

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

**Projet de Fin d'Études pour l'obtention du Diplôme
d'Ingénieur d'État en Génie Mécanique**

**Étude d'un robot spatial à quatre câbles
(Trois degrés de liberté)**

Proposé et dirigé par :

Mohamed BOUAZIZ Professeur. ENP

Mohamed TAZI MA-A. ENP

Réalisé par :

Bilal AHMED BOUMAZA

juin 2014

ENP 10, Hacén-Badi, El-Harrach, 16200 Alger
Tel. 021.52.53.01-03, Fax. 021.52.29.73 www.enp.edu.dz

Dédicaces

À mes parents qui me sont les plus chers au monde, que Dieu les protège, et que ce travail fasse qu'ils soient fiers de moi.

À mon frère, mes sœurs, mes nièces et mon neveu que j'aime très fort, et à qui je souhaite tout le bonheur et la réussite du monde,

À tous mes amis chacun par son nom,

À tous les étudiants de 3eme année du département de Génie Mécanique,

À tous ceux que j'aime et qui m'aiment, où qu'ils soient,

À tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Bilal

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord Allah le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la patience afin de mener à bien mon projet de fin d'étude.

Mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à Monsieur M. BOUAZIZ et Monsieur M.TAZI, mes encadreurs, pour m'avoir dirigé, orienté, soutenu et dont les compétences intellectuelles, l'expérience, la modestie, la patience et la disponibilité ont grandement contribué à l'aboutissement de ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

Je voudrais particulièrement remercier les membres du jury dont Monsieur B.KEBLI pour avoir accepté la présidence du jury ainsi que l'examineur Monsieur M.LATRECHE pour m'avoir honoré d'être membre de mon jury de soutenance.

Je souhaiterais également remercier tous mes enseignants du département de Génie Mécanique de l'ENP, pour avoir participé à ma formation.

Finalement, mes remerciements vont à tous ceux qui ont contribué d'une quelconque manière à l'aboutissement de ce travail.

ملخص

العمل المقدم في هذا المشروع هو دراسة روبوت ذو حركة فضائية مزود بأربعة كابلات (ثلاث درجات حرية)؛ الهدف من هذه الدراسة هو تحديد النماذج: الهندسي، الحركي، الثابت والديناميكي؛ فضلا عن تقييم فضاء العمل. تصميم الروبوت المدروس سوف يتم بواسطة *SolidWorks*؛ كما أن التحقق من النماذج وتخطيط المسار سوف يتم باستخدام *Matlab*.

كلمات مفتاحية: روبوت مزود بالكابلات، درجة حرية روبوت مزود بالكابلات، نموذج روبوت مزود بالكابلات، تخطيط المسارات.

RESUME

Le travail présenté dans ce mémoire est l'étude d'un robot spatial à quatre câbles (trois degrés de liberté). L'objectif de ce travail est le développement des modèles : géométrique, cinématique et dynamique ainsi que la détermination de l'espace de travail. La conception du robot étudié sera réalisé à l'aide du logiciel *SolidWorks*, et la vérification des modèles ainsi que la planification des trajectoires seront effectuées à l'aide du logiciel *Matlab*.

Mots clés : robot à câble, degrés de liberté d'un robot, modélisation d'un robot à câble, planification de trajectoires.

ABSTRACT

The work presented in this memoire is the study of a cable space robot with four cables (three degrees of freedom); the objective of this study is the determination of the geometric, the kinematic, the static and the dynamic models; as well as the evaluation of the workspace. The design of the studied robot will be realized with the aid of *SolidWorks*; the verification of models and the trajectory planning will be performed using *Matlab*.

Keywords: Cable driven robot, robot's degree of freedom, Cable driven robot modelisation, Trajectories planning.

SOMMAIRE

RÉSUMÉ

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR LES ROBOTS PARALLÈLES À CÂBLES	
I.1 Introduction	3
I.2 Concept scientifique des robots.....	3
I.3. Degré de liberté et types de robots.....	6
I.4. Robots parallèles.....	8
I.4. A. Définition	8
I.4. B. Types et classification.....	9
I.4. C. Les générations de robots parallèles.....	9
I.4. D. Avantages et inconvénients des Robots parallèles.....	10
I.5. Robots parallèles à câbles.....	11
I.5. A. Généralités et définition.....	11
I.5. B. Classification basée sur le degré de redondance.....	11
I.6. Exemples d'applications des Robots à Câbles.....	13
I.6. A. CoGiRo – Commande des robots géants.....	13
I.6. B. SkyCam.....	14
I.6. C. CaTraSys (Cassino Tracking System).....	15
I.6. D. Robots parallèles à câble pour la rééducation.....	16
I.6. E. Le NIST RoboCrane.....	16
I.7. Avantages et inconvénients des Robots Parallèles à Câbles.....	17
I.8. Conclusion.....	18
CHAPITRE II : CARACTÉRISTIQUES DE BASE POUR LA CONCEPTION DES ROBOTS À CÂBLES	
II.1. Introduction.....	19
II.2. Caractéristiques du mouvement	19
II.3. Analyse des Forces.....	20

II.3. A. Statique.....	21
II.3. B. Dynamique.....	22
II.4. Évaluation de l'espace de travail.....	23
II.5. Planification des trajectoires.....	24
II.5. A. Planification au cas des robots parallèles.....	24
II.5. B. Particularités des manipulateurs parallèles à câbles.....	26
II.6. Analyse des singularités	26
II.7. Élasticité des câbles.....	28
II.8. Évaluation de la rigidité.....	29
II.9. Conclusion.....	31

CHAPITRE III : MODÉLISATION DU ROBOT SPATIAL À QUATRE CÂBLES

III.1. Introduction	32
III.2. Modèle géométrique.....	32
III.2.A. Modèle du câble.....	32
III.2.B. Simplification du modèle de câble.....	34
III.2.C. Modélisation géométrique.....	35
III.3. Modèle cinématique.....	40
III.4. Modèle statique.....	42
III.4.A. Les équations statiques fondamentales.....	42
III.5. Modèle dynamique.....	43
III.5.A. Équations du Mouvement.....	44
III.5.B. Lagrangiens de mouvement sous forme matricielle.....	52
III.6. Espaces de travail.....	53
III.6.A. Particularités des manipulateurs parallèles à câbles.....	53
III.6.B. Espace de travail théorique.....	54
III.6.C. Espace de travail pratique.....	55
III.6. D. Le problème des collisions câble/câble et câble/effecteur.....	55
III.6. E. Caractérisation mathématique de l'espace de travail.....	56
III.6. F. Détermination géométrique.....	57
III.7. Conclusion.....	60

CHAPITRE IV : CONCEPTION ET SIMULATION

IV.1. Introduction.....	61
IV.2. Conception avec SolidWorks.....	61
IV.3. Simulation avec Matlab.....	62
IV.3. A. Vérification des modelés géométriques.....	62
IV.3.B. Planification des trajectoires.....	65
IV.3.B.1. Trajectoire rectiligne.....	65
IV.3.B.2. Trajectoire hélicoïdale cylindrique.....	71
IV.4. Conclusion.....	76
 CONCLUSION GÉNÉRALE	 77

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

LISTE DES FIGURES

<i>Figure I.1</i> , Le concept de robot.....	5
<i>Figure I.2</i> , Robots anthropomorphiques sériel à six articulations KR1000 1300 TITAN PA de KUKA.....	6
<i>Figure I.3</i> , Robots à quatre ddl	6
<i>Figure I.4</i> , Robots redondants à sept ddl	7
<i>Figure I.5</i> , Plate-forme de Gough dans sa forme originale.....	8
<i>Figure I.6</i> , Le robot Hexamove.....	10
<i>Figure I.7</i> , Le robot FlexPicker (ABB).....	10
<i>Figure I.8</i> , CoGiRo : un manipulateur à 8 câbles et 6 ddl en configuration suspendue.....	13
<i>Figure I.9</i> , Caméra contrôlée par un mécanisme à câbles avec un Exemple de positionnement dans un stade.....	15
<i>Figure I.10</i> , CaTraSys système de mesure à LARM à Cassino.....	16
<i>Figure I.11</i> , (a) Le NIST Flying Carpet –(b). Une plate-forme pour l'accès des navires en cale sèche	17
<i>Figure II.1</i> , Génération de positions aléatoires sans collision dans l'espace de travail.....	25
<i>Figure II.2</i> , Construction du PRM.....	25
<i>Figure II.3</i> , Courbe de traction d'un matériau ductile présentant un décrochement	28
<i>Figure III.1</i> , Comment modéliser un câble dans le plan vertical contenant A_i et B_i	33
<i>Figure III.2</i> , Un câble indéformable de masse nulle.....	34
<i>Figure III.3</i> , Un câble élastique de masse nulle.....	35
<i>Figure III.4</i> , Un câble élastique de masse non nulle.....	36
<i>Figure III.5</i> , modèle géométrique du robot spatial à quatre câbles.....	38
<i>Figure III.6</i> , Modèle statique du robot à 4cable et 3ddl.....	43
<i>Figure III.7</i> , Diagramme du corps libre de la i^{eme} poulie.....	44
<i>Figure III.8</i> , Espace de travail en translation.....	59
<i>Figure IV.1</i> , Vue de profil de la poulie.	61
<i>Figure IV.2</i> , Vue de profil du moteur.....	61

<i>Figure IV.3</i> : Assemblage Robot sous SolidWorks.....	62
<i>Figure IV.4</i> : Représentation graphique du polyèdre ; des câbles et de l'effecteur pour X (25,25,25).....	63
<i>Figure IV.5</i> : Représentation graphique du polyèdre; des câbles et de l'effecteur pour X (50,40,10).....	64
<i>Figure IV.6</i> : Représentation graphique du polyèdre; des câbles et de l'effecteur pour une Trajectoire rectiligne.....	66
<i>Figure IV. 7</i> : Tableau des longueurs des câbles.....	67
<i>Figure IV.8</i> : Variation des longueurs des câbles le long de la trajectoire.....	67
<i>Figure IV. 9</i> : Couples moteur nécessaires pour effectuer la trajectoire rectiligne $\tau = f(t)$	70
<i>Figure VI. 10</i> : Tension dans les câbles pour une trajectoire rectiligne $T = f(t)$	70
<i>Figure IV.11</i> : Représentation graphique du polyèdre des câbles et de l'effecteur pour une Trajectoire hélicoïdale.....	72
<i>Figure IV.12</i> : Variation des longueurs des câbles le long de la trajectoire.....	73
<i>Figure IV.13</i> : Couples moteur nécessaires pour effectuer la trajectoire hélicoïdale $\tau =f(t)$	75
<i>Figure IV.14</i> : Tension dans les câbles pour une trajectoire hélicoïdale $T =f(t)$	75

Abréviations

$ENVCONV$	L'enveloppe convexe ouverte de POL_S .
ddl	Degré de liberté.
MCI	Modèle cinématique inverse.
MCD	Modèle cinématique direct.
MD	Modèle dynamique.
MGI	Modèle géométrique inverse.
MGD	Modèle géométrique direct.
MS	Modèle statique.
POL_S	Polyèdre formé par les points de l'espace affine \mathbb{R}^n .

Notations

a	Longueur de bâti.
A_i	Points de fixation (câble – poulie).
b	Largueur de bâti.
B_i	Points de fixation (câble – plate-forme).
C	Matrice de conformité.
C_a	Contraintes des réactions.
C_i	Coefficient de frottement.
d_i	Distance entre A_i et B_i .
\mathbb{D}	Dissipation d'énergie.
F_d	Vecteur des forces lié aux couples des moteurs.
g	L'accélération gravitationnelle.
h	Hauteur du bâti.
J_i	Moment d'inertie du la poulie
J	Matrice Jacobienne.
J_x	Matrice Jacobienne lié à l'effecteur .
J_q	Matrice Jacobienne associe à l'articulation actionnée.
K	Matrice de rigidité.

k	Raideur linéique.
L_i	Longueur réelle du câble i sous tension.
l_i	La longueur du câble i déroulée.
\dot{L}_i	Vitesse du câble i .
\ddot{L}_i	Accélération du câble i .
\mathbb{L}	Lagrangien du système.
\mathcal{L}_i	Coordonnées de Plücker.
M	Matrice d'inertie.
m	Masse de l'effecteur.
P_a	Efforts externes.
\mathcal{P}^*	Puissance virtuelle.
Q	Force sollicitée l'effecteur.
R	Rayon de l'hélice.
r_i	Rayon de la poulie
S_a	Tensions internes dans les câbles.
S_X	Sous ensemble des poses acceptables.
$S(X)$	Matrice Jacobienne dynamique.
S^+	Inverse (à droite) de Moore-Penrose de S .
T	Vecteur des couples actionnées.
T_a	Les tensions appliquées en A_i .
T_b	Les tensions appliquées en B_i .
T_i	Force de tension dans le câble i .
\mathbb{T}	Énergie cinétique.
\mathbb{U}	Énergie potentielle.
V_e	vitesse linéaire de l'effecteur.
W	Vecteur des efforts agissant sur l'effecteur
W_e	Travail résultant des efforts externes.
W_i	Travail résultant de tensions internes.
W_X	Espace de travail.
W_{Th}	Espace de travail théorique.
W_{Pr}	Espace de travail pratique.

X	Position de l'effecteur.
α	Pas réduit de l'hélice.
β_i	Angle de rotation de la poulie
$\dot{\beta}_i$	Vitesse angulaire de poulie.
$\ddot{\beta}_i$	L'accélération angulaire des poulies.
γ_b	Contrainte d'échec.
δ_b	Déplacement aux nœuds.
δ_i	L'erreur entre \mathbf{l}_i et \mathbf{d}_i .
δq	Vecteur des déplacements virtuels associe aux articulations actionnées
δX	Vecteur des déplacements virtuels liés à l'effecteur.
θ	L'angle de l'hélice.
ρ	Pas de l'hélice.
τ_i	Le couple moteur.
φ_i	Distribution des tensions en \mathbf{B}_i .

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les systèmes technologiques sont au cœur de nombreuses applications permettant d'aider l'humain dans des tâches dangereuses, trop complexes ou impossibles. Parmi ces applications, certaines peuvent blesser des humains.

Le 20^e siècle fut sans conteste celui de l'industrialisation et de l'informatique. Au carrefour de ces deux révolutions, la robotique s'est rapidement trouvée une place dans les chaînes de production. Les robots ont ainsi permis d'accélérer et d'améliorer la qualité des productions, tout en limitant les tâches répétitives et pénibles attribuées aux opérateurs humains.

Les robots manipulateurs d'architecture sérielle furent les premiers à être attribués dans l'industrie. Ces manipulateurs sériels atteignent leurs limites pour réaliser certaines tâches nécessitantes, par exemple, une grande rigidité ou le déplacement d'objets lourds. Afin de pallier ces restrictions, une des solutions est d'utiliser une architecture de robot dite parallèle.

Ils sont considérés comme rapides, précis, rigides et peuvent manipuler des charges lourdes. Les robots parallèles ont toutefois une architecture performante, mais difficile à concevoir et à contrôler et qui, de plus, limite l'espace de travail du manipulateur. Récemment, une nouvelle classe de robot parallèle est apparue. Au lieu de jambes rigides, des câbles sont utilisés afin de fournir un espace de travail géométrique quasiment illimité et des performances dynamiques bien supérieures dues à la faible masse des câbles.

Le mouvement de l'effecteur qui est relié à l'ensemble des câbles du robot s'effectue suivant une trajectoire définie, donc les différents moteurs sont asservis de manière à ce que cette trajectoire soit respectée. Le robot contrôle la position de l'effecteur à l'intérieur de l'espace de travail en diminuant et en augmentant simultanément les longueurs des câbles, tout en les gardant sous tension.

Dans le cadre de la continuité des travaux déjà réalisés au département de génie mécanique sur les robots à câbles, l'objectif de ce travail consiste à étudier un robot spatial à 4 câbles (3 degrés de liberté). L'étude comporte : la modélisation géométrique, la modélisation cinématique, la modélisation dynamique, et la détermination de l'espace de travail.

Le premier chapitre de notre travail présente des généralités sur la robotique de façon générale avec une concentration sur les robots parallèles à câbles avec des exemples et des applications de ce type de robots.

Au deuxième chapitre on présente les concepts qui caractérisent l'étude d'un robot à câbles : analyse du mouvement, analyse des forces, évaluation de l'espace de travail, et planification des trajectoires.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans Le troisième chapitre on entre dans le développement analytique des modèles. On choisit le modèle de câble qui convient à notre étude. On développe les modèles géométrique, cinématique et dynamique. Pour ce dernier, on utilise la formulation de Lagrange. On va présenter également dans ce chapitre une méthode géométrique pour l'évaluation de l'espace de travail.

Le quatrième et dernier chapitre est réservé pour la conception du manipulateur sous SolidWorks, ainsi que la simulation sous Matlab pour vérifier les modèles obtenus dans le 3eme chapitre. La planification de trajectoire est effectuée pour une droite et pour une hélice cylindrique.

Chapitre I

GÉNÉRALITÉ SUR LES ROBOTS PARALLÈLES À CÂBLES

I.1. Introduction

Dans sa plus simple expression, un robot est une machine programmable. Ce n'est que récemment que les avancées en électronique puis en informatique ont permis un raffinement de la programmation des robots. Avant l'avènement de ces techniques, des inventeurs ingénieux réussissaient quand même à programmer des machines, mais mécaniquement.

L'utilisation des câbles pour entraîner une machine ne date pas d'hier. Enroulement de câbles permet la programmation de mouvement de façon relativement simple. C'est la grande flexibilité des câbles qui a rendu possible cette programmation. Encore aujourd'hui, c'est précisément cette particularité des câbles qui est mise à profit pour les robots qui en utilisent pour leur entraînement mécanique [Bouchard 2008].

I.2. Concept scientifique des robots

Le concept scientifique du robot s'insère dans une problématique spécifique : celle de l'assistance à l'homme par des machines pour l'exécution de travaux ou de tâches physiques. Cette assistance peut prendre deux grandes formes : ou bien il s'agit d'un outil manipulé par l'homme pendant l'exécution de la tâche (on parle alors d'outil ou de machine de coopération), ou bien il s'agit d'une machine, qui, une fois en route, exécute le travail sans intervention humaine (on parle alors d'outil ou de machine de substitution).

Dans cette optique, le robot est donc en premier lieu une machine physique qui participe à l'automatisation de tâches physiques.

Cependant, cette description ne permet pas de distinguer le robot de l'ensemble des machines dotées de certains automatismes et qui ont pour objectif l'exécution de tâches physiques. De telles machines existent depuis fort longtemps, bien avant que les scientifiques ne parlent de robots, et elles perdurent aujourd'hui sans qu'on les qualifie de robots.

Le concept scientifique du robot doit donc être précisé, et il peut l'être par l'introduction de deux caractéristiques que, d'une part, on ne rencontre pas sur les machines en général, et qui, d'autre part, engendreraient un comportement automatique de la machine qui ne serait pas sans évoquer (bien que de loin) le comportement morphologique et psychomoteur d'un homme au travail.

La première caractéristique spécifique est appelée versatilité ou flexibilité. Elle concerne la possibilité, pour une même machine, d'exécuter des tâches différentes et/ou d'exécuter une même tâche de plusieurs manières. Cette possibilité a son incidence essentielle sur la structure mécanique de la machine, qui doit pouvoir faire des mouvements variés via un nombre suffisant de degrés de liberté ou de mobilité. Ce trait morphologique est le plus évident lorsqu'on voit une machine et qu'on la nomme robot.

La seconde caractéristique semble la plus importante et elle n'est pas pleinement maîtrisée. Elle correspond à ce que l'exécution de la tâche soit totalement automatisée indépendamment d'une connaissance « complète et à l'avance » de l'environnement dans lequel la tâche est

réalisée. Elle suppose donc que la machine puisse appréhender seule la situation de l'environnement, et établir les conditions à respecter en permanence dans la mise en œuvre de son travail. Cette propriété d'auto adaptation aux conditions de l'environnement est typiquement mise en évidence par l'homme lorsqu'il fait un travail physique. Sa transposition à la machine est très difficile, peut prendre des formes diverses, et n'est pas obligatoirement une imitation de ce qui se passe chez l'homme.

Si l'on peut cerner le concept scientifique du robot par les trois caractéristiques précédentes (machine physique exécutant des tâches physiques ; versatilité ; auto adaptabilité aux conditions de l'environnement), l'usage scientifique pratique fait appeler robots des systèmes qui ne recouvrent pas ces trois propriétés.

Tout d'abord, il y a lieu de mettre à part, et nous n'y ferons plus allusion, à ce qu'on peut appeler les robots logiciels. Il s'agit uniquement de simulations (à l'aide, en général, d'informatique graphique) soit de robots réalistes, soit de groupes d'entités simples qu'on dote de propriétés d'interactions mutuelles ou d'interactions avec un environnement simulé.

L'objectif est alors de comprendre l'émergence de phénomènes d'auto-organisation ou de comportement apparemment intelligent, dans le but, beaucoup plus tard, d'être à même de faire coopérer des robots réels dans l'exécution de travaux.

Revenant aux systèmes physiques, toutes les machines appelées robots possèdent la première caractéristique ET : SOIT la deuxième caractéristique, SOIT la troisième caractéristique SI elle atteint un niveau minimum de performances, SOIT la deuxième et la troisième caractéristique QUEL QUE SOIT le niveau de performance de cette dernière. Et ceci d'une manière indépendante du moyen de commande (depuis la commande purement manuelle jusqu'à la commande la plus automatisée).

Les trois catégories précédentes, assorties des deux grands types de commande (purement manuelle et automatique quels que soient la qualification ou le degré d'automatisation) représentent l'ensemble des concepts scientifiques pratiques (concept scientifique pratique global) correspondant à appeler une machine du nom de robot. Mais il faut bien comprendre que tout le monde n'appelle pas robot toute machine appartenant à l'une quelconque des trois catégories précédentes, assortie de l'une ou l'autre des deux grands types de commande.

En effet, nous assistons à deux tendances dont les frontières sont parfois géographiques mais le plus souvent culturelles. Pour les uns, le robot est avant tout qualifié comme tel par sa deuxième caractéristique : la versatilité (qui conduit à certaines morphologies).

Dans ces conditions, cette seule potentialité permet l'appellation « robot » tout à fait indépendamment de la commande. L'exemple le plus connu est celui du Japon, qui inclut dans la famille des robots les manipulateurs manuels non motorisés qui sont de simples « bras » articulés passifs manœuvrés par un opérateur humain.

Pour les autres, le robot est avant tout qualifié comme tel par sa troisième caractéristique d'auto adaptabilité, qui sous-entend une automatisation par des moyens modernes ou avancés. Ainsi, on introduira, dans la famille des robots, des machines spéciales monotâche mais qui,

par exemple, sont capables de contrôler leurs interactions avec l'environnement (via des capteurs qui peuvent être sophistiqués). Dans cette deuxième tendance, tout ce qui est « manuel » ne saurait être qualifié de « robotisé ».

Bien entendu, tout le monde s'accorde à nommer « robot » toute machine montrant peu ou prou l'ensemble des trois caractéristiques évoquées. Sur la figure 1, nous avons tenté de schématiser l'ensemble des concepts de robot. L'examen de cette figure met en évidence une divergence de points de vue chez les praticiens de la robotique, qui, par ailleurs, se rallient tous au concept scientifique (mais non au concept scientifique pratique global). On peut donc prévoir que ceci donnera lieu à une première difficulté majeure lorsqu'on va vouloir classifier les robots [Coiffet 2006].

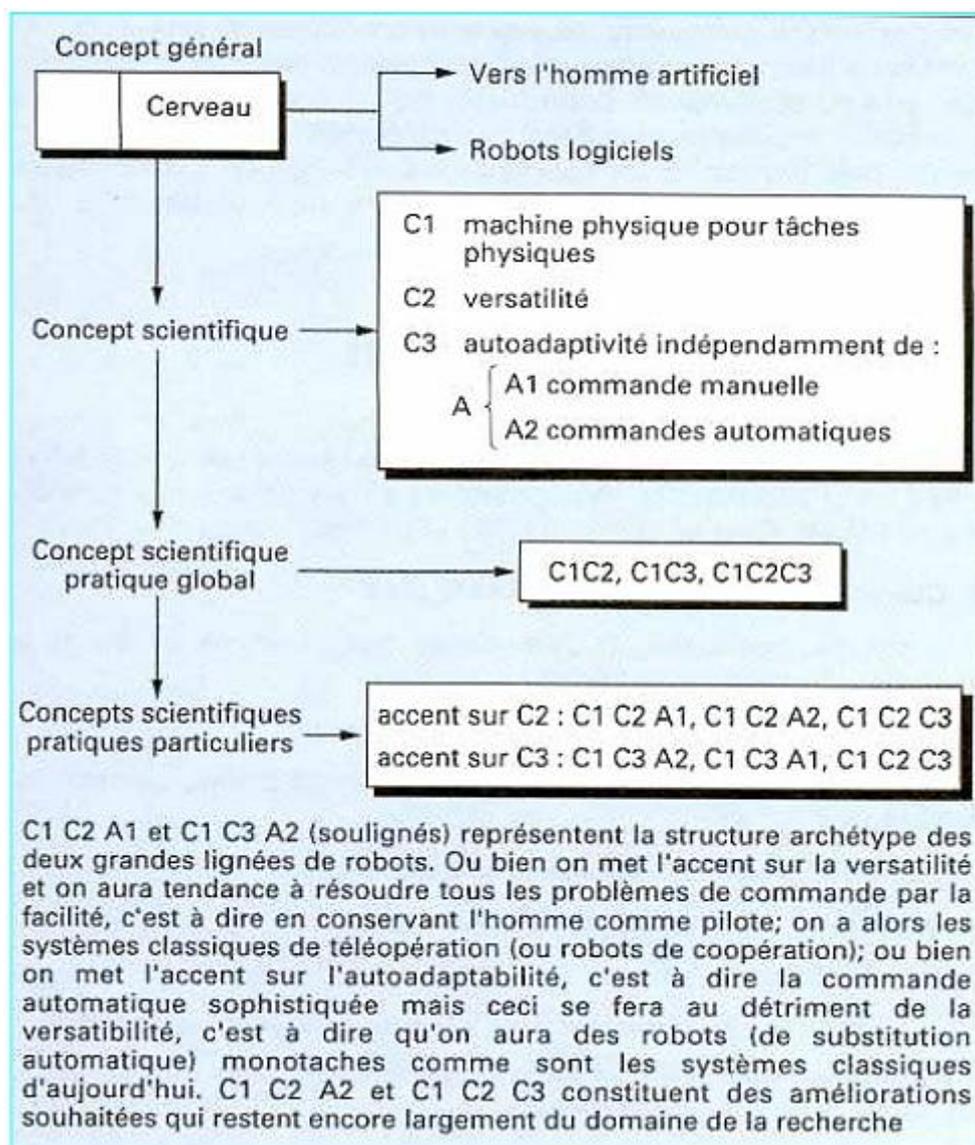


Figure I.1 : Le concept de robot [Coiffet 2006].

I.3. Degré de liberté et types de robots

Dans l'espace tridimensionnel, un corps rigide libre peut se déplacer selon six degrés de libertés (ddl):trois translations et trois rotations.

On utilise le terme pose pour designer la localisation du corps par rapport à un référentiel. Une pose est composée d'une position et d'une orientation.



Figure I.2: Robots anthropomorphiques sériel à six articulations KR1000 1300 TITAN PA de KUKA



(a)



(b)

Figure I.3: Robots à quatre ddl [Bonev 2003]

(a) robot de palettisation (de Fanuc), (b) robot parallèle (le Quattro d'Adept Technologie)

Pour placer un corps rigide n'importe où dans l'espace tridimensionnel, on a besoin d'un robot avec un minimum de six articulations motorisées, -c'est-à-dire- d'un robot à six ddl (**Figure I.2**). La grande majorité de robots industriels sont de type sériel. Un robot sériel est composé d'une série de segments reliés par des articulations motorisées rotoides (en rotation) ou prismatiques (en translation). Dans certaines applications, on n'a pas besoin de déplacer les objets selon six ddl mais seulement selon cinq ou même quatre ou trois ddl. Le robot de la (**Figure I.3.a**) est lui aussi utilisé pour la palettisation, mais il a seulement quatre ddl. Deux mécanismes parallélogrammes servent à restreindre deux des trois ddl en rotation de l'effecteur. Ces trois premiers robots sériels sont de type anthropomorphique.

Dans un robot parallèle, l'effecteur est relié à la base via plusieurs bras, et la plupart des articulations ne sont pas motorisées. Les robots parallèles peuvent eux aussi avoir six, cinq, quatre, trois ou même deux ddl. Les robots parallèles à six ddl les plus connus sont les hexapodes, comme ceux qui déplacent les cabinets des simulateurs de vol. Les robots parallèles sont généralement plus rigides et plus rapides que les robots sériels. En revanche, ils sont beaucoup plus difficiles à étudier et il en existe de milliers d'architectures différentes.

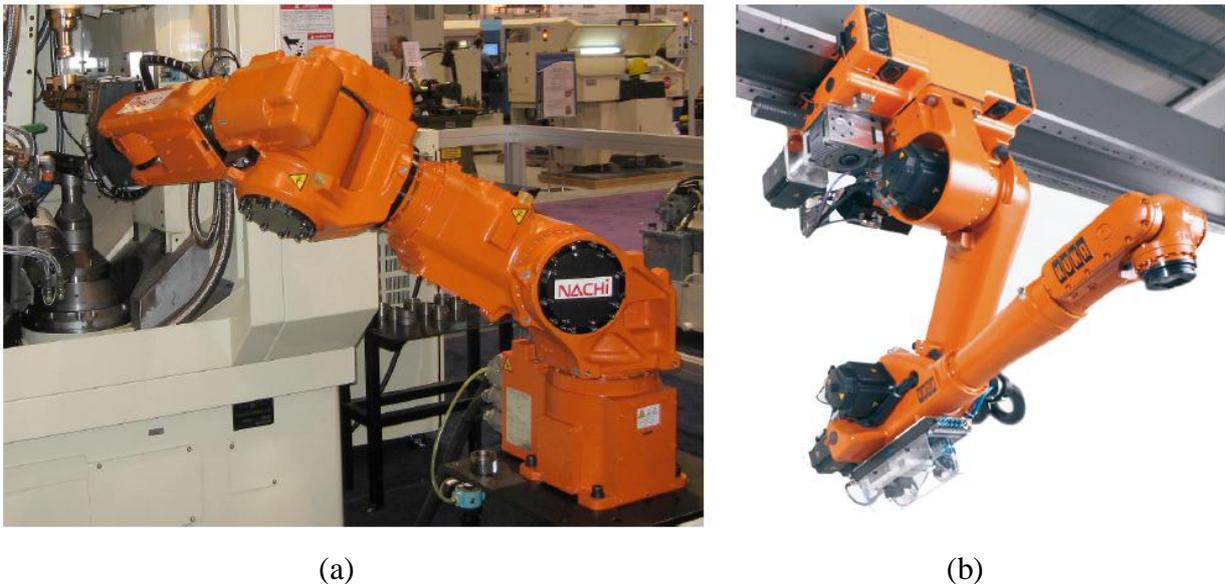


Figure I.4: Robots redondants à sept ddl [Bonev 2003]

(a) robot MR20 de Nachi, (b) robot à six articulations de KUKA monté sur un guide linéaire

Enfin, il existe aussi des robots à sept ddl (c.à.d. avec sept articulations motorisées) comme le robot illustré à la figure I.4a, mais ils sont rarement utilisés. L'avantage d'un tel robot redondant est l'existence d'une infinité de possibilités pour atteindre une pose désirée, ce qui permet au robot de contourner des obstacles. Beaucoup plus souvent, on monte un robot à six articulations sur un guide linéaire (**Figure I.4.b**) ou sur une table pivotante, ce qui résulte aussi en un système robotique redondant.

Cependant, la raison principale n'est pas de contourner des obstacles mais d'augmenter l'espace de travail du robot (l'ensemble de poses que l'effecteur du robot peut atteindre) [Bonev 2003].

I.4. Robots parallèles

I.4.A. Définition

Dans [Sandretto 2013], les robots parallèles sont définis comme suit : « Mécanisme en chaîne cinématique fermée dont l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes». Pour un robot parallèle, l'organe terminal est plus fréquemment appelé plateforme mobile.

Les robots parallèles sont à opposer aux robots sériels, où la chaîne cinématique est ouverte, c'est-à-dire que chacun des segments est lié à son prédécesseur et son successeur par une articulation à 1 degré de liberté.

L'exemple le plus célèbre de robot parallèle est la plate-forme de Gough présentée en (**Figure I.5**) Ce manipulateur se compose d'une base et d'une plate-forme mobile reliée entre elles par six chaînes cinématiques indépendantes. Chaque chaîne cinématique est composée de segments reliés entre eux par une rotule, un joint de cardan et une glissière actionnée. Ce mécanisme comporte donc six actionneurs linéaires qui contrôlent les six degrés de liberté de la plate-forme mobile par rapport à la base : trois paramètres de position et trois de rotation [Gayral 2013].

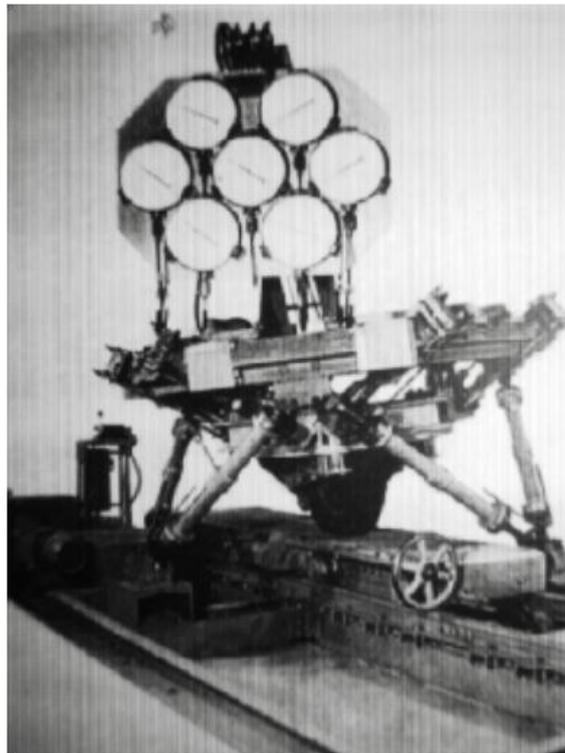


Figure I.5: Plate-forme de Gough dans sa forme originale [Gayral 2013]

I.4.B. Types et classification

Il existe une multitude d'architectures différentes de robots parallèles, chacune dépendant du nombre de chaînes cinématiques composant le manipulateur, de leur composition et de leur agencement. Un aperçu plus large des différents types de robots parallèles existant peut être trouvé dans [Merlet 2006]. Malgré ces disparités, certaines propriétés sont inhérentes à la structure des robots parallèles et peuvent être généralisées. [Gayral 2013]

Nous distinguons deux catégories de robots parallèles : les robots plans et les robots spatiaux. Puis, dans ces deux catégories nous classons les robots parallèles selon leur nombre de ddl.

Les robots à câbles sont des robots parallèles où les jambes sont remplacées par des câbles. Ces robots peuvent être plans ou spatiaux, on peut les classer dans une catégorie particulière pour les distinguer des autres robots parallèles.

Nous remarquons que dans le cas des robots pleinement parallèles, le nombre de ddl ne peut excéder trois pour les robots plans et ne peut excéder six pour les robots spatiaux [Lahouar 08].

I.4.B.1 Les robots plans

Nous ne considérons dans ce mémoire que le cas des robots plans pleinement parallèles. Comme il y a autant de ddl de l'organe terminal que de jambes dans un robot pleinement parallèle et comme il n'y a qu'un seul actionneur par jambe, les robots pleinement parallèles plans sont soit à deux ddl soit à trois ddl.

I.4.B.2. Les robots à mouvements spatiaux

Les robots à mouvements spatiaux se décomposent principalement en robots à trois ddl et en robots à six ddl. Il existe évidemment des robots à quatre ddl et des robots à cinq ddl. Ici l'objectif étant de montrer les robots parallèles les plus pertinents.

Il existe aussi des robots à mouvements spatiaux qui ont plus de 6 ddl, ces robots ne sont évidemment pas des robots pleinement parallèles.

I.4.C. Les générations de robots parallèles

Il existe de nombreux historiques concernant les robots parallèles tels ceux de Bonev [Bonev 2003] ou Merlet [Merlet 2006] qui précisent leurs véritables origines. Nous souhaitons seulement noter l'existence de deux générations essentielles de robot parallèle [Kurt 2003]:

- La première génération incarnée par les plates-formes de Gough et Stewart [Andreff 2008]. On parle aujourd'hui de robots hexapodes : 6 vérins relient le bâti à une plate-

forme mobile (voir Figure I.6), rendant possible l'exécution de mouvements complexes par la mise en parallèle des chaînes cinématiques.

- La deuxième génération incarnée par la structure Delta de Clavel [Nabat 2007] : les robots de cette famille sont capables de performances exceptionnelles (vitesses jusqu'à 10 m/s et accélération jusqu'à 20 G). On parle dès lors de robots parallèles légers avec pour principales caractéristiques:
 - des actionneurs fixes sur le bâti,
 - des composants mobiles légers (Voir Figure I.7).



Figure I.6: Le robot Hexamove [Kurt 2003] **Figure I.7:** Le robot FlexPicker (ABB) [Kurt 2003]

I.4.D. Avantages et inconvénients des Robots parallèles :

L'architecture parallèle tire parti de l'utilisation de plusieurs actionneurs travaillant conjointement et en parallèle à la même tâche et cela lui accorde [Sandretto 2013]:

- une grande vitesse de manipulation ;
- une bonne précision ;
- la possibilité de manipuler des charges très lourdes ;
- une rigidité importante.

Toutefois, l'utilisation des robots parallèles implique certaines contraintes :

- un espace de travail de volume restreint ;
- des rotations limitées par les collisions entre les jambes et les singularités.

C'est entre autre afin de pallier certains de ces inconvénients que sont apparus les robots parallèles à câbles.

I.5. Robots parallèles à câbles

I.5.A. Généralités et définition

Un robot parallèle à câbles est un mécanisme en chaîne cinématique fermée dont la plate-forme mobile est reliée aux actionneurs au moyen exclusif de câbles.

Les robots parallèles à câbles sont une catégorie particulière de robots parallèles, dont les chaînes cinématiques ne sont pas des segments rigides mais des câbles.

Ces câbles, attachés à la plate-forme mobile, sont chacun reliés à un actionneur par différentes poulies de renvoi. L'actionneur permet le contrôle de la longueur de câble déroulée. Il peut être composé d'un moteur rotatif et d'un tambour, ou d'un actionneur linéaire couplé à un palan. Sur le même principe que les robots parallèles à actionneur prismatique, le changement de longueur des câbles autorise la commande de différents ddl de la plate-forme mobile.

On appelle point de sortie le point de contact du câble sur la dernière poulie ou le dernier œillet avant de s'attacher à la plate-forme. Le point de la plate-forme où est fixé le câble est appelé quant à lui le point d'attache. On nomme également le bâti (ou base) la partie rigide et fixe sur laquelle sont fixés les poulies et les actionneurs [Sandretto2013].

I.5.B. Classification basée sur le degré de redondance

Cette classification des manipulateurs parallèles à câbles se base sur leur degré de redondance. En effet, un câble ne peut transmettre qu'un effort unidirectionnel (il ne peut que tirer, il ne peut pas pousser), dans sa direction propre (il ne tire que dans la direction du câble). Aussi, on montre aisément que pour contrôler de façon complète n ddl, il faut au minimum $(n + 1)$ câbles.

On peut cependant créer des manipulateurs à n ddl et n câbles. Tous les efforts ne peuvent pas être générés et il est nécessaire d'utiliser la gravité terrestre pour commander en position la plate-forme mobile et garder les câbles tendus [Lafourcade2004].

La commande des manipulateurs parallèles à câbles étant différente suivant qu'il y a redondance ou non. [Liu 2011] ont proposé la classification suivante :

I.5.B.1. Les IRPM : Incompletely Restrained Positioning Mechanism

Mécanisme au positionnement incomplètement contraint : pour n ddl, le nombre de câbles est égal à n .

Le défaut des IRPM est la nécessité d'utiliser la gravité pour conserver la tension dans les câbles : il est impossible de fournir un effort vers le bas.

Ce type d'architecture est parfait pour le transport et le positionnement précis de lourdes charges. Le NIST est en pointe dans ce domaine avec des manipulateurs grues comme la

NIST ROBOCRANE [Merlet 2013], pour des applications diverses comme les chantiers navals [Dagalakis et al, 1989] par exemple.

Un autre exemple d'utilisation de ce type d'architecture est l'interface haptique portable, le manipulateur se transporte sur le dos et la partie mobile emprisonne l'index. Les câbles, en appliquant un effort sur le doigt permettent de transmettre de façon tactile l'information de profondeur.

I.5.B.2. Les CRPM et les RRPM

- **Les CRPM** : Completely Restrained Positioning Mechanism (mécanisme au positionnement complètement contraint), pour n ddl, le nombre de câbles est égal à $n + 1$.
- **Les RRPM** : Redundantly Restrained Positioning Mechanism (mécanisme au positionnement contraint de façon redondante), pour n ddl, le nombre de câbles est strictement supérieur à $n + 1$.

La séparation des IRPM du reste des manipulateurs à câbles est inévitable, par contre, les CRPM étant des manipulateurs redondants comme les RRPM, il n'est pas obligé de les séparer pour l'étude.

À noter que, si historiquement la classe des IRPM a été définies pour les robots à $m = n$ câbles, rien n'empêche de faire des IRPM avec $m > n$ câbles.

Ce sont les japonais qui les premiers se sont intéressés à ce type de manipulateurs, notamment pour la télé-opération. Ils ont ensuite tenté des applications dans le sport virtuel.

La légèreté de leur structure, sans comparaison avec les manipulateurs à architecture parallèle classiques, a permis à ce type de manipulateur de prendre place à bord d'une navette spatiale. MacDonnell-Douglas a ainsi développé le robot Charlotte pour la mission STS-63 de février 1995.

Mais c'est dans le domaine de la télé-opération et des interfaces haptiques que les applications des manipulateurs parallèles à câbles semblent les plus nombreuses [Lafourcade2004].

I.6. Exemples d'applications des Robots à Câbles

I.6.A. CoGiRo – Commande des robots géants

I.6.A.1. Objectifs du projet

Le projet CoGiRo, « commande des robots géants », porte sur les robots parallèles à câbles. Ce type particulier de robot parallèle utilise des câbles afin de connecter les actionneurs au mobile (organe terminal du robot). Chaque câble est enroulé par un treuil motorisé. En modifiant les longueurs des câbles, les treuils permettent de contrôler la position et l'orientation du mobile.

Les objectifs du projet CoGiRo consistent à proposer et à valider expérimentalement des méthodes et des moyens innovants permettant de concevoir et de commander les robots parallèles à câbles ayant un espace de travail très étendu et manipulant de lourdes charges.

I.6.A.2. Méthodologie et résultats

La contribution principale du projet est la conception, la réalisation et la commande d'un démonstrateur de robot parallèle à câbles (montré ci-dessus) de dimensions 15m x 11m x 6m (longueur x largeur x hauteur). Son mobile peut ainsi se déplacer dans un espace de travail bien plus vaste que celui d'un robot industriel classique. L'actionnement par câbles permet également au robot de déplacer de lourdes charges pesant plusieurs centaines de kilogrammes.

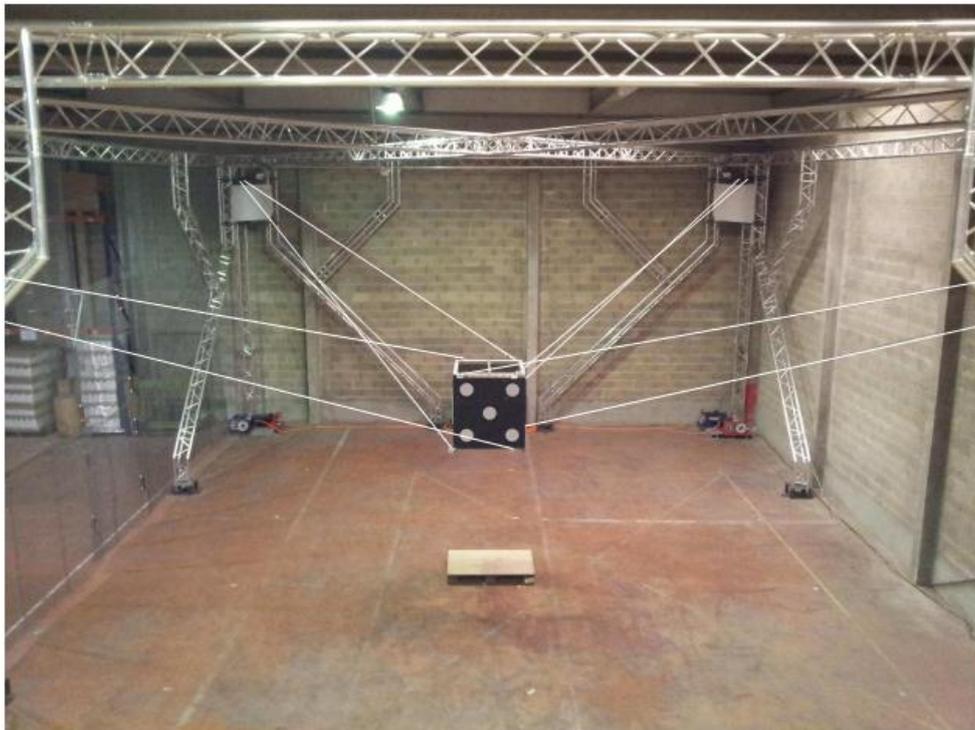


Figure I.8 : CoGiRo : un manipulateur à 8 câbles et 6 ddl en configuration suspendue [Gouttefarde 2009].

L'efficacité du démonstrateur résulte de sa conception et de sa commande, en particulier :

- Modélisation tenant compte de la masse des câbles (statique).
- Critère de performance basé sur la position du centre de masse du mobile chargé.
- Méthodologie de choix systématique de la disposition des câbles (« géométrie du robot »).
- Stratégies de commande référencée vision.
- Stratégies de commandes « dual space » et adaptative [Gouttefarde 2009].

I.6.A.3. Les perspectives d'applications

Les méthodes innovantes de conception et de commande du projet CoGiRo ont permis la réalisation d'un robot parallèle à câbles aux performances inégalées capable de déplacer sur de grandes distances plusieurs centaines de kilogrammes à des vitesses de plusieurs mètres par seconde, les mouvements de la charge étant parfaitement maîtrisés. En outre, le rapport entre l'espace de travail utile du robot et son empreinte au sol est très favorable.

Les perspectives d'applications industrielles sont multiples incluant : logistique, inspection de grands ouvrages, construction et génie civile, construction et maintenance aéronautiques et navales.

Afin de satisfaire aux besoins des applications les plus exigeantes, les perspectives de recherche concernent :

- Le développement de robots parallèles à câbles modulaires et/ou reconfigurables
- L'embarquement sur le mobile de dispositifs actifs tel un robot industriel.

I.6.B. SkyCam

L'application la plus connue est sans doute la SkyCam, une caméra contrôlée par un mécanisme à câbles. Elle est utilisée pour la télédiffusion des parties de football professionnel elle procure une meilleur fluidité dans le suivi des rencontres.

Il existe de plusieurs sortes des skycams. Le nombre de câbles utilisés, le nombre de points d'accroche, le type de chariot, qui comprend ou non la tête caméra, diffère selon les modèles.

Le skycam est utilisé notamment dans les stades de football, et a été utilisé dernièrement en Europe lors des championnats d'Europe d'athlétisme à Barcelone en juillet 2010 et des Internationaux de France de tennis de Roland-Garros de 2011 et 2012.

Le système "cablecam" en particulier se compose d'une plate-forme qui, dans sa version 3D, est capable de se déplacer dans les trois axes (X, Y, Z) grâce à un système de poulies et

de câbles tractés par des moteurs (un moteur pour chacun des axes). Un premier opérateur gère la plate-forme au moyen d'une télécommande joystick. Un second opérateur prend en charge les mouvements de la tête caméra. Lorsqu'il s'agit de prises de vues vidéo, une fibre optique apporte le signal SD ou HD jusqu'à la régie [Lefrancois 2010].

Le système Cablecam 3D est capable d'atteindre des longueurs de 900 m et des hauteurs quasi illimitées. Sa vitesse de déplacement atteint 60 km/h.

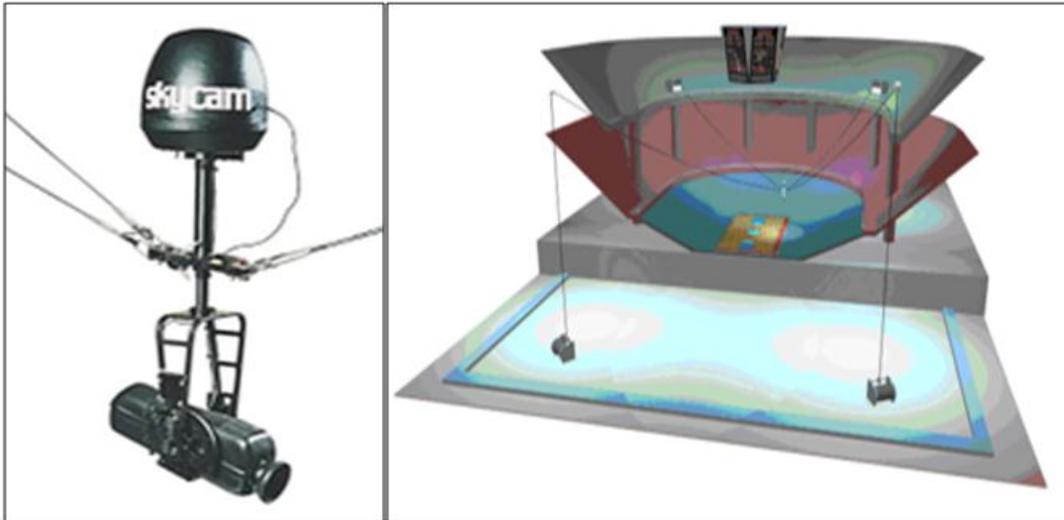


Figure I.9 : *Caméra contrôlée par un mécanisme à câbles avec un Exemple de positionnement dans un stade [Lefrancois 2010].*

I.6.C. CaTraSys (Cassino Tracking System)

Un autre champ d'intérêt dans les applications biomédicales est le suivi du mouvement. On citera l'exemple de CaTraSys (Cassino Tracking System) qui a été utilisé pour l'identification des paramètres cinématiques et la mobilité de l'homme. Le CaTraSys est un système de mesure qui a été conçu et construit au LARM (laboratoire de robotique et mécatronique) à Cassino (Italie). Il a été utilisé pour déterminer la position de l'extrémité des membres pendant son mouvement et en plus, il peut mesurer les forces et les couples exercés par le membre comme le montre la (**Figure I.10**). [Tavolieri 2008]

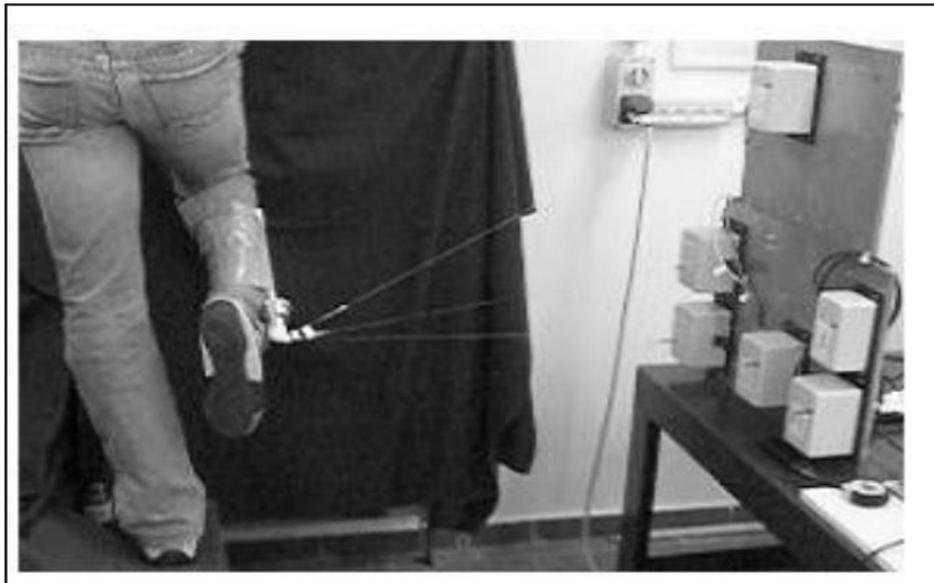


Figure I.10: *CaTraSys* système de mesure à LARM à Cassino [Tavolieri 2008]

I.6.D. Robots parallèles à câble pour la rééducation

Robots parallèles à câble ont des caractéristiques qui les rendent aptes à la réadaptation. Ils pourraient avoir un espace de travail important qui peut être adapté pour des patients différents et des exercices différents. La structure mécanique est facilement à monter et démonter et il est donc simple pour stocker et transporter. Les manipulateurs parallèles à câble sont des systèmes flexibles qui peuvent être configurés afin d'effectuer différentes thérapies. Les actionneurs sont souvent situés sur la base fixe. Il est possible d' reconfigurer le manipulateur uniquement en changeant les positions des actionneurs ou des points de fixation des câbles.

La modularité est une autre caractéristique de manipulateurs parallèles à câble. Il est possible d'agrandir et modifier la fonctionnalité de manipulateur par l'ajout de modules.

En raison de leurs caractéristiques intéressantes et adaptées, plusieurs prototypes de manipulateurs parallèles à câble ont été développés pour la réhabilitation [Tavolieri2008]:

- STRING MAN
- SMART SRTRING
- NeReBot
- MariBot
- MACRAM

I.6.E. Le NIST RoboCrane

Le RoboCrane a été développé par le NIST Laboratoire de Fabrication d'ingénierie de (MEL) Division des Systèmes intelligents (DSI) à la fin des années 1980 pour stabiliser les charges des grues. La RoboCrane de base est une machine cinématique parallèle actionnée par l'intermédiaire d'un système supporté par des câbles.



Figure I.11: (a) Le NIST Flying Carpet -. Une plate-forme pour l'accès des navires en cale sèche (b) le NIST Projet d'entretien d'aéronefs (AMP) - une plate-forme d'accès d'avion dans des hangars [Alan2008]

La plate-forme mobile est cinématiquement suspendu par le maintien de la tension due à la gravité dans l'ensemble des six câbles de support. Les câbles de support se terminent par paires à trois sommets fixés à une tête support. Ce montage permet une meilleure stabilité de la charge par rapport à des systèmes de levage traditionnels et un meilleur contrôle de la position et de l'orientation (pose) de la charge. La plate-forme mobile suspendue et le support de tête forment généralement deux triangles équilatéraux opposés, et sont souvent dénommé "triangle inférieur" et " triangle supérieur » respectivement. [Alan2008]

I.7. Avantages et inconvénients des Robots Parallèles à Câbles

Les manipulateurs parallèles à câbles ont de nombreux avantages, issus de l'architecture parallèle et de l'utilisation des câbles :

- espace de travail plus important que celui des robots parallèles en raison des débattements d'actionnement plus importants ;
- mécanique simplifiée par la suppression des liaisons passives (rotoïde et sphérique) ;
- déport possible des actionneurs en dehors de l'espace de travail ;
- facilement reconfigurable ;
- faible encombrement des segments ;
- bas coût ;
- légèreté des corps en mouvement donc faible inertie et grande dynamique.

Cependant, la prise en compte des caractéristiques physiques des câbles peut rendre la modélisation du robot complexe. L'hypothèse visant à les considérer comme des segments rigides, sans masse et non déformables est souvent faite. Cette simplification peut ajouter des incertitudes.

Avec une modélisation réaliste des câbles, le modèle géométrique inverse (MGI), qui consiste à calculer les longueurs de câbles à dérouler pour atteindre une position (p) et une orientation (R) données, est plus complexe que celui des robots parallèles classiques. En effet, les longueurs des câbles effectifs dépendent de la tension dans les câbles à cause de l'élasticité et de la pesanteur des câbles, et elle est donc fonction de la statique. Lorsque ce phénomène est pris en compte dans la modélisation inverse du manipulateur, on parle alors de modèle géométrico-statique inverse. Ceci est un problème très complexe et encore très ouvert pour une modélisation réaliste des câbles.

Le modèle géométrique direct (MGD), qui consiste à calculer la pose du robot (position p et orientation R de la plate-forme) en fonction des longueurs de câble déroulées, dépend aussi de la statique. Le modèle géométrico-statique direct est là encore un problème ouvert [Sandretto2013].

I.8. Conclusion

Dans ce chapitre on a introduit les robots de façon générale et les robots parallèles de façon particulière, leurs types et critères de classification ; les robots à câbles est une catégorie des robots parallèles ; mais les différences entre les robots parallèles traditionnels et les robots parallèles à câbles sont nombreuses, et malgré ces inconvénients, la flexibilité des robots à câbles a résolu beaucoup de problèmes qui ont été posés pour les robots parallèles et la robotique.

Chapitre II

CARACTÉRISTIQUES DES ROBOTS À CÂBLES

II.1. Introduction

L'étude d'un robot parallèle à câble, comme il est le cas pour tous mécanismes mécaniques, revient à l'étude des différentes caractéristiques géométrique, cinématique et dynamique.

Pour les robots à câbles et les robots d'une façon générale il y a des concepts qu'il faut étudier.

Dans ce chapitre on va présenter ces concepts qui sont : l'analyse du mouvement, l'analyse des forces, l'évaluation de l'espace de travail, et la planification des trajectoires, on va aussi présenter des concepts particuliers qui n'ont pas la même importance, mais jouent un rôle important dans la conception des robots à câbles : l'évaluation de la rigidité, l'élasticité des câbles, et l'analyse des singularités.

II.2. Caractéristiques du mouvement

En général, un manipulateur est constitué de chaînes cinématiques composées par plusieurs liens reliés par des articulations. Des chaînes cinématiques connecté à une base fixe avec un effecteur terminal mobile. Le mouvement de l'effecteur est obtenu en additionnant les mouvements des liens. D'un point de vue mathématique, les variables articulaires sont transformées en variables de l'effecteur, qui décrivent sa position et son orientation.

Il est possible que les variables articulaires et les grandeurs de réglage soient différents dans le temps. Les forces exercées par les actionneurs sont transformées en forces exercées par l'effecteur.

La cinématique décrit le mouvement du manipulateur sans tenir compte des causes du mouvement. La position, la vitesse et l'accélération de tous les liens sont évaluées. L'état d'un corps générique peut être décrit par la combinaison des mouvements de rotation et de la translation.

La cinématique du manipulateur peut être étudiée à partir de deux points de vue différents :

- La cinématique directe : La longueur et l'angle de chaque lien sont connus. le but de l'analyse est d'évaluer la position et l'orientation de l'effecteur dans l'espace de travail.
- La cinématique inverse : La position et l'orientation de l'organe terminal effecteur sont connues. Le but de l'analyse est d'évaluer la longueur de chaque liaison et l'angle de chaque câble avec le bâti.

La relation entre les variables des articulations et de l'effecteur peut être exprimée sous la forme des équations de contraintes.

Pour les manipulateurs parallèles à câbles, les liens sont constitués par des câbles et constituent des chaînes fermés, tandis que l'effecteur d'extrémité est déplacé par l'extension et la rétraction des câbles, les variables articulaires étant les longueurs des câbles. Les chaînes cinématiques sont des chaînes fermées. Pour ces raisons la cinématique directe est difficile à résoudre et dans certains cas, il est impossible d'établir le nombre de solutions pour le

problème. De plus, les solutions ne peuvent être obtenues qu'avec des techniques numériques adaptées.

Pour les manipulateurs parallèles à câbles, les forces de l'effecteur sont unidirectionnelles et sont obtenues en tirant les câbles.

II.3. Analyse des Forces

Quand un manipulateur effectue une tâche donnée, l'effecteur exerce une force et un moment sur l'environnement extérieur. Le terme effort est utilisé pour indiquer à la fois la force et le moment.

La génération des efforts est due au système d'actionnement. Pour les manipulateurs parallèles à câbles, les efforts sont transmis par le système d'actionnement à l'effecteur terminal, par l'intermédiaire de plusieurs chaînes cinématiques fermées. Dans les manipulateurs parallèles à câble les efforts sont transmis par extension et rétraction des câbles, en assurant l'état de traction de câbles.

Le principe des travaux virtuels est utilisé pour l'évaluation des forces statique agissant sur le système. Le travail sur un système virtuel peut être défini comme le travail résultant de forces virtuelles agissant par l'intermédiaire d'un déplacement réel ou des forces réelles agissant par l'intermédiaire d'un déplacement virtuel. Lorsque les quantités virtuelles sont des variables indépendantes, elles sont également arbitraires.

La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un système est que la somme des travaux virtuels des forces agissant résultant sur le système est égale à zéro pour tout déplacement arbitraire.

En considérant un système élastique, ce principe permet de déterminer les tensions ou d'évaluer les déplacements élastiques du système. En raison de la nature élastique du système, les tensions internes aussi rendent de travail. Par conséquent, le système de forces en équilibre se compose de forces externes appliquées, des contraintes de réactions, et des tensions internes.

En considérant un manipulateur parallèle à câble, le système à l'équilibre est composé des efforts externes \mathbf{P}_a , ses contraintes des réactions \mathbf{C}_a , et des tensions internes dans les câbles \mathbf{S}_a . Le travail résultant des efforts externes peut être formulé comme suit :

$$\mathbf{W}_e = \sum \mathbf{P}_a \delta_b + \sum \mathbf{C}_a \gamma_b \dots\dots\dots (\text{II.1})$$

δ_b est le déplacement aux nœuds, et γ_b est la contrainte d'échec.

Le travail résultant de tensions internes peut être formulé comme suit :

$$\mathbf{W}_i = -\sum \mathbf{S}_a \Delta L \dots\dots\dots (\text{II.2})$$

Le principe de travail virtuel peut être exprimé par :

$$\sum P_a \delta_b + \sum C_a \gamma_b = - \sum S_a \Delta L \dots \dots \dots (II.3)$$

Les éléments des sommes sont positifs si les forces et les déplacements ont le même sens.

II.3.A. Statique

L'analyse de la force statique est importante pour déterminer la qualité de transmission de force, qui est un aspect fondamental de l'efficacité énergétique du manipulateur. Cette analyse est également utile pour la conception et le dimensionnement des différents éléments du manipulateur.

En outre, pour les manipulateurs parallèles à câbles, l'analyse statique est une étape fondamentale vers la détermination de l'espace de travail possible. C'est-à-dire, pour déterminer l'état de tension dont au moins un ensemble des tensions positives des câbles sont en mesure de maintenir la position de l'effecteur terminal.

Dans les manipulateurs parallèles les efforts d'entrée de l'actionneur sont reliés aux efforts de sortie de l'effecteur par la transposée de la matrice Jacobienne du manipulateur.

En supposant que les frictions dans les articulations et les effets gravitationnels sur les liens sont négligeables, les forces de réaction au niveau des articulations passives ne résultent pas un travail virtuel.

Soient: W le vecteur des efforts de l'effecteur, T le vecteur des couples actionné et les forces conjointes, $\delta q = [\delta q_1, \dots, \delta q_n]^T$ le vecteur des déplacements virtuels associé aux articulations actionnées et $\delta X = [\delta x, \delta y, \delta z, \delta \theta, \delta \rho]^T$ le vecteur des déplacements virtuels liés à l'effecteur.

Le travail virtuel résultant des efforts actifs peut être écrit comme :

$$T \delta q - W \delta x = 0 \dots \dots \dots (II.4)$$

Les déplacements virtuels δq et δx sont reliés par la matrice Jacobienne

$$\delta q = J \delta x \dots \dots \dots (II.5)$$

En remplaçant l'expression (II.5) dans (II.4) on obtient :

$$(TJ - W) \delta x = 0 \dots \dots \dots (II.6)$$

Équation (II.6) est valable pour tous les déplacements virtuels et le problème statique peut être formulé sous la forme

$$W = J^T T \dots \dots \dots (II.7)$$

On obtient les efforts à la sortie de l'effecteur en termes des forces conjointes actionnées. Supposant que la pose de l'effecteur et les forces aux articulations sont connus, il est possible de déterminer l'effort agissant sur l'effecteur, et vice-versa.

Pour les manipulateurs parallèles à câble, il existe une limite physique englobant les valeurs extrêmes des forces et des tensions dans les câbles [Tavolieri 2008]. Il est possible de

supposer que les tensions dans les câbles ont des valeurs comprises dans l'intervalle, où une limite supérieure assure que les câbles ne seront pas coupés et une limite inférieure garantit que la tension est maintenue positive.

II.3.B. Dynamique

L'analyse dynamique d'un manipulateur est effectuée afin de relier le mouvement du système aux forces et couples appliqués. L'analyse dynamique a un rôle important dans l'analyse et le contrôle des performances mise en œuvre des manipulateurs parallèles à câble. Ils sont structurellement sensibles et les effets dynamiques peuvent modifier leurs comportements.

La formulation classique conduit à un grand nombre d'équations et par conséquent à une efficacité de calcul pauvre.

En raison de caractère unilatéral d'actionnement des forces dans les câbles, l'analyse dynamique des robots à câbles diffère de celle des robots parallèles classiques.

Il existe deux types d'analyse dynamique :

- L'analyse dynamique inverse est effectuée en évaluant les couples d'actionnement, étant donné le mouvement de l'effecteur (trajectoire, vitesse et accélération) et l'effort externe. La dynamique inverse est utilisée pour la planification et le contrôle de mouvement.
- L'analyse dynamique directe est effectuée en évaluant le mouvement de l'effecteur terminal, étant donné les couples d'actionnement et l'effort externe. La dynamique directe est utilisée pour la simulation. Pour les manipulateurs à câble, la valeur des tensions dans les câbles est un autre aspect dont il faut tenir compte.

Il est possible d'obtenir un modèle dynamique de manipulateur par l'addition des forces d'inertie et couples d'entraînement à l'analyse statique.

Certaines hypothèses et simplifications raisonnables peuvent être déployées afin de simplifier l'analyse :

- La masse des Câbles peut être négligé.
- Les câbles sont considérés comme des corps rigides, ce qui signifie que le comportement élastique n'est pas inclus dans l'étude.
- La dynamique des actionneurs n'est pas prise en compte.
- Les tensions dans les câbles doivent se situer dans une gamme $t_{min} < t_i < t_{max}$ ($i = 1, \dots, m$) en tant que contraintes pour la solution du problème [Tavolieri 2008].

II.4. Évaluation de l'espace de travail

L'une des caractéristiques les plus importantes pour les manipulateurs est l'espace de travail.

L'espace de travail est l'ensemble des configurations, des positions et des orientations dans lesquelles :

- L'effecteur terminal peut être commandé.
- Les tensions dans les câbles sont positives.
- Les valeurs des forces se situent entre un minimum et un maximum, afin de maintenir les câbles tendues et d'éviter la rupture des câbles, respectivement.
- L'effecteur est loin des singularités.
- Les collisions entre les câbles sont évitées.

Plusieurs définitions de différentes caractérisations de l'espace de travail se trouvent dans une très riche littérature. Par exemple, le terme espace de travail contrôlable désigne l'ensemble de toutes les positions où l'effecteur peut être contrôlé avec des tensions positives dans les câbles. L'espace de travail statique accessible est définie comme l'ensemble de toutes les positions de l'effecteur qui peuvent être atteintes quand les conditions statiques assurées. L'espace de travail de l'effort-possible est définie comme l'ensemble des poses où le manipulateur peut appliquer l'ensemble des efforts requis.

Si non, l'espace de travail peut être défini en considérant juste la géométrie du mécanisme. Dans ce cas, l'espace de travail est une propriété du mécanisme lui-même et est lié à sa conception seulement. Par exemple, l'espace de travail du Mécanisme à câble est défini comme l'ensemble des positions de son effecteur terminal pour lequel les câbles peuvent équilibrer n'importe quel torseur externe et il ne dépend que de la géométrie du mécanisme. Dans [Merlet, 2004] d'autres classifications de l'espace de travail sont données. Un espace de travail d'orientation constante ou un espace de travail de translation est défini comme étant l'ensemble de toutes les positions de l'effecteur qui peut être atteint avec une orientation fixe. Un espace de travail d'orientation est défini comme l'ensemble de toutes les orientations possibles que l'effecteur peut prendre dans une position fixe. Un espace de travail maximale ou atteignable est défini comme l'ensemble de toutes les positions de l'organe terminal qui peut être atteint par au moins une orientation.

Un espace de travail d'orientation totale est défini comme étant l'ensemble de toutes les positions de l'organe terminal qui peut être atteint avec toutes les orientations définies par une gamme donnée. Un espace de travail dextérité est défini comme l'ensemble des positions de l'effecteur qui peut être atteint avec une orientation quelconque.

Pour les manipulateurs parallèles à câble la définition de l'espace de travail implique à la fois des paramètres géométriques et statiques. Par exemple, en considérant un manipulateur parallèle à câble totalement contraint, il est possible de définir :

- Un espace de travail de force de la fermeture comme un ensemble des positions de l'effecteur terminal, où l'état de la force de fermeture peut être satisfait. Elle ne dépend que des paramètres géométriques de manipulateur et de la position de son effecteur;
- Un espace de travail des efforts possible comme un ensemble des positions de l'effecteur qui satisfait aussi les exigences statiques. Elle dépend non seulement de la configuration géométrique, mais aussi des forces qui agissent sur le système. Les tensions dans les câbles et l'effort externe doivent prendre en considération pour la définition de l'espace de travail.

L'évaluation des différents types d'espace de travail peut être obtenue avec plusieurs techniques (Géométrie, analytique et numérique) et l'analyse dépend des demandes d'application.

La représentation graphique d'un espace de travail est possible pour les manipulateurs ayant au plus 3 ddl. Si le manipulateur a plus de 3 ddl la représentation de son espace de travail est encore possible par la fixation d'un certain nombre de paramètres de position égal au nombre de ddl du manipulateur moins 3.

L'espace de travail délimite les applications possibles du manipulateur. Des indices peuvent être utilisés afin de caractériser et optimiser la description de l'espace de travail.

L'une des caractéristiques les plus importantes de l'espace de travail est de déterminer sa dimension, par une surface pour un manipulateur planaire, ou un volume pour un manipulateur spatial. Par exemple, il est possible d'envisager un indice de volume défini par le rapport entre le volume d'espace de travail et le volume du robot [Merlet 2004].

En plus de sa quantification, ces indices peuvent être utilisés pour décrire certaines qualités de l'espace de travail. Plus précisément, les tensions sont des paramètres fondamentaux pour l'évaluation de l'espace de travail des manipulateurs parallèles à câble. Dans [Tavolieri 2008] un facteur de tension est proposé en tant qu'indice de performance dans le but d'évaluer la qualité de la force de fermeture dans une configuration spécifique. Il est défini comme le rapport entre le minimum et le maximum des tensions dans les câbles.

II.5. Planification des trajectoires

II.5.A. Planification pour les robots parallèles

Il existe plusieurs méthodes de planification de trajectoire qui ont été utilisées pour les robots mobiles et pour les robots sériels. Ces méthodes peuvent être adaptées aux robots parallèles. Le plus simple, c'est d'utiliser l'espace de travail ramené à l'organe terminal, puisque, dans le cas des robots parallèles, le modèle géométrique inverse est plus simple à obtenir que le modèle géométrique direct. Un point de l'espace de travail correspond à une configuration du robot et on peut en juger directement si le robot est en collision avec un obstacle de l'environnement ou non. Ainsi, plusieurs méthodes peuvent être utilisées avec les

robots parallèles, comme par exemple, les méthodes basées sur les cartes probabilistes qu'on appelle PRM (Probabilistic RoadMaps). Il existe des travaux qui ont réussi à utiliser ce genre de méthodes avec les robots parallèles, tout en travaillant dans l'espace des configurations et en utilisant une méthode qui permet de générer des configurations compatibles aux équations de fermeture de chaînes. Le fait de générer des configurations compatibles rend la planification de trajectoire plus complexe et nécessite plus de temps pour générer les cartes probabilistes.

Pour utiliser la méthode des cartes probabilistes avec les robots parallèles, il suffit juste de générer des positions aléatoires dans l'espace de travail.

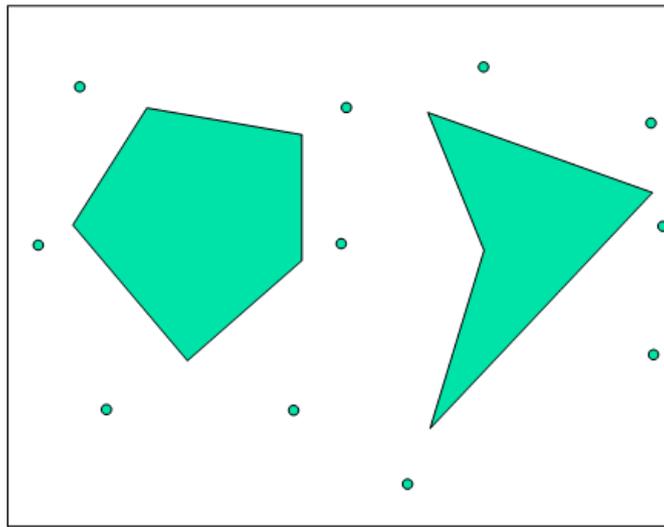


Figure II.1: Génération de positions aléatoires sans collision dans l'espace de travail [Lefrancois 2010]

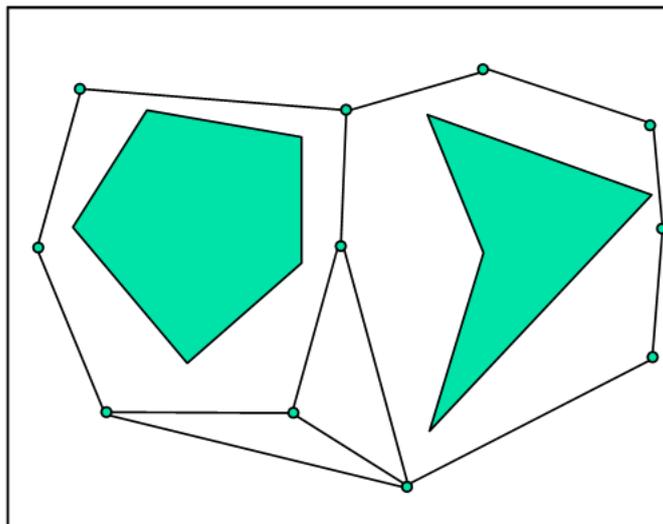


Figure II.2: Construction du PRM [Lefrancois 2010]

Pour chaque nouvelle position, les chemins pour rallier les positions les plus proches sont vérifiés à l'aide d'une méthode locale. Dans le cas où ces chemins ne croisent pas de collision ni de singularité, ils seront placés dans un graphe qui représente l'adjacence des positions

II.5.B. Particularités des manipulateurs parallèles à câbles

Les trajectoires satisfaisant les contraintes de tension sont automatiquement inclus dans l'espace de travail dynamique du robot, qui peut s'étendre au-delà de son espace de travail statique. Afin de simplifier la planification de trajectoire et d'éviter de devoir envisager les contraintes dans la boucle de commande, les trajectoires possibles génériques sont maintenant définies trajectoires possibles qui sont obtenues en manipulant les contraintes d'inégalité pour obtenir des conditions sur les paramètres des trajectoires globales qui garantissent la tension positive dans des câbles. Autrement dit, les contraintes sont satisfaites par la conception de trajectoire, ce qui simplifie beaucoup la planification et le contrôle.

II.6. Analyse des singularités

Une configuration singulière pour un manipulateur parallèle est une pose de l'effecteur terminal, dans lequel le manipulateur possède un ou plusieurs degrés de liberté incontrôlable.

Une analyse de la configuration singulière d'un manipulateur parallèle peut être faite en considérant les propriétés de la matrice Jacobienne. Si \mathbf{q} est le vecteur des variables articulaires et \mathbf{x} le vecteur position de l'effecteur, la cinématique des contraintes imposées par des branches peut être écrite comme une fonction f tel que $f(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = 0$

Une relation entre les variables articulaires et la vitesse de l'effecteur est obtenue différenciant par rapport au temps :

$$J_x \dot{\mathbf{x}} = J_q \dot{\mathbf{q}} \dots\dots\dots (\text{II.8})$$

Tel que :

$$J_x = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad \& \quad J_q = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \dots\dots\dots (\text{II.9})$$

La matrice Jacobéenne peut s'écrire : $\dot{\mathbf{q}} = J \dot{\mathbf{x}} \dots\dots\dots (\text{II.10})$

Et $J = J_q^{-1} J_x \dots\dots\dots (\text{II.11})$

Il est possible d'analyser les deux matrices Jacobéenne $J_q ; J_x$. Pour un manipulateur parallèle, les singularités peuvent être divisées en trois groupes:

- Une configuration singulière inverse se produit si J_q perd en ordre. Dans cette configuration, le manipulateur perd un ou plusieurs ddl. Les singularités inverses se produisent habituellement à la limite de l'espace de travail.
- Une configuration singulière directe se produit si J_x perd en ordre. Dans cette configuration, le manipulateur gagne un ou plusieurs ddl Ce genre de singularité est généralement à l'intérieur de l'espace de travail.

- Une configuration singulière combinée se produit si les deux matrices Jx et Jq perdent ordre. Dans cette configuration l'effecteur peut avoir un certain mouvement infinitésimal alors que tous les actionneurs sont verrouillés. De la même façon, le manipulateur peut rester stationnaire tandis que les actionneurs ont des mouvements infinitésimaux. Généralement ce type de singularité se produit pour les manipulateurs avec des architectures cinématiques spéciales.

Les singularités inverses et directes dépendent de la configuration du manipulateur, tandis que les singularités combinées dépendent de la structure du manipulateur.

En considérant un manipulateur parallèle à câble, Jq est toujours une matrice diagonale et il est singulier si l'un des câbles a une longueur égale à zéro. Pour cette raison, les premier et troisième types de singularités n'existent pas pour les manipulateurs parallèles à câble.

On peut dire qu'un manipulateur parallèle à câble est singulier dans une position si et seulement si la matrice de la structure a un ordre inférieur au nombre de ddl.

Par exemple, un manipulateur comportant deux ddl est singulier si et seulement si la matrice de la structure est d'ordre 1.

Les singularités peuvent être évitées en ajoutant des liens supplémentaires dans les manipulateurs parallèles, car chaque lien supprime une ddl d'incontrôlabilité, et il est connu qu'il existe une singularité lorsqu'un ddl est incontrôlable.

Les singularités sont liées à l'analyse de la vitesse et la transmission des forces. En considérant l'équation $\mathbf{W} = \mathbf{J}^T \mathbf{T}$ (II.12)

Lorsque la matrice J est singulière le système linéaire n'aurait pas une solution unique pour W donnée et le manipulateur ne peut pas être en équilibre. Une autre conséquence pratique sur les forces est que près d'une position singulière les forces conjointes deviennent grands parce qu'elles sont exprimées en tant que quotient dont le dénominateur est le déterminant de J^T . Il y a le risque de casser la structure du système.

L'analyse des singularités est basée sur l'approche de Jacobi et elle n'est pas toujours simple. Pour les manipulateurs parallèles à câble la matrice J n'est pas toujours carrée et l'analyse de son ordre n'est pas simple. De plus, J n'a de sens que si tous les câbles sont tendus. La matrice J devient invalide si un des câbles est mou.

D'autres approches ont été utilisées pour l'analyse de la singularité. Par exemple, dans [Merlet 2004], la géométrie de la ligne Grassmann a été utilisée afin de trouver les conditions géométriques qui provoquent une dépendance linéaire. L'utilisation de l'algèbre de Grassmann-Cayley pour la compréhension de configuration géométrique est pratique car il se connecte les conditions géométriques aux équations algébriques invariantes.

II.7. Élasticité des câbles

Dans les manipulateurs parallèles à câble les bras sont constitués de câbles. Les câbles peuvent être fabriqués avec différents matériaux. Il doit être considéré que chaque matériau a un comportement élastique. Cet aspect doit être pris en compte dans le but d'améliorer à la fois, les performances et l'analyse du manipulateur.

La force agissant sur un matériau provoque une déformation. Un matériau est dit avoir un comportement élastique s'il récupère sa forme originale une fois la force cesse son action. Le régime élastique est caractérisé par une relation linéaire entre la tension, provoquée par les forces appliquées, et la déformation. Ce régime est nommé élasticité linéaire. Cette idée a été formulée par Robert Hooke en 1678, et la relation a été appelée la loi de Hooke. La loi de Hooke ne vaut que pour certaines matières, sous certaines conditions de chargement. Pour d'autres matériaux, la loi de Hooke n'est valable que pour une partie de la plage d'élasticité. Au-dessus d'une certaine contrainte appelée la limite d'élasticité la relation entre la déformation et la contrainte devient non linéaire. Au-delà de cette limite, le corps solide peut se déformer de façon irréversible, présentant un comportement plastique.

La courbe tension-déformation du matériau considéré est utile afin de visualiser graphiquement le comportement du matériau. Un exemple d'une courbe contrainte-déformation générique est rapporté dans la figure II.3.

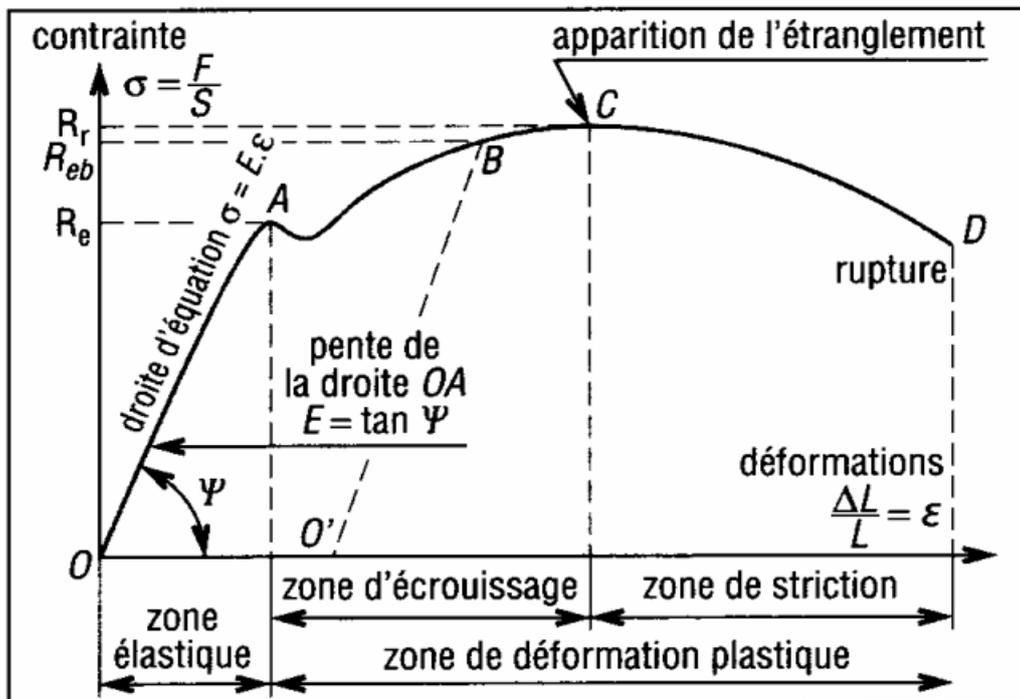


Figure II.3: Courbe de traction d'un matériau ductile présentant un décrochement [Tavolieri 2008]

R : contrainte = F Force / S Surface

R_r : contrainte maximale avant rupture

R_e : limite apparente d'élasticité

ε : allongement relatif

Dans les manipulateurs parallèles à câbles, les câbles peuvent être considérés comme des éléments élastiques. Seules les forces de traction agissent dans les câbles. En outre, la longueur a une dimension plus grande si on la compare avec la section. Pour ces raisons, un câble peut être simplifié et considéré comme une ligne.

Une autre simplification de l'analyse peut être obtenue en supposant que le matériau présente un comportement isotrope. Cela veut dire que ses caractéristiques sont les mêmes pour toutes les directions, et pour la loi de Hooke seulement le module de Young pour l'élasticité longitudinale E est considéré $\varepsilon = \sigma / E$

σ représente la tension dans le câble, ε indique la déformation dans le même élément, et le module d'élasticité E est une propriété de la matière constitutive. Pour la même loi, la variation de la longueur d'un câble peut être évaluée comme :

$$\Delta L = \frac{\sigma}{E} L \dots\dots\dots (\text{II.13})$$

L'apparition de fluage peut également être prise en compte dans la conception d'un manipulateur à câble, afin d'obtenir des résultats plus réalistes. Le fluage est l'allongement permanent du câble. Elle est due à l'action des contraintes sur les câbles sur une période de temps.

Cet allongement permanent aura une incidence sur le calcul de la tension après que le câble ait rampé. Le fluage augmente toujours avec la température. La déformation de la matière provoquée par le fluage est fonction des propriétés des matériaux, le temps d'exposition, la température d'exposition et la contrainte appliquée.

L'expression générale pour l'équation de fluage peut être formulée sous la forme :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{C\sigma^m}{d^b} e^{-\frac{Q}{kT}} \dots\dots\dots (\text{II.14})$$

Où s est la contrainte de fluage, C est une constante dépendant du matériau et notamment de mécanisme du fluage, b et m sont des exposants qui dépendent du mécanisme de fluage, Q est l'énergie d'activation du mécanisme de fluage, σ est la contrainte appliquée, d est la taille de grain du matériau, k est la constante de Boltzmann, et T est la température absolue.

II.8. Évaluation de rigidité

L'analyse statique permet de déterminer la relation entre les variables articulaires et l'effort exercée par l'effecteur. Lors d'une manipulation l'affinité de la structure de manipulateur provoque un déplacement de l'effecteur à partir de la pose désirée. Les déplacements de l'effecteur dépendent non seulement du l'effort appliqué, mais aussi de la rigidité de la structure [Tsai, 1999]. La rigidité affecte fortement l'exactitude de la position de l'effecteur.

D'une manière générale, la rigidité d'un manipulateur à câbles dépend de plusieurs paramètres comme, par exemple, la matière, les dimensions et la forme des câbles, le système de transmission, le système d'actionnement...etc.

Les caractéristiques physiques et géométriques des câbles sont les paramètres les plus importants qui influencent le comportement de la rigidité du manipulateur.

Une première formulation pour l'évaluation de la rigidité peut être élaborée en tenant compte du comportement du manipulateur sous petite déviation quand les actionneurs ne génèrent pas des forces actives.

Considérons $\mathbf{T} = [t_1, \dots, t_m]$ le vecteur des couples ou de forces des articulations et

$\Delta\mathbf{q} = [\Delta q_1, \dots, \Delta q_m]^t$ Le vecteur des déformations articulaires.

Il est possible de relier $\Delta\mathbf{q}$ à \mathbf{T} au moyen d'une matrice diagonale $m \times m$ $\mathbf{X} = \text{diag}[k_1, \dots, k_m]$ La relation peut être exprimée comme :

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{q} \dots\dots\dots (\text{II.15})$$

Pour un manipulateur parallèle, le déplacement articulaire $\Delta\mathbf{q}$ est lié à la déviation de l'effecteur au moyen de la matrice Jacobienne :

$$\Delta\mathbf{q} = \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} \dots\dots\dots (\text{II.16})$$

en substituant l'équation (2) dans l'équation (1), et compte tenu de la statique de l'équation $\mathbf{W} = \mathbf{J}^T \mathbf{T}$ il est possible d'obtenir l'équation suivante :

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{x} \dots\dots\dots (\text{II.17})$$

Où \mathbf{K} est la matrice de rigidité du manipulateur parallèle :

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}^T \mathbf{X} \mathbf{J} \dots\dots\dots (\text{II.18})$$

L'équation (4) implique que la force exercée par l'effecteur est liée à sa déviation par la matrice de raideur \mathbf{K} .

\mathbf{K} est symétrique, semi-définie positive, et cela dépend de la configuration du manipulateur.

Si le manipulateur a des liens du même type et $\mathbf{k} = k_1 = \dots = k_m$ la matrice de raideur peut être exprimée comme :

$$\mathbf{K} = k\mathbf{J}^T \mathbf{J} \dots\dots\dots (\text{II.19})$$

De la même manière, il est possible de définir une matrice de conformité pour le manipulateur

$$\mathbf{C} = \frac{1}{k} \mathbf{J}^T \mathbf{J} \dots\dots\dots (\text{II.20})$$

La structure d'un manipulateur parallèle à câble est plus affinée par rapport à un manipulateur parallèle traditionnel. Pour ce type de manipulateur la contribue principale à la affinité de la structure est donnée par les câbles. Les principaux paramètres qui doivent être pris en considération sont le module d'élasticité, le module de déformation longitudinale, la longueur totale de chaque câble, et le diamètre du câble.

La matrice de rigidité d'un manipulateur parallèle à câble dépend de tension agissant dans les câbles et de la configuration du manipulateur.

La rigidité d'un seul câble i est proportionnelle à sa longueur initiale L_i . Si une tension de σ_i agit dans un câble, l'allongement suivant est obtenu :

$$\Delta L_i = \frac{1}{k_i} \sigma_i \dots \dots \dots \text{(II.21)}$$

Par exemple, si les câbles présentent un comportement élastique, la constante de raideur k peut être exprimée par :

$$k_i = \frac{E}{L_i}$$

En considérant un intervalle de temps Δt_i , Il est possible d'exprimer la variation de tension qui suit la variation de longueur ΔL_i comme suit :

$$\Delta t_i = k_i \Delta L_i \dots \dots \dots \text{(II.22)}$$

II.9. Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté L'analyse des mouvements et des forces ; qui pour un manipulateur a câbles est une étape essentielle qui va nous permettent de modéliser le robot qui le premiers pas dans la conception ; on a aussi présenté le concept de l'espace de travail et les différentes types et définition de cet espace et le rôle qu'il joue avec la planification des trajectoires dans la précision des domaines et environnements dans lesquels un robot a câble serait utile ; ces concept-là sont les plus important surtout dans la phase de préconception; mais une étude pour la conception et réalisation d'un robot doit prendre en compte l'étude : des singularités, de rigidité de manipulateur et d'élasticité des câbles.

Chapitre III

MODÉLISATION DU ROBOT SPATIAL À QUATRE CÂBLES

III.1. Introduction

L'étude de la modélisation des robots à câbles a fait l'objet de nombreuse recherche surtout pendant les dernières années. Alors que les modèles inverses sont faciles à obtenir, les modèles directs sont beaucoup plus difficiles, en particulier à cause des contraintes de calculs tels que la capacité de fonctionnement en temps réel. En général, les modèles directs des robots parallèles peuvent avoir jusqu'à 40 solutions réelles, qui sont difficiles à calculer numériquement de façon directe.

D'autres méthodes, plus pratiques à mettre en œuvre, font donc l'objet de recherche. Certains s'appuient sur l'évolution géométrique, d'autres sur les méthodes intervalle, ou également sur les méthodes numériques d'optimisation [Schmidt 2013].

Dans ce chapitre on va présenter les 4 modèles caractérisant un robot à câble, et on évaluer l'espace de travail pour notre manipulateur.

III .2. Modèle géométrique

Les Robots parallèles à câble ont reçu de plus en plus l'attention des chercheurs dans les domaines de la robotique, en raison des avantages particuliers : structure simple, grand espace de travail, charge utile lourde, haute rigidité structurelle et capacité d'accélération élevée.

De façon similaire aux robots parallèles, le modèle géométrique des robots à câbles consiste à relier la position et l'orientation de l'organe terminal aux distances entre les points d'attache des segments. Cependant, dans un modèle réaliste qui considère la masse et l'élasticité des câbles, la distance entre le point d'attache sur la plate-forme et le point de sortie du câble sur le bâti est fonction des caractéristiques du câble (masse et élasticité), de la longueur de câble déroulée et de la tension dans le câble. La longueur des câbles étant fonction des tensions et donc des efforts exercés sur la plate-forme, il est nécessaire de considérer le modèle statique du robot.

III.2.A. Modèle du câble

Une source potentielle d'incertitude dans la modélisation des robots à câbles est le comportement des câbles sous tension. Actuellement, la majorité des travaux réalisés sur les robots parallèles à câbles utilisent un modèle de câble simplifié, sans masse ni élasticité. Cette modélisation permet en effet d'utiliser de nombreux résultats issus des robots parallèles rigides d'architecture de type Gough.

Cependant dans certains cas (en particulier pour les robots de grande dimension), la masse propre et l'élasticité introduisent un fléchissement du câble dont le profil s'écarte alors de la ligne droite théorique. Bouchard [Bouchard 2008] a présenté les conditions nécessaires pour pouvoir négliger le fléchissement et modéliser les câbles comme des segments droits.

Pour cela, il compare le fléchissement au départ d'un câble réaliste avec la direction du câble s'il était parfaitement droit. Cette étude est intéressante pour déterminer l'effet de poids du câble, mais ne considère pas l'effet de l'élasticité. Si on relie un point A_i du bâti et un point B_i de la plate-forme avec un câble (**Figure.III.1**), il est possible de définir plusieurs modèles de câble en fonction de la prise en compte ou non de la masse et de l'élasticité pour calculer la longueur de câble nécessaire afin de relier ces deux points.

Dans la suite nous noterons d_i la distance entre A_i et B_i , l_i la longueur de câble déroulée (c'est à dire sans effort, à tension nulle), et L_i la longueur réelle du câble sous tension.

Nous présentons différents modèles de câbles [Sandretto2013].

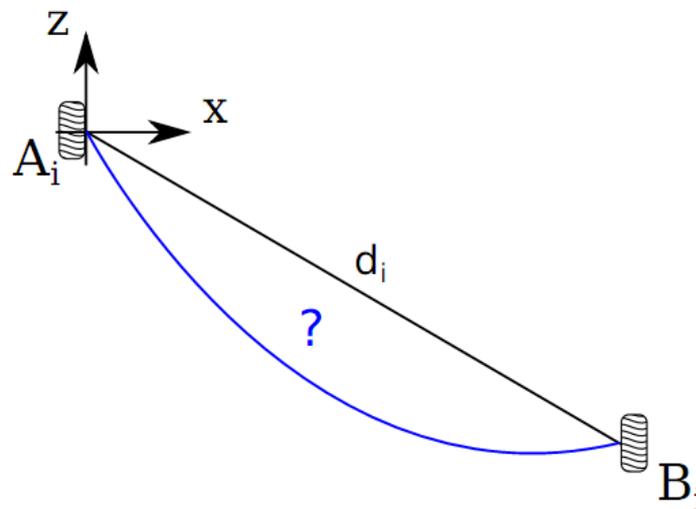


Figure III.1: Comment modéliser un câble dans le plan vertical contenant A_i et B_i
[Sandretto2013]

III.2.A.1. Câble indéformable de masse nulle :

Le câble indéformable de masse nulle est un corps rigide qui n'existe pas. Toutefois, cette hypothèse forte permet une modélisation simplifiée des robots à câbles et l'erreur commise par l'utilisation de ce modèle est souvent considérée comme négligeable dans la littérature.

Ce modèle conduit à considérer le câble comme un segment droit de longueur l_i , c'est à dire la longueur déployée, reliant les points de sortie A_i et d'attaches B_i . On écrit donc :

$$l_i = L_i = d_i \dots \dots \dots (III.1)$$

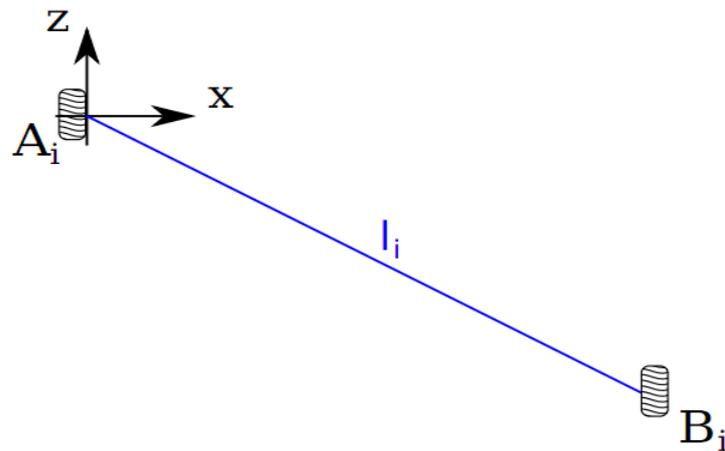


Figure III.2: Un câble indéformable de masse nulle [Sandretto2013]

III.2.A.2. Câble élastique de masse nulle

Tous les câbles sont plus ou moins élastiques, et peuvent donc s'étirer en fonction de la tension. Il est possible de prendre en compte cette élasticité tout en considérant le câble comme un segment droit, c'est à dire de masse considérée comme négligeable.

Cependant, prendre en compte l'élasticité rend les longueurs des câbles fonction de la tension dans chaque câble.

Ainsi la tension dans un câble de longueur sous effort L_i est donnée par la relation :

$$T_i = k (L_i - l_i) \dots\dots\dots(III.2)$$

Où k définit la caractéristique physique du câble (la raideur linéique).

Ce modèle conduit à considérer le câble comme un segment droit de longueur $L_i = d_i$, fonction de la pose du robot et de la statique (**Figure.3**).

Ce modèle est utile dans une configuration pleinement contrainte où les tensions peuvent être importantes et également lorsqu'une grande longueur de câble est soumise à effort.

Cependant, pour de grandes longueurs de câbles dont la masse n'est pas négligeable, ou lorsque tous les câbles ne sont pas soumis à une tension importante, ce modèle n'est pas suffisamment réaliste.

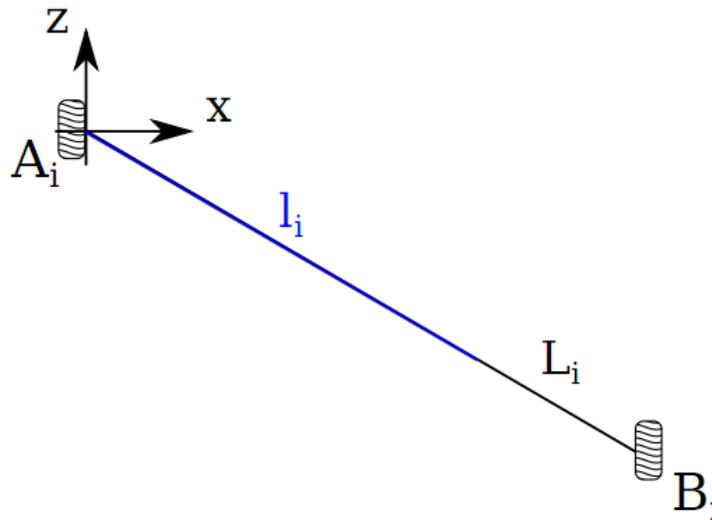


Figure III.3: Un câble élastique de masse nulle [Sandretto2013]

III.2.A.3. Câble élastique de masse non nulle

Un modèle de câble connu et un des plus réalistes est issu des travaux d'Irvine dans le génie civil [Irvine 1974]. Il est utilisé dans la modélisation des structures à câbles (pour les ponts à haubans principalement), et très rarement pour les robots parallèles à câbles (voir par exemple [Kozak 2006] sur la statique du robot Fast).

Dans le modèle de Irvine, le câble peut donc pendre et s'étirer, et les quantités : l_i , L_i et d_i sont trois grandeurs différentes (**Figure.4**).

On représente souvent le câble réaliste comme mou pour symboliser le fait que sa masse est considérée, mais si le câble subit une tension suffisante, son profil est très proche d'une droite avec toutefois $L_i \neq l_i$ (**Figure.3**).

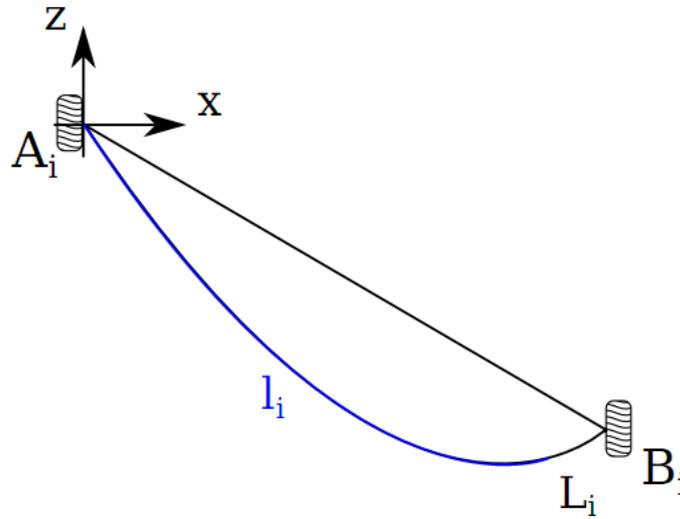


Figure III.4: Un câble élastique de masse non nulle [Sandretto2013]

Pour un câble, les équations sont exprimées dans le plan défini par A_i, B_i et la gravité, en considérant les paramètres géométriques et statiques de la configuration et les caractéristiques du câble :

- Les points d'attache A_i (sur le bâti) et B_i (sur la plate-forme)
- Câble : la masse linéique m , la raideur linéique k (aussi appelée constante de rappel) et la longueur sans effort l_i (déroulée à vide).
- Les tensions appliquées : $T_a = (T_a^x T_a^z)$ en A_i et $T_b = (T_b^x T_b^z)$ en B_i

Irvine propose un système de 3 équations qui relie la longueur de câble déroulée l_i , la distribution des tensions en B_i , la position du point B_i et la norme de la tension $\|T_a\|$:

$$(III.3) \dots \dots \dots \begin{cases} \varphi_i^x = \frac{T_b^x l_i}{k} + \frac{|T_b^x|}{mg} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{T_b^z}{T_b^x} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{T_b^x - mgl_i}{T_b^x} \right) \right] \\ \varphi_i^z = \frac{mgl_i^2}{k} \left(\frac{T_b^z}{mgl_i} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{mg} \left[\sqrt{T_b^{x2} + T_b^{z2}} - \sqrt{T_b^{x2} + (T_b^x - mgl_i)^2} \right] \\ \|T_a\| = \sqrt{T_b^{x2} + (T_b^x - mgl_i)^2} \end{cases}$$

Les équations de ce modèle le rendent évidemment difficile à manipuler.

III.2.B. Simplification du modèle de câble

L'hypothèse du câble sans masse ni élasticité est couramment faite sur le comportement physique des câbles des robots. Cette hypothèse malgré sa grande utilité peut entraîner -dans certaines applications- une erreur non négligeable sur la modélisation du robot.

Cette hypothèse n'a pourtant que rarement été vérifiée, même si on peut citer [Bouchard 2008].

Cette section présente une méthode pour vérifier cette hypothèse pour un robot et une utilisation donnés. L'approche intervalle et les outils utilisés permettent en plus de définir un nouveau modèle de câble et un nouvel espace de travail du robot.

III.2.B.1. Principe de vérification de l'hypothèse

La problématique est de vérifier l'hypothèse proposée sur les câbles pour un robot et une tâche donnés. Un robot est défini entre autre par son espace de travail, et une tâche par les forces qu'elle nécessite et donc par les tensions dans les câbles.

Ainsi vérifier cette hypothèse revient à la vérifier dans tout l'espace de travail du robot et pour toute une plage de tensions dans les câbles. Si l'hypothèse est vérifiée de cette manière, alors la simplification du modèle du câble -et donc du robot- sera valide quelle que soit sa pose.

III.2.B.2. Méthode de vérification

Nous posons $\delta_i = |l_i - d_i|$, l'erreur entre la longueur déroulée l_i nécessaire d'après le modèle réaliste (III.1.1.3) pour atteindre le point B_i et d_i la distance entre A_i et B_i , c'est à dire le modèle simplifié (III.2.A.1)

La méthode consiste à vérifier que cette erreur δ_i reste en dessous d'un seuil acceptable ε . Ce seuil peut être défini par rapport à des grandeurs diverses : la précision des enrouleurs, la précision finale attendue, aussi la sensibilité de mesure des capteurs.

En ce qui nous concerne, la précision d'enroulement est la grandeur choisie comme seuil. En effet, si par exemple un système d'enroulement a une tolérance de 5 cm sur la longueur de câble effectivement déroulée, chercher un modèle de câble précis au millimètre près n'a pas de sens. Le seuil ε est donc choisi en fonction de la précision d'enroulement, et l'hypothèse du câble sans masse et sans élasticité est considérée comme acceptable pour le câble i si $\delta_i \leq \varepsilon$.

Les positions des m points B_i de la plate-forme sont fonction de la position du robot $X = (x, y, z)$.

Deux cas peuvent être distingués pour l'étude d'une position $X \in W_X$ l'espace de travail:

- Pour $\delta_i \leq \varepsilon$: l'hypothèse est vérifiée.
- Il existe un ou plusieurs points tels que $\delta_i > \varepsilon$, alors l'hypothèse est refusée.

La vérification de ces deux cas peut donner lieu à un algorithme qui est encore un sujet de recherche.

Une autre méthode peut être plus pratique mais plus rassurante et ne fait pas intervenir l'étude de la statique. Dans cette méthode Nous considérons que l'hypothèse est vérifiée pour une pose $X \in W_X$. Nous définissons le sous ensemble des poses acceptables comme :

$$S_X = \{ X \in W_X : \sigma_i \leq \varepsilon, \forall i = 1 \dots m \} \dots\dots\dots(III.4)$$

La vérification proposée consiste à valider l'hypothèse pour toutes les poses de l'espace de travail du robot.

Une condition suffisante est basée sur la vérification de l'espace dual de S_X , noté $S_{!X}$ et défini comme suit :

$$S_{!X} = \{ X \in W_X : \sigma_i > \varepsilon, \exists i = 1 \dots m \} \dots\dots\dots(III.5)$$

Ainsi, la vérification de $S_{!X} = \emptyset$; implique par construction que l'hypothèse est acceptable dans tout l'espace de travail du robot W_X . [Sandretto2013]

III.2.C. Modélisation géométrique

On établira dans ce qui suit le modèle géométrique inverse et direct du robot parallèle à quatre câbles la (Figure.5) nous montre l'organe terminal dans la position (x,y,z) et les différentes longueurs des câbles (L_i) .

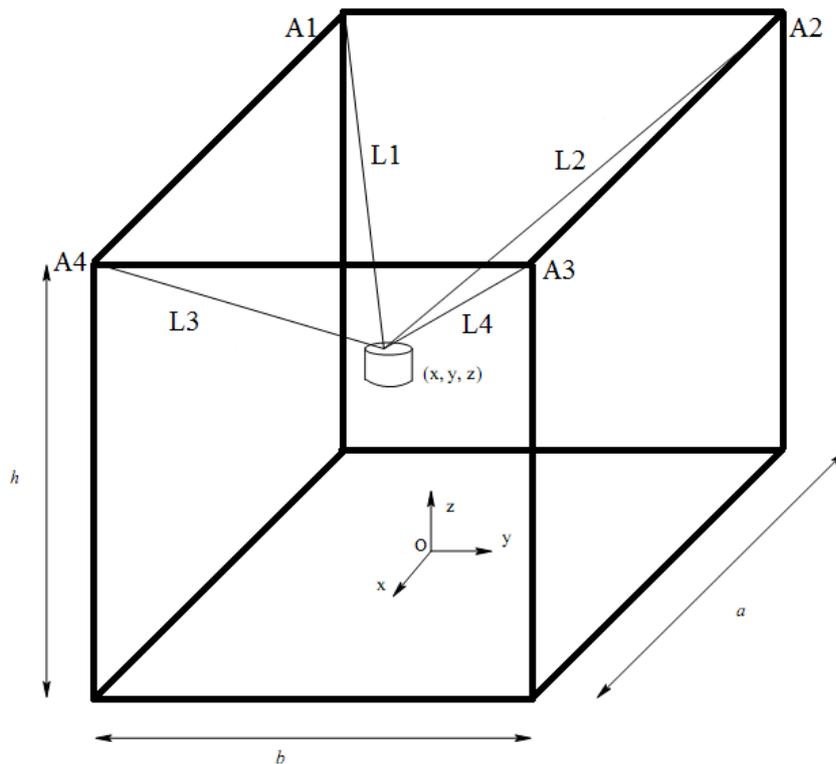


Figure III.5: modèle géométrique du robot spatial à quatre câbles [Sandretto2013].

Notre modèle est composé d'un bâti rigide qui portera quatre poulies placé sur les points (A_1, A_2, A_3, A_4) ; ces poulies sont liées par des câbles à la plate-forme mobile.

Notre système est à 3 ddl (Trois translation). La plate-forme est considérée ponctuelle (de dimensions négligeables) et donc ne fait pas des mouvements de rotation; on peut l'appeler « effecteur ». On prendra le point centre de la base de bâti comme origine de notre repère absolue.

III.2.C.1. Modèle Géométrique Inverse

On cherche à trouver les longueurs des câbles (L_i) en fonction des coordonnées des effecteurs (x, y, z) , et des coordonnées des points d'attaches des câbles aux poulies (x_i, y_i, z_i) exprimés par les équations suivantes:

$$L_i = \sqrt{(L_{ix})^2 + (L_{iy})^2 + (L_{iz})^2} \quad ; \quad i=1 \dots 4 \quad \dots \dots \dots (III.6)$$

Avec:

$$\begin{cases} L_{ix} = x - x_i \\ L_{iy} = y - y_i \\ L_{iz} = z - z_i \end{cases} \quad i=1 \dots 4 \quad \dots \dots \dots (III.7)$$

En remplaçant dans l'équation (III.6) on trouve :

$$L_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \quad ; \quad i=1 \dots 4 \quad \dots \dots \dots (III.8)$$

Ce qui représente le modèle géométrique inverse [Usher 2012].

III.2.C.2. Modèle Géométrique Direct (MGD)

Le MGD exprime la position de l'effecteur $p(x,y,z)$ en fonction des longueurs des câbles L_i . Pour les manipulateurs parallèles, le modèle géométrique directe est difficile à résoudre à cause de sa structure fermée. La relation entre la position $X=(x, y, z)$ et les coordonnées généralisées est non linéaire.

Le système d'équations (III.8) est formé de 4 équations et comme on a 3 inconnues on n'a besoin que de 3 équations qui nous permettent d'avoir le MGD suivant :

$$\begin{cases} x = (L_2^2 - L_3^2 + (x_3 + x_2)^2)/2(x_3 - x_2) \\ y = (L_1^2 - L_2^2 + (x_2 - x_1)x)/2(y_2 - y_1) \quad \dots \dots \dots (III.9) \\ z = z_1 - \sqrt{L_1^2 - (x - x_1)^2 - (y - y_1)^2} \end{cases}$$

Car on a un système à redondance d'ordre un donc le MGD est indépendant de L_4 .

Ce modèle peut être simplifié on considérant les coordonnées des points de sortie des câbles sur les poulies :

$$\begin{cases} A_2 \left(\frac{-a}{2}, \frac{b}{2}, h \right) \\ A_2 \left(\frac{-a}{2}, \frac{b}{2}, h \right) \\ A_3 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, h \right) \\ A_4 \left(\frac{a}{2}, \frac{-b}{2}, h \right) \end{cases} \dots \dots \dots (III.10)$$

Alors le modèle géométrique direct peut être exprimé en fonction des dimensions de support de manipulateur par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = \frac{L_2^2 - L_3^2}{2a} \\ y = \frac{L_1^2 - L_2^2}{2b} \\ z = h - \sqrt{L_1^2 - \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(y + \frac{b}{2}\right)^2} \end{cases} \dots \dots \dots (III.11)$$

A noter que l'équation pour z est laissé en fonction de x et de y ; cette équation doit assurer que : $z \leq h$.

III.3.Modèle cinématique

Dans cette partie nous présentons la modélisation cinématique inverse et directe du robot spatial à 4 câbles.

Il s'agit de calculer la vitesse de l'effecteur à partir de MGD, et les vitesses des câbles à partir de la vitesse de l'effecteur. Il s'agit donc du modèle dérivé du modèle géométrique [Lafourcade 2004].

III.3.A. Modèle Cinématique Direct

Pour obtenir le modèle cinématique direct on dérive le MGD par rapport au temps :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{L_2 \dot{L}_2 - L_3 \dot{L}_3}{a} \\ \dot{y} = \frac{L_1 \dot{L}_1 - L_2 \dot{L}_2}{b} \\ \dot{z} = \frac{L_1 \dot{L}_1 - \dot{x} \left(x + \frac{a}{2}\right) - \dot{y} \left(y + \frac{b}{2}\right)}{z - h} \end{cases} \dots \dots \dots (III.12)$$

III.3.B. Modèle Cinématique Inverse

Il s'agit de calculer la dérivée temporelle de la longueur des câbles ce qui est obtenu directement à partir de la vitesse de l'effecteur.

Nous nous intéressons à la vitesse des câbles en fonction de la vitesse de l'effecteur. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir le MCI [Hubert 2010].

Un moyen d'obtenir les modèle cinématique inverse consiste à dériver les équations du MGI dont nous avons vu qu'il s'obtient sous la forme : $L = f(X)$

Nous pouvons aussi l'extraire on différenciant le MCD ce qui conduit aux expressions suivantes pour les vitesses des câbles :

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \frac{1}{L_1} \left[\dot{x} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{y} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{z}(z - h) \right] \\ \dot{L}_2 &= \frac{1}{L_2} \left[\dot{x} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{y} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \dot{z}(z - h) \right] \\ \dot{L}_3 &= \frac{1}{L_3} \left[\dot{x} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \dot{y} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \dot{z}(z - h) \right] \\ \dot{L}_4 &= \frac{1}{L_4} \left[\dot{x} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \dot{y} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{z}(z - h) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(III.13)$$

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \\ \dot{L}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \left(x + \frac{a}{2} \right) & \frac{1}{L_1} \left(y + \frac{b}{2} \right) & \frac{1}{L_1} (z - h) \\ \frac{1}{L_2} \left(x + \frac{a}{2} \right) & \frac{1}{L_2} \left(y - \frac{b}{2} \right) & \frac{1}{L_2} (z - h) \\ \frac{1}{L_3} \left(x - \frac{a}{2} \right) & \frac{1}{L_3} \left(y - \frac{b}{2} \right) & \frac{1}{L_3} (z - h) \\ \frac{1}{L_4} \left(x - \frac{a}{2} \right) & \frac{1}{L_4} \left(y + \frac{b}{2} \right) & \frac{1}{L_4} (z - h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(III.14)$$

$$\dot{L} = J\dot{X} \dots\dots\dots(III.15)$$

Le terme J est appelé matrice Jacobienne de la cinématique inverse [Hubert 2010].

Si le rang de J ne vaut pas 4, alors il existe une infinité de solutions du système matriciel ; cela témoigne de vitesses incontrôlées dans le mécanisme. Pour que le mécanisme fonctionne correctement, il faut qu'à chaque instant toutes les vitesses soient parfaitement déterminées (unicité de la solution), c'est-à-dire que le système soit de Cramer ($Det(J) \neq 0$). La recherche des conditions de fonctionnement du mécanisme passe donc par l'analyse du déterminant de la matrice J [Kurt 2003].

III.4. Modèle statique

Un effecteur mobile est connecté à une base fixe par 4 câbles. Le i ème câble ($i = 1 \dots 4$) sort de la base au point A_i et il est relié à l'effecteur. L'effecteur est sollicité par une force constante de grandeur Q appliquée au point ' p ', le poids de l'effecteur agit à partir de son centre de masse. Cette force est décrite comme un effort $Q\mathcal{L}_e$, Où \mathcal{L}_e est le vecteur de Plücker normalisée de sa ligne d'action. [Alessandro et al 2013]

Oxyz est un repère des coordonnées cartésiennes fixé à la base en O, les coordonnées sont choisis de telle façon que $O \equiv A_1$, l'axe z est dirigé suivant \mathcal{L}_e , Le point A_1 se trouve dans le plan xz. Par ce choix, les vecteurs de position des points de $A_1; A_2; A_3; A_4$ et p dans le repère Oxyz peut-être respectivement exprimé par :

- $A_1 = (0, 0, 0); A_2 = (a, 0, 0)$
- $A_3 = (0, b, 0); A_4 = (a, b, 0) ; p = (x, y, z) \dots \dots \dots (III.16)$

III.4.A. Les équations statiques fondamentales

Soit L_i la longueur du i ème câble (pris comme étant strictement positif), et tous les câbles sont actifs (c.-à-d. en tension).

Comme l'effecteur est à 3 ddl, sa pose est finalement déterminée par un équilibre mécanique. Le vecteur Plücker normalisée de la ligne associée au i ème câble est \mathcal{L}_i/L_i . (Les coordonnées de Plücker sont une représentation des droites de l'espace affine 3D)

Où $\mathcal{L}_i = [(x_i - x); h_i \times (x_i - x)]$ tel que h_i est le vecteur quelconque d'une point de référence arbitrairement choisi H (appelé, pôle de moment) à la ligne de câble.

Dans notre étude l'effecteur et ponctuel donc les moments sont nul donc la forme de vecteur de Plücker devient $\mathcal{L}_i = [(x_i - x)]$;

Par conséquent, l'effort exercé par le i ème câble sur l'effecteur est $(T_i/L_i)\mathcal{L}_i$, Avec T_i étant un scalaire positif représente l'intensité de la force de traction (la tension) dans le câble (figure.6). L'équilibre statique peut alors être exprimée par :

$$\underbrace{[\mathcal{L}_1 \ \mathcal{L}_2 \ \mathcal{L}_3 \ \mathcal{L}_4 \ \mathcal{L}_e]}_{\boxed{M(p)}} \begin{bmatrix} T_1/L_1 \\ T_2/L_2 \\ T_3/L_3 \\ T_4/L_4 \\ Q \end{bmatrix} = 0 \dots \dots \dots (III.17)$$

Avec $T_i \geq 0 ; i = 1 \dots 4$

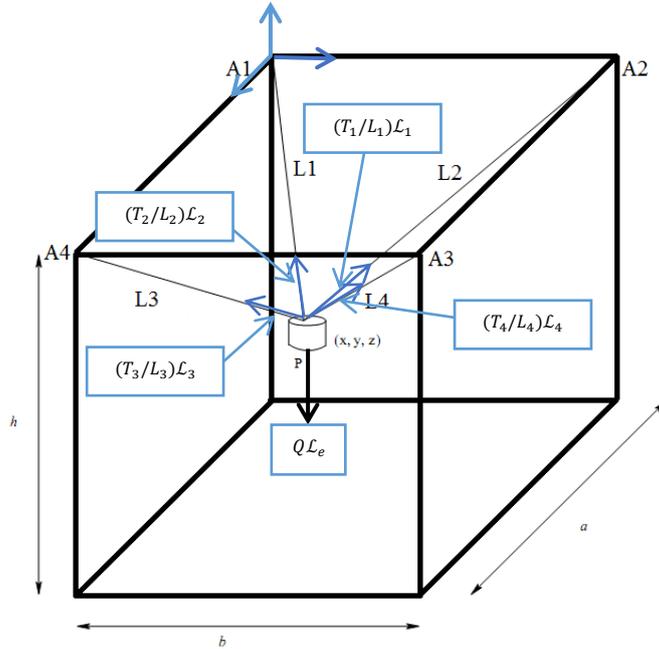


Figure III.6: Modèle statique du robot à 4cable et 3ddl

Quand le problème statique direct est résolu, les longueurs des câbles seront attribuées. Par conséquent, les équations : (III.8) obtenues dans le modèle géométrique et (III.17) forment un système dont les inconnues sont les variables de la pose de l'effecteur, et les tensions des câbles.

En choisissant 'O' comme pôle de moment, la matrice M(P) dans l'équation (III.17) peut être explicitement écrite comme :

$$M(O) = \begin{bmatrix} x & x - a & x & x - a & 0 \\ y & y & y - b & y - b & 0 \\ z & z & z & z & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(III.18)$$

Et les équations statiques peuvent être exprimées :

$$\begin{cases} x \frac{T_1}{L_1} + (x - a) \frac{T_2}{L_2} + x \frac{T_3}{L_3} + (x - a) \frac{T_4}{L_4} = 0 \\ y \frac{T_1}{L_1} + y \frac{T_2}{L_2} + (y - b) \frac{T_3}{L_3} + (y - a) \frac{T_4}{L_4} = 0 \\ z \left(\frac{T_1}{L_1} + \frac{T_2}{L_2} + \frac{T_3}{L_3} + \frac{T_4}{L_4} \right) - Q = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(III.19)$$

III.5. Modèle dynamique

La dynamique des mécanismes parallèles à câbles a été un sujet d'intérêt depuis l'introduction des premiers modèles. En effet, les mécanismes parallèles à câbles ont le potentiel de produire des mouvements très rapides et le contrôle de ces mouvements nécessite une bonne compréhension de la dynamique du système mécanique. Dans les systèmes à câbles totalement contraints, le modèle dynamique est très pertinent.

Par opposition aux mécanismes parallèles à câbles totalement contraintes, les mécanismes suspendus (incomplètement contraint) utilisent une force externe généralement la gravité pour maintenir leurs câbles en tension. Ils n'agissent pas de manière redondante, c'est à dire, ils ont au plus le même nombre d'actionneurs que de degrés de liberté. Les robots parallèles à câble à suspension ont été proposés dans la littérature comme des solutions potentielles pour des applications qui nécessitent un très grand espace de travail ou des mécanismes qui peuvent fournir des rapports importantes de charge utile par masse. [Gosselin 2013]

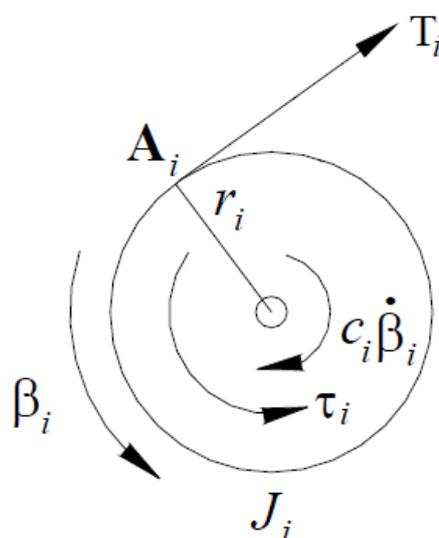


Figure III.7: Diagramme du corps libre de la $i^{\text{ème}}$ poulie [Korayem 2010].

- A_i : Point de sortie (câble –poulie) ; J_i : Moment d'inertie de poulie
- β_i : angle de rotation de poulie ; $\dot{\beta}_i$: vitesse de rotation de poulie
- r_i : Rayon de poulie ; C_i : coefficient de frottement
- τ_i : Le couple moteur agissant sur la poulie ; T_i : force de tension du câble.

Le manipulateur sujet de notre étude est à 4 câbles et 3ddl, donc on peut le considérer comme un mécanisme totalement contraint mais dans l'architecture qu'on a adoptée la gravité joue un rôle majeur dans l'étude dynamique de notre manipulateur.

Pour commencer notre étude on doit d'abord exprimer les différentes forces qui engendrent le mouvement. Notre système comporte quatre moteurs et 4 poulies reliées à l'effecteur par l'intermédiaire de 4 câbles. La figure.7 montre les différentes forces et moments qui s'appliquent sur la $i^{\text{ème}}$ poulie.

III.5.A. Équations du Mouvement

Étant donné que la masse des câbles est négligée, le modèle dynamique du robot peut être obtenue par la méthode de Lagrange, nous devons au préalable calculer les énergies cinétique

(\mathbb{T}), potentielle (\mathbb{U}) et de dissipation (\mathbb{D}) du système. L'équation (III.20) représente l'équation de Lagrange en coordonnées généralisées q .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \dot{q}} = F_d \dots\dots\dots(III.20)$$

Où \mathbb{L} est le lagrangien du système défini par la différence entre l'énergie cinétique et potentielle ($\mathbb{T} - \mathbb{U}$), et F_d est le vecteur des forces lié aux couples des moteurs qui est donné par des relations qu'on retrouvera par la suite.

III.5.A.1. Calcul des vitesses et accélérations angulaires des poulies

Pour calculer les énergies cinétiques et de dissipations du système on doit d'abord connaître les vitesses et accélérations angulaires des poulies. L'équation qui donne les angles de rotation β_i des poulies est :

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1(X) \\ \beta_2(X) \\ \beta_3(X) \\ \beta_4(X) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} L_{10} - L_1 \\ L_{20} - L_2 \\ L_{30} - L_3 \\ L_{40} - L_4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(III.21)$$

L_{40} : Longueur finale du câble ;

L_4 : Longueur initial du câble ;

En dérivant par rapport au temps l'équation (III.21) on obtient les vitesses angulaires des poulies:

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \\ \dot{L}_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \left(x + \frac{a}{2} \right) & \frac{1}{L_1} \left(y + \frac{b}{2} \right) & \frac{1}{L_1} (z - h) \\ \frac{1}{L_2} \left(x + \frac{a}{2} \right) & \frac{1}{L_2} \left(y - \frac{b}{2} \right) & \frac{1}{L_2} (z - h) \\ \frac{1}{L_3} \left(x - \frac{a}{2} \right) & \frac{1}{L_3} \left(y - \frac{b}{2} \right) & \frac{1}{L_3} (z - h) \\ \frac{1}{L_4} \left(x - \frac{a}{2} \right) & \frac{1}{L_4} \left(y + \frac{b}{2} \right) & \frac{1}{L_4} (z - h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(III.22)$$

Et en dérivant par rapport au temps l'équation (III.22) on obtient l'accélération angulaire des poulies :

$$\ddot{\beta} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \ddot{L}_1 \\ \ddot{L}_2 \\ \ddot{L}_3 \\ \ddot{L}_4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(III.23)$$

Avec

$$\ddot{L}_1 = \frac{-\dot{L}_1}{L_1^2} \left[\dot{x} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{y} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{z}(z - h) \right] + \frac{1}{L_1} \left[\ddot{x} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{x}^2 + \ddot{y} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{y}^2 + \ddot{z}(z - h) + \dot{z}^2 \right]$$

$$\ddot{L}_2 = \frac{-\dot{L}_2}{L_2^2} \left[\dot{x} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{y} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \dot{z}(z - h) \right] + \frac{1}{L_2} \left[\ddot{x} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{x}^2 + \ddot{y} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \dot{y}^2 + \ddot{z}(z - h) + \dot{z}^2 \right]$$

$$\ddot{L}_3 = \frac{-\dot{L}_3}{L_3^2} \left[\dot{x} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \dot{y} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \dot{z}(z - h) \right] + \frac{1}{L_3} \left[\ddot{x} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \dot{x}^2 + \ddot{y} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \dot{y}^2 + \ddot{z}(z - h) + \dot{z}^2 \right]$$

$$\ddot{L}_4 = \frac{-\dot{L}_4}{L_4^2} \left[\dot{x} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \dot{y} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{z}(z - h) \right] + \frac{1}{L_4} \left[\ddot{x} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \dot{x}^2 + \ddot{y} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{y}^2 + \ddot{z}(z - h) + \dot{z}^2 \right]$$

III.5.A.2. L'énergie cinétique du système

C'est la somme des énergies cinétiques de l'effecteur et des poulies qui s'exprime comme suit:

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2} m V_e^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\beta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\beta}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\beta}_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{\beta}_4^2 \dots\dots\dots(III.24)$$

Où V_e représente la vitesse linéaire de l'effecteur qui s'exprime par:

$$V_e^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \dots\dots\dots(III.25)$$

En remplaçant les $\dot{\beta}_i$ par leurs expressions on obtient :

$$\mathbb{U} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_1^2 J_1 + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_2^2 J_2 + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_3^2 J_3 + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_4^2 J_4 \dots\dots\dots(III.26)$$

III.5.A.3. L'énergie potentielle du système

Vu que l'effecteur se déplace sur les plans vertical et horizontal et que les centres de masse des poulies ne se déplacent pas, et vu aussi que les fils sont considérés de masses négligeables et inextensibles, alors l'énergie potentielle du système est celle de l'effecteur :

$$\mathbb{U} = mgz \dots\dots\dots(III.27)$$

Le lagrangien du system s'écrit alors :

$$\mathbb{L} = \mathbb{T} - \mathbb{U} \dots \dots \dots (\text{III.28})$$

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_1^2 J_1 + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_2^2 J_2 + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_3^2 J_3 + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_4^2 J_4 - mgz \dots \dots \dots (\text{III.29})$$

III.5.A.4. L'énergie de dissipation du système

L'énergie de dissipation du système et due principalement aux frottements dans les moteurs et dans les polies. Elle est définie comme suit:

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2} C_1 \dot{\beta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{\beta}_2^2 + \frac{1}{2} C_3 \dot{\beta}_3^2 + \frac{1}{2} C_4 \dot{\beta}_4^2 \dots \dots \dots (\text{III.30})$$

En remplaçant les $\dot{\beta}_i$ par leurs expressions (équation III.22) on obtient:

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2r^2} \dot{L}_1^2 C_1 + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_2^2 C_2 + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_3^2 C_3 + \frac{1}{2r^2} \dot{L}_4^2 C_4 \dots \dots \dots (\text{III.31})$$

III.5.A.5. Calcul des Lagrangiens du mouvement

Le calcul des Lagrangien se fait pour les 3 directions de mouvements donc on doit obtient les dérivés $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial q}$ et $\frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \dot{q}}$ pour $q = x, q = y$ et $q = z$;

- **Les dérivés suivant x :**

On dérive \mathbb{L} par rapport à \dot{x} on trouve:

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{L_1^2} \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] J_1 + \frac{1}{L_2^2} \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] J_2 + \frac{1}{L_3^2} \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] J_3 + \frac{1}{L_4^2} \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] J_4 \right] \dots \dots \dots (\text{III.32})$$

On dérive l'équation (III.32) par rapport au temps on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} + \frac{1}{2r^2} \left\{ \frac{1}{L_1^2} J_1 \left[\left[\frac{2L_1}{L_1} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{x} \right] \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] + \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\dot{x}^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right) \ddot{x} \right] \right] + \frac{1}{L_2^2} J_2 \left[\left[\frac{2L_2}{L_2} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{x} \right] \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] + \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\dot{x}^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right) \ddot{x} \right] \right] + \frac{1}{L_3^2} J_3 \left[\left[\frac{2L_3}{L_3} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \dot{x} \right] \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] + \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\dot{x}^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right) \ddot{x} \right] \right] + \frac{1}{L_4^2} J_4 \left[\left[\frac{2L_4}{L_4} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \dot{x} \right] \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] + \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\dot{x}^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right) \ddot{x} \right] \right] \right\} \dots \dots \dots (\text{III.33})$$

On dérive \mathbb{L} par rapport à x :

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{2r^2} \left[\frac{J_1}{L_1^2} [(2x + a)\dot{x} + 2] + \frac{J_2}{L_2^2} [(2x + a)\dot{x} + 2] + \frac{J_3}{L_3^2} [(2x - a)\dot{x} + 2] + \frac{J_4}{L_4^2} [(2x - a)\dot{x} + 2] \right] \dots\dots\dots(\text{III.34})$$

On dérive \mathbb{D} par rapport à \dot{x} :

$$\frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{L_1^2} \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] C_1 + \frac{1}{L_2^2} \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] C_2 + \frac{1}{L_3^2} \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] C_3 + \frac{1}{L_4^2} \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] C_4 \right] \dots\dots\dots(\text{III.35})$$

• **Les dérivés suivant y :**

On dérive \mathbb{L} par rapport à \dot{y} :

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{L_1^2} \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] J_1 + \frac{1}{L_2^2} \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] J_2 + \frac{1}{L_3^2} \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] J_3 + \frac{1}{L_4^2} \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] J_4 \right] \dots\dots\dots(\text{III.36})$$

En dérivant l'équation (III.36) par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} + \frac{1}{2r^2} \left\{ \frac{1}{L_1^2} J_1 \left[\left[\frac{2L_1}{L_1} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{y} \right] \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] + \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\dot{y}^2 + \left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} \right] \right] + \frac{1}{L_2^2} J_2 \left[\left[\frac{2L_2}{L_2} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \dot{y} \right] \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] + \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\dot{y}^2 + \left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} \right] \right] + \frac{1}{L_3^2} J_3 \left[\left[\frac{2L_3}{L_3} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \dot{y} \right] \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] + \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\dot{y}^2 + \left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} \right] \right] + \frac{1}{L_4^2} J_4 \left[\left[\frac{2L_4}{L_4} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{y} \right] \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] + \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\dot{y}^2 + \left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} \right] \right] \right\} \dots\dots\dots(\text{III.37})$$

On dérive \mathbb{L} par rapport à y :

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y} = \frac{\dot{y}}{2r^2} \left[\frac{J_1}{L_1^2} [(2y + b)\dot{y} + 2] + \frac{J_2}{L_2^2} [(2y - b)\dot{y} + 2] + \frac{J_3}{L_3^2} [(2y - b)\dot{y} + 2] + \frac{J_4}{L_4^2} [(2y + b)\dot{y} + 2] \right] \dots\dots\dots(\text{III.38})$$

On dérive \mathbb{D} par rapport à \dot{y} :

$$\frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{L_1^2} \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] C_1 + \frac{1}{L_2^2} \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] C_2 + \frac{1}{L_3^2} \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] C_3 + \frac{1}{L_4^2} \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] C_4 \right] \dots\dots\dots(\text{III.39})$$

• **Les dérivés suivant z :**

On dérive \mathbb{L} par rapport à \dot{z} :

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{L_1^2} (z - h) [(z - h)\dot{z} + 1] J_1 + \frac{1}{L_2^2} (z - h) [(z - h)\dot{z} + 1] J_2 + \frac{1}{L_3^2} (z - h) [(z - h)\dot{z} + 1] J_3 + \frac{1}{L_4^2} (z - h) [(z - h)\dot{z} + 1] J_4 \right] \dots\dots\dots(\text{III.40})$$

En dérivant l'équation (III.40) par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} + \frac{1}{2r^2} \left\{ \frac{1}{L_1^2} J_1 \left[\left[\frac{2L_1}{L_1} (z - h) + \dot{z} \right] [(z - h)\dot{z} + 1] + (z - h)[\dot{z}^2 + (z - h)\ddot{z}] \right] + \frac{1}{L_2^2} J_2 \left[\left[\frac{2L_2}{L_2} (z - h) + \dot{z} \right] [(z - h)\dot{z} + 1] + (z - h)[\dot{z}^2 + (z - h)\ddot{z}] \right] + \frac{1}{L_3^2} J_3 \left[\left[\frac{2L_3}{L_3} (z - h) + \dot{z} \right] [(z - h)\dot{z} + 1] + (z - h)[\dot{z}^2 + (z - h)\ddot{z}] \right] + \frac{1}{L_4^2} J_4 \left[\left[\frac{2L_4}{L_4} (z - h) + \dot{z} \right] [(z - h)\dot{z} + 1] + (z - h)[\dot{z}^2 + (z - h)\ddot{z}] \right] \right\} \dots\dots\dots(\text{III.41})$$

On dérive \mathbb{L} par rapport à z :

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial z} = \frac{\dot{z}}{2r^2} \left[\frac{J_1}{L_1^2} [2(z - h)\dot{z} + 2] + \frac{J_2}{L_2^2} [2(z - h)\dot{z} + 2] + \frac{J_3}{L_3^2} [2(z - h)\dot{z} + 2] + \frac{J_4}{L_4^2} [2(z - h)\dot{z} + 2] \right] - mg \dots\dots\dots(\text{III.42})$$

On dérive \mathbb{D} par rapport à \dot{z} :

$$\frac{\partial \mathbb{D}}{\partial \dot{z}} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{L_1^2} (z - h) [(z - h)\dot{z} + 1] C_1 + \frac{1}{L_2^2} (z - h) [(z - h)\dot{z} + 1] C_2 + \frac{1}{L_3^2} (z - h) [(z - h)\dot{z} + 1] C_3 + \frac{1}{L_4^2} (z - h) [(z - h)\dot{z} + 1] C_4 \right] \dots\dots\dots(\text{III.43})$$

• **Les forces dues aux couples moteurs :**

Ces forces sont calculées à partir de la puissance virtuelle des couples des quatre moteurs qui est donnée par: $\mathcal{P}^* = \tau_1 \dot{\beta}_1^* + \tau_2 \dot{\beta}_2^* + \tau_3 \dot{\beta}_3^* + \tau_4 \dot{\beta}_4^* \dots\dots\dots(\text{III.44})$

Tel que :

$$\dot{\beta}_1^* = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \left(x + \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_1} \left(y + \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_1} (z - h) \\ \frac{1}{L_2} \left(x + \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_2} \left(y - \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_2} (z - h) \\ \frac{1}{L_3} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_3} \left(y - \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_3} (z - h) \\ \frac{1}{L_4} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_4} \left(y + \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_4} (z - h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{pmatrix} \dots\dots\dots(III.45)$$

En remplaçant (III-44) dans (III-45) on obtient :

$$\mathcal{P}^* = -\frac{1}{r} [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4] \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \left(x + \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_1} \left(y + \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_1} (z - h) \\ \frac{1}{L_2} \left(x + \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_2} \left(y - \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_2} (z - h) \\ \frac{1}{L_3} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_3} \left(y - \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_3} (z - h) \\ \frac{1}{L_4} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_4} \left(y + \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_4} (z - h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \\ \dot{z}^* \end{pmatrix} \dots\dots\dots(III.46)$$

De l'équation (III.46) on tire les expressions des forces données suivant x, y et z :

$$F_{dx} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\tau_1}{L_1} \left(x + \frac{a}{2}\right) + \frac{\tau_2}{L_2} \left(x + \frac{a}{2}\right) + \frac{\tau_3}{L_3} \left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{\tau_4}{L_4} \left(x - \frac{a}{2}\right) \right) \dots\dots\dots(III.47)$$

$$F_{dy} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\tau_1}{L_1} \left(y + \frac{b}{2}\right) + \frac{\tau_2}{L_2} \left(y - \frac{b}{2}\right) + \frac{\tau_3}{L_3} \left(y - \frac{b}{2}\right) + \frac{\tau_4}{L_4} \left(y + \frac{b}{2}\right) \right) \dots\dots\dots(III.48)$$

$$F_{dz} = -\frac{1}{r} \left(\frac{\tau_1}{L_1} (z - h) + \frac{\tau_2}{L_2} (z - h) + \frac{\tau_3}{L_3} (z - h) + \frac{\tau_4}{L_4} (z - h) \right) \dots\dots\dots(III.49)$$

$$F_d = \frac{1}{r} S(X) \tau \dots\dots\dots(III.50)$$

Tel que :

$$S(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_2} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_3} \left(x + \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_4} \left(x + \frac{a}{2}\right) \\ \frac{1}{L_1} \left(y - \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_2} \left(y + \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_3} \left(y + \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_4} \left(y - \frac{b}{2}\right) \\ \frac{1}{L_1} (z + h) & \frac{1}{L_2} (z + h) & \frac{1}{L_3} (z + h) & \frac{1}{L_4} (z + h) \end{pmatrix} \dots\dots\dots(III.51)$$

Et
$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(III.52)$$

On peut alors écrit les équations de Lagrange (les équations de mouvement) suivant x, y, z respectivement:

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{x} + \frac{1}{2r^2} \left\{ \frac{1}{L_1^2} J_1 \left[\left[\frac{2L_1}{L_1} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{x} \right] \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] + \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\dot{x}^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right) \ddot{x} \right] \right] + \right. \\
 & \frac{1}{L_2^2} J_2 \left[\left[\frac{2L_2}{L_2} \left(x + \frac{a}{2} \right) + \dot{x} \right] \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] + \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\dot{x}^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right) \ddot{x} \right] \right] + \frac{1}{L_3^2} J_3 \left[\left[\frac{2L_3}{L_3} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \dot{x} \right] \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] + \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\dot{x}^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right) \ddot{x} \right] \right] + \frac{1}{L_4^2} J_4 \left[\left[\frac{2L_4}{L_4} \left(x - \frac{a}{2} \right) + \dot{x} \right] \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] + \right. \\
 & \left. \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\dot{x}^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right) \ddot{x} \right] \right] \left. \right\} - \frac{\dot{x}}{2r^2} \left[\frac{J_1}{L_1^2} [(2x+a)\dot{x}+2] + \frac{J_2}{L_2^2} [(2x+a)\dot{x}+2] + \frac{J_3}{L_3^2} [(2x-a)\dot{x}+2] + \frac{J_4}{L_4^2} [(2x-a)\dot{x}+2] \right] \\
 & + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{L_1^2} \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] C_1 + \frac{1}{L_2^2} \left(x + \frac{a}{2} \right) \left[\left(x + \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] C_2 + \frac{1}{L_3^2} \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] C_3 + \frac{1}{L_4^2} \left(x - \frac{a}{2} \right) \left[\left(x - \frac{a}{2} \right) \dot{x} + 1 \right] C_4 \right] = F_x \\
 & \dots\dots\dots(III.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{y} + \frac{1}{2r^2} \left\{ \frac{1}{L_1^2} J_1 \left[\left[\frac{2L_1}{L_1} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{y} \right] \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] + \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\dot{y}^2 + \left(y + \frac{b}{2} \right) \ddot{y} \right] \right] + \right. \\
 & \frac{1}{L_2^2} J_2 \left[\left[\frac{2L_2}{L_2} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \dot{y} \right] \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] + \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\dot{y}^2 + \left(y - \frac{b}{2} \right) \ddot{y} \right] \right] + \frac{1}{L_3^2} J_3 \left[\left[\frac{2L_3}{L_3} \left(y - \frac{b}{2} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \dot{y} \right] \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] + \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\dot{y}^2 + \left(y - \frac{b}{2} \right) \ddot{y} \right] \right] + \frac{1}{L_4^2} J_4 \left[\left[\frac{2L_4}{L_4} \left(y + \frac{b}{2} \right) + \dot{y} \right] \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] + \right. \\
 & \left. \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\dot{y}^2 + \left(y + \frac{b}{2} \right) \ddot{y} \right] \right] \left. \right\} - \frac{\dot{y}}{2r^2} \left[\frac{J_1}{L_1^2} [(2y+b)\dot{y}+2] + \frac{J_2}{L_2^2} [(2y-b)\dot{y}+2] + \frac{J_3}{L_3^2} [(2y-b)\dot{y}+2] + \frac{J_4}{L_4^2} [(2y+b)\dot{y}+2] \right] \\
 & + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{L_1^2} \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] C_1 + \frac{1}{L_2^2} \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] C_2 + \frac{1}{L_3^2} \left(y - \frac{b}{2} \right) \left[\left(y - \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] C_3 + \frac{1}{L_4^2} \left(y + \frac{b}{2} \right) \left[\left(y + \frac{b}{2} \right) \dot{y} + 1 \right] C_4 \right] = F_y \\
 & \dots\dots\dots(III.54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m\ddot{z} + \frac{1}{2r^2} \left\{ \frac{1}{L_1^2} J_1 \left[\left[\frac{2L_1}{L_1} (z-h) + \dot{z} \right] \left[(z-h)\dot{z} + 1 \right] + (z-h) \left[\dot{z}^2 + (z-h)\ddot{z} \right] \right] + \right. \\
 & \frac{1}{L_2^2} J_2 \left[\left[\frac{2L_2}{L_2} (z-h) + \dot{z} \right] \left[(z-h)\dot{z} + 1 \right] + (z-h) \left[\dot{z}^2 + (z-h)\ddot{z} \right] \right] + \frac{1}{L_3^2} J_3 \left[\left[\frac{2L_3}{L_3} (z-h) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \dot{z} \right] \left[(z-h)\dot{z} + 1 \right] + (z-h) \left[\dot{z}^2 + (z-h)\ddot{z} \right] \right] + \frac{1}{L_4^2} J_4 \left[\left[\frac{2L_4}{L_4} (z-h) + \dot{z} \right] \left[(z-h)\dot{z} + 1 \right] + \right. \\
 & \left. (z-h) \left[\dot{z}^2 + (z-h)\ddot{z} \right] \right] \left. \right\} - \frac{\dot{z}}{2r^2} \left[\frac{J_1}{L_1^2} [2(z-h)\dot{z}+2] + \frac{J_2}{L_2^2} [2(z-h)\dot{z}+2] + \frac{J_3}{L_3^2} [2(z-h)\dot{z}+2] + \frac{J_4}{L_4^2} [2(z-h)\dot{z}+2] \right] \\
 & + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{L_1^2} (z-h) \left[(z-h)\dot{z} + 1 \right] C_1 + \frac{1}{L_2^2} (z-h) \left[(z-h)\dot{z} + 1 \right] C_2 + \frac{1}{L_3^2} (z-h) \left[(z-h)\dot{z} + 1 \right] C_3 + \frac{1}{L_4^2} (z-h) \left[(z-h)\dot{z} + 1 \right] C_4 \right] = F_z + mg \dots\dots\dots(III.55)
 \end{aligned}$$

III.5.B. Lagrangiens de mouvement sous forme matricielle

La forme des équations de mouvements obtenues précédemment peut être difficile à utiliser dans la phase de programmation donc on les réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$M\ddot{X} + N\dot{X}^2 + H\dot{X} + K = S(X)\tau + \overline{g\vec{m}} \quad \dots\dots\dots(III.56)$$

Avec:

$$F = r \times F_d = S(X)\tau \quad \dots\dots\dots(III.57)$$

$$\ddot{X} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} ; \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} ; \quad X - X_i = \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \\ z - h \end{pmatrix} ; \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{a}{2} ; \quad x_3 = x_4 = \frac{a}{2} ; \quad y_1 = y_4 = -\frac{b}{2} ; \quad y_2 = y_3 = \frac{b}{2}$$

$$M(X) = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = m + \frac{1}{2r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{1}{L_i^2} J_i (x - x_i)^2$$

$$M_{22} = m + \frac{1}{2r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{1}{L_i^2} J_i (y - y_i)^2$$

$$M_{33} = m + \frac{1}{2r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{1}{L_i^2} J_i (z - h)^2$$

$$N(X) = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{pmatrix}$$

$$N_{11} = \frac{2}{r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{1}{L_i^2} J_i (x - x_i)$$

$$N_{22} = \frac{2}{r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{1}{L_i^2} J_i (y - y_i)$$

$$N_{33} = \frac{2}{r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{1}{L_i^2} J_i (y - h)$$

$$H(X) = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} \end{pmatrix}$$

$$H_{11} = \frac{1}{2r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{4}{L_i^2} J_i(x - x_i) + \frac{1}{L_i^2} J_i \left(\frac{2\dot{L}_i}{L_i} (x - x_i)^2 + 1 \right) + 2 \frac{C_i}{L_i^2} (x - x_i)^2$$

$$H_{22} = \frac{1}{2r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{4}{L_i^2} J_i(y - y_i) + \frac{1}{L_i^2} J_i \left(\frac{2\dot{L}_i}{L_i} (y - y_i)^2 + 1 \right) + 2 \frac{C_i}{L_i^2} (y - y_i)^2$$

$$H_{33} = \frac{1}{2r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{4}{L_i^2} J_i(z - h) + \frac{1}{L_i^2} J_i \left(\frac{2\dot{L}_i}{L_i} (z - h)^2 + 1 \right) + 2 \frac{C_i}{L_i^2} (z - h)^2$$

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{1}{L_i^2} \left(\frac{J_i \dot{L}_i}{L_i} + C_i \right) (x - x_i)$$

$$K_2 = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{1}{L_i^2} \left(\frac{J_i \dot{L}_i}{L_i} + C_i \right) (y - y_i)$$

$$K_3 = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^{i=4} \frac{1}{L_i^2} \left(\frac{J_i \dot{L}_i}{L_i} + C_i \right) (z - z_i)$$

III.6. Espaces de travail

III.6.A. Particularités des manipulateurs parallèles à câbles

Pour un manipulateur à architecture parallèle rigide, le volume de travail le plus simple à définir est l'espace atteignable par l'organe terminal. Cet espace a comme dimension le nombre de ddl, aussi à partir de 4 ddl, il n'est plus représentable dans son intégralité. Il faut alors le représenter par tranches. Si le manipulateur n'est pas redondant, cet espace est l'image de l'espace des coordonnées articulaires par l'application $X=G(q)$, ou G représente le modèle géométrique direct. Il comporte cependant des zones où la matrice Jacobienne est singulière.

Pour les manipulateurs à câbles le problème est sensiblement différent du fait qu'un câble n'est pas rigide, et ne peut pas pousser.

La première conséquence est que le manipulateur est forcément redondant. Il est tentant de dire que l'espace atteignable est l'ensemble des points X de l'espace des coordonnées cartésiennes ayant une image q dans l'espace des coordonnées articulaires admissibles (soit $0 < L_i < L_{\max}$, les longueurs des câbles sont positives et inférieures à une longueur maximale). Ce n'est cependant pas possible car cela n'assure pas que les câbles restent tendus. Et c'est là la deuxième conséquence du fait qu'un câble ne peut pas pousser, on est obligé de restreindre le volume atteignable aux poses où une tension positive dans les câbles est garantie (pour que ceux-ci restent tendus, « rectilignes »).

Dans la suite nous allons voir les différents types d'espace de travail des robots à câbles, et une méthode graphique pour la détermination de l'espace de travail « théorique » [Lafourcade 2004].

III.6.B. Espace de travail théorique

Le choix des moteurs, câbles et autres caractéristiques de dimensionnement mécanique ne rentrent pas en compte dans la phase de préconception. Il est nécessaire de trouver un volume de travail dont la définition soit simple, rapide à calculer et dépendant uniquement de l'architecture géométrique. Tout le monde s'accorde sur la caractéristique minimale de l'espace de travail : la tension dans les câbles doit être positive, quel que soit l'effort appliqué à la plate-forme mobile.

L'effort appliqué à l'effecteur est l'effort que peuvent produire par les câbles sur l'effecteur.

Cela donne la définition suivante :

L'espace de travail théorique est l'ensemble des poses (couple: position, orientation) prises par l'effecteur ou n'importe quel effort (des câbles sur l'effecteur) peut être obtenu avec une tension positive dans tous les câbles [Qiang 2010].

Le terme de théorique montre que ce n'est pas l'espace de travail réel, ce dernier sera plus petit, et dépendra du dimensionnement mécanique. Par contre, il sera démontré dans la suite que l'espace de travail ainsi défini n'est fonction que des positions de l'effecteur et des points d'attaches des câbles, c'est-à-dire de l'architecture géométrique du manipulateur.

On peut formaliser mathématiquement cette définition.

Pour un manipulateur parallèle à câbles à n ddl, l'espace théorique W_{Th} est l'ensemble des poses X de la plate-forme mobile où tous les torseurs peuvent être générés avec une tension positive dans les câbles. Soit:

$$W_{Th} = \{X \setminus \forall F \in \mathbb{R}^n, \exists \tau > 0 \text{ tq: } F = -S\tau\}$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_2} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_3} \left(x + \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_4} \left(x + \frac{a}{2}\right) \\ \frac{1}{L_1} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_2} \left(x + \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_3} \left(x + \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_4} \left(x - \frac{a}{2}\right) \\ \frac{1}{L_1} (z + h) & \frac{1}{L_2} (z + h) & \frac{1}{L_3} (z + h) & \frac{1}{L_4} (z + h) \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix}$$

Il est toujours souhaitable, notamment pour des raisons de raideur, que la tension soit supérieure à un minimum non nul. C'est pour cela que nous préférons à la définition III.2 la définition suivante :

Pour un manipulateur parallèle à câble à n ddl, l'espace théorique W_{Th} est l'ensemble des poses X de la plate-forme mobile où, quel que soit λ un réel positif, tous les torseurs peuvent être générés avec une tension dans les câbles supérieure à λ . Soit :

$$W_{Th} = \{X \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall F \in \mathbb{R}^n, \exists \tau > \lambda \text{ tq: } F = -S\tau\}$$

L'espace de travail théorique est ainsi défini de façon simple. Ne dépendant que de l'architecture cinématique, il est utilisable comme critère d'évaluation lors de la phase de préconception. Cependant ce n'est pas l'espace de travail utile dont l'on disposera vraiment. Il est nécessaire de définir un autre espace de travail plus proche de la réalité finale.

III.6.C. Espace de travail pratique

L'espace de travail défini par Verhoeven [Qiang 2010] peut être assimilé à un espace de travail réel, si l'on définit les bornes du parallélépipède de dimension 3 bornant l'effort extérieur appliqué à l'effecteur. Mais on peut souhaiter une définition intermédiaire entre cet espace de travail et l'espace de travail théorique défini ci-dessus. Une définition ne prenant en compte ni la rigidité ni les positions singulières, ni la collision des câbles.

Pour cela nous proposons la définition suivante :

L'espace de travail pratique W_{Pr} est l'ensemble des poses X de la plate-forme mobile, où, quel que soit l'effort F appartenant au parallélépipède $[F_{min}, F_{max}]$, cet effort F est réalisable avec une tension dans les câbles comprise dans le parallélépipède $[\tau_{min}, \tau_{max}]$. Soit :

$$W_{Pr} = \{X \mid \forall F \in [F_{min}, F_{max}], \exists \tau \in [\tau_{min}, \tau_{max}] \text{ tq: } F = -S\tau\}$$

L'inconvénient majeur de tout espace de travail prenant en compte une tension minimale et maximale acceptable, est qu'il ne dépend pas seulement des caractéristiques mécaniques du manipulateur (moteur et câbles compris), il dépend également de la gestion de la redondance des câbles, c'est à dire de la conduite coordonnée des tensions dans les câbles. Il n'est donc pas utilisable comme critère de préconception.

III.6.D. Le problème des collisions câble/câble et câble/effacteur

Les espaces de travail définis précédemment ne prennent pas en compte le problème de collisions entre câbles, ou entre les câbles et la plate-forme mobile.

En effet, même si il est possible de calculer la distance entre deux droites, et donc de retirer de l'espace de travail les poses où il y a croisement des câbles, il est beaucoup plus difficile de savoir si l'atteinte d'une pose à partir de la pose initiale nécessite de passer par une pose où les câbles se croisent. Enlever de telles poses des espaces de travail précédemment définis relève du casse-tête. Il existe néanmoins un algorithme dans le cas où l'orientation de la plateforme-mobile reste constante [Merlet 2004].

Le respect de quelques règles de conceptions simples permet de limiter les problèmes de collisions des câbles. Notre manipulateur n'effectue que des mouvements de translation (pas de rotation), on ajoutant l'architecture qu'on a adopté ça nous permet d'éviter ce problème car il est impossible pour les câbles de se croiser entre eux ou avec la plate-forme.

III.6.E. Caractérisations mathématiques de l'espace de travail

Caractériser du point de vue mathématique l'espace de travail a pour but de permettre le calcul prévisionnel de cet espace, notamment pour se servir de l'espace de travail comme critère de conception. Or, l'espace de travail pratique ne dépend pas uniquement de l'architecture géométrique du manipulateur, mais également du choix de l'algorithme de conduite coordonnée des tensions.

C'est pourquoi nous allons uniquement nous intéresser à la caractérisation mathématique de l'espace de travail théorique W_{Th} .

III.6.E.1. Caractérisation par le rang et le noyau de la matrice S

Pour cela partons de la définition de cet espace, la définition III.2 :

$$W_{Th} = \{X \mid \forall F \in \mathbb{R}^n, \exists \tau > 0 \text{ tq: } F = -S\tau\}$$

Et cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution $\tau > 0$ à l'équation :

$$F = -S\tau \quad (\text{III.58})$$

Le manipulateur serait non redondant, une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution (non forcément positive) serait que S soit inversible, c.-à-d. de déterminant non nul. Mais le manipulateur est redondant, la matrice S est donc une matrice $n \times m$ avec $m > n$. et la condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une solution non forcément positive de l'équation (III.58) est que la matrice S soit de rang plein, soit : $\text{rang}(S) = n$.

$$\forall F \in \mathbb{R}^n, \exists \tau \text{ tq: } F = -S\tau \Leftrightarrow \text{rang}(S) = n \quad (\text{III.59})$$

À ce moment, l'ensemble des solutions de l'équation (III.58) est un sous espace vectoriel de dimension $m - n$; la solution de norme minimale est donnée par :

$$\tau_{eff} = -S^+ \cdot F \quad (\text{III.60})$$

Où $S^+ = S^T(SS^T)^{-1}$ est l'inverse (à droite) de Moore-Penrose de S ($SS^+ = \mathbb{I}_{n \times n}$)

Quel que soit τ_{nul} un vecteur du noyau de S : $\mathcal{N}(S)$, par définition nous avons :

$$S \cdot \tau_{nul} = 0_n$$

Ce qui permet d'écrire que, quel que soit τ un vecteur de \mathbb{R}^n , quel que soit un réel λ , et quel que soit τ_{nul} un vecteur de $\mathcal{N}(S)$, alors :

$$\tau \text{ Solution de l'éq. (III. 58)} \Leftrightarrow \tau + \lambda \tau_{nul} \text{ solution de l'éq. (III. 58)} \quad \dots \quad (\text{III.61})$$

Les équivalences (III.59) et (III.61) nous permettent d'écrire que les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'une solution aux composantes toutes positives à l'équation (III.58) sont :

1. la matrice S est de rang plein, c'est-à-dire : $\text{rang}(S) = n$,
2. il existe un vecteur à composantes toutes strictement positives dans $\mathcal{N}(S)$. L'existence d'un tel vecteur permet de passer d'une solution à composantes non toutes positives vers une solution à composantes toutes positives par ajout d'un vecteur du noyau

L'équivalence (III.61) permet également d'écrire que les définitions (III.2) et (III.3) de l'espace de travail théorique sont équivalentes.

Enfin, les équivalences (III.59) et (III.61) permettent également de donner une définition plus utilisable pour la détermination de l'espace de travail théorique :

$$W_{Th} = \{X \mid \text{rang}(S) = n \text{ et } \exists \tau > 0 \text{ tq: } \tau \in \mathcal{N}(S)\}$$

Dans le cas de l'existence d'un tel vecteur τ aux composantes toutes positives dans le noyau de S , nous parlons de noyau coopératif. Ce qui permet de réécrire la définition III.5 en langage courant :

L'espace de travail théorique est l'ensemble des poses X où la matrice S est de rang plein et son noyau est coopératif.

III.6.E.2. Traduction géométrique des caractéristiques de S

Soit M une matrice $n \times m, m > n$, et POL_M le polyèdre formé par les points de l'espace affine \mathbb{R}^n ayant pour coordonnées les colonnes de la matrice M . Nous notons $\mathcal{N}(M)$ le noyau de la matrice M . On peut démontrer la relation suivante :

Si $\text{rang}(M) = n$ et $\{\exists V \in \mathcal{N}(M) \text{ tq } V > 0\} \Leftrightarrow$ L'enveloppe convexe ouverte de POL_M contient l'origine des coordonnées de l'espace affine de \mathbb{R}^n (noté $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^n}$)

Appliqué au cas des robots à câbles, cela donne le théorème :

Théorème III.1 :

Une pose X est à l'intérieur de l'espace de travail théorique W_{Th} si et seulement si l'enveloppe convexe ouverte de POL_S ($ENVCONV(POL_S)$) contient strictement l'origine des coordonnées de l'espace affine \mathbb{R}^n (noté $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^n}$).

Cela permet de caractériser de façon graphique l'espace de travail théorique :

$$W_{Th} = \{X \mid \mathbb{O}_{\mathbb{R}^n} \in ENVCONV(POL_S)\}$$

Cette dernière définition est exploitable graphiquement, ce que l'on va faire dans la suite.

III.6.F. Détermination géométrique

L'espace de travail théorique étant utilisé comme critère d'évaluation des architectures en phase de préconception du manipulateur, il faut un outil rapide de détermination de cet espace. La phase d'imagination d'une architecture se faisant sur papier, l'outil naturel de détermination de l'espace de travail devient l'outil graphique (le schéma) [Côté 2003].

C'est dans cette optique que nous avons caractérisé géométriquement l'espace de travail théorique, énoncé le théorème III.1 et la définition III.7.

III.6.F.1. Principe de la détermination géométrique

En application directe du théorème III.1, la détermination graphique de l'espace de travail théorique W_{Th} pourrait être de tracer le polyèdre POL_S pour chaque position du manipulateur et vérifier si l'origine des coordonnées est à l'intérieur de son enveloppe convexe, et donc si cette pose fait partie de W_{Th} .

Cette technique fonctionne tant que la dimension de POL_S est inférieure ou égale à 3. Au dessus, même si la méthode est valable en théorie, il n'est plus possible de dessiner. Comme notre manipulateur est à 3 ddl et l'effecteur est considéré ponctuel donc Nous nous intéresserons essentiellement à la recherche de l'espace de travail théorique en force $W_{FTh} = W_{Th}$.

Dessiner les vecteurs \vec{u}_i revient à dessiner les vecteurs colonnes de la matrice S . Le polyèdre ainsi obtenu est POL_S . Le fait que celui-ci soit de dimension n nous informe que le rang de S est plein ($rang(S) = n$). Le fait que $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^n}$ soit à l'intérieur de son enveloppe convexe nous informe de l'existence d'un vecteur tension T positif inclus dans le noyau de S . En se référant à la sous-section (III.5.5.1), il est facile de montrer que dans ce cas, toutes les forces \vec{F} peuvent être produites avec une tension positive dans les câbles.

Nous venons donc de vérifier si X appartient à l'espace de travail théorique W_{Th} . Enfin, le théorème III.2 qui suit nous permet d'affirmer qu'il est équivalent d'utiliser $-\vec{l}_i$ noté \vec{l}_i^- à la place de \vec{u}_i pour obtenir ce résultat [Lafourcade 2004].

Théorème III.2.

*Soit M une matrice $n \times m, m > n$, de rang n . Notons e_i ses vecteurs colonnes. L'enveloppe convexe ouverte de POL_M (de volume non nul car $rang(M)=n$) contient strictement $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^n}$ si et seulement si POL_M contient strictement $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^n}$ et $(M') = n$, Avec $M' = (\lambda_1 e_1 \cdots \lambda_m e_m), \forall \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\} \in \mathbb{R}^{- * m}$.*

Ainsi, on peut multiplier toutes les colonnes de la matrice S par $-\|\vec{l}_i\|$ c'est à dire remplacer dans la matrice S les vecteurs colonnes (\vec{u}_i) par les vecteurs colonnes (\vec{l}_i^-)

On note cette matrice Sl . Elle s'écrit :

$$(\vec{l}_i^- \quad \dots \quad \vec{l}_m^-) \text{ (IV.5)}$$

La matrice Sl_F se déduit:

$$Sl_F = (\vec{l}_i^- \quad \dots \quad \vec{l}_m^-) \dots \dots \dots \text{(III.63)}$$

III.6.F.2. Prévion du volume de travail à l'aide de la méthode géométrique

Pour avoir rapidement une idée précise des possibilités d'évolution de notre manipulateur, nous utilisons la méthode graphique. Ce manipulateur est à 3ddl ; l'effecteur et considéré

ponctuel nous nous intéresserons uniquement à l'espace de travail en translation pour une orientation « nulle ».

Dans ce cas si l'on prend l'organe terminal comme origine des coordonnées de l'espace affine $\mathbb{R}^n: \mathbb{O}_{\mathbb{R}^n}$, alors les points extrémités des vecteurs \vec{l}_i sont les points A_i , emplacement des guides des câbles sur le bâti.

Prenons notre manipulateur (spatial a 3 ddl, 4 câbles - figure III.8). Le cercle plein est l'organe terminal ponctuel p . Les vecteurs en noir sont les vecteurs \vec{l}_i , vecteurs colonnes de Sl . Le cercle vide correspond à une autre position de l'organe terminal Il a été choisi comme origine des coordonnées de l'espace affine $\mathbb{R}^3: \mathbb{O}_{\mathbb{R}^3}$.

On constate que $POL_{Sl} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ ne varie pas avec la position de p . Son enveloppe convexe, $ENVCONV(POL_{Sl})$ est l'espace de travail théorique W_{Th} .

Ainsi, même si sur la figure.1 l'effecteur est hors de POL_{Sl} , il est à l'intérieur de $ENVCONV(POL_{Sl})$ et donc de W_{Th} .

D'après les théorèmes énoncés, le polyèdre POL_{Sl} formé par les points extrémités des vecteurs \vec{l}_i tracés à partir de p est l'espace de travail global en force. C'est également le volume atteignable par p .

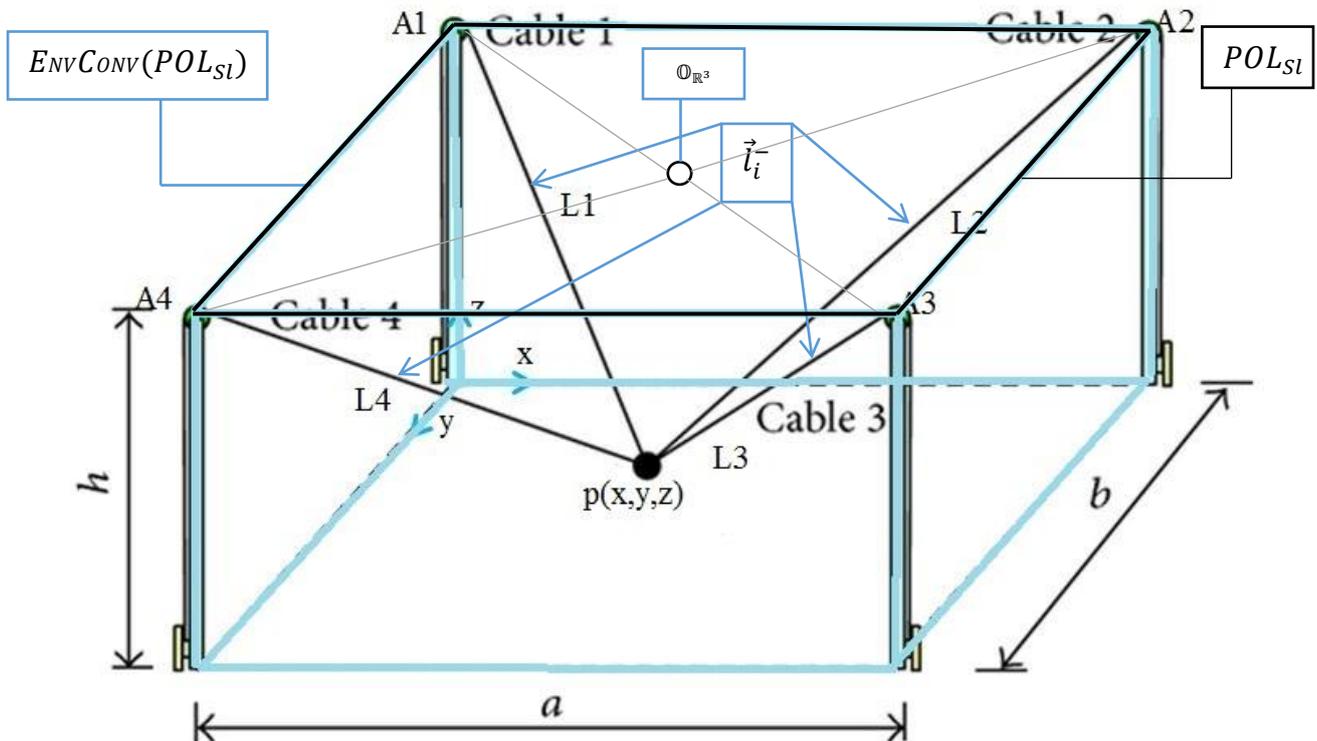


Figure III.8: Espace de travail en translation

III.7. Conclusion :

Malgré que les robots à câbles sont une catégorie des robots parallèles la modélisation d'un tel robot est totalement différente de celle d'un robot parallèle à cause de la flexibilité des liens de robot qui sont des câbles, cette propriété de la flexibilité est traduite en terme de force par une force unidirectionnelle dans les câbles.

Le deuxième paramètre qui peut compliquer l'étude est l'intervention de la masse et d'élasticité des câbles dans la modélisation, ce problème peut être résolu par des hypothèses de simplification dans certains cas d'étude.

La troisième difficulté est due au modèle étudié qui est à 4 câbles et 3 ddl donc le système présente un degré de redondance d'ordre un ce qui va nous obliger à chercher des solutions approchées pour les couples moteurs et les tensions dans les câbles (la matrice S n'est pas carrée donc S^{-1} doit être calculé par des approches analytiques).

La détermination géométrique peut être un outil très pratique pour l'évaluation de l'espace de travail dans la phase de préconception sans considérer l'étude des singularités.

Chapitre IV

CONCEPTION ET SIMULATION (SOLIDWORKS; MATLAB)

IV.1. Introduction

La visualisation de l'architecture a adoptée dans la phase de préconception du manipulateur est une tâche à une grande importance, surtout pour les robots à câbles où le modèle géométrique est un paramètre palpitant qui influe sur la planification des trajectoires et le calcul de l'espace de travail.

Les modèles développés dans le chapitre. III ont besoin de vérification et de validation avant d'être introduit dans la phase de réalisation. Pour cela On va utiliser Matlab pour la vérification des modèles en planifiant des trajectoires différentes.

IV.2. Conception avec SolidWorks

Pour la conception de notre modèle on a choisi le logiciel de CAO SolidWorks qui nous permet de montrer les différent composantes de notre manipulateur. (Bâti ; moteur ; poulies et câbles).

La difficulté que présente SolidWorks et la représentation dynamique des câbles flexibles qu'on va les représenter par des segments a dimension variable en fonction de la position de l'effecteur.

Le modèle est compose d'un bâti formé par 8 poutres cylindriques (4 horizontales et 4 verticales) sur une plate-forme carrée ,4 support qui portent les 4 moteurs, 4 poulies fixée sur le bâti, un effecteur ponctuel de forme sphérique, et 4 câbles liant les moteurs à l'effecteur par l'intermédiaire des poulies.



Figure IV.1 : Vue de profil de la poulie

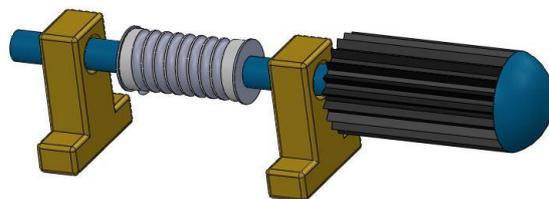


Figure IV.2: Vue de profil du moteur

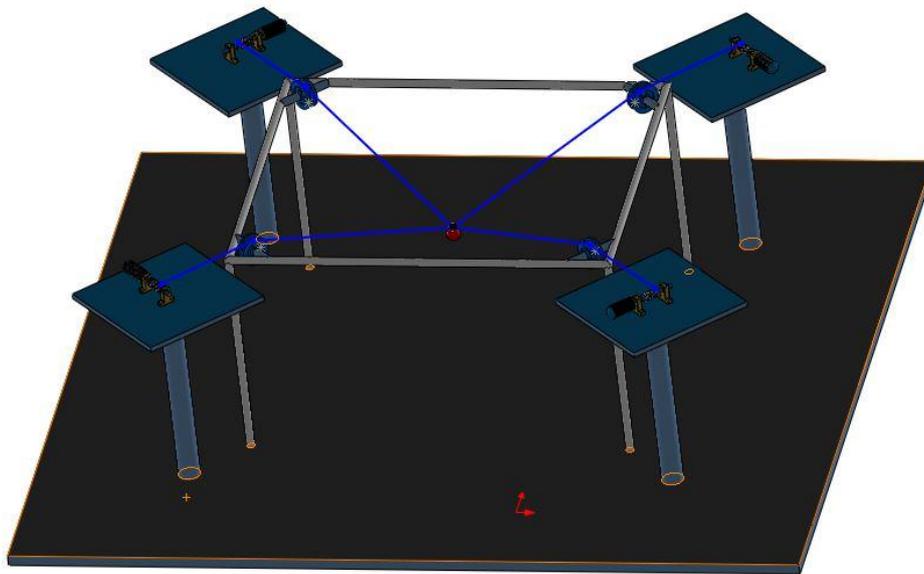


Figure IV.3: Assemblage Robot sous SolidWorks

IV.3. Simulation avec Matlab

L'interface graphique de logiciel Matlab nous donne la possibilité de vérifier les modèles géométrique, cinématique et dynamique. On présentera dans cette section trois algorithmes :

- Vérification des modèles géométriques direct et inverse pour deux positions de l'effecteur.
- Vérification des modèles : géométrique, cinématique et dynamique pour la planification de deux trajectoires choisies : rectiligne et hélicoïdale.

IV.3.A. Vérification des modèles géométriques

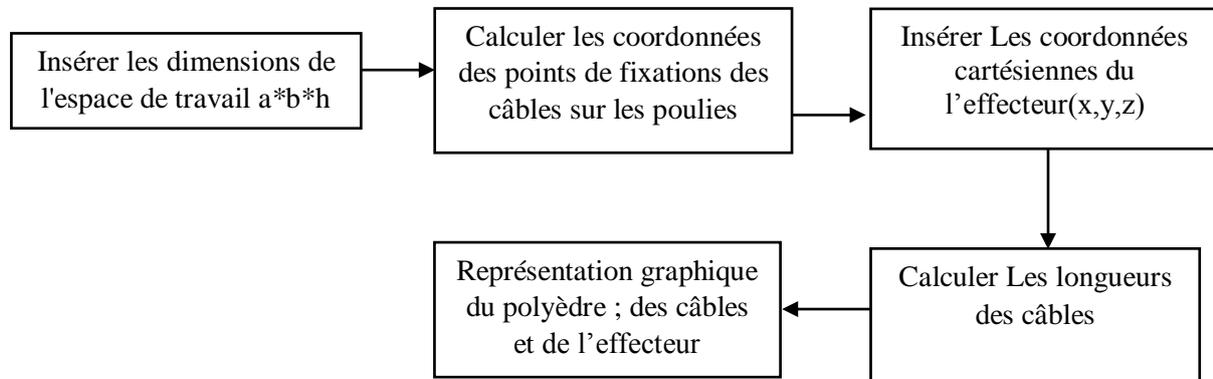
La vérification du modèles géométriques consiste à calculer les longueur des câbles pour une position donnée de l'effecteur (x,y,z) (cas de MGI); ou trouver la position de l'effecteur pour des longueurs des câbles connues (cas de MGD). Le programme nous permet de calculer et de représenter graphiquement les câbles et l'effecteur.

On choisit les dimensions de bâti suivantes pour les manipulations qui suivent :

- $a = 120 \text{ cm}$
- $b = 100 \text{ cm}$
- $h = 80 \text{ cm}$

IV.3.A.1. Modèle géométrique inverse

On peut schématiser les étapes de calcul qu'effectue notre programme dans l'organigramme ci-dessous :



Les coordonnées de l'effecteur doivent vérifier : $x \leq \frac{a}{2}$ et $y \leq \frac{b}{2}$ et $z \leq h$

En prenant comme exemple les deux points

- X1(25, 25, 25) : pour cette position les longueurs des câbles sont :

$$L1 = 125.99 \text{ cm} ; L2 = 104.28 \text{ cm} ; L3 = 69.82 \text{ cm} ; L4 = 99.37 \text{ cm}$$

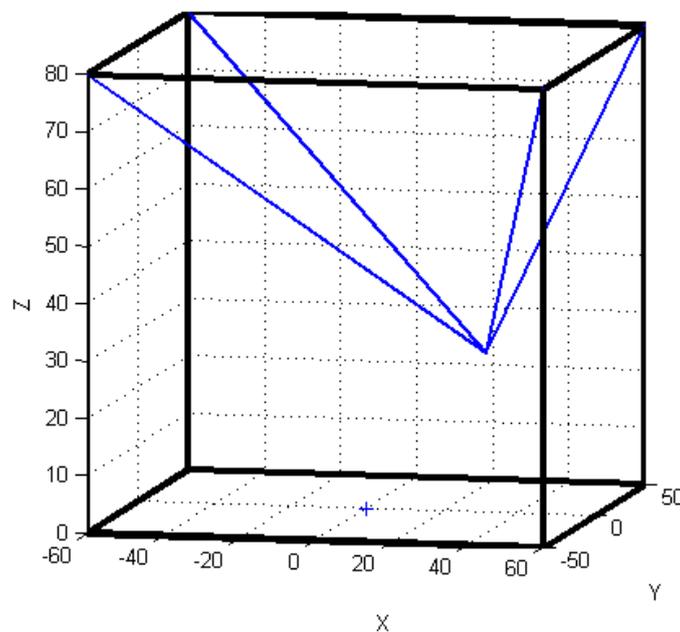


Figure IV.4: Représentation graphique du polyèdre ; des câbles et de l'effecteur pour X (25,25,25)

- X2(50, 40, 10) : pour cette position les longueurs des câbles sont :

$$L1 = 158.43 \quad ; \quad L2 = 130.76 \quad ; \quad L3 = 71.41 \quad ; \quad L4 = 114.45$$

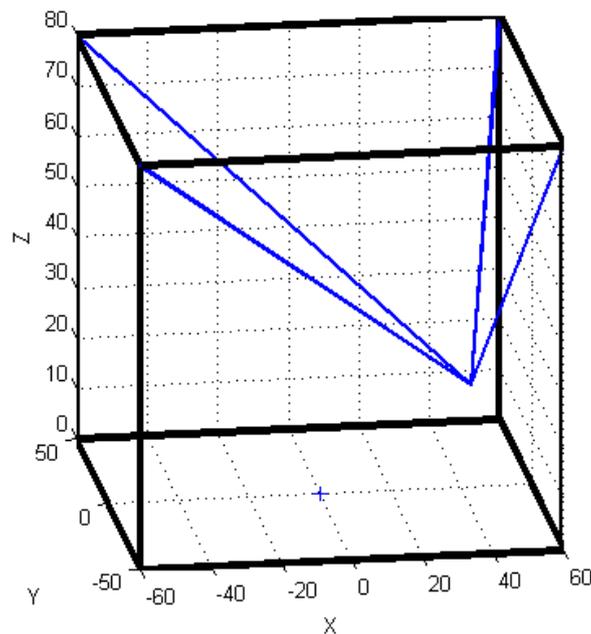
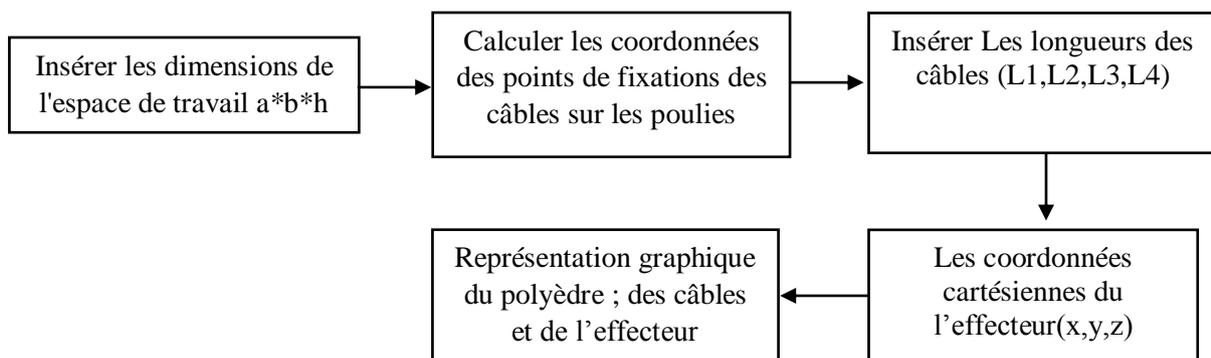


Figure IV.5: Représentation graphique du polyèdre; des câbles et de l'effecteur pour $X(50,40,10)$

IV.3.A.2. Modèle géométrique direct

On peut schématiser les étapes de calcul qu'effectue notre programme dans l'organigramme ci-dessous :



Le problème posé pour la schématisation du MGD est la redondance de système ce qui rend difficile de trouver une combinaison des longueurs des câbles pour laquelle les coordonnées de l'effecteur seront définissent. Ce qui nous permet de dire que le MGD est utile que pour la vérification de MGI mais pas pour le fonctionnement en temps réel.

On utilise les longueurs des câbles pour $X(50,40,10)$:

$$L1 = 158.43 \quad ; \quad L2 = 130.76 \quad ; \quad L3 = 71.41 \quad ; \quad L4 = 114.45$$

Les résultats seront : $x = 50$ $y = 40$ $z = 10$ avec une représentation graphique identique à celle de la figure.5

IV.3.B. Planification des trajectoires

L'objectif principal est de pouvoir effectuer la manipulation de l'effecteur, c'est-à-dire, tout simplement de les déplacer d'un point à un autre. En d'autres termes, l'objet de la planification de trajectoire est, à partir des conditions initiales au repos (x_i, y_i, z_i) , d'amener l'effecteur à une configuration finale (x_f, y_f, z_f) . Ces objectifs cartésiens peuvent alors être traduits en coordonnées articulaires à l'aide du modèle géométrique inverse (MGI).

Les objectifs secondaires sont de minimiser les vitesses au point d'arrivée, afin de permettre des atterrissages doux et de limiter les efforts nécessaires (couple et tension) pour atteindre la cible. De plus, la tension dans le câble devra toujours être positive due à l'unilatéralité des efforts transmis par ce dernier. Ces conditions peuvent être respectées en appliquant le modèle dynamique. [Lefrancois 2010]

IV.3.B.1. Trajectoire rectiligne

Pour réaliser une trajectoire rectiligne à l'aide du logiciel Matlab, on peut la représenter à partir des points de départ et d'arrivée de l'effecteur.

L'effecteur doit exécuter sa trajectoire rectiligne en t secondes.

Prenons le cas particulier où l'effecteur se déplace suivant une trajectoire rectiligne tel que :

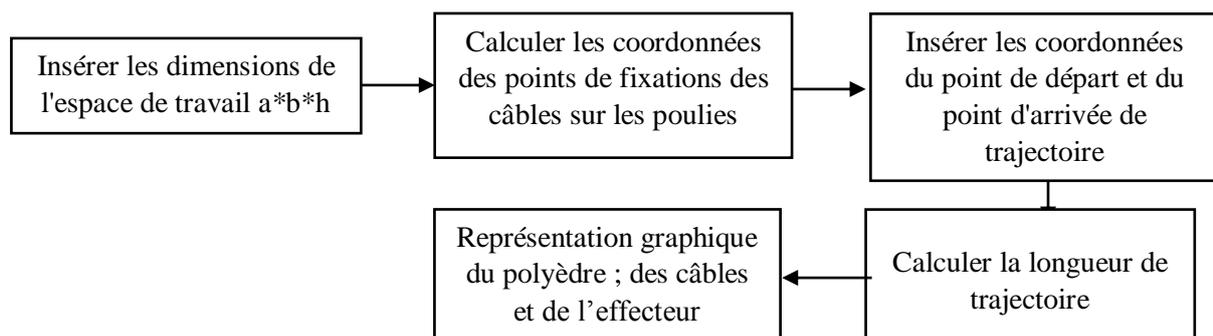
$$x(t) = y(t) = z(t) \dots \dots \dots (IV.1)$$

En démarrant de la position : $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 0$

On considère que pendant les 2.5 premières secondes, le mouvement est uniformément accéléré. Puis il s'en suit un mouvement rectiligne uniformément décéléré pour s'arrêter à :

$$x(5) = 0.5m; \quad y(5) = 0.5m; \quad z(5) = 0.5m$$

On peut schématiser les étapes de calcul et de représentation qu'effectue notre programme dans l'organigramme ci-dessous :



L'exécution de programme nous donne la longueur de la trajectoire $L = 86.60 \text{ cm}$

Et nous montre la représentation graphique suivante :

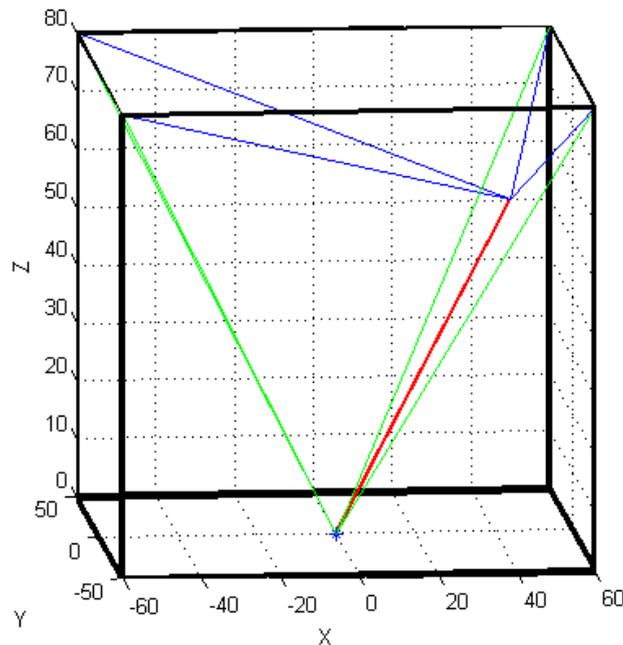
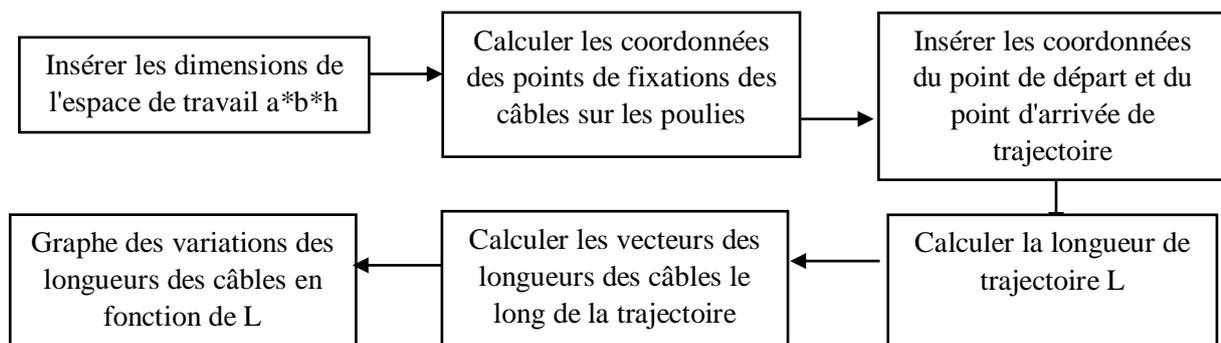


Figure IV.6: Représentation graphique du polyèdre; des câbles et de l'effecteur pour une Trajectoire rectiligne

- Les lignes noires : les segments du bâti
- Les lignes vertes : l'état des câbles au moment de départ.
- Les lignes bleues : l'état des câbles au moment d'arrivée.
- La ligne rouge : la trajectoire effectuée par l'effecteur.

IV.3.B.1.a. Longueur des câbles pour la trajectoire rectiligne

On peut schématiser les étapes pour calculer la variation des longueurs des câbles le long de la trajectoire dans l'organigramme ci-dessous :



Avec un pas choisis $p = 5\text{cm}$ on aura les longueurs des câbles suivants :

les positions	Câble 1 (L1)	Câble 2 (L2)	Câble 3 (L3)	Câble 4 (L4)
1	111.8034	111.8034	111.8034	111.8034
2	113.4681	108.9725	103.3199	108.0509
3	115.7584	106.7708	94.8683	104.8809
4	118.6381	105.2378	86.4581	102.3474
5	122.0656	104.4031	78.1025	100.4988
6	125.9960	104.2833	69.8212	99.3730
7	130.3840	104.8809	61.6441	98.9949
8	135.1851	106.1838	53.6190	99.3730
9	140.3567	108.1665	45.8258	100.4988
10	145.8595	110.7926	38.4057	102.3474
11	151.6575	114.0175	31.6228	104.8809
12	157.7181	117.7922	25.9808	108.0509
13	164.0122	122.0656	22.3607	111.8034
14	170.5139	126.7872	21.7945	116.0819
15	177.2005	131.9091	24.4949	120.8305
16	184.0516	137.3863	29.5804	125.9960
17	191.0497	143.1782	36.0555	131.5295
18	198.1792	149.2481	43.3013	137.3863

Figure IV. 7 : Tableau des longueurs des câbles

Ces résultats peuvent être représentés graphiquement par la figure IV.8:

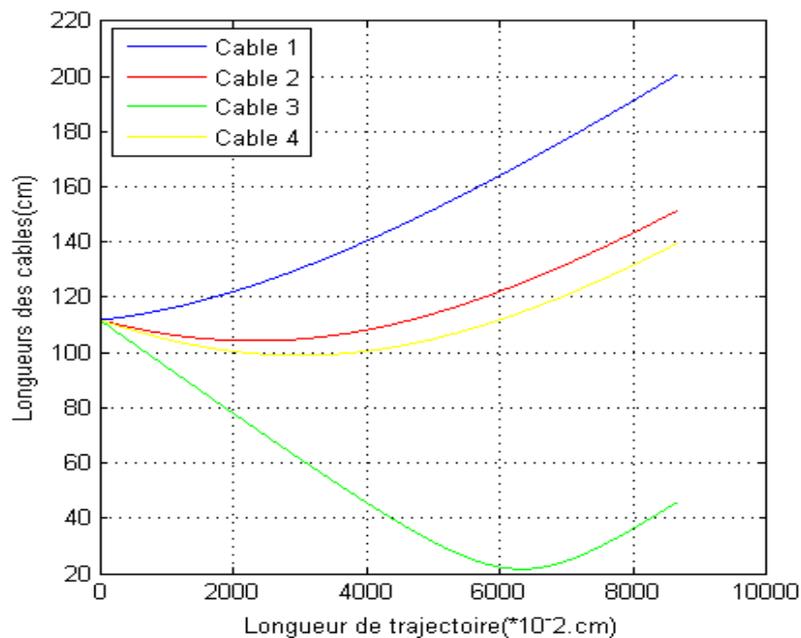


Figure IV.8: Variation des longueurs des câbles le long de la trajectoire

Les longueurs des câbles 1, 2, 3 augmentent simultanément avec la diminution de la longueur de 4ème câble pour permettre à l'effecteur d'atteindre la point d'arrive qui est proche de A4 ce qui conduit à une longueur courte du 4^{ème} câble

IV.3.B.1.b. Cinématique et dynamique de la trajectoire rectiligne

On détermine l'équation du mouvement Pour la partie accélérée $t \in [0, 2.5]$:

$$\begin{cases} x(t) = 0.04 t^2 \\ y(t) = 0.04 t^2 \dots\dots\dots (IV.2) \\ z(t) = 0.04 t^2 \end{cases}$$

On obtient par dérivation des positions $x(t)$ et $y(t)$ les vitesses et accélérations données comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0.08 t \\ \dot{y}(t) = 0.08 t \dots\dots\dots (IV.3) \\ \dot{z}(t) = 0.08 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0.08 \\ \ddot{y}(t) = 0.08 \dots\dots\dots (IV.4) \\ \ddot{z}(t) = 0.08 \end{cases}$$

Pour la partie décélérée $t \in [2.5, 5]$ on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = -0.03 t^2 + 0.2t + 0.25 \\ y(t) = -0.03 t^2 + 0.2t + 0.25 \dots\dots\dots (IV.5) \\ z(t) = -0.03 t^2 + 0.2t + 0.25 \end{cases}$$

Et on obtient par dérivation des positions $x(t)$ et $y(t)$ les vitesses et accélérations données comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0.06 t + 0.2 \\ \dot{y}(t) = -0.06 t + 0.2 \dots\dots\dots (IV.6) \\ \dot{z}(t) = -0.06 t + 0.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -0.06 \\ \ddot{y}(t) = -0.06 \dots\dots\dots (IV.7) \\ \ddot{z}(t) = -0.06 \end{cases}$$

- masse $m = 1 \text{ kg}$
- inertie poulie/rotor $J_i = 0,0008 \text{ kg.m}^2$
- coefficient de frottement $C_i = 0,01$
- rayon des poulies $r_i = 7 \text{ cm}$

IV.3.B.1.c. Calcul des couples et tensions

Reviendront aux résultats obtenues dans le chapitre (III) l'équation (III.56) peut être écrite sous la forme :

$$F = M\ddot{X} + N\dot{X}^2 + H\dot{X} + K - m\vec{g} \dots\dots\dots(IV.8)$$

Avec: $F = S(X)\tau \dots\dots\dots(IV.9)$

Après avoir trouvé à chaque instant les vecteurs forces $\{F\}$, on cherche à calculer les couples τ_i à fournir par les quatre moteurs, sachant que notre système présente une redondance d'actionnement de degré un, donc pour une position donnée de l'effecteur à l'instant (t) on a une infinité de solution possible (infinité de couples possibles).

Les couples seront trouvés après calcul du vecteur F . Nous devons calculer les couples exigés pour le contrôle en essayant en même temps de maintenir la tension des câbles positive. On utilise la notion de solution particulière et homogène pour le calcul des couples :

$$\tau = S^+ F + (I_n - S^+ S) E \dots\dots\dots (IV.10)$$

$$S^+ = S^T (S S^T)^{-1} \dots\dots\dots (IV.11)$$

Où:

I_n : est la matrice identité de dimension (4 x 4).

E : est un vecteur identité de dimension 4.

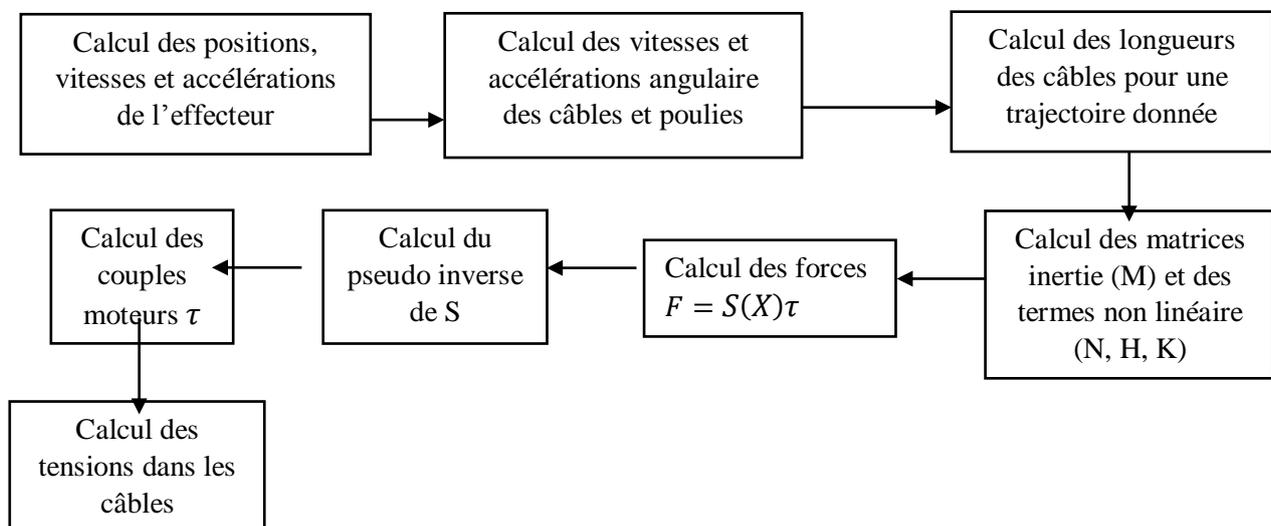
S^+ : est la pseudo- inverse de S par la méthode de Moore-Penrose de dimension (3x4).

$$S(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_2} \left(x - \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_3} \left(x + \frac{a}{2}\right) & \frac{1}{L_4} \left(x + \frac{a}{2}\right) \\ \frac{1}{L_1} \left(y - \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_2} \left(y + \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_3} \left(y + \frac{b}{2}\right) & \frac{1}{L_4} \left(y - \frac{b}{2}\right) \\ \frac{1}{L_1} (z + h) & \frac{1}{L_2} (z + h) & \frac{1}{L_3} (z + h) & \frac{1}{L_4} (z + h) \end{pmatrix}$$

La condition imposée sur le modèle dynamique, est que toutes les tensions des câbles doivent être supérieurs à (T_{min}) à chaque instant dans notre cas $T_{min} = 0$:

$$T_i = \frac{1}{r} (\tau_i - J_i \ddot{\beta}_i - C_i \dot{\beta}_i) > 0 \quad i = 1 \dots 4 \dots\dots\dots (IV.12)$$

Les étapes de calculs de notre programme réalisé sur Matlab sont schématisées ci-dessous.



L'exécution de ce programme nous donne les 2 graphes suivants :

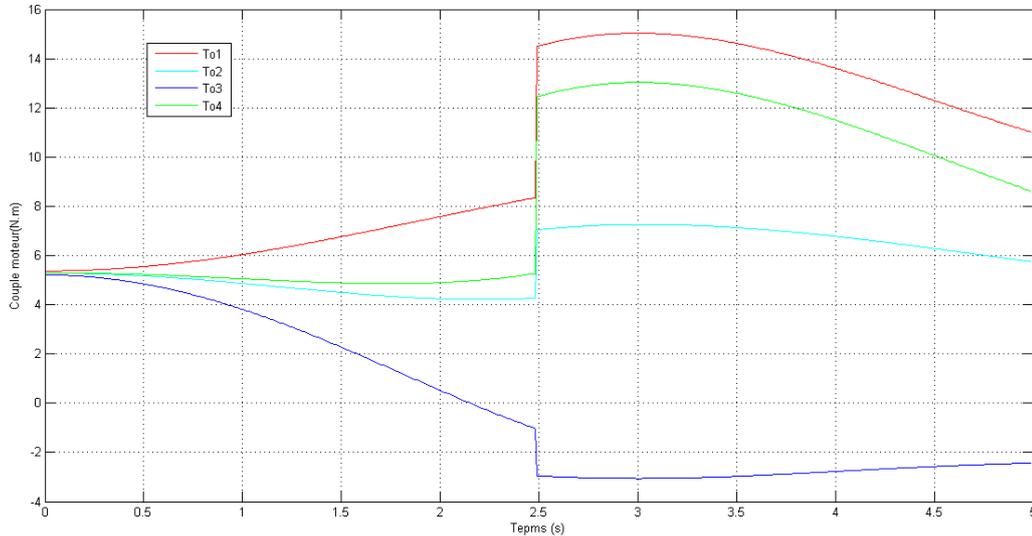


Figure IV. 9: Couples moteur nécessaires pour effectuer la trajectoire rectiligne $\tau = f(t)$

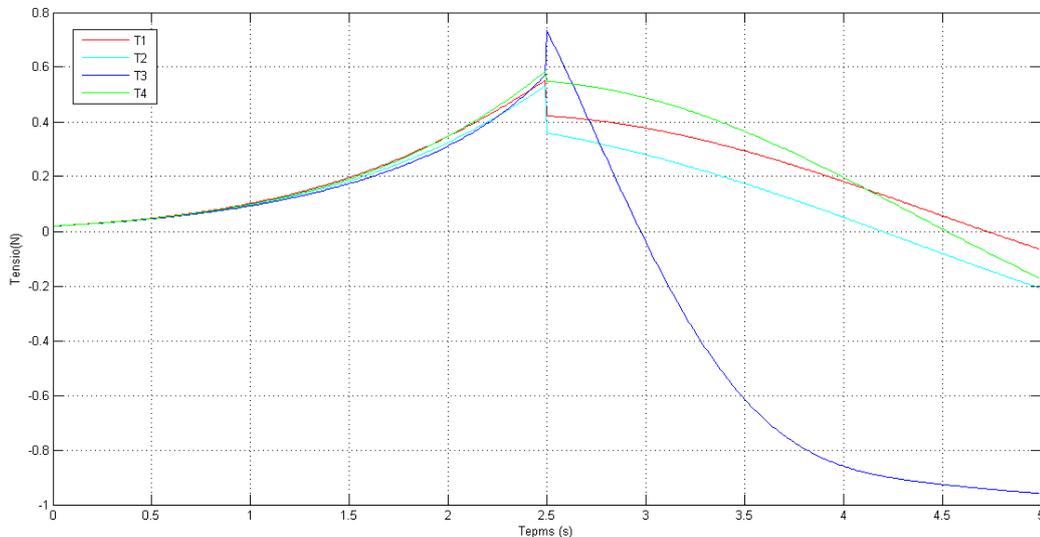


Figure VI. 10: Tension dans les câbles pour une trajectoire rectiligne $T = f(t)$

On peut voir que les graphes des tensions ne vérifient pas toujours les conditions de l'équation (VI.12) ; pour les câbles 1, 2 et 3 l'erreur est acceptable est-elle due à la méthode approximative pour le calcul du pseudo inverse de Moore-Penrose pour la matrice S, et pour le 4^{ème} câble cette tension négative est due à la redondance de robot.

Les couples moteurs sont en harmonie avec les tensions dans les câbles ce qui montre que les forces développées par les moteurs sont les paramètres principaux dans les créations des tensions des câbles.

IV.3.B.2. Trajectoire hélicoïdale cylindrique

Cette partie présente un exemple de contrôle dynamique du robot à 4 câbles avec un degré de redondance de premier ordre. Cet exemple est exécuté selon l'architecture de contrôle avec calcul en temps réel des couples minimums, afin de maintenir les câbles sous tension à chaque instant en utilisant un couple optimum.

L'hélice circulaire peut être définie comme une hélice tracée sur un cylindre de révolution, ou une orthodromie de ce cylindre (c'est-à-dire, dans les deux cas, une courbe faisant un angle constant avec l'axe du cylindre), ou une géodésique de ce cylindre (autrement dit, une courbe qui devient une droite quand on développe le cylindre) ou enfin un solénoïde d'âme rectiligne.

Caractérisation intrinsèque : courbure et torsion constantes.

Le rayon de l'hélice est R , et son pas est $\rho = 2\pi\alpha$ (c'est la distance entre deux spires consécutives c'est à dire la différence de deux côtes correspondant à t et $(t + 2\pi)$; α est le pas réduit de l'hélice. L'angle de l'hélice est l'angle constant (égal à $\arctan \frac{\alpha}{R}$) que fait sa tangente avec tout plan orthogonal à Oz. L'hélice est droite lorsque $\varepsilon = 1$ (elle "monte" dans le sens trigonométrique et un observateur placé à l'extérieur la voit, lorsqu'elle est devant, montée de gauche à droite) et gauche lorsque $\varepsilon = -1$ (elle "monte" dans le sens des aiguilles d'une montre).

Pour réaliser une trajectoire hélicoïdale à l'aide du logiciel Matlab, on peut en premier temps schématiser la trajectoire et l'état des câbles aux moments de départ et d'arrivée.

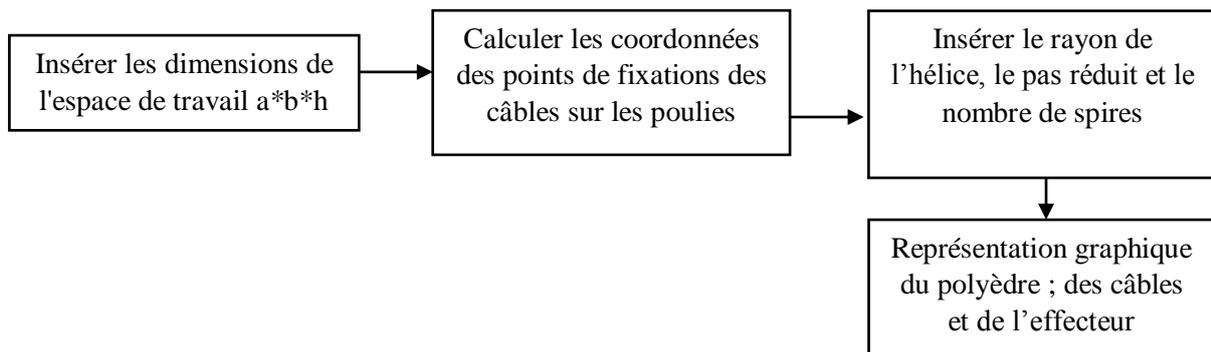
L'effecteur doit exécuter la trajectoire hélicoïdale en 5 secondes dont les équations de mouvements sont :

$$\bullet \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = \varepsilon R \sin \theta \\ z = \alpha \theta = \frac{\rho}{2\pi} \theta \end{cases} \quad \text{Avec } \varepsilon = \pm 1$$

- Le rayon du cercle à effectuer est $R = 0,25 \text{ m}$.
- $\varepsilon = +1$
- le pas réduit de l'hélice $\alpha = 3 \text{ cm} \rightarrow$ le pas $\rho = 2\pi\alpha = 0,06 \pi$

En démarrant de la position : $\theta = 0$, en arrivant $\theta = 6\pi$ donc 3 spires

On peut schématiser les étapes de calcul et de représentation qu'effectue notre programme dans l'organigramme ci-dessous :



L'exécution de programme nous montre la représentation graphique de la trajectoire suivante :

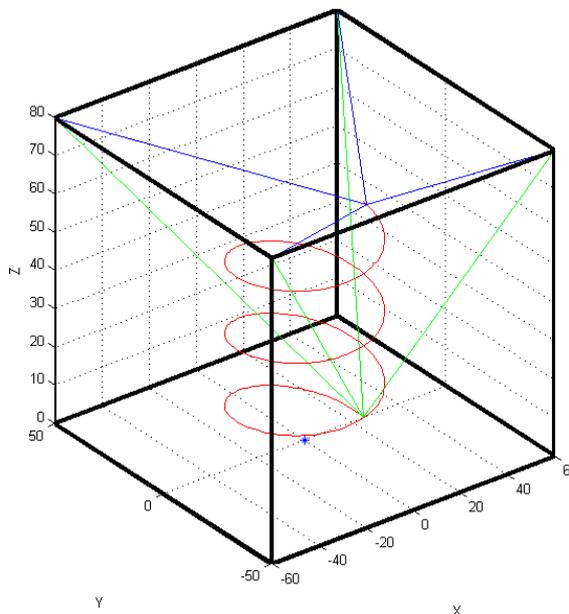
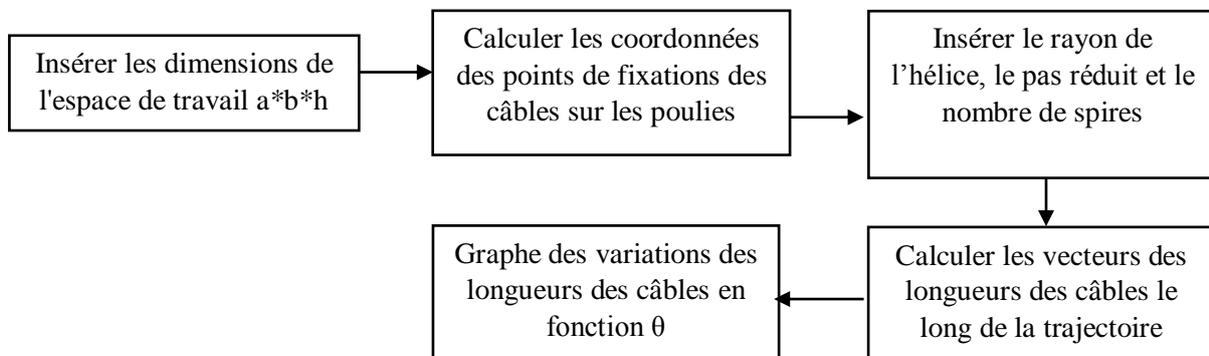


Figure IV.11 : Représentation graphique du polyèdre; des câbles et de l'effecteur pour une Trajectoire hélicoïdale

- Les lignes noires : les segments du bâti
- Les lignes vertes : l'état des câbles au moment de départ.
- Les lignes bleues : l'état des câbles au moment d'arrivée.
- La ligne rouge : la trajectoire effectuée par l'effecteur.

IV.3.B.2.a. Longueur des câbles pour la trajectoire hélicoïdale

On peut schématiser les étapes pour calculer la variation des longueurs des câbles le long de la trajectoire ci-dessous :



Les résultats de la variation des longueurs des câbles le long de la trajectoire sont présentés dans la figure IV.12

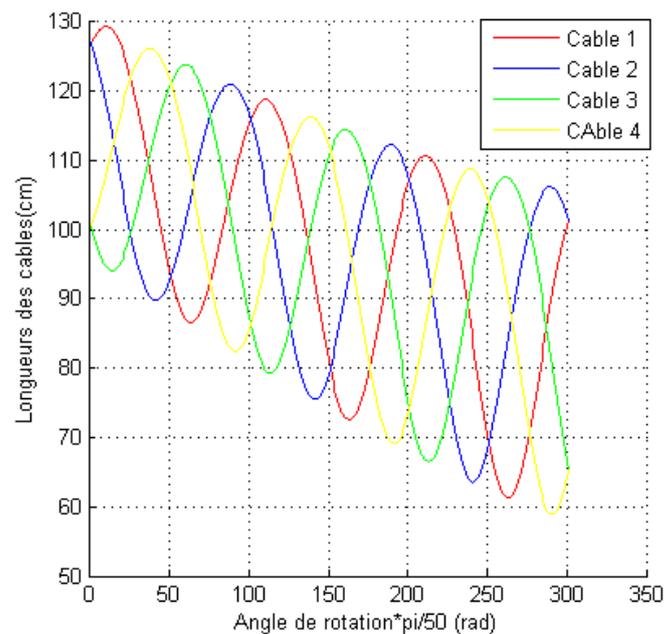


Figure IV.12: Variation des longueurs des câbles le long de la trajectoire.

La variation des longueurs des câbles se fait d'une manière sinusoidale décroissante ce qui est en synchronisation avec la trajectoire hélicoïdale, où le point de départ est situé en bas et le point d'arrivée est en haut.

IV.3.B.2.b. Cinématique et dynamique de la trajectoire hélicoïdale

Dans cette simulation le temps d'exécution de l'hélice est 5seconde, avec les données suivantes :

- masse $m = 1 \text{ kg}$
- inertie poulie/rotor $J_i = 0,0008 \text{ kg.m}^2$
- coefficient de frottement $C_i = 0,01$
- rayon des poulies $r_i = 7 \text{ cm}$
- rayon de l'hélice $R = 25 \text{ cm}$
- $\varepsilon = +1$
- le pas réduit de l'hélice $b = 3 \text{ cm} \rightarrow$ le pas $p = 2\pi b = 0.06 \pi$

On détermine l'équation du mouvement Pour $t \in [0, 5]$: et $\theta \in [0, 5\pi]$

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = \varepsilon R \sin \theta \\ z = b\theta = \frac{p}{2\pi} \theta \end{cases} \text{ Avec } \varepsilon = \pm 1 \dots\dots\dots \text{(IV.13)}$$

Calcul de la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = R \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} = b\dot{\theta} = \frac{p}{2\pi} \dot{\theta} \end{cases} \dots\dots\dots \text{(IV.14)}$$

Calcul de l'accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R\ddot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{y} = -R \ddot{\theta} \sin \theta \\ \ddot{z} = b\ddot{\theta} = \frac{p}{2\pi} \ddot{\theta} \end{cases} \dots\dots\dots \text{(IV.15)}$$

IV.3.B.2.c. Calcul des couples et tensions

On suivant les mêmes relations et les mêmes étapes déjà utilisées pour le calcul des couples et des tensions pour une trajectoire rectiligne.

Pour cette trajectoire hélicoïdale L'exécution de programme nous donne les 2 graphes suivants :

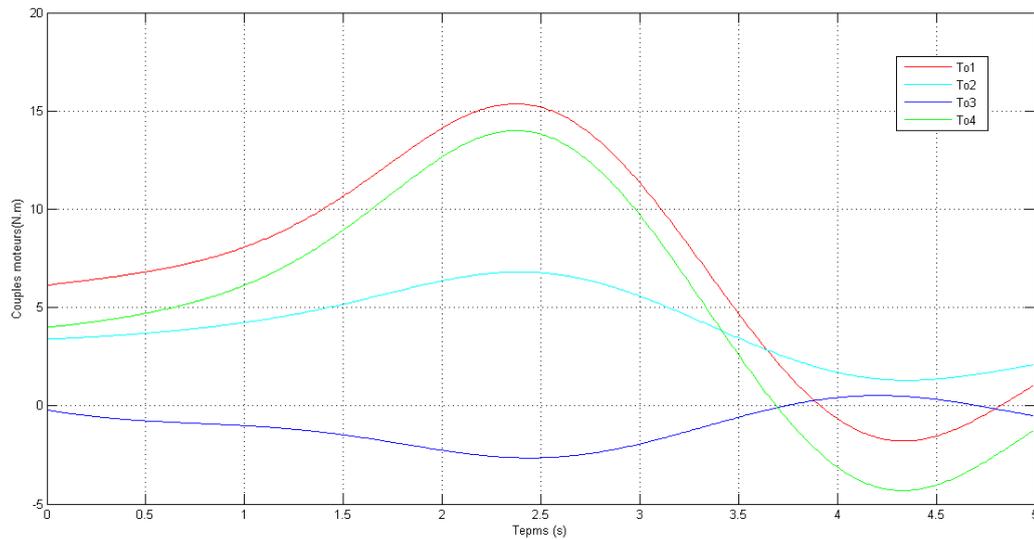


Figure IV.13: Couples moteur nécessaires pour effectuer la trajectoire hélicoïdale $\tau = f(t)$

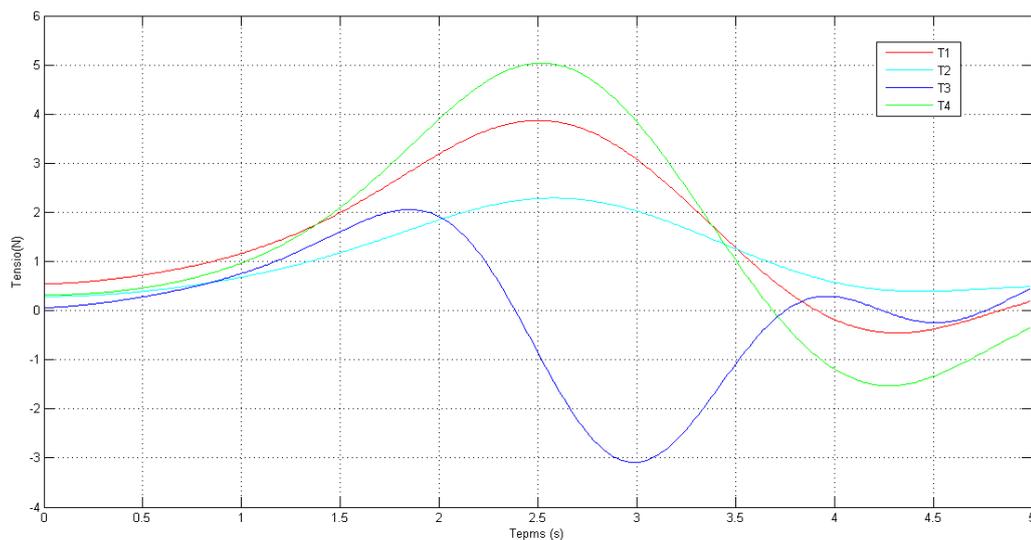


Figure IV.14: Tension dans les câbles pour une trajectoire hélicoïdale $T = f(t)$

D même pour le cas d'une trajectoire rectiligne les graphes des tensions ne vérifient pas toujours les conditions de l'équation (VI.12) ; pour les câbles 1, 2 et 3 l'erreur est acceptable est-elle due à la méthode approximative pour le calcul du pseudo inverse de Moore-Penrose pour la matrice S , et pour le 4^{ème} câble cette tension négative est due à la redondance de robot.

La présence d'une tension négative dans l'étude des robots à câbles est problème déjà rencontré dans beaucoup de publication. On peut citer dans ce cadre [Williams 2003], [Gallina 2001].

Les couples moteurs sont en harmonie avec les tensions dans les câbles ce qui montre que les forces développées par les moteurs sont les paramètres principaux dans les créations des tensions des câbles.

IV.4 Conclusion

La vérification des modèles géométrique peut être faite à l'aide de Matlab, les modèles sont obtenues analytiquement et donc on peut faire confiance aux résultats obtenus.

Par contre, pour la vérification du modèle dynamique, le calcul des tensions dans les câbles et des couples moteur pour un système redondant comme notre système nous oblige à faire des approximations qui génèrent des erreurs et peut ne pas toujours vérifier les conditions imposées surtout par le modèle statique.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans le cadre de ce Projet de Fin d'Etudes, nous avons étudié un robot spatial à quatre câbles. Nous nous sommes intéressés dans cette étude :

- aux différents modèles contrôlant les mouvements de l'effecteur, les modèles géométrique, cinématique et dynamique.
- au concept et à la détermination de l'espace de travail.
- à la conception et à la visualisation de l'architecture du robot étudié.
- à la vérification des modèles étudiés en planifiant des trajectoires différentes.

L'étude réalisée a permis de noter les conclusions suivantes :

- bien que les robots à câbles sont une catégorie des robots parallèles, leurs modélisation sont totalement différentes.
- l'utilisation des hypothèses de simplification pour la masse et l'élasticité des câbles est indispensable dans la modélisation.
- le MGI est d'une grande importance mais il est beaucoup plus facile à déterminer dans le cas de cette étude.
- l'utilisation de la formulation de Lagrange a permis d'obtenir le modèle dynamique sous une forme matricielle facilitant le calcul des tensions dans les câbles et des couples moteurs.
- la détermination géométrique peut être un outil très pratique pour l'évaluation de l'espace de travail dans la phase de préconception sans considérer l'étude des singularités.
- la planification des trajectoires sous Matlab est un outil pour la vérification du modèle dynamique.
- les résultats obtenus pour le calcul des longueurs des câbles, des couples moteurs et des tensions dans les câbles valident les modèles qu'on a obtenus. On note toutefois certains résultats sur les couples et les tensions qui doivent être revus en tenant compte de la redondance du système (robot à 4 câbles et 3ddl). Dans ce cas, la matrice Jacobienne dynamique n'est pas carrée donc son inverse est calculé par des approches analytiques.

Ce travail étant la première initiation dans la conception d'un robot spatial à câbles, il serait souhaitable de le continuer par une réalisation. D'autres points seraient intéressants de les prendre en considération tels que l'élasticité, les singularités et la rigidité du robot, ainsi que le dimensionnement des différents équipements (moteurs, poulies, câbles, bâti).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **[Alan 2008]** : Alan Lytle, Fred Proctor and Kamel Saidi ; Control of Cable Robots for Construction Applications Parallel Manipulators towards New Applications, Huapeng Wu (Ed.), ISBN: 978-3-902613-40-0, InTech ; 2008.
2. **[Alessandro et .al 2013]** : Alessandro Berti, Jean-Pierre Merletand Marco Carricato ; Solving the Direct Geometrico-Static Problem of 3-3 Cable-Driven Parallel Robots ; Mechanisms and Machine Science 12, DOI:10.1007/978-3-642-31988-4_16, ©Springer-Verlag Berlin Heidelberg ; 2013.
3. **[Andreff 2008]** : N. Andreff, O. Company, M. Gouttefarde, S. KrutandF ; Proceedings of the Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators ; Montpellier,France ; September 2008.
4. **[Bonev 2013]** : Notes de cours GPA546 Ilian Bonev,ing .Yanick Noiseux,ing ; L'École de technologie supérieure ; l'Université du Québec ; 20 décembre 2013.
5. **[Bonev 2003]** : Ilian A. Bonev ; Self-Motions of General 3-RPR Planar Parallel Robots ; École de Technologie Supérieure (ÉTS), Montréal, Canada ; 2003.
6. **[Bouchard 2008]** : Samuel Bouchard ; géométrie des robots parallèles entraînés par des câbles ; faculté des études supérieures de l'université de Laval ; Québec ; 2008.
7. **[Coiffet 2006]** : Philippe Coiffet ; Robots : définitions et classification ; Techniques de l'Ingénieur, R7700 ; 2006 ; France.
8. **[Cote 2003]** : Gabriel Cote ; analyse et conception de mécanismes parallèles actionnes par câbles à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval ; Québec ; Septembre 2003.
9. **[Gallina 2001]** : Paolo Gallina and Aldo Rossi University of Padova, Padova, Italy ; Robert L. Williams II Ohio University Athens, Ohio ; Planar Cable-Direct-Driven Robots, Part II: Dynamics and Control; Proceedings of the 2001 ASME Design Technical Conferences 27th Design Automation Conference September 9-12, 2001, Pittsburgh.
10. **[Gayral 2013]** : Thibault Gayral Étalonnage d'un instrument d'observation spatial actif ; Université de Nice-Sophia Antipolis école doctoral Estic Sciences et technologies de l'information et de la communication ; 29 novembre 2013.

11. [**Gosselin 2013**] : Clément Gosselin, T.Bruckmann and A.Pott (eds.) ; Global Planning of Dynamically Feasible Trajectories for Three-DOF Spatial Cable –Suspended Parallel Robots Cable-Driven Parallel Robots, 3 Mechanisms and Machine Science 12, Springer-Verlag Berlin Heidelberg ; 2013.
12. [**Gouttefarde 2009**] : Marc Gouttefarde ,CoGiRo – Commande des robots géants, LIRMM, (coordination) Institut Pascal, INRIA Sophia Antipolis ,TECNALIA France ; 2009.
13. [**Hubert 2010**] : Julien Hubert ; Manipulateurs parallèles, Singularités et analyse statique ; École Doctorale des Mines de Paris ; PARIS TECH INRIA-Sophia-Antipolis ; 28octobre2010.
14. [**Korayem 2010**] : M. H. Korayem, Kh. Najafi, M. Bamdad ; Synthesis of Cable Driven Robots' Dynamic Motion with Maximum Load Carrying Capacities: Iterative Linear Programming Approach Transaction B: Mechanical Engineering Vol.17 Sharif University of Technology ; June 2010.
15. [**Kozak 2006**] : K.Kozak et Q.Z.E.J.Wang. Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass. IEEE Transactions on Robotics ; 2006.
16. [**Kurt 2003**] : Sébastien Krut ; Contribution à l'étude des robots parallèles légers, 3T-1R et 3T-2R, à forts débattements angulaires ; université Montpellier II – sciences et techniques du Languedoc ; 13 novembre 2003.
17. [**Lahouar 2008**] : Samir Lahouar contribution à la modélisation et à la planification de trajectoires de robots parallèles évitant les singularités et les collisions ; Université de Poitiers (Faculté de Sciences Fondamentales et appliquées) ; 30 Janvier 2008.
18. [**Lefrançois 2010**] : Simon Lefrançois ; modélisation, commande et prototypage d'un robot sous-actionné entraîné à l'aide de câbles ; faculté des sciences et de génie université Laval ; Québec ; 2010.
19. [**Liu 2011**] : Xin Liu, Yuanying Qiu and Xuechao Duan Stiffness Enhancement and Motion Control of a 6-DOF Wire-driven Parallel Manipulator with Redundant Actuators for Wind Tunnels, Wind Tunnels, Prof. Satoru Okamoto (Ed.), ISBN: 978-953-307-295-1, InTech ; 2011.
20. [**Merlet 2006**] : J. P. Merlet. Parallel Robots ; 2nd Edition ; volume 128 ; 2006.
21. [**Merlet 2013**] : Jean-Pierre Merlet INRIASophia ; Wire-driven parallel robot: open issues Robot Design, Dynamics and Control CISM International Centre for Mechanical Sciences Volume 544, 2013.

22. [**Nabat 2007**] : Vincent NABAT ; Robots parallèles à nacelle articulée Du concept à la solution industrielle pour le pick-and-place ; université Montpellier II – sciences et techniques du Languedoc ; 2 mars 2007.
23. [**Sandretto 2013**] : Julien Alexandre dit Sandretto ; Étalonnage des robots à câbles identification et qualification ; Docteur en Sciences de l'Université de Nice - Sophia Antipolis Mention : Informatique ; 10 septembre 2013.
24. [**Schmidt; Pott ,2013**] : Valentin Schmidt and Andreas Pott implementing extended kinematics of a cable-driven parallel robot in real-time ; Mechanisms and Machine Science 12, DOI : 10.1007/978-3-642-31988-4_18,©Springer-Verlag Berlin Heidelberg ; 2013.
25. [**Tavolieri 2008**] : Cristina Tavolieri ; Thèse de doctorat en génie mécanique ; Conception d'un manipulateur câble parallèle à base pour la réadaptation Applications ; Université de Cassino ; Octobre 2008.
26. [**Qiang 2010**] : Xiao Qiang Tang and Rui Yao Dimensional Optimization of Completely Restrained Positioning CabDriven Parallel Manipulator with Large Span, Robot Manipulators New Achievements, Aleksandar Lazinica and Hiroyuki Kawai (Ed.), ISBN: 978-953-307-090-2, InTech ; 2010.
27. [**Usher 2012**] : Peter Corke, Dirk Stauacher and CSIRO ICT Centre Robotics Team A Cable-Array Robot for Air Vehicle ; School of Electrical Engineering, Queensland University of Technology ; Brisbane 4000 ; Queensland ; Australia ; 2012.
28. [**Williams 2003**] : Robert L. Williams II ; Paolo Gallina Jigar ; Vadia ; Planar translational cable-direct-driven robots ; Ohio University Athens, Ohio Journal of Robotic Systems Vol. 20, No. 3 ; 2003.