

M0007/96B

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

**THESE DE MAGISTER
EN ELECTRONIQUE APPLIQUEE**

OPTION : TELECOMMUNICATIONS

Présentée par : **NACERA LABCHRI**
Ingénieur d'Etat diplômée de l'Université de Blida

THEME

IDENTIFICATION ET REDUCTION OPTIMALE
DES SYSTEMES MULTIVARIABLES

Soutenue le 28 Février 1996 devant le jury composé de :

MM :

LOUAM N.	Maître de Conférences	Président
DERRAS B.	Maître de Conférences	Rapporteur
BOUDJEMA M.F.	Maître de Conférences	Examineurs
LARBES C.	Ph. D	
AIT CHEIKH M.S.	Chargé de cours	

نتطرق في هذه الدراسة الى عملية مطابقة وتبسيط النماذج الخطية المتعددة المتغيرات. المعيار المستعمل في عملية المطابقة هو طريقة المربعات الصغرى المعممة، اما حل جملة المعادلات المحصل عليها فيتم بطريقة التحليل التعامدي (QR).

أما بالنسبة لعملية تبسيط النماذج فقد استعملنا طريقتين شبه فضليتين، و قد تم تحسين هذه الطرق بإستعمالها كنقطة إنطلاق لطريقة مثلى تعتمد على تصغير معيار المربعات الصغرى. و الجدير بالذكر أن الطريقتين شبه فضليتين هما طريقة معاملات الربح المتوازن و طريقة سافونوف. و بالنسبة لنجاعة النتائج المتحصل عليها فهي موضحة عن طريق بعض الأمثلة العددية.

Resume :

Dans cette étude, les problèmes d'identification et de réduction optimale de modèle sont traités et ce pour les systèmes linéaires multivariables. Le critère utilisé pour l'identification est celui des moindres carrés généralisés. La solution du système d'équations résultant est obtenue à l'aide d'une méthode robuste qui est la décomposition QR. En ce qui concerne la réduction de modèle, deux méthodes approximatives confirmées par une méthode optimale sont utilisées. Les méthodes sous-optimales sont celle des gains équilibrés et celle de SAFONOV. La méthode optimale est basée sur le critère des moindres carrés. Les performances des techniques étudiées sont illustrées à l'aide de quelques exemples numériques.

Mots clés : Identification, réduction de modèles, moindres carrés généralisés, Gains équilibrés, Projections Internes.

ABSTRACT :

In this study, the identification and model reduction problems for multivariable linear systems are addressed. The criterion used for identification is the generalized least-squares one. The solution of the resulting linear equations is obtained via QR factorization. Concerning the model reduction problem two different approximative methods are confirmed by an optimal one. The suboptimal methods are the balanced gains method and SAFONOV technique. The refinement of these two methods is performed via an optimal method that is based on the least-squares criterion. The performances of all these techniques are checked using numerical simulation.

Keywords : Identification, Model Reduction, Generalized least-squares, Balanced Gains, Internal Projections.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très particulièrement mon Directeur de Thèse Monsieur DERRAS qui a bien voulu diriger ce travail de recherche. Je le remercie, aussi, pour son aide et ses conseils qui m'ont été très bénéfiques pour la finalisation de cette thèse.

Je remercie Monsieur CHIGARA qui a bien voulu me proposer ce sujet de thèse et également pour m'avoir initié dans le domaine de l'automatique.

Je n'oublierai pas de remercier mes très chers parents pour leurs encouragements et leurs sacrifices, également mes très chères soeurs et mes très chers frères plus particulièrement Hacène a qui je souhaite une très grande réussite dans ces études.

Que Monsieur AIT CHEIKH, responsable du laboratoire d'automatique, trouve ici l'expression de mon profond respect et mes plus sincères remerciements pour son aide et sa compréhension.

Je remercie également Monsieur LOUAM pour avoir accepté la présidence du jury.

Je remercie très sincèrement Monsieur BOUDJEMA, Monsieur AIT CHEIKH et Monsieur LARBES qui ont accepté d'examiner cette thèse.

Je tiens aussi à remercier NACERA DAHMANI, NADIA ABINA et KARIM NADIA pour l'ambiance très chaleureuse qu'elles ont créée par leur présence.

Je suis également très reconnaissante à l'ensemble des Enseignants (es) de l'Université de BLIDA et de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger qui ont contribué à ma formation.

Je remercie, aussi, tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'aboutissement de cette thèse. Et, très particulièrement LAHCENE ABELOULEL.

A l'équipe du centre de calcul, de la bibliothèque et du périodique merci pour votre efficacité et votre disponibilité.

DEDICACES

A

MON TRÈS CHER PÈRE

ET

A

MA TRÈS CHÈRE MÈRE

SOMMAIRE

LISTES DES SYMBOLES	i
LISTE DES FIGURES	iii
CHAPITRE I : - INTRODUCTION GENERALE	1
I.1 : - INTRODUCTION	1
I.2 : - NECESSITE DE LA REDUCTION	6
I.3 : - APPLICATIONS ET MOTIVATIONS	7
I.3.1 : - IDENTIFICATEUR D'ORDRE REDUIT	7
I.3.2 : - CONTROLEURS D'ORDRE REDUIT	8
I.3.3 : - REGULATEURS D'ORDRE REDUIT	8
I.4 : - POSITION DU PROBLEME	9
I.5 : - ORGANISATION DE LA THESE	10
CHAPITRE II : - IDENTIFICATION DES SYSTEMES MULTIVARIABLES	11
II.1 : - INTRODUCTION	11
II.2 : - GENERALITES	12
II.3 : - PRESENTATION DE LA METHODE D'IDENTIFICATION MULTIVARIABLE	14
II.3.1 : - ALGORITHME DES MOINDRES CARRES GENERALISES	21
II.4 : - SIMULATIONS NUMERIQUES	25
II.4.1 : - RESULTATS DES SIMULATIONS	25
II.4.2 : - INTERPRETATIONS DES RESULTATS	38
II.5 : - CONCLUSION	39
CHAPITRE III : - REDUCTION DES SYSTEMES MULTIVARIABLES	41
III.1 : - INTRODUCTION	41
III.2 : - GENERALITES	42
III.2.1 : - DEFINITION DES GRAMMIENS D'OBSERVABILITE ET DE COMMANDABILITE	43
III.2.2 : - PROPOSITION	43
III.3 : - POSITION DU PROBLEME	44
III.4 : - REDUCTION DES SYSTEMES MULTIVARIABLES MINIMAUX	45
III.4.1 : - REALISATION EQUILIBREE	45
III.4.1.1 : - ALGORITHME D'EQUILIBRE	45
III.4.2 : - METHODE DES GAINS EQUILIBRES	47
III.4.2.1 : - MODELE D'ORDRE REDUIT	48
III.5 : - REDUCTION DES SYSTEMES MULTIVARIABLES NON	

MINIMAUX	50
III.5.1 : - REDUCTION PAR LA METHODE DE SAFONOV	51
III.5.2 : - ALGORITHME DE REDUCTION	52
III.6 : - REDUCTION OPTIMALE AU SENS L^2	54
III.6.1 : - GENERALITES	55
III.6.2 : - PRESENTATION DE LA METHODE DE REDUCTION OPTIMALE	55
III.6.2.1 : - EQUATIONS	55
III.6.2.2 : - CONDITIONS NECESSAIRES A L'OPTIMUM	56
III.6.2.3 : - ALGORITHME DE REDUCTION OPTIMALE	57
III.7 : - VALIDATION DE LA REDUCTION OPTIMALE DES MODELES MULTIVARIABLES	58
III.7.1 : RESULTATS DES SIMULATIONS	62
III.7.2 : INTERPRETATIONS DES RESULTATS	102
III.8 : - CONCLUSION	103
CONCLUSION GENERALE	105
BIBLIGRAPHIE	109
ANNEXES	117

LISTE DES SYMBOLES

Symboles	Descriptions
J	$\sum_{i=1}^{N_m} (Y(i) - Y_m(i))^T (Y(i) - Y_m(i))$
$Y_m(i)$	Sortie du système inconnu
$Y(i)$	Sortie mesurable du processus réel
N_m	Nombre d'observations
$r_s(i)$	Perturbations
$U(i)$	Entrée du système
θ	Matrice des paramètres du processus réel
θ_m	Matrice des paramètres inconnus
$e(i)$	$Y(i) - Y_m(i)$
$\xi(i)$	Bruit blanc
$Q^{-1}(Z^{-1})$	Dénominateur de la fonction de transfert du bruit
$P(Z^{-1})$	Numérateur de la fonction de transfert du bruit
$m_j(k+v_{jj})$	Vecteur colonne de la matrice d'information
$Y_j(N_m)$	Vecteur ligne de la $j^{\text{ème}}$ sortie
$Q(N_m)$	Matrice orthogonal de dimension $N_m \times N_m$
$R(N_m)$	Matrice triangulaire supérieure de dimension $n \times n$
$F_j(Z^{-1})$	$(X_{E_j}^T X_{E_j})^{-1} X_{E_j}^T e_j$
X_{E_j}	Matrice de dimension $(N_m - 1 \times q)$
ζ	Précision
$F(Z^{-1})$	$A(Z^{-1})Q^{-1}(Z^{-1})P(Z^{-1})$
A, B, C	Matrices de dimension $N \times N$, $N \times m$ et $p \times N$
\mathbb{R}	Espace des nombres réels
σ_i	Valeurs singulières
\mathbb{R}^+	Espace des nombres réels positifs
ν_i^2	$-2a_{ii}\sigma_i$
ΔG	$\sigma_i \nu_i^2$

L^2	Norme quadratique
E_{big}	$V_{L,big}^T V_{R,big}$
$svd(E_{big})$	$U_{E,big} \Sigma_{E,big} V_{E,big}$
A_r, B_r, C_r	Matrices de dimension $r \times r, r \times m, p \times r$
tr	trace
M	$\begin{bmatrix} C^T C & -C^T C_r \\ -C_r^T C & C_r^T C_r \end{bmatrix}$
S	$\begin{bmatrix} BB & BB_r^T \\ B_r^T B & B_r B_r^T \end{bmatrix}$
$P; Q$	$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$
θ_1	$-Q_{22}^{-1} Q_{12}^T$
θ_2	$P_{12} P_{22}^{-1}$
Π^T	$P_{12}^T Q_{12} + P_{22} Q_{22}$
θ_{12}	$\theta_1 \theta_2$
I_r	Matrice Identité de dimension $r \times r$
T	Matrice de transformation d'équilibre
G	$[I_r \ 0]$
F	G^T
E	$T F G T^T$ (est une Projection)

LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES DU CHAPITRE II

Figure II.1- Structure d'un Identificateur	13
Figure II.2- Système dynamique avec Bruit Coloré	15
Figure II.3- Principe de filtrage des données	23
Figure II.4- Méthode des Moindres Carrés Généralisés	24
- Identification par la méthode des MCG de la première sortie du modèle représentant une chaudière	
Figure II.5.1- Représentation de l'entrée de mesure	26
Figure II.5.2- Courbe des perturbations	26
Figure II.5.3- Réponse temporelle discrète	26
Figure II.5.4 - Représentation de l'entrée filtrée	26
- Identification par la méthode des MCG de la deuxième sortie du modèle représentant une chaudière	
Figure II.6.1- Représentation de l'entrée de mesure	27
Figure II.6.2- Courbe des perturbations	27
Figure II.6.3- Réponse temporelle discrète	27
Figure II.6.4- Représentation de l'entrée filtrée	27
- Identification par la méthode des MCG de la troisième sortie du modèle représentant une chaudière	
Figure II.7.1- Représentation de l'entrée de mesure	28
Figure II.7.2- Courbe des perturbations	28
Figure II.7.3- Réponse temporelle discrète	28
Figure II.7.4- Représentation de l'entrée filtrée	28
- Identification par la méthode des MCG de la quatrième sortie du modèle représentant une chaudière	
Figure II.8.1- Représentation de l'entrée de mesure	29
Figure II.8.2- Courbe des perturbations	29
Figure II.8.3- Réponse temporelle discrète	29
Figure II.8.4- Représentation de l'entrée filtrée	29
- Identification par la méthode des MCG de la première sortie du modèle représentant un réacteur nucléaire	
Figure II.9.1- Représentation de l'entrée de mesure	31
Figure II.9.2- Courbe des perturbations	31
Figure II.9.3- Réponse temporelle discrète	31
Figure II.9.4- Représentation de l'entrée filtrée	31

- Identification par la méthode des MCG de la deuxième sortie du modèle représentant un réacteur nucléaire	32
Figure II.10.1- Représentation de l'entrée de mesure	32
Figure II.10.2- Courbe des perturbations	32
Figure II.10.3- Réponse temporelle discrète	32
Figure II.10.4- Représentation de l'entrée filtrée	32
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات المكتبة — BIBLIOTHEQUE Ecole Nationale Polytechnique </div>	
- Identification par la méthode des MCG de la Troisième sortie du modèle représentant un réacteur nucléaire	33
Figure II.11.1- Représentation de l'entrée de mesure	33
Figure II.11.2- Courbe des perturbations	33
Figure II.11.3- Réponse temporelle discrète	33
Figure II.11.4- Représentation de l'entrée filtrée	33
- Identification par la méthode des MCG de la première sortie du modèle représentant un bras manipulateur	35
Figure II.12.1- Représentation de l'entrée de mesure	35
Figure II.12.2- Courbe des perturbations	35
Figure II.12.3- Réponse temporelle discrète	35
Figure II.12.4- Représentation de l'entrée filtrée	35
- Identification par la méthode des MCG de la deuxième sortie du modèle représentant un bras manipulateur	36
Figure II.13.1- Représentation de l'entrée de mesure	36
Figure II.13.2- Courbe des perturbations	36
Figure II.13.3- Réponse temporelle discrète	36
Figure II.13.4- Représentation de l'entrée filtrée	36
- Identification par la méthode des MCG de la troisième sortie du modèle représentant un bras manipulateur	37
Figure II.14.1- Représentation de l'entrée de mesure	37
Figure II.14.2- Courbe des perturbations	37
Figure II.14.3- Réponse temporelle discrète	37
Figure II.14.4- Représentation de l'entrée filtrée	37
LISTE DES FIGURES DU CHAPITRE III	
Figure III.1- Organigramme d'équilibre d'un système	46
Figure III.2- Organigramme de réduction d'un système multivariable minimal	49
Figure III.3- Organigramme d'une méthode de réduction optimale	59
Figure III.4- Organigramme général de l'Identification et la réduction optimale	61
-Réduction optimale du modèle représentant une chaudière	
Figure III.5.1 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2 et du	

modèle réduit optimal d'ordre 2	63
Figure III.5.2 - Spectres d'amplitudes des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2 et du modèle réduit optimal d'ordre 2	64
Figure III.5.3 - Spectres de Phases des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2 et du modèle réduit optimal d'ordre 2	65
Figure III.6.1 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4 et du modèle réduit optimal d'ordre 4	66
Figure III.6.2 - Spectres d'amplitudes des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4 et du modèle réduit optimal d'ordre 4	67
Figure III.6.3 - Spectres de Phases des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4 et du modèle réduit optimal d'ordre 4	68
Figure III.7.1 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 6 et du modèle réduit optimal d'ordre 6	69
Figure III.7.2 - Spectres d'amplitudes des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 6 et du modèle réduit optimal d'ordre 6	70
Figure III.7.3 - Spectres de Phases des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 6 et du modèle réduit optimal d'ordre 6	71
Figure III.8.1 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 8 et du modèle réduit optimal d'ordre 8	72
Figure III.8.2 - Spectres d'amplitudes des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 8 et du modèle réduit optimal d'ordre 8	73
Figure III.8.3 - Spectres de Phases des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 8 et du modèle réduit optimal d'ordre 8	74
Figure III.9.1 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 6 et du modèle réduit optimal d'ordre 8	75
Figure III.9.2 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle initial d'ordre 11, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4, du modèle réduit sous-optimal	

- Réduction optimale du modèle représentant un réacteur nucléaire	
Figure III.10.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2 et du modèle réduit optimal d'ordre 2	78
Figure III.10.2 - Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2 et du modèle réduit optimal d'ordre 2	79
Figure III.10.3 - Spectres de Phases des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2 et du modèle réduit optimal d'ordre 2	80
Figure III.11.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4 et du modèle réduit optimal d'ordre 4	81
Figure III.11.2 - Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4 et du modèle réduit optimal d'ordre 4	82
Figure III.11.3 - Spectres de Phases des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4 et du modèle réduit optimal d'ordre 4	83
Figure III.12.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5 et du modèle réduit optimal d'ordre 5	84
Figure III.12.2 - Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5 et du modèle réduit optimal d'ordre 5	85
Figure III.12.3 - Spectres de Phases des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5 et du modèle réduit optimal d'ordre 5	86
Figure III.13.1 - Réponses impulsionnelles des quatre sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5	87
Figure III.13.2 - Réponses impulsionnelles des quatre sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 2, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5	88
- Réduction optimale du modèle représentant un bras manipulateur	
Figure III.14.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 3 et du	

	modèle réduit optimal d'ordre 3	
Figure III.14.2 -	Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 3 et du modèle réduit optimal d'ordre 3	91
Figure III.14.3 -	Spectres de Phases des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 3 et du modèle réduit optimal d'ordre 3	92
Figure III.15.1 -	Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4 et du modèle réduit optimal d'ordre 4	93
Figure III.15.2 -	Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4 et du modèle réduit optimal d'ordre 4	94
Figure III.15.3 -	Spectres de Phases des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4 et du modèle réduit optimal d'ordre 4	95
Figure III.16.1 -	Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5 et du modèle réduit optimal d'ordre 5	96
Figure III.16.2 -	Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5 et du modèle réduit optimal d'ordre 5	97
Figure III.16.3 -	Spectres de Phases des trois sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5 et du modèle réduit optimal d'ordre 5	98
Figure III.17.1 -	Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 3, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5	99
Figure III.17.2 -	Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle initial d'ordre 6, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 3, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 4, du modèle réduit sous-optimal d'ordre 5	100

CHAPITRE I INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

I.1 - INTRODUCTION

Dans le domaine de l'automatique, l'identification est un problème qui suscite beaucoup d'intérêt. De nombreux travaux ont été réalisés sur ce vaste sujet et un grand nombre de méthodes a été proposé. La plus connue est sans doute la méthode des moindres carrés, dont les principes de base ont été établis par GAUSS en 1809. Plusieurs algorithmes sont directement inspirés de cette méthode. Nous citons la méthode des moindres carrés généralisés proposée par CLARKE en 1967 ; et MAYNE fût le premier à introduire en automatique la notion de matrice instrumentale [NAJ.83]. Un autre type d'approche est celui proposé par ASTRÖM en 1965 qui a appliqué la technique du maximum de vraisemblance à l'identification [FOU.86a] [FUR.73].

Dans le cadre des algorithmes récurrents [MIE.90], nous pouvons citer la méthode des moindres carrés étendue proposée par TALMON en 1973, la méthode des moindres carrés modifiée proposée par SAGARA en 1977, la méthode des moindres carrés généralisés dont HASTING & JAMES en 1969 et SEN en 1975 ont chacun proposé une version récurrente; et enfin, la méthode du maximum de vraisemblance pour laquelle des versions récurrentes ont été proposées par SODERTRÖM en 1973, par GERTLER & BANYASZ en 1974 et FURHT & CARAPIC en 1976. En 1976 LANDAU a proposé une méthode d'identification utilisant un modèle ajustable. En 1990 LJUNG a présenté une étude critique sur l'utilisation des algorithmes de poursuite de systèmes évoluant dans le temps [MIE.90].

Toutes ces méthodes s'appliquent également aux systèmes multivariables, à la condition que ceux-ci admettent une décomposition en autant de sous-systèmes multi-entrées, mono-sortie qu'il y a de sorties. Mais aucune de ces méthodes ne traite le cas des systèmes réellement multivariables, c'est-à-dire des systèmes qui présentent des

interconnexions, ce qui empêche toute décomposition en sous-systèmes multi-entrées, mono-sortie.

Une fois que la structure du modèle est choisie, il faut estimer les valeurs numériques des différents paramètres intervenant dans cette structure. Ainsi, la construction de modèles à partir de données expérimentales est très importante en automatique; il s'agit de l'identification paramétrique. Cependant, avant toute tentative d'estimation paramétrique, il convient de s'assurer que les données recueillies contiennent l'information nécessaire compte tenu de la structure choisie pour le modèle. C'est le problème de l'identifiabilité structurelle [UNB.73]. Bien souvent, les connaissances à priori ne sont pas suffisantes pour que le modèle puisse en être déduit directement, et les équations définissant le modèle comportent des paramètres inconnus. On utilise alors, les mesures effectuées sur le processus pour en déduire à la fois la structure du modèle la plus adaptée et les paramètres associés. Il se pose alors un double problème de discrimination entre structure et estimation des paramètres. La démarche consiste à choisir à chaque fois une structure du modèle, ceci définit une classe de modèles possibles. Alors, on ne peut choisir que le meilleur modèle dans la classe considérée. Mais dans de nombreux cas, la structure à retenir pour le modèle ne peut être entièrement déduite de nos connaissances à priori, et l'on doit envisager un ensemble de structures possibles, auxquelles sont associées autant de vecteurs de paramètres inconnus. Ce qui rend la détermination de l'ordre du modèle très difficile et exige un temps de calcul très long.

Un autre problème d'estimation se pose en automatique ; il s'agit du cas où de nombreux schémas de commande nécessitent la connaissance du vecteur d'état ou d'une partie de cet état, en général non accessible directement à la mesure. Ainsi, l'observation d'un système dynamique consiste à estimer en temps réel, l'état présent à partir de la connaissance des entrées et de la mesure des sorties sur un intervalle de temps passé. Mais, il faut que les données et le modèle du système dont on dispose vérifient les conditions d'observabilité. C'est ainsi, que la notion de réalisation minimale a été introduite dans le processus d'identification, et spécialement, l'idée de gouvernabilité et d'observabilité du système. Toutefois, c'est uniquement le sous-

système complètement observable et complètement gouvernable qui est identifié. Et l'ordre du système est défini par la dimension de ce sous-système [KAT.73]. Seulement, l'approximation d'une réalisation minimale par un modèle d'ordre réduit équivalent est devenue possible depuis que des techniques de réduction ont été développées.

Dans la mesure où la complexité est liée à la dimension du système, le problème sera de trouver un modèle d'ordre réduit le plus simple qui assurera un comportement dynamique équivalent à celui du modèle original. En effet, durant ces trois dernières décennies, l'approximation des systèmes linéaires, dynamiques et multivariables, par des modèles d'ordre réduit équivalents a suscité beaucoup d'intérêt et un grand nombre de méthodes a été proposé.

Tout d'abord les premières techniques de réduction ont été développées particulièrement pour des systèmes SISO par PRONY en 1875 [GLO.84]. Depuis, un grand nombre d'auteurs ont proposé des méthodes d'approximation des systèmes donnés par leurs fonctions de transfert. Nous pouvons citer la méthode de décomposition de la fonction de transfert en fractions continues [CHE.68][CHE.70], la méthode des moments qui approxime la réponse impulsionnelle du système [ZAK.73], [LAL.74], l'approximation du type Padé [SHA.74][SHA.75a], la méthode des pôles dominants [SHA.75b], la méthode d'approximation basée sur le critère de stabilité de ROUTH [HUT.75] et la méthode qui associe les domaines temporel et fréquentiel pour l'approximation de la fonction de transfert a été proposée par VAROUFAKIS [VAR.79]. En 1980, ce dernier a proposé une étude comparative [VAR.80] où il prouvait que la méthode des pôles dominants et la méthode de ROUTH sont équivalentes puisqu'elles préservent la stabilité du système, tandis que la méthode de décomposition de la fonction de transfert en fractions continues et la méthode de Padé présentent une très faible erreur aux basses fréquences. Cependant, l'élimination d'un pôle instable par un zéro très proche donne une mauvaise approximation du système initial [SHA.80][SHA.82]. En plus d'une étude comparative des méthodes de réduction, XUE [XUE.91] a mis en évidence l'inconvénient de la réduction d'une réalisation équilibrée lorsque le système n'est pas propre (instabilité) ou lorsque le système est défini à partir de données stochastiques. ATHERTHON [ATH.91] a proposé un

algorithme de réduction pour l'approximation des systèmes linéaires avec retard mais cet algorithme est sous-optimal aux résultats de WILSON [WIL.70]. CATHY [CAT.93] et KRZYSZTOF [KRZ.93] ont donné une méthode de réduction d'une fonction de transfert analytique établie à partir de la mesure des entrées et des sorties. Cette approximation s'effectue dans le domaine fréquentiel. On note toutefois, que peu de travaux ont été consacrés au problème de la réduction optimale. En 1967 MEIER et LUENBERGER [MEI.67] ont utilisé la paramétrisation pôles-résidus de la fonction de transfert et ont proposé une condition nécessaire à l'optimalité du modèle d'ordre réduit. En utilisant la même technique CARRIER et BRYSON [CAR.90] ont donné les expressions, dérivées de la fonction coût, qui ont permis de trouver le modèle d'ordre réduit optimal. En 1992 SPANOS, MILMAN et MINGORI [SPA.92] ont développé une nouvelle technique de réduction optimale; elle est basée sur la minimisation de la norme quadratique. Toutefois, l'approximation d'une fonction de transfert présente quelques inconvénients, on peut citer : possibilité d'éliminer un pôle instable par un zéro, la sensibilité aux erreurs de calcul et enfin son utilisation est limitée aux systèmes monovariables.

Après l'avènement de la représentation des systèmes dans l'espace d'état [FOU.82a] [FOS.72], et transposition du problème de la réduction aux modèles multivariables, plusieurs techniques ont été développées. Une première approche de réduction optimale a été développée, cependant, la synthèse d'un modèle d'ordre réduit via cette technique nécessite la résolution de deux équations de type Lyapunov non linéaires (équations de RICCATI) [DAV.85]. Une formulation plus simplifiée a été proposée dans [WIL.70] où les valeurs propres du modèle réduit sont présélectionnées; mais ce choix est arbitraire, ce qui représente un inconvénient majeur à cette technique. Le problème de réduction de modèle de grande dimension par des modèles d'ordre réduit a été considéré dans [ATH.77] où les modèles sont approximés soit par minimisation d'un critère quadratique soit par agrégation linéaire, avec ou sans retard.

Avec la contribution de MISHRA, le problème de la réduction optimale a été reconsidéré dans [WIL.79][WIL.80]. Un algorithme itératif qui utilise le résultat de la résolution de deux équations de type Lyapunov a été proposé; c'est une procédure qui

minimise la norme quadratique de l'erreur d'approximation. En effet, cette méthode génère une solution optimale. SKELTON [SKE.80] a fourni un critère de performance comme moyen d'évaluation du degré de contribution de chaque état d'un système multivariable, lorsque le coût total est une fonction quadratique. Si l'état considéré représente un sous-système physique, alors la fonction coût est utilisée pour une analyse modale, par contre si elle définit une équation mathématique qui doit être éliminée, alors la composante coût devient un critère de troncature des modèles équilibrés. Toutefois, le calcul de la matrice de transformation d'équilibre est non linéaire.

Le principe de troncature d'une réalisation équilibrée a été suggéré en premier lieu par MOORE [MOO.81]. Cette technique nécessite une étape d'équilibre [LAU.80] où les grammians d'observabilité et de commandabilité sont égaux et diagonaux. En effet, l'algorithme implique la résolution de deux équations de type Lyapunov [ROT.70]. L'approche définie par MOORE est basée sur une idée de la théorie des systèmes. Le principe est d'éliminer n'importe quel sous-système faiblement observable et faiblement commandable. Ce concept est défini au moyen d'une relation de dominance impliquant des invariants de similarité appelés les modes du second ordre. MOORE évalue le modèle d'ordre réduit en calculant l'erreur relative définie sur les valeurs singulières. La technique de troncature d'une réalisation équilibrée a été appliquée aux systèmes discrets par PERNEBO et SILVERMAN [PER.82], YOUNG [YOU.85] et OBER [OBE.87]. BETTAYEB [BET.91] a suggéré une nouvelle interprétation de la réduction d'une réalisation équilibrée représentée dans l'espace d'état, comme étant une minimisation de l'énergie d'entrée-sortie du modèle. Puis FLORIN [FLO.92] a proposé comme indice de performance de la troncature d'une réalisation équilibrée, d'un système discret, une erreur quadratique. En utilisant une formulation des projections, HYLAND et BERNSTEIN [HYL.85] ont simplifié la formulation d'optimalité selon WILSON [WIL.70] [WIL.80] ; ils ont proposé un algorithme itératif. Cependant, cette technique nécessite la résolution de deux équations de type LYAPUNOV couplées à une matrice de projection, ceci rend le calcul du modèle d'ordre réduit très difficile. Une technique de réduction des systèmes multivariables a été proposée par KABAMBA [KAB.85a] [KAB.85b] ; elle est basée sur une analyse des gains équilibrés. Cette

méthode a fait l'objet de notre étude. Il faut toutefois souligner que l'approximation d'un modèle complexe par troncature d'une réalisation équilibrée ne concerne que les modèles multivariables minimaux. Pour relever cette contrainte d'autres méthodes ont été développées. Nous rappelons que non minimalité d'un système peut être défini par la présence, dans le système, des modes ingouvernables et inobservables. Cela se traduit par des valeurs singulières qui sont soit très faibles, soit de même ordre de grandeurs. Dans ces conditions l'équilibre devient intrinsèquement mal conditionné et la matrice de transformation d'équilibre tendra vers une singularité. D'où l'utilité des deux méthodes présentées par SAFONOV et CHIANG [SAF.89] qui ne nécessitent pas l'équilibre. En effet, ces deux techniques se présentent comme une projection du modèle multivariable dans une nouvelle base qui le transformera en un autre modèle équivalent mais de dimension réduite. Pour générer cette nouvelle base deux approches de réduction basées sur une transformation des projections internes ont été proposées. La première est basée sur une décomposition de SCHUR du produit des grammians de gouvernabilité et d'observabilité; la seconde méthode nécessite une factorisation de CHOLESKY de ces deux grammians. En se basant toujours sur une formulation des projections internes DERRAS [DER.94] [DER.88] a proposé une technique de réduction des systèmes monovariables discrets qui peut être étendue facilement aux systèmes multivariables. Cette technique présente un très grand intérêt, puisqu'elle peut être utilisée pour générer des modèles d'ordre réduit à partir de modèles multivariables minimaux ou non minimaux; étant donnée qu'elle n'exige pas une étape d'équilibre préliminaire.

I.2 - NECESSITE DE LA REDUCTION

Un tel intérêt pour la réduction est motivé, d'une part par le besoin en simulation numérique des systèmes réels par des modèles simplifiés mais de comportement équivalent. Cette contrainte est d'autant plus importante dans les applications en temps réel, à cause de la limite de la capacité des ordinateurs et d'autres organes de calcul. D'autre part, pour faciliter l'analyse et la conception de ces systèmes, il devient

important, voire nécessaire de faire un compromis entre la complexité du modèle avec une meilleure performance et la simplicité avec une performance moins bonne. En effet, ceci rendra plus aisé la conception et l'implémentation, par exemple: des commandes, des régulateurs et des filtres numériques associés avec ces systèmes, etc...

Aussi, lors de la phase de réalisation, le problème de réduction de modèles reflète le besoin du concepteur pour la facilité et l'économie de l'implémentation. ♦

I.3 - APPLICATIONS ET MOTIVATIONS

La modélisation permet de représenter sous forme synthétique et cohérente les systèmes physiques d'intérêt. Cette description donne naissance à des modèles de grandes dimensions. Quelques exemples d'applications peuvent être cités, comme les systèmes de télécommunications, les lignes de transmissions, la propagation des ondes, les réacteurs nucléaires et bien d'autres systèmes.

Basés sur un dimensionnement fini des représentations dans l'espace d'état, un certain nombre de modèles du contrôle moderne peuvent, en effet, faire l'objet d'une étude comme les filtres de KALMAN, les régulateurs, les commandes etc..

Naturellement, la complexité des calculs est dictée par l'ordre du modèle, d'où la nécessité d'approximer les modèles d'ordre élevé par des modèles plus simples, au moins dans les situations suivantes :

- ↳ Identification d'ordre réduit ;
- ↳ Calcul d'une commande d'ordre réduit ;
- ↳ Calcul d'un régulateur d'ordre réduit.

I.3.1 - IDENTIFICATEUR D'ORDRE REDUIT

Dans le processus d'identification des systèmes et l'estimation des paramètres, il est nécessaire, pour un traitement mathématique rigoureux, de spécifier l'ensemble des modèles adéquats. Cependant, dans beaucoup de situations pratiques où le phénomène

physique est gouverné par des relations compliquées, ces modèles peuvent être représentés par des modèles mathématiques simplifiés [MAS.88].

Les approches pour la réduction de ces modèles se basent d'abord sur l'identification du modèle d'ordre élevé ensuite la réduction de l'ordre du modèle monovariable estimé par des techniques classiques [MAS.88] [DEN.85] [EYA.85].

I.3.2 - COMMANDES D'ORDRE REDUIT

La synthèse d'une commande peut s'avérer particulièrement fastidieuse pour les systèmes d'ordre élevé. Une solution à ce problème est la réduction.

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées, comme l'agrégation [BER.77] qui a servi dans la synthèse d'une loi de commande sous-optimale. Une autre approche basée sur les interactions entre le système et le contrôleur d'ordre élevé a été proposée [CHR.88]; elle utilise les coefficients de corrélation comme moyen de réduction des interconnexions entre les sous-systèmes dans un système d'ordre élevé. D'autres approches de synthèse des commandes ont été proposées par BRIAN [BRI.89] et DENIS [DEN.91]; elles sont basées sur la troncature d'une réalisation équilibrée du modèle pour lequel on synthétise la commande.

I.3.3 - REGULATEURS D'ORDRE REDUIT

Les modèles linéaires et invariants dans le temps de beaucoup de systèmes physiques singulièrement perturbés contiennent des modes lents et des modes rapides. Le contrôle de tels modèles devient souvent très mal conditionné, plusieurs approches de simplifications leurs ont été appliquées sans succès [CHO.76], parceque la séparation de ces modes n'est pas complète. CHOW [CHO.76] et WANG [WAN.92] ont décrit une méthode qui assure une séparation complète des modes lents et rapides. Ainsi, la performance proposée pour la synthèse d'un régulateur lent ou d'un régulateur rapide peut être atteinte par une approximation des modes de second ordre.

I.4 - POSITION DU PROBLEME

Dans l'étude d'un processus d'automatisation des procédés industriels, les modèles des installations étudiés, quand ils existent, sont multivariables. La modélisation de tels processus ne se fait pas sans certaines difficultés d'ordre théoriques et pratiques. En effet, elle fait intervenir un grand nombre de variables. Aussi, ces systèmes sont indécomposables en sous-systèmes et sont rarement décrits par des équations linéaires, ou des équations différentielles à coefficients constants. Ainsi, la qualité de la représentation sera améliorée si l'on dispose de méthodes d'identification précises, fiables et qui tiennent compte de ces caractéristiques. Les difficultés d'ordre pratique qui peuvent apparaître sont d'une part, la structure du modèle qui ne peut être connue a priori. D'autre part, la présence des dynamiques non modélisables dans les systèmes réels ce qui rend encore plus difficile, voire impossible la connaissance précise de la structure du modèle. Un choix arbitraire, de cette structure peut engendrer un modèle dont l'ordre est supérieur à celui du système réel, c'est-à-dire une surestimation de l'ordre.

La solution à ces deux problèmes est une réduction de l'ordre du modèle identifié ce qui a fait l'objet de cette recherche.

L'identification d'un modèle d'ordre élevé et sa réduction optimale ont été abordées. Les systèmes étudiés sont multivariables, linéaires [GAB.87], invariants dans le temps [DIE.87], stables [GAB.87] [MAR.87], observables [NAS.63] et gouvernables [RIV.89].

Cette étude s'étale sur deux volets : d'abord l'identification d'un système complexe par la méthode des moindres carrés généralisés (MCG) [FOU.82a][FOS.72]. Une transformation orthogonale du type QR a été introduite [KEN.93]. Cette méthode résout les problèmes d'instabilités numérique grâce à sa robustesse. Vu que dans certaines conditions l'identification peut donner lieu à une surparamétrisation de la structure du modèle, alors nous avons trouvé qu'il était nécessaire de réduire l'ordre de cette structure en conservant les composantes essentielles du système. Ainsi, la méthode de KABAMBA a été introduite pour la réduction des modèles identifiés lorsque ceux-

ci sont minimaux [KAB.85a]. Par contre les modèles non minimaux ont été approximés par la méthode de SAFONOV et CHIANG [SAF.89]. Cependant, il faut souligner que les modèles d'ordre réduit obtenus via les techniques citées ci-dessus sont satisfaisants mais en général ne sont pas optimaux au sens L^2 , pour n'importe quel ordre de réduction. Aussi, ces méthodes ont été utilisées pour définir un ensemble de modèles d'ordre réduit sous-optimaux que nous avons utilisés comme solutions initiales pour démarrer la recherche d'un modèle d'ordre réduit optimal via la méthode de WILSON [WIL.79] [WIL.80]. On doit rappeler que la méthode de WILSON est une méthode optimale au sens L^2 mais elle est itérative, ce qui nécessite une initialisation. En utilisant la solution de KABAMBA ou celle de SAFONOV et CHIANG (citées précédemment), comme solution initiale pour la procédure de WILSON, la convergence de cette dernière devient très rapide.

I.5 - ORGANISATION DE LA THESE

Cette étude s'étale sur deux volets, l'identification du système complexe ensuite sa réduction optimale.

Dans ce chapitre une étude bibliographique, ensuite la nécessité de la réduction et les différentes applications existantes sont donnés.

Le second chapitre présente l'étude d'une procédure d'identification des systèmes multivariables qui est la méthode des MCG. Des exemples numériques y sont donnés aussi.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des méthodes de réduction des systèmes multivariables et d'une procédure d'optimisation. Nous présentons aussi les résultats des simulations numériques effectués, pour montrer les performances de la méthode de réduction optimale utilisée. L'algorithme général d'identification et de réduction optimale des systèmes multivariables est proposée.

Une conclusion générale résume le travail présenté et les solutions obtenues. Elle présente aussi les perspectives de cette étude.

CHAPITRE II
IDENTIFICATION
DES SYSTEMES
MULTIVARIABLES

CHAPITRE II

IDENTIFICATION DES SYSTEMES MULTIVARIABLES

II.1 - INTRODUCTION

L'identification et la modélisation sont deux étapes les plus importantes des études d'automatisation des procédés industriels.

La modélisation d'un procédé vise à établir une représentation liant les variables du procédé. Cela peut se faire soit à partir d'une démarche de compréhension des phénomènes mis en jeu, soit à partir d'un traitement mathématique des données recueillies sur le procédé.

L'identification a pour objet la prédiction du comportement d'un processus en vue de la détermination d'une loi de commande adaptée, l'estimation des grandeurs non directement accessibles à la mesure, détection des défauts,...[BOR.93]

Bien souvent, les connaissances à priori ne sont pas suffisantes pour que le modèle puisse en être déduit directement, et les équations définissant le modèle comportent des paramètres inconnus. Ceux-ci forment un vecteur qu'il s'agit d'estimer à partir de données expérimentales recueillies sur le processus étudié. On parle alors d'estimation paramétrique.

Les mesures relevées sur le processus sont utilisées pour en déduire à la fois la structure du modèle la plus adaptée et les paramètres associés. La démarche usuelle consiste à estimer les paramètres de chaque structure en commençant par les plus simples. On retient alors la structure la plus simple qui conduit au comportement le plus satisfaisant.

Pour comparer les modèles entre eux, il faut disposer d'une échelle de valeurs, ou critère, qui permettra de les classer. La valeur du critère associée au modèle dépend des données recueillies sur le processus et des valeurs calculées à partir de la simulation. Le critère le plus utilisé est le critère quadratique défini par :

$$J = \sum_{i=1}^{N_m} (Y(i) - Y_m(i))^T (Y(i) - Y_m(i)) \quad (N_m : \text{est le nombre d'observations})$$

Une fois la structure est choisie et le critère J est défini, il convient de chercher les paramètres optimaux au sens de J. La démarche habituellement employée consiste à mettre en oeuvre un schéma du type de celui décrit par la figure II.1. Le système θ accessible uniquement à travers ses entrées maîtrisées U, et ses sorties mesurables Y. Le vecteur $r_s(i)$ symbolise les perturbations (entrées non maîtrisées, erreurs de mesure, caractère approximatif du modèle).

Il s'agit dans cette section d'identifier directement un modèle paramétrique discret. Etant donné que nous ne disposons pas d'un processus réel. Nous avons utilisé des modèles mathématiques que nous avons simulés pour obtenir les mesures. Ces valeurs ont été ensuite utilisées dans l'identification par la méthode des moindres carrés généralisés (MCG) parceque le modèle du bruit dans le système est un bruit coloré.

II.2 - GENERALITES

L'estimation des paramètres est l'évaluation des paramètres du modèle mathématique basée sur des signaux mesurés. Ainsi le modèle identifié est connecté en parallèle avec le modèle réel et les signaux de sortie seront comparés comme le montre la figure II.1.

Pour avoir un modèle correctement ajusté, il faut que la variation des signaux de sortie soit suffisamment faible [KEU.93].

La qualité des résultats dépend moins de la méthode que de la qualité de l'information contenue dans les données entrée-sortie.

Puisque la sortie est fonction de l'entrée alors le choix de l'entrée utilisée pour l'identification est primordial.

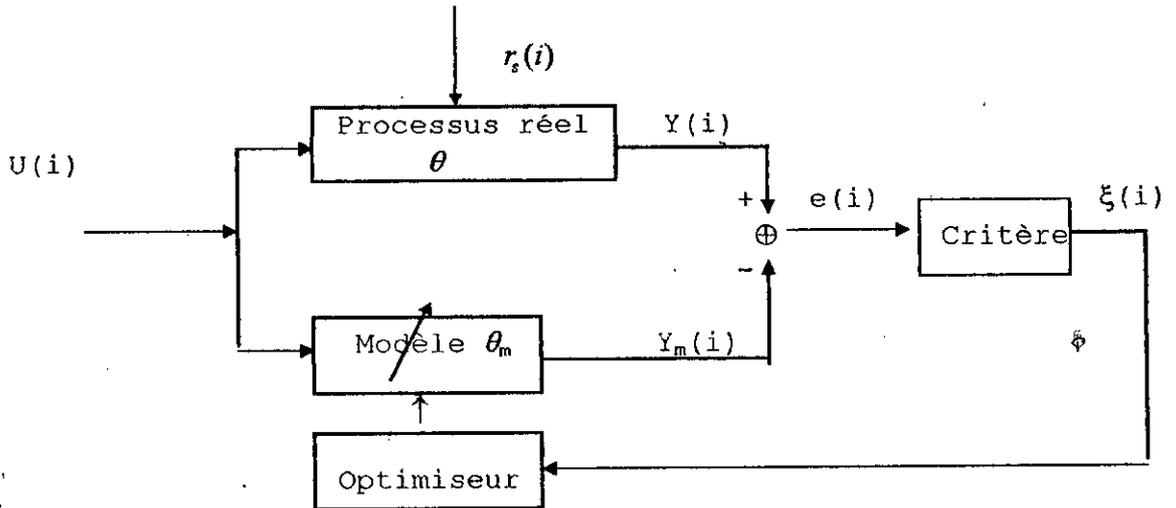


Figure II.1- Structure d'un Identificateur

Les propriétés les plus intéressantes pour les entrées d'identification sont [FOU.82a] :

a/- Avoir une autocorrélation $C_{u_i, u_i}(k)$ de type impulsion de Kronicker :

$$C_{u_i, u_i}(k) = \begin{cases} cste & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (II.1)$$

b/- Avoir des intercorrélations nulles :

$$C_{u_i, u_j}(k) = 0 \quad \forall i \neq j, \forall k \quad (II.2)$$

La propriété a) est vérifiée par une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) (Annexe A), mais il est difficile de trouver des séquences ayant la propriété b) [FOU.82a].

Il existe un moyen d'engendrer des séquences binaires indépendantes et d'autocorrélation impulsionnelle à partir d'une SBPA. C'est un produit de convolution d'une SBPA par une matrice de HADAMARD (voir la définition dans l'Annexe A) [FOU.82a].

Soit une SBPA d'éléments $X(k)$ de longueur L , et une séquence binaire d'éléments $S_i(k)$, de longueur M_s . On obtient la séquence $W_i(k)$ de la façon suivante :

$$W_i(k) = S_i(k) \otimes X(k) \quad (\text{II.3})$$

où \otimes est un opérateur de convolution.

$W_i(k)$ a pour longueur LM_s si L et M_s sont premiers entre eux. Alors l'intercorrélation entre deux séquences W_i et W_j vaudra :

$$C_{ij}(k) = \frac{1}{LM_s} \sum_{i=0}^{LM_s-1} W_i(i) W_j(i-k) \quad (\text{II.4})$$

$$= \frac{1}{LM_s} \sum_{i=0}^{LM_s-1} S_i(i) X(i) S_j(i-k) X(i-k)$$

$$= \frac{1}{LM_s} \sum_{i=0}^{LM_s-1} S_i(i) S_j(i-k) C_{XX}(k) \quad (\text{II.5})$$

Les séquences W_i et W_j rempliront les conditions a) et b) si les séquences S_i et S_j sont orthogonales, i.e :

$$\Psi_{ij}(k) = \frac{1}{M_s} \sum_{i=0}^{M_s-1} S_i(i) S_j(i-k) \quad (\text{II.6})$$

$$= \begin{cases} 0 & k \neq 0, i \neq j \\ 1 & k = 0, i = j \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Cette propriété est vérifiée par les lignes d'une matrice de HADAMARD d'ordre M_s . Ainsi, les $W_i(k)$ seront utilisées pour l'identification multivariable, comme entrées du modèle multivariable.

II.3 - PRESENTATION DE LA METHODE D'IDENTIFICATION MULTIVARIABLE

La dynamique d'un système discret linéaire soumis soit à un bruit dynamique (dynamiques non modélisables), soit à un bruit de mesure, ou soumis à l'effet des deux,

est représentée par la Figure II.2. Comme la solution des moindres carrés simples (MCS) présente l'avantage d'être explicite et fort simple à calculer, il suffit par la méthode des MCG (Annexe B) de garder les caractéristiques de la méthode des MCS tout en blanchissant les résidus (Annexe C) [FOU.82a].

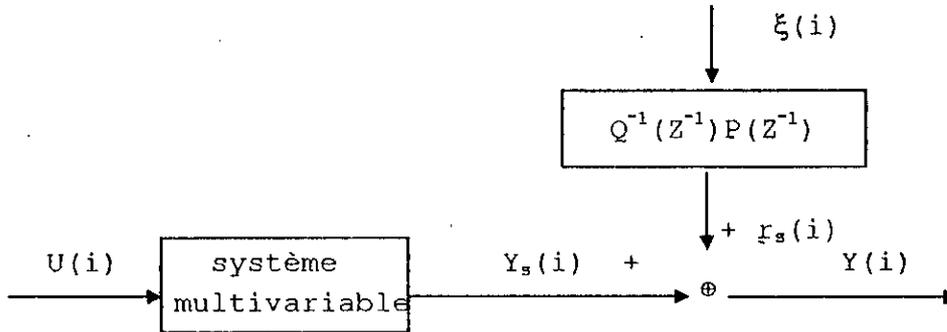


Figure II.2 - Système Dynamique avec un bruit Coloré

Le modèle du bruit $r_s(i)$ considéré sur la Figure II.2 est très général, où $\xi(i)$ est un bruit blanc et on suppose que les racines de $Q(Z^{-1})$ sont inférieure à 1 en module.

Pour un système linéaire multivariable, le modèle doit être représenté par :

$$Y_m(i) = A^{-1}(Z^{-1})B(Z^{-1})U(i) \quad (\text{II.8})$$

où

$$[A(Z^{-1})]_j = [a_{j1}(Z^{-1}) \quad a_{j2}(Z^{-1}) \quad \dots \quad a_{jm}(Z^{-1})] \quad (\text{II.9})$$

et

$$[B(Z^{-1})]_j = [b_{j1}(Z^{-1}) \quad b_{j2}(Z^{-1}) \quad \dots \quad b_{jm}(Z^{-1})] \quad (\text{II.10})$$

avec $j = 1, \dots, n$

et Z^j est un opérateur de retard.

sachant que :

$$e(i) = Y(i) - Y_m(i) \quad (\text{II.11})$$

Le signal de sortie mesurable est composé du signal $Y_s(i)$ non bruité (qui est en fait égal à $Y_m(i)$) et $r_s(i)$ qui représente le signal bruit.

$$Y(i) = Y_s(i) + r_s(i) \quad (\text{II.12})$$

$e(i)$ sera très faible si les perturbations sont bien modélisées. Cependant l'approche peut être améliorée en considérant que les perturbations agissant sur le signal de sortie sont décrites par un bruit coloré donné par :

$$r_s(i) = Q^{-1}(Z^{-1})P(Z^{-1})\xi(i) = G_r(Z^{-1})\xi(i) \quad (\text{II.13})$$

le signal de sortie aura la forme suivante :

$$Y(i) = A^{-1}(Z^{-1})B(Z^{-1})U(i) + r_s(i) \quad (\text{II.14})$$

Prémultiplions l'équation (II.14) par $A(Z^{-1})$

$$\begin{aligned} A(Z^{-1})Y(i) - B(Z^{-1})U(i) &= A(Z^{-1})r_s(i) \\ &= A(Z^{-1})G_r(Z^{-1})\xi(i) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Supposons que $G_r(Z^{-1})$ est une matrice unité, telle que l'estimation des paramètres par les MCS soit donnée par :

$$A(Z^{-1})Y(i) - B(Z^{-1})U(i) = \xi(i) \quad (\text{II.16})$$

Il en découle le système d'équations donné ci-dessous :

$$\begin{aligned} a_{j1}(Z^{-1})Y_1(i) + a_{j2}(Z^{-1})Y_2(i) + \dots + a_{jn}(Z^{-1})Y_n(i) &= b_{j1}(Z^{-1})U_1(i) + b_{j2}(Z^{-1})U_2(i) + b_{j3}(Z^{-1})U_3(i) \\ &+ \dots + b_{jm}(Z^{-1})U_m(i) + \xi_j(i) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

$$j = 1, \dots, n$$

Après séparation des termes diagonaux, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{jj}(Z^{-1})Y_j(i) &= - \sum_{l=1, l \neq j}^n a_{jl}(Z^{-1})Y_l(i) + \sum_{l=0}^m b_{jl}(Z^{-1})U_l(i) + \xi_j(i) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

$$j = 1, \dots, n$$

La transformation de l'équation (II.18) dans le domaine temporel, pour chaque sortie du modèle aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} Y_{jj}(k + v_{jj}) &= - \sum_{\mu=0, \mu \neq j}^{v_{jj}-1} a_{jj\mu} Y_j(k + \mu) - \sum_{l=0}^n \sum_{\mu=0}^{v_{ll}} a_{jl\mu} Y_l(k + \mu) + \sum_{l=1}^m \sum_{\mu=0}^{v_{ll}} b_{jj\mu} U_l(k + \mu) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

$$j = 1, \dots, n$$

et pourra être exprimée comme suit :

$$Y_j(k + \nu_{jj}) = m_j^T(k + \nu_{jj})\theta_j + \xi_j(k) \quad (\text{II.20})$$

$$j = 1, \dots, n$$

où,

$$m_j(k + \nu_{jj}) = \left[\begin{array}{cccc} -Y_1(k) & \dots & -Y_1(k + \nu_{1j}) & | \dots | -Y_n(k) & \dots & -Y_n(k + \nu_{jn}) \\ |U_1(k) & \dots & U_1(k + \nu_{1j}) & | \dots | U_m(k) & \dots & U_m(k + \nu_{mj}) \end{array} \right]^T \quad (\text{II.21.a})$$

et

$$\theta_j = \left[\begin{array}{cccc} a_{j10} & \dots & a_{j1\nu_{1j}} & | \dots | a_{jn0} & \dots & a_{jn\nu_{jn}} \\ |b_{j10} & \dots & b_{j1\nu_{1j}} & | \dots | b_{jm0} & \dots & b_{jm\nu_{mj}} \end{array} \right] \quad (\text{II.21.b})$$

l'équation (II.21.a) contient les valeurs des signaux de sortie mesurées et les valeurs des signaux d'entrées utilisées pour l'estimation des paramètres de l'équation (II.21.b).

Lorsque l'équation (II.21.a) est écrite pour N_m valeurs d'échantillonnage différentes, on aboutit au système d'équations linéaires suivant :

$$Y_j(N_m) = M_j(N_m)\theta_j + \xi_j(N_m), \quad (\text{II.22})$$

où le vecteur signal est donné par :

$$Y_j(N_m) = \left[Y_j(\nu_{jj} + 1) \quad Y_j(\nu_{jj} + 2) \quad \dots \quad Y_j(\nu_{jj} + N_m) \right]^T \quad (\text{II.23})$$

La matrice des données $M_j(N_m)$ est donnée par :

$$M_j(N_m) = \left[\begin{array}{c} m_j^T(\nu_{jj} + 1) \\ m_j^T(\nu_{jj} + 2) \\ \vdots \\ m_j^T(\nu_{jj} + N_m) \end{array} \right] \quad (\text{II.24})$$

et le vecteur des résidus est donné par :

$$\xi_j(N_m) = \left[\xi_j(1) \quad \xi_j(2) \quad \dots \quad \xi_j(N_m) \right]^T \quad (\text{II.25})$$

Si on suppose que $\xi_j(N_m)$ est un bruit blanc, la méthode généralement utilisée est la minimisation du critère $\xi_j^T(N_m) \xi_j(N_m)$ dite critère moindres carrés simples (MCS). La solution est donnée par :

$$\hat{\theta}_j = \left[M_j^T(N_m) M_j(N_m) \right]^{-1} M_j^T(N_m) Y_j(N_m) \quad (II.26)$$

L'expression qui caractérise le système multivariable peut être donnée par :

$$\hat{\theta}_j = \left[M_j^* \right]^{-1} Y_j^* \quad (II.27)$$

ou encore :

$$M_j^* \hat{\theta}_j = Y_j^* \quad (II.28)$$

Où :

$$\left[M_j^* \right]^{-1} = \left[M_j^T(N_m) M_j(N_m) \right]^{-1} \quad (II.29)$$

et

$$Y_j^* = M_j^T(N_m) Y_j(N_m)$$

Il est important de noter que l'expression (II.27) donnée ci-dessus est théoriquement très simple, mais peut être numériquement instable surtout si la matrice $M_j(N_m)$ est mal conditionnée. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser une transformation orthogonale de la matrice d'information $M_j(N_m)$. Cette transformation peut être déterminée par une décomposition QR ou par une décomposition en valeurs singulières SVD [KEU.93]. En effet, ces méthodes sont bien connues par leur robustesse et leur insensibilité aux problèmes d'instabilité numérique.

Soit la décomposition QR de la matrice d'information suivante :

$$M(N_m) = Q(N_m) \begin{bmatrix} R(N_m) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (II.30)$$

$M(N_m)$ est une matrice de dimension $N_m \times n$, où n représente le nombre de paramètres.

$Q(N_m)$ est une matrice orthogonale de dimension $N_m \times N_m$:

$$Q^T(N_m) = Q^{-1}(N_m) \Rightarrow Q^T(N_m) Q(N_m) = I_{N_m} \quad (II.31)$$

et $R(N_m)$ est une matrice triangulaire supérieure de dimension $n \times n$.

Sachant que la solution des MCS du système multivariable est donnée par :

$$\hat{\theta} = [M^T(N_m)M(N_m)]^{-1} M^T(N_m)Y(N_m) \quad (\text{II.32})$$

ou bien

$$[M^T(N_m)M(N_m)]\hat{\theta} = M^T(N_m)Y(N_m) \quad (\text{II.33})$$

Si on insert l'équation (II.30) dans l'équation (II.33), on obtient :

$$\begin{bmatrix} R(N_m) \\ 0 \end{bmatrix}^T Q^T(N_m)Q(N_m) \begin{bmatrix} R(N_m) \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\theta} = \begin{bmatrix} R(N_m) \\ 0 \end{bmatrix} Q(N_m)Y(N_m) \quad (\text{II.34})$$

Sachant que le produit de la matrice orthogonale et du vecteur colonne donne :

$$Q^T(N_m)Y(N_m) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{Y(N_m)} \\ \hat{E}(N_m) \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

$$\begin{bmatrix} R^T(N_m) & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(N_m) \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\theta} = \begin{bmatrix} R^T(N_m) & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{Y(N_m)} \\ \hat{E}(N_m) \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

d'où :

$$R^T(N_m)R(N_m)\hat{\theta} = R^T(N_m)\hat{\theta}_{Y(N_m)} \quad (\text{II.37})$$

avec $\hat{\theta}_{Y(N_m)}$ une matrice de dimension $n \times p$ (p représente le nombre de sortie du système).

Si la matrice d'information est de rang complet, alors $R(N_m)$ et sa transposée $R^T(N_m)$ seront régulières. Et l'équation (II.37) peut être réécrite comme suit :

$$R(N_m)\hat{\theta} = \hat{\theta}_{Y(N_m)} \quad (\text{II.38})$$

Alors le vecteur $\hat{\theta}$ est estimé par substitution inverse dans le système (II.38)

$$\hat{\theta} = R^{-1}(N_m)\hat{\theta}_{Y(N_m)} \quad (\text{II.39})$$

Jusqu'à présent le modèle du bruit considéré est un bruit blanc et la procédure d'identification utilisée est la MCS. Mais dans le cas où ce bruit est coloré (ce que nous allons considérer dans cette étude), la méthode utilisée est basée sur le critère des

moindres carrés généralisés (MCG). Cette méthode se présente comme un processus itératif, où les données d'entrée et de sortie doivent être filtrés pour assurer une meilleure estimation des paramètres et ceux du bruit. Ce résultat est atteint lors du blanchissement total des résidus (voir Annexe B).

Sachant que l'expression du bruit coloré est donnée par :

$$Q(Z^{-1})r_s(i) = P(Z^{-1})\xi(i) \quad (\text{II.40})$$

Sachant aussi que :

$$e(i) = A(Z^{-1})r_s(i) \Big|_{r_s(i) = Q^{-1}(Z^{-1})P(Z^{-1})\xi(i)} \quad (\text{II.41})$$

alors :

$$e(i) = A(Z^{-1})Q^{-1}(Z^{-1})P(Z^{-1})\xi(i) \quad (\text{II.42.a})$$

$$= F(Z^{-1})\xi(i) \quad (\text{II.42.b})$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$F^{-1}(Z^{-1})e(i) = \xi(i) \quad (\text{II.43})$$

avec :

$$F(Z^{-1}) = A(Z^{-1})Q^{-1}(Z^{-1})P(Z^{-1}) \quad (\text{II.44})$$

Pour chaque sortie du modèle, le modèle du filtre sera :

$$F_j(Z^{-1}) = 1 + f_{1j}Z^{-1} + f_{2j}Z^{-2} + \dots + f_{qj}Z^{-q} \quad (\text{II.45})$$

Multiplions l'équation (II.16) par $F(Z^{-1})$ nous obtenons :

$$A(Z^{-1})F(Z^{-1})Y(i) = B(Z^{-1})F(Z^{-1})U(i) + \xi(i) \quad (\text{II.46})$$

$$A(Z^{-1})Y^*(i) = B(Z^{-1})U^*(i) + \xi(i) \quad (\text{II.47})$$

$$Y^*(i) = F(Z^{-1})Y(i) \quad , \quad U^*(i) = F(Z^{-1})U(i)$$

Comme le système est linéaire, cette multiplication signifie que l'on filtre les données à travers $F_j(Z^{-1})$ (Annexe C). Pour déterminer le filtre $F_j(Z^{-1})$, il suffit d'écrire l'équation (II.42.b) pour la $j^{\text{ème}}$ valeur aux divers instants d'échantillonnage pour obtenir le système ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} e_j(N_m) \\ e_j(N_m - 1) \\ \vdots \\ e_j(q+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_j(N_m - 1) & \dots & -e_j(N_m - q) \\ \vdots & & \vdots \\ -e_j(q) & \dots & -e_j(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1j} \\ f_{2j} \\ \vdots \\ f_{qj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_j(N_m) \\ \xi_j(N_m - 1) \\ \vdots \\ \xi_j(q+1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

soit aussi de la forme :

$$e_j = X_E F_j + \xi_j \quad (\text{II.49})$$

Nous remarquons ici un modèle de la forme (II.22) dont les résidus $\xi_j(N_m)$ sont blancs. L'estimation du vecteur F_j au sens des MCS nous donne :

$$\hat{F}_j = (X_E^T X_E)^{-1} X_E^T e_j \quad (\text{II.50})$$

si l'on connaissait $e_j(i); i = 1, \dots, N_m$ on pourrait calculer \hat{F}_j . Si la mesure de $e_j(i)$ n'est pas possible, on l'estimera à l'aide de l'équation suivante:

$$\hat{e}_j = Y_j - M_j \hat{\theta}_j \quad (\text{II.51})$$

L'algorithme donné ci-dessous, décrit la procédure d'identification multivariable présentée dans ce chapitre (voir Annexe B).

II.3.1 - ALGORITHME DES MOINDRES CARRES GENERALISES

Etape 1/ Soit $C_1 = 10^6$ (la précision) et $\zeta = 10^{-5}$

Etape 2/ Construction des matrices M et Y

Etape 3/ Factorisation du type QR de la matrice M

Etape 4/ Calcul de l'estimateur des MCS

$$\hat{\theta} = R^{-1}(N_m) \hat{\theta}_{Y(N_m)}$$

Etape 5/ On estime les résidus

$$\hat{e}(i) = Y - M \hat{\theta}$$

Etape 6/ On calcul $C_2 = \hat{e}^T \hat{e}$

Etape 7/ si $C_2 < C_1$ aller à l'étape 8 sinon aller à l'étape 14

$$\text{Etape 8/ } \Delta C = \frac{|C_1 - C_2|}{C_1}$$

Etape 9/ si $\Delta C < \zeta$ aller à l'étape 14 sinon aller à l'étape 10

Etape 10/ $C_2 = C_1$

Etape 11/ On construit le filtre basé sur $\hat{e}_j(i)$

$$\hat{F}_j = (X_E^T X_E)^{-1} X_E^T e_j$$

Etape 12/ Filtrage des données

$$Y_j^* = Y_j(i) + f_{1j} Y_j(i-1) + \dots + f_{qj} Y_j(i-q) \quad j = 1, \dots, p$$

$$U_k^* = U_k(i) + f_{1k} U_k(i-1) + \dots + f_{qk} U_k(i-q) \quad k = 1, \dots, m$$

Etape 13/ On considère $(Y_j^*(i), U_k^*(i))$ comme les nouvelles données et aller à l'étape 2.

Etape 14/ Fin

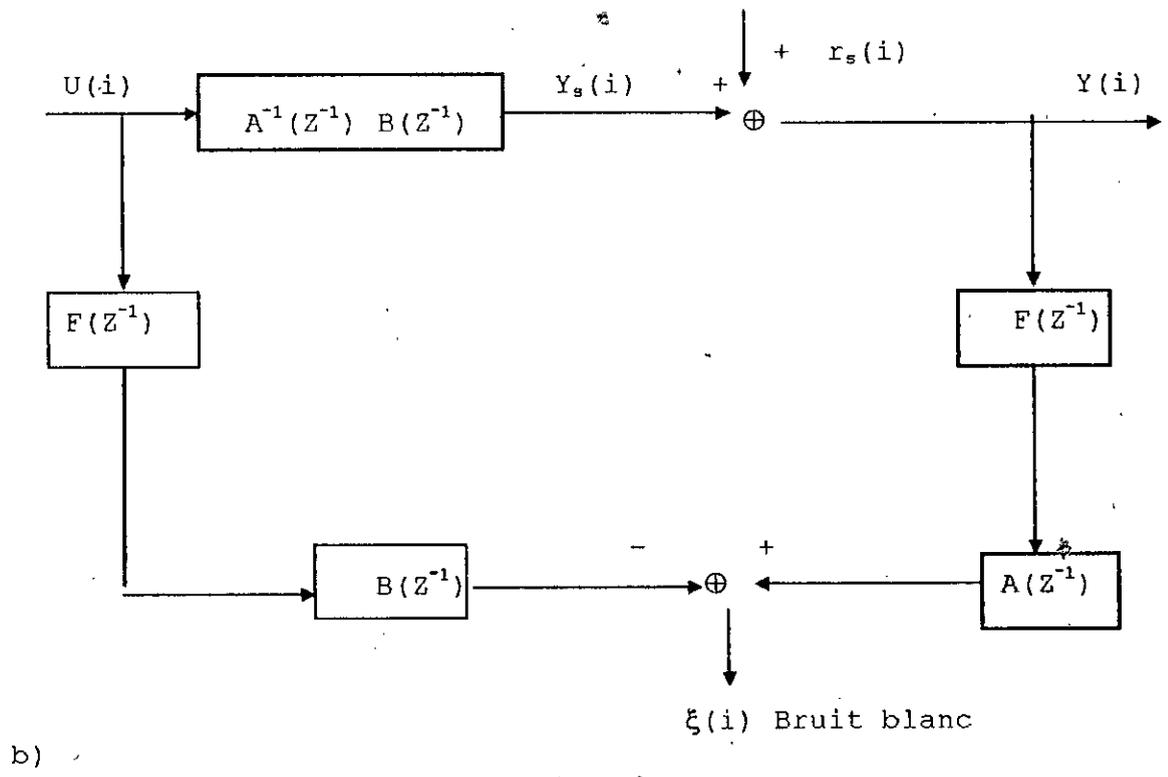
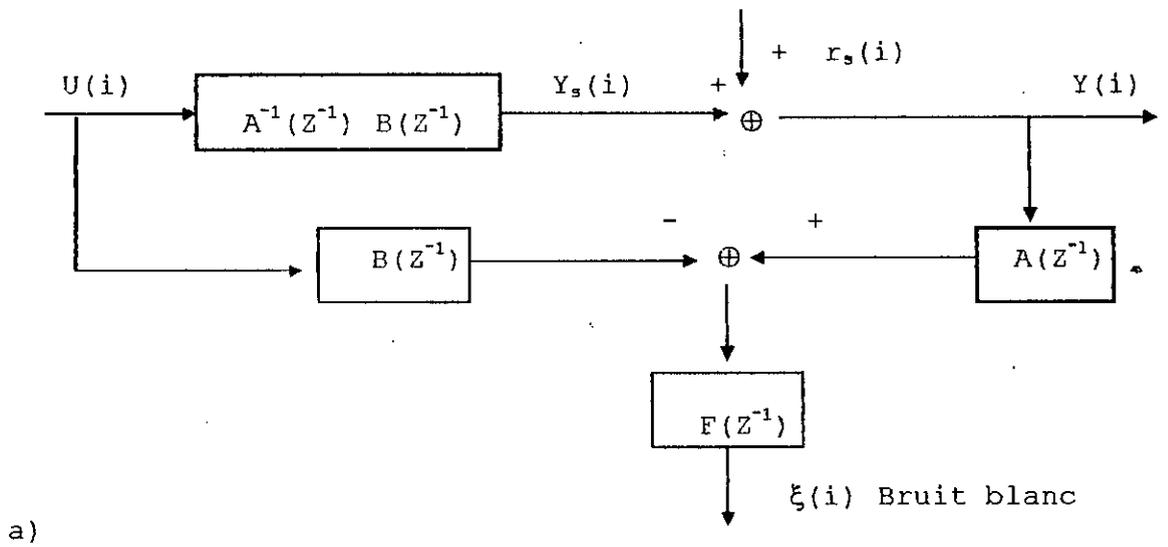


Figure II.3 - Principe du filtrage des données pour l'algorithme MCG

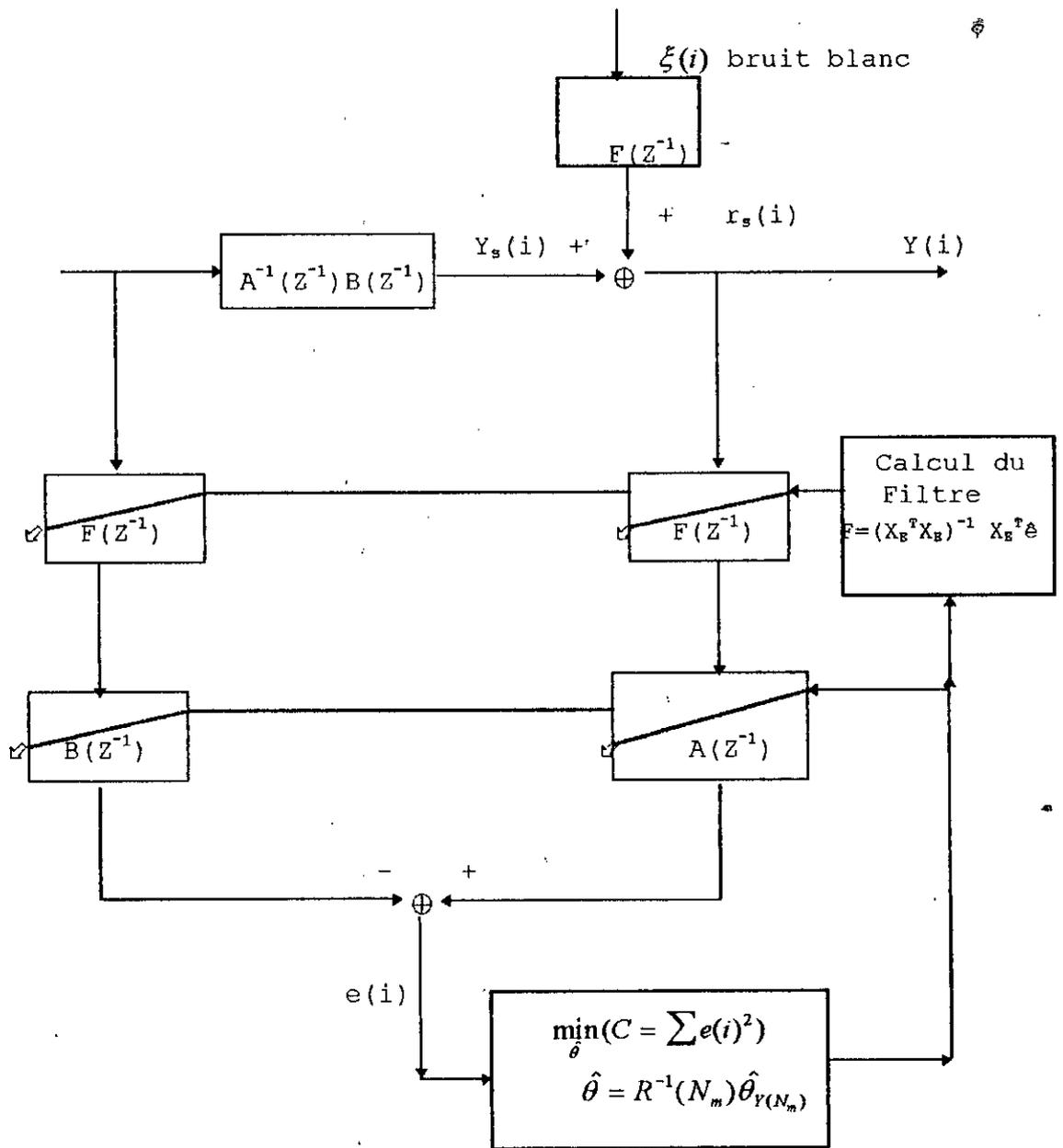


Figure II.4 - Méthode des moindres carrés généralisés.

Maintenant que la méthode d'identification des systèmes multivariables (MCG) est établie, nous allons montrer ses performances.

II.4 - SIMULATIONS NUMERIQUES

Les systèmes multivariables utilisés dans cette simulation sont en réalité continus et représentés dans l'espace d'état. Cela a nécessité dans un premier temps une numérisation de ces exemples via une transformation bilinéaire [SAG.88], avec une fréquence d'échantillonnage propre à chaque système. Ensuite, nous avons effectué le passage de la représentation dans l'espace d'état discrète à une fonction de transfert discrète. D'autre part, comme nous ne disposons pas des processus réel pour relever les mesures, nous les avons simulés.

Dans ces exemples qui constituent une simulation numérique de la MCG, les entrées sont des SBPA de longueurs 512 (Spectre riche en fréquence). Pour que ces entrées ne soient pas corrélées entre elles, elles ont été couplées à une matrice de HADAMARD. Les signaux de perturbation des sorties du système sont des bruits colorés.

II.4.1 - RESULTATS DES SIMULATIONS

1/ - Premier exemple [WIL.79]

Considérons un système linéaire complexe à quatre entrées et quatre sorties. Ce système est une modélisation d'une chaudière. La fonction de transfert discrète de ce système est donnée par :

$$Y(q) = \begin{bmatrix} Y_1(q) \\ Y_2(q) \\ Y_3(q) \\ Y_4(q) \end{bmatrix} = A^{-1}(q)B(q) \begin{bmatrix} U_1(q) \\ U_2(q) \\ U_3(q) \\ U_4(q) \end{bmatrix}$$

$$Y(q) = A^{-1}(q)B(q)U(q)$$

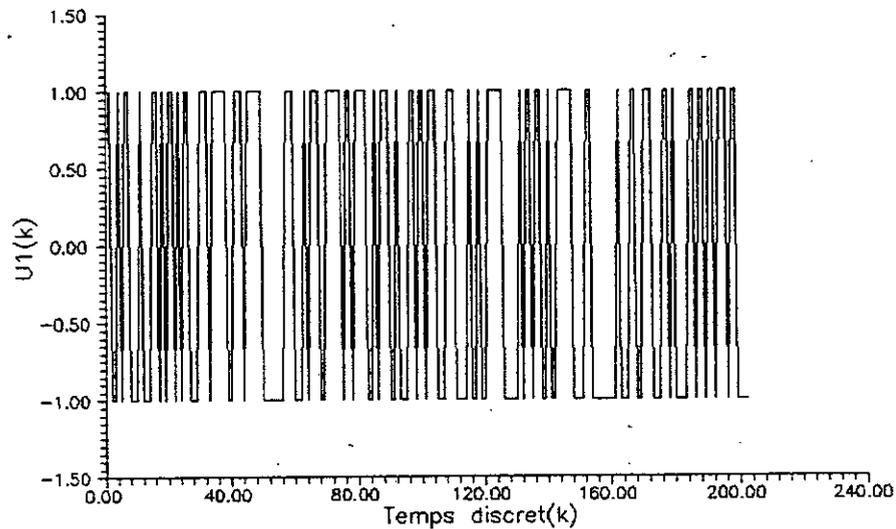


FIGURE II.5.1—REPRESENTATION DE L'ENTREE DE MESURE

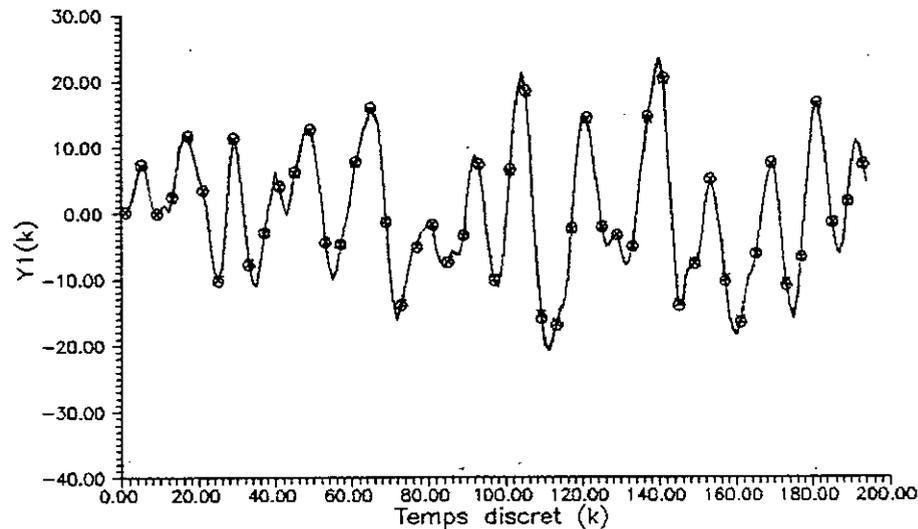


FIGURE II.5.3—REPOSE TEMPERELLE DISCRETE
 o o o Sortie du modele identifie
 x x x Sortie du modele reel

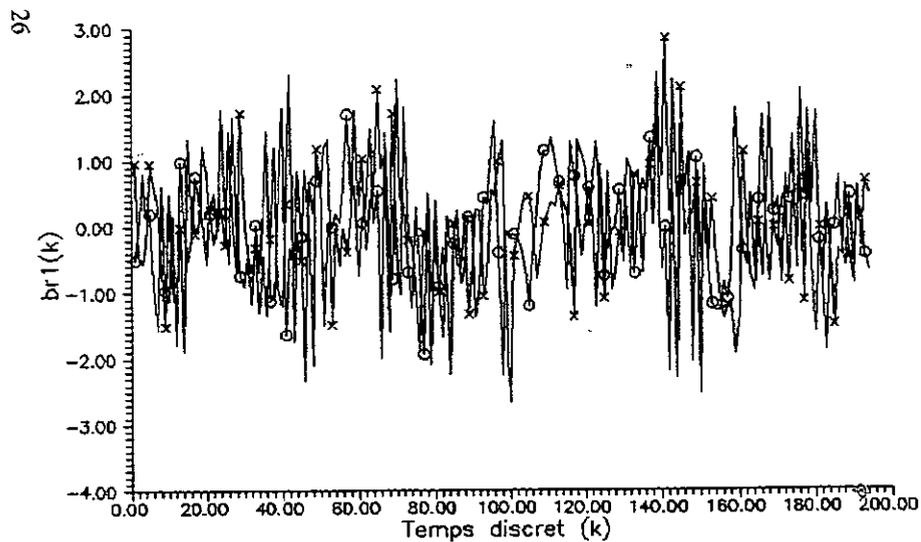


FIGURE II.5.2—COURBES DES PERTURBATIONS
 o o o Residus
 x x x Bruit mesure sur le modele reel

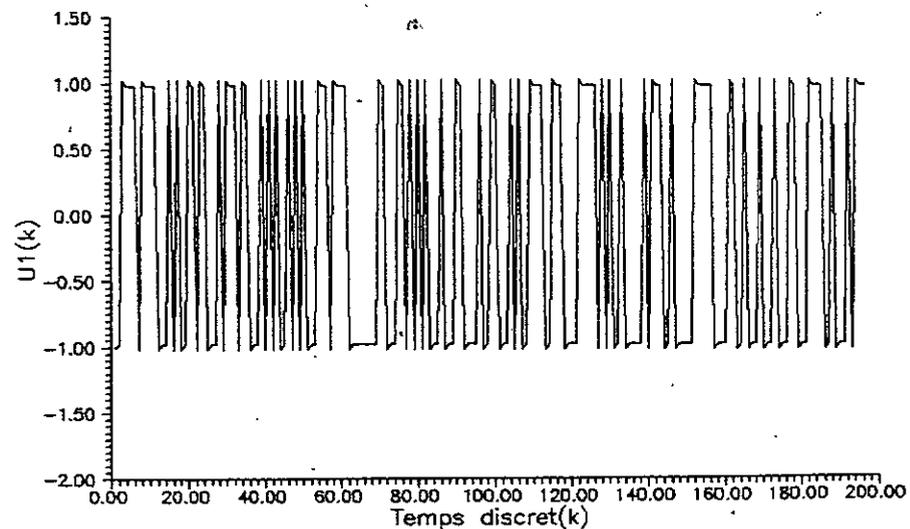


FIGURE II.5.4—REPRESENTATION DE L'ENTREE FILTREE

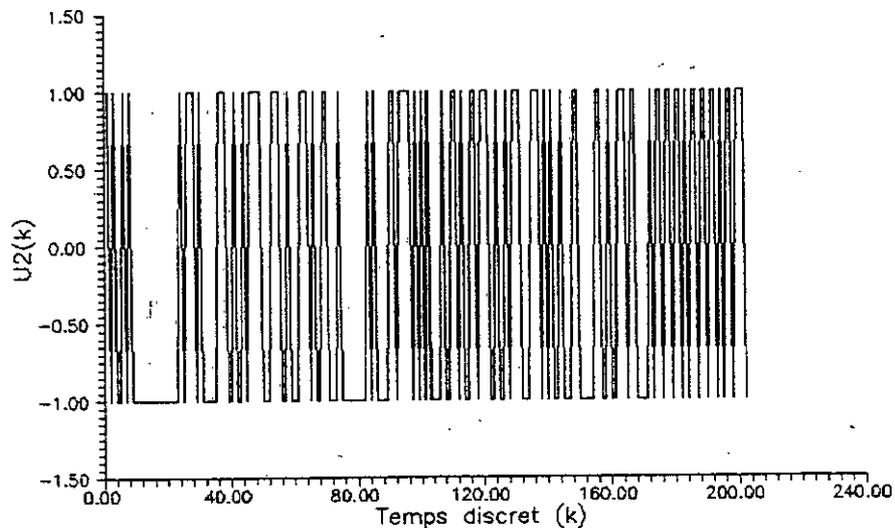


FIGURE II.6.1—REPRESENTATION DE L'ENTREE DE MESURE

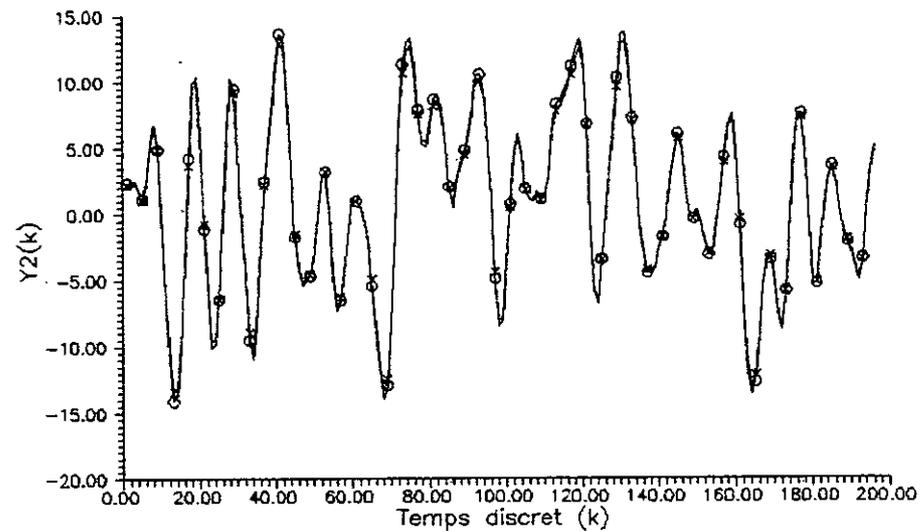


FIGURE II.6.3—REPONSE TEMPORELLE DISCRETE
 o o o Sortie du modele identifie
 x x x Sortie du modele reel

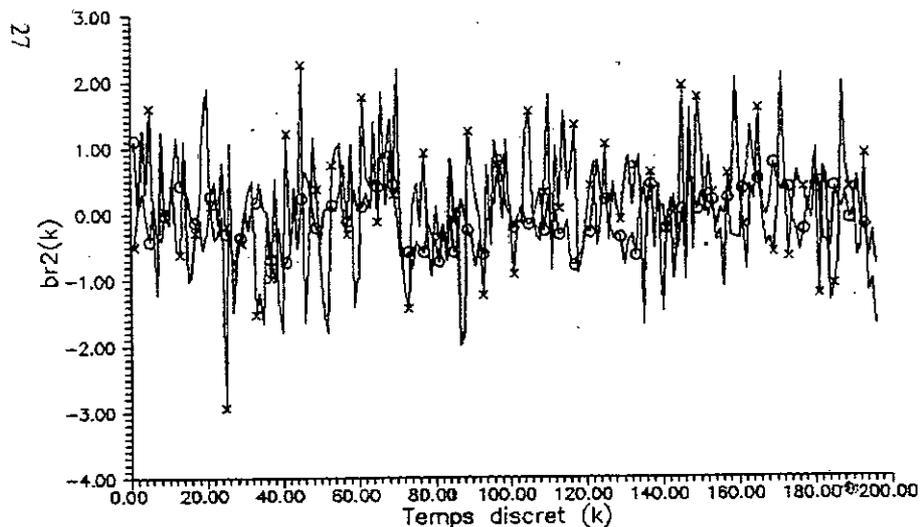


FIGURE II.6.2—REPRESENTATION DES PERTURBATIONS
 o o o Residus
 x x x Bruit mesure sur le modele reel

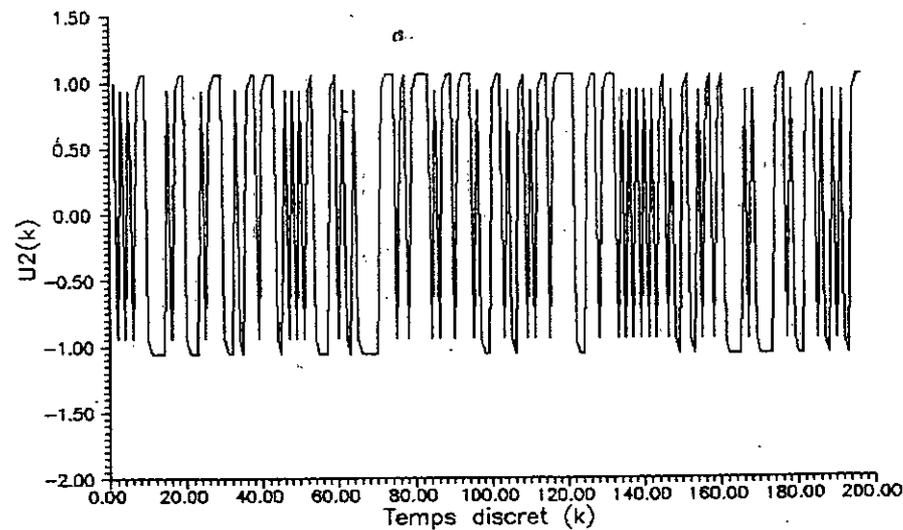


FIGURE II.6.4—REPRESENTATION DE L'ENTREE FILTREE

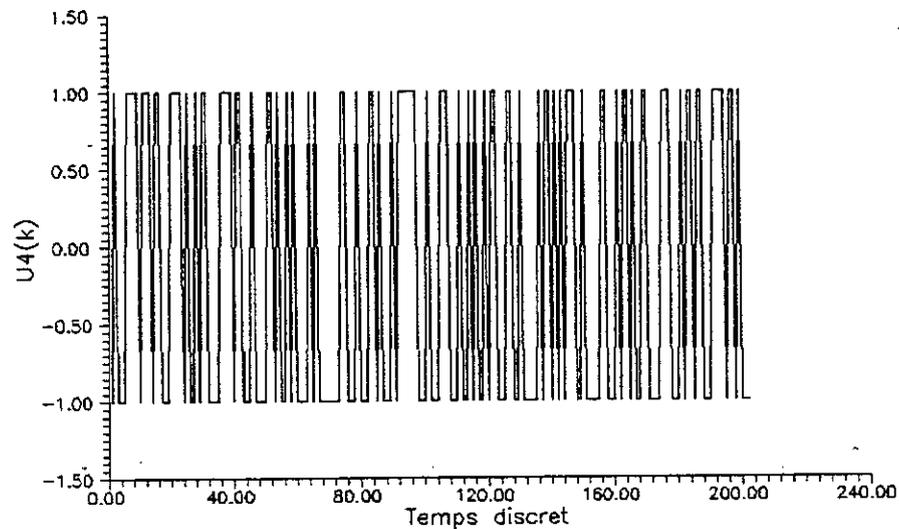


FIGURE II.8.1—REPRESENTATION DE L'ENTREE DE MESURE

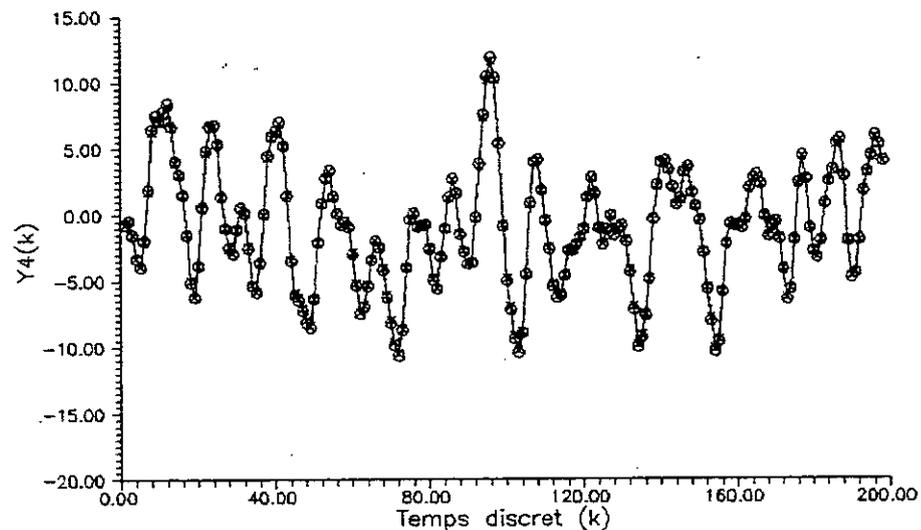


FIGURE II.8.3—REPONSE TEMPORELLE DISCRETE
 o o o Sortie du modele identifie
 x x x Sortie du modele reel

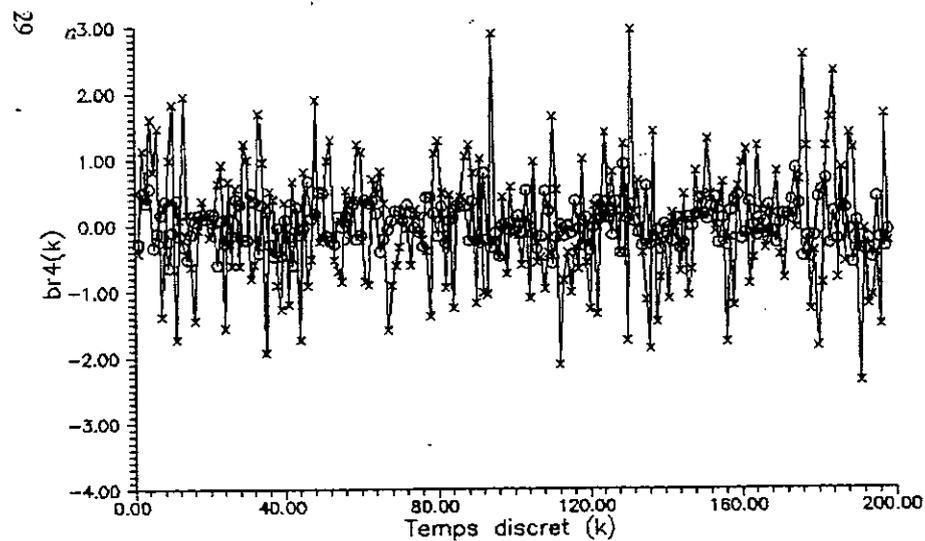


FIGURE II.8.2—REPRESENTATION DES PERTURBATIONS
 o o o Residus
 x x x Bruit mesure sur le modele reel

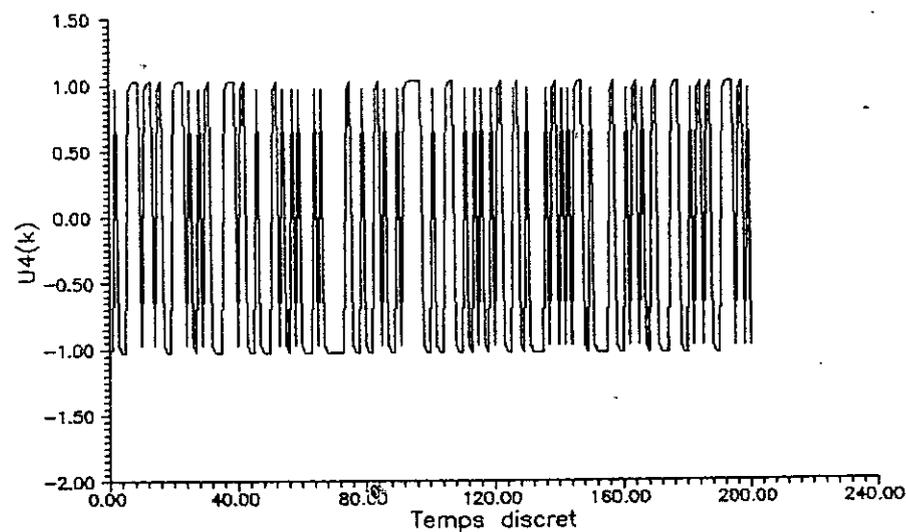


FIGURE II.8.4—REPRESENTATION DE L'ENTREE FILTREE

où

$$B(q) = \begin{bmatrix} B_{11}(q) & B_{12}(q) & B_{13}(q) & B_{14}(q) \\ B_{21}(q) & B_{22}(q) & B_{23}(q) & B_{24}(q) \\ B_{31}(q) & B_{32}(q) & B_{33}(q) & B_{34}(q) \\ B_{41}(q) & B_{42}(q) & B_{43}(q) & B_{44}(q) \end{bmatrix}$$

et

$$A(q) = \text{diag}\{A_{11}(q) \quad A_{22}(q) \quad A_{33}(q) \quad A_{44}(q)\}$$

Remaque: les valeurs théoriques et les valeurs estimées de $A(q)$ et $B(q)$ sont données dans l'Annexe D (tableau 1).

Tous les signaux qui interviennent dans la simulation sont représentés par :

- les figures: II.5.1, II.6.1, II.7.1, II.8.1 représentent les entrées du système multivariable.
- Les figures II.5.2, II.6.2, II.7.2, II.8.2 : définies par le symbole (x) représentent les bruits additifs.

Les figures II.5.3, II.6.3, II.7.3, II.8.3 nous permettent de juger de la qualité du modèle obtenu par une identification par MCG. Elles représentent une comparaison entre les signaux de sortie du modèle réel et du modèle identifié.

2/ - Deuxième exemple [TZA.77]

Dans cet exemple il s'agit d'un système multivariable à trois entrées et trois sorties. En effet, ce système est une modélisation d'un réacteur nucléaire. La fonction de transfert discrète de ce système est donnée par :

$$Y(q) = \begin{bmatrix} Y_1(q) \\ Y_2(q) \\ Y_3(q) \end{bmatrix} = A^{-1}(q)B(q) \begin{bmatrix} U_1(q) \\ U_2(q) \\ U_3(q) \end{bmatrix}$$

$$Y(q) = A^{-1}(q)B(q)U(q)$$

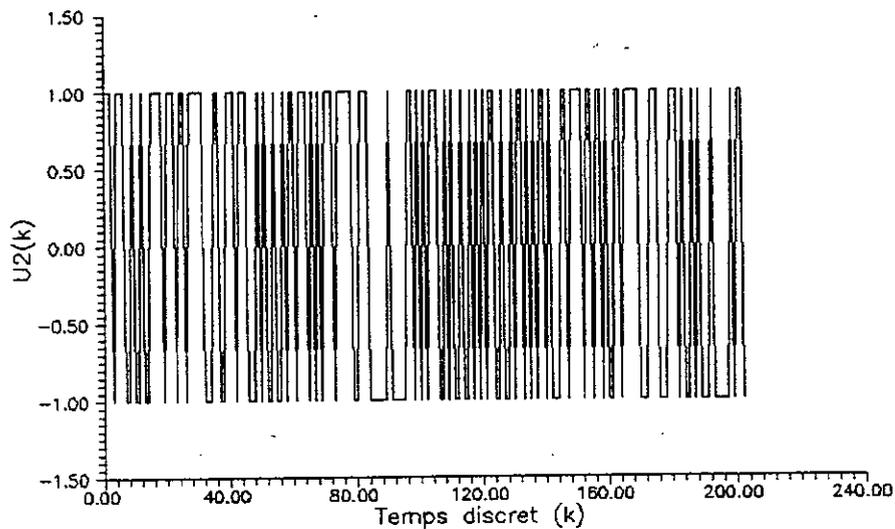


FIGURE II.10.1—REPRESENTATION DE L'ENTREE DE MESURE

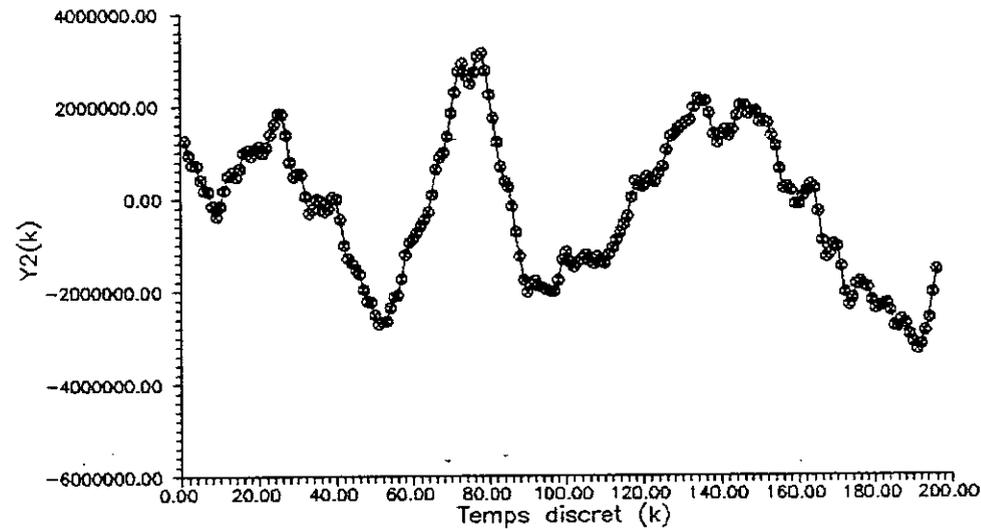


FIGURE II.10.3—REPONSE TEMPORELLE DISCRETE
 o o o Sortie du modele identifie
 x x x Sortie du modele reel

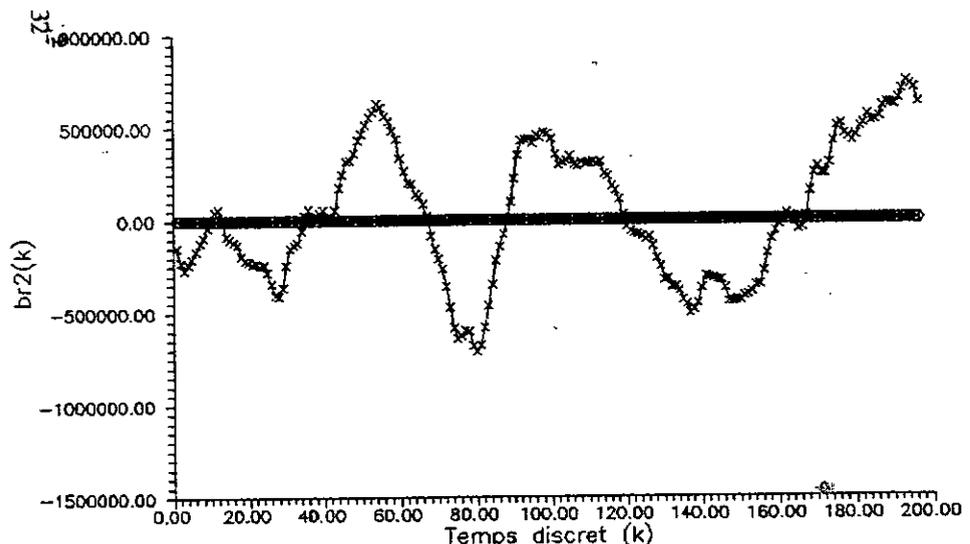


FIGURE II.10.2—REPRESENTATION DES PERTURBATIONS
 o o o Residus
 x x x Bruit mesure sur le modele reel

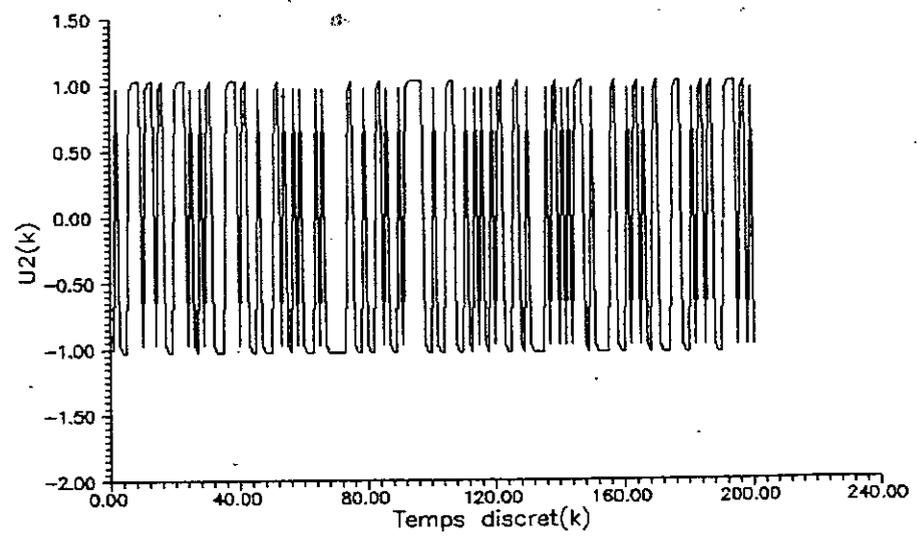


FIGURE II.10.4—REPRESENTATION DE L'ENTREE FILTREE

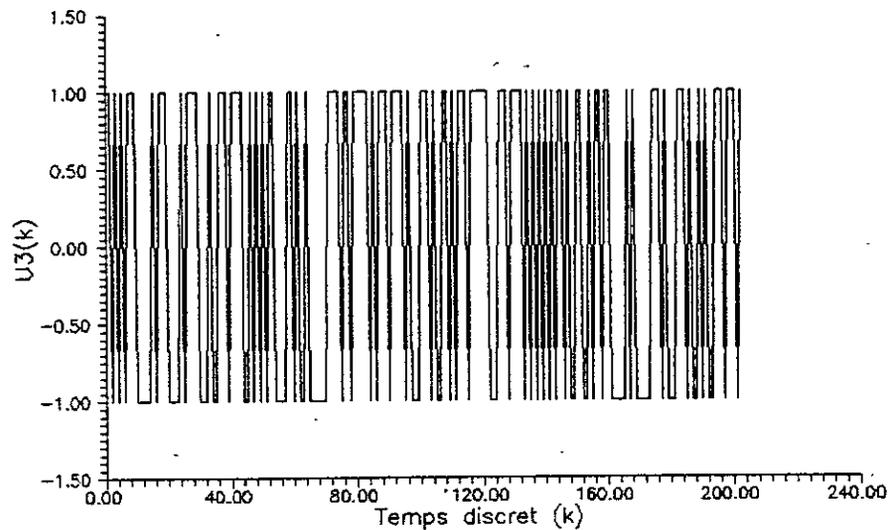


FIGURE II.11.1—REPRESENTATION DE L'ENTREE DE MESURE

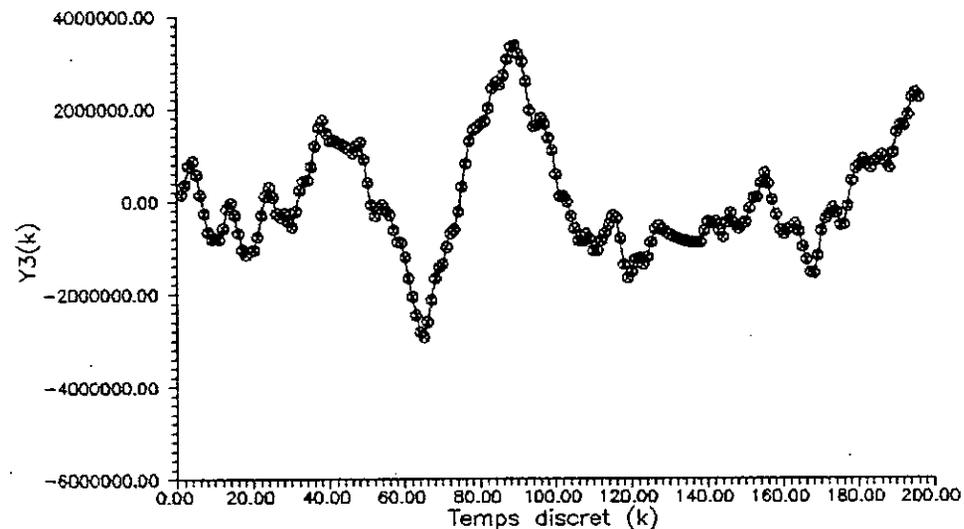


FIGURE II.11.3—REPOSE TEMPERELLE DISCRETE

o o o Sortie du modele identifie
x x x Sortie du modele reel

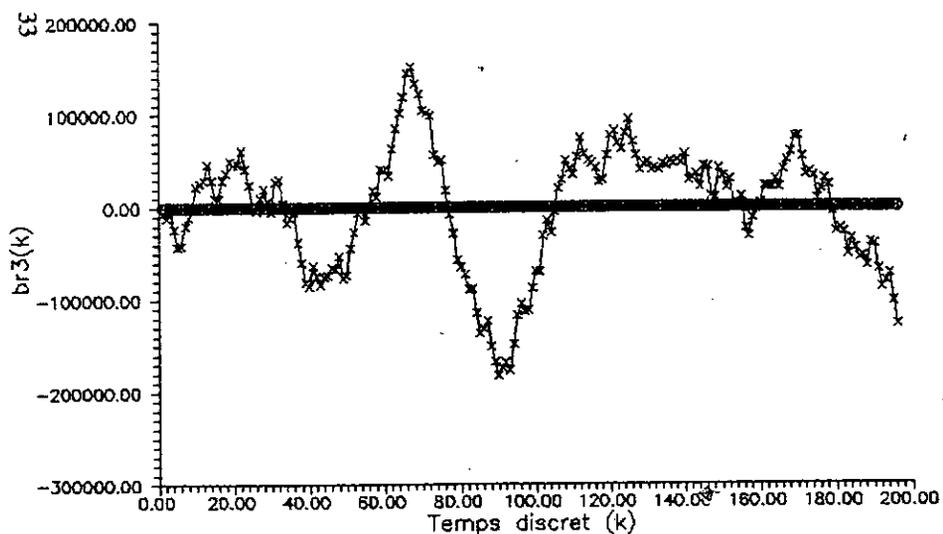


FIGURE II.11.2—REPRESENTATION DES PERTURBATIONS

o o o Residus
x x x Bruit mesure sur le modele reel

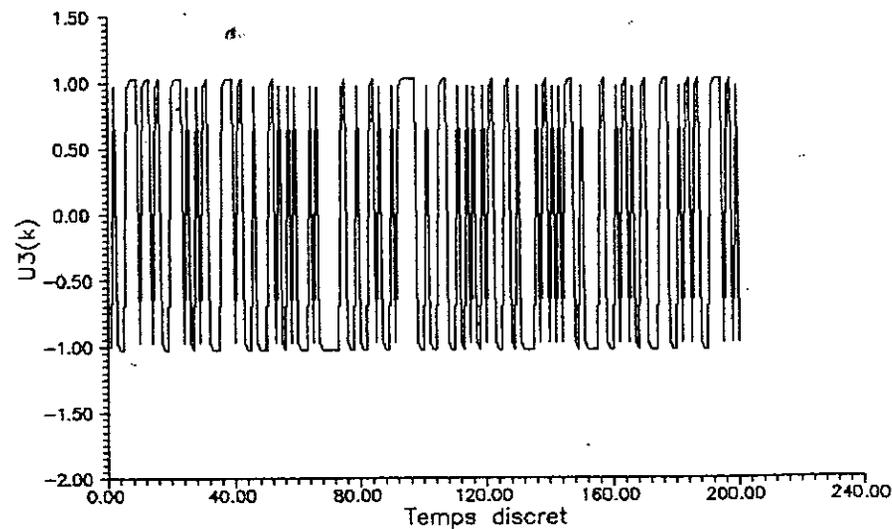


FIGURE II.11.4—REPRESENTATION DE L'ENTREE FILTREE

où

$$B(q) = \begin{bmatrix} B_{11}(q) & B_{12}(q) & B_{13}(q) \\ B_{21}(q) & B_{22}(q) & B_{23}(q) \\ B_{31}(q) & B_{32}(q) & B_{33}(q) \end{bmatrix}$$

et

$$A(q) = \text{diag}\{A_{11}(q) \quad A_{22}(q) \quad A_{33}(q)\}$$

Remarque: Les valeurs théoriques et les valeurs estimées $A(q)$ et $B(q)$ sont données dans l'Annexe D (tableau 2).

Les signaux qui interviennent dans la procédure d'identification sont représentés par:

- les figures II.9.1, II.10.1, II.11.1 : représentent les entrées du système multivariable.
- Les figures II.9.2, II.10.2, II.11.2 : définies par le symbole(x) représentent les bruits additifs.

Les figures II.9.3, II.10.3, II.11.3 nous permettent de juger de la qualité du modèle obtenu par une identification par MCG. Elles représentent une comparaison entre les signaux de sortie du modèle réel et du modèle identifié.

3/ - Troisième exemple [MAZ.93]

Dans cet exemple, c'est le modèle mathématique d'un bras manipulateur. C'est un système multivariable à trois entrées et trois sorties.

La fonction de transfert discrète de ce système est donnée par:

$$Y(q) = \begin{bmatrix} Y_1(q) \\ Y_2(q) \\ Y_3(q) \end{bmatrix} = A^{-1}(q)B(q) \begin{bmatrix} U_1(q) \\ U_2(q) \\ U_3(q) \end{bmatrix}$$

$$Y(q) = A^{-1}(q)B(q)U(q)$$

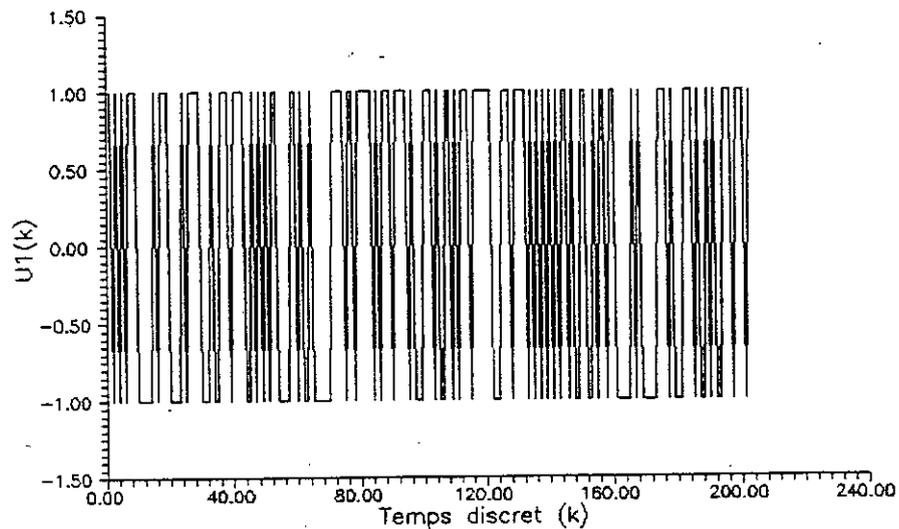


FIGURE II.12.1—REPRESENTATION DE L'ENTREE DE MESURE

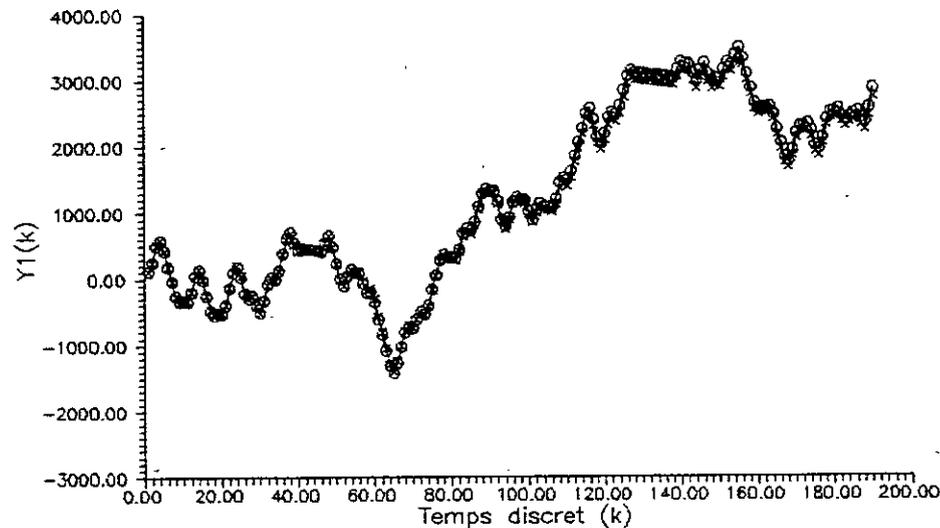


FIGURE II.12.3—REPOSE TEMPORELLE DISCRETE
 o o o Sortie du modele identifie
 x x x Sortie du modele reel

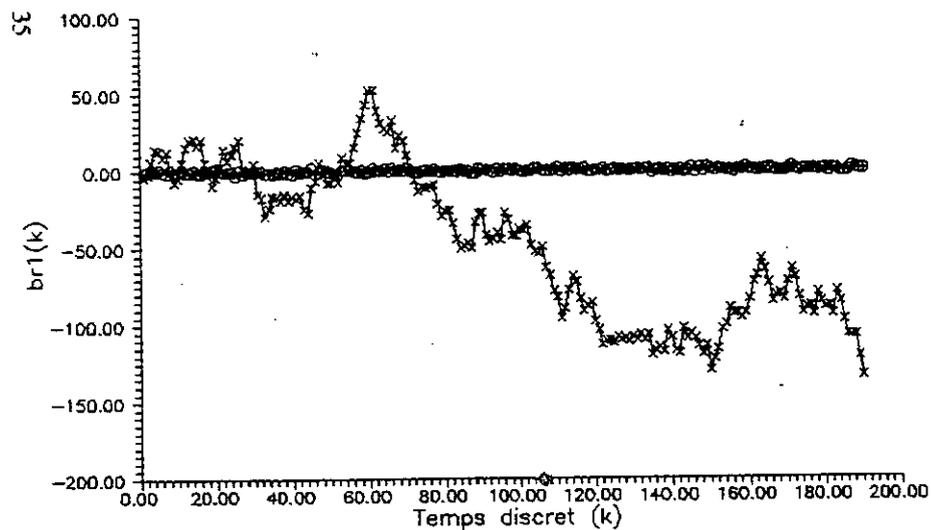


FIGURE II.12.2—REPRESENTATION DES PERTURBATIONS
 o o o Residus
 x x x Bruit mesure sur le modele reel

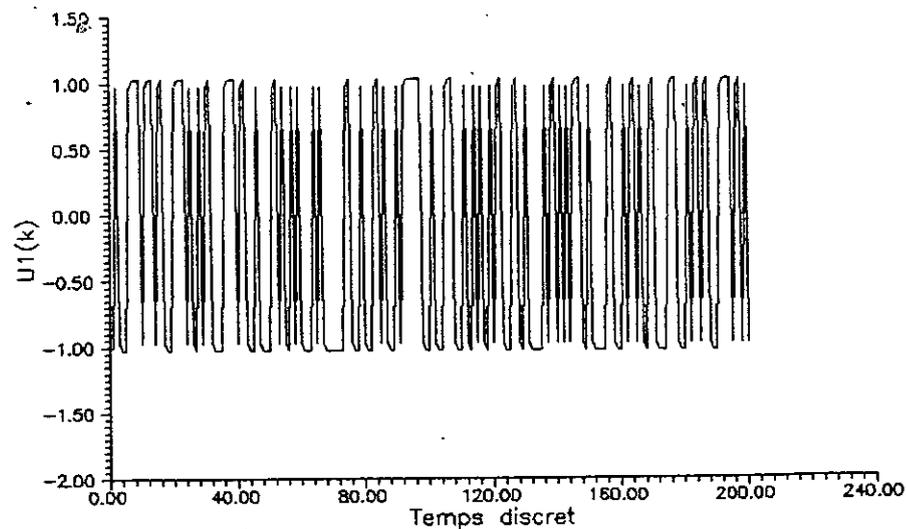


FIGURE II.12.4—REPRESENTATION DE L'ENTREE FILTREE

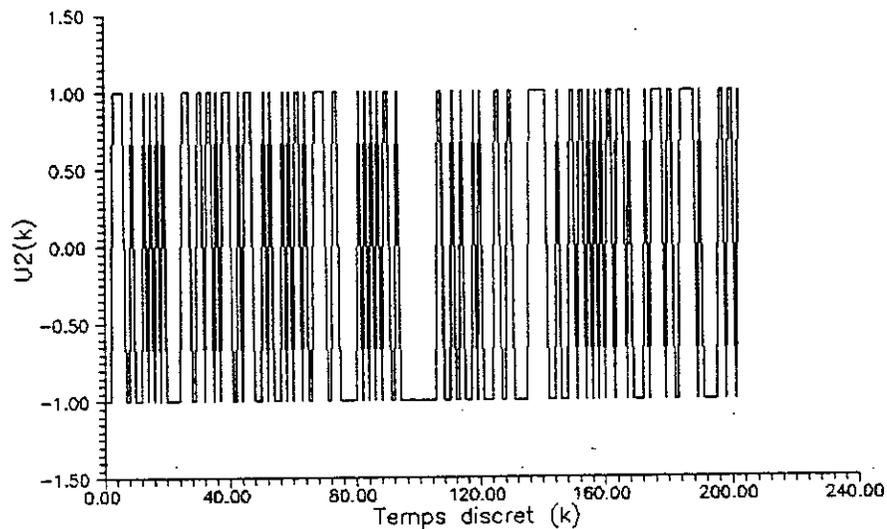


FIGURE II.13.1—REPRESENTATION DE L'ENTREE DE MESURE

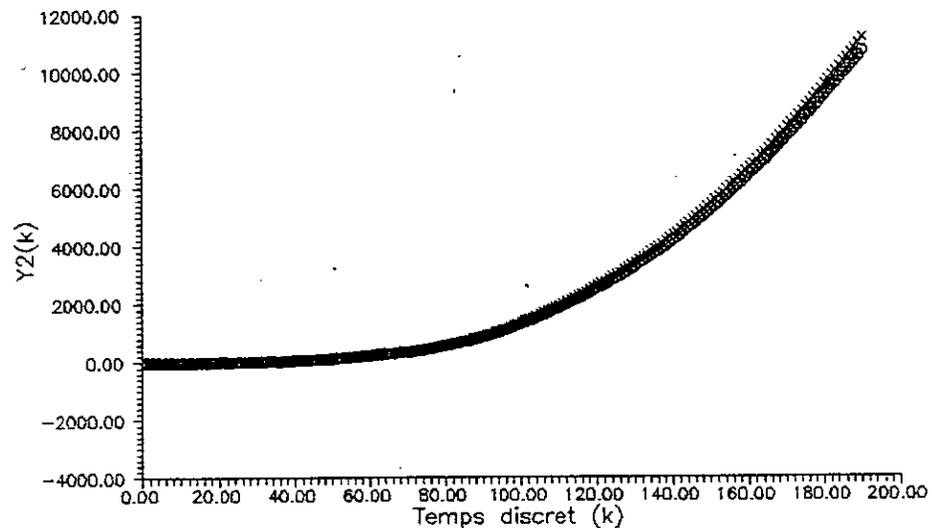


FIGURE II.13.3—REPOSE TEMPERELLE DISCRETE
o o o Sortie du modele identifie
x x x Sortie du modele reel

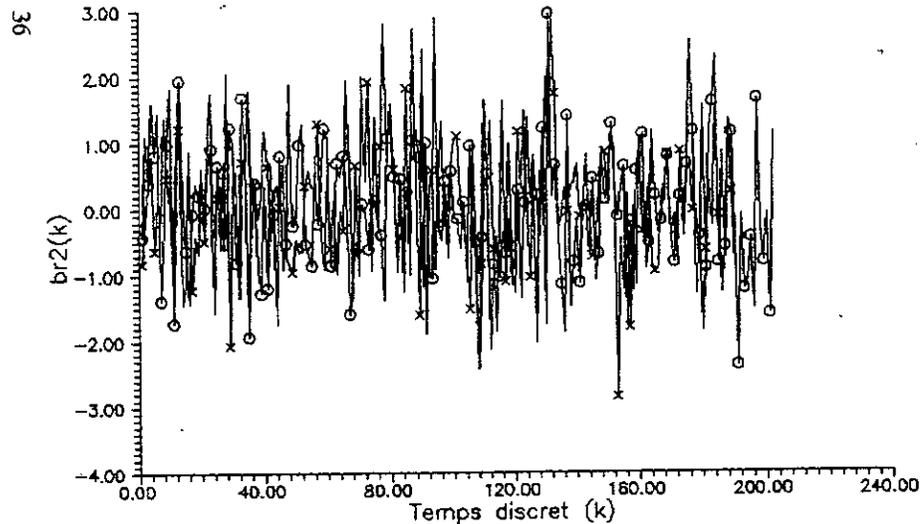


FIGURE II.13.2—REPRESENTATION DES PERTURBATIONS
o o o Residus
x x x Bruit mesure sur le modele reel

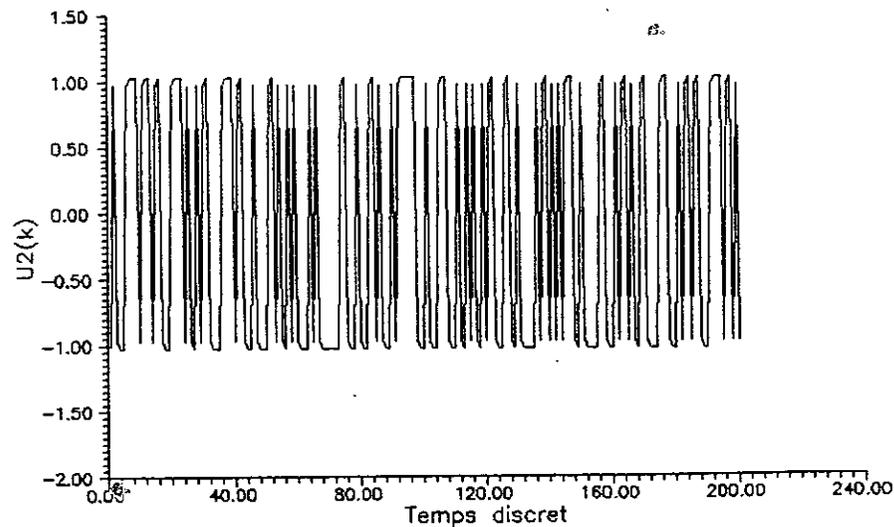


FIGURE II.13.4—REPRESENTATION DE L'ENTREE FILTREE

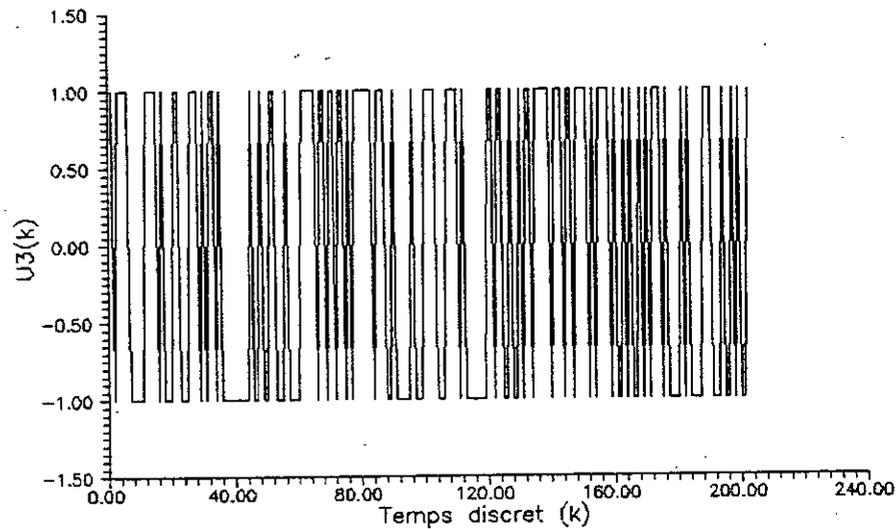


FIGURE II.14.1—REPRESENTATION DE L'ENTREE DE MESURE

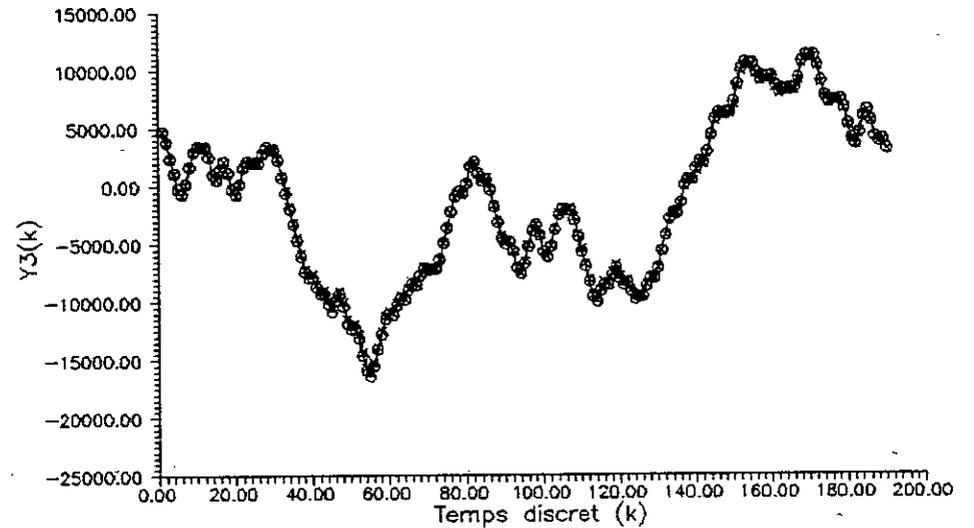


FIGURE II.14.3—REPOSE TEMPORELLE DISCRETE

o o o Sortie du modele identifie
x x x Sortie du modele reel

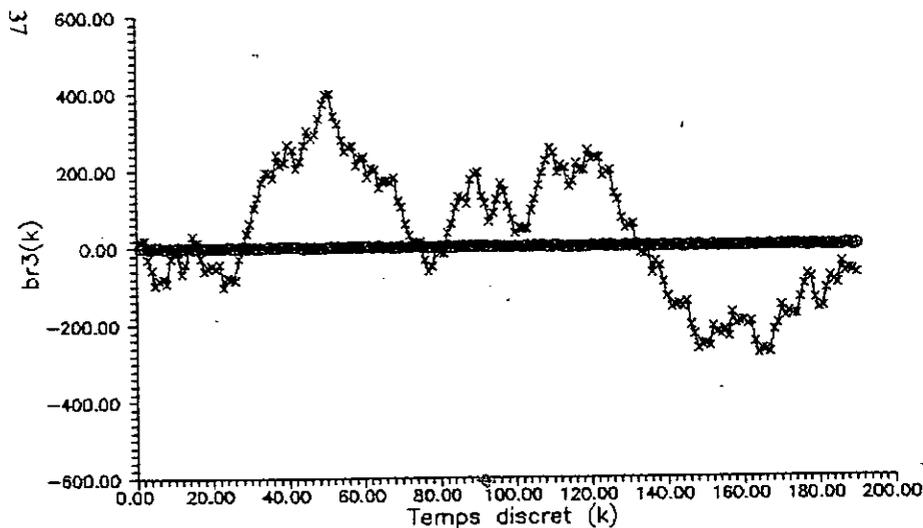


FIGURE II.14.2—REPRESENTATION DES PERTURBATIONS

o o o Residus
x x x Bruit mesure sur le modele reel

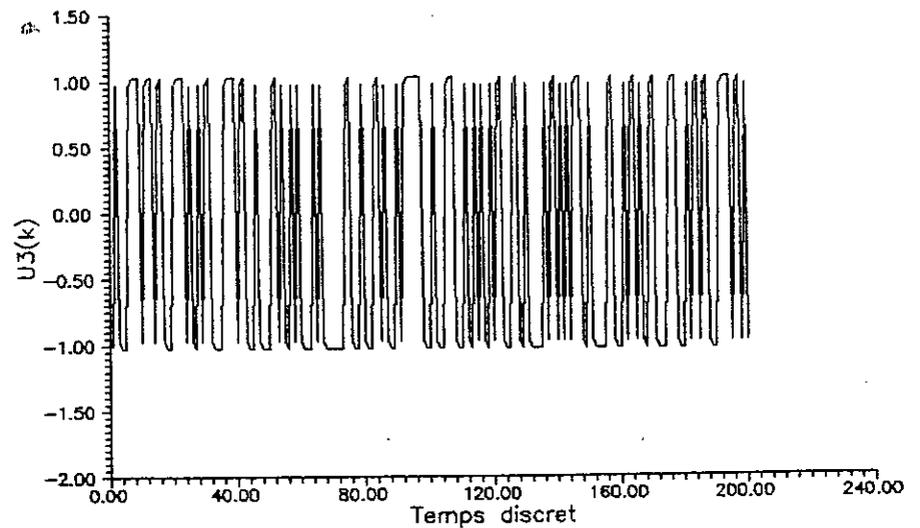


FIGURE II.14.4—REPRESENTATION DE L'ENTREE FILTREE

où

$$B(q) = \begin{bmatrix} B_{11}(q) & B_{12}(q) & B_{13}(q) \\ B_{21}(q) & B_{22}(q) & B_{23}(q) \\ B_{31}(q) & B_{32}(q) & B_{33}(q) \end{bmatrix}$$

et

$$A(q) = \text{diag}\{A_{11}(q) \quad A_{22}(q) \quad A_{33}(q)\}$$

Remarque: les valeurs théoriques et les valeurs estimées de $A(q)$ et $B(q)$ sont données dans l'Annexe D(tableau 3).

- Tous les signaux qui interviennent dans cet exemple peuvent être représentés par :
- les figures II.12.1, II.13.1, II.14.1: représentent les entrées du système multivariable.
 - Les figures II.12.2, II.13.2, II.14.2: définies par le symbole (x) représentent les bruits additifs.

Les figures II.12.3, II.13.3, II.14.3 nous permettent de juger de la qualité du modèle obtenu par une identification par MCG: Elles représentent une comparaison entre les signaux de sortie du modèle réel et du modèle identifié.

II.4.2 - INTERPRETATIONS DES RESULTATS

Trois exemples de systèmes multivariables ont été considérés. Dans le premier exemple, il s'agit de la modélisation d'une chaudière [WIL.79], c'est un système multivariable à quatre entrées et quatre sorties. Le second exemple, est le modèle mathématique représentant un réacteur nucléaire [TZA.77]. C'est un système à trois entrées et trois sorties. Le dernier exemple concerne un bras manipulateur [MAZ.93]. C'est aussi un système à trois entrées et trois sorties.

La procédure d'identification utilisée est la méthode des moindres carrés généralisés (MCG). Une transformation orthogonale du type QR a été utilisée pour la résolution du système d'équation intervenant dans les (MCG). Cette méthode permet d'éviter le problème d'instabilité numérique et ceci grâce à sa robustesse [KEU.93].

Nous sommes arrivés à une estimation satisfaisante des paramètres des différents systèmes considérés. Les réponses impulsionnelles correspondantes aux différentes sorties du premier système sont représentées sur les figures II.5.3, II.6.3, II.7.3 et II.8.1, celles du second système sur les figures II.9.3, II.10.3, II.11.3 et enfin les réponses du troisième système sont données sur les figures II.12.3, II.13.3 et II.14.3. Ces résultats illustrent bien les performances de la méthode d'identification (MCG) utilisée. Nous pouvons conclure qu'ils sont satisfaisants en comparaison avec les réponses théoriques.

II.5 - CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons étudié une méthode d'identification, c'est la méthode des moindres carrés généralisés. Elle a été à l'origine développée pour l'identification des systèmes monovariables et nous l'avons généralisée pour l'identification des systèmes multivariables. Un algorithme est proposé (voir Annexe B), où les entrées utilisées sont des SBPA couplées à une matrice de HADAMARD pour éviter qu'elles ne soient corrélées.

Une transformation orthogonale du type QR a été utilisée pour la résolution du système d'équations intervenant dans les (MCG). Cette méthode permet d'éviter le problème d'instabilité numérique et ceci grâce à sa robustesse.

Nous sommes arrivés à une estimation satisfaisante des paramètres des différents systèmes considérés. Les réponses impulsionnelles correspondantes aux différentes sorties du premier système, du second système et enfin les réponses du troisième système sont représentées graphiquement. Ces résultats illustrent bien les performances de la méthode d'identification (MCG) utilisée. Nous pouvons conclure qu'ils sont satisfaisants en comparaison avec les valeurs théoriques.

Il apparaît clairement dans ce chapitre, que l'identification d'un système n'est pas seulement un problème mathématique. Ceci même si des démonstrations de convergence des estimateurs sont indispensables. Ainsi, il ne faut jamais perdre de vue le but du modèle pour réaliser au mieux le compromis entre précision et simplicité. Et

surtout, il faut utiliser l'ensemble des méthodes fournies par l'arsenal théorique et regrouper leurs résultats pour obtenir une meilleure connaissance du système.

Cependant, avant toute tentative d'estimation paramétrique, un problème se pose, c'est la nécessité de fixer la structure du système. si les solutions théoriques à ce problème sont claires, il faut reconnaître qu'elles sont difficiles à mettre en oeuvre sur le plan pratique (numérique).

En effet, dans certaines conditions l'identification peut donner lieu à une surparamétrisation de la structure du modèle. Nous avons trouvé qu'il était nécessaire de vérifier si la structure des différents systèmes multivariables identifiés ne pouvait pas être approximée par un modèle équivalent mais de dimension plus réduite. Ce qui a fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE III
REDUCTION
DES SYSTEMES
MULTIVARIABLES

CHAPITRE III

REDUCTION DES SYSTEMES MULTIVARIABLES

III.1 - INTRODUCTION

Dans un grand nombre de cas pratiques, il est nécessaire de remplacer un système dynamique multivariable par un autre plus simple de comportement dynamique voisin. Cette simplification des modèles fondée autrefois sur l'expérience et le flair de l'analyste, se révèle difficile et insuffisante pour certains systèmes dynamiques multivariables. Ces dernières années, avec l'outil informatique, une recherche considérable s'est développée dans ce domaine et des techniques générales de réduction pour des modèles linéaires ont été développées. Ces efforts ont principalement portés sur l'approximation d'un système d'équations différentielles linéaires de grande dimension par un modèle de dimension réduite, essentiellement à coefficients constants, et ceci dans le domaine temporel et fréquentiel [OKK.93] [VER.93].

Parmi Les méthodes de réduction on trouve l'agrégation [GRU.77], la méthode des gains équilibrés [KAB.85a] [KAB.85b], la technique de réduction optimale [WIL.70] [WIL.79] [WIL.80] et la projection dans un espace fonctionnel [DAV.84]. Ces techniques présentent un grand intérêt dans le cas où le système est pratiquement irréalisable à cause de sa complexité ou de la difficulté de son implémentation.

De plus dans l'analyse de certaines caractéristiques du système physique, l'utilisation en simulation d'un modèle d'ordre réduit peut entraîner des gains en temps considérables. En effet, il est nécessaire d'utiliser aux niveaux supérieurs (processus

réels à commander) des modèles de plus en plus simples (voir chapitre 1, synthèse d'un contrôleur). Cela, pour s'assurer que les algorithmes de coordination peuvent travailler en temps réel et converger vers l'objectif fixé.

Dans ce qui va suivre, le problème de la représentation des systèmes de grande dimension par des modèles de dimension réduite sera abordé. Dans un premier temps nous nous proposons d'étudier une classe de méthodes de réduction de modèles multivariables minimaux [BER.73]. Ensuite, nous aborderons la simplification des modèles multivariables non minimaux [DER.94] [SAF.89].

III.2 - GENERALITES

Soit un système complexe linéaire, invariant dans le temps, stable, gouvernable et observable donné par sa représentation dans l'espace d'état :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (\text{III.1.a})$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (\text{III.1.b})$$

avec $U(t) \in \mathcal{H}^m$; $X(t) \in \mathcal{H}^N$ et $Y(t) \in \mathcal{H}^p$. De plus $A \in \mathcal{H}^{N \times N}$, $B \in \mathcal{H}^{N \times m}$, $C \in \mathcal{H}^{p \times N}$ sont des matrices constantes. La fonction de transfert du système (III.1) est donnée par:

$$\hat{G}(s) = C(Is - A)^{-1}B \quad (\text{III.2})$$

Nous avons considéré que $D = 0$, i.e que le système (III.1) est strictement propre. Plusieurs méthodes de réduction des systèmes linéaires dynamiques multivariables ont été proposées durant les quinze dernières années. Elles sont le plus souvent basées sur l'analyse de modèles [MAD.84] ou des concepts du domaine fréquentiel [ENN.84] [VER.93].

L'une des techniques de réduction qui a été proposée est la procédure de troncature d'une réalisation équilibrée. Elle a été suggérée par MOORE [MOO.83] puis étudiée par PERNEBO & SILVERMANN [PER.82] et ensuite par GLOVER [GLO.84]. Elle a été développée par la suite par BETTAYEB [BET.91]. KABAMBA [KAB.85a]

[KAB.85b] a réétudié cette technique en donnant une reparamétrisation de la condition d'équilibre en fonction des paramètres d'état A, B et C. Toutefois cette technique de troncature des réalisations équilibrées n'est pas optimale au sens L^2 [ADA.93] [RAM.94] et n'est pas applicable aux systèmes non minimaux. Dans le cas des systèmes non minimaux la méthode de SAFONOV & CHIANG [SAF.89] s'avère plus adéquate car elle ne fait pas intervenir explicitement les réalisations équilibrées.

Vu l'intérêt des concepts de controllabilité et d'observabilité dans la représentation et la compréhension des techniques de réduction qui sont basées sur l'analyse de ces grammien, nous en introduisons les définitions suivantes [KAB.85a].

III.2.1 - DEFINITION DES GRAMMIENS D'OBSERVABILITE ET DE COMMANDABILITE

Admettons que la matrice A du système (III.1) a toutes ses valeurs propres situées dans le demi-plan gauche du plan complexe. On définit les matrices : grammien de gouvernabilité et grammien d'observabilité par :

- Grammien de controllabilité :

$$P_i = \int_{t_0}^{+\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (III.3)$$

- Grammien d'observabilité :

$$Q_i = \int_{t_0}^{+\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (III.4)$$

III.2.2 - PROPOSITION

- Pour le système d'équation (III.1), si la matrice A a toutes ses valeurs propres situées dans le demi-plan gauche du plan complexe, alors P_i et Q_i seront les solutions uniques des équations de type LYAPUNOV [ROT.70] données ci-dessous :

$$AP_i + P_i A^T + BB^T = 0 \quad (III.5)$$

$$A^T Q_i + Q_i A + C^T C = 0 \quad (III.6)$$

P_i et Q_i sont des matrices symétriques définies positives représentant les grammiens de gouvernabilité et d'observabilité du système (III.1) respectivement. Elles sont obtenues à partir des équations de type LYAPOUNOV données ci-dessus par (III.5) et (III.6).

III.3 - POSITION DU PROBLEME

La modélisation de nombreux processus réels (colonne à distiller, réacteur nucléaire, ...) conduit le plus souvent à des systèmes d'équations différentielles stationnaires d'ordre élevé, obtenus par linéarisation autour d'un point de fonctionnement et donnés par l'expression (III.1).

Le système d'équations (III.1) est supposé complètement observable, commandable, linéaire, invariant dans le temps et stable. Une approximation satisfaisante du système (III.1) peut être obtenue par un modèle d'ordre réduit de dimension r avec

($m \leq r \leq N$) :

$$\dot{X}_r(t) = A_r X_r(t) + B_r U(t) \quad (III.7.a)$$

$$Y_r(t) = C_r X_r(t) \quad (III.7.b)$$

où on suppose que les p sorties Y_r décrivent suffisamment bien les sorties du système réel. D'une façon générale les états $X(t)$ et $X_r(t)$ des modèles (III.1) et (III.7) sont liées par une transformation du type :

$$X_r(t) = \Gamma(X(t)) \quad (III.8)$$

où Γ est un opérateur matriciel de dimension $r \times N$. Il sera déterminé pour chaque méthode utilisée ci-après. Il a été trouvé que de nombreuses méthodes de réduction sont équivalentes à cette relation. Si le système est minimal [BER.73], une approche

qui paraît adéquate est la méthode de KABAMBA [KAB.85a]. Sinon, lorsque le système est non minimal la méthode de SAFONOV et CHIANG [SAF.89] peut être appliquée.

III.4 - REDUCTION DES SYSTEMES MULTIVARIABLES MINIMAUX

Pour le choix de l'ordre de réduction du modèle, la méthode de KABAMBA est basée sur l'analyse des gains équilibrés. Par rapport à la technique de troncature d'une réalisation équilibrée, la méthode de KABAMBA introduit une mesure de la qualité du modèle d'ordre réduit. Cette mesure correspondant à la norme quadratique de la fonction de transfert du système pour chaque mode du système et les états associés à des valeurs qui sont faibles, sont supprimés car ils ne contribuent pas tellement au comportement dynamique du système. Toutefois, définir un modèle d'ordre réduit par cette variante nécessite une étape préliminaire d'équilibre qui peut être établie via l'algorithme de GLOVER [GLO.84], LAUB [LAU.80] ou OBER [OBE.87].

III.4.1 - REALISATION EQUILIBREE

La technique de réalisation équilibrée tend à rendre symétrique une certaine propriété d'entrée (gouvernabilité) et une certaine propriété de sortie (observabilité) en choisissant une nouvelle base de coordonnées. Il devient nécessaire de trouver une transformation pour avoir une nouvelle représentation dans laquelle les deux grammiens sont égaux et diagonaux [GLO.84].

III.4.1.1 - ALGORITHME D'EQUILIBRE [GLO.84]

Considérons le système (III.1) avec les hypothèses faites précédemment.

1/- Résolution des équations de LYAPUNOV [ROT.70], [JOH.82]

$$AP_i + P_i A^T + BB^T = 0$$

$$A^T Q_i + Q_i A + C^T C = 0$$

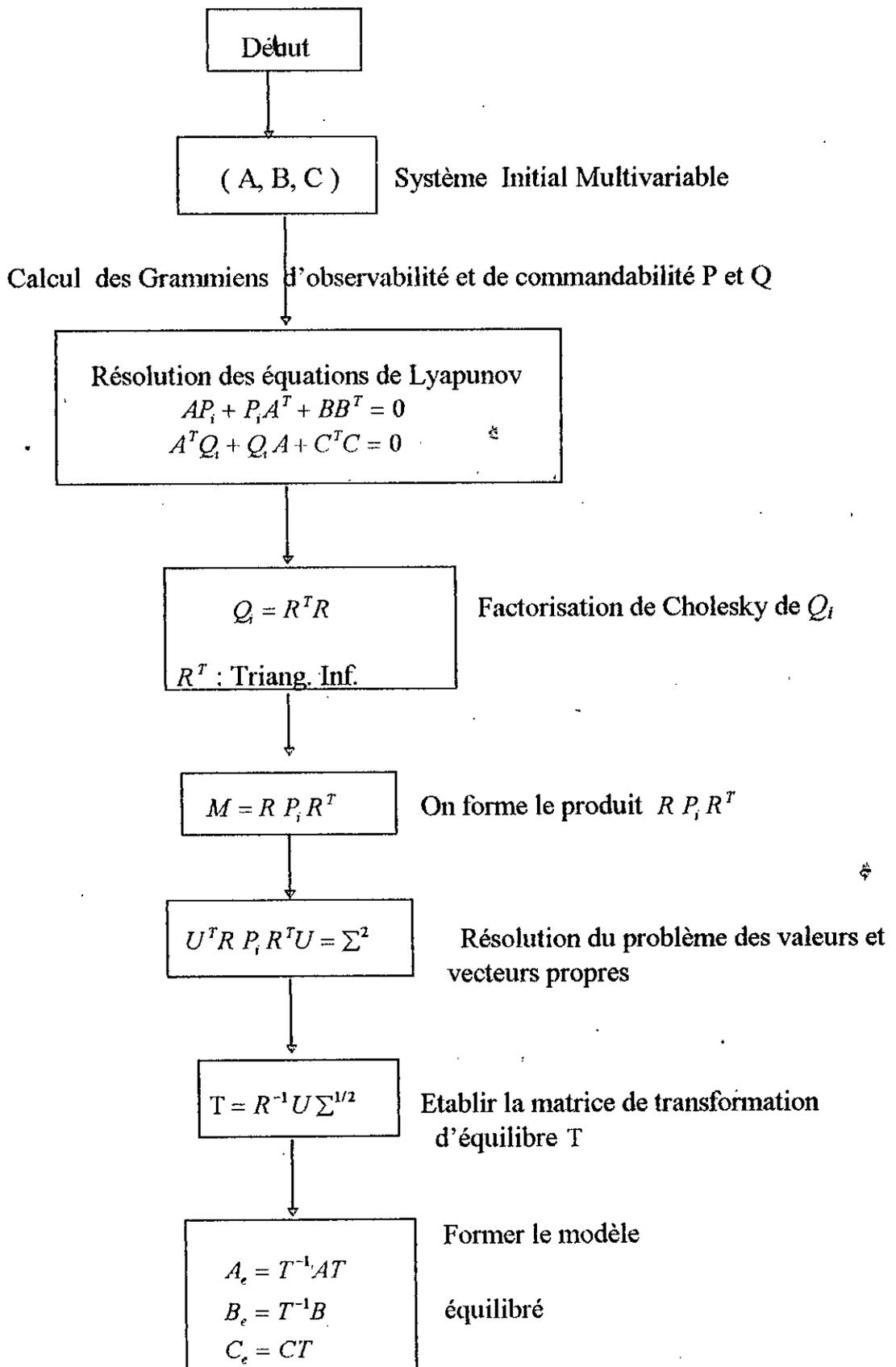


Figure III.1 - Organigramme de l'équilibre des systèmes [GLO.84]

2/- Factorisation de Cholesky de Q_i :

$$Q_i = R^T R$$

3/- On forme le produit $R P_i R^T$

- Résoudre le problème des valeurs et vecteurs propres tel que :

$$U^T R P_i R^T U = \Sigma^2 \quad \text{avec} \quad U^T U = I$$

$$\text{et} \quad \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \quad \text{ou} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

4/- On forme la matrice de transformation T :

$$T = R^{-1} U \Sigma^{1/2}$$

- Grammien d'observabilité équilibré

$$T^T Q_i T = \Sigma$$

- Grammien de gouvernabilité équilibré

$$T^{-1} P_i T^{-T} = \Sigma$$

Proposition

Considérons l'équation (III.5) et l'équation (III.6) :

1/- Si A est asymptotiquement stable,

2/- Si P_i et Q_i existent, sont uniques et sont définies positives, alors (A, B, C) est minimal [KAB.85b].

Le triplet (A, B, C) est équilibré si les grammien associés à ce dernier sont égaux et diagonaux. MOORE [MOO.81] a montré que l'existence d'une matrice de transformation d'équilibre est liée à la stabilité (asymptotique) de A et la minimalité de (A, B, C) .

III.4.2 - METHODE DES GAINS EQUILIBRES

Soit la réduction du système d'équation (III.1). Le triplet (A, B, C) est une réalisation strictement propre, avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_N > 0$ comme valeurs singulières du système (racines carrés des valeurs propres de la matrice produit $P_i Q_i$). Soient a_{ij} représentant le ij ^{ème} élément de A_e , b_i la i ^{ème} ligne de B_e , c_i la i ^{ème} colonne de C_e . Le

triplet (A_e, B_e, C_e) représentera une réalisation équilibrée [GLO.84] [MOO.81] si et seulement si pour $i = 1, \dots, N$ et $j = 1, \dots, N$, il existe [KAB.85a][KAB.85b] :

$$\sigma_i \in \mathfrak{R} \quad \text{et} \quad v_i \in \mathfrak{R}^+$$

$$\bar{b}_i \in \mathfrak{R}^m \quad \text{avec} \quad \bar{b}_i^T \bar{b}_i = 1 \quad (\text{III.9.a})$$

$$\bar{c}_i \in \mathfrak{R}^p \quad \text{avec} \quad \bar{c}_i^T \bar{c}_i = 1 \quad (\text{III.9.b})$$

tel que :

$$b_i = v_i \bar{b}_i, \quad c_i = v_i \bar{c}_i \quad \text{et} \quad a_{ii} = -\frac{v_i^2}{2\sigma_i} \quad (\text{III.9.c})$$

$$a_{ij} = \frac{v_i v_j (\bar{b}_i^T \bar{b}_j \sigma_j - \bar{c}_i^T \bar{c}_j \sigma_i)}{\sigma_i^2 - \sigma_j^2}, \quad \begin{cases} i \leq j, j \leq N \\ i \neq j \\ \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases} \quad (\text{III.9.d})$$

$$a_{ij} = \frac{v_i v_j \bar{b}_i^T \bar{b}_j}{\sigma_i} - a_{ji}, \quad \begin{cases} i \leq j, j \leq N \\ i \neq j \\ \sigma_i = \sigma_j \end{cases} \quad (\text{III.9.e})$$

$$a_{ii} = -\frac{v_i^2}{2\sigma_i} \quad \Rightarrow \quad v_i^2 = -2a_{ii}\sigma_i \quad (\text{III.10})$$

Les expressions (III.9) représentent une reparamétrisation du système équilibré (A_e, B_e, C_e) en fonction des conditions d'équilibre du système, c'est-à-dire que les paramètres a_{ij} , b_i et c_i donnés ci-dessus vont satisfaire bien les équations (III.5) et (III.6) pour des matrices $P_i = Q_i = \Sigma$ (diagonales et égales, i.e, équilibrées).

III.4.2.1 - MODELE D'ORDRE REDUIT

Pour définir l'ordre de réduction du modèle complexe il s'agira d'abord de calculer les gains équilibrés donnés par l'équation (III.10) du modèle (III.1), ensuite de former le produit $\Delta G_i = \sigma_i v_i^2$ ($i = 1, \dots, N$) qui représente le $i^{\text{ème}}$ terme de la norme quadratique de la fonction de transfert du système [MAS.88]. On définit, alors, l'erreur relative par

$$\zeta_i = \frac{|\Delta G_{i+1} - \Delta G_i|}{\Delta G_{i+1}}. \quad \text{Si } \zeta_i \leq \zeta \quad \text{où } \zeta \text{ est une précision choisie, alors l'ordre de réduction } r$$

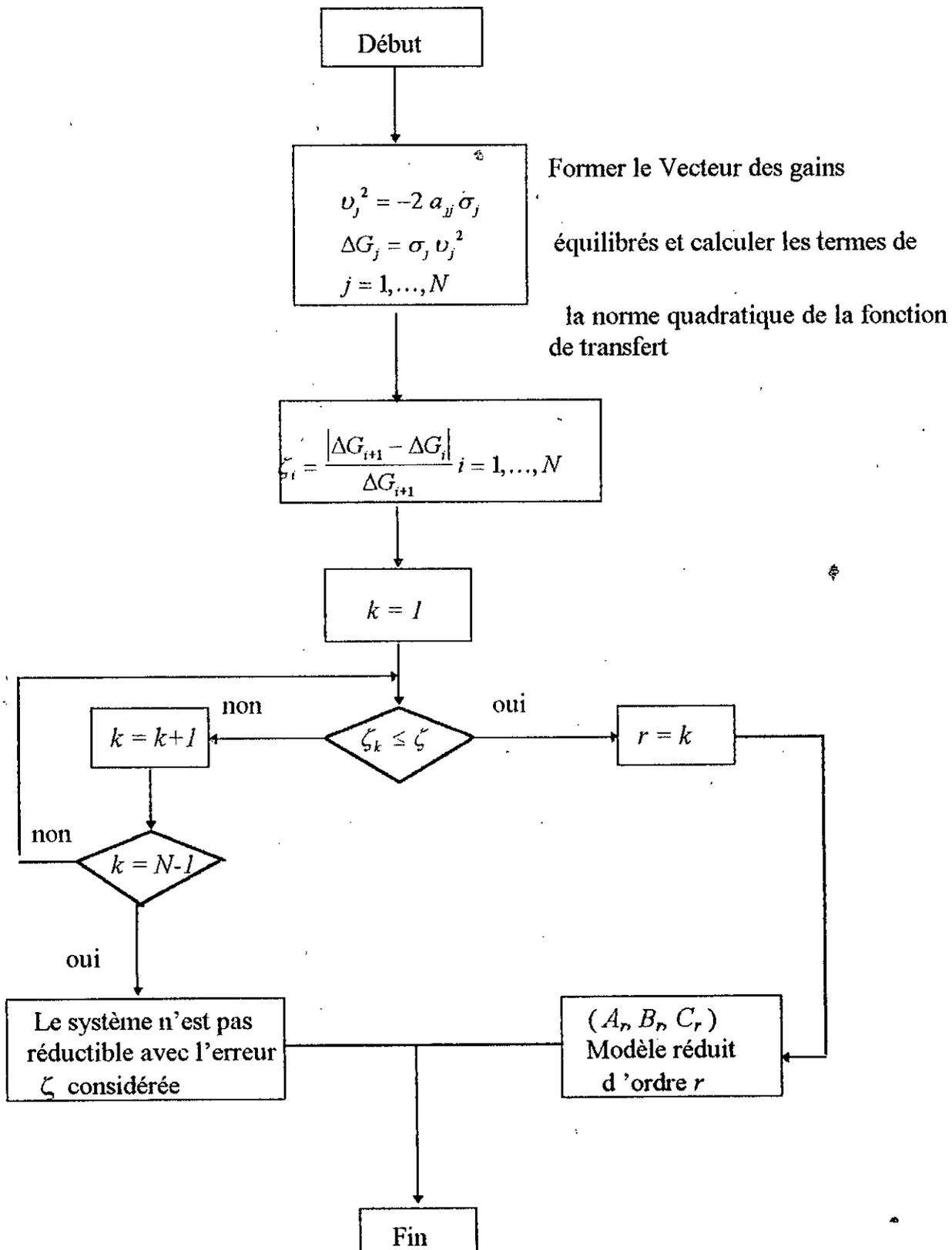


Figure III.2 - Organigramme de réduction d'un système multivariable minimal

sera égal à i et le modèle d'ordre réduit sera donné par troncature des $(N-r)$ lignes et colonnes de A_e , $(N-r)$ lignes de B_e et $(N-r)$ colonnes de C_e . Ceci comme constaté par KABAMBA [MAS.88] signifie que les $(N-r)$ états qui sont découplés des autres états du système, sont peu affectés par l'entrée et affectent peu la sortie. Donc, ils contribuent très peu à la norme L^2 de la fonction de transfert (voir Annexe E). Ainsi, le modèle d'ordre réduit adéquat est déduit par une simple troncature de ces états. Dans cette étude le résultat (III.10) de KABAMBA sus-cité est utilisé mais la synthèse de la transformation d'équilibre T est calculée à l'aide d'une procédure de diagonalisation et d'équilibre des matrices P_i et Q_i donnée par (III.5) et (III.6) [GLO.84]. On peut montrer que cette technique est équivalente à une transformation du vecteur d'état $X(t)$ en un autre vecteur d'état de dimension plus réduite [DER.88], tel que le modèle réduit est donné par :

$$\begin{aligned} A_r &= GA_e F = GT^{-1} A T F \\ B_r &= GB_e = GT^{-1} B \\ C_r &= C_e F = C T F \end{aligned} \tag{III.11.a}$$

$$\text{avec } G = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} \text{ et } F = G^T \tag{III.11.b}$$

où I_r est une matrice identité de dimension $r \times r$ et T est donnée par $T = R^{-1} U \Sigma^{1/2}$ (voir section III.4.1.1).

On peut montrer aussi que la matrice $E = TFGT^{-1}$ est une projection, ce qui veut dire que le vecteur d'état du modèle réduit n'est qu'une projection du vecteur d'état du système réel sur un sous-espace de dimension r . Dans ce cas l'opérateur Γ défini en (III.8) est donné par $\Gamma = GT^{-1}$.

Le modèle simplifié résultant est minimal, complètement observable, commandable et asymptotiquement stable [KAB.85a].

III.5 - REDUCTION DES SYSTEMES MULTIVARIABLES NON MINIMAUX

Dans la section précédente une technique de réduction de modèles minimaux a été

étudiée. Cependant, si les systèmes étudiés ne sont pas minimaux c'est-à-dire qu'ils présentent des modes presque ingouvernables et inobservables, alors l'équilibre devient intrinsèquement mal conditionné et la matrice de transformation d'équilibre T tendra vers une singularité [POO.74] [STE.77]. Ceci est équivalent soit à des valeurs singulières du système qui peuvent être de même ordre de grandeur (ordre de multiplicité) [GOL.70], ou très faibles. Dans ces conditions la réduction par la méthode des gains équilibrés [KAB.85a] s'avère très difficile même impossible.

L'objet de ce qui va suivre sera d'utiliser une technique de réduction qui ne nécessite pas l'équilibre. Cela peut être réalisé par la technique de SAFONOV & CHIANG [SAF.89].

III.5.1 - REDUCTION PAR LA METHODE DE SAFONOV [SAF.89]

La réduction par cette variante ne nécessite pas l'équilibre, elle est basée sur une décomposition propre d'une certaine matrice E_{big} . Ainsi, Le problème revient à trouver un modèle simplifié d'ordre r dont les paramètres d'état sont donnés en fonction de cette décomposition propre. En effet, la méthode consiste à définir d'abord une matrice de la forme [SAF.89]:

$$E_{big} = V_{L,big}^T V_{R,big} \quad (III.12.a)$$

avec $V_{L,big}^T$ et $V_{R,big}$, des matrices de dimensions $N \times r$ et $r \times N$, respectivement, dont les colonnes forment les bases de l'espace propre, droit et gauche de $P_i Q_i$, qui sont associées aux valeurs propres maximales de $P_i Q_i$.

La décomposition de E_{big} en valeurs singulières donne :

$$E_{big} = U_{E,big} \Sigma_{E,big} V_{E,big}^T \quad (III.12.b)$$

$$\text{ensuite on définit : } S_{l,big} = V_{l,big} U_{E,big} \Sigma_{E,big}^{-1/2} \quad (III.13)$$

$$S_{R,big} = V_{R,big} V_{E,big} \Sigma_{E,big}^{-1/2} \quad (III.14)$$

et la représentation du modèle simplifié sera donnée par [SAF.89] :

$$\begin{aligned}\hat{A}_r &= S_{L,big}^T A S_{R,big} \\ \hat{B}_r &= S_{L,big}^T B \\ \hat{C}_r &= C S_{R,big}\end{aligned}\tag{III.15}$$

On peut montrer que la transformation $E = S_{R,big} S_{L,big}^T$ est une projection [DER.88] [DER.94] [SAF.89], c'est-à-dire $S_{L,big}^T S_{R,big} = I_r$. Dans ce cas l'opérateur Γ de (III.8) prend la forme $\Gamma = S_{L,big}^T$.

III.5.2 - ALGORITHME DE REDUCTION [SAF.89]

1/ Soit (A,B,C) la représentation d'état d'un système propre d'ordre N .

2/ Résolution des deux équations de LYAPUNOV [ROT.70] [JOH.82]

$$AP_i + P_i A^T + BB^T = 0$$

$$A^T Q_i + Q_i A + C^T C = 0$$

3/ Décomposition de Schur du produit $P_i Q_i$

4/ Pour Choisir r l'ordre de réduction, il suffit de vérifier que [MOO.81]:

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r \sigma_i^4}{\sum_{i=r+1}^N \sigma_i^4}} \gg \zeta \quad (r = 1, \dots, N-1)$$

où les σ_i représentent les valeurs singulières de $P_i Q_i$ et ζ une précision que l'on impose.

5/ Calculer V_D et V_A par rotation tel que :

$$V_A^T P_i Q_i V_A = \begin{bmatrix} \lambda_{A_N} & * & * & * \\ 0 & \lambda_{A_{N-1}} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{A_1} \end{bmatrix}$$

$$V_D^T P_i Q_i V_D = \begin{bmatrix} \lambda_{D_1} & * & * & * \\ 0 & \lambda_{D_2} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{D_N} \end{bmatrix}$$

6/ Partition de V_D et V_A tel que :

$$V_A = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\phantom{V_{R,Small}}}^{N-r} & \overbrace{\phantom{V_{L,big}}}^r \end{array} \right]$$

$$V_D = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\phantom{V_{R,big}}}^r & \overbrace{\phantom{V_{L,Small}}}^{N-r} \end{array} \right]$$

7/ $E_{big} = V_{L,big}^T V_{R,big}$

8/ Décomposition de E_{big} en valeurs singulières

$$E_{big} = U_{E,big} \Sigma_{E,big} V_{E,big}^T$$

9/ Calcul de : $S_{L,big} = V_{L,big} U_{E,big} \Sigma_{E,big}^{-1/2}$

$$S_{R,big} = V_{R,big} V_{E,big} \Sigma_{E,big}^{-1/2}$$

10/ Calculer la représentation du modèle simplifié

$$\hat{A}_r = S_{L,big}^T A S_{R,big}$$

$$\hat{B}_r = S_{L,big}^T B$$

$$\hat{C}_r = C S_{R,big}$$

11/ Calculer les grammiens réduits

$$P_r = S_{L,big}^T P_i S_{L,big}$$

$$Q_r = S_{R,big}^T Q_i S_{R,big}$$

12/ Si P_r et Q_r sont diagonales aller à 13 sinon diagonaliser P_r et Q_r et aller à 13 [DER.94].

13/ Equilibrer le modèle simplifié [DER.94]

- Calculer la transformation T diagonale

$$T_{ii} = \left[P_{r_{ii}} / Q_{r_{ii}} \right]^{1/4}$$

-Calculer le modèle réduit équilibré

♣

$$A_{re} = T^{-1} \hat{A}_r T$$

$$B_{re} = T^{-1} \hat{B}_r$$

$$C_{re} = \hat{C}_r T$$

L'avantage des méthodes présentées ci-dessus (méthodes de KABAMBA et de SAFONOV) réside dans leur simplicité et la facilité de leur implémentation. Aussi, elles génèrent un ensemble de modèles d'ordre réduit qui sont satisfaisants mais non nécessairement optimaux au sens des moindres carrés L^2 . Pour avoir un modèle d'ordre réduit optimal au sens L^2 , il faut envisager les conditions nécessaires à l'optimisation [SHI.91].

A l'origine, ce problème a été abordé et résolu par WILSON [WIL.70] ensuite repris avec la contribution de MISHRA [WIL.79] [WIL.80]. Il a été reformulé par la suite par HYLAND & BERNSTEIN [DAV.85]. Mais, la forme de la solution est implicite donc difficile à mettre en oeuvre. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour la méthode de WILSON & MISHRA [WIL.80] qui sera étudiée ci-après.

III.6- REDUCTION OPTIMALE AU SENS L^2

La recherche d'un modèle simplifié par les techniques citées dans la section précédente donnent un ensemble de solutions, que l'on pourra qualifier de sous-optimales. En effet, lorsque le choix de l'ordre de réduction est arbitraire, nous avons trouvé qu'il est nécessaire d'utiliser une procédure pour améliorer la qualité des modèles obtenus. La solution repose sur la minimisation d'un critère quadratique. Pour s'assurer de la convergence de cet algorithme, il faut vérifier la stabilité, la commandabilité et l'observabilité du modèle réduit à chaque pas d'itération .

III.6.1 - GENERALITES

Considérons la réduction d'un système complexe donné par sa représentation dans l'espace d'état par l'équation (III.1). Etant donné un modèle d'ordre réduit sous-optimal qui peut être décrit par l'une des deux expressions (III.11) (III.15), avec r un ordre de réduction quelconque. Alors le modèle d'ordre réduit optimal sera défini par

$$\dot{X}_{ro}(t) = A_{ro}X_{ro}(t) + B_{ro}U(t) \quad (\text{III.16.a})$$

$$Y_{ro}(t) = C_{ro}X_{ro}(t) \quad (\text{III.16.b})$$

où $t \in \mathbb{R}$, $X_{ro}(t) \in \mathbb{R}^r$, $Y_{ro}(t) \in \mathbb{R}^p$ avec $m \leq r < N$. De plus A_{ro} , B_{ro} et C_{ro} sont des matrices constantes qui minimisent le critère quadratique donné ci-dessous [WIL.80]:

$$J = \sum_{i=1}^p \int_0^{+\infty} (e^i(t)) (e^i(t)) dt \quad (\text{III.17})$$

où,

$$e^i(t) = Y^i(t) - Y_{ro}^i(t) \quad (\text{III.18})$$

avec $Y(t)$ et $Y_{ro}(t)$ les réponses du système originel et du modèle réduit optimal, respectivement.

III.6.2 - PRESENTATION DE LA METHODE DE REDUCTION OPTIMALE

III.6.2.1 - EQUATIONS [WIL.80]

Les conditions nécessaires à la minimisation de J impliquent la résolution des équations matricielles de LYAPUNOV suivantes [WIL.80] pour P et Q :

$$FP + PF^T + S = 0 \quad (\text{III.19})$$

$$F^T Q + QF + M = 0 \quad (\text{III.20})$$

où

$$F = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} C^T C & -C^T C_r \\ -C_r^T C & C_r^T C_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{bmatrix} BB & BB_r^T \\ B_r^T B & B_r B_r^T \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

ainsi, le critère (III.17) aura la forme suivante [WIL.80]:

$$J = \text{tr}(QS) = \text{tr}(PM) \quad (\text{III.22})$$

la minimisation de J par rapport à A_{ro} , B_{ro} , C_{ro} génère le modèle d'ordre réduit optimal [WIL 80] donné ci-dessous :

$$\begin{aligned} A_{ro} &= \theta_1 A \theta_2 \\ B_{ro} &= \theta_1 B \\ C_{ro} &= C \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

où

$$\theta_1 = -Q_{22}^{-1} Q_{12}^T \quad ; \quad \theta_2 = P_{12} P_{22}^{-1} \quad (\text{III.24})$$

Aussi, le produit $\theta_1 \theta_2 = I_r$ [WIL.80], ce qui signifie que le produit $\theta_2 \theta_1$ est une projection [DER.88] [DER.94]. Il est important de noter ici que le calcul de A_{ro} , B_{ro} et C_{ro} se fait à l'aide d'un algorithme itératif [WIL.80] (voir Organigramme de la figure III.3) puisque les relations (III.23) sont en fait non linéaires en A_{ro} .

III.6.2.2 - CONDITIONS NECESSAIRE A L'OPTIMUM

Etant donné le partitionnement des matrices P et Q conformément à la matrice F

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

la minimisation du critère J, donné par l'équation (III.22), par rapport aux éléments de A_r , B_r , C_r (voir l'équation (F.10) de l'Annexe F), conduit à :

$$a) \quad \frac{\partial J}{\partial b_r} = 0 \quad ; \quad b_r \text{ est un élément de } B_r$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_r} = \text{tr} \left[\frac{\partial S}{\partial b_r} Q \right] = 0 \Rightarrow B_r = -Q_{22}^{-1} Q_{12}^T B \quad (\text{III.26})$$

b) $\frac{\partial J}{\partial c_r} = 0$; c_r est un élément de C_r

$$\frac{\partial J}{\partial c_r} = \text{tr} \left[\frac{\partial M}{\partial c_r} P \right] = 0 \Rightarrow C_r = C P_{12} P_{22}^{-1} \quad (\text{III.27})$$

c) $\frac{\partial J}{\partial a_r} = 0$; a_r est un élément de A_r (voir Annexe F)

$$\frac{\partial J}{\partial a_r} = \text{tr} \left[\frac{\partial F}{\partial a_r} P \right] = 0 \Rightarrow Q_{12}^T P_{12} + P_{22} Q_{22} = 0 \quad (\text{III.28})$$

Comme l'expression de $A_{ro} = \Delta \theta_1 A \theta_2 + (I - \Delta) A_r^{old}$ donnée par WILSON [WIL.80] ne donnait pas des résultats satisfaisants, alors dans cette thèse nous l'avons remplacé par une nouvelle expression de la forme :

$$A_{ro} = -Q_{22}^{-1} Q_{22}^T A P_{12} P_{22}^{-1} - Q_{22}^{-1} \Pi A_r^T P_{22}^{-1} \quad (\text{III.29.a})$$

$$\Pi^T = (P_{12}^T Q_{12} + P_{22} Q_{22}) \quad (\text{III.29.b})$$

III.6.2.3 - ALGORITHME DE REDUCTION OPTIMALE

Cet algorithme représente une version modifiée de l'algorithme présenté par WILSON et MISHRA [WIL.80] pour un système MIMO :

1/ Choisir (A_r, B_r) contrôlable et stable

2/ Résoudre l'équation de Lyapunov $FP + PF^T + S = 0$

3/ Calculer $\theta_2 = P_{12} P_{22}^{-1}$

4/ Calculer $C_r^{New} = C \theta_2$

5/ Résoudre l'équation de Lyapunov $F^T Q + QF + M = 0$

avec (A_r, C_r^{New}) observable et stable

6/ Calculer $\theta_1 = -Q_{22}^{-1} Q_{12}^T$

7/ Calculer $B_r^{New} = \theta_1 B$

8/ Tester si B_r^{New} n'est pas égal à B_r , alors aller à l'étape 2 avec $B_r = B_r^{New}$, sinon

aller à l'étape 9.

9/ Calculer la fonction erreur $J(A_r, B_r^{New}, C_r^{New})$

10/ $A_r^{old} = A_r$ et $J_0 = J(A_r^{old}, B_r^{New}, C_r^{New})$

11/ $A_{r0} = -Q_{22}^{-1} Q_{22}^T A P_{12} P_{22}^{-1} - Q_{22}^{-1} \Pi A_r^T P_{22}^{-1}$

12/ Tester si (A_r^{New}, B_r^{New}) est contrôlable et stable alors aller à l'étape 13, sinon aller à l'étape 11

13/ Réexécuter les étapes de 2 à 8 avec A_r^{New} et B_r^{New} . Ensuite sortir de l'étape 9 et aller à l'étape 14

14/ Calculer la fonction erreur J en fonction de A_r^{New} , B_r^{New} et C_r^{New} de l'étape 13

$$J_1 = J(A_r^{New}, B_r^{New}, C_r^{New})$$

15/ Effectuer les tests ci-dessous :

a) - Si $J_1 < J_0$ alors aller à l'étape 10, sinon

b) - Si $J_1 > J_0$ alors aller à l'étape 11, sinon

c) - Si $J_1 = J_0$ alors

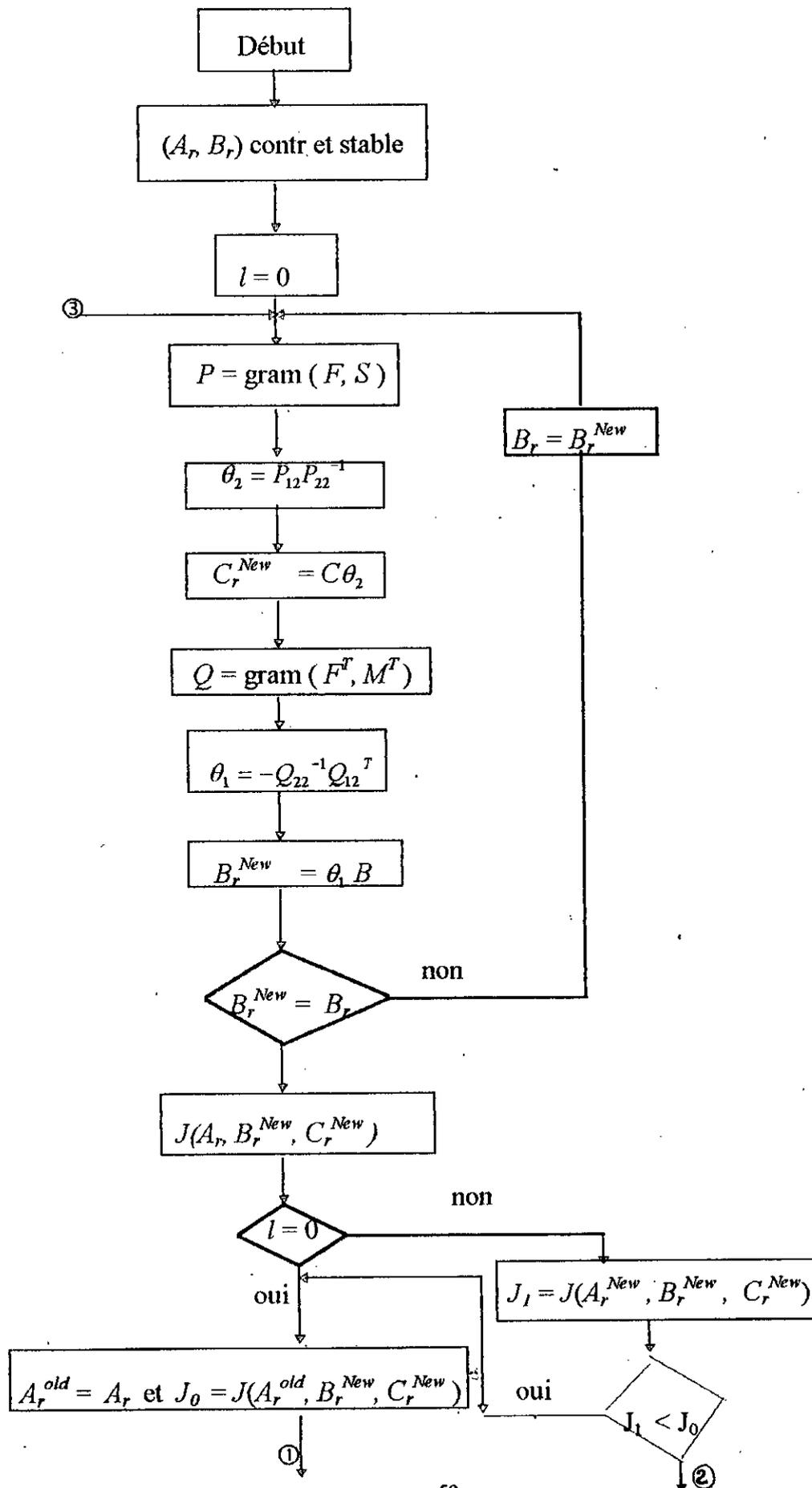
Calculer $\theta_{12} = \theta_1 \theta_2$;

Si $\theta_{12} = I_r$, alors $(A_r^{New}, B_r^{New}, C_r^{New})$ représente le modèle d'ordre réduit optimal et J_1 la valeur minimale du critère. Sinon aller à l'étape 11.

Dans le chapitre précédent les fonctions de transfert des modèles multivariables considérés ont été déterminées. Dans ce chapitre, nous allons chercher leurs représentations dans l'espace d'état. Ensuite, nous aborderons leurs approximations via les techniques de réduction qui ont été présentées ci-dessus. La procédure générale d'identification et de réduction est présentée par l'organigramme de la figure III.4.

III.7 - VALIDATION DE LA REDUCTION OPTIMALE DES MODELES MULTIVARIABLES

Comme nous l'avons introduite auparavant, l'identification d'un système peut donner lieu à une surparamétrisation du processus. Ainsi, la réduction nous permettra de vérifier s'il est possible ou non d'approximer cette structure par une structure



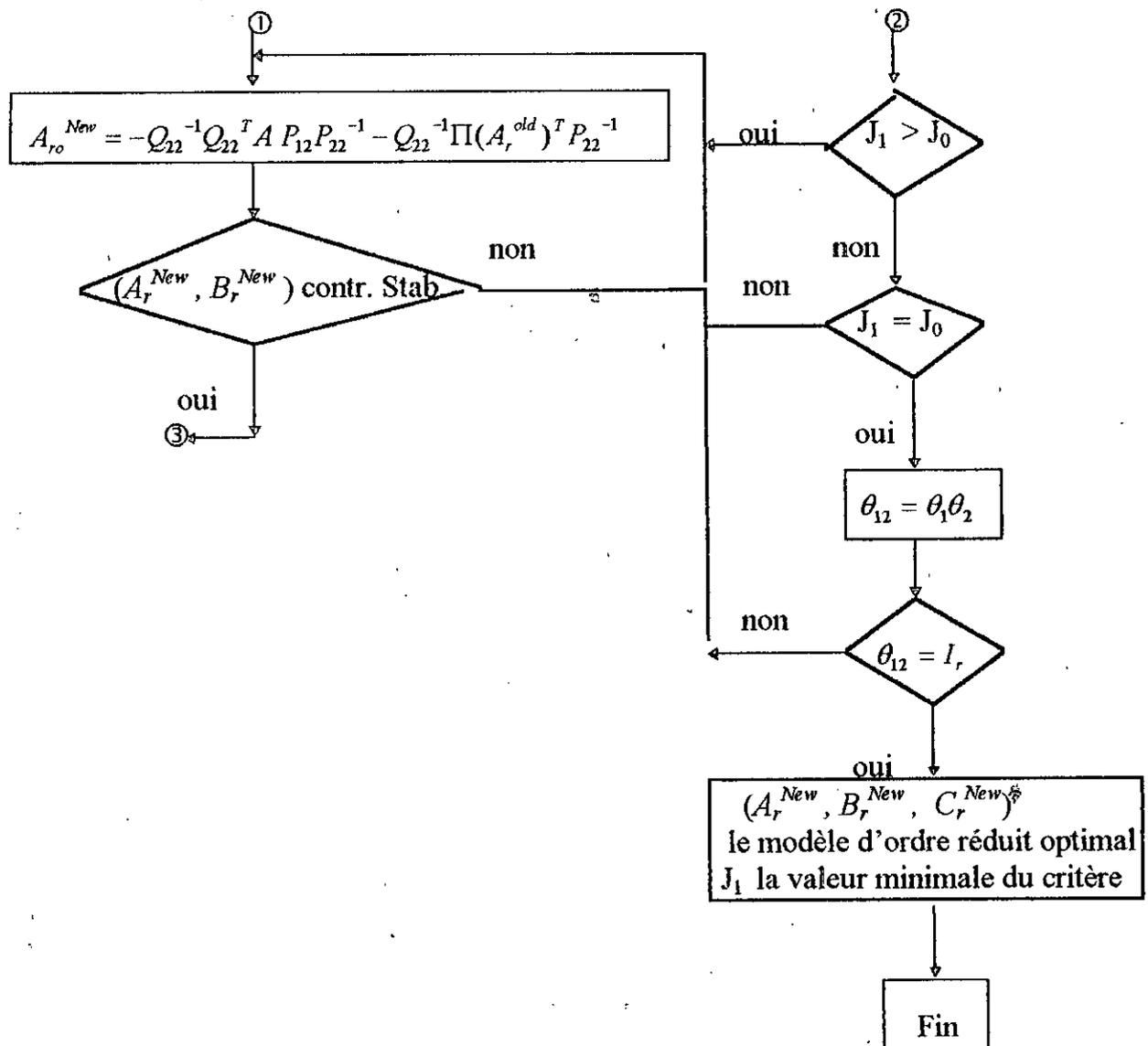


Figure III.3 - Organigramme d'une méthode de réduction optimale

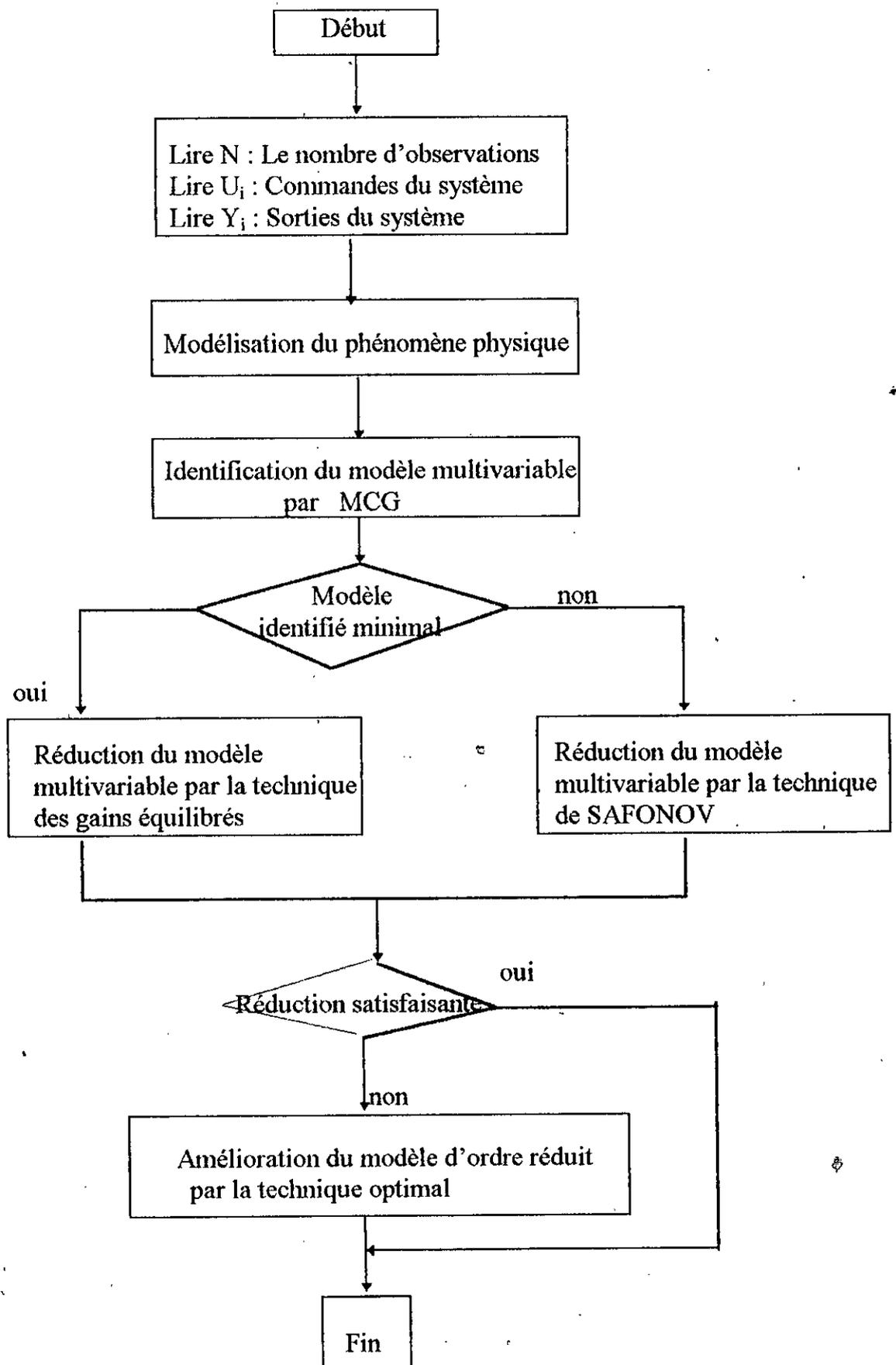


Figure III.4 - Organigramme général de l' Identification et Réduction Optimale

équivalente mais de dimension plus réduite. Aussi, nous allons considérer l'approximation des trois exemples de systèmes multivariables identifiés dans le Chapitre II, seulement ces systèmes seront représentés dans l'espace d'état. Le premier exemple, c'est une modélisation d'une chaudière [WIL.79] ; c'est un système multivariable d'ordre onze à quatre entrées et quatre sorties. Le second exemple est un modèle mathématique représentant un réacteur nucléaire [TZA.77], c'est un système d'ordre six à trois entrées et trois sorties. Le dernier exemple, c'est un bras manipulateur [MAZ.93], qui est aussi un système d'ordre six à trois entrées et trois sorties. Les paramètres A , B et C de la représentation d'état des modèles identifiés (modèle originel) sont donnés dans l'Annexe D.

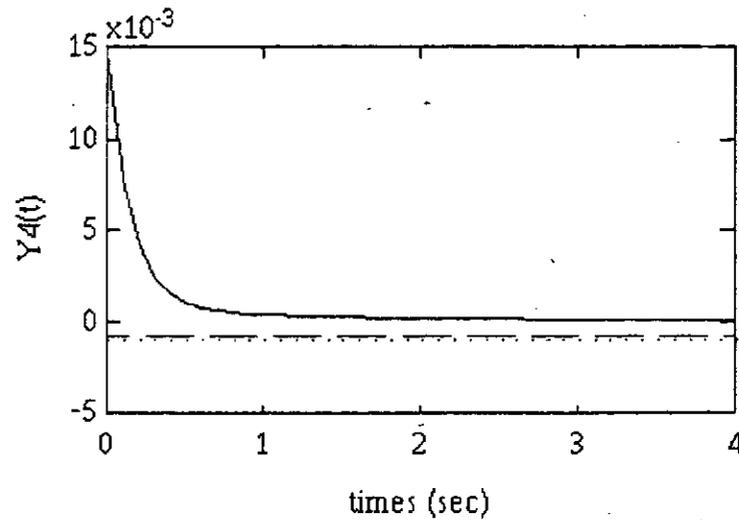
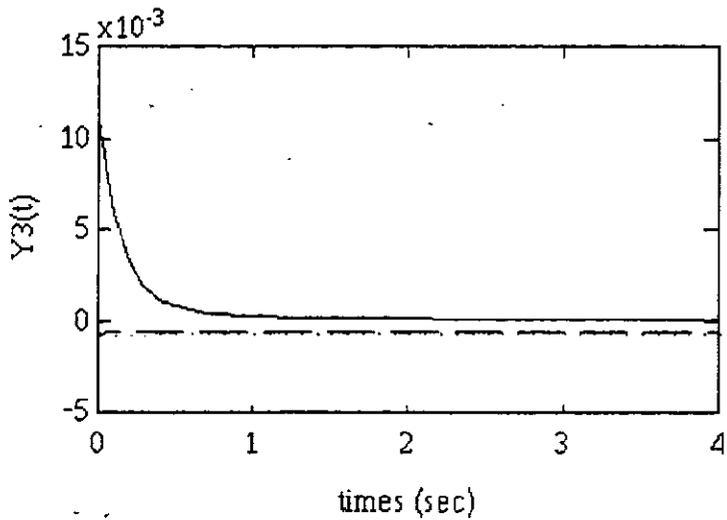
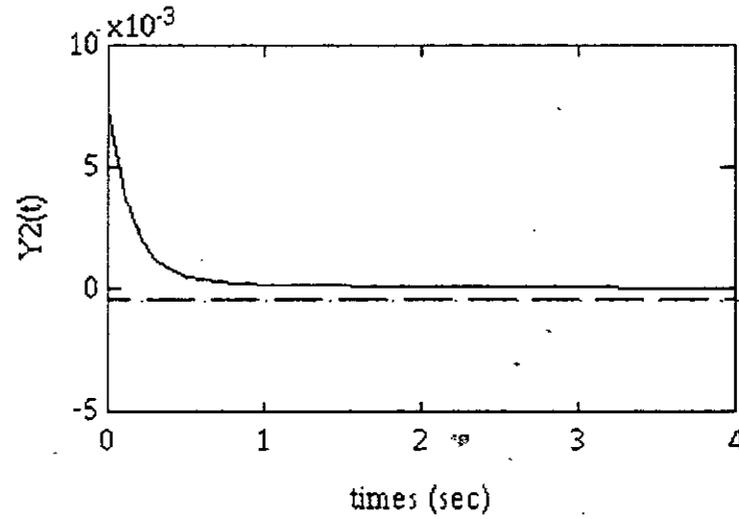
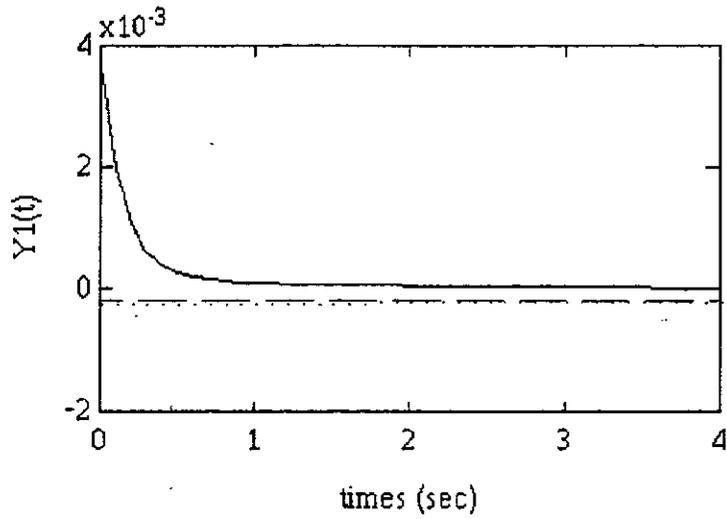
III.7.1 - RESULTATS DES SIMULATIONS

Dans cette partie nous allons présenter les résultats de simulations concernant la réduction des systèmes déjà identifiés au chapitre II. Pour illustrer les performances des méthodes de réduction de modèles citées précédemment, trois fonctions caractéristiques sont considérées à savoir : la réponse impulsionnelle, le spectre d'amplitude et le spectre de phase. Avec ces fonctions nous pouvons illustrer et comparer les méthodes de réduction et voir les cas où on est loin ou proche du système originel. Pour cela les trois exemples du chapitre précédent sont reconsidérés dans ce qui suit.

1/ Premier exemple [WIL.79]

Pour réduire le modèle d'état (Annexe D, (D.1)), nous avons utilisé la méthode de SAFONOV [SAF.89] puisque le système correspondant présente des modes multiples. Les valeurs propres du système (valeurs propres de la matrice A) sont : $1.0E+004 \times \{-6.9349, -3.6274, -2.8313, -1.0030, -0.1923, -0.0664, -0.0129, -0.0049+0.0067j, -0.0049 - 0.0067j, -0.0043, -0.0006\}$.

Les valeurs propres de la matrice produit $P_i Q_i$ (carrés des valeurs singulières)



89

FIGURE III.5.1 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle

- initial d'ordre 11
- - - - - réduit sous optimal d'ordre 2
- réduit optimal d'ordre 2

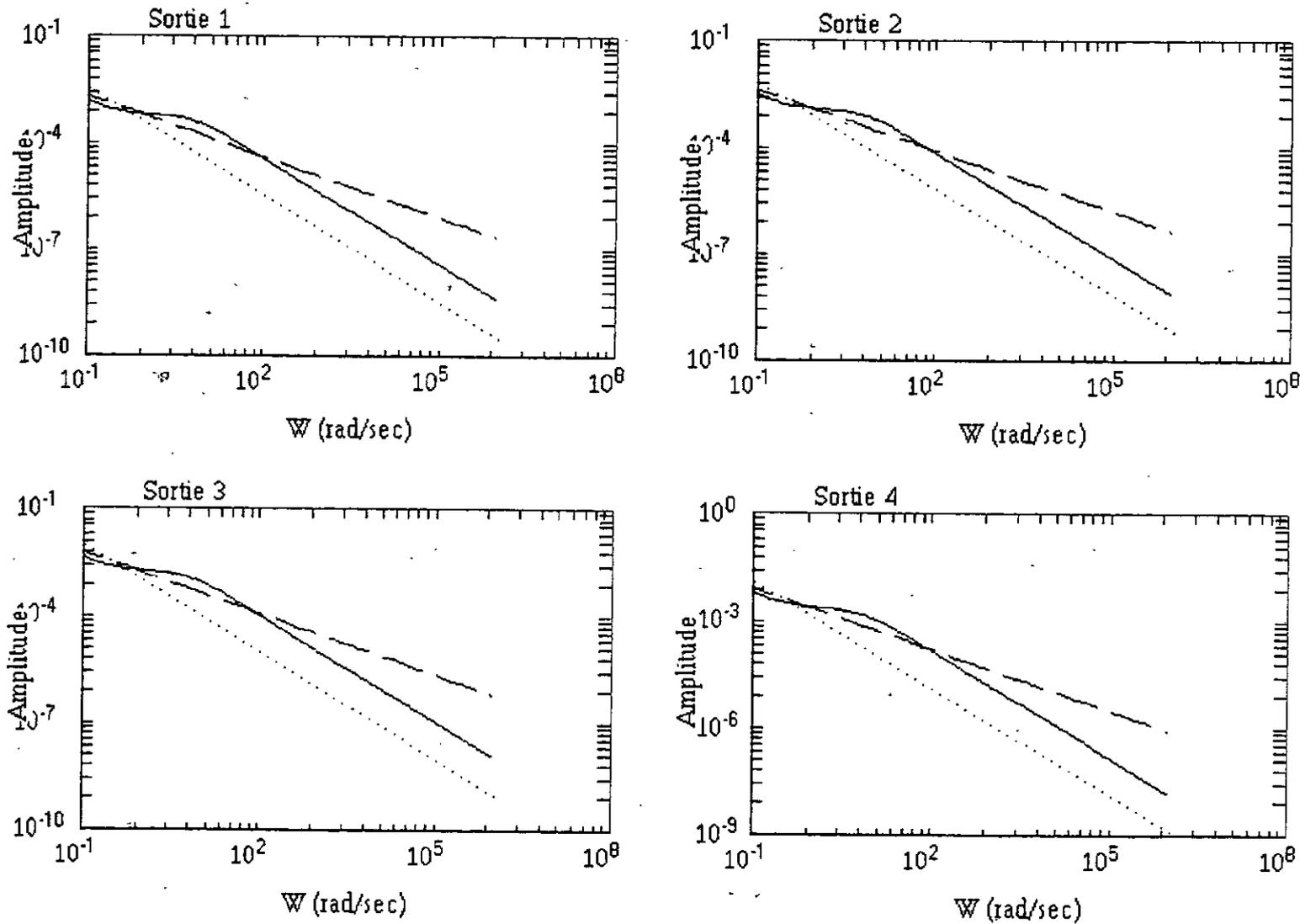


FIGURE III.5.2 - Spectres d'amplitudes des quatres sorties du modèle

- initial d'ordre 11
- - - réduit sous optimal d'ordre 2
- ⋯ réduit optimal d'ordre 2

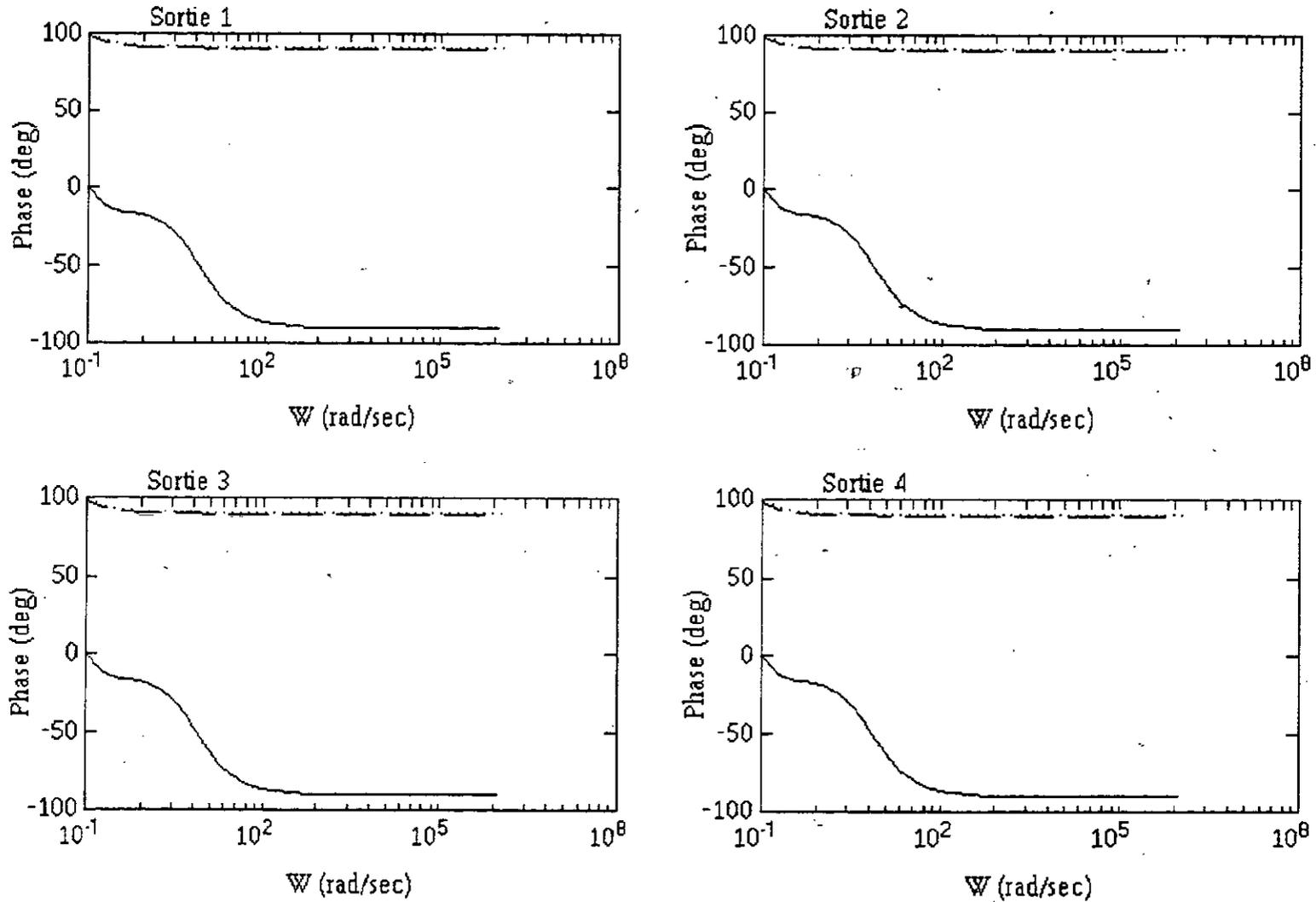


FIGURE III.5.3 - Spectres de Phases des quatres sorties du modèle

- initial d'ordre 11
- - - réduit sous optimal d'ordre 2
- réduit optimal d'ordre 2

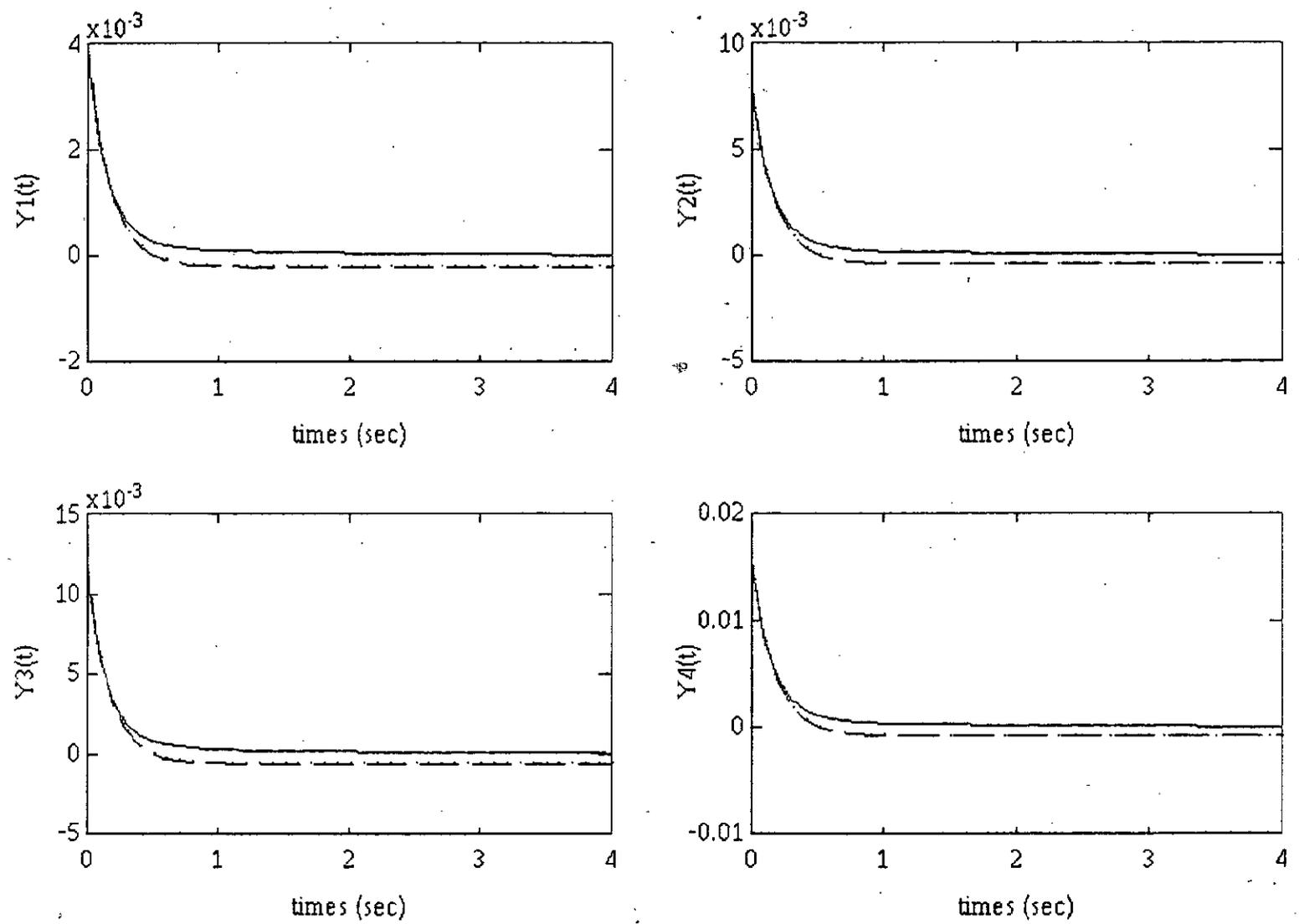


FIGURE III.6.1 - Réponses impulsionnelles des quatre sorties du modèle

- initial d'ordre 11
- - - - réduit sous optimal d'ordre 4
- réduit optimal d'ordre 4

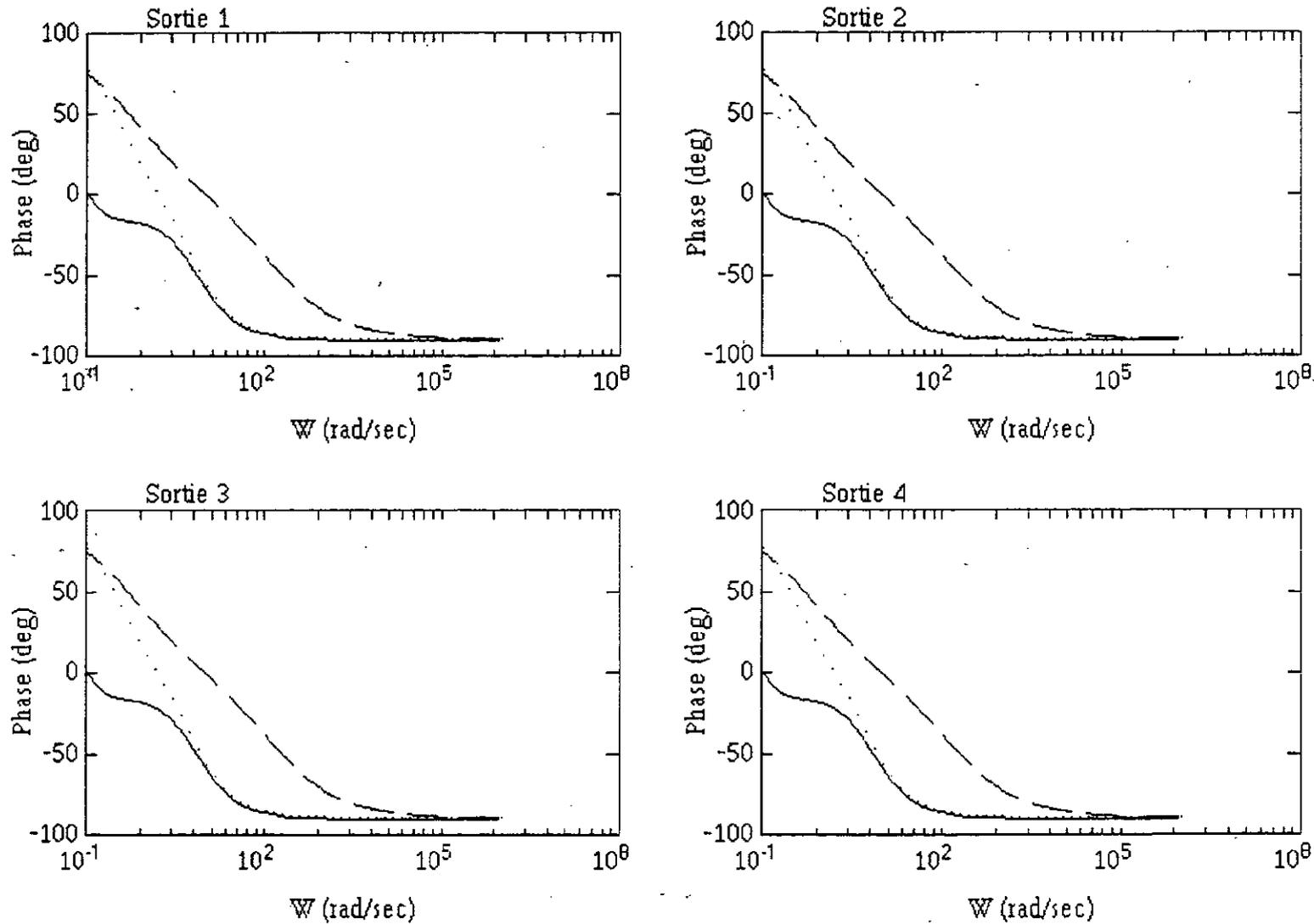


FIGURE III.6.3 - Spectres de Phases des quatres sorties du modèle
 initial d'ordre 11
 réduit optimal d'ordre 4
 réduit optimal d'ordre 4

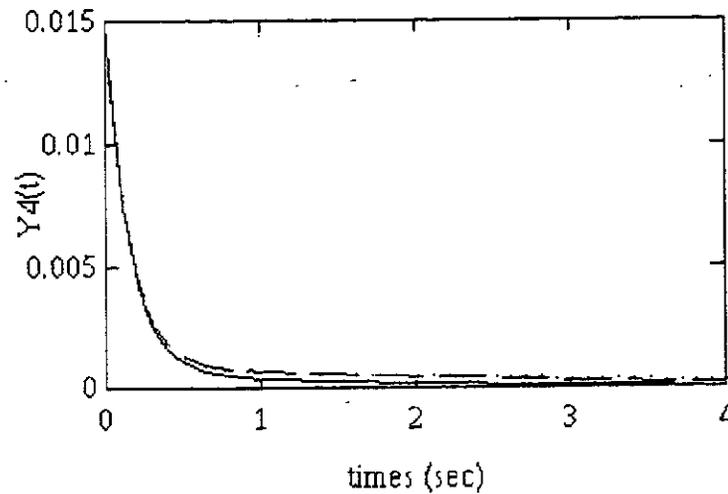
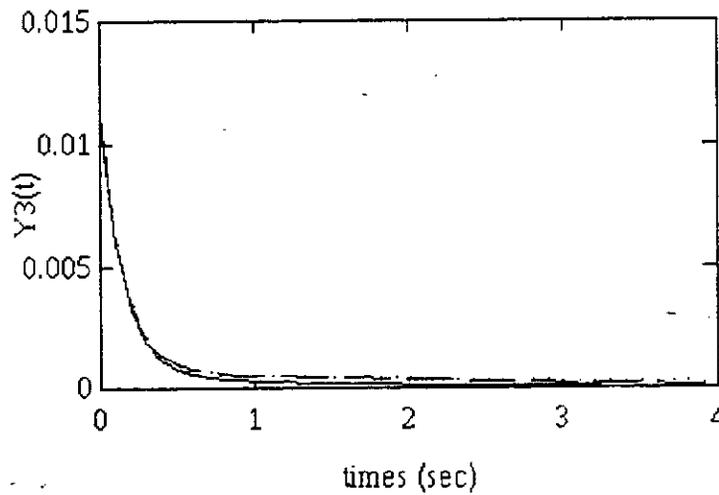
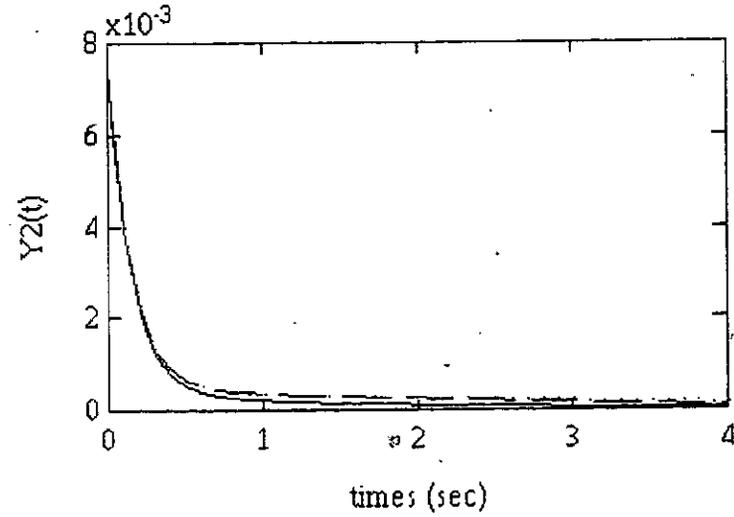
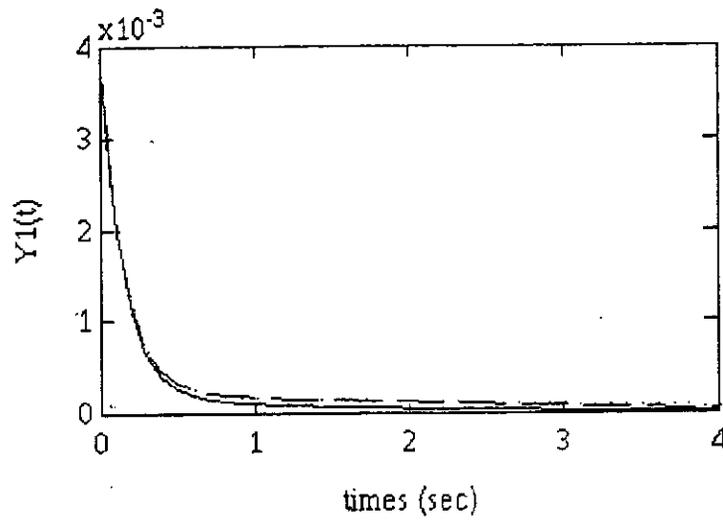


FIGURE III.7.1 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle

- initial d'ordre 11
- réduit sous optimal d'ordre 6
- réduit optimal d'ordre 6

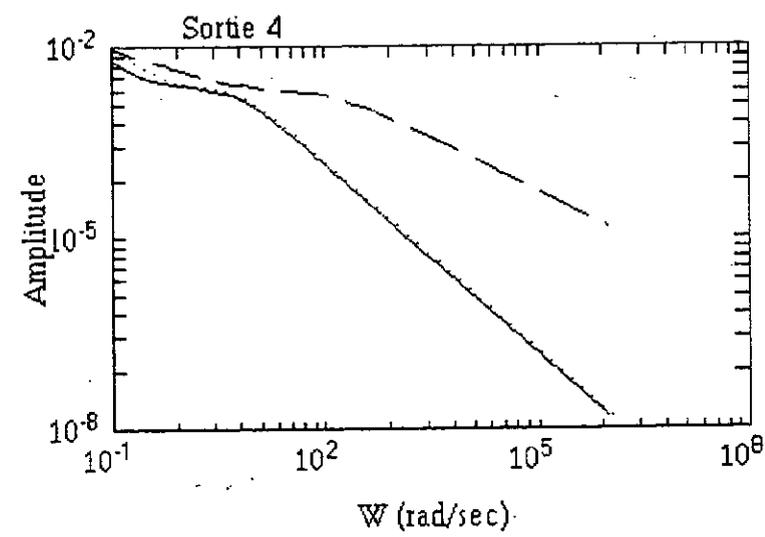
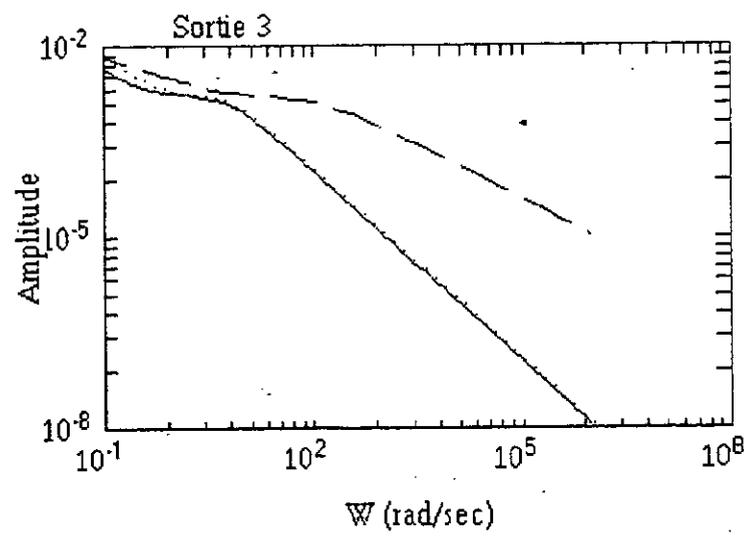
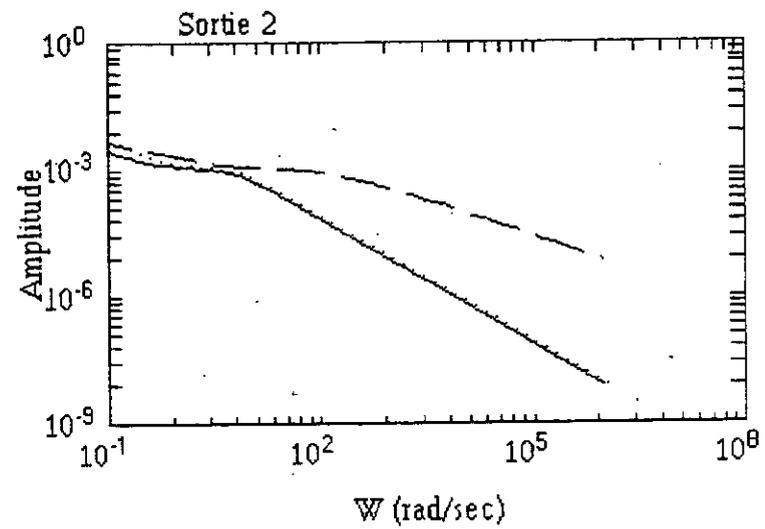
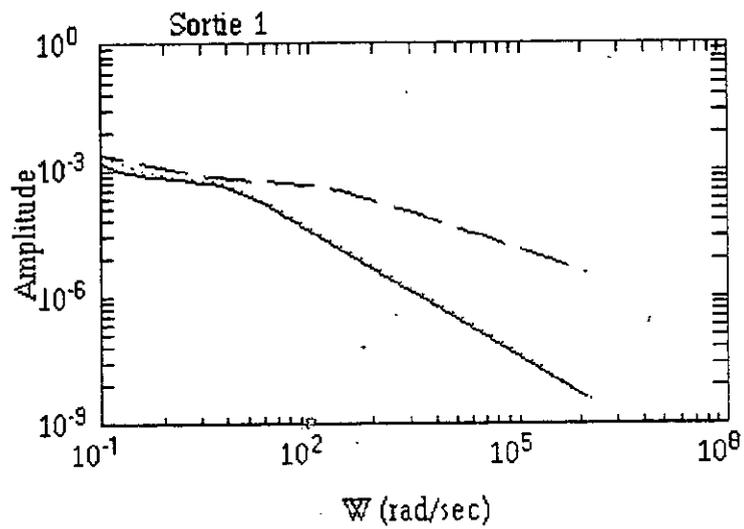


FIGURE III.7.2 - Spectres d'amplitudes des quatres sorties du modèle
initial d'ordre 11
réduit sous optimal d'ordre 6
réduit optimal d'ordre 6

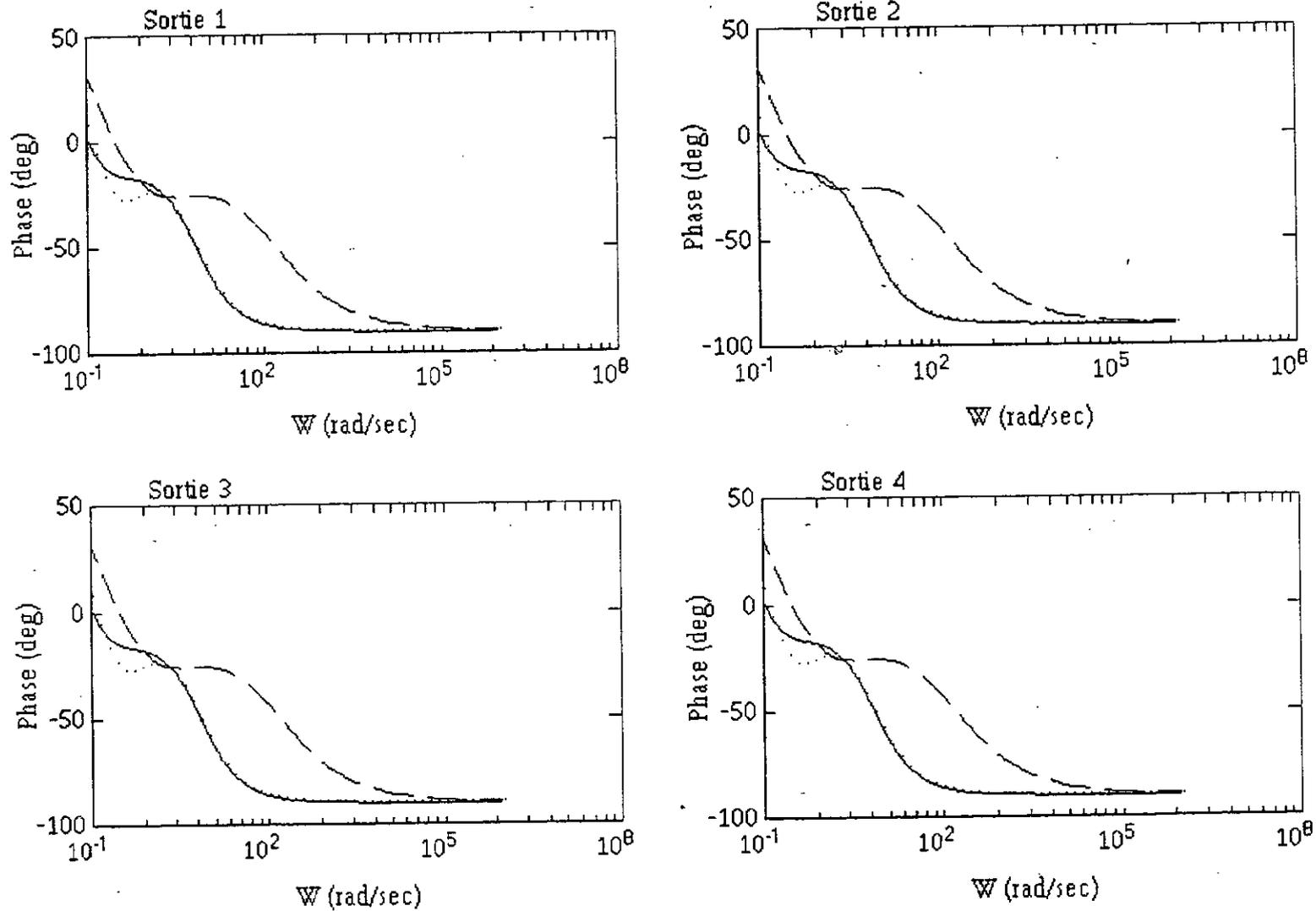


FIGURE III.7.3 - Spectres de Phases des quatre sorties du modèle

- initial d'ordre 11
- - - réduit sous optimal d'ordre 6
- réduit optimal d'ordre 6

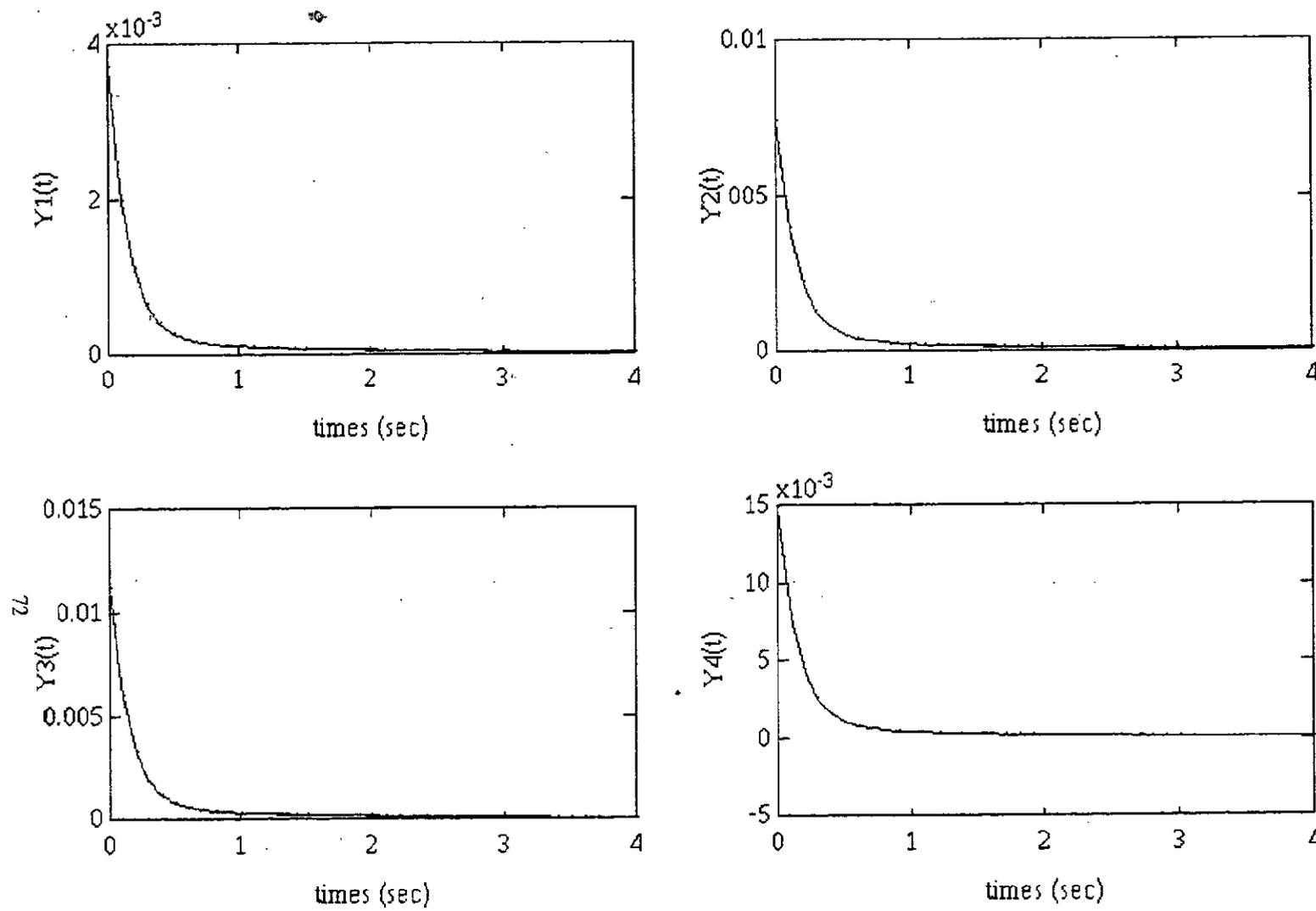


FIGURE III.8.1 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle

- initial d'ordre 11
- - - réduit sous optimal d'ordre 8
- réduit optimal d'ordre 8

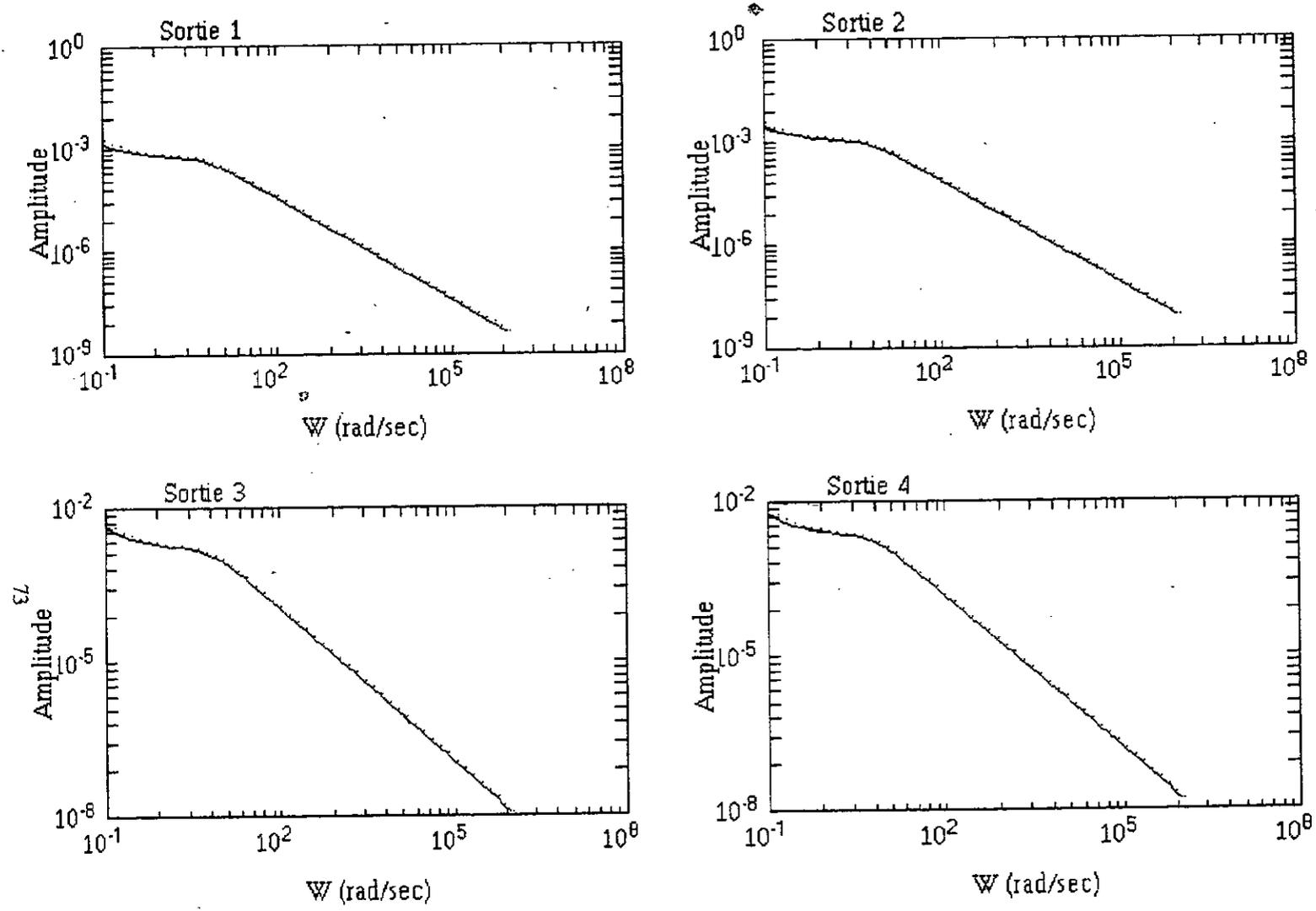


FIGURE III.8.2 - Spectres d'amplitudes des quatres sorties du modèle

- initial d'ordre 11
- - - réduit sous optimal d'ordre 8
- réduit optimal d'ordre 8

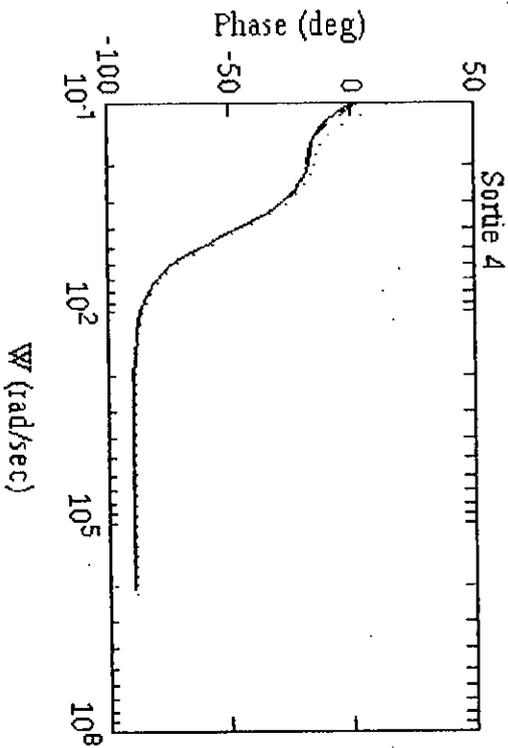
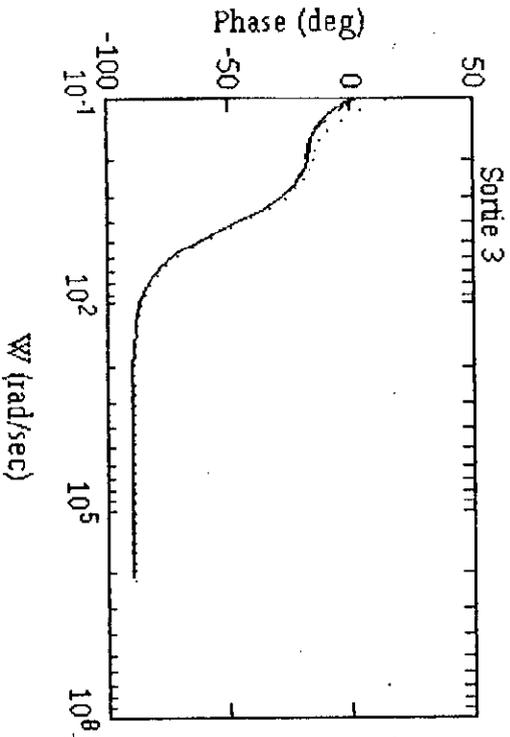
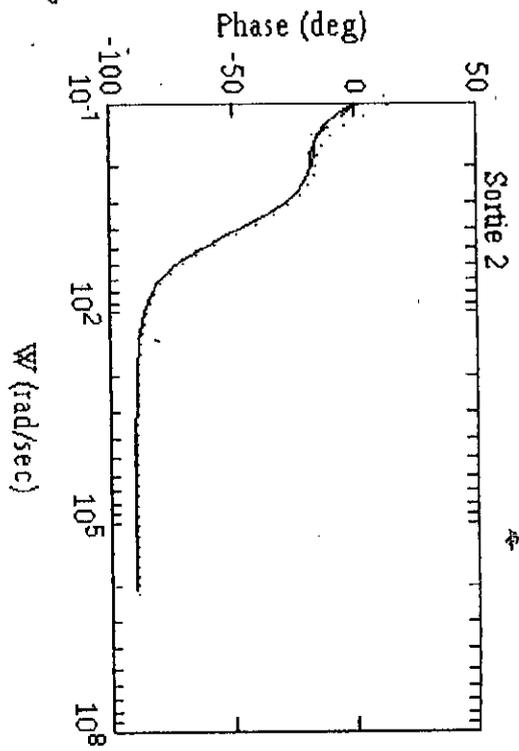
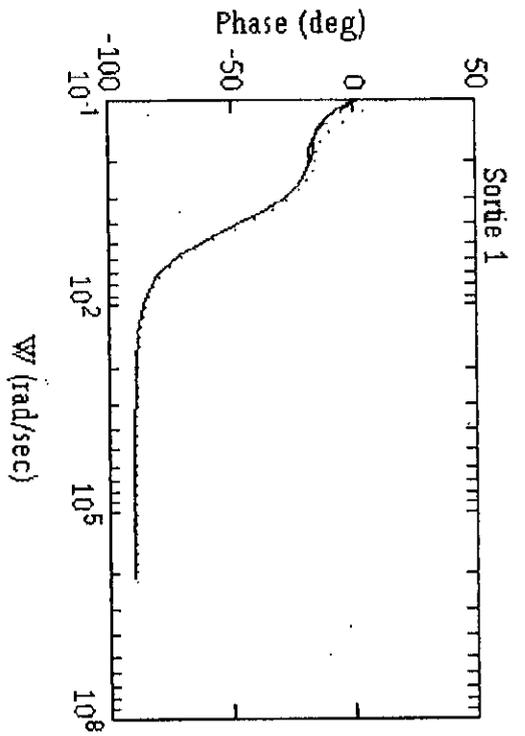


FIGURE III.8.3 - Spectres de phases des quatres sorties du modèle

- initial d'ordre 11
- - - réduit sous optimal d'ordre 8
- réduit optimal d'ordre 8

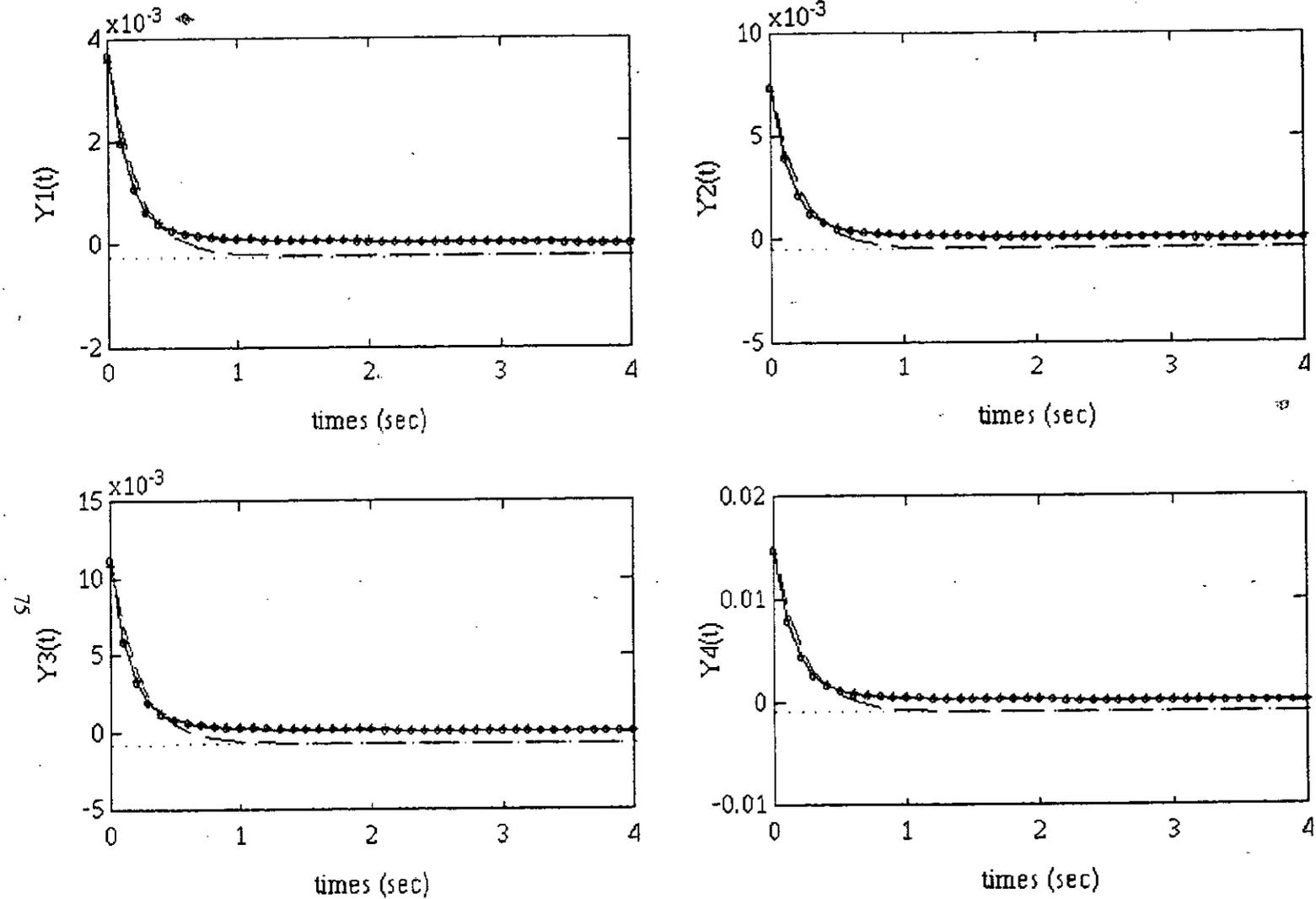


FIGURE III.9.1 - Réponses impulsionnelles des quatre sorties du modèle initial d'ordre 11 donné par ———, réduit sous-optimal d'ordre 2 donné par ·····, réduit sous-optimal d'ordre 4 donné par - · - ·, réduit sous-optimal d'ordre 6 donné par + + +, réduit sous-optimal d'ordre 8 donné par o o o

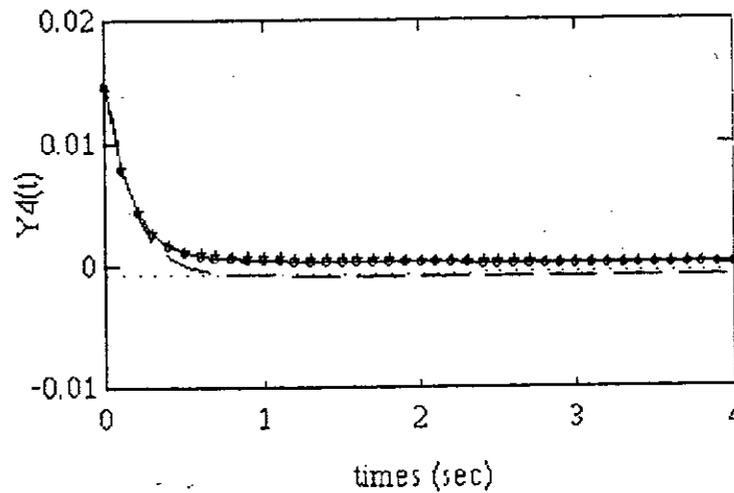
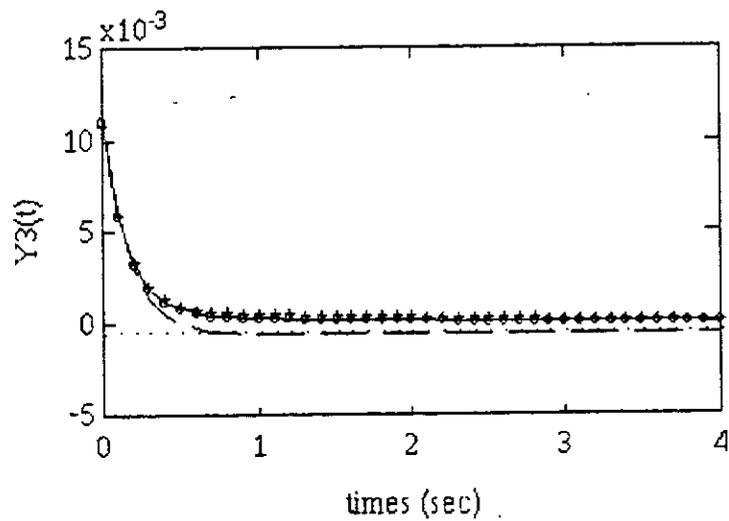
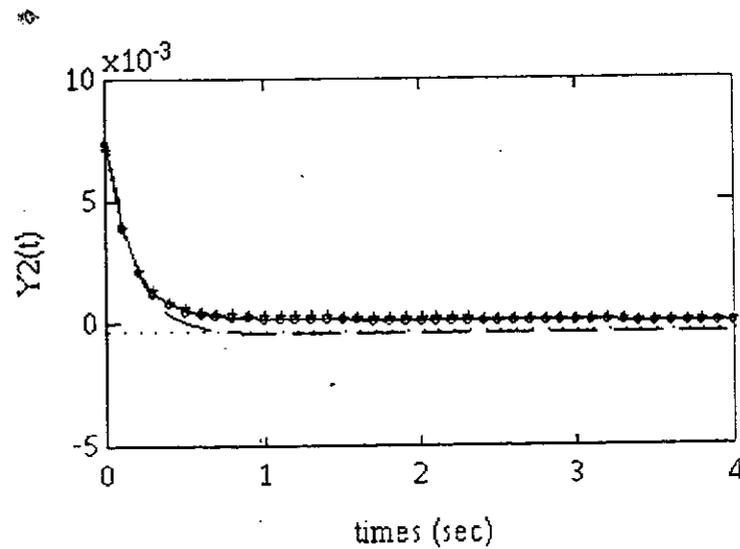
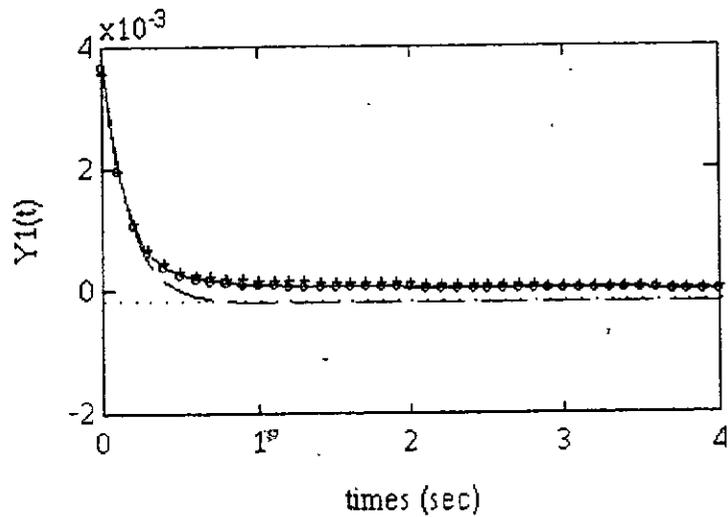


FIGURE III.9.2 - Réponses impulsionnelles des quatre sorties du modèle initial d'ordre 11 donné par ———, réduit optimal d'ordre 2 donné par ----, réduit optimal d'ordre 4 donné par , réduit optimal d'ordre 6 donné par +++, réduit optimal d'ordre 8 donné par ooo

sont :

$1.0E+008 \times \{6.6754, 2.8697, 0.1655, 0.142, 0.0201, 0.0046, 0.0001, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000\}$. Les valeurs de J qui sont donnés au tableau suivant représentent les valeurs du critère quadratique calculé dans la procédure d'optimisation

Ordre de réduction	$J_{initial}$	J_{final}
2	2.0450 E+007	2.0402 E+007
4	4.9481 E+005	2.2927 E+005
6	1.2470 E+004	0.1235 E+004
8	17.9016	16.1561

Les figures III.5.1, III.6.1, III.7.1 et III.8.1 représentent les réponses impulsionnelles des différentes sorties du modèle initial d'ordre onze, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) et des modèles réduits optimaux d'ordre 2, 4, 6, 8, respectivement.

Les figures III.5.2, III.6.2, III.7.2 et III.8.2 représentent les spectres d'amplitude des différentes sorties du modèle initial d'ordre onze, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) et des modèles réduits optimaux d'ordre 2, 4, 6, 8, respectivement.

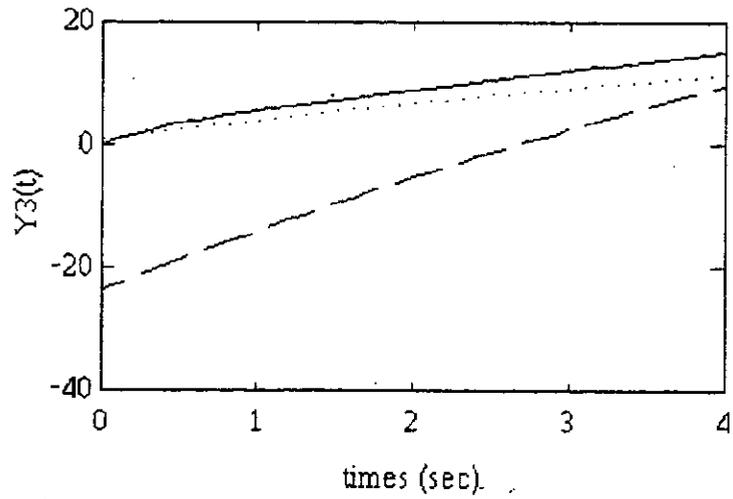
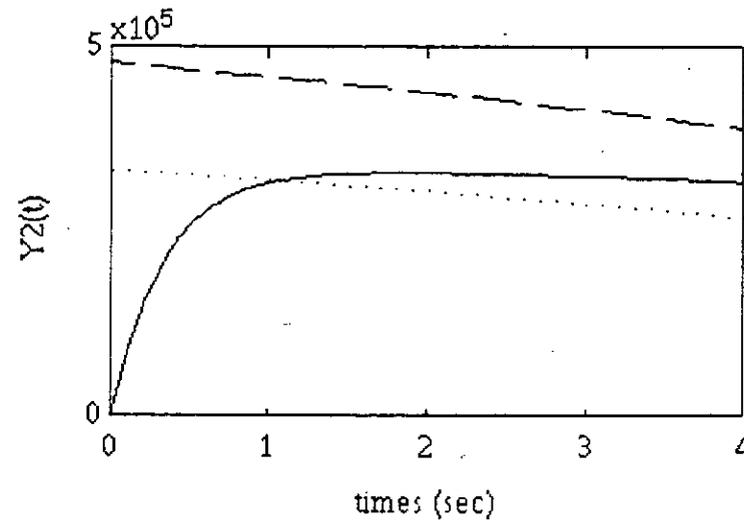
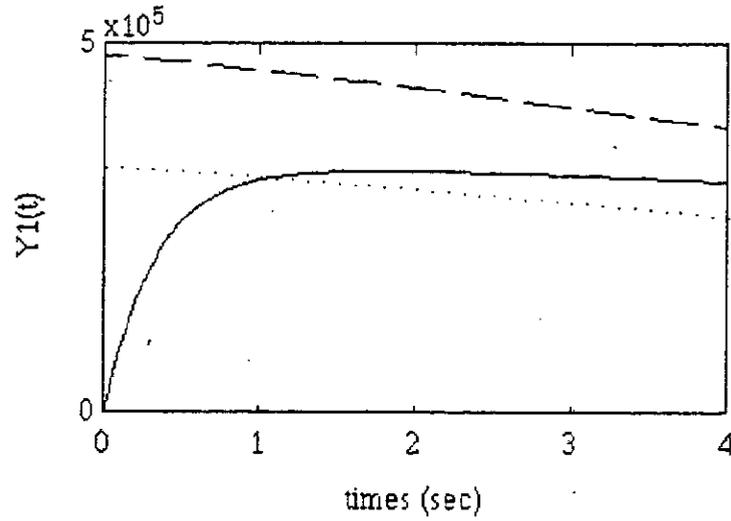
Les figures III.5.3, III.6.3, III.7.3 et III.8.3 représentent les spectres de phase des différentes sorties du modèle initial d'ordre onze, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) et des modèles réduits optimaux d'ordre 2, 4, 6, 8, respectivement.

La figure III.9.1 représente les courbes comparatives de la réponse impulsionnelle du modèle initial d'ordre onze, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) d'ordre 2, 4, 6, 8, respectivement.

Enfin la figure III.9.2 représente les courbes comparatives de la réponse impulsionnelle du modèle initial d'ordre onze, des modèles réduits optimaux d'ordre 2, 4, 6, 8, respectivement.

2/ Deuxième exemple [TZA.77]

Pour réduire le modèle d'état (Annexe D, (D.2)), nous avons utilisé la méthode de KABAMBA [KAB.85.a][KAB.85.b] puisque le système correspondant est minimal.



78

FIGURE III.10.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle
 ——— initial d'ordre 6
 - - - - - réduit sous optimal d'ordre 2
 réduit optimal d'ordre 2

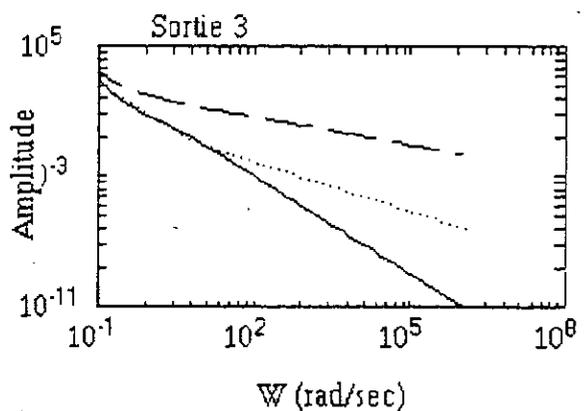
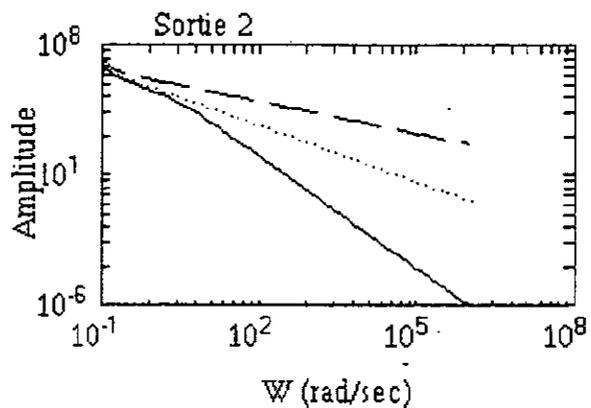
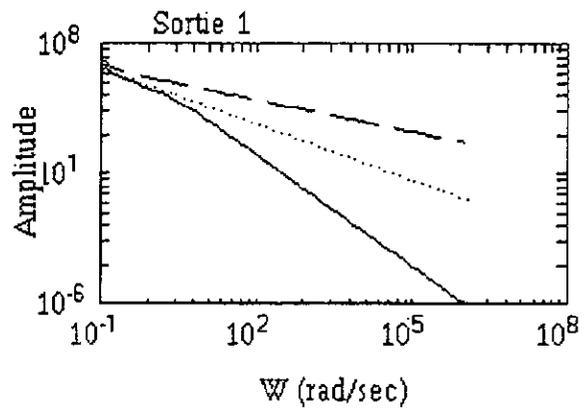
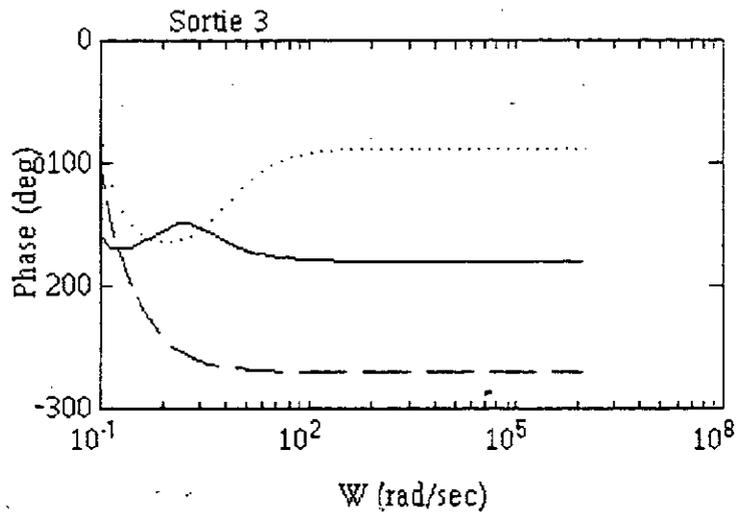
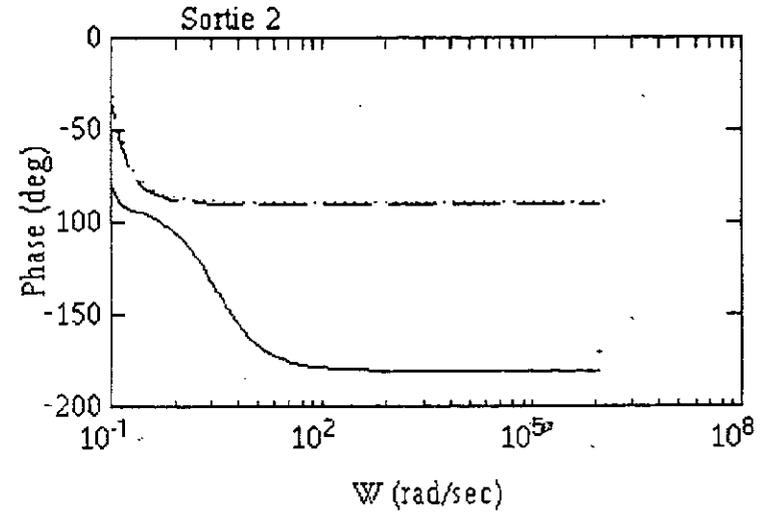
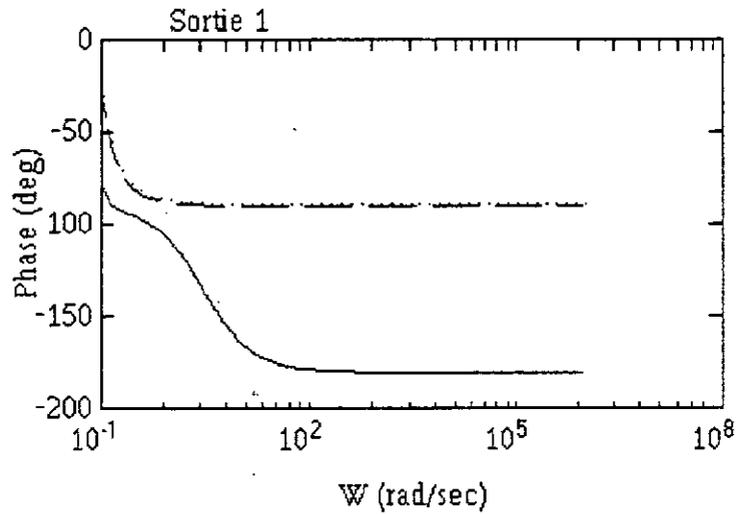


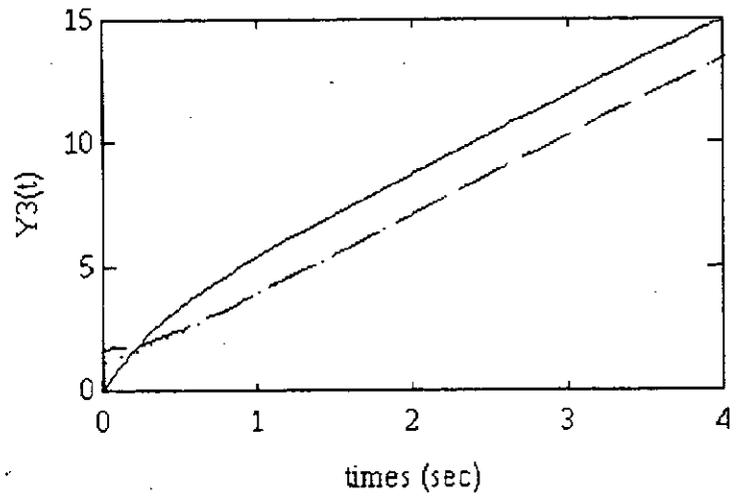
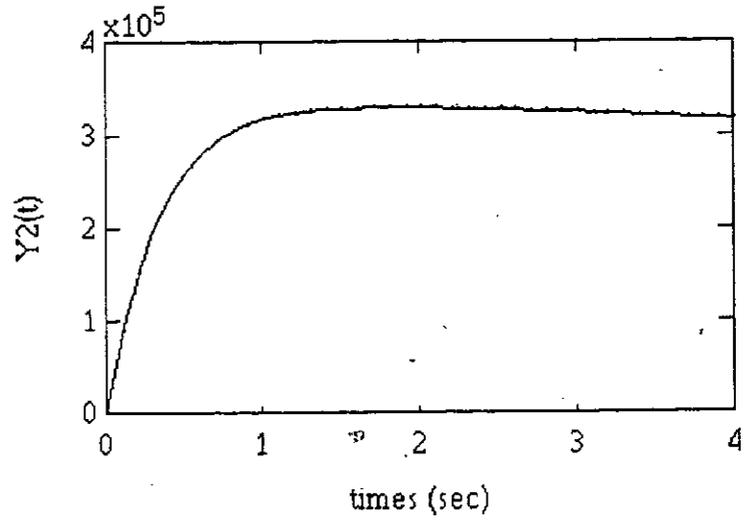
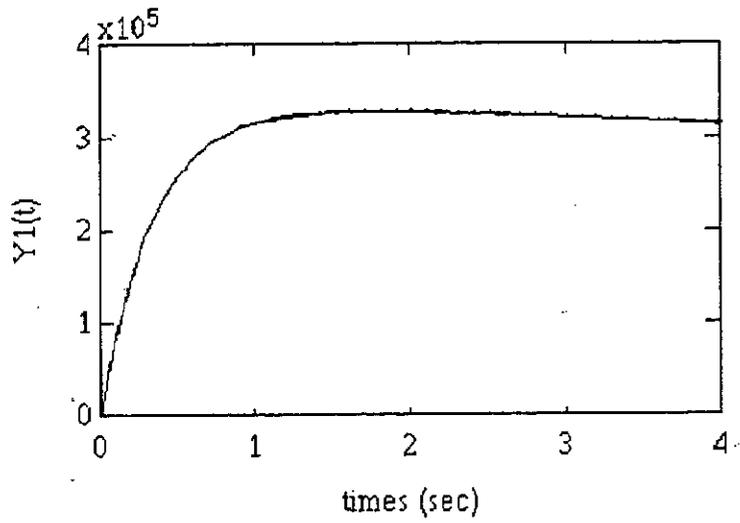
FIGURE III.10.2 - Spectres d'Amplitudes des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - - - réduit sous optimal d'ordre 2
- réduit optimal d'ordre 2



08

FIGURE III.10.3 - Spectres de phases des trois sorties du modèle
 ——— initial d'ordre 6
 - - - - - réduit sous optimal d'ordre 2
 réduit optimal d'ordre 2



18

FIGURE III.11.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle
 ——— initial d'ordre 6
 - - - - - réduit sous optimal d'ordre 4
 réduit optimal d'ordre 4

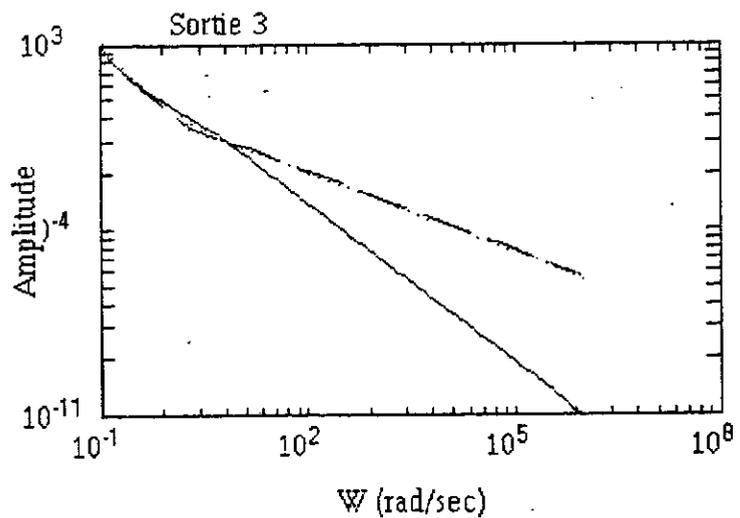
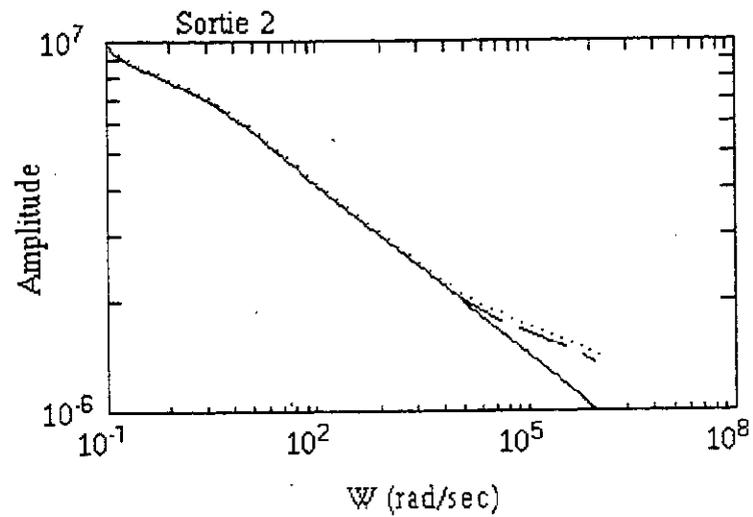
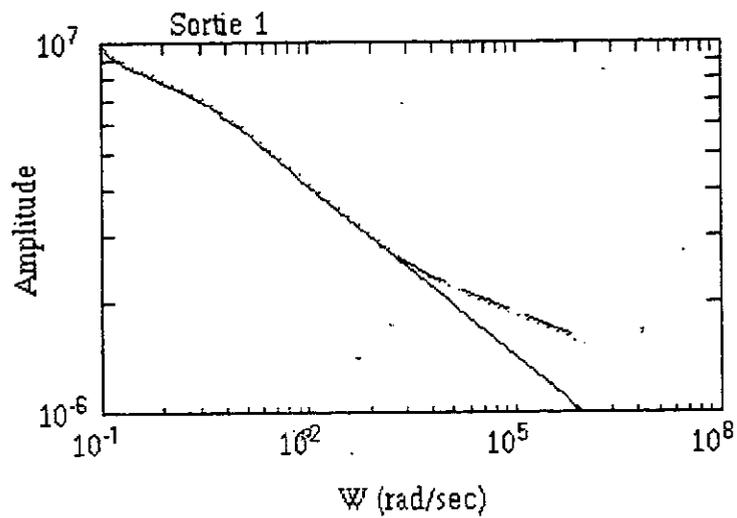


FIGURE III.11.2 - Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - réduit sous optimal d'ordre 4
- réduit optimal d'ordre 4

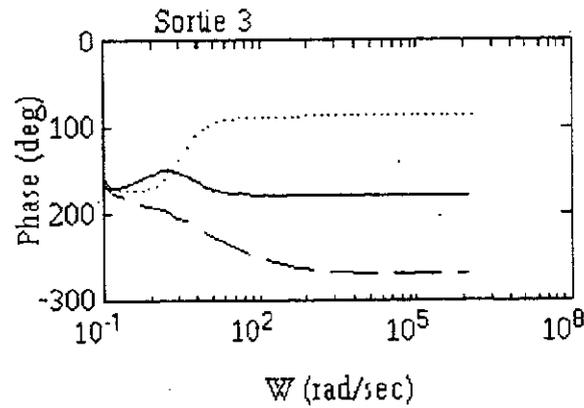
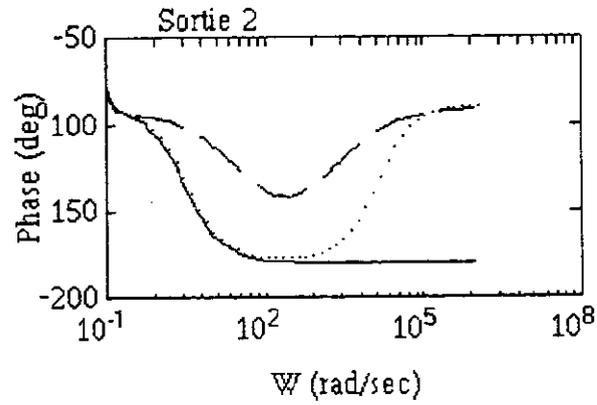
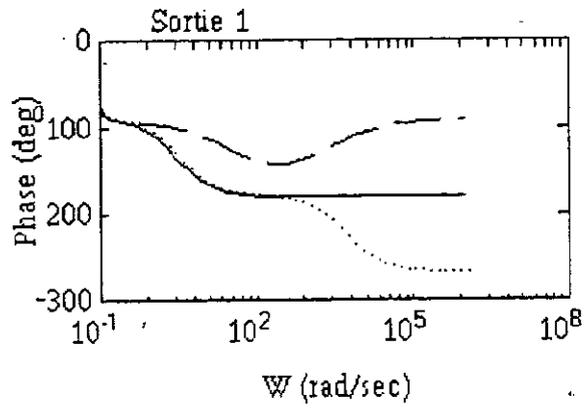


FIGURE III.11.3 - Spectres de phases des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - réduit sous optimal d'ordre 4
- réduit optimal d'ordre 4

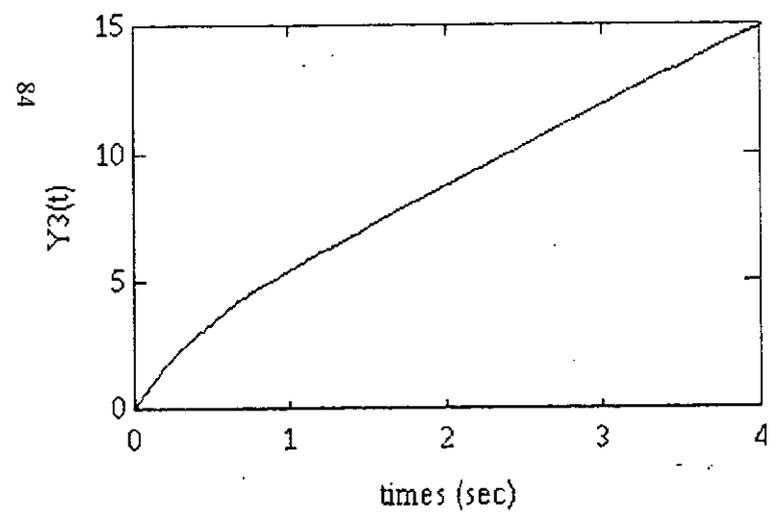
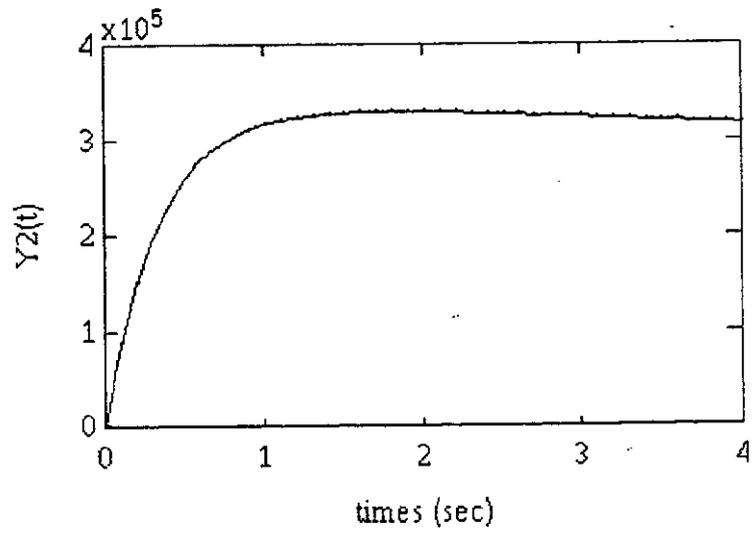
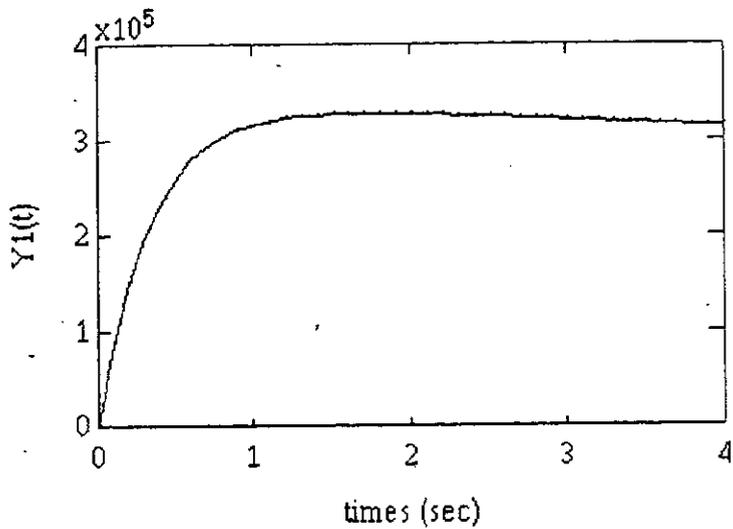


FIGURE III.12.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - réduit sous optimal d'ordre 5
- réduit optimal d'ordre 5

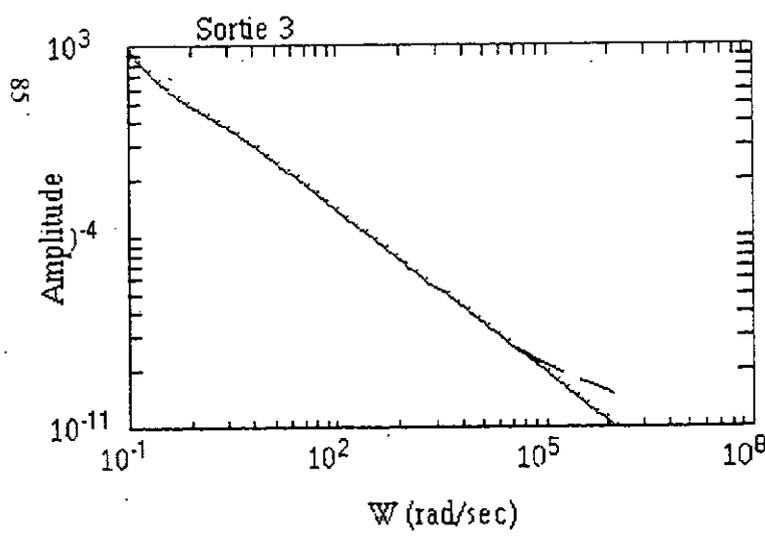
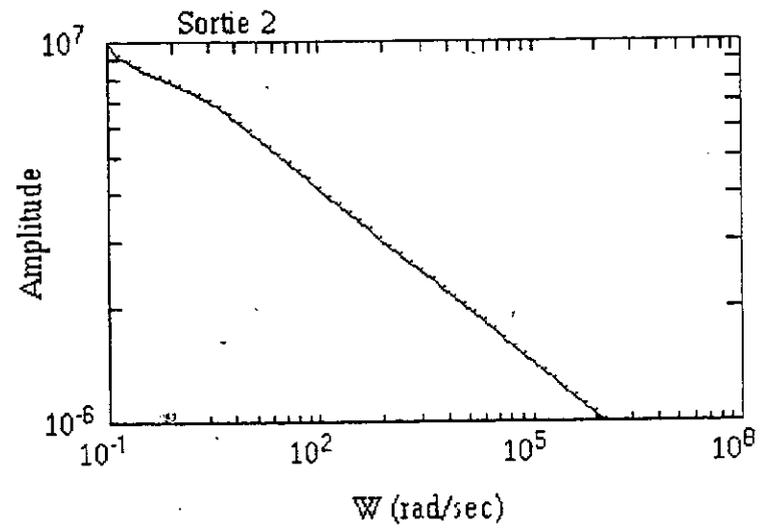
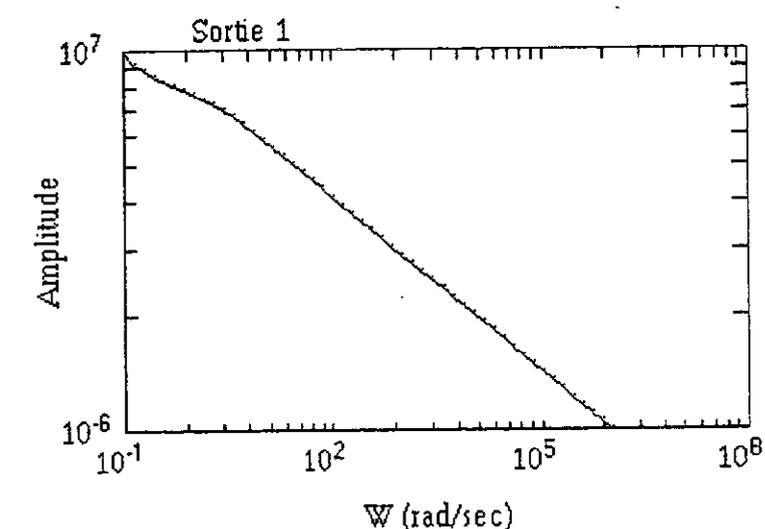


FIGURE III.12.2 - Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - réduit sous optimal d'ordre 5
- réduit optimal d'ordre 5

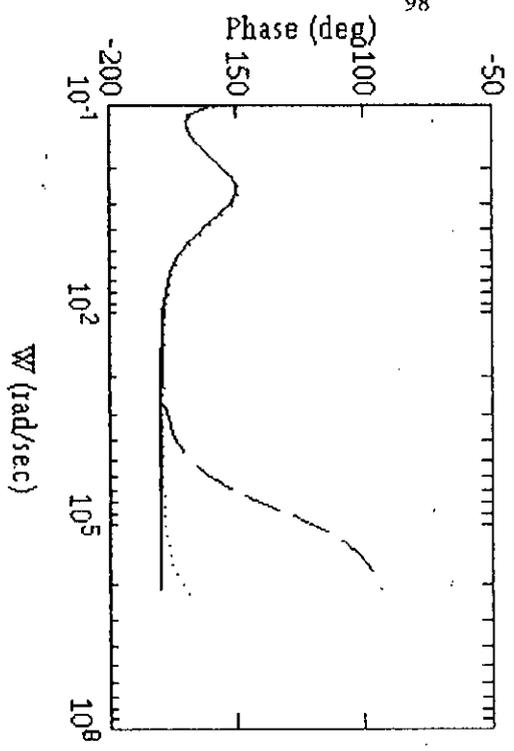
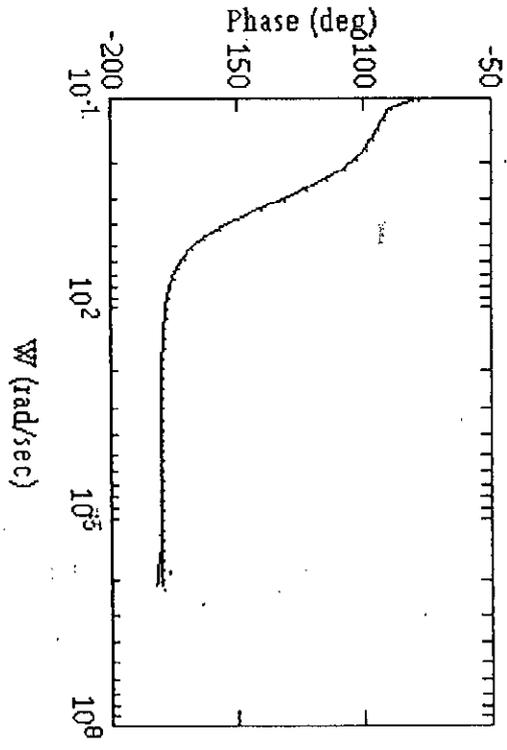
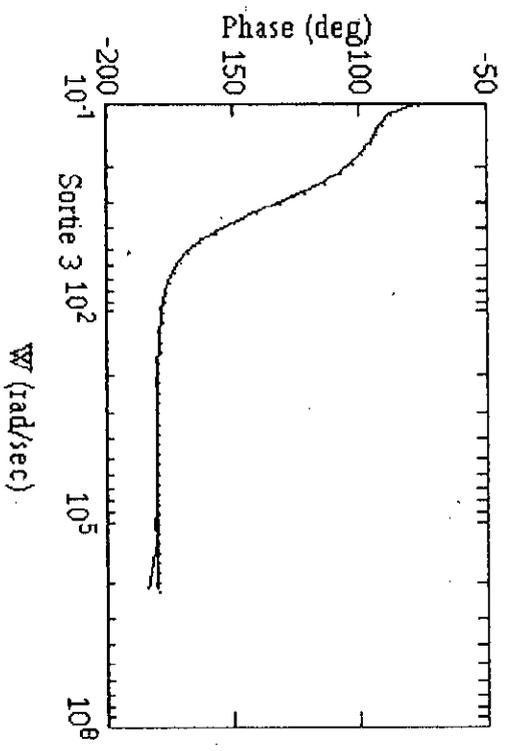


FIGURE III.12.3 - Spectres de phases des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- réduit sous optimal d'ordre 5
- réduit optimal d'ordre 5

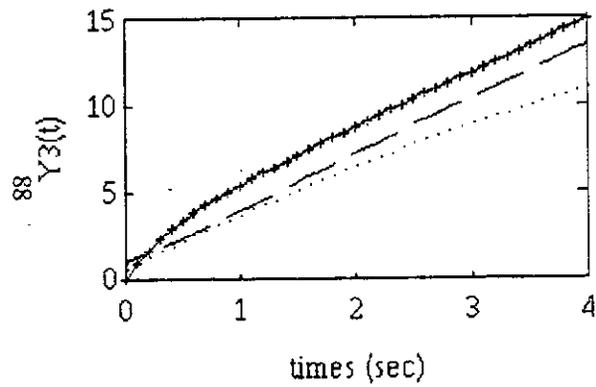
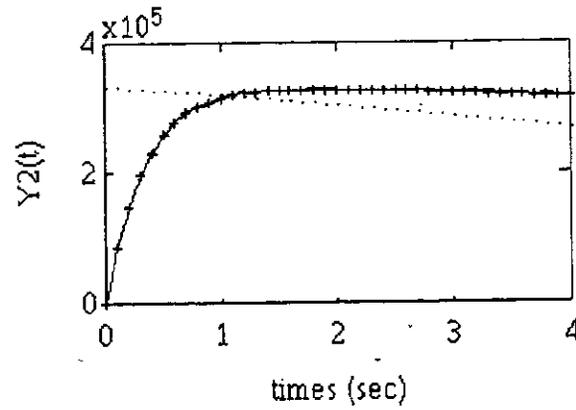
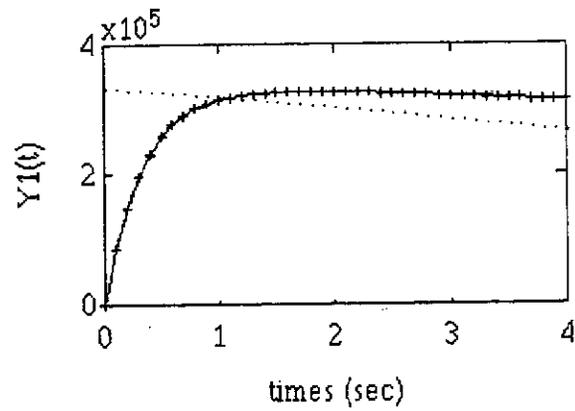


FIGURE III.13.2 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- réduit optimal d'ordre 2
- réduit optimal d'ordre 4
- +++ réduit optimal d'ordre 5

Les valeurs propres du système (valeurs propres de la matrice A) sont :

$1.0E+002 \times \{-0.0056+0.0815j, -0.0056-0.0815j, -2.9967, -0.0133, -2.8889, -0.0100\}$.

les valeurs $\Delta G_i = \sigma_i v_i^2$ ($i = 1, \dots, N$) qui représentent les termes de la norme quadratique de la fonction de transfert du système, sont :

$\{0.4263, 0.1304, 0.0164, 0.0087, 0.0037, 0.0002\}$. Les valeurs de J qui sont donnés au tableau suivant représentent les valeurs du critère quadratique calculé dans la procédure d'optimisation

Ordre de réduction	J_{initial}	J_{final}
2	8.1758 E+012	2.2154 E+011
4	4.7715 E+011	2.1870 E+007
5	66.434	11.4693

Les figures III.10.1, III.11.1 et III.12.1 représentent les réponses impulsionnelles des différentes sorties du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) et des modèles réduits optimaux d'ordre 2, 4, 5, respectivement.

Les figures III.10.2, III.11.2 et III.12.2 représentent les spectres d'amplitude des différentes sorties du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) et des modèles réduits optimaux d'ordre 2, 4, 5, respectivement.

Les figures III.10.3, III.11.3 et III.12.3 représentent les spectres de phase des différentes sorties du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) et des modèles réduits optimaux d'ordre 2, 4, 5, respectivement.

La figure III.13.1 représente les courbes comparatives de la réponse impulsionnelle du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) d'ordre 2, 4, 5, respectivement.

Enfin la figure III.13.2 représente les courbes comparatives de la réponse impulsionnelle du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits optimaux d'ordre 2, 4, 5, respectivement.

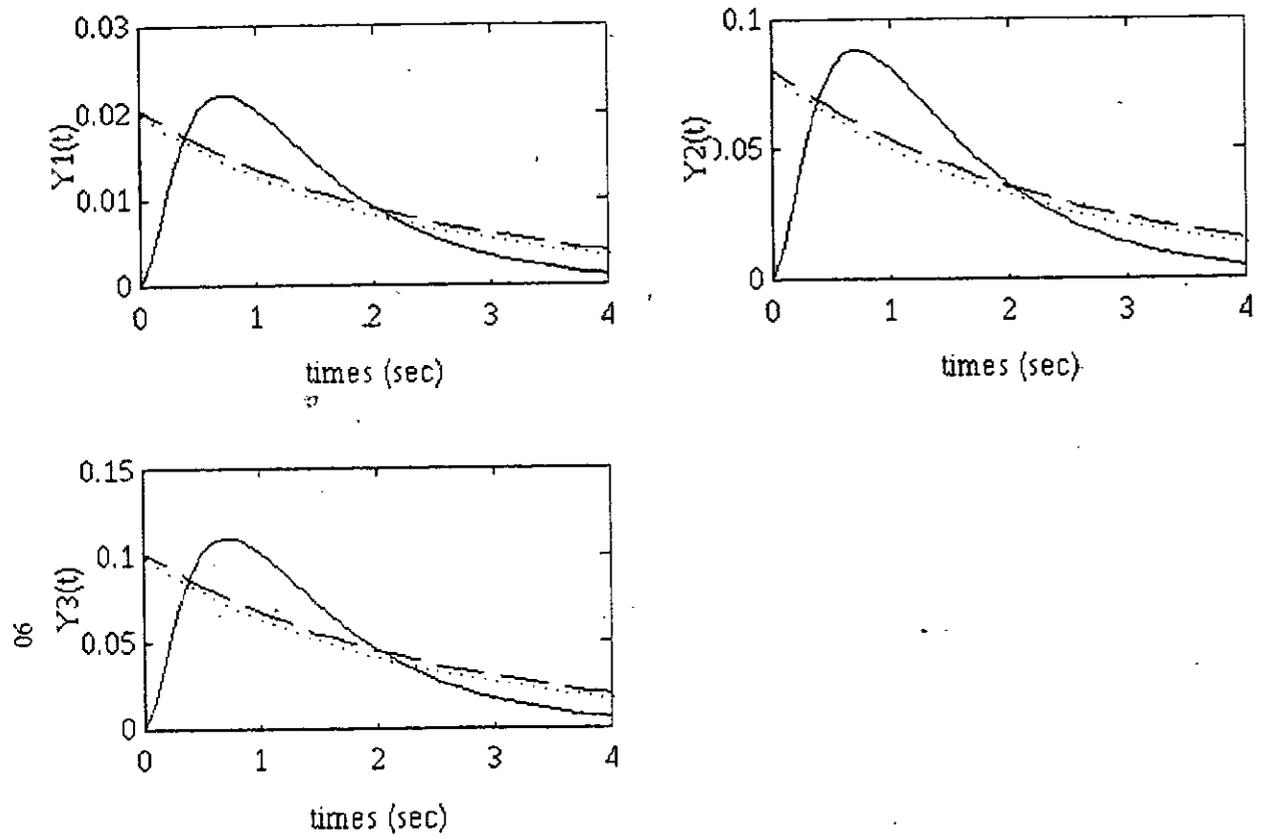


FIGURE III.14.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - réduit sous optimal d'ordre 3
- réduit optimal d'ordre 3

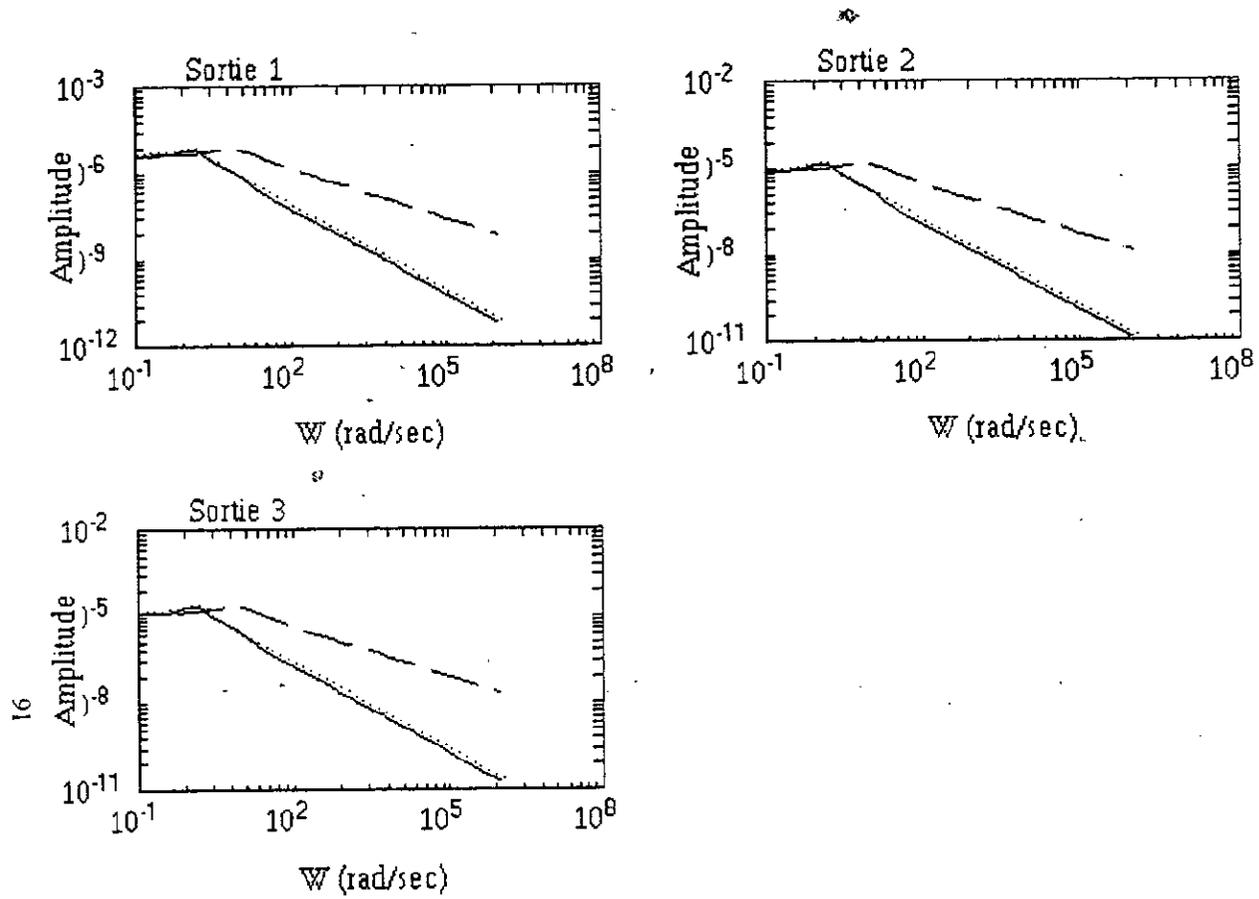
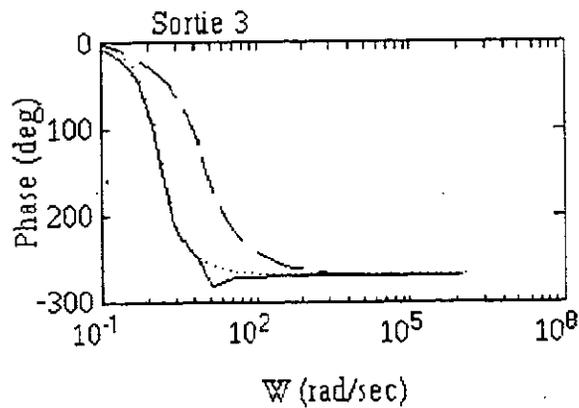
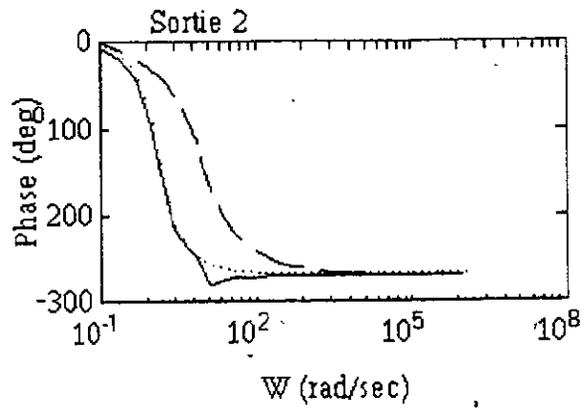
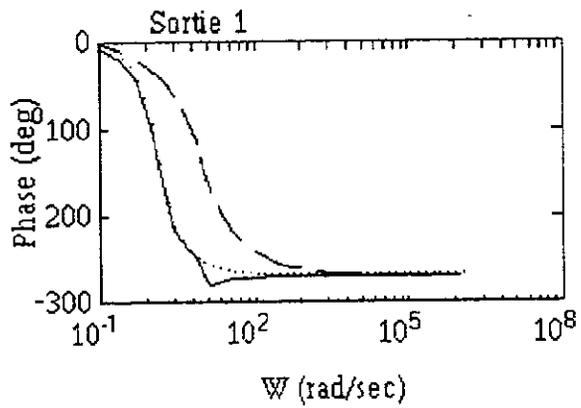


FIGURE III.14.2 - Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - - - réduit sous optimal d'ordre 3
- réduit optimal d'ordre 3



76

FIGURE III.14.3 - Spectres de phases des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - réduit sous optimal d'ordre 3
- réduit optimal d'ordre 3

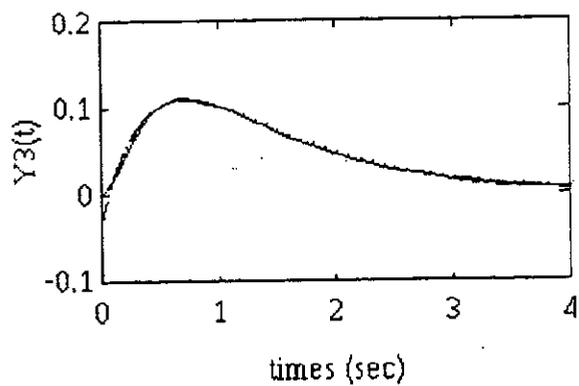
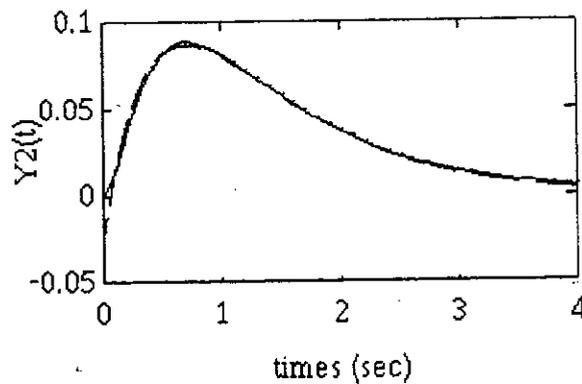
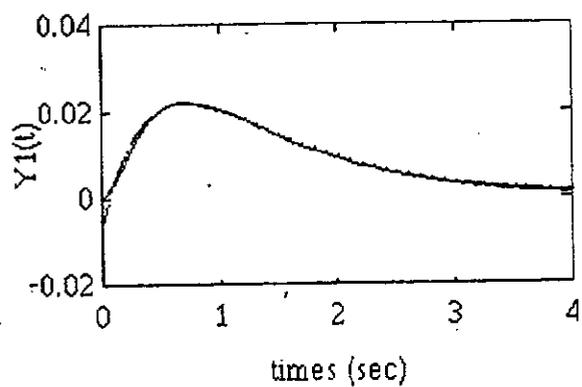
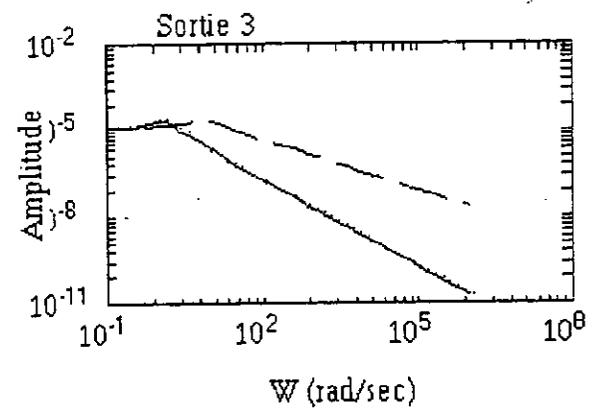
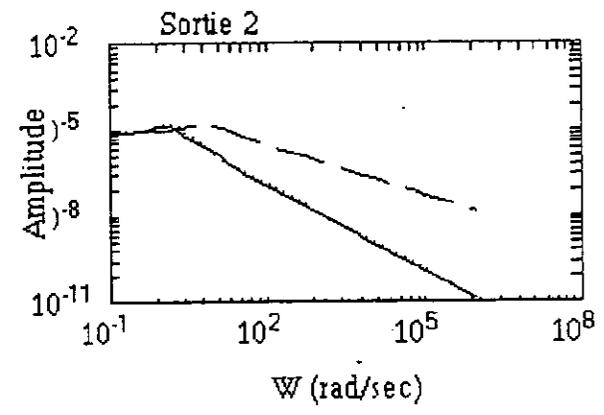
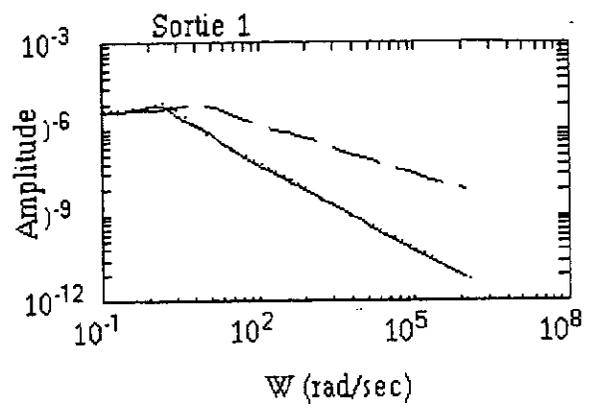


FIGURE III.15.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- réduit sous optimal d'ordre 4
- réduit optimal d'ordre 4



94

FIGURE III.15.2 - Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle
 ——— initial d'ordre 6
 - - - - - réduit sous optimal d'ordre 4
 réduit optimal d'ordre 4

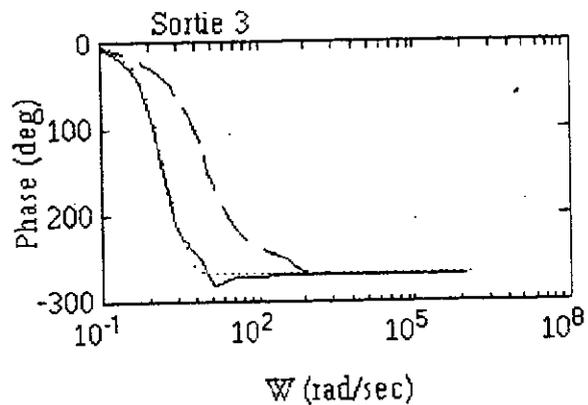
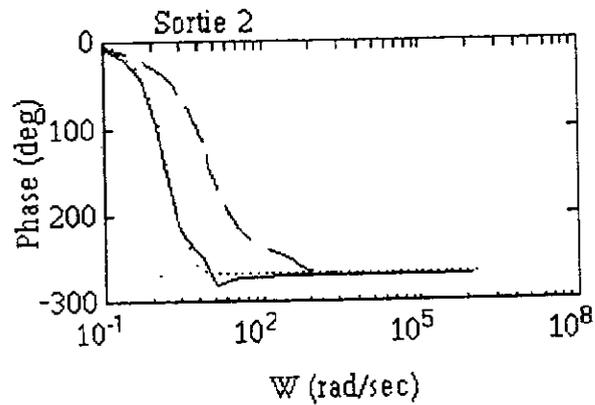
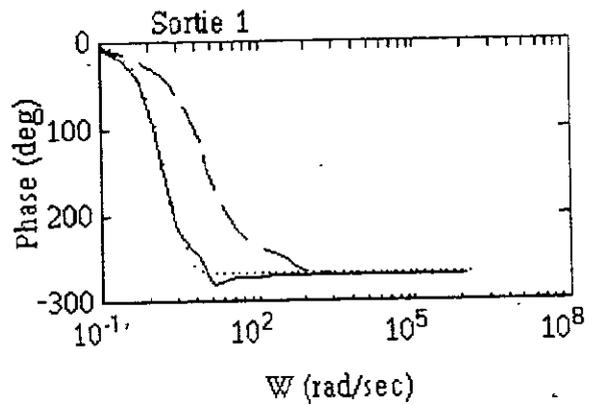


FIGURE III.15.3 - Spectres de phases des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - - réduit sous optimal d'ordre 4
- réduit optimal d'ordre 4

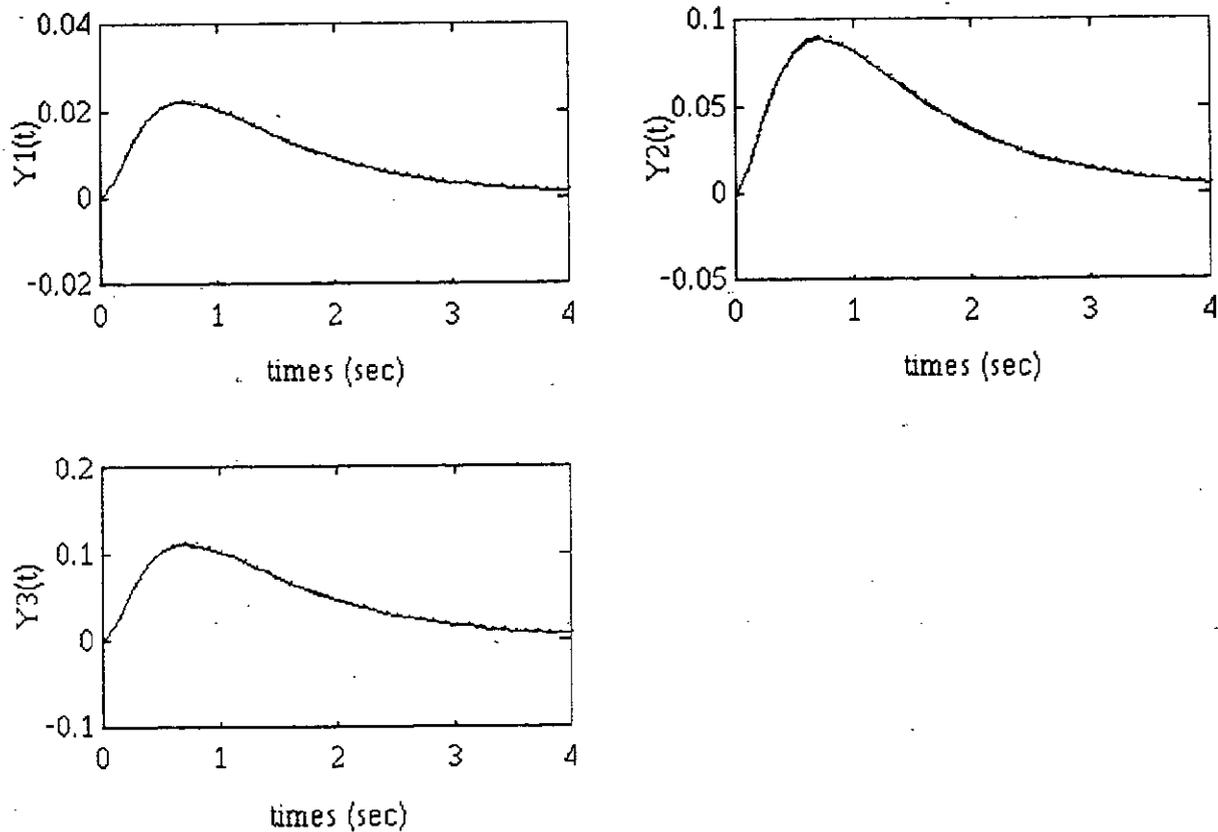


FIGURE III.16.1 - Réponses impulsionnelles des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - réduit sous optimal d'ordre 5
- réduit optimal d'ordre 5

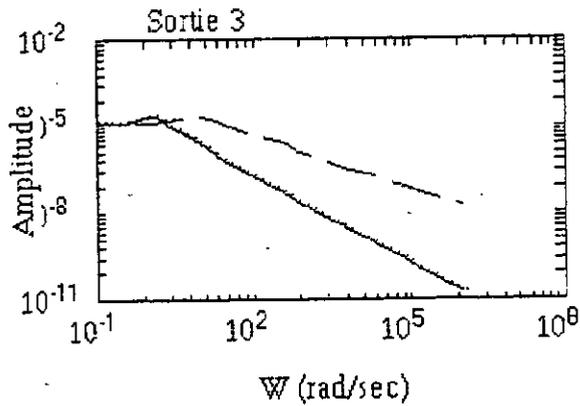
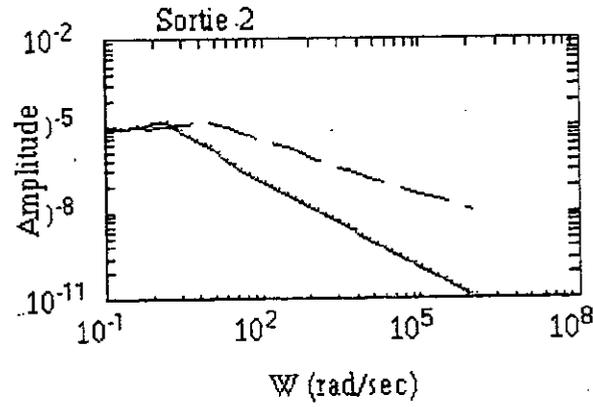
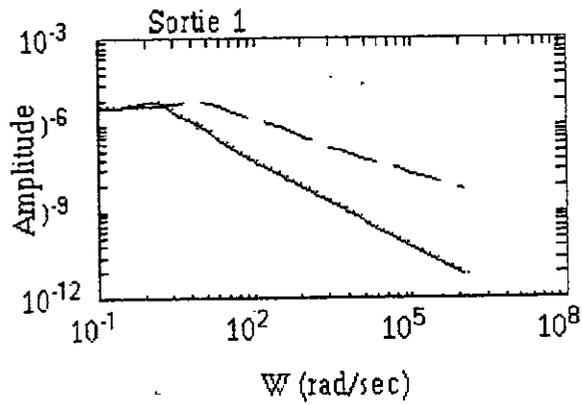


FIGURE III.16.2 - Spectres d'amplitudes des trois sorties du modèle
 ——— initial d'ordre 6
 - - - - - réduit sous optimal d'ordre 5
 réduit optimal d'ordre 5

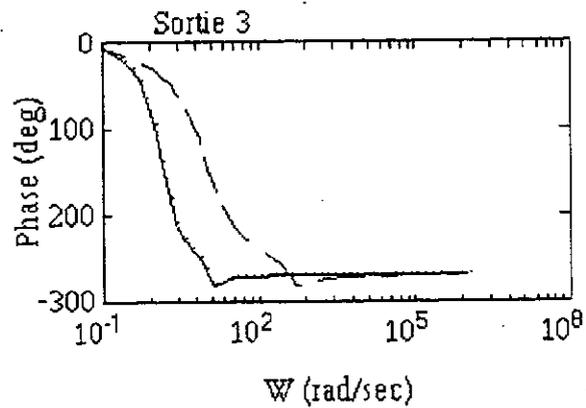
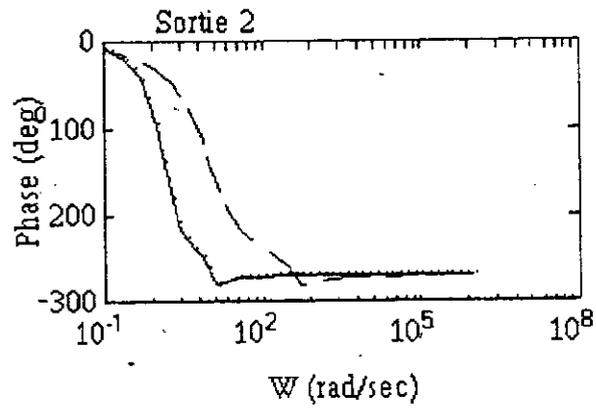
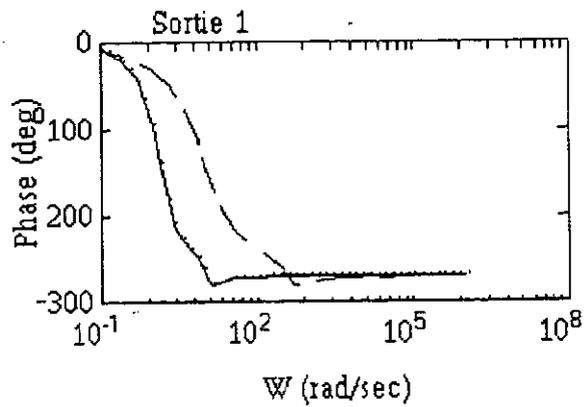


FIGURE III.16.3 - Spectres de phases des trois sorties du modèle

- initial d'ordre 6
- - - réduit sous optimal d'ordre 5
- réduit optimal d'ordre 5

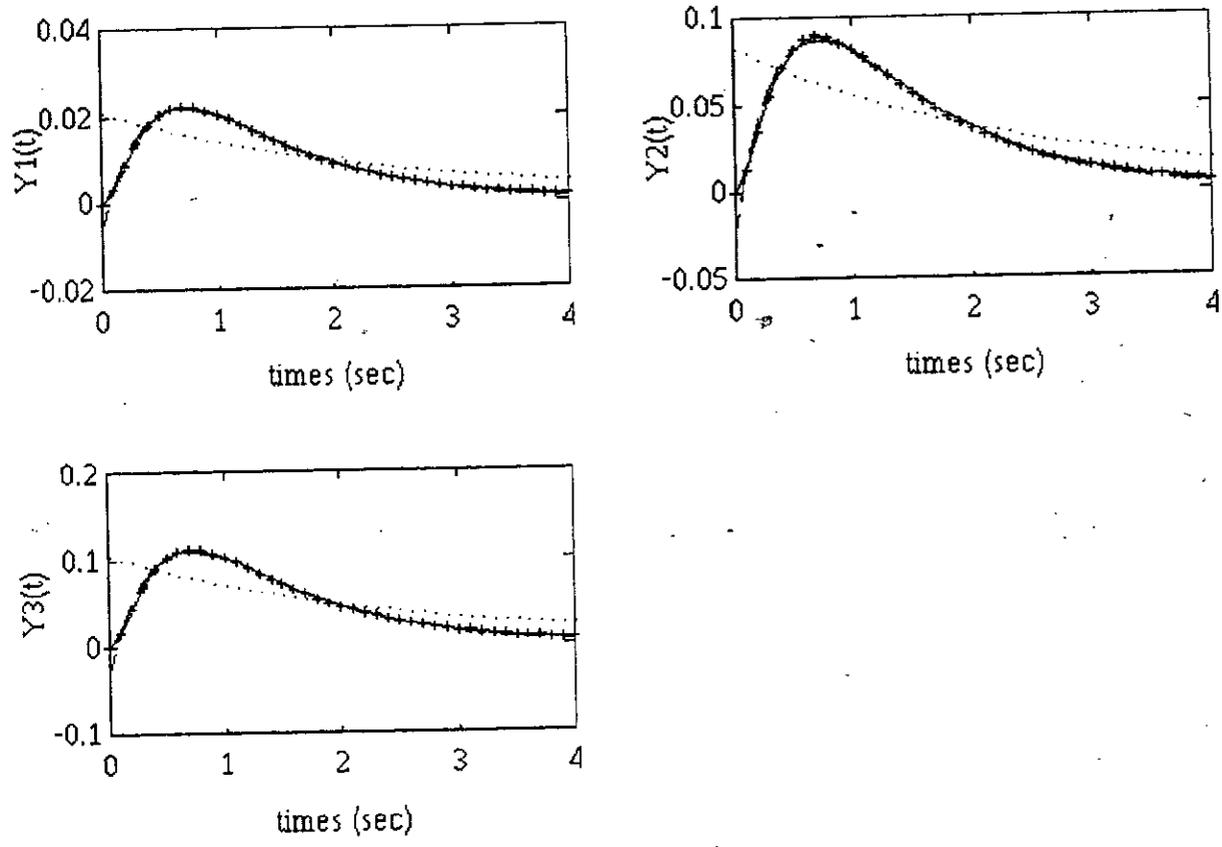


FIGURE III.17.1- Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle

- initial d'ordre six
- réduit sous-optimal d'ordre 3
- - - - - réduit sous-optimal d'ordre 4
- +++ réduit sous-optimal d'ordre 5

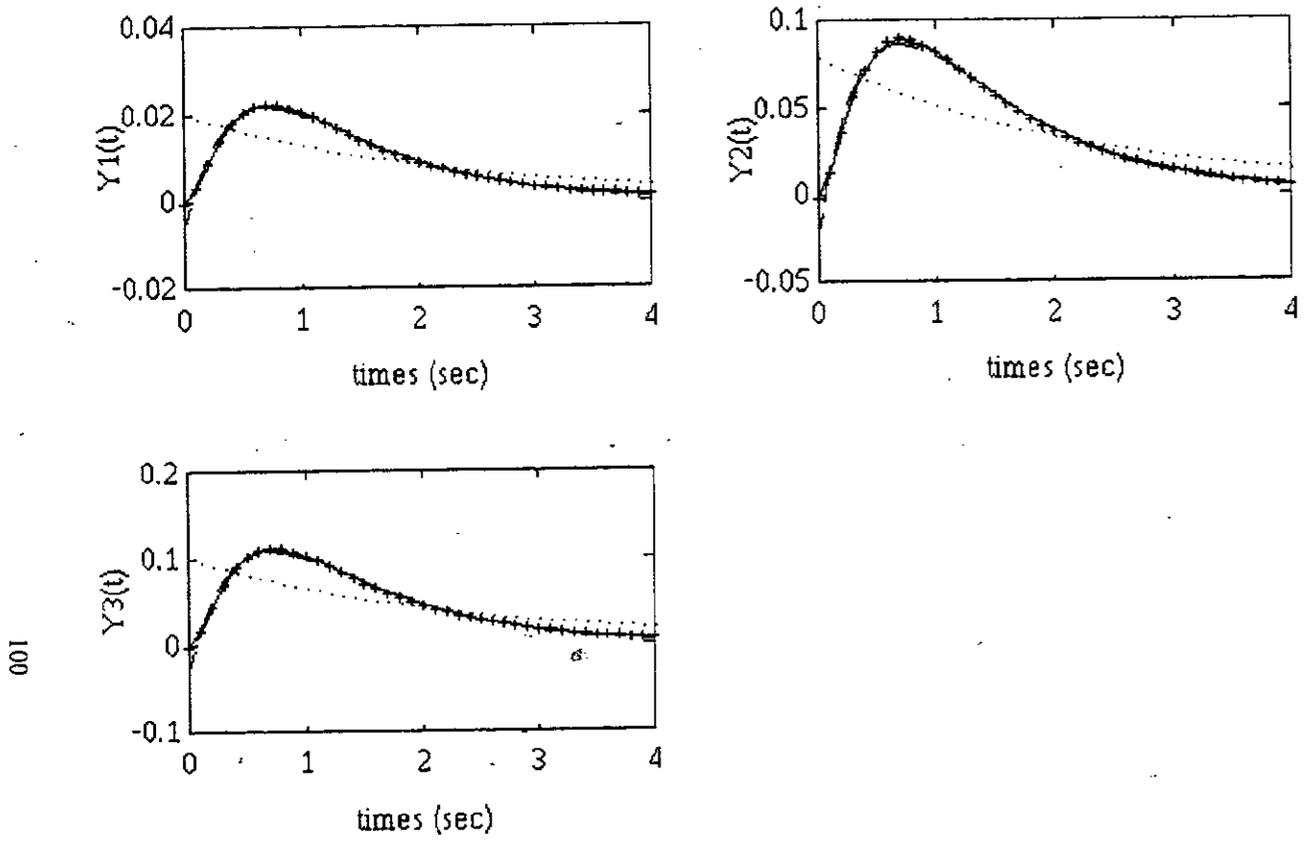


FIGURE III.17.2 - Réponses impulsionnelles des quatres sorties du modèle

—	initial d'ordre six
.....	réduit optimal d'ordre 3
- - - -	réduit optimal d'ordre 4
+++	réduit optimal d'ordre 5

3/ Troisième exemple [MAZ.93]

Pour réduire le modèle d'état (Annexe D, (D.3)), nous avons utilisé la méthode de SAFONOV [SAF.89] puisque le système correspondant présente des modes multiples. Les valeurs propres du système (valeurs propres de la matrice A) sont : $\{-3.6817+11.0894j, -3.6817-11.0894j, -8.6906, -6.2030, -4.2846, -2.9224\}$.

Les valeurs propres de la matrice produit $P_i Q_i$ (carrés des valeurs singulières) sont : $\{0.0063, 0.0022, 0.0021, 0.0011, 0.0000, 0.0000\}$. Les valeurs de J qui sont donnés au tableau suivant représentent les valeurs du critère quadratique calculé dans la procédure d'optimisation

Ordre de réduction	J_{initial}	J_{final}
3	1.6108 E-007	1.6125 E-008
4	1.2238 E-005	2.1622 E-006
5	1.2009 E-002	1.3108 E-003

Les figures III.14.1, III.15.1 et III.16.1 représentent les réponses impulsionnelles des différentes sorties du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) et des modèles réduits optimaux d'ordre 3, 4, 5, respectivement.

Les figures III.14.2, III.15.2 et III.16.2 représentent les spectres d'amplitude des différentes sorties du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) et des modèles réduits optimaux d'ordre 3, 4, 5, respectivement.

Les figures III.14.3, III.15.3 et III.16.3 représentent les spectres de phase des différentes sorties du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) et des modèles réduits optimaux d'ordre 3, 4, 5, respectivement.

La figure III.17.1 représente les courbes comparatives de la réponse impulsionnelle du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits sous-optimaux (par rapport à J) d'ordre 3, 4, 5, respectivement.

Enfin la figure III.17.2 représente les courbes comparatives de la réponse impulsionnelle du modèle initial d'ordre six, des modèles réduits optimaux d'ordre 3, 4, 5, respectivement.

III.7.2 - INTERPRETATIONS DES RESULTATS

Pour illustrer les performances des différentes techniques de réduction utilisées, nous avons considéré l'approximation des trois exemples de systèmes multivariables identifiés dans le chapitre deux. Le premier système d'ordre onze représente une chaudière [WIL.79]. La méthode sous-optimale utilisée comme solution initiale est celle de SAFONOV car cet exemple présente des valeurs propres (carrés des valeurs singulières) de la matrice $P_i Q_i$ (produit des grammians d'observabilité et de commandabilité) multiples. Le second système d'ordre six représente une modélisation d'un réacteur nucléaire [TZA.77]. Pour cet exemple la méthode sous-optimale utilisée comme solution initiale est celle des gains équilibrés dite de KABAMBA puisque ce système est minimal. Le dernier système d'ordre six représente un bras manipulateur [MAZ.93]. La méthode sous-optimale utilisée comme solution initiale est celle de SAFONOV car ce dernier présente des valeurs propres (carrés des valeurs singulières) de la matrice $P_i Q_i$ faibles et multiples. Pour pouvoir évaluer et comparer les résultats, nous avons tracé trois réponses, la réponse impulsionnelle, les spectres d'amplitude et de phase du système originel et des modèles réduits.

Si on se base sur les valeurs propres de la matrice $P_i Q_i$ pour évaluer le modèle d'ordre réduit, on peut remarquer qu'à partir de l'ordre quatre (pour l'exemple de la chaudière et du bras manipulateur), la méthode dite de SAFONOV [SAF.89] commence à donner des réponses du modèle réduit (réponse impulsionnelle, spectres d'amplitude et de phase) de plus en plus proche de celles du système originel. En fait, ces réponses se rapprochent encore de celles du système originel en augmentant l'ordre d'approximation (voir Figure III.9.1 et III.13.1, respectivement). On remarque la même chose pour l'exemple du réacteur nucléaire (voir Figure III.17.1)

Pour un bon compromis entre la performance de la méthode et la complexité du système, l'ordre six pour l'exemple de la chaudière et l'ordre cinq pour le réacteur nucléaire et le bras manipulateur peuvent être considérés comme un choix satisfaisant. Toutefois, dans le cas général le meilleur compromis entre la complexité et la performance dépend surtout des valeurs propres de la matrice $P_i Q_i$ pour la technique

de SAFONOV et des valeurs de ΔG_i pour la méthode de KABAMBA. Si par exemple toutes les valeurs propres de la matrice $P_i Q_i$ et toutes les valeurs de ΔG_i sont importantes, une réduction du modèle est généralement non satisfaisante même pour des ordres proches de celui du système originel.

Sachant que les méthodes de SAFONOV et de KABAMBA sont sous-optimales, nous avons trouvé qu'il était nécessaire d'utiliser la méthode itérative de WILSON [WIL.80] qui est optimale (voir Figure III.4) et qui peut être accélérée en utilisant la méthode de SAFONOV ou la méthode de KABAMBA comme solution initiale (voir Figures III.9.2, III.13.2 et III.17.2). Avec la méthode de WILSON, il est clair qu'une amélioration des résultats par rapport à ceux de SAFONOV (voir Figures de III.5 à III.8 pour la chaudière et les Figures de III.14 à III.16 pour le bras manipulateur) et par rapport à ceux de KABAMBA (voir Figures de III.10 à III.12 pour le réacteur nucléaire) est obtenue.

III.8 - CONCLUSION

Les techniques de réduction étudiées dans ce chapitre sont bien plus complémentaires que concurrentes. Par exemple, la méthode KABAMBA dite des gains équilibrés permet d'approximer des modèles multivariables minimaux, alors que la technique de SAFONOV génère un modèle d'ordre réduit à partir d'un modèle complexe non minimal. L'avantage de ces méthodes réside dans leur simplicité et la facilité de leur implémentation. Aussi, elles génèrent un ensemble de modèles d'ordre réduit qui sont satisfaisant mais non nécessairement optimaux au sens des moindres carrés. D'autre part, nous avons trouvé qu'elles possèdent une propriété géométrique très intéressante, c'est qu'elles sont équivalentes à une projection du vecteur d'état du système originel sur un sous-espace de dimension réduite. Puisque ces deux méthodes ne sont pas optimales au sens des moindres carrés, nous avons jugé qu'il était nécessaire d'améliorer leurs solutions par une procédure d'optimisation itérative (procédure de WILSON) en les utilisant comme solutions initiales. Nous avons pu

alors démarrer la recherche d'un modèle d'ordre réduit optimal au sens L^2 dans de meilleures conditions.

Il faut noter aussi que l'utilisation des méthodes de SAFONOV ou de KABAMBA comme solution initiale dans la procédure de WILSON résoud deux problèmes posés dans la version originale de cette procédure. Le premier est relatif au problème d'initialisation de la procédure d'optimisation de WILSON. En effet, cette procédure nécessite une solution initiale qui vérifie les conditions de commandabilité et de stabilité. Or un choix arbitraire, comme il a été proposé par WILSON, de la solution initiale ne garantit pas toujours ces deux conditions. De plus pour un système qui a une dimension très importante, ce choix devient difficile voire impossible.

Le second problème se pose lorsque le modèle d'ordre réduit qui représente la solution initiale présente des pôles qui sont proches de l'axe imaginaire, alors la synthèse d'une solution optimale devient difficile à cause du calcul des grammians qui devient mal conditionné. Ainsi, le choix des méthodes de SAFONOV ou de KABAMBA comme solution initiale accélère énormément la convergence de l'algorithme de WILSON. Ceci est dû au fait que malgré que ces méthodes sont sous-optimales, elles sont proches de celle de WILSON.

L'algorithme général qui assure l'identification d'un système complexe par une méthode de réduction optimale a été développé. Les résultats présentés dans le chapitre II et le chapitre III mettent en valeur la performance de cette procédure.

CONCLUSION
GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans cette étude, divisée en deux parties, une méthode d'identification et une méthode de réduction optimale des systèmes multivariables sont présentées.

Les systèmes considérés sont des systèmes linéaires multivariables, invariants dans le temps, stables, commandables et observables. Pour leur identification, la procédure utilisée est la méthode des moindres carrés généralisés (MCG), étant donné que le modèle du bruit dans le système est supposé coloré. Vu que, dans certaines conditions, l'identification peut donner lieu à une surestimation de la structure du modèle, ce qui rend son exploitation et implémentation pratique très fastidieuse et très coûteuse. Alors, nous avons trouvé qu'il était nécessaire de voir si la structure identifiée pourrait ou non être approximée par une structure équivalente mais de dimension plus réduite. Ceci facilitera son implémentation et par conséquent la synthèse d'un contrôleur pour de tel système sera plus aisée.

Ayant les fonctions de transfert des modèles multivariables obtenues par la méthode d'identification MCG pour les trois exemples, nous avons déterminé leurs représentations dans l'espace d'état. Pour leurs réductions, deux méthodes sous-optimales (méthode de SAFONOV et méthode de KABAMBA dite des gains équilibrés) sont utilisées. Pour améliorer les performances de la réduction des méthodes précédentes une méthode optimale itérative due à WILSON [WIL.80] est adoptée. Cette méthode utilise une des deux méthodes sous-optimales comme solution initiale. Ceci pourrait accélérer d'une manière appréciable la convergence de la méthode optimale de WILSON.

Pour illustrer les performances des différentes techniques de réduction utilisées, nous avons considéré l'approximation des trois exemples de systèmes multivariables identifiés dans le chapitre II. Le premier système d'ordre onze représente une chaudière

[WIL.79]. La méthode sous-optimale utilisée est celle de SAFONOV car cet exemple présente des valeurs propres (carrés des valeurs singulières) de la matrice $P_i Q_i$ (produit des grammians d'observabilité et de commandabilité) multiples. Le second système d'ordre six représente une modélisation d'un réacteur nucléaire [TZA.77]. Pour cet exemple la méthode sous-optimale utilisée est celle des gains équilibrés dite de KABAMBA puisque ce système est minimal. Le dernier système d'ordre six représente un bras manipulateur [MAZ.93]. La méthode sous-optimale utilisée est celle de SAFONOV car ce dernier présente des valeurs propres (carrés des valeurs singulières) de la matrice $P_i Q_i$ faibles et multiples. Pour pouvoir évaluer et comparer les résultats nous avons tracé trois réponses: la réponse impulsionnelle, les spectres d'amplitude et de phase du système originel et des modèles réduits.

Si on se base sur les valeurs propres de la matrice $P_i Q_i$ pour évaluer le modèle d'ordre réduit, on peut remarquer qu'à partir de l'ordre quatre (pour l'exemple de la chaudière et du bras manipulateur), la méthode dite de SAFONOV [SAF.89] commence à donner des réponses du modèle réduit (réponse impulsionnelle, spectres d'amplitude et de phase) de plus en plus proche de celles du système originel. En fait, ces réponses se rapprochent encore de celles du système originel en augmentant l'ordre d'approximation (voir Figure III.9.1 et III.13.1, respectivement). On remarque la même chose pour l'exemple du réacteur nucléaire (voir Figure III.17.1)

Pour un bon compromis entre la performance de la méthode et la complexité du système, l'ordre six pour l'exemple de la chaudière et l'ordre cinq pour le réacteur nucléaire et la bras manipulateur peuvent être considérés comme un choix satisfaisant. Toutefois, le meilleur compromis entre la complexité et la performance dépend surtout des valeurs propres de la matrice $P_i Q_i$ pour la technique de SAFONOV et des valeurs de ΔG_i pour la méthode de KABAMBA. Si par exemple toutes les valeurs propres de la matrice $P_i Q_i$ et toutes les valeurs de ΔG_i sont importantes, une réduction du modèle est généralement non satisfaisante même pour des ordres proches de celui du système originel.

Sachant que la méthode de SAFONOV est sous-optimale, nous avons trouvé qu'il était nécessaire d'utiliser la méthode itérative de WILSON [WIL.80] qui est optimale (voir Figure III.4) et qui peut être accélérée en utilisant la méthode de SAFONOV ou la méthode de KABAMBA comme solution initiale (voir Figures III.9.2, III.13.2 et III.17.2). Avec la méthode de WILSON, il est clair qu'une amélioration des résultats par rapport à ceux de SAFONOV (voir Figures de III.5 à III.8 pour la chaudière et les Figures de III.14 à III.16 pour le bras manipulateur) et à ceux KABAMBA (voir Figures de III.10 à III.12 pour le réacteur nucléaire) est obtenue.

Cependant, trois résultats importants sont à retenir, c'est d'abord, lorsque le modèle d'ordre réduit présente des pôles proches de l'axe imaginaire, il devient difficile de synthétiser un modèle d'ordre réduit du fait que le calcul des matrices P_i et Q_i devient mal conditionné. Ce résultat a été observé (en utilisant la procédure de WILSON) pour certains exemples de systèmes (ayant des bandes de fréquence étroites) que nous avons testés au laboratoire d'Automatique. Donc, nous pouvons conclure que lors de la recherche de l'optimum, il faut s'assurer que le modèle réduit (considéré comme solution initiale) est stable. Sinon, l'algorithme de WILSON peut diverger. Le second point concerne le choix de la solution initiale pour la procédure d'optimisation de WILSON. En effet, dans sa recherche de l'optimum, WILSON considère un modèle réduit arbitraire qui doit satisfaire à certaines conditions (stabilité et commandabilité). Avec une telle solution initiale, on peut aboutir à la solution optimale mais peut être après un très grand nombre d'itérations. De plus, il est généralement difficile de trouver une solution initiale satisfaisant aux conditions de gouvernabilité et de stabilité (voir organigramme de la figure III.3), lorsque le choix de cette solution est fait arbitrairement. Le troisième résultat qu'il faut mettre en évidence est que les méthodes utilisées pour la réduction des systèmes complexes (méthodes de SAFONOV, KABAMBA et MILSON) sont équivalentes à une projection du vecteur d'état du système originel sur un sous-espace de dimension réduite égale à l'ordre du modèle réduit. Autrement dit que le vecteur d'état du modèle réduit n'est qu'une projection du vecteur d'état du système originel sur un sous-espace équivalent mais de dimension

BIBLIOGRAPHIE

- [DAV.85]-DAVID,C.H. & DENNIS,S.B., "The optimal projection equations for model reduction and the relationships among the methods of WILSON, SKELTON and MOORE, " IEEE Trans. Aut. Contr, Vol.AC-30, N°12, pp. 1201-1211, 1985.
- [DEN.85]-DENNIS,S.B. & DAVID,C.H, " The optimal projection equations for Reduced- order state estimation, " IEEE. Trans. Aut. Contr., Vol.AC-30, N°6, pp. 1034-1037, June 1985.
- [DENI.91]-DENIS,M. &GLOVER,K., "Controller Reduction by H^∞ -Balanced truncation, " IEEE. trans. Aut. Contr., Vol.36 ,N°6 , pp. 668-682 , June 1991.
- [DER.88]-DERRAS, B., " The approximation of discrete time linear systems based on the use of projections, " PhD Thesis, Department of Electrical & Computer Engineering, University of Colorado at Boulder, CO, Boulder, 1988.
- [DER.94]-DERRAS,B., " Model Reduction via a state-space based criterion, " Journal of Technology, ENP, Alger, vol.9, pp. 1-25, 1994.
- [DIE.87]-DIEULESAINT,E. & ROYER,B., " Systèmes linéaires de commande à signaux analogiques, " Mason, 1987.
- [ENN.84]-ENNES,D.F., " Model reduction with balanced realisation : an error bound and a frequency weighed generalisation, " Proc 3rd Conf. Decision and control, Las Vegas, USA , pp. 127-132, 1984
- [EYA.85]-EYAD,H.A., " A New parameter estimate in singular perturbations, " Systems and Control lettres, Vol.6, N°3, pp. 193-198, August 1985.
- [FLO.92]-FLORIN,D.B., MAAMER,B.,DJENNOUNE,S. & WEISS,M., " Performance index for model reduction of sampled-data systems, " Information and control, Vol.1, N° 4, pp. 325-334, December 1992.
- [FOU.82]-FOULARD,C., GENTIL,S. & SANDRAZ,J.P., " Commande et régulation par ordinateur numérique, " 3^{ème} édition, Eyrolles, Paris, 1982.
- [FOU.86]-FOULARD,C., GENTIL,S. & SANDRAZ,J.P., "Commande et régulation par ordinateur numérique, " 5^{ème} édition, Eyrolles, Paris, 1986.
- [FOS.72]-FOSSARD,A., " Commande des systèmes multidimensionnels, " Techniques de l'automatisme, Dunod, Paris, 1972.
- [FRI.87]-FRIEDLAND,B., " Control System Design, An introduction to state space

methods, " New York, Mc Graw-Hill Company, 1987.

- [FUR.73]-FURHT,P.B., "Maximum likelihood identification of Aström model by linearisation, " 3rd IFAC Symposium, identification and parameter estimation, pp. 737-740, june 1973.
- [GAB.87]-GABEL.R.A. & ROBERTS.R.A., "Signal and linear systems, " 3^{ème} édit, NewYork, J.Wiley and Sons, 1987.
- [GAJ.91]-GAJIC,Z. & SHEN,X.M., " Study of the discrete singularly perturbed linear quadratique control problem by a bilinear transformations , " Automatic, Vol.27, N°.6, pp. 1025-1028, 1991.
- [GLO.84]-GLOVER,K., " ALL optimal Hankel-norm approximations of linear multivariables systems and their L^{∞} -error bounds, " Int. J. Contr. , Vol.39, N°.6, pp. 1115-1193, June 1984.
- [GOL.70]-GOLUB,G.H. & REINSCH,G., " Singular value decomposition and least-squares solutions, " Handbook Series Liner Algebra, N°.14, pp. 403-420, 1970.
- [GRU.77]-GRUCO,A., BERTRAND,P., MICHAILESCO,G. & SIRET,J.M., " Sur l'utilisation de modèles réduits dans l'analyse et la commande de systèmes complexes , "(Publication interne), Laboratoire des signaux et systèmes CNRS, E.S.E, IFAC symposium, France , 1977.
- [HAD.89]-HADDAD.W.H & DENNIS S. BERNSTEIN, " Combined L^2 / H^{∞} model reduction, " Department of Mechanical Engineering, Florida Institute of Technology, Melbourne, 1989.
- [HUT.75]-HUTTON,M.F.& FRIEDLAND.B, "Routh approximation for reducing order of linear time invarinat systems, " IEEE. Trans. Aut. Contr., Vol.AC-27, pp. 329-337, June 1975.
- [JOH.82]-JOHN JONES.J.R & CHARLES.L, " Solutions of Lyapunov matrix equation, " IEEE. Trans. Aut. Contr., Vol.20, pp. 329-337, June 1975.
- [KAB.85a]-KABAMBA,P.T., " Balanced gains and their significance for L^2 model reduction, " IEEE Trans. Auto. Contr., Vol AC-30, N°.7, pp. 690-693, July 1985.
- [KAB.85b]-KABAMBA,P.T., " Balanced forms : Canonicity and parametrization , " IEEE Trans. Aut. Contr., Vol AC-30, N°.11, pp. 1106-1112, November 1985.
- [KAT.73]-KATSUHISA,F., "An application theory to identification of multivariable

process, " 3rd IFAC Symposium, Netherlands, pp. 939-942, June 1973.

[KEU.93]-KEUCHEL,U., " Parameter estimation and structure selection for linear multivariable systems, " Aut. Contr. lab., (Publication interne.), Faculty of electrical Engineering, Ruhr-University Bochum, P.O.Box 1021.48, pp. 615-620, 1993.

[KRY.93]-KRZYSZTOF.B.J, " Algorithms for reduction or approximation a transfert function for linear systems, " (Publication interne), Institut of Industrial Automation, Warsaw, University of Technology, Poland, pp. 717-720, ECC 1993.

[LAU.80]-LAUB,J.L., " Computation of balancing transformation, " (Publication interne), Proc.1980.

[LAL.74]-LAL,M. & MITRA,R., " Simplification of large system dynamics using a moment evaluation algorithm, " IEEE. trans. auto. Contr., vol.19, pp. 602-603, Oct.1974.

[MAD.84]-MADIS. & MAGUEMOUN,M.H., " Etude de deux méthodes de réduction des systèmes complexes, " Thèse d'Ingénieur, ENP, Département d'électronique, Alger, Janvier 1984.

[MAR.87]-MARET,L. , " Régulation automatique, " systèmes analogiques, coll. complément au traité d'électricité, presses polytechniques Romandes, 1987.

[MAS.88]-MASON.J.E, " Identification using low order models, " PhD dissertation University of California, Berkeley, 1988.

[MAZ.93]- MAAZARI,B. & TAIBI,A., " Contrôle adaptatif à structure variable, " Thèse d'Ingénieur, USTHB, Intitut d'Electronique, Departement de contrôle, Alger, Septembre 1993.

[MEI.67]-MEIER,L. & D.G.LUENBERGER, " Approximation of linear constant systems, " IEEE. Trans. Aut. Contr., Vol.AC-12, pp. 585-588, 1967.

[MIE.90]-MIELCAREK, D., " Etude et développement de méthodes d'identification multivariables-Application à un procédé chimique, " Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique, Lorraine, Juin 1990.

[MOO.81]-MOORE,B.C., " Principal component analysis in linear systems : controllability, Observability and Model reduction, " IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-26, pp. 17-31, February 1981.

[MUK.80]-MUKAI,H., " Algorithms for multicriterion optimization, " IEEE Trans. Aut. Contr., Vol. AC-25, N°2, pp. 177-186, April 1980.

- [NAJ.83]-NAJIM,K, & MURATET,G., " Pratique de la régulation numérique des processus industriels, " Masson, Paris, 1983.
- [NAS.63]-NASLIN,P., " Théorie de la commande et conduite optimale, " Dunod, 1963.
- [OBE.87]-OBER,J.R., " Balanced realisations : Canonical form, Parametrization, model reduction, " Int. J. Contr. , Vol.46, N°.2 , pp. 643-670 , 1987.
- [OKK.93]-OKKO,H.B., CAREL,C. & PEPIJN,M.R.W. , " Frequency weighed closed-loop balanced reduction, "(Publication interne), M.E.S.C.G, Delft University of Technology, Netherlands, pp. 697-700, 1993.
- [PER.82]-PERNABO,L. & SILVERMAN,L.M., " Model reduction via balanced state space representation, " IEEE Trans. Auto. Contr., Vol.AC-27, pp. 382-387, April 1982.
- [POO.74]-POOLE,G. & BOULLION,T., " A survey on M-matrix, " SIAM Review, Vol.16, N°.4, pp. 419-427, October 1974.
- [RAB.89]-RABAH,W.H. & HASSAN,K.K., " A Real shur form method for modelling singularly perturbed systems, " IEEE Trans. Aut. Contr. , Vol.34 , N°.8 , pp. 856-860 , August 1989.
- [RAM.94]-RAMEL,Z., " Identificatiton des systèmes complexes par methode de réduction, " Thèse d'Ingénieur, Département d'électronique ENP, Alger, Juillet 1994.
- [RIV.89]-RIVOIR,M., "Cours d'automatique, " Tome.1, ED. Eyrolles, 1989.
- [ROB.73]-ROBERTO,P.G., " Cononical Structures in the Identification of multivariable systems, " Instituto di Automatica , University of Bologna , Italy , 3rd IFAC, June 1973.
- [ROT.70]-ROTHSCHILD,D. & JAMESONS,A., " Comparaison of four numerical Algorithms for solving the Lyapunov matrix equation, " Int. J. Control , Vol.11, N°.2 , pp. 181-198, 1970.
- [SAF.89]-SAFONOV,M.G. & CHAING,R.Y. , " A Schur method for balanced truncation model reduction, " IEEE Trans. Aut. Contr., Vol.34 , N°.7 , pp. 729-732, July 1989.
- [SAG.88]-SAGGAF,U.M & FRANKLIN,G.F , " Model Reduction via balanced realisations : An extension and frequency weighing techniques, " IEEE Trans. Aut. Contr., Vol.33, N°.7, pp. 687-691, July 1988.

- [SHA.74]-SHAMASH,Y., " Stable reduced-order models using Padé type approximation, " IEEE trans., Auto., contr., vol.19, pp. 615-616, Oct.1974.
- [SHA.75a] -SHAMASH,Y., " Linear system reduction using Pade approximation to allow retention of dominant modes, " Int.J.Contr., vol.21, pp. 257-272, 1975.
- [SHA.75b] -SHAMASH,Y., " Model reduction using the Routh stability criterion and the Pade approximation technique, " Int. J. Contr., vol.21, pp. 475-484, 1975.
- [SHA.80] -SHAMASH,Y., " Failure of the ROUTH-HURWITZ method of reduction, " IEEE Trans. Aut. Contr. , Vol.AC-25 , N°.2 , pp. 313-314 , April 1980.
- [SHA.82] -SHAMASH,Y., " Critical Review of methods for deriving stable reduced-order models, " IFAC Identification and system parameter estimation , Washington , pp. 1519-1523, 1982.
- [SHI.91]-SHIMA,T. , " New overlapping coordination methodologies for large scale multivariable systems, " Automatic, vol.27, N°.6, pp. 1011-1024 , 1991.
- [SKE.81]-SKELTON,R.E., " Cost decomposition of linear systems with application to model reduction, " Int. J. Contr., Vol.32, N°.6, pp. 1031-1055, 1981.
- [SPA.92]-SPANOS,J.T., MILMAN,M.H. & MINGORI,D.L. , " A new algorithm for L^2 optimal model reduction, " Automatica , IFAC , VOL.28 , N°.5 , pp. 897-903 , 1992.
- [STE.77]-STEWART,G.W. , " On the perturbation of pseudo-inverses, projections and linear least-squares problems, " SIAM Review, Vol.19, N°.4, pp. 634-652, October 1977.
- [SUB.93]-SUBRAHMANYAM,A.V.B., SAHA,C.D. & GANTI PRASADO,R., "Continuous-time system Identification via Markov parameter estimation for order reduction and model quality assessment , " (Publication interne), ECC, India, pp. 2303-2307, ECC 1993.
- [THE.89]-THERAPAS,P.C., " Balancing transformations for unstable non minimal linear systems, " IEEE Trans. Aut. Contr., Vol.34, N°.4, pp. 455-456, April 1989.
- [TZA.77]-TZAFESTAZ,S.G & CHRYSOCHOIDES,N., " Canonical decoupling and Control Multicore Nuclear Reactor, " Nucl; Sci and Engrg, Vol.62, pp. 574-579, 1977.
- [UNB.73]-UHBEHAUEN,S. & GHRING,B., " Application of different statistical

tests for the determination of the most accurate order of the model in parameter estimation, " 3rd IFAC symposium, Neterlands, pp. 917-928, June 1973.

- [VAR.80]-VAROUFAKIS,S.J. & PARASKEVOPOULUS,P.N., " A comparative Study in Model reduction of linear time invariant systems, " Grece, pp. 18-26, 1980.
- [VAR.79]-VAROUFAKIS,S.J. & PARASKEVOPOULUS,P.N., " A mixed time frequency domain approach to model reduction, " Electronics letters, Vol.15, pp.789-790, 1979.
- [VER.93]-VERGAS,A., " Explicit formulas for an efficient implementation of the frequency-Weighted model reduction approach, "(Publication interne),ECC, DLR-Institut für Robotik and system dynamik oberpfaffenhafen, Allemagne, pp. 693-696, 1993
- [WIL.70]-WILSON,D.A., " Optimum solution of model reduction problem, " PROC. IEE Vol.117 , N°.6 ,pp. 1161-1165 , June 1970.
- [WIL.79]-WILSON,D.A. & MISHRA,R.N., " Optimal reduction of multivariable systems, " Int. Journal of Control, Vol.29, N°.2, pp. 267-278, 1979.
- [WIL.80]-WILSON,D.A. & MISHRA,R.N., " Optimal reduction of multivariable systems, " Int. J. Contr., Vol.31, N°.3, pp. 443-466, 1980.
- [WIL.85]-WILSON,D.A., " HANKEL operator and its induced norms, " Int. J. Contr., Vol.42 , N°.1 ,pp. 65-70 , 1985.
- [WIL.89]-WILSON,D.A., " Convolution and HANKEL operators norms for linear systems, " IEEE Trans. Aut. Contr., Vol.34 , N°.1, pp. 94-97, January 1989.
- [WAN.92]-WANG,Y.Y. & PAUL,M.F., " Complete decomposition of suboptimal regulator for singularly perturbed systems, " Int. J. Contr.,Vol.55, N°.1, pp. 49-60, 1992.
- [WAS.88]-WASSIM.M.H & DENNIS,S.B. , " Robust-reduced-order modeling via the optimal projection equations with PERTERSON-HALLOT bounds, " IEEE Trans. Aut. Contr., Vol.33, N°.7, pp. 592-595, July 1988.
- [XUE.91]-XUE,D., " Accuracy consideration to order reduction algorithms for gaussian input, " (Publication interne), school of Engineering, University of Sussex, Brighton, pp. 1-20, 1991.
- [YAH.94]-YAHIAOÛI,D. & OUCHERIF,S. , " Syntèse d'une commande par retour d'état d'un système MIMO à partir d'un modèle d'ordre réduit, " Thèse

d'Ingénieur, Département d'électronique, ENP, ALGER, Juillet 1994.

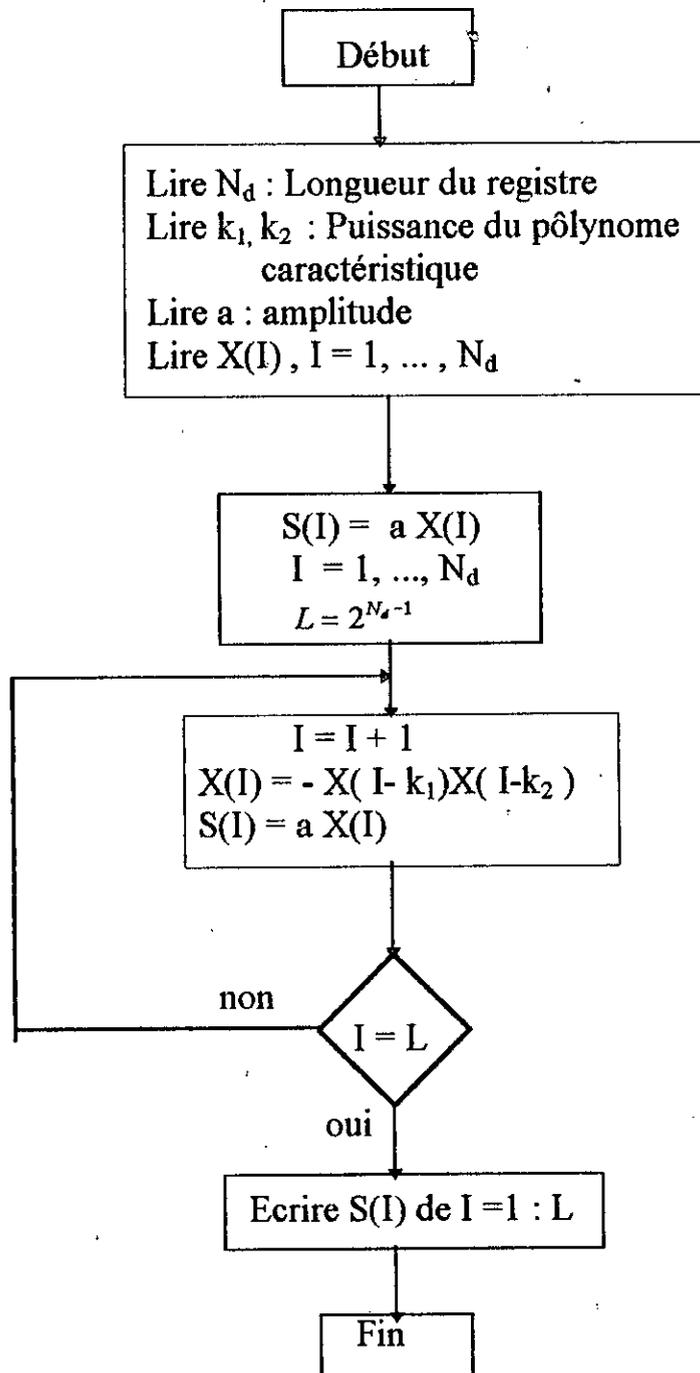
[YOU.85]-YOUNG, J.N., " Balanced realisation via models operators, " Int. J. Contr., Vol.42, N°2, pp. 369-389, 1985.

[ZAK.73]-ZAKIAN, V., " Simplification of linear time-invariant systems by a moment approximation, " Int.J.Contr., vol.18, pp. 455-460, 1973.

ANNEXES

ANNEXE A

1/ - Organigramme de génération d'une SBPA de niveau $\pm a$



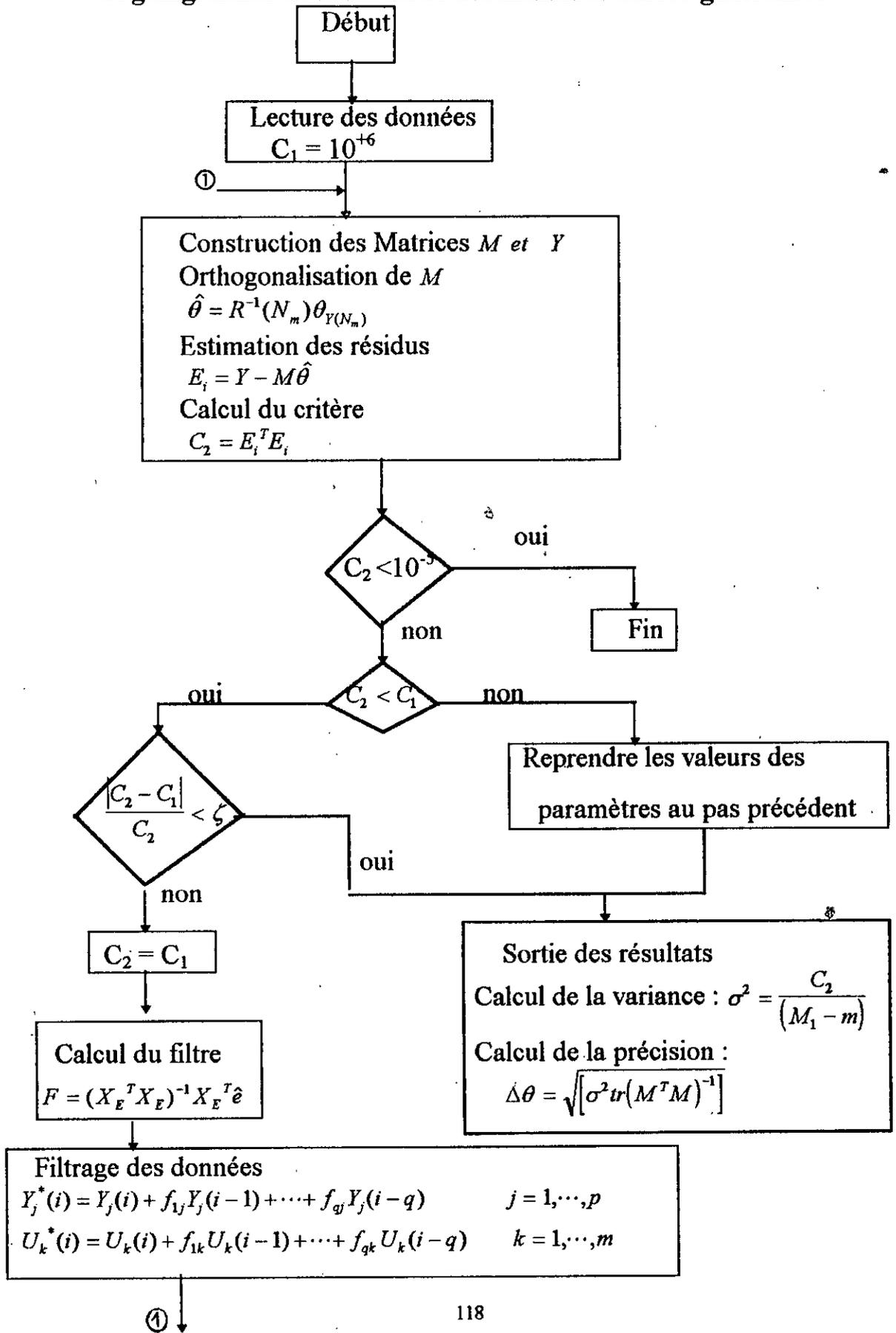
2/ Définition de la matrice de HADAMARD

$$H_n = \begin{bmatrix} H_{n/2} & H_{n/2} \\ H_{n/2} & H_{n/2} \end{bmatrix} \quad \text{où } n \text{ est entier paire}$$

$$\text{avec } H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ANNEXE B

Organigramme de la méthode des moindres carrés généralisés



ANNEXE C

- PROGRAMME DE FILTRAGE DES DONNEES D'ENTREE / SORTIE

- Filtrage d'un signal de sortie

```
         $Y^*(i) = y(i)$ 
    if ( q = 1 ),
        for i = q+1 : Nm,
             $Y^*(i) = y(i)$ 
            for j = 1 : q ,
                 $Y^*(i) = y^*(i) + F(j+1)y(i-j)$ 
            end,
        end,
    else
        for i = 2 : Nm ,
             $Y^*(i) = y(i)$ 
            for j = 1 : i-1,
                 $Y^*(i) = y^*(i) + F(j+1)y(i-j)$ 
            end,
        end,
    end.
```

NB : Pour le filtrage des données des signaux d'entrée, il suffit de remplacer $Y(i)$ par $U(i)$.

ANNEXE D

Introduction

Les données présentées dans cette annexe représentent les valeurs numériques relatives aux exemples simulés dans le chapitre II et le chapitre III. En effet, les fonctions de transfert ont été utilisées dans le chapitre Identification des systèmes multivariables par contre les matrices de la représentation de l'espace d'état ont été utilisées dans la section de la réduction des systèmes multivariables.

I - FONCTIONS DE TRANSFERT

VALEURS DES PARAMETRES THEORIQUES ET VALEURS DES PARAMETRES ESTIMEES DE LA FONCTIONS DE TRANSFERT

TABLEAU 1 : UNE CHAUDIERE

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées						
$A_{11} = 1$		$A_{22} = 1$	1	$A_{33} = 1$	1	$A_{44} = 1$	1
-05.60	-6.10 ± 0.66	- 5.60	-6.20 ± 0.48	-6.6	-6.99 ± 0.89	-5.60	-6.06 ± 0.76
13.38	12.88 ± 0.66	12.38	11.98 ± 0.48	14.4	14.01 ± 0.89	15.4	14.94 ± 0.76
- 14.54	-15.04 ± 0.66	-12.54	-13.04 ± 0.48	-13.54	-13.93 ± 0.89	-16.54	17 ± 0.76
3.84	3.34 ± 0.66	3.34	2.94 ± 0.48	4.34	3.95 ± 0.89	6.34	5.58 ± 0.76
4.72	4.22 ± 0.66	4.52	4.02 ± 0.48	4.51	4.12 ± 0.89	8.52	8.06 ± 0.76
-4	-4.50 ± 0.66	- 3.98	-4.38 ± 0.48	-4.98	-5.37 ± 0.89	-3.98	4.44 ± 0.76
1.55	1.05 ± 0.66	0.55	0.15 ± 0.48	1.55	1.16 ± 0.89	0.55	0.49 ± 0.76
5.1	4.60 ± 0.66	0.51	0.11 ± 0.49	1.51	1.12 ± 0.89	0.51	0.45 ± 0.76
-1.7	-2.20 ± 0.66	- 0.17	-0.57 ± 0.48	-1.17	-1.56 ± 0.89	-2.17	-2.63 ± 0.76
-0.14	-0.54 ± 0.66	- 0.014	-0.414 ± 0.48	-0.107	-0.497 ± 0.89	-0.014	-0.474 ± 0.76
0.67	0.17 ± 0.66	-0.006	-0.406 ± 0.48	-0.014	-0.404 ± 0.89	0.707	0.247 ± 0.76

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs estimées
$B_{11} = 0.35$	0.15 ± 0.28	$B_{12} = 373.45$	241.20 ± 192.25	$B_{13} = -0.0008$	-0.0016 ± 0.0018	$B_{14} = 0.0004$	0.0001 ± 0.00031
1.78	1.05 ± 0.79	-1925.66	-2400.06 ± 494.4	0.0024	0.0014 ± 0.011	-0.0023	-0.0033 ± 0.0018
3.30	3.15 ± 0.75	3583.08	3100.01 ± 489.07	-0.0012	-0.0029 ± 0.0019	0.0040	0.002 ± 0.0028
-1.83	-2.33 ± 0.56	-2010	-2979 ± 999	-0.004	-0.0090 ± 0.0015	-0.0026	-0.0036 ± 0.0019
-2.16	-2.36 ± 0.30	2334.10	2010.01 ± 924.09	0.005	0.0030 ± 0.0012	-0.0028	-0.0048 ± 0.0028
3.82	3.22 ± 0.68	4153.95	3551.18 ± 682.77	0.0003	0.0001 ± 0.00021	0.0052	0.0032 ± 0.0028
-1.85	-2.99 ± 1.48	-2016.58	-2099.58 ± 89	-0.0032	-0.0072 ± 0.0041	-0.0025	-0.0035 ± 0.0018
-0.13	-0.173 ± 0.049	-147.71	-2073 ± 59.99	0.0013	0.0009 ± 0.0014	-0.00020	-0.00030 ± 0.0018
0.37	0.13 ± 0.84	412.61	312.34 ± 108.27	0.0002	0.00012 ± 0.00018	0.0005	0.0001 ± 0.00041
-0.07	-0.097 ± 0.087	-74.85	-94.54 ± 79.69	-0.0002	-0.0021 ± 0.0029	-0.0001	-0.0003 ± 0.00021
-0.02	-0.068 ± 0.088	-18.47	-33.13 ± 15.66	-0.00005	$-0.000015 \pm 11e-04$	-0.0003	-0.0005 ± 0.00021
0.004	0.001 ± 0.069	4.28	1.33 ± 3.95	0.000006	$0.000004 \pm 2e-05$	0.00006	0.00003 ± 0.000031

121

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs estimées
$B_{21} = 0.69$	0.46 ± 0.63	$B_{22} = 7469.02$	4796.99 ± 2892.03	$B_{23} = -0.002$	-0.030 ± 0.03	$B_{24} = 0.0001$	0.00009 ± 0.00011
-3.56	-5.56 ± 3	-3851.33	-4765.88 ± 976.55	0.005	0.002 ± 0.008	-0.005	-0.007 ± 0.0029
6.61	3.82 ± 3.8	7166.18	4188.67 ± 2988.57	-0.003	-0.005 ± 0.007	0.010	0.0087 ± 0.0018
-3.68	-3.88 ± 0.28	4019.99	2016.19 ± 2883.8	-0.008	-0.009 ± 0.006	-0.005	-0.011 ± 0.008
-4.32	-5.42 ± 1.9	-4668.16	-7786.13 ± 3787.97	0.010	0.007 ± 0.008	-0.006	0.017 ± 0.021
7.64	4.94 ± 2.9	8307.90	6126.40 ± 2981.50	0.0005	0.0002 ± 0.0008	0.010	0.0079 ± 0.0031
-3.70	-3.99 ± 0.39	-4033.17	-5944.57 ± 1977.4	-0.007	-0.009 ± 0.007	-0.005	-0.013 ± 0.0088
-0.26	-0.39 ± 0.18	-295.43	-459.22 ± 169.79	0.003	0.0023 ± 0.0009	-0.0004	-0.00085 ± 0.00075
0.75	0.68 ± 0.09	825.33	625.44 ± 299.89	0.0005	0.0001 ± 0.0006	0.0010	0.0002 ± 0.0018
-0.14	-0.24 ± 0.18	-149.71	-299.99 ± 250.28	-0.0004	-0.006 ± 0.0066	-0.0002	-0.00039 ± 0.00029
-0.03	-0.06 ± 0.09	-37.00	-49 ± 12	-0.000010	-0.000020 ± 0.00011	-0.00005	-0.000079 ± 0.000039
0.008	0.004 ± 0.007	8.56	6.86 ± 1.9	0.0002	0.00019 ± 0.00011	0.00001	0.0000099 ± 0.0000011

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$B_{31} = 1.04$	0.94 ± 0.9	$B_{32} = 1120.35$	1098.15 ± 33.2	$B_{33} = -0.0022$	-0.0033 ± 0.0021	$B_{34} = 0.0013$	0.00087 ± 0.00053
-5.35	-6.98 ± 1.83	-5777	-7598 ± 1831	0.007	0.0059 ± 0.0031	-0.0070	0.0093 ± 0.0033
9.91	8.88 ± 1.83	1074.924	997.94 ± 895.016	-0.004	-0.0061 ± 0.0031	0.013	0.00998 ± 0.00802
-5.52	6.95 ± 1.93	-6030	-6093 ± 89	-0.02	-0.041 ± 0.031	-0.0077	-0.008 ± 0.0008
-6.47	-7.001 ± 0.891	-7002.3	-7972.8 ± 998.5	-0.015	-0.02 ± 0.008	-0.009	-0.016 ± 0.009
11.45	10.85 ± 0.8	1246.19	1029.10 ± 229.089	0.0008	0.00069 ± 0.00021	0.015	0.005 ± 0.019
-5.55	-7.55 ± 2.8	-6049.8	-7099.4 ± 1069.6	-0.010	-0.029 ± 0.023	-0.0076	-0.008 ± 0.00049
-0.40	-0.68 ± 0.38	-443.14	-697.79 ± 264.65	0.004	0.0026 ± 0.0024	-0.0006	-0.0014 ± 0.0018
1.12	0.98 ± 0.24	1237.9	1099.87 ± 188.03	0.0007	0.00063 ± 0.00008	0.0016	0.00096 ± 0.00069
-0.20	-0.39 ± 0.23	-224.6	-299.8 ± 85.2	-0.004	-0.00056 ± 0.00026	-0.0030	-0.008 ± 0.0008
-0.05	-0.079 ± 0.039	-55.41	-64.51 ± 9.9	-0.00012	-0.00023 ± 0.00011	-0.00008	-0.00014 ± 0.00016
0.02	0.0189 ± 0.0009	13	09 ± 4.8	0.00002	$0.0000198 \pm 3e-07$	0.00002	0.00001 ± 0.000011

s

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$B_{41} = 1.40$	0.97 ± 0.53	$B_{42} = 1493.80$	1283.10 ± 220.70	$B_{43} = -0.003$	-0.0039 ± 0.00099	$B_{44} = 0.002$	0.0012 ± 0.0018
-7.13	-9.03 ± 2.00	-7702.7	-7908.2 ± 285.70	0.016	0.010 ± 0.009	-0.009	-0.010 ± 0.009
13.21	10.27 ± 3.14	1433.231	1393.82 ± 89.40	-0.0051	-0.0069 ± 0.0088	0.02	0.019 ± 0.006
-7.36	-9.96 ± 3.6	-8040	-8940 ± 980	-0.015	-0.019 ± 0.007	-0.010	-0.022 ± 0.018
-8.63	-9.3 ± 1.67	-9336.33	-10223.88 ± 897.55	0.020	0.0009 ± 0.017	-0.011	-0.033 ± 0.032
15.33	14.83 ± 1.50	1661.6	1400.12 ± 361.48	0.001	0.00019 ± 0.00088	0.021	0.011 ± 0.018
-7.40	-6.40 ± 1.80	8066.34	7199.73 ± 886.61	-0.013	-0.021 ± 0.0091	-0.01	-0.0198 ± 0.0108
-0.53	-0.73 ± 0.30	-591	-798.99 ± 287.99	0.005	0.0001 ± 0.0008	-0.0008	-0.00169 ± 0.000099
1.50	1.09 ± 0.61	1650.44	1466.22 ± 187.22	0.0010	0.0008 ± 0.0003	0.002	0.00122 ± 0.0018
-0.30	-0.49 ± 0.29	-300	-598 ± 398	-0.0007	-0.00091 ± 0.00029	-0.0004	-0.0019 ± 0.0025
-0.07	-0.099 ± 0.039	-74	-85 ± 16	-0.00018	-0.00038 ± 0.00028	-0.00001	-0.00003 ± 0.00012
0.02	0.017 ± 0.008	17.12	15.15 ± 2.07	0.00002	0.00001 ± 0.000019	0.00002	0.000017 ± 0.000013

TABLEAU 2 : REACTEUR NUCLEAIRE

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$A_{11} = 1$	1	$A_{22} = 1$	1	$A_{33} = 1$	1
-2.48	-2.01 ± 1.33	-3	-3.03 ± 0.05	-2.5	-2.98 ± 0.45
1	0.9 ± 0.1	0.88	0.33 ± 0.5	0.9	0.4 ± 0.4
2.07	1.80 ± 0.6	3	2.15 ± 0.90	2.1	1.60 ± 0.80
-1.46	-1.06 ± 0.5	-1.5	-1.81 ± 0.99	-2	-2.99 ± 0.80
-0.41	-0.1 ± 0.3	-0.8	-1.04 ± 0.9	-0.6	-1.07 ± 0.94
0.7	0.3 ± 0.6	0.47	0.37 ± 0.88	0.4	0.1 ± 0.3

123

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$B_{11} = 7.82$	6.02 ± 2.22	$B_{12} = 8.54$	6.60 ± 3.40	$B_{13} = 9.54$	8.44 ± 3.88
-7.03	-8.01 ± 3.03	-1.01	-3.03 ± 2.60	-2.01	-4.05 ± 2.90
-12.15	-14.13 ± 4.04	-1.17	-2.70 ± 1.75	-11.07	-14.77 ± 3.98
10.66	8.88 ± 1.99	2.06	0.8 ± 2.80	21.48	18.70 ± 4.40
5.93	3.33 ± 2.88	9.90	6.60 ± 4.01	9.92	7.72 ± 3.50
-3.63	-6.70 ± 4.45	-1.04	-4.64 ± 3.70	-1.04	-3.84 ± 2.60
-10.63	-12.83 ± 3.35	-3.70	-6.70 ± 4.80	-2.70	-4.50 ± 2.34

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$B_{21} = 4.54$	2.35 ± 2.12	$B_{22} = 7.33$	5.22 ± 2.33	$B_{23} = 8.80$	6.60 ± 4.88
-10.19	-12.11 ± 3.19	-6.94	-8.80 ± 3.30	-10.6	-12.80 ± 6.66
-11.75	-14.65 ± 2.12	-12.22	-15.12 ± 3.50	-11.16	-14.90 ± 5.50
20.68	17.17 ± 5.05	10.50	8.80 ± 3.00	21.84	25.02 ± 4.90
9.92	5.55 ± 6.75	5.92	7.80 ± 2.20	10.94	8.30 ± 2.90
-10.48	-12.88 ± 3.65	-3.55	-5.60 ± 2.55	-10.85	-13.15 ± 3.30
-27.06	-20.26 ± 5.65	-10.36	-15.50 ± 6.60	-29.09	33.43 ± 6.60

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$B_{31} = 7.41$	5.51 ± 2.11	$B_{32} = 9.44$	7.88 ± 2.80	$B_{33} = 12$	8 ± 3.30
13	9 ± 5.01	17	15 ± 3.30	12	9 ± 4.46
-9	-11 ± 4.40	-8.40	-10.80 ± 2.20	-20	-24 ± 5.00
-24.01	-28.18 ± 6.60	-26.06	-29.09 ± 3.80	-22	-26 ± 8.01
-3.40	-6.70 ± 2.75	-6.60	-10.70 ± 4.40	6.24	4.25 ± 3.30
11.24	8.18 ± 3.07	11.11	8.70 ± 3.30	9.82	6.62 ± 3.22
4.62	3.75 ± 3.33	3.60	1.80 ± 2.80	1.80	2.70 ± 1.80

TABLEAU 3 : BRAS MANIPULATEUR

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$A_{11} = 1$	1	$A_{22} = 1$	1	$A_{33} = 1$	1
-1.73	-2.07 ± 1.70	1.93	1.03 ± 0.88	-1.16	-1.99 ± 0.66
-1.85	-2.19 ± 0.9	-1.55	-2.01 ± 0.15	-1.7	-2.01 ± 0.88
1.58	0.9 ± 0.7	2	1.55 ± 0.65	2.58	2.08 ± 0.65
1.84	1.20 ± 0.9	2.84	1.60 ± 0.15	0.84	0.44 ± 0.66
-4.57	-5.01 ± 0.78	-1.57	-1.97 ± 0.2	-0.57	-0.87 ± 0.54
-1.16	-0.99 ± 0.1	-2.17	-1.89 ± 0.3	-0.17	-0.09 ± 0.02

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$B_{11} = 6.34$	5.53 ± 0.9	$B_{12} = -0.67$	-0.99 ± 0.30	$B_{13} = 70.23$	53.23 ± 33.15
5.41	3.45 ± 1.20	0.13	0.087 ± 0.22	11.79	9.97 ± 2.15
-11.52	-12.12 ± 2.20	1.32	1.09 ± 0.15	-91.12	-79.15 ± 28.15
-10.97	-11.70 ± 1.80	-1.90	-2.09 ± 0.22	-23.58	-29.99 ± 9.18
4.17	3.99 ± 0.19	-0.67	-0.88 ± 0.22	-28.43	-32.32 ± 5.87
5.56	4.66 ± 0.44	0.06	0.03 ± 0.044	11.09	9.87 ± 5.15
1.01	0.9 ± 0.19	0.05	0.01 ± 0.089	49.33	29.66 ± 20.20

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$B_{21} = -18.18$	-16.16 ± 2.20	$B_{22} = 29.75$	21.15 ± 8.15	$B_{23} = 7.30$	4.30 ± 3.40
-16.87	-14.07 ± 3.70	29.03	27.04 ± 3.85	-8.26	-12.16 ± 4.04
32.57	28.66 ± 3.40	-53.56	-58.88 ± 4.15	-21.1	-25.05 ± 6.60
37.89	31.15 ± 5.50	-58.47	-60.80 ± 2.15	1.70	0.97 ± 0.87
-10.76	-15.60 ± 6.60	18.28	15.15 ± 3.15	20.24	17.14 ± 3.88
-19.02	-21.20 ± 2.30	29.44	21.77 ± 6.66	-0.83	-1.03 ± 0.9
-3.63	-6.83 ± 2.80	5.53	3.83 ± 5.66	-6.50	-8.60 ± 3.15

Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées	Valeurs Théoriques	Valeurs Estimées
$B_{31} = 6.1$	4.90 ± 1.80	$B_{32} = 10.11$	8.88 ± 3.20	$B_{33} = 4.17$	2.22 ± 3.15
0.55	0.33 ± 0.23	20.20	18.18 ± 2.10	6.77	3.11 ± 4.44
8.10	7.09 ± 1.30	-16.66	-14.11 ± 3.10	-5.57	-8.87 ± 4.44
0.80	0.5 ± 0.9	-18.18	-21.20 ± 3.40	-13.53	-16.63 ± 2.88
-0.90	-1.20 ± 0.60	28.66	20.88 ± 3.30	13.66	-15.53 ± 3.88
-0.10	-0.88 ± 0.90	0.77	0.44 ± 0.83	6.76	5.75 ± 4.88
0.80	0.55 ± 0.66	0.44	0.20 ± 0.12	27.66	20.88 ± 5.55

II - REPRESENTATION DE L'ESPACE D'ETAT

EXEMPLE1 : D'UNE CHAUDIERE

$-1.24e-002$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2.12e-001$
0	$-3.05e-002$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.411
0	0	$-1.115e-001$	0	0	0	0	0	0	0	0	1.264
0	0	0	$-3.05e-002$	0	0	0	0	0	0	0	2.545
0	0	0	0	-1136	0	0	0	0	0	0	$7.4e-001$
0	0	0	0	0	-3.013	0	0	0	0	0	$2.7e-001$
0	0	0	0	0	0	$-7.065e-001$	$7.065e-001$	0	$2.663e-002$	0	0
0	0	0	0	0	0	2.8735	-2.9316268	$2.31989e-002$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$1.3573723e-004$	$-3.1599e-004$	0	0	$3.4e-004$
$1.24e-002$	$-3.05e-002$	$-1.115e-001$	$-3.05e-002$	1136	3.013	$-4.77e-002$	$1.953259e-003$	$-8.7605e-002$	$2.0e-003$	0	-6.43988
$1.24e-002$	$-3.05e-002$	$-1.115e-001$	$-3.05e-002$	1136	3.013	$-4.77e-002$	$1.953259e-003$	$-8.7608e-002$	0	0	-6.442

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.66e-001 & 0 \\ -5.2517703 & 0 & 0 & 3.17e-002 \\ -5.1865846e-003 & 0 & 3.40e-004 & 1.99e-004 \\ 2.7688112 & 3.00e+003 & 0 & 3.70e-003 \\ 2.7688112 & 3.00e+003 & 0 & 3.70e-003 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(D.1)

EXEMPLE 2 : REACTEUR NUCLEAIRE

$$A = \begin{bmatrix} -1e-002 & 1e-005 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1e+003 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1e-002 & 1e-005 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1e-003 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1e-002 & 1e-005 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1e+003 & -2 \end{bmatrix} \quad
 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1e+006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1e+006 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1e+006 \end{bmatrix} \quad
 C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.2)$$

EXEMPLE 3 : BRAS MANIPULATEUR

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.7692 & 0 & 0.7692 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5.7692 & 0 & -4.4026 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad
 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3.0769 & -1.538 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3.0769 & 8.2051 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \quad
 C = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad (D.3)$$

ANNEXE E

Norme Quadratique L^2

Soit l'espace des fonctions matricielles $m \times N$, $t \in \mathfrak{R}$ et soit le produit intérieur [MAS.88] [WIL.85] [WIL.89] :

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[Y_1^*(t)Y_2(t)] dt \quad (\text{E.1})$$

$$L^2(\mathfrak{R}, C^{m \times N}) = \{Y: \mathfrak{R} \rightarrow C^{m \times N} / \langle Y, Y \rangle < \infty\} \quad (\text{E.2})$$

Dans le domaine fréquentiel L^2 est donnée par :

$$\langle \hat{Y}_1, \hat{Y}_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[\hat{Y}_1^*(j\omega)\hat{Y}_2(j\omega)] d\omega \quad (\text{E.3})$$

$$L^2(j\mathfrak{R}, C^{m \times N}) = \{\hat{Y}: j\mathfrak{R} \rightarrow C^{m \times N} / \langle \hat{Y}, \hat{Y} \rangle < \infty\} \quad (\text{E.4})$$

Or

$$\|Y\|_{L^2} = \sqrt{\langle Y_1, Y_2 \rangle} \quad (\text{E.5})$$

Proposition

Soit (A_e, B_e, C_e) un triplet équilibré, $Y(t)$ et $Y_r(t)$ sont les réponses du système complexe et du modèle réduit, respectivement. V est la solution de l'équation de Lyapunov donnée ci-dessous :

$$\|Y(j\omega)\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{i=1}^N \nu_i \sigma_i^2 \quad (\text{E.6})$$

$$\|\hat{Y}(j\omega) - \hat{Y}_r(j\omega)\|_{L^2} \geq \sqrt{2\pi \sum_{i=1}^N \nu_i \sigma_i^2} - \sqrt{2\pi \sum_{i \in N/T_r} \nu_i \sigma_i^2} \quad (\text{E.7})$$

$$\|\hat{Y}(j\omega) - \hat{Y}_r(j\omega)\|_{L^2} = \sqrt{2\pi \sum_{i=1}^N \nu_i \sigma_i^2} + 2\pi \sum_{i \in N/T_r} \nu_i \sigma_i^2 - 2\text{tr}(CVC_r^T) \quad (\text{E.8})$$

$$A_r V + V A_r^T + B_r B_r^T = 0 \quad (\text{E.9})$$

Preuve :

Par définition nous avons :

$$\|Y\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{At} B B^T e^{A^T t} C^T dt = \text{tr}(CVC^T) \quad (\text{E.10})$$

$$\|Y(j\omega)\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{i=1}^N v_i \sigma_i^2 \text{tr}(\bar{c}_i^T \bar{c}_i) = 2\pi \sum_{i=1}^N v_i \sigma_i^2 \quad (\text{E.11})$$

$$\|Y - Y_r\|_{L^2} \geq \|Y\|_{L^2} - \|Y_r\|_{L^2} \quad (\text{E.12})$$

$\|Y_r\|_{L^2}$ peut être calculée comme l'équation (E.6).

Aussi, l'équilibre du modèle d'ordre réduit nous permet d'écrire l'équation (E.7). Finalement, nous aurons :

$$\|Y - Y_r\|_{L^2}^2 = \langle Y, Y \rangle + \langle Y_r, Y_r \rangle - 2\langle Y_r, Y \rangle \quad (\text{E.13})$$

Or

$\langle Y, Y \rangle$ et $\langle Y_r, Y_r \rangle$ peuvent être calculées à partir de l'équation (E.6), tandis que

$\langle Y_r, Y \rangle$ elle est donnée par :

$$\langle Y_r, Y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} C_r e^{A_r t} B_r B^T e^{A t} C^T dt \quad (\text{E.14})$$

$$= \text{tr}(C_r V C^T) \quad (\text{E.15})$$

Où V est donnée par (E.9).

ANNEXE F

1/ - Dérivée de la fonction coût

Considérons le critère J et les équations de Lyapunov suivantes :

$$FP + PF^T + S = 0 \quad (\text{F.1})$$

$$F^T Q + QF + M = 0 \quad (\text{F.2})$$

Prémultiplions l'équation (F.1) par Q et (F.2) par P, ensuite calculons la trace de ces deux équations nous obtenons :

$$J = \text{tr}(PM) \quad (\text{F.3})$$

$$J = \text{tr}(QS) \quad (\text{F.4})$$

La dérivée de l'équation (F.3) par rapport à un paramètre β quelconque, pouvant apparaître dans F, S ou M donne :

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = \text{tr} \left[\frac{\partial P}{\partial \beta} M \right] + \text{tr} \left[P \frac{\partial M}{\partial \beta} \right] \quad (\text{F.5})$$

De l'équation (F.2), on tire :

$$M = -(F^T Q + QF) \quad (\text{F.6})$$

Substituons (F.6) dans l'équation (F.5) nous obtenons :

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = -2 \text{tr} \left[\frac{\partial P}{\partial \beta} QF \right] + \text{tr} \left[P \frac{\partial M}{\partial \beta} \right] \quad (\text{F.7})$$

De la différentiation de l'équation (F.1), on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} P + F \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{\partial P}{\partial \beta} F^T + P \frac{\partial F^T}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{F.8})$$

Postmultiplions l'équation (F.8) par P et calculons la trace :

$$-2 \text{tr} \left[\frac{\partial P}{\partial \beta} QF \right] = 2 \text{tr} \left[\frac{\partial F}{\partial \beta} PQ \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial S}{\partial \beta} Q \right] \quad (\text{F.9})$$

La substitution de l'équation (F.9) dans l'équation (F.7) donne :

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = 2 \text{tr} \left[\frac{\partial F}{\partial \beta} PQ \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial S}{\partial \beta} \right] + \text{tr} \left[\frac{\partial M}{\partial \beta} P \right] \quad (\text{F.10})$$

La dérivée seconde de (F.10) donnera :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} = \text{tr} \left[P \frac{\partial^2 M}{\partial \beta^2} \right] + \text{tr} \left[Q \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} \right] - 4 \text{tr} \left[\frac{\partial P}{\partial \beta} \frac{\partial Q}{\partial \beta} F \right] \quad (\text{F.11})$$

2/ - Minisation de J par rapport à A_r

La dérivée de l'équation (F.10) par rapport à a_r donne :

$$\frac{\partial J}{\partial a_r} = 2 \operatorname{tr} \left[\frac{\partial F}{\partial a_r} PQ \right] + \operatorname{tr} \left[\frac{\partial S}{\partial a_r} \right] + \operatorname{tr} \left[\frac{\partial M}{\partial a_r} P \right]$$

puisque

$$\operatorname{tr} \left[\frac{\partial S}{\partial a_r} \right] = \operatorname{tr} \left[\frac{\partial M}{\partial a_r} P \right] = 0$$

alors

$$\frac{\partial J}{\partial a_r} = 2 \operatorname{tr} \left[\frac{\partial F}{\partial a_r} PQ \right] \quad (\text{F.12})$$

où a_r est une composante de A_r .

La minimisation de J par rapport à a_r devient :

$$\frac{\partial J}{\partial a_r} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \operatorname{tr} \left[\frac{\partial F}{\partial a_r} PQ \right] = 0 \quad (\text{F.13})$$

$$\operatorname{tr} \left[\frac{\partial F}{\partial a_r} PQ \right] = \operatorname{tr} \left[\frac{\partial}{\partial a_r} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} + P_{12}Q_{12}^T & P_{11}Q_{12} + P_{12}Q_{22} \\ P_{12}^T Q_{11} + P_{22}Q_{12}^T & P_{12}^T Q_{12} + P_{22}Q_{22} \end{bmatrix} \right]$$

$$\operatorname{tr} \left[\frac{\partial F}{\partial a_r} PQ \right] = \operatorname{tr} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial A_r}{\partial a_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} + P_{12}Q_{12}^T & P_{11}Q_{12} + P_{12}Q_{22} \\ P_{12}^T Q_{11} + P_{22}Q_{12}^T & P_{12}^T Q_{12} + P_{22}Q_{22} \end{bmatrix} \right]$$

$$\operatorname{tr} \left[\frac{\partial F}{\partial a_r} PQ \right] = \operatorname{tr} \left[\begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial A_r}{\partial a_r} [P_{12}^T Q_{11} + P_{22}Q_{12}^T] & \frac{\partial A_r}{\partial a_r} [P_{12}^T Q_{12} + P_{22}Q_{22}] \end{matrix} \right]$$

Il en découle :

$$\frac{\partial J}{\partial a_r} = 2 \frac{\partial A_r}{\partial a_r} [P_{12}^T Q_{12} + P_{22}Q_{22}] \quad (\text{F.14})$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_r} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{12}^T Q_{12} + P_{22}Q_{22} = 0 \quad (\text{F.15})$$

Soit :

$$\Pi^T = (P_{12}^T Q_{12} + P_{22}Q_{22})$$

Ainsi :

$$\frac{\partial J}{\partial a_4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi^T = 0 \quad (\text{F.16})$$

Dans ces conditions, le minimum est obtenu lorsque $\Pi^T = 0$.

3/ - Calcul de A_r optimale

Sachant que :

$$FP + PF^T + S = 0$$

et,

$$B_r = -Q_{22}^{-1}Q_{12}^T B \quad (\text{F.17})$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & A_r^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BB^T & BB_r^T \\ B_r^T B & B_r B_r^T \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{F.18})$$

De l'équation (F.18), on tire :

$$AP_{12} + P_{12}A_r^T + BB_r^T = 0 \quad (\text{F.19.a})$$

$$A_r P_{12} + P_{22}A_r^T + B_r B_r^T = 0 \quad (\text{F.19.b})$$

La substitution de l'équation (F.17) dans (F.19) donne :

$$AP_{12} + P_{12}A_r^T - BB^T Q_{12} Q_{22}^{-T} = 0 \quad (\text{F.20.a})$$

$$A_r P_{12} + P_{22}A_r^T + Q_{22}^{-1}Q_{12}^T BB^T Q_{12} Q_{22}^{-T} = 0 \quad (\text{F.20.b})$$

Prémultiplions l'équation (F.20.a) par $Q_{22}^{-1}Q_{12}^T$. Ensuite, son addition à l'équation (F.20.b) donne :

$$A_r P_{22} + P_{22}A_r^T + Q_{22}^{-1}Q_{12}^T A P_{12} + Q_{22}^{-1}Q_{12}^T P_{12}A_r^T = 0 \quad (\text{F.22})$$

Postmultipliant (F.22) par P_{22}^{-1} , on obtient :

$$A_r + P_{22}A_r^T P_{22}^{-1} + Q_{22}^{-1}Q_{12}^T A P_{12} P_{22}^{-1} + Q_{22}^{-1}Q_{12}^T P_{12}A_r^T P_{22}^{-1} = 0 \quad (\text{F.23})$$

Sachant que :

$$\Pi = (Q_{12}^T P_{12} + Q_{22}^T P_{22}^T) \quad (\text{F.24})$$

Il en découle :

$$A_r = -Q_{22}^{-1}Q_{12}^T A P_{12} P_{22}^{-1} - Q_{22}^{-1}\Pi A_r^T P_{22}^{-1} \quad (\text{F.25})$$

Cette expression correspond à la valeur de A_r optimale.

Si on considère que $\Pi = 0$, alors, l'optimum sera :

$$A_r = -Q_{22}^{-1}Q_{12}^T A P_{12} P_{22}^{-1} \quad (\text{F.26})$$