

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



Département de génie mécanique

Projet de fin d'études
*en vue de l'obtention du diplôme
d'ingénieur d'état en génie mécanique*

THÈME :

**Optimisation de l'espace de travail d'un robot
parallèle plan à 3 câbles.**

Réalisé par :

Oualid ATMANI

Proposé et dirigé par :

Mr. Mohamed BOUAZIZ.

Mr. Mohammed TAZI.

Juin 2015

Ecole Nationale Polytechnique, 10, AV. Hassen Badi, El-Harrach, Algérie

Dédicaces

Je profite de cette occasion pour dédier ce modeste travail :

- + À celle qui m'est chère et qui m'a appris beaucoup....Ma mère ;*
- + À celui qui m'a appris comment affronter la vie en souriant...Mon père ;*
- + À Mes sœurs et frères ;*
- + À toute ma famille et mes proches ;*
- + À tous mes amis chacun par son nom ;*
- + À tous ceux que j'aime et qui m'aiment ;*
- + À tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.*

Qualid

Remerciements

Avant tout, je remercie ALLAH tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail.

Je remercie sincèrement monsieur M. BOUAZIZ et Monsieur M.TAZI, de m'avoir dirigé et aidé à achever ce travail aussi passionnant, qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance, pour leurs compétences, leurs encouragements et leurs précieux conseils durant ce travail.

J'exprime ma gratitude et mes vifs remerciements à monsieur, B.KEBLI, professeur et enseignant à l'école nationale polytechnique, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Je remercie également monsieur, L.RIACHE, enseignant à l'école nationale polytechnique, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Enfin, je remercie vivement tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

ملخص

الهدف من هذا المشروع هو دراسة الاستفادة المثلى من مساحة عمل روبوت مزود بثلاثة كابلات بالتوازي. للقيام بذلك، ومن أجل زيادة كبيرة في مساحة العمل، يقترح تحسين ذلك عن طريق فحص التنقل لنقطة تثبيت. بعد الحصول على العبارات التحليلية في النمذجة: الهندسية، الحركية، الساكنة والديناميكية. النتائج تم محاكاتها والتحقق منها باستخدام Matlab.

كلمات مفتاحية: روبوت مزود بكابلات، مساحة العمل، النمذجة، المحاكاة.

Résumé

L'objectif de ce projet est l'optimisation de l'espace de travail d'un robot parallèle plan à 3 câbles. Pour ce faire, afin d'augmenter considérablement cet espace de travail, on se propose de l'optimiser par l'examen de la mobilité d'un point de fixation. Après avoir établi les développements analytiques concernant les modélisations : géométrique, cinématique, statique et dynamique ; les résultats sont simulés et vérifiés en utilisant le logiciel Matlab.

Mots clés : robot à câbles, espace de travail, modélisation, simulation.

Abstract

The purpose of this project is the optimization of workspace of a cable driven robot. To do this, in order to significantly increase the workspace, it is proposed to optimize it by examining the mobility of a fixation point. Having established the analytical developments in modeling: geometric, kinematic, static and dynamic; the results are simulated and verified using Matlab.

Keywords: cable driven robot, workspace, modelisation, simulation.

Table des matières

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I

Généralités sur les robots parallèles à câbles

I-1 Introduction	4
I-2 L'évolution de la robotique.....	4
I-2-1 L'historique	4
I-2-2 Types des robots	5
I-3 Les robots parallèles à câbles.....	7
I-3-1 Définitions et présentation d'un robot à câbles	7
I-3-2 Avantages et Inconvénients.....	8
I-3-3 Différentes applications des robots à câbles	8
I-4 Caractéristiques des robots à câbles.....	10
I-4-1 Les singularités	10
I-4-2 L'espace de travail.....	10
I-4-3 Détermination de l'espace de travail.....	12
I-5 Conclusion.....	13

Chapitre II

Calculs analytiques et modélisation

II-1 Introduction.....	15
II-2 Description du robot étudié.....	15
II-3 Modélisation géométrique	17
II-3-1 Modèle Géométrique Inverse (MGI)	17
II-3-2 Modèle Géométrique Direct (MGD).....	17
II-4 Modélisation Cinématique.....	18
II-4-1 Modèle Cinématique Inverse (MCI).....	18
II-4-2 Modèle Cinématique Directe (MCD).....	20
II-5 Modélisation Dynamique.....	22
II-5-1 Formulation Lagrangienne	22
II-5-2 L'énergie cinétique (E_C)	22
II-5-3 L'énergie potentielle (E_P).....	25
II-5-4 L'énergie de dissipation (D)	25
II-5-6 Calcul des forces agissant sur le système.....	26
II-5-7 Calcul de dérivées	26
II-5-8 La formule de Lagrange sous forme matricielle	28

II-6	Modèle statique	31
II-7	Conclusion	32

Chapitre III

Simulation et résultats

III-1	Introduction	34
III-2	Simulation du modèle géométrique	34
III-2-1	Présentation du programme	34
III-2-2	Les résultats obtenus pour une trajectoire rectiligne	35
III-2-3	Les résultats obtenus pour une trajectoire circulaire	41
III-3	Simulation du modèle dynamique	43
III-3-1	Présentation du programme	43
III-3-2	Simulation dynamique pour une trajectoire rectiligne	44
III-3-3	Simulation dynamique pour une trajectoire circulaire	47
III-4	Conclusion.....	50
	<i>Conclusion générale</i>	<i>52</i>
	Liste des références bibliographiques.....	53

Liste des figures

Figure I-1 : exemple d'un robot sériel	5
Figure I-2 : exemple d'un robot parallèle	6
Figure I-3 : photo d'origine de la plate-forme de Gough	6
Figure I-4 : exemple d'un robot parallèle à câbles	7
Figure I-5 : exemple de positionnement de la skycam	9
Figure I-6 : Le prototype mécanique de STRING-MAN	10
Figure II-1 : Représentation schématique du mécanisme étudié et notation associée.....	16
Figure II-2 : schéma représentant les forces extérieures appliquées sur l'effecteur.....	31
Figure III-1 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OX).....	35
Figure III-2 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OX).....	36
Figure III-3 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OY).....	37
Figure III-4 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OY).....	38
Figure III-5 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une rectiligne inclinée.	39
Figure III-6 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne inclinée.	40
Figure III-7 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire circulai.....	41
Figure III-8 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire circulaire.....	42

Figure III-9 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire circulaire en fonction des coordonnées polaires.	43
Figure III-10 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire rectiligne d'équation $y=3x+1$	44
Figure III-11 : Variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne d'équation : $y=3x+1$	45
Figure III-12 : Les variations des tensions dans les câbles pour une trajectoire rectiligne d'équation : $y=3x+1$	46
Figure III-13 : Les variations des couples moteurs pour une trajectoire rectiligne d'équation : $y=3x+1$	46
Figure III-14 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire circulaire d'équation $x^2 + y^2 = 36$	47
Figure III-15 : Les variations des tensions dans les câbles pour une trajectoire circulaire d'équation $x^2 + y^2 = 36$	48
Figure III-16 : Les variations des tensions dans les câbles pour une trajectoire circulaire d'équation $x^2 + y^2 = 36$	48
Figure III-17 : Les variations des couples moteurs pour une trajectoire circulaire d'équation $x^2 + y^2 = 36$	49

Liste des tableaux

Tableau III-1 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OX).	36
Tableau III-2 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OY).	38
Tableau III-3 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne inclinée.	40
Tableau III-4 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire circulaire.	42

Nomenclature

Symbole	Définition
a	La longueur du bâti.
A_i	Les points de fixation.
b	La largeur du bâti.
β_i	L'angle de rotation de chaque poulie.
$\dot{\beta}_i$	La vitesse angulaire de chaque poulie.
$\ddot{\beta}_i$	L'accélération angulaire de chaque poulie.
$[C]$	La matrice des coefficients de frottement.
C_i	Les coefficients de frottement.
D	L'énergie de dissipation.
E_C	L'énergie cinétique.
E_P	L'énergie potentielle.
(F_R)	Le vecteur des forces associées aux articulations.
g	L'accélération gravitationnelle.
$[J]$	La matrice d'inertie.
J_i	Le moment d'inertie de chaque poulie.
K	La constante de raideur du ressort.
L	Lagrangien du système.
L_i	Les longueurs des câbles.
L_{i0}	Les longueurs initiales des câbles.
ΔL_i	La variation des longueurs de câbles.
m	La masse de l'effecteur.
M	La masse de l'ensemble contenant le point 3.
$[M]$	La matrice jacobienne.
$[M^+]$	La pseudo-inverse de la matrice $[M]$.
$[m]$	La matrice de masse de l'organe terminal.
(\dot{P})	Le vecteur vitesse de l'organe terminal.
(\ddot{P})	Le vecteur d'accélération de l'organe terminal.
P^*	La puissance virtuelle.

(q)	Le vecteur des coordonnées articulaires.
r_i	Le rayon de chaque poulie.
τ_i	Les couples appliqués par les moteurs.
(T)	Le vecteur des tensions dans les câbles.
θ_i	Les angles entre les câbles et l'axe horizontal.
t_i	La tension dans le câble i .
ΔU	L'allongement du ressort.
v_e	La vitesse de l'effecteur.
(x_i, y_i)	Les coordonnées des points de fixation.
(x, y)	Les coordonnées de l'organe terminal.
(\dot{x}, \dot{y})	Les coordonnées de la vitesse de l'organe terminal.
(\ddot{x}, \ddot{y})	Les coordonnées de l'accélération de l'organe terminal.
ΔZ	Variation suivant la verticale.

Introduction générale

Introduction générale

Dans l'industrie la nécessité de meilleures performances et d'un rendement plus grand avec des précisions et des exigences de plus en plus élevées ont poussé à une automatisation continue de l'industrie. Le regroupement des différentes fonctionnalités et automatismes tels qu'une grande exactitude opérationnelle, une plus grande capacité de charge, une flexibilité et une rapidité dans les tâches, ont conduit et ont motivé les recherches afin de développer des mécanismes appelés robots. Les robots à câbles sont des types des robots utilisant des liaisons constituées de câbles actionnés par des moteurs pour manipuler l'effecteur.

Un des avantages principaux des robots à câbles est la grande étendue de leur espace de travail, mais plus le nombre de degrés de liberté de l'effecteur augmente, plus le nombre de câbles augmente, d'où l'intérêt à chercher à réduire le nombre de câbles tout en augmentant l'espace de travail.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier une nouvelle conception d'un robot parallèle plan à 3 câbles permettant l'optimisation et l'augmentation de son espace de travail. Cette tâche est développée comme suit :

Le chapitre 1 porte sur la revue bibliographique. Des définitions et des généralités sur les robots à câbles ont été développées, les différentes applications des robots parallèles à câbles sont présentées ainsi que la notion d'espace de travail.

Le chapitre 2 contient l'étude analytique et la modélisation d'une nouvelle configuration des robots parallèles à 3 câbles permettant l'optimisation de l'espace de travail. D'abord les caractéristiques et les propriétés du robot à étudier sont définies. Ensuite, les calculs concernant les modélisations géométriques directe et inverse sont démontrés. Finalement les calculs pour les modèles statiques, cinématique et dynamique sont élaborés.

Le chapitre 3 a pour objectif de simuler et de vérifier les résultats obtenus lors de l'étude analytique du robot. Différents cas de trajectoires de l'effecteur ont été générés pour pouvoir suivre le comportement du robot et le positionnement de l'effecteur et des câbles et de déterminer les longueurs des câbles pour les différentes positions de l'effecteur, la dernière étape est consacrée à la vérification du modèle dynamique du système par la détermination des tensions des câbles et les couples moteurs.

Enfin on termine ce mémoire par une conclusion générale où un bilan des travaux effectués est dressé. Des perspectives possibles relatives aux approches développées sont dégagées pour faire suite à cette étude.

Chapitre I
Généralités sur les robots parallèles à câbles

I-1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'expliquer brièvement les concepts qui seront développés en détail tout au long de ce mémoire. Il s'agit d'une description sommaire qui permet de comprendre la problématique générale des robots parallèles à câbles et leurs espaces de travail. Les différentes applications des robots parallèles à câbles sont présentées ainsi que la notion de l'espace de travail.

I-2 L'évolution de la robotique

I-2-1 L'historique

L'histoire de la robotique est jalonnée d'avancées technologiques, certaines remontant loin dans le passé. Depuis la Grèce antique où des horloges pneumatiques et hydrauliques apparaissent, en passant par Al-Jazari au Moyen-Âge et Léonard de Vinci à la renaissance, jusqu'à l'invention en 1921 du mot robot, les manipulateurs autonomes font leur place dans notre vie. Dès les années 1940, des mécanismes parallèles commencent à faire leur apparition.

- 1947 : Premier manipulateur électrique télé opéré.
- 1954 : Premier robot programmable.
- 1961 : Utilisation d'un robot industriel, commercialisé par la société Unimation (USA), sur une chaîne de montage de General Motors.
- 1961 : Premier robot avec contrôle en effort.
- 1963 : Utilisation de la vision pour commander un robot.
- 1973 : premier robot mobile à roues.
- ET enfin dans la période de 1978 jusqu'à aujourd'hui : le domaine de la robotique a connu un grand développement, le dernier type de robots existant correspond à ceux disposant d'une intelligence dite "artificielle" et reposant sur des modèles mathématiques complexes tels que les réseaux de neurones. En plus de capteurs physiques comme leurs prédécesseurs, ces robots peuvent prendre des décisions beaucoup plus complexes et s'appuient également sur un apprentissage de leurs erreurs comme peut le faire l'être humain. Bien sûr il faudra attendre encore longtemps avant que le plus "intelligent" des robots ne soit égal, tant par sa faculté d'adaptation que par sa prise de décisions, à l'Homme.

I-2-2 Types des robots

I-2-2-1 Les robots sériels :

Les robots sériels, qui forment la grande majorité des robots utilisés dans l'industrie, sont nommés ainsi en raison de leur chaîne cinématique ouverte, dont les différents segments sont placés en série. Ces derniers sont liés les uns aux autres par des liaisons à un degré de liberté (rotoïdes ou prismatiques) motorisées [LAF.2003] (**Figure I-1**).



Figure I-1 : Exemple d'un robot sériel [LAF.2003]

Les limites des performances des architectures de robots sériels ont été un facteur décisif au développement des recherches menées dans le domaine de la robotique. C'est pourquoi, de nombreuses investigations sont menées afin de mettre au point des robots parallèles capables de manipuler plus rapidement et plus précisément.

I-2-2-2 Les robots parallèles :

Un robot manipulateur à structure parallèle peut être défini comme étant un mécanisme à chaîne cinématique fermée qui est constitué essentiellement d'une plate-forme fixe (la base fixe) et d'une plate-forme mobile qui peut être appelée la nacelle à n degrés de liberté. La plate-forme du robot manipulateur parallèle est connectée à sa base fixe par plusieurs chaînes cinématiques (vérins ou câbles) [LAF.2002].



Figure I-2 : Exemple d'un robot parallèle [LAF.2002]

Les robots parallèles disposent d'une architecture permettant d'atteindre des dynamiques très élevées et par conséquent de réduire de manière très significative les temps de cycle.

Un des exemples les plus connus est la plate-forme **Gough-Stewart**, un manipulateur parallèle à 6 DDL avec des actionneurs prismatiques (voir figure 2.1). Ce mécanisme a été conçu par un ingénieur anglais, Gough, en 1947, pour tester des pneus à l'aide d'une plate-forme mobile (**Figure I-3**).

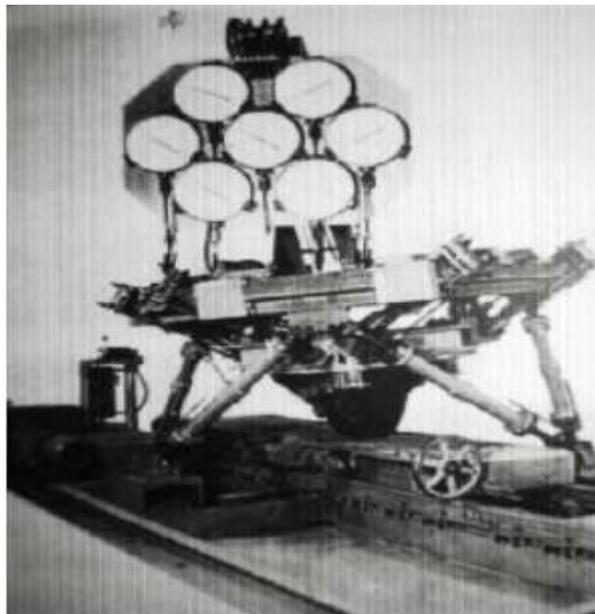


Figure I-3 : photo d'origine de la plate-forme de Gough [MER.1999]

En faisant varier le nombre et la topologie des chaînes du manipulateur, on obtient un grand nombre de manipulateurs parallèles.

On peut distinguer trois types essentiels de robots parallèles :

- ❖ Les robots manipulateurs parallèles plans : On appelle un robot parallèle plan, un mécanisme ayant des mouvements qui s'effectuent dans un plan, ils se décomposent en deux translations d'axes parallèles au plan et une rotation d'axe perpendiculaire au plan tout en sachant que les robots plans ne dépassent pas 3 degrés de liberté (ddl).
- ❖ Les robots manipulateurs parallèles spatiaux : Pour le cas des robots manipulateurs parallèles spatiaux, la base fixe et la plate-forme sont connectées entre elles par des chaînes cinématiques qui assurent à la plate-forme mobile un mouvement spatial.
- ❖ Les robots manipulateurs parallèles à câbles : dans ce type de robots les câbles relient en parallèle la base fixe et la plate-forme mobile.

Dans notre mémoire, nous ne nous intéressons qu'à un type bien précis de robots parallèles : les robots parallèles à câbles.

I-3 Les robots parallèles à câbles

I-3-1 Définitions et présentation d'un robot à câbles

Les robots à câbles sont des types particuliers de robots parallèles utilisant des liaisons constituées de câbles au lieu de vérins. Ils sont principalement constitués d'une base fixe, d'une plate-forme mobile (organe terminal), de câbles reliant en parallèle la plate-forme mobile à la base et d'un ensemble de poulies motorisées (**Figure I-4**).



Figure I-4 : exemple d'un robot parallèle à câbles [ABD.2001]

L'architecture d'un robot à câbles est définie par sa géométrie, le nombre de câbles et la position des points d'attaches respectivement sur l'effecteur et sur la base. Le nombre de câbles et les positions d'attache permettent d'estimer le nombre de degrés de liberté (ddl).

Selon les contraintes de mobilité, le nombre de câbles et le nombre de ddl, ces robots peuvent être classifiés en deux catégories :

- **Pleinement contraints** : le robot est dit pleinement contraint s'il est capable de générer des efforts dans toutes les directions. Pour qu'un robot à n ddl soit contraint, il est nécessaire d'avoir au moins $n+1$ câbles pour que les efforts dans les n directions soient contrôlables. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante [KAW.1993].
- **Sous-contraints** : le robot est sous-contraint s'il est capable de générer des efforts uniquement dans certaines directions. C'est le cas des robots suspendus où la gravité assure le maintien des câbles en tension. Ainsi, un effort dans le sens opposé à la gravité ne peut pas être compensé par ce type de robot.

I-3-2 Avantages :

Les robots à câbles possèdent plusieurs avantages :

- Ils ont une grande zone de travail et peu de pièces mobiles, avec des masses réduites, qui donnent de bonnes propriétés inertielles. Ces caractéristiques les rendent appropriés aux applications qui exigent des vitesses et des accélérations élevées.
- D'autres caractéristiques sont : rapport élevé de charge-poids, et construction économique.
- Le système mécanique a une structure simple, est facile à fabriquer et de faible coût.
- Il est également possible d'obtenir des manipulateurs reconfigurables en déplaçant les points de raccordement des câbles.

I-3-3 Différentes applications des robots à câbles

Différentes applications ont été envisagées pour les robots parallèles à câbles : dans l'aviation (simulateurs d'avions), en contrôle de caméras des stades, des applications biomédicales et pour le soulèvement de charges. Pour illustrer ces utilisations, on présente ici quelques exemples d'applications.

Exemple 1 : La Skycam

La skycam : est une caméra contrôlée par un mécanisme à câbles. Ce type de robots est utilisé en contrôle de caméras des stades qui est l'application la plus connue. (**Figure I-5**)



Figure I-5 : exemple de positionnement de la skycam [CON.1985]

Exemple 2 : Système à câbles pour la rééducation

Ce système est appelé **STRING-MAN**. C'est un manipulateur à câbles pour la rééducation. La structure mécanique a une configuration avec sept câbles. Sur la base de la structure, il y a un tapis roulant qui permet le mouvement du patient. Les câbles sont reliés au tronc et au bassin humain au moyen d'une interface utilisateur. L'interface se compose d'un harnais de garçon. Le corps humain est l'organe terminal de robot par l'intermédiaire de l'interface (**figure I-6**).



Figure I-6 : Le prototype mécanique de STRING-MAN [LAF.2002]

I-4 Caractéristiques des robots à câbles

I-4-1 Les singularités

Les singularités sont des configurations plus complexes où le robot perd sa raideur et gagne un ou plusieurs degrés de liberté. L'effecteur terminal devient alors mobile même si les actionneurs sont bloqués. Les actionneurs, quant à eux, ne peuvent pas résister à une force ou à un moment appliqué à l'effecteur terminal et le robot n'est plus contrôlable.

À cause de la nature des singularités, on limite généralement les déplacements de l'effecteur dans une des zones exemptes de ces singularités. L'espace de travail est alors considérablement réduit.

Pour y remédier, l'optimisation de l'espace de travail d'un robot parallèle est un enjeu important. La méthode souvent privilégiée est d'éviter des mouvements où le robot passe par une singularité en réduisant l'espace de travail. Ainsi, le contrôle du robot est assuré dans tout l'espace réduit et le risque d'endommager le mécanisme est minimisé.

I-4-2 L'Espace de Travail

Les premiers à vraiment définir ce que peut être l'espace de travail d'un manipulateur à câbles sont Verhoeven, Hiller et Tadokoro dans [VER.1998b] et [VER.1998a].

Pour eux, l'espace de travail, qu'ils notent workspace est l'ensemble des poses (couples position et orientation) atteignables où :

- il est possible d'exercer des forces et couples,
- les tensions dans les câbles sont positives,
- les tensions sont supérieures à un minimum et inférieures à un maximum
- la structure est suffisamment rigide,
- l'organe terminal ne traverse pas une singularité,
- les câbles ne doivent pas s'entrecroiser.

Un tel espace de travail est trop complexe pour être étudié (recherché), il convient de séparer les problèmes. Aussi Verhoeven et Hiller proposent dans [VER.2000] de restreindre l'étude à un controllable workspace dans un premier temps. Ce controllable workspace est l'ensemble des poses prises par la plate-forme pour lesquelles la tension dans les câbles est garantie positive quel que soit l'effort (force et couple) extérieur appliqué à la plate-forme.

Enfin, une dernière approche est celle de Barrette et Gosselin. Ils proposent l'étude d'un dynamic workspace dans [GOS.2000] : C'est l'ensemble des poses et accélérations (linéaires comme angulaires) prises par la plate-forme mobile pour lesquelles la tension est positive dans les câbles.

Le choix des moteurs, câbles et autres caractéristiques de dimensionnement mécanique ne rentrent pas en compte dans la phase de préconception. Il est nécessaire de trouver un espace de travail dont la définition soit simple, rapide à calculer et dépendant uniquement de l'architecture géométrique. Tout le monde s'accorde sur la caractéristique minimale de l'espace de travail : les tensions dans les câbles doivent être positives, quel que soit l'effort appliqué à la plate-forme mobile. Le dual de l'effort appliqué à la plate-forme est l'effort que peuvent produire les câbles sur la plate-forme. C'est ce dernier qui est préféré.

Cela donne la définition suivante :

L'espace de travail est l'ensemble des poses couple position, orientation prises par la plate-forme mobile où n'importe quel effort des câbles sur la plate-forme peut être obtenu avec une tension positive dans tous les câbles.

I-4-3 Détermination de l'espace de travail

L'espace de travail étant utilisé comme critère d'évaluation des architectures en phase de préconception du manipulateur, il faut un outil rapide de détermination de cet espace. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour la détermination de l'espace de travail, parmi ces méthodes on a :

I-4-3-1 La méthode de détermination géométrique :

Le principe de cette méthode est de tracer l'hyper polyèdre pour chaque position du manipulateur et vérifier si l'origine des coordonnées est à l'intérieur de son enveloppe convexe, et donc si cette pose fait partie de l'espace de travail du robot [GOU.2005].

I-4-3-2 La méthode de discrétisation :

C'est une méthode plus répandue pour déterminer la frontière de l'espace accessible, elle consiste à procéder par discrétisation ; cette méthode permet de calculer les déplacements en translation dans le plan (x, y) du centre d'un prototype en utilisant un système de coordonnées polaires pour ces variables. Le rayon polaire est progressivement augmenté et à chaque pas les longueurs des segments sont calculées jusqu'à ce que l'on découvre l'ensemble des positions limites où au moins l'une des longueurs se trouve en dehors des limites permises [STU.2006].

I-4-3-3 La méthode de génération des torseurs :

L'espace de génération des torseurs est donné par la condition suivante : Si l'ensemble des torseurs nécessaire à la tâche est un sous-ensemble de l'ensemble des torseurs disponibles, alors tous les torseurs nécessaires à la tâche peuvent être générés par le robot.

Cet espace tient généralement compte des singularités de type parallèle à condition que les degrés de liberté sur lesquels le contrôle est perdu à la singularité se trouvent représentés dans l'ensemble des torseurs de la tâche.

Si un mécanisme perd la capacité de générer des efforts selon une direction et que l'ensemble des torseurs de la tâche inclut des torseurs selon cette direction, alors cette pose ne fera pas partie de l'espace de travail [ROB.1999].

I-5 Conclusion

L'espace de travail d'un robot parallèle à câbles est réduit comparé à celui d'un robot sériel, pour cette raison, afin d'utiliser l'espace de travail d'un robot parallèle à câbles à son plein potentiel, de façon à ce qu'il soit comparable à celui d'un robot sériel, il est nécessaire de l'optimiser.

Dans ce travail, on désire optimiser l'espace de travail d'un robot parallèle plan à 3 câbles, pour ce faire on se propose de modéliser une nouvelle conception d'un robot parallèle plan à 3 câbles afin d'augmenter son espace de travail en procédant à l'examen des points de fixation.

Chapitre II
Calculs analytiques et modélisation

II-1 Introduction

La modélisation du robot est une mise en équation qui permet de connaître sa disposition géométrique et son comportement dynamique. Les caractéristiques et les propriétés du robot à étudier sont d'abord définies, ensuite, les modélisations géométriques directe et inverse sont élaborées pour faire le lien entre les positions articulaires et opératoires. Les modèles cinématique et dynamique seront aussi présentés. Finalement, la dernière section porte sur l'écriture sous forme matricielle du comportement dynamique du mécanisme.

II-2 Description du robot étudié

Avant d'entamer la modélisation, nous allons d'abord présenter et expliquer le robot étudié. La structure mécanique de ce robot est constituée de :

- ✓ Une base fixe de forme rectangulaire de dimensions a et b .
- ✓ Une plateforme mobile, qu'est un organe terminal (l'effecteur(E)).
- ✓ L'effecteur est maintenu par trois câbles passant par les poulies et entraînés par trois moteurs aux points de fixation $A_i = (x_i, y_i)$ ($i=1,2,3$), les points A_1 et A_2 sont fixes, tandis que le point A_3 a une position horizontale variable entre 0 et a par rapport au repère choisi.
- ✓ Pour une position donnée du point A_3 le robot a un espace de travail triangulaire. Pour augmenter cet espace, on se propose d'adopter une nouvelle conception dans laquelle le point A_3 est mobile et l'espace de travail sera ainsi, augmenté et devient rectangulaire.
- ✓ Le point A_3 est entraîné par un autre moteur, appelé moteur 4 qui engendre le mouvement de translation du point A_3 .

Il existe plusieurs systèmes mécaniques permettant la transmission du mouvement du moteur 4 pour entraîner le point A_3 . Parmi ces systèmes de transmission on a : le système roue et vis sans fin, un système à crémaillère ou un système de transmission de mouvement par courroies.

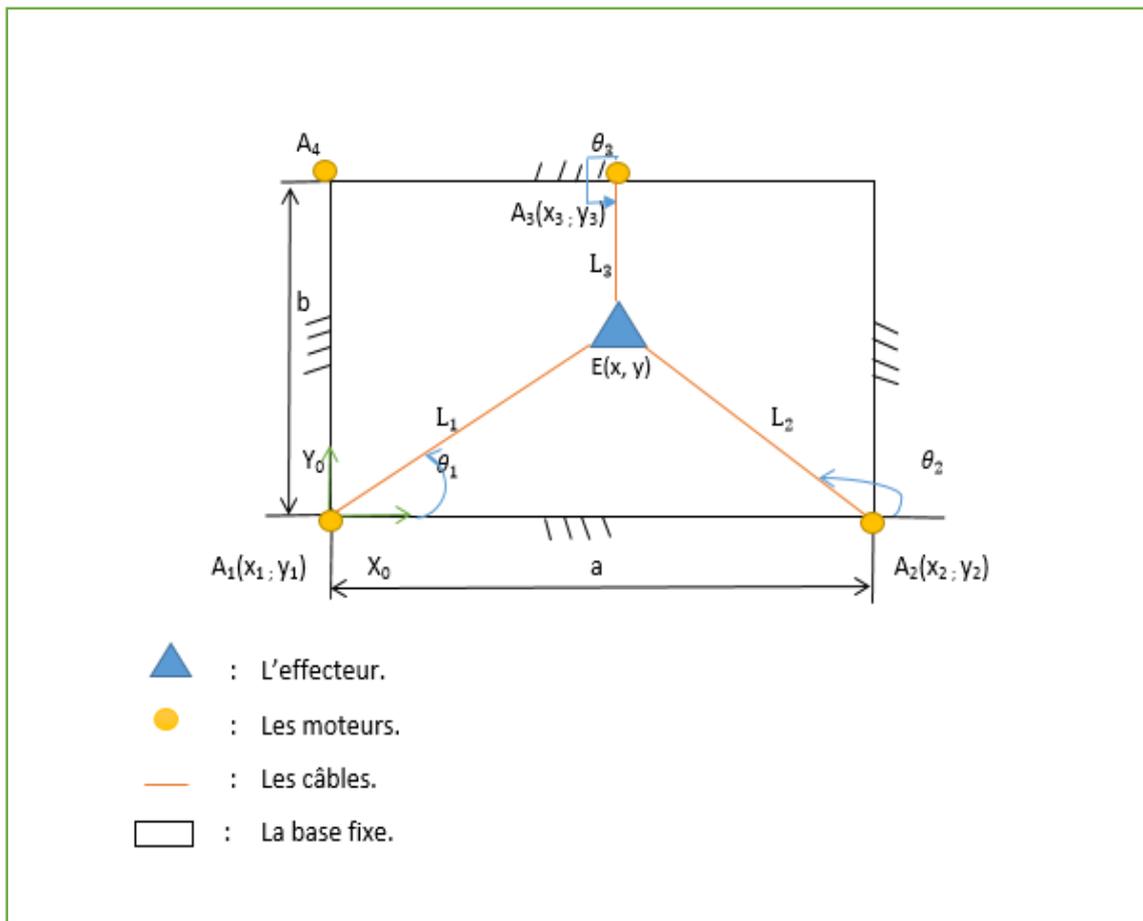


Figure II-1 : Représentation schématique du mécanisme étudié et notation associée.

Tout au long de ce mémoire la notation particulière au mécanisme sera conforme à celle présentée à la figure précédente (**Figure II-1**).

Ainsi, dans le but de simplifier les expressions nous allons prendre le point A_1 comme étant l'origine de repère $R (A_1, X_0, Y_0)$.

- Les longueurs des câbles définies par L_i ($i=1,2$ et 3) sont les variables articulaires du manipulateur.
- Les angles de rotation entre les câbles et l'axe (A_1X_0) sont définies par θ_i ($i=1,2$ et 3).
- L'espace de travail de ce robot se situe à l'intérieur du rectangle de dimensions (a, b) , ainsi les différentes positions de l'organe terminal (l'effecteur) sont caractérisées par les paramètres opérationnels (x, y) , avec : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$.

II-3 Modélisation géométrique

Le modèle géométrique d'un robot, consiste à écrire les relations entre les variables articulaires et la position de l'organe terminal.

II-3-1 Modèle Géométrique Inverse (MGI)

Le modèle géométrique inverse permet d'écrire les variables articulaires actives en fonction des coordonnées opérationnelles (x, y) .

En appliquant le théorème de Pythagore sur les triangles de la **figure II-1**, on aura les expressions suivantes :

$$L_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \quad (\text{II-1})$$

$$L_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \quad (\text{II-2})$$

$$L_3 = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \quad (\text{II-3})$$

À partir des équations (II-1) ; (II-2) et (II-3) on peut écrire :

$$L_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}; \quad i = 1; 2; 3 \quad (\text{II-4})$$

$$\text{Avec :} \quad x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = a$$

$$\text{Et} \quad x_3 : \text{varie entre } 0 \text{ et } a.$$

$$x_3 = x \pm \sqrt{(L_3)^2 - (y - y_3)^2}$$

Ainsi le modèle géométrique inverse peut s'exprimer par les relations suivantes :

$$L_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad ; \quad i = 1; 2; 3 \quad (\text{II-5})$$

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{y - y_i}{x - x_i}\right) \quad ; \quad i = 1; 2; 3 \quad (\text{II-6})$$

II-3-2 Modèle Géométrique Direct (MGD)

La modélisation géométrique directe (MGD) a pour but de calculer la position de l'effecteur en fonction des variables articulaires.

À partir de la (**Figure II-1**) On a :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \quad ; \quad x_2 = a \quad ; \\ y_1 &= 0 \quad ; \quad y_2 = 0 \quad \text{Et} \quad y_3 = b. \end{aligned}$$

En remplaçant ces valeurs dans les équations (**II-1**) et (**II-2**), on obtient :

$$L_1 = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{II-7}$$

$$L_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} \tag{II-8}$$

À partir des équations (**II-7**) et (**II-8**), le modèle géométrique directe s'exprime ainsi :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a^2 + L_1^2 - L_2^2}{2a} \end{aligned} \right. \tag{II-9}$$

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \pm \sqrt{L_1^2 - \left[\frac{a^2 + L_1^2 - L_2^2}{2a} \right]^2} \end{aligned} \right. \tag{II-10}$$

La solution du modèle géométrique direct exige le choix d'une valeur positive pour y.

II-4 Modélisation Cinématique

Le modèle cinématique complète le modèle géométrique, en écrivant les relations entre les vitesses des variables articulaires et les vitesses de l'organe terminal.

II-4-1 Modèle Cinématique Inverse (MCI)

Le modèle cinématique inverse permet de déterminer les expressions des vitesses articulaires en fonction de la vitesse de l'organe terminal.

Comme : $\cos(\theta_1) = \frac{x-x_1}{L_1}$ et $\sin(\theta_1) = \frac{y-y_1}{L_1}$

On a alors :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= x_1 + L_1 \cos(\theta_1) \\ y &= y_1 + L_1 \sin(\theta_1) \end{aligned} \right. \tag{II-11}$$

On a les relations trigonométriques suivantes :

$\cos(\pi-\theta_2) = -\cos(\theta_2)$ et $\sin(\pi-\theta_2) = \sin(\theta_2)$

De même on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \cos(\pi-\theta_2) &= \frac{x_2 - x}{L_2} \\ \sin(\pi-\theta_2) &= \frac{y - y_2}{L_2} \end{aligned} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \cos(\theta_2) &= \frac{x-x_2}{L_2} \\ \sin(\theta_2) &= \frac{y-y_2}{L_2} \end{aligned} \right.$$

Alors :

$$\begin{cases} x = x_2 + L_2 \cos(\theta_2) \\ y = y_2 + L_2 \sin(\theta_2) \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

On a aussi : $-\cos(2\pi-\theta_3) = \cos(\theta_3)$ et $\sin(2\pi-\theta_3) = -\sin(\theta_3)$

Et On a :

$$\begin{cases} \cos(2\pi-\theta_3) = \frac{x - x_3}{L_3} \\ \sin(2\pi-\theta_3) = \frac{y_3 - y}{L_3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cos(\theta_3) = \frac{x-x_3}{L_3} \\ \sin(\theta_3) = \frac{y-y_3}{L_3} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} x = x_3 + L_3 \cos(\theta_3) \\ y = y_3 + L_3 \sin(\theta_3) \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

À partir des équations (II-11) ; (II-12) et (II-13), on peut écrire :

$$\begin{cases} x = x_i + L_i \cos(\theta_i) \\ y = y_i + L_i \sin(\theta_i) \end{cases} ; \quad i = 1; 2; 3 \quad (\text{II-14})$$

Maintenant on cherche les dérivés de x et y par rapport au temps :

Dans notre cas on a :

$$\dot{x}_1 = 0 ; \quad \dot{x}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}_3 \neq 0$$

Pour $i=1$ et $i=2$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{L}_i \cos(\theta_i) - \dot{\theta}_i L_i \sin(\theta_i) \\ \dot{y} = \dot{L}_i \sin(\theta_i) + \dot{\theta}_i L_i \cos(\theta_i) \end{cases} \quad (\text{II-15})$$

Pour $i=3$, on obtient:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{L}_3 \cos(\theta_3) - \dot{\theta}_3 L_3 \sin(\theta_3) + \dot{x}_3 \\ \dot{y} = \dot{L}_3 \sin(\theta_3) + \dot{\theta}_3 L_3 \cos(\theta_3) \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} \dot{x} - \dot{x}_3 = \dot{L}_3 \cos(\theta_3) - \dot{\theta}_3 L_3 \sin(\theta_3) \\ \dot{y} = \dot{L}_3 \sin(\theta_3) + \dot{\theta}_3 L_3 \cos(\theta_3) \end{cases} \quad (\text{II-16})$$

On fait le changement de variables suivant :

$$\text{On pose : } \dot{X} = \begin{cases} \dot{x} & ; \text{ pour } i = 1; 2 \\ \dot{x} - \dot{x}_3 & ; \text{ pour } i=3 \end{cases}$$

$$\text{Et : } \dot{Y} = \dot{y} \quad ; \text{ pour } i = 1 ; 2 ; 3$$

En remplaçant dans les équations (II-15) et (II-16), on aura :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -L_i \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & L_i \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{L}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} \quad ; \quad i = 1; 2; 3 \quad \text{(II-17)}$$

En inversant, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ \frac{-\sin(\theta_i)}{L_i} & \frac{\cos(\theta_i)}{L_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} \quad ; \quad i = 1 ; 2 ; 3 \quad \text{(II-18)}$$

Nous ne nous intéressons qu'aux longueurs des câbles alors, à partir de l'équation (II-17), on a :

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} \quad \text{(II-19)}$$

$$\text{Cette équation peut s'écrire sous la forme : } \begin{bmatrix} \dot{L} \end{bmatrix} = [M] \cdot \begin{bmatrix} \dot{P} \end{bmatrix} \quad \text{(II-20)}$$

$$\text{Avec : } [M] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_3) \end{bmatrix} \quad \text{Et : } \begin{bmatrix} \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix}$$

[M] : Est la matrice jacobienne.

$\begin{bmatrix} \dot{P} \end{bmatrix}$: Est le vecteur vitesse de l'organe terminal.

II-4-2 Modèle Cinématique Direct (MCD)

Le modèle cinématique directe consiste à déterminer la vitesse de l'organe terminal en fonction des expressions des vitesses articulaires. Ainsi, la détermination de la vitesse de l'organe terminal revient à déterminer le vecteur de vitesse $\begin{bmatrix} \dot{P} \end{bmatrix}$. Pour se faire nous allons inverser l'équation (II-19) sous la forme : $\begin{bmatrix} \dot{P} \end{bmatrix} = [M^{-1}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{L} \end{bmatrix}$.

On constate que la matrice [M] n'est pas carrée de ce fait, le calcul de son inverse $[M^{-1}]$ devient impossible, pour y remédier nous allons utiliser la méthode de Moore-Penrose qui est définie comme suit :

Définition de la méthode de Moore-Penrose [SCH.1989] :

Si les colonnes d'une matrice A sont linéairement indépendants, alors $(A^T \cdot A)$: est inversible et nous obtenons la pseudo inverse par la formule suivante :

$$[A^+] = [(A^T \cdot A)^{-1}] \cdot [A^T]$$

En appliquant cette définition pour notre cas, on aura alors :

$$[\dot{P}] = [M^+] \cdot [L] \quad \text{(II-21)}$$

Avec : $[M^+] = [(M^T \cdot M)^{-1}] \cdot [M^T]$

$[M^+]$: est la pseudo-inverse de la matrice $[M]$.

$$\text{Avec : } [M] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \end{bmatrix} ;$$

$$\text{donc : } [M^T] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_1) & \sin(\theta_2) & \sin(\theta_3) \end{bmatrix}$$

Dans le but d'écrire les équations sous forme réduites, on pose :

$$C_1 = \cos(\theta_1) ; \quad C_2 = \cos(\theta_2) ; \quad C_3 = \cos(\theta_3)$$

$$S_1 = \sin(\theta_1) ; \quad S_2 = \sin(\theta_2) ; \quad S_3 = \sin(\theta_3)$$

En utilisant Matlab, on calcul les éléments de la matrice $[M^+]$:

$$M_{11}^+ = (C_1 (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + 2C_3 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) - (S_1 (C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) ;$$

$$M_{12}^+ = (C_2 (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) - (S_2 (C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) ;$$

$$M_{13}^+ = (C_3 (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) - (S_3 (C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) ;$$

$$M_{21}^+ = (S_1 (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) - (C_1 (C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) ;$$

$$M_{22}^+ = (S_2 (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) - (C_2 (C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) ;$$

$$M_{23}^+ = (S_3 (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) - (C_3 (C_1 S_1 + C_2 S_2 + C_3 S_3)) / (C_1^2 S_2^2 + C_1^2 S_3^2 - 2C_1 C_2 S_1 S_2 - 2C_1 C_3 S_1 S_3 + C_2^2 S_1^2 + C_2^2 S_3^2 - 2C_2 C_3 S_2 S_3 + C_3^2 S_1^2 + C_3^2 S_2^2) .$$

Ainsi, le modèle cinématique directe est défini comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = [M^+]. \begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{bmatrix}$$

II-5 Modélisation Dynamique

La modélisation dynamique incorpore au modèle les caractéristiques inertielles comme la masse, le moment d'inertie et le centre de gravité des composants en mouvement.

II-5-1 Formulation Lagrangienne

D'abord on définit la fonction de Lagrange L selon : $L = E_C - E_P$

Où E_C est l'énergie cinétique et E_P l'énergie potentielle,

Les équations de Lagrange sont définies par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_R \quad (II-22)$$

Où :

q : est le vecteur des coordonnées articulaires, pour notre cas $q = x ; y$.

F_R : est le vecteur des forces associées aux articulations.

D : l'énergie de dissipation du système.

II-5-2 L'énergie cinétique (E_C)

Dans la formulation lagrangienne décrite ci-dessus l'énergie cinétique du mécanisme se réfère à la somme de l'énergie cinétique de chacun des corps :

$$E_C = \sum E_{Ci}$$

Où : E_{Ci} est l'énergie cinétique du corps i définie comme étant la somme de l'énergie cinétique de translation et celle de rotation :

$$E_{Ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \dot{\beta}_i^T [J]_i \dot{\beta}_i$$

Où v_i et β_i représentent respectivement les vecteurs de vitesse du centre de masse et de vitesse angulaire du corps i , m_i est sa masse et $[J]_i$ est la matrice d'inertie par rapport à son centre de masse.

Dans notre cas on a :

- Le mouvement de translation de l'effecteur : $E_{C1} = \frac{1}{2} m v_e^2$

Où m est la masse de l'effecteur et v_e sa vitesse définie comme : $v_e^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

Ainsi : $E_{C1} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$.

- Le mouvement de translation du point 3 : $E_{C2} = \frac{1}{2} M v_3^2$

Où M est la masse du la de l'ensemble contenant le point 3 y compris le moteur et la poulie et v_3 sa vitesse définie comme : $v_3^2 = \dot{x}_3^2$.

Afin de simplifier les calculs on a proposé une configuration dans laquelle x_3 est toujours égal à x ($x_3 = x$) ainsi, $x_3 = x \longrightarrow \dot{x}_3 = \dot{x}$

Alors : $E_{C2} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$

- Le mouvement de rotation des trois poulies 1,2 et 3 :

$$E_{C3} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\beta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\beta}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\beta}_3^2$$

- ❖ Dans notre cas le point 3 étant mobile, il est entraîné par un autre moteur, appelé moteur 4 qui permet le mouvement de translation de ce point A_3 au moyen d'un système composé de deux poulies reliées par la courroie d'entraînement. Leurs énergies cinétiques : $E_{C4} = \frac{1}{2} J_4 \dot{\beta}_4^2$

Enfin l'énergie cinétique du mécanisme est :

$$E_C = E_{C1} + E_{C2} + E_{C3} + E_{C4}$$

$$E_C = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\beta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\beta}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\beta}_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{\beta}_4^2 \quad (\text{II-23})$$

Détermination des angles β_i :

Calculons les vitesses angulaires des angles de rotation des poulies :

$$\beta_i \cdot r = -\Delta L_i$$

Avec : ΔL_i la variation des longueurs de câbles,

$$\Delta L_i = L_i - L_{i0}$$

$$\text{Où : } L_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad ; \quad i = 1; 2; 3$$

$$L_{i0} \text{ sont les longueurs initiales des câbles : } L_{i0} = \sqrt{(x_i)^2 + (y_i)^2}$$

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} L_{10} - L_1 \\ L_{20} - L_2 \\ L_{30} - L_3 \end{bmatrix}$$

En dérivant, on obtient $\dot{\beta}_i$:

$$[\dot{\beta}] = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Pour notre configuration on a : $x_3 = x$

$$\text{Alors : } \theta_3 = 3\pi/2 \quad \text{et donc : } \cos(\theta_3) = 0 \quad \text{Et} \quad \sin(\theta_3) = -1$$

Ainsi :

$$[\dot{\beta}] = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Calcul de $\dot{\beta}_4$:

Le moteur 4 est placé sur la base fixe au point de coordonnées (a, b). On a alors :
 $\beta_4 * r = -\Delta L_4$

Avec : $\Delta L_4 = x_3 = x$

$$\text{Et donc : } \dot{\beta}_4 = -\frac{1}{r} \dot{x}$$

$$\text{Alors : } [\dot{\beta}] = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad \text{(II-24)}$$

En remplaçant l'équation (II-24) dans l'équation (II-23), on obtient l'énergie cinétique du mécanisme (E_c) :

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2r^2} [J_1 (\dot{x} \cos(\theta_1) + \dot{y} \sin(\theta_1))^2 + J_2 (\dot{x} \cos(\theta_2) + \dot{y} \sin(\theta_2))^2 + J_3 \dot{y}^2 + J_4 \dot{x}_3^2] \quad \text{(II-25)}$$

II-5-3 L'énergie potentielle (E_P)

L'énergie potentielle d'un système physique est l'énergie liée à une interaction, qui a le potentiel de se transformer en énergie cinétique. Elle est une fonction de ce système, dépendant des coordonnées d'espace, et éventuellement du temps, ayant la dimension d'une énergie et qui est associée à une force dite conservative dont l'expression s'en déduit par dérivation. La différence entre les énergies potentielles associées à deux points de l'espace est égale à l'opposé du travail de la force concernée pour aller d'un point à l'autre, et ce quel que soit le chemin utilisé.

Elle peut être de nature diverse, suivant le système étudié et la force qui en est déduite :

- Énergie potentielle mécanique ;
- Énergie potentielle de pesanteur ;
- Énergie potentielle élastique ;
- Énergie potentielle chimique ;
- Énergie potentielle électrostatique ;
- Énergie potentielle magnétique.

Dans notre cas, pour l'énergie potentielle du mécanisme on a :

- Le mouvement de l'effecteur est sur le plan horizontal, alors : $\Delta Z = 0$ et donc : $E_P = mg\Delta Z = 0$.
- Les poulies sont solidaires avec la base fixe et les fils sont considérés inextensibles et de masse négligeable.
- L'absence des ressorts alors, $E_P = \frac{1}{2} K\Delta U^2 = 0$.
- Une force de frottement n'est pas conservative et ne dérive pas d'une énergie potentielle.

Enfin, on conclue que l'énergie potentielle du mécanisme est nulle :

$$E_P = 0 \quad (II-26)$$

II-5-4 L'énergie de dissipation (D)

L'énergie de dissipation du mécanisme est due aux forces de frottement dans les moteurs et les poulies, elle est définie comme :

$$D = \frac{1}{2} C_1 \dot{\beta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{\beta}_2^2 + \frac{1}{2} C_3 \dot{\beta}_3^2 + \frac{1}{2} C_4 \dot{\beta}_4^2 \quad (II-27)$$

Où : C_i sont les coefficients de frottement et β_i les vitesses angulaires de chaque poulie.

En remplaçant les équations (II-24) dans l'équation (II-27), on obtient l'énergie de dissipation du mécanisme(D) :

$$D = \frac{1}{2r^2} [c_1 (\cos(\theta_1) \dot{x} + \sin(\theta_1) \dot{y})^2 + c_2 (\cos(\theta_2) \dot{x} + \sin(\theta_2) \dot{y})^2 + c_3 \dot{y}_3^2 + c_4 \dot{x}_3^2] \quad (\text{II-28})$$

II-5-6 Calcul des forces agissant sur le système

Pour déterminer les forces agissant sur le système, on utilise l'expression de la puissance virtuelle (P^*) des quatre moteurs qui est définie d'une part par

$$P^* = \tau_1 \dot{\beta}_1 + \tau_2 \dot{\beta}_2 + \tau_3 \dot{\beta}_3 + \tau_4 \dot{\beta}_4 \quad (\text{II-29})$$

$$\text{D'autre part : } P^* = F_R \cdot V \quad (\text{II-30})$$

$$\text{Avec : } [\dot{\beta}] = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{II-31})$$

En remplaçant l'équation (II-31) dans (II-29), on aura :

$$P^* = -\frac{1}{r} [\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4] \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{II-32}) \quad \text{Ainsi,}$$

par identification entre la relation (II-29) et la relation (II-31), on obtient F_x et F_y :

$$F_x = -\frac{1}{r} (\tau_1 \cos(\theta_1) + \tau_2 \cos(\theta_2) + \tau_4)$$

$$F_y = -\frac{1}{r} (\tau_1 \sin(\theta_1) + \tau_2 \sin(\theta_2) - \tau_3)$$

II-5-7 Calcul de dérivées

Calculons les différentes dérivées de l'expression de Lagrangien L et de l'expression de l'énergie de dissipation D :

Dérivées par rapport à \dot{x} :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} + M \dot{x} + \frac{1}{r^2} J_1 \cos(\theta_1) \cdot [\cos(\theta_1) \dot{x} + \sin(\theta_1) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} J_2 \cos(\theta_2) \cdot [\cos(\theta_2) \dot{x} + \sin(\theta_2) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} J_4 \dot{x}$$

On dérive $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} + M \ddot{x} + \frac{1}{r^2} J_1 [\cos^2(\theta_1) \ddot{x} - \dot{\theta}_1 \sin(2\theta_1) \dot{y} + \frac{1}{2} \ddot{y} \sin(2\theta_1) + \dot{\theta}_1 \dot{y} \cos(2\theta_1)] + \frac{1}{r^2} J_2 [\cos^2(\theta_2) \ddot{x} - \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \dot{y} + \frac{1}{2} \ddot{y} \sin(2\theta_2) + \dot{\theta}_2 \dot{y} \cos(2\theta_2)] + \frac{1}{r^2} J_4 \ddot{x}$$

La dérivée de l'expression de l'énergie de dissipation par rapport à \dot{x} est :

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{r^2} C_1 \cos(\theta_1) \cdot [\cos(\theta_1) \dot{x} + \sin(\theta_1) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} C_2 \cos(\theta_2) \cdot [\cos(\theta_2) \dot{x} + \sin(\theta_2) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} C_4 \dot{x}$$

Dérivées par rapport à \dot{y} :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} + \frac{1}{r^2} J_1 \sin(\theta_1) \cdot [\cos(\theta_1) \dot{x} + \sin(\theta_1) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} J_2 \sin(\theta_2) \cdot [\cos(\theta_2) \dot{x} + \sin(\theta_2) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} J_3 \dot{y}$$

On dérive $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m \ddot{y} + \frac{1}{r^2} J_1 [\sin^2(\theta_1) \ddot{y} - \dot{\theta}_1 \sin(2\theta_1) \dot{x} + \frac{1}{2} \sin(2\theta_1) \ddot{x} + \dot{\theta}_1 \sin(2\theta_1) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} J_2 [\sin^2(\theta_2) \ddot{y} - \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \dot{x} + \frac{1}{2} \sin(2\theta_2) \ddot{x} + \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} J_3 \ddot{y}$$

La dérivée de l'expression de l'énergie de dissipation par rapport à \dot{y} est :

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{r^2} J_1 \sin(\theta_1) \cdot [\cos(\theta_1) \dot{x} + \sin(\theta_1) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} C_2 \sin(\theta_2) \cdot [\cos(\theta_2) \dot{x} + \sin(\theta_2) \dot{y}] + \frac{1}{r^2} C_3 \dot{y}$$

On substitue ces équations dans la formule de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \mathbf{F}_R$$

- β : est l'angle de rotation de la poulie.

On a :

$$\beta_i r = -\Delta L_i$$

Alors : $\beta = f(P)$; avec : $P(x,y)$ le vecteur de position de l'effecteur.

$\beta = f(P)$ donc :

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{\partial \beta}{\partial P} \dot{P} \\ \ddot{\beta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \beta}{\partial P} \right) \dot{P} + \frac{\partial \beta}{\partial P} \ddot{P} \end{aligned} \quad (II-37)$$

En remplaçant $\ddot{\beta}$ et $\dot{\beta}$ dans l'équation , on obtient :

$$T = \frac{1}{r} \left(\tau - J \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \beta}{\partial P} \right) \dot{P} + \frac{\partial \beta}{\partial P} \ddot{P} \right) - C \frac{\partial \beta}{\partial P} \dot{P} \right) \quad (II-38)$$

Détermination de l'expression de T :

En appliquant la 2^{ème} loi de Newton pour l'effecteur (**Figure II-2**), on obtient l'équation:

$$[m](\ddot{P}) = (F_R) \quad (II-39)$$

Où :

- ✓ $[m]$ est la matrice de masse de l'organe terminal.
- ✓ (\ddot{P}) est le vecteur d'accélération de l'organe terminal.
- ✓ $F_R \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$: est le vecteur de force résultante de toutes les tensions des câbles appliqués sur l'organe terminal.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (II-40)$$

La relation statique entre la force résultante de l'effecteur et les tensions des câbles est donnée par :

$$F_R = ST \quad (II-41)$$

Avec : $[S(P)] = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & 0 & 1 \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & -1 & 0 \end{bmatrix}$

En combinant les équations (II-39) et (II-41), on obtient l'expression de T :

$$T = \frac{m\dot{P}}{s} \quad (\text{II-42})$$

Ainsi, à partir des équations (II-42 et (II-38)), on a la forme matricielle du modèle dynamique pour notre système :

$$M(P)\ddot{P} + N(P, \dot{P}) = S(P)\tau \quad (\text{II-43})$$

Où :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [N] = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

$$M(P) = rm + S(P)J \frac{\partial \beta}{\partial P} \quad \text{et} \quad N(P, \dot{P}) = S(P) \left(J \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \beta}{\partial P} \right) + C \frac{\partial \beta}{\partial P} \right) \dot{P}$$

Et :

$$\frac{\partial \beta}{\partial P} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S(P)] = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & 0 & 1 \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[J] est la matrice d'inertie :

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix}$$

[C] est la matrice des coefficients d'amortissements de chaque moteur.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$$

Ainsi, en effectuant les calculs, on obtient :

Les éléments de la matrice [M] :

$$M_{11} = r^*m + \frac{1}{r} [J_1 \cos^2(\theta_1) + J_2 \cos^2(\theta_2) + J_4] ;$$

$$M_{21} = M_{12} = \frac{1}{r} [J_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + J_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)] ;$$

$$M_{22} = r^*m + \frac{1}{r} [J_1 \sin^2(\theta_1) + J_2 \sin^2(\theta_2) - J_3] .$$

Les éléments de la matrice [N] :

$$N_{11} = \cos(\theta_1) [C_1 \cos(\theta_1) - 2J_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)] + \cos(\theta_2) [C_2 \cos(\theta_2) - 2J_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)] + \frac{C_4}{r} ;$$

$$N_{12} = N_{21} = \frac{1}{r} [C_1 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + J_1 \dot{\theta}_1 (\cos^2(\theta_1) - \sin^2(\theta_1)) + C_2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + J_2 \dot{\theta}_2 (\cos^2(\theta_2) - \sin^2(\theta_2)) + J_3 \dot{\theta}_3 + J_4 \dot{\theta}_4] ;$$

$$N_{22} = \sin(\theta_1) [C_1 \sin(\theta_1) + 2J_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)] + \sin(\theta_2) [C_2 \sin(\theta_2) - 2J_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)] + C_3 .$$

II-6 Modèle statique

Les câbles ne travaillent qu'en traction, en effet les câbles ne peuvent que tirer l'organe terminal. Alors l'effecteur est soumis aux efforts de tractions appliquées par les trois câbles. À l'équilibre statique, la somme des forces extérieures exercées sur l'effecteur par les câbles doit être égale à la force résultante \mathbf{F}_R externe (**figure II-2**).

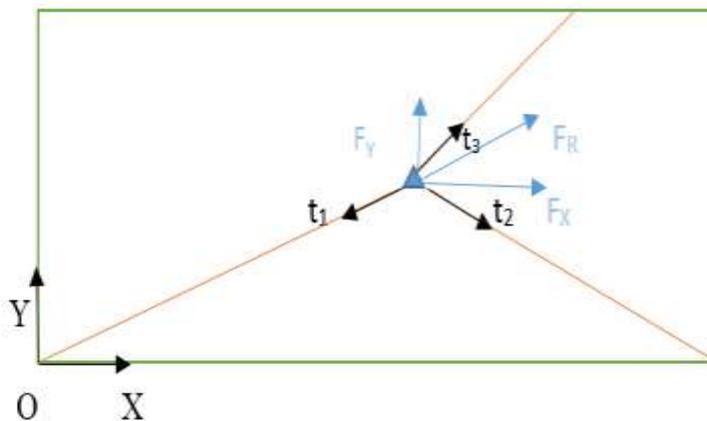


Figure II-2 : schéma représentant les forces extérieures appliquées sur l'effecteur.

La somme des forces extérieures appliquées sur l'effecteur égale à la force résultante F_R :

$$\vec{t}_1 + \vec{t}_2 + \vec{t}_3 = \vec{F}_R \quad (\text{II-44})$$

Par projection sur l'axe (OX), on a :

$$-t_1 \cos(\theta_1) - t_2 \cos(\theta_2) - t_3 \cos(\theta_3) = F_X \quad (\text{II-45})$$

Par projection sur l'axe (OY), on a :

$$-t_1 \sin(\theta_1) - t_2 \sin(\theta_2) - t_3 \sin(\theta_3) = F_Y \quad (\text{II-46})$$

Les équations (II-45) et (II-46) peuvent être traduites sous la forme matricielle suivante :

$$HT = F_R \quad (\text{II-47})$$

Avec :

$$F_R = [F_x \quad F_y]^T \quad ; \quad T = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]^T$$

$$[H] = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & -\cos(\theta_3) \\ -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & -\sin(\theta_3) \end{bmatrix}$$

II-7 Conclusion

Ce chapitre a débuté par un bref exposé sur la notation et une présentation du mécanisme. Les solutions aux problèmes géométriques et cinématiques ont été obtenues. Elles nous ont permis d'établir les équations de vitesses et la matrice jacobienne.

Une analyse dynamique basée sur la mécanique lagrangienne a ensuite permis d'établir les équations différentielles régissant le comportement du robot, ces équations différentielles ont été traduites sous forme matricielle, cette forme est à la base de la programmation et la simulation qui seront présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre III
Simulation et résultats

III-1 Introduction

Dans ce chapitre nous développons deux programmes en Matlab qui permettent la simulation des résultats obtenus dans le chapitre précédent. Dans le premier différents cas de trajectoires entre les positions initiales et finales de l'effecteur ont été générés pour pouvoir suivre le comportement du robot et le positionnement de l'effecteur et des câbles et déterminer les longueurs des câbles pour les différentes positions de l'effecteur. Le deuxième programme est consacré à la vérification du modèle dynamique du système par la détermination des tensions dans les câbles et des couples moteurs. Les résultats des différentes simulations sont représentés par des figures et des tableaux.

III-2 Simulation du modèle géométrique

Le robot à câble doit être conçu de manière à ce que l'effecteur soit capable de suivre les différents types de trajectoires (rectilignes, circulaires, ou autres) pour cette raison nous allons illustrer ces calculs pour deux cas de trajectoires significatifs : la trajectoire rectiligne et la trajectoire circulaire

III-2-1 Présentation du programme

Conformément aux notations de la figure(II.1), les différentes étapes de notre programme peuvent être résumées comme suit :

- Introduire les dimensions de la base fixe : La longueur (a) et la largeur (b).

Dans notre simulation, on choisit les dimensions de la base fixe comme suit :

- La longueur de la base fixe est : $a=40$ cm.
- La largeur est : $b=30$ cm.
- Introduire les coordonnées des points de fixations des câbles sur les poulies :

$$\begin{aligned} x_{A1}=0 & ; y_{A1}=0; \\ x_{A2}=a & ; y_{A2}=0 ; y_{A3}=b; \end{aligned}$$

- Introduire les coordonnées du point de départ (x_i, y_i) et du point d'arrivée (x_f, y_f) de la trajectoire.
- Introduire le rayon et l'angle de l'arc de cercle pour le cas de la trajectoire circulaire.
- Calcul de la longueur de la trajectoire.
- Calcul des longueurs des câbles : $l_i=\text{sqrt}((x-x_{Ai}).^2 + (y-y_{Ai}).^2)$;

- Affichage des valeurs des longueurs des différents câbles.
- Représentations graphiques de la trajectoire et les positions des câbles, ainsi que les variations des longueurs des câbles.

III-2-2 Les résultats obtenus pour une trajectoire rectiligne

Nous avons exécuté le programme présenté ci-dessus pour trois cas différents de trajectoires rectilignes de l'effecteur :

Cas 1 : l'effecteur se déplace parallèlement à l'axe (OX).

Cas 2 : l'effecteur se déplace parallèlement à l'axe (OY).

Cas 3 : l'effecteur se déplace dans le plan (OXY) selon une ligne inclinée.

Cas 1 : l'effecteur se déplace parallèlement à l'axe (OX) :

Initialement l'effecteur est à la position (2,14), si on veut que l'effecteur se déplace parallèlement à l'axe (OX) pour atteindre la position (19,14). On exécute le programme, on obtient les résultats suivants :

La longueur de la trajectoire est $L= 17$ cm.

Positions de l'effecteur et des câbles :

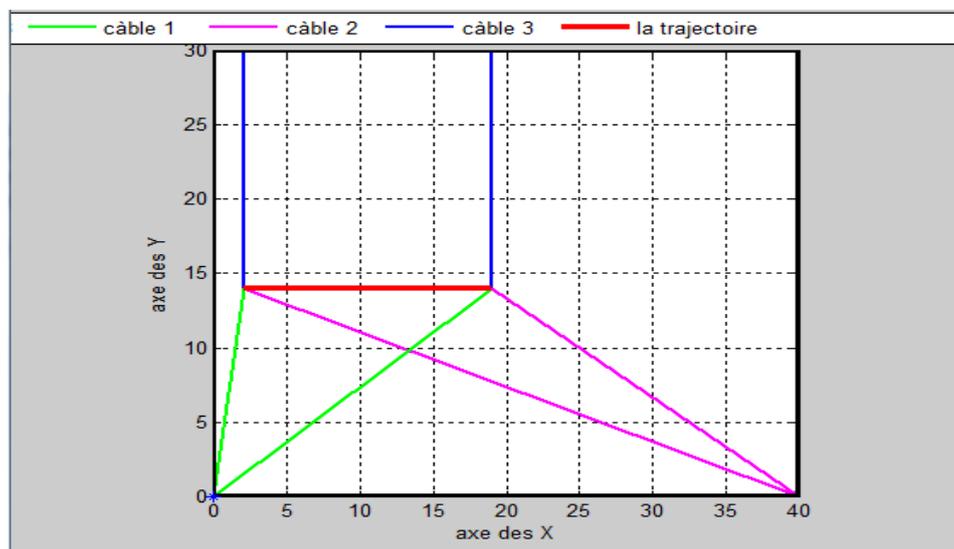


Figure III-1 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OX).

Longueurs des différents câbles :

Tableau III-1 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OX).

La longueur de La trajectoire (cm)	La valeur de x_3 (cm)	Les longueurs du câble 1 (cm)	Les longueurs du câble 2 (cm)	Les longueurs du câble 3 (cm)
0	2	14.14	40.49	16
1	3	14.31	39.56	16
2	4	14.56	38.62	16
3	5	14.86	37.69	16
4	6	15.23	36.76	16
5	7	15.65	35.84	16
6	8	16.12	34.92	16
7	9	16.64	34.01	16
8	10	17.20	33.10	16
9	11	17.80	32.20	16
10	12	18.43	31.30	16
11	13	19.10	30.41	16
12	14	19.79	29.52	16
13	15	20.51	28.65	16
14	16	21.26	27.78	16
15	17	22.02	26.92	16
16	18	22.80	26.07	16
17	19	23.60	25.23	16

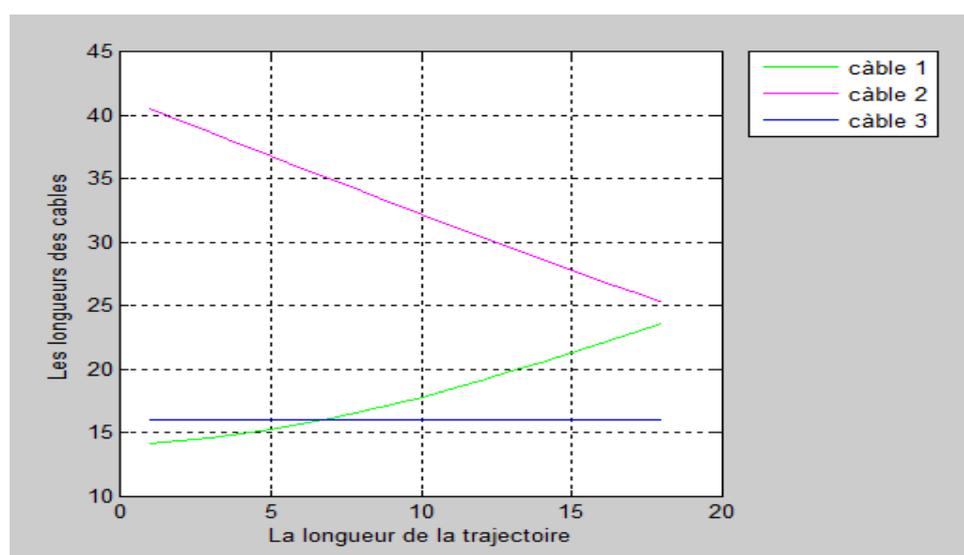
Variations des longueurs des câbles :

Figure III-2 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OX).

Remarques et commentaires :

A partir du tableau III-1 et des figures III-1 et III-2, on constate que :

- ❖ L'effecteur suit une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OX).
- ❖ Les points de fixation des câbles 1 et 2 sont fixes, tandis que le point de fixation du câble 3 est mobile suivant l'axe (OX).
- ❖ Lorsque l'effecteur se déplace de sa position initiale vers sa position finale, la longueur du câble 1 augmente de 14.1cm jusqu'à 23.6 cm. La longueur du câble 2 diminue de 40.4 cm jusqu'à 25.2 cm, quant à la longueur du câble 3, elle reste constante (égale à 16 cm) pour toute la trajectoire.

Cas 2 : l'effecteur se déplace parallèlement à l'axe (OY) :

Initialement l'effecteur est à la position (15,11), si on veut que l'effecteur se déplace parallèlement à l'axe (OY) pour atteindre la position (15,16) on exécute le programme, on obtient les résultats suivants :

La longueur de la trajectoire est $L = 5$ cm.

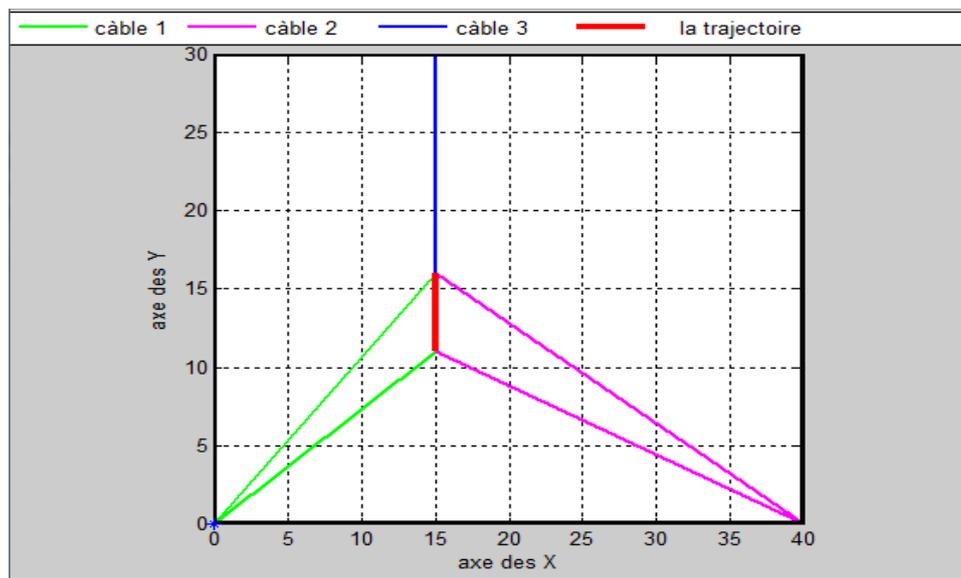
Positions de l'effecteur et des câbles :

Figure III-3 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OY).

Longueurs des différents câbles :

Tableau III-2 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OY).

La longueur de la trajectoire (cm)	La valeur de x_3 (cm)	Les longueurs du câble 1 (cm)	Les longueurs du câble 2 (cm)	Les longueurs du câble 3 (cm)
0.00	15	18.60	27.31	19.00
0.25	15	18.75	27.41	18.75
0.50	15	18.90	27.51	18.50
0.75	15	19.05	27.62	18.25
1.00	15	19.20	27.73	18.00
1.25	15	19.36	27.83	17.75
1.50	15	19.52	27.95	17.50
1.75	15	19.68	28.06	17.25
2.00	15	19.84	28.17	17.00
2.25	15	20.01	28.29	16.75
2.50	15	20.18	28.41	16.50
2.75	15	20.34	28.53	16.25
3.00	15	20.51	28.65	16.00
3.25	15	20.68	28.77	15.75
3.50	15	20.86	28.90	15.50
3.75	15	21.03	29.02	15.25
4.00	15	21.21	29.15	15.00
4.25	15	21.39	29.28	14.75
4.50	15	21.56	29.41	14.50
4.75	15	21.75	29.54	14.25
5.00	15	21.93	29.68	14.00

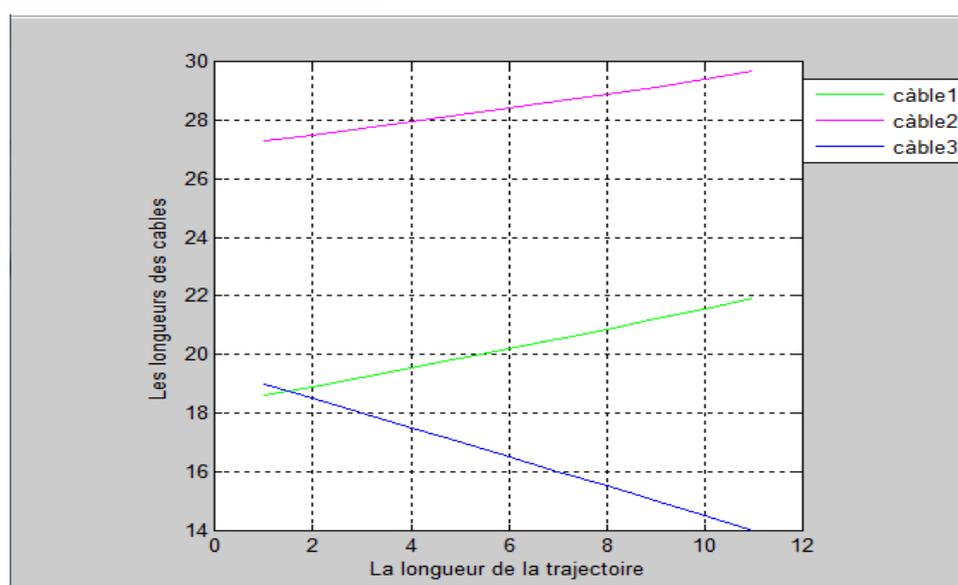
Variations des longueurs des câbles :

Figure III-4 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OY).

Remarques et commentaires :

A partir des figures III-3 et III-4 et du tableau III-2, on constate que :

- ❖ L'effecteur suit une trajectoire rectiligne parallèle à l'axe (OY), en partant de la position initiale (2,14) pour atteindre la position finale (19,14),
- ❖ Contrairement au cas précédent le point de fixation du câble 3 est fixe, de même que les points de fixation des câbles 1 et 2
- ❖ Lorsque l'effecteur se déplace de sa position initiale vers sa position finale, la longueur du câble1 augmente de 18.6 cm jusqu'à 21.9 cm. La longueur du câble2 augmente de 27.3 cm jusqu'à 29.6 cm et la longueur du câble 3 diminue de 19 cm jusqu'à 14 cm tout en restant sur la même verticale.

Cas 3 : l'effecteur se déplace dans le plan (OXY) selon une ligne inclinée :

Initialement l'effecteur est à la position (5,10), l'effecteur se déplace suivant une trajectoire rectiligne inclinée par rapport aux axes (OX) et (OY) pour atteindre la position (21,23), en exécutant le programme on obtient les résultats suivants :

La longueur de la trajectoire est $L=20.6$ cm.

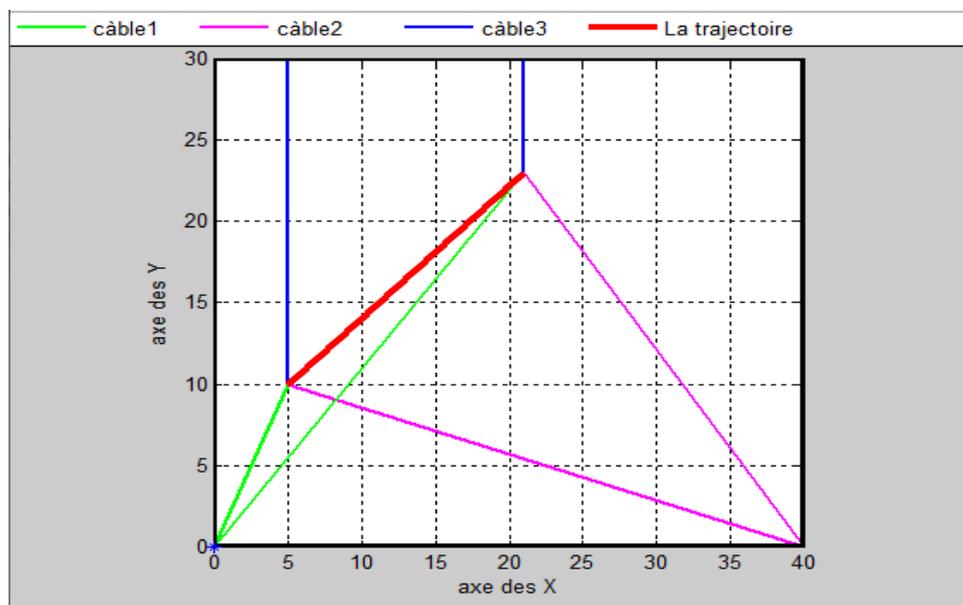
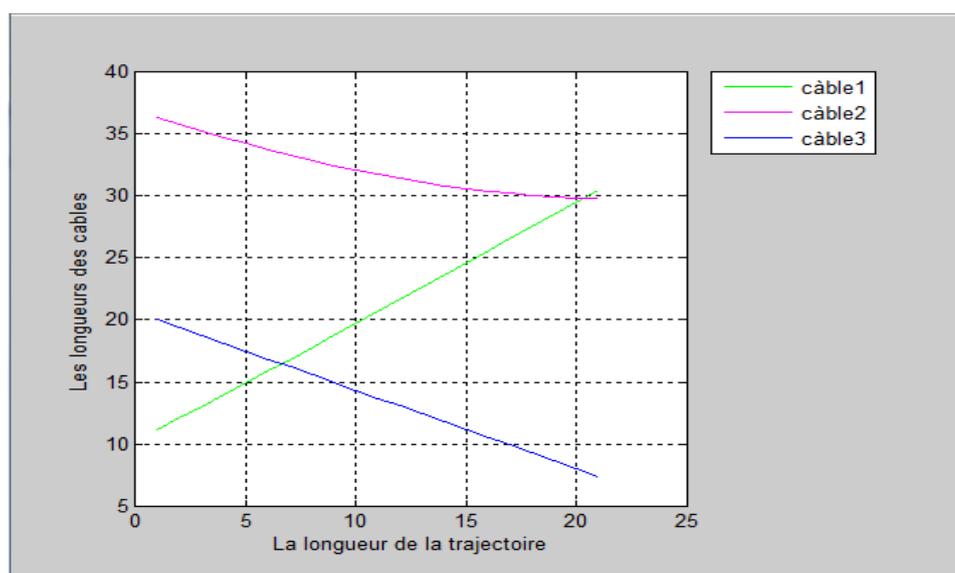
Positions de l'effecteur et des câbles :

Figure III-5 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une rectiligne inclinée.

Longueurs des différents câbles:**Tableau III-3 :** Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne inclinée.

La longueur de la trajectoire (cm)	La valeur de x_3 (cm)	Les longueurs du câble 1 (cm)	Les longueurs du câble 2 (cm)	Les longueurs du câble 3 (cm)
0	5.00	11.18	36.40	20.00
1	5.77	12.09	35.83	19.36
2	6.55	13.02	35.29	18.73
3	7.32	13.96	34.76	18.10
4	8.10	14.91	34.26	17.47
5	8.88	15.87	33.78	16.84
6	9.65	16.82	33.32	16.21
7	10.43	17.79	32.89	15.58
8	11.20	18.76	32.48	14.95
9	11.98	19.73	32.10	14.32
10	12.76	20.70	31.74	13.69
11	13.53	21.68	31.41	13.06
12	14.31	22.66	31.11	12.43
13	15.08	23.64	30.84	11.80
14	15.86	24.62	30.61	11.17
15	16.64	25.60	30.40	10.54
16	17.41	26.58	30.22	9.91
17	18.19	27.57	30.08	9.27
18	18.97	28.56	29.96	8.64
19	19.74	29.54	29.88	8.01
20	20.52	30.53	29.84	7.388

Variations des longueurs des câbles :**Figure III-6 :** Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne inclinée.

Remarques et commentaires :

A partir des figures III-5 et III-6 et du tableau III-3, on constate que :

- ❖ L'effecteur suit une trajectoire rectiligne inclinée en partant de la position initiale (5,10) pour atteindre la position finale (21,23).
- ❖ Les points de fixation des câbles 1 et 2 sont fixes, tandis que le point de fixation du câble 3 est mobile suivant l'axe (OX).
- ❖ Lorsque l'effecteur se déplace de sa position initiale vers sa position finale suivant une trajectoire inclinée, la longueur du câble 1 augmente de 11.1 cm jusqu'à 30.5 cm, la longueur du câble 2 diminue de 36.4 cm jusqu'à 29.8 cm et la longueur du câble 3 diminue de 20 cm jusqu'à 7.3 cm.

III-2-3 Les résultats obtenus pour une trajectoire circulaire

En exécutant le programme présenté précédemment pour une trajectoire circulaire de centre (0,0) et du point de départ (6,0), on obtient les résultats suivants :

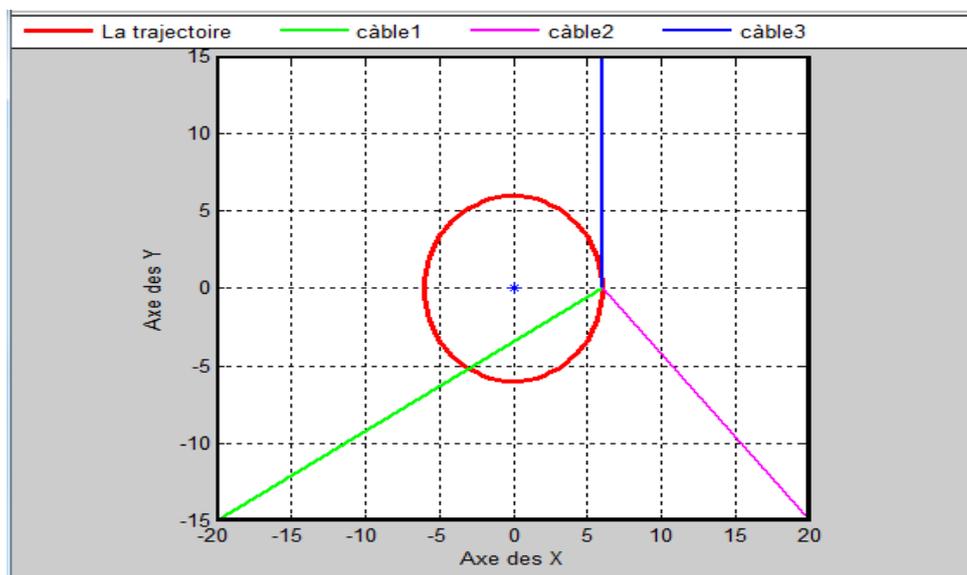
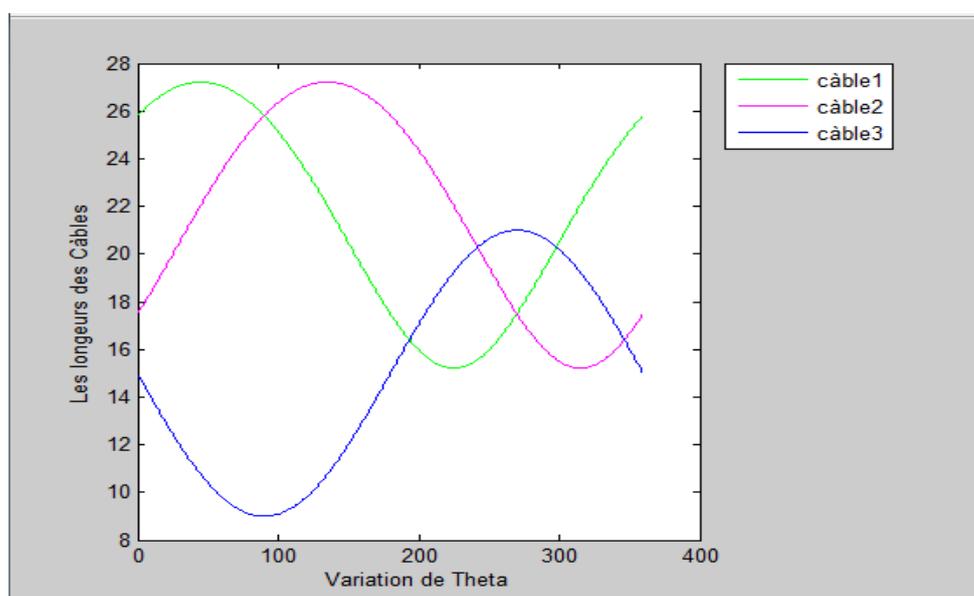
Positions de l'effecteur et des câbles :

Figure III-7 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire circulaire.

Longueurs des différents câbles:**Tableau III-4 :** Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire circulaire.

Variation d'angle Theta (°)	Les longueurs du Câble 1(cm)	Les longueurs du Câble 2(cm)	Les longueurs du Câble 3(cm)
0	30.02	20.51	15.00
20	30.79	22.29	12.94
40	30.99	24.34	11.14
60	30.60	26.39	9.80
80	29.66	28.22	9.09
100	28.22	29.66	9.09
120	26.39	30.60	9.80
140	24.34	30.99	11.14
160	22.29	30.79	12.94
180	20.51	30.01	15.00
200	19.33	28.72	17.05
220	19.01	27.00	18.85
240	19.62	25.00	20.19
260	21.02	22.92	20.90
280	22.92	21.02	20.90
300	25.00	19.62	20.19
320	27.00	19.01	18.85
340	28.72	19.33	17.05
360	30.01	20.51	15.00

Variations des longueurs des câbles :**Figure III-8 :** Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire circulaire.

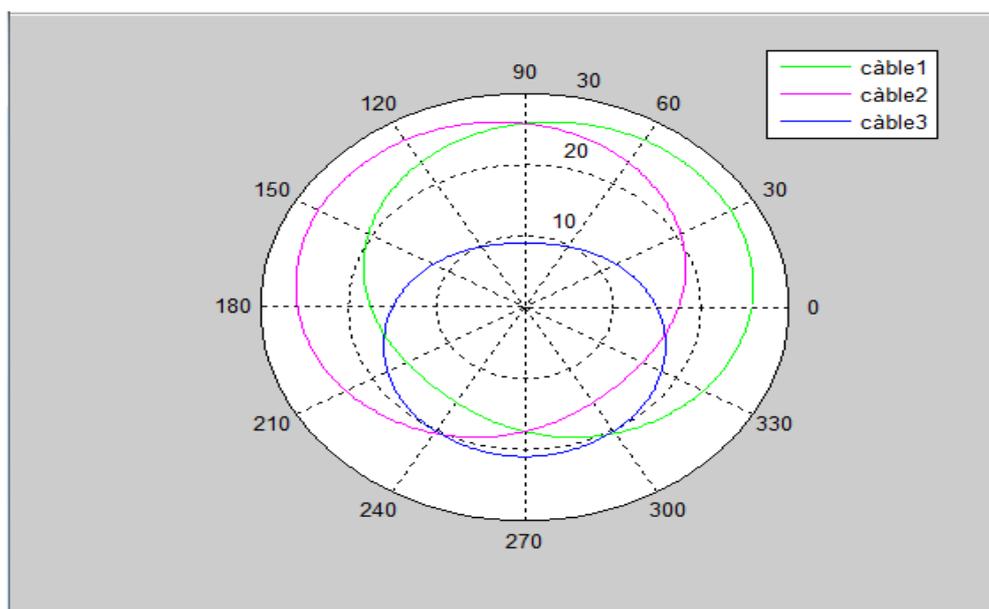


Figure III-9 : Les variations des longueurs des câbles pour une trajectoire circulaire en fonction des coordonnées polaires.

Remarques et commentaires :

A partir des figures III-7, III-8 et III-9 et du tableau III-4, on constate que :

- ❖ L'effecteur suit une trajectoire circulaire.
- ❖ Les longueurs des câbles 1 et 2 varient de la même manière, c'est-à-dire lorsque L_1 augmente L_2 augmente et lorsque L_1 diminue L_2 aussi diminue, tandis que la longueur du câble 3 varie contrairement de L_1 et L_2 , lorsque L_1 et L_2 augmentent L_3 diminue et lorsque L_1 et L_2 diminuent L_3 augmente.

III-3 Simulation du modèle dynamique

Dans cette partie, nous allons illustrer les calculs dynamiques pour la détermination des tensions dans les câbles et les couples moteurs pour deux cas de trajectoires significatifs à savoir : la trajectoire rectiligne et la trajectoire circulaire.

III-3-1 Présentation du programme

Les différentes étapes du programme permettant d'obtenir ces résultats, peuvent être résumés comme suit :

- Introduire les moments d'inertie des poulies ($J_i, i=1\dots4$).
- Introduire les rayons des poulies ($r_i, i=1\dots4$).

- Introduire les coefficients des frottements ($C_i, i=1\dots4$).
- Introduire la masse de l'effecteur.
- La durée du mouvement de l'effecteur ainsi que les équations temporelles $x(t)$ et $y(t)$.
- Calculer les éléments des matrices M, N et S à partir des expressions établies au chapitre précédent.
- Calcul de la matrice pseudo inverse de $S : S^+ = (S^T \cdot S)^{-1} \cdot S^T$.
- Calcul des tensions dans les câbles et calcul des couples moteurs à intervalles de temps réguliers.
- Représentations graphiques des variations des valeurs des tensions dans les câbles, ainsi que des variations des couples moteurs.

III-3-2 Simulation dynamique pour une trajectoire rectiligne

A titre d'exemple, si à ($t=0s$) l'effecteur est à la position initiale (1,4), et se déplace suivant une trajectoire rectiligne pour atteindre la position finale (6,19) à ($t=20s$), et on considère que le mouvement de l'effecteur s'effectue en deux phases différentes :

$t \in [0s ; 10s]$: l'effecteur suit un mouvement uniformément accéléré.

$t \in] 10s ; 20s]$: l'effecteur suit un mouvement uniformément décéléré.

L'équation de mouvement y en fonction de x est définie comme suit : $y=3x+1$.

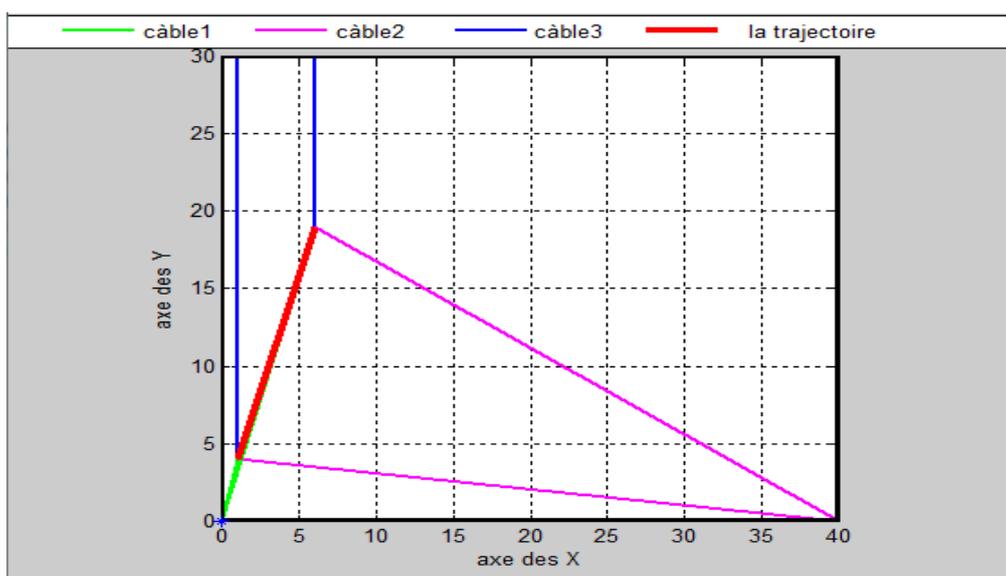


Figure III-10 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire rectiligne d'équation $y=3x+1$.

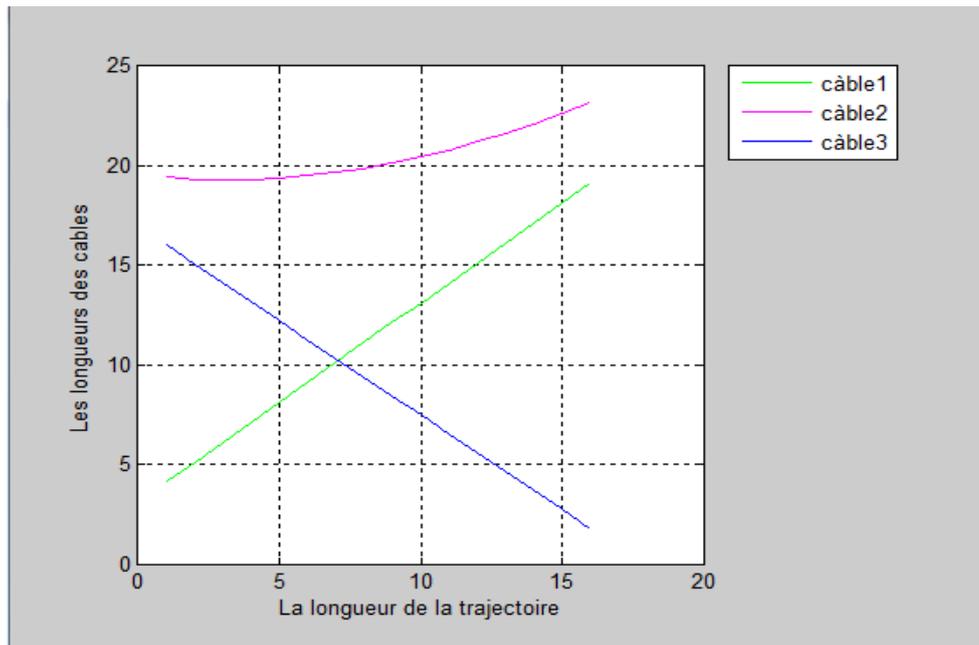


Figure III-11 : Variations des longueurs des câbles pour une trajectoire rectiligne.
d'équation : $y=3x+1$.

Les équations temporelles sont définies comme suit:

Pour : $t \in [0s ; 10s]$

$$x(t) = 0.02t^2 + 1$$

$$\dot{x}(t) = 0.04t$$

$$\ddot{x}(t) = 0.04$$

$$y(t) = 0.06t^2 + 4$$

$$\dot{y}(t) = 0.12t$$

$$\ddot{y}(t) = 0.12$$

Pour : $t \in] 10s ; 20s]$

$$x(t) = (-0.02) t^2 + 0.9t - 4$$

$$\dot{x}(t) = -0.04t + 0.9$$

$$\ddot{x}(t) = -0.04$$

$$y(t) = -0.06t^2 + 2.7t - 11$$

$$\dot{y}(t) = -0.12t + 2.7$$

$$\ddot{y}(t) = -0.12$$

En exécutant le programme présenté ci-dessus pour cette trajectoire et les paramètres suivant :

- Les moments d'inertie des poulies ($J_i = 0.01 \text{ Kg.m}^2$)
- Les rayons des poulies ($r_i = 3\text{cm}$).
- Les coefficients de frottements ($C_i = 0.01 \text{ N.m.s}$).
- La masse de l'effecteur $m=0.05 \text{ Kg}$.

On obtient les résultats suivants :

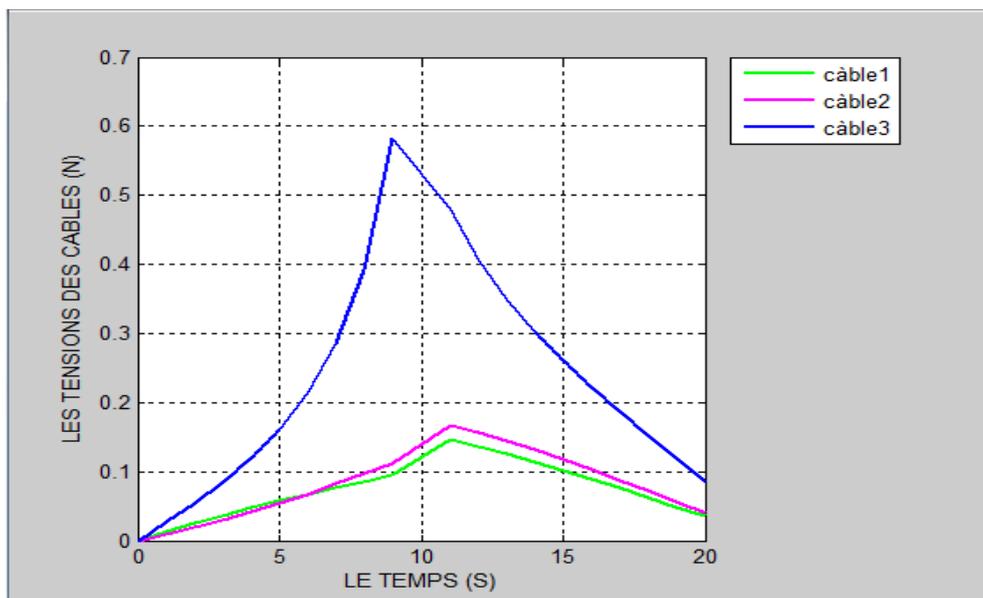
Les tensions dans les câbles :

Figure III-12 : Les variations des tensions dans les câbles pour une trajectoire Rectiligne d'équation : $y=3x+1$.

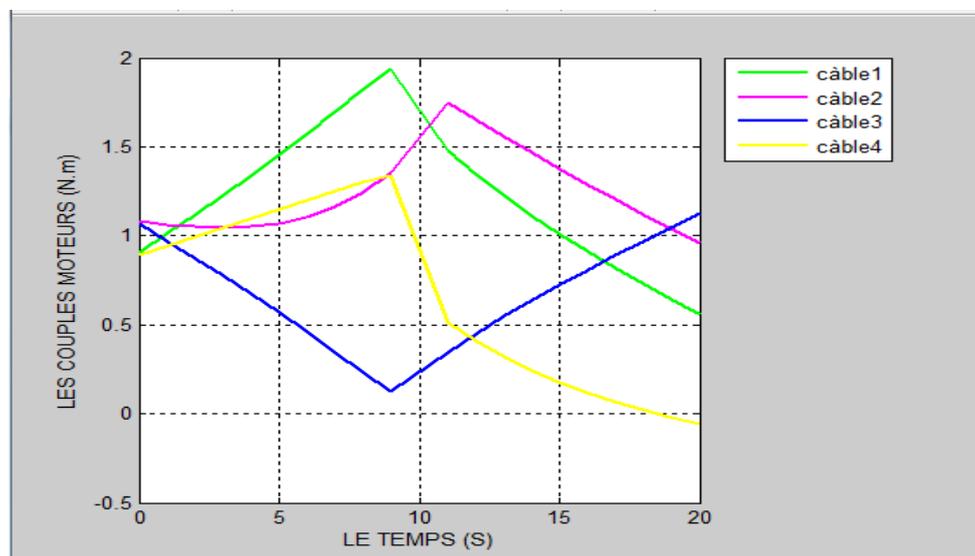
Les couples moteurs :

Figure III-13 : Les variations des couples moteurs pour une trajectoire rectiligne d'équation : $y=3x+1$.

Remarques et commentaires :

A partir des figures III-11, III-12 et III-13, on constate que :

- Les valeurs des tensions dans les câbles sont toutes positives, puisque les câbles ne peuvent que tirer l'effecteur et ne peuvent pas le repousser.
- Les valeurs des tensions dans le câble 3, sont plus grandes que celles dans les câbles 1 et 2, puisque le câble 3 tire l'effecteur selon le sens positif de l'axe (OY) et les deux autres câbles le tirent dans le sens inverse.
- Les tensions dans les câbles augmentent durant la phase d'accélération et diminuent durant la phase de décélération.
- Les variations des couples moteurs sont en relation directe avec les variations des longueurs des câbles et des tensions. Pour le câble 3, on constate que sa longueur diminue durant la trajectoire. La tension dans ce câble 3 augmente puis diminue et le couple moteur diminue puis augmente. Pour les autres câbles c'est exactement le contraire ; les longueurs des câbles diminuent durant la trajectoire, les tensions dans les câbles augmentent puis diminuent et les couples moteurs augmentent puis diminuent.
- Le couple moteur 4 augmente dans la phase d'accélération puisque le moteur 4 entraîne le moteur 3 et ainsi que le câble 3 qui a une tension croissante durant cette phase.
- Il y a une parfaite adéquation entre les différentes variables à savoir : les longueurs des câbles, les tensions dans les câbles et les couples moteurs.

III-3-3 Simulation dynamique pour une trajectoire circulaire

L'effecteur fait une trajectoire circulaire de centre (0,0), en partant du point (6,0) à (t=0), pour faire un tour complet et revenir au point(6,0) à (t=20s).

L'équation du mouvement de l'effecteur est définie comme suit : $x^2 + y^2 = 36$



Figure III-14 : Représentation schématique de positions de l'effecteur et des câbles pour une trajectoire circulaire d'équation $x^2 + y^2 = 36$.

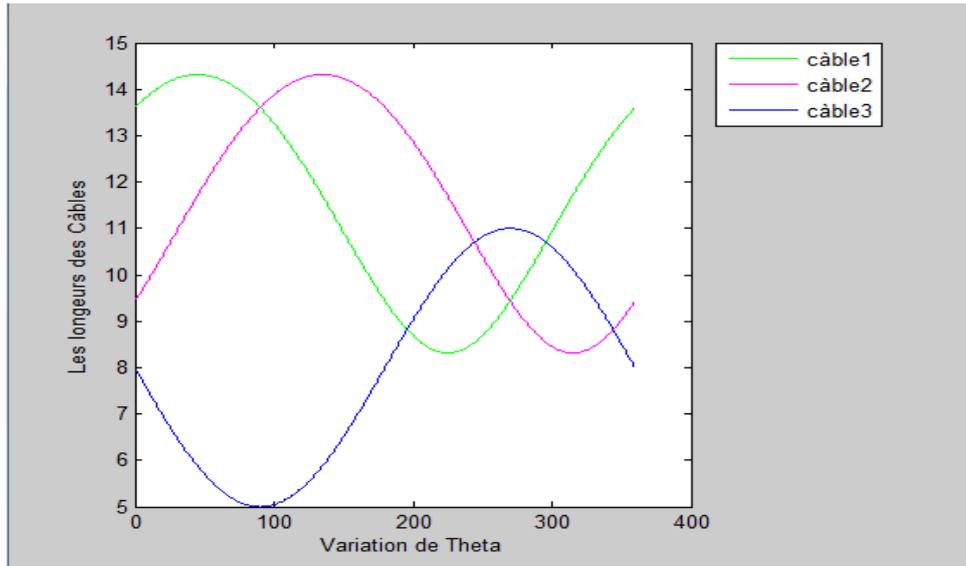


Figure III-15 : Les variations des tensions dans les câbles pour une trajectoire Circulaire d'équation $x^2 + y^2 = 36$.

Les équations temporelles sont définies comme suit :

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega t)$$

$$y(t) = R \cdot \sin(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = -R\omega \cdot \sin(\omega t)$$

$$\dot{y}(t) = R\omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\ddot{x}(t) = -R\omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\ddot{y}(t) = -R\omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$

En exécutant le programme pour cette trajectoire et pour les mêmes paramètres que le cas d'une trajectoire rectiligne, on obtient les résultats suivants :

Les tensions dans les câbles :

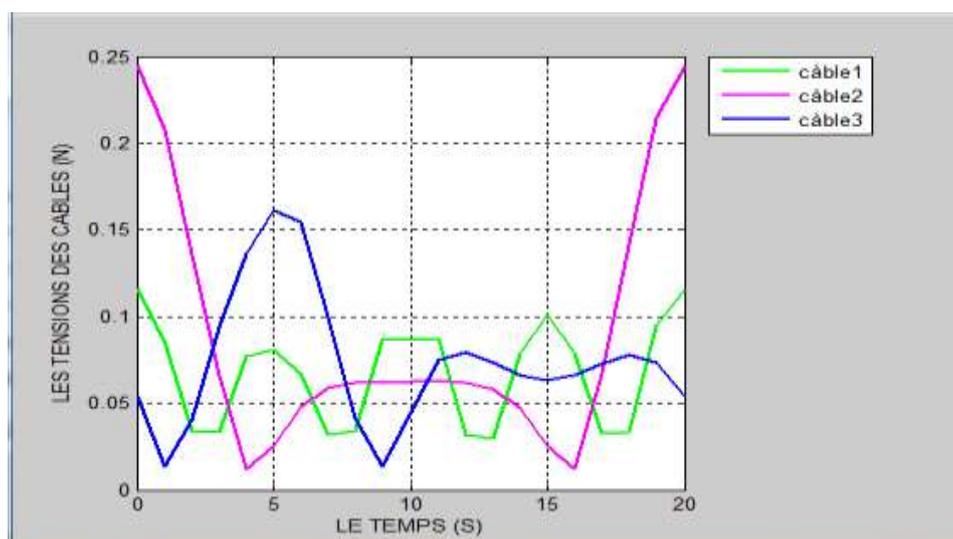


Figure III-16 : Les variations des tensions dans les câbles pour une trajectoire circulaire d'équation $x^2 + y^2 = 36$.

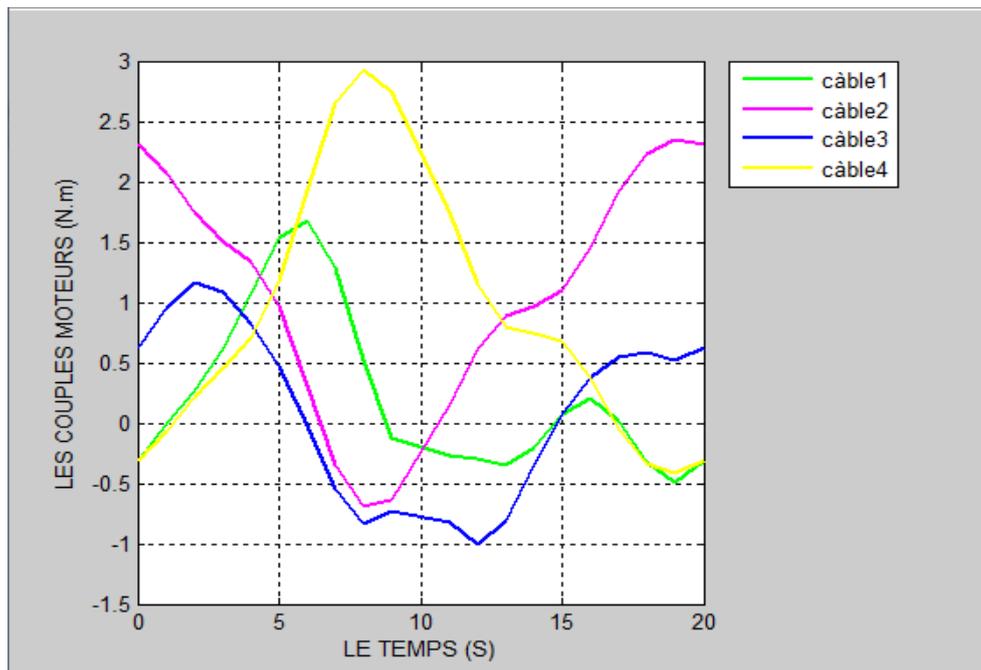
Les couples moteurs :

Figure III-17 : Les variations des couples moteurs pour une trajectoire circulaire. d'équation $x^2 + y^2 = 36$.

Remarques et commentaires :

A partir des figures III-15, III-16 et III-17, on constate que :

- Toutes les tensions dans les câbles sont positives, puisque les câbles ne peuvent que tirer l'effecteur et ne peuvent pas le repousser.
- Par contre les valeurs des couples moteurs peuvent être positives ou négatives, comme le montre la figure III-17, le changement de signe indique le changement de sens de rotation du moteur.
- Les variations des tensions dans les câbles et les couples moteurs sont symétriques, puisque l'effecteur a généré une trajectoire circulaire symétrique.
- Les valeurs initiales des couples moteurs 1, 2, 3 et 4 sont respectivement égales aux valeurs finales parce que, l'effecteur a fait un tour complet pour revenir à son point de départ.
- Il y a une parfaite adéquation entre les différentes variables à savoir : les longueurs des câbles, les tensions dans les câbles et les couples moteurs.

III-4 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté les résultats de la simulation. Différents cas de trajectoires ont été considérés afin de pouvoir suivre le comportement du robot selon les paramètres suivants : les positions des câbles et de l'effecteur, les variations des longueurs des câbles, les tensions dans les câbles et les couples moteurs. Les résultats de cette simulation illustrent bien les développements analytiques établis dans le chapitre qui précède. On remarque qu'il y a une parfaite adéquation entre les différentes variables dans la simulation des différentes trajectoires dans le calcul géométrique et le calcul dynamique. Ceci nous permet de réaliser le mouvement asservis des différents actionneurs. Ainsi la mobilité du troisième point de fixation permet de réaliser sans dysfonctionnement toutes les actions désirées pour l'effecteur.

Le déplacement du troisième point de fixation de bout en bout le long de la base fixe, permet de faire balayer tout l'espace rectangulaire de la base. Ainsi on aura réussi à obtenir un espace de travail quadrilatère avec seulement trois câbles au lieu de quatre.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'objectif principal de ce mémoire était d'augmenter et d'optimiser l'espace de travail d'un robot parallèle plan à 3 câbles, pour passer d'un espace de travail triangulaire à un espace de travail rectangulaire. Pour ce faire, on a proposé une nouvelle configuration dans laquelle un point parmi les trois points de fixation des câbles sur les poulies est mobile suivant l'axe (OX).

Pour y arriver, on a développé une formulation analytique complète du robot, par une modélisation géométrique, une modélisation cinématique, une modélisation statique et une modélisation dynamique. Par la suite, ces différents développements ont été utilisés pour plusieurs simulations du comportement de ce robot, en considérant différents cas de trajectoires.

Les résultats obtenus sont satisfaisants, puisqu'on a remarqué qu'il y a une parfaite harmonie entre les différentes variables de ce système. Ce qui nous permet d'affirmer que la solution préconisée _ mobilité d'un point de fixation _ nous permet d'atteindre l'objectif souhaité.

La réalisation de cet objectif ouvre de nouvelles perspectives dans la conception des robots à câbles. Une première extension de ce travail serait l'étude de l'optimisation du champ de travail d'un robot à 3 câbles dans l'espace à 3D.

Pour donner tout ses fruits, cette étude nécessite impérativement une étude technologique et la réalisation d'un prototype, afin de pouvoir mener des expérimentations qui permettent de valider les résultats théoriques obtenus. Cette réalisation pourra aussi ouvrir la voie à la réflexion à des applications futures de ce système.

Liste des références bibliographiques

- [ABD.2001] B.Abdullah et S.Agrawal «Cable suspended robots: Design, planning and control », In proc. IEEE International Conférence on Robotics and systems.2001.
- [BIG.2003] P.Bigras. « Maple: Bibliothèque de modélisation robotique ». Enligne.23p. 2003 <<https://cours.etsmtl.ca/sys827/.%5CDocuments%5CLogiciels%5Crobot.zip> >. Consulté le 03 mars 2015.
- [CON.1985] L.Cone, « Skycam, an aerial robotic camera System », Byte, vol.10, p.122-132, Octobre 1985. Automation, (Washington, DC, États-Unis), p.4275-4280, 2002.
- [FAN.2001] F.Fantoni et L.Lozano, «Non-linear control for under actuated mechanical system. Springer Verlag».2001.
- [FUK.2001] E.Fukushima, P.Debenes et S.Hirose, «Autonomous control of an engine-driven mobile platform for field robotic System», In proc. IEEE/RSJ International Conférence on Intelligent Robots and Systems, (Maui,USA), p.84-89, Novembre2001.
- [GOS.2000] C.Gosselin et G.Barrette . «Kinematic analysis and design of planar parallel mechanisms actuated with cables». In Proc. of DETC'00 ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference, Baltimore, Maryland.2000.
- [GOU.2005] M .Gouttefarde, «Analyse de l'espace des poses polyvalentes des mécanismes Parallèles entraînés par câbles». Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, Canada, 2005.
- [LAF.2002] P. Lafourcade, M. Llibre, et C. Reboul.«Design of a parallel wire-driven manipulator for wind tunnels». In Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators, Quebec City.2002.
- [LAF.2003] P. Lafourcade et R. Verhoeven . « Une nouvelle architecture, fortement redondante, pour un manipulateur à câbles au volume de travail étend ». 16ème Congrès Français de Mécanique, Nice.2003.
- [MER.1999] J.Merlet «Determination of a 6d-workspace of gough-type parallel manipulator and comparison between different geometries».1999.
- [MER.2002a] J.Merlet «Determination of the minimal and maximal real roots of parametric polynomials using interval analysis». In 1st Int. Workshop on Global Constrained Optimization and Constraint Satisfaction (Cocos'02), Sophia Antipolis, France. INRIA. 2002a.
- [MER.2002b] J.Merlet. «Still a long way to go on the road for parallel mechanisms. In Proc. of the ASME 2002 DETC Conference, Montréal. ASME».2002b.
- [NEU.1985] C.Neuman. « Discrete dynamic robot models ». IEEE transactions on systems, man, and cybernetics», vol. 15, n°2, p. 193-204.1985.

- [ROB.1999] L.Robert et L.Williams. «Planar cable-suspended haptic interface: Design for wrench exertion». In Proc. of the 1999 ASME Design Technical Conferences, Las Vegas, Nevada.1999.
- [SAH.2004] S.Sahi et L.Notash, «Kinematics, workspace and stiffness analysis of wire-actuated parallel manipulators», Comptes rendus 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, (Tianjin, Chine),Avril 2004 .
- [SAH.2007] S.Sahi et L.Notash, «Force and stiffness analysis of wire-actuated parallel manipulators », In proc.-12th IF To MM World Congress, (Besançon, France), Juin2007.
- [SCH.1989] F.Scheid1, « Schaum's outline of theory and problems of numerical analysis. Schaum's Outline Series ».1989
- [STU.2006] E.Stump et V.Kumar, « Workspaces of cable-actuated parallel manipulators », ASME Journal of mechanical design, vol.128. pp. 159-166, Janvier 2006.
- [VER.2000] R.Verhoeven et M.Hiller.« Estimating the controlable workspace of tendon-based stewart platforms». In Proc. 7th Int. Symposium on Advances in Robot Kinematics, pages 277–284.2000.
- [VER.2003] R.Verhoeven.« Analysis of the Workspace of Tendon-Based Stewart Platforms». Thesis, Gerhard-Mercator University.2003.
- [WAN.2004] J.Wang et M. Gosselin.« Kinematic analysis and design of kinematically redundant parallel mechanisms ». Journal of Mechanical Design, vol. 126, p. 109-118.2004.
- [WIL.2001] R.Williams et P.Gallina.«Planar cable-direct-driven robots, part i: Kinematics and statics». In Proc. of the 2001 ASME Design Technical Conferences, 27th Design Automation Conference, Pittsburgh, PA. 2001.