint-Venant " dans la poutre avant flambement. On se rappelle ici que les déformations de cisaillement dues à la flexion non uniforme et de distorsion de la section droite ne sont pas incluses dans l'étude .

Les contraintes σ_x et τ sont généralement exprimées comme des fonctions linéaires des déplacements de préflambement u , v , w , et θ : il s'ensuit :

$$\sigma_x = E \left\{ \frac{du}{dx} - z \frac{d^2 w}{dx^2} + y \frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha w \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right\} \quad (5.8)$$

$$\tau = G \left\{ 2 \int y \, d\theta/dx \right\} \quad (5.9)$$

Dans lesquelles , σ_0 est la contrainte initiale due à la courbure dans l'état de référence initiale (l'état avant toute déformation) .

Il n'y a pas de contrainte initiale de cisaillement due à la torsion et on néglige celles dues à la flexion de la poutre initialement .

En remplaçant dans l'expression (5.6), la relation (5.7) à (5.9), nous obtenons l'équation donnant les conditions critiques ;

$$\delta^2 V = -\Sigma P_i \delta^2 r_i + \int_x \int_A \{ \sigma_x \cdot \delta^2 \epsilon_x + \tau \cdot \delta^2 \beta + E \delta \epsilon_x \cdot \delta \epsilon_x + G \delta \beta \cdot \delta \beta \} dA \, dx = 0 \quad (5.10)$$

Les déformations utilisées dans l'analyse de l'instabilité des poutres seront les déformations non-linéaires données

dans le chapitre 3. On rappelle, ici, les expressions de ces déformations . La déformation axiale, ϵ_x , dans les poutres due aux déplacements u, v, w et la rotation θ est donnée par:

$$\begin{aligned} \epsilon_x = & -y \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} \cos \theta + \frac{d^2 w}{dx^2} \sin \theta \right\} \\ & - z \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} \cos \theta + \frac{d^2 w}{dx^2} \sin \theta \right\} \\ & + \alpha_w \left\{ \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{d^3 w}{dx^3} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{d^3 v}{dx^3} \cdot \frac{dw}{dx} \right\} \\ & + \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

La déformation de cisaillement due à la torsion de " Saint-Venant " qui varie linéairement à travers l'épaisseur de la section . Pour une lame rectangulaire , la déformation de cisaillement β à la distance \mathcal{J} du centre de l'épaisseur est donnée par :

$$\beta = 2 \mathcal{J} \left\{ \frac{d\theta}{dx} - \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{dw}{dx} \right\} \quad (5.12)$$

Les paramètres $y, z, \alpha_w, \mathcal{J}$ et \mathcal{J} des expressions (5.11) et (5.12) ont été définies dans le paragraphe 3.4. La variation première et seconde de ϵ_x et β sont données par les expressions (3.25) à (3.30).

En substituant les expressions (5.8), (5.9) et (3.25) à (3.30) dans l'équation (5.10) et en utilisant les propriétés de section suivantes :

$$\int y \, dA = \int z \, dA = \int y \cdot z \, dA = 0 \quad (5.13)$$

$$\int \alpha_w \, dA = \int y \, \alpha_w \, dA = \int z \, \alpha_w \, dA = 0 \quad (5.14)$$

$$\int dA = A ; \int 4 \int^2 dA = J \quad (5.15)$$

$$\int y^2 dA = Iz ; \int z^2 dA = Iy ; \int \rho^2 dA = Io ; \int \alpha w^2 dA = Cw \quad (5.16)$$

$$\int y \cdot \rho^2 dA = Cz ; \int z \cdot \rho^2 dA = Cy ; \int \alpha w \cdot \rho^2 dA = C\Gamma w ; \int \rho^4 dA = C\rho \quad (5.17)$$

Nous aboutissons à une équation qui peut être écrite sous une forme matricielle comme suit :

$$\delta^2 V = -\sum P_i \delta^2 r_i + \int \left\{ \begin{matrix} \delta w_{xx} & \delta v_{xx} & \delta u_x & \delta \theta_{xx} & \delta \theta_x \end{matrix} \right\} [M] \begin{matrix} \delta w \\ \delta v_{xx} \\ \delta u_x \\ \delta \theta_{xx} \\ \delta \theta_x \end{matrix} dx$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \delta w_{xxx} & \delta v_{xxx} & \delta w_{xx} & \delta v_{xx} & \delta w_x & \delta v_x & \delta u_x & \delta \theta_{xx} & \delta \theta_x & \delta \theta \end{matrix} \right\} [N] \begin{matrix} \delta w_{xxx} \\ \delta v_{xxx} \\ \delta w_{xx} \\ \delta v_{xx} \\ \delta w_x \\ \delta v_x \\ \delta u_x \\ \delta \theta_{xx} \\ \delta \theta_x \\ \delta \theta \end{matrix} dx \quad (5.18)$$

Ou [M] et [N] sont des matrices carrées symétriques.
 [M] :matrice contenant uniquement les termes comprenant les propriétés de section du matériau .

[N] :matrice contenant des termes comprenant les propriétés de section et du matériau avec les termes qui définissent les contraintes ou déformations de la poutre avant flambement [13] et [15] .

La variation seconde de l'énergie potentielle totale (5.18) peut s'écrire aussi :

$$\delta^2 V = -\Sigma P_i \delta^2 r_i + \int (SA)^T [M] (SA) dx + \int (SB)^T [N] (SB) dx \quad (5.19)$$

5.3- Formulation en élément fini de l'équation $\delta^2 V$

Pour résoudre l'équation $\delta^2 V$, nous appliquerons la procédure de la méthode des éléments finis. L'élément poutre à parois minces étudié et schématisé dans la figure 5.1, dans laquelle les coordonnées local x , y et z sont choisies, tel que y et Z sont les axes principaux de la section droite et x coïncide avec l'axe des centres de gravité de l'élément. Le déplacement x sera représenté par un champ de déplacement linéaire et les déplacements v , w et θ seront représentés par un champ de déplacement cubique

$$\left. \begin{aligned} \{ u \} &= [N1] \{ a_u \} & \{ v \} &= [N2] \{ a_v \} \\ \{ w \} &= [N2] \{ a_w \} & \{ \theta \} &= [N2] \{ a_\theta \} \end{aligned} \right| \quad (5.20)$$

Dans lesquelles

$$\left. \begin{aligned} [N1] &= [1 - x/L] \\ [N2] &= \left[\begin{array}{cc} 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3 & ; \quad x - 2x^2/L + x^3/L^2 \\ 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3 & ; \quad -x/L + x^2/L^2 \end{array} \right] \end{aligned} \right| \quad (5.21)$$

et les vecteurs des déplacements nodaux , tels que définis dans la figure 5.1 :

$$\left. \begin{aligned} \{au\} &= \{u_i, u_j\} & , \{av\} &= \{v_i, v_{xi}, v_j, v_{xj}\} \\ \{aw\} &= \{w_i, w_{xi}, w_j, w_{xj}\} & , \{a\theta\} &= \{\theta_i, \theta_{xi}, \theta_j, \theta_{xj}\} \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

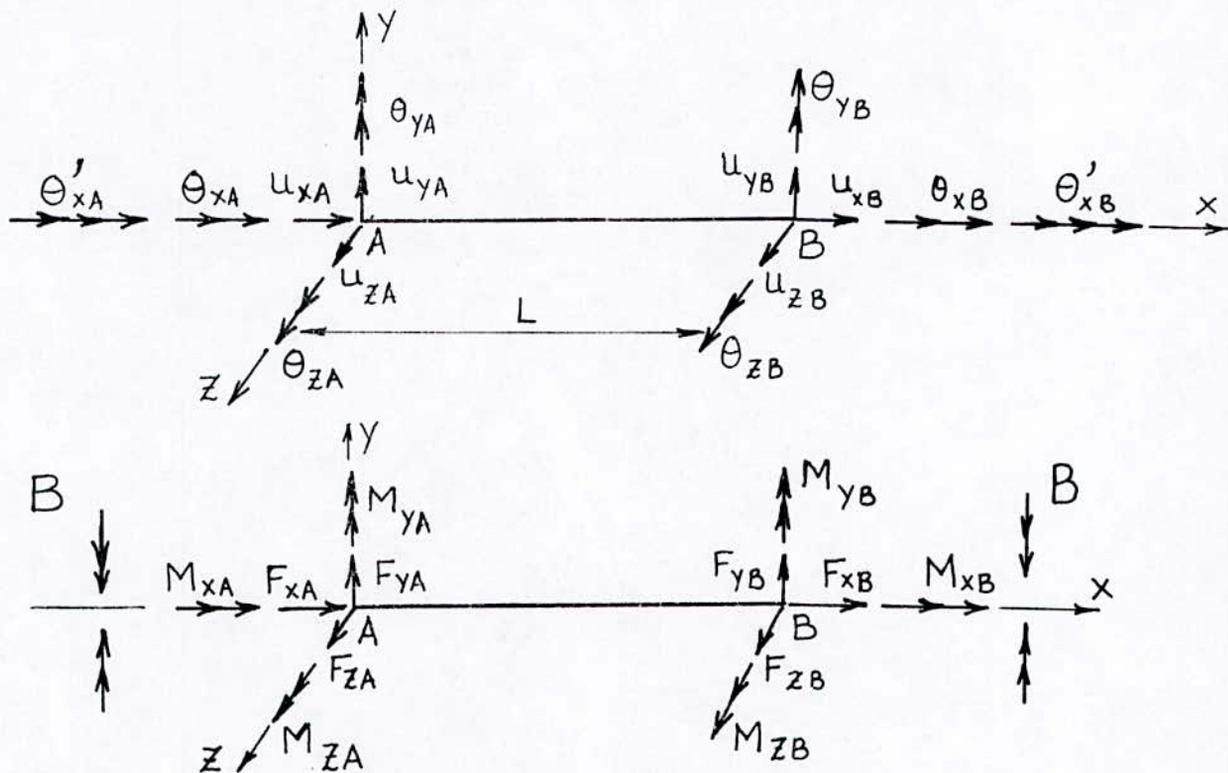


Fig 5.1 Elément fini: (a) degrés de liberté, (b) forces aux noeuds
En utilisant les expressions (5.20), nous pouvons mettre les vecteurs différentielles des déplacements $\{SA\}$ et $\{SB\}$ sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \{ SA \} &= [L1] \{ \delta a \} \\ \{ SB \} &= [L2] \{ \delta a \} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

ou $[L1]$ et $[L2]$ sont des matrices comprenant des termes sous forme de polynôme et $\{ \delta a \}$ étant le vecteur de variations des déplacements nodaux .

Si nous remplaçons l'expression (5.23) dans (5.19) et on intègre sur la longueur de l'élément poutre , nous obtenons

l'expression suivante :

$$\delta^2 V = -\sum P_i \delta^2 r_i + \{\delta a\}^T [KL] \{\delta a\} + \{\delta a\}^T [KG] \{\delta a\} \quad (5.24)$$

[KL] : est la matrice de rigidité linéaire habituelle de l'élément poutre avec l'introduction de nouveaux termes relatifs à la déformation de gauchissement.

[KG] : est la matrice de rigidité géométrique .

Nous pouvons mettre $\delta^2 V$ sous la forme suivante :

$$\delta^2 V = -\sum P_i \delta^2 r_i + \{\delta a\}^T \left[[KL] + [KG] \right] \{\delta a\} \quad (5.25)$$

D'après l'expression (5.2) nous aurons :

$$\delta^2 V = \delta(\delta V) = \{\delta a\}^T \delta \Psi \quad (5.26)$$

Dans laquelle δU est la variation première de la somme des forces généralisées , qui est donnée dans le paragraphe 3.5.5.4 par :

$$\delta U = K^T \delta a - \delta \bar{f} \quad (5.27)$$

ou K^T : est la matrice de rigidité tangente.

En remplaçant (5.27) dans (5.26) , nous aurons :

$$\delta^2 V = \{\delta a\}^T [K^T] \{\delta a\} - \{\delta a\}^T \delta \bar{f} \quad (5.28)$$

Si nous comparons les équations(5.25) et (5.28); nous aurons

$$-\sum P_i \delta^2 r_i = -\{\delta a\}^T \delta \bar{f} \quad (5.29)$$

et

$$[KL] + [KG] = K^T \quad (5.30)$$

Ainsi par analogie , nous avons montré que la matrice de rigidité totale déduite à partir de la variation première de l'équation d'équilibre U est égale à la somme de la matrice de rigidité linéaire $[KL]$ et de la matrice géométrique $[KG]$. Ce résultat nous permet de déduire qu'il n'est pas nécessaire de faire le calcul de la matrice $[KG]$. Nous utiliserons la matrice tangente calculée dans le chapitre 4. En ce qui concerne la variation seconde de l'énergie potentielle des charges extérieures éq 5.29 , nous avons montré au chapitre 3 , que cette quantité s'annule pour toute charge extérieure excepté pour les forces " P " qui s'appliquent à une distance " d " au dessus et " h " à droite du centre de cisaillement ou centre de rotation comme le montre la figure 5.2 .

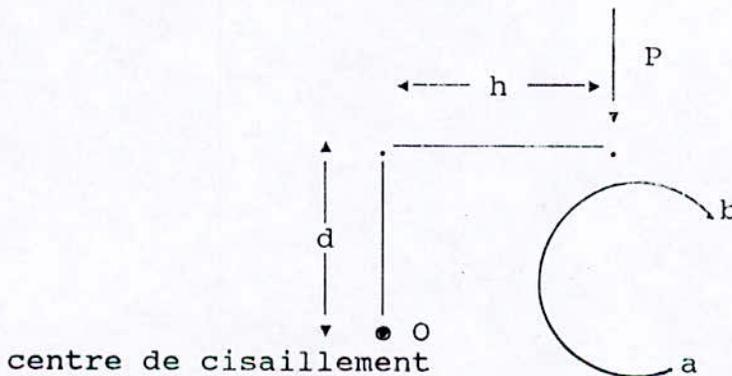


FIG 5.2 . charge excentré par rapport au centre de cisaillement

On rappelle que :

$$P_i \delta^2 r_i = \sum_{i=i}^j (P_y dy + P_z dz)_i \quad (5.31)$$

i et j : étant les noeuds de l'élément poutre .

Ce terme sera introduit dans la matrice de rigidité tangente et ainsi on aboutit à une matrice tangente qui dépend de la

charge P , donnée par la formule (3.69).

$$K_T (P) = K_0 + K_L + K_\sigma - \sum_{i=1}^j (P_y dy + P_z dz)_i \quad (5.32)$$

Finalement , nous avons l'expression de l'équation donnant les conditions de stabilité , qui s'écrit :

$$\left\{ \delta V \right\}_e^2 = \left\{ \delta a \right\}_e^T [K_T (P)]_e \left\{ \delta a \right\}_e = 0 \quad (5.33)$$

L'équation (5.33) fût évaluée pour un élément fini . Donc pour avoir l'équation donnant les conditions critiques de la structure complète , nous devons additionner la contribution de tous les éléments de la structure .

$$\left\{ \delta V \right\}_T^2 = \left\{ \delta a \right\}_T^2 [K_T (P)]_T \left\{ \delta a \right\}_T = 0 \quad (5.34)$$

L'expression (5.34) représente une forme quadratique complète. les charges critiques se présentent quand le déterminant de la matrice de rigidité totale de la structure s'annule , nous avons donc :

$$\text{DET} \left| [K_T (P)]_T \right| = 0 \quad (5.35)$$

L'équation (5.35) représente un problème au valeur propre. La plus petite valeur propre calculée , caractérisera la charge critique et le vecteur propre correspondant défini le mode de flambement de la structure .

5.4- Programmation

5.4.1- Introduction

Les logiciels de calcul en éléments finis qui sont à notre portée, tels que le SAP4 et le SAP80 ,ne comprennent pas les procédures de calcul des systèmes d'équations non-linéaires. Pour cela , nous devons passer par la construction d'un programme de la méthode des éléments finis avec une résolution non-linéaire du système d'équation , pour le cas des structures modélisées en éléments poutres .

Seulement avant d'arriver à la programmation de la résolution de notre système d ' équation , nous avons rencontré une contrainte de calcul, à savoir : l'évaluation des termes des matrices de rigidités .

Vu l'importance des calculs de ces termes , nous étions dans l'obligation de développer un programme de calcul numérique. Alors le travail de programmation est constitué en deux étapes :

- 1) Programmation du calcul des termes des matrices de rigidité.
- 2) Programmation de la méthodes des éléments finis avec une résolution non-linéaire .

Dans les paragraphes suivants , nous présenterons les deux étapes de programmation .

5.4.2- Programmation du calcul des termes de la matrice de rigidité

5.4.2.1- Interprétation des termes de la matrice de rigidité

Le développement de l'équation d'équilibre , nous a conduit à un système d'équations non-linéaires . La matrice de rigidité qui en découle de l'écriture matricielle de ce système d'équation , admet des termes qui se présentent sous la forme d'une intégrale définie de produits de dérivées de déplacements et de polynômes .

Précisant que les dérivées de déplacements $du/dx, d^2v/dx^2, etc$ sont fonctions de la variable d'intégration "x". Donc pour pouvoir intégrer les termes de la matrice de rigidité , il faut remplacer ces dérivées par leurs fonctions explicites . Rappelons que , les déplacements u, v, w et θ sont reliés aux déplacements nodaux par l'intermédiaire de fonction de forme. Il est , donc , de même pour les dérivées de déplacements .

Exemple :

$$u = \sum N_i . a_i \quad (5.36)$$

Où N_i : fonctions de formes à variable x .

a_i : déplacements nodaux .

On obtient aussi par :

$$du/dx = \sum dN_i/dx . a_i \quad (5.37)$$

Finalement , les termes de la matrice de rigidité se présenteront sous la forme d'une somme d'intégrale de produits de polynômes qui sont multiples des déplacements nodaux $u_i, v_i, w_i, .. etc$.

Vu le nombre important d'intégrale de produits polynomiales, il n'est pas pratique de calculer tous ces termes à la main.

Cette contrainte nous a amené à élaborer un programme de calcul numérique de tous les termes de la matrice de rigidité de l'équation d'équilibre et la matrice de rigidité tangente .

5.4.2.2- Présentation des termes de la matrice de rigidité

La construction de la matrice de rigidité et tangente a donné des termes ayant des expressions très longues et dont l'évaluation de ces termes nécessite beaucoup de calcul . Pour une raison de volume du mémoire , nous n'allons pas encombrer le mémoire par l'écriture de tous les termes des matrices K et KT . Néanmoins nous donnons ici , dans ce paragraphe , quelques exemples pour illustrer la forme et la contrainte de calcul de ces termes .

a) Terme de la matrice de rigidité de l'équation d'équilibre

$$\begin{aligned}
 K_{ij} = E \int_V & \left\{ \frac{72}{5} \alpha w^2 \frac{dw}{dx} \frac{dv}{dx} - \frac{12}{3} \alpha w^2 \left(\frac{1+3x}{L} - \frac{4x}{L} \right) \right. \\
 & \left. \frac{d}{dx} \left[\frac{w^3}{dx} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{1+3x}{L} - \frac{4x}{L} \right) \left(\frac{6x^2}{L^2} - \frac{6x}{L} \right) \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} \right] \right. \\
 + G \int_V & \left\{ 4 \int^2 \left(\frac{6x}{L} - \frac{4}{L} \right) \left(\frac{12x^3}{L^3} - \frac{6}{L} \right) \frac{dw}{dx} \frac{dv}{dx} - 4 \int^2 \left(\frac{1+3x}{L} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{4x}{L} \right) \left(\frac{12x^3}{L^3} - \frac{6}{L} \right) \frac{d}{dx} \left[\frac{w^2}{dx} \frac{dv}{dx} \right] \right\} dv \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

En intégrant sur la surface de la section droite de la poutre on écrit :

$$\begin{aligned}
K_{ij} = & \frac{72}{5L} E Cw \int_0^L dw/dx \cdot dv/dx \cdot dx - \frac{12}{3L} E Cw \int_0^L (1+3x^2/L^2 - 4x/L) \cdot \\
& d^3 w/dx^3 \cdot dv/dx \cdot dx - \frac{1}{2} E A \int_0^L (1+3x^2/L^2 - 4x/L) (6x^2/L^2 - 6x/L) dv/dx \\
& dw/dx \cdot dx + GJ \int_0^L (6x^2/L^2 - 4/L) (12x^3/L^3 - 6/L^2) dw/dx \cdot dv/dx \cdot dx \\
& - GJ \int_0^L (1+3x^2/L^2 - 4x/L) (12x^3/L^3 - 6/L^2) d^2 w/dx^2 \cdot dv/dx \cdot dx \quad (5.39)
\end{aligned}$$

b) Terme de la matrice de rigidité tangente

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{KT} = & \frac{36}{4L} E Cw \int_0^L (dw/dx)^2 \cdot dx - \frac{12}{L^2} E Cw \int_0^L (1+3x^2/L^2 - 4x/L) \cdot dw/dx \cdot \\
& d^3 w/dx^3 \cdot dx + E Cw \int_0^L (1+3x^2/L^2 - 4x/L) \cdot (d^2 w/dx^2)^2 \cdot dx + E I_y \int_0^L (-4/L \\
& - 6x/L) \cdot \theta^2 \cdot dx + E A \int_0^L (1+3x^2/L^2 - 4x/L) \cdot (dv/dx)^2 \cdot dx + GJ \int_0^L (6x^2/L^2 \\
& - 4/L) \cdot (dw/dx)^2 \cdot dx - 2 \cdot GJ \int_0^L (6x^2/L^2 - 4/L) \cdot (1+3x^2/L^2 - 4x/L) dw/dx \cdot \\
& dv/dx \cdot dx + GJ \int_0^L (1+3x^2/L^2 - 4x/L) \cdot (d^2 w/dx^2)^2 \cdot dx \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale par rapport à "x", nous devons exprimer v, w et θ par leurs expressions ainsi que les dérivées. Alors :

$$\begin{aligned}
dv/dx = & dN1/dx \cdot v1 + dN2/dx \cdot vx1 + dN3/dx \cdot v2 \\
& + dN4/dx \cdot vx2 \quad (5.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2 w/dx^2 = & d^2 N1/dx^2 \cdot w1 + d^2 N2/dx^2 \cdot wx1 + d^2 N3/dx^2 \cdot w2 \\
& + d^2 N4/dx^2 \cdot wx2 \quad (5.42)
\end{aligned}$$

N1, N2, N3 et N4 sont les fonctions de forme.

Alors , après avoir remplacé ces expressions sous le signe de l'intégrale , nous devons faire les produits nécessaires avant d'intégrer par rapport à la variable "x" .

A la fin , nous aurons des quantités qui seront multiples des déplacements nodaux considérés comme les variables du problème .

5.4.2.3- Description du programme

Le programme que nous avons développé calcul le produit de n polynômes avec son intégrale . A cause du volume important de calcul , ce programme a été conçu avec le maximum de précaution pour épargner le moindre soupçon d'erreur dans les termes de la matrice de rigidité .

Ce programme de calcul de multiplication et intégrale de plusieurs polynômes, a été adapté aux polynômes se présentant sous la forme de fonction de forme .

Soit :

$$I = \int_0^L \left(\frac{A1}{B1} \cdot \frac{1}{L} + \frac{A2}{B2} \cdot \frac{x}{L} + \frac{A3}{B3} \cdot \frac{x^2}{L} + \dots \text{etc} \right) \cdot \left(\frac{A1'}{B1'} \cdot \frac{1}{L} + \frac{A2'}{B2'} \cdot \frac{x}{L} + \frac{A3'}{B3'} \cdot \frac{x^2}{L} + \dots \text{etc} \right) \dots \dots \dots$$

$$\cdot \left(\frac{A1^n}{B1^n} \cdot \frac{1}{L} + \frac{A2^n}{B2^n} \cdot \frac{x}{L} + \frac{A3^n}{B3^n} \cdot \frac{x^2}{L} + \dots \text{etc} \right) \cdot dx \quad (5.43)$$

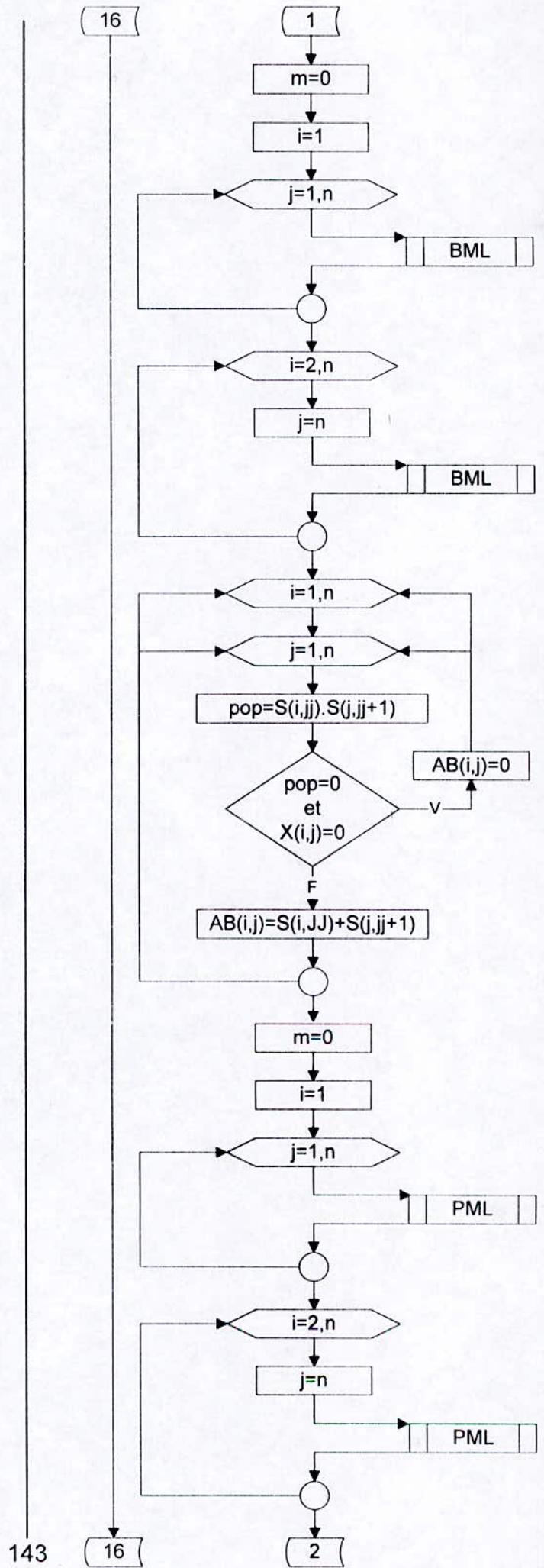
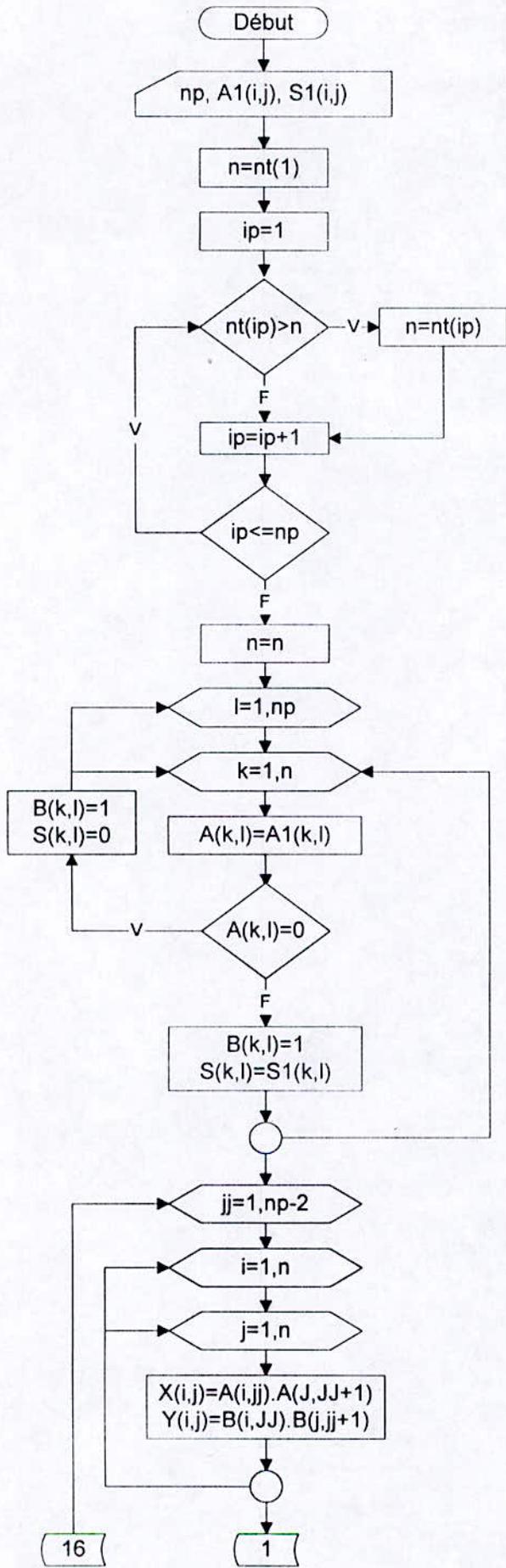
Le programme est conçu en deux parties . La première partie calcule uniquement le produit des (n-1) polynômes.

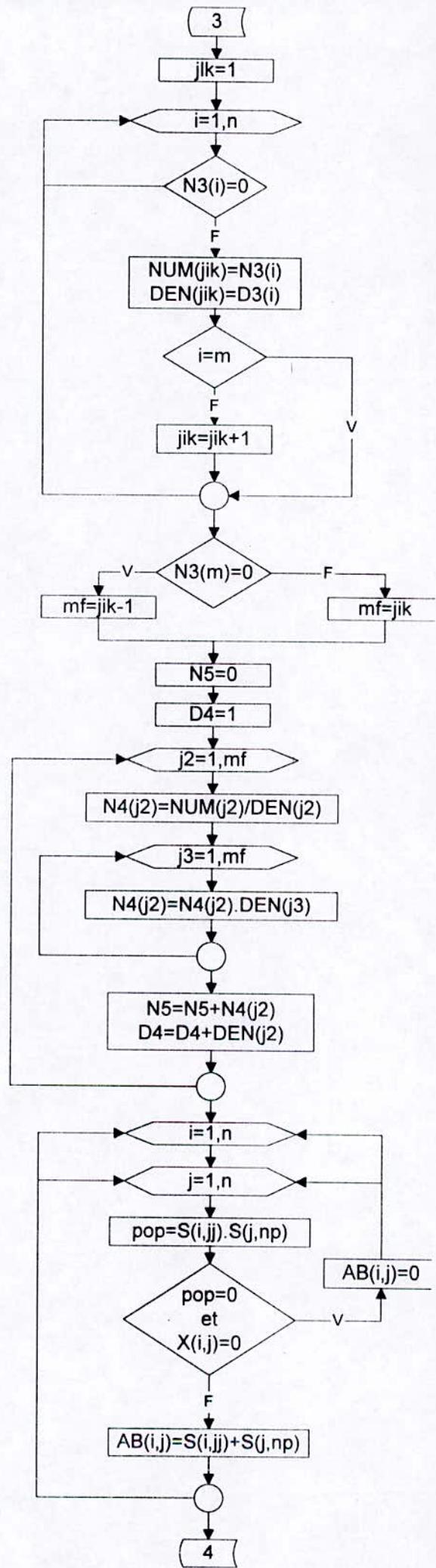
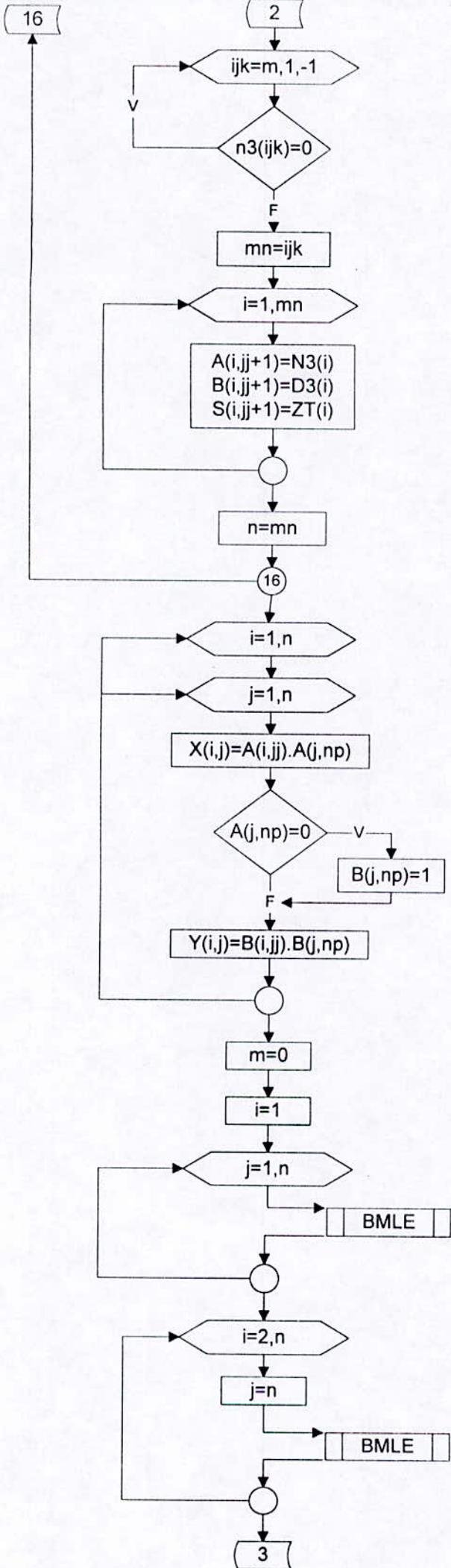
Le produit est basé sur un calcul de multiplication entre deux polynômes . Donc , le calcul commence par le produit du premier et du second polynôme. Ensuite, le polynôme résultant sera multiplié avec le troisième et ainsi de suite jusqu'au (n-1)ième polynome. Ce calcul est inscrit dans une boucle fermée. On utilise dans cette partie du programme , un sous-programme qui additionne les monômes de mêmes degrés et un autre sous-programme qui calcule les exposants du paramètres longueurs .

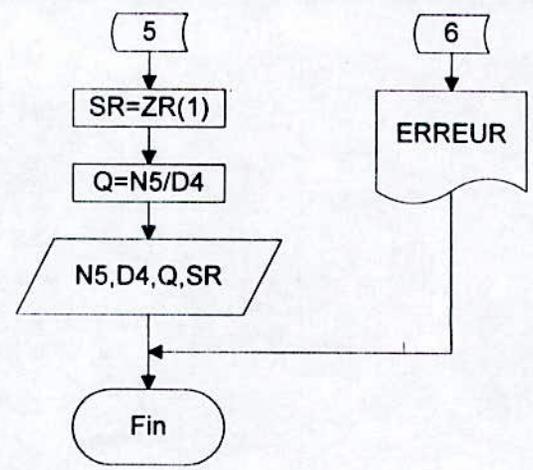
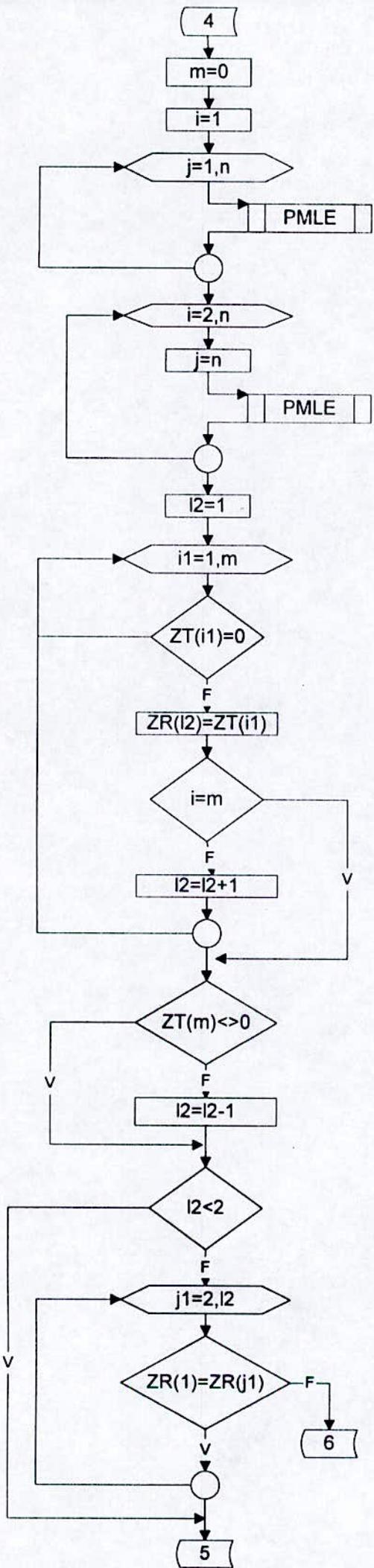
La seconde partie traite la multiplication du polynôme , résultant du produit des (n-1) polynômes , avec le dernier polynôme et en même temps , calcule l'intégrale du résultat final . Cette partie ,aussi, utilise des sous-programmes qui sont presque identiques aux précédents pour additionner les monômes et calculer les exposants du paramètre longueurs. Ils comprennent, en plus, le calcul de l'intégrale "x" et le remplacement de cette variable par le paramètre longueurs.

5.4.2.4- Organigramme

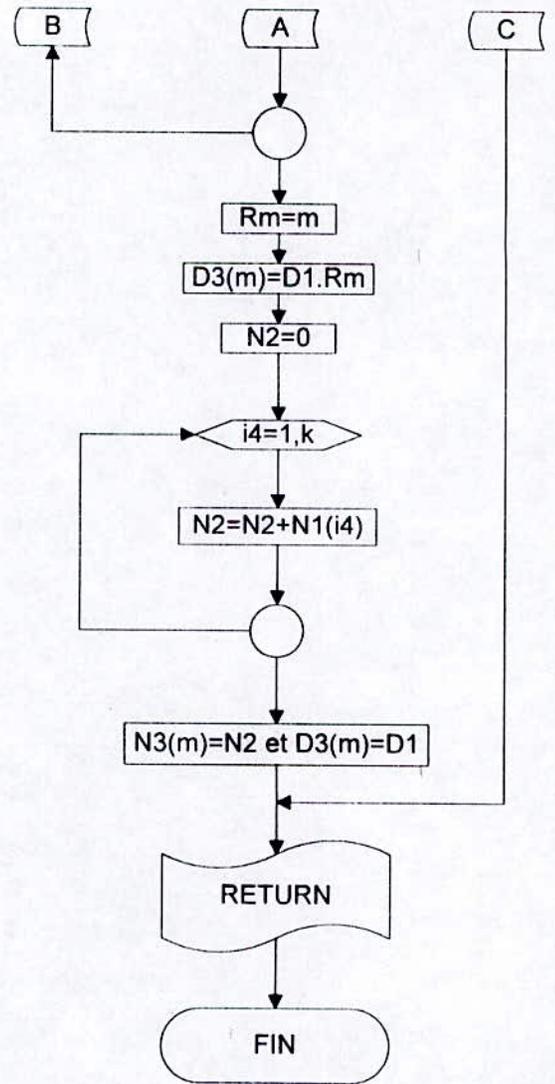
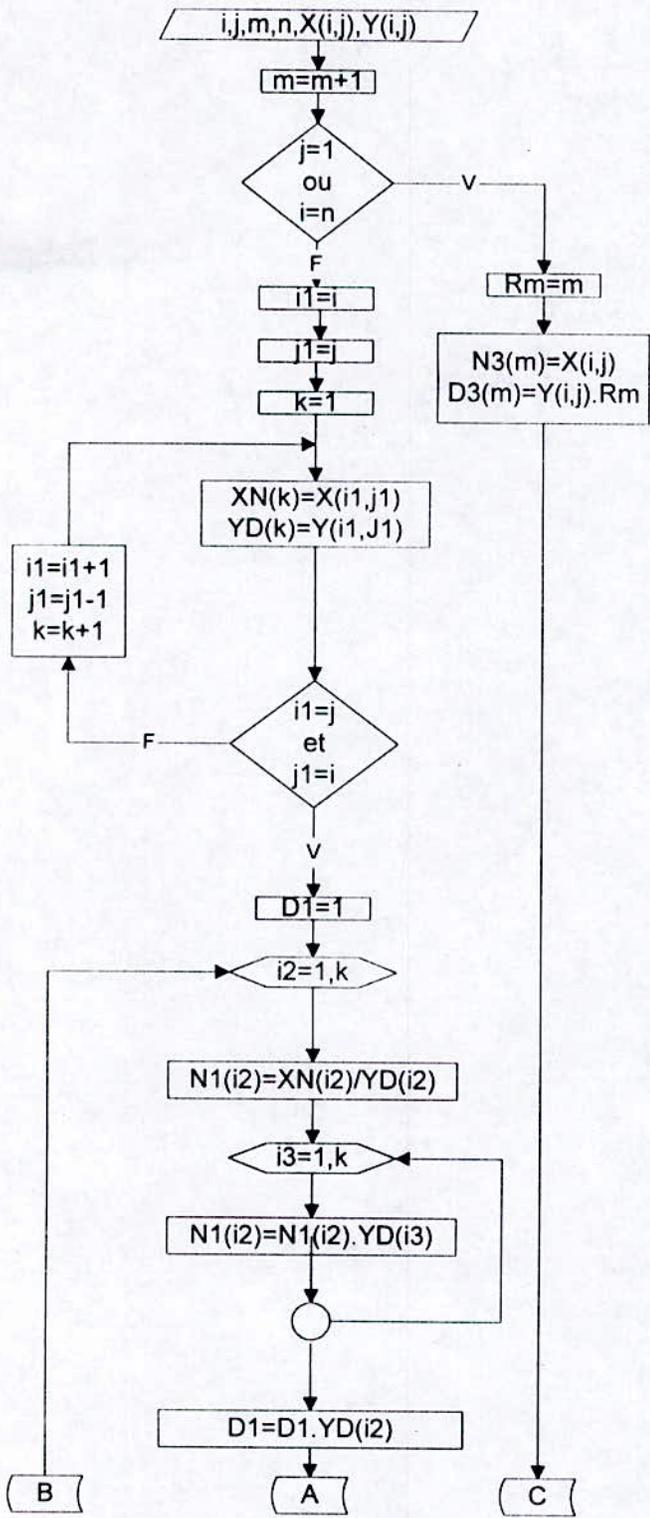
ORGANIGRAMME







ORGANIGRAMME DE LA SOUBROUTINE BMLE



5.4.3- Programmation du calcul de l'équation d'équilibre

5.4.3.1- Introduction

D'une façon générale , nous dirons que dans ce thème nous avons développé un programme de la méthode des éléments finis pour l'analyse du comportement non-linéaire des structures en poutre à parois minces. Le caractère de la non-linéarité du problème conduit à un calcul continu de l'équilibre de la structure sous un chargement évolutif .

Donc à travers ce programme , nous pouvons atteindre deux objectifs de calcul qui intéressent ce genre de structure . C'est celui du calcul de l'état d'équilibre pour un chargement donné. Ensuite, c'est le calcul des états critiques de la structure jusqu'à la rupture .

Le programme est conçu sur la base d'une procédure de calcul itérative pour résoudre le système d'équation non-linéaire et incrémental pour suivre l'état de la structure avec la variation de la charge .

A travers le chapitre trois , nous reconnaissons facilement le type de méthode de résolution du système d'équation d'équilibre . Nous avons opté pour la méthode de la tangente appelée Méthode de NEWTON RAPHSON . Ensuite, nous inscrivons cette méthode dans un processus de calcul incrémental global de la méthode des éléments finis .

Concernant l'architecture du programme , elle se présente presque de la même manière que celle des programmes de la méthode des éléments finis existants dans la littérature .

Seulement, nous précisons que toutes les parties du programme,

sans exception, ont été montées complètement par nos soins .
Dans la suite , nous allons décrire succinctement les étapes
du programme conçu .

5.4.3.2- Description du programme

Le programme est structuré comme suit :

Nous avons un programme principal qui enchaîne l'exécution
des différentes étapes du processus de calcul incrémental de
la méthode des éléments finis . Ensuite , nous trouvons des
sous-programmes qui renferment les procédures de lecture des
données, de calculs des paramètres du système, de résolution
et d'impression des résultats .

Sous-programme INTRO

En résumé, ce sous-programme est destiné à gérer toutes les
données essentielles pour le calcul d'une structure .

IL lit en premier les données dans un fichier créé au
préalable . Ensuite , il crée les tables de connections , de
position et de localisation . Il calcule ,aussi , le vecteur
des forces nodales dues au poids propre de la structure .
Ensuite, il sera cumulé avec le vecteur chargement imposé .
En dernier , il fait le choix du type de la section droite
et calcule les caractéristiques de la section , en faisant
appel à un sous-programme approprié .

Sous-programme CAR

IL existe dans le programme , plusieurs sous-programmes qui
calculent toutes les caractéristiques des sections droites
en fonction du choix de la forme de la section droite . Nous
avons sélectionné un certain nombre de formes de section qui

sont très utilisées dans la pratique .

Sous-programme CONSTNL

Ce sous-programme est destiné principalement au calcul de la matrice de rigidité tangente et du vecteur résiduel .

Pour calculer ces quantités , le sous-programme fait appel à d'autres sous-programmes . Parmi eux , on trouve ceux qui comprennent le calcul des sous-matrices de rigidité , on a le sous-programme de la matrice de transformation des repères et en dernier nous avons les sous-programmes qui font le calcul algébrique des matrices .

Le calcul se fait d'une façon élémentaire , ensuite il sera procédé à l'assemblage des entités calculées .

Sous-programme LIMIT

Ce sous-programme est conçu pour lire , en premier lieu, les conditions aux limites imposés à la structure . Ensuite , il doit transformer les termes diagonaux de la matrice de rigidité correspondant aux degrés de liberté imposés par la méthode du terme diagonal dominant .

Sous-programme RESOL

Ce sous-programme renferme la méthode de résolution du système d'équation linéaire qui est : " la méthode de GAUSS-JORDAN " .

Sous-programme TEST

IL comprend le processus du test de convergence en déplacement de la solution trouvée à la ième itération . Nous avons choisi la norme 1 pour tester la précision des corrections des déplacements calculés .

Sous-programmes CMR1,CMR2,CMR3,CMR4 et CMRT4

Se sont les sous-programmes qui renferment le calcul des termes des sous-matrices de la matrice de rigidité de l'équation d'équilibre et de tangente .

Sous-programme TRANSFER

IL comprend le calcul de la matrice de transformation des repères .

Sous-programme SOMMAT

Ce sous-programme calcule la somme de deux matrices .

Sous-programme PROMAT

Ce sous-programme fait le produit de deux matrices .

Sous-programme PROMAVEC

Ce sous-programme calcule le produit d'une matrice par un vecteur .

Sous-programme SOUSVEC

Ce sous-programme calcule la soustraction de deux vecteurs .

Sous-programme TRANSPOS

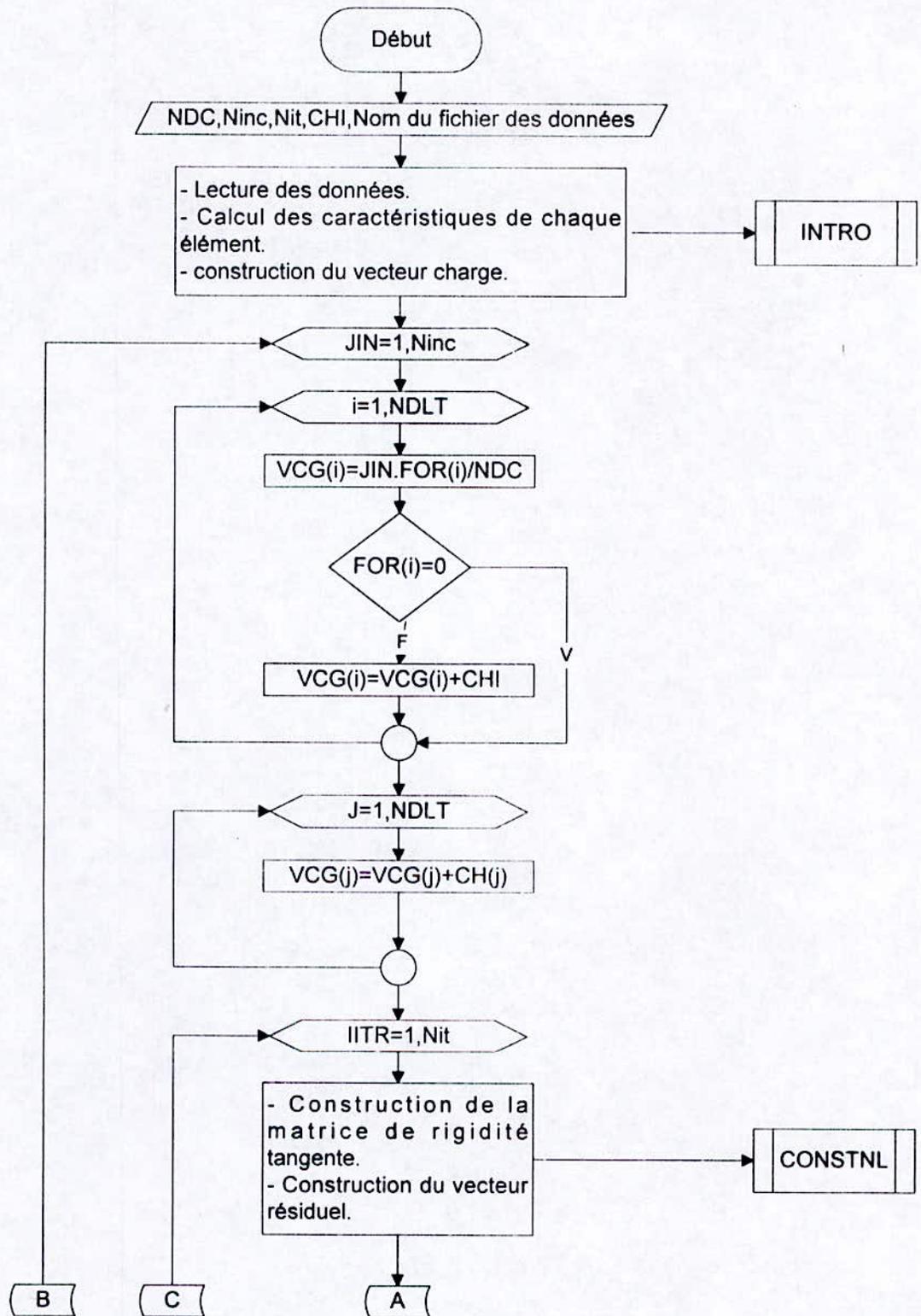
Ce sous-programme fait la transposée d'une matrice .

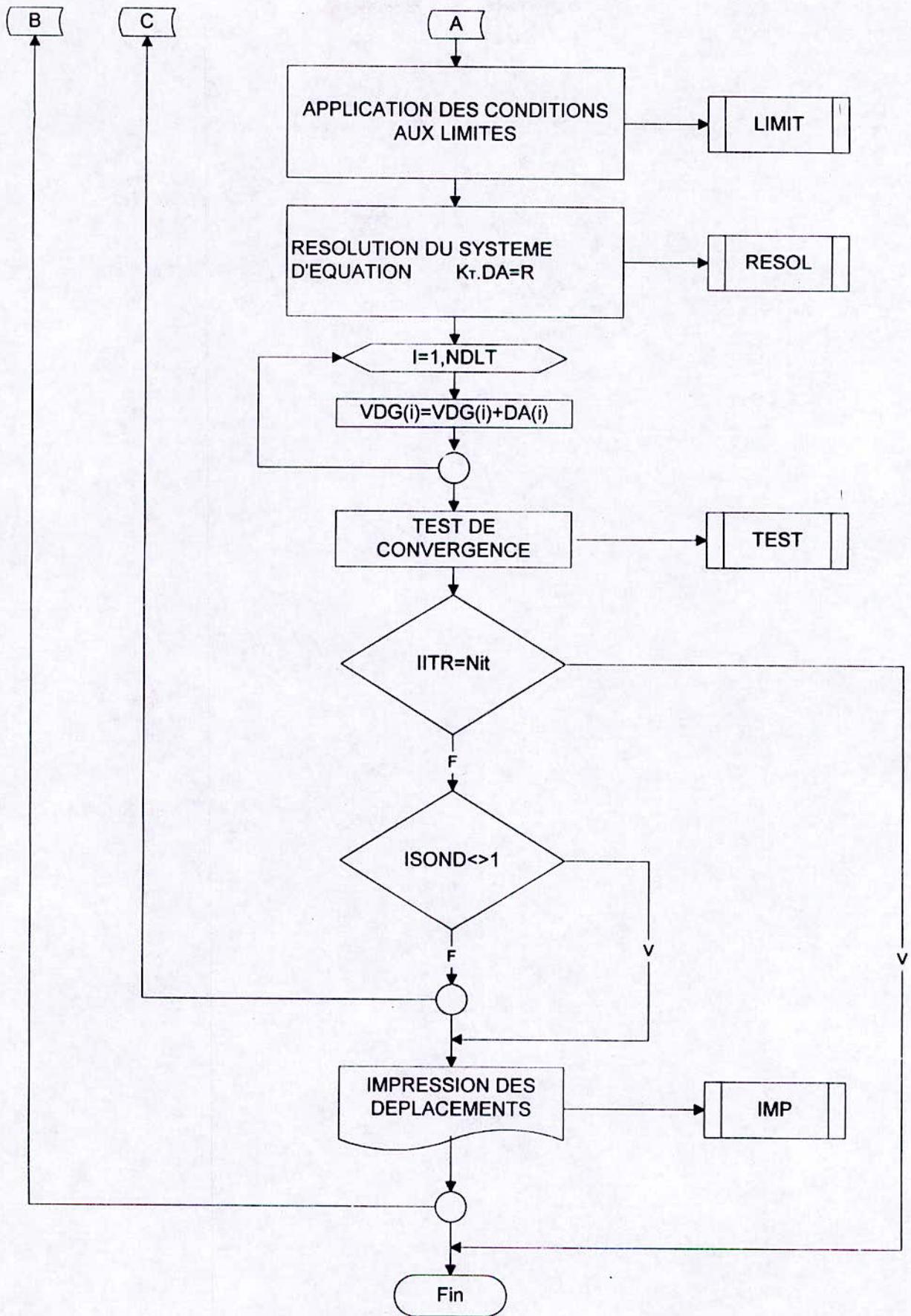
Sous-programme IMP

Ce sous-programme imprime les résultats dans un fichier créé par la sousroutine INTRO .

5.4.3.3- Organigramme

ORGANIGRAMME DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS





5.4.3.4 - Description du fichier des données

D'une manière générale, le fichier des données doit se présenter sous la forme suivante :

NELT	NNT	NCAR	
EL1	N1	N2	ICAR
EL2	N2	N3	ICAR
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
ELi	Ni	Ni+1	ICAR
N1	X1	Y1	Z1
N2	X2	Y2	Z2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
Ni	Xi	Yi	Zi
SEC			
H,tw,B1,t1,B2,t2,SN,SM,E,G,VM			
NNC			
NN1	NF1		
K1	VCE1		
.	.		
.	.		
.	.		
NN2	NF2		
K2	VCE2		
.	.		
.	.		
.	.		
NNi	NFi		
Ki	VCEi		
.	.		
.	.		
.	.		
NND			
NN1	ND1		
K1	VDE1		
.	.		
.	.		
.	.		
NN2	ND2		
K2	VDE2		
.	.		
.	.		
.	.		
NNi	NDi		
Ki	VDEi		
.	.		
.	.		
.	.		

Interprétation des paramètres:

NELT : Nombre d'éléments total de la structure
NNT : Nombre de noeuds total de la structure
NCAR : Nombre de caractéristique de section différentes
ELi : Numéro du ième élément
Ni : Numéro du ième noeud
ICAR : Numéro de la caractéristique de la section de l'élément
Xi : Coordonnée du noeud i suivant x
Yi : Coordonnée du noeud i suivant Y
Zi : Coordonnée du noeud i suivant Z
SEC : Numéro du type de la section droite
H : Hauteur de l'âme
tw : Epaisseur de l'âme
B1 : Largeur de la semelle supérieure
t1 : Epaisseur de la semelle supérieure
B2 : Largeur de la semelle inférieure
t2 : Epaisseur de la semelle inférieure
SN : Position du centre de gravité par rapport à l'âme/y
SM : Position du centre de gravité par rapport à l'âme/Z
E : Module d'élasticité longitudinale
G : Module d'élasticité transversale
VM : Masse volumique du métal
NNC : Nombre de noeuds chargés
NNi : Numéro du noeud chargé
NFi : Nombre de forces imposées sur le noeud i
Ki : Direction d'action de la force donnée
VCEi : Intensité de la charge appliquée au noeud i à la direction Ki
NND : Nombre de noeuds à déplacements imposés
NNi : Numéro du noeud à déplacements imposés
NDi : Nombre de déplacements imposés sur le noeud i
Ki : Direction du déplacement imposé
VDEi : Valeur du déplacement imposé au noeud i à la direction Ki

5.4.4- Expérimentation numérique du programme MEF

5.4.4.1- Introduction

Après avoir mis en oeuvre ce programme de la méthode des éléments finis pour l'analyse du comportement non-linéaire des structures, il est logique, avant de le mettre en exploitation, de l'essayer sur des exemples dont les données essentielles sont connues ainsi que les résultats numériques et mieux encore s'il existe des résultats expérimentaux .

Dans la littérature , nous n'avons pas beaucoup d'exemples sur les problèmes du comportement géométrique non-linéaire . On peut citer les cas des problèmes qui traitent du comportement non-linéaire . Nous avons les structures à comportement non-linéaire du matériau. IL y a des structures à comportement géométrique non-linéaire à grands déplacements et petites déformations. Et en fin,nous avons les structures à comportement géométrique non-linéaire à larges déplacements et petites déformations . Nous ,nous avons travaillé sur le deuxième cas de comportement non-linéaire .

Pour ce faire,nous avons choisi un exemple de référence très connu et très utilisé dans la littérature . Où , cet exemple a été traité avec trois sortes d'études . Nous avons des résultats analytiques,expérimentales et numériques.Tous sont en parfaite concordance . C'est la structure de " WILLIAM'S TOGGLE " .IL est utile de rappeler,ici,certaines spécificités relatives à la conception de notre programme.Le lecteur peut bien constater que pendant la formulation de l'équation d'équilibre, nous n'avons opéré aucune simplification de ses

équations de base . Ceci sous entend , que nous avons choisi de tenir compte du cas général des problèmes de structures à poutres de section droite ouverte .

Ce choix nous a causé un problème de taille du programme qui donne des temps d'exécution très grands . Aussi , il nous évite de prendre des exemples dont le nombre des variables du problème sont importants .

IL faut préciser que ceux-ci n'est pas un inconvénient de l'étude . Seulement pour nous , il est devenu un obstacle du moment que nous ne pouvons pas prendre à l'essai numérique plusieurs exemples et surtout les cas où la taille du problème est très importante . Donc, il y a deux contraintes de l'expérimentation numérique . IL y a la contrainte de la taille de l'exécutable. Ensuite, il y a la contrainte du temps d'exécution. IL faut rappeler que l'expérimentation numérique nécessite beaucoup d'essais en faisant varier une fois le nombre de la discrétisation , une autre fois le pas d'incréméntation et peut être les paramètres initiales du problème .

Dans les chapitres de développement , nous n'avons pas voulu encombrer le mémoire en ajoutant la description d'un travail additionnel que nous avons fait pour palier au problème du volume de l'exécutable et du temps d'exécution des applications . Ce travail consiste à reformer complètement toutes les matrices de rigidité et tangente .

La nouvelle construction est justifiée par la considération de la linéarisation des déplacements qui interviennent dans la formulation de l'équation d'équilibre .

Donc , on peut dire que nous avons deux formulations de

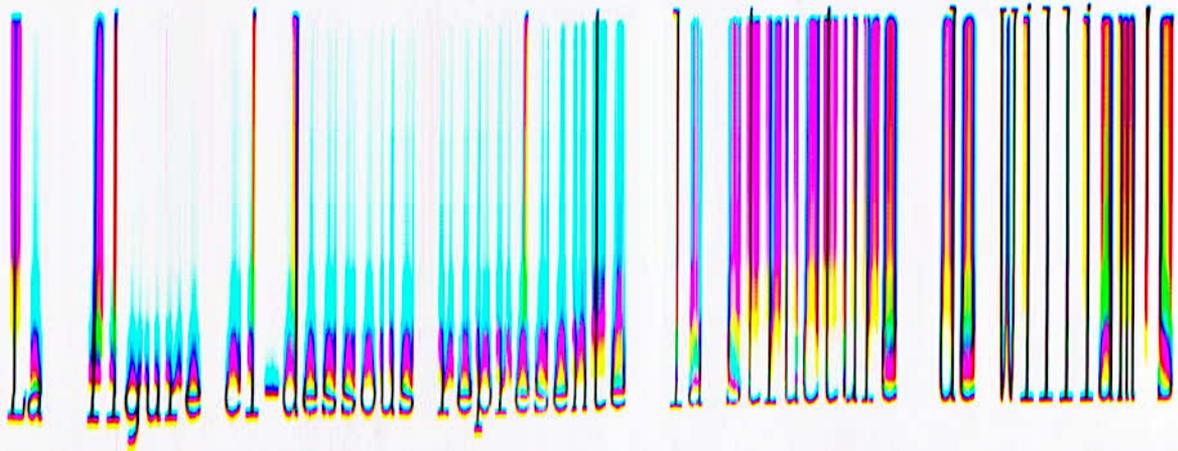
l'équation d'équilibre ou bien nous avons deux variantes .
La première est celle qui admet des matrices dont les déplacements de leurs termes ne sont pas linéarisés et la seconde est conçu avec des matrices dont les déplacements de leurs termes sont linéarisés .

Evidemment , nous avons fait les essais des applications surtout avec la seconde variante parce qu'elle offre des temps d'exécution moins importants que la première .

De plus, l'exemple référence que nous avons choisi, nous donne la possibilité de faire beaucoup d'essais en faisant varier les paramètres spécifiques aux problèmes non-linéaires des structures, tels que le nombre des éléments de discrétisation et le pas d'incréméntation . Cet exemple se présente comme une structure simple avec des caractéristiques géométriques et conditions aux limites simples .

Finalement, l'appréciation de la validité de notre formulation et la bonne construction de notre programme va se baser , essentiellement , sur l'expérimentation numérique de cet exemple . En rappelant que nous ne disposons pas de beaucoup de temps pour élargir cette expérimentation numérique à d'autres exemples numérique présentant les contraintes sus-mentionnées .

5.4.4.2- Présentation de l'exemple référence



Toggle . En 1964 , elle a été étudiée analytiquement et expérimentalement par ce chercheur . Plus tard , elle a été reprise pour ~~une~~ étude numérique par ~~d'autres~~ chercheurs, Wood et Zienkiewicz en 1977 , et Papadrakakis en 1981 . Cet exemple a été utilisé comme une référence pour tester les algorithmes et tracer ainsi la réponse charge-déplacement . La structure se présente, donc, comme deux poutres encastées disposées tel que le montre la figure , soumise à une charge concentrée au milieu . Les deux poutres ont les mêmes dimensions . Elles ont une section droite rectangulaire dont la largeur est de 19,1 mm et de hauteur 6,17 mm . Le matériau avec lequel est fait les poutres , c'est de l'Aluminium de module d'élasticité longitudinale $E= 7100\text{daN}$. Les conditions aux limites de la structure sont données pour les deux encastements. Aucun déplacement n'est permis à ces deux noeuds .

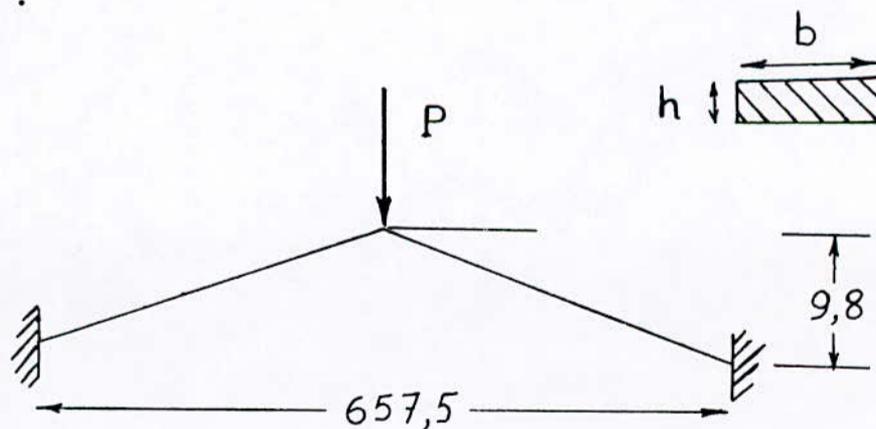


Figure 5.3 : Structure de William's Toggle

5.4.4.3- Résultat et Interprétation sur l'exemple de la structure de William's Toggle

Cette interprétation est basée sur trois graphes des résultats de la variante de l'équation d'équilibre avec des matrices admettant des termes dont les déplacements sont linéarisés. Dans les trois cas, les courbes des différentes discrétisation suivent, presque parfaitement, l'allure de la courbe expérimental. Nous pouvons déduire alors que les résultats de notre formulation concordent avec une précision avec les résultats analytiques et expérimentaux. Ceci constitue un élément d'appréciation très valable pour valider la formulation de notre équation d'équilibre et la construction de notre programme.

Néanmoins, il faut, ici, ajouter des précisions relatives aux conditions de l'expérimentation et les remarques qui sont relevés sur les résultats trouvés.

En premier, nous signalons que nous sommes entrain de comparer nos résultats par rapport à ceux de la réf. [31], uniquement dans la zone pré-critique. C'est à dire nous étudions le comportement de la structure dans la zone pré-critique.

Alors, nous considérons la partie de la courbe charge-déplacement jusqu'au premier palier d'instabilité. Ce point se situe aux coordonnées $P = 15,5$ daN et $W = 6$ mm.

Parmi ces courbes nous essayons de choisir les paramètres de calcul qui nous permettent d'être plus exactement sur la courbe expérimentale. Nous pouvons constater que, plus on augmente la grandeur du pas d'incrémentation plus nous avons la peine d'atteindre le palier d'instabilité.

Nous voyons par exemple que pour le pas d'incrémentation de 1 daN , la convergence est limitée pour des niveaux de chargement bien avant d'atteindre le point critique . Nous observons, aussi, que la seule courbe de la discrétisation en 4 éléments(ou 2 élts.) prend un petit écart par rapport à la courbe expérimentale à partir du niveau de chargement de 10,5 daN . Par contre les courbes des discrétisations 6 , 8 et 10 éléments semblent suivre l'allure de la courbe expérimentale jusqu'à la limite d'instabilité sans qu'on observe le moindre écart appréciable entre ces courbes et la courbe expérimentale .

En dernier , nous remarquons que plus on diminue la grandeur du pas d'incrémentation plus on atteint le point d'instabilité de la structure et les courbes se superposent sur la courbe expérimentale jusqu'au palier d'instabilité et au delà , nous notons une perturbation de la solution de convergence .

En conclusion, pour l'expérimentation de cette variante, nous déduisons que les solutions des points d'équilibre sont plus exactes lorsque nous procédons à une discrétisation plus fine et un calcul avec un petit pas d'incrémentation. Cas de la courbe avec une discrétisation en dix éléments et un pas d'incrémentation de 0,125 daN . Aussi , nous déduisons qu'apparemment la procédure de calcul incrémental basée sur la méthode de Newton Raphson ne permet pas de suivre l'évolution de la courbe charge-déplacement au delà du premier palier d'instabilité .

Malgré que la variante , avec des matrices dont les déplacements ne sont pas linéarisés , donne des temps

d'exécution très grands, nous avons mis à l'essai cette variante en faisant un calcul avec une discrétisation en deux éléments . On aboutit aux conclusions suivantes :

Les résultats obtenus avec cette variante sont très proches de la courbe expérimentale que ceux de la variante avec matrices dont les déplacements sont linéarisés avec une discrétisation de 2 et 4 éléments , et pour le même pas d'incrémentation Pas = 1 daN .

Plus précisément , la courbe obtenue par la variante à déplacements non-linéarisés (discrétisation en 2 élts) se trouve sur la courbe de la variante à déplacements linéarisés avec une discrétisation en six éléments .

En conclusion, nous déduisons que la première variante donne des résultats plus précis que la deuxième variante .

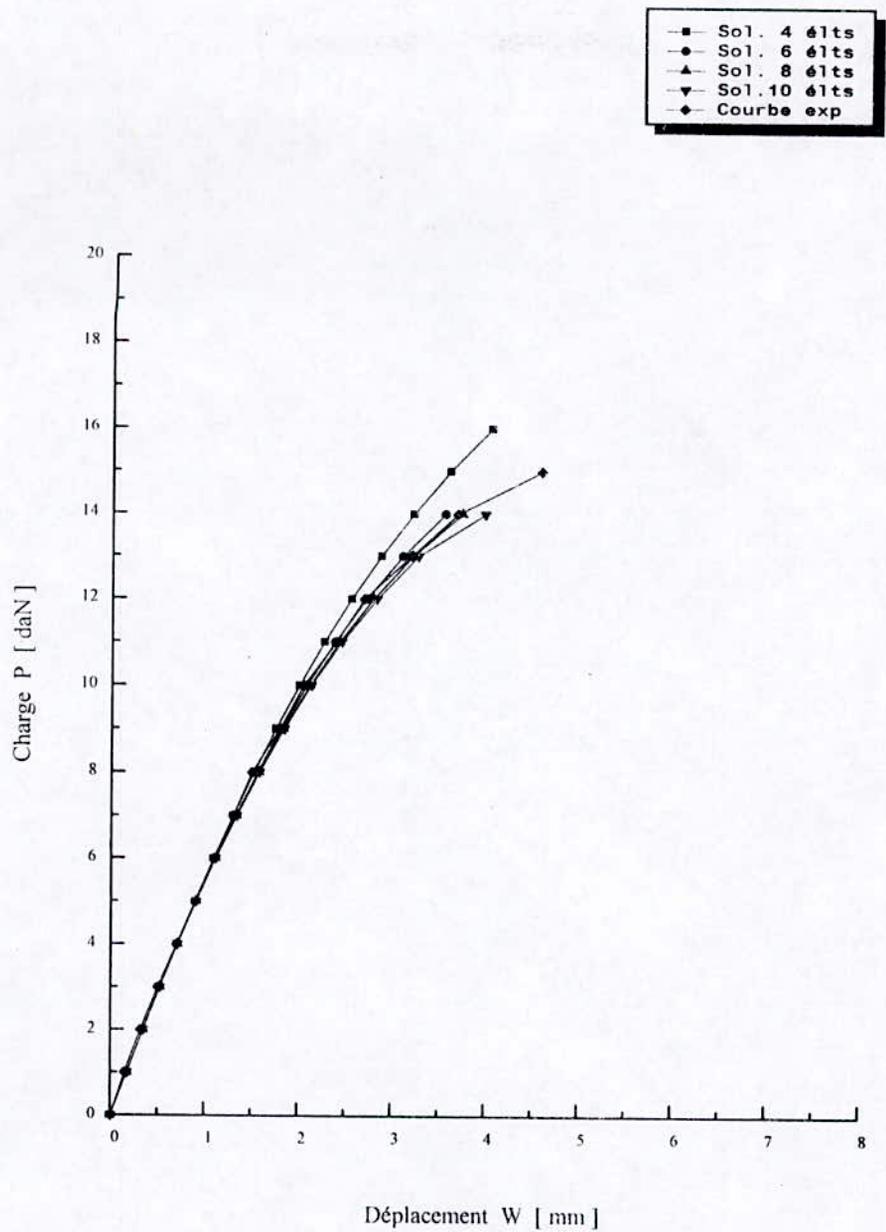


Figure 5.4 : La courbe charge-déplacement de la structure de Williams Toggle . Variante avec des déplacements linéarisés et résolution par la Méthode de Newton Raphson. Pas d'incrémentation 1 daN.

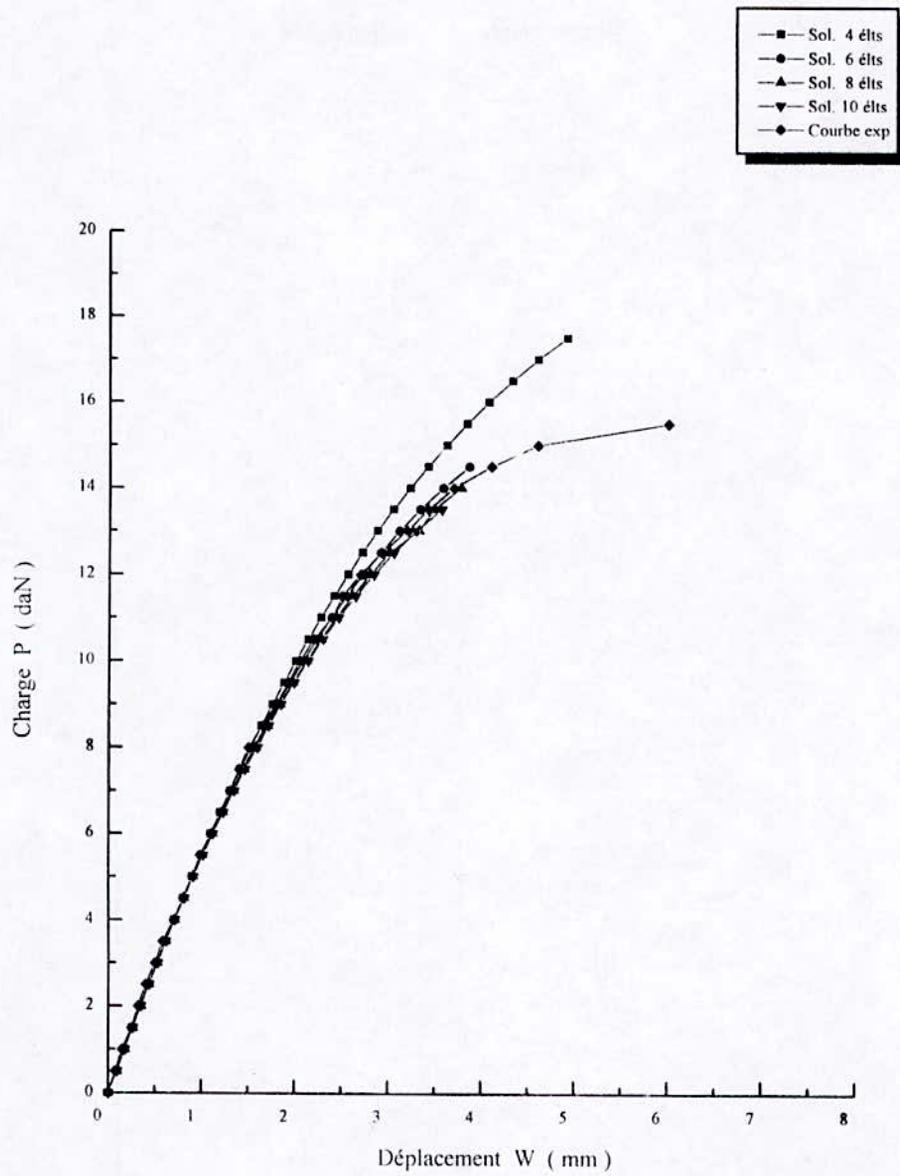


Figure 5.5 : La courbe charge-déplacement de la structure de Williams Toggle . Variante avec des déplacements linéarisés et résolution par la Méthode de Newton Raphson. Pas d'incrémentation 0.25 daN.

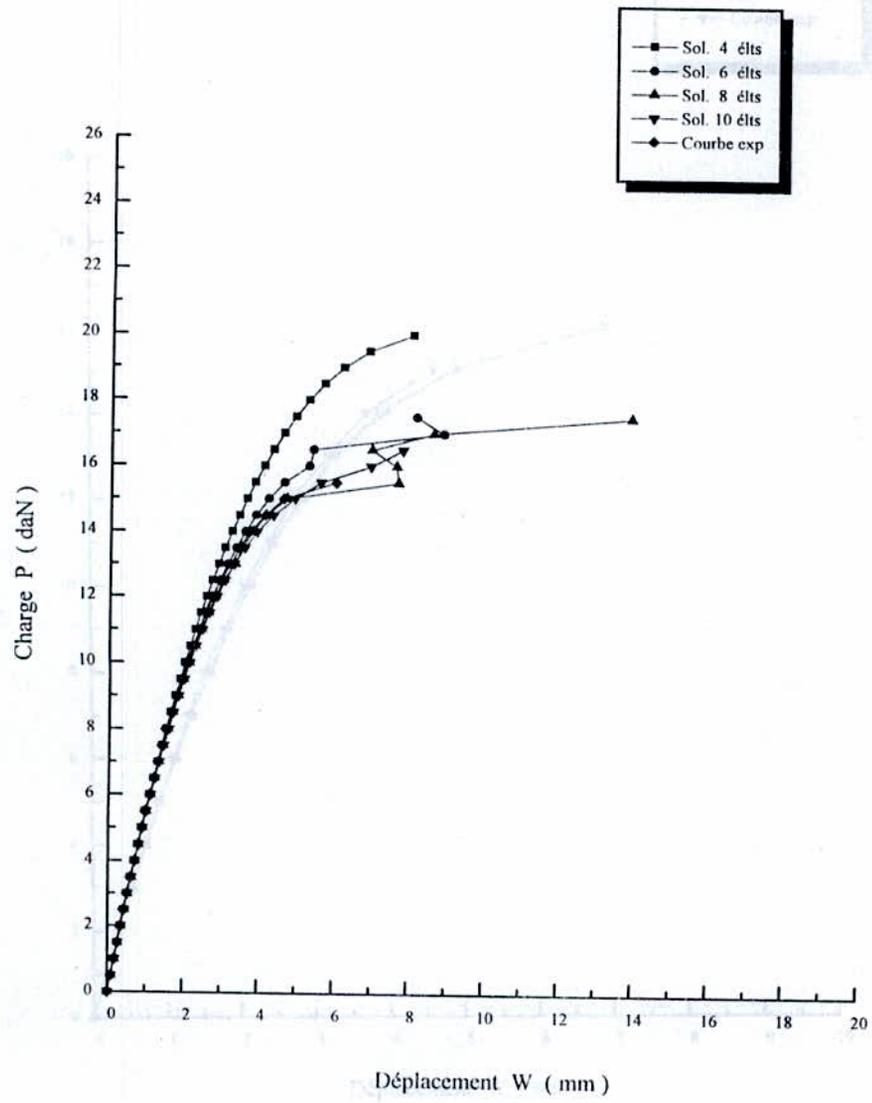


Figure 5.6 : La courbe charge-déplacement de la structure de Williams Toggle . Variante avec des déplacements linéarisés et résolution par la Méthode de Newton Raphson. Pas d'incrémentatation 0.125 daN.

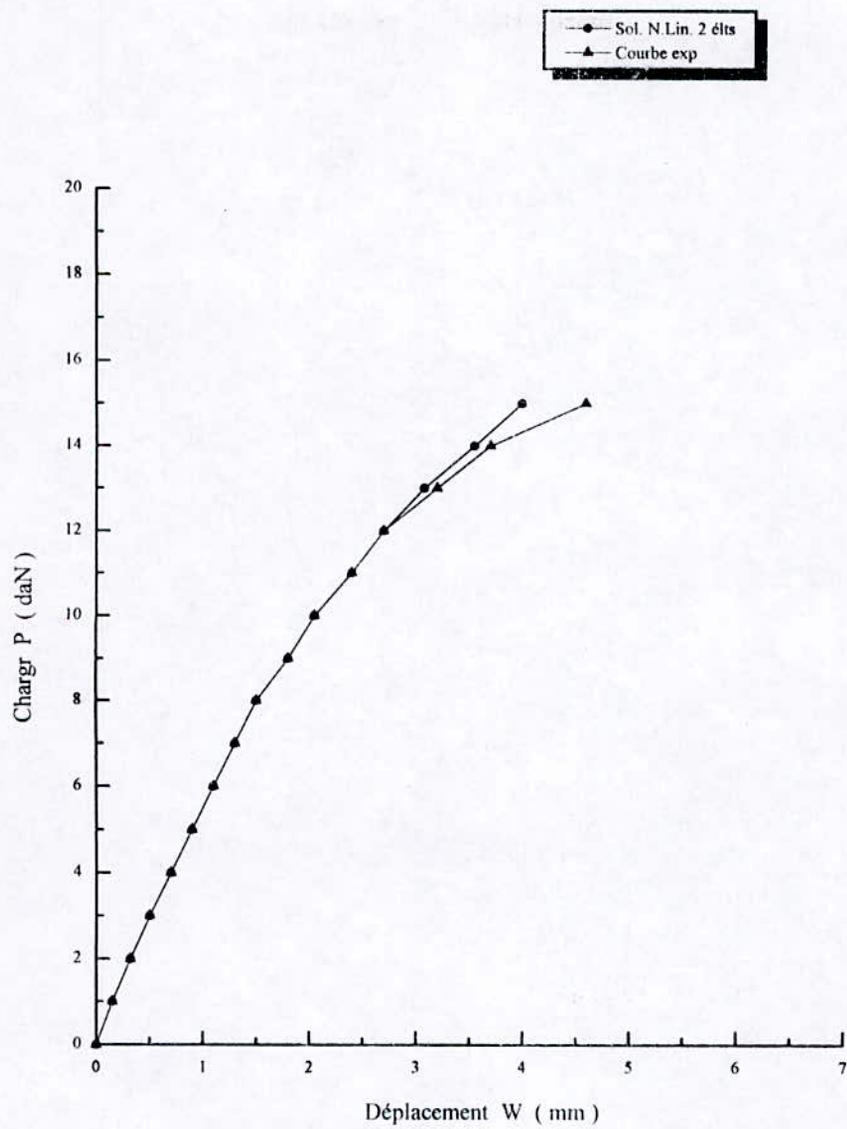


Figure 5.8 : La courbe charge-déplacement de la structure de Williams toggle. Variante avec déplacements non-linéarisés et résolution par la Méthode de Newton Raphson. Pas d'incrémentatation 1 daN.

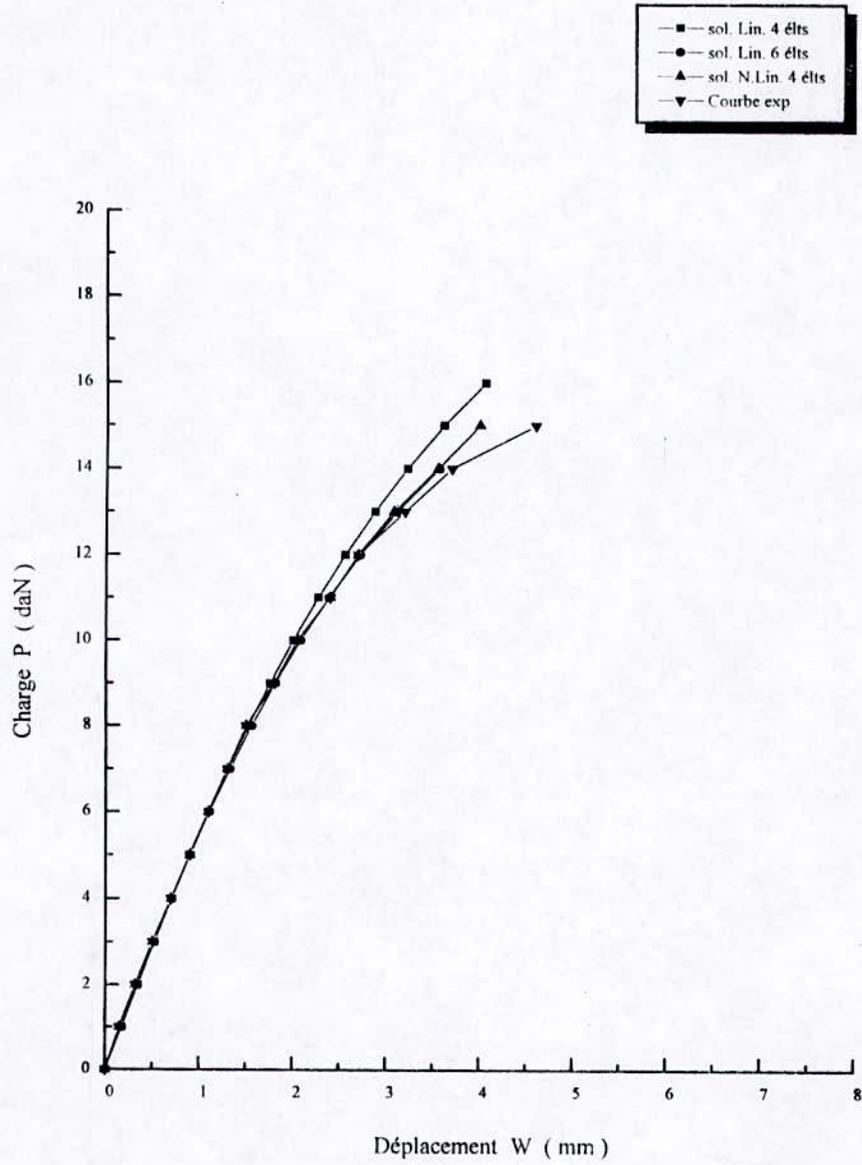


Figure 5.9 : Comparaison entre courbe charge-déplacement de la variante avec déplacements non-linéarisés et de la variante avec déplacements linéarisés.
Pas d'incrément 1 daN.

5.4.4.4 Présentation de la structure du longeron du châssis

Après avoir mis à l'essai notre programme sur l'exemple de référence, nous revenons maintenant sur l'exemple du châssis. Nous allons reprendre la description du problème de longeron du châssis. Nous rappelons que la symétrie de la répartition des charges sur le châssis, nous offre l'avantage de faire l'étude du longeron seul. Donc, nous avons à étudier une poutre longue reposant sur deux appuis l'un simple et l'autre double. Soumise à plusieurs charges concentrées. Elle a deux portes à faux aux extrémités. Nous choisissons pour le calcul une section en I symétrique. Dont les dimensions sont données ci-dessous. Le longeron sera discrétisé en onze éléments de longueurs inégales. Les conditions aux limites sont imposées aux noeuds N°3 et N°10.

Le noeud 3 aura les déplacements w, v, u et θ bloqués.

Le noeud 10 aura les déplacements w, v et θ bloqués.

Le matériau du longeron est l'acier de module d'élasticité longitudinale $E = 21000 \text{ daN}$.

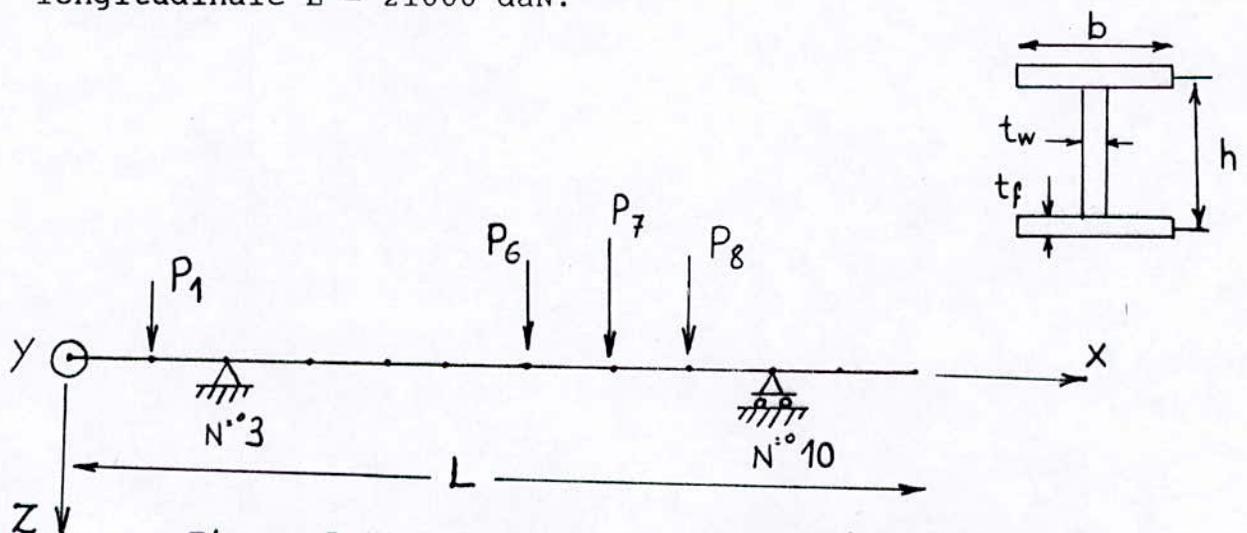


Figure 5.10 : Longeron en I symétrique posé sur deux appuis

5.4.4.5- Résultat et interprétation

Signalons au départ que le calcul est fait avec la variante du programme dont les déplacements sont linéarisés .

Au début , nous avons fait le calcul incrémental jusqu'au niveau de chargement réel du châssis . Alors , nous avons trouvé des solutions qui se situent toutes sur la courbe linéaire . Ensuite , nous avons poussé le calcul incrémental vers des niveaux de charges très élevés et nous avons obtenu la courbe suivante voir page qui suit .

Nous constatons que le programme converge pour les niveaux de charges qui sont très élevés par rapport à la charge réelle du châssis. Et plus on augmente dans la valeur de la charge , le déplacement étant sur-linéaire , il s'éloigne lentement par rapport à la courbe linéaire sans donner un grand écart entre ces deux courbes .

Donc , on comprend pourquoi au début nous avons trouvé la solution non-linéaire presque confondue avec la solution linéaire pour la charge réelle du châssis . Parce que , l'intensité de ce chargement se situe sur un niveau de charge qui n'est pas très important par rapport aux dimensions du longeron, en particulier les dimensions de la section droite. Finalement , cette troisième modélisation n'a pas donné une différence entre la solution linéaire ,trouvée déjà par les modélisations poutres classiques et plaques membranaire-flexionnelle, et la solution non-linéaire pour les conditions des charges réelles du longeron .

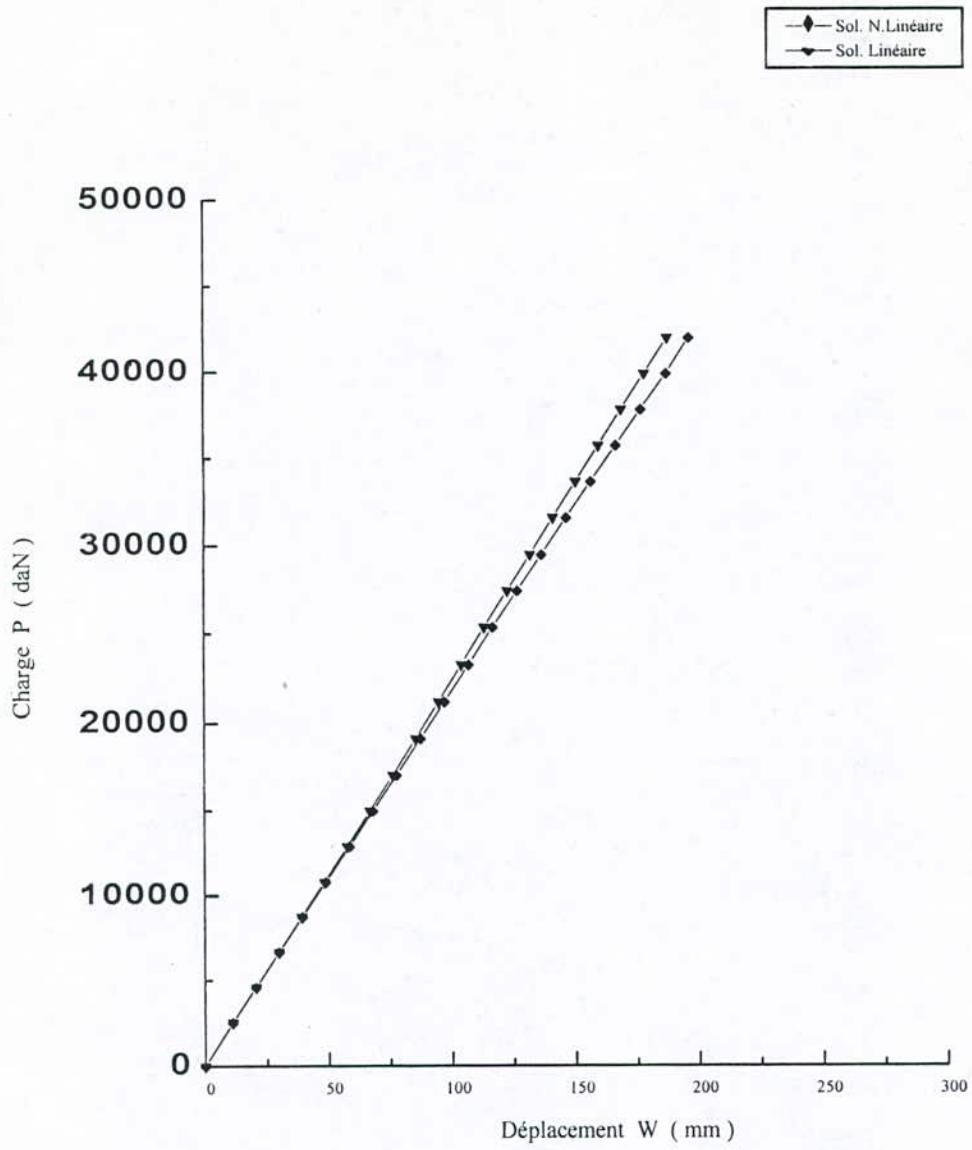


Figure 5.11 : La courbe charge-déplacement du longeron de châssis. Variante avec déplacements linéarisés. Discretisation en 11 éléments.

CONCLUSION GENERALE

Le thème que nous avons traité entre dans le cadre des études des châssis des véhicules roulants. Le but essentiel de l'étude est la modélisation mathématique du châssis de la locomotive dans l'intention de formuler une procédure de calcul pour l'analyse du comportement statique et dynamique.

Il existe quelques recherches qui ont traité l'étude de châssis des véhicules industriels. L'étude de cette structure a évolué en fonction des problèmes posés par l'industrie et surtout en fonction de la modernisation des techniques et moyens de calcul.

Le châssis de la locomotive "Général Motors" appartient à la classe des structures constituées par assemblage d'éléments en forme de poutre. De plus, il admet des particularités spécifiques, comme :

- Cambrure initiale.
- Dissymétrie de la section droite.
- Dimensions transversales et longitudinale importantes.

Pour ce thème, nous pouvons se fixer plusieurs objectifs à atteindre sachant que l'axe de recherche auquel appartient ce problème est très vaste.

Dans notre étude, nous nous sommes fixés deux objectifs. Le premier objectif consiste à chercher les contraintes (appelées plus tard contraintes initiales) pouvant donner un état de déformation du châssis équivalent à la cambrure initiale. Les contraintes une fois trouvées seront introduites

dans la formulation générale de l'analyse du comportement. Le second objectif a été consacré à la recherche de la modélisation qui peut décrire au mieux le comportement de ce genre d'éléments de structure (essentiellement le longeron) sous l'effet d'un chargement quelconque.

Doñc, pour parvenir à ces objectifs, nous nous sommes proposé de suivre la démarche suivante :

a)- D'après l'hypothèse posée au départ, relative à la conception de la cambrure, nous sommes passés directement au calcul des contraintes initiales par la méthode des éléments finis. Par la même occasion, nous avons exploité des modèles déjà connus et nous avons fait un travail de comparaison entre ces modèles à partir de l'utilisation d'un logiciel existant.

b)- Une recherche bibliographique poussée, dans la littérature spécialisée, nous a permis de rencontrer un autre modèle d'élément fini qui répond à certaines questions liées au comportement de ce genre de structure, appelé "élément poutre à parois minces et de section droite ouverte". Aussi, il fallait définir et calculer toutes les caractéristiques de cet élément (déformations et propriétés de section).

c)- Construire la formulation de l'équation d'équilibre tenant compte des contraintes initiales avec l'introduction du phénomène des déformations non-linéaires dues à la géométrie (déformation d'ordre supérieur).

Dans le même cadre, nous calculons les expressions de tous les termes de la matrice de rigidité. Termes ayant une nouvelle forme (fonctions des déplacements) résultante des déformations non-linéaires. Le calcul de l'expression finale

de ces termes nécessite le développement d'un calcul numérique.

d)- Elaborer un programme numérique général de la méthode des éléments finis pour l'analyse du comportement de la structure(longeron) à l'état d'équilibre et d'instabilité.

En résumé, les travaux réalisés dans ce thème ont permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

- Le calcul de la déformée du longeron, à partir de deux modélisations différentes, a conduit à des résultats très proches de la cambrure initiale. Ce qui nous permet de vérifier l'hypothèse de base, qui consistait à supposer que les contraintes initiales donnant la cambrure du longeron sont celles qui naissent dans un longeron droit chargé par le poids de tous les organes de la locomotive.
- Ensuite, la comparaison des modélisations sus-indiquées a abouti à la conclusion que la modélisation mixte en élément plaque membranaire-flexionnelle donne de meilleurs résultats escomptés à celle en élément poutre pour ce genre de structure (longue envergure et des dimensions transversales relatives grandes). Seulement cette modélisation reste insuffisante du moment qu'elle présente des problèmes de compatibilité des degrés de liberté aux noeuds de la jonction plaque membranaire-flexionnelle.
- L'étude de l'élément poutre à parois minces, du point de vue état de déformation, s'avère être plus parfait que l'élément poutre classique dans l'espace et du point de vue conception, il est plus réaliste que le modèle plaque membranaire-flexionnelle pour la structure que nous étudions.

- En plus, mettre en évidence le phénomène de la non-linéarité due à la géométrie ajoutée dans la perfection à ce modèle et le rend plus exact au calcul du comportement (à l'équilibre ou à l'instabilité).

- La mise à l'épreuve de cette modélisation sur un exemple de structure référence (Structure de Williams Toggle) a donné des résultats en parfaites concordances avec les résultats expérimentaux. Ceci montre l'efficacité de cette modélisation par rapport à celle de la poutre classique en comportement linéaire. Ici, nous avons apprécié les problèmes qui peuvent être posés par le caractère non-linéaire de la formulation.

Il y a la question de la mémoire de l'outil de calcul qui doit être considérable pour prendre le volume du système d'équation. Ensuite, il y a la question du temps de réponse de l'exécution du programme puisque le calcul est de type incrémental et itératif. Surtout lorsqu'on découvre que la précision des résultats augmente avec l'augmentation du nombre de pas d'incrément et pour une discrétisation plus fine de la structure.

Concernant l'application de cette modélisation sur la structure du châssis, le calcul n'a pas donné une différence dans les résultats par rapport au calcul linéaire et les deux premières modélisations. Et cela, est dû à la grandeur de la charge des organes, considérés, qui n'était pas très importante devant la rigidité du longeron.

Pour la continuité de ce travail, nous proposons quelques travaux complémentaires qui sont les suivants :

A commencer par l'amélioration du programme de calcul en revoyant la procédure de stockage des matrices et de reprendre la méthode de résolution du calcul incrémental en exploitant une méthode qui semble très efficace pour suivre le comportement non-linéaire au delà du point d'instabilité (c'est la Méthode Arc Length).

Ensuite, on peut ,aussi, compléter le programme en ajoutant les options relatives à la transformation des repères pour un comportement des structures à large déplacements et à la combinaison des contraintes initiales, de nature thermique ou mécanique, avec les contraintes dues aux sollicitations.

REFERENCES

- [1]- K.J. BATHE
" Finite Elément Procédures in Engineering Analysis"
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NEW-JERSEY (1982)
- [2]- J.F. IMBERT
" Analyse des Structures par Eléments Finis "
2ème édition CEPADUES-EDITIONS 1984
- [3]- K.C. ROCKEY et AL ,
" Finite Elément Method A Basic Introduction "
Halsted press, 1975
- [4]- C. PHILIP JOHNSON and KENNETH M. WILL
" Beam Buckling by Finite Elément Procédure "
Journal of the Structural Division , Vol 100, pp669-685
No. ST3, March, 1974 .
- [5]- O.C. ZIENKIEWICZ
" The Finite Elément Method in Engineering Science "
Second Edition , Mc Graw-Hill , LONDON (1971)
- [6]- V.Z. VLASOV
" Thin-Walled Elastic Beams "
2nd ed . National Science Foundation, Washington (1961)
- [7]- S.P. TIMOSHENKO and J.M. GERE
" Theory of Elastic Stability "
Mc Graw-Hill NEW YORK (1961)
- [8]- T.M. ROBERTS
" Second Order Strains and Instability of Thin Walled
Bars of Open Cross-Section "
Int J. Mech. sci Vol 23 , PP 297-307 , 1981
- [9]- YEONG-BIN , W Mc GUIRE
" Stiffness Matrix for Geométrique Nonlinear analysis "
Journal of Structural Engineering , Vol. 112 , No. 4,
April , 1986 , pp. 853-877.
- [10]- Z.P. BAZANT , M. EL. NIMEIRI
" Large Déflexion Spatial Buckling of Thin Walled
Beams and Frames "
The Journal of Engineering Méchanics Division ,
october , 1973 , pp. 1259-1281.
- [11]- S.L. CHAN and S. KITIPORNCHAI
" Géométric nonlinear Analysis of Asymmétric Thin-
Walled Beam-Columns"
Eng. Struct 1987 . Vol 9, pp 243-254 , October
- [12]- M.M. ATTARD
" Lateral Buckling Analysis of Beams by the FEM "
Computers & Structures Vol 23 , No 2, pp. 217-231 , (1986)

- [13] - T.M ROBERTS and Z.G.AZIZIAN
 " Nonlinear analysis of Thin Walled Bars of Open Cross-Section "
 Int J.Mech.sci Vol 25 , No 8 PP 565-577 , 1983
- [14] - T.M ROBERTS and Z.G.AZIZIAN
 " Influence of pre-buckling displacements on the élastic critical loads of Thin Walled Bars of Open Cross-Section "
 Int J.Mech.sci Vol 25 , No2 PP 93-104 , 1983
- [15] - T.M ROBERTS and Z.G.AZIZIAN
 " Instability of Thin Walled Bars "
 J. of structural Méchanics, ASCE, Vol.109 , No.EM3, June , 1983 , pp.781-494.
- [16] - K.J. BATHE and S.BALOURCHI
 " Large Dplacement Analysis of Three-Dimensional Beams Structures "
 International Journal for Numerical Méthods In Engineering ,Vol.14 , pp.961-986 (1979) .
- [17] - T.M ROBERTS and Z.G.AZIZIAN
 " Instability of Monosymmetric I-beams "
 Journal Structural Engineering , Vol.110 , No.6, June , 1984 , pp.1415-1419.
- [18] - T.M ROBERTS and C.A.BURT
 " Instability of Monosymmetric I-beams and Cantilevers "
 Int J.Mech.sci Vol 27 , No 5, PP 113-324 , 1985
- [19] - T.M ROBERTS
 " Section Properties of Thin Walled Bars of Open Cross-Section "
 The Structural Engineer /Volume 63B/No.3/september 1985.
- [20] - T.M ROBERTS
 " Natural Frequency of Thin Walled Bars of Open Cross-Section"
 The Journal of Engineering Méchanics, Vol.113 , No.10, october , 1987 , pp.1584-1593.
- [21] - N.S. TRAHAIR and S.T.WOOLCOCK
 " Effet of Major Axis Curvature on I-beam stability "
 J.Engng Méch, DW , ASCE 99(EM1) , 85-98 (1973) .
- [22] - P.VACHARAJITTIPHAN and N.S.Trahair
 " Flexural-Torsional Buckling of Curved Members "
 Journal of the Structural Division ,Vol 101, pp1223-1238 No.ST6, June 1975 .
- [23] - M.BOUCLAGHEM
 " Etude Des Châssis Des Véhicules Industrièls De La S.N.V.I - C.V.I Par La Méthode Des Eléments Finis "
 Thèse de Magiter, Ecole Nationale Polytechnique (1990)

- [24]- BATOZ ,J.L.,DHATT,G.D.,
 " Modélisation des structures par éléments finis "
 Volume 2, poutres et plaques , Hermes 1990
- [25]- G.DHATT, G.TOUZOT
 " Une Présentation de la Méthodes des Eléments Finis"
 Edition Maloine, 2ème édition, Paris 1984
- [26]- J.L.BATOZ, G.,DHATT
 " Incremental Displacement Algorithm for Nonlinear
 Problems "
 Int.J.Numer.Meth.Engng.,Vol 114, pp 1262-1267, 1979
- [27]- H.MATTHIES and G.STRANG
 " The Solution of Nonlinear Finite Eléments Equations "
 Int. J. for Numer. Meth.in Engng. ,Vol 14, 1613-1626 1979
- [28]- SYSTEME TITUS
 " Résolution Des Systèmes Nonlinéaires, La Méthode BFGS"
 FRAMATOME , Service Calcul 71380 Saint Marcel Chalow-sur-
 -Saône
- [29]- SYSTUS MANUEL THEORIQUE
 " Résolution Des Systèmes Nonlinéaires "
 REVISION 0
- [30]- M.A. CRIESFIELD
 " A Fast Incremental/Itérative Solution Procédure
 That Handles snap-through "
 Computers and Structures, Vol 13, pp 55-62, 1981
- [31]- YEONG-BIN YANG , and HWA-THONG CHIOU
 " Rigid Body Motion Test For Nonlinear analysis
 With Beam Eléments "
 Journal of Engineering Mechanics, Vol 113, No 9,
 pp 1404 1418, Septembre 1987
- [32]- CHRISTOPHER D.HILL
 " Post-Buckling Analysis of Steel Space Trusses "
 Journal of Structural Engineering, Vol 115, No 4 ,
 pp 900-919 , April 1989
- [33]- J.L MEEK and S.LOGANATHAN
 " Géométrically nonlinear Behaviour of Space Frame
 Structures "
 Computers and Structures, Vol 31, No 1, pp 35-45, 1989
- [34]- M.BOUMAH RAT et G.GOURDIN
 " Méthodes Numériques appliquées "
 Office des Publications Universitaires , Alger
- [35]- S.P.TIMOSHENKO
 " Résistance des Matériaux "
 Tome II édition Dunod (1984)

- [36]- S.P.TIMOSHENKO
" Théorie des Plaques et Coques "
- [37]- WOLGANG A.JALIL
" Calcul Pratique des Structures "
- [38]- CH.MASSONNET S.CESCOTTO
" Mécanique des Matériaux "
S.L.Sciences et Lettres - LIEGE
- [39]- M.HERVE
" TECHNOLOGIE AVANCEES EN MECANIQUE ,Le Calcul des
Structures "
CETIM . Information N°80-81 JUIN 1983
- [40]- MANUEL D'UTILISATION DU SAP80

ANNEXE I

N°	ORGANE	NOMBRE	MASSE (Kg)
1	Armoire de contrôle électrique	01	1500
2	Ventilateur de frein rhéostatique	01	345
3	Grille de freinage rhéostatique	02	175
4	Filtre à inertie	02	272
5	Génératrice auxiliaire et ventilateur	01	454
6	Génératrice principale	01	7258
7	Batterie	02	131
8	Turbo compresseur	01	817
9	Moteur	01	14742
10	Réservoir de combustible	01	8713
11	Réservoir d'air	02	213
12	Ensemble de refroidissement	01	1276
13	Compresseur	01	1055
14	Ventilateur de radiateur	03	318
15	faisceau de radiateur	06	147

TABLEAU 1 MASSE DES ORGANES FIXES SUR LE CHASSIS

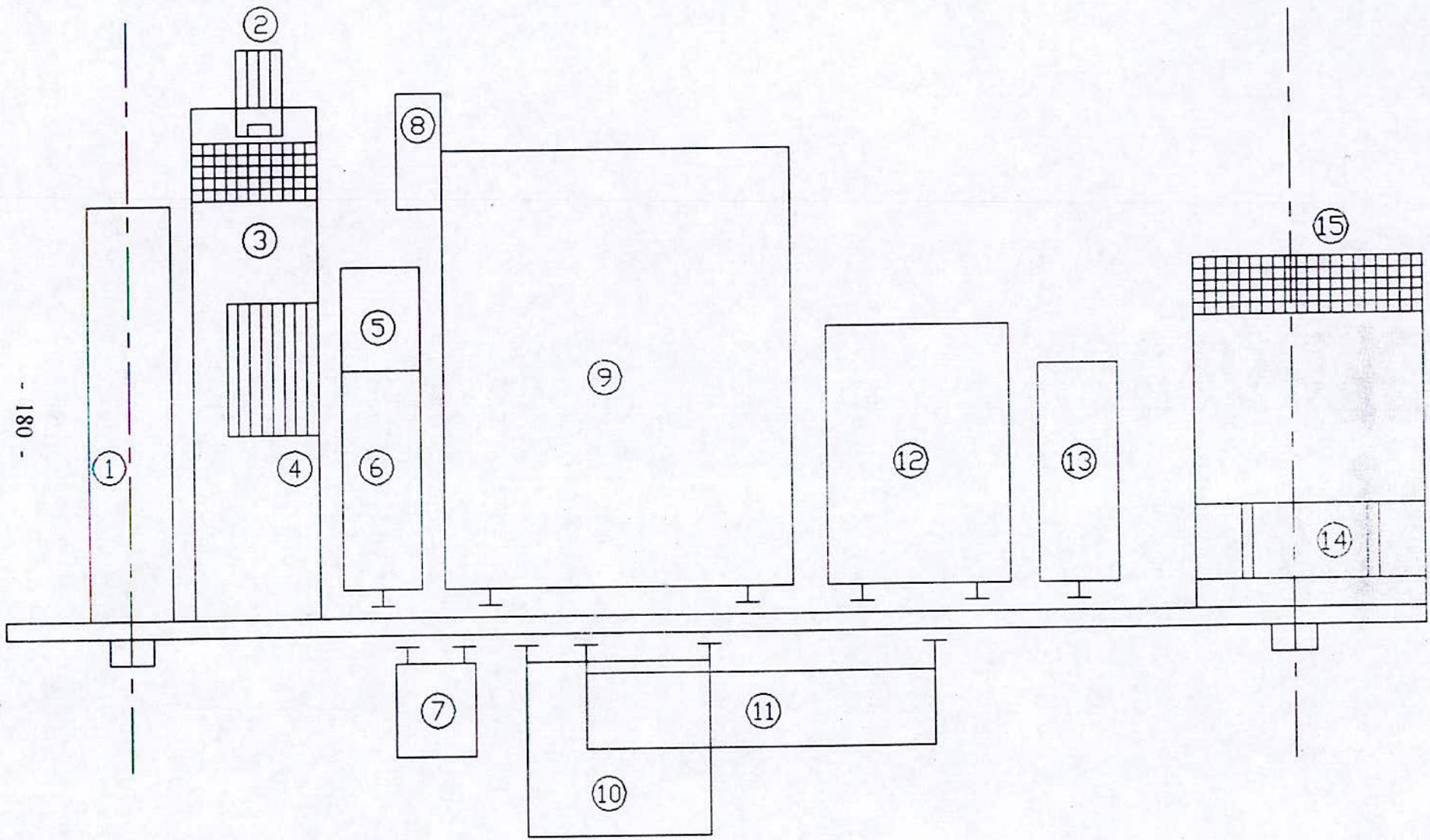


Fig 1 Disposition des organes fixes sur le chassis

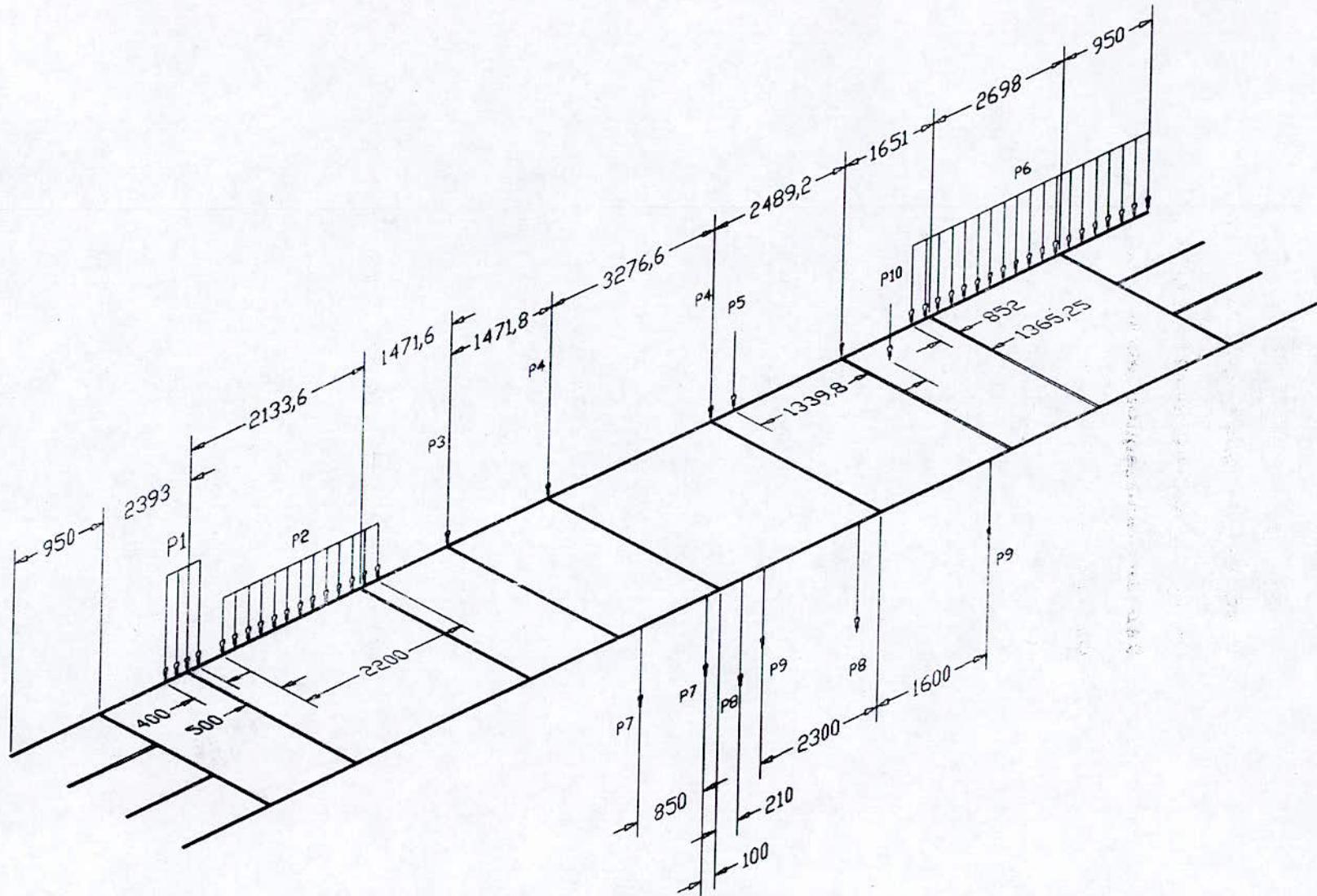


Fig 2 MODELISATION ET DISPOSITION DES CHARGES SUR LE CHASSIS

PROPRIETES DE SECTIONS DES BARRES A PAROIS MINCES

ET DE SECTION DROITES OUVERTES

Habituellement dans les études de structure en poutre , les propriétés de sections ne recevaient pas de la part des ingénieurs une grande importance . Car les définitions de ces propriétés sont très connues, et l'application de celles-ci pour les sections utilisées est très courante. Par contre dans notre recherche , nous avons étudié un modèle de poutre qui n'est pas connu dans la littérature générale , ce qui nous a conduit à donner les définitions de toutes les propriétés de sections introduites . Il est clair qu'avec un modèle qui fait intervenir des phénomènes tels que: torsion, gauchissement et non - linéarité géométrique , on doit s' attendre à de nouvelles propriétés de section qui accompagnent ces phénomènes .

Vu que cette partie du sujet presente des difficultés, reconnues par les spécialistes , dans l'application des propriétés de section associées, au gauchissement et aussi à la dissymétrie de celles-ci, nous avons estimé qu'il est utile de résumer ce travail dans un chapitre dans lequel nous souleverons ces difficultés . C'est à dire , nous n'allons pas nous contenter de définir les choses, mais de passer à l'application pour certains types de section :

- Symétrique, Monosymétrique et anti-symétrique .

Dans ce chapitre , nous donnerons les définitions de toutes les propriétés existantes dans la formulation générale. Certaines d' entre-elles constituerons un rappel des

propriétés connues (tels que : aire de la section droite, moment d'inertie ,...etc) et les autres seront Considérés comme de nouvelles propriétés, connues uniquement dans la littérature spécialisé .

Afin de mettre en application ces définitions et dans le but d'exploiter notre programme informatique, par des ingénieurs ,en utilisant certaines sections droites que nous avons choisis . Nous avons l 'intention de créer une bibliothèque avec le programme de résolution. Pour cela,nous trouverons en annexe suivante les résultats des différentes propriétés de ces sections et en particulier la section droite du longeron du châssis de la locomotive .

1- Aire de la section droite

L'aire de la section droite est définie par l'intégrale de l'élément de surface différentiel évaluée entre les fonctions frontières qui limitent cette aire .

$$A = \int_{\phi 2}^{\phi 1} \int_{\beta 2}^{\beta 1} ds$$

$$A = \int_{\phi 2}^{\phi 1} \int_{\beta 2}^{\beta 1} dy dz$$

ds : éléments de surface différentiel

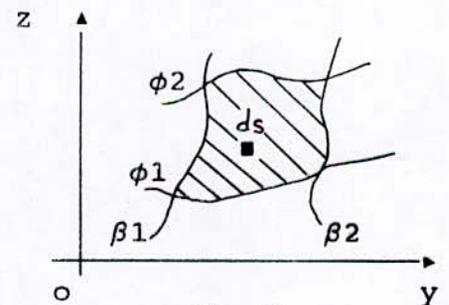


fig 1

2- Centre d'inertie d'une surface

Le centre d'inertie ou centre de gravité G d'une surface est défini par le quotient de la somme des moments statique des

aires élémentaires de la section droite par l'aire globale de cette section . Le point G ainsi défini est indépendant du point O (O étant un point lié au solide)

$$O G = \frac{\sum_{i=1}^n S_i O G_i}{\sum_{i=1}^n S_i}$$

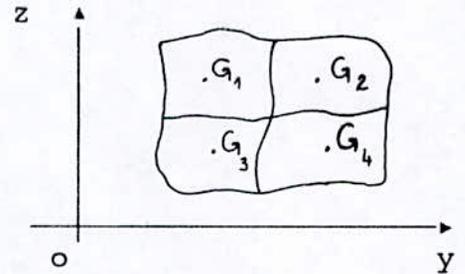


fig 2

G_i : étant les centres de gravité des aires élémentaires .
Puisqu'en résistance des matériaux , nous travaillerons toujours dans un plan défini par un système d'axe parallèle à l'aire de la section droite . Cette relation peut être décomposée en deux relations qui définissent les coordonnées de G dans ce système :

$$y_G = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n S_i y_i \quad \text{et} \quad z_G = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n S_i z_i$$

3- Moment statique d'une aire

Le moment statique par rapport à une droite Δ est défini par l'intégrale sur la surface du produit de l'aire élémentaire par la distance entre le centre de gravité de celle-ci à la droite .

$$M_s = \iint \delta \, ds$$

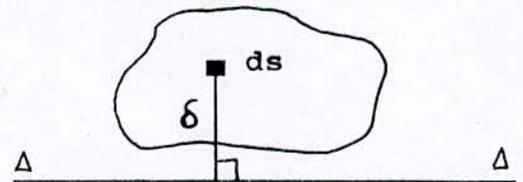


fig 3

Donc , si nous travaillerons dans un système d'axe (yoz), nous définirons le moment statique par rapport à chacun

des axes y et z :

$$M_y = \iint y \, ds \quad \text{et} \quad M_z = \iint z \, ds$$

4-Moment d'inertie d'une surface par rapport à une droite

Par définition, le moment d'inertie d'une surface par rapport à une droite Δ est défini par l'intégrale sur la surface du produit de la distance du centre de gravité de l'aire élémentaire à la droite Δ .

$$I_{\Delta} = \iint \delta^2 \, ds$$

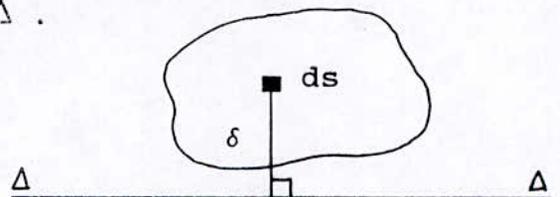


fig 4

Aussi, si la surface est définie sur système d'axe plan (yo), les moments d'inertie de l'aire par rapport à chacun des axes :

$$I_y = \iint z^2 \, dA$$

et

$$I_z = \iint y^2 \, dA$$

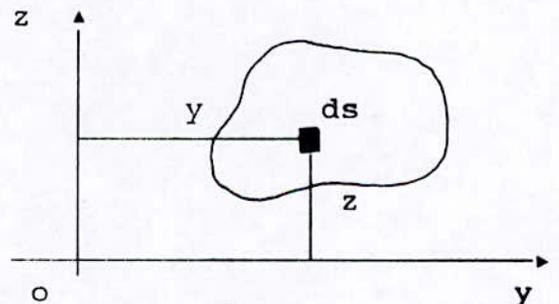


fig 5

Nous pouvons, aussi, évaluer le moment d'une surface par rapport à une droite quelconque en fonction du moment d'inertie de cette même surface par rapport à la droite passante par le centre de gravité de celle-ci, et cela est possible en appliquant le " théorème de Huyghens ".

4.1- Théorème de HUYGHENS

Le moment d'inertie d'une surface par rapport à une droite quelconque, est égale au moment d'inertie de cette surface par rapport à une droite parallèle à la première et passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la section droite par le carré de la distance entre les droites sus-citées :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + S d^2$$

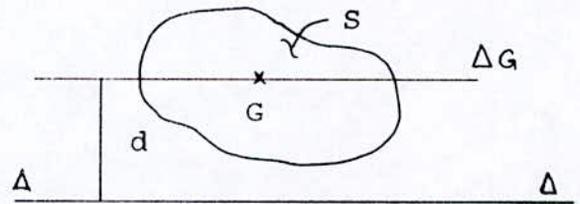


fig 6

on peut écrire aussi :

$$I_y = I_{y_G} + S z_G^2 \quad \text{et} \quad I_z = I_{z_G} + S y_G^2$$

5- Produit d'inertie d'une surface

Le produit d'inertie d'une surface par rapport à deux axes est défini par l'intégrale sur la surface du produit des distances du centre de gravité de l'élément de surface aux axes considérés par la section élémentaires :

$$I_{\Delta \Delta'} = \iint \delta \delta' ds$$

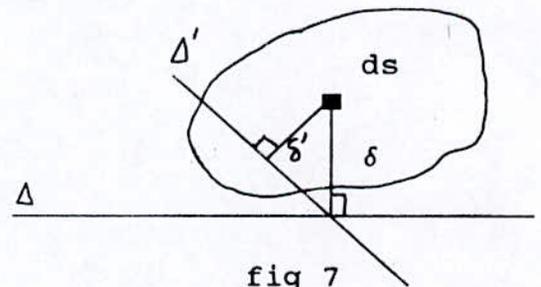


fig 7

Par conséquent , dans le plan yoz on écrit :

$$I_{yz} = \iint y z ds$$

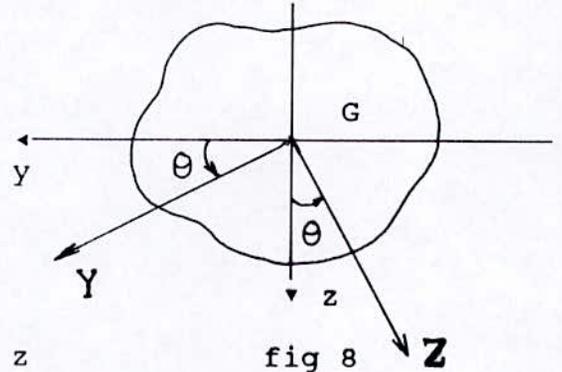
6- Axes principaux

Les axes principaux sont définis comme étant les axes par rapport aux quels les moments d'inertie I_y et I_z sont extrêmums , c'est à dire ; que I_y (resp I_z) est maximum et I_z (resp I_y) est minimum. Soit un changement de variable :

$$Z = -y \sin \theta + z \cos \theta$$

$$Y = y \cos \theta + z \sin \theta$$

$$I_{y/G} = \iint z^2 ds$$



En remplaçant les coordonnées y et z dans l'expression, nous aurons :

$$I_{y/G} = I_z \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta - I_{yz} \sin 2 \theta$$

De même :

$$I_{z/G} = \iint y^2 ds = I_z \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + I_{yz} \sin 2 \theta$$

Rappelons que I_y et I_z étant les moments d'inertie par rapport aux axes arbitraires .

Maintenant, si nous considérons que les axes Y et Z sont les axes principaux , donc la dérivée des moments I_y et I_z par rapport à l'angle de déviation est nulle .

$$\frac{d I_{y/G}}{d \theta} = - \frac{d I_{z/G}}{d \theta} = 0$$

$$2 \sin \theta \cos \theta . I_z - 2 \cos \theta \sin \theta . I_y - 2 \cos 2 \theta . I_{yz} = 0$$

$$\sin 2 \theta (I_z - I_y) = 2 \cos 2 \theta I_{yz} \Rightarrow \frac{\sin 2 \theta}{\cos 2 \theta} = \frac{2 I_{yz}}{I_z - I_y}$$

D'où :

$$\operatorname{tg} 2 \theta = \frac{2 I_{yz}}{I_z - I_y}$$

Cette formule nous donne l'angle de deviation entre les axes principaux et les axes arbitraires .

7- Centre de cisaillement (torsion)

Lorsque la section n'est pas symétrique par rapport à l'axe principal portant l'effort tranchant ,la résultante du champ de cisaillement passe par un point C, distinct du centre de gravité G, appelé centre de cisaillement (centre de torsion). La formule donnant la position du centre de cisaillement par rapport à la droite .

$$T \cdot OC/ = \Sigma F_{ti} \cdot OG_i$$

O : étant le point défini par l'intersection de la ligne moyenne et la droite passant par le centre de gravité de l'âme

C : Le point centre de cisaillement

G_i: la distance entre le point O et la droite portant la force de cisaillement F_{ti}

Remarque : Après un travail de réflexion sur l'application de cette définition , nous avons conclu que :

a)- La position du centre de cisaillement se calcul par rapport aux axes passant par le centre de gravité .

b)- le point "O" par rapport auquel nous calculons les

moments de forces créés par les contraintes de cisaillement dans les éléments de la section droite, est défini par l'intersection de ligne moyenne de l'âme et l'une des droites passant par le centre de gravité.

En résumé ; nous déduisons que la rotation de la section droite autour du centre de cisaillement est provoqué par le couple des forces de cisaillement créés dans les semelles de la section.

Rappelons que nous traitons, ici, uniquement les barres à parois minces.

8- Moment d'inertie polaire par rapport au centre de cisaillement

Le moment d'inertie polaire est défini par l'intégrale, sur la surface de la section, du produit du carré du rayon polaire par l'élément de surface :

$$I_0 = \int \rho^2 ds$$

En se rapportant au plan yo_z , nous pouvons écrire que :

$$\rho^2 = Y'^2 + Z'^2$$

Y' et Z' étant les coordonnées du système d'axes placé sur le centre de cisaillement, et ils sont parallèles aux axes principaux voir figure 9. Donc :

$$I_0 = \int (Y'^2 + Z'^2) ds$$

Avec

$$Y' = Y + Y_0 \quad \text{et} \quad Z' = Z + Z_0$$

Y et Z : sont les coordonnées des axes principaux passant par le centre de gravité .

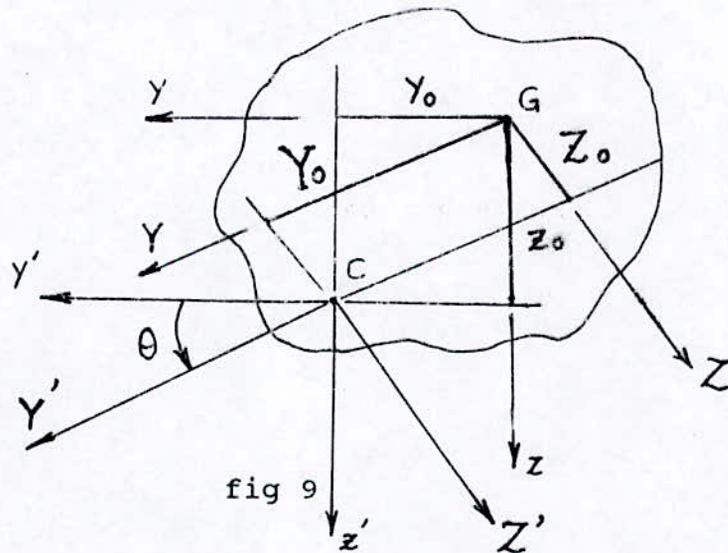
$$I_o = \int [Y + Y_o]^2 + [Z + Z_o]^2 ds$$

$$I_o = \int (Y^2 + Y_o^2 + 2 Y Y_o + Z^2 + Z_o^2 + 2 Z Z_o) ds$$

$$I_o = \int Y^2 ds + Y_o^2 \int ds + 2Y_o \int Y ds + \int Z^2 ds + Z_o^2 \int ds + 2Z_o \int Z ds$$

Rappelons que $\int Y ds = 0$; nous aurons donc :

$$I_o = I_Z + I_Y + (Y_o^2 + Z_o^2) A$$



Remarque :

Soit y_o et z_o : coordonnées du centre de G/C dans le système d'axes arbitraires .

Y_o et Z_o : coordonnées du centre de G/C dans le système d'axes principaux .

Nous pouvons facilement montré que :

$$Y_o^2 + Z_o^2 = y_o^2 + z_o^2$$

puisque Y_0 et Z_0 sont calculées dans le paragraphe 5.7, donc la valeur de $Y_0^2 + Z_0^2$ sera calculée directement .
 Notant que dans la suite du calcul , nous retrouvons les coordonnées Y_0 , Z_0 dans certaines propriétés de section dans des termes séparément. Alors il est nécessaire de les calculer dès maintenant .

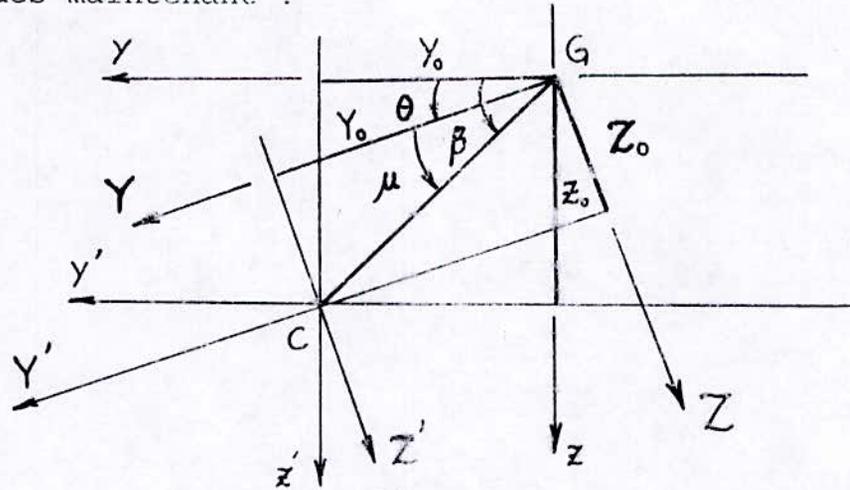


fig 10

Soit θ , l'angle de déviation du système d'axes principaux par rapport aux axes quelconques , avec :

$$\beta = \text{arctg} \frac{z_0}{y_0}$$

d'ou $\mu = \theta - \beta$

finalement , nous aurons :

$$Y_0 = \rho_0 \cos \mu \quad \text{et} \quad Z_0 = \rho_0 \sin \mu$$

Remarque : Le moment d'inertie polaire , calculé par rapport aux axes arbitraires , est similaire à celui calculé par rapport aux axes principaux. Puisque $Y'^2 + Z'^2 = y'^2 + z'^2$

Donc
$$I_0 = \int \rho^2 ds$$

Avec
$$\rho^2 = Z'^2 + Y'^2 \quad \text{ou bien} \quad \rho^2 = z'^2 + y'^2$$

9- Constantes CY et CZ

par définition

$$CY = \int Z \rho^2 ds \quad \text{et} \quad CZ = \int Y \rho^2 ds$$

Rappelons aussi que Z et Y sont les coordonnées principales évaluées à partir du centre de gravité.

9.1- Constantes CY

$$CY = \int Z \rho^2 ds$$

nous exprimons comme précédemment le rayon ρ en fonction des coordonnées Y' et Z' définies au paragraphe 5.8 et nous développerons Y' et Z' en fonction de Y et Z .

$$CY = \int Z (Y'^2 + Z'^2) ds$$

$$CY = \int Z [(Y + Y_0)^2 + (Z + z_0)^2] ds$$

Après développement des expressions entre parenthèses et en utilisant les propriétés suivantes :

$$\int Z ds = \text{moment statique de l'aire à son centre G est nul .}$$

$$\int Y Z ds = \text{produit d'inertie de l'aire dans le système d'axes principaux est nul .}$$

nous obtenons :

$$CY = \int (Z^3 + Z \cdot Y^2) ds + 2 Z_0 IY$$

9.2- Constante CZ

Une démonstration similaire que la précédente aboutit au résultat suivant :

$$CZ = \int (Y^3 + Y.Z^2) ds + 2 Y_0 IZ$$

Remarque : Nous rappelons, que dans ce travail, nous sommes entrain de revoir les définitions, qui ont été données avec les nouvelles considérations relatives aux coordonnées principales .

9.3- Application pour la section en U antisymétrique

Après avoir étudié la manière d'appliquer les définitions précédentes sur une section quelconque, nous avons trouvé qu'il suffit de faire le changement de variable, du système d' axes principaux au système d' axes quelconques. Puis intégrer normalement, après avoir subdiviser la section en plusieurs secteurs .

Avant de passer à l'application directe , nous allons redéfinir les constantes avec le changement de variable suivant :

$$Z = - y \sin \theta + z \cos \theta$$

$$Y = y \cos \theta + z \sin \theta$$

a/- Constantes CY :

En remplaçant Y et Z par leurs valeurs dans l'expression CY et après avoir développé les produits de facteur, nous obtenons l'expression de CY en foction des coordonnées quelconques choisies au préalable :

$$\begin{aligned}
CY = & (\cos^3 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) \int z^3 ds - (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) \int z^2 y ds \\
& + (\cos \theta \sin^2 \theta + \cos^3 \theta) \int z^2 y^2 ds - (\sin^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) \int y^3 ds \\
& + 2 \cdot Z_0 \cdot IY
\end{aligned}$$

b/- Constante CZ

le même calcul peut être fait pour la constante CZ et nous trouvons :

$$\begin{aligned}
CZ = & (\cos^3 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) \int y^3 ds + (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) \int y^2 z ds \\
& + (\cos \theta \sin^2 \theta + \cos^3 \theta) \int y^2 z^2 ds + (\sin^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) \int z^3 ds \\
& + 2 \cdot Y_0 \cdot IZ
\end{aligned}$$

Remarque :

Nous constatons, que pour le calcul des constantes CY et CZ d'une section donnée, il suffit de calculer une fois les intégrales ($\int y^3 ds$, $\int y^2 z ds$, $\int y z^2 ds$, $\int z^3 ds$), Puis il sera facile d'évaluer la valeur de CY et CZ, en remplaçant tous les autres paramètres calculés au départ (à savoir : θ , Y_0 , Z_0 , IY , IZ) .

10- Constantes C_p :

La constante C_p se définit par l'intégrale suivante :

$$C_p = \int \rho^4 ds$$

Avec
$$\rho^2 = Y'^2 + Z'^2$$

Y' et Z' : coordonnées principales par rapport au centre de cisaillement . En exprimant les coordonnées Y' et Z' en fonction des coordonnées principales par rapport au centre de gravité .

$$Y' = Y_0 + Y \quad \text{et} \quad Z' = Z_0 + Z$$

En remplaçant Y' et Z' par leurs valeurs dans l'expression de ρ^4 et en utilisant les propriétés suivantes :

$$\int Y ds = \int Z ds = \int Y.Z ds$$

nous obtenons , après développement :

$$\begin{aligned} C_p = & (Y_0^4 + Z_0^4 + 2 Y_0^2 Z_0^2) \int ds + \int (Y^4 + Z^4) ds + \\ & + (4 Y_0^2 + 2 Y_0^2 + 2 Z_0^2) \int Y ds + (4 Z_0^2 + 2 Y_0^2 + 2 Z_0^2) \int Z ds \\ & + 4 Y_0 \int (Y^3 + Y Z^2) ds + 4 Z_0 \int (Z^3 + Y Z^2) ds + 2 \int Y^2 Z^2 ds \end{aligned}$$

En réécrivant cette dernière forme en rajoutant les termes soulignés .

$$C_p = (Y_0^2 + Z_0^2)^2 \int ds + \int (Y^4 + Z^4) ds + 2 Z_0^2 \int Y^2 ds$$

$$\begin{aligned}
& + 2 Y_0^2 \int Z^2 ds + 4 Y_0 \int (Y^3 + Y Z^2) ds + 6 Y_0^2 \int Y^2 ds \\
& + 2 Y_0^2 \int Y^2 ds - 2 Y_0^2 \int Y^2 ds + 6 Z_0^2 \int Z^2 ds \\
& + 4 Z_0^2 \int (Z^3 + Y Z^2) ds + 2 Z_0^2 \int Z^2 ds - 2 Z_0^2 \int Z^2 ds + 2 \int Y^2 Z^2 ds
\end{aligned}$$

nous pouvons réécrire cette dernière expression comme suit:

$$\begin{aligned}
C_p &= (Y_0^2 + Z_0^2) \int ds + \int (Y^4 + Z^4) ds + 2 (Z_0^2 - Y_0^2) \int Y^2 ds \\
& + 2 (Y_0^2 - Z_0^2) \int Z^2 ds + 4 Y_0 \int (Y^3 + Y Z^2) ds + 8 Y_0^2 \int Y^2 ds \\
& + 4 Z_0 \int (Z^3 + Z Y^2) ds + 8 Z_0^2 \int Z^2 ds + 2 \int Y^2 Z^2 ds
\end{aligned}$$

En utilisant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\int ds &= S ; \quad \int Y^2 ds = I_z ; \quad \int Z^2 ds = I_y ; \\
\int (Y^3 + Y Z^2) ds + 2 Y_0 \int Y^2 ds &= C_Z ; \\
\int (Z^3 + Z Y^2) ds + 2 Z_0 \int Z^2 ds &= C_Y ;
\end{aligned}$$

nous trouvons une expression finale simplifiée de C_p :

$$\begin{aligned}
C_p &= (Y_0^2 + Z_0^2) A + 2 (Z_0^2 - Y_0^2) (I_z - I_y) \\
& + 4 Y_0 C_Z + 4 Z_0 C_Y + \int (Y^4 + Z^4 + 2 Y^2 Z^2) ds
\end{aligned}$$

Tous les termes , que comprend cette constante (tels que : $Y_0, Z_0, A, I_z, I_y \dots$ etc) doivent être calculés, préalablement, avant d'entamer le calcul de C_p .

Par contre , pour pouvoir calculer facilement le dernier Terme(souligné) , il est nécessaire de passer par le changement de variable , des coordonnées principales aux coordonnées arbitraires ; à savoir :

$$Z = z \cos \theta - y \sin \theta$$

$$Y = z \sin \theta + y \cos \theta$$

Aussi , en utilisant les relations suivantes dans le développement des produits de facteur sous l'intégrale :

$$(A - B)^4 = A^4 - 4.A^3.B + 6.A^2.B^2 - 4.A.B^3 + B^4$$

$$(A + B)^4 = A^4 + 4.A^3.B + 6.A^2.B^2 + 4.A.B^3 + B^4$$

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta + \frac{\sin^2 2.\theta}{2} = 1$$

nous déduisons l'expression finale de C_p , qui s'écrit :

$$\begin{aligned} C_p = & (Y_0^2 + Z_0^2) A^2 + 2 (Z_0^2 - Y_0^2) (I_z - I_y) + 4 Y_0 C_Z \\ & + 4 Z_0 C_Y + \int z^4 ds + \int y^4 ds + 2 \int y^2 z^2 ds \\ & + 8 (\cos \theta . \sin^3 \theta - \cos^3 \theta . \sin \theta) \int (y^3 z + y z^3) ds \end{aligned}$$

11- Constante $C_{\rho w}$

La constante $C_{\rho w}$ se définit par la relation suivante :

$$C_{\rho w} = \int \rho^2 \alpha w \, ds$$

avec ρ : le rayon polaire par rapport au centre de cisaillement qui s'exprime par :

$$\rho^2 = Y'^2 + Z'^2$$

Y' et Z' : étant les coordonnées Parallèles aux axes principaux et passant par le centre de cisaillement. D'où

$$C_{\rho w} = \int (Y'^2 + Z'^2) \alpha w \, ds = \int Y'^2 \alpha w \, ds + \int Z'^2 \alpha w \, ds$$

ainsi ; pour passer des coordonnées des axes passant par le centre de cisaillement aux coordonnées des axes passant par le centre de gravité ; nous avons :

$$Y' = Y_0 + Y \quad \text{et} \quad Z' = Z_0 + Z$$

En remplaçant Y' et Z' dans $C_{\rho w}$, nous aurons :

$$\begin{aligned} C_{\rho w} = & Y_0^2 \int \alpha w \, ds + \int Y^2 \alpha w \, ds + 2 Y_0 \int Y \alpha w \, ds \\ & + Z_0^2 \int \alpha w \, ds + \int Z^2 \alpha w \, ds + 2 Z_0 \int Z \alpha w \, ds \end{aligned}$$

rappelons les propriétés suivantes :

$$\int \alpha w \, ds = 0 \quad \text{et} \quad \int Y \alpha w \, ds = \int Z \alpha w \, ds = 0$$

Ces propriétés découlent du théorème de réciprocité .

Remarque : en ce qui concerne les propriétés précédentes et après avoir étudié la démonstration de celles-ci dans l'ouvrage " théorie de la stabilité ", Nous avons trouvé que la démonstration de ces propriétés a été faite sans préciser que les coordonnées Y et Z sont des coordonnées principales . Et aussi, nous avons trouvé une autre fois que ces propriétés ont été utilisées en précisant que y et z sont des coordonnées principales .

Nous en déduisons et d'après le théorème , que le résultat ne change pas si les propriétés sont définies avec des coordonnées quelconques ou principales . Nous obtenons finalement :

$$C_{pw} = \int Y^2 \alpha w ds + \int Z^2 \alpha w ds$$

Pour une question de commodité de calcul des intégrales ci-dessus, il est utile de faire le changement de variable des coordonnées principales aux coordonnées quelconque;

à savoir :

$$Z = z \cos \theta - y \sin \theta$$

$$Y = z \sin \theta + y \cos \theta$$

En remplaçant ces variables dans l'expression de C_{pw} et après développement et simplification, nous aboutissons à:

$$C_{pw} = \int y^2 \alpha w ds + \int z^2 \alpha w ds$$

Remarque : nous constatons que nous avons abouti à une forme de C_{pw} similaire à celle donnée au début du calcul .

12- Constante de gauchissement

La constante de gauchissement est définie par l'intégrale sur la surface du carré de la fonction des déplacements dus au gauchissement de la section droite .

$$C_w = \int_A (\bar{w}_s - w_s)^2 dA$$

\bar{w}_s : étant la fonction de gauchissement

w_s : étant la moyenne de la fonction de gauchissement

La fonction de gauchissement se définit ainsi :

soit une section droite ouverte à parois minces quelconque admettant un centre de cisaillement O , voir figure 11 .

w_s est exprimé comme suit :

$$w_s = w_o - \int_a^s r_o ds$$

r_o : est la distance entre le point centre de cisaillement et la tangente passant par un point de la ligne moyenne de la section droite .

w_o : est la valeur de la fonction w_s au point de départ de la ligne moyenne .

ds : la longueur différentielle curviligne de la ligne moyenne .

Le produit " $r_o ds$ " est considéré positive , si la direction de l'intégrale est dans le sens de l'aiguille d'une montre par rapport au centre de cisaillement .

La moyenne de la fonction de gauchissement se définit par l'intégrale sur la surface de la fonction de gauchissement

divisé par l'aire de la section droite .

$$\bar{W}_s = \frac{1}{A} \int_a^b W_s \, dA$$

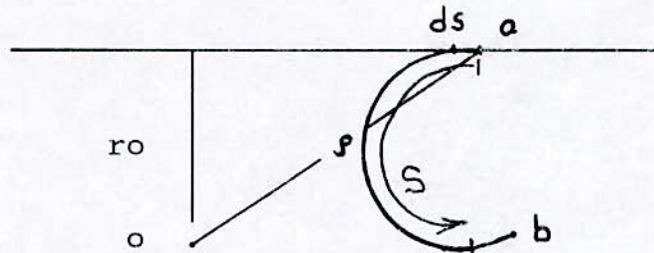


fig 11

13- Constante de torsion

Pour une section à parois minces d'épaisseur différentes la constante de torsion se définit par :

$$J = \frac{1}{3} \sum m_i t_i^3$$

m_i : étant la longueur de la ligne moyenne d'un élément de la section .

t_i : l'épaisseur de l'élément i .

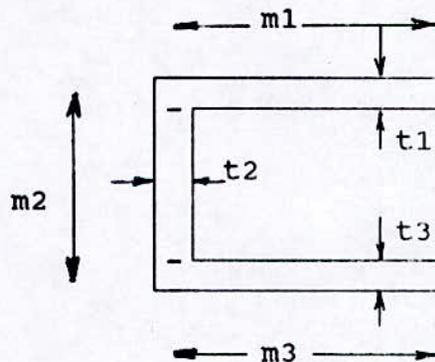


fig 12

A N N E X E 3

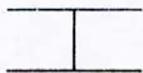
Calcul des propriétés de certaines sections usuelles

Dans cette annexe , nous essayerons de donner quelques applications pour les propriétés de sections .

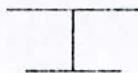
Pour cela , nous avons choisi trois grandes classes géométrique des sections droites , afin de montrer par le calcul de ces propriétés, les phénomènes physiques que peuvent se générer pendant le chargement de la poutre en fonction de la forme de la section droite ; symétrique , mono-symétrique et anti-symétrique .

En même temps ces applications serviront, pour la conception d'une bibliothèque de certaines formes de section , dans le programme général de résolution de l'équilibre des structures à comportement géométrique non-linéaire .

Les sections les plus utilisées par les ingénieurs dans la conception de structures, sont :



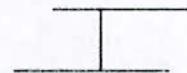
I symétrique



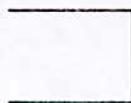
I monosymétrique



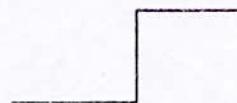
Té



I anti-symétrique



channal monosymétrique



S. dissymétrique

Précisant aussi , qu'après avoir vu que les étapes(détail) du développement de calcul étaient très longues et, pour ne pas encombrer cette thèse, nous avons préféré de donner ici, uniquement, les résultats trouvés pour chacune des propriétés.

1- Section en I symétrique

1.1- Aire de la section droite

$$A = 2 b t_f + h t_w$$

1.2- Centre d'inertie

$$f = \frac{h}{2}$$

1.3- Moments d'inertie et produit d'inertie

$$I_y = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{b t_f^3}{6} + \frac{h t_f b^2}{2}$$

$$I_z = \frac{h t_w^3}{12} + \frac{t_f b^3}{6}$$

$$I_{yz} = 0$$

1.4- Moments d'inertie principaux

$$I_Y = I_z \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta - I_{Gyz} \sin 2 \theta$$

$$I_Z = I_z \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + I_{Gyz} \sin 2 \theta$$

$$\text{Avec } \operatorname{tg} 2 \theta = \frac{2 I_{yz}}{I_z - I_y}$$

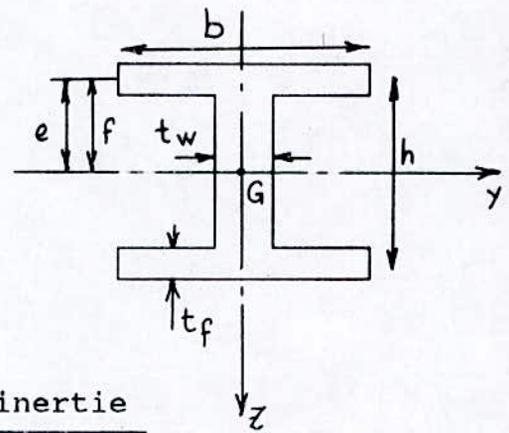
$$\text{Dans ce cas } \Rightarrow \operatorname{tg} 2 \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\text{D'ou } I_Y = I_y$$

$$I_Z = I_z$$

1.5- Centre de cisaillement

$$e = \frac{h}{2}$$



1.6- Moment d'inertie polaire par rapport au centre de cisaillement

$$I_o = I_Z + I_Y + (Y_o^2 + Z_o^2) A$$

Puisque $Y_o^2 + Z_o^2 = y_o^2 + z_o^2$ et avec $y_o = z_o = 0$
on peut conclure aussi que : $Y_o = 0$ et $I_Y = 0$

$$I_o = I_Z + I_Y = I_z + I_y$$

1.7- Constante de torsion

$$J = \frac{2b t f^3 + h t w^3}{3}$$

1.8- Constantes C_y et C_z

$$C_Y = \left(\begin{array}{l} \int z^3 dA \\ - \int z^2 y dA \\ + \int z y^2 dA \\ - \int y^3 dA \end{array} \right) + 2 Z_o I_Y$$

avec $\int z^3 dA = \int z^2 y dA = \int z y^2 dA = \int y^3 dA = 0$

aussi, nous avons : $Z_o = 0$ d'ou $C_Y = 0$

$$C_Z = \left(\begin{array}{l} \int y^3 dA \\ + \int y^2 z dA \\ + \int y z^2 dA \\ + \int z^3 dA \end{array} \right) + 2 Y_o I_Z$$

Nous en déduisons aussi que : $C_Z = 0$

1.9- Constante C_p

$$\begin{aligned}
 C_p = & (Y_o^2 + Z_o^2) A + 2 (Z_o^2 - Y_o^2) (I_Z - I_Y) \\
 & + 4 C_Z Y_o + 4 C_Y Z_o + \int (y^4 + z^4 + 2 y^2 z^2) dA \\
 & + 8 (\cos \theta \sin^3 \theta - \cos^3 \theta \sin \theta) \int y^3 z dA \\
 & + 8 (\cos^3 \theta \sin \theta - \cos \theta \sin^3 \theta) \int y z^3 dA
 \end{aligned}$$

on trouve :

$$\int (y^4 + z^4 + 2 y^2 z^2) dA = \left(\frac{b^5}{40} + \frac{b^4 h}{8} + \frac{b^3 h^2}{12} \right) t f + \frac{h^5 t w}{80}$$

avec $\sin \theta = 0$ et $Y_o = Z_o = 0$

nous obtenons :

$$C_p = \left(\frac{b^5}{40} + \frac{b^4 h}{8} + \frac{b^3 h^2}{12} \right) t f + \frac{h^5 t w}{80}$$

1.10- Constante de gauchissement C_w

$$C_w = \int_0^m (\bar{W}_s - W_s)^2 t ds$$

$$1) W_{s_1} = h / 2 s \quad ; \quad 0 \leq s \leq b$$

$$2) W_{s_2} = W_o + 0 = b h / 4 \quad ; \quad b/2 \leq s \leq (b/2) + h$$

$$3) W_{s_3} = - b h / 2 - h^2 / 2 + h s / 2 + D \quad ; \quad b \leq s \leq 2b + h$$

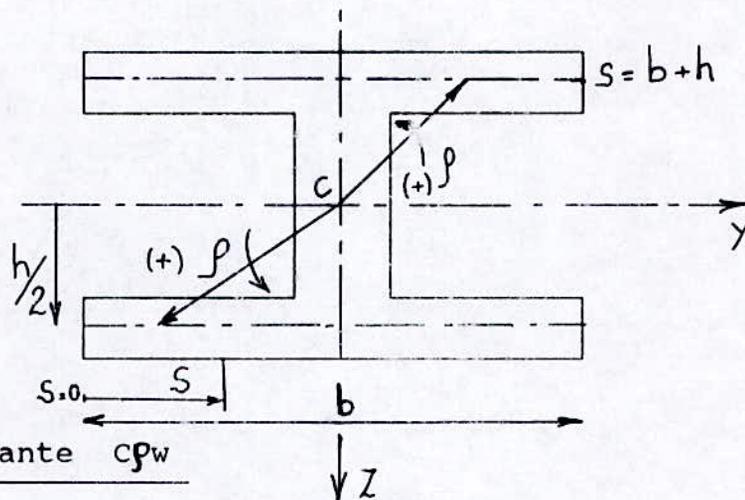
Pour trouver D , on utilise la condition suivante :

$$W_{s_3} (3b/2 + h) = W_{s_2} (b/2 + h) \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$\text{D'ou } W_{s_3} = - b h / 2 - h^2 / 2 + h s / 2 \quad ; \quad b \leq s \leq 2b + h$$

$$\bar{w}_s = 1/m \int_0^m w_s ds = b h/4$$

$$C_w = \frac{t f h^2 + b^3}{24}$$



1.11- Contante C_{pw}

$$C_{pw} = \int \Gamma^2 \alpha_w dA = (y^2 \alpha_w + z^2 \alpha_w) dA$$

On trouve $\int y^2 \alpha_w da = 0$ et $\int z^2 \alpha_w da = 0$

D'ou : $C_{pw} = 0$

2- Section en I mono-symétrique

2.1- Aire de la section droite

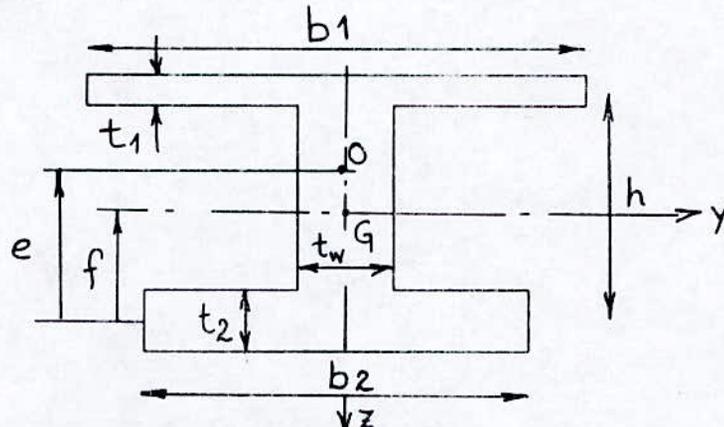
$$A = b_1 t_1 + b_2 t_2 + h t_w$$

2.2- Centre d'inertie

$$f = \frac{h b_1 t_1 + 1/2 h^2 t_w}{b_1 t_1 + b_2 t_2 + h t_w}$$

2.3- Moments d'inertie et produit d'inertie

$$\begin{aligned}
 - I_y &= b_1 t_1 (h - f)^2 + b_2 t_2 f^2 + \frac{t_w h^3}{12} \\
 &+ \left(f - \frac{h}{2} \right) t_w h + \frac{b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3}{12} \\
 - I_z &= \frac{b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3}{12} + \frac{h t_w^3}{12} \\
 - I_{yz} &= 0.
 \end{aligned}$$



2.4- Moments d'inertie principaux

$$I_{yz} = 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

D'où $I_Y = I_y$ et $I_Z = I_z$

2.5- Centre de cisailment

$$e = \frac{h t_1 b_1^3}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3}$$

2.6- Moment d'inertie polaire par rapport au centre de cisailment

$$I_o = I_Z + I_Y + (Y_o^2 + Z_o^2) A$$

nous avons : $y = 0$ et $z_0 = (e - f)$

alors :

$$Y_0^2 + Z_0^2 = (e - f)^2$$

donc

$$I_0 = I_Z + I_Y + (e - f)^2 A$$

puisque $I_Y = I_y$ et $I_Z = I_z$, nous obtenons :

$$I_0 = I_z + I_y + (e - f)^2 A$$

De plus nous trouvons que :

$$Y_0 = 0 \quad \text{et} \quad Z_0 = (e - f)$$

2.7- Constante de torsion

$$J = \frac{b_1^3 t_1^3 + b_2^3 t_2^3 + h^3 t_w^3}{3}$$

2.8- Constantes C_y et C_z .

Puisque $\theta = \pi$ et $Z_0 = (e - f)$, la constante C_Y se réduit à :

$$C_Y = \int z^3 dA + \int z y^2 dA + 2 Z_0 I_Y$$

on trouve :

$$\int z^3 dA = - (h - f)^3 t_1 b_1 - \frac{b_1 t_1^3}{4} (h - f) + f^3 t_2 b_2$$

$$+ \frac{f t_2^3 b_2}{4} + \frac{f^4 - (h - f)^4}{4} \cdot t_w$$

$$\int z y^2 dA = (f - h) \frac{t_1 b_1^3}{12} + \frac{f t_2^3 b_2}{12}$$

Négligeons les termes soulignés, nous obtenons :

$$CY = \frac{(f - h) t_1 b_1^3 + f t_2 b_2^3}{12} + \frac{t_w f^4 - t_w (h - f)^4}{4}$$

$$- (h - f)^3 b_1 t_1 + f b_2^3 t_2 + 2 (e - f) IY$$

Rappelons que IY : moment d'inertie par rapport aux axes principaux . Aussi , CY se réduit à :

$$CZ = \int y^3 dA + \int y z^2 dA + 2 Y_0 IZ$$

avec $Y_0 = 0$

Nous en déduisons directement que les intégrales de y^3 et de $y z^2$ sont nulles parce que la section présente une symétrie par rapport à l'axe z ; d'ou :

$$CZ = 0$$

2.9- Constante Cp

$$\int (y^4 + z^4 + 2 y^2 z^2) dA = \left[\frac{f^5 + (h - f)^5}{5} - \frac{f^4 t_2 + (h - f)^4 t_1}{2} \right] t_w$$

$$+ \frac{b_1^5 t_1}{80} + \frac{b_2^5 t_2}{80} + b_1 (h - f)^4 t_1 + b_2 f^4 t_2$$

$$+ \frac{b_1^3 (h - f)^2 t_1}{6} + \frac{b_2^5 f^2 t_2}{6} = M$$

nous avons :

$$Y_0 = 0 , \quad Z_0 = (e - f) \quad \text{et} \quad \text{aussi} \quad C_z = 0$$

nous trouvons :

$$Cp = Z_0^4 A + 2 Z_0 (I_z - I_y) + 4 Z_0 CY + M$$

2.10- Constante de gauchissement C_w

Nous exploitons le résultat trouvé pour la section en I symétrique . Le résultat C_w trouvé pour un rectangle qui s'éloigne d'un centre O à une distance $h / 2$, donne :

$$C_w = \frac{t h^2 b^3}{4 \cdot 12}$$

Arrangeant cette formule pour la généralisée à un rectangle situé à une distance d_i du centre de cisaillement O , voir figure de la page suivante , on a :

$$C_w = \frac{t d_i^2 b_i^2}{12}$$

Pour la section en I mono-symétrique :

$$C_w = \frac{t d_1^2 b_1^2}{12} + \frac{t d_2^2 b_2^2}{12}$$

avec :

$$d_1 = (h - e) \quad \text{et} \quad d_2 = e$$

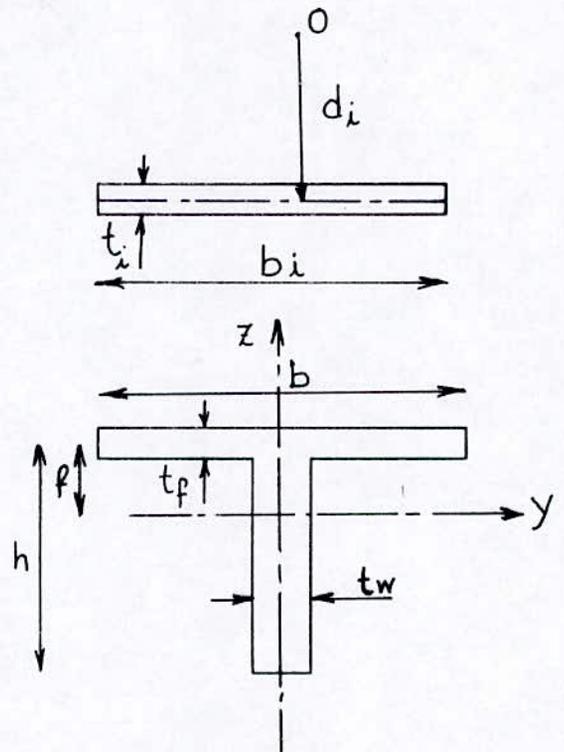
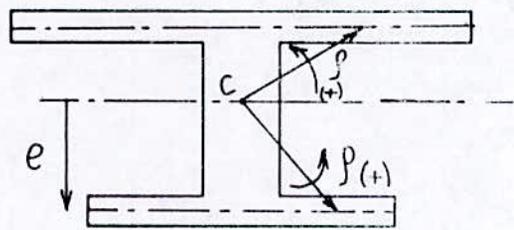
nous remplaçons " e " par sa valeur et on obtient après développement :

$$C_w = \frac{t f}{12} \cdot \frac{h^2 b_1^3 + b_2^3}{b_1^3 + b_2^3}$$

2.11- Constante $C_{\rho w}$

Nous trouvons le même résultat que celui de la section en I :

$$C_{\rho w} = 0$$



3- Section en Té

3.1- Aire de la section

$$A = b t_1 + h t_w$$

3.2- Centre d'inertie

$$f = \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2 t_w}{b t_1 + h t_w}$$

3.3- Moments d'inertie et produit d'inertie

$$I_y = \frac{b t_f^3}{12} + f^2 b t_f + \frac{t_w h^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - f \right)^2 h t_w$$

$$I_z = \frac{t_f b^3}{12} + \frac{h t_w^3}{12}$$

$$I_{yz} = 0$$

3.4- Moments par rapport aux axes principaux

$$I_Y = I_y \quad \text{et} \quad I_Z = I_z$$

$$\text{avec} \quad \theta = \pi$$

3.5- Centre de cisaillement

$$e = f$$

3.6- Moment d'inertie polaire par rapport à O

$$I_o = I_Z + I_Y + (Y_o^2 + Z_o^2) A$$

puisque $Y_o^2 + Z_o^2 = y_o^2 + z_o^2$ avec $y_o = 0$ et $z_o = f$
d'ou

$$I_o = I_Z + I_Y + f^2 A$$

les coordonnées du centre de cisaillement par rapport aux axes principaux positionnés sur le centre de gravité :

$$\Gamma_o = f \Rightarrow \beta = \text{Arctg} \frac{z_o}{y_o} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mu = \theta - \frac{\pi}{2}$$

nous aurons:

$$Y_o = \Gamma_o \cos \mu \quad \text{et} \quad Z_o = \Gamma_o \sin \mu$$

3.7- Constante de torsion

$$J = \frac{b t^3 + h t w^3}{3}$$

3.8- Constante C_Y et C_Z

Nous avons $\theta = \pi$, d'ou $Z_o = \Gamma_o = f$ et $Y_o = 0$.

La constante C_Y se réduit à :

$$C_Y = \int z^3 da + \int z y^2 da + 2 Z_o I_Y$$

$$\int z^3 da = f^3 b t f + \frac{f t^3 b}{4} + \frac{f^4 - (h - f)^4}{4} t w$$

$$\int z y^2 da = \frac{f t^3 b}{12} + \frac{f^2 - (h - f)^2}{2} \cdot \frac{t w^3}{12}$$

Si on néglige les termes soulignés , nous obtenons :

$$CY = \frac{f \, t f \, b^3}{12} + f^3 \, b \, t f + \frac{f^4 - (h - f)^4}{4} \, t w + 2 \, f \, IY$$

aussi , la constante CZ se réduit à :

$$CZ = \int y^3 \, dA + \int y \, z^2 \, dA + 2 \, Y_0 \, IZ$$

Nous en déduisons encore pour cette section que, $\int y^3 \, dA$ et $\int y \, z^2 \, dA$ sont nulles, puisque cette section présente, aussi, une symétrie par rapport à z . De plus, Y_0 est nulle ; nous trouvons :

$$CZ = 0$$

3.9- Constante $C\bar{P}$

Nous avons :

$$\int (y^4 + z^4 + 2 \, y^2 \, z^2) \, dA = \left[\frac{f^5 + (h - f)^5}{5} - \frac{f^4 \, t f}{2} \right] t w + \frac{b^5 \, t f}{80} + b^4 \, f^4 \, t + \frac{b^3 \, f^2 \, t}{6} = M$$

$$\int y^3 \, z \, dA + \int y \, z^3 \, dA = 0$$

avec $\theta = \pi$; $Y_0 = 0$; $Z_0 = f$ et aussi $CZ = 0$; nous obtenons :

$$C\bar{P} = Z_0^4 \, A + 2 \, Z_0^2 \, (Iz - Iy) + 4 \, Z_0 \, CY + M$$

3.10- Constante de gauchissement C_w

Puisque $W_i = 0$ le long de la ligne moyenne. Dans ce cas de section , le centre de cisaillement se trouve sur

l'intersection des lignes moyennes des différentes sections.

Ceci nous permet de déduire que :

$$C_w = 0$$

3.11- Constante C_{pw}

On trouve aussi pour cette section que :

$$C_{pw} = 0$$

4- Section en canal mono-symétrique

4.1- Aire de la section

$$A = 2 b t_f + h t_w$$

4.2- Centre d'inertie

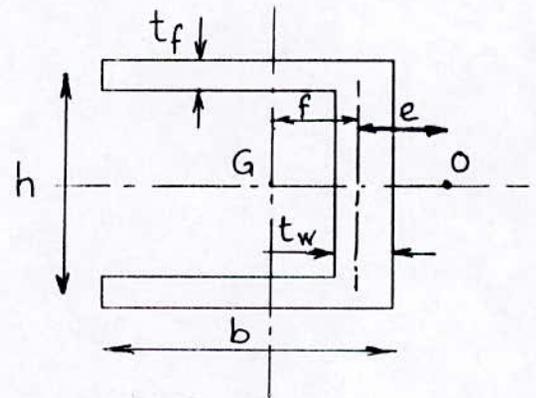
$$f = \frac{b t_f^2}{2 b t_f + h t_w}$$

4.3- Moments et produit d'inertie

$$I_y = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{b t_f^3}{6} + \frac{h^2}{2} \cdot b t_f$$

$$I_z = \frac{t_f b^3}{12} + 2 \left(\frac{b}{2} - f \right)^2 b t_f + \frac{h t_w^3}{12} + f^2 h t_w$$

$$I_{yz} = b t_f \left(b - f - \frac{t_w}{2} \right) h$$



4.4- Moments d'inertie par rapport aux axes principaux

$$I_Z = I_z \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + I_{yz} \sin 2 \theta$$

$$I_Y = I_z \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta - I_{yz} \sin 2 \theta$$

avec
$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 I_{yz}}{I_z - I_y}$$

4.5- Centre de cisaillement

$$e = \frac{4 b^2 t f}{6 b t f + h t w}$$

4.6- Moment d'inertie polaire par rapport au centre de cisaillement

$$I_o = I_z + I_y + (y_o^2 + z_o^2) A$$

nous avons $y_o^2 + z_o^2 = y_o^2 + z_o^2$ avec $z_o = 0$ et $y_o = e + f$
on obtient :

$$I_o = I_z + I_y + (e + f)^2 A$$

Dans ce cas de section, β est nul et donc μ est égale à θ .
Alors, les coordonnées du centre de cisaillement sont :

$$y_o = (e + f) \cos \theta \quad \text{et} \quad z_o = (e + f) \sin \theta$$

4.7- Constante de torsion

$$J = \frac{2 b^3 t f^3 + h^3 t w}{3}$$

4.8- Constantes C_y et C_z

nous trouvons :

$$\int z^3 dA = 0 \quad ; \quad \int z y^2 dA = 0$$
$$\int z^2 y dA = \frac{1}{4} b^2 h^2 t f - \frac{1}{2} b f h^2 t f - \frac{t w f h^3}{12} = M$$
$$\int y^3 dA = b (b - 2 f) \left(\frac{b^2}{2} + f^2 - b f \right) t f - t w h f^3 = L$$

pour une valeur quelconque de l'angle θ , nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 CY = & - (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) (M) \\
 & - (\sin^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) (L) \\
 & + 2 (e + f) \sin \theta \cdot IY
 \end{aligned}$$

De même pour CZ, nous avons trouvé :

$$\begin{aligned}
 CZ = & (\cos^3 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) (L) \\
 & + (\cos^2 \theta \sin \theta + \cos^3 \theta) (M) \\
 & + 2 (e + f) \cos \theta \cdot IZ
 \end{aligned}$$

4.9- Constante C_p

$$\begin{aligned}
 \int (y^4 + z^4 + 2z^2y^2) dA &= \frac{2}{5} [(b-f)^5 + f^5] tf + \frac{b^4 h^2 t f}{8} \\
 &+ \frac{1}{3} [(b-f)^3 + f^3] h^2 t f + \frac{h^5 t w}{80} \\
 &+ f^4 t w (h - t f) - \frac{h^4 t^2 w}{16} + \frac{f^2 h^3 t w}{6} \\
 &- \frac{f^2 h^2 t^2 w}{4} = K
 \end{aligned}$$

$$\int y^3 z dA + \int y z^3 dA = 0$$

Nous aboutissons à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 C_p = & (Y_o^2 + Z_o^2) A + 2 (Z_o^2 - Y_o^2) (IZ - IY) \\
 & + 4 CZ Y_o + 4 CY Z_o + K
 \end{aligned}$$

4.10- Constante de gauchissement C_w

- i) $W_s = h s / 2$ $0 \leq s \leq b$
- ii) $W_s = h s / 2 + b e - e s$ $b \leq s \leq b + h$
- iii) $W_s = - e h - h^2 / 2 + h s / 2$ $b + h \leq s \leq 2 b + h$

$$\bar{W}_s = \frac{h}{2} (b - e)$$

$$C_w = \int_0^m (\bar{W}_s - W_s) t ds$$

$$C_w = \frac{t f h^2 b}{12} \cdot \frac{3 b t f + 2 h t w}{6 b t f + h t w}$$

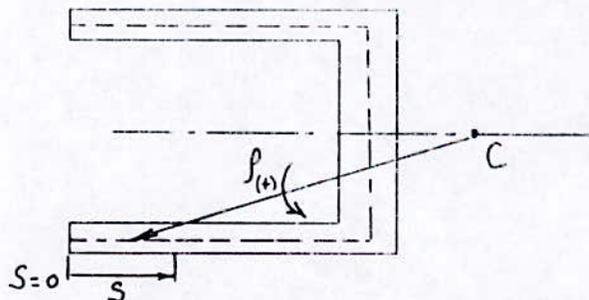
4.11- Constante $C_{\rho w}$

On trouve , aussi , pour cette section :

$$\int y^2 \alpha_w dA = 0 \quad \text{et} \quad \int z^2 \alpha_w dA = 0$$

D'où :

$$C_{\rho w} = 0$$



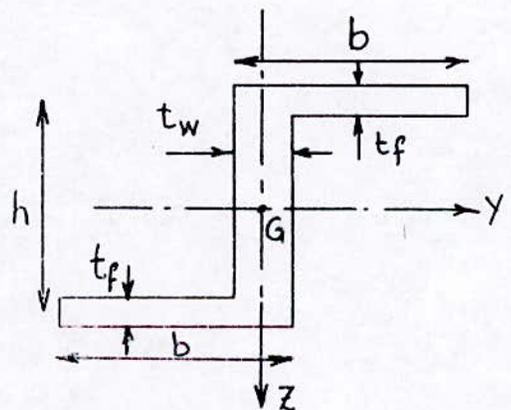
5- Section en S anti-symétrique

5.1- Aire de la section

$$A = 2 b t f + h t w$$

5.2- Centre d'inertie

$$f = \frac{h}{2}$$



5.3- Moments et produit d'inertie

$$I_y = \frac{b t f^3}{6} + \frac{h^2 b t f}{2} + \frac{t w h^3}{12}$$

$$I_z = \frac{2}{3} t f b^3 + \frac{h t w^3}{12}$$

$$I_{yz} = b^2 f t f$$

5.4- Moments d'inertie par rapport aux axes principaux

$$I_Y = I_z \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta - I_{yz} \sin 2 \theta$$

$$I_Z = I_z \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + I_{yz} \sin 2 \theta$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 I_{yz}}{I_z - I_y}$$

5.5- Centre de cisaillement

$$e = \frac{f}{2}$$

5.6- Moment d'inertie polaire par rapport au centre de cisaillement

$$I_o = I_Z + I_Y + (Y_o^2 + Z_o^2) A$$

Nous avons : $y_o = 0$ et $z_o = 0$

D'ou : $Y_o^2 + Z_o^2 = 0 \implies Y_o = Z_o = 0$

Nous obtenons donc :

$$I_o = I_Z + I_Y$$

5.7- Centre de torsion

$$J = \frac{2 b t f^3 + h t w^3}{3}$$

5.8- Constante C_Y et C_Z

nous trouvons que :

$$\int z^3 dA = \int z y^2 dA = \int z^2 y dA = \int y^3 dA = 0$$

avec $Y_0 = Z_0 = 0$; on déduit :

$$C_Y = 0 \quad \text{et} \quad C_Z = 0$$

5.9- Constante C_ρ

$$\int (y^4 + z^4 + 2 y^2 z^2) dA = \frac{2 b^5 t f}{5} + \frac{b^4 h t f}{8} + \frac{b^3 h^2 t f}{3} + \frac{h^5 t w}{80} - \frac{h^4 t f t w}{16} = M$$

$$\int (y^3 z + y z^3) dA = - \frac{b^4 h t f}{4} - \frac{b^2 h^3 t f}{4} = N$$

Finalement, nous obtenons :

$$C_\rho = M - 8 (\cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta) \cdot N$$

5.10- Constante de gauchissement C_w

$$i) W_s = h s / 2 \quad 0 \leq s \leq b$$

$$ii) W_s = b h / 2 \quad b \leq s \leq b + h$$

$$iii) W_s = b h + (h^2 - h s) / 2 \quad b + h \leq s \leq 2 b + h$$

$$\bar{w}_s = \frac{b h}{2 (2 b + h)} (b + h)$$

$$C_w = \frac{h^2 b^3}{12 (2 b + h)} [2 (b + h^2 + b h) t_f + 3 b h t_w]$$

5.11- Constante C_{pw}

Nous trouvons :

$$C_{pw} = \frac{1}{2 A} \left[\frac{b^5 h t_f^2}{3} + \left(\frac{b^2}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{12} \right) b^2 h^2 t_f t_w \right]$$

6- Section en I anti-symétrique

Cette section est celle du longeron du châssis de la locomotive . Nous allons présenter les propriétés de section relatives à une forme en "I" anti-symétrique d'une manière générale .

6.1- Aire de la section

$$A = b_1 t_1 + h t_2 + b_3 t_3$$

6.2- Centre d'inertie

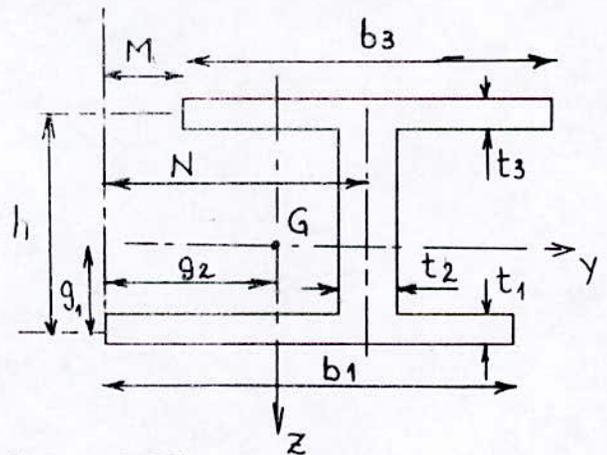
$$g_1 = \frac{h^2 t_2 + 2 b_3 t_3 h}{2 A}$$

$$g_2 = \frac{b_1 t_1 b_1 + 2 h t_2 N + b_3 t_3 (b_3 + 2 M)}{2 A}$$

6.3- Moments et produit d'inertie

$$d_1 = g_1 \quad ; \quad f_1 = \frac{b_1}{2} - g_2 \quad ; \quad d_2 = \frac{h}{2} - g_1$$

$$f_2 = N - g_2 \quad ; \quad d_3 = h - g_1 \quad ; \quad f_3 = M + \frac{b_3}{2} - g_2$$



$$I_y = \frac{b_1 t_1^3}{12} + b_1 t_1 d_1^2 + \frac{c_2 h^3}{12} + h t_2 d_2^2 + \frac{b_3 t_3^3}{12} - b_3 t_3 d_3^2$$

$$I_z = \frac{t_1 b_1^3}{12} + b_1 t_1 f_1^2 + \frac{h t_2^3}{12} + h t_2 f_2^2 + \frac{t_3 b_3^3}{12} + b_3 t_3 f_3^2$$

$$I_{yz} = b_1 t_1 f_1 d_1 + h t_2 f_2 d_2 + b_3 t_3 f_3 d_3$$

6.4- Moments d'inertie par rapport aux axes principaux

$$I_Y = I_z \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta - I_{yz} \sin 2\theta$$

$$I_Z = I_z \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + I_{yz} \sin 2\theta$$

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2 I_{yz}}{I_z - I_y}$$

6.5- Centre de cisaillement

$$e_1 = OC/z = \frac{1}{3} \frac{1}{I_z} [14 t_3 b_3 (h - g_1) - 11 t_1 b_1 g_1]$$

$$e_2 = OC/y = \frac{2}{3} \frac{1}{I_y} [14 t_3 b_3 (h - g_1) - 11 t_1 b_1 g_1]$$

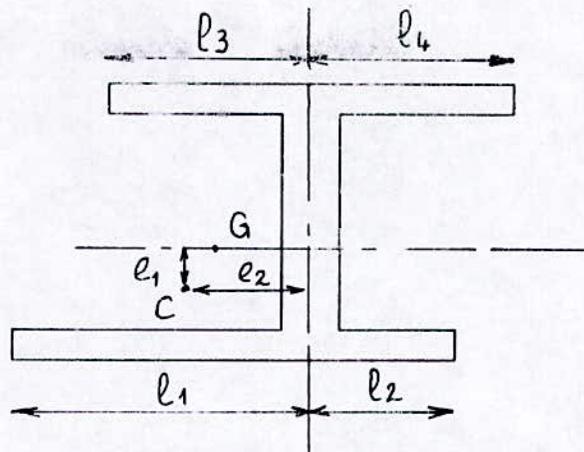
Si $e_1 < 0$, "C" est à droite de O et si $e_1 > 0$, "C" est à gauche de O.

Si $e_2 < 0$, "C" est en dessus de O et si $e_2 > 0$, "C" est en dessous de O (voir figure de la page suivante).

En précisant que O est le milieu de l'âme.

$$y_o = GC/y = | OC/y - f_2 | = | e_2 - f_2 |$$

$$z_o = GC/z = | OC/z | = | e_1 |$$



On définit les paramètres "li" par :

$$l_1 = N ; \quad l_2 = b_1 - N ; \quad l_3 = N - M ; \quad l_4 = b_3 - N$$

6.6- Moments d'inertie polaire par rapport au centre de cisaillement

$$I_o = I_Z + I_Y + (Y_o^2 + Z_o^2) A$$

Nous avons :

$$Y_o^2 + Z_o^2 = (e_2 - f_2)^2 + e_1^2$$

D'ou :

$$I_o = I_Z + I_Y + [(e_2 - f_2)^2 + e_1^2] A$$

Calcul de Y_o et Z_o .

$$\Gamma_o = \sqrt{y_o^2 + z_o^2} = \sqrt{(e_2 - f_2)^2 + e_1^2}$$

$$\beta = \text{Arctg} \frac{z_o}{y_o} = \text{Arctg} \frac{e_1}{e_2 - f_2} \quad \text{et} \quad \mu = \theta - \beta$$

$$Y_o = \Gamma_o \cos \mu \quad \text{et} \quad Z_o = \Gamma_o \sin \mu$$

6.7- Constante de torsion

$$J = \frac{b_1 t_1^3 + h t_2^3 + b_3 t_3^3}{3}$$

6.8- Constantes CY et CZ

$$I = \int z^3 dA = g_1^3 t_1 b_1 + \frac{g_1^4 - (h - g_1)^4}{4} t_2 - (h - g_1)^3 t_3 b_3$$

$$K = \int z y^2 dA = g_1 t_1 \frac{a_2^3 + a_1^3}{2} + (l_1 - a_1)^2 t_2 \frac{[g_1^2 - (h - g_1)^2]}{2}$$

$$- \frac{a_4^3 + a_3^3}{3} (h - g_1) t_3$$

$$J = \int z^2 y dA = \frac{a_2 - a_1}{2} b_1 g_1^2 t_1 + (l_1 - a_1) t_2 \frac{g_1^3 + (h - g_1)^3}{3}$$

$$+ \frac{a_4 - a_3}{2} b_3 (h - g_1)^2 t_3$$

$$L = \int y^3 dA = \frac{a_2^4 - a_1^4}{4} t_1 + (l_1 - a_1)^3 h t_2 + \frac{a_4^4 - a_3^4}{4} t_3$$

avec

$$a_1 = g_2 \quad ; \quad a_2 = b_1 - g_2 \quad ; \quad a_3 = g_2 - M \quad ; \quad a_4 = b_3 - a_3$$

D'ou :

$$CY = (\cos^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) (I + K) - (\sin^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) (J + L) + 2 Z_0 IY$$

Et en déduit :

$$CZ = (\cos^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) (L + J) + (\sin^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta) (K + I) + 2 Y_0 IZ$$

6.9- Constante C_p

$$\begin{aligned}
 M = \int (y^4 + z^4 + 2y^2z^2) dA &= \frac{a_2^5 + a_1^5}{5} t_1 + b_1 g_1^4 t_1 \\
 &+ \frac{2}{3} (a_2 + a_1)^3 g_1^2 t_1 + (l_1 - a_1)^5 h t_2 + \frac{g_1^5 - (h - g_1)^5}{5} t_2 \\
 &+ \frac{2}{3} [g_1^3 + (h - g_1)^3] (l_1 - a_1)^2 t_2 + \frac{a_4^5 + a_3^5}{5} t_3 \\
 &+ b_3 (h - g_1)^4 t_3 + \frac{2}{3} (a_4 + a_3)^3 (h - g_1)^2 t_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N = \int (y^3 z + y z^3) dA &= g_1 t_1 \frac{a_2^4 - a_1^4}{4} - (h - g_1) t_3 \frac{a_4^4 - a_3^4}{4} \\
 &+ (l_1 - a_1)^3 t_2 \frac{g_1^2 - (h - g_1)^2}{2} + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} g_1^3 t_1 \\
 &- \frac{a_4^2 - a_3^2}{2} (h - g_1)^3 t_3 + \frac{1}{4} (g_1 - (h - g_1))^4 (l_1 - b_1) t_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_p &= (Y_o + Z_o)^2 A + 2 (Z_o - Y_o)^2 (I_Z - I_Y) + 4 Y_o^2 C_Z \\
 &+ 4 Z_o^2 C_Y + M + 8 (\cos \theta \sin^3 \theta - \cos^3 \theta \sin \theta) N
 \end{aligned}$$

6.10- Constante de gauchissement

En posant : $k_1 = g_1 - e_1$ et $k_2 = e_2$

i) $W_{s1} = k_1 s$ $0 \leq s \leq b$

ii) $W_{s2} = k_1 l_1 - k_2 l_1 + k_2 s$ $l_1 \leq s \leq l_1 + h$

$$\text{iii) } Ws_3 = 2 k_1 l_1 - k_2 h + k_1 b_3 - b_3 h + k_1 h - l_1 h$$

$$- h^2 + (h - k_1) s \quad ; \quad l_1 + \frac{b_3}{2} + h \leq s \leq l_1 + \frac{3 b_3}{2} + h$$

$$\bar{W}s = \frac{1}{m} \left[\frac{k_1 b_1^2}{2} t_1 + \left(k_1 l_1 h + \frac{k_2 h^2}{2} \right) t_2 \right. \\ \left. + (k_1 l_1 b_3 + k_2 b_3 h) t_3 \right]$$

$$\text{avec } m = b_1 t_1 + b_3 t_3 + h t_2$$

$$C_w = \left(\bar{W}s^2 b_1 - k_1 \bar{W}s b_1 + \frac{k_1 b_1^3}{3} \right) t_1$$

$$+ \left[p h^2 - p k_2 (h + 2 l_1 h) + \frac{k_2^2}{3} (3 l_1 h + 3 l_1 h + h^3) \right] t_2$$

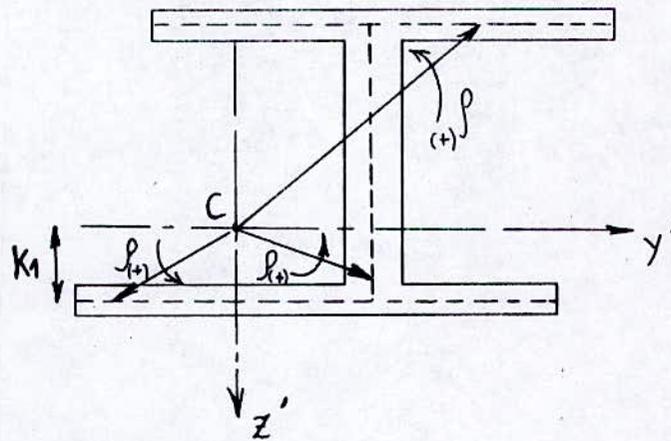
$$+ \left[Q b_3^2 - 2 Q (h - k_1) (b_3 + l_1 b_3 + b_3 h) \right]$$

$$+ \frac{(h - k_1)^2}{3} \left[\left(l_1 + \frac{3 b_3}{2} + h \right)^3 - \left(l_1 + \frac{b_3}{2} + h \right)^3 \right] t_3$$

avec :

$$p = \bar{W}s - k_1 l_1 + k_2 l_1$$

$$Q = \bar{W}s - 2 k_1 l_1 - k_2 h - k_1 b_3 + b_3 h - k_1 h + l_1 h + h^2$$



6.11- Constante CPw

$$\begin{aligned}
 CPw = & \left[(\bar{W}s - k_1 a_1) \frac{a_2^3 + a_1^3}{3} - \frac{k_1}{4} (a_2^4 - a_1^4) \right] t_1 \\
 & + \left(\bar{W}s h - k_1 l_1 h - \frac{k_2 h^2}{2} \right) (l_1 - a_1)^2 t_2 \\
 & + \left[(\bar{W}s - k_1 l_1 - k_2 h - \frac{k_1 b_3}{2} + \frac{b_3 h}{2} - a_4 h + k_1 a_4) \frac{a_4^3 + a_3^3}{3} \right. \\
 & \left. + \frac{h - k_1}{4} (a_4^4 - a_3^4) \right] t_3 + \left(\bar{W}s b_1 - \frac{k_1 b_1^2}{2} \right) g_1^2 t_1 \\
 & + \left[(\bar{W}s - k_1 l_1 - k_2 g_1) \frac{g_1^3 + (h - g_1)^3}{3} + \frac{k_2}{4} (g_1^4 - (h - g_1)^4) \right] t_2 \\
 & + \left(\bar{W}s b_3 - k_1 l_1 b_3 - k_2 b_3 h \right) (h - g_1)^2 t_3
 \end{aligned}$$