

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

École Nationale Polytechnique
Laboratoire de Commande des Processus



Projet de Fin d'Études

En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'État
en Automatique

Thème

**Multi-observateur pour un système non linéaire :
Application à une station d'épuration**

Présenté par :

M. BOUZRINA Djamel-Eddine

M. DERRAR Mohamed El Mehdi

Proposé et encadré par :

Dr Illoul R.

Soutenu le : 22/06/2015

Devant le jury composé de :

Président : *Dr ACHOUR H.* École Nationale Polytechnique

Rapporteur : *Dr ILLOUL R.* École Nationale Polytechnique

Examineur : *Pr CHEKIREB H.* École Nationale Polytechnique

Juin 2015

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du Laboratoire de Commande des Processus de l'École Nationale Polytechnique sous la direction de M. Rachid ILLOUL. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde reconnaissance pour ses précieux conseils et la disponibilité dont il a toujours fait preuve à notre égard.

Nos remerciements vont aussi à Messieurs les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer notre travail. Nous adressons également nos remerciements à l'ensemble des enseignants de génie électrique et en particulier à ceux du Département d'Automatique.

Enfin, nous voudrions réserver nos derniers remerciements à nos familles respectives ainsi qu'à tous nos camarades qui nous ont apporté un grand soutien lors de l'élaboration de ce travail.

Je dédie ce mémoire à mes parents et
à mon frère qui m'ont soutenu tout
au long de ma scolarité.

Djamel-Eddine BOUZRINA

Je dédie ce travail à toute personne
qui m'a soutenu, ma famille et
spécialement mes amis.

Mohamed El Mehdi DERRAR

Résumé

Le travail présenté ici est dédié à la synthèse d'un estimateur d'état pour un modèle de station d'épuration à boue activée. Le système considéré est représenté par un modèle flou de Takagi-Sugeno avec des entrées inconnues. Les conditions de stabilité de ce type d'estimateurs sont exprimées en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI). La technique de résolution sur MATLAB de ces LMIs ainsi qu'une simulation du système sont données ici.

Mots-clefs. ASM1 - modélisation floue - conception d'observateur flou - multimodèle - observateur à entrées inconnues.

Abstract

The work presented here is dedicated to the synthesis of a state observer for an activated sludge model water treatment plant. The considered system is represented by a fuzzy Takagi-Sugeno model with unknown inputs. Stability conditions of such observers are expressed in terms of linear matrix inequalities (LMI). The MATLAB resolution technique for these LMIs and a simulation of the system are given here.

Keywords. ASM1 - fuzzy modeling - fuzzy observer design - multiple model - unknown input observer.

ملخص

العمل المقدم هنا مخصص لتشكيل مقدر للمتغيرات الحالية لنموذج محطة معالجة مياه الصرف مزودة بطين منشط. النظام المقترح مقدم على شكل نموذج ضبابي لـ تاكاغي-سوجينو بإدخالات مجهولة. شروط الاستقرار لهذا النوع من المقدرات معبرة عن طريق متراجحات مصفوفية خطية (LMI). طريقة حل هذه المتراجحات باستعمال ماتلاب مع المحاكاة الخاصة بنموذج المحطة مقدمة هنا.

كلمات مفتاحية. ASM1 - نمذجة ضبابية - إنشاء مراقب ضبابي - نمذجة متعددة - مراقب إدخالات مجهولة.

Table des matières

Résumé	iii
Liste des tableaux	vi
Table des figures	viii
Notations	ix
Introduction générale	1
1 Le processus d'épuration des eaux	3
1.1 Description du procédé de traitement des eaux	4
1.1.1 Traitements primaires	4
1.1.2 Traitements secondaires	5
1.1.2.1 Le lagunage naturel	5
1.1.2.2 Les boues activées	5
1.1.2.3 Les bio-filtres et filtres bactériens	6
1.1.3 Traitements tertiaires	6
1.2 Le modèle ASM1	7
1.2.1 Variables d'état	7
1.2.1.1 Variables d'entrée	9
1.2.1.2 Variables de sortie	10
2 Modélisation du modèle ASM1	11
2.1 Procédés du modèle ASM1	11
2.1.1 Croissance aérobie des hétérotrophes ρ_1	11
2.1.2 Croissance anoxique des hétérotrophes ρ_2	11
2.1.3 Croissance aérobie des autotrophes ρ_3	12
2.1.4 Décomposition des hétérotrophes ρ_4 et des autotrophes ρ_5	12
2.1.5 Ammonification de l'azote organique soluble ρ_6	13
2.1.6 Hydrolyse des composés organiques absorbés ρ_7	13
2.1.7 Hydrolyse de l'azote organique absorbé ρ_8	13
2.2 Paramètres du modèle	14
2.3 Formulation du modèle	16
2.4 Restrictions sur le modèle	19
2.5 Simulation du modèle	20
2.6 Réduction du modèle de la station d'épuration	24
2.6.1 Résultats de la simulation	25
2.6.2 Comparaison du modèle ASM1 et du modèle réduit	27

3	Modèles flous de Takagi-Sugeno	30
3.1	L'approche multimodèle	30
3.1.1	Les différents types de multimodèles	31
3.2	Multimodèle pour le modèle de la station d'épuration	32
3.2.1	Multimodèle découplé	32
3.2.1.1	Structure du multimodèle	32
3.2.1.2	L'algorithme d'identification	33
3.2.1.2.1	Données de mesure	33
3.2.1.2.2	Classification des données	34
3.2.1.2.3	Calcul des fonctions d'appartenance	34
3.2.1.2.4	Paramètres consécutifs	34
3.2.2	Multimodèle couplé	34
3.2.2.1	Transformation par secteurs non linéaires	34
3.2.2.1.1	Exemple explicatif	36
3.2.3	Propriétés des multimodèles	39
3.2.3.1	Stabilité	39
3.2.3.2	Observabilité et commandabilité	40
4	Exploitation des multimodèles	41
4.1	Multimodèle pour la station d'épuration	41
4.1.1	Multimodèle par identification	41
4.1.2	Transformation par secteurs non-linéaires	43
4.2	Observateur à entrées inconnues à base de Multimodèle	54
	Conclusion générale	60
	Annexe A : Paramètres du modèles ASM1	62
A.1	Variables d'état	62
A.2	Matrice cinétique du modèle ASM1	63
A.3	Paramètres numériques	64
A.4	Équations d'état du modèle ASM1	65
A.5	Programme d'identification du multimodèle	67
A.6	Le multimodèle découplé	68
A.7	Les inégalités matricielles linéaires	74
A.8	Résolution des LMIs	75
	Annexe B : Définitions	77
	Bibliographie	78

Liste des tableaux

2.1	Valeurs des variables initiales et en entrée	21
3.1	Multimodèles couplés et découplés	31
A.1	Variables d'état du modèle ASM1	62
A.2	Matrice cinétique du modèle ASM1.	63
A.3	Paramètres stœchiométriques et cinétiques du modèle ASM1.	64
A.4	Paramètres du modèle.	68
A.5	Paramètres conséquents 1.	69
A.6	Centres des clusters 1.	69
A.7	Paramètres conséquents 2.	70
A.8	Centres des clusters 2.	70
A.9	Paramètres conséquents 3.	70
A.10	Centres des clusters 3.	71
A.11	Paramètres conséquents 4.	71
A.12	Centres des clusters 4.	71
A.13	Paramètres conséquents 5.	72
A.14	Centres des clusters 5.	72
A.15	Paramètres conséquents 6.	72
A.16	Centres des clusters 6.	73

Table des figures

1.1	Station d'épuration des eaux usées du groupement urbain d'Oran	3
1.2	Processus de traitement des eaux	4
1.3	Schéma du procédé d'épuration par boues activées.	5
1.4	Caractérisation des eaux usées pour les composants carbonés selon l'IWA.	8
1.5	Caractérisation des eaux usées pour les composants azotés selon l'IWA.	9
1.6	Évolution des variables d'état au cours du temps.	10
2.1	Réponse du modèle ASM1	22
2.1a	Entrée $D = \frac{q_{in}}{V}$	22
2.1b	S_O	22
2.1c	S_I	22
2.1d	S_{NO}	22
2.1e	S_{NH}	22
2.1f	S_{ND}	22
2.2	Réponse du modèle ASM1	23
2.2a	X_{ND}	23
2.2b	X_I	23
2.2c	X_S	23
2.2d	S_S	23
2.2e	X_{BA}	23
2.2f	X_{BH}	23
2.3	Réponse du modèle ASM1 réduit	26
2.3a	X_{BA}	26
2.3b	X_{BH}	26
2.3c	S_{NO}	26
2.3d	S_{NH}	26
2.3e	S_O	26
2.3f	X_{DCO}	26
2.4	Comparaison du modèle ASM1 et du modèle réduit	28
2.4a	X_{BA}	28
2.4b	X_{BH}	28
2.4c	S_{NO}	28
2.4d	S_{NH}	28
2.4e	S_O	28
3.1	Multimodèles couplés et découplés	31
3.2	Différentes approches possibles	32
3.3	Non-linéarité de secteur local	35
3.4	Fonctions d'appartenance	39

4.1	Comparaison du modèle ASM1 réduit et du multimodèle découplé	42
4.1a	X_{BA}	42
4.1b	X_{BH}	42
4.1c	S_{NO}	42
4.1d	S_{NH}	42
4.1e	S_O	42
4.1f	X_{DCO}	42
4.2	Fonctions d'appartenance du modèle ASM1 réduit	49
4.3	Fonctions d'appartenance du modèle ASM1 réduit	49
4.4	Fonctions d'activation du modèle ASM1 réduit	50
4.5	Fonctions d'activation du modèle ASM1 réduit	51
4.6	Fonctions d'activation du modèle ASM1 réduit	51
4.7	Fonctions d'activation du modèle ASM1 réduit	52
4.8	Comparaison du modèle ASM1 réduit et du multimodèle couplé	53
4.8a	X_{BA}	53
4.8b	X_{BH}	53
4.8c	S_{NO}	53
4.8d	S_{NH}	53
4.8e	S_O	53
4.8f	X_{DCO}	53
4.9	Estimateur d'état à entrées inconnues - états	57
4.9a	X_{BA}	57
4.9b	X_{BH}	57
4.9c	S_{NO}	57
4.9d	S_{NH}	57
4.9e	S_O	57
4.9f	X_{DCO}	57
4.10	Estimateur d'état à entrées inconnues - entrées estimées	58
4.10a	$S_{NH,in}$	58
4.10b	$X_{BH,in}$	58
4.11	Entrées connues utilisées pour l'estimation.	58
4.11a	q_a	58
4.11b	$X_{DCO,in}$	58

Notations

Acronymes

LMI	Linear Matrix Inequality
LTI	Linear Time Invariant
LPV	Linear Parameter Varying
quasi-LPV	quasi-Linear Parameter Varying
MM	Multimodèle
MIMO	Multiple Inputs Multiple Outputs
SISO	Single Input Single Output
T-S	Takagi-Sugeno
ASM	Activated Sludge Model

Vecteurs et matrices

I_n	Matrice identité de dimension n
$O_{n,m}$	Matrice nulle de dimensions $n \times m$
$A > 0$ ($A < 0$)	Matrice A définie positive (resp. définie négative)
A^T	Transposée de la matrice A
A^{-1}	Inverse de la matrice A
$\text{Tr}(A)$	Trace de la matrice A
$\lambda_{max}(A)$ ($\lambda_{min}(A)$)	Valeur propre maximale (resp. minimale) de A

Introduction générale

Les représentations d'état sont utilisées de manière routinière afin de modéliser les systèmes dynamiques linéaires et non linéaires. Les applications de ces dernières incluent la commande par retour d'état (voir, par exemple, [Antsaklis and Michel, 2006, Brogan, 1991] ou [Rugh, 1996]), la détection des défauts (voir, par exemple, [Frank, 1990] ou [Ding, 2005]) ainsi que la supervision et la surveillance des systèmes. L'état du système n'est cependant pas habituellement disponible car il est rarement possible d'avoir un capteur pour chaque variable d'état, et une certaine forme de reconstruction à partir des données mesurées est requise. Dans ce cas, un observateur peut être construit en utilisant le modèle mathématique du système afin d'obtenir une estimation $\hat{\boldsymbol{x}}$ de l'état du système \boldsymbol{x} . Cette estimation peut être alors utilisée comme substitut pour \boldsymbol{x} .

Toutes ces techniques passent par une phase de modélisation qui vise à représenter le système étudié le plus fidèlement possible. En pratique, la plupart des systèmes sont mieux représentés par des modèles non linéaires que par des modèles linéaires, qui ne restent valables que sur une portion limitée de l'espace étudié sur lequel le système peut fonctionner. Cependant, nous constatons de fait que l'utilisation des modèles non linéaires pour l'identification, l'estimation, la commande, ou le diagnostic des défauts est toujours plus difficile à mettre en œuvre que celle concernant les systèmes linéaires, et c'est précisément pour cette raison qu'il est intéressant d'utiliser des techniques de modélisation qui permettent de modéliser des systèmes non linéaire et en même temps de pouvoir utiliser des techniques adaptées aux modèles linéaires sur ce dernier.

Un candidat idéal pour cette approche est la technique du multi-modèle [Murray-Smith and Johansen, 1997], aussi appelé modèle flou de Takagi-Sugeno [Takagi and Sugeno, 1985], modèle linéaire polytopique [Angelis, 2001], ou modèle affine par morceaux [Mignone et al., 2000]. Son principe réside sur le fait de décrire le fonctionnement du système à l'aide

de sous-modèles souvent linéaires, où chaque sous-modèle contribue de manière variable dans le temps au comportement global du système. La contribution de chaque sous-modèle au modèle global est une combinaison convexe des sous-systèmes faisant appel à des fonctions de pondération associées à chacun d'entre eux.

Nous allons, dans le cadre de ce projet de fin d'études, modéliser une station d'épuration puis trouver son multi-modèle dans le but de synthétiser un observateur d'états en utilisant une technique d'optimisation convexe qui fait appel à des inégalités matricielles linéaires (LMI) [[Tanaka and Wang, 2001](#)].

Chapitre 1

Le processus d'épuration des eaux

Le traitement des eaux usées constitue un des enjeux de santé publique les plus importants dans le monde, avec plus de 5 millions de morts chaque année causées par la consommation d'eau polluée [OECD, 2006].

Les eaux usées sont toutes les eaux chargées de différents éléments provenant de la population et des activités commerciales et industrielles. Ces dernières sont de nature à polluer les milieux dans lesquelles elles seront déversées. C'est pourquoi, des traitements sont réalisés sur ces effluents par le réseau d'assainissement urbain.

La plupart des stations d'épuration fonctionnent selon les mêmes processus de base, mais des différences peuvent exister dans la manière de mettre en place ces processus. Le traitement se divise généralement en plusieurs étapes [Moulin et al., 2013].



FIGURE 1.1 – Station d'épuration des eaux usées du groupement urbain d'Oran

1.1 Description du procédé de traitement des eaux

Les méthodes de traitement des eaux usées sont diverses et peuvent être classées en trois catégories : les traitements primaires, secondaires et tertiaires. On peut également tenter une classification physique et biologique qui revient grossièrement à distinguer d'un côté les traitements primaires et de l'autre les traitements secondaires et tertiaires.

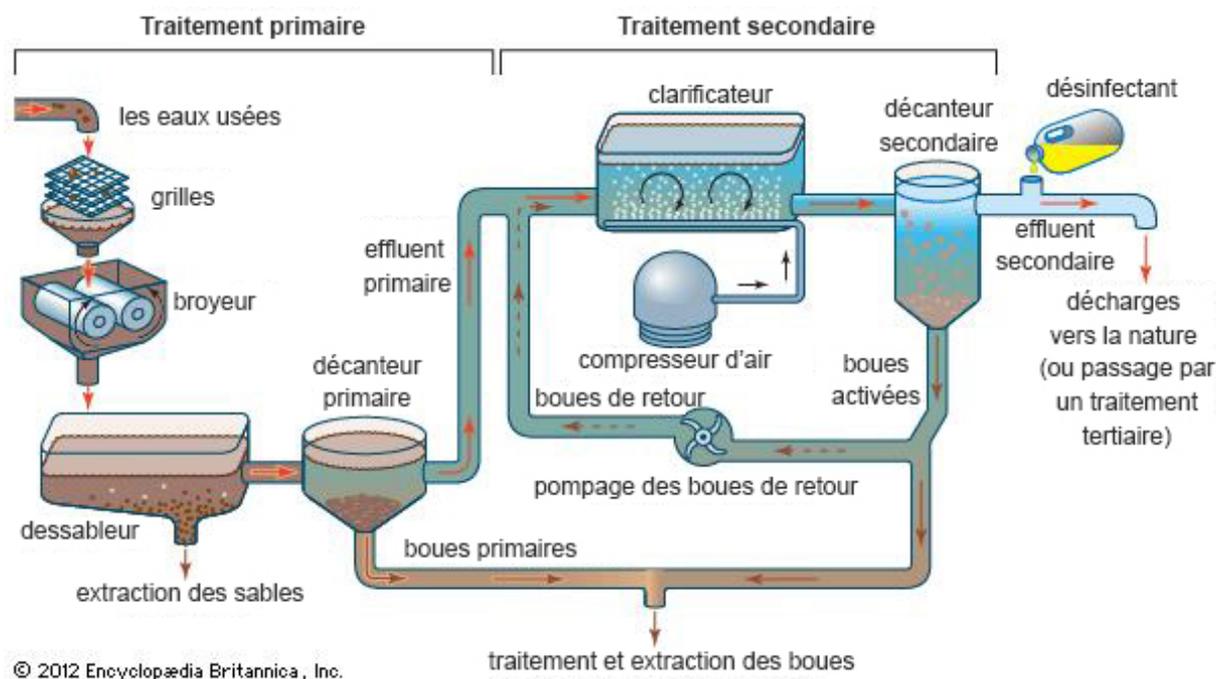


FIGURE 1.2 – Processus de traitement des eaux

1.1.1 Traitements primaires

Les prétraitements sont une phase d'épuration grossière. On élimine tous les éléments solides volumineux et grossiers (sables, corps gras) qui pourraient d'ailleurs endommager les installations par la suite. Notons qu'on retire alors environ 35% des éléments polluants. Tout d'abord on réalise le dégrillage : on fait passer l'eau à travers des grilles plus ou moins grossières pour récupérer tous les éléments solides plus gros que les espacements des grilles. L'eau qui est issue de ce premier traitement subit ensuite le desablage et le déshuilage-dégraissage. La vitesse d'écoulement de l'eau est ralentie, des particules de taille alors plus petite vont sédimenter (boues primaires) et les graisses, moins denses vont remonter à la surface. On va alors retirer les sables par pompage et prélever l'écume. Le traitement primaire au sens strict est un traitement physico-chimique. Il est possible

d'ajouter dans l'eau des agents coagulants et flocculants. On peut alors récupérer un grand nombre de particules en suspension par décantation ou flottation. (boues physico-chimiques) Cette étape permet d'éliminer 90% des particules et objets en suspension. Elle est commune à une très grande majorité des stations d'épuration. Mais il reste alors dans l'eau tout ce qui y est dissous : éléments azotés, phosphatés, composés actifs et des particules fines. Se rajoutent ensuite les traitements secondaires voire tertiaires.

1.1.2 Traitements secondaires

Ces traitements sont biologiques et permettent d'éliminer les polluants dissous. Pour cela on utilise des populations de micro-organismes capables de les consommer. Dans les cas étudiés, le principe général est de favoriser la croissance de communautés de bactéries aérobies, c'est-à-dire qui prélève l'O₂ pour leur métabolisme. On en distingue différents types :

1.1.2.1 Le lagunage naturel

Les eaux usées sont stockées dans des plans d'eau peu profonds : les lagunes. L'activité microbienne se fait naturellement : échange avec l'atmosphère, photosynthèse. Des aérateurs peuvent être utilisés pour brasser l'air et optimiser l'activité des bactéries. Ces processus induisent la formation de boues de lagunage au fond des bassins qui sont récupérées.

1.1.2.2 Les boues activées

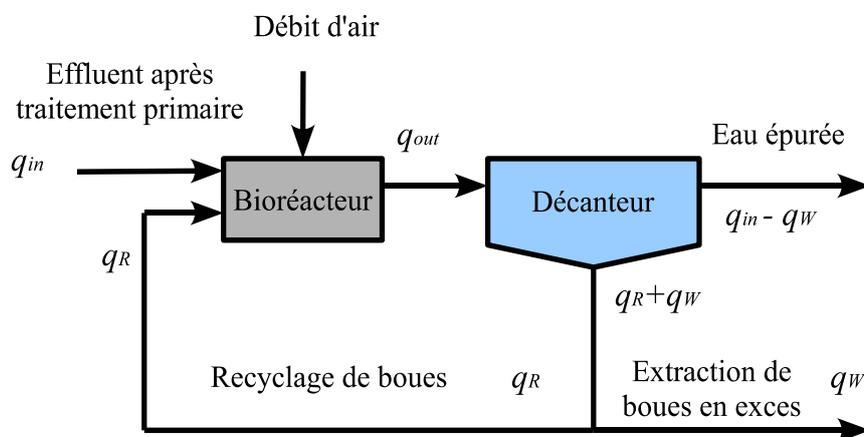


FIGURE 1.3 – Schéma du procédé d'épuration par boues activées.

On force ici le mélange du dioxygène, des eaux usées et des bactéries dans des bassins. Les espèces sont sélectionnées selon ce que l'on souhaite éliminer : carbone, azote, phosphore. Les bactéries et leurs déchets du métabolisme forment, dans un bassin appelé bio-réacteur, des boues (boues secondaires) qui sont ensuite traitées et utilisées pour la fertilisation des sols par exemple. Une partie de ces boues retourne dans les bassins pour éviter une trop grande perte en bactéries.

1.1.2.3 Les bio-filtres et filtres bactériens

On peut également faire percoler l'eau à travers un matériau où se développent des bactéries. Cela peut être des galets ou des supports (lits bactériens) ou des argiles cuites, des schistes, des sables (bio-filtres). Ces traitements sont utilisés en plus du processus des boues activées, permettant d'éliminer une plus grande diversité de polluants. En effet, on va alors concentrer les bactéries et ainsi localiser leur action, la rendant plus efficace.

De nombreuses stations d'épuration cumulent aujourd'hui les traitements primaires et secondaires. Certaines plus rares utilisent des traitements avancés ou tertiaires. En effet, à la fin des traitements secondaires, il reste encore dans l'eau des éléments dissous que les bactéries n'auront pas absorbés (azote, phosphore) et des éléments qu'elles ne sont de toute manière pas aptes à traiter (œstrogènes par exemple).

1.1.3 Traitements tertiaires

Ces traitements sont à la fois physico-chimiques et biologiques. On les réalise après les traitements primaires et secondaires afin d'éliminer des éléments nutritifs résiduels, des polluants organiques résistants, des métaux, des pigments. Par exemple, on peut utiliser des traitements biologiques avancés pour éliminer le phosphore par le Déplacement Nutritif Biologique (DNF). On fait passer l'eau par différents réservoirs avec des bactéries et dans des conditions environnementales différentes (différence de concentration en dioxygène par exemple). On récupère ensuite les boues lors d'un nouveau passage dans un clarificateur. Un autre type de traitement que l'on pourrait classer comme tertiaire est le traitement aux UV. On dénature alors des molécules, comme les œstrogènes, sensibles à ces rayons.

1.2 Le modèle ASM1

Activated Sludge Model, ou **ASM** (modèle à boue activée) est le nom générique d'un groupe de méthodes mathématiques servant à modéliser les systèmes à boue activée. Les recherches en ce sens sont coordonnées par un groupe de travail de l'Association Internationale de l'Eau (International Water Association, IWA) [Henze et al., 2006]. Les ASM sont utilisés dans le domaine de la recherche scientifique afin d'étudier les processus biologiques dans des systèmes hypothétiques. Ils peuvent être appliqués à des stations d'épuration à pleine échelle pour l'optimisation lorsque ces derniers sont calibrés avec soin en utilisant des données de référence pour la production de boue et des nutriments dans l'effluent.

Plusieurs études ont également été effectuées dans ce sens [Nelson and Sidhu, 2009, Hellstedt, 2005, Direction générale de la recherche, 2002].

Un modèle à boue activée consiste en [Jeppsson, 1997] :

- Des variables d'état : celles-ci incluent différents constituants de la DCO, la biomasse et différents types de nutriments organiques et inorganiques.
- Des processus dynamiques : une liste de différents processus biologiques qui sont modélisés avec leurs paramètres et qui décrivent la situation du système biologique tels que la croissance et la décomposition, les coefficient de saturation et d'hydrolyse.

1.2.1 Variables d'état

Dans le modèle de l'IWA, les matières carbonées sont divisées en DCO biodégradable, DCO non-biodégradable et biomasse, voir la figure 1.4. La DCO est ensuite divisée en substrats rapidement biodégradables S_S et lentement biodégradables X_S . Le substrat facilement biodégradable est supposé consister en des molécules solubles simples qui peuvent être facilement absorbées par les organismes et métabolisées pour la production d'énergie, tandis que le substrat lentement biodégradable est supposé être constitué de particules et molécules organiques colloïdales complexes qui nécessitent une dégradation enzymatique avant l'absorption et l'utilisation.

Il est à noter qu'une fraction du substrat lentement biodégradable peut en fait être soluble mais qu'elle est traitée comme un matériau particulaire dans le modèle. La DCO non-biodégradable est divisé en matériau

soluble S_I et particulaire X_I . Les deux sont considérés comme non affectés par l'action biologique dans le système. Le matériau inerte soluble quitte le système par l'effluent du clarificateur secondaire, tandis que la matière particulaire inerte reste prisonnière dans la masse de boue et s'accumule en tant que solides inertes volatiles en suspension. La matière particulaire inerte est éliminée du système par élimination des boues en excès et, dans une certaine mesure, est ainsi présente dans l'effluent du décanteur. En outre, la biomasse active est divisée en deux types d'organismes : biomasse hétérotrophe $X_{B,H}$ et biomasse autotrophe $X_{B,A}$. Enfin, une variable d'état supplémentaire X_P pour modéliser les produits particuliers inertes découlant de la décomposition de la biomasse est ajoutée.

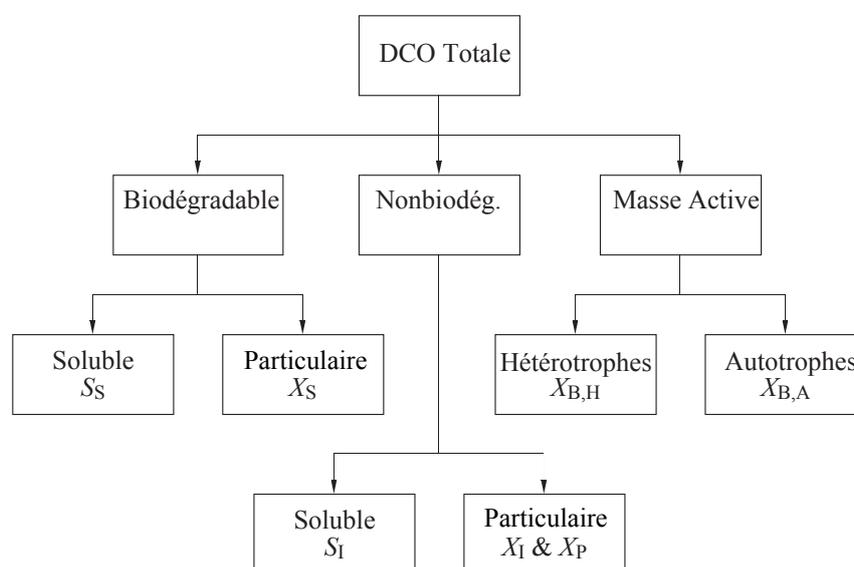


FIGURE 1.4 – Caractérisation des eaux usées pour les composants carbonés selon l'IWA [Jeppsson, 1997].

La matière azotée dans les eaux usées est divisée, comme indiqué dans la figure 1.5. Sur la base de mesures de l'azote total de Kjeldahl (TKN), l'azote est divisé en ammoniac libre et une solution saline S_{NH} , azote lié organiquement et azote de la masse active, ce qui veut dire qu'une fraction de la biomasse est supposée être de l'azote. De manière similaire à la division de la matière organique, l'azote lié organiquement est divisé en fractions solubles et particulaires, qui à leur tour, peuvent être biodégradables ou non biodégradables. Il devrait être noté que seulement l'azote organique particulaire biodégradable X_{ND} et l'azote organique soluble biodégradable S_{ND} sont explicitement inclus dans le modèle. L'azote de la masse active X_{NB} n'est inclus dans le modèle que dans le sens où décomposition de la biomasse va conduire à une production de particules organiques azotées

biodégradables. L'azote organique associé aux produits particuliers organiques inertes X_{NP} et la matière particulaire organique inerte X_{IN} peuvent être facilement calculés, bien que non décrits dans la matrice du modèle. L'azote soluble inerte S_{NI} n'est pas modélisé. Enfin, l'azote sous forme de nitrate et de nitrite sont combinés en une variable S_N , pour simplifier le modèle.

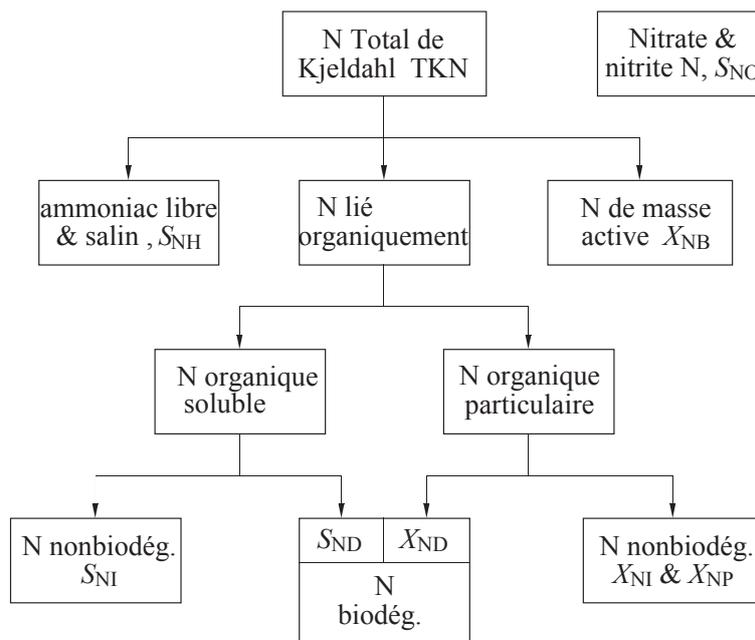


FIGURE 1.5 – Caractérisation des eaux usées pour les composants azotés selon l'IWA [Jeppsson, 1997].

Les deux derniers éléments décrits dans le modèle de l'IWA sont la concentration d'oxygène dissous S_O , exprimée en DCO négative, et l'alcalinité S_{ALK} .

En final, le vecteur d'état retenu sera, suivant le modèle de [Nagy, 2010] :

$$\mathbf{x} = [S_I \ S_S \ X_I \ X_S \ X_{BH} \ X_{BA} \ S_{NO} \ S_{NH} \ S_{ND} \ X_{ND} \ S_O]^T \quad (1.1)$$

1.2.1.1 Variables d'entrée

Les concentrations en composants solubles $S_{\bullet,in}$ et particulières $X_{\bullet,in}$ dans l'eau polluée qui rentrent dans le bassin de réaction sont considérées comme variables d'entrée du modèle. Les débits d'entrée q_{in} , de recyclage q_R et d'extraction q_W font aussi partie de cet ensemble de variables, dont

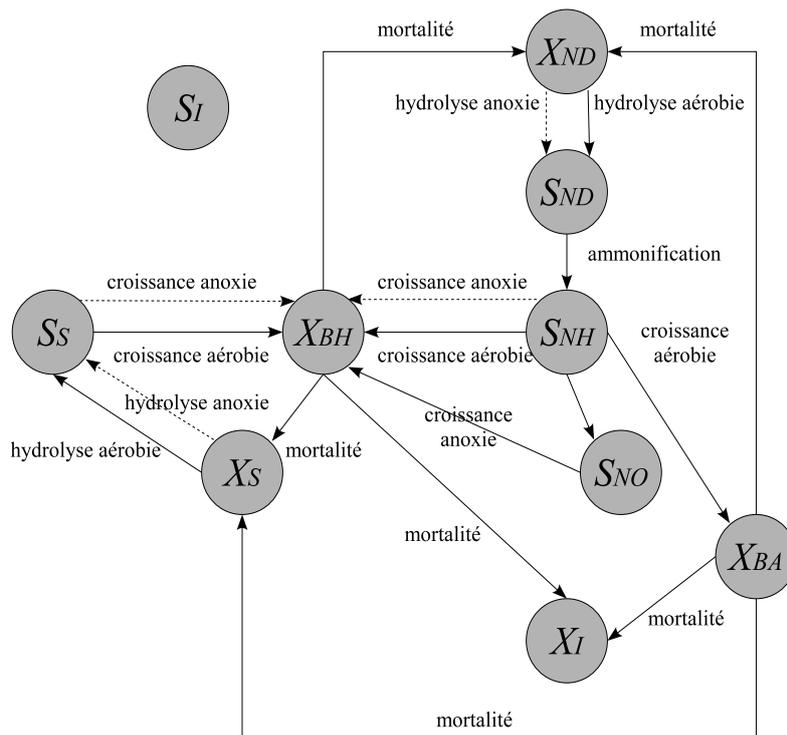


FIGURE 1.6 – Évolution des variables d'état au cours du temps [Nagy, 2010].

les éléments forment le vecteur d'entrée \mathbf{u} défini par :

$$\mathbf{u} = [S_{I,in} \ S_{S,in} \ X_{I,in} \ X_{S,in} \ X_{BH,in} \ X_{BA,in} \ S_{NO,in} \ S_{NH,in} \ S_{ND,in} \ X_{ND,in} \ S_{O,in} \ q_{in} \ q_R]^T \quad (1.2)$$

1.2.1.2 Variables de sortie

Les concentrations en composants solubles $S_{\bullet,out}$ et particulières $X_{\bullet,out}$ de l'eau qui sortent du bassin de réaction sont considérées comme variables de sortie du modèle. Le débit de sortie q_{out} fait partie aussi de cet ensemble de variables mesurables ; le vecteur \mathbf{y} réunit les variables de sortie qui viennent d'être mentionnées :

$$\mathbf{y} = [S_{I,out} \ S_{S,out} \ X_{I,out} \ X_{S,out} \ X_{BH,out} \ X_{BA,out} \ S_{NO,out} \ S_{NH,out} \ S_{ND,out} \ X_{ND,out} \ S_{O,out} \ q_{out}]^T \quad (1.3)$$

Chapitre 2

Modélisation du modèle ASM1

2.1 Procédés du modèle ASM1

Les différents procédés intégrés dans le modèle IWA sont brièvement décrits ci-dessous. Ceux-ci ont été décrits par [Jeppsson, 1997, Petersen, 1965].

2.1.1 Croissance aérobie des hétérotrophes ρ_1

Une fraction du substrat facilement biodégradable est utilisée pour la croissance de la biomasse hétérotrophe donnant lieu à une demande en oxygène associée. La croissance est modélisée en utilisant la cinétique de Monod [Tchobanoglous and Burton, 1991, Monon, 2012]. L'ammoniac est utilisé en tant que une source d'azote pour la synthèse et incorporé dans la masse cellulaire. Les deux la concentration de S_S et S_O peuvent limiter la vitesse pour la croissance du processus. Ce processus est généralement le principal contributeur à la production de nouvelle biomasse et l'élimination de la DCO. Il est également associé à un changement d'alcalinité.

$$\rho_1(t) = \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \quad (2.1)$$

2.1.2 Croissance anoxique des hétérotrophes ρ_2

En l'absence d'oxygène, les organismes hétérotrophes sont capables d'utiliser le nitrate comme accepteur d'électrons terminal avec S_S comme substrat. Le processus conduira à une production de biomasse hétérotrophe et de gaz d'azote (dénitrification). L'azote gazeux est le résultat de la réduction du nitrate avec un changement d'alcalinité associé. Les mêmes cinétiques Monod que ceux utilisés pour la croissance aérobie sont appliquées, sauf que l'expression cinétique est multipliée par un facteur $\eta_g < 1$.

Ce taux réduit pourrait soit être causé par un taux de croissance maximal plus faible dans des conditions anoxiques ou parce que seule une fraction de la biomasse hétérotrophe est capable de fonctionner avec du nitrate comme accepteur d'électrons. L'ammoniac est utilisé comme source d'azote pour la synthèse des cellules, qui à son tour modifie la alcalinité.

$$\rho_2(t) = \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{NO} + S_O(t)} \eta_g X_{BH}(t) \quad (2.2)$$

2.1.3 Croissance aérobie des autotrophes ρ_3

L'ammoniac est oxydé en nitrate par l'intermédiaire d'un procédé à une seule étape (nitrification) résultant en la production de biomasse autotrophe et donnant lieu à une demande en oxygène associée. L'ammoniac est également utilisé comme source d'azote pour la synthèse et incorporé dans le masse cellulaire. Le procédé a un effet marqué sur l'alcalinité (à la fois à partir de la conversion de la biomasse en ammoniac et par l'oxydation de l'ammoniac en nitrate) et la demande totale en oxygène. L'effet sur la quantité de biomasse formée est faible car le rendement des nitrificateurs autotrophes est faible. Une fois de plus le taux de croissance est modélisé en utilisant la cinétique Monod.

$$\rho_3(t) = \mu_A \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{O,A} + S_O(t)} X_{BA}(t) \quad (2.3)$$

2.1.4 Décomposition des hétérotrophes ρ_4 et des autotrophes ρ_5

Les deux processus sont modélisés de la même manière en utilisant l'hypothèse de la mort-régénération. Les organismes meurent à un certain taux et une partie du matériau est considérée comme étant non biodégradable et s'ajoute à la fraction X_P . Le reste s'ajoute aux substrats lentement biodégradables. L'azote organique associé X_S devient disponible en azote organique particulaire. Aucune perte de COD n'est mise en jeu ni d'accepteurs d'électrons utilisés. Le processus est présumé continuer avec le même taux que sous les conditions aérobie, anoxique et anaérobie.

$$\rho_4(t) = b_H X_{BH}(t) \quad (2.4)$$

$$\rho_5(t) = b_A X_{BA}(t) \quad (2.5)$$

2.1.5 Ammonification de l'azote organique soluble ρ_6

L'azote organique biodégradable est converti en ammoniac libre et une solution saline dans un processus de premier ordre par l'intermédiaire des hétérotrophes actifs. Les ions d'hydrogène consommé dans le processus de conversion résultent en un changement d'alcalinité.

$$\rho_6(t) = k_a S_{ND}(t) X_{BH}(t) \quad (2.6)$$

2.1.6 Hydrolyse des composés organiques absorbés ρ_7

Le substrat lentement biodégradable empêtré dans la masse de boue se décompose extra-cellulairement, produisant un substrat facilement biodégradable à la disposition des organismes pour la croissance. Le processus est modélisé sur la base de la cinétique de réaction de surface et ne se produit que dans des conditions aérobies et anoxiques. La vitesse d'hydrolyse est réduite dans des conditions anoxiques par rapport à des conditions aérobies d'un facteur $\eta_h < 1$. Le taux est également de premier ordre par rapport à la biomasse hétérotrophe présente mais se sature à mesure que la quantité de substrat absorbé devient grande en proportion de la biomasse.

$$\rho_7(t) = k_h \frac{X_S(t)/X_{BH}(t)}{K_X + X_S(t)/X_{BH}(t)} \left(\frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} + \eta_h \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \right) X_{BH}(t) \quad (2.7)$$

2.1.7 Hydrolyse de l'azote organique absorbé ρ_8

L'azote organique particulaire biodégradable est décomposé en azote organique soluble à un taux défini par la réaction d'hydrolyse pour les matières organiques absorbées décrite précédemment.

$$\rho_8(t) = k_h \frac{X_S(t)/X_{BH}(t)}{K_X + X_S(t)/X_{BH}(t)} \left(\frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} + \eta_h \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \right) \frac{X_{ND}(t)}{X_S(t)} X_{BH}(t) \quad (2.8)$$

Les processus impliqués dans le modèle sont rassemblés dans une matrice cinétique (cf. Tableau A.2) afin de faciliter la lecture de ce dernier.

2.2 Paramètres du modèle

Le choix des valeurs pour les coefficients cinétiques et stoechiométriques d'un modèle mathématique est connu comme la calibration du modèle. Dans le cas des modèles à boues activées, l'étalonnage a traditionnellement été réalisé grâce à des expériences spécifiques et bien contrôlées sur des bancs d'essai pilotes et des stations qui sont à l'échelle réelle et supposées fonctionner sous des conditions d'exploitation constantes [Jeppsson, 1997]. Cependant, les valeurs obtenues de cette manière peuvent ne pas être totalement fiables pour deux raisons principales. La première raison étant la difficulté de la configuration et l'exploitation d'une station à petite échelle exactement de la même manière qu'une station à grande échelle, introduisant ainsi un risque de modifier le comportement de la population de micro-organismes ainsi que les conditions qui influencent les valeurs des paramètres qui devraient être déterminés. La seconde raison est que les calculs et les expériences sont souvent basés sur le fait que les coefficients sont des constantes. Puisque les expériences peuvent prendre plusieurs jours, voire plusieurs semaines pour s'effectuer, elles ne sont pas refaites très souvent. Beaucoup de paramètres sont variables dans le temps et certains d'entre eux peuvent changer considérablement sur une période de temps limitée. Des facteurs tels que la configuration de l'installation, les conditions de fonctionnement, la dynamique des populations de micro-organismes, le degré d'inhibition par les composés toxiques, la composition de l'eau affluente, la température, le pH, etc., tous affectent les valeurs des paramètres du procédé. Le même type de problème est encore plus mis en valeur pour caractériser les eaux usées. Bien que les paramètres discutés ci-dessus puissent varier considérablement leurs valeurs sur une période de quelques jours, les caractéristiques des eaux résiduaires affluentes peuvent varier de manière significative en quelques heures. Le fait que l'influence de la composition des eaux usées influentes sur le comportement du modèle est généralement de grande taille, amplifie encore ces difficultés.

En examinant la sensibilité, la variabilité et l'incertitude des paramètres du modèle, une indication est donnée quant aux coefficients qui sont les plus importants pour déterminer avec précision le modèle de la station d'épuration. Une telle enquête a été réalisée pour le modèle de l'IWA. Il a été montré que, pour des stations effectuant la nitrification et la dénitrification, le modèle montre peu de sensibilité à l'égard de la DCO en raison de la moyenne élevée du séjour à long terme des cellules. Les paramètres qui

sont considérés comme étant les plus importants pour ce type de processus sont :

- Le taux de décroissance des hétérotrophes ;
- Le taux de croissance pour la croissance anoxique des hétérotrophes ;
- La vitesse d’hydrolyse spécifique maximale ;
- Le coefficient de demi-saturation pour l’hydrolyse ;
- Le facteur de correction pour l’hydrolyse anoxique ;
- Le taux de croissance spécifique maximal des autotrophes.

Il a également été démontré comment les différents ensembles de valeurs de paramètres peut conduire à approximativement le même comportement du modèle. Cela est dû au fait que beaucoup coefficients du modèle sont corrélées. Ceci implique que les paramètres ne peuvent souvent pas être ajustés un par un, mais plutôt doivent plutôt être réglés simultanément comme un ensemble. Quelques exemples de ces interactions sont donnés ci-dessous.

- Le taux de croissance et le taux de décroissance - l’augmentation du taux de croissance et du taux de décroissance peuvent produire un taux net de croissance identique, mais vont augmenter la demande en oxygène et d’accélérer le cycle du substrat.
- Rendement et taux de croissance - l’augmentation du taux de rendement et du taux de croissance peuvent se déséquilibrer l’un l’autre par rapport au taux de conversion du substrat mais vont augmenter la consommation d’oxygène.
- Rendement et hétérotrophes dans les eaux usées - Un haut rendement et une faible concentration de bactéries hétérotrophes dans les eaux usées est égal à un faible rendement et une forte concentration d’hétérotrophes dans les eaux usées.

La situation décrite ci-dessus est une indication que des procédés pour identifier et estimer les variables d’état et les paramètres non-mesurables du modèle doivent être employés. Cela devrait être fait afin d’extraire le maximum d’informations à partir des mesures disponibles en ligne ainsi que des examens de laboratoire. À titre d’exemple, les valeurs des paramètres du modèle proposé par le groupe de travail de l’IWA sont présentés dans l’annexe A.3. Il est à noter que de nombreuses valeurs de ces paramètres sont fortement influencées par les conditions environnementales et doivent être considérées davantage comme valeurs moyennes indiquant un ordre raisonnable de grandeur.

2.3 Formulation du modèle

Sur la base des descriptions fournies ci-dessus, nous pouvons maintenant formuler l'ensemble des équations différentielles ordinaires qui décrivent le modèle ASM1 de l'IWA [Jeppsson, 1997].

Le comportement dynamique de la concentration de la biomasse hétérotrophe est affectée par trois procédés différents - croissance aérobie, croissance anoxique et décomposition - selon :

$$\begin{aligned} \frac{dX_{BH}(t)}{dt} = & D_{in}(t)X_{BH,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)] \frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)} X_{BH}(t) \\ & + \rho_1(t) + \rho_2(t) - \rho_4(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

La situation pour la concentration de la biomasse autotrophe est plus simple puisque les autotrophes ne croissent pas dans un environnement anoxique. En conséquence :

$$\begin{aligned} \frac{dX_{BA}(t)}{dt} = & D_{in}(t)X_{BA,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)] \frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)} X_{BA}(t) \\ & + \rho_3(t) - \rho_5(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

La concentration du substrat facilement biodégradable est réduite par la croissance des bactéries hétérotrophes (dans des conditions aérobies et anoxiques) et est augmentée par l'hydrolyse de substrat lentement biodégradable, l'équation différentielle décrivant ceci est :

$$\frac{dS_S(t)}{dt} = D_{in}(t)[S_{S,in}(t) - S_S(t)] - \frac{1}{Y_H}(\rho_1(t) + \rho_2(t)) + \rho_7(t) \quad (2.11)$$

La concentration du substrat lentement biodégradable est augmentée par le recyclage des bactéries mortes selon l'hypothèse de la mort-régénération et diminué par le procédé d'hydrolyse selon :

$$\begin{aligned} \frac{dX_S(t)}{dt} = & D_{in}(t)X_{S,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)] \frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)} X_S(t) \\ & + (1 - f_{XI})(\rho_1(t) + \rho_2(t)) - \rho_7(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'équation du modèle la plus courte est celle décrivant la concentration des particules inertes produites provenant de la décomposition de la biomasse,

qui est tout simplement

$$\begin{aligned} \frac{dX_I(t)}{dt} = & D_{in}(t)X_{I,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_I(t) \\ & + f_{XI}(\rho_4(t) + \rho_5(t)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

De manière similaire à (2.11) la concentration de l'azote organique particulaire est augmentée par la décomposition de la biomasse et diminuée par le processus d'hydrolyse. L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned} \frac{dX_{ND}(t)}{dt} = & D_{in}(t)X_{ND,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_{ND}(t) \\ & + (i_{XB} - f_{XI}i_{XP})(\rho_4(t) + \rho_5(t)) - \rho_8(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

La concentration d'azote organique soluble est affectée par l'ammonification et hydrolyse, selon :

$$\frac{dS_{ND}(t)}{dt} = D_{in}(t)[S_{ND,in}(t) - S_{ND}(t)] - \rho_6(t) + \rho_8(t) \quad (2.15)$$

La concentration d'ammoniac est affectée par la croissance des micro-organismes puisque l'ammoniac est utilisé comme source d'azote pour l'incorporation dans la masse cellulaire. La concentration est également diminuée par le procédé de nitrification et augmentée à la suite de l'ammonification de l'azote organique soluble. Ceci conduit à une équation différentielle complexe formulé comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{dS_{NH}(t)}{dt} = & D_{in}(t)[S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)] - i_{XB}(\rho_1(t) + \rho_2(t)) \\ & - \left(i_{XB} + \frac{1}{Y_A}\right)\rho_3(t) + \rho_6(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

La concentration de nitrate n'est impliquée que dans deux processus - elle est augmentée par la nitrification et diminuée par la dénitrification. L'équation dynamique décrivant cela est formulée ci-après :

$$\frac{dS_{NO}(t)}{dt} = D_{in}(t)[S_{NO,in}(t) - S_{NO}(t)] - \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H}\rho_2(t) + \frac{1}{Y_A}\rho_3(t) \quad (2.17)$$

La concentration en oxygène dans les eaux usées est réduite par la croissance de la biomasse aérobie hétérotrophe et autotrophe, selon :

$$\begin{aligned} \frac{dS_O(t)}{dt} = & D_{in}(t)[S_{O,in}(t) - S_O(t)] + Kq_a(t)[S_{O,sat}(t) - S_O(t)] \\ & - \frac{1 - Y_H}{Y_H}\rho_1(t) - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A}\rho_3(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Et enfin, S_I , qui est indépendante des autres variables d'état :

$$\frac{dS_I(t)}{dt} = D_{in}(t)[S_{I,in}(t) - S_I(t)] \quad (2.19)$$

Nous ne présentons pas l'équation différentielle décrivant la dynamique de l'alcalinité S_{ALK} car cette dernière n'influence pas les autres variables d'état. Les équations (2.9) - (2.19) montrent clairement pourquoi le format matriciel est pratique pour décrire ce type de modèles complexes. D'autre part, les formats matriciels créent une illusion pour le lecteur non-expérimenté que le modèle ASM1 de l'IWA n'est pas très complexe. Les équations (2.9) - (2.19) démontrent le contraire.

Quelques observations finales concernant les équations du modèle IWA sont nécessaires. Le facteur 2,86 dans l'expression stœchiométrique pour la croissance anoxique de la biomasse hétérotrophe en (2.17) est l'équivalent en oxygène pour la conversion de l'azote nitrique en azote gazeux et il est inclus pour maintenir la cohérence des unités sur une base COD. La valeur est théorique et signifie que si toute la matière organique ajoutée dans le réacteur de dénitrification biologique n'est convertie qu'en CO_2 et H_2O , il faudrait $1/2.86=0.35$ g $\text{NO}_3\text{-N}$ pour chaque gCOD enlevé. De même, le terme 4,57 de l'expression stœchiométrique pour la croissance aérobie dans des autotrophes (2.18) est la demande théorique en oxygène associée à l'oxydation de l'azote ammoniacal en azote de nitrate, soit 4,57 g $\text{O}_2/\text{gNH}_3\text{-N}$ est consommé. En raison de l'hypothèse de mort-régénération utilisée dans le modèle, le taux de décroissance hétérotrophe n'est pas traditionnellement le paramètre de décroissance utilisé pour décrire la décomposition endogène, au lieu de cela, la valeur est beaucoup plus importante. Si l'on note le taux de décroissance traditionnelle par b'_H , les deux taux de décroissance sont liés selon :

$$b_H = \frac{b'_H}{1 - Y_H(1 - f_p)} \quad (2.20)$$

Notez que le coefficient du taux de décroissance spécifique pour les bactéries autotrophes, b_A , dans le modèle IWA, est numériquement équivalent au taux de décroissance traditionnel constant. Cela découle du fait que le recyclage de la matière organique qui résulte de la décomposition se fait par l'activité de la biomasse hétérotrophe, et non par la biomasse autotrophe. De plus, le coefficient f_P , représentant la fraction de la biomasse qui finit comme produits particuliers inertes résultant de la décomposition, est affectée par la description mort-régénération. Si la décomposition

est modélisée comme endogène, cette valeur est généralement supposée être d'environ 0,2 (c'est-à-dire, 20%), alors que le recyclage de la biomasse par la mort-régénération résulte en l'utilisation d'une valeur significativement plus faible afin de se retrouver avec la même quantité de particules de masse inerte. Si on note la fraction du matériau inerte qui suit une approche de décroissance traditionnelle par f'_P , les deux coefficients sont liés selon :

$$f_P = \frac{1 - Y_H}{1 - Y_H f'_P} f'_P \quad (2.21)$$

Il est naturellement important d'être conscient de ce type d'interprétation spéciale de divers paramètres du modèle lors de la tentative de calibration du modèle à un véritable processus à boues activées.

2.4 Restrictions sur le modèle

Un certain nombre de simplifications et d'hypothèses doivent être faites afin de faire du modèle de la station d'épuration pratiquement utile. Certains d'entre eux sont associés au système physique lui-même, tandis que d'autres concernent le modèle mathématique. Un certain nombre de ces restrictions concernant le modèle de l'IWA sont résumés ci-dessous.

- Le système fonctionne à une température constante. Afin de permettre des variations de température, une équation d'Arrhenius peut être utilisée pour ajuster les paramètres du modèle à l'intérieur d'une certaine région.
- Le pH est constant et proche de la neutralité. L'inclusion de l'alcalinité dans le modèle permet à l'utilisateur de détecter les problèmes potentiels avec le contrôle du pH.
- Aucune attention n'a été accordée à des changements dans la nature de la matière organique dans n'importe quelle fraction donnée (par exemple, les substrats facilement biodégradable). Par conséquent, les coefficients dans les expressions des taux ont été supposés avoir des valeurs constantes. Ceci signifie que les changements dans les caractéristiques des eaux usées ne peuvent pas être prises en charge correctement par le modèle.
- Les effets de la limitation de l'azote, du phosphore et d'autres nutriments inorganiques sur l'élimination de substrat organique et la croissance des cellules n'ont pas été pris en considération. Ainsi, il faut prendre soin pour être sûr que des quantités suffisantes de nutriments inorganiques sont présents pour permettre une croissance équilibrée.

- Les facteurs de correction pour la dénitrification sont fixes et constants pour une eau usée donnée.
- Les coefficients pour la nitrification sont supposés être constants et incorporer des effets inhibiteurs que d'autres constituants des déchets sont susceptibles d'avoir sur eux.
- La biomasse hétérotrophe est homogène et ne subit pas de changements dans la diversité des espèces avec le temps. Cela signifie que les effets de gradients de concentration de substrat, la configuration du réacteur, etc., sur la décantabilité des boues ne sont pas considérés.
- L'absorption des particules de matière organique dans la biomasse est supposée être instantanée.
- L'hydrolyse de la matière organique et de l'azote organique sont couplées et se produisent simultanément avec des taux égaux.
- Le type d'accepteur d'électrons présent n'affecte pas la perte de biomasse active par décomposition.

2.5 Simulation du modèle

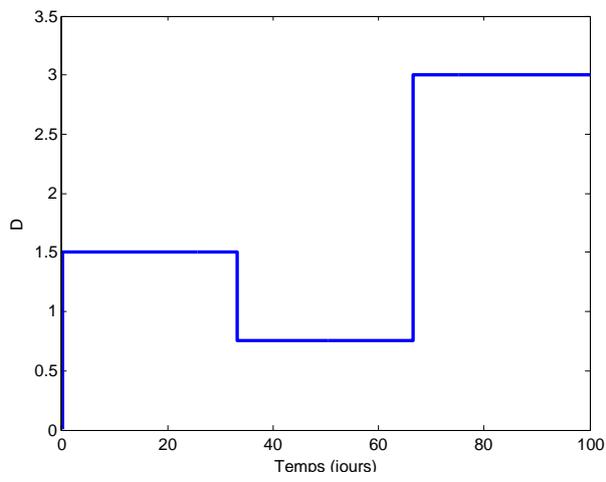
Valeurs initiales [[Nagy, 2010](#)]

Grandeur	Valeur
q_a	$10 L.j^{-1}$
$S_{I,in}$	$3 mg.L^{-1}$
$S_{S,in}$	$200 mg.L^{-1}$
$X_{S,in}$	$100 mg.L^{-1}$
$S_{NO,in}$	$1 mg.L^{-1}$
$S_{NH,in}$	$15 mg.L^{-1}$
$S_{ND,in}$	$15 mg.L^{-1}$
$X_{ND,in}$	$9 mg.L^{-1}$
$S_{O,in}$	$1 mg.L^{-1}$

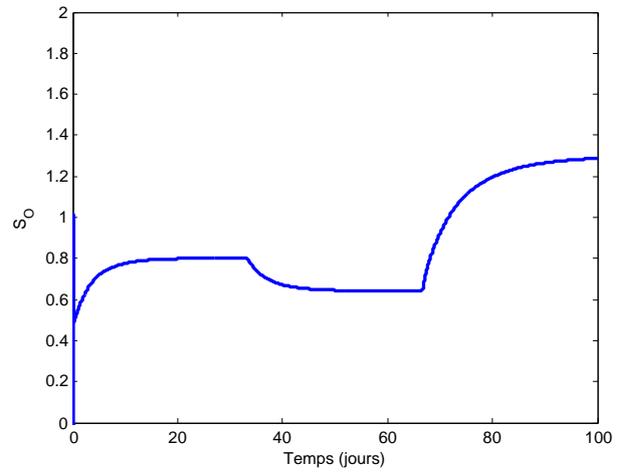
Grandeur	Valeur	Unité
S_I	12	mgL^{-1}
S_S	5	$mg_{DCO} \cdot L^{-1}$
X_I	10	$mg \cdot L^{-1}$
X_S	60	$mg_N \cdot L^{-1}$
$X_{B,H}$	8000	$mg_{DCO} \cdot L^{-1}$
$X_{B,A}$	800	$mg_{DCO} \cdot L^{-1}$
S_{NO}	20	$mg_N \cdot L^{-1}$
S_{NH}	1	$mg_N \cdot L^{-1}$
S_{ND}	5	$mg_N \cdot L^{-1}$
X_{ND}	5	$mg_N \cdot L^{-1}$
S_O	0	$mg_{O_2} \cdot L^{-1}$
D_O	0	$mg_{O_2} \cdot L^{-1}$

Tableau 2.1 – Valeurs des variables initiales et en entrée

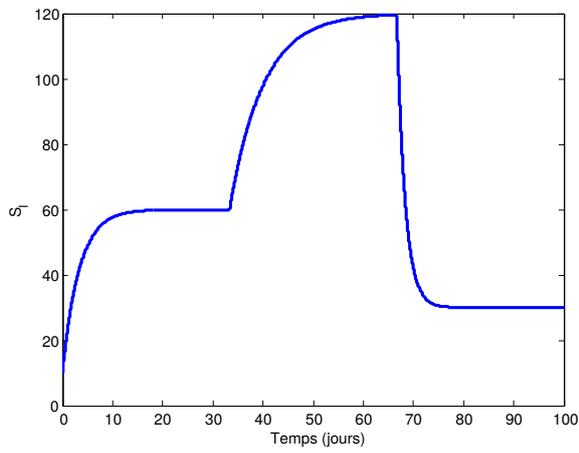
Résultats de la simulation :



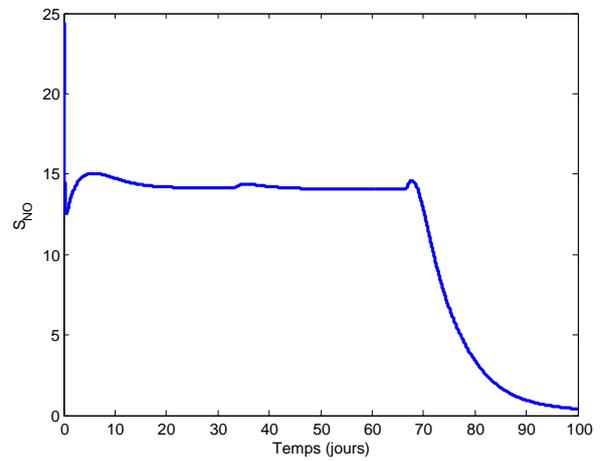
(a) Entrée $D = \frac{q_{in}}{V}$.



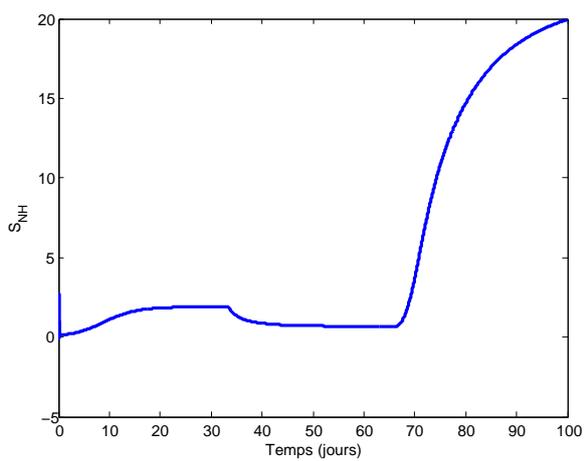
(b) S_O



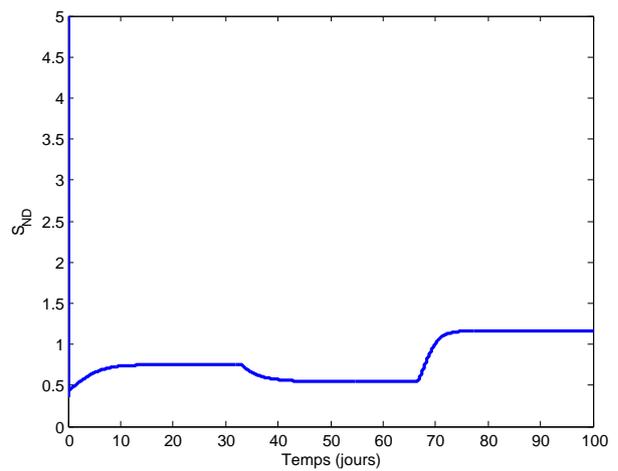
(c) S_I



(d) S_{NO}

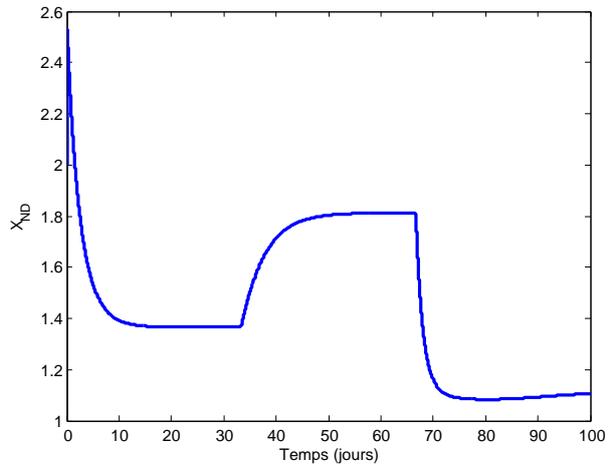


(e) S_{NH}

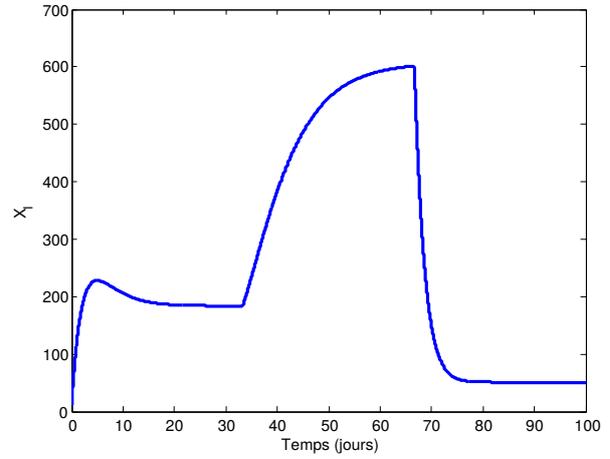


(f) S_{ND}

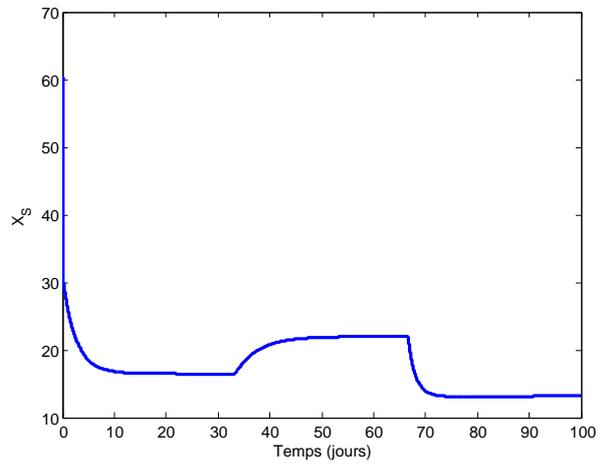
FIGURE 2.1 – Réponse du modèle ASM1



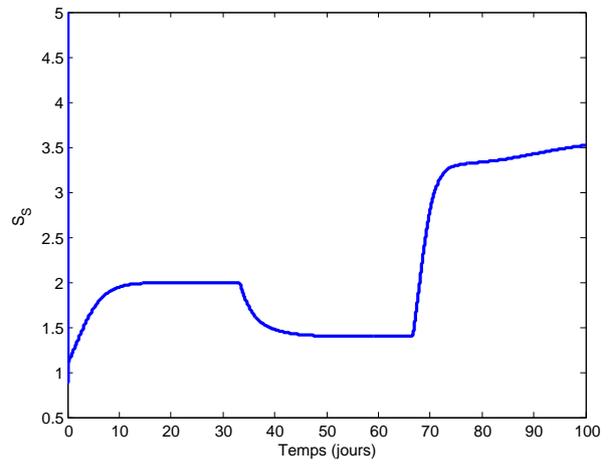
(a) X_{ND}



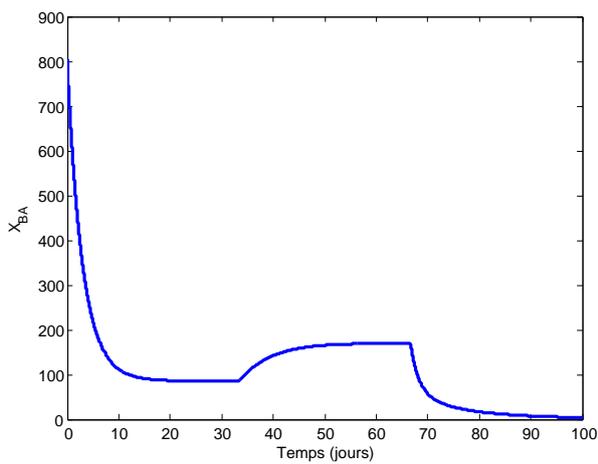
(b) X_I



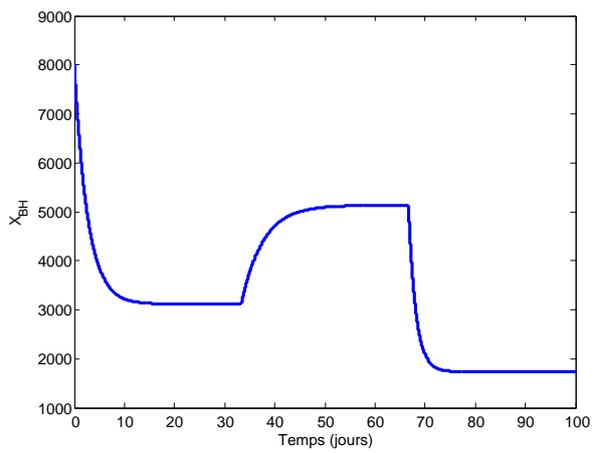
(c) X_S



(d) S_S



(e) X_{BA}



(f) X_{BH}

FIGURE 2.2 – Réponse du modèle ASM1

2.6 Réduction du modèle de la station d'épuration

La simulation dynamique basée sur une modélisation rigoureuse basée sur la physique est devenue un outil standard dans de nombreux domaines de l'ingénierie. Les modèles rigoureux sont appliqués pour de nombreux types de tâches. Ils sont utiles dans la conception des systèmes, en particulier pour vérifier le comportement du système dans des conditions extrêmes. Ils sont très utiles pour comprendre le comportement du système. Comme ils utilisent généralement beaucoup de connaissances préalables du domaine d'application en question, la précision de leur prédiction ainsi que leur domaine de validité peuvent être élevés en principe, si les tâches de construction du modèle et son réglage sont conçues pour atteindre cette précision. Cependant, les coûts des modèles rigoureux sont généralement élevés en raison des efforts nécessaires pour les construire. Malgré l'utilité de modèles rigoureux pour les tâches décrites ci-dessus, ces derniers peuvent devenir très encombrants lorsqu'il s'agit de la commande ou l'identification des systèmes. C'est pour cette raison que l'utilisation du modèle ASM1 est devenue courante [Weijers, 2000], cependant, les modèles mécanistes fondés sur ASM1 étudié précédemment ne sont pas directement adaptés pour la commande et l'identification. Si ces modèles mécanistes décrivent avec précision la dynamique du processus, des modèles réduits peuvent être extraites pour les tâches de conception de contrôleurs et d'identification en réutilisant les connaissances établies dans les modèles mécanistes. Par conséquent, la réduction de modèle de ASM1 a reçu une attention considérable dans la littérature [Chachuat et al., 2003] [Smets et al., 2003].

Nous retiendrons ici le modèle de [Nagy, 2010]. Seules la dégradation biologique du carbone et de l'azote présents dans les eaux usées sont considérées, impliquant les six composantes suivantes :

S_S Substrat rapidement biodégradable.

X_S Substrat lentement biodégradable.

S_O Oxygène dissous.

X_{BH} Biomasse hétérotrophe.

S_{NH} Ammoniac dissous.

S_{NO} Nitrate dissous.

X_{BA} Biomasse autotrophe.

Six composantes car en pratique, le processus de mesure de la demande chimique en oxygène ne permet pas de distinguer entre biomasse soluble

S_S et particulaire X_S .

Finalement, le vecteur d'état considéré est comme suit :

$$\mathbf{x}(t) = [X_{DCO}(t), S_O(t), S_{NH}(t), S_{NO}(t), X_{BH}(t), X_{BA}(t)]^T \quad (2.22)$$

L'équation de conservation de la masse pour les concentrations ci-dessus contient une partie réaction \mathbf{r} et une partie de bilan entrée/sortie [Nagy, 2010]. La partie réaction est donnée par :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{C} \Phi(\mathbf{x}(t)) \quad (2.23)$$

Où $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6 \times 5}$ est comme suit :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Y_H} & -\frac{1}{Y_H} & 0 & 1 - f_P & 1 - f_P \\ \frac{Y_H-1}{Y_H} & 0 & \frac{Y_A-4.57}{Y_A} & 0 & 0 \\ -i_{XB} & -i_{XB} & -i_{XB} - \frac{1}{Y_A} & i_{XB} - f_P i_{XP} & i_{XB} - f_P i_{XP} \\ 0 & \frac{Y_H-1}{2.86 Y_H} & \frac{1}{Y_A} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Et $\Phi = [\rho_1(t), \rho_2(t), \rho_3(t), \rho_4(t), \rho_5(t)]^T$ avec :

$$\rho_1(t) = \mu_H \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \quad (2.25)$$

$$\rho_2(t) = \mu_H \eta_{NOg} \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t) \quad (2.26)$$

$$\rho_3(t) = \mu_A \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH,A} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{O,A} + S_O(t)} X_{BA}(t) \quad (2.27)$$

$$\rho_4(t) = b_H X_{BH}(t) \quad (2.28)$$

$$\rho_5(t) = b_A X_{BA}(t) \quad (2.29)$$

$$(2.30)$$

Où :

$$K_{DCO} = K_S \frac{X_{DCO}}{S_S} \quad (2.31)$$

Comme précédemment, le volume du bioréacteur est supposé constant :

$$q_{out}(t) = q_{in}(t) + q_R(t) = (f_W + f_R) q_{in}(t), \quad 1 \leq f_R \leq 2, \quad 0 < f_W < 1 \quad (2.32)$$

2.6.1 Résultats de la simulation

En simulant le nouveau système obtenu, nous avons les réponses suivantes :

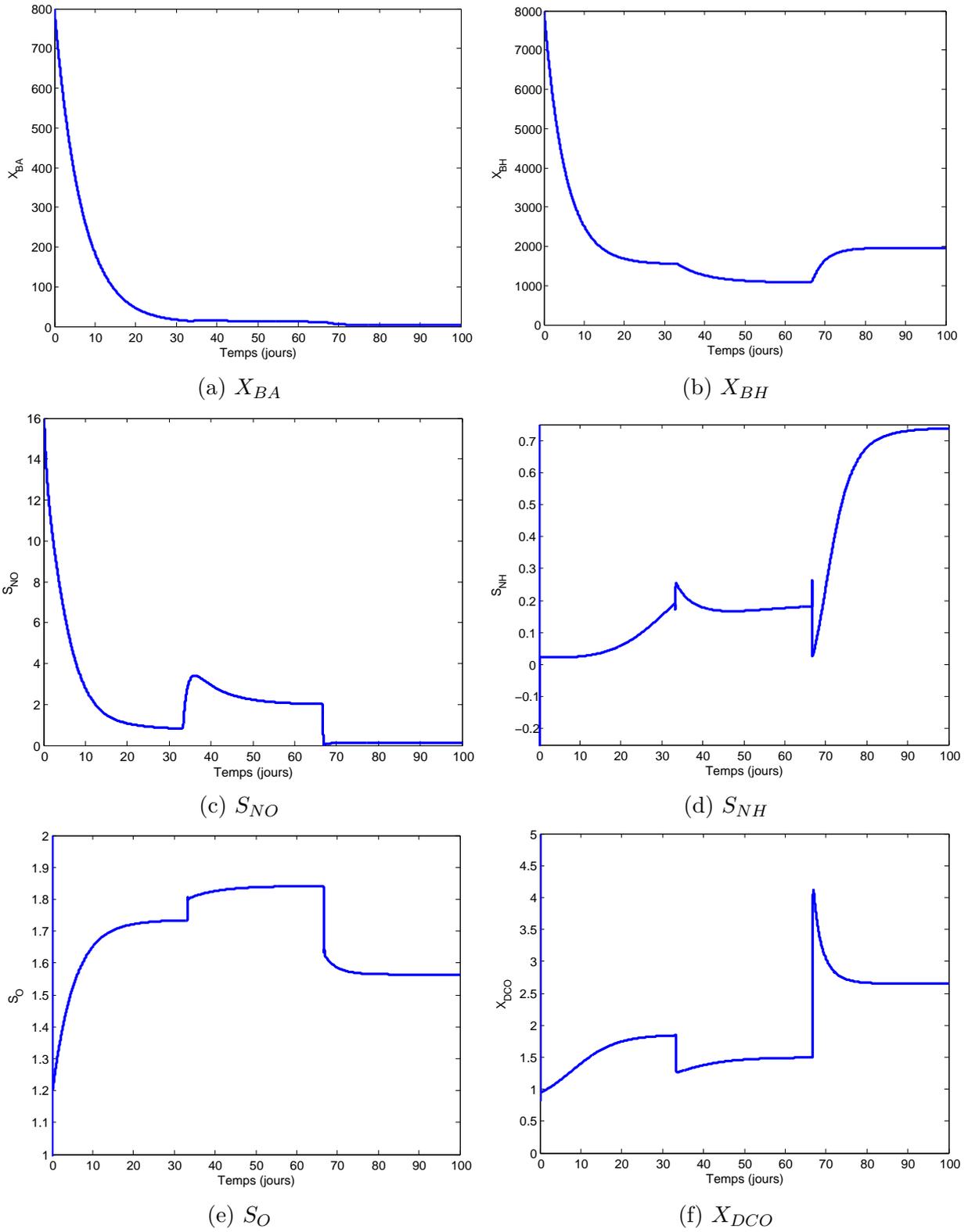


FIGURE 2.3 – Réponse du modèle ASM1 réduit

2.6.2 Comparaison du modèle ASM1 et du modèle réduit

Afin de mieux observer les simplifications effectuées, nous allons considérer les équations du système sous la forme suivante :

$$\dot{X}_{DCO}(t) = -\frac{1}{Y_H}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] + (1 - f_P)(\rho_4(t) + \rho_5(t)) + D_1(t) \quad (2.33)$$

$$\dot{S}_O(t) = \frac{Y_H - 1}{Y_H}\rho_1(t) + \frac{Y_A - 4.57}{Y_A}\rho_3(t) + D_2(t) \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_{NH}(t) = & -i_{XB}[\rho_1(t) + \rho_2(t)] - \left(i_{XB} + \frac{1}{Y_A}\right) \\ & + (i_{XB} - f_P i_{XP})[\rho_4(t) + \rho_5(t)] + D_3(t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\dot{S}_{NO}(t) = \frac{Y_H - 1}{2.86 Y_H}\rho_2(t) + \frac{1}{Y_A}\rho_1(t) + D_4(t) \quad (2.36)$$

$$\dot{X}_{BH}(t) = \rho_1(t) + \rho_2(t) - \rho_4(t) + D_5(t) \quad (2.37)$$

$$\dot{X}_{BA}(t) = \rho_3(t) - \rho_5(t) + D_6(t) \quad (2.38)$$

$$(2.39)$$

Le bilan d'entrée-sortie est exprimé par :

$$D_1(t) = \frac{q_{in}(t)}{V}[X_{DCO,in}(t) - X_{DCO}(t)] \quad (2.40)$$

$$D_2(t) = \frac{q_{in}(t)}{V}(-S_O(t)) + K_q \zeta a(t)[S_{O,sat}(t) - S_O(t)] \quad (2.41)$$

$$D_3(t) = \frac{q_{in}(t)}{V}[S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)] \quad (2.42)$$

$$D_4(t) = \frac{q_{in}(t)}{V}[-S_{NO}(t)] \quad (2.43)$$

$$D_5(t) = \frac{q_{in}(t)}{V}[X_{BH,in}(t) - X_{BH}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BH}(t)] \quad (2.44)$$

$$D_6(t) = \frac{q_{in}(t)}{V}[-X_{BA}(t) + f_R \frac{1 - f_W}{f_R + f_W} X_{BA}(t)] \quad (2.45)$$

Nous pouvons comparer les réponses données par ASM1 et le modèle réduit dans les figures ci-après.

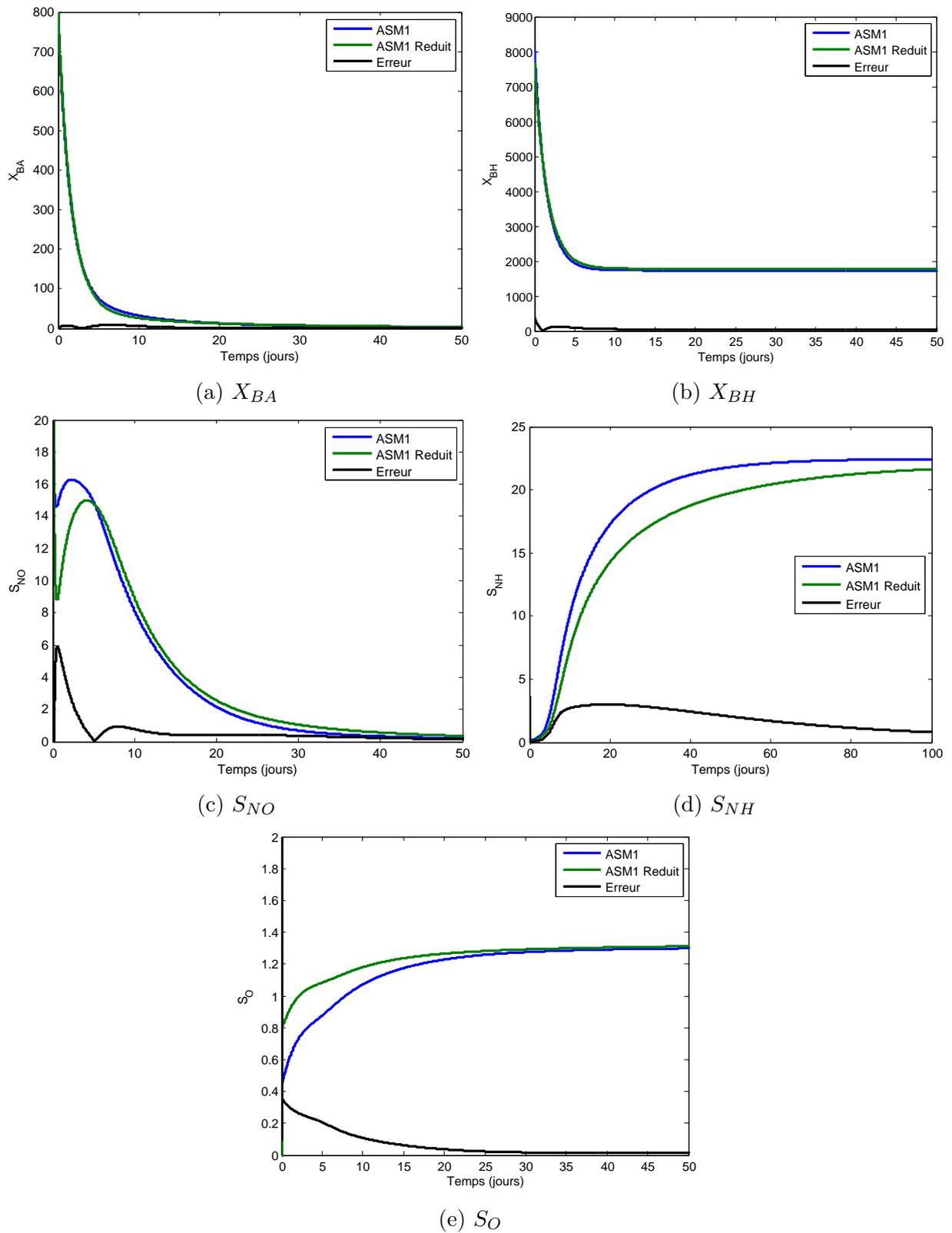


FIGURE 2.4 – Comparaison du modèle ASM1 et du modèle réduit

Nous pouvons constater que les dynamiques négligées n'influent pas de façon majeure sur celles considérées et qu'en particulier, les valeurs des états en régime permanent sont les mêmes.

Conformément avec le benchmark du programme européen Cost 624 [Alex et al., 1999], on peut supposer que :

- $S_{NO,in} \cong 0$
- $X_{BA,in} \cong 0$
- $X_{DCO,in}$, $S_{NH,in}$, et $X_{BH,in}$ ne sont pas mesurées en temps réel, cependant, si ces dernières sont considérées non mesurables, le système devient non mesurable. Une moyenne journalière est considérée pour $X_{DCO,in}$ et $S_{NH,in}$ et $X_{BH,in}$ sont considérées comme entrées inconnues.
-

Le vecteur des entrées connues du système sera donc :

$$u(t) = [X_{DCO,in}(t), q_a(t)]^T \quad (2.46)$$

Le vecteur des entrées inconnues :

$$d(t) = [S_{NH,in}, X_{BH,in}]^T \quad (2.47)$$

Et celui des sorties :

$$y(t) = [X_{DCO}(t), S_O(t), S_{NH}(t), S_{NO}(t)]^T \quad (2.48)$$

Chapitre 3

Modèles flous de Takagi-Sugeno

3.1 L'approche multimodèle

Le multimodèle est un modèle flou proposé par Takagi et Sugeno [Takagi and Sugeno, 1985] et qui a fait l'objet de plusieurs recherches en modélisation [Matía et al., 2014, Mehran, 2008] et commande [Chang et al., 2004] des systèmes dynamiques. On le retrouve dans la littérature scientifique sous plusieurs dénominations : modèle flou de Takagi-Sugeno, modèle flou de Takagi-Sugeno-Kang, modèle linéaire polytopique (PLM), multimodèle, et modèle affine par morceaux sont autant de termes qui servent à désigner ce dernier.

Les multimodèles sont décrits par des règles floues du type Si-Alors qui représentent des relations d'entrée-sortie locales d'un système non-linéaire. La principale caractéristique d'un modèle flou de Takagi-Sugeno est d'exprimer les dynamiques locales de chaque règle d'implication floue par un modèle de système linéaire.

Le modèle global du système est obtenu par une somme pondérée des modèles linéaires. Il a été prouvé que les modèles flous de Takagi-Sugeno sont des approximateurs universels pour les systèmes non linéaires [Tanaka and Wang, 2001]. La i ème règle d'un multimodèle est de la forme suivante :

Règle i

Si $z_1(t)$ est M_{i1} et ... et $z_p(t)$ est M_{ip}

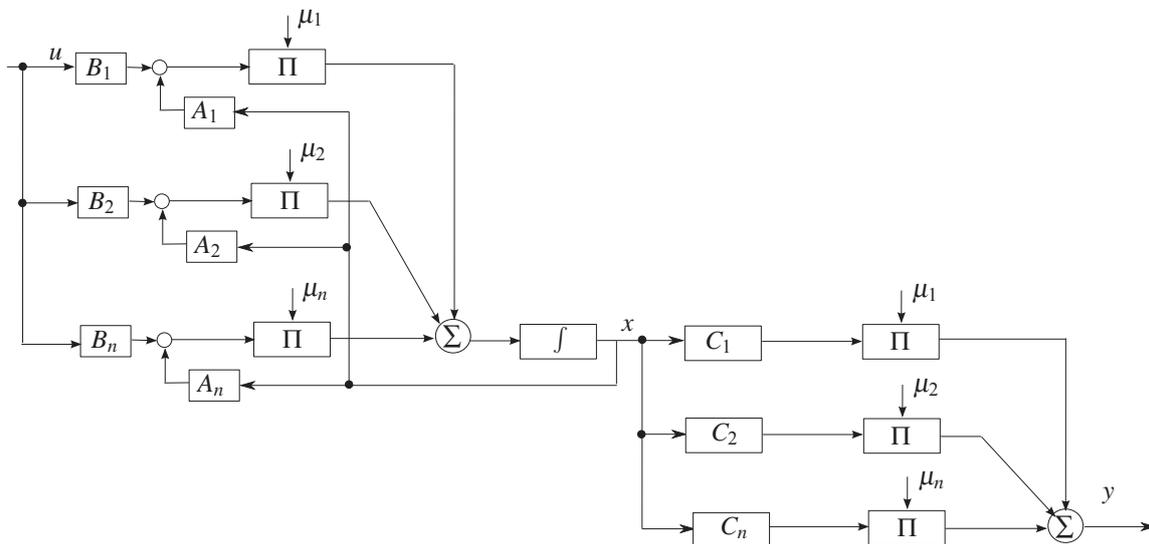
Alors
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, r$$

3.1.1 Les différents types de multimodèles

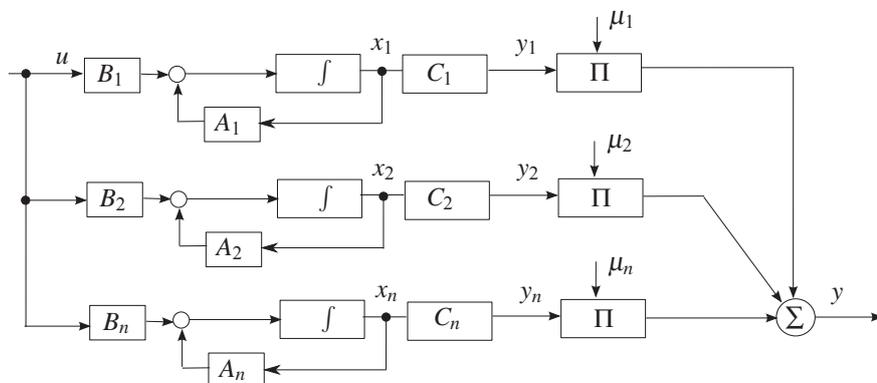
Les modèles T-S peuvent être regroupés en deux familles [Abonyi et al., 1999] distinctes ayant les structures indiquées par les figures suivantes [Bezzaoucha, 2013] :

Modèles T-S couplés	Modèles T-S découplés
L'état global x couple tous les états par le mélange des équations dynamiques des sous-modèles	Chaque sous-modèle possède un espace d'état propre dans lequel il évolue indépendamment
$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi) y_i(t) \end{cases}$

Tableau 3.1 – Multimodèles couplés et découplés



Modèles T-S couplés



Modèles T-S découplés

FIGURE 3.1 – Multimodèles couplés et découplés

Comme le montre la figure suivante :

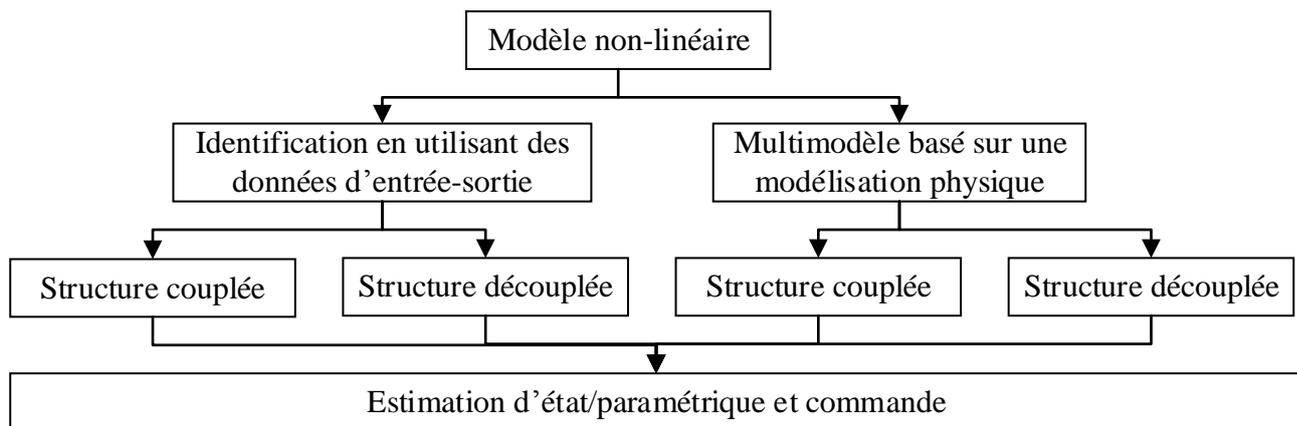


FIGURE 3.2 – Différentes approches possibles

Il existe plusieurs approches possibles afin d'obtenir un multimodèle, nous allons en explorer quelques unes dans ce mémoire.

3.2 Multimodèle pour le modèle de la station d'épuration

3.2.1 Multimodèle découplé

L'identification de multimodèles à partir de données mesurées [Angelov and Filev, 2004, Schnitman and Yoneyama, 2001, Sala et al., 2005] est un outil efficace pour l'approximation des systèmes non-linéaires en particuliers si ces derniers sont à paramètres variant dans le temps.

L'étude de ces derniers ainsi que des méthodes de d'estimation d'état et de commande ont été largement développées dans la littérature [Orjuela et al., 2009, Gasso et al., 2000].

3.2.1.1 Structure du multimodèle

Considérons un système MIMO avec n_i entrées $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_i}$, et n_o sorties $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_o}$. Ce système sera approximé par plusieurs systèmes flous MISO discrets. En notant q l'opérateur temporel tel que : $qy(k) = y(k-1)$. Où y est un signal échantillonné aux instants k .

Soient A et B des polynômes en q et $m < n$ deux entiers tels que :

$$\{y(k)\}_m^n = [y(k-m), y(k-m-1), \dots, y(k-n)] \quad (3.1)$$

Soit l'ensemble flou Ω_{li} est la fonction de prémisse de la i ème loi et $\mathbf{A}_{li} = [A_{li1}, \dots, A_{lin_0}]$, $\mathbf{B}_{li} = [B_{li1}, \dots, B_{lin_i}]$ des vecteurs de polynômes. Les ensembles flous Ω sont définis par les fonctions d'appartenance multivariées $\omega(\mathbf{x}(k))$ à valeurs $[0, 1]$. Si $\mathbf{x}_l(k)$ est le vecteur de regression, les sous-systèmes sont alors donnés par :

$$R_{li} : \text{Si } x_{l1}(k) \text{ est } \Omega_{li1} \text{ et } \dots \text{ et } x_{lp}(k) \text{ est } \Omega_{lip}, \text{ Alors}$$

$$\mathbf{y}_{li}(k+1) = \mathbf{A}_{li} \mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_{li} \mathbf{u}(k) + c_{li} \quad i = 1, \dots, K_l$$

Les sorties du multimodèle sont calculées au moyen de la moyenne pondérée suivante :

$$y_l(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{K_l} \omega_{li}(\mathbf{x}_l(k)) y_{li}(k+1)}{\sum_{i=1}^{K_l} \omega_{li}(\mathbf{x}_l(k))} \quad (3.2)$$

3.2.1.2 L'algorithme d'identification

L'algorithme d'identification de [Babuska, 1995] est donné en quatre étapes :

1. À partir des données d'entrée-sortie du système, poser le problème de régression en spécifiant les paramètres n_y , n_u , et n_d (voir A.6).
2. Classer les données en plusieurs ensembles de sous-modèles linéaires locaux grâce à un algorithme de clustering flou [Gath and Geva, 1989, Abonyi et al., 2002, Kaymak and Babuška, 1995].
3. Calculer les fonctions de prémisse à partir des paramètres des clusters.
4. En utilisant les fonctions de prémisse, estimer les paramètres consécutifs en utilisant la méthode des moindres carrés.

3.2.1.2.1 Données de mesure Les données sont rassemblées dans deux matrices construites à partir des mesures d'entrée-sortie :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \dots \\ \mathbf{x}(k) \\ \dots \\ \mathbf{x}(N-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dots \\ \mathbf{y}(k+1) \\ \dots \\ \mathbf{y}(N) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

N est le nombre de point d'échantillonnage disponibles pour l'identification. Ce nombre doit être suffisamment grand par rapport au nombre d'états et de clusters du système. Les données soumises à l'algorithme de clustering Z sont obtenues par concaténation des deux dernière matrices :

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{X} \ \mathbf{y}]^T \quad (3.4)$$

3.2.1.2.2 Classification des données Connaissant \mathbf{Z} ainsi que le nombre de clusters désirés c , l'algorithme de Gustafson-Kessel (GK) est appliqué [Gustafson and Kessel, 1978]. Cet algorithme est basé sur la minimisation d'une fonction objective et retourne : la matrice de partition floue $U = [\mu_{ik}]$ avec $\mu_{ik} \in [0, 1]$, la matrice de prototypes des clusters $V = [v_1, \dots, v_c]$, et les matrices de covariance des clusters $F = [F_1, \dots, F_c]$.

L'algorithme est donné dans [Babuška et al., 1998a]. Connaissant ces paramètres, il est possible de calculer les fonctions d'appartenance Ω_i et les paramètres consécutifs \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i et c_i .

3.2.1.2.3 Calcul des fonctions d'appartenance En posant $F^x = [f_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, la matrice de norme induite sera :

$$M_i^x = [\det(M_i^x)^{(1/p)}](F_i^x)^{-1} \quad (3.5)$$

Et $\mathbf{v}_i^x = [v_{1i}, \dots, v_{pi}]$, puis :

$$d^2(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}_i^x) = (\mathbf{x}(k) - \mathbf{v}_i^x)^T M_i^x (\mathbf{x}(k) - \mathbf{v}_i^x) \quad (3.6)$$

Alors :

$$\omega_i(\mathbf{x}(k)) = \frac{1}{\sum_{j=1}^c \left[\frac{d(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}_i^x)}{d(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}_j^x)} \right]^{\frac{2}{m-1}}} \quad (3.7)$$

m est l'exposant flou ($m > 1$) qui doit être donné par l'utilisateur avec une valeur par défaut $m = 2$. Plus m est grand plus les clusters sont flous (plus de chevauchement).

3.2.1.2.4 Paramètres consécutifs Soit $\boldsymbol{\theta}_i^T$ un vecteur contenant les coefficients \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i et c_i . Soit \mathbf{X}_e la matrice $[\mathbf{X}1]$ et \mathbf{W}_i la matrice diagonale dans le k ème élément diagonal est μ_{ik} , alors :

$$\boldsymbol{\theta}_i = [\mathbf{X}_e^T \mathbf{W}_i \mathbf{X}_e]^{-1} \mathbf{X}_e^T \mathbf{W}_i \mathbf{y} \quad (3.8)$$

est la solution des moindres carrés de $\mathbf{y} = \mathbf{X}_e \boldsymbol{\theta} + \epsilon$ où la k ème paire de données $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ est pondérée μ_{ik} .

3.2.2 Multimodèle couplé

3.2.2.1 Transformation par secteurs non linéaires

Nous allons décrire ici une méthode [Bezzaoucha, 2013] permettant de ré-écrire des non-linéarités bornées sous forme polytopique et ainsi de transformer des systèmes non-linéaires en systèmes T-S.

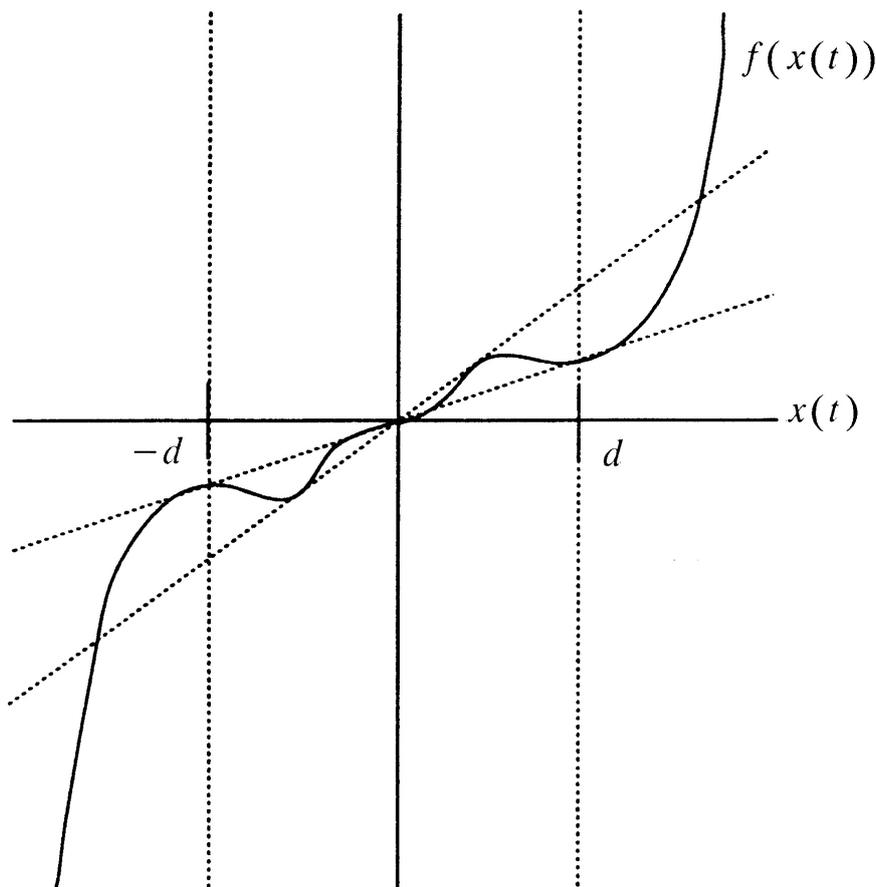


FIGURE 3.3 – Non-linéarité de secteur local

Soit le système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.9)$$

Avec $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ la commande, et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ la sortie.

La première étape de la transformation par secteurs non-linéaires consiste à mettre le système précédent sous forme quasi-LPV par factorisation comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\xi(t))x(t) + B(\xi(t))u(t) \\ y(t) = C(\xi(t))x(t) + D(\xi(t))u(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Où $\xi(t)$ est un vecteur de k fonctions non linéaires apparaissant dans les matrices d'état $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, et $D(\cdot)$ et qui dépendent de l'état x et/ou de la commande u . Notons ces dernières $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, k$ et supposons que celles-ci sont bornées telles qu'elle vérifient :

$$\xi_i(t) \in [\xi_{i,1}, \xi_{i,2}], \quad i = 1, \dots, k \quad (3.11)$$

Dans ce cas là, les non-linéarités $\xi_i(t)$ peuvent être ré-écrites sous la forme

suivante :

$$\xi_i(t) = F_{i,1}(\xi_i(t))\xi_{i,1} + F_{i,2}(\xi_i(t))\xi_{i,2} \quad (3.12)$$

Où :

$$\begin{cases} \xi_{i,1} = \max_{x,u} \{\xi_i(t)\} \\ \xi_{i,2} = \min_{x,u} \{\xi_i(t)\} \\ F_{i,1}(\xi_i(t)) = \frac{\xi_i(t) - \xi_{i,2}}{\xi_{i,1} - \xi_{i,2}} \\ F_{i,2}(\xi_i(t)) = \frac{\xi_{i,1} - \xi_i(t)}{\xi_{i,1} - \xi_{i,2}} \end{cases} \quad (3.13)$$

Les fonctions d'activation $\mu_j(\xi(t))$ sont obtenues en utilisant les fonctions $F_{i,1}(\xi_i(t))$ et $F_{i,2}(\xi_i(t))$ comme suit :

$$\mu_j(\xi(t)) = \prod_{i=1}^{2^k} F_{i,\sigma_i^j}(\xi_i(t)) \quad (3.14)$$

Le nombre de sous modèles est égal à 2^k . Les indices σ_i^j , ($j = 1, \dots, 2^k$, et $i = 1, \dots, k$) sont égaux à 1 ou 2 et indiquent la partition du sous modèle i ($F_{i,1}$ ou $F_{i,2}$) à utiliser pour définir le sous-modèle j . La relation entre le numéro du sous-modèle i et les indices σ_i^j est donnée par l'égalité suivante :

$$i = 2^{n-1}\sigma_i^1 + 2^{n-2}\sigma_i^2 + \dots + 2^0\sigma_i^n - (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \quad (3.15)$$

Les matrices des sous-systèmes A_i , B_i , C_i , et D_i sont obtenues en remplaçant $x_i(t)$ par ξ_{i,σ_i^j} dans $A(\xi(t))$, $B(\xi(t))$, $C(\xi(t))$, et $D(\xi(t))$. Le résultat sera le MM suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2^k} \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{2^k} \mu_i(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (3.16)$$

Il est à noter que pour l'estimation et la commande, le nombre de contraintes LMI dépend du nombre de modèles locaux. La réduction de ce nombre, dépendant de la méthode de transformation, est synonyme de moins de conservatisme.

3.2.2.1.1 Exemple explicatif Considérons le système suivant [Tanaka and Wang, 2001] :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1(t) + x_1(t)x_2^3(t) \\ -x_2(t) + (3 + x_2(t))x_1^3(t) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Dans cet exemple, nous allons considérer la partie de l'espace d'état définie par $x_1(t) \in [-1, 1]$ et $x_2(t) \in [-1, 1]$ afin d'obtenir le MM.

Le système 3.17 peut-être factorisé sous forme quasi-LPV comme suit :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & x_1(t)x_2^2(t) \\ (3 + x_2(t))x_1(t) & -1 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.18)$$

Où $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T$, $\xi_1(t) = x_1(t)x_2^2(t)$, et $\xi_2(t) = (3 + x_2(t))x_1(t)$.
Nous aurons alors :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & \xi_1(t) \\ \xi_2(t) & -1 \end{bmatrix} x(t) \quad (3.19)$$

Nous allons ensuite calculer les valeurs minimale et maximale de $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ pour $x_1(t) \in [-1, 1]$ et $x_2(t) \in [-1, 1]$. Nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned} \max_x \{\xi_1(t)\} &= 1, & \min_x \{\xi_1(t)\} &= -1 \\ \max_x \{\xi_2(t)\} &= 4, & \min_x \{\xi_2(t)\} &= 0 \end{aligned}$$

À partir de leurs valeurs maximales et minimales, $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ peuvent être représentées comme suit :

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= x_1(t)x_2^2(t) = F_{1,1}(\xi_1(t)) \times 1 + F_{1,2}(\xi_1(t)) \times (-1) \\ \xi_2(t) &= (3 + x_2(t))x_1(t) = F_{2,1}(\xi_2(t)) \times 4 + F_{2,2}(\xi_2(t)) \times 0 \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned} F_{1,1}(\xi_1(t)) + F_{1,2}(\xi_1(t)) &= 1 \\ F_{2,1}(\xi_2(t)) + F_{2,2}(\xi_2(t)) &= 1 \end{aligned}$$

Les fonctions d'appartenance peuvent donc être calculées comme suit :

$$\begin{aligned} F_{1,1}(\xi_1(t)) &= \frac{\xi_1(t) + 1}{2}, & F_{1,2}(\xi_1(t)) &= \frac{1 - \xi_1(t)}{2} \\ F_{2,1}(\xi_2(t)) &= \frac{\xi_2(t)}{4}, & F_{2,2}(\xi_2(t)) &= \frac{4 - \xi_2(t)}{4} \end{aligned}$$

En nommant respectivement les fonctions d'appartenance “positif”, “né-
gatif”, “grand”, et “petit”, le système non-linéaire 3.17 sera représenté par
le modèle flou suivant :

Règle 1 :

Si $\xi_1(t)$ **est** positif **et** $\xi_2(t)$ **est** grand

Alors $\dot{x}(t) = \mathbf{A}_1 x(t)$

Règle 2 :

Si $\xi_1(t)$ **est** positif **et** $\xi_2(t)$ **est** petit

Alors $\dot{x}(t) = \mathbf{A}_2 x(t)$

Règle 3 :

Si $\xi_1(t)$ **est négatif et** $\xi_2(t)$ **est grand**

Alors $\dot{x}(t) = A_3 x(t)$

Règle 4 :

Si $\xi_1(t)$ **est négatif et** $\xi_2(t)$ **est petit**

Alors $\dot{x}(t) = A_4 x(t)$

Avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La défuzzification se fait comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 \mu_i(\xi(t)) A_i x(t) \tag{3.20}$$

Les fonctions d'appartenance sont comme suit :

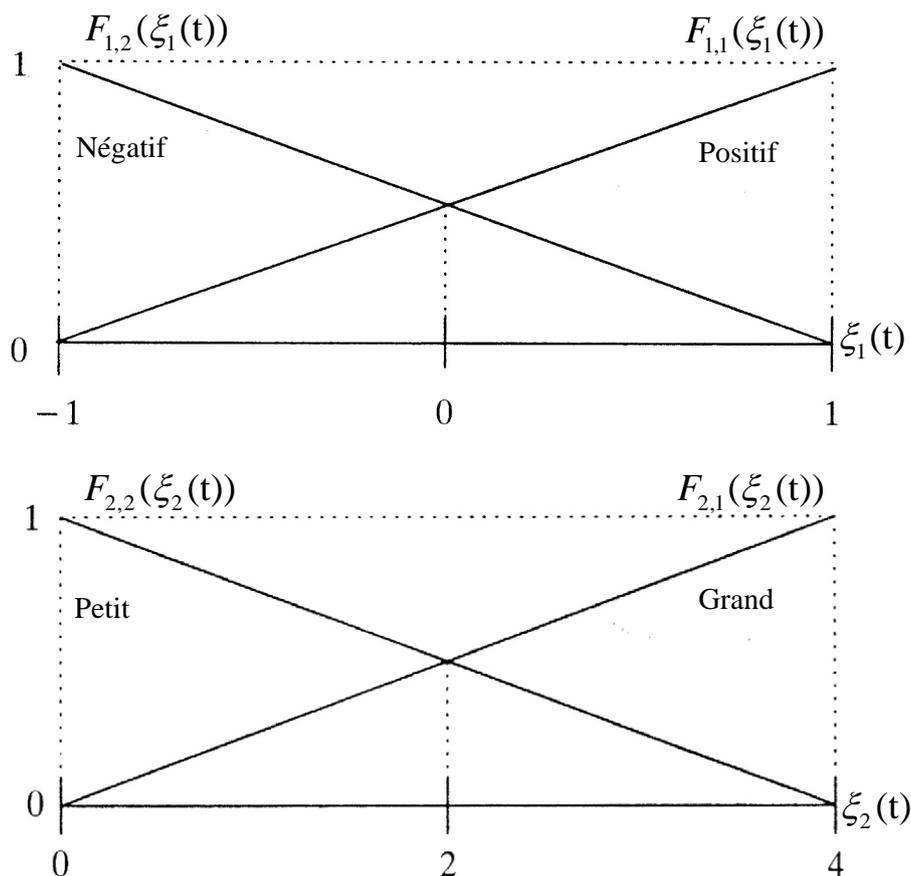


FIGURE 3.4 – Fonctions d'appartenance

Les fonctions d'activation seront :

$$\mu_1(\xi(t)) = F_{1,1}(\xi_1(t)) \times F_{2,1}(\xi_2(t))$$

$$\mu_2(\xi(t)) = F_{1,1}(\xi_1(t)) \times F_{2,2}(\xi_2(t))$$

$$\mu_3(\xi(t)) = F_{1,2}(\xi_1(t)) \times F_{2,1}(\xi_2(t))$$

$$\mu_4(\xi(t)) = F_{1,2}(\xi_1(t)) \times F_{2,2}(\xi_2(t))$$

Le modèle flou T-S obtenu représente de manière exacte le système non-linéaire dans la région $[-1, 1] \times [-1, 1]$ de l'espace (x_1, x_2) .

3.2.3 Propriétés des multimodèles

3.2.3.1 Stabilité

Considérons le système variant dans le temps suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (3.21)$$

Ce système est asymptotiquement stable s'il existe une matrice de Lyapunov $P = P^T > 0$ telle que la fonction de Lyapunov candidate :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (3.22)$$

Vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} V(x(t)) \geq 0 \\ V(x(t)) = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \\ \dot{V}(t) = \frac{d}{dt}V(t) \leq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Le même raisonnement est appliqué au système non-linéaire suivant, représenté par un multimodèle :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) A_i x(t) \quad (3.24)$$

Où $\mu_i(\xi(t))$ sont des fonctions d'activation vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.25)$$

Il a été démontré [Tanaka and Wang, 2001] que le multimodèle est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que les LMIs (voir A.7) suivantes soient simultanément vérifiées :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (3.26)$$

3.2.3.2 Observabilité et commandabilité

Soit le système représenté par le MM suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2^k} \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{2^k} \mu_i(\xi(t)) (C_i x(t)) \end{cases} \quad (3.27)$$

Le système est observable si la condition suivante est satisfaite :

$$\text{rang}(\mathcal{O}_i) = \text{rang} \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \\ \vdots \\ C_i A_i^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (3.28)$$

De même, le système est commandable si la condition suivante est satisfaite :

$$\text{rang}(\mathcal{M}_i) = \text{rang} [B_i \quad A_i B_i \quad \cdots \quad A_i^{n-1} B_i] = n \quad (3.29)$$

Et ce, pour $i = 1, \dots, 2^k$.

Nous vérifions que notre système est bien stable observable et commandable.

Chapitre 4

Exploitation des multimodèles

4.1 Multimodèle pour la station d'épuration

4.1.1 Multimodèle par identification

Tous ces algorithmes ont été inclus dans la toolbox Fuzzy Identification [Babuška, 2000, Babuška et al., 1998b], le script pour obtenir le multimodèle à partir des mesures pour le modèle réduit ASM1 est donné dans A.5 et le MM obtenu est donné dans A.6.

Nous obtenons le multimodèle présenté dans , dont voici les réponses :

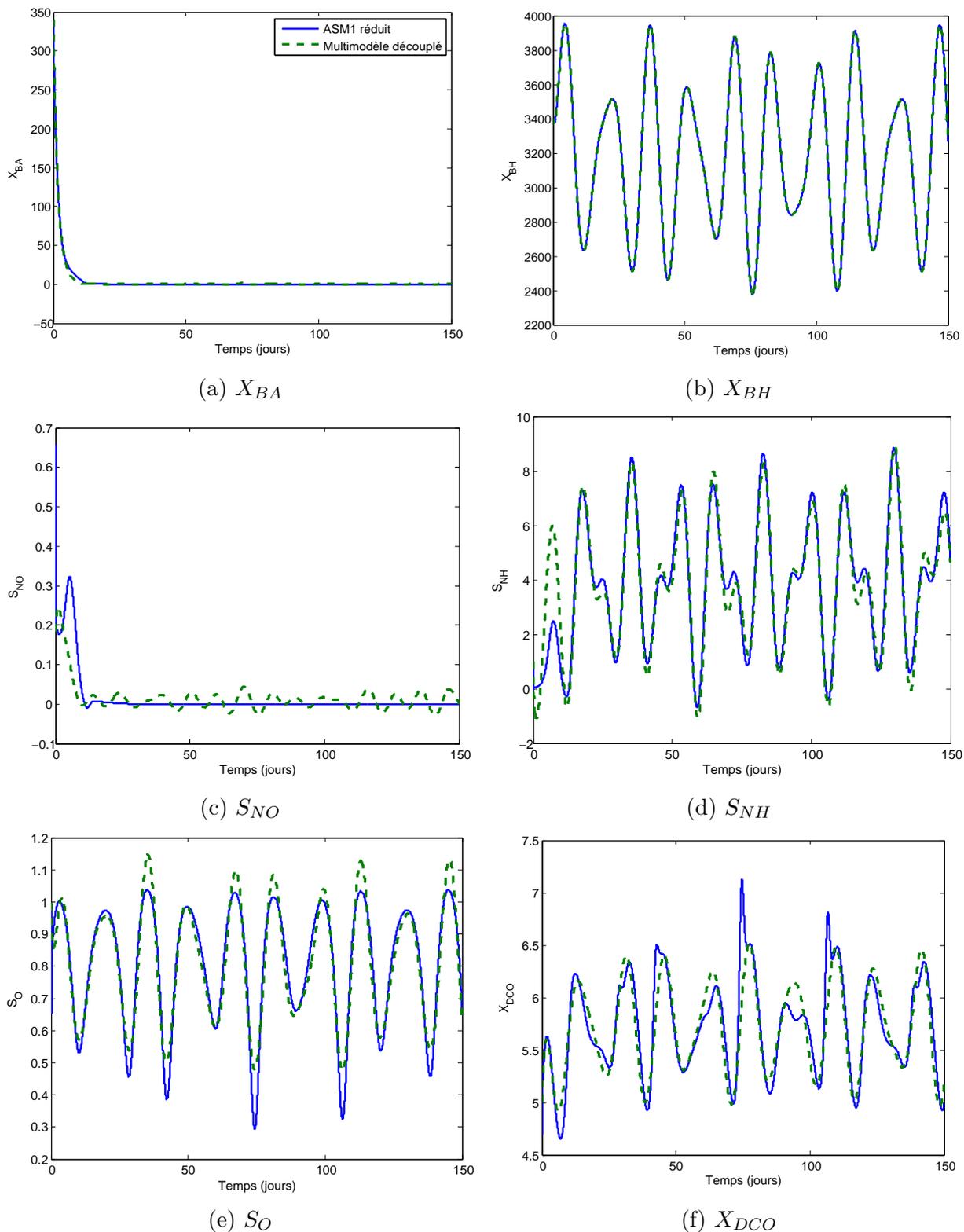


FIGURE 4.1 – Comparaison du modèle ASM1 réduit et du multimodèle découplé

Dans ce cas, la qualité du MM (c'est-à-dire son pouvoir de représentation) dépend fortement de la qualité des données disponibles (fréquence d'échantillonnage et type d'entrée utilisée).

4.1.2 Transformation par secteurs non-linéaires

Le modèle ASM1 réduit a déjà fait l'objet d'études dans [Bezzaoucha et al., 2013a, Bezzaoucha et al., 2013b] et [Nagy et al., 2008, Nagy, 2010].

Dans cette partie, nous allons construire un MM afin de l'utiliser pour la synthèse d'un observateur permettant l'estimation des états du modèle ASM1 réduit.

En considérant les équations du processus d'épuration, il est naturel de définir les variables de prémisse suivantes :

$$\xi_1(x(t), u(t)) = \frac{q_{in}(t)}{V} \quad (4.1)$$

$$\xi_2(x(t), u(t)) = \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} \quad (4.2)$$

$$\xi_3(x(t), u(t)) = \frac{X_{DCO}(t)}{K_{DCO} + X_{DCO}(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \quad (4.3)$$

$$\xi_4(x(t), u(t)) = \frac{1}{K_{OA} + S_O(t)} \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH,A} + S_{NH}(t)} X_{BA}(t) \quad (4.4)$$

Les matrices de la forme quasi-LPV auront la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = A(x, u)x(t) + B(x, u)u(t) + E(x, u)d(t) \quad (4.5)$$

et sont exprimées grâce aux variables de prémisse comme suit :

$$A(x, u) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & 0 \\ 0 & a_{32} & -\xi_1(u) & 0 & a_{35} & a_{36} \\ 0 & a_{42} & 0 & -\xi_1(u) & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & a_{62} & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

et :

$$B(u) = \begin{bmatrix} \xi_1(u) & 0 \\ 0 & K S_{O,sat} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \xi_1(u) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \xi_1(u) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

où :

$$a_{11}(x, u) = -\xi_1(x, u)$$

$$a_{15}(x, u) = -\frac{\mu_H}{Y_H}\xi_2(x, u) + (1 - f_p)b_H - \frac{\mu_H\eta_{NOg}}{Y_H}$$

$$a_{16}(x, u) = (1 - f_p)b_A$$

$$a_{22}(x, u) = -\xi_1(x, u) - Kq_a - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A}\mu_A\xi_4(x, u)$$

$$a_{25}(x, u) = \frac{(Y_H - 1)\mu_H}{Y_H}\xi_2(x, u)$$

$$a_{32}(x, u) = -(i_{XB} + \frac{1}{Y_A})\mu_A\xi_4(x, u)$$

$$a_{35}(x, u) = (i_{XB} + f_p i_{XP})b_H - i_{XB}\mu_H\xi_2(x, u) - i_{XB}\mu_H\eta_{NOg}\xi_3(x, u)$$

$$a_{36}(x, u) = (i_{XB} + f_p i_{XP})b_A$$

$$a_{42}(x, u) = \frac{1}{Y_A}\mu_A\xi_4(x, u)$$

$$a_{45}(x, u) = \frac{Y_H - 1}{2.86Y_H}\mu_H\eta_{NOg}\xi_3(x, u)$$

$$a_{55}(x, u) = \mu_H\xi_2(x, u) - b_H + \xi_1(x, u) \left[\frac{F_W(1 + f_R)}{f_R + f_W} - 1 \right] + \mu_H\eta_{NOg}\xi_3(x, u)$$

$$a_{62}(x, u) = \mu_A z_4(x, u)$$

$$a_{66}(x, u) = \xi_1(x, u) \left[\frac{F_W(1 + f_R)}{f_R + f_W} - 1 \right] - b_A$$

En utilisant la transformation décrite dans 3.2.2.1, le système est mis sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{16} \mu_i(x, u)(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)) \quad (4.8)$$

$$y(t) = Cx(t) + Gd(t) \quad (4.9)$$

Avec les matrices :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = O_{4,2} \quad (4.10)$$

En exploitant la transformation polytopique convexe, les non-linéarités $x_i(t)$ peuvent être ré-écrites sous la forme suivante :

$$\xi_i(t) = F_{i,1}(\xi_i(t))\xi_{i,1} + F_{i,2}(\xi_i(t))\xi_{i,2} \quad (4.11)$$

Et ce pour $i = 1, \dots, 4$. où :

$$\begin{cases} \xi_{i,1} = \max_{x,u} \{\xi_i(t)\} \\ \xi_{i,2} = \min_{x,u} \{\xi_i(t)\} \\ F_{i,1}(\xi_i(t)) = \frac{\xi_i(t) - \xi_{i,2}}{\xi_{i,1} - \xi_{i,2}} \\ F_{i,2}(\xi_i(t)) = \frac{\xi_{i,1} - \xi_i(t)}{\xi_{i,1} - \xi_{i,2}} \end{cases} \quad (4.12)$$

Les valeurs extrémales des variables de prémisses choisies pour la station d'épuration (et qui forment le polytope à l'intérieur duquel évoluera le système) sont comme suit :

$$\begin{aligned} \max_{x,u} \{\xi_1(t)\} &= 0.6, & \min_{x,u} \{\xi_1(t)\} &= 0 \\ \max_{x,u} \{\xi_2(t)\} &= 0.128, & \min_{x,u} \{\xi_2(t)\} &= 0.021 \\ \max_{x,u} \{\xi_3(t)\} &= 0.045, & \min_{x,u} \{\xi_3(t)\} &= -7.16 \times 10^{-5} \\ \max_{x,u} \{\xi_4(t)\} &= 3.325 \times 10^2, & \min_{x,u} \{\xi_4(t)\} &= -0.028 \end{aligned}$$

En remplaçant les valeurs précédentes dans la forme quasi-LPV, obtient les sous-systèmes suivants :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0 & 0 & -1.27 & 0.046 \\ 0 & -1.01 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -0.378 & 0 \\ 0 & -0.435 & -0.6 & 0 & -0.0667 & 0.00406 \\ 0 & 1111.0 & 0 & -0.6 & -0.0167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.218 & 0 \\ 0 & 266.0 & 0 & 0 & 0 & -0.595 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0 & 0 & -1.27 & 0.046 \\ 0 & -5300.0 & 0 & 0 & -0.378 & 0 \\ 0 & -0.435 & -0.6 & 0 & -0.0667 & 0.00406 \\ 0 & -0.0948 & 0 & -0.6 & -0.0167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.218 & 0 \\ 0 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 & -0.595 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0 & 0 & -0.943 & 0.046 \\ 0 & -1.01 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -0.378 & 0 \\ 0 & -0.435 & -0.6 & 0 & -0.0481 & 0.00406 \\ 0 & 1111.0 & 0 & -0.6 & 2.66 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00227 & 0 \\ 0 & 266.0 & 0 & 0 & 0 & -0.595 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0 & 0 & -0.943 & 0.046 \\ 0 & -5300.0 & 0 & 0 & -0.378 & 0 \\ 0 & -0.435 & -0.6 & 0 & -0.0481 & 0.00406 \\ 0 & -0.0948 & 0 & -0.6 & 2.66 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00227 & 0 \\ 0 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 & -0.595 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0 & 0 & -0.311 & 0.046 \\ 0 & -1.01 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -0.0631 & 0 \\ 0 & -0.0727 & -0.6 & 0 & -0.0117 & 0.00406 \\ 0 & 1111.0 & 0 & -0.6 & -0.0167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.421 & 0 \\ 0 & 266.0 & 0 & 0 & 0 & -0.595 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0 & 0 & -0.311 & 0.046 \\ 0 & -5300.0 & 0 & 0 & -0.0631 & 0 \\ 0 & -0.0727 & -0.6 & 0 & -0.0117 & 0.00406 \\ 0 & -0.0948 & 0 & -0.6 & -0.0167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.421 & 0 \\ 0 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 & -0.595 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.0116 & 0.046 \\ 0 & -1.01 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -0.0631 & 0 \\ 0 & -0.0727 & -0.6 & 0 & 0.00687 & 0.00406 \\ 0 & 1111.0 & 0 & -0.6 & 2.66 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.637 & 0 \\ 0 & 266.0 & 0 & 0 & 0 & -0.595 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.0116 & 0.046 \\ 0 & -5300.0 & 0 & 0 & -0.0631 & 0 \\ 0 & -0.0727 & -0.6 & 0 & 0.00687 & 0.00406 \\ 0 & -0.0948 & 0 & -0.6 & 2.66 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.637 & 0 \\ 0 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 & -0.595 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1.27 & 0.046 \\ 0 & -1.01 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -0.378 & 0 \\ 0 & -0.435 & 0 & 0 & -0.0667 & 0.00406 \\ 0 & 1111.0 & 0 & 0 & -0.0167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.764 & 0 \\ 0 & 266.0 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1.27 & 0.046 \\ 0 & -5300.0 & 0 & 0 & -0.378 & 0 \\ 0 & -0.435 & 0 & 0 & -0.0667 & 0.00406 \\ 0 & -0.0948 & 0 & 0 & -0.0167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.764 & 0 \\ 0 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.943 & 0.046 \\ 0 & -1.01 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -0.378 & 0 \\ 0 & -0.435 & 0 & 0 & -0.0481 & 0.00406 \\ 0 & 1111.0 & 0 & 0 & 2.66 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.547 & 0 \\ 0 & 266.0 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.943 & 0.046 \\ 0 & -5300.0 & 0 & 0 & -0.378 & 0 \\ 0 & -0.435 & 0 & 0 & -0.0481 & 0.00406 \\ 0 & -0.0948 & 0 & 0 & 2.66 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.547 & 0 \\ 0 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.311 & 0.046 \\ 0 & -1.01 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -0.0631 & 0 \\ 0 & -0.0727 & 0 & 0 & -0.0117 & 0.00406 \\ 0 & 1111.0 & 0 & 0 & -0.0167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.124 & 0 \\ 0 & 266.0 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.311 & 0.046 \\ 0 & -5300.0 & 0 & 0 & -0.0631 & 0 \\ 0 & -0.0727 & 0 & 0 & -0.0117 & 0.00406 \\ 0 & -0.0948 & 0 & 0 & -0.0167 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.124 & 0 \\ 0 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0116 & 0.046 \\ 0 & -1.01 \cdot 10^4 & 0 & 0 & -0.0631 & 0 \\ 0 & -0.0727 & 0 & 0 & 0.00687 & 0.00406 \\ 0 & 1111.0 & 0 & 0 & 2.66 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0922 & 0 \\ 0 & 266.0 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$A_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0116 & 0.046 \\ 0 & -5300.0 & 0 & 0 & -0.0631 & 0 \\ 0 & -0.0727 & 0 & 0 & 0.00687 & 0.00406 \\ 0 & -0.0948 & 0 & 0 & 2.66 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0922 & 0 \\ 0 & -0.0227 & 0 & 0 & 0 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 400.0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

$$B_1 = B_2 = \dots = B_8 \quad (4.30)$$

$$B_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 400.0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$B_9 = B_{10} = \dots = B_{16} \quad (4.32)$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

$$E_1 = E_2 = \dots = E_8 \quad (4.34)$$

$$E_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$E_9 = E_{10} = \dots = E_{16} \quad (4.36)$$

Nous obtenons ce qui suit pour les fonctions d'appartenance :

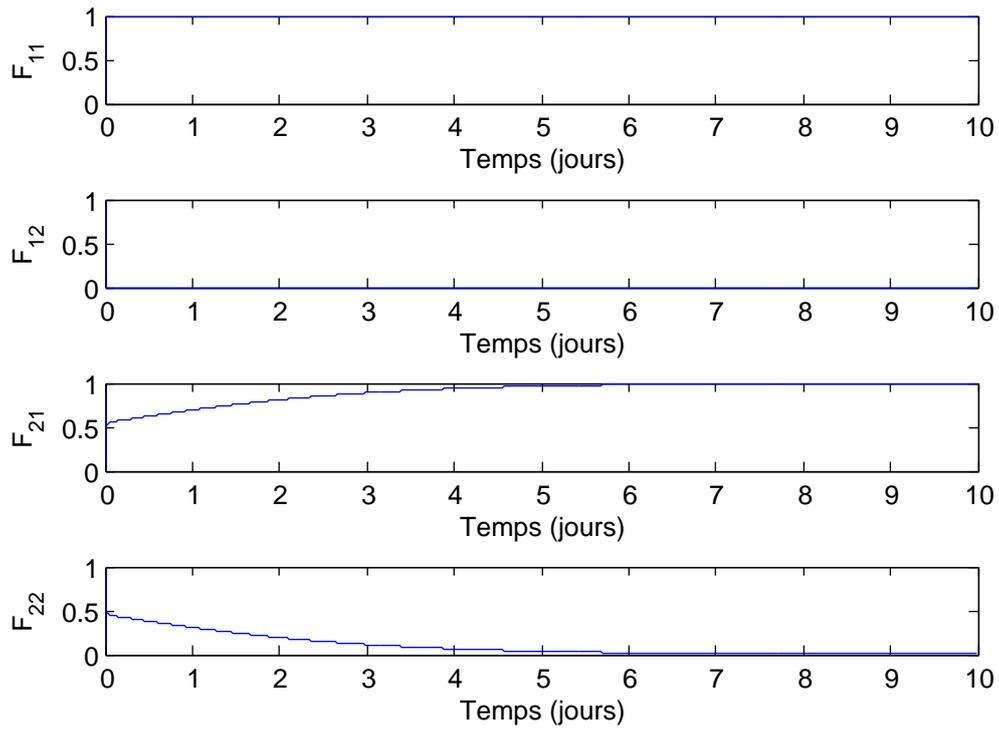


FIGURE 4.2 – Fonctions d'appartenance du modèle ASM1 réduit

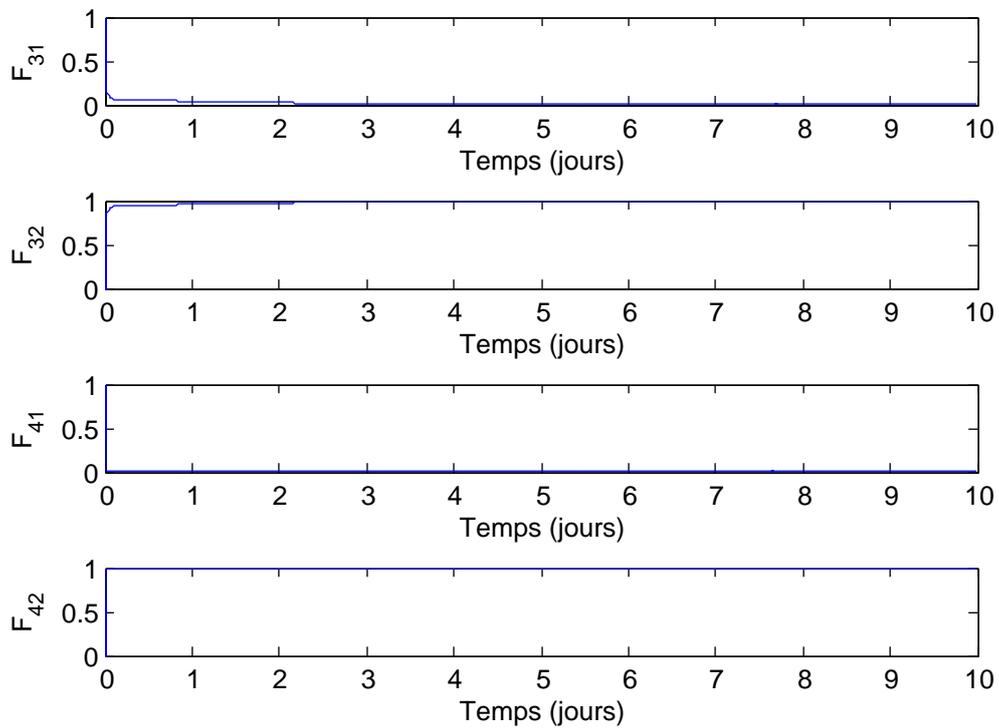


FIGURE 4.3 – Fonctions d'appartenance du modèle ASM1 réduit

Les fonctions d'activation $\mu_j(\xi(t))$ sont obtenues en utilisant les fonc-

tions $F_{i,1}(\xi_i(t))$ et $F_{i,2}(\xi_i(t))$ comme suit :

$$\mu_j(\xi(t)) = \prod_{i=1}^{16} F_{i,\sigma_i^j}(\xi_i(t)) \quad (4.37)$$

Ce qui nous donne :

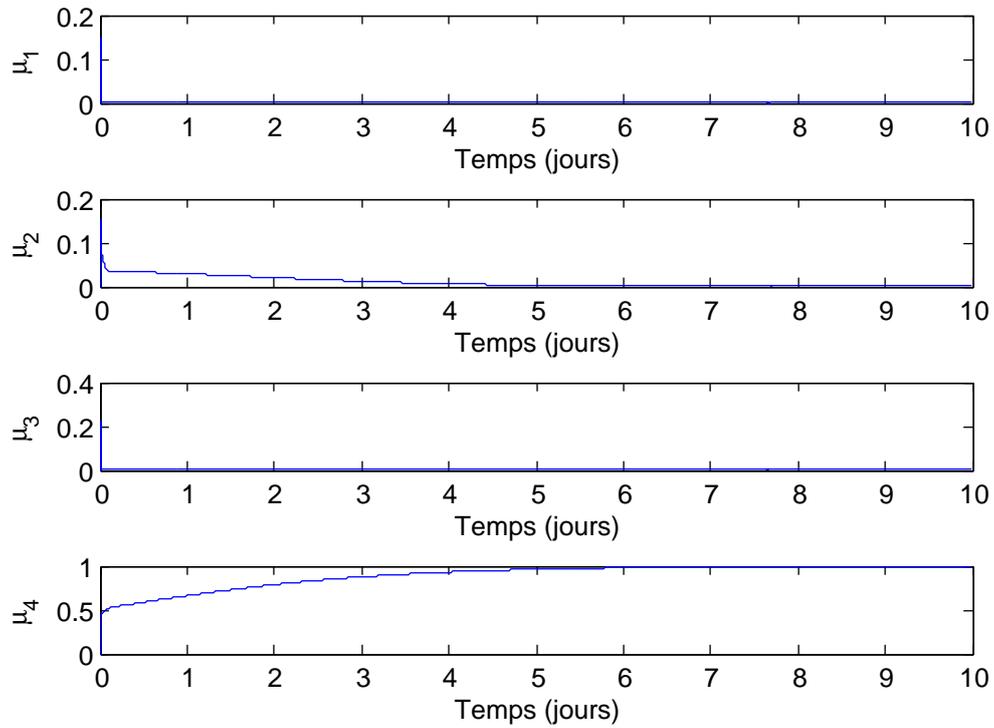


FIGURE 4.4 – Fonctions d'activation du modèle ASM1 réduit

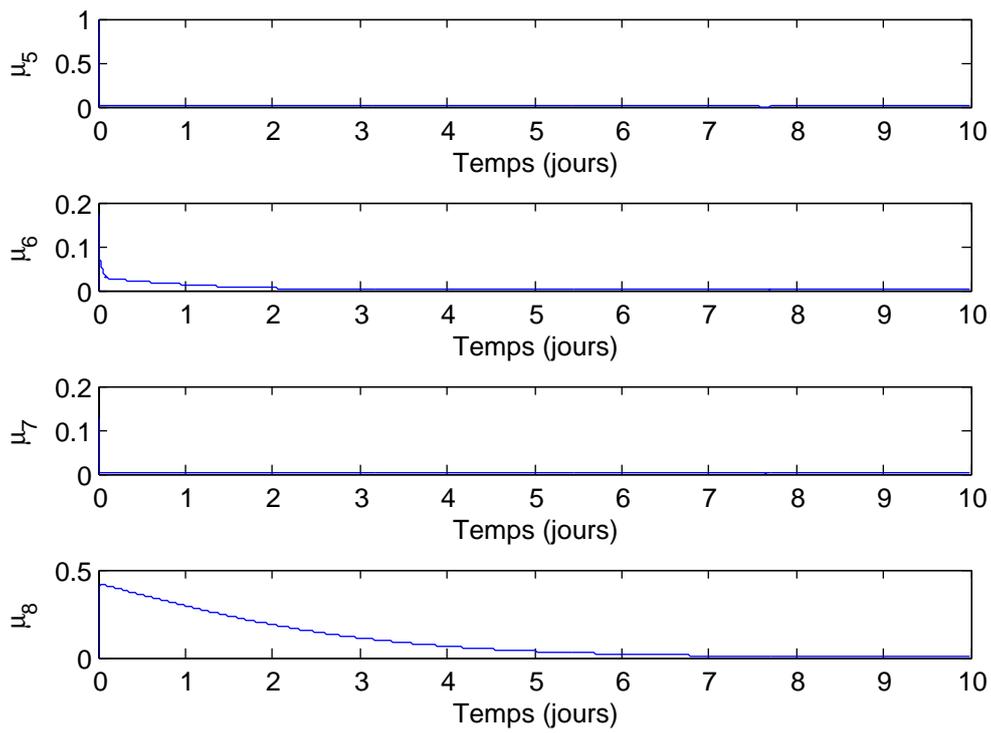


FIGURE 4.5 – Fonctions d’activation du modèle ASM1 réduit

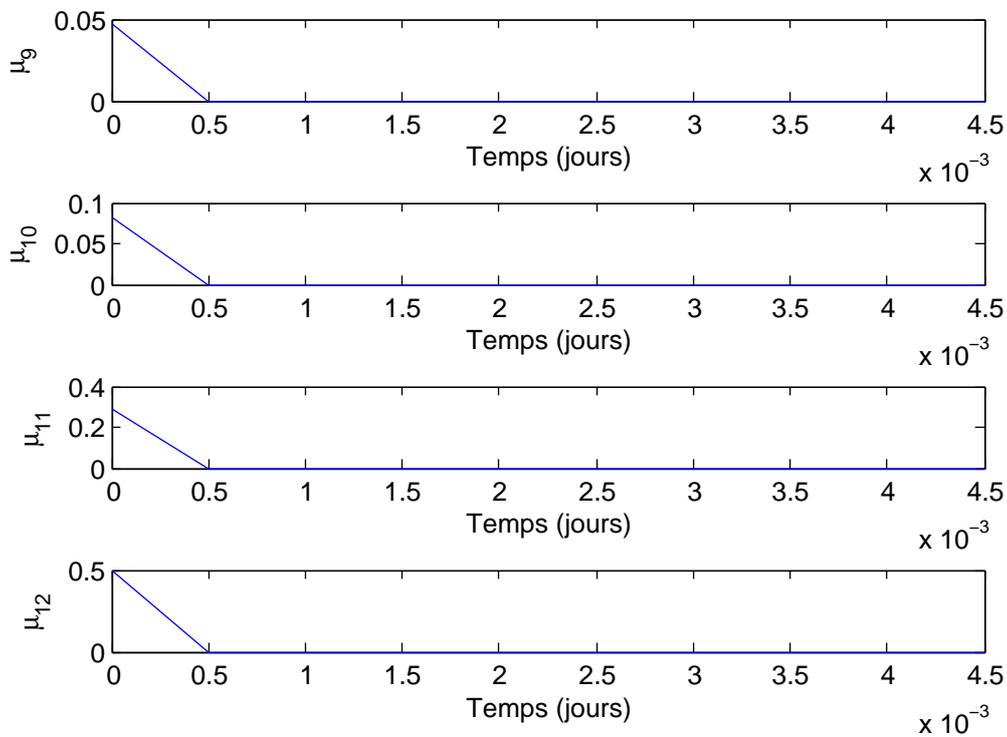


FIGURE 4.6 – Fonctions d’activation du modèle ASM1 réduit

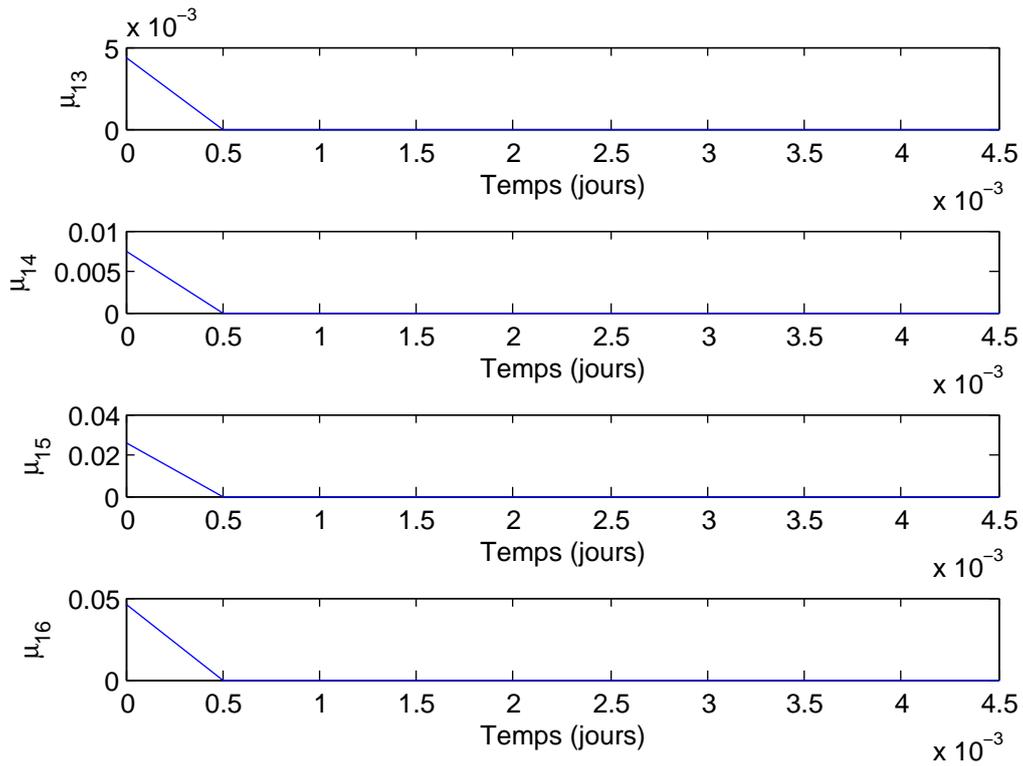


FIGURE 4.7 – Fonctions d’activation du modèle ASM1 réduit

Le MM a été simulé et sa réponse comparée à celle du système non-linéaire dans les figures qui suivent :

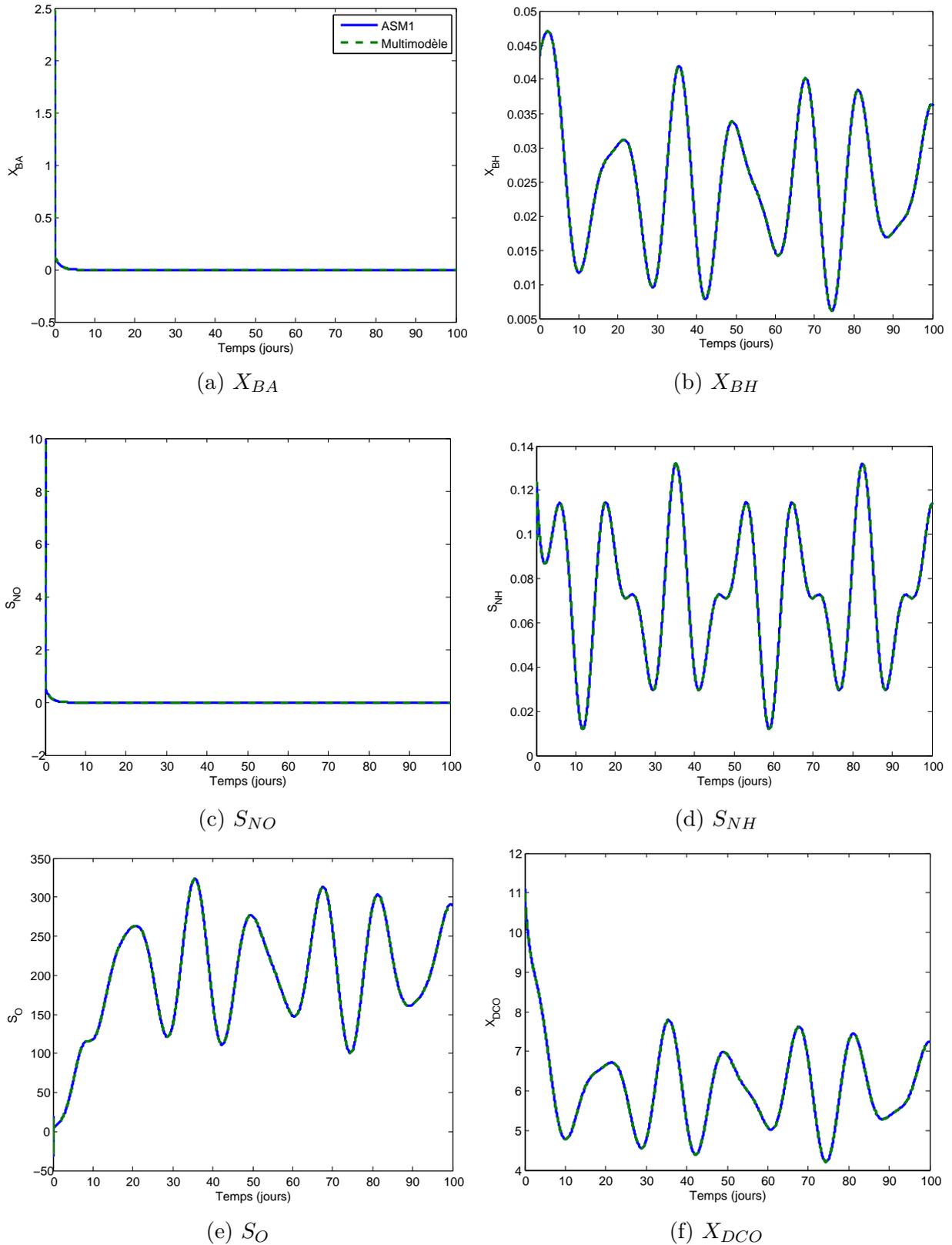


FIGURE 4.8 – Comparaison du modèle ASM1 réduit et du multimodèle couplé

Nous pouvons constater que l'approche par transformation polytopique produit un MM qui a une réponse nettement plus précise que celui obtenu

par identification des données expérimentales.

4.2 Observateur à entrées inconnues à base de Multimodèle

Pour le processus d'épuration décrit par le modèle ASM1 réduit on considère que les concentrations disponibles à la mesure à la sortie de la station sont la DCO X_{DCO} , l'oxygène dissous S_O , l'ammoniac S_{NH} , et le nitrate S_{NO} .

La synthèse d'observateurs pour ce type de systèmes non linéaires a déjà été étudiée dans [Korbicz et al., 2007] ou [Akhenak et al., 2004b, Akhenak et al., 2004a] et notamment dans [Akhenak et al., 2006, Akhenak, 2004] par l'approche LMI en se basant sur un MM.

Le diagnostic et la commande tolérante aux défauts pour les systèmes non-linéaires décrits à base de MM a également fait l'objet d'études [Rodrigues, 2005].

Considérons le système défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x, u)(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)) \\ y(t) &= Cx(t) + Gd(t) \end{cases} \quad (4.38)$$

Où r est le nombre de sous-systèmes.

Des observateurs pour ce type de systèmes ont été mis au point et améliorés par l'introduction de paramètres permettant de restreindre la solution à une région LMI [Patton et al., 1998], et ce faisant réduire le conservatisme des résultats obtenus.

Ces observateurs basées sur la résolution de LMI ont été étendus à des MM à entrées inconnues [Ichalal, 2009].

Nous allons considérer un observateur PI [Beale and Shafai, 1989] sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{d}(t) + L_{Pi}(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \dot{\hat{d}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(L_{Ii}(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + G\hat{d}(t) \end{cases}$$

Tout au long de cette section, nous considérerons que les entrées inconnues sont supposées constantes :

$$\dot{d}(t) = 0 \quad (4.39)$$

Cette hypothèse est utilisée pour la démonstration théorique de la convergence de l'observateur PI. Nous verrons aussi qu'en pratique, il est très aisé de s'en affranchir en augmentant les gains de l'observateur afin d'élargir sa bande passante et permettre la prise en compte des dynamiques négligées. Ceci entrainera bien entendu une augmentation de la sensibilité aux bruits, un choix de gains sera alors fait de manière à trouver un bon compromis entre la robustesse et les performances de l'observateur [Marx et al., 2003]. Dans l'équation 4.39, L_{Pi} désigne les gains proportionnels de l'observateur et L_{Ii} les gains intégraux.

Cet observateur se démarque d'une structure classique de Luenberger par la présence d'un retour intégral permettant la reconstruction des entrées inconnues du système. Ceci en fait un bon candidat pour l'estimation des défauts de basse fréquence.

Nous pouvons mettre le système 4.38 sous forme augmentée qui est telle que :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t)) \\ y(t) &= \bar{C} x_a(t) \end{cases} \quad (4.40)$$

où :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & E_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C \quad G] \quad (4.41)$$

L'observateur sera alors mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(\bar{A}_i \hat{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{L}_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= C \hat{x}_a(t) \end{cases}$$

où :

$$\bar{L}_i = \begin{bmatrix} L_{Pi} \\ L_{Ii} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

L'erreur d'estimation et d'état est définie comme suit :

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \quad (4.43)$$

L'équation différentielle de la dynamique de l'erreur sera comme suit [Marx et al., 2003] :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(\bar{A}_i - \bar{L}_i C)e_a(t) \quad (4.44)$$

Les erreurs d'estimation d'état et d'entrées inconnues convergent asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice symétrique définie positive

$P \in \mathbb{R}^{(n+n_d) \times (n+n_d)}$ et des matrices $\bar{K}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_d) \times n_y}$ telles que les LMIs suivantes soient vérifiées :

$$\bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i - \bar{C}^T \bar{K}_i^T - \bar{K}_i \bar{C} < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (4.45)$$

Après la résolution des LMIs, les gains sont obtenus de la façon suivante :

$$\bar{L}_i = \begin{bmatrix} L_{Pi} \\ L_{Ii} \end{bmatrix} = P^{-1} \bar{K}_i \quad (4.46)$$

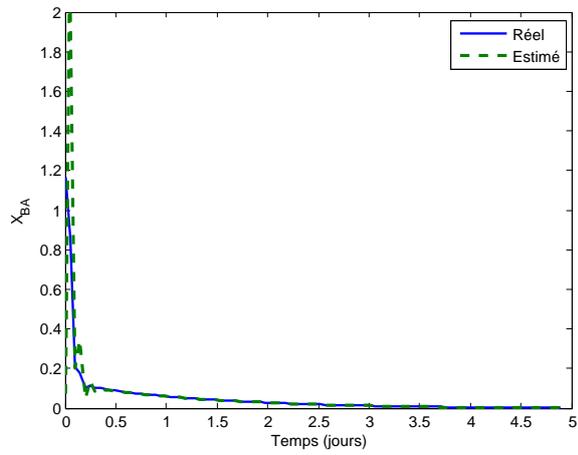
La preuve de la convergence de cet observateur [Marx et al., 2003] s'appuie sur la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e_a(t)) = e_a^T(t) P e_a(t), \quad P = P^T > 0 \quad (4.47)$$

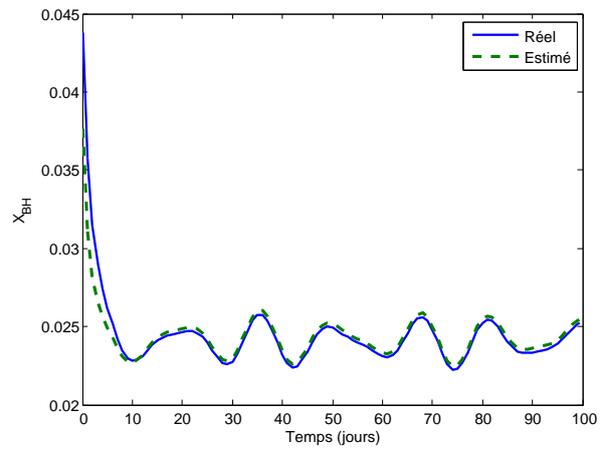
la propriété de somme convexe des fonctions d'activation et le changement de variable :

$$\bar{K}_i = P \bar{L}_i \quad (4.48)$$

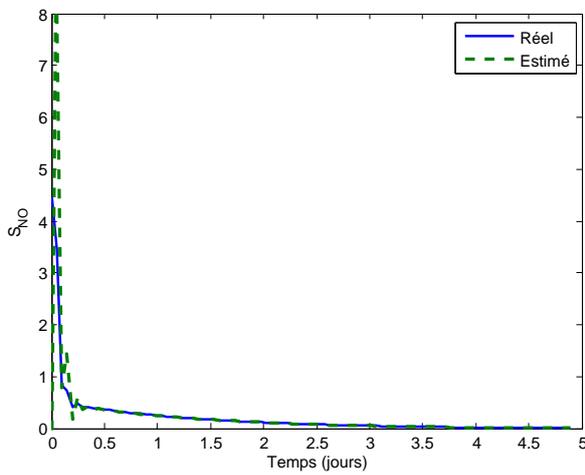
La résolution de ces LMIs est exposée dans A.8. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures ci-après :



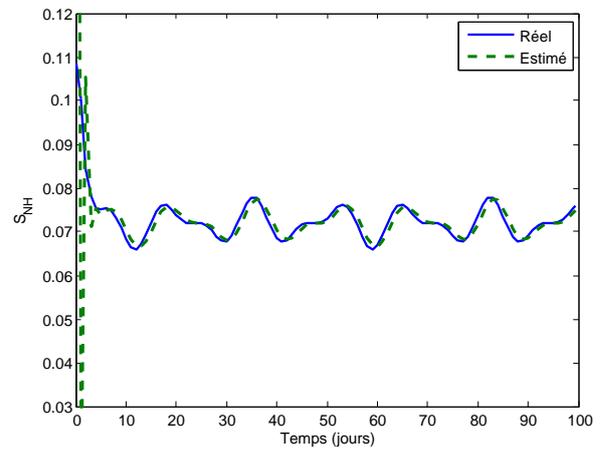
(a) X_{BA}



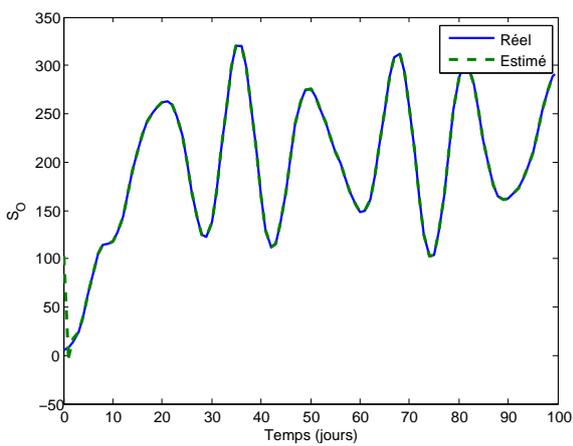
(b) X_{BH}



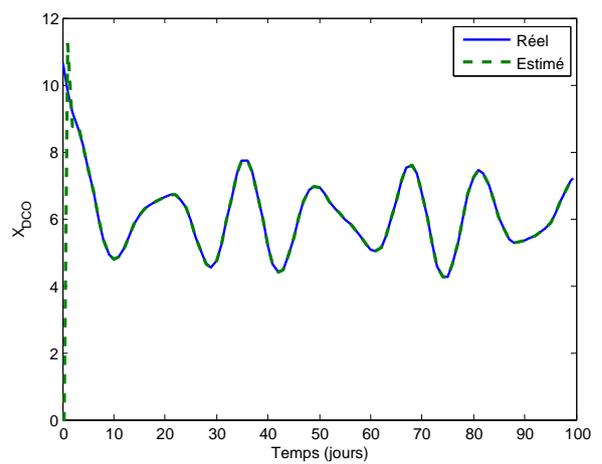
(c) S_{NO}



(d) S_{NH}



(e) S_O



(f) X_{DCO}

FIGURE 4.9 – Estimateur d'état à entrées inconnues - états

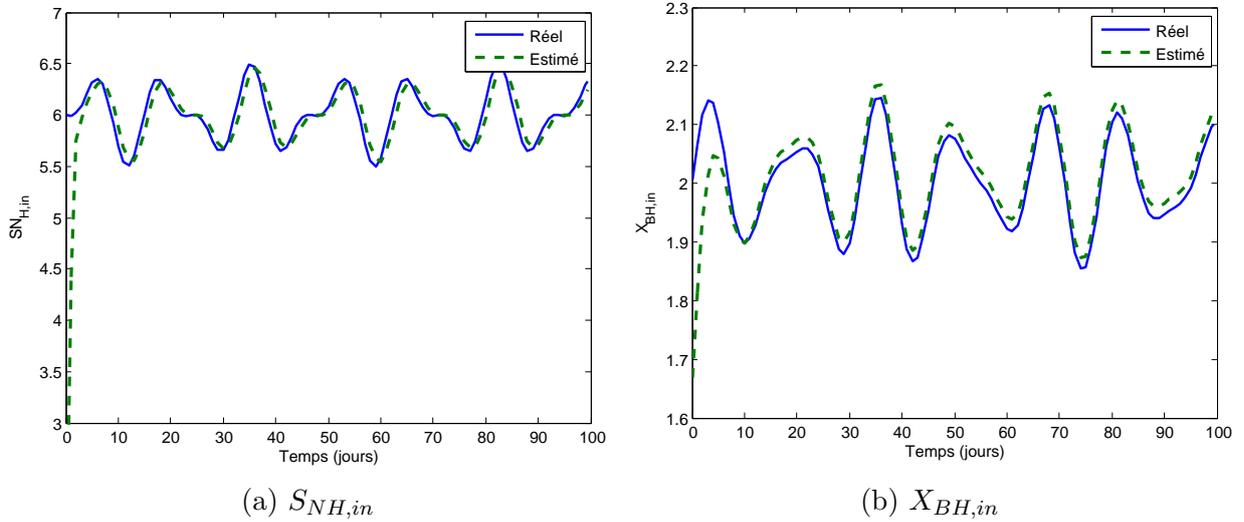


FIGURE 4.10 – Estimateur d'état à entrées inconnues - entrées estimées

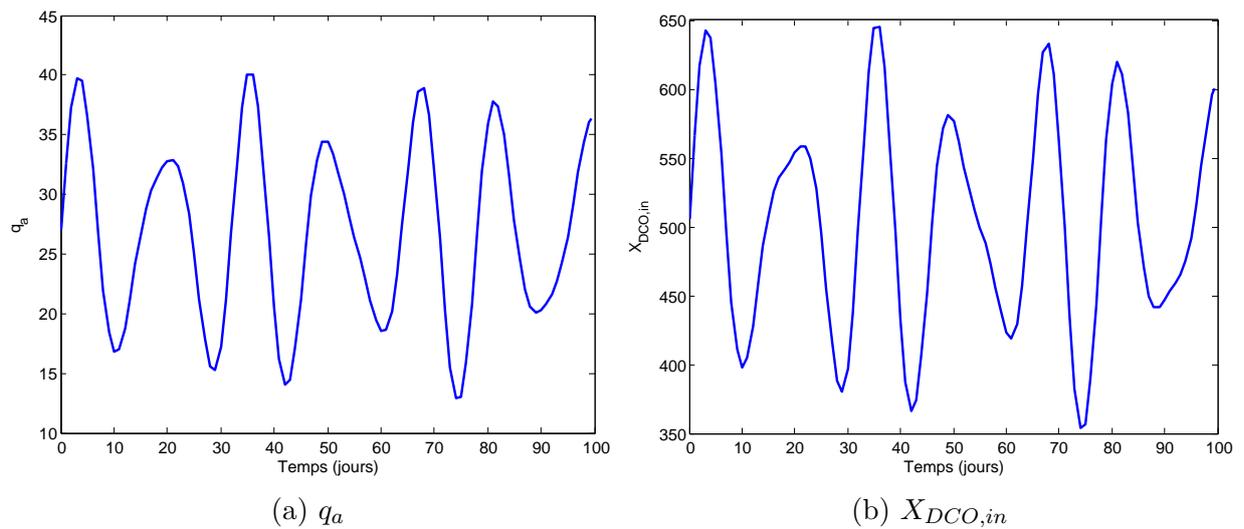


FIGURE 4.11 – Entrées connues utilisées pour l'estimation.

Nous pouvons constater que l'erreur sur les états et les entrées inconnues est proche de zéro, l'augmentation des gains de la partie intégrale de l'observateur PI permet donc bien d'identifier des entrées inconnues non constantes en augmentant la bande passante de l'observateur.

Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire appliquent des résultats obtenus sur les modèles flous de Takagi-Sugeno afin de synthétiser un observateur d'état sous contraintes LMIs pour un système non-linéaire, qui est celui d'une station d'épuration basée sur le modèle à boue activée ASM1.

Dans le contexte de la modélisation, l'approche multimodèle a été choisie pour les nombreux avantages qu'elle apporte au niveau de l'analyse de stabilité et de la synthèse d'observateurs pour les systèmes non-linéaires. Cette structure a fait l'objet de nombreuses études dans différents domaines comme l'identification, la commande ou l'estimation.

Après avoir établi le modèle ASM1 à 11 états puis l'avoir simplifié à 6 états, deux approches ont été explorées pour l'obtention du modèle flou de Takagi-Sugeno : celle basée sur l'identification à partir de données expérimentales et l'approche par secteurs non-linéaires. Nous avons vu que cette dernière offrait des modèles flous équivalents aux modèles non-linéaires sans perte d'information, bien qu'elle nécessite la connaissance de la dynamique du système.

Sur la base du modèle flou de Takagi-Sugeno obtenu, nous avons réalisé un observateur PI qui a la particularité de disposer de gains de type intégral permettant reconstruire des entrées inconnues du système à partir des sorties disponibles et ceci en résolvant des inégalités matricielles linéaires (LMIs) qui assurent la convergence asymptotique de l'observateur.

L'observateur réalisé est un observateur à variables de décisions mesurables (nous avons supposé les fonctions d'activation connues). Plusieurs travaux ont été effectués concernant les observateurs d'état à variables de décision non-mesurables [[Ichalal et al., 2008](#)] pour les modèles flous de Takagi-Sugeno. Une des perspectives sur laquelle ouvre ce mémoire est l'implémentation d'un observateur de ce type. D'autres perspectives incluent

l'application de résultats obtenus sur les multimodèles afin de réaliser le diagnostic et la détection des défauts de capteurs de systèmes non-linéaires ainsi que l'estimation en ligne de systèmes à paramètres variables dans le temps.

Annexe A

Paramètres du modèles ASM1

A.1 Variables d'état

Symbole	Composé	Unité
S_I	Matière organique soluble inerte	$g \cdot m^{-3}$
S_S	Substrat facilement biodégradable	$g \cdot m^{-3}$
X_I	Matière organique particulaire inerte	$g \cdot m^{-3}$
X_S	Substrat lentement biodégradable	$g \cdot m^{-3}$
$X_{B,H}$	Biomasse active hétérotrophe	$g \cdot m^{-3}$
$X_{B,A}$	Biomasse active autotrophe	$g \cdot m^{-3}$
S_{NO}	Azote sous forme de nitrates et de nitrites	$g \cdot m^{-3}$
S_{NH}	Azote sous forme d'ammoniaque	$g \cdot m^{-3}$
S_{ND}	Azote organique soluble biodégradable	$g \cdot m^{-3}$
X_{ND}	Azote organique particulaire biodégradable	$g \cdot m^{-3}$
S_O	Oxygène dissous	$g \cdot m^{-3}$

Tableau A.1 – Variables d'état du modèle ASM1

A.2 Matrice cinétique du modèle ASM1

j \ Process	Component →		Process Rate, ρ_i [$ML^{-3}T^{-1}$]													
	i ↓	↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	Aerobic growth of heterotrophs	S_S	$-\frac{1}{Y_H}$	$-\frac{1}{Y_H}$	X_I	X_S	$X_{B,H}$	$X_{B,A}$	X_P	S_O	S_{NO}	S_{NH}	S_{ND}	X_{ND}	S_{ALK}	$\hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) X_{B,H}$
2	Anoxic growth of heterotrophs	S_S	$-\frac{1}{Y_H}$	$-\frac{1}{Y_H}$			1			$-\frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H}$	$-\frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H}$	$-i_{XB}$			$\hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \times \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \eta_g X_{B,H}$	
3	Aerobic growth of autotrophs						1			$-\frac{4.57 - Y_A}{Y_A}$	$\frac{1}{Y_A}$	$-\frac{1}{Y_A}$			$\hat{\mu}_A \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A}$	
4	'Decay' of heterotrophs								f_d						$b_H X_{B,H}$	
5	'Decay' of autotrophs								f_d						$b_A X_{B,A}$	
6	Ammonification of soluble organic nitrogen														$k_a S_{ND} X_{B,H}$	
7	'Hydrolysis' of entrapped organics		1												$k_b \frac{X_S / X_{B,H}}{K_X + (X_S / X_{B,H})} \left[\left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right] X_{B,H}$	
8	'Hydrolysis' of entrapped organic nitrogen														$\rho_i (X_{ND} / X_S)$	
Observed Conversion Rates [$ML^{-3}T^{-1}$]			$r_i = \sum_j v_{ij} \rho_j$													
Stoichiometric Parameters:			Kinetic Parameters:													
Heterotrophic yield: Y_H			Heterotrophic growth and decay: $\hat{\mu}_H, K_S, K_{O,H}, K_{NO}, b_H$													
Autotrophic yield: Y_A			Autotrophic growth and decay: $\hat{\mu}_A, K_{NH}, K_{O,A}, b_A$													
Fraction of biomass yielding particulate products: f_p			Correction factor for anoxic growth of heterotrophs: η_g													
Mass N/Mass COD in biomass: i_{XB}			Ammonification: k_a													
Mass N/Mass COD in products from biomass: i_{XP}			Hydrolysis: k_b, K_X													
			Correction factor for anoxic hydrolysis: η_h													
			Alkalinity – Molar units													
			Particulate biodegradable organic nitrogen [$M(N)L^{-3}$]													
			Soluble biodegradable organic nitrogen [$M(N)L^{-3}$]													
			$NH_4^+ + NH_3$ nitrogen [$M(N)L^{-3}$]													
			Nitrate and nitrite nitrogen [$M(N)L^{-3}$]													
			Oxygen (negative COD) [$M(-COD)L^{-3}$]													
			Particulate products arising from biomass decay [$M(COD)L^{-3}$]													
			Active autotrophic biomass [$M(COD)L^{-3}$]													
			Active heterotrophic biomass [$M(COD)L^{-3}$]													
			Slowly biodegradable substrate [$M(COD)L^{-3}$]													
			Particulate inert organic matter [$M(COD)L^{-3}$]													
			Readily biodegradable substrate [$M(COD)L^{-3}$]													
			Soluble inert organic matter [$M(COD)L^{-3}$]													

Tableau A.2 – Matrice cinétique du modèle ASM1 [Henze et al., 2006].

A.3 Paramètres numériques

Constante	Valeur
Y_H	0.24 g_{SS}/g_{DCO}
Y_A	0.67 g_{SS}/g_N
f_P	0.08 $g_{non-biodeg}/g_{biomasse}$
f_{XI}	0.08 $g_{non-biodeg}/g_{biomasse}$
i_{XB}	0.086 g_N/g_{DCO}
i_{XP}	0.06 g_{DCO}/g_N
b_A	0.05 g_{SS}/g_{DCO}

Constante	Valeur
b_H	0.22
k_a	0.08
k_h	3
K_S	20
K_{OA}	0.4
K_{OH}	0.2
K_{NH}	1
K_{NO}	5
K_X	0.03
n_g	0.8
n_h	0.4
μ_A	0.8
$S_{O,sat}$	2
K	100
V	5 L
μ_H	6

Tableau A.3 – Paramètres stœchiométriques et cinétiques du modèle ASM1.

A.4 Équations d'état du modèle ASM1

$$\begin{aligned}
\frac{dS_I(t)}{dt} &= D_{in}(t)[S_{I,in}(t) - S_I(t)] \\
\frac{dS_O(t)}{dt} &= D_{in}(t)[S_{O,in}(t) - S_O(t)] + Kq_a(t)[S_{O,sat}(t) - S_O(t)] \\
&\quad - \frac{1 - Y_H}{Y_H}\rho_1(t) - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A}\rho_3(t) \\
\frac{dS_{NO}(t)}{dt} &= D_{in}(t)[S_{NO,in}(t) - S_{NO}(t)] - \frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H}\rho_2(t) + \frac{1}{Y_A}\rho_3(t) \\
\frac{dS_{NH}(t)}{dt} &= D_{in}(t)[S_{NH,in}(t) - S_{NH}(t)] - i_{XB}(\rho_1(t) + \rho_2(t)) \\
&\quad - \left(i_{XB} + \frac{1}{Y_A}\right)\rho_3(t) + \rho_6(t) \\
\frac{dS_{ND}(t)}{dt} &= D_{in}(t)[S_{ND,in}(t) - S_{ND}(t)] - \rho_6(t) + \rho_8(t) \\
\frac{dX_{ND}(t)}{dt} &= D_{in}(t)X_{ND,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_{ND}(t) \\
&\quad + (i_{XB} - f_{XI}i_{XP})(\rho_4(t) + \rho_5(t)) - \rho_8(t) \\
\frac{dX_I(t)}{dt} &= D_{in}(t)X_{I,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_I(t) \\
&\quad + f_{XI}(\rho_4(t) + \rho_5(t)) \\
\frac{dX_S(t)}{dt} &= D_{in}(t)X_{S,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_S(t) \\
&\quad + (1 - f_{XI})(\rho_1(t) + \rho_2(t)) - \rho_7(t) \\
\frac{dS_S(t)}{dt} &= D_{in}(t)[S_{S,in}(t) - S_S(t)] - \frac{1}{Y_H}(\rho_1(t) + \rho_2(t)) + \rho_7(t) \\
\frac{dX_{BA}(t)}{dt} &= D_{in}(t)X_{BA,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_{BA}(t) \\
&\quad + \rho_3(t) - \rho_5(t) \\
\frac{dX_{BH}(t)}{dt} &= D_{in}(t)X_{BH,in}(t) - [D_{in}(t) + D_R(t)]\frac{D_W(t)}{D_R(t) + D_W(t)}X_{BH}(t) \\
&\quad + \rho_1(t) + \rho_2(t) - \rho_4(t)
\end{aligned}$$

$$\rho_1(t) = \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} X_{BH}(t)$$

$$\rho_2(t) = \mu_H \frac{S_S(t)}{K_S + S_S(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \frac{K_{OH}}{K_{NO} + S_O(t)} \eta_g X_{BH}(t)$$

$$\rho_3(t) = \mu_A \frac{S_{NH}(t)}{K_{NH} + S_{NH}(t)} \frac{S_O(t)}{K_{O,A} + S_O(t)} X_{BA}(t)$$

$$\rho_4(t) = b_H X_{BH}(t)$$

$$\rho_5(t) = b_A X_{BA}(t)$$

$$\rho_6(t) = k_a S_{ND}(t) X_{BH}(t)$$

$$\rho_7(t) = k_h \frac{X_S(t)/X_{BH}(t)}{K_X + X_S(t)/X_{BH}(t)}$$

$$\left(\frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} + \eta_h \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \right) X_{BH}(t)$$

$$\rho_8(t) = \frac{k_h X_S(t)/X_{BH}(t)}{K_X + X_S(t)/X_{BH}(t)}$$

$$\left(\frac{S_O(t)}{K_{OH} + S_O(t)} + \eta_h \frac{K_{OH}}{K_{OH} + S_O(t)} \frac{S_{NO}(t)}{K_{NO} + S_{NO}(t)} \right) \frac{X_{ND}(t) X_{BH}(t)}{X_S(t)}$$

A.5 Programme d'identification du multimodèle

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% define constants
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
c = [1 1 1 1 1 1];          % number of clusters
m = 10;                    % fuzziness parameter
tol = 1e-10;               % termination criterion
Ts = 0.01;                 % sample time [s]
FMtype = [1 1 1 1 1 1];    % type of fuzzy model:  1 - product-space MFS
                        %                2 - projected MFS
Ny = [ 1 1 1 1 1 1;
      1 1 1 1 1 1;
      1 1 1 1 1 1;
      1 1 1 1 1 1;
      1 1 1 1 1 1;
      0 1 0 1 0 1];        % denominator order

% states=[XDCO' SO' SNH' SNO' XBH' XBA'];
% outputs=[XDCO' SO' SNH' SNO'];
% allinputs=[XDCO0' SNH0' XBH0' qa'];

Nu = [1 0 0 0;
      0 0 0 1;
      0 1 0 0;
      0 0 0 0;
      0 0 1 0;
      0 0 0 0];           % numerator orders
Nd = [1 0 0 0;
      0 0 0 1;
      0 1 0 0;
      0 0 0 0;
      0 0 1 0;
      0 0 0 0];           % transport delays
                        % (set to 1 for y(k+1) = f(u(k),...))

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% read data
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
control = allinputs;
system = states;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% identification data
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u = control;
y = system;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% make fuzzy model by means of fuzzy clustering
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Dat.U = u; Dat.Y = y; Dat.Ts = Ts;
FM.c = c; FM.m = m; FM.ante = FMtype; FM.tol = tol;
FM.Ny = Ny; FM.Nu = Nu; FM.Nd = Nd;

[FM,Part] = fmclust(Dat,FM);

```

A.6 Le multimodèle découplé

Ce modèle a été généré à partir de 1501 points d'échantillonnage. Ce modèle a 4 entrées et 6 sorties. La période d'échantillonnage est de 0.1 s. La tolérance de l'algorithme de clustering à sa conclusion était de 1e-10, et la partition aléatoire initiale a été générée avec un seed égal à 211290. Les paramètres spécifiques à chaque état sont donnés sur le tableau suivant :

Tableau A.4 – Paramètres du modèle.

output	antecedent	c	m	n_y	n_u
1	2	1	10	$\{ \{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \},$ $\{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \} \}$	$\{ \{ [1] [] [] [] \},$ $\{ [1] [] [] [] \} \}$
2	2	1	10	$\{ \{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \},$ $\{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \} \}$	$\{ \{ [] [] [] [1] \},$ $\{ [] [] [] [1] \} \}$
3	2	1	10	$\{ \{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \},$ $\{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \} \}$	$\{ \{ [] [1] [] [] \},$ $\{ [] [1] [] [] \} \}$
4	2	1	10	$\{ \{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \},$ $\{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \} \}$	$\{ \{ [] [] [] [] \},$ $\{ [] [] [] [] \} \}$
5	2	1	10	$\{ \{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \},$ $\{ [1] [1] [1] [1] [1] [1] \} \}$	$\{ \{ [] [] [1] [] \},$ $\{ [] [] [1] [] \} \}$
6	2	1	10	$\{ \{ [] [1] [] [1] [] [1] \},$ $\{ [] [1] [] [1] [] [1] \} \}$	$\{ \{ [] [] [] [] \},$ $\{ [] [] [] [] \} \}$

Dans ce qui suit, les informations spécifiques à chaque état sont montrées pour chaque état.

État 1 :

Lois :

1. **Si** $y_1(k-1)$ est A_{11} **et** $y_2(k-1)$ est A_{12} **et** $y_3(k-1)$ est A_{13} **et** $y_4(k-1)$ est A_{14} **et** $y_5(k-1)$ est A_{15} **et** $y_6(k-1)$ est A_{16} **et** $u_1(k-1)$ est A_{17} **alors**

$$y_1(k) = 9.7 \cdot 10^{e-1} y_1(k-1) + 3.1 \cdot 10^{e-4} y_2(k-1) - 2.6 \cdot 10^{e-5} y_3(k-1) + 1.4 \cdot 10^{e-3} y_4(k-1) - 6.4 \cdot 10^{e-2} y_5(k-1) - 7.6 \cdot 10^{e-2} y_6(k-1) + 1.5 \cdot 10^{e-5} u_1(k-1) + 2.7 \cdot 10^{e-1}$$

Tableau A.5 – Paramètres conséquents 1.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$	$u_1(k-1)$	offset
1	$9.7 \cdot 10^{e-1}$	$3.1 \cdot 10^{e-4}$	$-2.6 \cdot 10^{e-5}$	$1.4 \cdot 10^{e-3}$	$-6.4 \cdot 10^{e-2}$	$-7.6 \cdot 10^{e-2}$	$1.5 \cdot 10^{e-5}$	$2.7 \cdot 10^{e-1}$

Tableau A.6 – Centres des clusters 1.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$	$u_1(k-1)$
1	$5.6 \cdot 10^{e+}$	$4.5 \cdot 10^{e+}$	$3.1 \cdot 10^{e+3}$	$3.8 \cdot 10^{e+}$	$1.3 \cdot 10^{e-2}$	$8.0 \cdot 10^{e-1}$	$4.9 \cdot 10^{e+2}$

État 2 :

Lois :

1. **Si** $y_1(k-1)$ est A_{11} **et** $y_2(k-1)$ est A_{12} **et** $y_3(k-1)$ est A_{13} **et** $y_4(k-1)$ est A_{14} **et** $y_5(k-1)$ est A_{15} **et** $y_6(k-1)$ est A_{16} **et** $u_4(k-1)$ est A_{17} **alors**

$$y_2(k) = 3.5 \cdot 10^{e-2} y_1(k-1) + 9.4 \cdot 10^{e-1} y_2(k-1) + 8.4 \cdot 10^{e-5} y_3(k-1) - 1.5 \cdot 10^{e-3} y_4(k-1) + 2.3 \cdot 10^{e+} y_5(k-1) + 2.3 \cdot 10^{e-1} y_6(k-1) - 8.4 \cdot 10^{e-2} u_4(k-1) - 4.8 \cdot 10^{e-1}$$

Tableau A.7 – Paramètres conséquents 2.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$	$u_4(k-1)$	offset
1	$3.5 \cdot 10^{e-2}$	$9.4 \cdot 10^{e-1}$	$8.4 \cdot 10^{e-5}$	$-1.5 \cdot 10^{e-3}$	$2.3 \cdot 10^{e+}$	$2.3 \cdot 10^{e-1}$	$-8.4 \cdot 10^{e-2}$	$-4.8 \cdot 10^{e-1}$

Tableau A.8 – Centres des clusters 2.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$	$u_4(k-1)$
1	$5.6 \cdot 10^{e+}$	$4.5 \cdot 10^{e+}$	$3.1 \cdot 10^{e+3}$	$3.8 \cdot 10^{e+}$	$1.3 \cdot 10^{e-2}$	$8.0 \cdot 10^{e-1}$	$2.0 \cdot 10^{e+}$

État 3 :

Lois :

1. **Si** $y_1(k-1)$ est A_{11} **et** $y_2(k-1)$ est A_{12} **et** $y_3(k-1)$ est A_{13} **et** $y_4(k-1)$ est A_{14} **et** $y_5(k-1)$ est A_{15} **et** $y_6(k-1)$ est A_{16} **et** $u_2(k-1)$ est A_{17} **alors**

$$y_3(k) = 6.5 \cdot 10^{e+}y_1(k-1) + 1.0 \cdot 10^{e-2}y_2(k-1) + 9.4 \cdot 10^{e-1}y_3(k-1) - 7.2 \cdot 10^{e-1}y_4(k-1) - 6.0 \cdot 10^{e+}y_5(k-1) + 1.7 \cdot 10^{e+1}y_6(k-1) + 3.4 \cdot 10^{e+}u_2(k-1) + 2.0 \cdot 10^{e+1}$$

Tableau A.9 – Paramètres conséquents 3.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$	$u_2(k-1)$	offset
1	$6.5 \cdot 10^{e+}$	$1.0 \cdot 10^{e-2}$	$9.4 \cdot 10^{e-1}$	$-7.2 \cdot 10^{e-1}$	$-6.0 \cdot 10^{e+}$	$1.7 \cdot 10^{e+1}$	$3.4 \cdot 10^{e+}$	$2.0 \cdot 10^{e+1}$

Tableau A.10 – Centres des clusters 3.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$	$u_2(k-1)$
1	$5.6 \cdot 10^{e+}$	$4.5 \cdot 10^{e+}$	$3.1 \cdot 10^{e+3}$	$3.8 \cdot 10^{e+}$	$1.3 \cdot 10^{e-2}$	$8.0 \cdot 10^{e-1}$	$2.6 \cdot 10^{e+1}$

État 4 :

Lois :

1. **Si** $y_1(k-1)$ est A_{11} **et** $y_2(k-1)$ est A_{12} **et** $y_3(k-1)$ est A_{13} **et** $y_4(k-1)$ est A_{14} **et** $y_5(k-1)$ est A_{15}
et $y_6(k-1)$ est A_{16} **alors**

$$y_4(k) = 6.6 \cdot 10^{e-2}y_1(k-1) - 7.5 \cdot 10^{e-4}y_2(k-1) - 1.1 \cdot 10^{e-4}y_3(k-1) + 1.0 \cdot 10^{e+}y_4(k-1) + 6.5 \cdot 10^{e-1}y_5(k-1) + 2.5 \cdot 10^{e-1}y_6(k-1) - 2.1 \cdot 10^{e-1}$$

Tableau A.11 – Paramètres conséquents 4.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$	offset
1	$6.6 \cdot 10^{e-2}$	$-7.5 \cdot 10^{e-4}$	$-1.1 \cdot 10^{e-4}$	$1.0 \cdot 10^{e+}$	$6.5 \cdot 10^{e-1}$	$2.5 \cdot 10^{e-1}$	$-2.1 \cdot 10^{e-1}$

Tableau A.12 – Centres des clusters 4.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$
1	$5.6 \cdot 10^{e+}$	$4.5 \cdot 10^{e+}$	$3.1 \cdot 10^{e+3}$	$3.8 \cdot 10^{e+}$	$1.3 \cdot 10^{e-2}$	$8.0 \cdot 10^{e-1}$

État 5 :

Lois :

1. **Si** $y_1(k-1)$ est A_{11} **et** $y_2(k-1)$ est A_{12} **et** $y_3(k-1)$ est A_{13} **et** $y_4(k-1)$ est A_{14} **et** $y_5(k-1)$ est A_{15} **et** $y_6(k-1)$ est A_{16} **et** $u_3(k-1)$ est A_{17} **alors**

$$y_5(k) = -1.0 \cdot 10^{e-3}y_1(k-1) + 5.9 \cdot 10^{e-5}y_2(k-1) - 9.4 \cdot 10^{e-7}y_3(k-1) - 4.3 \cdot 10^{e-3}y_4(k-1) + 8.9 \cdot 10^{e-1}y_5(k-1) - 1.4 \cdot 10^{e-3}y_6(k-1) + 4.1 \cdot 10^{e-3}u_3(k-1) + 2.6 \cdot 10^{e-3}$$

Tableau A.13 – Paramètres conséquents 5.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$	$u_3(k-1)$	offset
1	$-1.0 \cdot 10^{e-3}$	$5.9 \cdot 10^{e-5}$	$-9.4 \cdot 10^{e-7}$	$-4.3 \cdot 10^{e-3}$	$8.9 \cdot 10^{e-1}$	$-1.4 \cdot 10^{e-3}$	$4.1 \cdot 10^{e-3}$	$2.6 \cdot 10^{e-3}$

Tableau A.14 – Centres des clusters 5.

loi	$y_1(k-1)$	$y_2(k-1)$	$y_3(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_5(k-1)$	$y_6(k-1)$	$u_3(k-1)$
1	$5.6 \cdot 10^{e+}$	$4.5 \cdot 10^{e+}$	$3.1 \cdot 10^{e+3}$	$3.8 \cdot 10^{e+}$	$1.3 \cdot 10^{e-2}$	$8.0 \cdot 10^{e-1}$	$6.0 \cdot 10^{e+}$

État 6 :

Lois :

1. **Si** $y_2(k-1)$ est A_{11} **et** $y_4(k-1)$ est A_{12} **et** $y_6(k-1)$ est A_{13} **alors**

$$y_6(k) = -7.4 \cdot 10^{e-5}y_2(k-1) - 4.8 \cdot 10^{e-4}y_4(k-1) + 1.0 \cdot 10^{e+}y_6(k-1) + 4.1 \cdot 10^{e-4}$$

Tableau A.15 – Paramètres conséquents 6.

loi	$y_2(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_6(k-1)$	offset
1	$-7.4 \cdot 10^{e-5}$	$-4.8 \cdot 10^{e-4}$	$1.0 \cdot 10^{e+}$	$4.1 \cdot 10^{e-4}$

Tableau A.16 – Centres des clusters 6.

loi	$y_2(k-1)$	$y_4(k-1)$	$y_6(k-1)$
1	$4.5 \cdot 10^{e+}$	$3.8 \cdot 10^{e+}$	$8.0 \cdot 10^{e-1}$

A.7 Les inégalités matricielles linéaires

Une inégalité linéaire matricielle (LMI) [Boyd et al., 1994] est une inégalité qui a la forme suivante :

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{A.1})$$

où $x \in \mathbb{R}^m$ est la variable et les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$, sont données. Le symbole d'inégalité veut dire que $F(x)$ est définie positive, i.e., $u^T F(x) u > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$. Une LMI est donc équivalent à un ensemble d'inégalités polynomiales en x . C'est-à-dire que les mineurs dominants principaux de $F(x)$ doivent être positifs.

Les inégalités non-linéaires (convexes) sont converties en LMIs en utilisant le complément de Schur qui énonce que la LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.2})$$

où $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$, et $S(x)$ dépendent de manière affine de x est équivalente à résoudre :

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (\text{A.3})$$

En d'autres termes, l'inégalité non-linéaire A.3, peut être représenté en LMI.

Souvent, les problèmes rencontrés font intervenir des matrices, l'inégalité de Lyapunov s'écrit comme suit par exemple :

$$A^T P + P A < 0 \quad (\text{A.4})$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est donnée et $P = P^T$ est la variable. Si P_1, \dots, P_m est une base pour P , alors il sera pris $F_0 = 0$ et $F_i = A^T P_i - P_i A$. Il existe sous MATLAB un outil, `lmiedit`, qui permet de formuler des LMIs en utilisant le formalisme de MATLAB. Vient s'ajouter à ceci trois fonctions de résolution, desquelles nous n'en utiliserons que deux dans le cadre de ce mémoire : `feasp`, qui est une fonction de résolution de LMIs, et `mincx`, qui est une fonction de minimisation sous contraintes LMIs. Des exemples d'implémentation de ces fonctions sont présents dans les annexes suivantes.

A.8 Résolution des LMIs

```

setlmis([]);
P=lmivar(1,[8 1]);
K1=lmivar(2,[8 4]);
.
.
.
K16=lmivar(2,[8 4]);

lmiterm([1 1 1 P],Abar(:, :, 1)', 1, 's'); % LMI #1: Abar(:, :, 1)'*P+P*Abar(:, :, 1)
lmiterm([1 1 1 -K1],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #1: -Cbar'*K1' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([1 1 1 K1],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #1: -K1*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([2 1 1 P],Abar(:, :, 2)', 1, 's'); % LMI #2: Abar(:, :, 2)'*P+P*Abar(:, :, 2)
lmiterm([2 1 1 -K2],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #2: -Cbar'*K2' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([2 1 1 K2],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #2: -K2*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([3 1 1 P],Abar(:, :, 3)', 1, 's'); % LMI #3: Abar(:, :, 3)'*P+P*Abar(:, :, 3)
lmiterm([3 1 1 -K3],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #3: -Cbar'*K3' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([3 1 1 K3],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #3: -K3*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([4 1 1 P],Abar(:, :, 4)', 1, 's'); % LMI #4: Abar(:, :, 4)'*P+P*Abar(:, :, 4)
lmiterm([4 1 1 -K4],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #4: -Cbar'*K4' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([4 1 1 K4],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #4: -K4*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([5 1 1 P],Abar(:, :, 5)', 1, 's'); % LMI #5: Abar(:, :, 5)'*P+P*Abar(:, :, 5)
lmiterm([5 1 1 -K5],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #5: -Cbar'*K5' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([5 1 1 K5],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #5: -K5*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([6 1 1 P],Abar(:, :, 6)', 1, 's'); % LMI #6: Abar(:, :, 6)'*P+P*Abar(:, :, 6)
lmiterm([6 1 1 -K6],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #6: -Cbar'*K6' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([6 1 1 K6],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #6: -K6*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([7 1 1 P],Abar(:, :, 7)', 1, 's'); % LMI #7: Abar(:, :, 7)'*P+P*Abar(:, :, 7)
lmiterm([7 1 1 -K7],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #7: -Cbar'*K7' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([7 1 1 K7],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #7: -K7*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([8 1 1 P],Abar(:, :, 8)', 1, 's'); % LMI #8: Abar(:, :, 8)'*P+P*Abar(:, :, 8)
lmiterm([8 1 1 -K8],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #8: -Cbar'*K8' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([8 1 1 K8],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #8: -K8*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([9 1 1 P],Abar(:, :, 9)', 1, 's'); % LMI #9: Abar(:, :, 9)'*P+P*Abar(:, :, 9)
lmiterm([9 1 1 -K9],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #9: -Cbar'*K9' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([9 1 1 K9],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #9: -K9*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([10 1 1 P],Abar(:, :, 10)', 1, 's'); % LMI #10: Abar(:, :, 10)'*P+P*Abar(:, :, 10)
lmiterm([10 1 1 -K10],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #10: -Cbar'*K10' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([10 1 1 K10],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #10: -K10*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([11 1 1 P],Abar(:, :, 11)', 1, 's'); % LMI #11: Abar(:, :, 11)'*P+P*Abar(:, :, 11)
lmiterm([11 1 1 -K11],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #11: -Cbar'*K11' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([11 1 1 K11],.5*1, -Cbar, 's'); % LMI #11: -K11*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([12 1 1 P],Abar(:, :, 12)', 1, 's'); % LMI #12: Abar(:, :, 12)'*P+P*Abar(:, :, 12)
lmiterm([12 1 1 -K12],.5*Cbar', -1, 's'); % LMI #12: -Cbar'*K12' (NON SYMMETRIC?)

```

```

lmiterm([12 1 1 K12],.5*1,-Cbar,'s'); % LMI #12: -K12*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([13 1 1 P],Abar(:, :, 13)',1,'s');% LMI #13: Abar(:, :, 13)'*P+P*Abar(:, :, 13)
lmiterm([13 1 1 -K13],.5*Cbar',-1,'s'); % LMI #13: -Cbar'*K13' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([13 1 1 K13],.5*1,-Cbar,'s'); % LMI #13: -K13*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([14 1 1 P],Abar(:, :, 14)',1,'s');% LMI #14: Abar(:, :, 14)'*P+P*Abar(:, :, 14)
lmiterm([14 1 1 -K14],.5*Cbar',-1,'s'); % LMI #14: -Cbar'*K14' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([14 1 1 K14],.5*1,-Cbar,'s'); % LMI #14: -K14*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([15 1 1 P],Abar(:, :, 15)',1,'s');% LMI #15: Abar(:, :, 15)'*P+P*Abar(:, :, 15)
lmiterm([15 1 1 -K15],.5*Cbar',-1,'s'); % LMI #15: -Cbar'*K15' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([15 1 1 K15],.5*1,-Cbar,'s'); % LMI #15: -K15*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([16 1 1 P],Abar(:, :, 16)',1,'s');% LMI #16: Abar(:, :, 16)'*P+P*Abar(:, :, 16)
lmiterm([16 1 1 -K16],.5*Cbar',-1,'s'); % LMI #16: -Cbar'*K16' (NON SYMMETRIC?)
lmiterm([16 1 1 K16],.5*1,-Cbar,'s'); % LMI #16: -K16*Cbar (NON SYMMETRIC?)

lmiterm([17 1 1 P],1,-1); % LMI #17: -P

lmis=getlmis;
[tmin,xfeas] = feasp(lmis,[0,100000,1,0,0],-10);
p = dec2mat(lmis,xfeas,P);
k1 = dec2mat(lmis,xfeas,K1);
.
.
.
k16 = dec2mat(lmis,xfeas,K16);

K=zeros(8,4,16);

K(:, :, 1)=k1;
.
.
.
K(:, :, 16)=k16;

L=zeros(8,4,16);

for i=1:16
L(:, :, i)=p\K(:, :, i);
end

```

Annexe B

Définitions

Demande chimique en oxygène (DCO) C'est la consommation en dioxygène par les oxydants chimiques forts pour oxyder les substances organiques et minérales de l'eau. Elle permet d'évaluer la charge polluante des eaux usées.

Hétérotrophe L'hétérotrophie est la nécessité pour un organisme vivant de se nourrir de constituants organiques préexistants.

Autotrophe L'autotrophie est la production, par un organisme vivant, de matière organique par réduction de matière inorganique. Ce mode de nutrition caractérise les végétaux chlorophylliens (verts), les cyanobactéries, et les bactéries sulfureuses. Les organismes autotrophes sont donc capables de se développer sans prélèvement de molécules organiques dans le milieu, au contraire des organismes hétérotrophes (animaux, champignons). Les organismes autotrophes constituent généralement le premier maillon d'une chaîne alimentaire, et sont à l'origine de quasiment toute la matière organique dans un écosystème.

Aérobic Le terme aérobic s'applique à un organisme vivant ou à un moteur qui a besoin de dioxygène pour vivre ou fonctionner.

Anoxique L'anoxie peut être provoquée au cours de procédés de traitement des eaux, comme dans les bassins à boue activée de certaines stations d'épuration, où le manque d'oxygène dissous force certaines bactéries à utiliser pour leur respiration l'oxygène des ions nitrates (NO_3^-) dissous dans l'eau, contribuant ainsi à la dénitrification de l'eau qui ne se produit que quand le taux d'oxygène dissous est inférieur à 1 mg/l ou à 10% de la saturation (qui dépend de la température). Certaines bactéries (dites dénitrifiantes) décomposent ainsi les molécules de nitrates, le transformant ceux-ci en diazote qui rejoint l'atmosphère.

Bibliographie

- [Abonyi et al., 1999] Abonyi, J., Babuška, R., Setnes, M., Verbruggen, H., and Szeifert, E. (1999). Constrained parameter estimation in fuzzy modeling. In *Fuzzy Systems Conference Proceedings, 1999. FUZZ-IEEE'99. 1999 IEEE International*, volume 2, pages 951–956. IEEE. 31
- [Abonyi et al., 2002] Abonyi, J., Babuška, R., and Szeifert, F. (2002). Modified gath-geva fuzzy clustering for identification of takagi-sugeno fuzzy models. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on*, 32(5) :612–621. 33
- [Akhenak, 2004] Akhenak, A. (2004). Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèle : application au diagnostic. *Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine*, 16. 54
- [Akhenak et al., 2004a] Akhenak, A., Chadli, M., Maquin, D., and Ragot, J. (2004a). State estimation of uncertain multiple model with unknown inputs. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control, CDC'04*, page CDROM. IEEE. 54
- [Akhenak et al., 2004b] Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., and Maquin, D. (2004b). Estimation d'état et d'entrées inconnues d'un système non linéaire, représenté sous forme multimodèle. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA*. 54
- [Akhenak et al., 2006] Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., and Maquin, D. (2006). Synthèse d'un multiobservateur robuste pour multimodèle incertain à entrées inconnues : approche lmi. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2006*, page CDROM. 54
- [Alex et al., 1999] Alex, J., Beteau, J., Copp, J., Hellings, C., Jeppsson, U., Marsili-Libelli, S., Pons, M., Spanjers, H., and Vanhooren, H. (1999). Benchmark for evaluating control strategies in wastewater treatment plants. In *European Control Conference*, volume 99. Germany Karlsruhe. 29
- [Angelis, 2001] Angelis, G. Z. (2001). System analysis, modelling and control with polytopic linear models. 1

- [Angelov and Filev, 2004] Angelov, P. P. and Filev, D. P. (2004). An approach to online identification of takagi-sugeno fuzzy models. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on*, 34(1) :484–498. 32
- [Antsaklis and Michel, 2006] Antsaklis, P. J. and Michel, A. N. (2006). *Linear systems*. Springer Science & Business Media. 1
- [Babuska, 1995] Babuska, R. (1995). Fuzzy modeling-a control engineering perspective. In *Fuzzy Systems, 1995. International Joint Conference of the Fourth IEEE International Conference on Fuzzy Systems and The Second International Fuzzy Engineering Symposium., Proceedings of 1995 IEEE Int*, volume 4, pages 1897–1902. IEEE. 33
- [Babuška, 2000] Babuška, R. (2000). Fuzzy modelling and identification toolbox. *Control Engineering Laboratory, Faculty of Information Technology and Systems, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, version, 3*. 41
- [Babuška et al., 1998a] Babuška, R., Roubos, J., and Verbruggen, H. (1998a). Identification of mimo systems by input-output ts fuzzy models. In *Fuzzy Systems Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 657–662. IEEE. 34
- [Babuška et al., 1998b] Babuška, R., Roubos, J., and Verbruggen, H. (1998b). Identification of mimo systems by input-output ts fuzzy models. In *Fuzzy Systems Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 657–662. IEEE. 41
- [Beale and Shafai, 1989] Beale, S. and Shafai, B. (1989). Robust control system design with a proportional integral observer. *International Journal of Control*, 50(1) :97–111. 54
- [Bezzaoucha, 2013] Bezzaoucha, S. (2013). *Commande tolérante aux défauts de systemes non linéaires représentés par des modeles de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Université de Lorraine. 31, 34
- [Bezzaoucha et al., 2013a] Bezzaoucha, S., Marx, B., Maquin, D., and Ragot, J. (2013a). Nonlinear joint state and parameter estimation : Application to a wastewater treatment plant. *Control Engineering Practice*, 21(10) :1377–1385. 43
- [Bezzaoucha et al., 2013b] Bezzaoucha, S., Marx, B., Maquin, D., and Ragot, J. (2013b). State and parameter estimation for nonlinear systems : a

- Takagi-Sugeno approach. In *American Control Conference, ACC 2013*, page CDROM. 43
- [Boyd et al., 1994] Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. SIAM. 74
- [Brogan, 1991] Brogan, W. L. (1991). *Modern control theory*, 3rd. 1
- [Chachuat et al., 2003] Chachuat, B., Roche, N., and Latifi, R. (2003). Reduction of the ASM1 model for optimal control of small-size activated sludge treatment plants. *Revue des Sciences de l' Eau*, 16(LA-ARTICLE-2007-028) :5–26. 24
- [Chang et al., 2004] Chang, Y.-C., Chen, S.-S., Su, S.-F., and Lee, T.-T. (2004). Static output feedback stabilization for nonlinear interval time-delay systems via fuzzy control approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 148(3) :395–410. 30
- [Ding, 2005] Ding, S. (2005). Model-based fault diagnosis in dynamic systems using identification techniques, Silvio Simani, Cesare Fantuzzi and Ron J. Patton, Springer : London, 2003, 282pp. ISBN 1-85233-685-4. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 15(11) :509–512. 1
- [Direction générale de la recherche, 2002] Direction générale de la recherche, U. E. (2002). *The COST simulation benchmark : description and simulator manual*. Directorate-General for Research. 7
- [Frank, 1990] Frank, P. M. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy : A survey and some new results. *Automatica*, 26(3) :459–474. 1
- [Gasso et al., 2000] Gasso, K., Mourot, G., and Ragot, J. (2000). Identification of an output error takagi-sugeno model. In *Systems, Man, and Cybernetics, 2000 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 14–19. IEEE. 32
- [Gath and Geva, 1989] Gath, I. and Geva, A. B. (1989). Unsupervised optimal fuzzy clustering. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 11(7) :773–780. 33
- [Gustafson and Kessel, 1978] Gustafson, D. and Kessel, W. (1978). Fuzzy clustering with a fuzzy covariance matrix. In *1978 IEEE conference on decision and control including the 17th symposium on adaptive processes*, number 17, pages 761–766. 34

- [Hellstedt, 2005] Hellstedt, C. (2005). Calibration of a dynamic model for the activated sludge process at Henriksdal wastewater treatment plant. 7
- [Henze et al., 2006] Henze, M., Gujer, W., Mino, T., and Van Loosedrecht, M. (2006). Activated sludge models ASM1, ASM2, ASM2d and ASM3. 7, 63
- [Ichalal, 2009] Ichalal, D. (2009). *Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL. 54
- [Ichalal et al., 2008] Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., and Maquin, D. (2008). Multi-observateurs à entrées inconnues pour un système de takagi-sugeno à variables de décision non mesurables. In *5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2008*, page CDROM. 60
- [Jeppsson, 1997] Jeppsson, U. (1997). A general description of the IAWQ activated sludge model No. 1. *IEA, Lund*. 7, 8, 9, 11, 14, 16
- [Kaymak and Babuška, 1995] Kaymak, U. and Babuška, R. (1995). Compatible cluster merging for fuzzy modelling. In *Fuzzy Systems, 1995. International Joint Conference of the Fourth IEEE International Conference on Fuzzy Systems and The Second International Fuzzy Engineering Symposium., Proceedings of 1995 IEEE Int*, volume 2, pages 897–904. IEEE. 33
- [Korbicz et al., 2007] Korbicz, J., Witczak, M., and Puig, V. (2007). Lmi-based strategies for designing observers and unknown input observers for non-linear discrete-time systems. *TECHNICAL SCIENCES*, 55(1). 54
- [Marx et al., 2003] Marx, B., Koenig, D., and Georges, D. (2003). Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers. In *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, volume 1, pages 457–462. IEEE. 55, 56
- [Matía et al., 2014] Matía, F., Marichal, G. N., and Jiménez, E. (2014). *Fuzzy Modeling and Control : Theory and Applications*, volume 9. Springer. 30
- [Mehran, 2008] Mehran, K. (2008). Takagi-sugeno fuzzy modeling for process control. *Industrial Automation, Robotics and Artificial Intelligence (EEE8005), School of Electrical, Electronic and Computer Engineering, Newcastle University*. 30

- [Mignone et al., 2000] Mignone, D., Ferrari-Trecate, G., and Morari, M. (2000). Stability and stabilization of piecewise affine and hybrid systems : An LMI approach. In *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, volume 1, pages 504–509. IEEE. 1
- [Monon, 2012] Monon, J. (2012). The growth of bacterial cultures. *Selected Papers in Molecular Biology by Jacques Monod*, page 139. 11
- [Moulin et al., 2013] Moulin, S., Rozen-Rechels, D., and Stankovic, M. (2013). Traitement des eaux usées, ATELIER L’EAU : Qualité vs Quantité. Master’s thesis, École Normale Supérieure. 3
- [Murray-Smith and Johansen, 1997] Murray-Smith, R. and Johansen, T. (1997). *Multiple model approaches to nonlinear modelling and control*. CRC press. 1
- [Nagy, 2010] Nagy, A. M. (2010). *Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d’épuration*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL. 9, 10, 20, 24, 25, 43
- [Nagy et al., 2008] Nagy, A. M., Mourot, G., Ragot, J., Schutz, G., and Gillé, S. (2008). Modélisation d’un réacteur biologique à l’aide de multimodèle. In *3^o Journées Doctorales en Hydrologie Urbaine, JDHU 2008*, page CDROM. 43
- [Nelson and Sidhu, 2009] Nelson, M. and Sidhu, H. (2009). Analysis of the activated sludge model (number 1). *Applied Mathematics Letters*, 22(5) :629–635. 7
- [OECD, 2006] OECD (2006). The OECD Environment Program, Improving Water Management : Recent OECD Experience. 3
- [Orjuela et al., 2009] Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., and Maquin, D. (2009). Une approche multimodele pour le diagnostic des systemes non linéaires. In *2^{ème} Workshop Surveillance, Sûreté et Sécurité des Grands Systèmes, 3SGS’09*, page CDROM. 32
- [Patton et al., 1998] Patton, R., Chen, J., and Lopez-Toribio, C. (1998). Fuzzy observers for nonlinear dynamic systems fault diagnosis. In *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, volume 1, pages 84–89. IEEE. 54
- [Petersen, 1965] Petersen, E. E. (1965). *Chemical reaction analysis*. Prentice Hall. 11
- [Rodrigues, 2005] Rodrigues, M. (2005). *Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multimodèles linéaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I. 54

- [Rugh, 1996] Rugh, W. J. (1996). *Linear system theory*, volume 2. prentice hall Upper Saddle River, NJ. 1
- [Sala et al., 2005] Sala, A., Guerra, T. M., and Babuška, R. (2005). Perspectives of fuzzy systems and control. *Fuzzy Sets and Systems*, 156(3) :432–444. 32
- [Schnitman and Yoneyama, 2001] Schnitman, L. and Yoneyama, T. (2001). Takagi-sugeno-kang fuzzy structures in dynamic system modeling. In *Proceedings of the IASTED International Conference on Control and Application (CA'2001)*, pages 160–165. 32
- [Smets et al., 2003] Smets, I. Y., Haegebaert, J. V., Carrette, R., and Van Impe, J. F. (2003). Linearization of the activated sludge model ASM1 for fast and reliable predictions. *Water research*, 37(8) :1831–1851. 24
- [Takagi and Sugeno, 1985] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, (1) :116–132. 1, 30
- [Tanaka and Wang, 2001] Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons. 2, 30, 36, 40
- [Tchobanoglous and Burton, 1991] Tchobanoglous, G. and Burton, F. L. (1991). Wastewater engineering. *Management*, 7 :1–4. 11
- [Weijers, 2000] Weijers, S. R. (2000). *Modelling, identification and control of activated sludge plants for nitrogen removal*. Technische Universiteit Eindhoven Veldhoven, The Netherlands. 24