

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE

THESE DE MAGISTER

Présentée par :

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

RAYASSE Abdelkrim  
Ingénieur d'état en Hydraulique  
Diplômé de l'E.N.P

thème:

**ETUDE SYSTEMATIQUE DE CONFIGURATIONS  
SUPERSONIQUES DE TUYERES  
DE PROPULSION**

Soutenu devant le Jury composé de :

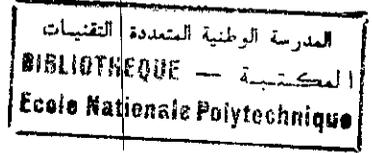
Président :	M' A.KETTAB	Professeur	E.N.P
Examineurs :	M' M.DAMOU	Maître de Conférences	U.de BLIDA
	M' A.BILEK	Chargé de Cours	E.N.P
	M' M.BOUDJEMA	Chargé de Cours	E.N.P
Rapporteur :	M' A.HADDAD	Chargé de Cours	C.U de GUELMA

MARS 1996

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**  
**DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE**  
**THESE DE MAGISTER EN HYDRAULIQUE**

Présentée par: Mr RAYASSE ABDELKRIM

Directeur de thèse: Dr HADDAD ABDELKRIM



**ملخص:**

تتناول هذه الأطروحة دراسة رقمية، تهتم بجانبين : الأول تمدد غازات الإحتراق داخل الناشر دولافال، أما الثاني فيتعلق بمقارنة أشكال المتباعد فوق الصوتي، الممثلة بالمعادلات ( كثير حدود من الدرجة الأولى، الثانية والثالثة ، الأسية)، كذا حساب إمتيازات كل شكل (عدد ماخ، الدافعة) ومقارنة النتائج المتحصل عليها.

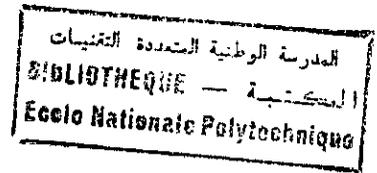
**Résumé:**

Une étude numérique s'intéressant à la détente des gaz de combustion dans une tuyère de DE Laval est initiée. La partie divergente est simulée par différentes configurations (Polynômes du 2<sup>nd</sup> et 3<sup>eme</sup> degré, droite et exponentielle), en dernier lieu une comparaison des différents résultats obtenus en termes de performances (Poussée, Nombre de Mach).

**Abstract:**

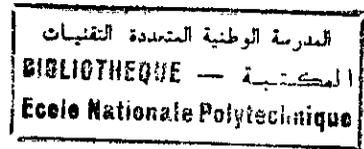
The object of this work consists on a numerical study of gas expansion in Laval nozzle. The supersonic part is simulated with different configurations (Second and third polynomial degree, Conical, Exponential). The results obtained are compared in terms of performance (Thrust, Mach number).

# SOMMAIRE



	Page
- Résumé	3
- Remerciements	4
- Notations	5
<b>Chapitre 1 : Introduction</b>	<b>7</b>
<b>Chapitre 2 : Concepts généraux de conception de tuyères supersoniques de propulsion</b>	
2.1- Géométrie des tuyères	10
2.2- Performances d'une tuyère	13
2.3- Facteurs influençant les performances	16
2.4- Méthode des caractéristiques	19
2.5- Développement de la méthode	22
<b>Chapitre 3 : Calcul de l'écoulement transsonique</b>	
3.1- Introduction	35
3.2- Développement de la méthode de Sauer	35
3.3- Développement de la méthode de Kliegel & Levine	39
3.4- Applications (Cas d'étude)	41
3.5- Résultats et Comparaisons	42
<b>Chapitre 4 : Calcul de l'écoulement supersonique</b>	
4.1- Description du code de calcul	45
4.2- Simulation de la paroi (Subroutine BOUNDY)	55
<b>Chapitre 5 : Applications</b>	
5.1- Introduction	59
5.2- Résultats et commentaires	59
<b>Chapitre 6 : Conclusion générale et recommandations</b>	<b>70</b>
- Références bibliographiques	72
- Annexe A : Méthode d'Euler prédicteur-correcteur	74
- Annexe B : Solution transsonique de Kliegel & Levine	76

# Résumé



Une étude numérique s'intéressant à deux aspects liés à la détente des gaz de combustion dans une tuyère de De Laval est initiée. Le premier aspect s'intéressant à l'écoulement transsonique se réalisant au col est décrit par la théorie des petites perturbations ainsi que par un développement en série. Les deux approches sont analysées, appliquées et comparées.

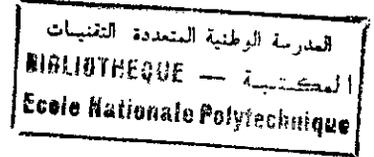
Le calcul de l'écoulement supersonique se tenant dans la partie divergente de la tuyère et réalisé grâce à l'application de la méthode des caractéristiques représente le second aspect. Cause de l'augmentation de la vitesse des gaz de combustion et par conséquent de la poussée du moteur, cette partie a été simulée par différentes configurations (telles que droite, polynôme du second degré, polynôme du troisième degré et exponentielle). Appliquées aux tuyères équipant les premiers étages des propulseurs des engins de recherche "BERENICE" et "ANTARES" de l'Office National d'Etudes et Recherches Aérospatiales (ONERA, France), la détente des gaz de combustion, la vitesse développée ainsi que les performances réalisées sont présentées et comparées.

Les résultats obtenus montrent une prépondérance des configurations simulées par des polynômes sur celles simulées par une droite ou une exponentielle.

**MOTS CLES:** - Tuyères de propulsion - écoulement

supersonique - méthode des caractéristiques.

# Remerciements



Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à :

- Mon directeur de thèse, D<sup>r</sup> HADDAD ABDELKRIM, pour m'avoir soutenu tout au long de mon travail et pour les conseils qu'il m'a prodigués, qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance.

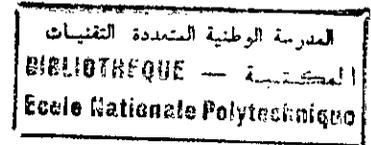
- Aux membres du jury, qui me feront l'honneur de juger cette thèse :

M <sup>r</sup> A. KETTAB	Président
M <sup>r</sup> M. DAMOU	Examineur
M <sup>r</sup> A. BILEK	Examineur
M <sup>r</sup> M. BOUDJEMA	Examineur

# NOTATION:

## 1. Système de coordonnées:

- x : Coordonnée axiale,
- y : Coordonnée radiale,
- u : Vitesse axiale,
- v : Vitesse radiale.



## 2. Lettres Latines:

- a : Vitesse du son,
- A : Section,
- B : Coefficient,
- C : Coefficient,
- D : Coefficient,
- F : Forces extérieures agissant sur le système,
- g : Accélération de la pesanteur,
- h : Enthalpie,
- I : Impulsion,
- K : Conductivité cinématique moléculaire,
- m : Débit en masse,
- M : Nombre de Mach,
- P : Pression,
- Q : Energie interne générée,
- qr : Vecteur flux de rayonnement thermique,
- R : Constante spécifique des gaz,
- T : Température,
- V : Vitesse,
- Vrs: Vitesse effective.

## 3. Notations Grecques:

- $\alpha$  : Constante donnée par Sauer ou Angle,
- $\gamma$  : Rapport de chaleur spécifique,
- $\sigma_1, \sigma_2$  : Coefficients dans les équations de compatibilité et caractéristiques,
- $\lambda_+, \lambda_-$  : Pentes respectives des caractéristiques C+ et C- ,
- $\rho$  : Densité ou rayon de courbure,
- $\theta$  : Angle,
- $\phi$  : Fonction de dissipation mécanique.

## 4. Indices:

- a : Ambiante ou point d'attache,
- cc : Chambre de combustion,
- d : Décharge,
- f : Poussée,
- p : Chaleur spécifique à pression constante,
- s : Sortie,
- t : Col,
- td : Aval au col,
- tu : Amont au col,
- v : Volume,
- w : Paroi.

# CHAPITRE 1

## Introduction

Les progrès observés ces dernières années dans le domaine de la propulsion en général et la propulsion aérothermique en particulier sont étroitement liés aux efforts et développements réalisés afin de rendre plus précise l'analyse des phénomènes aérothermodynamiques se produisant dans une tuyère de propulsion.

Pendant longtemps, cette dernière était considérée comme un organe "annexe" dont le rôle se limitait à assurer la détente des gaz de combustion assurant ainsi une poussée. La nécessité d'atteindre des nombres de Mach supérieurs à 2 et de transporter des charges de plus en plus importantes (satellites, organes de station orbitale etc.) qu'introduisit la conquête de l'espace fit apparaître clairement que la faisabilité de tels projets ne pouvait être assurée que si les performances optimales étaient obtenues de tous les éléments du moteur notamment celui qui en assurait la propulsion : la **tuyère**. En effet, la poussée d'un moteur propulsif dépend principalement et essentiellement du moment imparti aux gaz de combustion, acquis grâce à leur déversement dans la tuyère. Durant leur passage, les gaz sont accélérés d'une manière continue de vitesses subsoniques à des vitesses hautement supersoniques.

Afin de mieux suivre le processus d'écoulement des gaz, une tuyère de DE LAVAL est généralement divisée en trois parties : la section convergente subsonique, le col et la section divergente supersonique.

Depuis plusieurs années, la partie supersonique reçoit une attention considérable. La détente des gaz de combustion dans cette section augmente leur vitesse et par conséquent la poussée du moteur. Cette vitesse additionnelle dépend exclusivement de la configuration du divergent et de l'aire de la section de sortie.

En 1958, Rao [13] réussit à concevoir des tuyères performantes dont le contour est déterminé grâce à des calculs variationnels. Aucune contrainte n'est imposée sur la forme de la configuration  $y=y_w(x)$  sauf qu'elle doit être une ligne de courant. L'inconvénient majeur de cette approche réside dans le fait que si le contour de la tuyère ou le modèle regissant l'écoulement sont modifiés, l'analyse ainsi que le programme de calcul devront être refaits.

En spécifiant le contour du divergent comme un polynôme du second degré et en employant des méthodes de programmation non linéaire, Hoffman & Allman [9] réussirent à concevoir des tuyères dont les performances se comparaient à celles produites par Rao [13]. Leur recherche conclut que la simulation par un polynôme du second degré donne des résultats satisfaisants. L'utilisation de polynômes de degré plus important pouvant être nécessaires pour des conditions différentes de travail.

HADDAD [6] presenta une méthode de conception d'une tuyère en 3-D de forme complexe et compara les résultats numériques obtenus à des tests expérimentaux tout en étudiant l'influence de la forme de la section de sortie sur les performances de la tuyère .

La présente étude s'intéresse aux différentes configurations (conique, cloche) que peut revêtir une tuyère ainsi qu'aux différentes équations ( droite, polynômes de différents degrés et exponentielle) qui peuvent la simuler. La méthode des caractéristiques [16] et celle basée sur les petites perturbations [15] et développements en série [7,10] sont utilisées afin de calculer les écoulements supersoniques et transsoniques respectivement.

La thèse telle que présentée comporte principalement six chapitres dont le premier est une introduction, le second chapitre introduit les concepts généraux de conception de tuyères supersoniques de propulsion. Le troisième chapitre développe les méthodes de calcul de l'écoulement transsonique ainsi qu'une comparaison entre la méthode de (Sauer, 1947) et celle de (Kliegel & Levine, 1969).

L'écoulement supersonique utilisant la méthode des caractéristiques telle que présentée par (Zucrow & Hoffman, 1976) et son application aux différentes configurations simulées représente le quatrième chapitre. L'application de cette méthode à des cas de tuyères utilisées par des engins de recherche aérospatiaux forme le cinquième chapitre en commentant les résultats. Une conclusion générale et des recommandations pour d'éventuels travaux futurs clôturent la thèse.

## **CHAPITRE 2**

**Concepts généraux de conception de tuyères  
supersoniques de propulsion**

## 2.1 Géométrie des tuyères

### 2.1.1 Tuyère conique

La forme géométrique la plus simple d'une tuyère divergente est celle d'un cône tronqué comme cela est montré sur la (Figure 2.1).

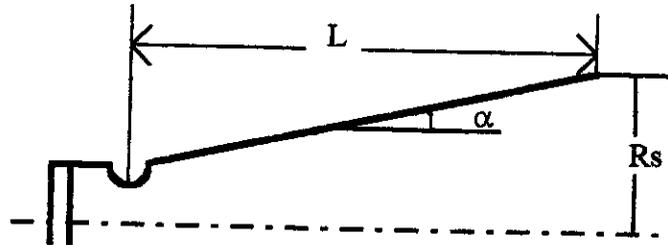


Figure 2.1 Tuyère conique

La vitesse de sortie est essentiellement égale à celle d'un écoulement unidimensionnel correspondant à un rapport de section donnée. L'écoulement n'est pas totalement axial ce qui engendre une diminution de poussée due à la divergence de l'écoulement .

(Malina, 1940) a montré que le coefficient de poussée est égal à celui d'un écoulement unidimensionnel multiplié par un coefficient  $\lambda$ .

Le coefficient de poussée d'une tuyère déchargeant dans le vide est :

$$C_f = \frac{\lambda * m * V_s + P_s * A_s}{P_{cc} * A_t}$$

où :

$$\lambda = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

Dans le cas de petits moteurs propulsifs, il est beaucoup pratique d'utiliser des tuyères coniques à cause de la simplicité du procédé de fabrication.

### 2.1.2 Tuyère profilée

La réduction de la poussée d'une tuyère conique devient importante en augmentant l'angle de divergence  $\alpha$  ce qui réduira sa longueur. En contournant les parois de la tuyère, l'écoulement peut être dirigé axialement et la perte en poussée en sera réduite (Figure 2.2).

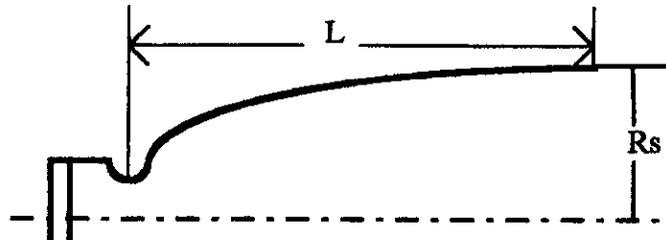


Figure 2.2 Tuyère profilée

Une approche directe pour la conception du contour d'une tuyère a été en premier lieu proposée par (GUDERLY et HANTSH, 1955) qui ont formulé le problème pour le calcul de la section de sortie et le contour de la tuyère, qui fournit une poussée optimale en spécifiant la longueur et la pression ambiante. En utilisant un calcul variationnel, le problème du champ d'écoulement à la sortie nécessaire pour délivrer une poussée optimale a été résolu.

Cause de la nature complexe de la solution présentée, le contour donnant une poussée optimale par les tuyères de propulsion ont été largement négligés jusqu'en 1958.

(Rao, 1958) En reformulant le problème a trouvé une approche simple pour le calcul du contour, en considérant la longueur de la tuyère, la pression ambiante et les conditions d'écoulement au voisinage du col comme conditions gouvernantes sous lesquelles la poussée pourrait être maximisée. En assumant l'écoulement isentropique et en utilisant la méthode des caractéristiques le contour de la tuyère donnant un écoulement optimal a été construit.

### 2.1.3. Tuyère annulaire

Ce type de tuyères est largement utilisé dans les turbomachines . La section au col est un anneau formé entre un bouchon central (central plug) et une conduite extérieure en aval du col. Les gaz de combustion se détendent dans un anneau divergent, formé entre le bouchon central convergent et la conduite divergente (Figure 2.3).

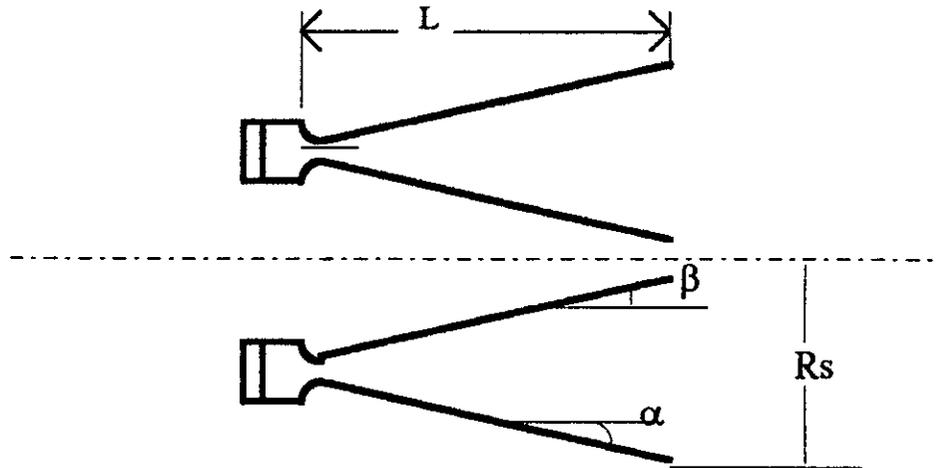


Figure 2.3 : Tuyère annulaire

### 2.1.4. Tuyère auto-ajustable

Le processus de détente des gaz de combustion dans ce type de tuyère est directement ou indirectement régulé par la pression ambiante, donc l'écoulement des gaz s'ajuste de lui même pour être conforme aux conditions extérieures. Ces tuyères sont classées en deux types :

- Tuyères type bouchon
- Tuyères type détente-compression

### 2.1.4.1. Tuyère type bouchon

Le col de la tuyère est localisé comme un anneau dans le diamètre extérieur, d'où l'issue des gaz de combustion dans un sens interne (Figure 2.4). Au bord extérieur de l'anneau, la détente des gaz se fait d'une manière brusque à la pression ambiante.

### 2.1.4.2 Tuyère type détente-compression

Une chambre de combustion compacte avec la section d'anneau au col, située près de la ligne centrale de la tuyère est construite (Figure 2.5).

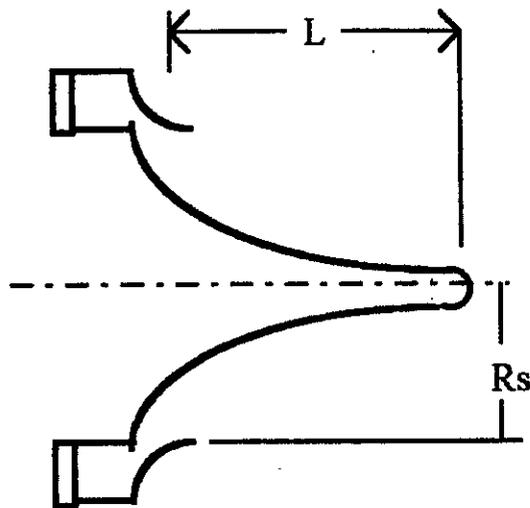


Figure 2.4 : Tuyère type bouchon

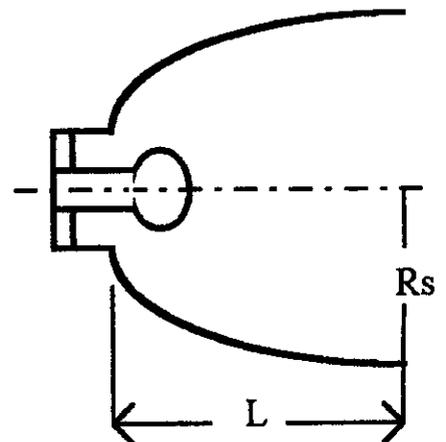


Figure 2.5 : Tuyère type détente compression

## 2.2. Performances d'une tuyère

Le rôle d'une tuyère consiste à transformer l'énergie calorifique dégagée par la combustion en énergie cinétique utilisable pour la propulsion. L'étude de l'écoulement des gaz incandescents dans une tuyère conduit à définir un certain nombre de paramètres caractéristiques qui constituent une base de comparaison entre les différents types de tuyères.

### 2.2.1. Poussée

La poussée délivrée par la tuyère est fonction non seulement de la vitesse d'éjection des gaz de combustion mais aussi de la différence entre les pressions de sortie et ambiante. L'application de la conservation du mouvement permet d'exprimer la poussée infinitésimale développée à travers une section annulaire d'épaisseur  $dy$  comme :

$$dF = \left[ \rho_s * V_s^2 + (P_s - P_a) \right] * 2\pi * y dy$$

La poussée totale est la somme de toutes celles infinitésimales s'exerçant sur la section annulaire formant la section de sortie de la tuyère :

$$F = \pi * \sum_i \left[ \rho_{s_i} * V_{s_i}^2 + (P_{s_i} - P_a) \right] \left[ y_{s_{(i+1)}} - y_{s_i} \right]^2$$

### 2.2.2. Coefficient de poussée

Il est pratique d'introduire un coefficient de poussée adimensionnel  $C_f$  défini comme le rapport de la poussée au produit pression dans la chambre de combustion et section au col :

$$C_f = \frac{F}{P_{cc} * A_t}$$

C'est un coefficient qui caractérise la détente des gaz dans la tuyère (Barrère et al, 1956).

### 2.2.3. Vitesse caractéristique

La vitesse caractéristique  $c^*$  d'une réaction est définie par le rapport du produit pression dans la chambre de combustion et section au col, au débit massique de la tuyère.

$$c^* = \frac{P_{cc} * A_t}{m}$$

C'est un paramètre qui n'est fonction que des caractéristiques de la réaction utilisée (en particulier de sa température de combustion  $T_{cc}$  et de son poids molaire  $M$ ) et donne une bonne indication sur l'efficacité de la combustion (Barrère & all, 1956).

#### 2.2.4. Vitesse effective

La vitesse effective est la vitesse de sortie de la tuyère exactement adaptée, qui donnerait la poussée  $F$  avec le débit massique  $m$  :

$$V_{\text{e}} = \frac{F}{m}$$

C'est un paramètre qui tient compte de la correction atmosphérique.

#### 2.2.5 Impulsion spécifique

L'impulsion spécifique  $I_s$  est définie comme le rapport de la poussée par le poids du combustible :

$$I_s = \frac{F}{m \cdot g}$$

L'impulsion  $I_s$  est fonction du fuel, de l'oxydant et du rapport de ces derniers et est utilisée pour la comparaison de différentes réactions.

#### 2.2.6. Impulsion totale

L'impulsion totale  $I$  est définie comme l'intégrale de la poussée  $F$  durant la totalité du temps de fonctionnement :

$$I = \int_0^t F dt$$

## 2.3. Facteurs influençant les performances

### 2.3.1. Effet de l'angle de divergence

En augmentant l'angle de divergence  $\alpha$  d'une tuyère conique de coefficient de détente constant cela va réduire sa longueur, son poids et diminuer les pertes par frottements.

Une série de mesures de poussée a été faite sur des tuyères ayant différents angles de divergence mais de mêmes section convergente, coefficient de détente et un changement brusque de direction au col (Fraser, 1955). Les poussées obtenues sont montrées sur la (Figure 2.6).

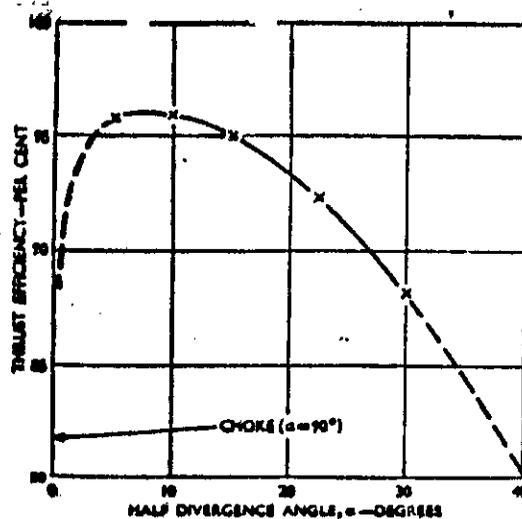


Figure 2.6 : Variation de la poussée en fonction de l'angle de divergence

On remarque que la tuyère la plus performante est celle ayant un angle de divergence de  $8^\circ$  équivalent à 95 % d'efficacité de poussée. Cet angle optimum diminue avec le rapport de section (Ashwood, 1950).

### 2.3.2. Effet du rayon d'entrée

La forme la plus fréquemment utilisée pour la partie convergente d'une tuyère est un arc circulaire. Dans le but de réduire la taille et le poids, le rayon d'entrée ne doit pas être très petit au risque de rendre la distribution des vitesses non uniforme dans la partie subsonique et favoriser ainsi la formation d'une couche limite turbulente et éventuellement une onde de choc près du col (Fraser, 1955).

Une série de mesures de poussée, de coefficients de décharge a été faite sur un nombre de tuyères d'angle de divergence de  $10^\circ$ , d'égaux coefficients de détente mais de différents rayons d'entrée (Figure 2.7).

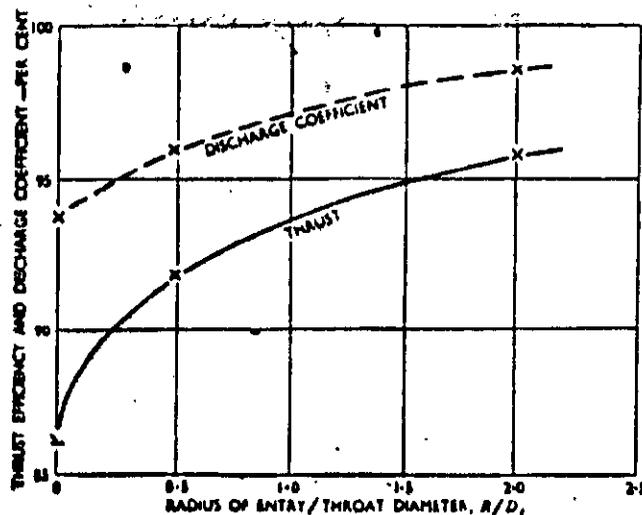


Figure 2.7 : Variation de la poussée en fonction du rayon d'entrée

D'après la (Figure 2.7) on remarque que la poussée diminue considérablement quand le rayon de courbure est très réduit, ceci est dû à la diminution du taux d'écoulement en masse. Une mauvaise forme d'entrée entraînera une distribution des vitesses au col non uniforme, ce qui cautionnera l'accélération des gaz dans la partie divergente.

### 2.3.3. Effet d'erreurs d'usinage

Dans le but d'évaluer les tolérances admises dans la fabrication de tuyères, une série de tuyères mal usinées ont été préparées et testées (Fraser, 1955). Des fautes observées incluaient :

- Surfaces mal finie
- Mauvais assemblage entre les sections du convergent et du divergent.

Les irrégularités ont été considérées comme celles les plus générées lors de l'usinage du profil de la tuyère. Une série de tuyères ont été testées et comparées à de mêmes types de tuyères conventionnelles bien usinées.

Il n'y a pas eu de différences notables sauf l'apparition d'un réseau de faibles ondes de choc tout au long du jet à cause de la mauvaise forme du col, ce qui a réduit la poussée.

En conclusion, les tuyères performantes doivent être usinées par des procédés standards d'engineering tout en prenant le soin de rendre la forme du col et la surface interne de la tuyère lisses. Par contre celles dans la partie subsonique n'ont pas une grande influence pourvu qu'ils ne vont pas restreindre l'écoulement au voisinage du col.

## 2.4. Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est une méthode utilisée dans la conception des tuyères supersoniques de propulsion. Avant de procéder à la description d'une telle méthode, il serait convenable de voir comment on décrit mathématiquement un phénomène physique qui est dans notre cas : Ecoulement d'un fluide compressible.

La description d'un écoulement se fait à l'aide des équations qui le régissent c'est à dire équations de conservation. L'état complet d'un fluide est déterminé si l'on connaît :

- Le champ de vitesse avec ses trois composantes  $u, v, w$ .
- La pression  $P$ .
- La température  $T$ .
- La densité  $\rho$ .

et ceci par rapport à un système de coordonnées arbitraires  $x, y, z$  et le temps  $t$ .

Le nombre de paramètres est de six nécessitant donc six équations pour résoudre le problème. Ces équations sont:

**Equation de continuité** : (conservation de masse)

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho V) = 0$$

**Equation de mouvement** : (Conservation de la quantité de mouvement)

$$\left( \frac{dV}{dt} + V * \text{grad}V \right) = F_v - \text{grad}P + \mu \Delta \vec{V}$$

**Equation d'énergie** : (conservation de l'énergie)

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} + \frac{dQ}{dt} + \phi + \nabla \cdot (K \cdot \nabla T) - \nabla \cdot q_r$$

où :

$$\phi = 2\mu \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} + \lambda (\nabla \cdot V)^2$$

**Equation d'état :** ( gaz parfait)

$$P = \rho RT$$

L'enthalpie h est liée à la température par la relation :

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = C_p \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

En associant les conditions aux limites et initiales, le système d'équations sera homogène. Ces équations étant en dérivées partielles du second ordre et non linéaires, ne possédant pas de solution analytique pour cela on procède à des simplifications par les hypothèses suivantes :

Nous considérons l'écoulement :

- bi-dimensionnel : (x,y)
- stationnaire : (d/dt = 0)
- non visqueux: ( $\mu = 0$ )
- non soumis à des forces extérieures: (X=Y=Z=0)

Nous aurons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \delta \frac{\rho v}{y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

où  $\delta$  est un paramètre permettant de décrire deux écoulements différents avec les mêmes équations :

$$\begin{aligned}\delta = 1 & \quad \text{écoulement axisymétrique} \\ \delta = 0 & \quad \text{écoulement plan}\end{aligned}$$

En assumant l'écoulement isentropique et donc irrotationnel (RHYMING, 1984) et en arrangeant les équations précédentes, nous obtiendrons l'équation de la dynamique des gaz pour un écoulement en régime stationnaire (Zucrow & al, 1976) :

$$(u^2 - a^2) \frac{\partial u}{\partial x} + (v^2 - a^2) \frac{\partial v}{\partial y} + 2uv \frac{\partial u}{\partial y} - \delta a^2 \frac{v}{y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$a = a(u, v) \quad (2.3)$$

Ces équations sont représentatives d'un écoulement **bi-dimensionnel, non visqueux et irrotationnel**. Leur forme est différente suivant que l'écoulement est subsonique ou supersonique. En effet, si l'écoulement est subsonique, les équations sont de type elliptique (la solution en un point considéré, dépend de la totalité des conditions entourant ce point, qu'elles soient en amont ou en aval).

Dans ce cas la méthode de relaxation est la plus adaptée à la résolution de ce système. Si l'écoulement est **supersonique** (ce qui nous intéresse), les équations sont du type **hyperbolique** (la solution en un point, ne dépend que des conditions en amont de celui-ci) et dans ce cas, les méthodes de résolution de pas à pas sont utilisables, entre autre la méthode des caractéristiques.

Les équations de forme hyperbolique se distinguent par le fait qu'il existe des directions caractéristiques dans le plan (x,y) le long desquelles la dérivée normale des variables dépendantes (dans notre cas u,v), peut être discontinue mais la vitesse reste continue. Le long de ces caractéristiques, les variables dépendantes satisfont une relation appelée : équation de compatibilité. Cette dernière constitue la clef de la méthode des caractéristiques.

La **méthode des caractéristiques** est utilisée parce qu'elle permet la réduction d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles en un système d'équations différentielles aux dérivées ordinaires qui est plus simple à résoudre. La précision de la méthode présente aussi un avantage non négligeable.

La dénomination : méthode des caractéristiques provient du fait qu'elle entreprend les calculs le long des caractéristiques qui sont représentées par les lignes de Mach, décrites par une équation différentielle aux différences totales. D'un point de vue physique, les caractéristiques représentent la direction de propagation d'une perturbation quelconque produite au sein de l'écoulement.

D'une manière rigoureuse, elles sont définies comme des courbes le long desquelles les équations aux dérivées partielles décrivant l'écoulement, se réduisent en une équation différentielle représentée par un "opérateur interne": l'équation de compatibilité.

## 2.5. Développement de la méthode

Les équations (2.1) et (2.2) étant couplées, doivent être résolues simultanément. Les équations caractéristiques et de compatibilité sont dérivées en multipliant ces dernières par les inconnues  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et en sommant :

$$\sigma_1 * (2.1) + \sigma_2 * (2.2) = 0 \quad (2.4)$$

En remplaçant (2.1) et (2.2) par leurs expressions respectives et en arrangeant nous aboutirons à :

$$\sigma_1(u^2 - a^2) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma_1(2uv) + \sigma_2}{\sigma_1(u^2 - a^2)} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + (-\sigma_2) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma_1(v^2 - a^2)}{-\sigma_2} \frac{\partial v}{\partial y} \right] - \sigma_1 \delta \frac{a^2 v}{y} = 0 \quad (2.5)$$

En assumant  $u(x,y)$  et  $v(x,y)$  continues on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Par identification avec (2.5), on obtient deux expressions :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\sigma_1(2uv) + \sigma_2}{\sigma_1(u^2 - a^2)} \\ \lambda &= \frac{\sigma_1(v^2 - a^2)}{-\sigma_2}\end{aligned}\quad (2.7)$$

En remplaçant (2.6) et (2.7) dans (2.5) et en multipliant par  $(dx)$  on aura :

$$\sigma_1(u^2 - a^2)du - \sigma_2 dv - \sigma_1 \delta \frac{a^2 v}{y} dx = 0 \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) représente l'équation de compatibilité pour le système d'équations (2.1 et 2.2). Elle est valable quand  $\lambda$  vérifie les équations (2.7), qui peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\sigma_1[(u^2 - a^2)\lambda - 2uv] + \sigma_2(-1) &= 0 \\ \sigma_1(v^2 - a^2) + \sigma_2(\lambda) &= 0\end{aligned}\quad (2.9)$$

Pour que ce système (2.9) possède une solution autre que la triviale, il est nécessaire que le déterminant de la matrice formée par les coefficients s'annule, soit :

$$\begin{vmatrix} (u^2 - a^2)\lambda - 2uv & -1 \\ v^2 - a^2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

donc:

$$\lambda^2(u^2 - a^2) - 2uv\lambda + (v^2 - a^2) = 0 \quad (2.10)$$

La solution de (2.10) donne :

$$\lambda_{\pm} = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{\pm} = \frac{uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) définit deux courbes dans le plan (x,y) qui sont les caractéristiques. Elles sont réelles si  $M > 1$ . Cette forme de l'équation caractéristique n'est pas pratique et on lui préfère une autre qui exprime les composantes de la vitesse en fonction de son intensité  $V$  et sa direction  $\theta$  (direction des lignes de courants). Dans ce cas le nombre de Mach est exprimé en fonction de l'angle de Mach ainsi :

$$\begin{aligned} u &= V \cos \theta \\ v &= V \sin \theta \\ \theta &= \text{Tan}^{-1}(v/u) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin^{-1}(1/M) \\ M &= 1/\sin \alpha \\ \text{Cotg } \alpha &= (M^2 - 1)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

En remplaçant (2.12) et (2.13) dans (2.11) et en appliquant les identités trigonométriques, on obtient :

$$\lambda_{\pm} = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{\pm} = \text{tg}(\theta \pm \alpha) \quad (2.14)$$

Cette équation est illustrée par la (Figure 2.8):

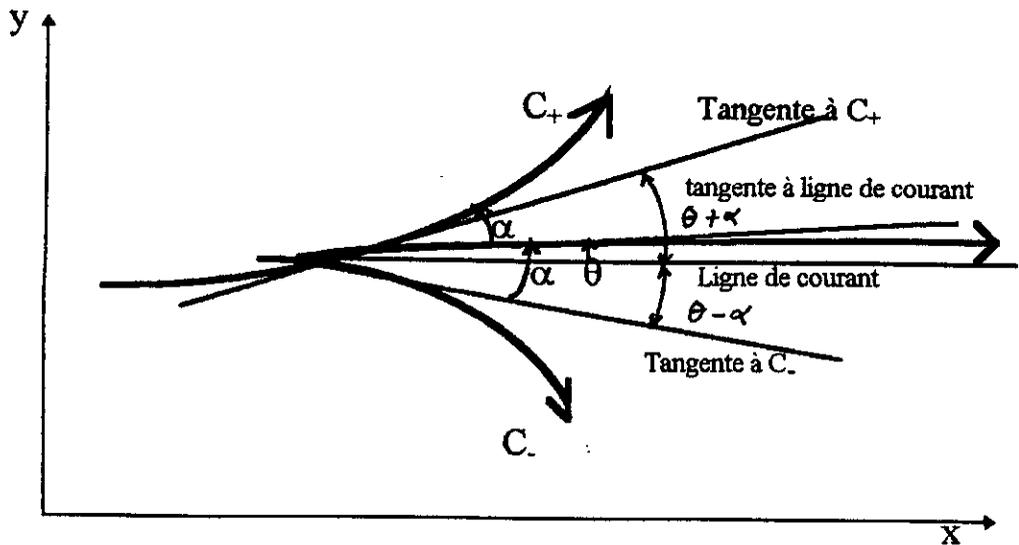


Figure 2.8 : Schéma illustré des caractéristiques

Une expression finale pour l'équation de compatibilité (2.8) est obtenue en procédant à l'élimination des inconnues  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et en utilisant l'équation (2.7) ce qui donne:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_1 [(u^2 - a^2)\lambda - 2uv] \\ \sigma_2 &= -\sigma_1 \frac{v^2 - a^2}{\lambda} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ces équations ne sont pas indépendantes, en utilisant la première et en divisant par  $\sigma_1 \neq 0$  dans l'équation (2.8) on aboutit à :

$$(u^2 - a^2)du_{\pm} + [2uv - (u^2 - a^2)\lambda_{\pm}]dv_{\pm} - \left( \delta \frac{a^2 v}{y} \right) dx_{\pm} = 0 \quad (2.16)$$

Finalement, les équations caractéristiques et de compatibilité recherchées et permettant de décrire un écoulement stationnaire, bidimensionnel, irrotationnel et supersonique sont:

$$\lambda_{\pm} = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{\pm} = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha) \quad (2.14)$$

$$(u^2 - a^2)du_{\pm} + [2uv - (u^2 - a^2)\lambda_{\pm}]dv_{\pm} - \left(\delta \frac{a^2 v}{y}\right)dx_{\pm} = 0 \quad (2.16)$$

L'équation caractéristique (2.14) définit deux courbes (notées C+ et C-) dans le plan (x,y). L'équation de compatibilité (2.16) fournit une équation différentielle reliant les composantes de la vitesse u et v. Elle n'est valable que le long des deux courbes caractéristiques C+ et C-. Les équations caractéristique et de compatibilité sont des équations non linéaires aux différences totales. Leur solution est obtenue en appliquant la méthode des différences finies.

Le maillage construit remplacera la portion de caractéristique reliant deux noeuds par un segment de droite. La méthode d'intégration numérique employée est la méthode d'Euler qui est du type prédicteur-correcteur (Annexe A). Les équations aux différences finies correspondant aux équations (2.14) et (2.16) sont obtenues en remplaçant respectivement  $dx, dy, du$  et  $dv$  par les différences  $\Delta x, \Delta y, \Delta u$  et  $\Delta v$  par conséquent :

$$\Delta y_{\pm} = \lambda_{\pm} \Delta x_{\pm} \quad (2.17)$$

$$Q_{\pm} \Delta u_{\pm} + R_{\pm} \Delta v_{\pm} - S_{\pm} \Delta x_{\pm} = 0 \quad (2.18)$$

$$\lambda_{\pm} = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha) \quad (2.19)$$

$$Q = u^2 - a^2 \quad (2.20)$$

$$R = 2uv - (u^2 - a^2)\lambda \quad (2.21)$$

$$S = \delta \frac{a^2 v}{y} \quad (2.22)$$

Le calcul d'un écoulement supersonique à l'intérieur d'une tuyère nécessite sa discrétisation en un certain nombre de noeuds. Il en existe trois sortes : ceux situés à l'intérieur de l'écoulement (point interne), sur l'axe de symétrie (point axial) et sur la paroi (point paroi). La procédure de résolution diffère en fonction du noeud considéré.

### 2.5.1. Procédure pour un point interne

Noté "4" sur la figure (2.9), est localisé par ses coordonnées  $x_4$  et  $y_4$  obtenues à l'aide de l'équation (2.17) et on obtient :

$$y_4 - \lambda_+ x_4 = y_2 - \lambda_+ x_2 \quad (2.23)$$

$$y_4 - \lambda_- x_4 = y_1 - \lambda_- x_1 \quad (2.24)$$

Les pentes des caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$  (notées  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$ ) sont définies par l'équation (2.19) :

$$\lambda_+ = \operatorname{tg}(\theta + \alpha) \quad (2.25)$$

$$\lambda_- = \operatorname{tg}(\theta - \alpha)$$

où

$$\theta_{\pm} = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y_{\pm}}{u_{\pm}}\right) \quad (2.26)$$

$$\alpha_{\pm} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_{\pm}}\right) \quad (2.27)$$

$$M_{\pm} = \frac{V_{\pm}}{a_{\pm}} \quad (2.28)$$

$$V_{\pm} = \sqrt{u_{\pm}^2 + v_{\pm}^2} \quad (2.29)$$

$$a_{\pm} = a(V_{\pm}) \quad (2.30)$$

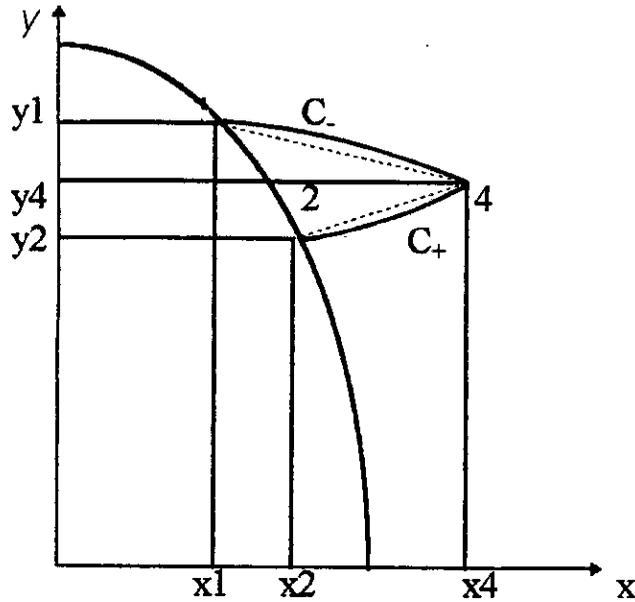


Figure 2.9 : Procédure pour un point interne

Les deux composantes de la vitesse  $(u_4, v_4)$  au noeud considéré sont déterminées en résolvant l'équation de compatibilité (2.18).

$$Q_+ u_4 + R_+ v_4 = T_+ \quad (2.31)$$

$$Q_- u_4 + R_- v_4 = T_- \quad (2.32)$$

avec :

$$T_+ = S_+ (x_4 - y_4) + Q_+ u_2 + R_+ v_2 \quad (2.33)$$

$$T_- = S_- (x_4 - x_1) + Q_- u_1 + R_- v_1 \quad (2.34)$$

Les équations (2.23), (2.24), (2.31) et (2.32) sont celles permettant l'application de la procédure d'intégration numérique.

### 2.5.2. Procédure d'intégration numérique

La méthode d'intégration numérique utilisée afin de résoudre les équations est celle d'Euler. C'est une méthode prédictor-correcteur où la phase prédictor est représentée par:

$$u_+ = u_2 \ ; \ v_+ = v_2 \ ; \ y_+ = y_2$$

$$u_- = u_1 \ ; \ v_- = v_1 \ ; \ y_- = y_1$$

et permet de déterminer  $x_4^o, y_4^o, u_4^o$  et  $v_4^o$ . La phase correcteur sera appliquée en posant :

$$u_+ = \frac{u_2 + u_4^o}{2}; v_+ = \frac{v_2 + v_4^o}{2}$$

$$u_- = \frac{u_1 + u_4^o}{2}; v_- = \frac{v_1 + v_4^o}{2}$$

$$y_+ = \frac{y_2 + y_4^o}{2}; y_- = \frac{y_1 + y_4^o}{2}$$

Cette phase appliquée itérativement, permet la détermination dans une première itération de  $x_4^1, y_4^1, u_4^1$  et  $v_4^1$  puis de  $x_4^2, y_4^2, u_4^2$  et  $v_4^2$  dans une seconde itération et ainsi de suite. Le correcteur est appliqué autant de fois que nécessaire jusqu'à atteindre la tolérance requise c'est à dire :

$$|P^{n-1} - P^n| \leq \text{Tolérance}$$

où P représente  $x_4, y_4, u_4$  et  $v_4$ .

### 2.5.2.1. Procédure pour un point axial

Le point "4" sur la figure (2.10) est un point situé sur l'axe de symétrie. Un point "2" au dessous de cet axe peut être défini comme l'image du point "1" donc nous pouvons assimiler le point "4" à un point interne. La procédure de calcul sera la même que celle utilisée précédemment (C.f 2.5.1 et 2.5.2) sauf dans ce cas :

$$y_4 = v_4 = \theta_4 = 0$$

Nous ne tiendrons compte que de la caractéristique C- ou "1-4". Les inconnues  $x_4$  et  $u_4$  sont calculées en appliquant les équations (2.24) et (2.32).

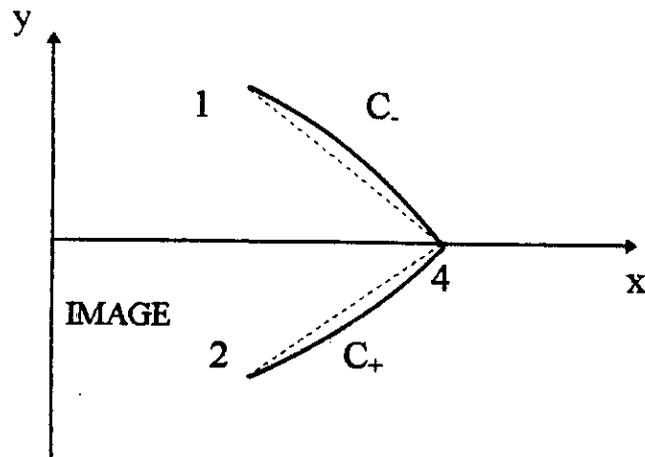


Figure 2.10 : Procédure pour un point axial

### 2.5.2.2. Procédure pour un point paroi

Le point "1" sur la figure (2.11) est fictif mais permet d'assimiler le point "4" à un point interne dont la procédure d'intégration a été définie précédemment (C.f 2.5.2). Etant situé sur la paroi, la direction de l'écoulement en ce point est égale à la pente de celle-ci ce qui implique :

$$y = y(x) \quad (2.41)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta = \frac{v}{u} \quad (2.42)$$

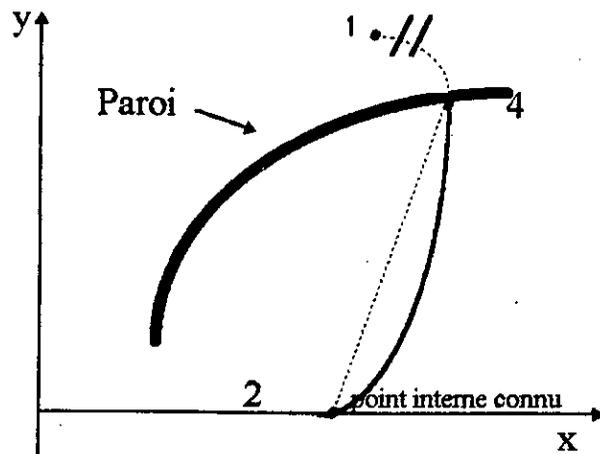


Figure 2.11 : Procédure pour un point paroi

Si nous ajoutons les équations (2.23) et (2.31) à ces dernières, le système est suffisant pour déterminer  $x_4$ ,  $y_4$ ,  $u_4$  et  $v_4$ .

### 2.5.2.3. Procédure pour un point paroi pré spécifié

Dans le région de l'écoulement où le gradient des propriétés est important (en particulier près du col), il est plus rigoureux de choisir des pas assez courts en pré spécifiant la position des différents points solutions "4" (Figure 2.12)

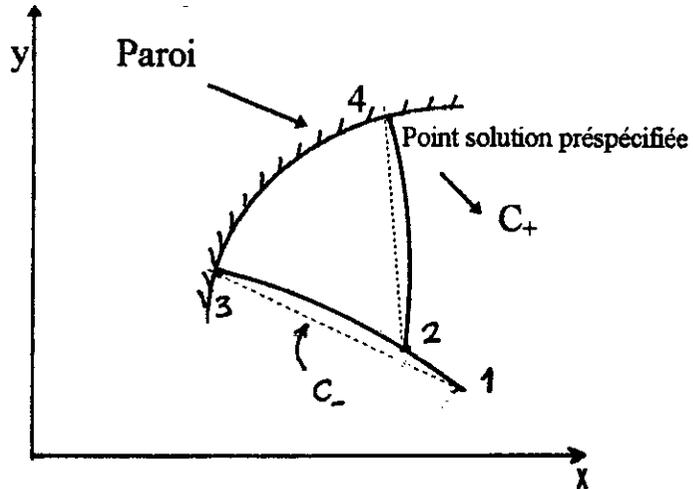


Figure 2.12 : Procédure pour un point paroi pré spécifié

La position de ces points étant pré-spécifié,  $x_4$  et  $y_4$  sont donc connus. La résolution des équations (2.31) et (2.42) permet de déterminer  $u_4$  et  $v_4$ .

Le point "2" représente l'intersection des deux caractéristiques "2-4" et "1-3" représentées respectivement par les équations (2.23) et (2.24). Les propriétés au point "2" sont déterminées par interpolation entre les points "1" et "3".

### 2.5.3. Cas particuliers

Trois cas particuliers peuvent apparaître dans les calculs. Deux concernent le point interne et se concrétisent lorsque  $\lambda_-$  et  $\lambda_+$  sont infinies (figures 2.13 et 2.14). Le troisième cas concerne les points situés sur la paroi et se produit lorsque la pente de la caractéristique  $C_+$  est infinie (Figure 2.15).

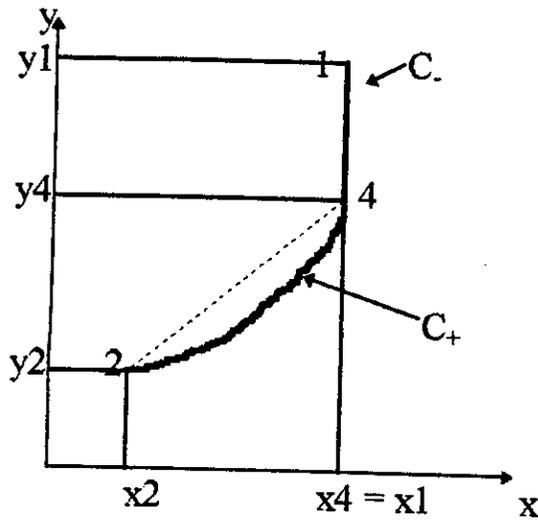


Figure 2.13 : Procédure pour point interne cas où  $\lambda_- = \infty$

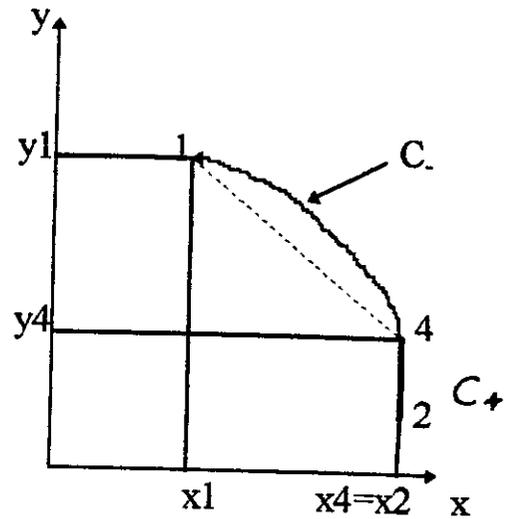


Figure 2.14 : procédure pour point interne cas où  $\lambda_+ = \infty$

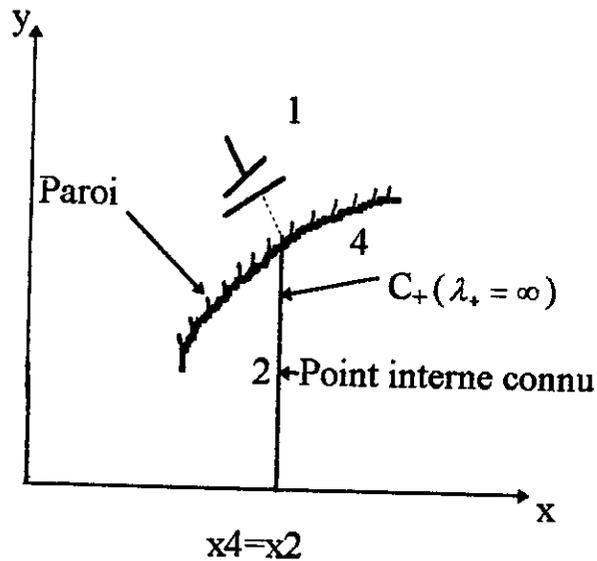


Figure 2.15 : Procédure pour point paroi cas où  $\lambda_+ = \infty$

La position du point "4" dans le premier cas (Figure 2.13) est déterminée par:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_1 \\ y_4 &= y_2 + \lambda_+ (x_4 - x_2) \end{aligned}$$

et dans le second cas (Figure 2.14) :

$$\begin{aligned}x_4 &= x_2 \\y_4 &= y_1 + \lambda_- (x_4 - x_1)\end{aligned}$$

Les propriétés au point "4" pour ces deux cas sont déterminées en utilisant une forme différente de l'équation de compatibilité (2.16) (Zucrow et All, 1976) :

$$du_{\pm} + \lambda_{\mp} dv_{\pm} - \left[ \delta a^2 \frac{v}{y} \right] dx_{\pm} = 0 \quad (2.43)$$

**Remarque:**

La position inversée des signes + appartenant à  $\lambda$  indique que si  $du$ ,  $dv$  et  $dx$  sont calculés le long de la caractéristique  $C_+$ , la valeur de  $\lambda$  est celle de  $C_-$  et inversement. Concernant le point paroi illustré en (Figure 2.11) :  $x_4 = x_2$  et  $y_4$ . Les propriétés au point "4" sont déterminées en utilisant une autre forme de l'équation de compatibilité (Zucrow et al, 1976):

$$\left( \frac{dv}{du} \right)_{\pm} = \frac{uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{a^2 - v^2} - \delta \frac{a^2 v}{a^2 - v^2} \frac{1}{y} \left( \frac{dy}{dx} \right)_{\pm} \quad (2.44)$$

## **CHAPITRE 3**

**Calcul de l'écoulement transsonique**

### 3.1. Introduction

Deux méthodes ont été principalement développées afin de décrire l'écoulement transsonique se produisant au col d'une tuyère de De Laval. (Sauer, 1947) résolut l'équation des petites perturbations en termes des composantes axiales et radiales de la vitesse tandis que (Kliegel & Levine, 1969) utilisèrent des développements en série des composantes de la vitesse en puissance inverse du paramètre  $(R+1)$  où  $R = \frac{\rho_{in}}{y_t}$ .

L'actuel chapitre s'intéresse aux résultats que permettent d'atteindre les deux approches. Elles sont appliquées à deux tuyères différentes équipants les premiers étages des moteurs des engins de recherche aérospatiale "BERENICE" et "ANTARES" de l'ONERA, France.

### 3.2. Développement de la méthode de Sauer

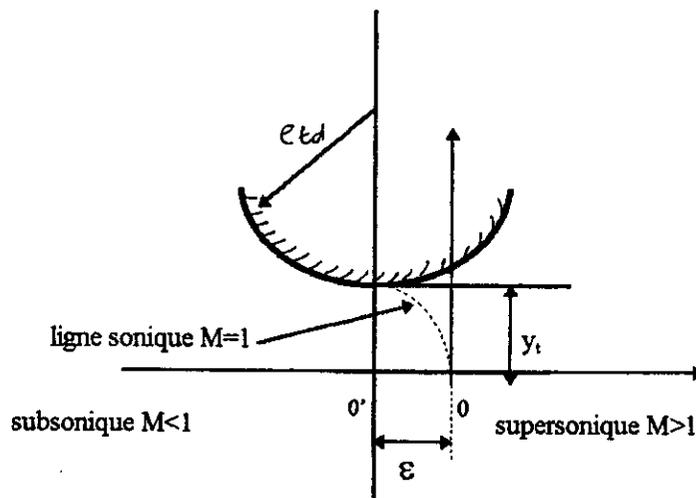


Figure 3.1 : Géométrie de la tuyère au voisinage du col

La détermination du champ d'écoulement dans la région du col d'une tuyère bidimensionnelle, convergente-divergente sous des conditions d'écoulement (onde de choc) se fait grâce à la théorie des petites perturbations appliquée aux équations régissant l'écoulement (Zucrow & al, 1976).

Parmi plusieurs méthodes qui ont été proposées pour l'analyse du champ d'écoulement dans la région du col, celle donnée par Sauer (Sauer, 1947) est la plus simple et va être décrite ci-après.

La (Figure 3.1) illustre schématiquement la géométrie d'une tuyère au niveau du col. Le contour de la tuyère est symétrique par rapport à l'axe  $ox$ . La ligne sonique est de forme parabolique (lieu géométrique de tous les points où  $M=1$ ).

Nous considérons l'équation de perturbation pour un écoulement plan ou axisymétrique, irrotationnel (Sauer, 1947) :

$$(1 - M_\infty^2)u_x + v_y + \delta \frac{v}{y} = M_\infty^2(\gamma + 1) \left( \frac{u}{U_\infty} \right) u_x \quad (3.1)$$

au voisinage du col l'écoulement est unidimensionnel :

$$U_\infty = a^* \quad ; \quad M_\infty = 1$$

par substitution dans (3.1) nous obtiendrons :

$$(\gamma + 1) \left( \frac{u}{a^*} \right) u_x - v_y - \delta \frac{v}{y} = 0 \quad (3.2)$$

par définition :

$$u' = \frac{u}{a^*} \quad ; \quad v' = \frac{v}{a^*}$$

où  $u'$ ,  $v'$  sont les vitesses adimensionnelles de perturbation.

En remplaçant dans (3.2) :

$$(\gamma + 1)u' u'_x - v'_y - \delta \frac{v'}{y} = 0 \quad (3.3)$$

Du fait que l'écoulement au niveau du col est irrotationnel, il est possible de définir une fonction  $\phi$  potentiel de vitesse (Zucrow et al, 1976) :

$$\phi = U_{\infty}x + \phi = a^*(x + \phi') \quad (3.4)$$

où  $\phi'(x,y)$  est le potentiel de vitesses de perturbation adimensionnel, par conséquent :

$$(\gamma + 1)\phi'_x\phi'_{xx} - \phi'_{yy} - \frac{\delta}{y}\phi y = 0 \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) est adimensionnelle de potentiel de vitesses de perturbation pour un écoulement transsonique et est aux dérivées partielles non linéaires. (Sauer,1947) a proposé une approximation en séries pour résoudre cette dernière sous forme :

$$\phi'(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{2i}(x)y^{2i} = f_0(x)y^0 + f_2(x)y^2 + f_4(x)y^4 + \dots$$

Après des réarrangements et par identification avec (3.5) nous aboutissons aux expressions des composantes de la vitesse de perturbation suivantes :

$$u'(x,y) = \alpha x + \frac{(\gamma + 1)\alpha^2 y^2}{2(1 + \delta)}$$

$$v'(x,y) = \frac{(\gamma + 1)\alpha^2 xy}{(1 + \delta)} + \frac{(\gamma + 1)^2 \alpha^3 y^3}{2(1 + \delta)(3 + \delta)}$$

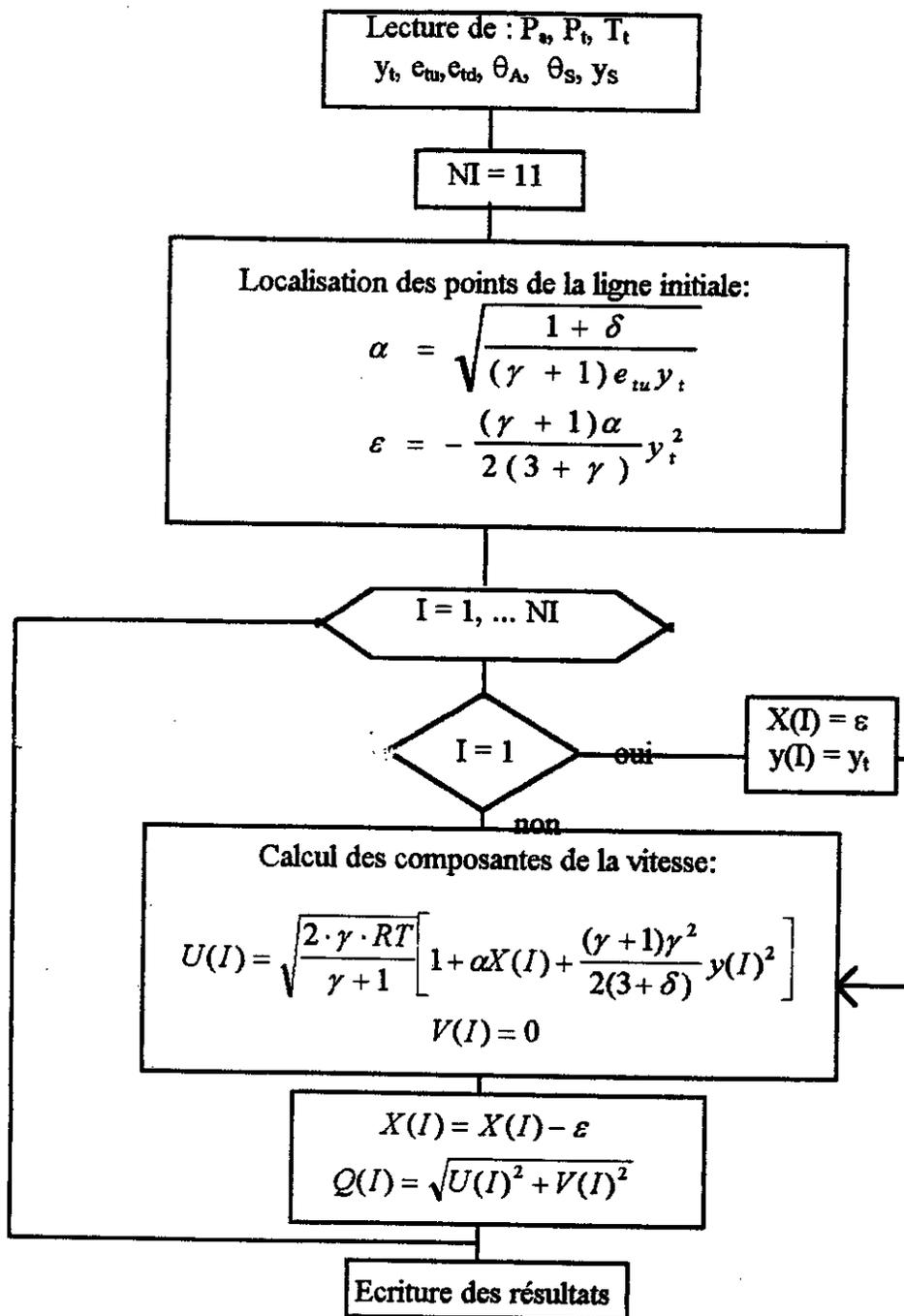
où :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1 + \delta}{(\gamma + 1)\rho_{tu}y_t}}$$

La ligne sonique possède une forme parabolique et est décrite par :

$$x = -\frac{(\gamma + 1)\alpha}{2(1 + \delta)}y^2$$

L'organigramme de la méthode de Sauer sera décrit ci-dessous :



- Organigramme de la méthode de Sauer (IVLINS)

### 3.3. Développement de la méthode de Kliegel & Levine

La méthode de Kliegel & Levine utilise des développements en série qui sont fonction du rapport ( $R = \frac{R_{tu}}{y_i}$ ) et choisit comme repère des coordonnées toroïdales, qui permettent d'analyser des tuyères ayant un rapport  $R < 1$ .

La solution de (Kliegel-Levine) est exprimée par :

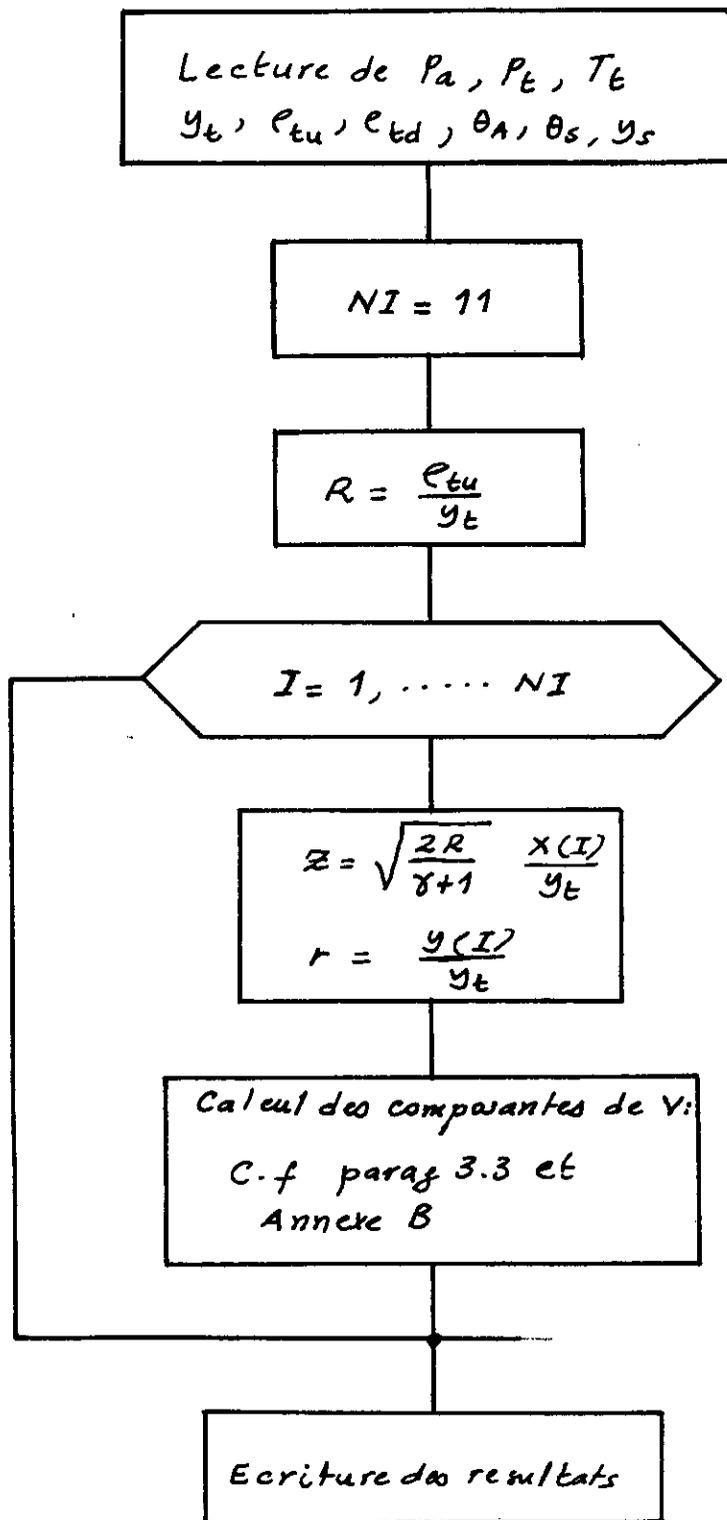
$$u = 1 + \frac{u_1(r,z)}{R+1} + \frac{1}{(R+1)^2} [u_1(r,z) + u_2(r,z)] \\ + \frac{1}{(R+1)^3} [u_1(r,z) + 2u_2(r,z) + u_3(r,z)] + \dots$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2(R+1)}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{v_1(r,z)}{R+1} + \frac{1}{(R+1)^2} \left[ \frac{3}{2} v_1(r,z) + v_2(r,z) \right] \\ + \frac{1}{(R+1)^3} \left[ \frac{15}{8} v_1(r,z) + \frac{5}{2} v_2(r,z) + v_3(r,z) + \dots \right] \end{array} \right\}$$

où :

$$z = \sqrt{\frac{2R}{\gamma+1}} \frac{x}{y_i} \quad \text{et} \quad r = \frac{y}{y_i}$$

$z$  et  $r$  désignent respectivement les coordonnées toroïdales axiales et radiales.  $u_1(r,z)$ ,  $u_2(r,z)$ ,  $u_3(r,z)$ ,  $v_1(r,z)$ ,  $v_2(r,z)$  et  $v_3(r,z)$  sont données par des expressions citées en (Annexe B). L'organigramme de la méthode de Kliegel & Levine sera décrit ci-dessous :



- Organigramme de la méthode de Kliegel & Levine (IVLINK)

### 3.4. Applications : Cas d'études

Les deux approches décrites dans les paragraphes précédents sont intégrées dans le code de calcul développé. Appliquées à deux cas d'études différents représentés par des tuyères appartenant à des engins de recherche aérospatiale, elles permettent de générer les vitesses au col nécessaires au lancement des calculs initiés par la méthode des caractéristiques. Pour se faire nous avons choisis Onze (11) points sur la ligne initiale.

#### 3.4.1. 1er cas d'étude : Tuyère équipant le 1er étage du moteur SEPR-739P de l'engin de recherche "BERENICE" de l'Office National d'Etudes et Recherches Aérospatiales (France).

Les caractéristiques de fonctionnement de la tuyère utilisées comme données d'entrée afin d'initier les calculs transoniques sont représentées par :

$$\begin{array}{lll} P_a = 1,013 \text{ bars} & y_t = 0,069m & \theta_A = 20^\circ \\ P_t = 69 \text{ bars} & \rho_{tu} = 0,138m & \theta_S = 5^\circ \\ T_t = 2800 \text{ K} & \rho_{td} = 0,0345m & y_S = 0,223m \end{array}$$

#### 3.4.2. 2ème cas d'étude : Tuyère équipant le 1er étage du moteur SEPR-7341 de l'engin de recherche "ANTARES" de l'Office National d'Etudes et Recherches Aérospatiales (France).

Les caractéristiques de fonctionnement de la tuyère utilisées comme données d'entrée afin d'initier les calculs transoniques sont représentées par :

$$\begin{array}{lll} P_a = 1,013 \text{ bars} & y_t = 0,088m & \theta_A = 20^\circ \\ P_t = 54 \text{ bars} & \rho_{tu} = 0,176m & \theta_S = 5^\circ \\ T_t = 2500 \text{ K} & \rho_{td} = 0,044m & y_S = 0,197m \end{array}$$

### 3.5. Résultats et comparaisons

#### 3.5.1. Cas d'étude 1 : Engin de recherche "BERENICE"

Approche de (Sauer,1947)			Approche de (Kliegel & Levine, 1969)			
Point	u (m/s)	v (m/s)	u (m/s)	v (m/s)	V (m/s)	Erreur (%)
01	1112	0,0	1092	0,00	1092	1,83
02	1088	0,0	1040	0,85	1040	4,61
03	1067	0,0	1034	0,72	1034	3,19
04	1049	0,0	1030	0,60	1030	1,84
05	1033	0,0	1027	0,50	1027	0,58
06	1019	0,0	1024	0,40	1024	0,49
07	1008	0,0	1023	0,31	1023	1,49
08	1000	0,0	1021	0,23	1021	2,10
09	993	0,0	1021	0,15	1021	1,82
10	990	0,0	1020	0,07	1020	3,03
11	988	0,0	1020	0,00	1020	3,24

#### 3.5.2. Cas d'étude 2 : Engin de recherche "ANTARES"

Approche de (Sauer,1947)			Approche de (Kliegel & Levine, 1969)			
Point	u (m/s)	v (m/s)	u (m/s)	v (m/s)	V (m/s)	Erreur (%)
01	1051	0,0	1149	0,00	1149	9,32
02	1029	0,0	1094	0,85	1094	6,30
03	1009	0,0	1088	0,72	1088	7,83
04	991	0,0	1084	0,60	1084	9,38
05	976	0,0	1080	0,49	1080	10,65
06	963	0,0	1078	0,39	1078	11,94
07	953	0,0	1076	0,31	1076	12,90
08	945	0,0	1075	0,23	1075	13,70
09	939	0,0	1074	0,15	1074	14,40
10	935	0,0	1073	0,73	1073	14,70
11	934	0,0	1073	0,00	1073	14,90

### 3.5.3 Comparaisons

Les résultats obtenus en terme des composantes axiale et radiale de la vitesse montrent la quasi-axialité de l'écoulement au col. Les vitesses obtenues pour le cas de l'engin "BERENICE" sont nettement plus importantes que celles obtenues pour l'engin "ANTARES". Ceci est principalement dû à l'importance de la pression de stagnation dont la valeur est de 69 bars pour le premier cas et de 54 bars pour le second. La pression ambiante étant la même, les écarts relatifs entre les vitesses générées par les deux solutions sont principalement dus à la différence d'approche suivie par les méthodes de Sauer et celle de Kliegel & Levine.

Nous pouvons conclure que les deux approches pour l'initiation de l'écoulement supersonique convergent vers la même solution (i.e les mêmes vitesses au col ) dans le cas ou  $R = \frac{\rho_{nu}}{\gamma_t} > 2$ . Cela est confirmé par (Zucrow et al, 1976).

## **CHAPITRE 4**

**Calcul de l'écoulement supersonique**

## 4.1. Description du code de calcul :

Nous développerons ici un calcul de l'écoulement dans la partie divergente d'une tuyère supersonique axisymétrique dont la paroi (Figure 4.1) est simulée par différentes fonctions :

- Polynôme du second degré :  $y = a + bx + cx^2$
- Linéaire :  $y = a + bx$
- Exponentielle :  $y = 1 - \exp(-1/b \cdot x)$
- Polynôme du troisième degré :  $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

et de préciser les différentes étapes nécessaires à ce calcul.

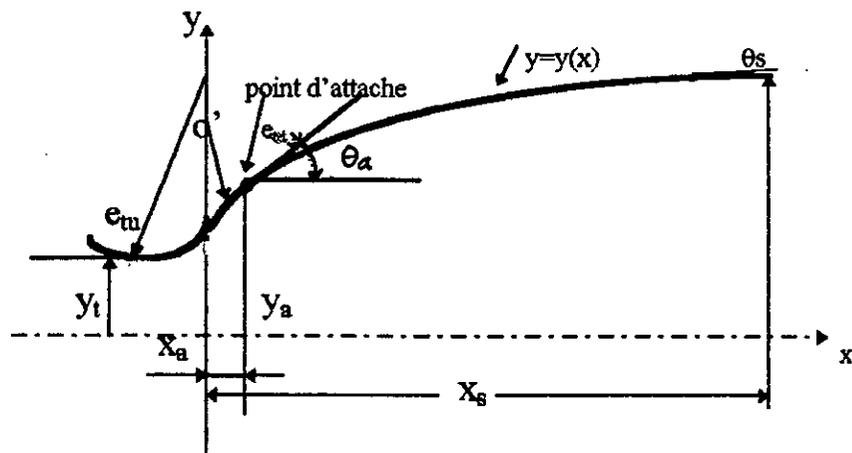


Figure 4.1 : Géométrie de la tuyère simulée.

Le code de calcul développé, rédigé en Fortran 77 sous forme interférentielle, se compose d'un programme principal et sept sous-routines. Le programme principal contient les étapes logiques d'analyse de l'écoulement dans la partie divergente d'une tuyère supersonique axisymétrique. Tout commence par la lecture des données d'entrée qui sont subdivisées en deux catégories :

- Données thermodynamiques
- Données géométriques

Les données thermodynamiques décrivent l'état d'écoulement au col (Pression et Températures Totales) quant aux données géométriques, ce sont des paramètres qui décrivent la forme de la paroi de la tuyère et les conditions aux limites (Rayon au col, Angle d'attache, Angle de sortie, etc.).

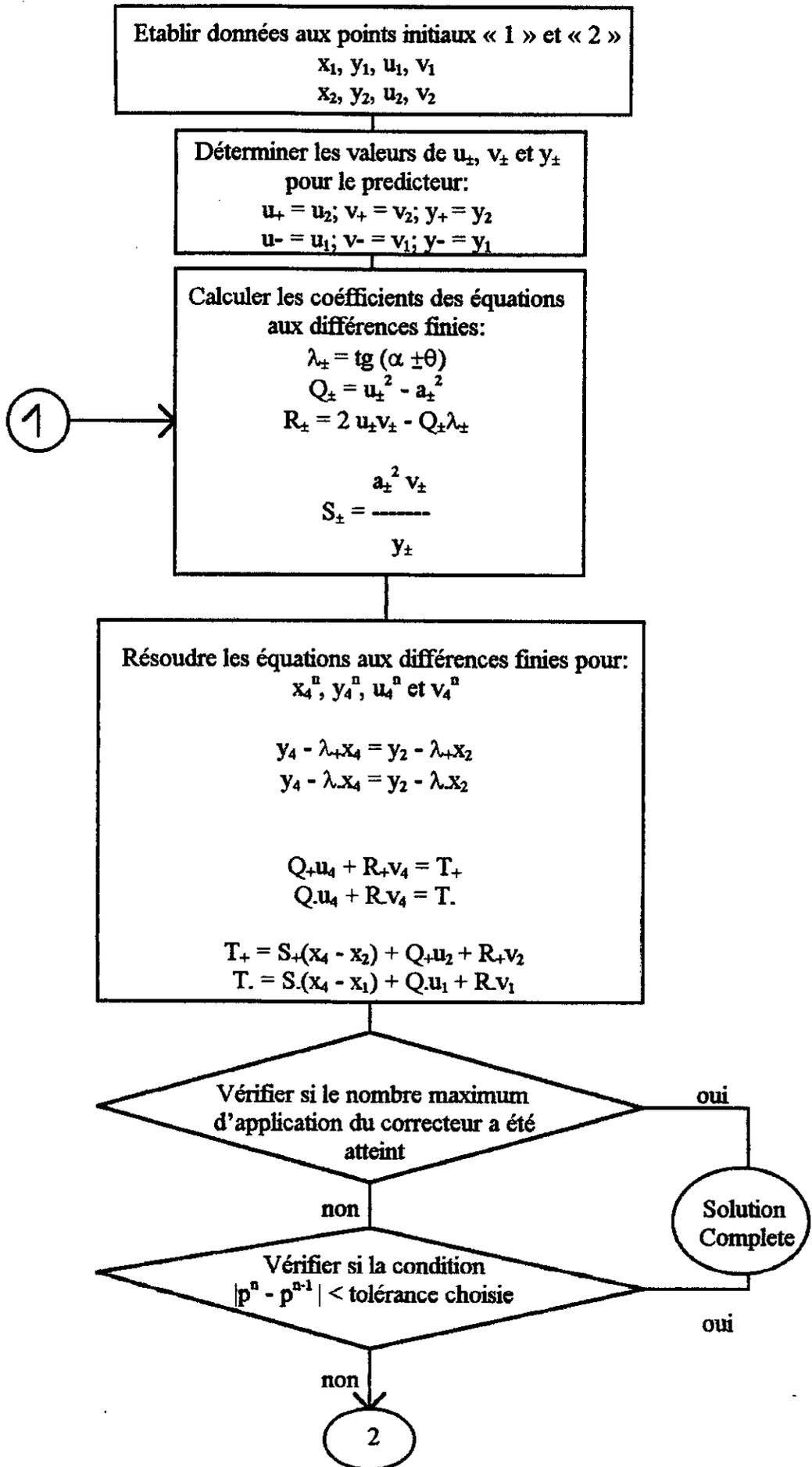
Les données de sortie du programme sont les propriétés de l'écoulement calculées en chaque point de la tuyère (Vitesse, Nombre de Mach, Pression, Température, Densité et Direction de l'écoulement) ainsi que les performances calculées à la section de sortie (Poussée, Coefficient de poussée, Nombre de Mach).

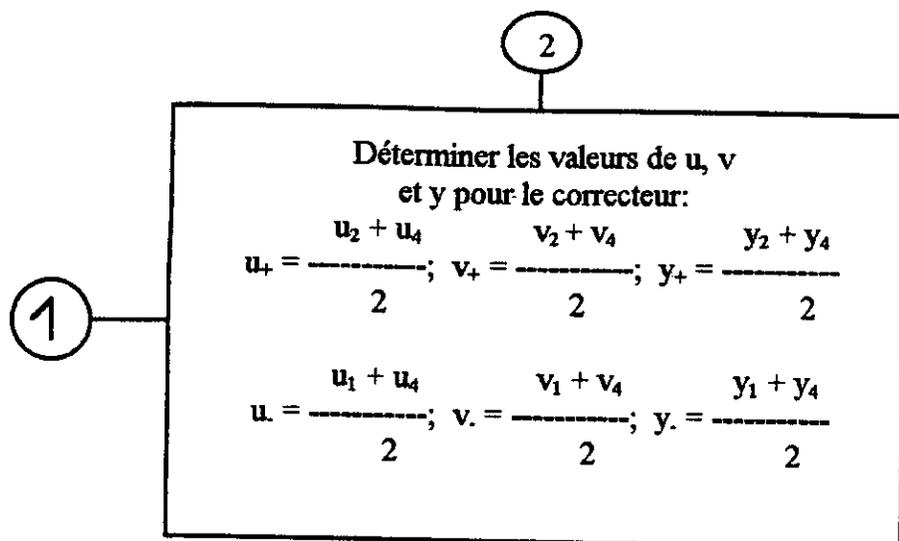
#### **4.1.1. Définition de la ligne initiale**

Dans le but d'initier les calculs par la méthode des caractéristiques, une ligne supersonique de départ doit être établie. Les différents points de cette ligne doivent être déterminés en considérant l'écoulement transsonique, qui a été largement étudiée par différents chercheurs (Sauer, 1947), (Hall, 1962) et (Kliigel et al, 1969). Le calcul de la ligne supersonique a été incorporé dans une subroutine "IVLINS" pour la méthode de Sauer et une subroutine "IVLINK" pour la méthode de Kligel-Levine.

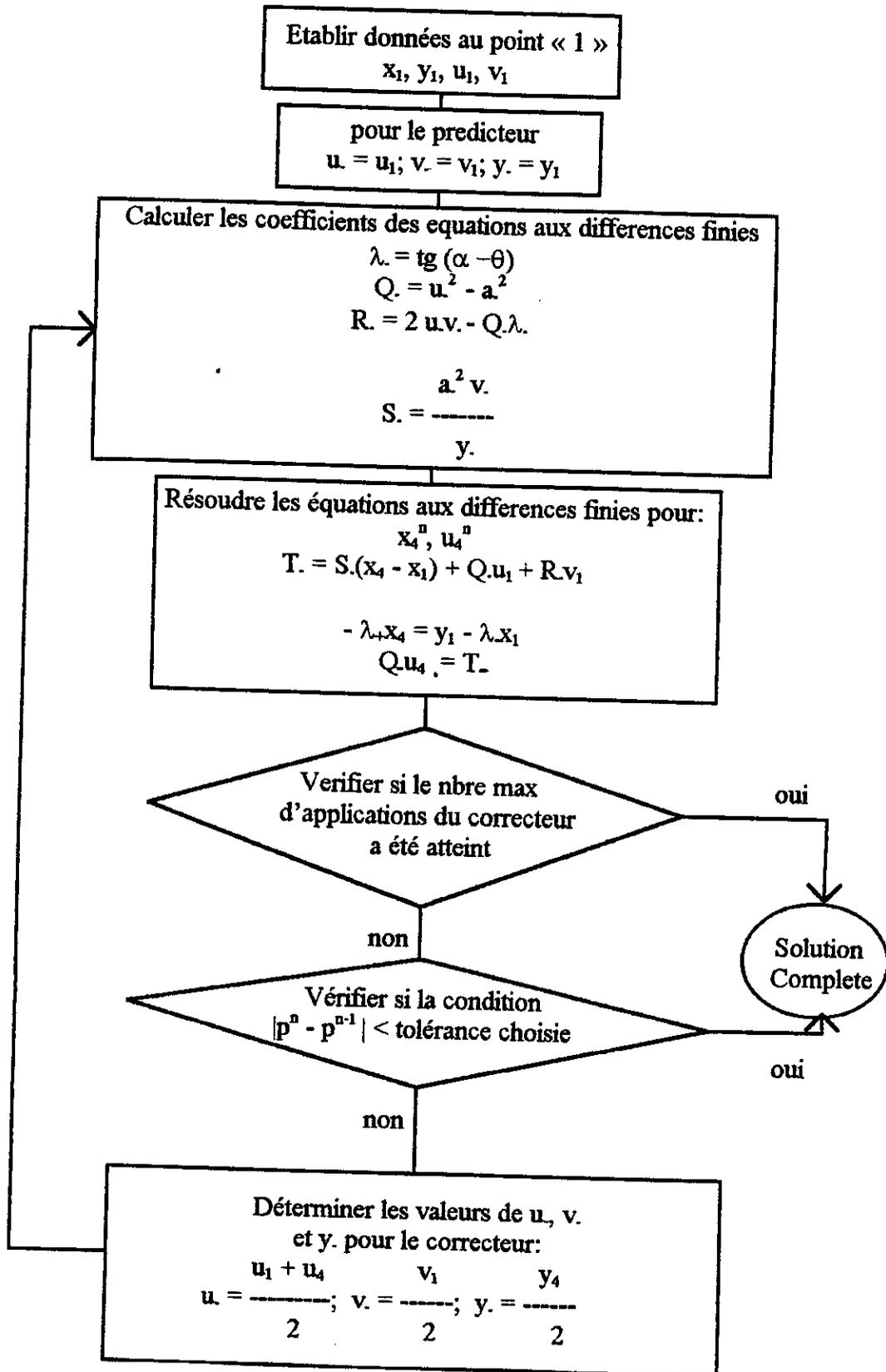
#### **4.1.2. Ecoulement à partir de la ligne initiale**

Ayant introduit les données géométriques, les paramètres définissant la forme de la paroi sont calculés en appelant la subroutine "BOUNDY". En utilisant le schéma de différences finies (méthode d'Euler, Annexe A) le réseau des caractéristiques issus de la ligne initiale est généré par le programme principal tout en incluant les points internes et axiaux (C.f Chap 2.5.1 et 2.5.2.1) définis par les subroutines "AXIS" et "INTER". Les organigrammes de calcul des points internes et axiaux seront donnés ci dessous :





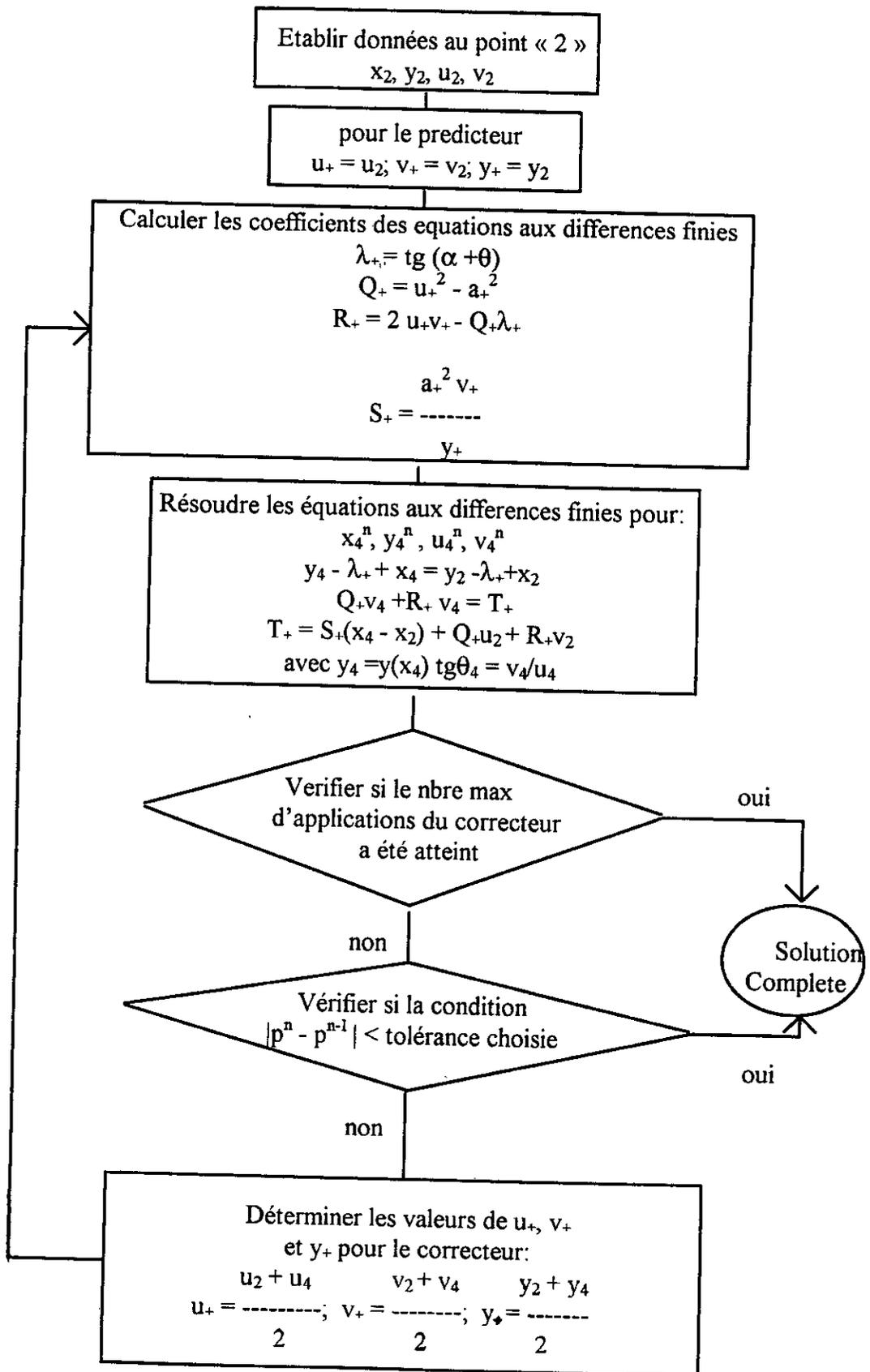
- Organigramme de calcul du point interne (INTER).



- Organigramme de calcul du point axial (AXIS).

### **4.1.3. Ecoulement à partir de l'arc de cercle**

Au voisinage du col où les gradients de propriétés d'écoulement sont larges, l'espace entre les intersections successives de la caractéristique "C-" et la paroi (ces points d'intersections définissent la caractéristique "C+" en utilisant la méthode du point paroi pré-spécifié) devra être minimal pour plus de précision. Cependant la méthode du point paroi pré spécifié (C.f Chap 2.5.2.3) permet la définition de ces nombres de points. La solution aussitôt obtenue, une caractéristique "C+" prend naissance de la paroi continuant jusqu'à l'intersection avec l'axe de symétrie. Pour ces calculs le programme principal appelle les sousroutines "INTER", "DRWALL" et "AXIS" . L'algorithme de calcul du point paroi sera décrit ci-dessous :



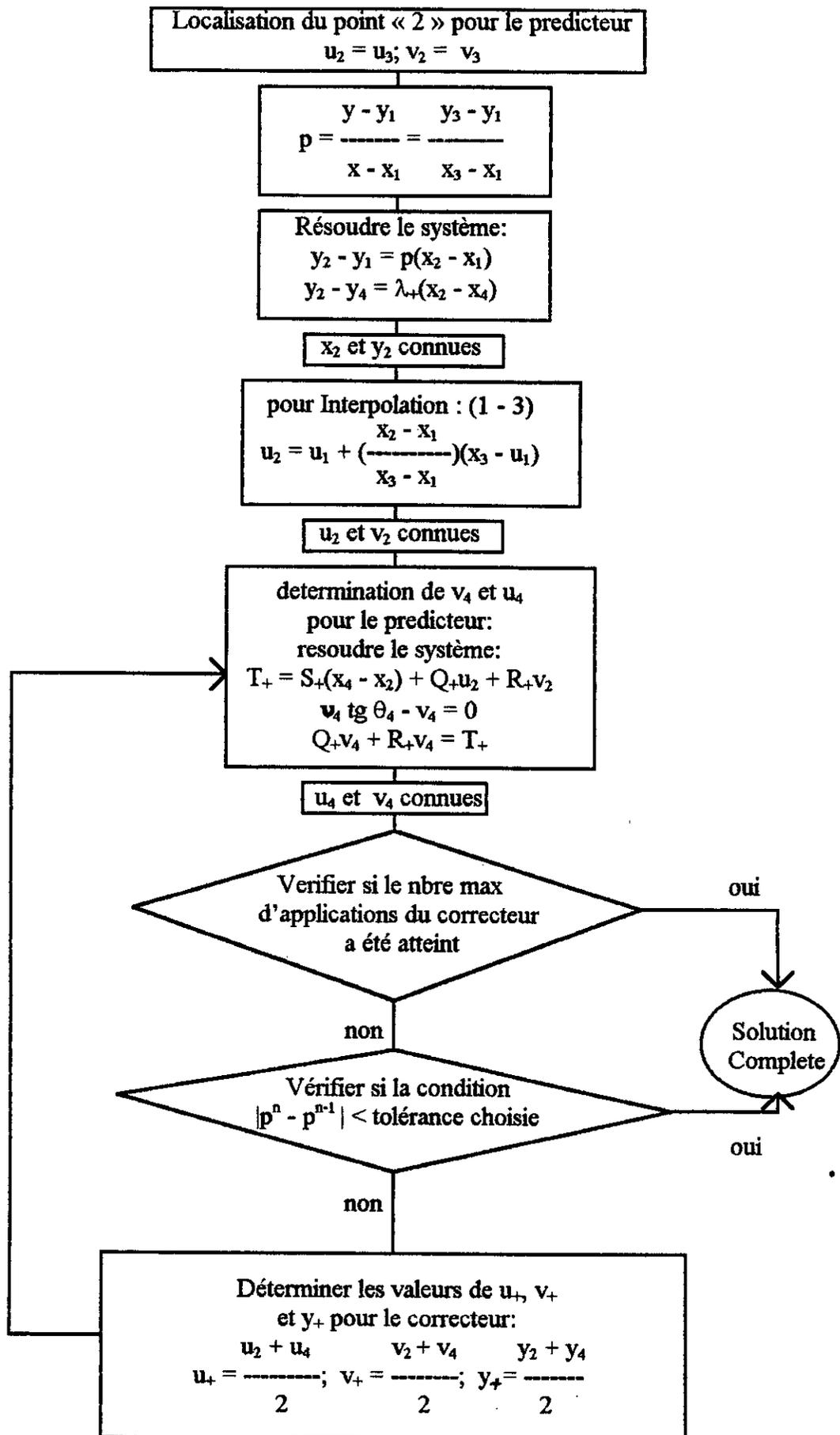
- Organigramme de calcul du point paroi (DRWALL)

#### **4.1.4. Ecoulement à partir de la paroi**

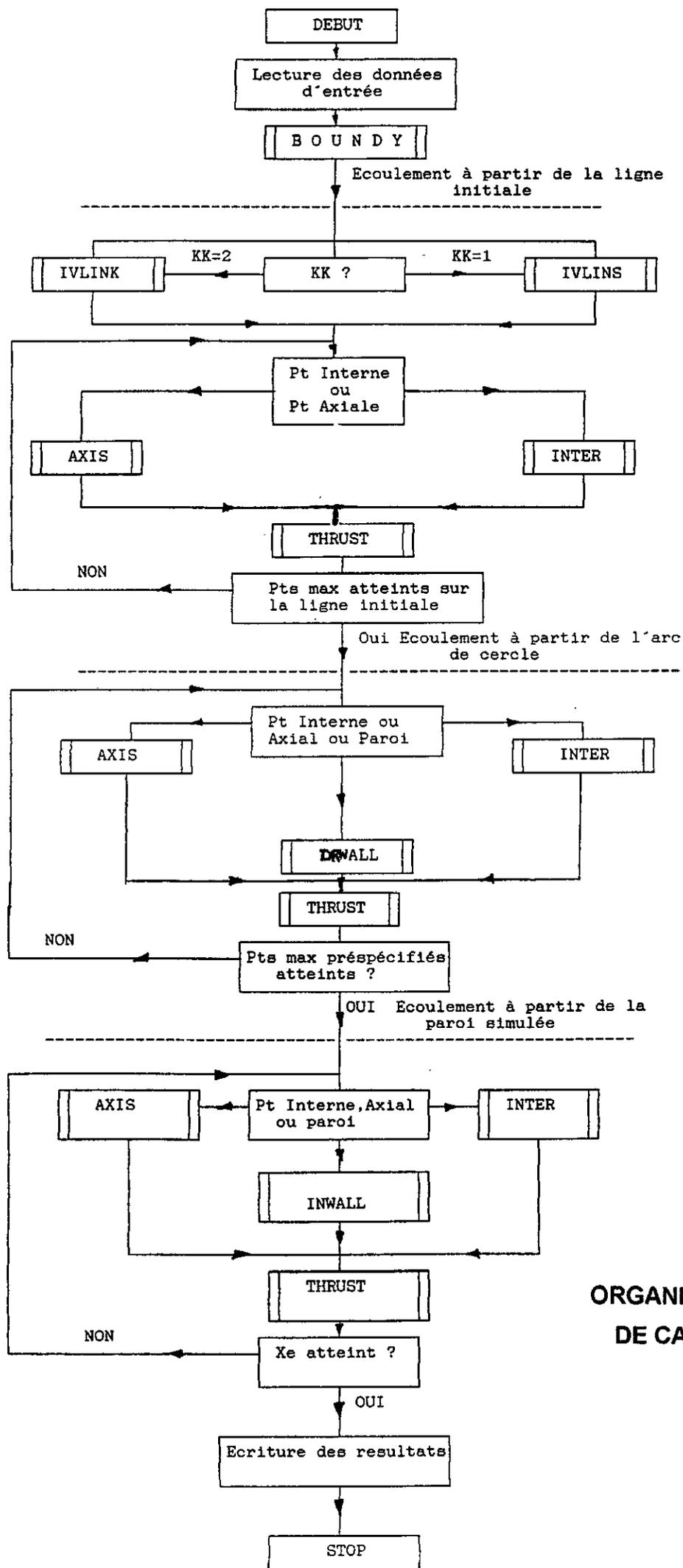
Une fois les calculs le long de la caractéristique issue du dernier point pré spécifié sont faits, la méthode de pas à pas sera alors appliquée le long de la paroi. La procédure est la même que pour l'arc de cercle, pour cela on appelle les sous-routines "INWALL", "INTER" et "AXIS". L'organigramme de calcul du point-paroi pré-spécifié sera décrit ci-dessous:

#### **4.1.5. Calcul des performances de la tuyère**

Le calcul se fait en appelant la sous-routine "THRUST", qui donnera en retour les performances à la section de sortie (Poussée, Coefficient de poussée, Impulsion et Nombre de Mach). L'organigramme du code de calcul sera décrit ci-dessous :



- Organigramme de calcul du point paroi pré spécifié



ORGANIGRAMME DU CODE DE CALCUL "NOZZLE"

## 4.2. Simulation de la paroi ( Subroutine BOUNDY)

Etant donné le rayon au col  $y_t$ , le rayon de courbure aval  $\rho_{td}$ , l'angle d'attache  $\theta_a$ , l'angle de sortie  $\theta_s$  et la distance de la partie divergente  $x_s$  ou le rayon de la section de sortie  $y_s$ . La subroutine BOUNDY détermine l'équation de la paroi et par conséquent les coordonnées des points d'où sont issues les caractéristiques. Les cas étudiés dans cette thèse considèrent une tuyère dont le col est constitué d'un arc circulaire, lié à une paroi divergente simulée par des polynômes du second et troisième degré, par une droite et exponentielle.

### 4.2.1. Contour arc-circulaire au col

L'équation décrivant le contour arc-circulaire au col permet la détermination de la coordonnée radiale des points pré-spécifiés calculés par la méthode du point paroi pré spécifié (C.f chap 2.5.2.3) et qui est exprimée par:

$$/o'xy : \quad x^2 + y^2 = \rho_{td}^2$$

$$/oxy : \quad x^2 + (y - \rho_{td} - y_t)^2 = \rho_{td}^2$$

### 4.2.2. Point d'attache

Les coordonnées du point d'attache sont :

$$x_a = \rho_{td} * \sin(\theta_a)$$

$$y_a = y_t + \rho_{td} * (1 - \cos(\theta_a))$$

### 4.2.3. Polynôme du second degré

$$y = A_w + B_w x + C_w x^2$$

Le système d'équation à résoudre est :

$$\begin{cases} y(x = x_a) = y_a \Rightarrow A_w + B_w x_a + C_w x_a^2 = y_a \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_a} = \operatorname{tg}(\theta_a) \Rightarrow B_w + 2C_w x_a = \operatorname{tg}(\theta_a) \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_s} = \operatorname{tg}(\theta_s) \Rightarrow B_w + 2C_w x_s = \operatorname{tg}(\theta_s) \end{cases}$$

où les inconnues sont  $A_w, B_w$  et  $C_w$

#### 4.2.4. Droite

$$y = A_w + B_w x$$

Le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{cases} y(x = x_a) = y_a \Rightarrow A_w + B_w x_a = y_a \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_a} = \operatorname{tg}(\theta_a) \Rightarrow B_w = \operatorname{tg}(\theta_a) \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_s} = \operatorname{tg}(\theta_s) \Rightarrow B_w = \operatorname{tg}(\theta_s) \end{cases}$$

où l'inconnue est  $A_w$  .

#### 4.2.5 Polynôme du troisième degré

$$y = A_w + B_w x + C_w x^2 + D_w x^3$$

Le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{cases} y(x=x_a) = y_a \Rightarrow A_w + B_w x_a + C_w x_a^2 + D_w x_a^3 = y_a \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_a} = \operatorname{tg}(\theta_a) \Rightarrow B_w + 2C_w x_a + 3D_w x_a^2 = \operatorname{tg}(\theta_a) \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_s} = \operatorname{tg}(\theta_s) \Rightarrow B_w + 2C_w x_s + 3D_w x_s^2 = \operatorname{tg}(\theta_s) \\ \left. \frac{d^2 y}{d^2 x} \right|_{x=x_a} = \operatorname{tg}(\theta_a) \Rightarrow 2C_w + 6D_w x_a = 0 \end{cases}$$

où les inconnues sont  $A_w, B_w, C_w$  et  $D_w$

#### 4.2.6. Exponentielle

$$y = 1 - e^{\left(\frac{-x}{B_w}\right)}$$

Le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{cases} y(x=x_a) = y_a \Rightarrow 1 - \operatorname{Exp}\left(\frac{-x_a}{B_w}\right) = y_a \\ \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_a} = \operatorname{tg}(\theta_a) \Rightarrow \frac{1}{B_w} \operatorname{Exp}\left(\frac{-x_a}{B_w}\right) = \operatorname{tg}(\theta_s) \end{cases}$$

L'inconnue est  $B_w$ .

## **CHAPITRE 5**

### **Applications**

## 5.1. Introduction

Les mêmes tuyères (équipant les moteurs SEP 739-P et SEPR 7341 équipant les premiers étages des engins de recherche "BERENICE" et "ANTARES" de l'ONERA, France) utilisés dans les paragraphes 3.4.1 et 3.4.2 sont étudiés. Le calcul de l'écoulement supersonique est réalisé grâce à la méthode des caractéristiques. Les performances sont déterminées grâce à la subroutine "THRUST".

## 5.2. Résultats et commentaires

### 5.2.1. Cas d'étude:"BERENICE"

La détente des gaz de combustion se fait normalement pour les quatre configurations étudiées. Elle se réalise d'une manière "abrupte" dans la première partie du divergent situé près du col et continue d'une manière progressive jusqu'à la sortie. Ceci est principalement dû à l'angle d'attache important choisi afin d'imposer que la détente se fasse presque entièrement au début du divergent, la partie restante servant à rendre l'écoulement axial afin d'obtenir une poussée maximale (c.f. Figures 5.1, 5.3, 5.5 et 5.7).

Le même raisonnement peut être appliqué aux courbes représentant les variations du nombre de Mach (c.f. Figures 5.2, 5.4, 5.6 et 5.8).

En termes de performances, les tuyères à paroi-polynômes semblent développer des poussées importantes avec un nombre de Mach à la sortie de 2,76 et 2,67 (c.f. Tableau ci-dessous).

Forme	Poussée (N)	Coefficient de poussée	Mach
Droite	129623	1,26	1,61
polynôme du 2ème degré	164547	1,59	2,76
polynôme du 3ème degré	162543	1,57	2,67
Exponentielle	128315	1,24	1,60

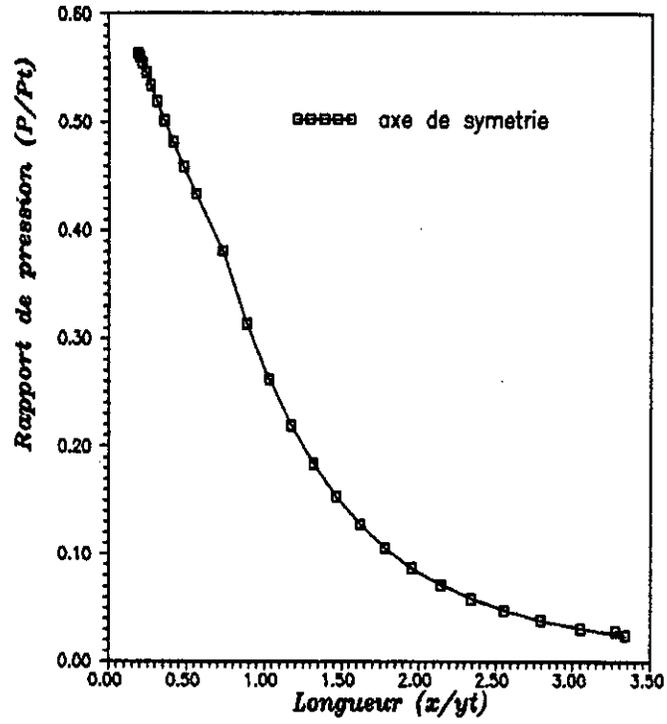


Fig. 5.1: Profil de pression statique le long du divergent (conique, Berenice)

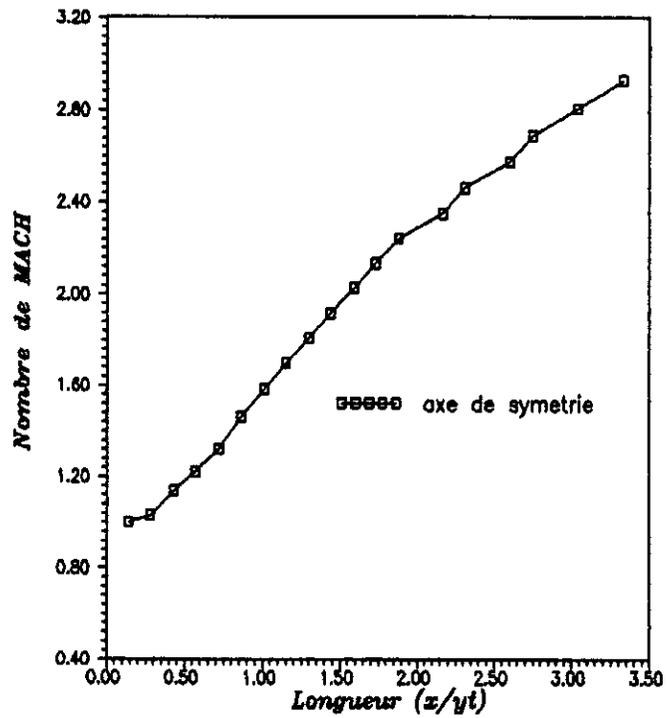


Fig. 5.2: Distribution du nombre de MACH le long du divergent (conique, Berenice)

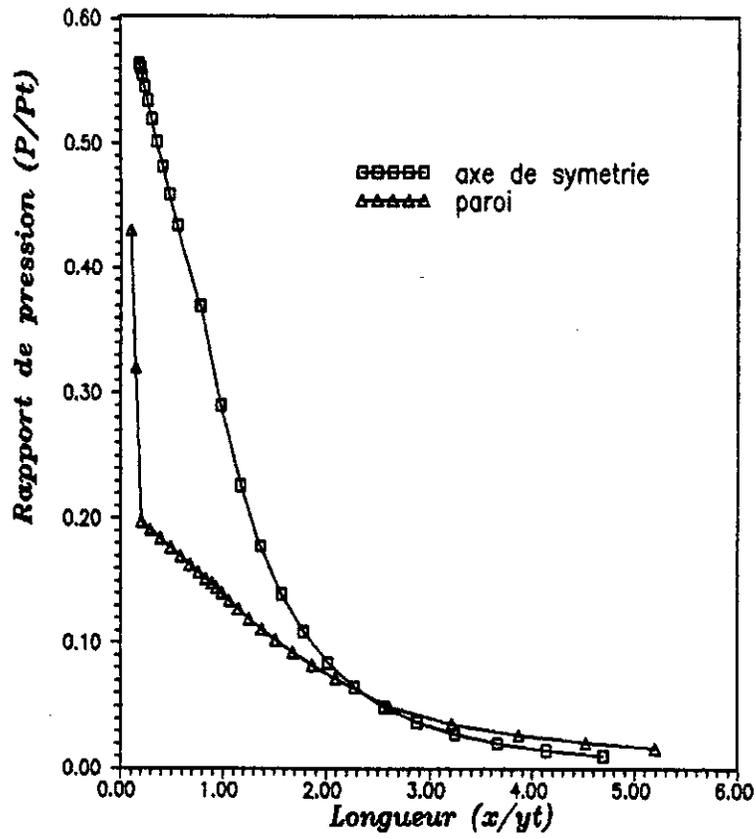


Fig. 5.3: Profil de pression statique le long du divergent (Polynome du second degre, Berenice)

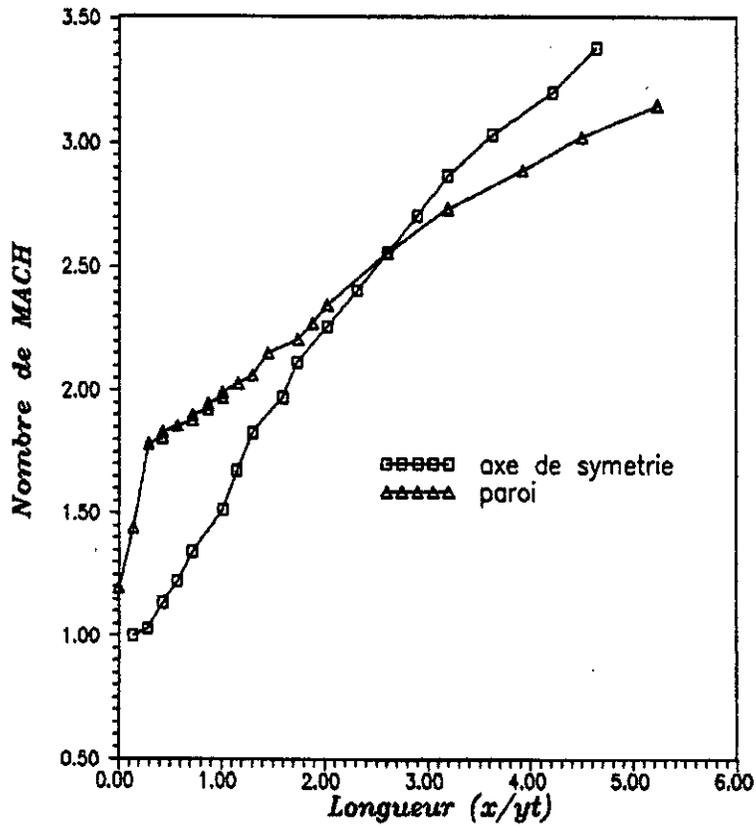


Fig. 5.4: Distribution du Nombre de Mach le long du divergent (Polynome du second degre, Berenice)

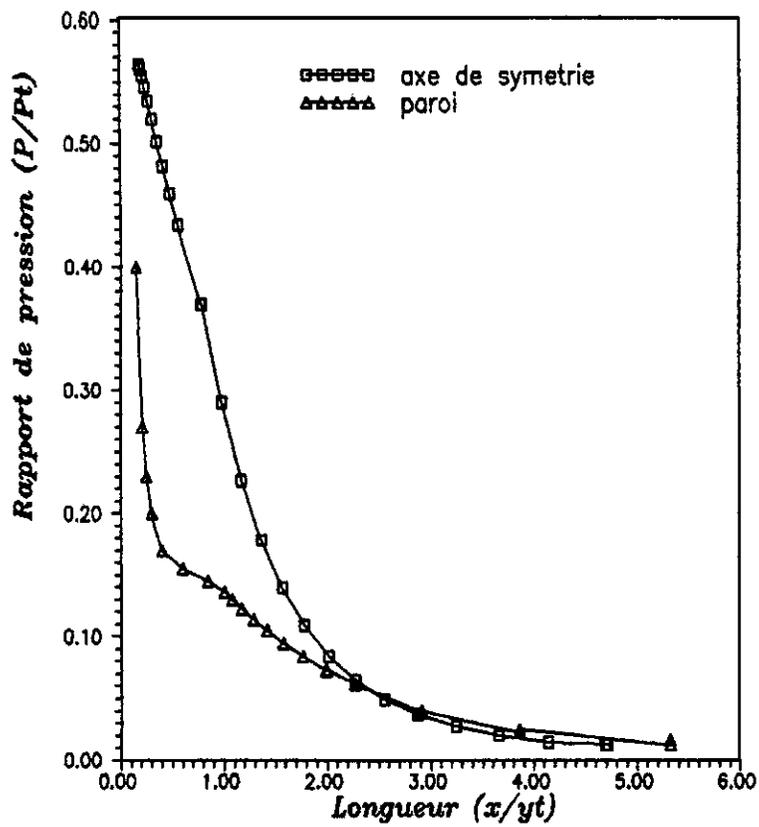


Fig. 5.5: Profil de pression statique le long du divergent (Polynome du troisieme degre, Berenice)

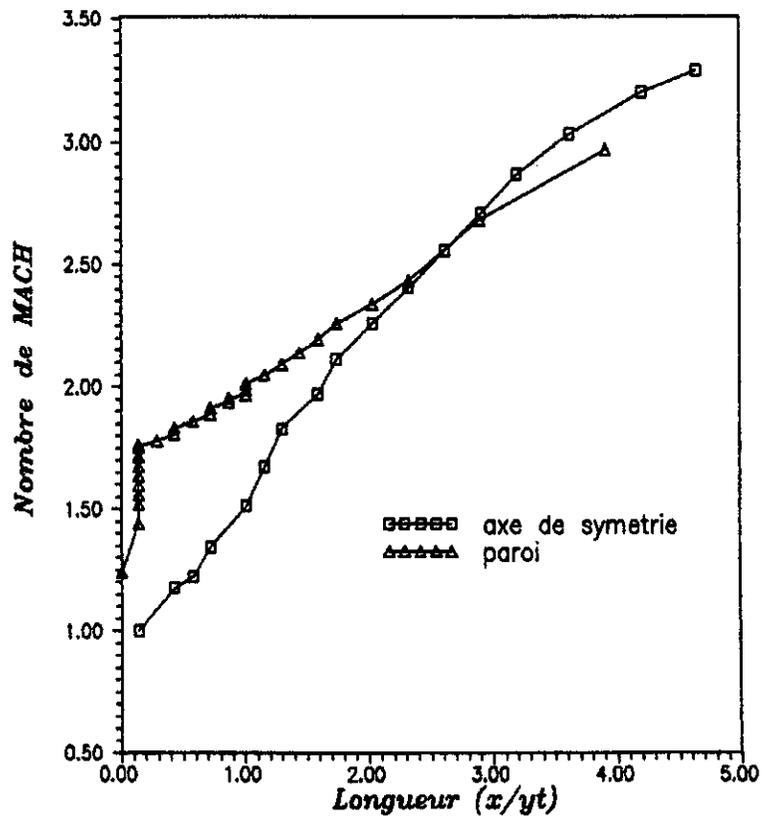


Fig. 5.6: Distribution du nombre de Mach le long du divergent (Polynome du troisieme degre, Berenice)

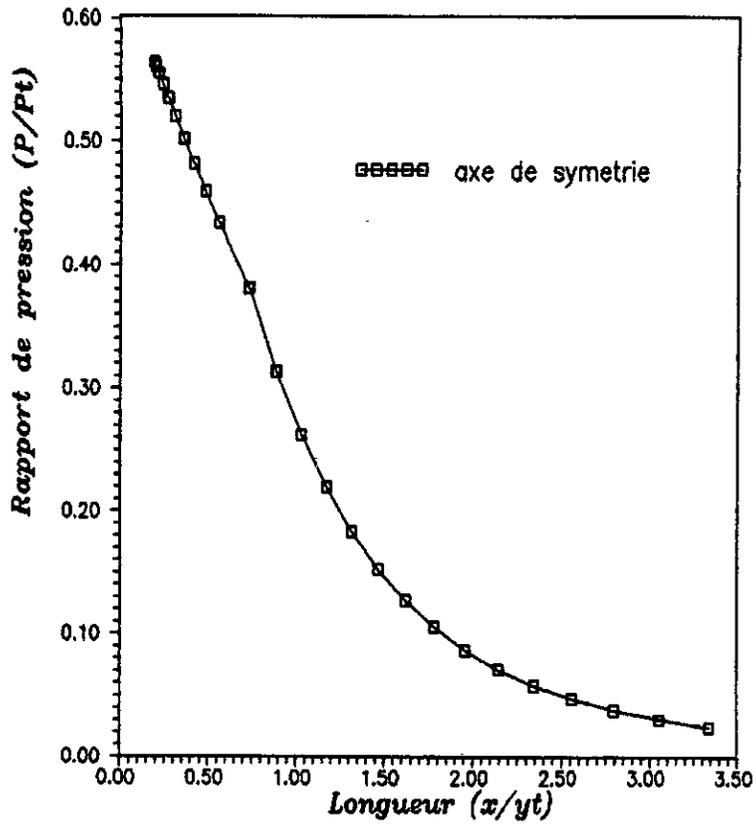


Fig. 5.7: Profil de pression statique le long du divergent (Exponentielle, Berenice)

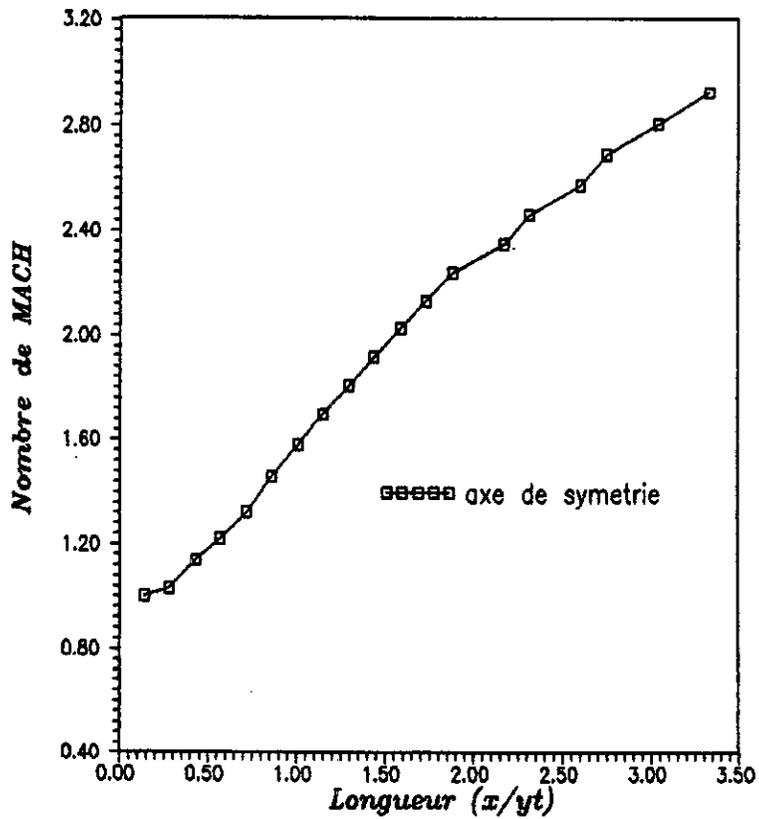


Fig. 5.8: Distribution du nombre de MACH le long du divergent (Exponentielle, Berenice)

### 5.2.2. Cas d'étude:"ANTARES"

Dans ce cas aussi, la détente des gaz de combustion se fait d'une manière uniforme montrant l'abilité de la forme des tuyères à procéder à la détente des gaz d'une manière uniforme (c.f. Figures 5.9, 5.11, 5.13, et 5.15).

Les courbes montrant la variation du nombre de Mach (C.f Figures 5.10, 5.12, 5.14 et 5.16) confirment le raisonnement précédent.

En termes de performances, la configuration sous forme exponentielle développe la poussée la plus petite tandis que la tuyère conique en développe la plus importante. Les tuyères en forme cloche (simulées par les polynômes) développent des poussées similaires avec des nombres de Mach à la section de sortie de 2,3 et 2,4 (c.f. tableau ci-dessous).

Forme	Poussée (N)	Coefficient de poussée	Mach
Droite	203722	1,55	2,91
polynôme du 2ème degré	194354	1,48	2,36
polynôme du 3ème degré	197083	1,50	2,40
Exponentielle	164219	1,25	1,73

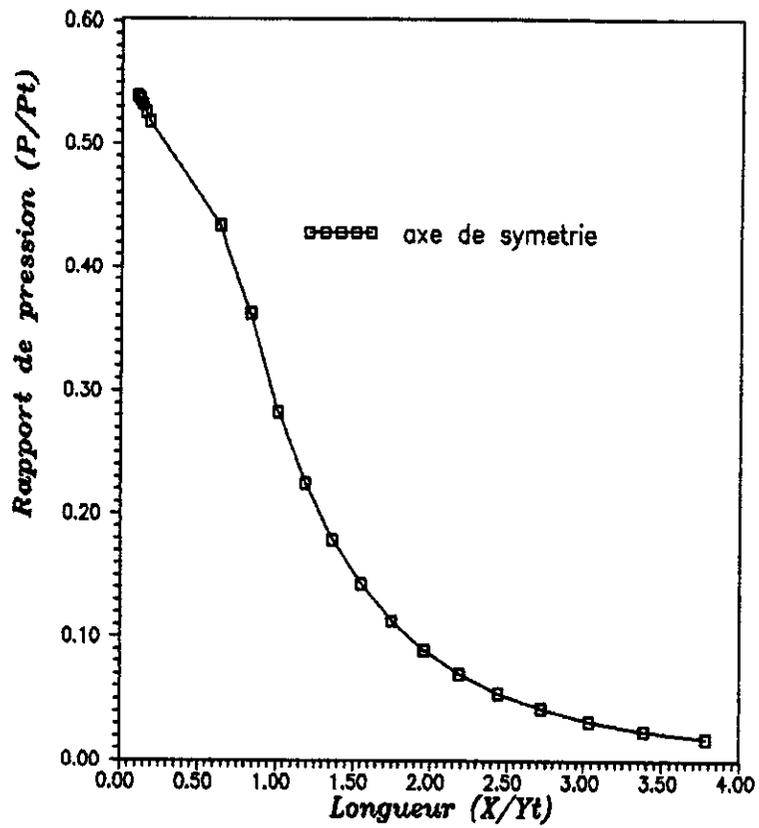


Fig. 5.9: Profil de pression statique le long du divergent (Conique, Antares)

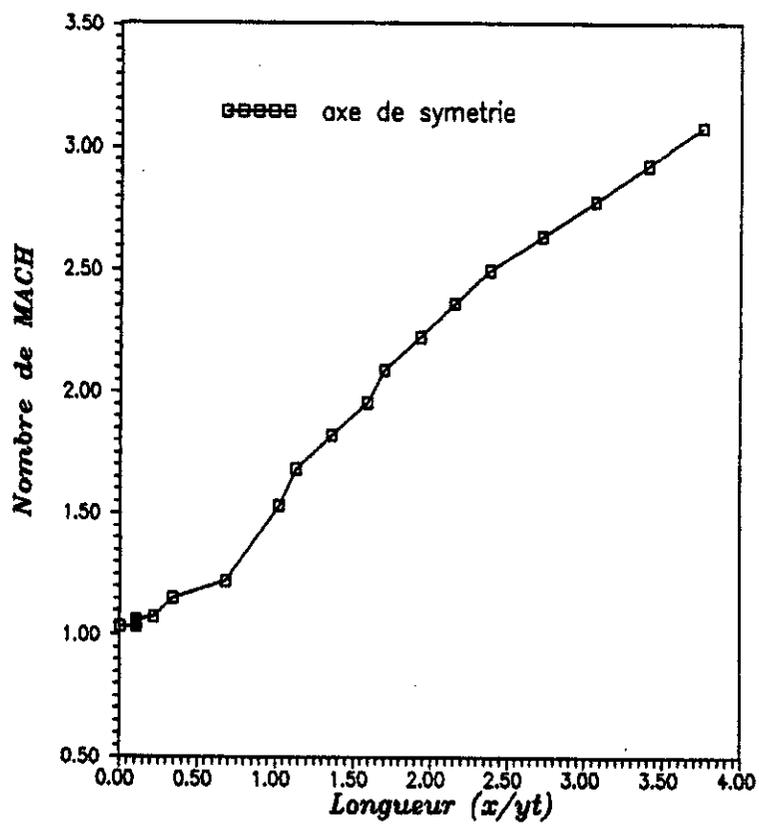


Fig. 5.10: Distribution du nombre de MACH le long du divergent (conique, Antares)

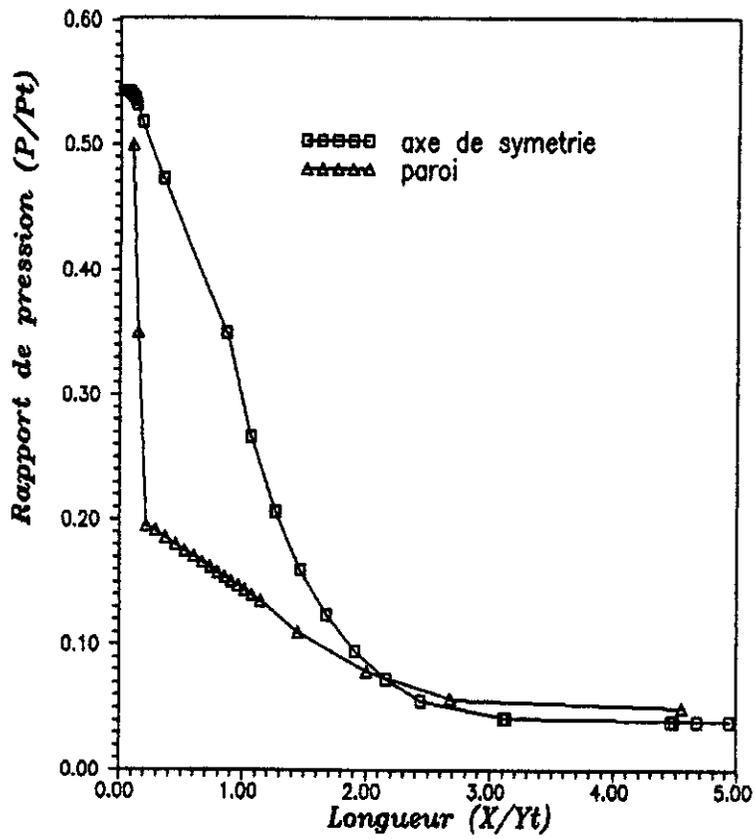


Fig. 5.11: Profil de pression statique le long du divergent (Polynome du second degre, Antares)

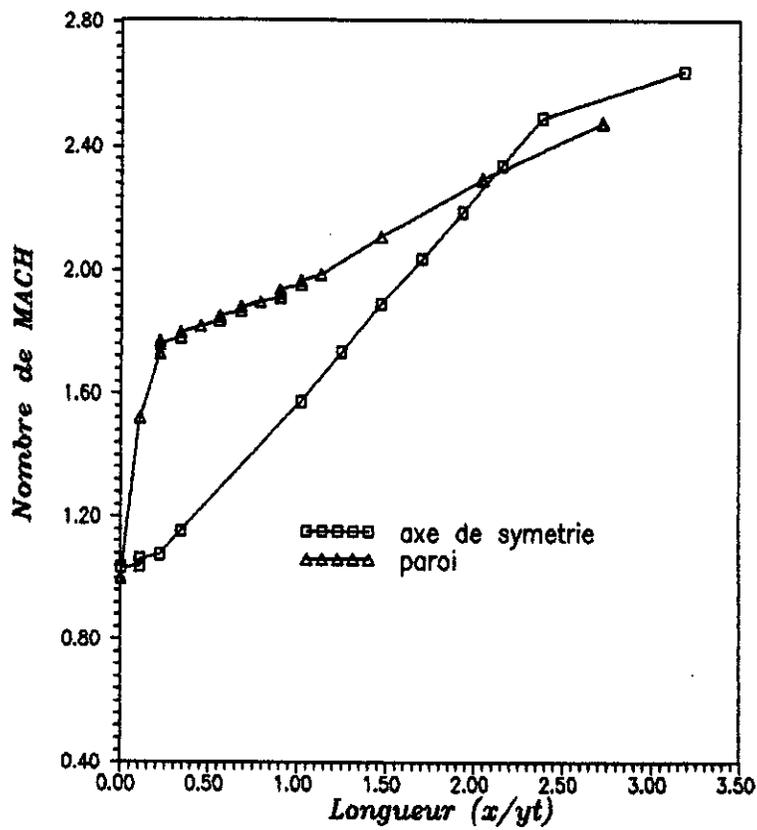


Fig. 5.12: Distribution du Nombre de MACH le long du divergent (Polynome du second degre, Antares)

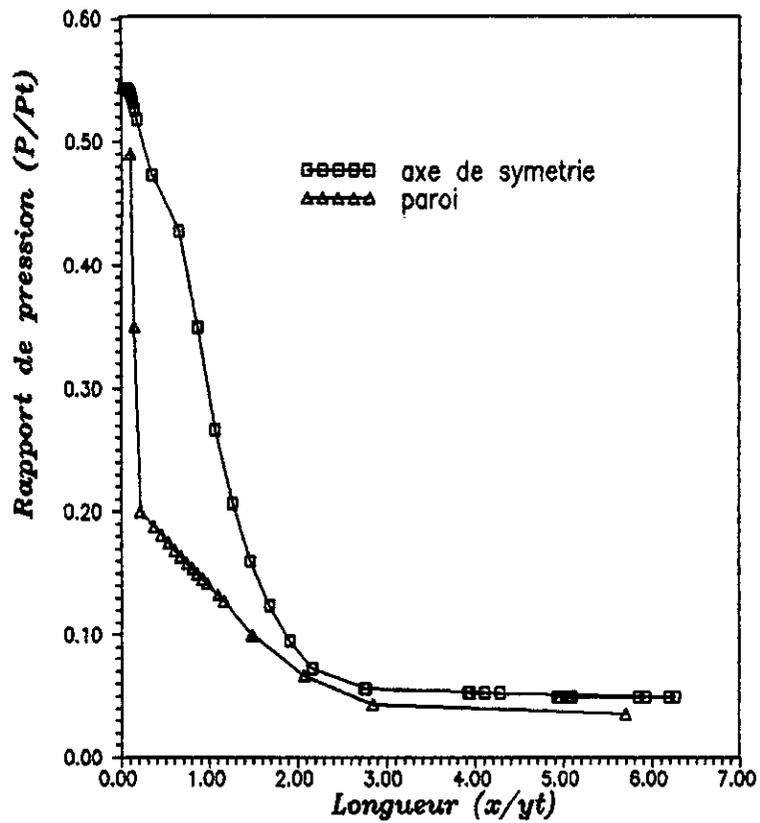


Fig. 5.13: Profil de pression statique le long du divergent (Polynome du troisieme degre, Antares)

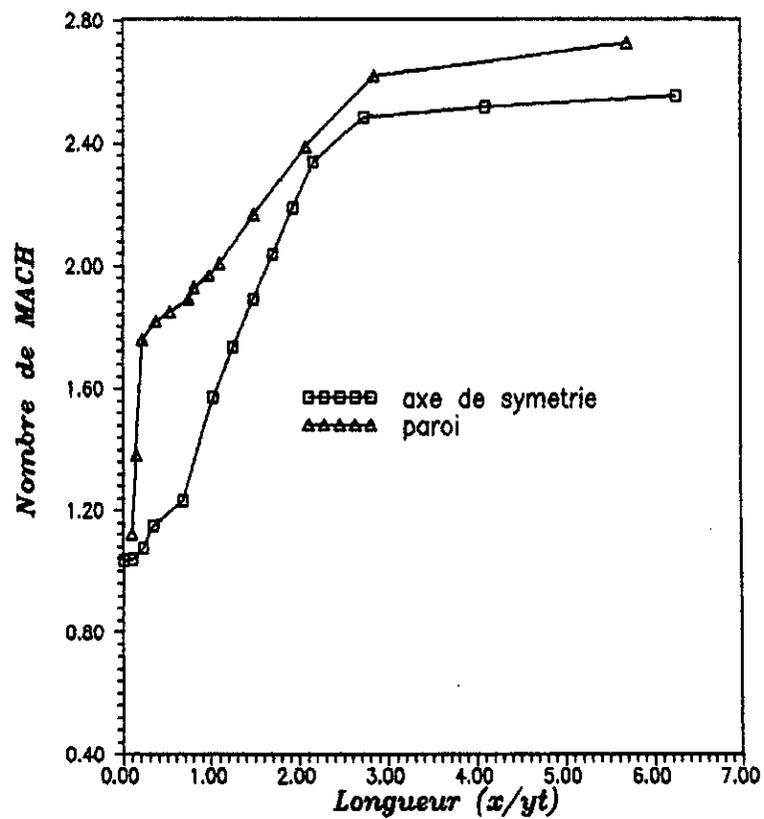


Fig. 5.14: Distribution du nombre de MACH le long du divergent (Polynome du troisieme degre, Antares)

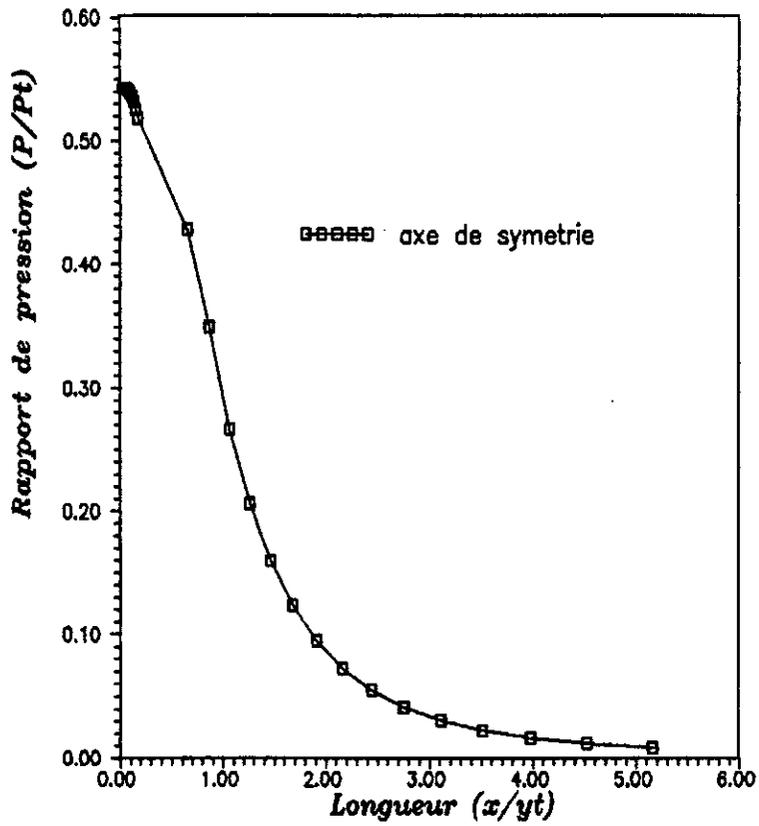


Fig. 5.15: Profil de pression statique le long du divergent (Exponentielle, Antares)

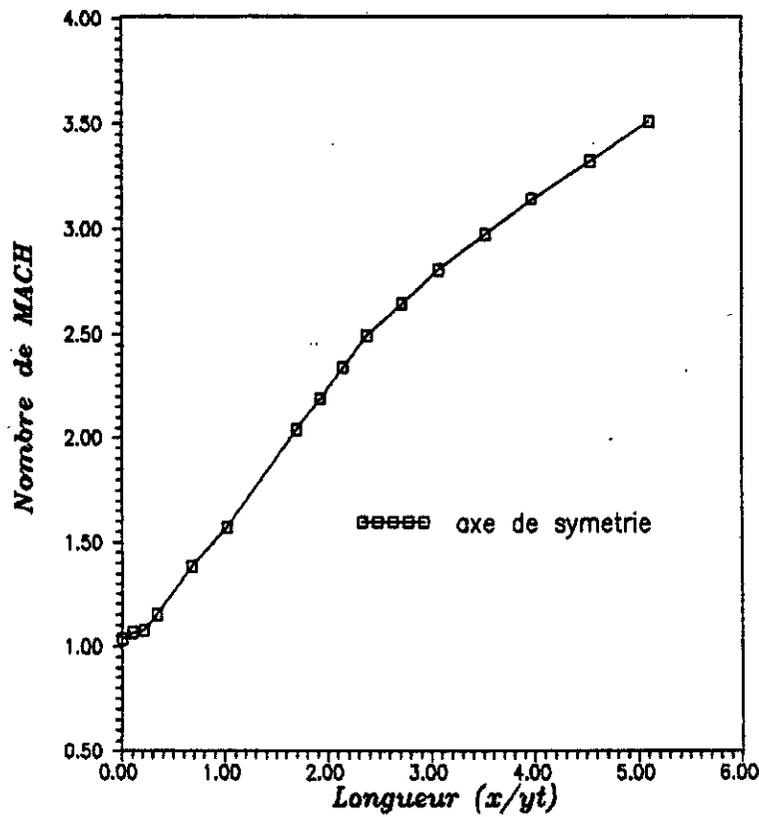


Fig. 5.16: Distribution du nombre de MACH le long du divergent (Exponentielle, Antares)

## **CHAPITRE 6**

**Conclusion générale et recommandations**

Arrivés à la fin de notre travail, il convient de nous interroger sur la portée de celui-ci et d'en tirer quelques conclusions.

Nous avons exposé dans cette thèse une méthode de conception de tuyères supersoniques qui est la méthode des caractéristiques.

Le programme conçu , élaboré suivant le schéma de (Zucrow & Hoffmann, 1976), permet d'analyser les différentes configurations de tuyères (conique, profilée, etc.) et s'est fait d'une manière flexible afin d'y ajouter d'autres formes de tuyères.

Une étude s'intéressant aux écoulements transsonique et supersonique se tenant dans une tuyère convergente-divergente ainsi que les différentes configurations qu'elle peut prendre a été réalisée.

L'écoulement transsonique a été simulé grâce à deux approches : l'une résolvant l'équation des petites perturbations en termes des composantes de la vitesse (Sauer, 1947) et l'autre procédant à un développement en série en termes du rapport rayon de courbure-rayon au col (Kliegel & Levine, 1969).

L'écoulement supersonique a été calculé par la méthode des caractéristiques et les configurations que peut prendre la section divergente sont simulées par une droite, des polynômes du second et troisième degré et par une exponentielle.

Appliquées aux tuyères équipant les premiers étages des engins de recherche "BERENICE" et "ANTARES" de l'ONERA, France, les résultats obtenus permettent d'aboutir aux conclusions suivantes :

- Pour un rapport du rayon de courbure au rayon au col supérieur à 1, les deux approches utilisées pour le calcul de l'écoulement transsonique développent une égale efficacité pour prévoir les composantes de la vitesse au col montrant ainsi la fiabilité de leur application-intégration dans le code de calcul développé.

- Une prépondérance des configurations en cloche simulées par des polynômes (en particulier celui du second degré) sur celles simulées par une droite ou une exponentielle, cette dernière étant à éviter.

Bien que le code de calcul développé permet la simulation d'écoulements supersoniques, des développements intéressants peuvent faire l'objet de travaux futurs en particulier :

- Intégration d'une routine de calcul de la couche limite se développant le long de la paroi,

- Intégration d'une routine de calcul d'une éventuelle onde de choc qui pourrait se former dans la section divergente,

- Application à de "petites" tuyères dont le rapport rayon de courbure-rayon au col est inférieur à 1.

# BIBLIOGRAPHIE

**1- ASHWOOD, P.F**

"A review of the performance of exhaust systems for gas turbine Aero engines".

I.MACH.E, VOL.171, P.129, 1956.

**2- BARRERE, M ; JAUMOTTE, A**

La propulsion par fusées

PREF DE M.ROY, ED.DUNOD, PARIS.

**3- CROWN, J.C**

Supersonic nozzle design

TN N°1651, pp 1-34, 1948.

**4- FRASER, R.P**

Efficiency of supersonic nozzle for rockets and some unusual designs.  
Jet research laboratory, I.C.S.T, 1955 .

**5- GUDERLEY, G.;HANTSH,E**

Beste Formen fur achsensymmetrische uberschallshlidresen.

Zeits fur flugurisen shafter, vol.III, 1955.

**6- HADDAD, A.**

Supersonic Nozzle Design of Arbitrary Cross-Section

Phd thesis, C.I.T, 1988.

**7- HALL, I.M**

Transonic flow in two-dimensional and axially-symmetric nozzles.

Quat.Journal of Mach.and applied Math.

Vol.15, part 4, pp.487-508, 1962 .

**8- HOFFMAN, J.D**

Accuracies studies of the numerical of characteristic for axisymmetric, steady supersonic flow.

Journal of computational physics, vol III, Nb 2, pp 210-239,1973.

**9- HOFFMAN, J.D; ALLMAN, G.A.**

Design of maximum thrust nozzle base-boattail

contours. AFAPL-TR-77-1, vol II, 1977.

- 10- KLIEGEL, J.D; LEVINE, J.N**  
Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles.  
AIAA Journal, vol.7, Nb 7, pp.1375-1378, 1969.
- 11- MALINA, F.J**  
Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases.  
J. of Franklin Institute, vol.230, pp 433-454, 1940.
- 12- PALMER, J.D**  
Course Notes  
School of Mech.Eng, C.I.T, 1985.
- 13- RAO, G.V.R**  
Exhaust nozzle contour for optimum thrust.  
Jet propulsion, vol.28, Nb 6, pp 377-382, 1958.
- 14- RYHMING, L**  
Dynamique des fluides  
Presses polytechniques romandes, 1984.
- 15- SAUER, R.**  
General characteristics of the flow through nozzle at near critical speeds.  
NACA TM-1147.
- 16- ZUCROW, M.J; HOFFMAN,J.D**  
Gas dynamics  
John Wiley & sons, 1976

## Méthode d'Euler prédicteur-correcteur

### A.1 Méthode d'Euler

L'approximation de la solution  $y(x)$  d'une équation différentielle ordinaire se fait en exprimant la fonction inconnue en séries de Taylor :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'[x_0, y(x_0)] + \frac{h^2}{2!} y''[x_0, y(x_0)] + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}[x_0, y(x_0)] + \dots \quad (A.1)$$

La solution d'Euler s'obtient en remplaçant  $n=1$  dans la série de Taylor d'où :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h y'[x_0, y(x_0)] \quad (A.2)$$

### A.2 Méthode d'Euler prédicteur-correcteur

La méthode d'Euler prédicteur-correcteur est celle qui emploie un algorithme explicite à un ordre spécifié pour prédire une solution temporaire, puis emploie un algorithme d'ordre supérieur pour corriger cette solution.

Pour la phase prédicteur, on utilise la solution d'Euler (C.f equ A.2) :

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (A.3)$$

Pour la phase correcteur, (Hoffman, 1973) a montré que des solutions plus précises sont obtenues en utilisant un algorithme correcteur basé sur des propriétés moyennes. Dans cet algorithme les valeurs numériques des coefficients de l'équation différentielle sont déterminées sur la base de valeurs moyennes des propriétés au point initial et points solutions.

Si on considère une équation différentielle ordinaire:

$$dy = f(x, y) dx \quad (A.4)$$

Le problème est de l'intégrer à partir d'un point initial connu  $i(x_i, y_i)$  tel que:

$$y_i = y(x_i)$$

Si  $\Delta x$  est le pas de l'équation en différences finies, une valeur prédicteur de la solution au point  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$  est obtenue à partir de l'algorithme d'Euler prédicteur (C.f equ A.3).

$$y^0(x_i + \Delta x) = y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x \quad (A.5)$$

La précision de la solution obtenue par la phase prédicteur sera modifiée en employant  $y_i$  et  $y_{i+1}^0$  pour l'estimation de la valeur:

$$y(i + 1/2) = y(x_i + \Delta x / 2) \quad (\text{A.6})$$

et en remplaçant  $f(x_i, y_i)$  dans l'équation (A.5) par la valeur déterminée au demi-intervalle ainsi :

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i + \Delta x / 2, y_i + y_{i+1}^0 / 2) \Delta x \quad (\text{A.7})$$

où  $y_{i+1}^0$  est la valeur corrigée de la solution en  $x_{i+1}$ . L'équation (A.7) représente l'algorithme d'Euler correcteur. En appliquant cette procédure itérativement, on obtient la méthode d'Euler prédicteur-correcteur avec itérations :

$$y_{i+1}^n = y_i + f(x_i + \Delta x / 2, y_i + y_{i+1}^{n-1} / 2) \Delta x \quad (\text{A.8})$$

où  $y_{i+1}^n$  est la valeur de  $y$  après  $n$  approximations du correcteur

## ANNEXE B

### Solution transsonique de Kliegel & Levine

$$u_1 = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4} + z$$

$$v_1 = \frac{1}{4}r^3 - \frac{1}{4}r + rz$$

$$u_2 = \frac{2\gamma+9}{24}r^4 - \frac{4\gamma+15}{24}r^2 + \frac{10\gamma+57}{288} + z\left(r^2 - \frac{5}{8}\right) - \frac{2\gamma-3}{6}z^2$$

$$v_2 = \frac{\gamma+3}{9}r^5 - \frac{20\gamma+63}{96}r^3 + \frac{28\gamma+93}{288}r + z\left(\frac{2\gamma+9}{6}r^3 - \frac{4\gamma+15}{12}r\right) + rz^2$$

$$u_3 = \frac{556\gamma^2 + 1737\gamma + 3069}{10368}r^6 - \frac{388\gamma^2 + 1161\gamma + 1881}{2304}r^4 +$$

$$\frac{304\gamma^2 + 831\gamma + 1242}{1728}r^2 - \frac{2708\gamma^2 + 7839\gamma + 14211}{82944} +$$

$$z\left[\frac{52\gamma^2 + 51\gamma + 327}{384}r^4 - \frac{52\gamma^2 + 75\gamma + 279}{192}r^2 + \frac{92\gamma^2 + 180\gamma + 639}{1152}\right] +$$

$$z^2\left[-\frac{7\gamma-3}{8}r^2 + \frac{13\gamma-27}{48}\right] + \frac{4\gamma^2 - 57\gamma + 27}{144}z^3$$

$$v_3 = \frac{6836\gamma^2 + 23031\gamma + 30627}{82944}r^7 - \frac{3380\gamma^2 + 11391\gamma + 15291}{13824}r^5 +$$

$$\frac{3424\gamma^2 + 11271\gamma + 15228}{13824}r^3 - \frac{7100\gamma^2 + 22311\gamma + 30249}{82944}r +$$

$$z\left[\frac{556\gamma^2 + 1737\gamma + 3069}{1728}r^5 - \frac{388\gamma^2 + 1161\gamma + 1181}{576}r^3 + \frac{304\gamma^2 + 831\gamma + 1242}{864}r\right] +$$

$$z^2\left[\frac{52\gamma^2 + 51\gamma + 327}{192}r^3 - \frac{52\gamma^2 + 75\gamma + 279}{192}r\right] -$$

$$z^3\left[\frac{7\gamma-3}{12}r\right]$$