



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département d'Hydraulique

Laboratoire de Recherche Sciences de l'EAU (LRSEAU)



Thèse de Magister

Présentée par

**BOUTALEB Redouane**

Ingénieur d'Etat en Hydraulique

TITRE

**Simulation du phénomène de transport  
de la pollution dans les écoulements  
à surface libre**

Jury :

Président : Pr. A. KETTAB : Professeur- ENP

Directeurs de thèse : Pr. B. REMINI - Professeur à l'université de Blida  
Dr. S. BENMAMAR : Maître de conférences A- ENP

Examineurs : Dr. J. ARRAR: Maître de conférences A- ENP  
Dr. F. HOUMA BACHARIE: Maître de conférences A- ENSSMAL  
Dr. M. BESSENASSE: Maître de conférences A- Université de Blida

# Remerciements

J'exprime ma profonde reconnaissance et mes vifs remerciements à mes directeurs de thèse en l'occurrence Mr B. REMINI, professeur à l'université de Blida et M<sup>lle</sup> S. BENMAMAR, Maître de conférences à l'E.N.P, qui ont su me consacrer des moments importants et me faire profiter de leur solide expérience. A cet effet, je tiens à souligner leurs conseils précieux et enrichissants qu'ils m'ont prodigués durant toute la période de préparation du présent travail.

J'adresse toute ma reconnaissance au professeur A. KETTAB (E.N.P) qui m'a fait l'honneur de présider le jury, d'avoir accepté l'examen de ma thèse, mais aussi pour les conseils et les connaissances scientifiques dont il m'a apportés en tant qu'enseignant durant mon cycle de post-graduation au sein du département d'hydraulique à l'E.N.P.

J'exprime mes vifs remerciements aux membres du jury Mr M. BESSENASSE, Maître de conférences à l'université de Blida et Mme F. HOUMA BACHARIE, Maître de conférences à l'ENSSMAL ainsi que M<sup>lle</sup> J. ARRAR, Maître de conférences à l'E.N.P, qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce modeste travail.

Je remercie Mr W. RODI, professeur à l'université de Karlsruhe(Allemagne), pour la documentation très riche dont il m'a procurée. Qu'il trouve ici, l'expression de ma sincère gratitude.

Mes vifs remerciements vont également à Mr F. BAHAMID, directeur central à la DGD, qui m'a soutenu et encouragé à achever ce travail.

Enfin, je remercie tous mes amis qui m'ont aidé de près ou de loin, que ce soit par leur amitié, leurs conseils ou leur soutien moral. Qu'ils trouvent dans ces quelques lignes l'expression de ma profonde gratitude.

*A mes chers parents*

*A ma femme, mes frères et mes sœurs*

*A toute ma famille*

*Je dédie ce travail*

## ملخ-ص

إن طرح النفايات الصناعية السائلة و المياه القدرة الناتجة عن الصرف الصحي ، بشكل متعمد في الوديان أصبح يشكل تهديدا خطيرا لمواردنا المائية. و عليه فإن الطرق الناجعة للحساب القبلي لتوزيع وانتشار الملوثات المطروحة داخل الوديان ، تعتبر ذات أهمية بالغة سواء بالنسبة للسلطات أو مصممي مختلف المنشآت .

يتم نقل الملوثات المفترزة في مياه الوديان بالسحب تحت تأثير الحركة المتوسطة للمياه و يتم انتشارها في الوسط المائي تحت تأثير الحركة الهيجانية ، هاتين الآليتين تأثيران مباشرة على توزيع الملوثات. تم استعمال نموذج ثنائي الأبعاد في أطروحتنا هذه لحساب تغير سرعة الجريان، خواص الانتشار الهيجاني وتركيز الملوثات، في حالة إفراز ملوث بشكل محوري داخل قناة ذات الشكل المستطيل. فيما يتعلق باللزوجة و الانتشار الهيجاني المدرجان في معادلة نقل المادة الملوثة، تم حسابهما وفق نموذج الهيجان ( $k-\epsilon$ ) ، و قد تم استعمال طريقة الأحجام المتناهية لحل المعادلات التفاضلية المكددة للمجرى المائي.

وقد قمنا بدراسة النتائج التطبيقية للنموذج الرياضي وفق عدة متغيرات (سرعة الإفراز ، التأثير التفاعلي للملوث ) و مقارنتها مع نتائج بحوث سابقة عالجت نفس الموضوع وفق شروط مماثلة للجريان المائي، حيث أظهرت تقاربا كبيرا.

كلمات البحث: الجريان المائي ذو السطح الحر- نموذج الهيجان - نقل الملوثات

## Résumé

Les décharges intentionnelles d'effluents industriels et domestiques dans les rivières sont devenues une véritable menace pour nos ressources hydriques. Les méthodes fiables de prédiction de la distribution des polluants déchargés dans les rivières sont donc d'un grand intérêt tant pour les autorités que pour les ingénieurs concepteurs de bâtiments.

Les polluants rejetés dans les rivières sont transportés par convection sous l'effet du mouvement moyen et diffusés sous l'effet du mouvement turbulent; ces deux processus influencent la distribution de la pollution. Un modèle bidimensionnel a été utilisé dans le présent travail pour simuler la variation de la vitesse et le champ de concentration pour le cas d'un rejet coaxial dans un canal rectangulaire. La viscosité et la diffusivité turbulentes, impliquées dans l'équation de transport de l'espèce polluante, sont déterminées via le modèle de turbulence  $k-\epsilon$ . La méthode des volumes finis a été ainsi utilisée pour la résolution numérique des équations différentielles régissant l'écoulement.

Les résultats obtenus pour les différentes applications du modèle avec une variation combinée des paramètres d'écoulement (vitesse du rejet, effet de réaction) montrent une concordance très satisfaisante comparativement aux résultats de simulation d'autres auteurs dont les conditions d'écoulement sont similaires.

**Mots clés**: écoulements à surface libre – modèle de turbulence – transport de pollution

## Abstract

The intentional discharges of industrial and domestic effluents into rivers are becoming a real threat to our water resources. Both authorities and plant designers therefore have a strong interest in dependable methods for predicting the distribution of pollutants rejected into natural waters.

Pollutants are convected by the mean fluid motion in the river, and they are diffused by the turbulent motion. A two-dimensional model is applied in present study to simulate the distribution and variation of velocity and concentration fields for the case of coaxial pollutant discharge into rectangular canal. Turbulent viscosity and diffusivity of pollutant transport equation are determined by means of  $k-\epsilon$ -turbulence model. The finite volume method is used to solve the partial differential equations governing the distribution of velocity, turbulent parameters and concentration in river.

Results of model applications are examined for various parameter combinations (jet velocity, reaction effect) and compared with results of previous computational methods of the others researchers that were available in the literature and which were applied for the same case of fluid flow conditions.

**Keywords**: free surface flows - turbulence model – pollutant transport

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I- Etude bibliographique</b> .....	4
Introduction.....	4
1- Travaux de Fischer de 1957.....	5
2- Travaux d'Elder .....	5
3- Travaux de Fischer de 1967.....	6
4- Travaux de Motz et Benediet.....	7
5- Travaux de Miller et Richardson.....	7
6- Travaux de Masbernat et Chaussavoine .....	8
7- Travaux de Balland.....	10
8- Travaux de Rastogi et Rodi.....	12
9- Travaux de Meguirk et Rodi.....	15
10- Travaux de Glass et Rodi.....	16
11- Travaux de Mc Bride et Rutherford.....	16
12- Travaux de Ménigaut et Dumay.....	17
13- Travaux de Laroui, Kahawita et Bilek.....	18
14- Travaux de Piaseki et Katapodes.....	19
15- Travaux de Yu et Reghetto.....	20
16- Travaux de Nathalie Buil, Gay et Morel.....	21
17- Travail de Boussoum.....	21
18- Travaux de K. Kachiashvili, D. Gordiziani, R. Lazarov et D. Melikdzhanian.....	22
19- Travail de Djabelkhir.....	23
Conclusion.....	24
<b>Chapitre II- Equations régissant l'écoulement</b> .....	25
Introduction.....	25
1- Cas général.....	26
1.1- Equations de bilans.....	26
1.1.1- Bilan de masse (équation de continuité).....	26
1.1.2- Bilan de quantité de mouvement.....	26
1.1.3- Bilans de matière.....	27
1.1.4- Bilans d'énergie interne.....	27
1.2- Lois de comportement.....	27
1.2.1- Contraintes visqueuses $\tau_{ij}$ .....	27
1.2.2- Flux diffusifs d'énergie $q_i$ .....	28
1.2.3- Flux diffusifs de masse $J_i$ .....	28
1.3- Equations d'état.....	28
2- Hypothèses simplificatrices.....	29
3- Equations régissant l'écoulement turbulent.....	30
3.1- Equations des variables moyennes.....	30
3.2- Les modèles de turbulence.....	32
3.2.1- Les modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente.....	32
3.2.1.1- Modèle à zéro équation de transport.....	33

3.2.1.2- Modèle à une équation.....	35
3.2.1.3- Modèle à deux équations : modèle k- $\epsilon$ .....	35
3.2.2- Autres modèles.....	37
3.3- Fermeture du système avec le modèle (k- $\epsilon$ ).....	37
<b>Chapitre III- Analyse du système d'équations en vue de sa résolution.....</b>	<b>39</b>
Introduction.....	39
1- Modélisation mathématique du problème.....	41
1.1- Modèle tridimensionnel.....	41
1.2- Modèle bidimensionnel 2D.....	43
1.2.1- Intégration de l'équation de continuité.....	43
1.2.2- Intégration des équations de quantité de mouvement.....	44
1.2.3- Intégration de l'équation de transport du polluant.....	48
2- Hypothèses de simplification.....	48
3- Conditions aux limites.....	50
3.1- A la surface libre.....	50
3.2- Conditions aux parois.....	50
3.3- Plan de symétrie (médián).....	52
Conclusion.....	52
<b>Chapitre IV- Résolution numérique des équations.....</b>	<b>53</b>
Introduction .....	53
1- Discrétisation des équations différentielles par la méthode des volumes finis.....	54
1.1- Forme discrétisée de l'équation de convection-diffusion de dimension 1.....	54
1.1.1- Différents schémas d'interpolation.....	55
1.1.2- Formulation générale.....	60
1.2- Equation discrétisée de dimension 2.....	60
1.3- Schéma approprié.....	63
1.3.1- Terme de convection.....	63
1.3.2- Terme de diffusion.....	64
1.3.3- Terme source.....	64
2- Résolution du système algébrique linéaire.....	64
Conclusion.....	66
<b>Chapitre V- Applications.....</b>	<b>70</b>
Introduction.....	70
1- Maillage.....	71
2- Conditions initiales.....	72
3- Application à des cas test.....	72
3.1- Premier cas test.....	73
4- Résultats de simulation du premier cas test.....	74
5- Influence de la vitesse d'injection du polluant (deuxième cas test).....	78
6- Transport de pollution avec réaction.....	82
Conclusion.....	86
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>87</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>89</b>

# Liste des tableaux

<b>Tableau I.1:</b> Comparaison des résultats expérimentaux avec les valeurs simulées du coefficient de dispersion $D_x$ (méthode de Fischer) .....	7
<b>Tableau IV.1:</b> Fonctions $A( P )$ se rapportant aux différents schémas.....	60
<b>Tableau V.1:</b> Coefficient de réaction des matières organiques contenues dans les eaux usées et non usées.....	84

## Liste des figures

<b>Figure I-1:</b> Section transversale de la rivière.....	6
<b>Figure I-2:</b> Décharge coaxiale dans un canal à pente constante.....	13
<b>Figure I-3:</b> Rejet latéral.....	15
<b>Figure I-4:</b> Isoconcentrations à l'instant initial pour une source non continue.....	21
<b>Figure I-5:</b> Isoconcentrations à l'instant $t=30s$ pour une source non continue.....	22
<b>Figure I-6:</b> Isoconcentrations à l'instant initial pour une source continue.....	22
<b>Figure I-7:</b> Isoconcentrations à l'instant $t=30s$ pour une source continue.....	22
<b>Figure I-8:</b> Evolution de la vitesse en fonction du temps.....	23
<b>Figure I-9:</b> Evolution de la concentration en fonction du temps.....	24
<b>Figure III-1:</b> Découpage du domaine d'écoulement en présence d'un rejet polluant.	40
<b>Figure III-2:</b> Schématisation de l'écoulement (3D).....	41
<b>Figure III-3:</b> Spécification des conditions aux parois .....	51
<b>Figure IV-1:</b> Variation du flux pour les différentes faces du volume infinitesimal....	54
<b>Figure IV-2:</b> Volumes de contrôle (cas unidimensionnel).....	55
<b>Figure IV-3:</b> Approximation linéaire.....	56
<b>Figure IV-4:</b> Différentes faces du volume de contrôle (3D).....	61
<b>Figure IV-5:</b> Volume de contrôle (plan xy -2D).....	61
<b>Figure IV-6:</b> Représentation de la méthode des trois diagonales pour un écoulement bidimensionnel	66
<b>Figure V-1:</b> Présentation du maillage.....	71
<b>Figure V-2:</b> Configuration de l'écoulement ( $1^{er}$ cas test $U_d/U_r = 1$ ).....	73
<b>Figure V-3:</b> Profil initial de la vitesse longitudinale ( $1^{er}$ cas test $U_d/U_r = 1$ ).....	74
<b>Figure V-4:</b> Profil initial de la concentration $C/C_d$ ( $1^{er}$ cas test $U_d/U_r = 1$ ).....	74

<b>Figure V-5:</b> Evolution de la vitesse longitudinale (1 <sup>er</sup> cas test $U_d/U_r=1, x=4.5B$ ).....	75
<b>Figure V-6:</b> Evolution de la vitesse longitudinale (1 <sup>er</sup> cas test $U_d/U_r=1, x=18B$ ).....	75
<b>Figure V-7:</b> Evolution de la concentration (1 <sup>er</sup> cas test $U_d/U_r=1, x=4.5B$ ).....	76
<b>Figure V-8:</b> Evolution de la concentration (1 <sup>er</sup> cas test $U_d/U_r=1, x=18B$ ).....	76
<b>Figure V-9:</b> Evolution de la concentration ( $C/C_d$ ) le long du canal (1 <sup>er</sup> cas test).....	77
<b>Figure V-10:</b> Configuration de l'écoulement (2 <sup>ème</sup> cas test $U_d/U_r=2$ ).....	78
<b>Figure V-11:</b> Profil initial de la vitesse longitudinale (2 <sup>ème</sup> cas test $U_d/U_r=2$ ).....	79
<b>Figure V-12:</b> Profil initial de la concentration $C/C_d$ (2 <sup>ème</sup> cas test $U_d/U_r=2$ ).....	79
<b>Figure V-13:</b> Evolution de la vitesse longitudinale (2 <sup>ème</sup> cas test $U_d/U_r=2, x=4.5$ ).....	80
<b>Figure V-14:</b> Evolution de la vitesse longitudinale(2 <sup>ème</sup> cas test $U_d/U_r=2, x=18B$ ).....	80
<b>Figure V-15:</b> Evolution de la concentration (2 <sup>ème</sup> cas test $U_d/U_r=2, x=4,5B$ ).....	81
<b>Figure V-16</b> Evolution de la concentration (2 <sup>ème</sup> cas test $U_d/U_r=2, x=18B$ ).....	81
<b>Figure V-17:</b> Évolution de la vitesse longitudinale (3 <sup>ème</sup> cas test).....	85
<b>Figure V-18:</b> Évolution de la concentration (3 <sup>ème</sup> cas test).....	85

## Notations principales

Symboles	Signification	Unité
$U_i$	Composantes du vecteur vitesse	m/s
$\overline{U}_i$	Composantes moyennes ( temporelles) du vecteur vitesse	m/s
$u_i$	Composantes fluctuantes du vecteur vitesse	m/s
$P$	Pression	N/m <sup>2</sup>
$\overline{P}$	Pression moyenne (temporelle)	N/m <sup>2</sup>
$p$	Pression fluctuante	N/m <sup>2</sup>
$\theta_0$	Echelle de temps macroscopique	s
$\theta_e$	Echelle de temps microscopique	s
$\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}$	Composantes moyennes de la vitesse résultant de l'intégration sur la profondeur	m/s
$T$	Température	K
$\phi$	Fraction massique ou thermique d'une espèce quelconque dans le milieu aquatique (champ scalaire)	Kg/m <sup>3</sup> K
$\overline{\phi}$	Valeur moyenne (temporelle) du champ scalaire $\phi$	Kg/m <sup>3</sup>
$\overline{u_i u_j}$	Contraintes de Reynolds (corrélations entre les vitesses fluctuantes)	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
$\overline{u_j \phi}$	Flux turbulent thermique ou de masse	m/s
$\tau_{bx}, \tau_{by}$	Contraintes de frottement au fond du canal	Kg/m.s
$C_f$	Coefficient de frottement	
$R$	Rayon hydraulique	m
$n$	Coefficient de rugosité	
$\tilde{\tau}_{xx}, \tilde{\tau}_{xy}, \tilde{\tau}_{yy}$	Valeurs moyennes des contraintes visqueuses résultant de l'intégration sur la profondeur	Kg/m.s
$s$	Salinité	Kg/m <sup>3</sup>
$\rho$	Masse volumique du fluide	Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_0$	Masse volumique de référence se rapportant au fluide en écoulement	Kg/m <sup>3</sup>

$Ox_i$	Axes de coordonnées cartésiennes	
$g$	Accélération de la pesanteur	$m/s^2$
$\delta_{i3}$	Paramètre de Kronecker ( $\delta_{i3}=1$ lorsque $i=3$ et $\delta_{i3}=0$ lorsque $i\neq 3$ )	
$\zeta_{ij k}$	Tenseur unité du 3 <sup>ème</sup> ordre	
$\Omega_j$	Double du vecteur rotation de la terre projeté sur l'axe j ( $ \Omega  \approx 1.46.10^{-4} s^{-1}$ )	$1/s$
$f$	Coefficient de Coriolis	
$e$	Energie interne	$J/Kg$
$q_i$	Composante du flux diffusif d'énergie interne	$J/Kg.s$
$r$	Densité volumique du taux d'apport de chaleur par rayonnement	$K/m^3$
$H$	Elévation de la surface libre	$m$
$z_b$	Elévation du fond du canal	$m$
$C$	Concentration du polluant	$Kg/m^3$
$C_d$	Concentration du rejet polluant	$Kg/m^3$
$C_0$	concentration initiale du polluant	$Kg/m^3$
$K_r$	Coefficient de réaction de la substance polluante dans le mélange	$1/s$
$D$	Coefficient de diffusion moléculaire	$m^2/s$
$U_*$	Vitesse de frottement	$m/s$
$U_{res}$	Vitesse résultante parallèle à la paroi	$m/s$
$U_d$	Vitesse longitudinale du rejet polluant	$m/s$
$D_x$	Coefficient de diffusion longitudinale	$m^2/s$
$h$	Hauteur d'eau	$m$
$y^+$	Distance adimensionnelle entre le premier point du maillage et la paroi	$m$
$\kappa$	Constante de von Karman	
$E$	Paramètre de rugosité	
$\tau_{ij}$	Tenseur des contraintes visqueuses	$Kg/m.s^2$
$J_i$	Composante du flux diffusif (moléculaire et turbulent)	$m/s$
$\mu$	Viscosité dynamique moléculaire	$Kg/m.s$
$\mu_t$	Viscosité dynamique turbulente	$Kg/m.s$
$\nu$	Viscosité cinématique moléculaire	$m^2/s$
$\nu_t$	Viscosité cinématique turbulente	$m^2/s$

$D_\phi$	Coefficient de diffusion massique du champ scalaire $\phi$	Kg/m.s
$D_t$	Diffusivité turbulente	m <sup>2</sup> /s
$\sigma_t$	Nombre de Prandtl turbulent pour un flux diffusif thermique, ou nombre de Schmidt turbulent pour un flux diffusif de masse	
$k$	Energie cinétique turbulente	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
$\varepsilon$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
$\widehat{k}$	Energie cinétique turbulente correspondant au modèle de turbulence bidimensionnel	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
$\widehat{\varepsilon}$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente correspondant au modèle de turbulence bidimensionnel	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
$C_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$	Constantes numériques du modèle de turbulence	
$L$	Longueur caractéristique	m
$L_m$	Longueur de mélange	m
$V'$	Vitesse caractéristique	m/s
$\delta$	Epaisseur de la couche limite	m
$\lambda$	Coefficient de conduction	J/s.m.K
$\beta$	Coefficient d'expansion massique du polluant	
$Y$	Fraction massique du polluant dans le mélange fluide-polluant	
$Y_0$	Fraction massique de référence du polluant	
$\Delta x$	pas de discrétisation suivant l'axe $x$	m
$\Delta y$	pas de discrétisation suivant l'axe $y$	m
$S_\phi$	terme source	Kg/m <sup>3</sup> .s
$B$	Largeur du canal	m
$d$	largeur de la zone de décharge polluante	m

# Introduction générale

La dimension nouvelle des problèmes de l'environnement liés aux écosystèmes aquatiques réside dans la prise en compte des perturbations artificiellement introduites dans le milieu naturel, ce qui suscite énormément d'intérêt chez les scientifiques et nécessite une représentation paramétrique de cette dynamique au lieu d'une simple description obtenue par analyse statistique de séries d'observation chronologiques.

En particulier, les recherches menées sur l'évolution des pollutions ponctuelles dans les rivières sont de plus en plus nombreuses, et le plus souvent ces recherches visent la prédiction de distribution spatiale et temporelle des polluants (concentration, champ thermique) qui affectent les cours d'eau.

Les substances polluantes déchargées dans le milieu aquatique peuvent provenir des déversements intentionnels (effluents des usines, eau usée non épurée,...) ou être provoquées par des actes accidentels (rupture de canalisation).

L'étude de la réponse du milieu aquatique (rivières) aux fluctuations éventuellement engendrées par les rejets polluants a donné lieu à trois types d'approches :

- Une approche basée sur l'observation et les mesures effectuées sur le terrain qui fournissent l'information expérimentale indispensable (détermination des caractéristiques du site par campagnes de sondage). Cette voie, prise isolément, s'est avérée impraticable en raison de la multiplicité des paramètres à contrôler, du caractère généralement ponctuel des mesures nécessitant de réseaux d'observation dont la densité est fonction de l'échelle d'espace à laquelle on s'intéresse et de la durée souvent importante. Il n'en demeure pas moins qu'il faut souligner la nécessité de disposer d'échantillons suffisants des données recueillies (in situ); leur représentativité et leur qualité conditionnent la fiabilité des deux approches suivantes.

- La deuxième approche est basée sur la simulation physique de la dynamique du phénomène étudié permettant de reproduire une gamme assez large de conditions réelles de l'écoulement et de représenter avec le plus de réalisme possible les paramètres de diffusion du polluant dans le cours d'eau. Les informations qu'elle

délivre, lorsqu'on peut aller jusqu'au plan d'évaluation quantitative (champs de vitesse, profil de concentration, ...), sont d'un intérêt primordial. Les modèles physiques permettent ainsi de définir les conditions aux limites nécessaires pour la mise en œuvre des modèles numériques. Néanmoins, ces modèles présentent l'inconvénient des coûts élevés nécessaires pour la reproduction de plusieurs scénarios liés à la variation des caractéristiques du domaine d'écoulement et aux fluctuations des conditions du rejet.

- La troisième approche utilise les modèles de simulation numérique, c'est vers leur mise en œuvre que convergent les deux approches précédentes dont elles fournissent les données de validation, les conditions aux limites et les données d'entrée pour la simulation.

Dans cette optique, les modèles numériques de qualité des eaux de rivière reconstituent les différents mécanismes présents dans le domaine d'écoulement et fournissent l'ensemble des informations recherchées sous forme d'éléments d'aide à la décision (risque de dépassement de seuils critiques de concentration, influence de la position du lieu de décharge,...). Ils répondent aux demandes exprimées par les autorités chargées de la protection de l'environnement et également par les industriels qui attendent des solutions efficaces à leurs problèmes de rejets en rivières.

La simulation numérique du comportement de la pollution dans le domaine de l'écoulement des eaux de surface, fait appel aux bilans de transfert de la mécanique des fluides pour caractériser l'évolution du fluide ainsi qu'aux lois chimiques et biochimiques pour décrire les réactions que subissent les substances polluantes dans le milieu aquatique.

L'objectif principal du présent travail est de développer un outil de simulation numérique du phénomène de transport de la pollution dans un écoulement en rivière. Nous considérons naturellement que l'écoulement dans le milieu récepteur est turbulent. La pollution étant influencée par le brassage du fluide, la prise en considération de cette turbulence est donc essentielle. Nous tenterons ainsi de résoudre numériquement par la méthode des volumes finis les différentes équations différentielles caractérisant les bilans de transfert dans l'écoulement à surface libre en présence de la turbulence.

Le premier chapitre présente une revue bibliographique des différents travaux se rapportant à la modélisation numérique du transport de la pollution dans les écoulements à surface libre.

La modélisation mathématique du phénomène étudié est exposée dans le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre livre les possibilités de simplification du système d'équations en vue de sa résolution.

Un exposé de la résolution numérique par la méthode des volumes finis de l'ensemble d'équations régissant le phénomène de transport sera avancé dans le chapitre IV. Le modèle de simulation sera ensuite appliqué à une série de cas tests numériques qui feront l'objet du dernier chapitre.

# **Chapitre I**

## **Etude bibliographique**

### **Introduction**

Les modèles de simulation numérique du comportement de la pollution dans un milieu aquatique, en présence d'un écoulement à surface libre, consistent à résoudre numériquement les équations différentielles de la mécanique des transferts de masse, d'énergie et de quantité de mouvement. Nombreuses sont les recherches qui ont été menées sur la modélisation numérique de la dispersion des polluants en cours d'eau, leur diversité résulte, en plus de la variation des hypothèses simplificatrices liées au domaine d'intégration, d'autres considérations essentiellement liées :

- Au modèle hydrodynamique impliqué (2D, 3D, ...) ;
- Au modèle de turbulence, permettant la détermination des caractéristiques de la diffusion turbulente ;
- Au modèle de transport (2D, terme source, ...) ;
- À la méthode d'intégration numérique (différences finies, éléments finis, volumes finis).

Le présent chapitre a précisément pour objet de dresser un bilan des solutions proposées dans la bibliographie existant à ce jour sur le sujet étudié.

## 1- Travaux de Fischer de 1957

Fischer fut parmi les chercheurs ayant beaucoup travaillé sur le phénomène de dispersion en rivière. En 1957, ce chercheur a adopté un modèle unidimensionnel filaire pour déterminer l'évolution de la concentration dans un écoulement à surface libre (Lebreton, 1974).

Dans un tel modèle, la dispersion longitudinale de la concentration moyenne (au sens de la moyenne sur une section transversale) est supposée produite par deux actions mécaniques :

- Le transport convectif longitudinal ;
- La diffusion turbulente transversale.

Il s'agit donc de la transposition aux écoulements fluviaux des schémas proposés par G. Taylor en 1953 pour les écoulements uniformes en conduites.

Ce modèle est caractérisé par l'équation de transport suivante:

$$\frac{\partial C_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial C_o}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C_o}{\partial x^2} \quad (\text{I.1})$$

avec,  $C_o$ : concentration moyenne,  $U_o$ : vitesse moyenne et  $D$  : coefficient de diffusion.

La vitesse moyenne ( $U_o$ ) et le coefficient de diffusion ( $D$ ) sont, a priori, deux constantes caractéristiques du bief considéré.

À coté des hypothèses assez sévères que nécessite l'application de tels modèles aux écoulements fluviaux, il est à signaler que le phénomène de dispersion de Taylor n'apparaît qu'après un certain temps ou une certaine longueur d'établissement.

En principe le coefficient de diffusion est fonction de la géométrie de la section transversale et du transfert turbulent transversal. Taylor a explicité l'expression de «  $D$  » dans le cas d'une conduite circulaire rectiligne et uniforme :

$$D = 10,1 a U_* \quad (\text{I.2})$$

où,  $a$  est le rayon de la conduite et  $U_*$  représente la vitesse de frottement.

## 2- Travaux d'Elder

Dans une approche similaire à celle de Fisher, Elder a étendu le calcul de Taylor au cas de l'écoulement plan uniforme à profil logarithmique (Elder, 1959):

$$D_x = 5,93 h U_* \quad (\text{I.3})$$

où,  $D_x$ : coefficient de diffusion longitudinale et  $h$ : hauteur d'eau.

L'emploi du coefficient de diffusion  $D_x$  pour des rivières réelles a conduit à des résultats incompatibles avec la pratique. Des coefficients  $D_x$  nécessaires pour retrouver les ordres de grandeurs observées pouvant être 10 à 100 fois plus grands.

### 3- Travaux de Fischer de 1967

En transposant la méthode de Taylor et d'Elder, Fischer (Fisher, 1967) proposa une méthode permettant de prédire le coefficient de dispersion  $D_x$  dans un cours d'eau naturel. Sa méthode a été fondée sur la mesure des variations transversales de la vitesse avec l'implication de la variation de la pente et de la forme géométrique de la section droite du lit de la rivière.

La formule utilisée par Fischer, pour déterminer le coefficient de dispersion  $D_x$ , s'écrit comme suit :

$$D_x = \frac{1}{S} \int_0^L q_y \cdot dy \int_0^y \left( \frac{1}{\varepsilon_y \cdot Z(y)} \int_0^y q_y \cdot dy \right) dy \quad (\text{I.4})$$

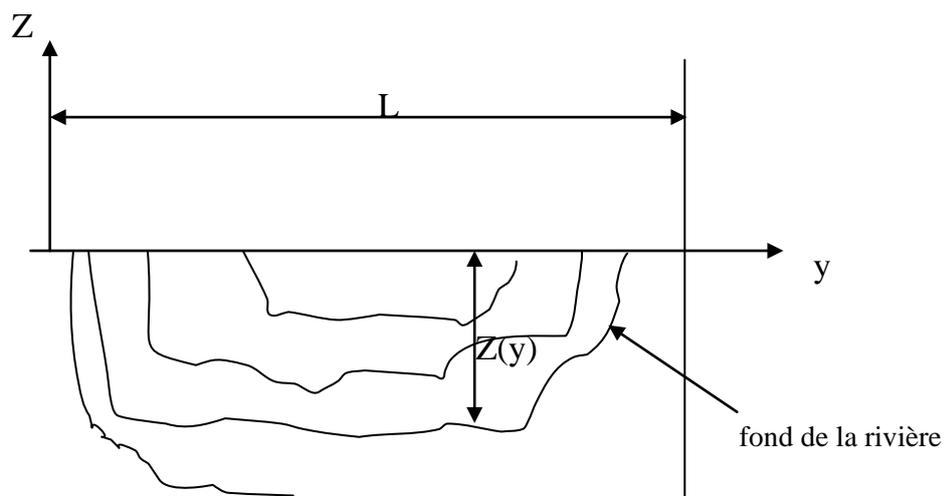
avec,  $Z(y)$ : tirant d'eau sur la verticale d'abscisse  $y$ ,  $\varepsilon_y$ : coefficient de diffusion turbulente transversale,  $S$ : section transversale et  $q_y$ : terme résultant de l'intégration des écarts entre la vitesse moyenne sur la verticale( $y$ ) et la vitesse moyenne calculée sur toute la section ( $S$ ).

$q_y$  est donné par l'expression :

$$q_y = \int_0^{Z(y)} (u - U) dy \quad (\text{I.5})$$

où,  $u$  : vitesse moyenne sur la verticale et  $U$  : vitesse moyenne sur toute la section.

Fischer a adopté pour  $\varepsilon_y$  la valeur expérimentale établie pour des écoulements en laboratoire :  $\varepsilon_y = 0,23 Z(y) U_*$



**Figure I-1:** Section transversale de la rivière

Fischer a fait une comparaison entre les valeurs simulées du coefficient de dispersion avec celles mesurées pour une série d'expériences effectuées sur un canal au laboratoire. Les écarts s'y rapportant, repris ci-dessous sur le tableau I.1, sont dans leur majorité inférieurs à 20% (Fisher, 1967).

**Tableau I.1:** Comparaison des résultats expérimentaux avec les valeurs simulées du coefficient de dispersion  $D_x$  (méthode de Fischer)

Séries	Tirant d'eau (cm)	Largeur du canal (cm)	Vitesse moyenne (cm/sec)	Valeur mesurée du coefficient de dispersion $D_x$ (cm <sup>2</sup> /sec)	Valeur simulée du coefficient de dispersion $D_x$ (cm <sup>2</sup> /sec)	Ecart (%)
2800	3,5	40	25,1	1230	1310	6,50
2900	4,7	43	45,4	2530	2510	0,79
3000	3,5	40	45,1	4150	3710	10,60
3100	3,5	34	44,4	2500	2500	0,00
3200	2,1	33	45,3	4000	4500	12,50
3400	2,1	19	46,1	2200	1660	24,54

#### 4-Travaux de Motz et Benediet

Motz et Benediet, dans une étude réalisée en 1972, relative aux problèmes d'effluents thermiques, ont proposé une approche appelée Méthode Intégrale (Integral Method for the near field), ayant pour objectif la simulation des profils de vitesse, de température et de concentration en valeurs moyennes dans la zone du rejet (Motz & Benediet, 1972).

Toutefois, leur méthode reste exclusivement valable pour la zone limitrophe du rejet or, il est nécessaire de connaître la distribution des différents paramètres caractérisant le phénomène, tout le long de la rivière.

#### 5- Travaux de Miller et Richardson

En 1974, dans une étude expérimentale relative aux problèmes de contamination des cours d'eau, Miller et Richardson (Miller & Richardson, 1974) ont essayé d'évaluer expérimentalement les coefficients de diffusion et de dispersion longitudinaux et latéraux en corrélation avec les vitesses moyennes d'écoulement où ils ont abouti à une série de résultats jugés favorables comparativement aux travaux antécédents.

## 6- Travaux de Masbernat et Chaussavoine

En vue d'étudier le phénomène de dispersion en rivière imbriqué avec d'autres phénomènes de transfert ou de production de substances dissoutes, Masbernat et Chaussavoine (1979) ont étudié l'évolution d'une pollution organique sur une rivière, en simulant la biodégradation dans le milieu aquatique (Masbernat & Chaussavoine, 1979).

Pour déterminer le champ hydrodynamique de l'écoulement dans la rivière, ces chercheurs proposèrent un modèle simplifié unidimensionnel de Saint-Venant, où les grandeurs  $\langle G \rangle$  sont définies en moyenne sur une section droite  $A(x_I)$  :

$$\langle \bar{G}(x_1) \rangle = \frac{1}{A(x_1)} \int_{A(x_1)} \bar{G}(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 \quad (\text{I.6})$$

avec,  $(x_1, x_2, x_3)$  : système de coordonnées cartésiennes et  $G(x_1, x_2, x_3)$  : valeur locale de la grandeur  $G$ .

Le système d'équations ainsi obtenu est le suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \bar{V} \rangle A) + \langle \bar{m} \rangle &= 0 \\ \frac{\partial A \langle \bar{V} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \bar{V}^2 \rangle A) + \langle \bar{V} \rangle \langle \bar{m} \rangle &= -gA \frac{\partial Z_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \langle \bar{\tau}_w \rangle + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} [\langle \bar{\tau}_x \rangle A] \\ &+ gA(Z_s - Z_G) \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle \bar{\rho} - \rho_0 \rangle}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

Le champ des grandeurs scalaires est déterminé à partir de l'équation du transfert convectif – dispersif :

$$\frac{\partial A \langle \bar{C}_\alpha \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \bar{C}_\alpha \rangle \langle \bar{V} \rangle A) + \langle \bar{m}_\alpha \rangle = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} [\langle \bar{\phi}_x \rangle A] + A \langle \bar{\tau}_\alpha \rangle \quad (\text{I.8})$$

Ce système d'équations est défini par rapport à l'état de référence de masse volumique  $\rho_0$  constante. Les variables introduites sont données ainsi:

$V$  : vitesse d'écoulement dans la rivière ;

$m$  : distribution volumique des flux aux frontières de la section droite ;

$Z_s$  : est la côte de la surface libre ;

$Z_G$  : est la côte du centre de gravité de la section droite ;

$\langle \rho - \rho_0 \rangle$  exprime les effets de la force d'Archimède ;

$\langle \bar{\tau}_x \rangle$  exprime les effets de diffusion et de dispersion de quantité de mouvement et de masse de l'élément  $\alpha$  dans la section ;

$\langle \bar{\phi}_x \rangle$  exprime les effets de diffusion et de dispersion de masse de l'élément  $\alpha$

dans la section ;

$\langle \tau_w \rangle$  : représente le frottement moyen sur le fond ;

$\langle C_\alpha \rangle$  : fractions massiques retenue pour caractériser l'écosystème étudié (DBO, O<sub>2</sub> dissous, ... ) ;

$\langle \tau_\alpha \rangle$  : source ou puit caractérisant la cinétique chimique et biochimique du milieu aquatique.

Afin de permettre la résolution du système précédent, les hypothèses suivantes ont été adoptées :

- Le terme de frottement sur le fond a été modélisé par une expression courante de pertes de charge ;
- Le terme de dispersion de quantité de mouvement a été négligé ;
- Les variations de la masse volumique ont été négligées ;
- Le terme de dispersion de masse a été modélisé par l'hypothèse classique de type gradient qui fait intervenir un coefficient de dispersion global  $D_L$
- Les lois d'évolution ont été prises suivant des cinétiques du premier ordre.

Le travail de Masbernat et Chaussavoine a débouché sur l'élaboration d'un modèle simplifié pour la simulation du pouvoir auto-épurateur d'une rivière représenté par la demande biochimique en oxygène (DBO) et le déficit d'oxygène dissous.

En ce qui concerne la DBO, de concentration  $L$ , son évolution affectée par la biodégradation et la sédimentation a été prise suivant deux cinétiques du premier ordre de constantes  $K_1$  et  $K_3$ . Il a été prévu deux types d'apport de la DBO par l'environnement; soit ponctuel sans dilution simulant un rejet de débit  $L_a$ , soit lié à un débit d'apport simulant la charge  $\ell_q$  d'un affluent de débit  $q$ .

L'évolution du déficit d'oxygène dissous, de concentration  $C$ , affectée par la biodégradation et la réaération naturelle a été modélisée suivant une cinétique du premier ordre de constante  $K_2$ . Il a été prévu dans le modèle deux types d'apport, l'un simulant le déficit  $d_q$  d'un affluent de débit linéique  $q$  et l'autre  $P_H$  simule l'apport d'oxygène dissous par photosynthèse.

Dans le système d'équations utilisé par ces deux chercheurs, l'hydrodynamique a été définie par les équations de SAINT-VENANT, alors que l'état biochimique a été décrit par les deux équations suivantes:

$$\frac{\partial AL}{\partial t} + \frac{\partial AVL}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( AC_L \frac{\partial L}{\partial x} \right) - (K_1 + K_2)AL + L_a + \ell_q q \quad (\text{I.9})$$

$$\frac{\partial AC}{\partial t} + \frac{\partial AVC}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( AC_L \frac{\partial C}{\partial x} \right) - (K_1 L - K_2 C)A + d_q q - P_H \quad (\text{I.10})$$

Le modèle ainsi élaboré a été résolu par voie numérique suivant une méthode de discrétisation partielle, et appliqué à une rivière du bassin du Tarn l'Agout.

## 7- Travaux de Balland

En 1981, dans un travail similaire à celui de Masbernard et chaussoy, Balland a utilisé un modèle unidimensionnel de transport dans une rivière (I11 ALSACE) visant l'évaluation du pouvoir auto-épurateur de cette dernière (Ballant & Srae, 1985).

La vitesse d'écoulement a été supposée constante sur les tronçons séparant les différentes stations de mesure sur la rivière.

Le modèle utilisé par Balland pour simuler la variation de concentration en DBO (demande biochimique en oxygène) et en oxygène dissous (OD) le long de la rivière est le suivant:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + U \frac{\partial L}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - (K_1 + K_2)L + L_a = D_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - K_1 L - K_2 L + L_a \quad (\text{I.11})$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - K_1 L + K_2 (C_s - C) - D_B \quad (\text{I.12})$$

où  $t$  exprime le temps et  $x$  représente la distance.

Le système d'équations ainsi présenté comprend deux variables d'état;  $L$ : concentration en DBO et  $C$ : concentration en OD.

Cinq (05) processus considérés influençant la variation de la DBO et de l'OD; trois (03) processus sont communs aux deux équations:

- Les deux processus de transport représentés par les termes suivants:
  - $D_L \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$ : transport par diffusion ;
  - $U \frac{\partial C}{\partial x}$ : transport par convection à la vitesse du courant ;
- Le processus de dégradation biochimique de DBO; -  $K_1 L$  qui consomme de l'OD.

La DBO subit de son côté deux (02) processus additionnels:

- Le processus d'élimination par sédimentation et adsorption:  $-K_3 L$ .
- Le processus d'ajout par ruissellement, affouillement des berges et remise en suspension de dépôts benthiques:  $L_a$ .

L'OD, lui, évolue sous l'effet:

- De la réaération superficielle:  $K_2 (C_s - C)$ ;
- Du bilan net photosynthèse- respiration (y compris benthiques):  $- D_B$ .

Au total, le système des deux équations comporte huit (08) paramètres à savoir:

$D_L$ : coefficient de dispersion longitudinale;

$U$ : vitesse moyenne du courant ;

$C_s$ : concentration à saturation en OD à la température considérée ;

$K_1$ : coefficient de dégradation biochimique de la DBO;

$K_3$ : coefficient d'élimination par sédimentation et adsorption de la DBO;

$L_a$ : coefficient d'ajout de DBO le long du tronçon par ruissellement, affouillement des berges, remise en suspension de dépôts benthiques, etc;

$K_2$ : coefficient de réaération superficielle;

$C_s$ : concentration à saturation en OD à la température considérée;

$D_B$ : bilan net d'OD de tous les processus influençant l'OD, autres que la dégradation biochimique de la DBO et que la réaération superficielle.

Il s'agit donc de résoudre, à tout instant et en tout point, le système d'équation ci-dessus, à partir des conditions limites et initiales spécifiées.

Balland proposa une procédure de résolution numérique aux différences finies (Schéma explicite), pour l'intégration du système d'équations différentielles précité.

La fiabilité de ce modèle fut en rapport avec les conditions de calibration. Les résultats trouvés, comparés aux différents prélèvements sur site, ont été moyennement satisfaisants pour la DBO et à un moindre degré de fiabilité pour la concentration de l'oxygène dissous (OD).

Les différents modèles illustrés précédemment sont des modèles du type « Taylor » ; c'est à dire unidimensionnels et filaires.

La simplicité de tels modèles se paye malheureusement par des hypothèses très sévères et par une limitation dans leur pouvoir de simulation.

On voit ainsi que l'approche par un modèle filaire nécessite une très grande prudence et se trouve en défaut soit lorsqu'il existe des vitesses transversales, soit lorsque le phénomène de diffusion filaire n'a pas eu le temps de s'établir.

## 8- Travaux de Rastogi et Rodi

Rastogi et Rodi (1978) ont constaté que la majorité des travaux effectués sur le phénomène de transport des polluants dans les eaux de surface ne tiennent pas compte du caractère multidimensionnel de ce phénomène, et de la variation spatiale des coefficients de diffusion turbulente. Dans une étude de contribution à l'amélioration de la qualité de simulateurs numériques du phénomène de transport dans les écoulements à surface libre, ces deux chercheurs ont présenté deux types de modèles (2D et 3D) tenant compte de la turbulence engendrée dans le milieu aquatique, pour un écoulement uniforme à surface libre dans un canal à ciel ouvert (Rastogi & Rodi, 1978).

Les deux modèles (2D - 3D) appliqués au calcul d'un rejet coaxial, ont été testés pour différents nombres de Froude (IF) tout en faisant varier la vitesse du rejet et la rugosité du fond du canal (Rastogi & Rodi, 1978).

### ➤ Modèle tridimensionnel (3D)

Le système d'équations tridimensionnel régissant respectivement la distribution des composantes du vecteur vitesse ( $U, V, W$ ), de température et de concentration dans la rivière, établi par Rastogi et Rodi en faisant recours au concept de la viscosité / diffusivité turbulentes et en adoptant l'approximation de Boussinesq, s'écrit comme suit :

#### ➤ Equation de continuité:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{I.13})$$

#### ➤ Equations de quantité de mouvement:

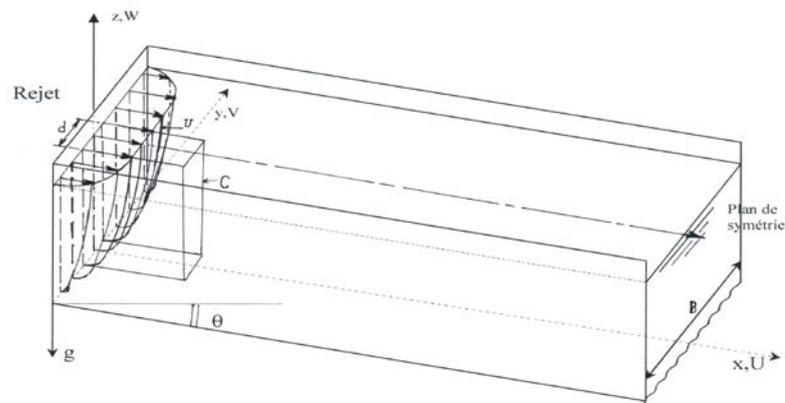
$$\begin{aligned} \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial VU}{\partial y} + \frac{\partial WU}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_t \frac{\partial U}{\partial z} \right) - g \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \theta \\ \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial WV}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_t \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \frac{\rho - \rho_r}{\rho_r} \\ \frac{\partial UW}{\partial x} + \frac{\partial VW}{\partial y} + \frac{\partial W^2}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_t \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

➤ Equation de transport de matière:

$$\frac{\partial U\phi}{\partial x} + \frac{\partial V\phi}{\partial y} + \frac{\partial W\phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S \quad (\text{I.15})$$

➤ Equation d'état:

$$\rho = f(T, C)$$



**Figure I-2:** Décharge coaxiale dans un canal à pente constante

avec,  $U, V$  et  $W$ : composantes de la vitesses d'écoulement,  $\theta$ : Pente du canal,

le terme  $g \frac{\rho - \rho_r}{\rho_r}$  représente la flottabilité dans le milieu,

$\rho$ : masse volumique locale,  $\rho_r$ : masse volumique propre à la rivière,

$\nu, \Gamma_{\phi}$  sont respectivement la viscosité et la diffusivité turbulente,

$P$ : pression hydrostatique,  $g$ : accélération de la pesanteur.

L'écoulement a été supposé du type parabolique dans la direction longitudinale ( $Ox$ ), appelé aussi écoulement de couche limite. Le gradient de pression dans cette direction prédominante est supposé constant :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = Cste \quad (\text{I.16})$$

Les effets du vent et de Coriolis ainsi que le transport turbulent dans la direction longitudinale ont été négligés dans le système d'équations précité.

Les deux chercheurs employèrent le modèle de turbulence ( $k, \varepsilon$ ) établi par Launder et Spalding (Launder & Spalding, 1974), dont l'état local de turbulence est

caractérisé par deux paramètres :

$k$  : énergie cinétique turbulente ;

$\varepsilon$  : taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

Les paramètres  $\nu_t$ ,  $\Gamma_\phi$  représentant respectivement la viscosité et la diffusivité turbulentes sont donnés dans ce modèle comme suit :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \quad \Gamma_\phi = \frac{\nu_t}{\sigma_\phi}$$

avec,  $\sigma_\phi$  représente soit le nombre de Prandtl pour un transport thermique ou le nombre de Schmit pour le cas de transport de masse,  $C_\mu$  est une constantes numérique du modèle ( $C_\mu=0,09$ ).

Les équations d'évolution de  $k$  et  $\varepsilon$  sont :

$$\frac{\partial Uk}{\partial x} + \frac{\partial Vk}{\partial y} + \frac{\partial Wk}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + G - \varepsilon \quad (\text{I.17})$$

$$\frac{\partial U\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial V\varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial W\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} G - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$G$  : production de l'énergie turbulente;

$\sigma_\varepsilon$ ,  $\sigma_k$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes numériques du modèle ( $\sigma_\varepsilon=1,3$ ,  $\sigma_k=1,0$ ,  $C_1=1,44$  et  $C_2=1,92$ )

### ➤ Modèle bidimensionnel (2D)

Le système bidimensionnel développé par Rodi et Rastogi est une forme simplifiée de celui développé antérieurement par Kuiper et Vrengdenhil (1973) en intégrant les équations tridimensionnelles sur la profondeur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{\partial(\partial \bar{U} h)}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{U}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W} \bar{U}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\nu}_t \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) - g \sin \theta - g \frac{dh}{dx} - \frac{\tau_b}{\rho h} + A_u \\ \frac{\partial \bar{U} \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W} \bar{\phi}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\Gamma}_\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right) + \bar{S}_\phi - q + A_\phi \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

avec,  $\bar{U} = \frac{1}{h} \int_0^h U dy$ ,  $\bar{W} = \frac{1}{h} \int_0^h W dy$ ,  $\bar{\phi} = \frac{1}{h} \int_0^h \phi dy$

$\frac{\tau_b}{\rho}$  : terme de frottement ;

$q$  : flux de chaleur;

$A_w, A_\phi$  : termes de dispersion résultant de la non uniformité des profils de vitesse et du champ scalaire  $\phi$  ;

La viscosité et la diffusivité turbulentes moyennes correspondant au modèle 2D  $\tilde{\nu}_t$  et  $\tilde{\Gamma}_\phi$  sont données ainsi:

$$\tilde{\nu}_t = C_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}^2}, \quad \tilde{\Gamma}_\phi = \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\phi}$$

où,  $\tilde{k}$  et  $\tilde{\varepsilon}$  représentant respectivement l'énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation, obtenus en simplifiant les équations d'évolution exacte de  $k$  et  $\varepsilon$  et correspondant au modèle bidimensionnel 2D, sont déterminés à partir du système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \overline{U\tilde{k}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W\tilde{k}}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial y} \right) + \tilde{\nu}_t \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \right)^2 + P_{kv} - \tilde{\varepsilon} \quad (\text{I.19})$$

$$\frac{\partial \overline{U\tilde{\varepsilon}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W\tilde{\varepsilon}}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} \right) + C_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} \tilde{\nu}_t \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \right)^2 + P_{\varepsilon v} - C_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}}$$

Pour intégrer le système d'équations différentielles, les deux chercheurs ont utilisé un algorithme analogue à celui employé par (Patankar & Spalding, 1972) pour le calcul des transferts de masse, de chaleur et de quantité de mouvement dans les écoulements du type parabolique.

## 9- Travaux de McGuirk et Rodi

En 1979, McGuirk et Rodi ont tenté d'élargir la formulation précédemment établie par Rastogi et Rodi aux cas de décharges effectuées à partir des berges de la rivière (McGuirk & Rodi, 1979).

Cette étude eut comme but principal la détermination de la zone du retour développée en aval du rejet.

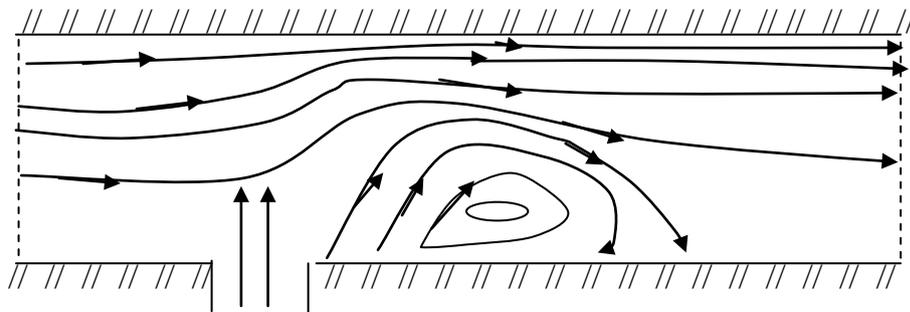


Figure I-3: Rejet latéral

L'algorithme SIMPLE de Patankar – Spalding (Patankar & Spalding, 1972) associé à un programme de calcul des écoulements du type elliptique, a été employé par Mcguirk et Rodi pour résoudre les différentes équations couvrant le phénomène étudié.

## 10- Travaux de Glass et Rodi

En 1982, Glass et Rodi ont présenté un schéma numérique permettant la résolution de l'équation bidimensionnelle de transport d'un champ scalaire de température (T) s'écrivant comme suit (Glass & Rodi, 1982):

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y}}_{\text{Advection}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_{\text{Diffusion}} + S \quad (\text{I.20})$$

avec  $D_x, D_y$  : coefficients de dispersion et  $S$  : terme source.

Le terme convectif, évoqué dans l'équation de transport de T, a été calculé au moyen d'une méthode aux caractéristiques qui fut une extension de celle développée précédemment par (Holley & Preisman, 1977). Cependant, la diffusion a été simulée au moyen d'un schéma aux différences finies centrées.

Les performances de la méthode de Glass et Rodi ont été testées pour plusieurs exemples relatifs au transport de traceurs dans un écoulement de canal. Leur méthode a été largement utilisée pour l'étude des écoulements transitoires où l'effet du processus d'advection se trouve prédominant.

## 11- Travaux de McBride et Rutherford

Mc Bride et Rutherford développèrent, en 1984, une approche numérique unidimensionnelle aux différences finies, valable pour la modélisation de la dispersion et de l'advection d'un polluant non réactif dans un écoulement de rivière, avec un régime non uniforme (McBride & Rutherford, 1984).

La qualité des eaux de la rivière dépendant de la concentration des substances polluantes (C) a été modélisée selon l'équation classique unidimensionnelle de transfert de masse, caractérisant un écoulement filaire :

$$\frac{\partial(AC)}{\partial t} + \frac{\partial(AUC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( AD \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \right) + AS \quad (\text{I.21})$$

avec,  $C(x,t)$  : concentration moyenne d'un élément quelconque (champ scalaire) introduit dans la rivière (DBO, DCO, OD, .....),  $A(x,t)$  : section mouillée,  $U(x,t)$  : vitesse longitudinale de l'écoulement,  $D(x,t)$  : coefficient de dispersion longitudinale et  $S(c,x,t)$  : fraction de  $C$ , ajoutée ou soustraite du milieu le long de l'écoulement.

Contrairement à Holley et Priesman (Holley & Priesman, 1977), la méthode de Mc Bride et Rutherford consista à individualiser une particule déterminée du fluide et à la suivre dans ses mouvements. La nouvelle position du point considéré doit être déterminée avant que le changement de concentration en ce même point soit évalué.

## 12- Travaux de Ménigaut et Dumay

En 1990, Ménigaut et Dumay (Ménigaut & Dumay, 1990) ont fait recours à l'application d'un modèle mathématique pour l'étude de l'hydrodynamique, du transport dispersif et diffusif d'une pollution émanant de plusieurs sources potentielles dans un système lagunaire. Les équations employées dans ce modèle sont :

- L'équation de continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (\text{1.22})$$

- Les équations de quantité de mouvement obtenues en (2D), en prenant en considération les effets du vent et du Coriolis :

$$\begin{aligned} h \frac{\partial U}{\partial t} + hU \frac{\partial U}{\partial x} + hV \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{h}{\rho} \left( \varepsilon_{xx} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + gh \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ + \frac{gU}{c^2} (U^2 + V^2)^{1/2} - V_a^2 \cos \psi - 2hwV \sin \varphi = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

$$\begin{aligned} h \frac{\partial V}{\partial t} + hV \frac{\partial V}{\partial x} + hU \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{h}{\rho} \left( \varepsilon_{yx} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + gh \left( \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ + \frac{gV}{c^2} (U^2 + V^2)^{1/2} - V_a^2 \cos \psi + 2whU \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

avec,  $a$  : bathymétrie,  $c$  : coefficient de Chezy,  $V_a, \psi$  : vitesse et direction du vent,  $w$  : vitesse angulaire de rotation de la terre et  $\varphi$  : latitude.

- L'équation de transport :

$$h \left( \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} - D_x \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - D_y \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \sigma + K_d C \right) = 0 \quad (\text{I.24})$$

où,  $C$  : concentration instantanée en constituants,  $\sigma$  : source locale de masse de constituants,  $K_d$ : coefficient de dégradation du constituant et  $D_x, D_y$ : coefficients de diffusion turbulente.

### 13- Travaux de Laroui, Kahawita et Bilek

En 1994, Laroui a présenté une thèse de magister à l'E.N.P, sous la direction de Mr Kahawita et de Mr Bilek, ayant comme objet la simulation de la dispersion d'un polluant dans un canal en régime non permanent. Un système d'équations bidimensionnelles moyennées sur la profondeur, obtenu par intégration des équations générales de Navier-Stokes a été utilisé en combinaison avec une équation bidimensionnelle de transport d'un champ scalaire (C) (Laroui & Kahawita, 1994).

Le système d'équations hydrodynamiques résultant de l'intégration, s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uh) + \frac{\partial}{\partial y}(Vh) &= 0 \\ \frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU^2) + \frac{\partial}{\partial y}(hUV) &= fhV - gh \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{1}{\rho}(\tau_{wx} - \tau_{bx}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}(hT_{xx}) \\ &\quad - \frac{g}{c^2} U \sqrt{U^2 + V^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y}(hT_{xy}) \\ \frac{\partial(hV)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hUV) + \frac{\partial}{\partial y}(hV^2) &= -fhU - gh \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} \\ &\quad - \frac{g}{c^2} V \sqrt{U^2 + V^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x}(hT_{xy}) + \frac{\partial}{\partial x}(hT_{yy}) \right) \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

où,  $c$  : coefficient de Chezy,  $\tau$  : côte de la surface libre par rapport au datum,  $\tau_{wx}, \tau_{wy}$  : contraintes du vent,  $T_{xy}, T_{xx}, T_{yy}$ : contraintes effectives et  $f$ : coefficient de Coriolis.

Par ailleurs, l'équation bidimensionnelle exprimant le transport du champ scalaire C, utilisée par Laroui est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(hC) + \frac{\partial}{\partial x}(hUC) + \frac{\partial}{\partial y}(hVC) = \frac{\partial}{\partial x} \left( h \varepsilon_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \varepsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \pm S_k h \quad (\text{I.26})$$

où,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  sont des coefficients de mélange déterminés empiriquement.

L'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) de Patanker (Patanker, 1980) a été utilisé pour intégrer le système d'équations différentielles.

## 14- Travaux de Piaseki et Katopodes

Dans une étude visant la simulation de la réponse du milieu aquatique (rivière, estuaire) aux différents rejets polluants, Piaseki et Katopodes ont recouru, en 1997, à une approche numérique bidimensionnelle en éléments finis pour la résolution des équations régissant l'écoulement et la détermination de la distribution de la concentration de pollution (Piaseki & Katopodes, 1997).

En se basant sur l'hypothèse de la distribution hydrostatique de la pression, les équations turbulentes de Navier – Stokes intégrées sur la verticale et impliquant les effets de Coriolis, du vent et des apports latéraux, ont été utilisées pour modéliser les caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement.

Le système d'équation ainsi obtenu est le suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i h) = \delta(x_i - x_{is})Q_F(t) \quad (I.27)$$

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i U_j) + g \frac{\partial}{\partial x_i}(h^2/2) = gh \frac{\partial Z_0}{\partial x_i} - g/c^2 U_i \sqrt{U_i U_i} + 2WU_i h \sin \varphi + \beta V_a^2 \cos \psi$$

avec,

$\delta(x_i - x_{is})Q_F(t)$ : apport latéral résultant d'une source volumétrique de pollution caractérisée par un débit  $Q_F(t)$  et un vecteur de position  $x_{is}$  ( $is=1,2,\dots,s$ );

$\delta$ : opérateur permettant d'isoler le vecteur de position  $x_{is}$  dans le domaine de calcul;

$c$ : coefficient de Chezy;

$Z_0$ : côte du fond;

$2WU_i h \sin \varphi$ : effet de Coriolis;

$\beta V_a^2 \cos \psi$ : effet du vent.

L'équation bidimensionnelle de transport tenant compte des apports latéraux de pollution utilisée par ces chercheurs est donnée comme suit :

$$\frac{\partial(hC)}{\partial t} + \frac{\partial(U_i hC)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( hD_{ij} \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) - hD_k C - \delta(x_i - x_{is})Q(t) = 0 \quad (I.28)$$

où,  $C$  représente la concentration moyenne d'une espèce polluante, injectée dans le milieu aquatique,  $D_{ij}$  : coefficient de dispersion,  $D_k$  : coefficient de décomposition des éléments chimiquement non conservatifs et  $\delta(x_i - x_{is})Q(t)$  : apport latéral de pollution.

On remarque que l'équation de transport utilisée par Piaseki et Katopodes, exprime un bilan des effets de convection et de dispersion associés à l'effet de réaction. Elle introduit également un terme exprimant les apports latéraux causés par les différentes sources de pollution susceptibles d'affecter le milieu aquatique (rivière, estuaire).

## 15- Travaux de Yu et Righetto

Plus récemment en 1998, dans une étude de simulation de transport de polluants dans un estuaire, Yu et Righetto (Yu & Righetto, 1998) ont utilisé le modèle  $(\bar{k}, \bar{w})$  développé antérieurement par Yu et Zhang (1988) pour déterminer les coefficients de viscosité et de diffusion turbulentes  $(\bar{v}_t, \bar{\Gamma}_\phi)$  impliqués dans les équations de quantité de mouvement et de transport.

### Modèle $(\bar{k}, \bar{w})$ de Yu – Zhang (1988)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}\bar{K}k) + \frac{\partial}{\partial y}(h\bar{V}k) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{v}_t}{\sigma_k} h \frac{\partial \bar{k}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{v}_t}{\sigma_k} h \frac{\partial \bar{k}}{\partial y}\right) + hP_k + hP_{kv} - C_\mu h\bar{k}\bar{w}^{-1/2} + \bar{S}_k \\ \frac{\partial h\bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{U}\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{V}\bar{w}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{v}_t}{\sigma_w} h \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{v}_t}{\sigma_w} h \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right) + C_{1w}\bar{v}_t h \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) \right]^2 \\ - C_{2w}h\bar{w}^{3/2} \left[ 1 + C'_{2w} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{w}} \right)^{1/2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{k}}{\bar{w}} \right)^{1/2} \right)^2 \right] &+ C_{3w}h\frac{\bar{w}}{\bar{k}}P_k + hP_{wv} \end{aligned} \quad (I.29)$$

avec,  $\bar{G}$  : représente la valeur moyennée sur la verticale de la variable G ;

$$\bar{v}_t = \bar{k}\bar{w}^{-1/2}, \quad \bar{\Gamma}_\phi = \bar{v}_t / \sigma_\phi$$

$\bar{k}$  : énergie cinétique turbulente ;

$\bar{w}$  : taux de dissipation de l'énergie cinétique (vorticity fluctuation parameter) ;

$h$  : profondeur locale de l'eau ;

$\bar{S}_k, \bar{S}_w$  : termes sources ;

$P_k$  : production de l'énergie cinétique turbulente ;

$C_\mu, \sigma_k, \sigma_w, C_{1w}, C_{2w}$  et  $C_{3w}$  ; constantes empiriques ;

$P_{kv}, P_{wv}$  : termes additionnels dus aux gradients de la vitesse verticale au voisinage du fond.

Ce travail avait comme objectif principal, la simulation de la variation du champ de température et de concentration en DBO et en DCO du milieu aquatique recevant des rejets qui proviennent de plusieurs stations industrielles. La méthode des

volumes finis a été appliquée pour l'intégration numérique des différentes équations régissant la dynamique et la cinétique biochimique de l'estuaire.

## 16- Travaux de Nathalie Buil, Gay B. et Morel R.

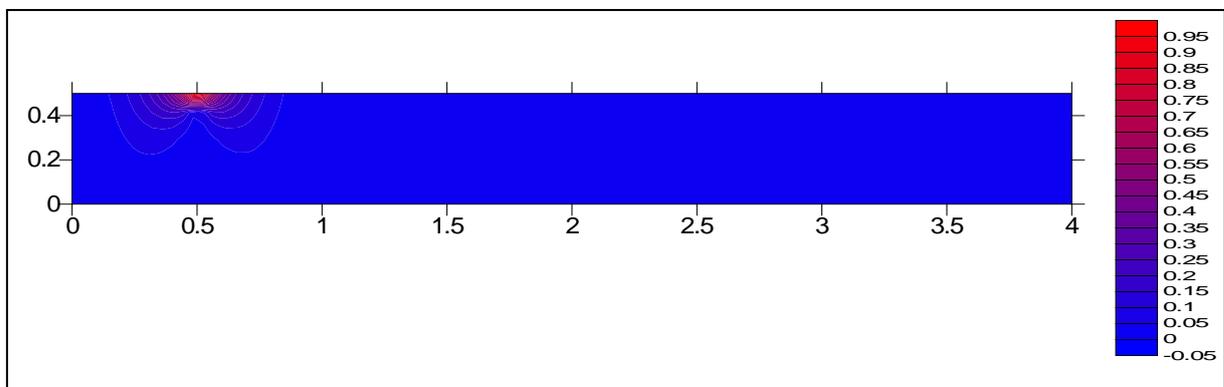
En 1999, Nathalie Buil (Buil, 1999) a présenté une thèse de doctorat à l'université de Claude Bernard – Lyon1 intitulée «modélisation tridimensionnelle du transport de polluants dans les écoulements à surface libre ». Encadré par Gay B. et Morel R., ce chercheur a utilisé le logiciel CFX-F3D anciennement dénommé « FLOW3D » dont la méthode de résolution est celle des volumes finis afin d'intégrer les équations classiques de Navier-Stokes et l'équation de convection-diffusion en trois dimensions tout en tenant compte de l'effet de la turbulence.

L'objectif du travail en question fut de décrire la dispersion d'une pollution ponctuelle au voisinage de son rejet dans un écoulement en rivière où l'hypothèse de la pression hydrostatique a été écartée. Cependant, l'hypothèse classique de Boussinesq a été adoptée pour prendre en compte les différences de densité dans le terme de gravité des équations de quantité de mouvement.

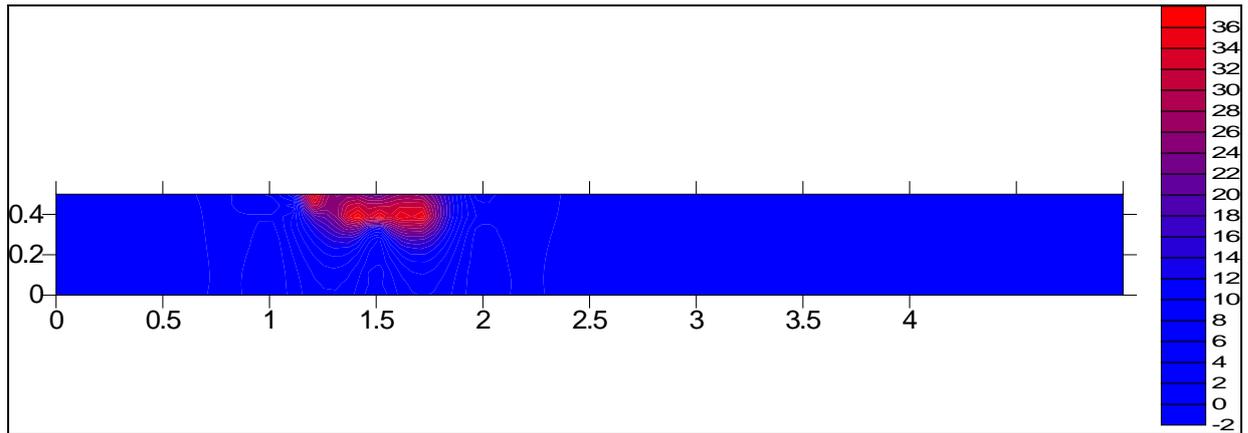
## 17- Travail de Boussoum

Dans un travail de recherche portant sur la simulation numérique de la pollution dans les écoulements à surface libre, élaboré par Boussoum (2006) dans le cadre de son mémoire de magistère à l'Ecole Nationale Polytechnique, la méthode des volumes finis a été utilisée pour la résolution des équations bidimensionnelle de transport de quantité de mouvement et de polluant. Cependant, le modèle k- $\epsilon$  a été utilisé pour la détermination des paramètres de la turbulence dans le domaine de calcul (viscosité et diffusivité turbulentes).

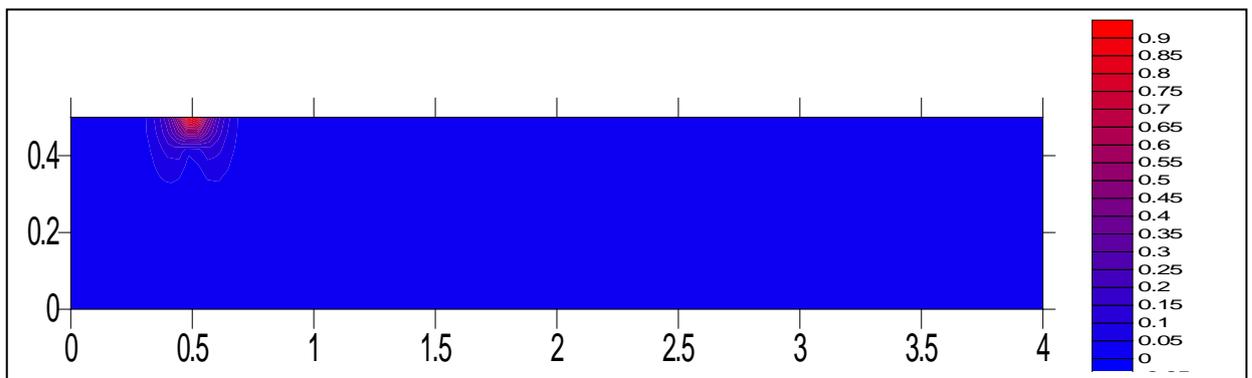
Le modèle numérique ainsi établi a été appliqué pour la simulation de l'évolution de la pollution dans un canal rectangulaire pour deux situations; la première concerne le cas d'une source non continue alors que la deuxième situation se rapporte à une source continue (figures I-4 à I-7).



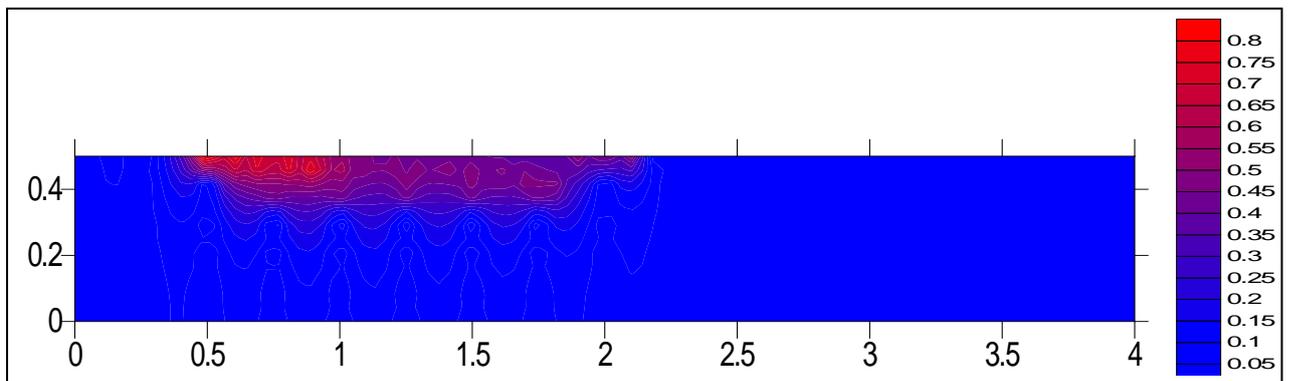
**Figure I-4:** Isoconcentrations à l'instant initial pour une source non continue



**Figure I-5:** Isoconcentrations à l'instant  $t=30s$  pour une source non continue



**Figure I-6:** Isoconcentrations à l'instant initial pour une source continue



**Figure I-7:** Isoconcentrations à l'instant  $t=30s$  pour une source continue

## 18- Travaux de K. Kachiashvili, D. Gordiziani, R. Lazarov et

### D. Melikdzhanian

Dans un travail similaire à celui de Mc Bride & Rutherford (1984), Kachiashvili, Gordiziani, Lazarov & Melikdzhanian, dans une étude portant sur la simulation numérique du transport de substances réactives dans une rivière, réalisée en

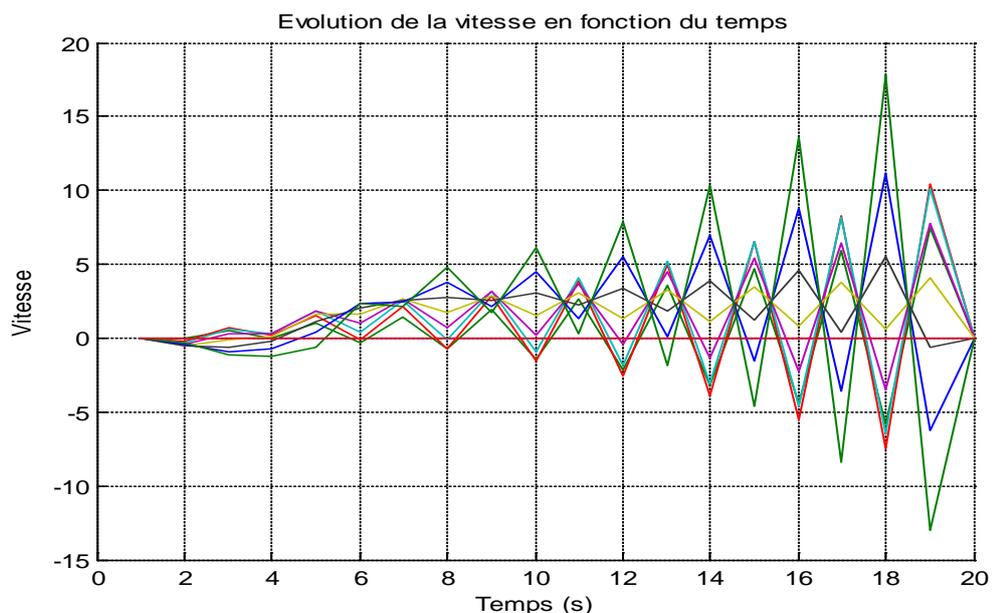
2007, ont opté pour la méthode des différences finies pour la résolution de l'équation de transport de matière dans un cours d'eau.

Ces chercheurs ont adopté une approche simplifiée pour la détermination de la diffusivité turbulente en optant pour une formulation basée sur l'interpolation linéaire de ce paramètre. Deux types de modèles 1D et 2D ont été utilisés pour la simulation de l'évolution de la concentration en  $\text{NO}_3$  et  $\text{PO}_4$  dans une rivière, et ce, dans le but de quantifier l'incidence des produits chimiques relevant de l'activité agricole, sur la qualité des eaux de rivières (Kachiashvili, Gordiziani, Lazarov & Melikdzhanian, 2007).

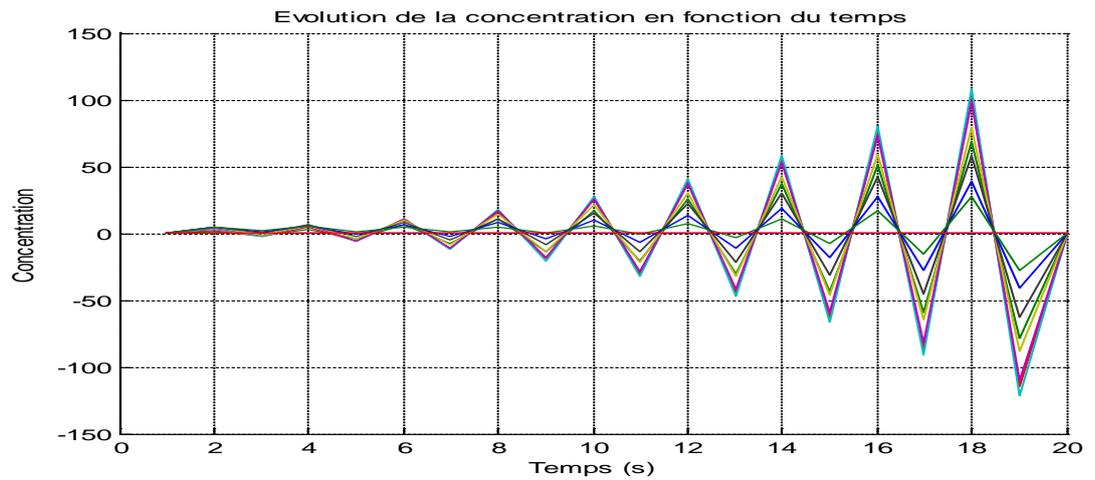
## 19- Travail de K. Djabelkhir

Djabelkhir a élaboré en 2010 un mémoire de magistère à l'Ecole Nationale Polytechnique portant sur la simulation numérique de dispersion d'un polluant actif dans un canal par la méthode des différences finies, où ce dernier a adopté un modèle hydrodynamique 2D pour décrire l'écoulement turbulent à surface libre ainsi que l'équation de transport. Le modèle  $k - \varepsilon$  a été ainsi utilisé pour la fermeture du système d'équations hydrodynamiques.

Le schéma implicite de Beam Warming a été utilisé pour la discrétisation de l'ensemble d'équations différentielles du modèle mathématique. Les résultats obtenus via le modèle numérique adopté par (Djabelkhir, 2010) correspondant à la simulation de la dispersion du phénol dans un canal rectangulaire ont été comparés avec les résultats issus des expériences effectuées au laboratoire LRS-Eau de l'ENP (figures I-8 et I-9).



**Figure I-8:** Evolution de la vitesse en fonction du temps



**Figure I-9:** Evolution de la concentration en fonction du temps

## Conclusion

A travers l'étude bibliographique présentée, nous ne prétendons pas avoir exposé la totalité des simulateurs numériques développés jusqu'à présent et ayant rapport aux problèmes de transport de la pollution dans les écoulements à surface libre, il existe d'autres travaux dans la littérature.

Quant à notre travail, il sera consacré à la modélisation bidimensionnelle de transport de la pollution dans un écoulement à surface libre en présence de la turbulence. Nous exposerons dans le chapitre suivant la formulation mathématique se rapportant au problème étudié avant d'aborder la résolution numérique des équations régissant l'écoulement.

## Chapitre II

# Equations régissant l'écoulement

## Introduction

Les systèmes des eaux de surface constituent un domaine important de la modélisation numérique permettant de prévoir la réponse du milieu naturel aux différentes sollicitations externes.

Il est donc nécessaire de connaître l'évolution des paramètres physiques caractérisant la réponse du milieu aquatique. Les relations mathématiques qui permettent de prédire cette évolution dans un écoulement monophasique au sein d'une géométrie donnée sont les équations de Navier-Stokes. Ces équations sont déduites des principes fondamentaux de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

D'un point de vue pratique, les grandeurs définissant en chaque point et chaque instant l'état dynamique et thermodynamique du milieu sont :

- La masse volumique  $\rho$  ;
- Les trois composantes de la vitesse  $U_i$  ;
- La pression  $P$  ;
- La température  $T$  ;
- La concentration ou la fraction massique d'une espèce quelconque dans le milieu aquatique  $\phi$  ;
- La salinité  $s$  ;

Le dernier paramètre représentant la salinité est propre aux milieux marins et estuariens, il représente la fraction massique des sels ionisés dans l'eau.

## 1- Cas général

Nous exposerons dans ce qui suit les équations définitives résultant de l'application des principes de conservation. Pour plus de détail concernant les différentes étapes d'élaboration de ces équations il est conseillé de se référer à (Fabre & Ramany Bala, 1980).

### 1.1- Equations de bilans

#### 1.1.1- Bilan de masse (équation de continuité)

L'équation de continuité exprime que le fluide est continu, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir dans aucune partie du fluide ni apport extérieur, ni prélèvement de matière. La masse se conserve au cours de l'écoulement (Carlier, 1972).

Soient  $Ox_i (i=1,2,3)$  les trois axes de coordonnées cartésiennes dont l'axe  $Ox_3$  est dirigé suivant la verticale à la terre. L'équation de continuité s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) = 0 \quad (\text{II.1})$$

où,  $\rho$  : masse volumique du fluide ;  
 $U_i$  : vitesse d'écoulement suivant l'axe  $Ox_i$ .

#### 1.1.2- Bilan de quantité de mouvement

Les équations de quantité de mouvement, appelées généralement équations de Navier–Stokes, expriment l'équilibre entre les différentes forces s'exerçant sur la particule liquide de masse unité à savoir :

- La force d'inertie résultant du mouvement des particules liquides ;
- La force de pression ;
- La force de viscosité ;
- La force extérieure.

En projection sur les axes de coordonnées cartésiennes  $Ox_i (i=1,2,3)$  dont l'axe  $Ox_3$  est dirigé suivant la verticale à la terre , les équations de Navier Stokes s'écrivent comme suit (Chaussavoine, 1979), (Fabre & Ramany Bala, 1980)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} (\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g \delta_{i3} - \rho \zeta_{ijk} \Omega_j U_k \quad (\text{II.2})$$

où,  $\rho$ : masse volumique du fluide ;

$U_i$ : vitesse d'écoulement suivant l'axe  $Ox_i$  ;

$\tau_{ij}$ : tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumis au champ de vitesse ;

$g$  : accélération de la pesanteur ;

$\delta_{i3}$ : paramètre de Kronecker ( $\delta_{i3}=1$  lorsque  $i=3$  et  $\delta_{i3}=0$  lorsque  $i \neq 3$ ) ;

$\zeta_{ijk}$ : tenseur unité du 3<sup>ème</sup> ordre.

$\Omega_j$ : double du vecteur rotation de la terre projeté sur l'axe  $j$  ( $|\Omega| \approx 1.46 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ).

Pour alléger l'écriture des équations de Navier-Stokes, le produit ( $\zeta_{ijk}\Omega_j$ ) associé à la force de Coriolis représentée par le dernier terme de l'équation (II.2) est souvent substitué par le coefficient de Coriolis «  $f$  ».

### 1.1.3- Bilan de matière

L'équation de transport d'un champ scalaire quelconque «  $\phi$  » ( $\phi$  peut être la concentration d'une pollution  $C$  ou la salinité  $s$ ) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\phi U_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}(J_j) + \rho S_\phi \quad (\text{II.3})$$

avec  $J_j$ : composante du flux diffusif de l'espèce considérée et  $S_\phi$ : terme source exprimant le taux de création ou de disparition de l'espèce  $\phi$ .

### 1.1.4- Bilan d'énergie interne

Si on néglige l'apport d'énergie lié à la dissipation visqueuse, l'équation de conservation de l'énergie interne s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e U_i) = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} - P \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + r \quad (\text{II.4})$$

où,  $e$  : énergie interne,  $q_i$  : composante du flux diffusif d'énergie interne et  $r$  : densité volumique du taux d'apport de chaleur par rayonnement.

## 1.2- Lois de comportement

### 1.2.1- Contraintes visqueuses $\tau_{ij}$

Dès à présent, nous considérons le fluide isotrope et newtonien. Les contraintes visqueuses données par la loi de Newton s'écrivent sous la forme suivante:

$$\tau_{ij} = 2\mu \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (\text{II.5})$$

déformation  
linéaire

déformation  
volumique

où,  $\mu$  : viscosité dynamique moléculaire et  $\delta_{ij}$ : paramètre de Kronecker ( $\delta_{ij}=1$  lorsque  $i=j$  et  $\delta_{ij}=0$  lorsque  $i \neq j$ ).

### 1.2.2- Flux diffusif d'énergie $q_i$

Nous considérons que les phénomènes diffusifs croisés sont négligeables et nous retenons la loi de Fourier pour exprimer  $q_i$  :

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (\text{II.6})$$

où  $\lambda$  est le coefficient de conduction.

### 1.2.3- Flux diffusif de masse $J_i$

En négligeant les phénomènes croisés de thermodiffusion et de barodiffusion, le flux diffusif de masse  $J_i$  peut être exprimé par la loi de Fick :

$$J_i = \rho D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (\text{II.7})$$

où  $D_\phi$  représente le coefficient de diffusion massique du champ scalaire  $\phi$ .

## 1.3- Equations d'état

L'équation d'état relative à la densité du milieu, donnée sous forme différentielle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = k_T dP - \alpha dT + \beta d_s \quad (\text{II.8})$$

où,

$$k_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{T,s} : \text{coefficient de compressibilité}$$

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{P,s} : \text{coefficient d'expansion thermique}$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{P,T} : \text{coefficient d'expansion massique}$$

Pour un fluide incompressible, la masse volumique  $\rho$  se trouve indépendante de la pression P, l'équation d'état (II.8) devient donc:

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)) \quad (\text{II.9})$$

Nous nous plaçons dans le cadre d'un écoulement de rivière, l'effet de variation

de la salinité sera substitué par l'effet de variation de la concentration du polluant C :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0) + \beta(Y - Y_0)) \quad (\text{II.10})$$

où,  $\rho$  : masse volumique pour le mélange fluide-polluant ;

$\rho_0$  : masse volumique de référence se rapportant au fluide en écoulement ;

$\beta$  : coefficient d'expansion massique du polluant ;

$Y = C/\rho_0$  : fraction massique du polluant dans le mélange fluide-polluant.

$Y_0$  : fraction massique de référence du polluant.

Nous considérons que le fluide est incompressible mais couplé au champ de température par les forces de flottabilité. Par conséquent, les variations de la masse volumique avec la température sont négligeables au niveau de tous les termes des équations régissant l'écoulement sauf au niveau du terme de gravité.

L'équation d'état (II.10) n'apparaît donc que dans le terme de flottabilité des équations de quantité de mouvement. La masse volumique, au niveau de tous les autres termes, demeure constante et égale à  $\rho_0$ . Il s'agit de l'approximation classique de Boussinesq.

Toutefois, l'effet de flottabilité causé par la variation de la masse volumique ne sera pris en considération que dans le cas du modèle tridimensionnel (3D). La force de flottabilité ne sera pas impliquée lorsque les équations tridimensionnelles seront intégrées sur la profondeur pour aboutir au modèle bidimensionnel (2D).

## 2- Hypothèses simplificatrices

Dans le but d'établir le système d'équations régissant l'écoulement étudié, nous considérons que :

- Le fluide est incompressible, isotrope et newtonien ;
- Le polluant est mélangé au niveau moléculaire ;
- Les caractéristiques du mélange fluide-polluant sont les mêmes que celles du fluide ;

Les équations exprimant les différents bilans deviennent :

### ➤ Equation de continuité

Pour un fluide incompressible où la masse volumique  $\rho$  est constante, l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.11})$$

### ➤ Equation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) + \beta(Y - Y_0)] g \delta_{i3} + f U_k \quad (\text{II.12})$$

où,  $f$  est le coefficient de Coriolis.

➤ **Equation de transport du champ scalaire  $\phi$**

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi U_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right] + S_\phi \quad (\text{II.13})$$

En effet, le transport de la pollution au sein d'une rivière (canal) est régi presque entièrement par le brassage turbulent de l'écoulement. La prise en compte de la turbulence qui s'y manifeste est essentielle pour expliquer l'évolution de polluants en cours d'eau.

Un écoulement turbulent est composé de « filets fluides » qui, au lieu de conserver leur individualité en glissant uniquement les uns sur les autres comme dans un écoulement laminaire, échangent entre eux des particules fluides. Ainsi, le fluide semble se déplacer au hasard autour de la direction générale de l'écoulement (Buil, 1999).

Cet état désordonné survient en réalité lorsque la vitesse d'écoulement devient supérieure à une limite au-delà de laquelle la viscosité ne suffit pas à régulariser les mouvements.

### 3- Equations régissant l'écoulement turbulent

Dans un écoulement turbulent, les différents champs de variables ont un caractère aléatoire dans le temps et dans l'espace. Dans de telles conditions, les équations (II.11) à (II.13) ne sont pas utilisables directement dans leur formation locale et instantanée. On est ainsi conduit à appréhender ces paramètres de manière statistique de sorte que seules les valeurs moyennes finissent par nous intéresser, et ce, en caractérisant chaque champ des variables aléatoires par ses champs de moments statistiques et en déduisant des équations locales et instantanées, les équations de transport de ces moments.

#### 3.1- Equations des variables moyennes

L'approche statistique utilisée pour l'établissement des équations régissant l'écoulement turbulent se fonde sur la classique décomposition de Reynolds ; chaque champ instantané  $G$  est considéré comme étant la somme d'un champ moyen  $\bar{G}$  et d'un champ de fluctuation  $G'$ .

$$G(x, t) = \bar{G}(x) + G'(x, t) \quad (\text{II.14})$$

$$\overline{G}(x) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} G(x,t).dz \quad (\text{II.15})$$

Pour cela, nous introduisons deux échelles de temps, l'une est macroscopique  $\theta_0$  et correspond aux valeurs moyennes et l'autre est microscopique  $\theta_e$  et correspond aux fluctuations turbulentes. On élargit alors la définition de la grandeur moyenne en posant :

$$\overline{G}(x) = \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} G(x,t).dz \quad (\text{II.16})$$

$$\theta_e \ll \theta \ll \theta_0$$

Ainsi, l'ensemble des variables introduites pour décrire les échanges dans les eaux superficielles s'écrira :

$$U_i = \overline{U}_i + u_i$$

$$P = \overline{P} + p$$

$$\phi = \overline{\phi} + \varphi$$

En appliquant la décomposition de Reynolds à toutes les équations régissant l'écoulement, nous obtenons le système d'équations suivant :

➤ **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.17})$$

➤ **Equation de quantité de mouvement :**

$$\frac{\partial \rho_0 \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 \overline{U}_i \overline{U}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \rho_0 \overline{u_i u_j} \right] + \rho g \delta_{i3} + f \overline{U}_k \quad (\text{II.18})$$

➤ **Equation de transport du champ scalaire  $\phi$  :**

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\phi U}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ D_\phi \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_i} - \overline{u_i \phi} \right] + \overline{S}_\phi \quad (\text{II.19})$$

Les équations (II.17) à (II.19) constituent les équations de transport des grandeurs moyennes ; elles font apparaître des corrélations entre les vitesses fluctuantes  $\overline{u_i u_j}$  appelées généralement contraintes de Reynolds et des flux turbulents thermiques ou de masse  $\overline{u_j \phi}$ . Ces termes sont en surnombre par rapport au nombre d'équations.

## 3.2- Modèles de turbulence

L'apparition des différentes corrélations dans les équations du modèle d'écoulement pose un problème de fermeture du système d'équations. Il n'y a pas de réponse théorique universelle au problème de fermeture des équations de Reynolds, nous sommes contraints d'introduire un modèle de turbulence.

L'objectif de l'ensemble des modèles de turbulence consiste alors à modéliser ces termes en utilisant un nombre réduit de nouvelles inconnues et d'équations correspondantes.

Dans ce qui suit, nous passerons en revue les modèles de turbulence les plus utilisés, nous distinguons :

- Soit des modèles de fermeture du premier ordre consistant à modéliser les corrélations en les reliant directement aux caractéristiques du mouvement moyen; ces modèles reposent sur le concept de la viscosité turbulente ;
- Soit des modèles de fermeture du second ordre pour lesquels les équations de corrélation sont résolues après avoir modélisé les termes inconnus d'ordre 3.

### 3.2.1- Modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente

Les modèles reposant sur ce concept évaluent le tenseur de Reynolds à partir des quantités moyennes connues. C'est Boussinesq qui proposa en 1877 une analogie avec la loi de Newton basée sur la proportionnalité du tenseur des contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$  avec le taux de déformation à l'aide de la viscosité moléculaire dans le cas d'un écoulement visqueux en régime laminaire.

Pareillement à la loi de Newton, le tenseur de Reynolds est donc supposé comme étant une fonction du taux de déformation moyen par l'intermédiaire d'une viscosité dynamique turbulente  $\mu_t$  et également de l'énergie cinétique turbulente  $k$  :

$$-\rho_0 \overline{u_i u_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho_0 k \delta_{ij} \quad (\text{II.20})$$

$$\overline{u_i u_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (\text{II.21})$$

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_j u_j} \quad (\text{II.22})$$

avec,  $\nu_t$  : viscosité cinématique turbulente et  $k$  : énergie cinétique turbulente.

Le deuxième membre de l'équation (II.20) est nécessaire pour généraliser la formulation et rendre l'expression valable pour le cas des contraintes normales de telle sorte que pour  $i=j$ , la somme des contraintes normales sera le double de l'énergie cinétique du mouvement fluctuant :

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}) \quad (\text{II.23})$$

En effet, les contraintes normales exercent un effet similaire à celui des forces de pression ; elles agissent perpendiculairement aux différentes faces d'un volume de contrôle, et étant donné que l'énergie  $k$  est une quantité scalaire similaire à une pression, le terme  $(\frac{2}{3}k\delta_{ij})$  prévu dans l'équation (II.20) constitue ainsi une pression.

Par conséquent, quand l'expression (II.21) est utilisée pour remplacer  $\overline{u_j u_j}$  dans les équations de quantité de mouvement, le terme  $(\frac{2}{3}k\delta_{ij})$  peut être absorbé par le gradient de pression de telle sorte que la pression statique  $P$  sera remplacée par  $(P+2k/3)$ .

Les flux turbulents des champs scalaires  $\phi$  sont traités de façon analogue au tenseur de Reynolds ; ils sont pris proportionnels au gradient des champs des concentrations (fraction massique) ou de température lorsque  $\phi=T$  et ce, par l'intermédiaire du coefficient de diffusion turbulent  $D_t$  :

$$-\overline{\rho u_j} = D_t \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j} \quad (\text{II.24})$$

$D_t$  représente la diffusivité thermique ou de masse.  $D_t$  n'est pas une propriété du fluide, c'est un paramètre qui dépend de l'état turbulent de l'écoulement et doit être spécifié comme étant une partie du modèle de turbulence.  $D_t$  est relié à la viscosité turbulente selon l'expression suivante (Rastogi & Rodi, 1978), (Rodi, 1980), (Rodi, 1995):

$$D_t = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \quad (\text{II.25})$$

où,  $\sigma_t$  désigne le nombre de Prandtl turbulent pour un flux diffusif thermique ou un nombre de Schmidt turbulent pour un flux diffusif de masse.

Le problème se résume maintenant à la détermination de la viscosité turbulente. C'est le choix de l'expression de la viscosité turbulente qui différencie les modèles qui utilisent ce concept. En effet, ces modèles sont souvent classés selon le nombre d'équations de transport caractérisant les grandeurs turbulentes et nécessaires pour déterminer la viscosité turbulente. On distingue :

- Modèles à zéro équation ;
- Modèles à une équation ;
- Modèles à deux équations.

### 3.2.1.1- Modèles à zéro équation de transport

Il s'agit de modèles à viscosité turbulente algébrique qui ne font appel à aucune équation de transport puisque, comme leur nom l'indique,  $\nu_t$  est donnée par une expression algébrique.

D'après la théorie cinétique des gaz, la viscosité moléculaire  $\nu$  est égale au produit de la vitesse moyenne des molécules par leur libre parcours moyen. Par

analogie, Prandtl suggéra que la viscosité turbulente  $\nu_t$  puisse, elle aussi être mise sous la forme de produit d'une vitesse et d'une longueur, mais cette fois caractéristique du mouvement turbulent.

L'analyse du cas d'une particule de fluide soumise à un seul gradient de vitesse moyenne conduit à exprimer la vitesse caractéristique  $V'$  en fonction de la longueur caractéristique  $L$ .

L'échelle de vitesse  $V'$  est choisie de la façon suivante :

$$V' = b.L \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right| \quad (\text{II.26})$$

où,  $b$  est une constante.

La viscosité cinématique turbulente  $\nu_t$ , qui a pour dimension une longueur au carré sur un temps, est proportionnelle au produit d'une échelle de vitesse turbulente  $V'$  et d'une longueur caractéristique  $L$  :

$$\nu_t = a \times L \times V' \quad (\text{II.27})$$

où,  $a$  est une constante.

En combinant les deux équations (II.26) et (II.27) et en absorbant les deux constantes  $a$  et  $b$  dans une nouvelle longueur caractéristique  $L_m$  appelée « longueur de mélange », on aura :

$$\nu_t = L_m^2 \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right| \quad (\text{II.28})$$

La longueur de mélange  $L_m$ , qui apparaît comme étant la seule inconnue du modèle à zéro équation, peut être déterminée empiriquement pour les écoulements usuels à partir de la configuration géométrique du domaine d'écoulement.

Prandtl a supposé que la longueur de mélange est proportionnelle à l'épaisseur de la couche limite  $\delta$ , il a proposé des formules empiriques pour certains écoulements à turbulence libre :

- Zone de mélange  $\frac{L_m}{\delta} = 0.07$
- Jet plan  $\frac{L_m}{\delta} = 0.09$
- Jet circulaire  $\frac{L_m}{\delta} = 0.075$
- Jet radial  $\frac{L_m}{\delta} = 0.125$
- Sillage plan  $\frac{L_m}{\delta} = 0.16$

Le principal avantage de ce modèle est la simplicité. Leur inconvénient vient du fait que son domaine d'application est très limité à cause de la difficulté liée à la détermination de  $L_m$  pour les écoulements complexes dans lesquels les processus de transport turbulent sont importants.

### 3.2.1.2- Modèle à une équation

Les modèles à une équation sont caractérisés par la prise en compte de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente  $k$  en introduisant la notion de la viscosité turbulente et en modélisant la dissipation de l'énergie turbulente  $\varepsilon$  à l'aide de  $\bar{k}$  (valeur moyenne de  $k$ ) et de  $L$  (échelle de longueur). On se ramène ainsi à un problème à deux inconnues ( $\bar{k}$  et  $L$ ).

Parmi ces modèles, on peut citer le modèle de Prandtl-Kolmogoroff (1945) où l'équation de  $k$  est donnée comme suit :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U_i k}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right) + v_t \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \beta \cdot g_i \cdot \frac{v_t}{\sigma_i} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i} - C_D \cdot \frac{\bar{k}^{\frac{3}{2}}}{L} \quad (\text{II.29})$$

$$\varepsilon = C_D \frac{\bar{k}^{\frac{3}{2}}}{L} \quad (\text{II.30})$$

$$v_t = C'_\mu \sqrt{\bar{k}} L \quad (\text{II.31})$$

$$C'_\mu \cdot C_D = 0,08 \quad (\text{II.32})$$

$$\sigma_K \approx 1$$

Cette approche a l'avantage de prendre en compte les mécanismes de base de production et de dissipation, ainsi que les effets de forces de flottabilité dans l'équation d'énergie cinétique turbulente, mais elle a toujours l'inconvénient inhérent à la formulation de la longueur de mélange.

### 3.2.1.3- Modèle à deux équations : modèle $k$ - $\varepsilon$

Pour remédier aux limitations des modèles précédents, les chercheurs ont fait recours aux modèles de turbulence qui prennent en compte le transport des quantités turbulentes en leur associant des équations de transport différentielles.

En effet, si on élimine «  $L$  » des deux équations suivantes :

$$v_t = C'_\mu \sqrt{\bar{k}} L \quad ; \quad \varepsilon = C_D \cdot \frac{\bar{k}^{\frac{3}{2}}}{L}$$

On obtient la relation de Chou (1945) :  $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$

A partir des transformations des équations du champ de fluctuation de vitesse, les deux équations de transport de  $k$  et  $\varepsilon$  s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{U}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \underbrace{\nu_t \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}_P + \underbrace{\beta g_i \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}}_G - \varepsilon \quad (\text{II.33})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \bar{U}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (P + C_{3\varepsilon} \cdot G) - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II.34})$$

$$\nu_t = C'_\mu \sqrt{k} L \quad (\text{II.35})$$

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L} \quad (\text{II.36})$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (\text{II.37})$$

où,  $P$  est le taux de production d'énergie cinétique turbulente due à l'interaction entre les contraintes turbulentes et les gradients de vitesse moyenne. Il représente en fait le transfert de l'énergie cinétique du mouvement moyen vers le mouvement turbulent ;

$G$  : taux de production ou de destruction supplémentaire dû aux forces de pesanteur.

Les constantes intervenant dans les deux équations de transport de  $k$  et  $\varepsilon$  (qui sont des coefficients semi-empiriques) sont déterminés à partir des résultats d'expériences se rapportant aux cas simples et sont toutes empruntées à Launder et Spalding (1974) (Lebreton, 1974), (Rastogi & Rodi, 1978), (Rodi, 1980), (Rodi, 1995) à l'exception du coefficient  $C_{3\varepsilon}$  associé aux effets de flottabilité:

$$C_\mu = 0,09$$

$$\sigma_k = 1,0$$

$$\sigma_\varepsilon = 1,3$$

$$C_{1\varepsilon} = 1,44$$

$$C_{2\varepsilon} = 1,92$$

Les applications numériques effectuées à l'aide de l'équation de transport de «  $\varepsilon$  » ont montré que  $C_{3\varepsilon} = 0$  pour les écoulements verticaux caractérisés par une stratification stable ( $G < 0$ ) et  $C_{3\varepsilon} = 1$  pour les écoulements horizontaux, dont la stratification est instable ( $G > 0$ ) (Rodi, 1980).

### 3.2.2- Autres modèles

D'autres méthodes basées essentiellement sur le modelage algébrique des tensions de Reynolds et des flux turbulents d'un scalaire passif, peuvent être utilisées comme moyen de fermeture des problèmes des écoulements turbulents. Si les termes de transport (convection – diffusion) dans les équations modélisées aux tensions de Reynolds peuvent être exprimés sans faire intervenir les gradients des tensions de Reynolds, on obtient des relations algébriques qui permettent de déterminer les composantes  $\overline{u_i u_j}$ . Toutefois ces méthodes nécessitent un calcul plus rigoureux, pour lequel le passage par les équations de transport de  $k$  et  $\varepsilon$  est toujours indispensable.

### 3.3- Fermeture du système avec le modèle ( $k$ - $\varepsilon$ )

Nous avons tenté d'exposer les différents modèles de turbulence permettant la fermeture du système de calcul des écoulements à surface libre, en présence de la turbulence. Parmi ces modèles, le modèle ( $k$ - $\varepsilon$ ) s'avère l'un des plus répandus au regard des applications pratiques à l'usage de l'ingénieur hydraulicien. Caractérisé par un faible degré d'empirisme, ce modèle conduit à des résultats quantitativement et qualitativement représentatifs (Buil, 1999), (Rastogi & Rodi, 1978), (Rodi, 1980), (Rodi, 1995). Il se trouve le mieux adapté aux procédures de résolution numérique d'équations classiques de la mécanique des fluides.

Nous optons dans la présente étude, pour le modèle ( $k$ - $\varepsilon$ ) pour la modélisation des termes turbulents. Le système d'équations régissant l'écoulement sera donc :

- **Equation de continuité:**

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.38})$$

- **Equations de quantité de mouvement:**

$$\frac{\partial \rho_0 \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 \overline{U}_i \overline{U}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho g \delta_{i3} + f \overline{U}_k \quad (\text{II.39})$$

- **Equation de transport d'un champ scalaire  $\phi$  ( $\phi = T, C$ ):**

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{U}_i \overline{\phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (D + D_t) \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_i} \right] + S_\phi \quad (\text{II.40})$$

➤ **Modèle de turbulence (k-ε):**

**Equation de k :**

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{U}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \underbrace{\nu_t \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}_P + \underbrace{\beta g_i \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_i}}_G - \varepsilon \quad (\text{II.41})$$

**Equation de ε :**

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \bar{U}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (P + C_{3\varepsilon} \cdot G) - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II.42})$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad , \quad D_t = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \quad (\sigma_t : \text{nombre de Prandtl/Schmit})$$

avec,  $C_\mu = 0,09$

$$\sigma_k = 1,0$$

$$\sigma_\varepsilon = 1,3$$

$$C_{1\varepsilon} = 1,44$$

$$C_{2\varepsilon} = 1,92$$

On se rend compte alors que le modèle analytique régissant les phénomènes de transport dans un écoulement à surface libre, se complique davantage. En fait, lorsque l'on doit traiter des applications pratiques, on utilise le caractère particulier de l'application pour tenter une simplification du système.

Dans le chapitre suivant, nous étudierons les grandes lignes de ces simplifications qui tiennent compte essentiellement de la nature d'écoulement. Nous évoquerons ainsi le passage du modèle tridimensionnel (3D) au modèle bidimensionnel (2 D).

## **Chapitre III**

# **Analyse du système d'équations en vue de sa résolution**

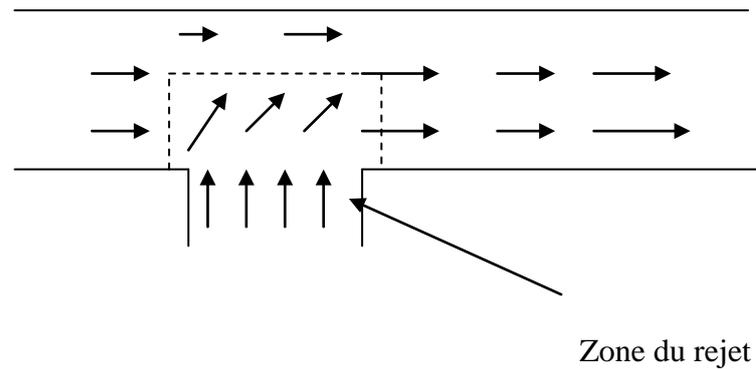
## **Introduction**

L'étude de transport de pollution dans les cours d'eau présente un intérêt particulier. La chaleur et les polluants injectés dans le milieu aquatique sont transportés sous l'effet du mouvement moyen du fluide par convection et diffusés par agitation turbulente. Ces deux processus (convection – diffusion) gouvernent la distribution de pollution dans un écoulement à surface libre. La prédiction mathématique de ce phénomène doit décrire correctement les caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement et tenir compte des phénomènes secondaires résultant de l'interaction entre l'écoulement du rejet polluant et celui développé initialement dans le cours d'eau (canal, rivière).

La formulation précédemment exposée dans le chapitre II, une fois simplifiée, peut constituer un modèle concret de transport de la pollution dans les écoulements à surface libre en présence de la turbulence. Les équations conséquentes peuvent être résolues au moyen des méthodes numériques abondamment développées dans la littérature.

La plus part des modèles mathématiques de simulation des problèmes de décharges polluantes dans les cours d'eau qu'on retrouve dans la bibliographie, sont :

- Soit de forme intégrale, destinés essentiellement à prévoir l'évolution de la pollution dans la zone du rejet polluant (voir figure III-1);
- Soit des modèles de diffusion, destinés à l'étude du phénomène de transport dans les zones lointaines du rejet.



**Figure III-1:** Découpage du domaine d'écoulement en présence d'un rejet polluant

La première méthode permet de décrire la distribution de la vitesse et de la concentration de la pollution dans le domaine spatial du rejet à l'aide des équations différentielles relativement simples résultant des hypothèses simplificatrices globales de la structure turbulente du jet, impliquées dans les différentes équations de bilans.

Toutefois cette méthode n'est pas souhaitable à l'étude des problèmes des rejets polluants dans les cours hydriques, elle ne tient pas compte des interactions susceptibles d'avoir lieu entre l'écoulement du jet et les parois solides d'une part, et des courants secondaires pouvant se développer d'autre part. De plus, ce type de modèles perd son efficacité en s'éloignant de la zone de décharge (near-field) pour arriver à la zone où l'écoulement normal dans le cours d'eau se rétablit (far-field).

En revanche, la deuxième catégorie des deux méthodes précitées (diffusion-méthod) est valable pour la simulation de la distribution de la vitesse et de la concentration dans la zone éloignée du rejet (far-field) où le déséquilibre de l'écoulement causé par le jet polluant peut être négligé. Dans ce type de modèles, la vitesse de l'écoulement est considérée comme étant une donnée initiale (vitesse moyenne) et la seule équation qui reste à résoudre est celle de transport de masse, régissant la distribution de la concentration dans l'écoulement.

La deuxième méthode est particulièrement simple, néanmoins les spécialistes en environnement préconisent la simulation de la structure en détail de l'écoulement dans la zone du rejet (near-field) ayant une influence importante sur l'écoulement en aval du cours d'eau (far-field).

Par ailleurs, le développement très rapide des techniques de calcul numérique a rendu possible l'étude des phénomènes de transfert dans les cours d'eau à partir des équations aux dérivées partielles valables pour la totalité du domaine d'écoulement (field-methods). La résolution des équations du transfert permettra de déterminer la distribution de la vitesse, de la pression et de la température ainsi que l'évolution de la concentration dans l'hydrosystème. Les termes de transport turbulent apparents dans ces équations sont ainsi déterminés à chaque point du domaine d'écoulement par la résolution des équations du modèle de turbulence ( $k-\varepsilon$ ). Nous avons opté pour ce type

de méthodes dans le présent travail, les équations obtenues dans le chapitre précédent seront simplifiées avant d'être résolues pour la totalité du domaine d'écoulement.

## 1 - Modélisation mathématique du problème

Nous nous plaçons dans le cadre des écoulements incompressibles permanents,, homogènes et turbulents avec ajout de polluants. Les équations faisant intervenir les différents champs scalaires, seront résolues après détermination des caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement. Les équations de continuité et de quantité de mouvement et également les équations du modèle de la turbulence  $k-\varepsilon$  seront résolues, avant de résoudre l'équation de transport de la concentration.

L'outil de simulation que nous développons vise à décrire la structure de l'écoulement et l'évolution de la pollution suite à un rejet coaxial dans un canal rectangulaire. Nous exposerons dans ce qui suit les équations différentielles régissant le problème étudié, qui seront simplifiées selon les hypothèses admises.

### 1.1 - Modèle tridimensionnel

Nous rappelons ci-dessous les équations tridimensionnelles auxquelles nous sommes arrivés au chapitre précédent, écrites dans le système de coordonnées cartésiennes  $x,y,z$  ( voir figure III-2) tout en omettant de surligner chaque variable pour indiquer qu'il s'agit d'une moyenne temporelle afin d'alléger l'écriture :

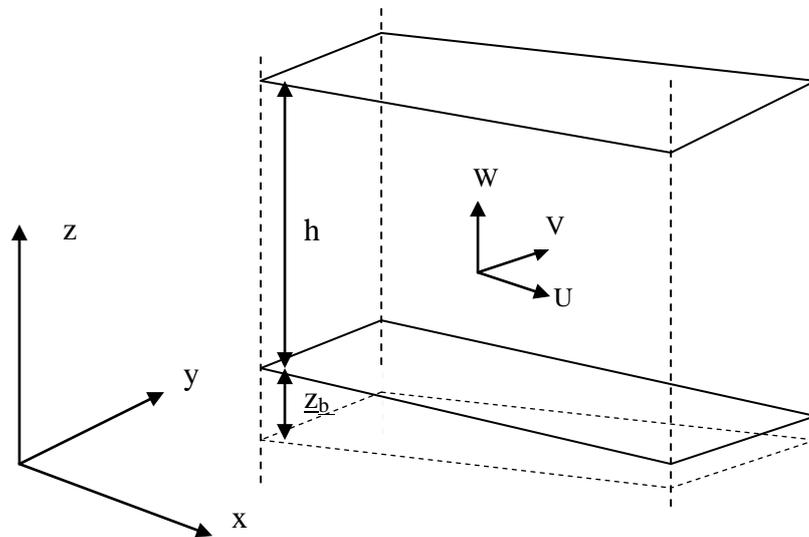


Figure III-2: Schématisation de l'écoulement (3D)

#### ➤ Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.1})$$

➤ **Equations de la quantité de mouvement**

Selon x :

$$\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + fV \quad (\text{III.2})$$

Selon y :

$$\frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - fU \quad (\text{III.3})$$

Selon z :

$$\frac{\partial WU}{\partial x} + \frac{\partial WV}{\partial y} + \frac{\partial W^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - g \quad (\text{III.4})$$

où,  $\tau_{ij}$  représentent les contraintes effectives englobant les contraintes visqueuses et turbulentes :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u_i u_j} \quad (\text{III.5})$$

➤ **Equation de transport**

$$\frac{\partial(U\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(V\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(W\phi)}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_z}{\partial z} + S_\phi \quad (\text{III.6})$$

où,  $J_i$  représente la composante du flux diffusif (moléculaire et turbulent) se rapportant au champ scalaire  $\phi$  :

$$J_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \overline{u_i \phi} \right] \quad (\text{III.7})$$

Bien qu'il soit déjà simplifié, ce système est difficilement utilisable sous cette forme à cause des difficultés inhérentes à la résolution numérique. En fait, on utilise plus couramment des équations simplifiées qui tiennent compte des particularités de l'écoulement étudié.

Compte tenu de la nature des géométries du domaine d'écoulement souvent rencontrées dans la pratique où la profondeur se trouve proportionnellement faible par rapport à la largeur de la rivière et dont l'évolution des différentes variables selon les directions longitudinale et transversale est plus importante comparativement à

l'évolution selon la profondeur (direction verticale), nous nous contentons d'une étude bidimensionnelle du phénomène de transport en intégrant les équations tridimensionnelles sur la profondeur, on définit ainsi de nouvelles variables qui sont les moyennes spatiales. Le système d'équations résultant constitue ainsi une forme simplifiée de celui développé par Kuiper et Vengdenhil en 1973 (Rastogi & Rodi, 1978), (Rodi, 1980), (Rodi, 1995).

Nous évoquerons dans le paragraphe suivant le passage du modèle tridimensionnel (3D) au modèle bidimensionnel (2D).

## 1.2 - Modèle bidimensionnel 2D

Nous considérons que  $\tilde{G}$  indique la valeur moyenne résultant de l'intégration sur la profondeur de la variable  $G$  :

$$\tilde{G} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^H G dz \quad (\text{III.8})$$

Nous définissons ainsi les vitesses moyennes comme suit :

$$\tilde{U} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^H U .dz \quad \tilde{V} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^H V .dz \quad \tilde{W} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^H W .dz$$

Les équations exprimant les conditions cinématiques à la surface et au fond du canal sont données comme suit :

➤ Au fond du canal  $z=z_b$ :

$$U \frac{\partial z_b}{\partial x} + V \frac{\partial z_b}{\partial y} - W_b = 0 \quad (\text{III.9})$$

➤ A la surface libre  $z=H$ :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial H}{\partial y} - W_s = 0 \quad (\text{III.10})$$

Les équations du modèle bidimensionnel sont établies par l'intégration des différentes équations tridimensionnelles sur la profondeur.

### 1.2.1- Intégration de L'équation de continuité

$$\int_{z_b}^H \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dz = \int_{z_b}^H \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dz + [W]_{z_b}^H \quad (\text{III.11})$$

En utilisant la règle de dérivation sous le signe " somme", nous pouvons écrire :

$$\int_{z_b}^H \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dz + [W]_{z_b}^H = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H U dz - \left( \frac{\partial H}{\partial x} U_s - \frac{\partial z_b}{\partial x} U_b \right) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H V dz - \left( \frac{\partial H}{\partial y} V_s - \frac{\partial z_b}{\partial y} V_b \right) + W_s - W_b \quad (\text{III.12})$$

En tenant compte des conditions cinématiques régies par les deux équations (III.9) et (III.10) et eu égard à la stationnarité du régime d'écoulement, l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial(h\tilde{U})}{\partial x} + \frac{\partial(h\tilde{V})}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.13})$$

### 1.2.2- Intégration des équations de quantité du mouvement

Avant de procéder à l'intégration des équations de quantité de mouvement, il importe de signaler que lorsqu'on se place dans un écoulement bidimensionnel (2D), la composante verticale du vecteur vitesse s'annule ( $W=0$ ) et la troisième équation de quantité de mouvement (III.4) prend, tout simplement, la forme de l'expression de la pression hydrostatique :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (\text{III.14})$$

#### ➤ Intégration de la première équation de quantité de mouvement

Commençons par intégrer le premier membre de l'équation (III.2) :

$$\int_{z_b}^H \left( \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H U^2 dz - \left( \frac{\partial H}{\partial x} U_s^2 - \frac{\partial z_b}{\partial x} U_b^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H UV dz - \left( \frac{\partial H}{\partial y} U_s V_s - \frac{\partial z_b}{\partial y} U_b V_b \right) + U_s W_s - U_b W_b \quad (\text{III.15})$$

En tenant compte des conditions cinématiques, nous obtenons :

$$\int_{z_b}^H \left( \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H U^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H UV dz \quad (\text{III.16})$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} U &= (U - \tilde{U}) + \tilde{U} \\ U^2 &= (U - \tilde{U})^2 + \tilde{U}^2 + 2\tilde{U}(U - \tilde{U}) \\ (U - \tilde{U})(V - \tilde{V}) &= UV - U\tilde{V} - \tilde{U}V + \tilde{U}\tilde{V} \\ UV &= (U - \tilde{U})(V - \tilde{V}) + U\tilde{V} + \tilde{U}V - \tilde{U}\tilde{V} \end{aligned}$$

Le résultat d'intégration du premier membre de l'équation (III.2) devient :

$$\int_{z_b}^H \left( \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} (h\tilde{U}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (h\tilde{U}\tilde{V}) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H (U - \tilde{U})^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H (U - \tilde{U})(V - \tilde{V}) dz$$

Intégrons sur la profondeur les termes de contraintes intervenant dans l'équation (III.2) de façon similaire au premier membre :

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^H \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H \tau_{xy} dz - \left[ \tau_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} - \tau_{xz} \right]_{z=H} \\ &+ \left[ \tau_{xx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{xz} \right]_{z=z_b} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Si nous posons :

$$\begin{aligned} \tau_{sx} &= \left[ \tau_{xx} \frac{\partial H}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial H}{\partial y} - \tau_{xz} \right]_{z=H} \\ \tau_{bx} &= \left[ \tau_{xx} \frac{\partial z_b}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial z_b}{\partial y} - \tau_{xz} \right]_{z=z_b} \end{aligned}$$

où  $\tau_{sx}$ ,  $\tau_{bx}$  constituent les composantes longitudinales du cisaillement aux interfaces de l'écoulement, l'intégration sur la profondeur de la première équation de quantité de mouvement donne après simplification :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h\tilde{U}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (h\tilde{U}\tilde{V})}{\partial y} &= -gh \frac{\partial (h + z_b)}{\partial x} + fh\tilde{V} + \frac{1}{\rho} [\tau_{sx} - \tau_{bx}] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (h\tilde{\tau}_{xx})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (h\tilde{\tau}_{xy})}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H (U - \tilde{U})^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H (U - \tilde{U})(V - \tilde{V}) dz \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

où  $\tilde{\tau}_{xx}$ ,  $\tilde{\tau}_{xy}$  représentent les valeurs moyennes des contraintes effectives englobant les contraintes visqueuses et les contraintes de Reynolds.

### ➤ Intégration de la deuxième équation

De la même façon on intègre la deuxième équation de la quantité de mouvement (III.3) sur la profondeur pour aboutir à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (h\tilde{U}\tilde{V})}{\partial x} + \frac{\partial (h\tilde{V}^2)}{\partial y} &= -gh \frac{\partial (h + z_b)}{\partial y} - fh\tilde{U} + \frac{1}{\rho} [\tau_{sy} - \tau_{by}] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (h\tilde{\tau}_{xy})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (h\tilde{\tau}_{yy})}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H (U - \tilde{U})(V - \tilde{V}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H (V - \tilde{V})^2 dz \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$\tau_{sy}$ ,  $\tau_{by}$  représentent les composantes transversales du cisaillement aux interfaces de l'écoulement.

$\tilde{\tau}_{xy}$ ,  $\tilde{\tau}_{yy}$  représentent les valeurs moyennes résultant de l'intégration spatiale des contraintes effectives.

Les composantes du cisaillement à la surface libre ( $\tau_{sx}$  ,  $\tau_{sy}$ ), qui sont essentiellement dues au vent, varient en fonction de la vitesse et de la direction du vent selon l'expression suivante (Menigault & Dumay, 1990):

$$\begin{aligned}\tau_{sx} &= \zeta V_a^2 \cos \psi \\ \tau_{sy} &= \zeta V_a^2 \sin \psi\end{aligned}\quad (\text{III.20})$$

où,  $\zeta$  : coefficient du frottement dû au vent et  $V_a$  ,  $\psi$  : vitesse et direction du vent.

Les contraintes de frottement au fond du canal  $\tau_{bx}$  et  $\tau_{by}$  intervenant dans les équations (III.18) et (III.19) varient en fonction de la vitesse moyenne d'écoulement selon la formulation suivante (Rastogi & Rodi, 1978), (Rodi, 1980):

$$\tau_{bx} = \rho C_f \tilde{U} \sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2} \quad (\text{III.21})$$

$$\tau_{by} = \rho C_f \tilde{V} \sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2} \quad (\text{III.22})$$

$C_f$  est le coefficient de frottement dépendant de la rugosité des parois du canal :

#### **Parois lisses :**

Le coefficient de frottement pour une paroi lisse est donné selon la formule de Schlichting comme suit (Rastogi & Rodi, 1978), (Rodi, 1980):

$$C_f = 0,027 ( \nu/UR )^{1/4} \quad (\text{III.23})$$

où,  $R$  est le rayon hydraulique et  $U$  représente la vitesse moyenne d'écoulement.

#### **Paroi rugueuse :**

Le coefficient de frottement  $C_f$  est donné par la loi de Manning (Rastogi & Rodi, 1978), pour les parois rugueuses, comme suit :

$$C_f = n^2 \cdot g / h^{1/3} \quad (\text{III.24})$$

où,  $n$  représente le coefficient de rugosité et  $h$  : tirant d'eau.

Quant aux valeurs moyennes des contraintes effectives  $\tilde{\tau}_{xx}$ ,  $\tilde{\tau}_{xy}$  et  $\tilde{\tau}_{yy}$ , nous considérons que l'effet des contraintes visqueuses est négligeable comparativement à l'effet des contraintes turbulentes et nous optons, pour leur détermination, à la méthode de Rastogi et Rodi (Rastogi & Rodi, 1978) ayant fait recours à une approche similaire à celle utilisée dans le modèle tridimensionnel se basant sur l'approximation de Boussinesq, tel que :

$$\frac{\tilde{\tau}_{ij}}{\rho} = \hat{\nu}_t \left( \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \hat{k} \delta_{i,j} \quad (\text{III.25})$$

$i, j = 1, 2$

où  $\hat{\nu}_t$  représente la viscosité turbulente variant en fonction de l'énergie cinétique turbulente  $\hat{k}$  et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\hat{\varepsilon}$  correspondant au modèle de turbulence bidimensionnel résultant de la simplification des équations exactes :

$$\hat{\nu} = C_\mu \frac{\hat{k}^2}{\hat{\varepsilon}} \quad (\text{III.26})$$

$\hat{k}$  et  $\hat{\varepsilon}$  sont déterminés aux différents points du domaine d'écoulement par la résolution des équations bidimensionnelles de turbulence.

### ➤ Equations de la turbulence

Le modèle bidimensionnel de turbulence auquel nous faisons recours dans le présent travail est identique au modèle utilisé par Rastogi et Rodi (Rastogi & Rodi, 1978). Les équations de turbulence moyennées sur la verticale, régissant la variation des valeurs moyennes de l'énergie cinétique turbulente  $\hat{k}$  et de son taux de dissipation  $\hat{\varepsilon}$ , s'écrivent ainsi comme suit :

$$\frac{\partial \tilde{U} \hat{k}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V} \hat{k}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \hat{k}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \hat{k}}{\partial y} \right) + P_h + P_{kv} - \hat{\varepsilon} \quad (\text{III.27})$$

$$\frac{\partial \tilde{U} \hat{\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V} \hat{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\hat{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial y} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}} P_h + P_{\varepsilon v} - C_{2\varepsilon} \frac{\hat{\varepsilon}^2}{\hat{k}} \quad (\text{III.28})$$

où :

$$P_h = \hat{\nu}_t \left[ 2 \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$P_{kv} = C_k \frac{U_*^3}{h}$$

$$P_{\varepsilon v} = C_\varepsilon \frac{U_*^4}{h^2}$$

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{C_f}}$$

$$C_\varepsilon = 3.6 \frac{C_{2\varepsilon}}{C_f^{3/4}} \sqrt{C_\mu}$$

$U_*$  : vitesse de frottement

$$U_* = \sqrt{Sgh}$$

S est la pente hydraulique.

### 1.2.3- Intégration de l'équation de transport du polluant

Il est à noter que notre étude se consacre aux substances polluantes se trouvant sous forme dissoute, nous pouvons ainsi considérer que les espèces sont mélangées au niveau moléculaire de telle sorte qu'elles partagent le même champ de vitesse, de pression et de température que le fluide dans lequel elles évoluent. L'équation de transport d'une grandeur physique  $\phi$  (matière soluble, température) aux valeurs moyennes, pour un écoulement bidimensionnel en régime stationnaire, peut être établie en faisant l'intégration sur la profondeur de l'équation de transport tridimensionnelle (III.6).

Pour arriver à la forme finale de l'équation bidimensionnelle de transport du champ scalaire étudié, nous appliquons la même méthode d'intégration que celle utilisée pour l'établissement des équations bidimensionnelles de quantité de mouvement. L'équation résultante s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial(h\tilde{U}\tilde{\phi})}{\partial x} + \frac{\partial(h\tilde{V}\tilde{\phi})}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tilde{J}_x)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(h\tilde{J}_y)}{\partial y} + \frac{q_s}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^H (U - \tilde{U})(\phi - \tilde{\phi}) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^H (V - \tilde{V})(\phi - \tilde{\phi}) dz$$

où,

$q_s$  est le flux du champ scalaire à la surface libre ( $q_s = 0$  lorsque  $\tilde{\phi}$  représente la valeur moyennée sur la verticale de la concentration de la matière soluble) ;

$\tilde{J}_x, \tilde{J}_y$  : valeurs moyennes des flux de matière, qui peuvent être modélisés en fonction de la valeur moyenne de la diffusivité turbulente  $\hat{D}_t$ , par analogie aux contraintes turbulentes (Rastogi & Rodi, 1978), (, 1980):

$$\frac{\tilde{J}_i}{\rho} = \hat{D}_t \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i} \quad (\text{III.30})$$

$$\hat{D}_t = \frac{\hat{V}_t}{\sigma_t} \quad (\text{III.31})$$

## 2- Hypothèses de simplification

Pour faciliter la résolution numérique des équations différentielles de continuité, de quantité de mouvement, de turbulence et de transport des champs scalaires, nous avons opté pour les hypothèses simplificatrices suivantes :

- L'écoulement étudié est du type parabolique. La pression  $P$  impliquée dans la première équation de quantité de mouvement est remplacée par la pression

hydrostatique ( $h$ ), son gradient selon la direction longitudinale est constant

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} = cste \right);$$

- Les effets de Coriolis et ceux inhérents à la non uniformité des profils correspondant aux différentes variables impliquées dans les équations du modèle bidimensionnel, sont négligeables ;
- Etant donné que nous nous plaçons dans le cadre des écoulements paraboliques, les termes exprimant le transport turbulent de matière et de quantité de mouvement, selon la direction longitudinale, ne seront pas pris en considération (Rastogi & Rodi, 1978), (Rodi, 1980). Seules les deux équations (III.13) et (III.18) seront résolues pour simuler la variation des deux composantes du vecteur vitesse ( $\tilde{U}, \tilde{V}$ ). La valeur moyenne de la viscosité turbulente  $\hat{v}_t$ , impliquée dans les deux équations en question, devra être déterminée pour chaque point du domaine d'écoulement en résolvant les équations bidimensionnelles régissant la variation des paramètres turbulents ( $\hat{k} - \hat{\varepsilon}$ ).

En tenant compte des hypothèses simplificatrices admises, les équations du modèle bidimensionnel prennent la forme finale suivante :

$$\frac{1}{h} \frac{\partial(h\tilde{U})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{V})}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.32})$$

$$\frac{\partial(\tilde{U}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{U}\tilde{V})}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \hat{v}_t \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right) - g \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{1}{\rho h} [\tau_{sx} - \tau_{bx}] \quad (\text{III.33})$$

$$\frac{\partial \tilde{U} \hat{k}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V} \hat{k}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \hat{k}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\hat{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \hat{k}}{\partial y} \right) + P_h + P_{kv} - \hat{\varepsilon} \quad (\text{III.34})$$

$$\frac{\partial \tilde{U} \hat{\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V} \hat{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\hat{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial y} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{k}} P_h + P_{ev} - C_{2\varepsilon} \frac{\hat{\varepsilon}^2}{\hat{k}} \quad (\text{III.35})$$

avec :

$$P_h = \hat{v}_t \left[ 2 \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$P_{kv} = C_k \frac{U_*^3}{h} \quad P_{ev} = C_\varepsilon \frac{U_*^4}{h^2}$$

$$C_k = \frac{1}{\sqrt{C_f}} \quad C_\varepsilon = 3.6 \frac{C_{2\varepsilon}}{C_f^{3/4}} \sqrt{C_\mu}$$

$U_*$  : vitesse de frottement

$$U_* = \sqrt{Sgh}$$

$$\frac{\partial(\tilde{U}\tilde{\phi})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{V}\tilde{\phi})}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \hat{D}_t \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right) + \frac{q_s}{\rho h} + \tilde{S}_\phi \quad (\text{III.36})$$

### 3- Conditions aux limites

Les équations (III.32) à (III.36) constituent un modèle mathématique fermé permettant de déterminer la distribution de la pression, des deux composantes de la vitesse, de la température et de la concentration dans le canal, une fois que les conditions aux limites du domaine d'écoulement soient spécifiées. Par ailleurs, les paramètres étudiés doivent être spécifiés au niveau de la section initiale du domaine de calcul (Upstream cross-section).

#### 3.1- A la surface libre

Admettons que la variation latérale des élévations de la surface libre est négligeable devant  $h$  (tirant d'eau) de telle sorte que l'hypothèse classique du toit rigide peut être appliquée à la surface libre. Par conséquent, nous pouvons y retenir la condition de symétrie, ce qui engendre impérativement l'annulation des gradients normaux des paramètres hydrodynamiques.

La condition de symétrie est aussi valable pour la concentration dont la variation est régie par l'équation (III.36) évoquée ci-dessus, mais non pas pour la température  $T$  où on distingue un flux «  $q_s$  » non nul :

$$q_s = \alpha(T_S - T_E) \quad (\text{III.37})$$

avec,

$T_S$  : température locale de l'eau à la surface ;

$T_E$  : température d'équilibre ;

$\alpha$  : coefficient de transfert de la chaleur (spécifié empiriquement).

#### 3.2- Conditions aux parois

Au voisinage très proche de la paroi, les contraintes visqueuses sont plus importantes que les contraintes turbulentes, ce qui provoque une baisse importante du nombre de Reynolds et rend le modèle de turbulence  $k-\varepsilon$  non valide dans cette zone de l'écoulement.

La solution couramment utilisée pour remédier à ce type de problèmes consiste à positionner les premiers points du domaine de calcul «  $p$  » en dehors de la sous couche visqueuse et l'utilisation des lois empiriques classiques de parois permettant de relier la valeur des variables aux points «  $p$  » à des quantités physiques caractérisant la paroi, exprimées généralement par la vitesse de frottement.

➤ **Distribution de la vitesse:**

La distribution de la vitesse au niveau de la couche limite (points p) suit une fonction logarithmique pour un écoulement turbulent parabolique, exprimée comme suit (Rastogi & Rodi, 1978), (Rodi, 1980), (Rodi, 1995):

$$\frac{U_{res}}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+) \quad (\text{III.38})$$

avec,  $y^+ = y U_* / \nu$ : distance adimensionnelle entre le premier point du maillage et la paroi ( $30 < y^+ < 100$ );

$U_*$ : vitesse de frottement ;

$U_{res}$ : vitesse résultante parallèle à la paroi ;

$\kappa$ : constante de von Karman ;

$E$ : paramètre de rugosité ( $E = 9$  pour les parois lisses,  $E = 0,0119$  pour le cas des parois rugueuses) (Rastogi & Rodi, 1978), (Rodi, 1980), (Rodi, 1995);

La composante de la vitesse normale à la paroi est nulle.

➤ **Distribution de  $k$  et  $\varepsilon$ :**

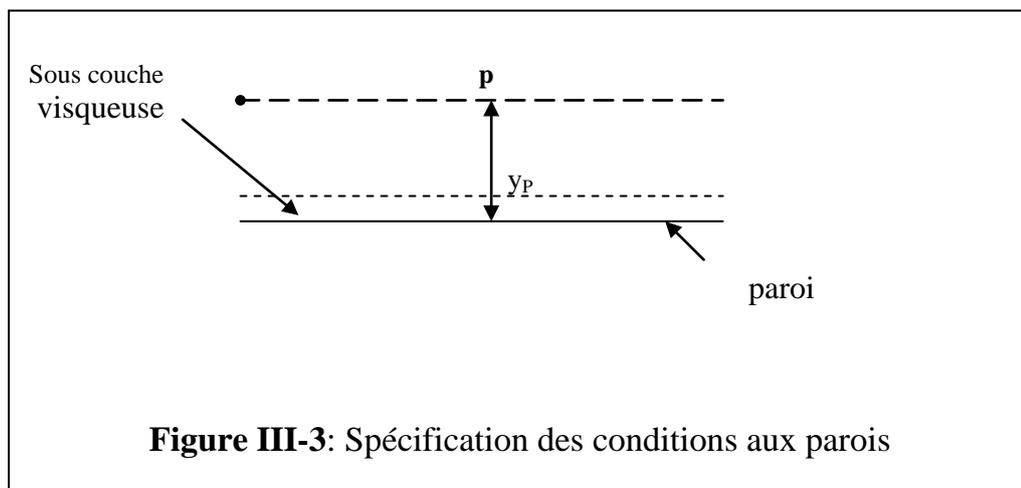
Dans le domaine de la couche limite évoqué ci-dessus « wall-region » (voir figure III.2), la production  $G$  et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon$  sont approximativement équivalents. Par conséquent,  $\widehat{k}$  et  $\widehat{\varepsilon}$  prennent les

$$\widehat{k}_p = \frac{U_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad ; \quad \widehat{\varepsilon}_p = \frac{U_*^3}{\kappa y_p}$$

valeurs suivantes (Rastogi & Rodi, 1978):

$\kappa = 0,42$  (constante de Von Karman),

$C_\mu = 0,09$ .



➤ **Flux des champs scalaires :**

Les flux de concentration et de température sont considérés nuls au niveau des parois (gradient normal =0).

### 3.3- Plan de symétrie (médián)

La géométrie du domaine d'écoulement étant symétrique par rapport à son plan médián, il sera donc possible d'imposer une condition de symétrie pour l'ensemble des paramètres étudiés par rapport à ce plan. Bien évidemment, le domaine de calcul peut être réduit de moitié ; le gradient normal des différentes variables ainsi que la vitesse transversale (V) deviennent nuls à ce niveau (voir figures III-4 et III-5).

## Conclusion

Toutes les équations de transport (III.32) à (III.36) peuvent être mises sous la même forme de l'équation générale de convection - diffusion en régime permanent pour une variable  $\phi$  :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi\tilde{U})}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(\rho\phi\tilde{V})}_{(2)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(\bar{D}_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y})}_{(3)} + \underbrace{\tilde{S}_\phi}_{(4)}$$

tel que :

- **Le terme 1** : représente le transport de  $\phi$  par convection pour l'écoulement moyen dans la direction longitudinale;
- **Le terme 2**: représente le transport de  $\phi$  par convection dans la direction transversale (y);
- **Le terme 3** : exprime le transport de  $\phi$  par diffusion;
- **Le terme 4** : représente le terme source (création ou destruction de  $\phi$ ) . Le terme source varie en fonction de la variable transportée ; à titre d'exemple :

$$\tilde{S}_\phi = -g \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{\partial z_b}{\partial x} + \frac{1}{\rho h} [\tau_{sx} - \tau_{bx}] \quad \text{lorsque } \phi = \tilde{U}$$

La méthode de résolution numérique des volumes finis a été adoptée pour l'intégration des différentes équations de transport qui seront résolues après fixation des conditions initiales et aux limites se rapportant à l'écoulement turbulent dans le canal en présence d'un rejet coaxial polluant.

La technique de résolution numérique des équations en question fera l'objet du chapitre suivant.

## **Chapitre IV**

# **Résolution numérique des équations**

## **Introduction**

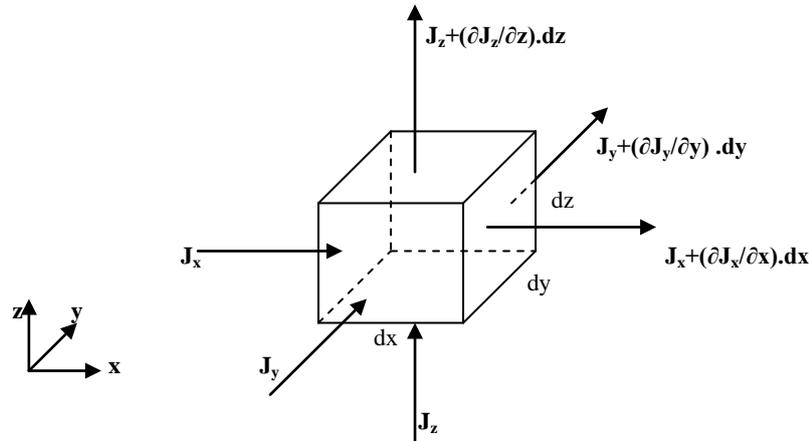
Les trois grandes méthodes couramment utilisées pour la résolution numérique des équations différentielles aux dérivées partielles sont les volumes finis, les différences finies et les éléments finis.

La méthode des différences finies consiste à discrétiser les équations continues aux points d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide des séries de Taylor tronquées pour obtenir des équations linéaires discontinues reliant la valeur d'une variable inconnue en un nœud aux valeurs de cette variable aux nœuds voisins.

La résolution numérique par la méthode des éléments finis consiste à discrétiser l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (triangle ou quadrangles) ou complexes. Ensuite la forme analytique des équations est remplacée par la forme discrétisée dans laquelle les variables sont exprimées par une combinaison linéaire de fonctions de base dont le support est un des éléments finis.

La méthode des volumes finis, largement décrite par Patankar suhas .v en 1980 (Patankar, 1980) consiste à diviser le domaine de calcul en un certain nombre de volumes de contrôle adjacents tel que chaque volume entoure chaque point du maillage résultant du découpage du domaine de calcul. L'équation discrétisée obtenue exprime le principe de conservation de masse sur le volume de contrôle de la même manière que l'équation différentielle l'exprime pour un volume de contrôle infinitésimal (figure IV.1).

L'équation différentielle est intégrée pour chaque volume de contrôle du maillage résultant du découpage du domaine de calcul. Des expressions d'interpolation sont choisies pour exprimer les variations d'une variable  $\phi$  entre les différents points du maillage permettant l'intégration de l'équation différentielle.



**Figure IV-1:** Variation du flux pour les différentes faces du volume infinitésimal

## 1-Discretisation des équations différentielles par la méthode des volumes finis

Comme nous l'avons déjà évoqué ci-dessus, la méthode des volumes finis est basée sur le principe de conservation de masse, appliqué sur des volumes de contrôles adjacents (voir figure IV-1). Les termes de transport diffusif et convectif dans l'équation générale de transport sont intégrés en définissant une fonction d'interpolation traduisant la variation du paramètre étudié (variable  $\phi$ ) entre les différentes faces (nœud) du volume de contrôle.

Nous allons exposer brièvement les différents schémas d'interpolation couramment utilisés pour aboutir à la formulation discrétisée à partir de l'équation différentielle générale. Pour cela, nous allons commencer par le cas de l'équation de convection – diffusion pour un écoulement stationnaire et unidimensionnel.

### 1.1-Forme discrétisée de l'équation de convection – diffusion de dimension 1

L'équation générale de transport dans un régime permanent s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [\rho U_j \phi - D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j}] = S_\phi \quad (\text{IV.1})$$

où,  $\rho U_j \phi$  : représente le flux convectif de l'espèce  $\phi$  ;

$-D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$  : flux diffusif ;

$S_\phi$  : terme source (taux de génération de l'espèce  $\phi$  par unité de volume).

Dans le cas d'un écoulement unidimensionnel l'équation de transport par convection et diffusion pour une espèce chimiquement non réactive (élimination du terme source) devient :

$$\frac{d\rho U \phi}{dx} = \frac{d}{dx} \left( D_\phi \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (\text{IV.2})$$

L'équation de continuité s'écrit comme suit:

$$\frac{d\rho U}{dx} = 0 \Rightarrow \rho U = \text{Cste} \quad (\text{IV.3})$$

### 1.1.1- Différents schémas d'interpolation

La forme discrétisée de l'équation différentielle (IV.2), déterminée par application de la méthode des volumes finis, dépend essentiellement du type du schéma d'interpolation de la variable  $\phi$  aux interfaces des volumes de contrôle composant le domaine de calcul (voir figure IV-2). Nous reprenons ci-après les différents schémas d'interpolation, évoqués par Patankar S.V dans son ouvrage « Numérical heat transfer and fluid flow » (Patankar, 1980).

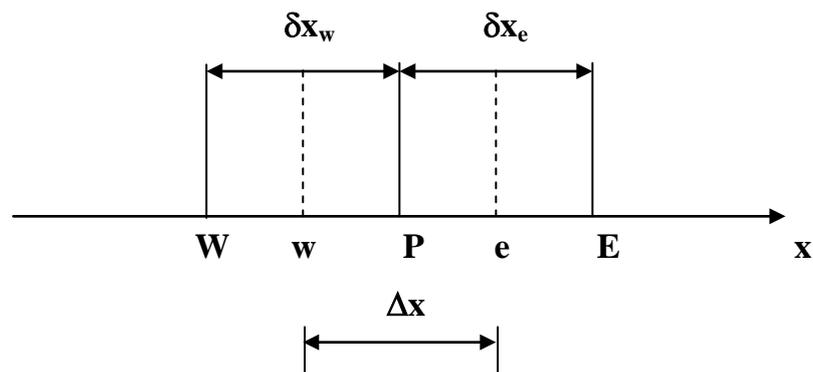


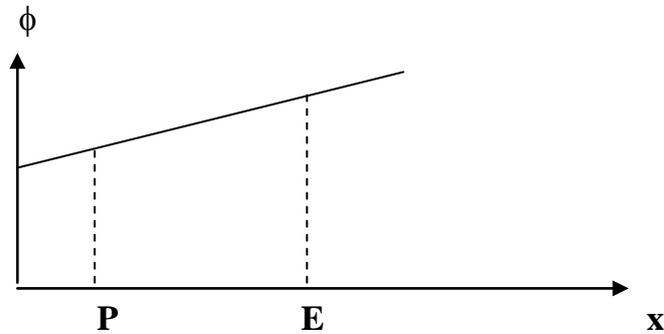
Figure IV-2: Volumes de contrôle (cas unidimensionnel)

#### ➤ Schéma aux différences centrées :

Intégrons l'équation de transport sur le volume de contrôle, nous aurons :

$$(\rho U \phi)_e - (\rho U \phi)_w = \left( D_\phi \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( D_\phi \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (\text{IV.4})$$

Pour obtenir une valeur au centre de la face « e », le schéma centré utilise le centre du segment amont P et le centre du segment aval E afin d'effectuer une approximation linéaire entre ces deux points (voir figure IV-3).



**Figure IV-3:** Approximation linéaire

Cette technique permet de connaître la diffusivité au niveau de la face  $e$  dans un maillage non uniforme en faisant intervenir les distances entre le centre du segment (face) et les deux centres des segments adjacents.

$$D_{\phi_e} = \frac{(\delta x)_{e^+}}{(\delta x)_e} D_P + \frac{(\delta x)_{e^-}}{(\delta x)_e} D_E \quad (\text{IV.5})$$

Le gradient de  $\phi$  au point « e » est également déterminé grâce à cette même approximation linéaire.

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} \quad (\text{IV.6})$$

$$\phi_e = (\phi_E + \phi_P) / 2, \quad \phi_w = (\phi_w + \phi_P) / 2$$

L'équation (IV.4) devient donc :

$$\frac{1}{2}(\rho U)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho U)_w(\phi_P + \phi_w) = \frac{D_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{D_w(\phi_P - \phi_w)}{(\delta x)_w} \quad (\text{IV.7})$$

Pour rendre plus compacte l'équation discrétisée, nous posons :

$$F = \rho U$$

$$R = D / \delta x$$

L'équation résultante sera donc :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{IV.8})$$

avec,

$$a_E = R_e - F_e / 2 \quad , \quad a_W = R_w + F_w / 2$$

$$a_P = R_e + F_e / 2 + R_w - F_w / 2$$

$$\text{ou} \quad a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

### ➤ Schéma amont "Upwind" :

Le schéma amont laisse identique le terme de diffusion comparativement au schéma centré tout en modifiant la formulation du terme convectif qui prenait auparavant la valeur de  $\phi_e$  à l'interface moyenne de  $\phi_E$  et de  $\phi_P$ .

La valeur de  $\phi$  à l'interface sera égale à la valeur de  $\phi$  au point du maillage sur la face amont "upwind", on aura donc :

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{si } F_e > 0 \quad (\text{IV.9})$$

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{si } F_e < 0 \quad (\text{IV.10})$$

De même, la valeur de  $\phi_w$  s'écrira pareillement en fonction de  $\phi_W$  et  $\phi_P$ .

Pour simplifier l'écriture des équations discrétisées, nous notons [A, B] le terme le plus grand entre A et B, nous aurons donc :

$$F_e \phi_e = \phi_P [F_e, 0] - \phi_E [-F_e, 0] \quad (\text{IV.11})$$

L'équation discrétisée devient donc :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{IV.12})$$

où,

$$a_E = R_e + [-F_e, 0] \quad , \quad a_W = R_w + [F_w, 0]$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

➤ **Schéma exact :**

Soit le domaine  $0 \leq x \leq L$  avec les conditions limites :

$$x=0 \quad \phi = \phi_0$$

$$x=L \quad \phi = \phi_L$$

La solution exacte de l'équation différentielle (IV.2), est donnée comme suit :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{Px/L} - 1}{e^P - 1} \quad (\text{IV.13})$$

où  $P$  est le nombre de Peclet défini par :

$$P = \rho \cdot U \cdot L / D \quad (\text{IV.14})$$

$D$  représente la diffusivité.

$P$  représente donc le rapport des forces de convection sur les forces de diffusion.

➤ **Schéma exponentiel :**

Considérons le flux total «  $J$  » composé du flux convectif «  $\rho U \phi$  » et du flux diffusif «  $-D_\phi (d\phi/dx)$  » :

$$J = \rho U \phi - D_\phi \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{IV.15})$$

Partons du principe de conservation de masse, appliqué pour le volume de contrôle donné, nous aurons :

$$\frac{dJ}{dx} = 0 \quad (\text{IV.16})$$

Nous aurons après intégration :

$$J_e - J_w = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Utilisons la solution exacte comme profil entre les points  $P$  et  $E$  où  $\phi_P$  et  $\phi_E$  remplacent  $\phi_0$  et  $\phi_L$  et la distance ( $\delta x$ ) remplace  $L$  :

$$J_e = F_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad (\text{IV.18})$$

avec,

$$P_e = \frac{(\rho U)_e (\delta x)_e}{D_e} = \frac{F_e}{R_e} \quad (\text{IV.19})$$

$$F_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) - F_w \left( \phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\exp(P_w) - 1} \right) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Ce qui nous donne :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{IV.21})$$

avec,

$$a_E = \frac{F_e}{\exp\left(\frac{F_e}{R_e}\right) - 1}, \quad a_W = \frac{F_w \exp\left(\frac{F_w}{R_w}\right)}{\exp\left(\frac{F_w}{R_w}\right) - 1}$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

Pour le problème stationnaire unidimensionnel, ce schéma donne la solution exacte quel que soit le nombre de Peclet. Cependant ce schéma est peu exploité ; les exponentielles sont coûteuses à calculer et le schéma n'est pas exact pour les problèmes bidimensionnels et tridimensionnels ou en présence du terme source.

### ➤ Schéma hybride :

Pour relier les deux schémas centré et hybride, notons  $(a_E/R_e)$  comme étant une fonction de Peclet :

$$\frac{a_E}{R_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (\text{IV.22})$$

Pour des valeurs positives de  $P_e$ , le point  $E$  est dans le voisinage amont. Par ailleurs lorsque  $P_e$  est négatif,  $E$  étant en aval avec une large influence prévalant le long du segment [EW].

L'équation discrétisée s'écrit comme suit :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{IV.23})$$

avec ,

$$a_E = \left[ -F_e, R_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right], \quad a_W = \left[ F_w, R_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right]$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$

### Schéma en loi – puissance :

Le coefficient  $a_E$  dans l'équation discrétisée pour un schéma de loi – puissance s'écrit comme suit :

$$a_E = R_e [0, (1 - \frac{0.1|F_e|}{R_e})^5] + [0, -F_e] \quad (\text{IV.24})$$

### 1.1.2-Formulation générale

Pour définir une formulation générale prenant en considération l'ensemble des schémas étudiés, nous définissons une fonction du nombre de Peclet  $A(|P|)$  variant selon le schéma d'interpolation choisi :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{IV.25})$$

avec :

$$a_E = R_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (\text{IV.26})$$

$$a_W = R_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \quad (\text{IV.27})$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (\text{IV.28})$$

Les fonctions  $A(|P|)$  correspondant aux différents schémas d'interpolation sont portées sur le tableau suivant:

**Tableau IV.1:** Fonctions  $A(|P|)$  se rapportant aux différents schémas

Schéma	$A( P )$
Différences centrées	$1 - 0,5( P )$
Amont	1
Hybride	$[0, 1 - 0,5 P ]$
Loi puissance	$[0, (1 - 0,1 P )^5]$
Exact	$ P  / (\exp( P ) - 1)$

## 1.2- Equation discrétisée de dimension 2

Après avoir exposé les différents schémas d'interpolation utilisés pour parvenir à l'équation discrétisée unidimensionnelle, nous allons maintenant aborder le problème bidimensionnel.

L'équation de convection – diffusion en deux dimensions s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (\text{IV.29})$$

tel que :

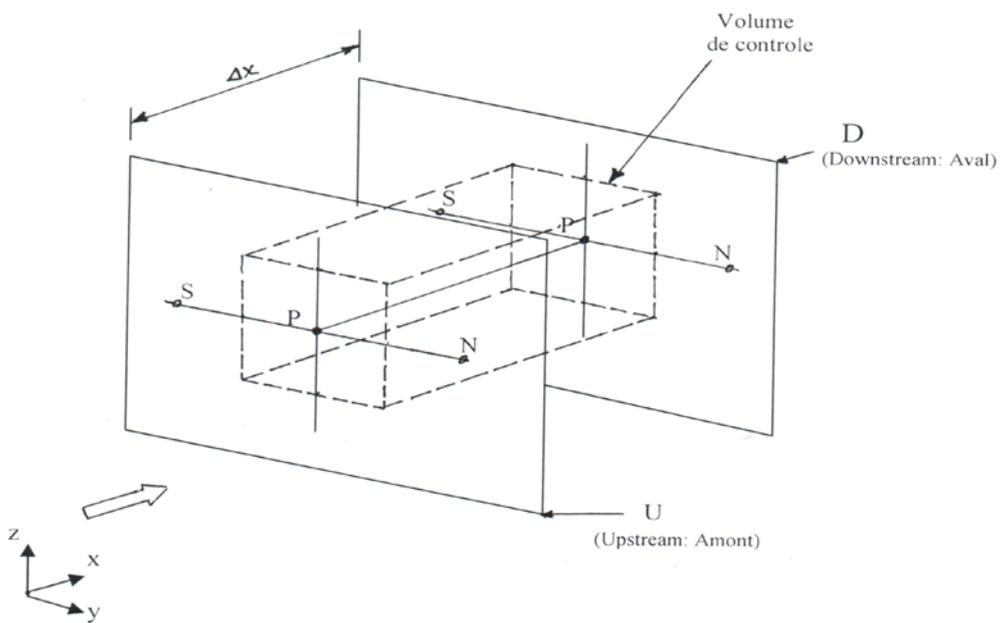
$$J_x = \rho U \phi - D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{IV.30})$$

$$J_y = \rho V \phi - D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{IV.31}$$

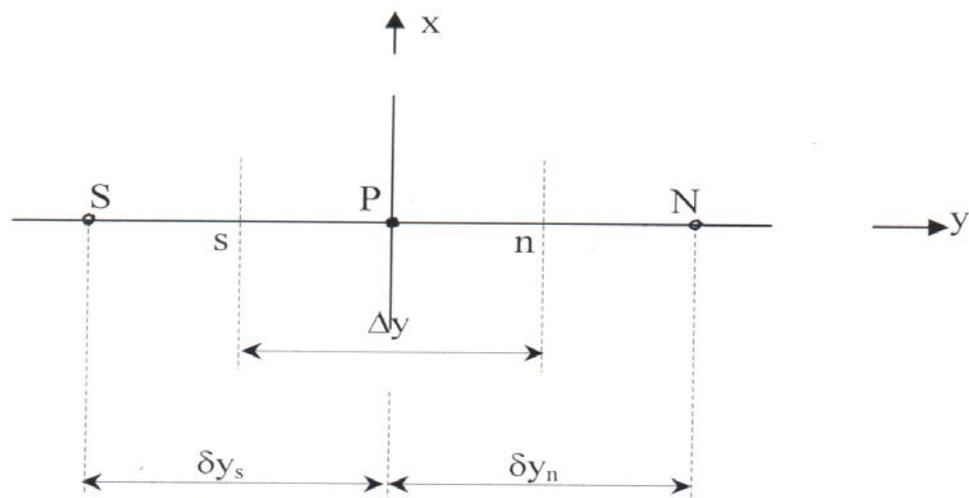
S représente le terme source.

Si nous formulons le terme source en fonction linéaire de  $S_P$  et  $\phi_P$  prévalant sur l'ensemble du volume de contrôle correspondant au point P (voir figures IV-4 et IV-5), nous aurons :

$$(J_e - J_w) + (J_n - J_s) = (S_C + S_P \phi_P) \Delta x \Delta y \tag{IV.32}$$



**Figure IV-4:** Différentes faces du volume de contrôle (3D)



**Figure IV-5:** Volume de contrôle (plan xy -2D)

La forme discrétisée de l'équation bidimensionnelle de continuité s'écrit comme suit:

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (\text{IV.33})$$

avec :

$$\begin{aligned} F_e &= (\rho U)_e \cdot \Delta y & F_w &= (\rho U)_w \cdot \Delta y \\ F_n &= (\rho V)_n \cdot \Delta x & F_s &= (\rho V)_s \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Si nous multiplions l'équation (IV.33) par  $\phi_P$  et on la retranche de l'équation des flux, nous obtenons :

$$(J_e - F_e \cdot \phi_P) - (J_w - F_w \cdot \phi_P) + (J_n - F_n \cdot \phi_P) - (J_s - F_s \cdot \phi_P) = (S_C + S_P \cdot \phi_P) \Delta x \Delta y \quad (\text{IV.34})$$

Si nous posons :

$$J_e - F_e \phi_P = a_E (\phi_P - \phi_E) \quad (\text{IV.35})$$

$$J_w - F_w \phi_P = a_W (\phi_P - \phi_W) \quad (\text{IV.36})$$

$$\text{et } a_E = R_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad , \quad a_W = R_w A(|P_w|) + [F_w, 0]$$

où  $R_e, R_w, F_e, F_w$  comprennent le terme exprimant la multiplication par l'aire ( $\Delta y \times 1$ ) des faces e et w.

L'équation discrétisée finale pour un écoulement bidimensionnel en régime stationnaire sera donc :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{IV.37})$$

avec,

$$a_E = R_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad a_W = R_w A(|P_w|) + [F_w, 0]$$

$$a_N = R_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \quad a_S = R_s A(|P_s|) + [F_s, 0]$$

$$b = S_c \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

$$R_e = (D_e \Delta y) / (\delta x)_e \quad R_w = (D_w \Delta y) / (\delta x)_w$$

$$R_n = (D_n \Delta x) / (\delta y)_n \quad R_s = (D_s \Delta x) / (\delta y)_s$$

$$P_e = F_e / R_e \quad P_w = F_w / R_w \quad P_n = F_n / R_n \quad P_s = F_s / R_s$$

Les fonctions  $A(|P|)$  peuvent être choisies selon le type du schéma d'interpolation approprié.

### 1.3- Schéma approprié

Nous nous plaçons dans le cadre des écoulements turbulents à caractère parabolique dont la vitesse d'écoulement prédominante est celle qui se rapporte à la direction longitudinale ( $x$ ).

Le schéma numérique des volumes finis appliqué pour ce type d'écoulement varie en fonction du terme de transport concerné.

Rappelons que l'équation générale du transport convectif et diffusif s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\phi V) = \frac{\partial}{\partial y} \left( D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi \quad (\text{IV.38})$$

(1)                      (2)                      (3)                      (4)

#### 1.3.1- Terme de convection

Compte tenu du caractère parabolique de l'écoulement, le schéma approprié pour le terme de convection peut faire l'objet d'une combinaison entre le schéma amont "Upwind" et le schéma centré (Mcbride & Rutherford, 1984).

Le terme de transport convectif dans la direction longitudinale (terme1) peut être intégré en appliquant le schéma amont, alors que le deuxième terme du transport convectif dans la direction transversale (terme 2) peut être intégré par application du schéma centré en tenant compte aussi bien de la valeur de la variable en amont du point «  $P$  » que de celle du point situé en aval :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\phi V) = F_D \phi_P - F_U \phi_{P,U} + L_n^y (\phi_N + \phi_P) - L_s^y (\phi_S + \phi_P) \quad (\text{IV.39})$$

où,

$$F_U = (\rho U)_{P,U} \cdot \Delta y$$

$$L_n^y = (\rho V)_{n,U} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

$$L_s^y = (\rho V)_{s,U} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

### 1.3.2-Terme de diffusion

Afin d'intégrer le terme de diffusion dans l'équation générale du transport (terme3), nous supposons que la variable  $\phi$  varie linéairement entre les deux points limitant le volume de contrôle considéré.

La forme discrétisée du flux diffusif devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( D_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = T_n^y (\phi_N - \phi_P) - T_s^y (\phi_P - \phi_S) \quad (\text{IV.40})$$

tel que :

$$T_n^y = \frac{D_{\phi,n}(\Delta x)}{\delta y_n}$$

$$T_s^y = \frac{D_{\phi,s}(\Delta x)}{\delta y_s}$$

### 1.3.3- Terme source

Le terme source dans l'équation discrétisée s'écrit :

$$(S_U + S_P \phi_P) = S_{\phi,P} \cdot \Delta y \cdot \Delta x \quad (\text{IV.41})$$

## 2-Résolution du système d'équations algébriques linéaires

Plusieurs méthodes de résolution des équations algébriques linéaires peuvent être employées afin de déterminer la distribution des différentes variables aux différents points du maillage (domaine de calcul). Toutefois, nous avons opté pour la méthode des trois diagonales dont l'algorithme est présenté ci- après :

Prenons le problème unidimensionnel présenté par l'équation algébrique générale :

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d \quad (\text{IV.42})$$

Supposons que  $i$  varie de 1 à  $N$  ( $N$  points), et connaissons la valeur initiale de la variable  $\phi$ , nous aurons :

$$a_1 = 1 \quad b_1 = 0 \quad \text{et} \quad d_1 = \phi_1$$

L'équation (IV.42) s'écrit :

**pour  $i=1$  :**

$$a_1\phi_1 = b_1\phi_2 + d_1$$

$\phi_2$  sera donc déterminé en fonction de  $\phi_1$ .

**Pour  $i=2$  :**

$$a_2\phi_2 = b_2\phi_3 + c_2\phi_1 + d_2$$

$\phi_3$  est déterminé en fonction de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  et ainsi de suite jusqu'à  $i=N$ .

Nous pouvons donc calculer chaque terme inversement en fonction du terme suivant :

$$\phi_{i-1} = P_{i-1}\phi_i + Q_{i-1} \quad (\text{IV.43})$$

$$\text{puis } \phi_i = P_i\phi_{i+1} + Q_i \quad (\text{IV.44})$$

Si nous substituons la valeur de  $\phi_{i-1}$  de l'équation (IV.43) dans l'équation (IV.42), nous obtenons :

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i(P_{i-1}\phi_i + Q_{i-1}) + d_i$$

Puis, 
$$\phi_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}\phi_{i+1} + \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{IV.45})$$

Nous avons donc :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

La méthode des trois diagonales consiste à balayer une première fois le domaine de calcul pour déterminer  $P_1, Q_1$  puis  $P_2, Q_2$  jusqu'à  $P_N$  et  $Q_N$ .

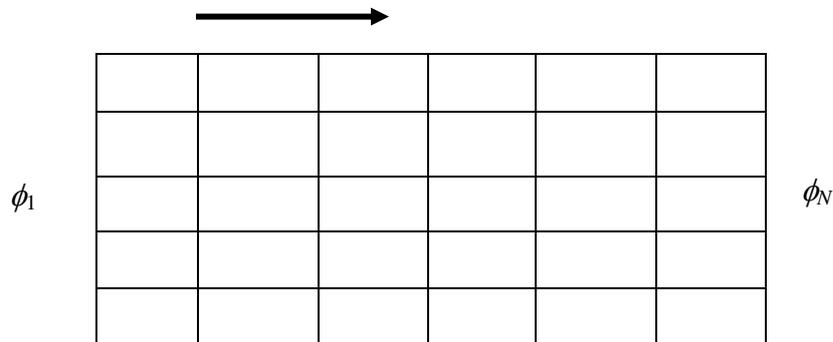
$$P_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

$$P_N = 0 \quad Q_N = \phi_N \quad (\text{conditions aux limites})$$

Puis, en partant de  $i=N$ , nous avons  $\phi_N = Q_N$  et nous calculons  $\phi_{N-1}$  puis  $Q_{N-2}$ , jusqu'à  $\phi_1$ .

L'équation algébrique bidimensionnelle peut être résolue par la méthode des trois diagonales (TDMA) en déterminant les solutions valables pour une première section transversale puis en avançant dans le sens de l'écoulement pour déterminer les solutions d'une nouvelle section et ainsi de suite, jusqu'à la dernière section

transversale du domaine de calcul (voir figure IV.6) . Cette technique est souvent appelée “line by line method ”



**Figure IV-6:** Représentation de la méthode des trois diagonales pour un écoulement bidimensionnel

## Conclusion

L'équation générale bidimensionnelle du transport convectif et diffusif de la variable  $\phi$  discrétisée par application de la méthode des volumes finis s'écrit :

$$\phi_p = A_N \phi_N + A_S \phi_S + B \quad (\text{IV.46})$$

où,

$$A_N = \frac{A'_N}{A'_P}$$

$$A_S = \frac{A'_S}{A'_P}$$

$$B = \frac{B'}{A'_P}$$

$$A'_N = T_n^y - L_n^y$$

$$A'_S = T_s^y - L_s^y$$

$$B' = F_U \phi_{P,U} + S_U$$

$$A'_P = A'_N + A'_S + F_U - S_P$$

$$F_U = (\rho U)_{P,U} \cdot \Delta y$$

$$L_n^y = (\rho V)_{n,U} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

$$L_s^y = (\rho V)_{s,U} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

$$T_n^y = \frac{D_{\phi,n}(\Delta x)}{\delta y_n}$$

$$T_s^y = \frac{D_{\phi,s}(\Delta x)}{\delta y_s}$$

$$(S_U + S_P \phi_P) = S_{\phi P} \cdot \Delta y \cdot \Delta x$$

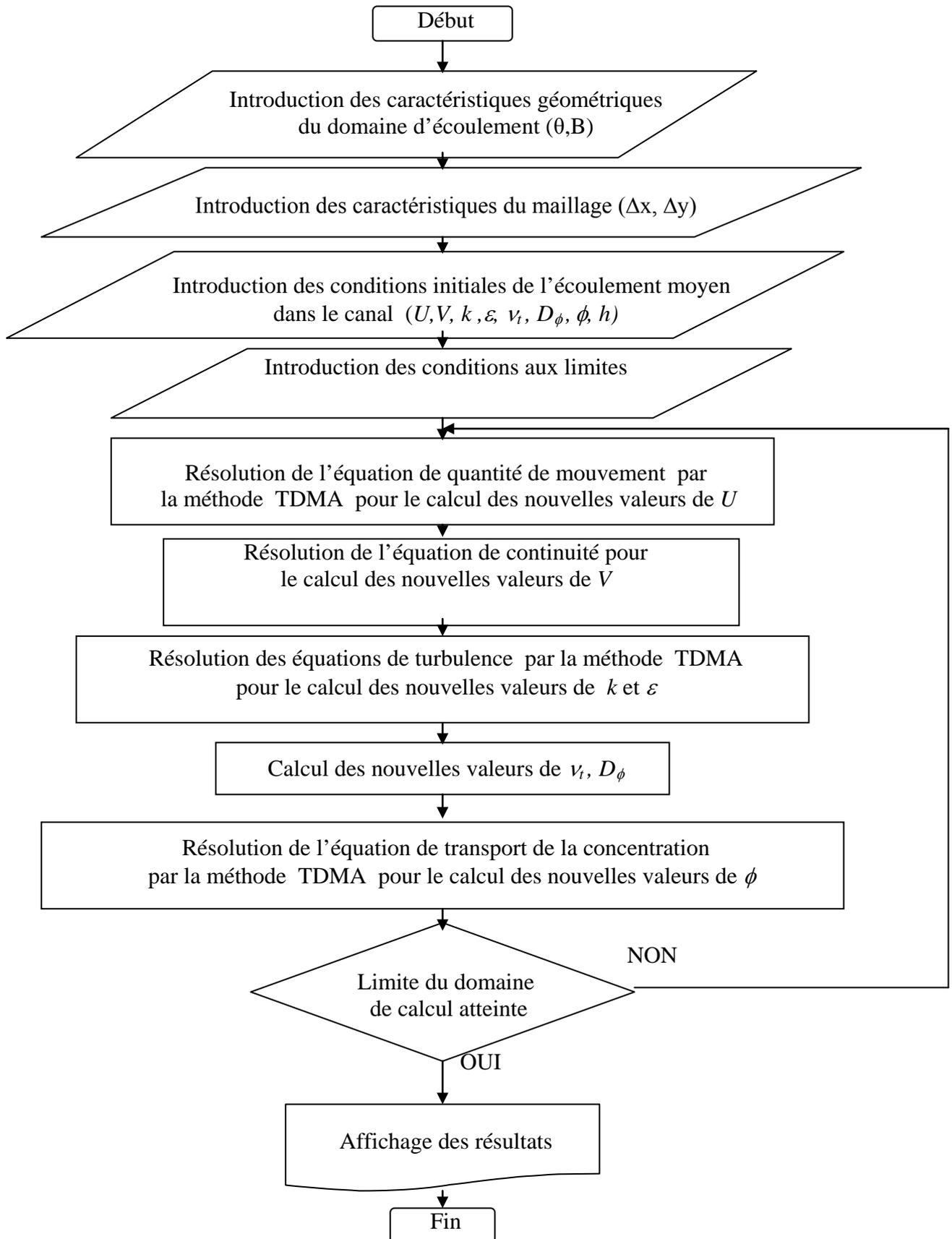
Les équations de quantité de mouvement, de turbulence et de transport des champs scalaires peuvent être discrétisées pareillement par la méthode des volumes finis exposée ci-dessus.

Le système d'équations algébriques résultant (équation IV.46) peut être résolu au moyen de la méthode des trois diagonales (TDMA) après définition des conditions aux limites et introduction des profils initiaux des différentes variables caractérisant l'écoulement et celles se rapportant au jet polluant.

Les différentes étapes caractérisant l'algorithme de résolution des équations de transport, peuvent être résumées comme suit :

- 1- Introduction des conditions initiales de l'écoulement moyen dans le canal ;
- 2- Introduction des caractéristiques géométriques du domaine d'écoulement ;
- 3- Introduction des caractéristiques relatives au maillage résultant du découpage du domaine de calcul en volume de contrôle ( $\Delta x, \Delta y$ ) ;
- 4- Résolution de l'équation de quantité de mouvement pour la détermination de la vitesse longitudinale ( $U$ ) ;
- 5- Détermination de la vitesse transversale ( $V$ ) à partir de l'équation de continuité ;
- 6- Résolution des équations du modèle de la turbulence ( $k, \varepsilon$ ) pour déterminer les nouvelles valeurs de  $k$  et  $\varepsilon$  et de la valeur conséquente de la viscosité turbulente  $\nu_t$  et celle de la diffusivité  $D_\phi$  ;
- 7- Résolution de l'équation de transport de la pollution ( $\phi$ ) et détermination des nouvelles valeurs de la concentration aux différents points du nouveau profil du maillage ;
- 8- Retourner à l'étape 4 (jusqu'au dernier profil du maillage).

Les différentes étapes de calcul peuvent être illustrées autrement selon l'organigramme suivant :

**Organigramme de calcul :**

La mise en application de l'algorithme de calcul présenté ci-dessus s'est concrétisée par l'élaboration d'un programme informatique en FORTRAN que nous avons développé au niveau du centre informatique de l'Ecole Nationale Polytechnique. Des tests de validation du modèle adopté feront l'objet du chapitre suivant.

## **Chapitre V**

# **Applications**

## **Introduction**

Les aspects mathématique et numérique du problème étudié étant décrits de manière détaillée, nous pouvons maintenant appliquer notre modèle pour le calcul du transfert de la pollution dans un cours d'eau, à l'aide du programme informatique élaboré dans ce sens.

Les techniques expérimentales de mesure des concentrations dans les cours d'eau étant très complexes et nécessitent des moyens conséquents, nous n'avons pas pu les mettre en œuvre et confronter nos résultats numériques à des valeurs expérimentales. Toutefois, nous nous contentons dans le présent chapitre d'une analyse comparative pour la validation du modèle élaboré.

Nous avons pris à cet effet le travail de Ashokk Rastogi et Wolfgang Rodi réalisé en 1978 comme référence. Comme nous l'avons déjà évoqué au premier chapitre, le travail de ces chercheurs consista à étudier l'évolution des caractéristiques de l'écoulement et déterminer la progression du polluant injecté au centre d'un canal rectangulaire (figure V-2).

En ce qui concerne la substance polluante, il y'a lieu de rappeler que nous la considérons en premier lieu comme étant un traceur chimiquement conservatif. Nous devons ainsi, étudier l'influence des caractéristiques de l'écoulement turbulent sur la progression du polluant le long du canal. Puis, nous testerons en deuxième lieu l'influence d'autres facteurs tels que la vitesse d'injection du polluant et le facteur de réaction biochimique intervenant au niveau du terme source de l'équation de convection – diffusion.

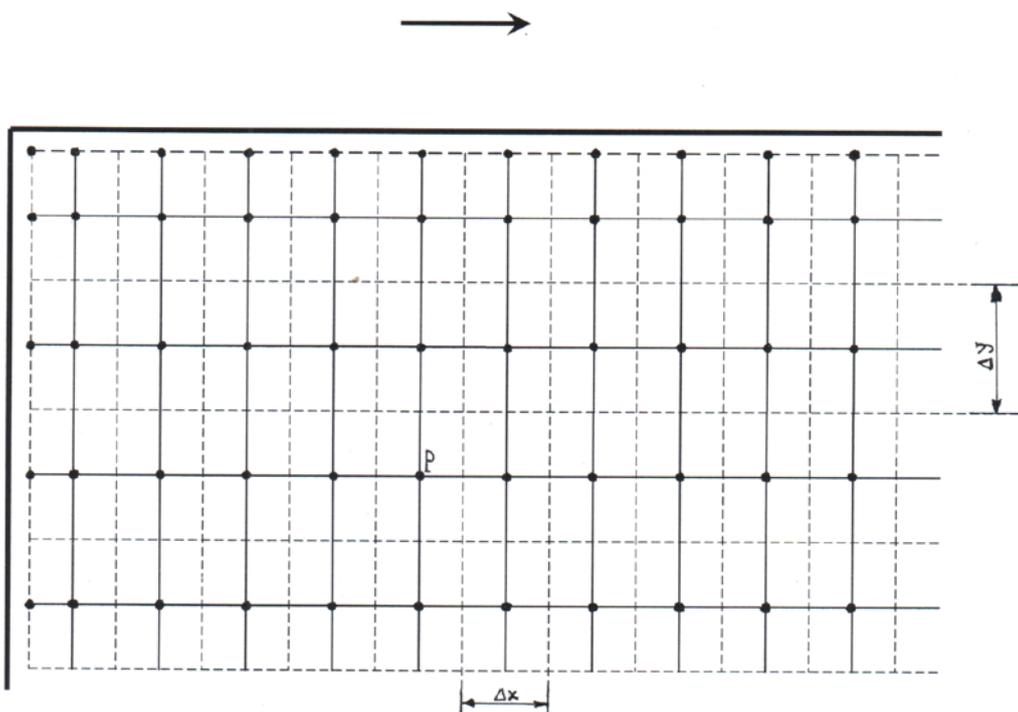
# 1- Maillage

Le rejet polluant coaxial étant effectué dans un canal rectangulaire, nous découpons le domaine de calcul selon une grille rectangulaire. Nous prenons un maillage uniforme selon les deux directions longitudinale et transversale tel que :

$$\Delta x = 0.02B, \quad \Delta z = B/30 .$$

où,  $B$  est la largeur du canal.

Les volumes de contrôle remplissent tout l'espace (domaine de calcul). Nous devons d'abord placer les volumes de contrôle puis le maillage. Nous rajoutons des points sur les limites qui seront considérés comme étant des volumes de contrôle de dimensions nulles (figure V.1) ; nous pouvons ainsi utiliser directement la valeur des variables et flux en ces points comme conditions aux limites (Patankar & Spalding, 1972).



**Figure V-1:** Présentation du maillage

## 2- Conditions initiales

Nous devons introduire les conditions initiales représentant l'état de base du modèle de simulation. Sur le plan pratique, les différents paramètres caractérisant la décharge polluante se trouvent quantifiables (profil initial), l'ingénieur hydraulicien sera donc appelé à déterminer la réponse du milieu aquatique (rivière).

Les profils de la vitesse longitudinale  $U$  et de la concentration (valeur adimensionnelle  $C/C_d$ ) sont représentés distinctement pour chaque application étudiée.

Concernant les conditions initiales des variables turbulentes, il est à signaler qu'il est particulièrement difficile de se donner des valeurs initiales de l'énergie cinétique turbulente ( $k$ ) et de son taux de dissipation ( $\varepsilon$ ). C'est pourquoi nous optons dans le présent travail pour l'application des profils approximatifs relevant de relations empiriques et généralement utilisés par les chercheurs (Rastogi & Rodi, 1978), qui resteront valables quelle que soit l'application considérée.

$$v_t = 0.0765.U_* h \quad (\text{V.1})$$

$$\varepsilon = S g U \quad (\text{V.2})$$

où,  $S$  est la pente hydraulique dans la zone de décharge ;

$U$  : vitesse longitudinale moyenne;

$U_*$  : vitesse de frottement.

Dans la zone du rejet,  $k_d$  et  $\varepsilon_d$  sont déterminés selon les formules suivantes :

$$\frac{k_d}{k_r} = \left( \frac{U_d}{U_r} \right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_r} = \left( \frac{U_d}{U_r} \right)^3$$

L'indice «  $r$  » dans les équations précédentes signifie que les variables impliquées correspondent à l'écoulement stable dans la rivière (avant le rejet).

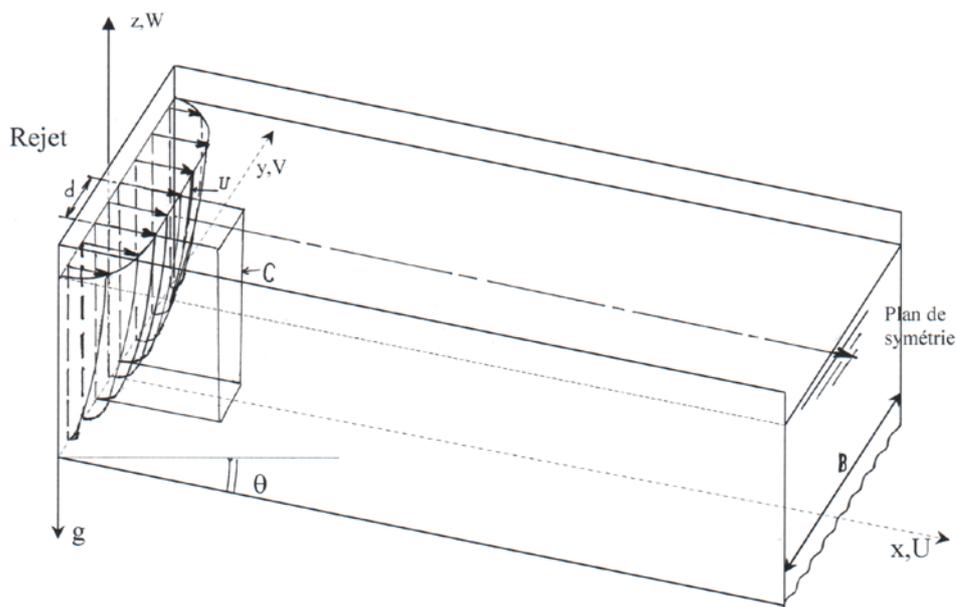
## 3- Application à des cas tests

L'objectif recherché dans cette partie consiste à effectuer la validation du modèle de simulation. Pour cela nous appliquons notre modèle à deux cas tests relatifs au transport de la pollution en présence d'un rejet coaxial dans un canal rectangulaire à faible pente tout en faisant la comparaison des résultats de simulation avec ceux correspondant aux applications de Rodi et Rastogi (1978) dont les conditions d'écoulement sont similaires. Nous considérons ainsi pour la première application que la vitesse d'injection du polluant est équivalente à la vitesse initiale d'écoulement dans le canal. Puis, nous prenons en deuxième cas test une vitesse d'injection de la masse polluante égale au double de la vitesse d'écoulement dans le canal.

Une fois que notre modèle de simulation sera validé, nous étudierons en troisième application l'effet de la réaction biochimique sur l'évolution de la pollution dans le canal.

### 3.1- Premier cas test

Ce premier cas décrit un écoulement à surface libre dans un canal à pente faible et à parois lisses en présence d'un rejet coaxial. Le débit d'entrée est choisi constant, ce qui correspond à un état stationnaire. Nous considérons ainsi pour ce premier cas test que la vitesse d'injection de la masse polluante est égale à la vitesse d'écoulement initiale dans le canal ( $U_d = U_r$ ).



**Figure V-2:** Configuration de l'écoulement (1<sup>er</sup> cas test  $U_d / U_r = 1$ )

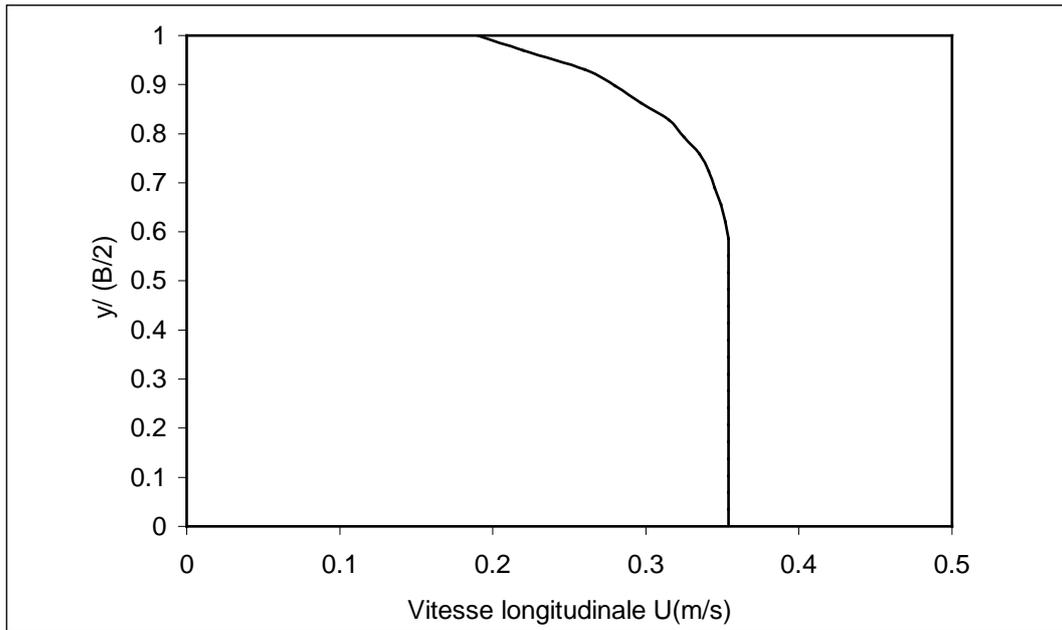
➤ **Données de base du premier cas test :**

$U = 0.354$ m/s	$(V_0 = 0$ m/s)	
$\nu = 10^{-6}$ m <sup>2</sup> /s	$g = 9.81$ m/s <sup>2</sup>	
Tirant d'eau : $h = 1$ m	largeur du canal $B = 27$ m	$(h/B = 1/27)$
Pente $f_{\text{ond}} = 0.0015$ %		
Rugosité des parois : $E = 9$ (parois lisses)	$\kappa = 0.42$	$C_f = 0.001127$

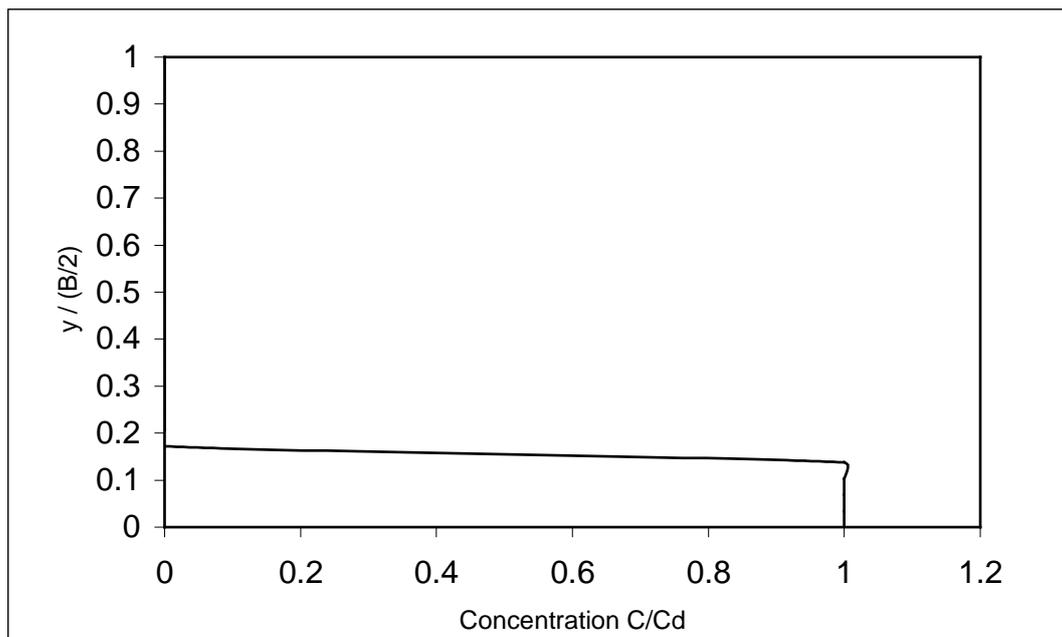
**Rejet polluant :**

Vitesse d'injection :  $U_d = U_r$

Largeur de la zone de décharge :  $d = B/6$



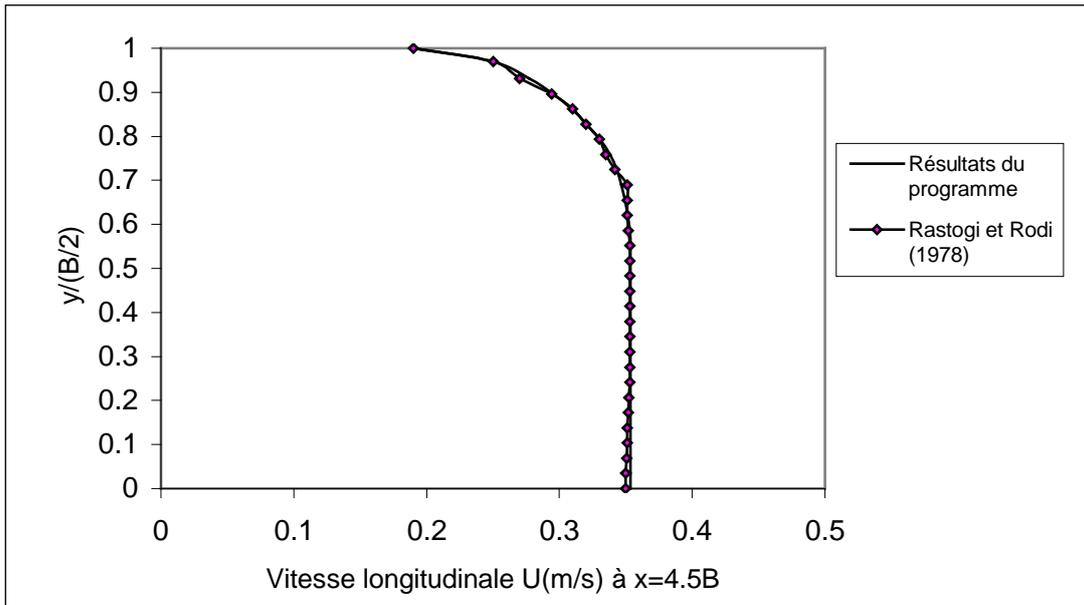
**Figure V-3:** Profil initial de la vitesse longitudinale (1<sup>er</sup> cas test  $U_d/U_r=1$ )



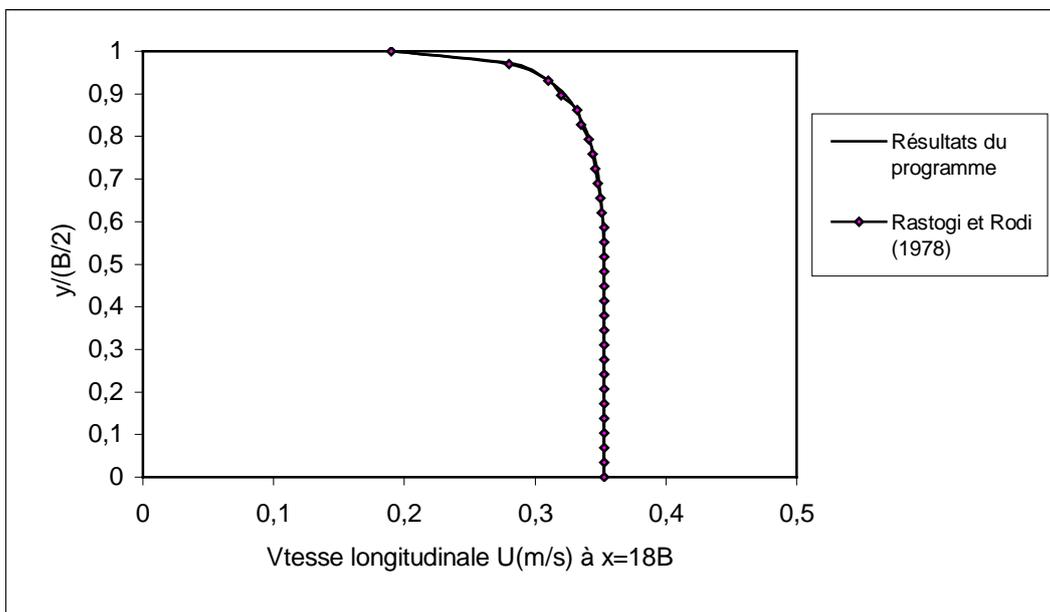
**Figure V-4:** Profil initial de la concentration  $C/C_d$  (1<sup>er</sup> cas test  $U_d/U_r=1$ )

#### 4- Résultats de simulation du premier cas test

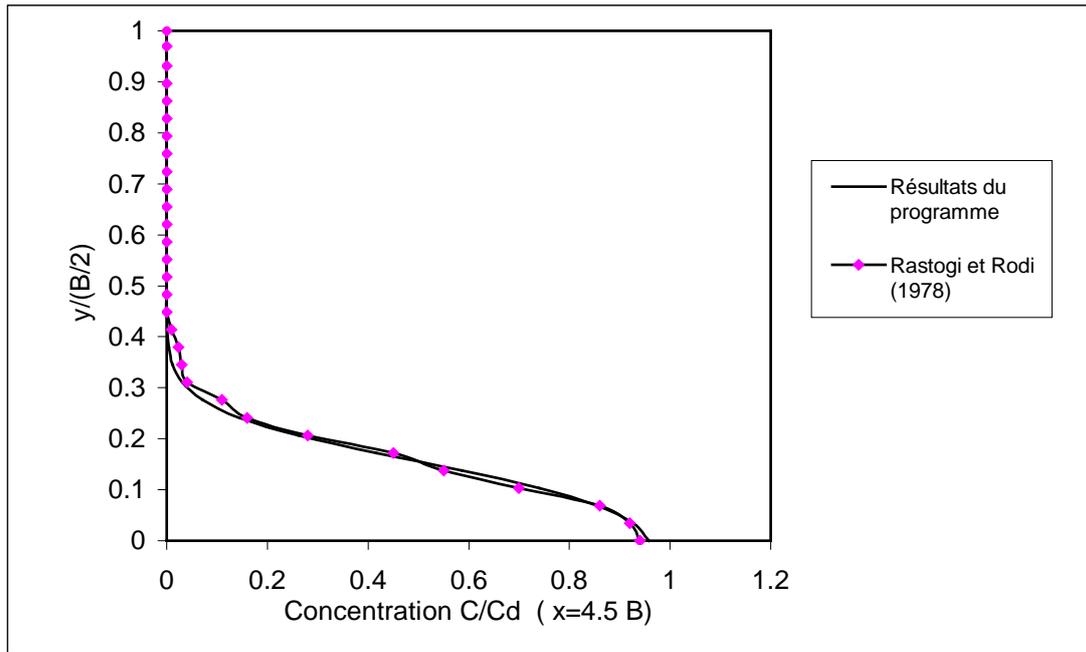
Les résultats de simulation numérique du premier cas test se rapportant à l'évolution de la vitesse longitudinale et de la concentration du polluant le long du canal, sont représentés graphiquement sur les figures (V-5) à (V-8).



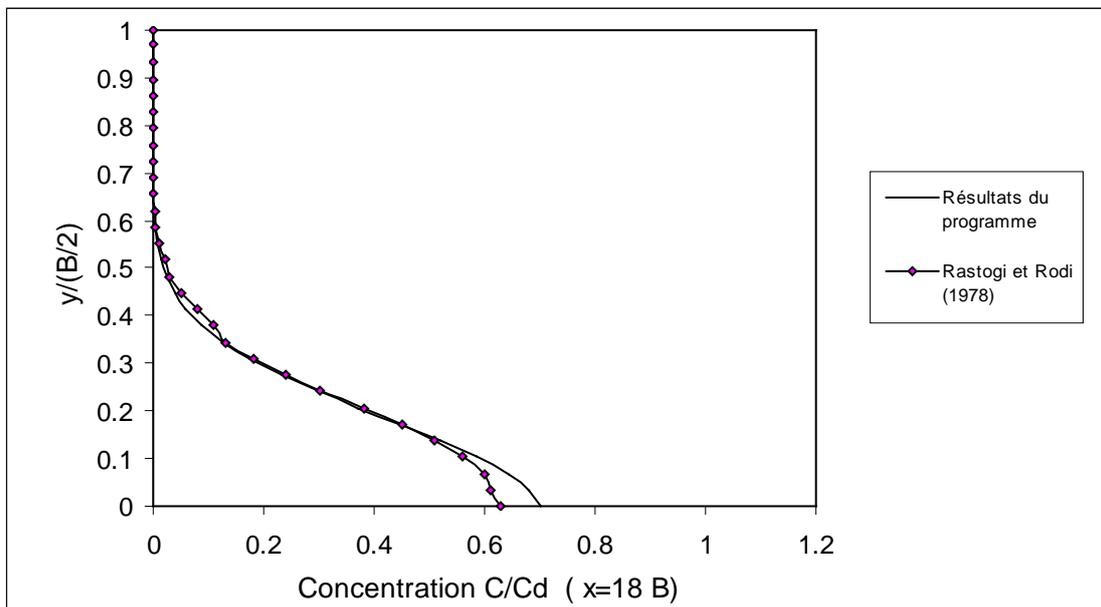
**Figure V-5:** Evolution de la vitesse longitudinale (1<sup>er</sup> cas test  $U_d/U_r = 1$ ,  $x=4.5B$ )



**Figure V-6:** Evolution de la vitesse longitudinale (1<sup>er</sup> cas test  $U_d/U_r = 1$ ,  $x=18B$ )



**Figure V-7:** Evolution de la concentration (1<sup>er</sup> cas test  $U_d/U_r=1$  ,  $x=4.5B$ )



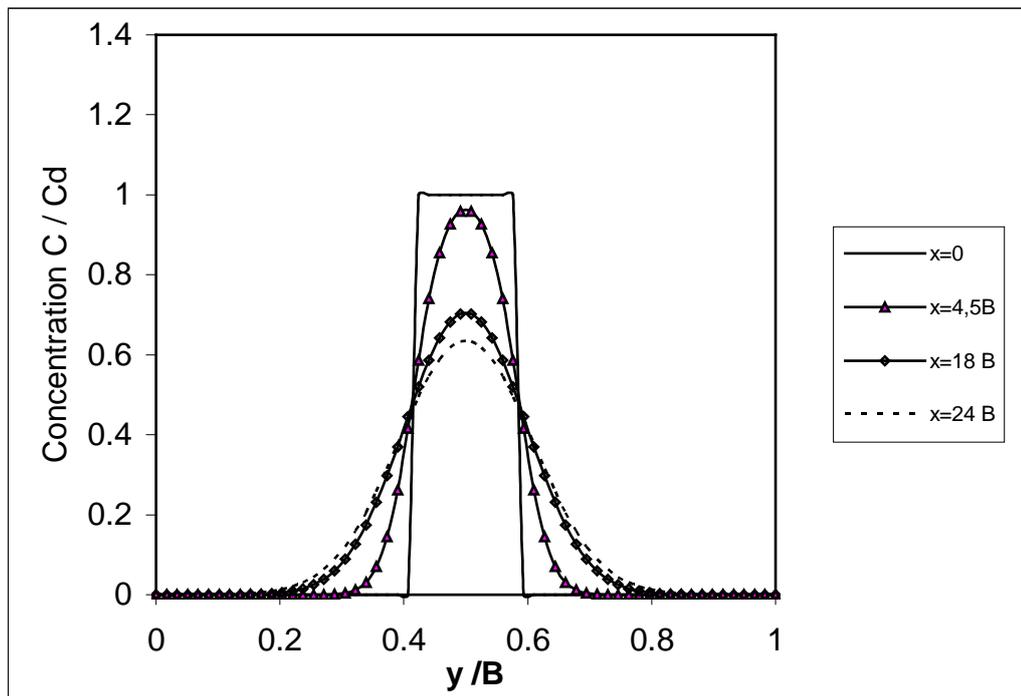
**Figure V-8:** Evolution de la concentration (1<sup>er</sup> cas test  $U_d/U_r=1$  ,  $x=18B$ )

Les figures (V-5) à (V-8) montrent clairement que les résultats de simulation se trouvent très proches des résultats obtenus par W. Rodi et K. Rastogi (Rastogi & Rodi, 78) et ce, pour les deux paramètres étudiés ( $U$ ,  $C$ ).

Nous constatons ainsi, que la masse polluante injectée au centre du canal à la même vitesse d'écoulement n'a pas influencé le profil de la vitesse longitudinale. Cette dernière demeure stable le long du canal.

Par ailleurs, nous remarquons que la substance polluante s'est déplacée vers l'aval du canal sous l'effet de la convection et s'est légèrement dispersée dans la direction transversale sous l'effet de la diffusion. Nous observons à cet effet, un phénomène d'uniformisation des concentrations avec une diminution de la concentration maximale en s'éloignant du point d'injection.

La figure (V-9) donne une très bonne représentation de l'évolution du profil de la concentration dans le canal, nous voyons que la courbe de  $(C/C_d)$  évolue de la forme carrée vers la forme plus étalée au fur et à mesure de l'avancée de la masse polluante dans le domaine d'écoulement.



**Figure V-9:** Evolution de la concentration ( $C/C_d$ ) le long du canal (1<sup>er</sup> cas test  $U_d/U_r=1$ )

Même si nous nous sommes faits, à travers le premier cas test, une idée du phénomène de transport convectif et diffusif de la pollution, pour tester au mieux les

performances du programme de calcul, nous aborderons en deuxième application la simulation de l'effet de la vitesse d'injection de la pollution dans le canal.

## 5- Influence de la vitesse d'injection du polluant (deuxième cas test)

Prenons le cas où la masse polluante est injectée à une vitesse longitudinale initiale  $U_d = 2 U_r$  (figure V-10).

Les profils initiaux repris sur les figures (V-11) et (V-12), afférents respectivement à la vitesse longitudinale et la concentration du polluant pour ce deuxième cas test, sont identiques à ceux utilisés par Rastogi et Rodi (1978).

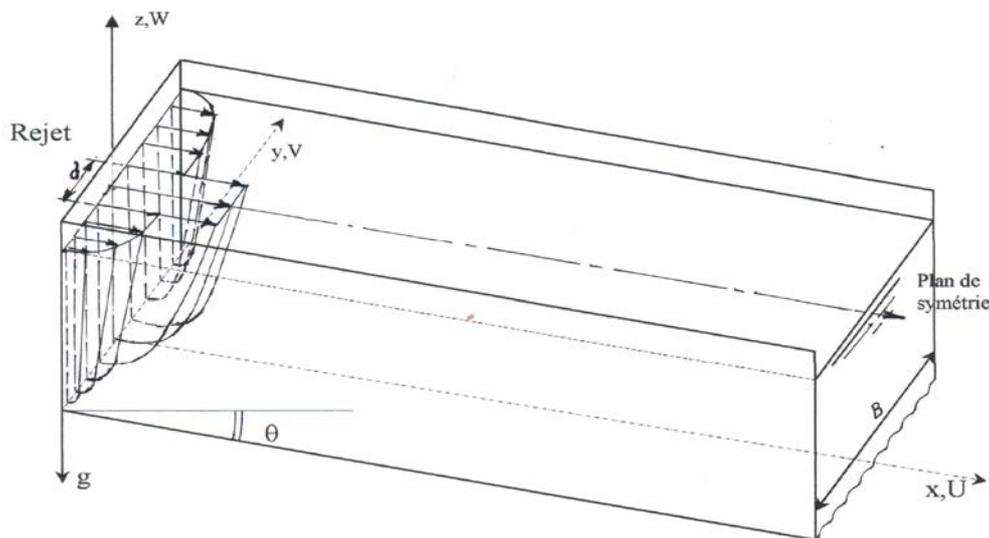
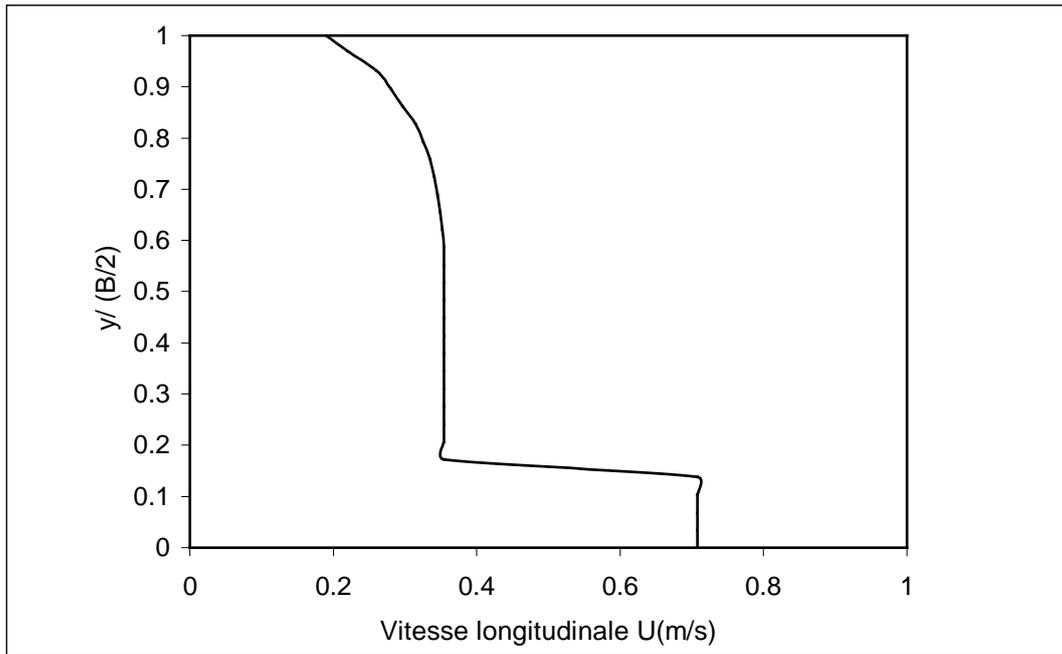


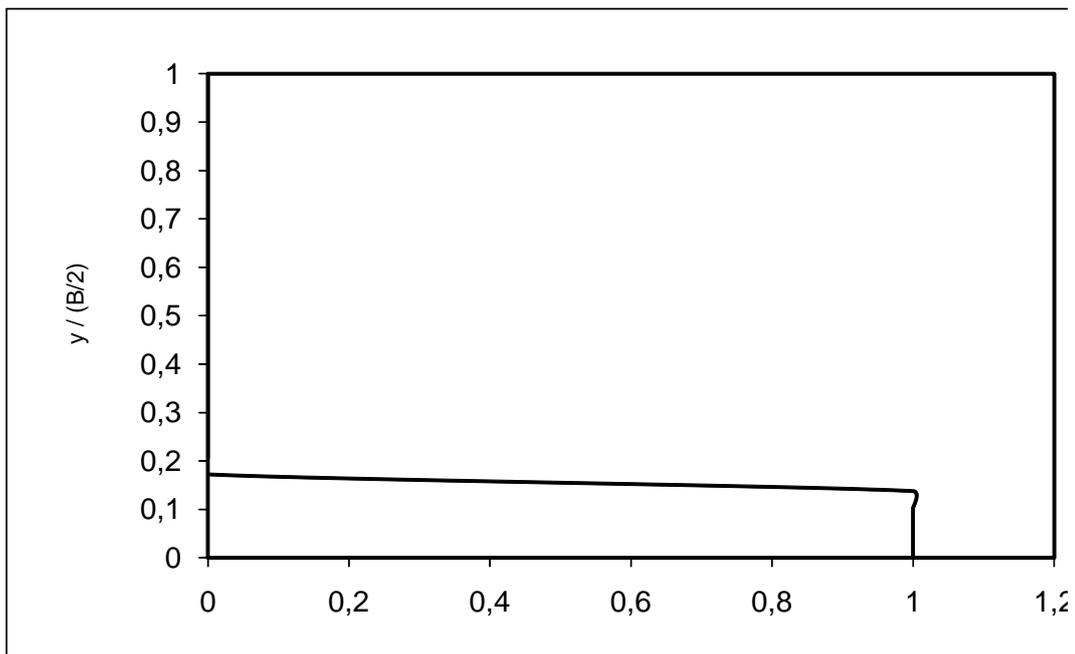
Figure V.10- Configuration de l'écoulement (2<sup>ème</sup> cas test  $U_d = 2 U_r$ )

### ➤ Données de base du deuxième cas test :

$U = 0.354 \text{ m/s}$	$(V_0 = 0 \text{ m/s})$		
$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$		
Tirant d'eau : $h = 1 \text{ m}$	largeur du canal $B = 27 \text{ m}$	$(h/B = 1/27)$	Pente fond = $0.0015 \%$
Rugosité des parois : $E = 9$ (parois lisses)		$\kappa = 0.42$	$C_f = 0.001127$
<u>Rejet polluant :</u>			
vitesse d'injection : $U_d = 2U_r$			
largeur de la zone de décharge : $d = B/6$			



**Figure V-11:** Profil initial de la vitesse longitudinale (2<sup>ème</sup> cas test  $U_d = 2 U_r$ )



**Figure V-12:** Profil initial de la concentration  $C/C_d$  (2<sup>ème</sup> cas test  $U_d = 2 U_r$ )

Les résultats du modèle de simulation représentés sous forme graphique sur les figures (V-13) à (V-16) avoisinent, pour une grande partie du domaine de calcul, les valeurs de concentration et de vitesse trouvées par les chercheurs Rastogi et Rodi en 1978.

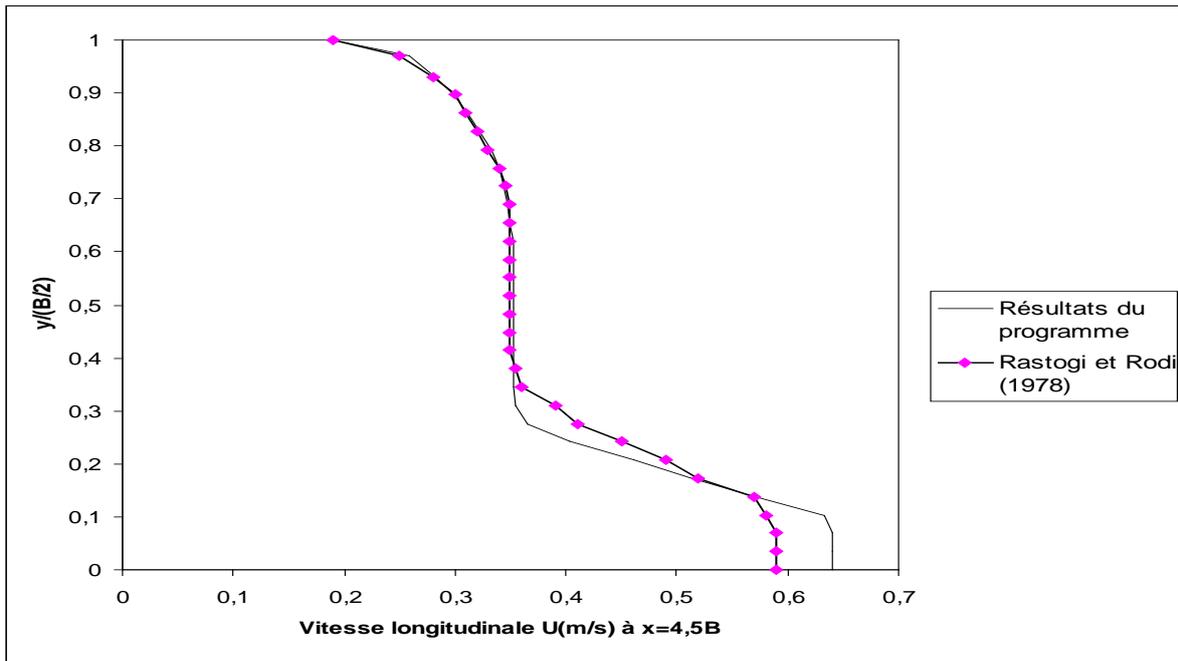


Figure V-13: Evolution de la vitesse longitudinale (2<sup>ème</sup> cas test  $U_d/U_r=2$ )

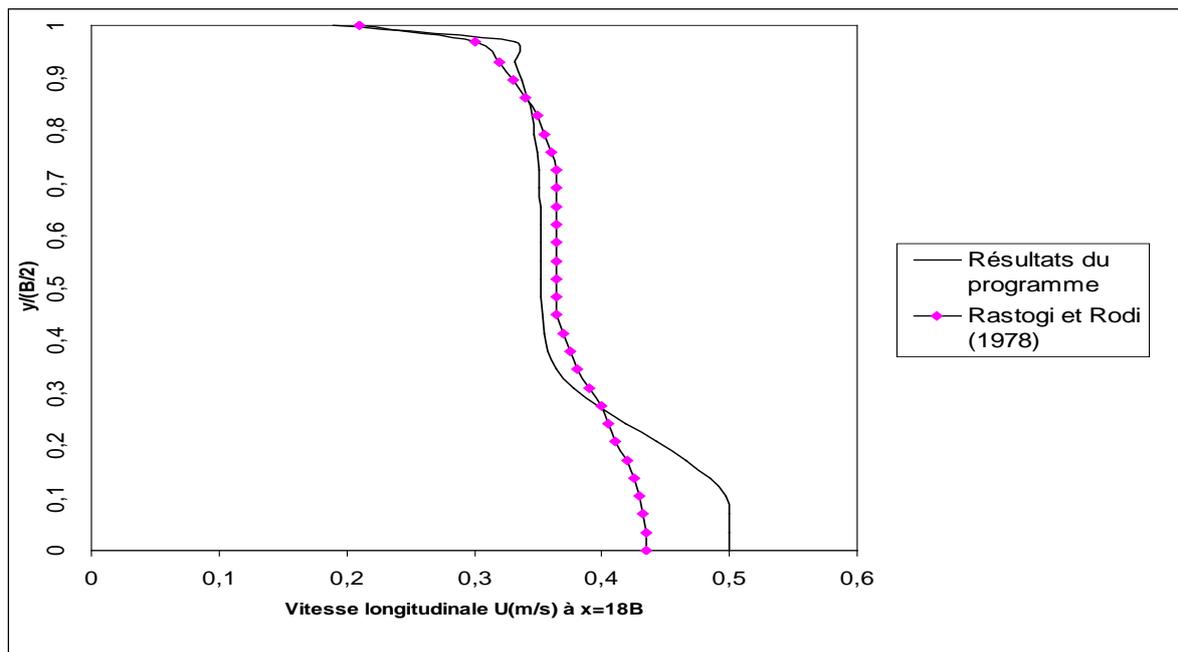
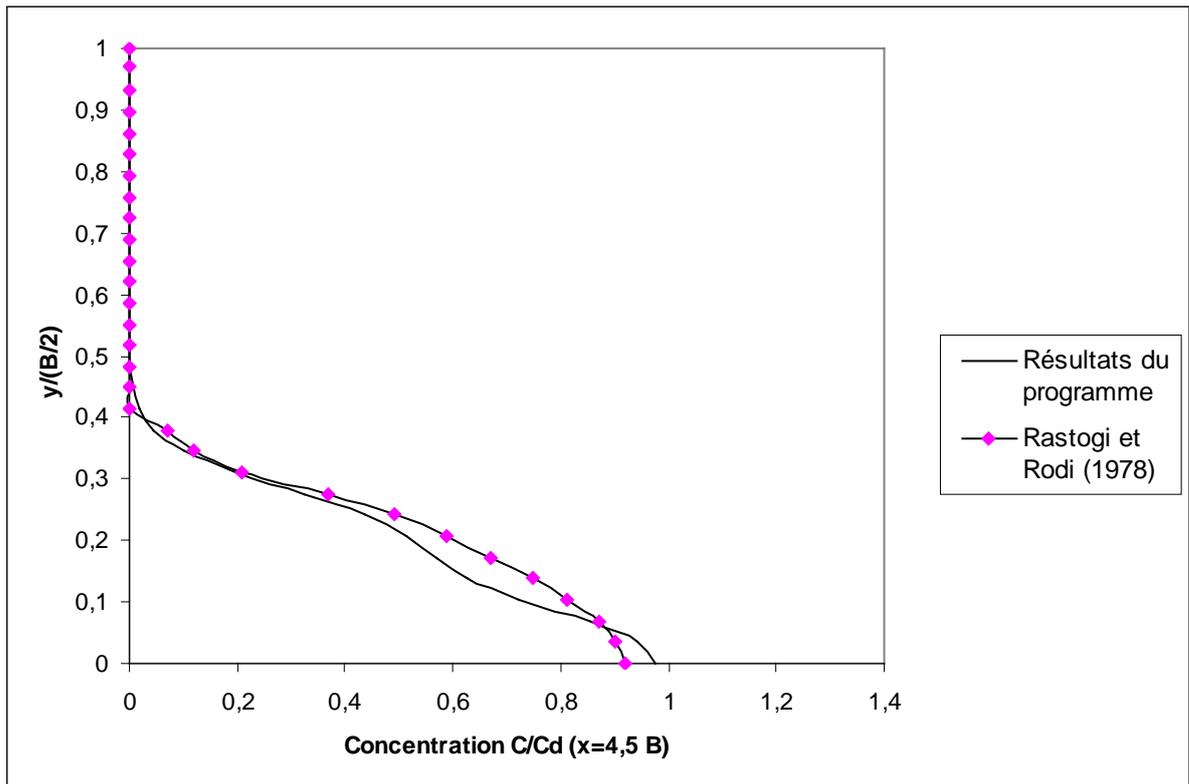
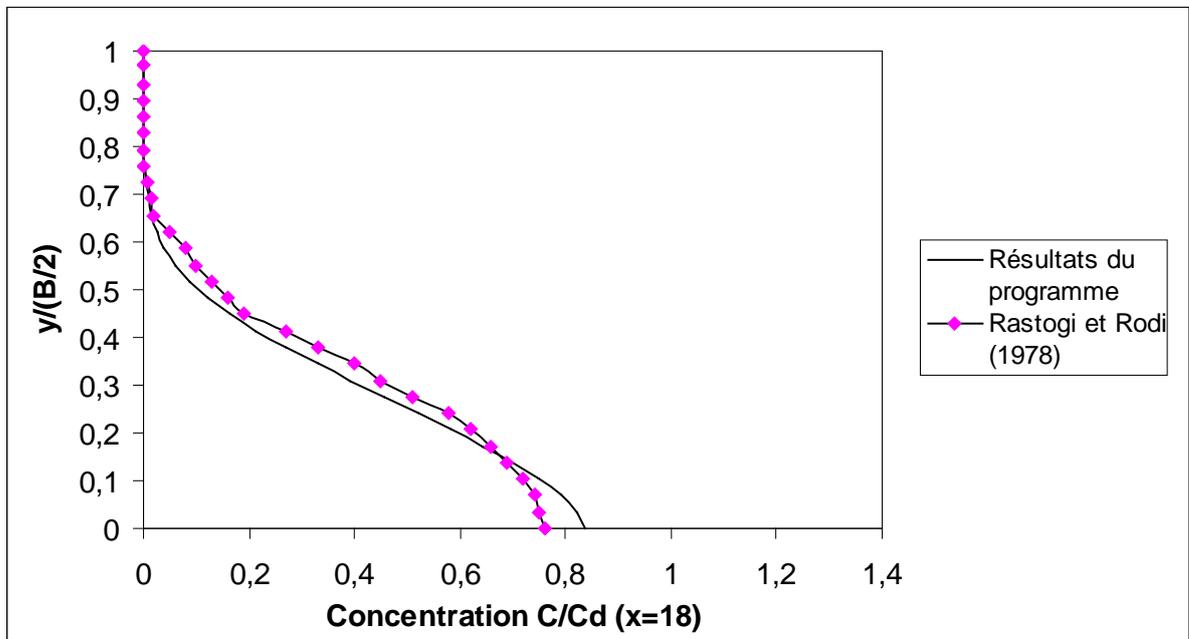


Figure V-14: Evolution de la vitesse longitudinale (2<sup>ème</sup> cas test  $U_d/U_r=2$ )



**Figure V-15:** Evolution de la concentration (2<sup>ème</sup> cas test  $U_d/U_r = 2, x=4,5 B$ )



**Figure V-16:** Evolution de la concentration (2<sup>ème</sup> cas test  $U_d/U_r = 2, x=18 B$ )

Nous poursuivons notre analyse de l'évolution de la concentration dans la rivière, nous constatons ainsi, que la masse polluante est transportée par convection plus rapidement comparativement à l'état de référence où  $U_d = U_r$ .

Quand la vitesse d'injection est plus importante, nous parvenons à discerner une dégradation moins importante de la concentration maximale le long du canal.

Toutefois, le phénomène du déplacement rapide de la masse polluante ne perturbe pas aussi rapidement la dispersion transversale qui parvient progressivement à diminuer la concentration au sein de la rivière mais de manière insuffisante.

Le modèle de simulation étant validé à travers les deux applications précédentes, d'autres tests devront être réalisés afin d'avoir une connaissance plus poussée de l'effet des différents paramètres d'écoulement sur le comportement de la pollution dans une rivière.

Le polluant est considéré jusqu'à présent comme chimiquement non réactif, nous essayerons dans la section suivante d'appliquer le programme de calcul pour simuler l'effet de la dégradation biochimique sur l'évolution de la concentration du polluant le long du canal.

## 6- Transport de pollution avec réaction

Il sera donc très intéressant de s'attarder sur l'effet de la dégradation biochimique pouvant avoir lieu sur le plan pratique. Nous allons donc prendre en compte le terme source dans l'équation de transport de la pollution ( $S_\phi$ ) évoqué dans le chapitre précédent (paragraphe 1.3.3). Ce terme a été exclu de toute considération pour l'ensemble des applications abordées jusqu'ici.

Cela paraît raisonnable pour beaucoup de problèmes en hydraulique fluviale. Néanmoins il existe un certain nombre de problèmes où l'ingénieur hydraulicien se trouve confronté à des situations où la substance polluante transportée est chimiquement non conservative ; dans un tel cas, le mélange est le siège d'une transformation dans sa composition.

Afin de prendre en charge le phénomène de la biodégradation, le terme source dans l'équation de transport est généralement substitué par une fonction linéaire de la concentration  $C$  (Graf & Altinakar, 1996), (Masbernat & Chaussavoine, 1979):

$$S_c = \pm K_r C \tag{V.4}$$

où,  $(K_r, C)$  est le terme de réaction biochimique du premier ordre, exprimant le taux avec lequel une substance active augmente (+) ou diminue (-) par réaction,  $K_r$  est un coefficient de réaction de la substance dans le mélange, en dimension  $[1/T]$ .

L'équation de transport de la pollution devient donc :

$$\frac{\partial CU}{\partial x} + \frac{\partial CV}{\partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial y} D_c \frac{\partial C}{\partial y} \right) \pm K_r C \quad (\text{V.5})$$

Cette équation peut être utilisée pour étudier le pouvoir auto-épurateur des rivières qui reçoivent des eaux usées.

Un cours d'eau a une certaine capacité d'absorption des matières organiques polluantes ; ce sont les micro-organismes épurateurs qui assurent la dégradation de certains polluants non conservatifs. Pour effectuer cette tâche, la source principale de l'énergie de ces organismes provient de l'oxygène dissous dans le milieu aquatique. C'est ainsi que la concentration en oxygène dissous dans l'eau est habituellement considérée comme un critère important de la qualité des eaux de rivières.

En cas de manque d'oxygène dissous, les micro-organismes anaérobiques empruntent l'oxygène nécessaire à des substances telles que les nitrates et les sulfates et provoquent des odeurs nauséabondes.

L'équation de transport de la concentration de demande biochimique en oxygène  $C_{(DBO)}$ , constitue un moyen de prédiction de la quantité d'oxygène dissous qui est absorbée par les micro-organismes pour opérer la dégradation des matières organiques contenues dans les eaux usées .

La mesure de la concentration initiale de la DBO ( $C_{0 (DBO)}$ ) permettra de simuler la réponse du milieu aquatique quant à la dégradation progressive de cette concentration le long du cours d'eau en tenant compte du coefficient de dégradation  $K_r$  dans le mélange .

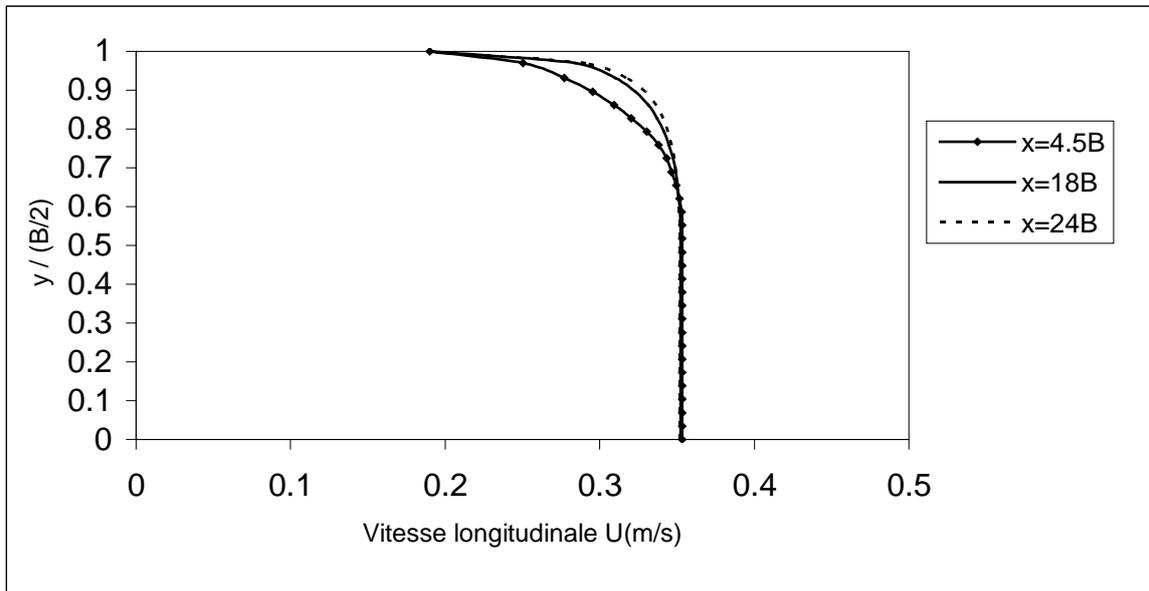
La détermination du coefficient  $K_r$  a fait l'objet de plusieurs travaux expérimentaux, quelques valeurs indicatives de  $K_r$ , extraites de l'ouvrage de Graf W. H. et Altinakar M. S. (Graf & Altinakar, 1996), ont été reprises sur le tableau (V.1) représenté ci-après.

**Tableau V.1:** Coefficient de réaction des matières organiques contenues dans les eaux usées et non usées:

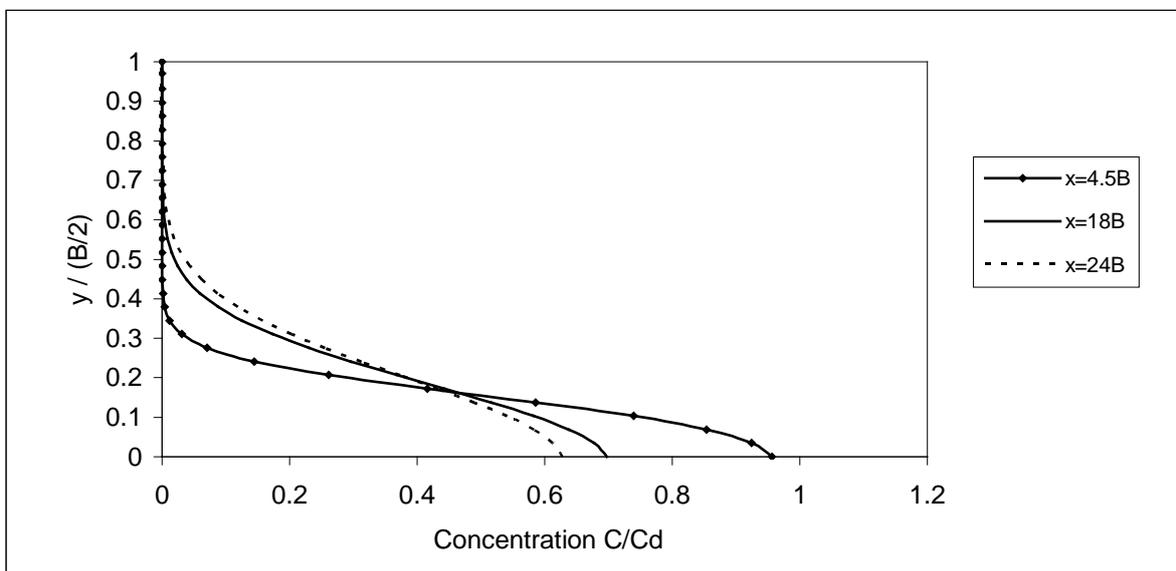
Qualité de l'eau usée	$K_r$ [ 1 / j ]	$C_{0(\text{DBO})}$ [ mg / l ]
Eau usée chargée	0.39	250
Eau usée peu chargée	0.35	150
Eau usée épurée	0.12-0.23	15 à 75
Eau de consommation	< 0.12	< 1

Afin de simuler le transport de la pollution avec réaction, nous réalisons l'introduction d'une eau usée chargée d'une concentration initiale en DBO  $C_0=250$  mg/l avec un coefficient de dégradation  $K_r = 0.39$  1/j  $= 4.513 \cdot 10^{-6}$  1/s , au centre du canal rectangulaire. Nous considérons ainsi que l'écoulement dans lequel est injectée la substance polluante est strictement identique à celui employé pour le premier cas test.

Les résultats de simulation de l'évolution de la concentration le long de la rivière sont illustrés graphiquement sur la figure (V-18). Nous retrouvons sur cette figure le phénomène de dégradation de la concentration initiale ( $C_0 = 250$  mg/l) sous l'effet de la convection et de la diffusion d'une part et de la réaction biochimique d'autre part. Comparativement aux résultats de simulation du premier cas test établi dans les mêmes conditions d'écoulement et dont le polluant est chimiquement non réactif, nous constatons que l'effet du transport convectif et diffusif est prépondérant; l'influence de la réaction ne pourra être significative que dans les zones lointaines du point de décharge (effet cumulatif).



**Figure V-17:** Evolution de la vitesse longitudinale (3<sup>ème</sup> cas test)



**Figure V-18:** Evolution de la concentration (3<sup>ème</sup> cas test)

## Conclusion

D'après les résultats obtenus dans ce chapitre, on constate que notre modèle constitue un outil efficace de prédiction du comportement d'une pollution dans une rivière. Toutefois, la validation réelle du modèle ne pourra s'effectuer sans une comparaison avec des mesures expérimentales de concentration.

De surcroît, même si nous avons pu avoir une première idée grâce aux différents tests effectués, le programme informatique que nous avons élaboré offre la possibilité d'étudier l'effet d'autres paramètres sur le comportement de la pollution tel que le lieu d'injection du polluant.

Bien évidemment, ces tests ne constitueront qu'une base théorique dans la mesure où l'effet de ces paramètres pourra être différent suivant le type de géométrie associé à la rivière.

Dans la dernière application, nous n'avons pas impliqué tous les aspects de la réaction biochimique pouvant avoir lieu dans les cours d'eau naturels, néanmoins une approche similaire à celle adoptée pour tenir compte de la biodégradation des matières organiques dans l'équation de transport de la DBO peut être appliquée pour la simulation des autres phénomènes de réaction pouvant influencer le bilan total de l'oxygène dissous dans le milieu aquatique (oxydation biochimique, décomposition des dépôts de fond, respiration des boues et plantes aquatiques, ....) sachant que la plus part de ces processus peuvent être modélisés selon une fonction de réaction du premier ordre.

## Conclusion Générale

L'étude de l'évolution de pollution dans un milieu aquatique présente à notre époque, un grand intérêt pour les gestionnaires de l'environnement. Les conséquences des rejets polluants dans les rivières sont parfois très graves.

Les simulateurs numériques constituent un outil capable de prévoir la progression de la pollution dans le milieu aquatique afin d'anticiper les mesures à appliquer et limiter la dégradation de l'écosystème. Dans cette optique, le modèle numérique reconstitue les différents mécanismes présents dans le milieu.

En effet, deux phénomènes interviennent dans le transport des substances polluantes dans la rivière :

- Une convection provoquant le déplacement des nuages polluants sous l'effet de la vitesse longitudinale de l'écoulement ;
- Une diffusion provoquant l'écrasement de la courbe de la concentration maximale, sous l'effet de la turbulence engendrée dans le milieu.

L'effet des réactions biochimiques intervient dans le transport des polluants non conservatifs. La majorité des phénomènes de réactions biochimiques influençant le bilan total de la pollution dans un cours d'eau, peuvent être modélisés selon une fonction de réaction du premier ordre qui doit être impliquée dans le terme source de l'équation de transport de la matière polluante.

La résolution des équations de transfert de la mécanique des fluides, traduisant les échanges dans les eaux de surface, permet de caractériser l'évolution de l'écoulement en déterminant la variation des caractéristiques hydrodynamiques aux différents points du domaine de l'écoulement à surface libre.

L'effet de la turbulence qui se manifeste dans le bilan global du transport de concentration, peut être simulé par la détermination de la viscosité et de la diffusivité turbulentes impliquées dans les équations de transport. Le simulateur numérique que nous avons élaboré offre la possibilité de quantification de ces deux paramètres aux différents points du maillage résultant du découpage du domaine de calcul.

Bien que le modèle bidimensionnel ne tient pas compte de l'effet des courants secondaires et de la stratification dans le canal, ce type de modèle constitue un outil de simulation économique et efficace, sachant que l'approche dont nous avons adopté tient compte de la variation spatiale des paramètres de la turbulence engendrée dans le milieu où l'efficacité et la représentativité du modèle ( $k-\varepsilon$ ) a été largement prouvée.

Le présent travail constitue une initiation à la recherche visant la prédiction du comportement des écosystèmes aquatiques. Un apport des chimistes et spécialistes en génie de l'environnement, dans une approche pluridisciplinaire, permettra certainement d'élargir l'applicabilité du programme informatique élaboré par nos soins et de résoudre conséquemment beaucoup de problèmes ayant trait aux interactions entre la mécanique des fluides et l'environnement.

## Bibliographie

- Balland, P. & Srae, A. (1985). «Modèle d'autoépuration en rivière-régime permanent – Application à l'I11 Alsace». Trib.Cebedeau N°498,38 et 39, pp 31-44.
- Berreksi, A. (1998). «Simulation des écoulements à surface libre dans des canaux à faible et forte pente à géométrie variable». Thèse de magister, E.N.P, 157 pages.
- Boussoum (2006). «Simulation numérique de la pollution dans les écoulements à surface libre». Thèse de magister, E.N.P.
- Buil, N. (1999). «Modélisation tridimensionnelle du transport de polluants dans les écoulements à surface libre». Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon1, France, 299 pages.
- Carlier, M. (1972). «Hydraulique générale et appliquée». Editions Eyrolles, Paris., 665 pages.
- Cederwall, K. (1967). «Tracer studies on turbulent diffusion and dispersion». Cong-Inter-IAHR.
- Chaussavoine, C. (1979). «Contribution à la modélisation d'écosystèmes aquatiques ». Thèse de Docteur Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 128 pages.
- Coantic, M. (1973). «Quelques commentaires sur les équations générales de la turbulence océanique». Journal de Mécanique vol 12 N°2, pp 197-223.
- Djabelkhir, K. (2010). «Simulation numérique de dispersion d'un polluant actif dans un canal par la méthode des différences finies». Thèse de magister, E.N.P.
- Demuren, A. O. & Rodi, W. (1983). «Side discharges into open channels: Mathematical model». Journal of Hydraulic Engineering, vol.109, N°12, pp 1707-1722.
- Edeline, F. (1996). «Modules biologique immergés pour assister l'autoépuration des rivières ». Journée d'étude Cebedeau- I.A.W.P.R.C.
- Elata, C. & Laurel, M. (1967). «On the theory of longitudinal dispersion». I.AHR 17.
- Elder, J. W. (1959). «The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow». Journal of fluid Mechanics, vol 5 par-4.
- Fabre, J. & Ramany Bala, P. (1980). «Equations générales de transfert de masse, de quantité de mouvement et d'énergie dans les eaux de surface». Ann. Univ. Abidjan, série c, tome XVI, 99 pages.
- Fisher, H. B. (1967). «Analytic prediction of longitudinal dispersion coefficients in natural streams». Cong –Inter –IAHR.
- Glass, J. & Rodi, W. (1982). «Higher order numerical scheme for scalar transport». Computeur

- Methods In Applied Mechanics and Engineering- 31, pp 337-358.
- Graf, W. H. & Altinakar, M. S. (1996). «Hydraulique fluviale». Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Tome II, 379 pages.
- Holley, F. N. & Preissman, A. (1977). «Accurate calculation of transport in two- dimensions». Journal of Hydraulic Division, vol 103, Hy 11, pp 13336-13348.
- Hug, M. (1975). «Mécanique des fluides appliquée aux problèmes d'aménagement et d'énergétiques ». Editions Eyrolles, Paris.
- Kachiashvili, K., Gordiziani, D., Lazarov, R. & Melikdzhanian, D. (2007). «Modeling and simulation of pollutants transport in rivers». Applied mathematical modelling 31, pp 1371-1396.
- Kremenetski, N., Schterenliht, D., Alychev, Y., Yakovleva, L. (1980). «Hydraulique». Editions Mir-Moscou, 324 pages.
- Laroui, D. (1994). «Contribution à l'étude bidimensionnelle de la dispersion de polluants dans les milieux à découvert par la méthode simple modifiée de Patankar ». Thèse de magister E.N.P, 142 pages.
- Lauder, B. E. & Spalding, D. B. (1974). «The numerical computation of turbulent flows». Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering- 3, pp269-289.
- Lebreton, J. C. (1974). «Dynamique fluviale ». Editions Eyrolles.
- Leonard, B. P. (1979). «A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation». Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering-19, pp 59-98.
- Leschziner, M. A. & Rodi, W. (1979). «Calculation of strongly curved open Channel flow». Journal of Hydraulic division, vol 105, Hy 7, pp 1297-1314.
- Lesieur, M. (1994). « La turbulence ». Presses Universitaires de Grenoble, 239 pages.
- Lyn, D. A. & Rodi, W. (1990). «Turbulence measurements in model settling Tank». Journal of Hydraulic Engineering, vol 116 N°1, pp 3-21.
- Masbernat, L. & Chaussavoine, C. (1979). «Pouvoir auto-épurateur des eaux superficielles». Fondements théoriques du traitement biologique des eaux par H .Roques, volume II- Technique et documentation, pp 1766-1813.
- Mattingly, G.E. (1977). «Experimental Study of Wind Effects on Reaeration». Journal of Hydraulic Division, Vol 103, Hy 3.
- Mcbride, G. B. & Rutherford, J. (1984). «Accurate Modelling of river pollutant transport». Journal of Environmental Engineering, vol 110 N°4, pp 808-827.
- Mcguirk, J. J. & Rodi, W (1979). «A depth averaged mathematical model for the near discharges into open channel flow». Journal of Fluid Mechanics, vol 86 part 4, pp 761-781.

- Menigault, T. & Dumay, H. (1990). «Modélisation mathématique de l'hydrodynamique et du mouvement de la pollution en système lagunaire ». La houille blanche N° 6, pp 409-416.
- Miller, A. & Richardson, E.V. (1974). «Diffusion and Dispersion in open channel flow». Journal of Hydraulic Division, vol 100, Hy 1.
- Naot, D. & Rodi, W. (1982). «Calculation of secondary currents in channel flow». Journal of Hydraulic Division, vol 108, Hy 8, pp 17-269.
- Patankar, S.V. & Spalding, D.B. (1972). «A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three –dimensional parabolic flows ». International Journal of Heat and Mass transfer vol.15, pp 1787-1806.
- Patankar, S.V. (1980). «Numerical Heat transfer and fluid flow». Hémisphère Publishing corporation, USA, 159 pages.
- Piasecki, M. & Katopodes, N. D. (1997). «Control of contaminant releases in Rivers». Part I and II. J. of Hydraulic Engineering 123, N°6, pp 486-503.
- Plate, J. & Eloubaidy, F. (1972). «Wind shear turbulent and reaeration coefficient». Journal of Hydraulic Division
- Poojitha, D.Y. & Hung Tao Shen. (1994). «Modelling river oil spills». Journal of Hydraulic Research, vol 32, pp 765-781.
- Pratap, V. S. & Spalding, D.B. (1976). «Fluid flow and heat transfer in three dimensional ducts flows». International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 19, pp 1183-1188.
- Rastogi A.K. & Rodi, W. (1978). «Prediction of heat and Mass transfer in open channels». Journal of the Hydraulics Division, Volume 104, N°3, pp 397- 420.
- Rodi, W. (1980). «Turbulence models and their application in hydraulics». A State of the Art Review, University of Karlsruhe. Karlsruhe, Germany, 115 pages.
- Rodi, W. (1995). «Impact of Reynolds average modelling in hydraulics». Proc. Royal. Society. London, pp 141-164.
- Saatdjian, E. (1993). «Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques». Polytechnica, 356 pages.
- Schistel, R. (1993). «Modélisation et simulation des écoulements turbulents». Editions Hermes, Paris.
- Smith, R. (1982). « where to put a steady discharge in a river». Journal of Fluid Mechanics, vol 115, pp 1-11.
- Yang, J. Y. & Hsu, C. A. (1993). «Computations of free surface flows». Journal of Hydraulic Research, vol 31, N°3, pp 403-413.
- Yu, L. R. & Righetto, M. (1998). «Tidal and transport Modeling by using turbulence k-w Model». J. of Environmental Engineering, vol 124, N°3, pp 211-220.