

M0014/96A

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de l'Hydraulique

BIBLIOTHÈQUE — المكتبة

Ecole Nationale Polytechnique

Thèse

Présentée par

BOUKHAROUBA Khadija. M.

Ingénieur d'Etat en Hydraulique

Pour obtenir le titre de

MAGISTER

en HYDRAULIQUE

thème

**MODELISATION STOCHASTIQUE DES APPORTS ANNUELS .
SIMULATION PAR LES MODELES ARMA ET PREVISION PAR LE
FILTRE DE KALMAN. APPLICATION AU BARRAGE
DE BENI-BAHDEL**

Soutenue en septembre 1996, devant le jury composé de:

A.KETTAB	Maitre de conférences	E.N.P	Président
B.DERRAS	Maitre de conférences	E.N.P	Examineur
M.EL BAHI	Maitre de conférences	U.S.T.H.B	Examineur
M.BERKANI	Chargé de cours	E.N.P	Examineur
B.MOKRANE	Maitre assistant	A.N.B	Rapporteur
M.CHERRARED	Chargé de cours	E.N.P	Invité

Ecole Nationale Polytechnique
10, Avenue Pasteur El Harrach-Alger

Moody/96A



ملخص

هذه الدراسة تهدف في المرحلة الأولى الى ايجاد نموذج محاكاة لتمثيل السلسلة الزمنية لكميات المياه الجارية، اخذين بعين الاعتبار المعطيات السنوية لسد بني بهدل، فرضاً أنهم ظاهرة ستوكاستيكية خطية، و ذلك باستخدام طريقة تحليل بوكس-جنكينز مع فرضية الاستقرار الزمني. في المرحلة الثانية، نستعمل مرشح كالمان لايجاد نموذج للتنبؤ على المدى القصير. هذا الأخير يعتمد على تشكيلة تستند على تمثيل المعامل في معادلة الحالة، و النموذج التحريكي في معادلة القياس. هذه التشكيلة تسمح للمعامل بالتغير في الزمن مما يمكننا، شيناً ما من الأخذ بعين الاعتبار الرد الغير خطي للنظام الهيدرولوجي المدروس.

Abstract

The aim of this study is the simulation and the prediction of of the annual flows into the reservoir . of Béni-Bahdel. In the simulation part, Box-Jenkins procedure is employed with the stationnarity hypothesis. The estimated model is then utilised in the synthetic generation of a hundred of series, in order to verify the preservation of the most important statistical characteristics. In the prediction part, the Kalman filtering technique is employed, in this way, an adaptative unbiased recursive prediction algorithm, based upon the state space description of hydrologic systems is discussed. We consider the case of linear and discrete systems with white Gaussian noises. Th algorithm allows, for short terme, parameters changes witch is a manner to take into account the non linear response of the system.

Résumé

Cette étude de modélisation a deux objectifs: la simulation et la prévision des apports annuels du reservoir de Béni-Bahdel. Pour la simulation, la méthodologie utilisée est celle de Box-Jenkins dans l'hypothèse de stationnarité. Le modèle résultant est employé dans la génération sythétique d'une centaine de séries et ce, dans le but de vérifier la préservation des caractéristiques statistiques les plus importantes. Pour la prévision, nous avons utilisé le filtre de kalman. A cet effet, un modèle adaptatif de prévision réursive non biaisée, basée sur la description dans l'espace des états est discuté. Nous considérons le cas des systèmes linéaires discrets, avec des bruits blancs Gaussiens. Ce modèle permet des variations dans le temps des paramètres, ce qui est une façon de prendre en compte la réponse non linéaire du système hydrologique concerné.

Remerciements

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
École Nationale Polytechnique

En premier lieu, je tiens à remercier notre groupe P.B.A . Si en définitive ce travail est au point c'est grâce à l'aide qu'il m'a prodiguée et le soutien qu'il m'a apporté ces années durant. Je n'ose cependant, pas passer sans faire le témoignage de ma reconnaissance à Nour eddine et aux deux Ali pour leur soutien au cours de 1993.

Un hommage tout particulier est rendu à Hayet dont les services et les conseils m'ont guidée tout au long de la rédaction. Sa présence à mes côtés aux moments pénibles de 95 surtout, lui a fait subir une grande partie de mes tensions. Qu'elle trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

Mr M.Derras du département d'électronique est la seule personne qui m'a encouragée d'aborder le problème du filtrage. Les discussions riches et pertinentes qu'il m'a offert l'honneur avant le plaisir d'entretenir avec lui, m'ont guidée de manière irremplaçable. Je m'incline respectueusement devant sa modestie et son esprit scientifique.

Mr Mahdi et Mr Parkinson de Montréal m'ont aidée par la documentation qu'il m'ont fournie. Je les remercie sans pour autant oublier Mr Benfares de l'A.N.B. pour la recherche bibliographique.

Je tiens également à exprimer mes remerciements les plus vifs à toute la famille du centre de calcul pour l'ambiance qui rendait agréable, malgré tout, les journées de travail sans arrêt, et une salutation à la japonaise à Hacène « chef » pour ses multiples secours informatiques.

Je ne saurais oublier en fin, de remercier mon promoteur Mr B. Mokrane ainsi que tous les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de présider, d'examiner ou d'assister en qualité d'invités ce modeste travail.

Sommaire

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

	Page
Introduction générale.....	1

Chapitre 1

Analyse de la série temporelle des apports annuels.

1.1. Introduction.....	4
1.2. Définitions et hypothèses.....	5
1.2.1. Définition de la stationnarité.....	7
1.2.2. Définition L'ergodicité.....	8
1.3. Objectifs de l'analyse de la série historique	8
1.4. Présentation et critique des données.....	8
1.4.1. Etude de l'homogénéité.....	9
- Test de Wicoxon.....	10
1.4.2. La tendance (Test de Kendal).....	10
1.5. Traitement statistique de la série historique.....	11
1.6. Composantes principales et propriétés d'une série historique.....	12
- La composante déterministique (Cd).....	13
- La composante stochastique (Cs).....	13
1.6.1. La périodicité.....	13
1.6.2. La tendance.....	14
1.6.3. La composante stochastique.....	15
A- La persistance.....	16
B- L'autocorrélation.....	17
1.7. Application aux apports annuels.....	18
1.7.1. L'homogénéité.....	18
1.7.2. La tendance (test de Kendal).....	20
1.8. Traitement statistique de la série	23
1.9. Composantes principales de la série historique.....	26
1.9.1. La composante de périodicité.....	26
1.9.2. La composante de tendance.....	28
1.9.3. La composante stochastique.....	28
A- La persistance.....	28
B- L'autocorrélation.....	30
1.10. Conclusion.....	31

Chapitre 2

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Modélisation et génération stochastique des apports annuels.

2.1. Introduction.....	32
2.2. Les modèles stochastiques linéaires discrets.....	32
a. Le processus bruit blanc.....	33
b. Le processus de moyenne mobile MA (q).....	33
c. Le processus autorégressif AR (p).....	33
2.3. Ajustement des modèles.....	34
2.3.1. L'identification.....	35
a. La fonction d'autocorrélation (acf).....	35
b. La fonction d'autocorrélation partielle (pacf).....	36
2.3.2. L'estimation.....	37
2.3.3. La validation.....	38
a. Tests de l'indépendance de résidus.....	39
- Test du corrélogramme.....	39
- Test du portmanteau.....	39
- Test du périodogramme cumulé normalisé.....	40
b. Test d'homoscédasticité des résidus.....	41
c. Tests de normalité des résidus.....	41
d. Test de parcimonie.....	42
e. Test de ressemblance des caractéristiques statistiques.....	42
2.4. Application pratique.....	43
2.4.1. l'identification.....	43
2.4.2. L'estimation des paramètres.....	45
2.4.3. Validation.....	46
a. Tests de l'indépendance des résidus.....	47
- Test du corrélogramme.....	47
- Test du portmanteau.....	48
- Test du périodogramme cumulé normalisé.....	48
- Test d'indépendance des résidus vis-à-vis des z_t	48
b. Tests de normalité des résidus.....	53
- Ajustement graphique.....	53
- Tests des coefficients C_s et C_K	53
c. Test d'homoscédasticité des résidus.....	53
d. Test de parcimonie.....	55
e. Test de ressemblance des caractéristiques statistiques.....	55
2.5. Conclusion.....	69

Chapitre 3

Prévision des apports annuels en temps réel.

3.1. Introduction.....	70
------------------------	----

3.1.1. Mode de simulation.....	70
3.1.2. Mode adaptatif.....	71
3.2. Le filtre de Kalman, intérêt et applications.....	72
3.2.1. Définition du problème de filtrage linéaire.....	72
3.2.2. Intérêt et applications.....	72
3.3. Modèle mathématique et pose de la problématique.....	73
3.4. Développement de l'algorithme du filtre de Kalman.....	75
3.5. Considérations à prendre en compte.....	78
3.5.1. Les conditions initiales.....	78
3.5.2. Les hypothèses d'application.....	79
3.6. Etapes d'application du filtre de Kalman.....	79
3.7. Tests de performance du filtre.....	80
3.7.1. Test des innovations du filtre.....	80
3.7.2. Stabilité du filtre.....	80
3.8. Application aux apports annuels de Béni-Bahdel.....	81
3.8.1. Formulation du modèle dans l'espace des états.....	82
3.8.2. Les conditions initiales.....	82
3.8.3. Résultats et interprétations.....	83
a- Prévisions en temps réel une année à l'avance de 1926- 85.....	83
b- Prévisions en temps réel une année à l'avance de 1986-87 à 93.....	88
c- Prévisions à moyen terme une année à l'avance de 1985-93.....	90
3.8.4. Analyse des innovations du filtre	91
a- La normalité des innovations.....	93
b- L'autocorrélation.....	93
c- Test du Portmanteau.....	94
3.9. Conclusion	95
Conclusions et recommandations futures.....	97
Références bibliographiques.....	101
Bibliographie.....	104
Annexes.....	106

Introduction.

Les séquences hydrologiques sont des phénomènes très complexes qui sont caractérisés par leur variabilité et leur comportement stochastique. Ces phénomènes dépendent du temps, de la zone climatique et d'un certain nombre de facteurs incertains.

Les ensembles de mesures qu'on peut effectuer sur ces phénomènes -pour des raisons pratiques- et qu'on appelle communément séries chronologiques, sont supposés ergodiques. Et forment la base pour tout calcul hydrologique.

L'investigation de telles données, dans l'analyse et la compréhension du processus étudié, est d'un intérêt indéniable notamment en hydrologie. Les différentes études spécialisées, rencontrées dans la littérature et qui ont été faites dans ce sens, soulignent cet intérêt. Leur effort est principalement concentré sur les caractéristiques statistiques de telles données. L'analyse des séries chronologiques correspondantes et l'investigation de ces dernières dans la compréhension du processus étudié, afin de voir quel est le type de modèles qui est le plus apte à les représenter.

De tels modèles sont très importants dans l'élaboration de plans opérationnels d'exploitation et gestion des systèmes de ressources en eau. En effet, l'extrapolation des données qu'ils offrent est essentiellement importante dans la détermination des plans d'utilisation optimaux de la ressource hydrique disponible. Ceci aide énormément les gestionnaires à prendre des décisions économiquement moins coûteuses.

L'avantage majeur de la modélisation est reconnu par les hydrologues qui travaillent dans la conception ou dans la planification. Pour les premiers, les données générées à partir du modèle forment un spectre plus large de scénarios équiprobables. Ceci leur offrent une multitude de choix qui écarte toute situation extrême et la décision qu'ils prennent n'est ni sous-estimée ni surestimée. Pour les seconds, les séries générées leur permettent une multitude d'alternatives pour comparer ou optimiser économiquement de manière meilleure

que celle offerte par la série historique, par conséquent la diversité des résultats leur permettent de choisir la solution optimale.

Il est à conclure donc, que nul ne peut espérer une meilleure performance d'un système basée sur l'unique séquence qu'est la série historique, et que plus on a de séquences, meilleure est notre estimation de la performance recherchée.

Le travail que nous avons effectué rentre dans ce cadre. C'est une contribution modeste à la modélisation des apports annuels de Béni-Bahdel. Il possède deux objectifs essentiels: la génération synthétique de séries homologues et la prévision à court terme.

Nous procédons dans un premier temps, à l'analyse de la série chronologique des apports annuels du Barrage de Béni-Bahdel. Celui-ci est destiné à l'A.E.P de la ville d'Oran et l'irrigation de la plaine de Maghnia, dans l'ouest du pays. Il connaît des insuffisances connues à l'échelle nationale qui reviennent plutôt à une gestion peu rationnelle qu'à un mauvais dimensionnement [54]. Les propriétés de cette série ainsi que ses caractéristiques sont investies à la compréhension du processus stochastique générateur et à la détermination du type de modèles pouvant la représenter fidèlement.

Dans un deuxième temps, notre intérêt est focalisé sur les modèles Box-Jenkins, dans l'hypothèse de stationnarité. Ces derniers sont connus par leur qualité de représentation des processus stochastiques linéaires tels que les apports liquides.

A cet effet, nous ajustons les modèles ARMA(p,q) à la série historique des apports annuels et nous choisissons parmi les modèles possibles celui qui la représente au mieux. La génération synthétique d'une centaine de séries homologues est effectuée. Leur analyses ainsi que les tests de validité de ce type de modèle nous indiquent si les paramètres statistiques de la série historique sont préservés, à savoir la moyenne, la variance, les valeurs extrêmes, l'autocorrélation ainsi que la persistance qui est une caractéristique très importante dans l'étude des séries chronologiques.

Dans un troisième temps, nous procédons à une prévision à court terme en utilisant le filtre de Kalman linéaire dans le cas discret. Ce dernier jouit d'une propriété importante qui est l'optimisation séquentielle, et son avantage majeur est la prise en considération des

variations dans le temps des paramètres du modèle. Ceci est d'une importance indéniable en hydrologie, où l'on a souvent affaire à des modèles non stationnaires. Dans cette partie, les résultats déjà obtenus sont investis. Le modèle précédemment identifié supposé non parfaitement calé est introduit dans la formulation du filtre. Cette dernière modélise les paramètres du modèle dans l'équation d'état, et la dynamique du processus dans l'équation de mesure, chose qui permet aux paramètres de varier dans le temps. C'est une façon de prendre en considération la réponse non linéaire du système. Les prévisions obtenues à court terme sont étudiées.

CHAPITRE 1

**ANALYSE
DE LA SERIE TEMPORELLE
DES APPORTS**

1.1. Introduction:

L'analyse des séries temporelles prend dans les années récentes, une grande importance dans l'engineering en hydrologie. Leur application à ce domaine a été bien établie par plusieurs auteurs entre autres Parzen [35], Hannan[17], Unny [46] et Box et Jenkins [5]. Généralement dans l'analyse des séries temporelles, on distingue trois sortes d'approches [8] selon l'objectif fixé :

- l'approche de l'autocorrélation [24], pour voir la relation entre deux valeurs (x_t) et (x_{t-k}) quelconques de la série.
- L'approche du spectre [20], pour voir à quel point la valeur (x_t) dépend des valeurs antécédentes à des temps $(t-T)$.
- L'approche par ajustement d'un modèle [5].

Cette dernière approche a été présentée par Yevjevich en 1972 [53], Rao Kashyap en 1974 [37] et avant eux Matalas et Wallis en 1962; ils ont suggéré des équations différentielles, ceci en plus des différents types de modèles déjà existant à l'époque, tels que les modèles Markoviens de moyenne mobile (MA: moving average) ou les modèles autorégressifs (AR: autoregressive). Cependant, l'extension de l'application de cette approche n'a connu son épanouissement qu'après les années soixante dix, avec la publication des travaux de recherche de Box et Jenkins, en particulier leur ouvrage sur l'analyse des séries temporelles '*Time series analysis forecasting and control*' [5], où ils exposent une méthodologie complète et détaillée, ceci en regroupant ce qui existait déjà, le raffinant et le présentant sous la forme finale qu'on connaît de nos jours par les processus « Box-Jenkins ou ARIMA » [38], [10]. Cette approche mène à un modèle paramétrique simple pour des séries stationnaires ou non, tels que les apports des rivières.

Dans l'analyse de notre série d'apports c'est cette dernière approche qui a été adoptée pour la simple raison qu'elle possède l'avantage de pouvoir nous être utile dans la deuxième

partie de ce travail, où l'on va utiliser le modèle qui en résulte, pour la prévision du processus étudié.

1.2. Définitions et hypothèses:

Les phénomènes hydrologiques sont des processus qui évoluent dans le temps et dans l'espace tels qu'ils soient en partie prédictibles (déterministiques) et en partie aléatoires. Ils remplissent le vide entre les processus aléatoires et les processus déterministes, de ce fait, ils sont appelés « processus stochastiques ».

Il existe des cas où la variabilité aléatoire l'emporte sur la variabilité déterministique, c'est pourquoi l'hydrologie est justifiée dans le traitement de tels processus comme étant purement aléatoires.

Un processus stochastique n'est en fait que l'abstraction mathématique d'un processus empirique dont le développement est gouverné par des lois probabilistiques. Dans le langage courant, c'est le synonyme d'aléatoire avec une prise en considération de l'interdépendance des variables aléatoires.

Généralement, une variable $x(t)$ pouvant être quantifiée, est dite aléatoire quand sa valeur dans le temps ou dans l'espace est incertaine. La famille de toutes les variables aléatoires $x(t)$ telle que:

$$\{ x(t) \mid t \in T \} \quad \text{où } T \text{ est l'espace du temps}$$

décrit le comportement du processus stochastique étudié au temps t , et la valeur qu'elle prend et qu'on peut mesurer est appelée *observation*. L'ensemble de toutes ces observations arrangées chronologiquement à des temps égaux, forme ce que l'on appelle *une série chronologique* ou *temporelle* [14], (Fig.(1.1)).

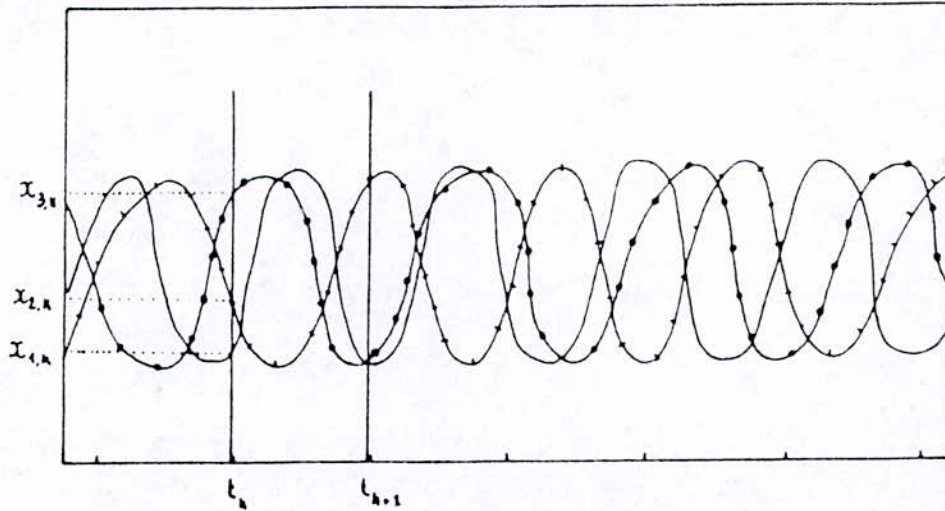


Fig.(1.1)

Représentation d'une série chronologique.

Une série temporelle mesure donc la variabilité d'un processus continu, mesuré à des intervalles de temps discrets qui varient du milli-seconde à une année et qu'on appelle *le pas*. Elle peut être considérée comme un échantillon d'une population générée par un mécanisme stochastique qui évolue selon certaines lois probabilistes tout à fait inconnues.

En effet, si ces lois étaient connues, on les aurait prises comme modèles pour les séries temporelles, mais puisqu'elles ne le sont pas, cette procédure est donc impossible. Ceci pour la simple raison qu'une série temporelle, qu'on appellera dorénavant *série historique*, représente seulement une réalisation unique et singulière du mécanisme générateur, de ce fait toute tentative de chercher si oui ou non une série historique forme une partie représentative du processus et si ce dernier est ergodique, est en vain car impossible. C'est pour ces raisons que lors de la modélisation, on va être amené à faire les hypothèses suivantes:

- 1°/ On suppose que le processus est stochastique.
- 2°/ On suppose que le processus est stationnaire et ergodique.
- 3°/ Que les paramètres de la série historique sont les statistiques du processus stochastique.

4°/ Que le processus défini à partir des données historiques est le mécanisme générateur lui même.

1.2.1. Définition de la stationnarité:

C'est l'une des caractéristiques les plus importantes d'un processus stochastique. On dit qu'un processus stochastique x_t est stationnaire stricte, si pour tout entier k , les lois jointes associées à n observations x_1, x_2, \dots, x_n , enregistrées à n'importe quel ensemble de temps t_1, t_2, \dots, t_n , sont les mêmes que celles associées à n observations $x_{1+k}, x_{2+k}, \dots, x_{n+k}$, enregistrées aux temps $t_{1+k}, t_{2+k}, \dots, t_{n+k}$. Ce qui veut dire que les propriétés statistiques de x_t ne sont pas affectées par translation dans le temps.

On note ici, l'intérêt pratique particulier du cas gaussien. Dans ce cas, x_t est caractérisé uniquement par les deux premiers moments, puisqu'il ya équivalence entre la stationnarité stricte (de tous les moments d'ordre k , $k \geq 1$) et la stationnarité d'ordre 2 (des deux premiers moments uniquement). Cette dernière est facile à vérifier d'où son intérêt pratique.

1.2.2. Définition de l'ergodicité :

Le problème central dans la théorie des processus stochastiques est l'estimation de leur diverses statistiques. l'ergodicité est un moyen qui mène à ce but.

On appelle ergodique, un processus stochastique stationnaire x_t de R^Z dont les lois jointes peuvent arbitrairement être déterminées, avec précision, à partir d'un échantillon x_1, \dots, x_n suffisamment long []. D'une manière formelle, x_t est dit ergodique si pour toute suite x de R^Z et toute fonction g intégrable sur la loi des trajectoires de x , la limite suivante existe.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) [g(x) + gov(x) + \dots + gov^n(x)] = \int_{R^Z} g \, dq.$$

avec: $v: R^Z \rightarrow R^Z$, fonction de translation dans le temps définie par: $v^i(x_n) = x_{n+i}$.

q : la probabilité associée à x sur R^Z (loi de la trajectoire de x).

Exemples:

Si l'on veut déterminer le premier moment de x_t , en prenant $g = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, dans l'hypothèse que l'espérance mathématique de $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ existe, alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) [f(x_1, \dots, x_k) + f(x_2, \dots, x_{k+1}) + \dots + f(x_{n+1}, \dots, x_{n+k})] = E f(x_1, \dots, x_k).$$

le premier moment est déterminé. De même si l'on veut déterminer la loi jointe de x_1, \dots, x_k il suffit de prendre $f = I_A$ (indicatrice de A, A: partie mesurable de R^Z), dans ce cas on aura:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) [I_A(x_1, \dots, x_k) + I_A(x_2, \dots, x_{k+1}) + \dots + I_A(x_{n+1}, \dots, x_{n+k})] = P(x_1, \dots, x_k).$$

la loi jointe de x_1, \dots, x_k est ainsi complètement déterminée, quand $n \rightarrow \infty$ par x_1, \dots, x_n .

1.3. Objectifs de l'analyse de la série historique :

Avant toute tentative de modélisation, l'analyse de la série historique est primordiale car en plus du fait qu'elle forme l'entrée du modèle (input) qui doit être fiable, le résultat de cette analyse peut nous orienter vers le ou les types de modèles pouvant éventuellement reproduire une série semblable à la série considérée.

L'objectif principal, dans l'étude d'une série historique est la connaissance de sa structure de dépendance interne ainsi que ses propriétés, qui sont très significatives dans le planning, la conception et l'exploitation des ressources en eau. En bref, la compréhension du mécanisme qui génère toutes ces données, afin de pouvoir produire d'autres réalisations semblables ayant les mêmes caractéristiques statistiques (simulation), ou prévoir des valeurs qui pourront être observées (prédiction). Pour cela, il est impératif d'identifier et d'analyser les différentes composantes d'une série historique.

1.4. Présentation et Critique des Données:

La série historique qui fait l'objet de notre étude, est celle des apports annuels de l'oued Tafna, dans le nord-ouest du pays, sur lequel est construit le barrage de Beni-Bahdel qui assure l'irrigation de la plaine de Maghnia et l'alimentation en eau potable de la ville d'Oran.

Cette série est d'une longueur acceptable, elle s'étend sur la période allant de 1925-26 jusqu'à 1992-93, formant ainsi un échantillon de taille $N = 68$ ans, (Fig.(1.2)). Pour s'assurer de la qualité de ces données on étudie d'abord leur homogénéité ensuite leur tendance.

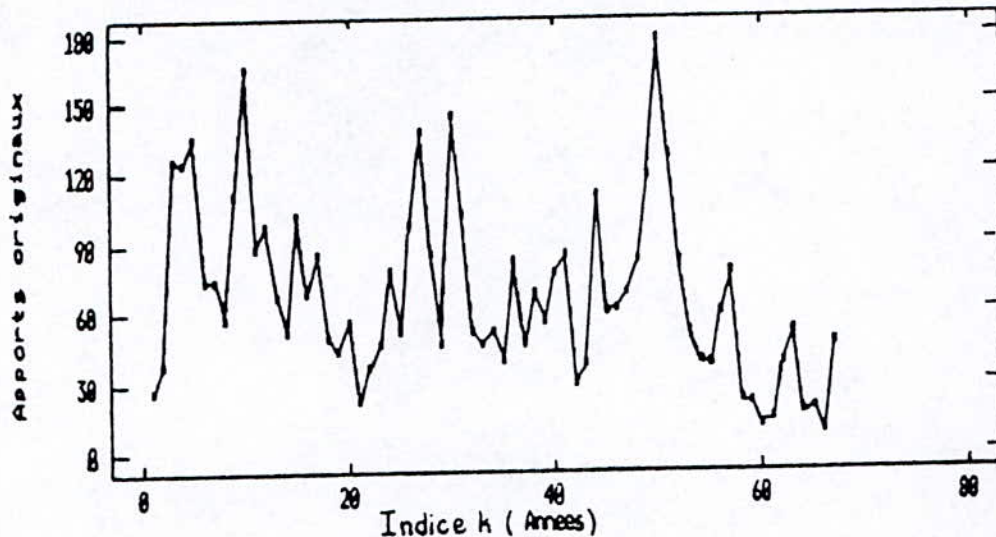


Fig.(1.2)

Série originale x_t de 1926-93

1.4.1. Etude de l'homogénéité:

C'est important, dans n'importe quelle étude hydrologique, de savoir si oui ou non une série de données est homogène, (i.e.) appartient à la même population et suit la même distribution statistique. La non homogénéité peut être produite par des causes souvent artificielles ou accidentelles .

Exemple: Après la construction d'un barrage, les apports de la rivière en question marquent un saut à son aval. C'est le résultat de la construction du barrage qui est une cause artificielle. Aussi, après un incendie ou un séisme, l'environnement change ce qui influe sur plusieurs paramètres climatologiques, ceci est une cause accidentelle.

La non homogénéité, dans le temps, prend la forme d'une tendance dans les données aussi bien que celle d'une variation brusque ou graduée dans la nature stochastique des données .

Les moyens de détection de cette non homogénéité ont été discutés par plusieurs auteurs Chow [9] et Hardison en 1960, les méthodes les plus connues sont: la méthode des doubles masses et celle du cumul des résidus.

Test de Wilcoxon:

Ce test est appliqué à la série pour tester son homogénéité. Les étapes suivantes sont à suivre :

- 1°/ Ecrire les valeurs de la série historique avec leur ordre chronologique. (col 1).
- 2°/ Tracer un trait, dans la (col 1), tel qu'il divise la série x_t en deux sous séries x_1 , x_2 à condition que la taille de x_1 (N_1) soit inférieure à celle de x_2 (N_2).
- 3°/ Ranger les valeurs de la série x_t de (col 1) par ordre croissant. (col 2).
- 4°/ Attribuer aux valeurs de (col 2) des rangs ($i=1, 2, \dots, N$). (Col 3).
- 5°/ Lire la valeur (i) de (col 2), mentionner x_1 ou x_2 , selon qu'elle appartient à x_1 ou x_2 (col4)
- 6°/ Sachant N_1 , N_2 calculer :

- $W_{x_1} = \sum \text{rang } i |_{x_1}$. avec $\text{rang } i |_{x_1}$: rang "i" donné par (col 3) correspondant à la mention " x_1 " dans (col 4).
- $W_{\min} = [(N_1 + N_2 + 1)N_1 - 1] / 2 - 1.96 [(N_1 N_2 (N_1 + N_2 + 1))^{1/2} / 12$.
- $W_{\max} = (N_1 + N_2 - 1)N_1 - W_{\min}$.

7°/ la série x_t testée , est homogène si:

$$\bullet W_{\min} < W_{x_1} < W_{\max} .$$

1.4.2. La tendance (Test de Kendal):

Dans ce paragraphe, on va se limiter seulement au test de la tendance. Le détail relevant de la tendance sera donné au paragraphe (§1.6.2).

Pour tester la tendance d'une série, on lui applique le test de la statistique " τ " de Kendal qui se fait comme suit:

1°/ Relever les valeurs de la série telles qu'elles ont été enregistrées (ordre chronologique). (lin 1).

2°/ Calculer pour chaque valeur " i " de (lin 1), le nombre de valeurs " p_i " la succédant et qui lui sont supérieures. (lin 2).

3°/ Calculer la somme des " p_i " de (lin 2) et qu'elle soit appelée:

$$P = \sum p_i \quad \text{avec } i:1,2, \dots, N.$$

N : étant la taille de la série

et

$$\tau = 4P / N (N-1) - 1.$$

Ce test est basé sur la statistique τ qui est un processus aléatoire de moyenne nulle et de variance:

$$\text{Var}(\tau) = 2(2N + 5) / 9N(N-1).$$

$$\tau' = \tau / (\text{Var}(\tau))^{1/2}$$

qui converge rapidement vers une distribution Normale quand N est élevé.

4°/ Si $-1.96 < \tau' < 1.96$ l'hypothèse nulle H_0 de non tendance est acceptée à 5% de risque.

1.5. Traitement statistique de la série historique:

Une fois la série des apports testée et corrigée, dans le présent paragraphe nous allons avoir recours à l'outil statistique, ceci dans le but de décrire nos données afin d'en extraire l'essentiel de l'information qu'elles apportent .

Les paramètres statistiques, qu'on va calculer, sont basés sur des concepts mathématiques qui décrivent la variation aléatoire d'un groupe de données (observations) d'un processus, en focalisant l'attention sur ces observations elles mêmes, plutôt que sur le processus physique qui les produit, comme il a déjà été mentionné.

On va donc déterminer les caractéristiques statistiques de notre série d'apports annuels. Ceci est fait en établissant la distribution des fréquences, ainsi que les paramètres associés afin de mieux spécifier ces distributions.

Parmi ces paramètres, les plus courants sont la moyenne qui mesure la tendance centrale, ou le niveau autour duquel oscillent les observations, la variance qui mesure la variabilité du processus (phénomène) autour de ce niveau, l'assymétrie de la distribution qui mesure le défaut de symétrie dans la fonction de distribution et qui est utilisée comme mesure de la normalité pour des séries suffisamment longues (N est en moyenne de 50 ans) [29].

Bien entendu, quoiqu'il semble naturel que l'on puisse calculer ces paramètres statistiques de forme, parmi tant d'autres, on ne peut ignorer les limitations inhérentes aux estimations de ces statistiques.

Ce travail étant achevé, une information primordiale dans l'analyse des séries historiques nous manque toujours, c'est la connaissance de la structure de dépendance interne de la série, ainsi que ses différentes composantes et c'est ce qui va faire l'objet des paragraphes suivants.

1.6. Composantes principales et propriétés d'une série historique:

Généralement, une série historique x_t est exprimée par la relation qui s'écrit de la façon suivante :

$$x_t = T_t + P_t + S_t \quad (1.1)$$

- T_t : Composante de tendance dans le temps.
- P_t : Composante périodique dans le temps.
- S_t : Composante aléatoire dans le temps.
- t : Indice du temps.

Elle est divisée en deux composantes principales :

-La composante déterministique(Cd):

Elle est caractérisée par des comportements soit de type périodique, (i.e.) répétitifs sur des périodes de temps fixes (p) tel que:

$$x_{t+p} = x_t \quad \forall t = 1, 2, \dots$$

soit de type non périodique, tel que la tendance qui est un mouvement de lissage parcourant la longueur des séries.

Cette composante est donc la somme de la composante de tendance et la composante périodique: $C_d = T_t + P_t$.

-La composante stochastique (Cs):

Elle est caractérisée par des mouvements irréguliers dans la série, marquant une interdépendance dans le temps des valeurs observées, plus des effets aléatoires inconnus .

Les paragraphes suivants nous donnent plus de détails sur chacune de ces composantes.

1.6.1. La Périodicité :

La périodicité est un comportement cyclique que connaît une série historique. Le mouvement de cette dernière est, dans ce cas, régi par une relation harmonique - au sens de Fourier - et peut, par conséquent, être représentée par une somme infinie d'harmonies avec des fréquences, un déphasage et une amplitude calculés à partir des données observées.

Cette périodicité est dictée par les phénomènes cycliques de la nature et peut être indiquée soit par le corrélogramme, soit par le périodogramme [21].

Le périodogramme ou spectre - par analogie optique - d'une série historique peut être considéré comme une combinaison de fréquences d'occurrence de base de ses valeurs. C'est une décomposition de la variance de la série selon les fréquences. Il est défini, en utilisant la méthode d'analyse harmonique, par le graphe de l'amplitude en fonction de la fréquence du mouvement harmonique:

$$(\alpha_i^2 - \beta_i^2) / 2 = f(i) \quad (1.2)$$

c'est le spectre discret estimé de la série historique discrète, avec:

* i : fréquence 1, 2, ..., $p/2$.

* p : période principale, elle est égale à la taille de la série.

* $\alpha_i^2 = 2/p \sum_{\tau} m_{\tau} \sin(2\pi i\tau/p)$, $\tau : 1, 2, \dots, p$.

$i : 1, 2, \dots, (p/2)-1$.

$$\alpha_{p/2}^2 = 0$$

$i = p/2$.

* $\beta_i^2 = 2/p \sum_{\tau} m_{\tau} \cos(2\pi i\tau/p)$

$i : 1, 2, \dots, (p/2)-1$.

$$\beta_{p/2}^2 = 1/p \sum_{\tau} m_{\tau} (-1)^{\tau}$$

* $m_{\tau} = 1/n \sum_i x_{\tau+p(i)}$: est la moyenne périodique estimée pour les données observées.

Ce graphe nous donne des points qui forment des lignes verticales représentant les valeurs $(\alpha_i^2 - \beta_i^2) / 2$ pour chaque fréquence i . Si on joint ces points par des lignes droites, pour une meilleure visualisation, on aura le graphe du périodogramme. La valeur $(\alpha_i^2 - \beta_i^2) / 2$ n'est rien d'autre que la variance correspondant à la fréquence i .

1.6.2. La Tendence :

Dans une série historique, la tendance s'exprime par un mouvement continu et régulier, à travers lequel, les valeurs ont tendance à suivre une allure monotone, soit croissante soit décroissante par rapport à son allure moyenne. Si ce comportement change dans un temps court, la tendance est dite locale, par contre elle est dite persistante, si le dit comportement longe toute la série et persiste.

Cette tendance est généralement approximée par un modèle de type polynôme tel que :

$$x_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \varepsilon_t \quad (1.3)$$

* ε_t : résidus.

ou de type exponentiel tel que:

$$x_t = a_0 \exp(a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \varepsilon_t) \quad (1.4)$$

Comme ces modèles sont difficiles à ajuster, on fait souvent appel à un modèle linéaire simple pour approcher cette tendance. Il faut noter que dans l'analyse de la tendance, on préfère les données annuelles qui ne présentent généralement pas d'effets saisonniers. Pour l'enlever on fait appel à des méthodes de filtrage. Cependant, l'approche la plus pratique et celle qui est souvent utilisée, est la soustraction d'un polynôme de bas degrés des données observées [4] (Méthode des moindres carrés).

Il existe en outre, d'autres moyens plus pratiques pour enlever cette tendance, nous citons à titre d'exemple la méthode des moyennes mobiles et celle des doubles masses.

Cette tendance, si elle a lieu d'exister, peut donc être supprimée en la soustrayant de la série observée des apports centrés x_t . On obtient alors une nouvelle série que nous convenons d'appeler z_t .

$$z_t = x_t - \text{la composante tendancielle} \quad (1.5)$$

1.6.3. La composante stochastique:

Une fois la tendance -qui est de nature déterministique- enlevée, on peut considérer la série z_t résultante, comme étant purement stochastique pouvant être considérée comme étant la sommation de valeurs séquentiellement dépendantes et de résidus ε_t complètement indépendants:

Afin de voir comment sont liées les valeurs de cette série, on va étudier les grandeurs suivantes:

A. La persistance :

C'est la caractéristique par laquelle les fortes valeurs ont tendance à être suivies par desvaleurs fortes et les faibles valeurs par des valeurs faibles [53].

Dans une série historique, la persistance implique certaines relations déterministiques entre les valeurs des données successives. De telles relations sont du genre cause-effet : l'effet persiste tant que la cause existe et ceci peut durer pendant plusieurs incréments de temps, entre ces valeurs consécutives , par conséquent la série peut connaître plusieurs persistances.

Cette grandeur est mesurée par la relation établie par Hurst dans les années 1951-56 , il a trouvé que :

$$R_N / S_N \propto N^H \tag{1.6}$$

- N:Longeur des données annuelles.
- H:Coefficient de Hurst.
- R_N : Le rang ajusté, exprimé pour une série annuelle à N termes de moyenne \bar{x}_i et de variance S_N^2 par
- $R_N = \max \{ \sum_i (x_i - \bar{x}) \} - \min \{ \sum_i (x_i - \bar{x}) \} \quad i:1,2,\dots,N.$

L'estimateur du coefficient de Hurst, noté K_H est très sensible à l'hétérogénéité des données, il est définit par:

$$K_H = \text{Log} (R_N / S_N) / \text{Log} (N/2) \tag{1.7}$$

En fin, Hurst conclue que :

- $K_H = 0.5$ pour les séries indépendantes Normales.
- $K_H > 0.5$ implique l'existence d'une persistance à long terme.

La persistance est caractérisée par le corrélogramme et l'on a souvent recours à cet indicateur pour dénoter une persistance, en particulier pour les données annuelles, où les coefficient d'autocorrélation d'ordre un ou plus sont non significativement différents de

zéro. Le corrélogramme est compris entre les bandes de confiance en mettant en évidence l'indépendance de la série.

B. L'autocorrélation :

Dans une série historique, l'une des propriétés les plus importantes est l'autocorrélation, qui est la caractéristique de la dépendance séquentielle des données par laquelle les fortes valeurs ont tendance à être suivies par des valeurs fortes, et les faibles valeurs sont suivies par des valeurs faibles.

Cette dépendance linéaire, entre les valeurs distantes de (k) incréments de temps l'une de l'autre, est mesurée par la fonction d'autocorrélation qui pour un processus centré stationnaire, ergodique et continu, dont la variance $E(x_t^2)$ est bien définie, est donnée par:

$$\begin{aligned} \rho_k &= C_k / E(x_t^2) & k > 0 \\ \rho_0 &= 1 & k = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

- $C_k = E(x_{t+k} x_t)$, est la fonction d'autocovariance.
- E : L'espérance mathématique.

Le graphe représentatif de ρ_k en fonction de k est appelé corrélogramme théorique. Pour une série discrète $x_t, t = 1, 2, \dots, N$. ($N > 50$), ρ_k peut être estimé par r_k (coefficient de corrélation sériale) qui est obtenu en corrélant $(x_1, x_2, \dots, x_{N-k})$ avec $(x_{1+k}, x_{2+k}, \dots, x_N)$, il peut être estimé par la relation:

$$\begin{aligned} r_k &= C_k / C_0 \\ r_k &= \sum_{t=1}^{N-k} \{ (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}) \} / \sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Le graphe de r_k en fonction de k est le corrélogramme sérial, celui-ci varie en fonction du type de dépendance de la série.

- pour une série bruit blanc : $r_k = 1$ $k = 0$
 $r_k = 0$ sinon.

- *pour une série périodique : le corrélogramme est lui aussi périodique.
- *pour une série non périodique et dépendante :

$$r_k \neq 0 \quad k \leq q$$

$$r_k = 0 \quad k > q$$

d'un ensemble de données le coefficient de corrélation sériale peut être déterminé et le corrélogramme peut être construit. La forme de ce dernier est indicative pour le processus de génération de la façon précédemment commentée .

1.7. Application aux apports annuels:

Dans cette section nous avons appliqué les différents traitements déjà mentionnés aux apports annuels du barrage de Béni-Bahdel .

1.7.1. l'homogénéité:

Un premier examen visuel de la série historique des apports de Beni- Bahdel qu'on va appeler x_t et dont le graphe est présenté dans la Fig.(1.2), nous révèle l'existence d'une tendance dans la série. Cette tendance prend de l'envergure approximativement après les années 1950, mais en réalité le début de cette tendance ne peut être détecté de manière précise, que par des techniques bien définies telles que, le tracé de la statistique de rang de Kendal à titre d'exemple.

Cependant, l'examen visuel reste insatisfaisant tant qu'il n'est pas renforcé par des tests statistiques. On est donc amené à confirmer cette non homogénéité de la série x_t , et ceci est fait moyennant le test de Wilcoxon. Ce test a été appliqué à la série historique des apports x_t et les résultats montrés dans le tableau (1.1) viennent confirmer son hétérogénéité.

Pour répondre à la question si oui ou non cette hétérogénéité est due à une tendance, on va appliquer le test de corrélation de rang de Kendal.

Tableau(1.1): Test de Wilcoxon pour la série originale x_t .

Col 1	Col 2	Col 3	Col 4	Col 1	Col 2	Col 3	Col 4
26.86	8.20	1	x2	81.90	57.27	35	x1
38.61	11.34	2	x2	46.32	60.02	36	x2
125.24	14.33	3	x2	68.33	60.71	37	x2
123.91	14.86	4	x2	56.50	61.87	38	x2
135.42	17.03	5	x2	76.77	66.54	39	x2
74.54	17.97	6	x2	84.65	67.99	40	x2
57.27	21.35	7	x2	29.62	68.23	41	x1
110.85	22.16	8	x2	37.70	68.33	42	x2
166.39	22.50	9	x1	110.14	74.54	43	x1
87.61	26.86	10	x1	60.02	76.45	44	x2
97.02	29.62	11	x2	61.87	76.77	45	x2
66.54	34.30	12	x2	67.99	78.22	46	x1
51.62	36.33	13	x1	82.90	81.90	47	x2
101.54	37.29	14	x2	118.49	82.33	48	x2
68.23	37.70	15	x2	177.69	82.90	49	x2
85.11	37.98	16	x2	127.37	84.65	50	x2
48.97	33.61	17	x1	82.33	85.11	51	x1
43.38	39.90	18	x2	51.85	85.33	52	x1
56.54	39.98	19	x2	39.98	87.61	53	x1
22.50	43.38	20	x1	37.98	97.02	54	x1
36.33	46.16	21	x1	60.71	98.01	55	x1
46.88	46.24	22	x1	76.45	101.48	56	x1
78.22	46.32	23	x2	22.16	101.54	57	x1
52.11	46.45	24	x2	21.35	110.14	58	x2
98.01	46.88	25	x1	11.34	110.85	59	x1
137.30	48.97	26	x1	14.33	118.49	60	x2
85.33	51.62	27	x1	37.29	123.91	61	x1
46.16	51.85	28	x2	52.55	125.24	62	x1
144.67	52.11	29	x1	17.03	127.37	63	x2
101.48	52.12	30	x1	17.94	135.42	64	x1
52.12	52.15	31	x2	8.20	137.30	65	x1
46.24	52.55	32	x2	46.45	144.67	66	x1
52.15	56.50	33	x2	34.30	166.39	67	x1
39.90	56.54	34	x1	14.86	177.69	68	x1

$$N_1 = 29$$

$$N_2 = 39$$

$$W_{x_1} = 1270$$

$$W_{\min} = 841.94$$

$$W_{\max} = 115.06$$

$W_{x_1} > W_{\max} \Rightarrow$ la série est non homogène.

1.7.2. La tendance (Test de Kendal):

Dans ce paragraphe, nous allons nous limiter seulement au test de la tendance et ce pour répondre à la question précédente.

Les résultats du test de Kendal sont présentés dans le tableau (1.2) où la statistique τ' sort de l'intervalle ± 1.96 d'où le rejet de l'hypothèse nulle de non tendance. Nous pouvons alors dire que l'hétérogénéité dans la série historique x_t s'exprime par cette tendance.

Cette dernière va être enlevée en rectifiant les données de x_t , ceci par l'application de la méthode des doubles masses en jumelant la série x_t des apports annuels à celle des précipitations annuelles à la station d'El-Khémis. Les résultats de la série corrigée sont donnés par le tableau (1.3).

Tableau (1.2): Test de tendance pour la série originale des apports de Beni-Bahdel 1926-93.

N°	Lin 1	Lin 2	N°	Lin 1	Lin 2
1	26.86	58	35	81.90	7
2	38.61	51	36	46.32	18
3	125.24	6	37	68.33	9
4	123.91	6	38	56.50	13
5	135.42	4	39	76.77	7
6	74.54	22	40	84.65	4
7	57.27	29	41	29.62	19
8	110.85	6	42	37.70	16
9	166.39	1	43	110.14	3
10	87.61	10	44	60.02	8
11	97.02	8	45	61.87	7
12	66.54	21	46	67.99	6
13	51.62	31	47	82.90	3
14	101.54	6	48	118.49	2
15	68.23	19	49	177.69	0
16	85.11	9	50	127.37	0
17	48.97	28	51	82.33	0
18	43.38	33	52	51.85	3
19	56.54	22	53	39.98	4
20	22.50	40	54	37.98	4
21	36.33	37	55	60.71	1
22	46.88	26	56	76.45	0
23	78.22	13	57	22.16	4
24	52.11	24	58	21.35	4
25	98.01	7	59	11.34	8
26	137.30	2	60	14.33	7
27	85.33	6	61	37.29	2
28	46.16	25	62	52.55	0
29	144.67	1	63	17.03	3
30	101.48	4	64	17.94	2
31	52.12	18	65	8.20	3
32	46.24	21	66	46.45	0
33	52.15	17	67	34.30	0
34	39.90	21	68	14.86	0

P	τ	Var (τ)	τ'
79	0.701	0.0068	8.5

$\tau' > |1.96|$ d'où l'existence d'une tendance.

Tableau (1.3): Série des apports annuels corrigés $Z_t[h.m^3]$

N°	Valeur	N°	Valeur	N°	Valeur	N°	Valeur
1	26.86	19	92.16	37	68.33	55	65.57
2	38.61	20	36.68	38	56.5	56	82.57
3	125.24	21	59.22	39	76.77	57	23.93
4	123.91	22	76.41	40	84.65	58	23.06
5	135.42	23	78.22	41	29.62	59	12.25
6	74.55	24	52.11	42	37.7	60	14.33
7	57.27	25	98.01	43	110.14	61	37.29
8	110.85	26	137.3	44	60.02	62	52.55
9	126.46	27	85.33	45	61.87	63	17.03
10	66.58	28	46.16	46	67.99	64	17.94
11	73.74	29	89.7	47	82.9	65	8.2
12	50.57	30	62.92	48	73.46	66	46.45
13	55.75	31	52.12	49	110.17	67	34.3
14	109.66	32	46.24	50	78.79	68	14.86
15	73.69	33	52.15	51	51.04	-	-
16	91.92	34	39.9	52	56	-	-
17	52.89	35	81.9	53	43.18	-	-
18	70.71	36	46.32	54	41.02	-	-

1.8. Traitement statistique de la série historique:

Après la correction de la série des apports, dans le présent paragraphe, nous allons calculer les paramètres statistiques qui décrivent la variabilité de notre série, ceci dans le but de décrire nos données afin d'en extraire l'essentiel de l'information qu'elles apportent .

Dans le tableau (1.4), nous avons résumé les statistiques les plus connues d'entre elles. Leurs formules sont connues et figurent dans n'importe quel ouvrage de statistiques.

Tableau (1.4) :Paramètres statistiques
de la série x_t corrigée.

Paramètre statistique	Valeur
La taille de l'échantillon	68
La moyenne	63.79
La médiane	59.62
Le mode	59.22
La moyenne géométrique	55.02
La variance	975.89
La déviation standard	31.24
Le minimum	8.2
Le maximum	137.3
Le coefficient de Kurtosis	-0.21
Le coefficient d'assymétrie	0.44
Le coefficient de variation	48.96

Quant à la distribution des fréquences, elle est représentée dans la figure (1.3), où elle est superposée à la fonction de densité de probabilité normale ayant la moyenne et la variance de la série. D'après cette figure, la série a de fortes chances d'être ajustée par la loi normale, le coefficient d'assymétrie C_s et celui de Kurtosis C_k renforcent cette éventualité.

Ajustement de la loi Normale à la série x_t :

Dans le but de voir si réellement la série des apports est normalement distribuée on a essayé de lui ajuster la loi Normale et tester la qualité de son ajustement par le test du Chi-deux (χ^2).

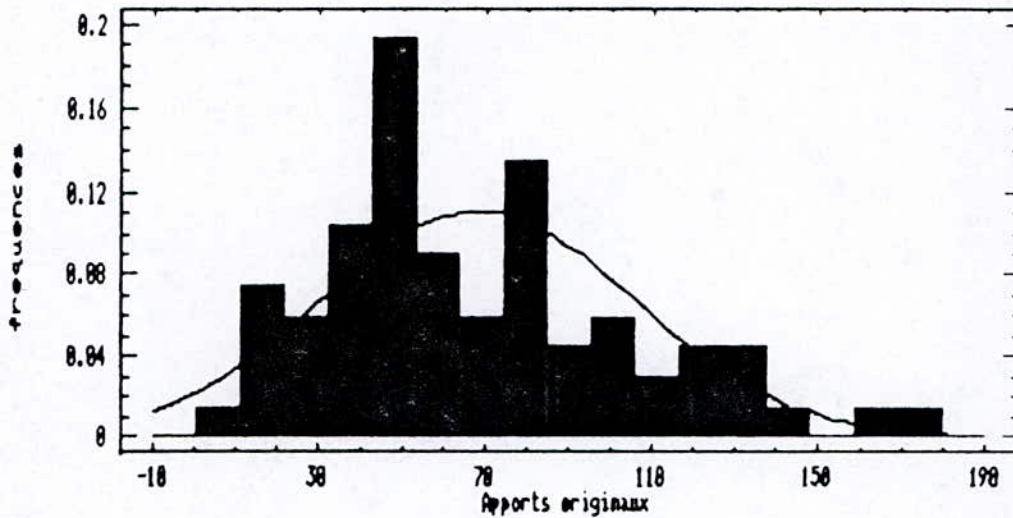


Fig.(1.3)

Distribution des fréquences de la série x_t .

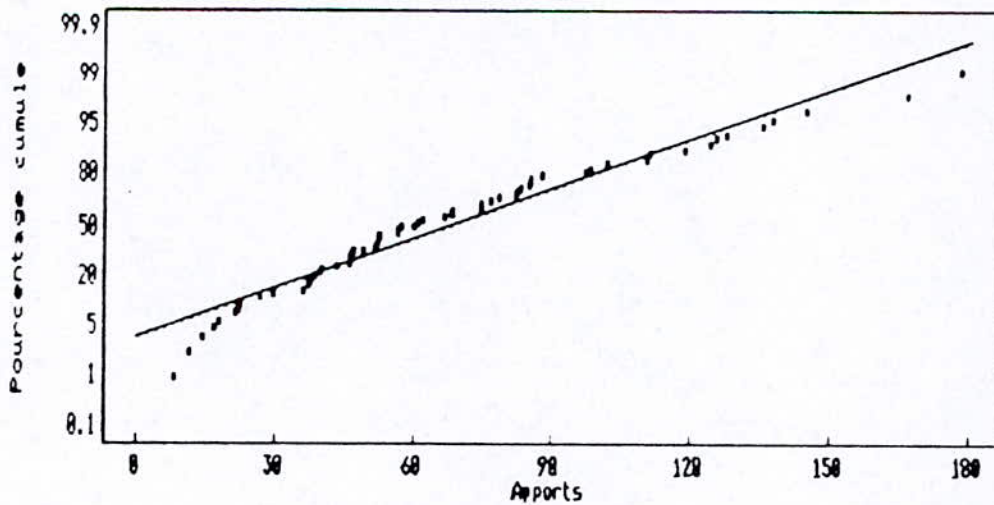


Fig.(1.4)

Ajustement Normal de la série x_t .

Le graphe qui est représenté dans la figure (1.4) montre que la droite de Henri semble être bien ajustée au nuage des points.

Afin de tester la qualité de l'ajustement, on a appliqué le test du Chi-deux [24] dont les résultats sont donnés par le tableau (1.5). Il en ressort que :

$$\chi^2_{\text{de la série}} = 4.357 < \chi^2_{7, 0.95} = 14.067$$

$\chi^2_{7, 0.95}$: est donné par la table du χ^2 à 7 degrés de liberté et une probabilité de non excédance $p = 0.95$ ($\alpha = 0.05$).

Tableau (1.5): Test du chi-deux.

Limite supérieure	Limite inférieure	Fréquence observée	Fréquence espérée	Le chi-deux
≤	23.68	7	6.8	0.0077
23.68	39.47	8	8.1	0.0004
39.47	47.36	7	5.5	0.3884
47.36	55.26	7	6.3	0.0741
55.26	63.15	8	6.8	0.2255
63.15	71.05	5	6.8	0.4763
71.05	78.94	8	6.4	0.3923
78.94	86.84	5	5.7	0.0808
86.84	102.63	4	8.4	2.2994
> 102.63	-	9	7.3	0.4123
Le chi-deux à 7 DDL = 4.3577				

L'hypothèse nulle H_0 , que la loi Normale ajuste bien la série est donc retenue.

Ce travail étant achevé, une information essentielle dans l'analyse des séries historiques nous manque toujours. En effet, nous ignorons tout de la structure de dépendance interne entre les observations de la série ainsi que les différentes composantes de cette dernière, et c'est ce qui va faire l'objet des paragraphes suivants.

1.9. Composantes principales de la série historique:

Dans ce paragraphe nous allons d'abord, déterminer les différentes composantes de la série, ensuite nous passerons à l'analyse de sa structure de dépendance interne.

1.9.1. La composante de périodicité:

Dans la figure (1.5) nous avons présenté le périodogramme de la série x_t des apports, ses coordonnées sont données dans le tableau (1.6).

Tableau (1.6): Coordonnées du périodogramme estimé de x_t .

Fréquence	Ordonnée	Fréquence	Ordonnée	Fréquence	Ordonnée
0.00000	276740	0.01471	8227.96	0.02941	9384.42
0.04412	8959.21	0.05882	1724.38	0.07353	159.241
0.08824	4068.29	0.10294	1849.27	0.11765	382.035
0.13235	1529.14	0.14706	444.400	0.16176	83.9072
0.17647	5547.22	0.19118	3895.79	0.20588	1154.12
0.22059	1599.53	0.23529	1888.56	0.25000	394.412
0.26471	102.488	0.27941	1455.59	0.29412	3364.01
0.30882	570.240	0.32353	345.999	0.33824	1823.12
0.35294	248.284	0.36765	321.347	0.38235	1994.12
0.39706	469.018	0.41176	369.118	0.42647	646.712
0.44118	146.296	0.45588	742.042	0.47059	674.223
0.48529	445.098	0.50000	373.793	-	-

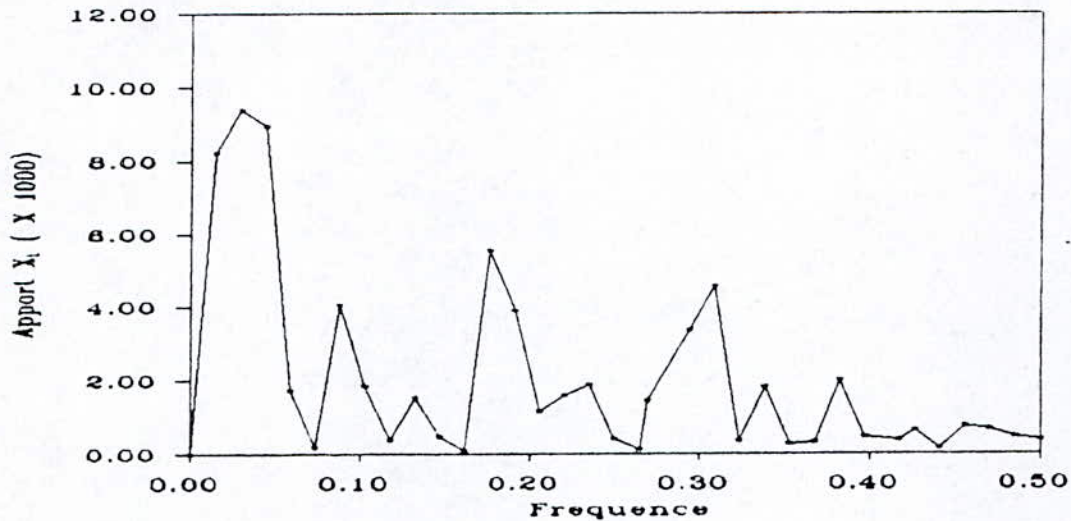


Fig.(1.5)

Périodogramme de la série x_t .

L'examen visuel du périodogramme exhibe un mouvement irrégulier dans l'espace des fréquences, où on remarque l'existence de plusieurs points "pic" qui commencent par celui correspondant à la fréquence faible de 0.015, suivie d'une manière irrégulière par une succession de points dont l'amplitude baisse et atteint, de manière progressive, des valeurs presque nulles correspondant à des fréquences élevées, dans l'extrémité droite du périodogramme, indiquant ainsi un type de dépendance autorégressif dans les données de la série .

Ces "pics" indiquent l'existence de mouvements rythmiques correspondant aux fréquences de leur apparitions. Il faut noter cependant, que les valeurs des points "pics" prises individuellement, ne sont pas d'une grande importance et le périodogramme doit être vu de manière globale car ces "pics" à basses fréquences peuvent être le résultat d'une tendance dans les données [5], c'est pour cette raison que ces résultats doivent être pris avec prudence.

Pour trancher dans la question si oui ou non la série x_t est périodique, nous allons voir dans le paragraphe (§1.9.3.B) que l'examen du corrélogramme de la série rejette cette hypothèse de périodicité. Cette dernière sera une fois de plus rejetée par l'analyse des résidus des modèles ajustés dans le paragraphe (§2.2.2.3).

1.9.2. La composante de tendance:

Nous avons déjà vu au paragraphe (§1.4.2) que la série x_t présente une tendance. Cette dernière a été éliminée par la méthode des doubles masses, qui est équivalente à la méthode des moyennes mobiles et celle des moindres carrés. Elle consiste à rabattre les valeurs erronées sur la droite qui ajuste le restant des valeurs. La série résultante est appelée z_t .

$$z_t = x_t - \text{la tendance}$$

1.9.3. La composante stochastique:

Une fois la tendance -qui est de nature déterministique- enlevée, on peut considérer la série z_t résultante, comme étant purement stochastique pouvant être considérée comme étant la sommation de valeurs séquentiellement dépendantes et de résidus ε_t complètement indépendants:

Afin de voir comment sont liées les valeurs de cette série, on va étudier les grandeurs suivantes:

A. La persistance :

Le tableau (1.7) présente les calculs du K_H pour la série z_t , où l'on trouve que l'estimation de ce coefficient a donné la valeur $K_H = 0.846$ qui est nettement supérieure à la valeur de 0.5 d'où l'existence d'une persistance à long terme.

Tableau (1.7): Calcul du coefficient de Hurst K_H
pour la série: $z_t = x_t - \bar{x}$.

N°	z_t	Σz_t	N°	z_t	Σz_t
1	-36.93	-36.93	35	18.11	418.56
2	-25.18	-62.11	36	-17.47	401.09
3	61.45	-0.66	37	4.54	405.63
4	60.12	59.46	38	-7.29	398.34
5	71.63	131.09	39	12.98	411.32
6	10.76	141.85	40	20.86	432.18
7	-6.52	135.33	41	-34.17	398.01
8	47.06	182.39	42	-26.09	371.92
9	62.67	245.06	43	46.35	418.27
10	2.79	247.85	44	-3.77	414.5
11	9.949	257.8	45	-1.92	412.58
12	-13.22	244.58	46	4.199	416.78
13	-8.04	236.54	47	19.11	435.89
14	45.87	282.41	48	9.67	445.56
15	9.9	292.31	49	46.38	491.94
16	28.13	320.44	50	15.00	506.94
17	-10.90	309.54	51	-12.75	494.89
18	6.92	316.46	52	-7.79	486.39
19	28.37	344.83	53	-20.61	465.79
20	-27.11	317.72	54	-22.77	443.02
21	-4.57	313.15	55	1.78	444.79
22	12.62	325.77	56	18.78	463.58
23	14.43	340.2	57	-39.86	423.72
24	-11.68	328.52	58	-40.73	382.99
25	34.22	362.74	59	-51.54	331.45
26	73.51	436.25	60	-49.46	281.99
27	21.54	457.79	61	-26.5	255.49
28	-17.63	440.16	62	-11.24	244.25
29	25.91	466.07	63	-46.76	197.49
30	-0.87	465.2	64	-45.85	151.64
31	-11.67	453.53	65	-55.59	96.05
32	-17.55	435.98	66	-17.34	78.71
33	-11.64	424.34	67	-29.49	49.22
34	-23.89	400.45	68	-48.93	0.289

$$N = 68,$$

$$S_N = 31.24,$$

$$\min \sum^N z_t = -62.11$$

$$\max \sum^N z_t = 506.94$$

$$R_N = 506.94 - (-62.11) = 569.05$$

$$\text{Log } R_N / S_N = 1.26, \text{ Log } (N/2) = 1.53 \Rightarrow K_H = 1.26 / 1.53 = 0.82.$$

$K_H = 0.82 > 0.5$ d'où l'existence d'une persistance à long terme.

B. L'autocorrélation :

La figure (1.6) met en évidence le corrélogramme de la série des apports z_t , où la variation irrégulière des r_k , ainsi que leur décroissement en vagues, indiquent la possibilité que le mécanisme générateur est un processus mixte de type ARMA, la forme du corrélogramme écarte la possibilité d'une éventuelle périodicité. Ce résultat rejoint celui qui a déjà été donné par le périodogramme (§1.9.1) concernant le type du processus générateur.

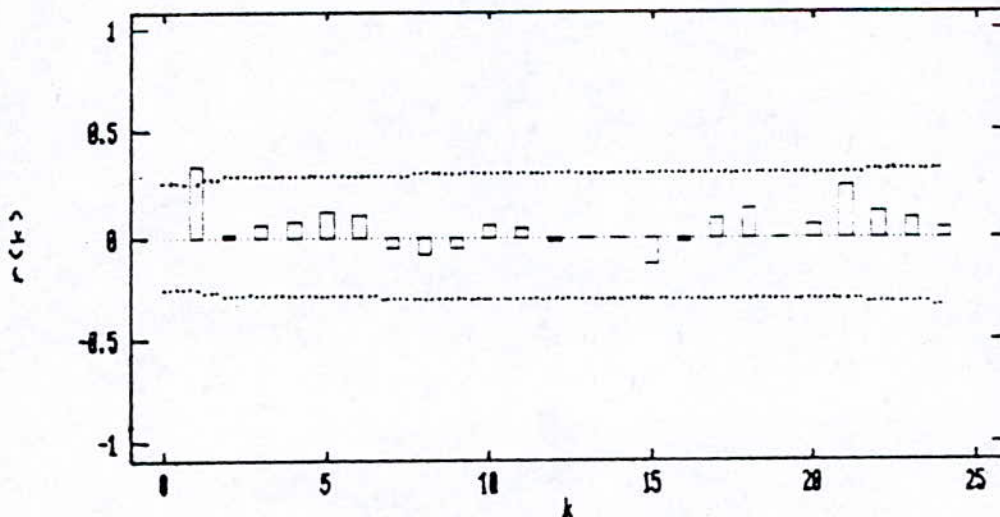


Fig.(1.6)

Autocorrélations de la série z_t .

Dans le chapitre suivant, on va s'intéresser à ce type de processus qui sont connus par l'appellation de processus ARIMA ou Box-Jenkins, et qui sous l'hypothèse de stationnarité, deviennent ARMA que nous allons étudier et ajuster à la série z_t . On choisira parmi les modèles éventuels, celui qui est le mieux placé pour représenter la série historique des apports.

1.10. Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons analysé la série chronologique des apports annuels du barrage de Béni-Bahdel. Cette analyse nous a conduit à la connaissance de la structure de dépendance interne de cette série et à la détermination de ses composantes principales.

Il faut noter que la composante déterministique a été trouvée purement tendancielle. Cette tendance a été éliminée par la méthode des doubles masses et l'analyse de la composante stochastique résultante nous a conduit à la détermination du type ARMA(p,q) pour le processus générateur.

Il est à souligner également, que ces résultats et les conséquences de leur utilisation ne sont valables que dans les hypothèses que nous avons mentionnées et sur la période de cette étude. En réalité, il se peut -faut d'observation - que notre série ne se situe que sur un tronçon qui ne représente quant à lui, qu'une fraction d'une période trop importante dans la dynamique du processus générateur.

De ce fait, ces résultats doivent être pris avec précaution.

CHAPITRE 2

MODELISATION ET GENERATION STOCHASTIQUE DES APPORTS ANNUELS

2.1. Introduction:

Dans leur ouvrage sur l'analyse des séries temporelles, Box et Jenkins [5] décrivent en détail une famille de modèles stochastiques linéaires connus sous l'appellation de modèles Box-Jenkins ou en acronyme ARIMA. Dans ce chapitre, on va aborder cette famille de modèles et on va en sélectionner le modèle qui s'ajuste le mieux afin de procéder à la génération synthétique qui suivra la partie modélisation. On rappelle que la série historique qui fait l'objet de cette modélisation est stationnaire et ne présente pas d'effets saisonniers.

2.2. Les modèles stochastiques linéaires, discrets :

C'est une classe de modèles connue par sa qualité de représentation des séries temporelles discrètes. Ces modèles possèdent l'avantage d'être faciles à traiter, aussi bien que d'être suffisamment flexibles pour décrire plusieurs séries qu'elles soient stationnaires ou non.

De manière générale, un processus stochastique linéaire, discret et stationnaire [21] et [40] prend la forme suivante:

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \dots - \phi_p z_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.1)$$

où:

- *Les $\phi_1 \dots \phi_p, \theta_1 \dots \theta_q$: paramètres.
- * z_t : décrit le comportement de la série temporelle au temps t .
- * ε_t : valeurs indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale de moyenne nulle et de variance σ_ε^2 .

Un processus pareil est appelé processus autorégressif d'ordre p et de moyenne mobile q , abrégé selon l'appellation anglaise *autoregressive and moving average* $ARMA(p, q)$.

Trois sortes de cas spéciaux de ces modèles avec leurs caractéristiques respectives sont présentés ci-dessous:

a. Le processus bruit blanc :

Le cas le plus simple d'un processus pareil est :

$$z_t = \varepsilon_t \tag{2.2}$$

• ε_t est indépendante de toutes les autres valeurs ε_{t-1} , ε_{t-2} , ε_{t+1} , ε_{t+2} , ...

Ce processus est appelé processus purement aléatoire ou bruit blanc.

b. Le processus de moyenne mobile (MA(q) ou ARMA(0,q)):

C'est le second cas de figure, un processus stochastique de moyenne mobile z_t d'ordre q est donné par :

$$z_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \tag{2.3}$$

• θ_i sont les paramètres de moyenne mobile.

Dans ce cas z_t est la moyenne pondérée des q bruits blancs antérieurs .

c. Le processus autorégressif (AR(p) ou ARMA(p, 0)):

C'est le dernier cas de figure, un processus autorégressif d'ordre p est donné par:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + \varepsilon_t \tag{2.4}$$

• ϕ_i sont les paramètres autorégressifs.

Ici, z_t est la moyenne pondérée des p valeurs antécédentes, à laquelle est rajoutée une innovation indépendante ε_t .

Il faut noter que le processus mixte ARMA(p,q) donné au début par la formule (2.1) n'est que la combinaison des modèles AR(p) et MA(q) .

D'une façon plus compacte [18] et en introduisant le paramètre de retard B, la relation (2.1) s'écrit sous la forme suivante:

$$\phi(B)z_t = \theta(B) \varepsilon_t \quad (2.5)$$

- $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$, c'est l'opérateur AR(p) qui est un polynôme d'ordre p , tel que les racines de son équation caractéristique $\phi(B) = 0$ sortent du cercle unité pour assurer la condition de stationnarité .
- $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$, est l'opérateur MA(q) qui est également un polynôme d'ordre q , tel que les racines de son équation caractéristique $\theta(B) = 0$ sortent du cercle unité pour assurer la condition d'inversibilité.
- B est tel que : $B^k z_t = z_{t-k}$, c'est l'opérateur de retard avec: $k = 1, 2, \dots$

2.3. Ajustement des modèles :

Afin d'utiliser les processus ARMA(p,q) comme modèles pour la série temporelle des apports annuels, il est nécessaire de procéder par l'ajustement de ce type de modèles à la série en question. Cela nous conduit à une procédure itérative à trois niveaux principaux: l'identification, l'estimation et la validation [15].

Dans le premier niveau, on met en oeuvre les données et n'importe qu'elle connaissance supplémentaire afin d'identifier la forme du modèle qui peut éventuellement ajuster les données.

Ensuite, on passe au second niveau, il s'agit d'utiliser les données afin d'estimer et faire des inférences sur les valeurs des paramètres conditionnels du modèle identifié.

Enfin, dans le dernier niveau on examine les résidus du modèle ajusté et on cherche s'il ya d'éventuelles inadéquations qui proviennent aussi bien du fait qu'on n'a rien indiqué sur l'adéquation du modèle que de son inadéquation elle même.

Le détail de ces trois étapes est donné par Box et Jenkins[5], Delleur[10] et Kottegoda[24]. Dans ce qui suit nous présentons la procédure.

2.3.1. L'identification :

La question à laquelle on doit répondre ici est: est-ce qu'on peut déterminer les ordres p et q du modèle ARMA(p, q) qui peut être utilisé pour décrire la série temporelle des données ?

Pour répondre à cette question, on examine d'abord les données [15] comme nous avons fait dans le chapitre précédent puis, nous passerons à l'examen de quelques fonctions[51] comme c'est indiqué dans ce qui suit.

a. La fonction d'autocorrélation (acf):

C'est un premier moyen d'identification, on rappelle que la fonction d'autocorrélation ρ_k mesure la dépendance linéaire entre les observations, dans une série temporelle, qui sont séparées par un pas de temps k .

Dans [5] Box et Jenkins proposent une procédure pour estimer ρ_k à partir de r_k , en donnant l'erreur standard commise et en précisant que le pas maximum $k_{\max} = N/4$ N :taille de la série historique.

Après avoir tracé le corrélogramme de la série on l'examine afin de déterminer le nombre de paramètres AR et /ou MA(q) qu'exige le modèle:

- Si la série est un bruit blanc, le corrélogramme est compris dans l'intervalle de confiance. Ceci veut dire que les r_k sont non significativement différents de zéro indiquant ainsi une indépendance entre les observations.
- Si la série suit un ARMA(0, q), r_k devient nul ou presque, après le pas $k = q$. Pour un ARMA(0, 1) r_k décroît en exponentielle.

- Si r_k s'atténue indéfiniment, le modèle comprend une composante autorégressive et peut être soit un AR pur soit un ARMA mixte. Pour un AR(1), r_k décroît en exponentielle, pour un ARMA(1,1), r_k décroît en exponentielle après $k=1$.

Dans quelques cas, il est difficile de trancher si l'(acf) est celle d'un AR ou MA pur, ou celle d'un ARMA mixte, on fait appel donc à un outil supplémentaire qui est la fonction d'autocorrélation partielle.

b. La fonction d'autocorrélation partielle (pacf) $\phi_k(k)$ ou ϕ_{kk} :

Pour l'identification du modèle, on trace cette fonction qui est estimée par $\phi_k(k)$ en fonction de k , $k = 1, 2, 3, \dots$. $\phi_k(k)$ est l'ensemble des derniers coefficients autorégressifs obtenus après la résolution du système d'équations de Yule et Walker:

$$\rho_i = \phi_1(k) \rho_{i-1} + \phi_2(k) \rho_{i-2} + \dots + \phi_k(k) \rho_{i-k} \quad (2.6)$$

• $i=1, \dots, K$.

• ρ_k : est l'(acf) de la série.

- Pour un AR(p), $\phi_k(k)=0$ $k > p$.

AR(1), $\phi_1(1) \neq 0$, $\phi_k(k)=0$ $k > 1$.

- Pour un MA(q), $\phi_k(k)$ s'atténue progressivement.

Son intervalle de confiance, pour un seuil de $1-\alpha$ d'après [24] est $\pm U_{1-\alpha/2} / \sqrt{N}$.

Il existe en outre, d'autres moyens d'identification, nous citons à titre d'exemple, la fonction d'autocorrélation inverse (iacf), la fonction d'autocorrélation partielle inverse (ipacf), le tracé de la variance des résidus ainsi qu'une variété de critères- utilisés également pour la sélection finale du modèle- entre autres le critère du FPE, introduit par Akaike en 1969 pour les modèles AR, de même, celui du AIC en 1974 pour les modèles AR, MA, ARMA mais qui a tendance à surparamétrer le modèle identifié, le BIC introduit en 1979 qui lui aussi a tendance de sousparamétrer le modèle identifié, enfin le critère du AICC qui est

muni d'un terme de pénalité qui décourage la surparamétrisation quand l'ordre du modèle augmente.

On peut dire que toutes les fonctions précédentes ne sont qu'un moyen qui transforme l'information donnée, dans un format tel qu'il soit possible de détecter le nombre de termes AR et /ou MA requis dans le modèle. Nous les résumons ainsi:

- Les fonctions (acf) et (ipacf) sont nulles pour $k = q+1$, ceci pour un MA(q) pur.
- les fonctions (pacf) et (iacf) sont nulles pour $k = p+1$, ceci pour un AR(p) pur.
- Les quatre fonctions s'atténuent indéfiniment pour un ARMA(p,q) stable.
- Parmi les modèles ajustés, prendre celui auquel correspond le minimum des critères AICC, BIC, FPE.

2.3.2. L'estimation :

L'estimation des paramètres [1] peut être effectuée moyennant plusieurs méthodes. Nous citons- à titre d'exemple - la méthode des moments qui a pour principe d'égaliser les k premiers moments estimés de la population, exprimés en fonction des k paramètres, aux k premiers moments de l'échantillon, la méthode du χ^2 minimum, la méthode des moindres carrés et celle du maximum de vraisemblance dont l'estimateur possède certaines qualités exigées des estimateurs (variance minimale).

La méthode du maximum de vraisemblance (MLE):

Cette méthode a pour principe de choisir comme estimation de tout paramètre λ , la valeur la plus vraisemblable, c'est -à- dire celle qui a la plus forte probabilité de provoquer l'apparition des valeurs réellement observées dans l'échantillon.

On appelle vraisemblance [], la probabilité ou la densité de probabilité relative aux valeurs observées $x_1 \dots x_n$, exprimée en fonction du ou des paramètres de la population.

Pour un échantillon aléatoire, et pour une population définie par un seul paramètre λ , la fonction de vraisemblance est:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= P(x_1 \dots x_n; \lambda) \\ &= P(x_1; \lambda) P(x_2; \lambda) \dots P(x_n; \lambda) \\ \text{ou} \\ L(\lambda) &= f(x_1 \dots x_n; \lambda) \\ &= f(x_1; \lambda) f(x_2; \lambda) \dots f(x_n; \lambda) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance correspondent par définition au maximum de cette fonction. La recherche de ce maximum peut être réalisée en annulant la dérivée de la fonction par rapport au paramètre λ

$$d L(\lambda) / d\lambda = 0$$

ou en annulant la dérivée de son logarithme:

$$\begin{aligned} d [\log L(\lambda)] / d\lambda &= \sum_i d [\log P(x_i; \lambda)] / d\lambda && i: 1..n \\ &= \sum_i d [\log f(x_i; \lambda)] / d\lambda && i: 1..n \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dans le cas de plusieurs paramètres, la recherche du maximum nécessite alors le calcul des dérivées partielles.

2.3.3. La Validation :

C'est la dernière étape dans la procédure de modélisation où l'on va devoir tester et vérifier les hypothèses du modèle. Parmi ces hypothèses, les plus importantes sont celles qui concernent les résidus . On les présente comme suit:

h_1 : les résidus sont indépendants .

h_2 : les résidus sont homoscedastiques.

h_3 : les résidus sont normalement distribués.

h_4 : le modèle est parcimonieux.

h_5 : le modèle reproduit les mêmes caractéristiques statistiques de la série historique.

L'hypothèse la plus importante est la première et sa violation a des conséquences considérables. Quant aux 2^e et 3^e hypothèses, si elles ne sont pas remplies, un moyen de les rendre satisfaites est de procéder à une transformation de la série observée moyennant une transformation Box -Cox par exemple, car c'est une transformation qui ne change ni la forme ni le type du modèle identifié comme le soulignent Granger [14], Hannan[17] et Hippel et al [18].

a. Tests de l'indépendance des résidus:

pour s'assurer que les résidus sont indépendants, on leur applique les tests suivants:

-Test du corrélogramme:

un premier moyen pour tester l'indépendance des résidus ϵ_k , est leur fonction d'autocorrélation (racf) dont l'intervalle de confiance pour un seuil α est donné par :

$$IC = \pm u_{1-\alpha/2} S(r_k) \tag{2.9}$$

avec

• $S(r_k)$: écart type du coefficient d'autocorrélation d'ordre k.

si pour les premiers pas, la (racf) est significativement différente de zéro, c'est que les résidus sont autocorrélés, ce qui remet en cause l'ajustement du modèle identifié, on doit donc sélectionner un autre modèle et refaire la procédure.

-Test du portmanteau:

C'est un second moyen, mais qui est peu robuste. Il considère la fonction d'autocorrélation des résidus et s'exprime pour un modèle ARMA(p,q), par la statistique Q telle que:

$$Q = N \sum r_k^2(\epsilon_t) \tag{2.10}$$

avec:

• $r_k(\epsilon_t)$: coefficient d'autocorrélation des résidus ϵ_t d'ordre $k = 1, 2, \dots, L$.

• $L > N/10 + p + q$. p et q : ordres du modèle.

• N : taille de la série .

Théoriquement, cette statistique suit une loi de distribution de Chi-deux à ν degrés de liberté (DDL) au seuil de 95% , $\nu = L - p - q$. Les résidus sont indépendants et le modèle est adéquat, si $Q < Q_{théorique}$.

-Test du périodogramme cumulé normalisé :

Le périodogramme cumulé normalisé[53] est la quantité donnée par l'expression suivante:

$$C(f_i) = \sum^i I(f_i) / N S^2 \quad i:1, \dots, j. \quad (2.11)$$

avec

$I(f_i) = 2/N [(\sum^i \varepsilon_t \cos 2\pi f_i t)^2 + (\sum^i \varepsilon_t \sin 2\pi f_i t)^2]$, qui est le périodogramme des ε_t , notion qu'on a déjà définie dans le 1^{er} chapitre, f_i est la fréquence i/N , S^2 est une estimation de la variance des résidus (σ_ε^2), N étant la taille de la série .

Le graphe de $C(f_i)$ en fonction de f_i est une droite qui joint les points (0,0) et (0.5,1) et son intervalle de confiance est également constitué de deux droites distantes de k_ε/\sqrt{q} de part et d'autre du graphe. k_ε est tabulé, ses valeurs sont données pour chaque ε :

ε	0.01	0.05	0.10	0.25
k_ε	1.63	1.36	1.22	1.02

Pour ce qui est de la grandeur q , c'est une fonction de la taille de la série.

$$q = (N-2) / 2 \quad \text{pour } N \text{ pair.}$$

$$q = (N-1) / 2 \quad \text{pour } N \text{ impair.}$$

Les résidus ε_t sont indépendants, si le graphe s'ajuste à la droite joignant les points (0,0) et (0.5,1) tout en restant à l'intérieur de l'intervalle de confiance au seuil ε .

b. Test d'homoscédasticité des résidus :

Ce test est fait pour tester l'égalité des variances [27]. L'hypothèse d'homoscédasticité est :

$$H_0 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2. \quad (2.11)$$

et se conduit de la façon suivante:

1°/ Pour chaque sous-groupe 'i' de la série des résidus, calculer la variance S_i^2 telle que

$$S_i^2 = \sum^j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 / v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n_i, \quad n_i \text{ étant le nombre de valeurs dans } i.$$

$$v_i = n_i - 1 \text{ et } \bar{y}_i = \sum^j y_{ij} / n_i.$$

2°/ calculer la variance $S^2 = \sum^i v_i S_i^2 / v$, $v = \sum^i v_i$ et la quantité Q' donnée par

$Q' = v \ln S^2 - \sum^i v_i \ln S_i^2$. Sous l'hypothèse H_0 , Q' est approximativement distribuée selon la loi du Chi-deux à (m-1) degrés de liberté. Toute fois, l'approximation se voit améliorée si l'on divise Q' par la constante C: $C = 1 + (1/3(m-1)) \cdot (\sum^i 1/v_i - 1/v)$

pour donner Q'

$$Q = Q'/C.$$

3°/ si $Q < \chi^2_{0.95}(m-1)$, l'hypothèse nulle d'homoscédasticité est acceptée à 95% de confiance.

c. Tests de normalité des résidus :

Pour tester la normalité des résidus nous avons procédé comme suit:

-Ajustement de la loi normale:

Ajuster la loi normale aux résidus est un premier moyen pour tester leur normalité. Pour cela, on les représente sur du papier Gauss conjointement à la droite théorique de Gauss. Si les ε_i sont normalement distribués, ils doivent s'ajuster à la droite de Henri donnée par: $\varepsilon = m + \mu \sigma_\varepsilon$.

avec * $m = 0$: la moyenne des résidus ε .

* σ_ε^2 : variance des résidus ε .

* μ : variable réduite de Gauss.

-Le coefficient d'asymétrie :

Les résidus normalement distribués possèdent un coefficient d'asymétrie faible[52]:

$$C_s = [1/N \sum \varepsilon_t^3] / [1/N \sum \varepsilon_t^2]^{1/2} \quad (2.13)$$

-Le coefficient de Kurtosis :

Si les résidus sont normalement distribués, leur coefficient de Kurtosis est insignifiant[52]:

$$C_k = [1/N \sum \varepsilon_t^4] [(1/N \sum \varepsilon_t^2) - 3] \quad (2.14)$$

d. Le test de parcimonie:

Ce test vérifie l'ordre du modèle ajusté, relativement à d'autres modèles éventuels, il est également utilisé dans la sélection finale du modèle et se base sur le critère de parcimonie.

Il peut être effectué en prenant le modèle ayant le minimum des critères suivants:

$$AIC(p,q) = (-2) \text{Ln} (\text{la vraisemblance maximisée}) + 2(p+q+1)$$

$$AICC(p,q) = (-2) \text{Ln} (\text{la vraisemblance maximisée}) + 2n (p+q+1) / n-p-q-2$$

$$BIC(p,q) = n \text{Ln} \sigma_\varepsilon^2 + [(p+q+1) + (p+q+1) \text{Ln} n] \quad (2.15)$$

$$FPE(p) = \sigma_\varepsilon^2 (N+p) / (N-p)$$

avec: * N : nombre total d'observations.

* n = N-p : nombre effectif d'observations .

* σ_ε^2 : variance des résidus.

e-Test de ressemblance des caractéristiques statistiques:

Il s'agit de comparer les caractéristiques statistiques les plus fréquemment utilisées des séries générées à celles de la série historique. Cette comparaison est faite en termes d'erreurs relatives telles que:

$$E_N = (C_G - C_H) / C_H \quad (2.16)$$

$$M_C = 1/N \sum E_N^2 \quad (2.17)$$

- N : taille de la série
- C_G : caractéristique de la série générée.
- C_H : caractéristique de la série historique.
- M_C : moyenne des carrés des erreurs relatives, correspondant à la caractéristique C .

Les caractéristiques qu'on considère sont généralement, la moyenne, l'écart type, le maximum, le minimum, le premier coefficient d'autocorrélation et le coefficient de Hurst.

2.4. Application pratique:

Avant de passer à l'application propre de l'approche, on rappelle que la série originale x_k est normalement distribuée (voir chapitre 1) et qu'elle a fait l'objet de la transformation qui consiste à lui retrancher sa moyenne, pour donner la série z_k de moyenne nulle et de variance finie, remplissant ainsi les conditions de la modélisation de Box-Jenkins dans l'hypothèse de stationnarité. Cette application va concerner la série z_k allant de 1925-26 à 1985.

2.4.1. L'identification:

Une première indication sur le type du processus générateur, nous a été fournie par l'examen de la série x_k et de ses fonctions (acf) et (pacf) dans le premier chapitre. Cette constatation a été clarifiée par l'examen des fonctions (acf) et (pacf) de la série z_k qui ont été tracées pour un $k_{max} = 60/4 = 15$.

-L'(acf) (voir fig (2.1)) prend une forme qui est irrégulièrement décroissante avec la valeur de r_1 qui sort de l'intervalle de confiance pour un seuil α de 0.05.

-La (pacf) (voir fig (2.2)) prend une forme qui est décroissante en moyenne, avec la valeur de $\phi_{1,1}$ en dehors de l'intervalle à $1-\alpha$ comme seuil de confiance. Ceci nous laisse soupçonner un ARMA(1,0) ou éventuellement un ARMA(1,1). Pour plus de sécurité, on ajustera un ARMA(2,0) et un ARMA(2,1) qui sont d'ordre supérieur, pour voir si l'augmentation de paramètres est en faveur d'un meilleur ajustement.

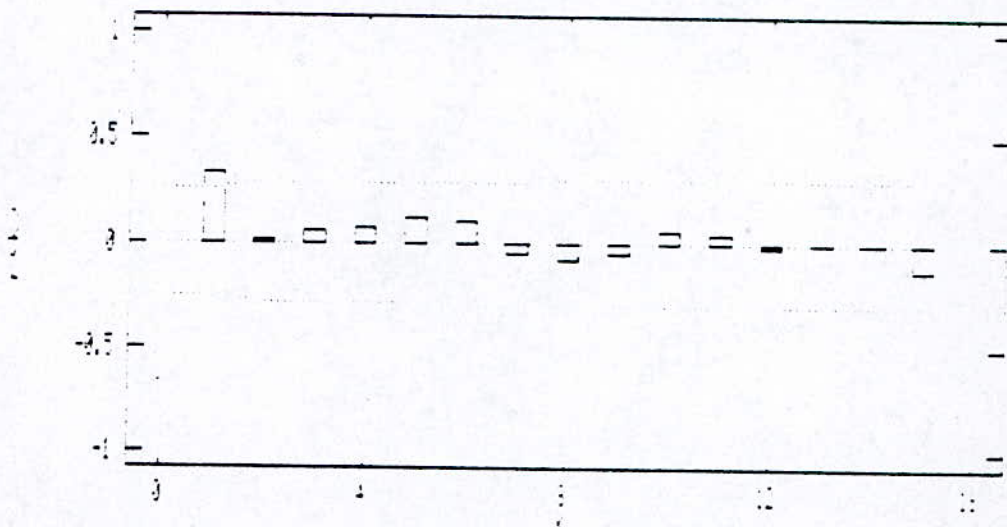


Fig.(2.1)
Autocorrélations de la série z_t .

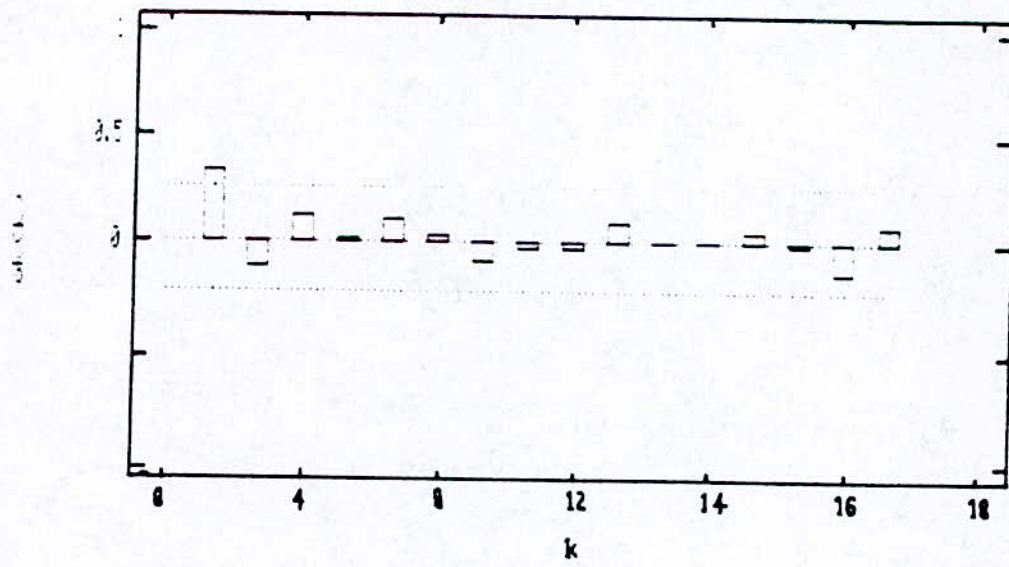


Fig.(2.2)
Autocorrélations partielles de la série z_t .

2.4.2. L'estimation des paramètres :

Les modèles ARMA(1,0),(2,0),(1,1) et (2,1) ont été ajustés à la série z_k et l'estimation de leurs paramètres par les estimateurs (MLE) est résumée dans le tableau (2.1) qui suit :

Tableau (2.1): Estimation des paramètres.

→ Paramètres ↓ Modèle	ϕ_1	ϕ_2	θ_1	DW
ARMA(1, 0)	0.3529	-	-	1.910
ARMA(2, 0)	0.3920	- 0.1243	-	1.800
ARMA(1, 1)	-0.0374	-	-0.4537	1.964
ARMA(2, 1)	-0.1097	0.0408	-0.5269	1.955

DW est la statistique de Durbin et Watson, c'est un premier indicateur sur l'indépendance des résidus [21] . En fait , quand cette grandeur est proche de deux , les résidus sont indépendants.

Les conditions de stationnarité et d'inversibilité des paramètres ϕ_1 et θ_1 pour chaque modèle sont données par le tableau (2.2) et elles sont vérifiées.

Tableau (2.2): Conditions de stationnarité et d'inversibilité des modèles ajustés.

Modèle	Conditions			
ARMA(1,0)	$\phi_1 < 1 $			
ARMA(2,0)	$\phi_1 + \phi_2 < 1 $	$\phi_2 - \phi_1 < 1$	$\phi_2 < 1 $	
ARMA(1,1)	$\phi_1 < 1 $	$\theta_1 < 1 $	$\phi_1 > \theta_1$	
ARMA(2,1)	$\phi_1 + \phi_2 < 1 $	$\phi_2 < 1 $	$\phi_2 - \phi_1 < 1$	$\theta_1 < 1 $

Ces modèles s'écrivent alors comme suit:

$$\text{ARMA}(1,0) : z_t = 0.3529 z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.17)$$

$$\text{ARMA}(2,0) : z_t = 0.3920 z_{t-1} + (-0.1243) z_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.18)$$

$$\text{ARMA}(1,1) : z_t = -0.0374 z_{t-1} + \varepsilon_t - (-0.4537) \varepsilon_{t-1} \quad (2.19)$$

$$\text{ARMA}(2,1) : z_t = -0.1097 z_{t-1} + 0.0408 z_{t-2} + \varepsilon_t - (-0.5269) \varepsilon_{t-1} \quad (2.20)$$

Les ε_t sont les résidus des modèles qu'on va analyser dans le paragraphe suivant et qui vont nous orienter lors du choix final du modèle le plus adéquat.

2.4.3. Validation des modèles:

Dans ce paragraphe, on va analyser les résidus ε_t résultant de l'ajustement de chaque modèle. Ces résidus sont déterminés à partir des équations des modèles.

$$\text{-Pour un ARMA}(p,0) : \varepsilon_t = z_t - \sum_i \phi_i z_{t-i} \quad i: 1, \dots, p. \quad (2.21)$$

$$\text{pour } p=1 \Rightarrow \varepsilon_t = z_t - \phi_1 z_{t-1} .$$

$$\text{pour } p=2 \Rightarrow \varepsilon_t = z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} .$$

$$\text{-Pour un ARMA}(p,q) : \varepsilon_t = z_t - \sum_i \phi_i z_{t-i} + \sum_j \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad i: 1, \dots, p. \quad j: 1, \dots, q. \quad (2.22)$$

$$\text{pour } p=1, q=1 \Rightarrow \varepsilon_t = z_t - \phi_1 z_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} .$$

$$\text{pour } p=2, q=1 \Rightarrow \varepsilon_t = z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} .$$

Le tableau (2.3) donne l'ensemble des résidus de chaque modèle.

Tableau (2.3): Résidus des modèles ajustés.

N°	R(1,0)	R(2,0)	R(1,1)	R(2,1)	N°	R(1,0)	R(2,0)	R(1,1)	R(2,1)
1	-41.62	-41.62	-41.62	-41.62	31	-14.40	-11.54	-8.378	-8.544
2	-15.18	-13.55	-12.54	-12.50	32	-16.47	-16.52	-19.05	-19.31
3	67.29	63.28	61.32	61.76	33	-8.488	-9.651	-8.523	-7.933
4	35.39	29.45	29.71	30.31	34	-22.82	-24.94	-25.33	-25.29
5	47.37	52.25	55.51	54.71	35	23.49	22.58	23.83	24.27
6	-17.55	-13.29	-16.63	-17.69	36	-26.90	-30.98	-32.48	-32.32
7	-13.35	-5.275	-3.446	-3.96	37	7.663	10.19	13.75	13.89
8	46.31	47.51	43.50	42.96	38	-11.93	-14.68	-18.23	-18.42
9	43.02	39.96	39.81	40.43	39	12.51	12.96	16.10	16.68
10	-22.36	-19.37	-17.80	-18.58	40	13.23	11.42	9.160	8.766
11	5.924	13.20	13.25	12.47	41	-44.57	-44.17	-42.42	-42.05
12	-19.77	-20.21	-23.74	-23.83	42	-17.07	-13.54	-12.99	-13.55
13	-6.416	-5.061	-2.636	-2.357	43	52.51	48.88	46.39	46.99
14	45.66	43.93	41.89	41.74	44	-23.16	-28.62	-27.96	-27.41
15	-9.328	-12.52	-12.26	-11.76	45	-3.631	1.878	5.75	5.198
16	21.59	26.50	29.19	28.52	46	1.836	1.042	-3.35	-3.619
17	-23.86	-24.13	-27.97	-28.27	47	14.58	13.78	15.91	16.53
18	7.725	11.24	14.32	14.45	48	-0.115	-0.741	-1.713	-2.141
19	22.88	20.86	17.25	16.93	49	39.92	41.52	42.64	42.76
20	-40.16	-40.81	-38.75	-38.22	50	-4.408	-5.422	-7.491	-7.867
21	1.955	6.143	7.125	6.421	51	-21.08	-16.30	-13.66	-13.87
22	11.19	7.600	4.339	4.817	52	-6.331	-4.368	-6.941	-7.512
23	6.935	5.472	8.057	8.438	53	-20.90	-22.58	-22.62	-22.00
24	-19.81	-19.21	-19.67	-20.08	54	-18.53	-19.09	-18.14	-18.13
25	35.30	37.15	37.83	37.90	55	6.773	4.703	4.288	4.658
26	58.39	55.20	52.74	52.73	56	15.11	11.81	12.02	12.42
27	-7.442	-6.467	-4.52	-4.608	57	-49.52	-50.44	-49.48	-49.44
28	29.09	-20.37	-19.64	-20.86	58	-29.70	-26.20	-24.63	-24.83
29	-13.05	32.05	29.29	29.06	59	-40.20	-43.96	-46.75	-46.31
30	-14.40	-16.66	-18.06	-17.65	60	-34.31	-37.75	-35.04	-34.06

a-Tests de l'indépendance des résidus:

-Test du corrélogramme:

La fonction d'autocorrélation des résidus (racf) a été calculée et tracée pour chaque modèle. La représentation de l'intervalle de confiance à 95%, met en évidence l'indépendance de ces résidus en effet, tous les coefficients d'autocorrélations r_k $k = 1, \dots, 15$ sont compris dans le dit intervalle avec des valeurs qui s'approchent du zéro. Ceci est valable pour les quatre modèles ajustés et les figures (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6) le prouvent.

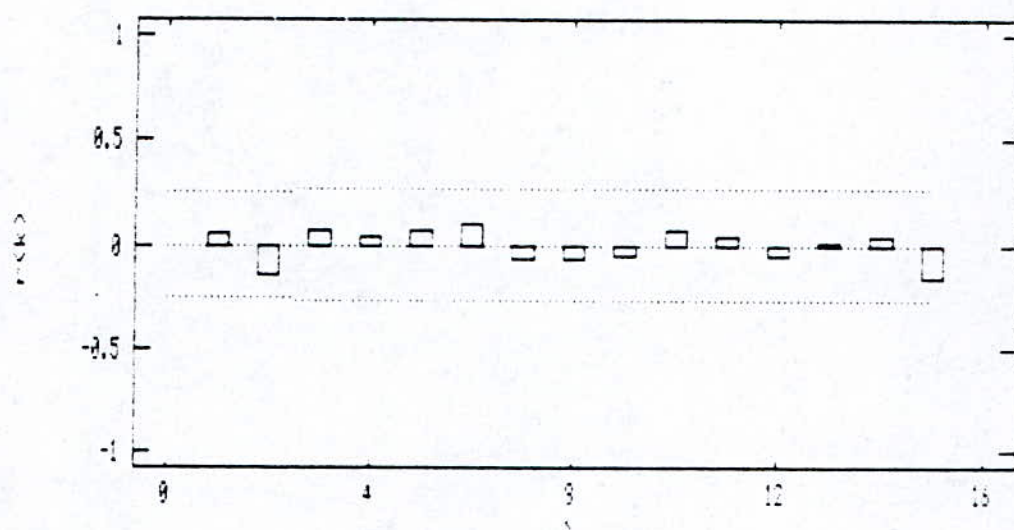


Fig.(2.3)

Autocorrélations des résidus du modèle ARMA(1,0).

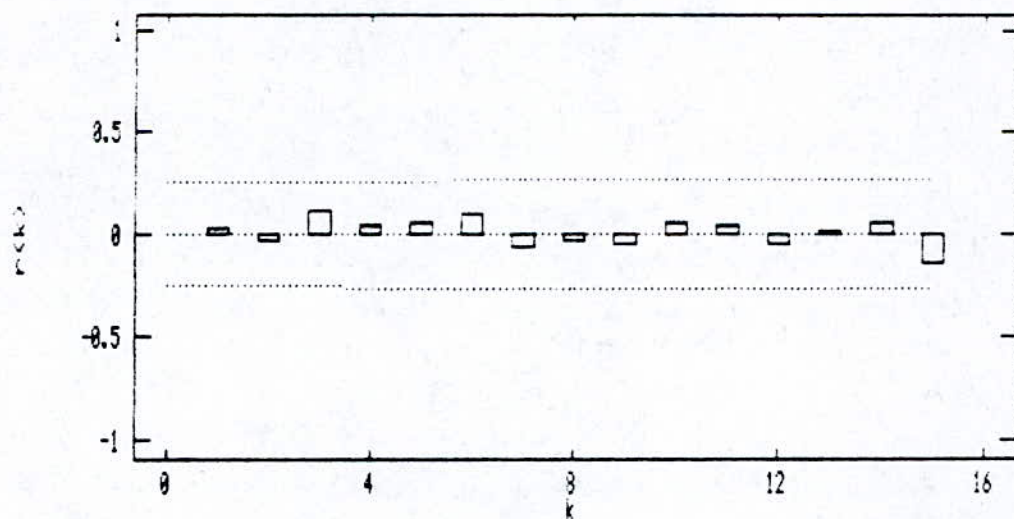


Fig.(2.4)

Autocorrélations des résidus du modèle ARMA(2,0).

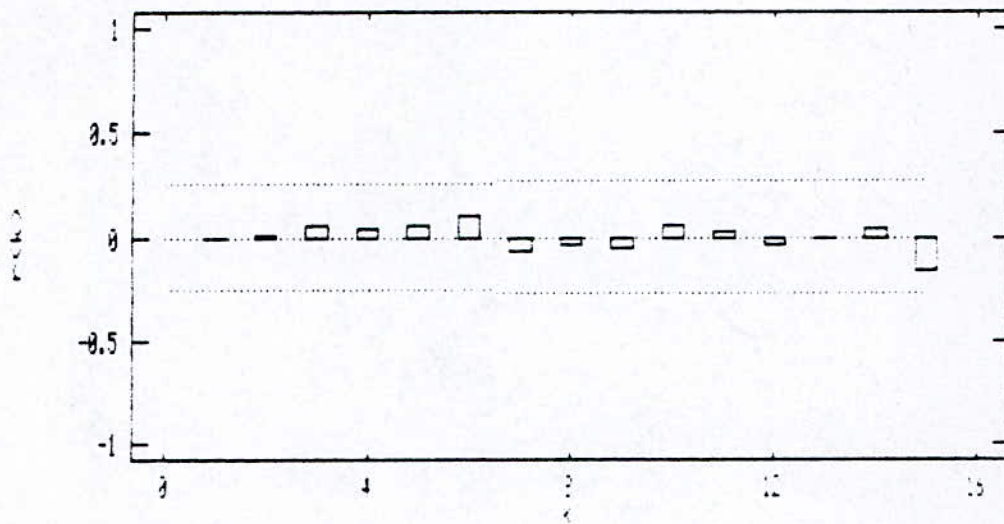


Fig.(2.5)

Autocorrélations des résidus du modèle ARMA(1,1).

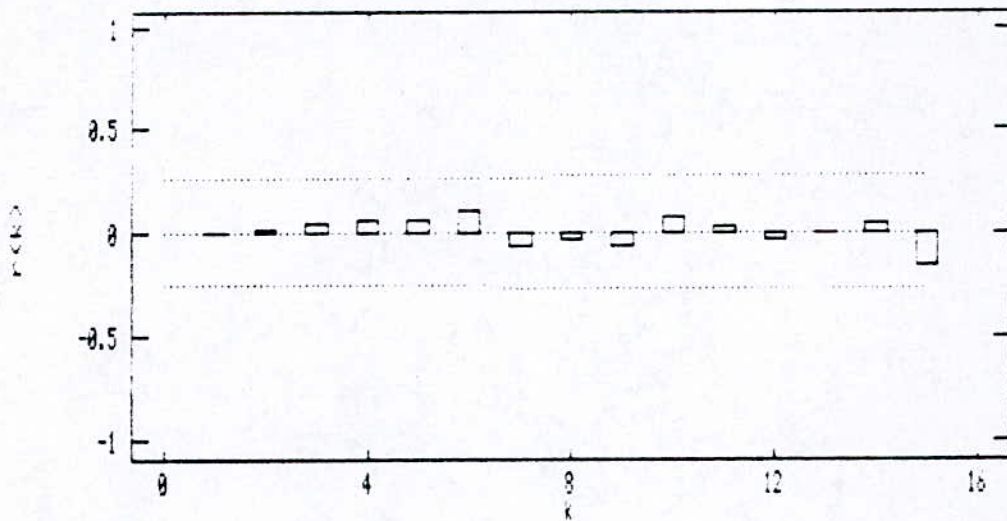


Fig.(2.6)

Autocorrélations des résidus du modèle ARMA(2,1).

-Test du portmanteau :

On rappelle que les résidus sont indépendants si la statistique $Q < Q_{théorique}$. les résultats de ce test sur les quatre modèles pour $N=60$, $L=60/10 + p + q = 7+p+q$, $v=L-p-q$, $\alpha=5\%$, viennent confirmer l'indépendance des résidus pour chacun des modèles ajustés. Ces résultats sont illustrés dans le tableau (2.4).

Tableau(2.4): Test du portmanteau pour les résidus des modèles ajustés.

↓Modèle	L	v	Q	DDL	$Q_{théorique}$
ARMA(1,0)	7	6	5.480	59	12.86
ARMA(2,0)	8	6	4.220	58	12.86
ARMA(1,1)	8	6	3.660	58	12.86
ARMA(2,1)	9	6	3.720	57	12.86

-Test du périodogramme cumulé normalisé:

Le périodogramme cumulé normalisé a été calculé et tracé, pour les résidus de chaque modèle avec des intervalles de confiance à 90% et 95% respectivement. L'examen des graphes(2.7), (2.8), (2.9) et (2.10) correspondant respectivement aux modèles ARMA(1,0),(2,0),(1,1) et ARMA(2,1), ne révèle aucune relation déterministe de type périodique qui aurait pu se dissimuler derrière l'autocorrélation. On peut alors dire que les résidus sont indépendants.

-Test d'indépendance des résidus vis-à-vis des z_t :

La covariance des résidus ε_t et des z_t a été calculée pour tester leur indépendance. les résultats de cette dernière ont été non significativement différents de zéro, ce qui prouve cette indépendance.

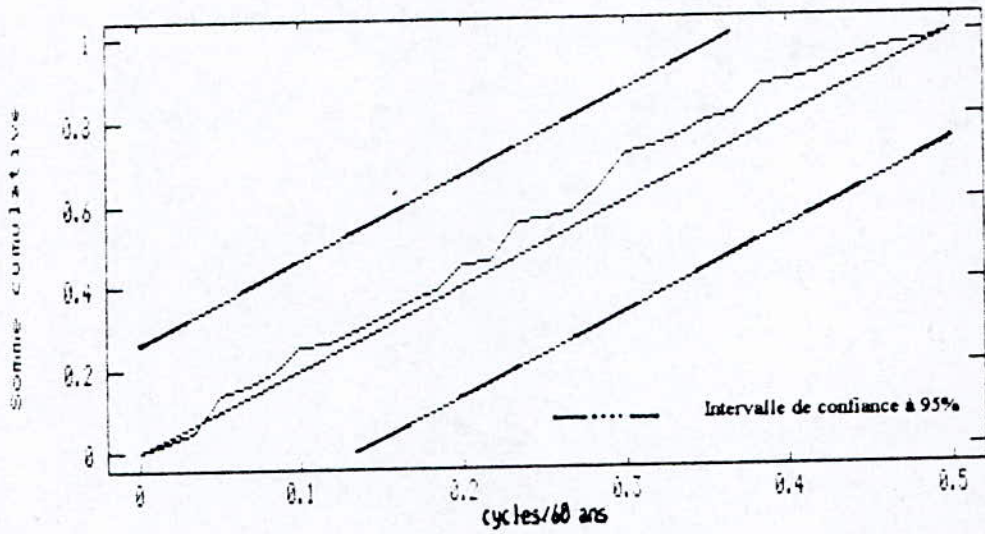


Fig.(2.7)

Périodogramme cumulé des résidus du modèle ARMA(1,0).

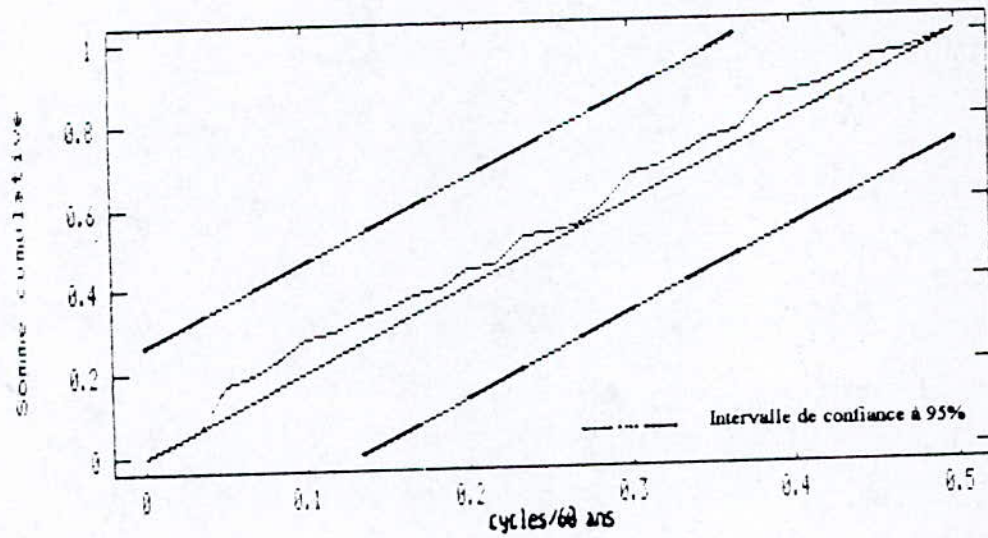


Fig.(2.8)

Périodogramme cumulé des résidus du modèle ARMA(2,0).

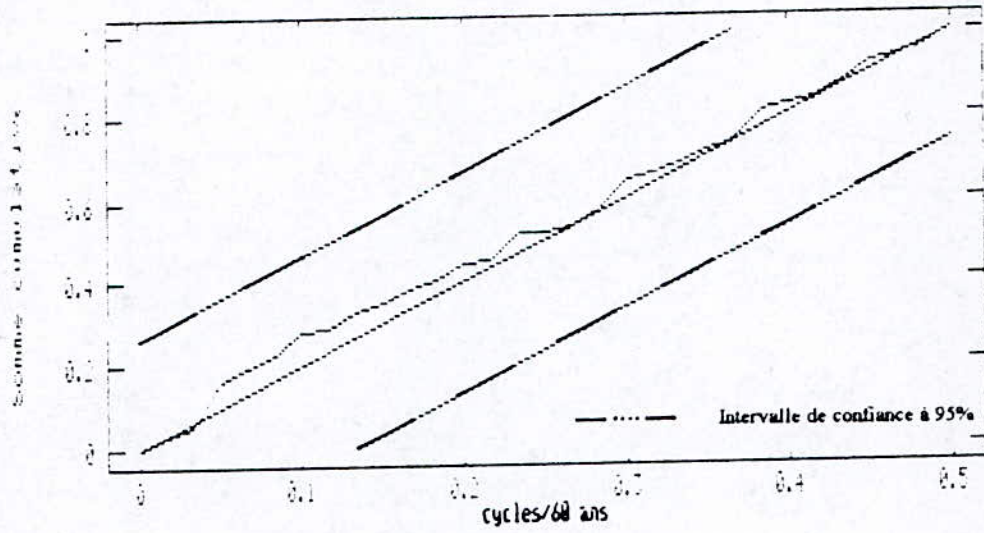


Fig.(2.9)

Périodogramme cumulé des résidus du modèle ARMA(1,1).

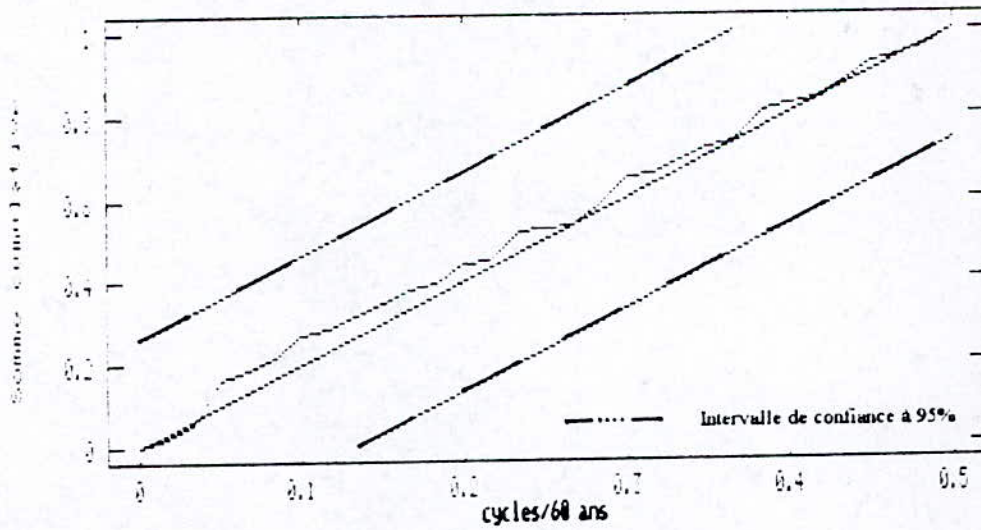


Fig.(2.10)

Périodogramme cumulé des résidus du modèle ARMA(2,1).

En résumé, on peut conclure que les quatre modèles remplissent la condition d'indépendance des résidus avec succès.

b. Tests de normalité des résidus:

-L'ajustement graphique:

Afin de tester la normalité des résidus, on leur a ajusté la loi normale. La représentation graphique est donnée par les figures (2.11) , (2.12) ,(2.13) et (2.14) correspondant respectivement aux modèles ARMA(1,0),(2,0),(1,1) et ARMA(2,1) d'où, l'on peut dire que les quatre séries de résidus sont normalement distribuées du moment qu'elles s'ajustent bien à la loi normale.

-Tests du coefficient d'asymétrie et de celui de Kurtosis:

Ces coefficients donnés par (2.13) et (2.14) ont été calculés et les résultats qui sont présentés dans le tableau (2.15) prennent tous des valeurs qui sont très voisines du zéro. Ceci confirme la normalité des séries testées .

Tableau (2.5): Tests du C_s et du C_k .

↓Modèle	C_s	C_k
ARMA(1,0)	0.5320	-0.2410
ARMA(2,0)	0.4252	-0.2672
ARMA(1,1)	0.3918	-0.4459
ARMA(2,1)	0.4037	-0.4303

c-Test d'homoscédasticité:

Si on divise chaque série des résidus en quatre sous-groupes, on aura $m = 4$. Le chi-deux à quatre degrés de liberté, pour 95%de confiance est : $\chi^2_{0.95}(3) = 7.81$. Cette valeur est nettement supérieure à toutes les valeurs que prend la statistique Q , et ceci pour les quatre modèles, comme le montre le tableau (2.6). On en déduit l'homoscédasticité des résidus pour l'ensemble des modèles ajustés.

Tableau (2.6): Test d'homoscédasticité des résidus
des modèles ajustés.

$m = 4$	ARMA (1,0)	ARMA (2,0)	ARMA (1,1)	ARMA (2,1)
v_1	14	14	14	14
v_2	14	14	14	14
v_3	14	14	14	14
v_4	14	14	14	14
v	56	56	56	56
C	0.297	0.297	0.297	0.297
S_1^2	34.01	32.69	32.46	32.55
S_2^2	26.81	26.48	26.21	26.20
S_3^2	23.95	23.90	24.11	24.18
S_4^2	29.98	24.30	24.27	25.44
$\sum^m v_i \text{Ln } S_i^2$	183.96	183.54	183.4	184.1
$v \text{Ln } S^2$	184.95	184.23	184.07	184.75
Q	3.330	2.320	2.250	2.180

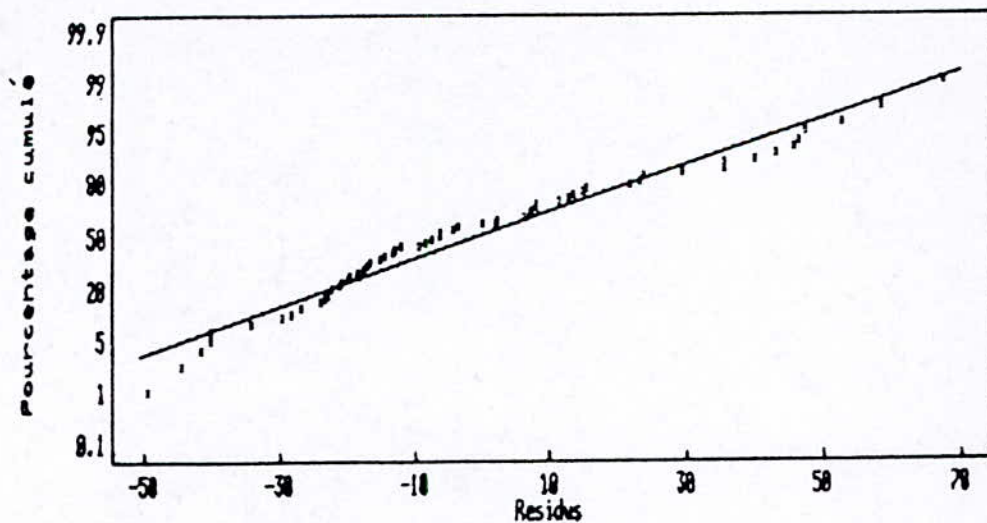


Fig.(2.11)

Ajustement Normal des résidus du modèle ARMA(1,0).

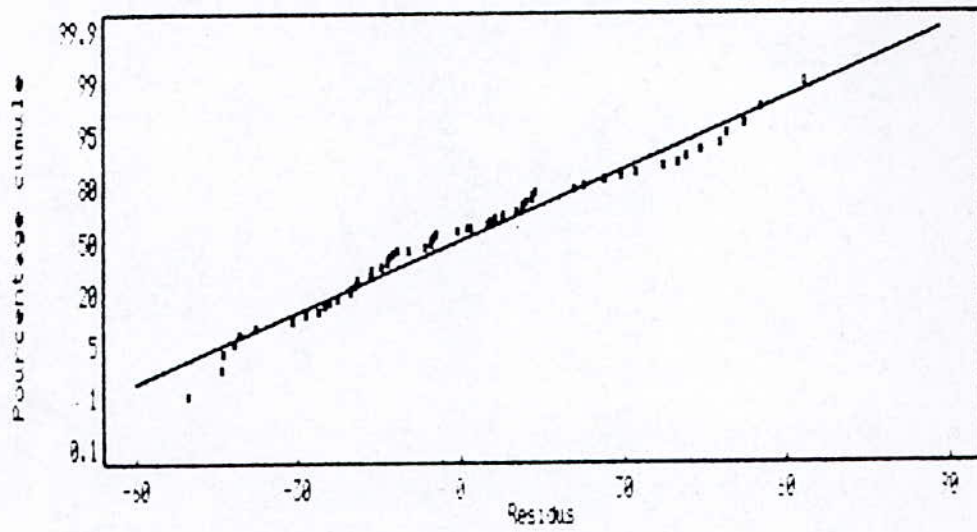


Fig.(2.12)
Ajustement Normal des résidus du modèle ARMA(2,0).

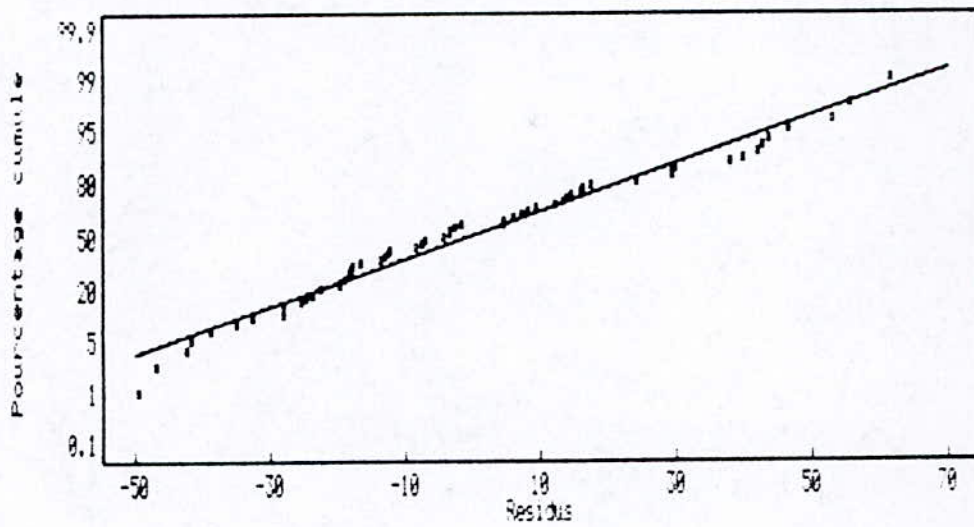


Fig.(2.13)
Ajustement Normal des résidus du modèle ARMA(1,1).

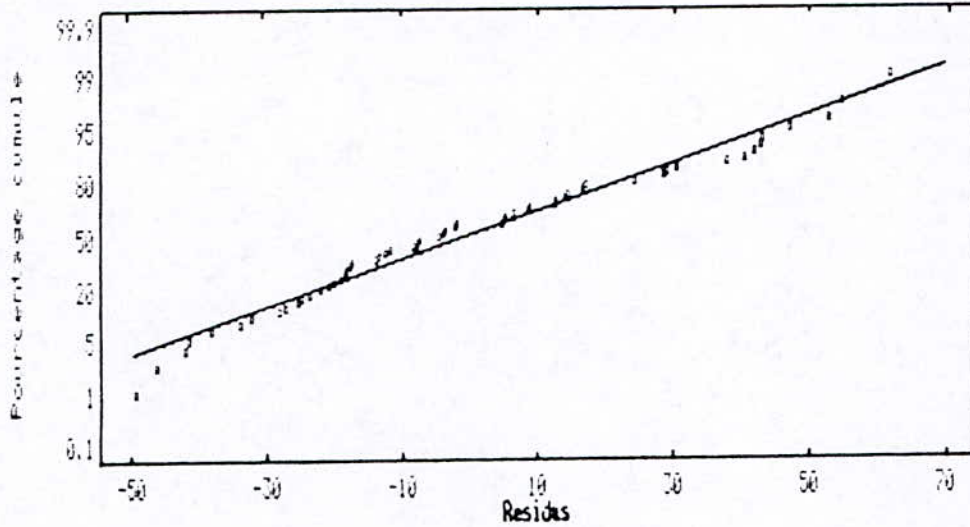


Fig.(2.14)

Ajustement Normal des résidus du modèle ARMA(2,1).

d-Test de parcimonie:

Le tableau suivant, présente les valeurs des différents critères AIC, AICC, BIC et FPE calculés pour les différents modèles ajustés. Nous remarquons d'une part, que pour chacun des critères, les valeurs prises par ces derniers, en passant d'un modèle à un autre, sont très voisines les une des autres, d'autre part on constate que chacun des critères AICC, BIC, FPE présente un minimum correspondant au modèle AR(1) (ayant le minimum de variance) à l'exception du AIC dont le minimum correspond au modèle AR(2); ceci s'explique par la tendance de ce dernier critère à surparamétrer les modèles ajustés.

Tableau (2.7): Test de parcimonie pour les résidus des modèles ajustés.

Modèle ↓	σ^2	AICC	BIC	FPE	AIC
AR (1)	771.405	396.45	402.39	797.55	396.24
AR(2)	780.412	399.36	405.75	834.23	392.24
ARMA(1,1)	778.087	399.19	407.93	—	398.75
ARMA(2,1)	784.569	397.61	406.82	—	394.57

e-Test de ressemblance des caractéristiques statistiques :

Afin de tester la reproduction des caractéristiques statistiques requises, nous avons procédé à la génération synthétique. A cet effet, chacun des modèles ajustés a été utilisé à la génération d'une centaine de séries homologues. Ces dernières ont fait l'objet du traitement qui consiste à calculer la moyenne, l'écart type, le maximum, le minimum, le coefficient

d'autocorrélation d'ordre un et le coefficient de Hurst. Les résultats de ces traitements figurent dans les tableaux (2.8) et (2.9).

Tableau (2.8): Paramètres statistiques des séries générées.

	Moyenne μ	Ecart type σ	Maximum	Minimum	r_1	K_H
		MODELE	AR (1)			
Série Historique H	68.48	29.76	137.3	12.25	0.353	0.84
Séries générées G_i	69.69	29.01	138.26	9.53	0.351	0.42
Maximum des G_i	96.63	37.93	186.12	29.41	0.580	0.62
minimum des G_i	0.00	22.05	110.61	0.18	0.157	0.14
M_e	0.0186	0.0115	0.0111	0.3415	0.0549	0.4402
		MODELE	AR (2)			
Série Historique H	68.48	29.76	137.3	12.25	0.353	0.84
Séries générées G_i	80.03	35.76	168.5	20.40	0.453	0.30
Maximum des G_i	120.35	45.78	200.7	45.42	0.690	0.49
minimum des G_i	0.20	12.58	130.4	0.35	0.120	0.10
M_e	0.0172	0.0125	0.0100	0.3318	0.0630	0.4302
		MODELE	ARMA(1,1)			
Série Historique H	68.48	29.76	137.3	12.25	0.353	0.84
Séries générées G_i	78.30	28.20	141.8	14.75	0.451	0.41
Maximum des G_i	100.01	39.80	180.7	32.40	0.680	0.58
minimum des G_i	0.10	18.56	122.3	0.17	0.102	0.15
M_e	0.0182	0.0120	0.0123	0.3218	0.0441	0.5412
		MODELE	ARMA(2,1)			
Série Historique H	68.48	29.76	137.3	12.25	0.353	0.84
Séries générées G_i	70.65	30.11	139.7	12.32	0.349	0.43
Maximum des G_i	98.84	39.30	178.1	29.91	0.521	0.61
minimum des G_i	0.01	22.00	120.2	0.20	0.170	0.12
M_e	0.0185	0.0105	0.0120	0.3425	0.0509	0.4312

Après l'examen de ces derniers, nous constatons que les quatre modèles reproduisent bien la moyenne, l'écart type, le maximum, le minimum ainsi que le premier coefficient d'autocorrélation. Cependant, le coefficient de Hurst qui dénote la persistance (phénomène de long terme) est très mal reproduit. Ceci est traduit par la moyenne des carrés des erreurs relatives M_e qui est de l'ordre de 10^{-4} et qui est huit à cinq fois plus forte pour le coefficient de Hurst que pour les autres paramètres.

En fin, il faut noter que les quatre modèles ajustés remplissent tous, avec plus ou moins de succès, les tests d'indépendance, de normalité et d'homocédasticité. Pour la reproduction des caractéristiques statistiques de la série historique, les résultats des quatre modèles sont tous positifs, ils se rapprochent sans trop s'écarter. Cependant, les résultats du AR(1) sont les meilleurs du fait qu'ils se rapprochent le plus de ceux de la série historique. En fin, les critères AICC, BIC et FPE optent pour la sélection finale du modèle AR(1) puisqu'il correspond au minimum de chacun d'entre eux.

Tableau (2.9): Caractéristiques statistiques des séries générées.

N°	μ	σ	max	min	r_1	K_H
1	70.28	28.24	134.62	07.16	0.317	0.272
2	79.51	32.03	163.38	09.19	0.467	0.502
3	82.94	37.93	143.55	03.09	0.417	0.343
4	67.40	23.05	121.21	15.06	0.241	0.512
5	71.72	31.85	159.07	14.34	0.367	0.620
6	71.88	25.91	160.07	13.15	0.320	0.385
7	73.78	27.90	147.64	11.03	0.325	0.506
8	74.03	29.81	139.21	12.78	0.374	0.292
9	67.47	26.40	135.19	21.93	0.365	0.455
10	73.19	27.92	148.67	19.46	0.306	0.279
11	73.62	32.68	156.32	09.69	0.501	0.579
12	69.23	27.13	132.80	01.71	0.310	0.256
13	73.57	24.07	131.17	23.08	0.255	0.417
14	66.47	30.80	126.27	01.27	0.422	0.439
15	76.52	29.50	147.21	10.20	0.328	0.173
16	71.05	32.71	131.13	00.18	0.260	0.418
17	69.60	26.34	147.81	03.12	0.258	0.414
18	72.78	36.68	186.12	00.57	0.468	0.287
19	67.03	27.45	127.32	05.42	0.287	0.429
20	61.75	26.35	124.23	07.93	0.252	0.545
21	70.57	26.82	125.81	09.49	0.340	0.449
22	69.78	32.38	154.26	01.92	0.448	0.265
23	81.50	34.17	168.66	10.20	0.429	0.412
24	69.22	31.29	141.09	09.08	0.456	0.142
25	63.94	27.80	144.93	05.45	0.224	0.330
26	58.76	27.66	123.21	06.37	0.277	0.351
27	76.26	25.62	144.89	19.90	0.292	0.403
28	66.62	32.96	138.35	01.52	0.263	0.501
29	73.89	32.32	153.22	03.35	0.266	0.282
30	72.21	31.02	124.86	00.42	0.201	0.257
31	62.11	26.61	136.66	14.50	0.339	0.421
32	78.62	27.17	139.58	15.16	0.402	0.330
33	70.46	25.53	122.63	09.41	0.306	0.286
34	73.89	28.05	133.57	14.00	0.354	0.267
35	63.63	25.03	110.61	08.89	0.296	0.347
36	79.95	26.56	143.97	08.14	0.312	0.452
37	67.29	28.93	124.12	16.56	0.271	0.304
38	66.05	24.20	114.48	07.54	0.270	0.412
39	68.62	27.92	126.45	18.77	0.296	0.501
40	65.48	36.45	142.91	00.55	0.580	0.355
41	65.04	30.81	147.35	06.17	0.157	0.500
42	69.85	29.49	147.02	02.78	0.231	0.334
43	66.87	28.23	154.13	01.94	0.374	0.420
44	71.13	26.52	136.61	09.89	0.394	0.354
45	82.16	27.08	148.22	22.74	0.255	0.409
46	72.37	31.56	153.57	02.58	0.388	0.297
47	64.10	29.12	126.91	14.40	0.508	0.489
48	71.02	32.76	146.32	08.45	0.387	0.420
49	71.62	26.25	136.49	20.88	0.298	0.355
50	70.46	24.76	116.53	08.08	0.247	0.497

Tableau (2.9) -suite-

N°	μ	σ	max	min	r_1	K_H
51	78.53	25.77	134.25	21.51	0.447	0.301
52	61.49	33.65	141.86	05.40	0.402	0.439
53	67.00	27.69	129.26	16.77	0.214	0.530
54	63.84	28.73	139.13	09.48	0.350	0.462
55	68.67	29.53	143.22	08.58	0.213	0.417
56	75.30	25.48	128.64	29.42	0.422	0.453
57	69.25	26.18	134.29	21.15	0.388	0.564
58	60.78	25.10	111.61	13.73	0.405	0.220
59	73.34	30.05	141.95	15.39	0.407	0.439
60	67.10	31.98	167.83	06.75	0.432	0.378
61	76.39	25.16	126.99	08.02	0.431	0.491
62	69.34	30.66	133.68	03.95	0.492	0.367
63	69.43	27.37	138.46	18.14	0.394	0.367
64	60.05	28.92	132.43	02.98	0.335	0.348
65	73.86	30.70	145.15	10.92	0.419	0.245
66	63.88	31.92	133.39	01.94	0.369	0.351
67	66.98	29.08	123.58	04.41	0.384	0.231
68	78.76	33.57	185.42	05.78	0.359	0.466
69	71.97	29.61	123.47	06.69	0.465	0.432
70	58.81	32.02	133.32	02.65	0.434	0.270
71	63.85	30.04	125.65	04.22	0.347	0.359
72	72.55	28.82	137.42	07.51	0.352	0.498
73	72.68	30.35	139.56	07.77	0.314	0.417
74	71.22	30.75	134.28	01.41	0.385	0.446
75	68.27	29.02	120.08	02.21	0.420	0.526
76	75.90	25.87	122.75	15.29	0.344	0.390
77	78.86	30.82	136.80	19.73	0.340	0.518
78	69.91	30.01	134.98	01.27	0.299	0.534
79	70.91	31.22	138.50	07.18	0.488	0.270
80	71.14	24.98	117.35	13.33	0.329	0.335
81	61.87	32.75	157.23	02.68	0.356	0.335
82	62.02	31.80	137.85	00.20	0.431	0.500
83	61.23	27.44	123.84	01.39	0.333	0.426
84	74.96	29.64	131.35	19.26	0.390	0.481
85	65.92	28.55	125.82	15.37	0.337	0.335
86	70.91	29.88	134.92	02.74	0.379	0.316
87	61.10	30.36	151.69	00.70	0.286	0.436
88	74.79	25.99	132.40	09.54	0.329	0.412
89	76.36	27.30	134.64	04.94	0.249	0.425
90	67.45	28.70	137.48	07.73	0.277	0.407
91	72.70	25.88	125.75	17.14	0.338	0.412
92	73.34	36.81	155.69	05.31	0.422	0.354
93	71.91	26.09	119.14	08.68	0.398	0.449
94	83.05	22.05	128.45	22.20	0.372	0.498
95	70.71	27.12	138.15	08.99	0.293	0.489
96	72.77	34.28	175.84	17.33	0.482	0.546
97	69.63	29.33	136.87	13.93	0.341	0.404
98	69.17	24.93	127.51	00.20	0.431	0.377
99	62.02	31.80	137.85	00.20	0.431	0.511
100	62.40	29.58	146.34	9.31	0.247	0.292

Tableau (2.10): Séries générées à partir du modèle AR(1) sur une période de 60 ans.

séries →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	37.80	81.27	10.34	76.10	77.91	70.61	35.98	93.01	90.92	46.89
2	86.10	91.97	26.62	69.94	80.20	65.06	50.66	106.66	78.12	71.83
3	100.32	94.54	55.91	74.31	71.96	74.07	49.64	78.25	95.12	55.86
4	76.46	53.68	112.42	64.66	78.00	13.15	86.02	22.81	102.10	33.60
5	7.16	118.66	76.89	16.53	71.57	33.91	93.76	48.17	39.66	40.91
6	14.55	102.01	91.13	95.30	79.20	87.79	95.36	31.14	31.27	86.98
7	61.84	163.38	105.58	72.38	40.23	87.61	58.34	75.15	60.34	105.02
8	48.77	84.48	133.78	46.06	92.49	82.97	41.71	80.14	33.73	112.37
9	101.65	58.42	125.29	64.81	61.74	65.71	30.78	44.28	60.56	148.67
10	103.82	120.32	39.12	92.96	50.66	39.35	36.63	12.78	37.80	76.52
11	82.15	64.63	07.70	57.78	15.62	63.29	131.19	59.76	76.02	83.09
12	106.73	106.23	39.80	82.95	51.12	90.94	104.65	64.91	77.66	87.98
13	58.31	68.52	73.40	38.57	56.42	90.05	93.97	48.88	100.93	86.48
14	98.44	63.18	73.31	33.10	51.64	85.23	94.72	74.65	54.48	93.17
15	66.17	118.78	65.54	15.06	33.04	74.30	104.32	114.15	62.82	62.90
16	54.08	89.09	129.76	26.92	59.92	57.95	113.49	139.21	62.89	40.36
17	59.34	74.33	120.51	77.73	68.38	69.93	63.69	74.79	75.81	55.11
18	37.74	76.83	140.79	58.75	42.27	108.84	68.86	58.57	85.83	25.37
19	29.90	56.98	117.45	68.65	14.34	54.83	99.18	39.55	116.00	138.21
20	69.04	71.27	124.76	94.43	86.35	74.17	66.71	50.47	97.01	96.27
21	44.35	64.68	143.55	76.24	81.21	71.69	72.52	126.55	77.37	74.65
22	54.12	73.51	114.30	68.40	51.27	69.48	119.25	99.26	100.30	72.48
23	13.69	60.25	74.14	59.48	102.77	64.49	147.64	75.76	101.17	19.46
24	62.31	72.29	47.53	27.20	57.73	76.84	88.96	75.60	68.50	69.72
25	55.80	21.83	66.72	56.36	84.04	68.23	60.92	99.75	41.61	74.52
26	58.16	42.02	80.49	64.97	30.44	71.00	81.88	135.22	30.91	66.63
27	81.12	80.28	40.16	101.97	39.74	56.11	108.00	97.56	29.20	76.34
28	71.10	50.46	08.90	57.89	55.34	103.53	105.58	86.59	55.15	105.96
29	62.44	83.87	03.09	75.55	140.09	87.62	56.77	42.88	89.66	61.61
30	93.37	26.18	94.05	83.53	95.75	59.21	79.99	99.75	73.25	64.47
31	77.77	28.98	89.02	85.23	58.45	64.79	78.00	115.91	62.81	67.55
32	134.62	09.19	108.79	83.29	77.69	63.09	67.25	82.38	30.55	36.01
33	73.18	30.17	61.87	72.72	26.95	73.04	57.45	49.25	49.51	89.69
34	118.50	100.95	90.00	58.16	65.19	107.72	28.86	40.57	63.10	60.32
35	122.20	63.93	54.83	40.24	30.58	72.14	62.25	44.12	60.20	84.74
36	92.54	39.32	86.51	50.22	54.82	42.71	49.54	86.62	77.81	25.35
37	65.96	45.62	106.70	43.91	30.54	89.76	64.98	82.82	103.31	54.46
38	101.13	50.55	133.59	61.40	74.17	37.44	82.02	117.52	118.95	71.62
39	60.01	31.18	93.72	46.83	137.03	49.48	50.82	111.15	58.28	89.71
40	82.68	40.02	90.82	80.53	85.09	27.34	83.47	96.28	86.67	95.00
41	123.91	89.69	106.25	66.62	82.05	48.67	45.95	39.01	69.19	57.00
42	45.94	92.42	129.97	76.24	54.03	48.64	104.43	32.38	33.65	30.50
43	45.67	75.40	108.14	74.34	92.27	42.81	109.48	108.24	57.89	33.84
44	75.72	59.54	121.82	59.88	102.25	48.01	68.99	72.20	72.23	65.10
45	73.99	75.89	95.07	95.57	74.28	93.82	58.71	96.26	26.42	107.80
46	44.70	112.21	46.96	121.21	80.33	88.61	32.86	99.58	66.91	93.50
47	106.64	113.86	121.23	84.95	134.96	127.23	92.63	82.24	66.87	105.51
48	96.14	122.22	24.96	88.30	106.71	86.84	68.12	65.44	111.20	76.09
49	77.69	126.20	92.59	62.53	61.59	135.10	41.33	50.73	135.19	54.28
50	50.86	108.59	63.96	88.41	88.46	160.07	77.19	45.04	53.37	44.07
51	63.81	101.74	92.77	15.92	119.05	62.10	89.15	49.84	21.93	85.31
52	75.81	88.96	136.12	59.84	101.16	93.42	67.84	37.51	77.73	85.05
53	86.31	88.00	74.35	82.96	118.91	31.46	82.90	61.40	70.07	73.58
54	121.20	81.94	108.25	92.54	159.07	50.55	66.72	117.15	31.05	58.13
55	70.31	73.67	71.05	100.01	87.78	63.33	73.30	74.03	69.61	50.11
56	44.12	124.84	92.70	91.16	115.65	79.86	93.58	64.86	38.30	94.45
57	26.39	93.49	104.66	55.02	54.69	78.05	69.14	110.87	46.79	141.91
58	47.37	93.71	20.12	33.58	22.44	56.48	94.22	48.45	31.70	102.63
59	47.70	145.01	14.51	99.79	39.66	72.84	13.72	55.50	58.42	62.21
60	47.34	127.58	92.03	73.81	46.12	99.61	11.03	48.37	92.31	62.19

- Suite -

séries →	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	102.96	73.53	89.41	119.56	71.42	68.20	39.27	55.02	54.25	46.52
2	96.25	99.17	55.14	62.97	76.14	89.53	60.96	65.43	81.93	54.03
3	95.35	61.83	43.59	66.39	122.45	91.97	78.12	75.64	101.60	84.87
4	103.41	76.34	78.72	96.65	102.54	47.82	87.34	103.15	82.21	103.75
5	66.30	88.56	24.97	126.27	90.73	89.27	101.21	98.93	36.45	102.11
6	79.78	75.90	77.59	82.91	60.50	22.86	51.66	61.90	63.95	73.50
7	87.90	58.99	107.23	68.24	40.92	84.98	71.47	00.57	70.66	44.19
8	72.38	66.27	59.87	01.27	73.29	64.72	41.30	37.71	44.58	24.94
9	99.71	42.71	78.14	24.97	38.08	98.62	80.76	13.51	15.00	53.04
10	61.72	93.59	70.85	18.71	67.11	24.35	110.24	75.17	57.81	49.44
11	77.00	77.57	93.58	17.79	77.74	59.72	31.64	17.28	119.89	83.86
12	60.66	94.16	88.51	105.17	81.69	16.81	28.74	54.76	55.78	34.46
13	26.13	83.78	88.47	57.66	77.17	109.33	42.12	89.89	74.46	39.64
14	73.28	61.40	131.17	49.43	69.94	34.53	57.21	104.45	48.98	46.18
15	68.73	01.71	90.85	52.18	41.31	108.59	48.15	100.85	81.47	83.62
16	124.63	35.29	92.23	77.12	74.90	109.26	36.86	61.71	71.37	84.93
17	156.32	24.79	124.10	82.81	85.82	90.26	74.44	73.54	36.43	79.71
18	81.13	85.93	100.14	100.49	40.64	76.92	37.42	54.97	48.47	124.23
19	26.68	81.02	57.92	41.56	35.03	37.74	88.29	35.41	72.67	79.59
20	49.31	71.43	71.32	24.13	84.50	71.54	147.81	16.88	88.36	46.13
21	74.23	43.28	42.15	34.64	50.53	00.18	83.47	43.43	92.15	23.76
22	71.58	67.11	99.92	25.41	28.70	13.70	111.29	48.27	79.38	48.41
23	39.69	78.06	92.14	87.07	12.27	50.00	109.29	75.86	77.01	43.03
24	38.59	113.86	74.90	75.57	10.20	49.16	144.34	84.18	76.28	41.03
25	83.54	122.73	91.67	72.21	69.03	43.27	66.49	131.35	127.32	68.02
26	87.70	53.36	35.98	33.16	103.10	89.51	36.28	86.51	96.46	40.81
27	98.32	64.13	36.89	40.59	71.32	88.70	79.79	79.97	53.86	07.93
28	44.79	103.92	23.08	75.64	118.42	96.08	69.63	90.16	35.58	56.98
29	44.16	79.74	101.50	56.70	92.35	95.61	53.53	34.50	58.30	65.06
30	75.12	132.80	79.62	50.12	103.59	38.73	74.43	38.16	104.70	64.19
31	99.56	85.13	85.74	68.43	71.81	114.36	87.34	75.29	78.93	94.27
32	105.49	52.88	97.54	78.10	78.60	75.12	67.97	39.61	86.67	72.22
33	82.76	90.85	51.93	120.50	38.35	44.68	70.85	45.47	80.41	61.42
34	113.05	47.25	80.94	118.05	75.14	112.55	92.03	41.00	108.92	11.72
35	66.43	64.74	42.81	62.07	83.86	72.64	60.09	26.62	50.39	101.65
36	66.13	86.66	46.75	59.43	147.21	80.49	89.35	72.96	50.63	109.71
37	60.97	77.22	26.76	112.33	130.65	116.02	95.87	90.55	66.41	60.28
38	09.69	99.22	44.83	119.49	52.29	129.26	56.45	83.80	79.03	96.53
39	24.92	06.17	62.66	73.72	16.11	131.13	60.49	82.83	90.74	41.19
40	09.83	43.68	78.08	112.02	89.85	87.52	71.99	99.76	84.07	30.40
41	42.64	36.09	35.08	79.58	104.13	19.89	101.88	14.57	27.21	47.07
42	78.45	65.87	68.18	66.22	94.32	60.56	71.67	47.71	33.66	12.72
43	60.99	82.24	56.25	43.46	81.76	57.98	61.14	98.46	43.85	36.67
44	60.60	78.60	76.31	12.58	55.73	48.90	60.45	63.73	48.10	70.23
45	46.88	56.54	51.01	37.13	65.66	10.77	60.21	147.72	66.63	60.70
46	45.06	72.32	77.78	37.46	95.97	11.04	102.93	123.21	83.40	84.63
47	53.19	75.79	71.67	53.47	100.69	42.95	64.56	155.51	42.43	59.56
48	32.61	90.13	53.46	61.28	35.51	66.12	50.71	186.12	63.49	76.18
49	22.89	97.89	93.59	105.70	85.91	99.81	63.12	89.84	05.42	42.23
50	64.14	40.12	75.40	70.86	116.68	58.61	59.51	124.70	22.01	69.61
51	110.32	33.09	84.90	72.67	88.95	88.87	73.25	84.95	28.49	58.74
52	136.80	30.52	94.75	64.73	108.81	95.79	78.14	47.34	85.13	44.98
53	119.09	39.76	89.36	34.61	49.99	109.00	78.73	62.62	98.83	84.18
54	123.98	59.91	89.36	33.61	91.26	76.34	83.01	105.78	112.14	74.25
55	104.99	119.24	61.57	49.26	117.20	47.42	33.64	19.09	70.05	66.90
56	126.08	91.15	64.78	78.61	78.71	60.93	59.76	63.88	53.22	42.42
57	65.85	82.79	103.94	94.97	80.69	65.42	53.10	89.79	44.74	27.34
58	85.05	59.50	98.44	115.04	97.55	108.31	70.58	109.33	123.91	96.60
59	22.47	47.74	68.14	45.11	69.95	106.71	03.12	86.45	61.36	58.71
60	108.66	27.83	80.68	80.37	116.44	101.86	50.32	78.93	24.10	113.78

- suite -

séries →	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	69.72	110.93	97.27	54.20	45.98	76.17	83.35	02.42	69.98	16.64
2	109.19	154.02	130.97	47.80	70.00	33.35	71.23	45.43	54.12	68.34
3	75.24	92.26	64.42	83.32	116.59	15.54	29.54	78.84	153.22	25.31
4	72.82	22.90	73.85	70.60	45.55	06.37	52.42	27.65	75.17	21.07
5	64.03	33.49	77.48	70.47	67.71	92.75	48.85	105.97	105.36	67.25
6	110.88	62.72	72.58	71.39	56.80	35.63	71.96	129.50	94.53	105.31
7	125.81	68.22	76.87	87.96	55.98	84.92	100.07	61.81	67.89	44.57
8	79.37	26.65	29.08	97.26	81.97	123.21	117.13	88.69	45.66	91.14
9	113.02	32.31	69.27	75.37	55.83	53.82	81.96	92.30	78.34	75.18
10	85.84	55.84	85.63	30.13	113.89	75.82	55.45	57.16	81.69	22.03
11	65.45	56.29	67.28	71.77	66.59	51.40	67.95	95.15	34.83	57.95
12	67.30	79.86	90.74	43.42	75.30	31.98	92.18	59.84	30.48	100.78
13	61.34	58.01	39.03	100.74	102.28	69.23	73.15	61.28	36.23	105.73
14	112.37	91.30	54.74	88.13	71.59	10.27	76.73	36.21	106.24	53.54
15	114.08	95.86	29.43	87.70	63.89	17.11	144.89	10.62	41.66	123.74
16	69.85	33.72	93.93	80.61	69.67	59.62	106.53	34.58	40.04	65.63
17	73.56	53.17	41.96	44.42	59.92	32.48	43.28	01.51	76.39	100.34
18	66.11	25.58	93.07	46.61	89.96	72.58	19.90	97.13	59.56	75.63
19	104.55	32.74	116.66	80.42	99.43	59.57	48.39	70.42	104.28	55.13
20	82.27	26.11	68.12	85.77	58.62	51.05	95.00	61.06	55.30	52.88
21	103.63	41.77	44.09	55.25	59.60	21.98	82.73	82.85	49.11	18.61
22	83.66	79.15	104.80	71.50	32.77	68.53	69.69	117.44	61.38	69.14
23	40.69	58.13	73.29	64.11	100.49	46.14	95.09	127.79	82.52	37.64
24	81.25	60.40	56.19	39.25	90.45	33.43	85.50	43.129	61.32	83.64
25	79.23	79.25	114.80	141.09	93.71	62.10	58.38	69.19	03.35	99.71
26	95.13	49.70	168.66	140.94	30.45	80.69	55.86	28.62	64.88	74.08
27	70.41	56.27	119.37	124.72	48.99	60.19	101.67	74.74	73.26	100.18
28	114.06	71.09	130.87	104.50	74.96	50.97	107.03	75.77	87.35	64.55
29	71.28	98.12	97.31	137.76	46.60	45.18	93.86	68.04	122.00	49.41
30	120.60	85.98	106.07	113.15	37.25	66.14	96.00	21.44	109.95	60.57
31	57.80	74.71	88.36	69.25	81.64	42.20	84.96	32.81	46.19	69.51
32	09.49	89.76	90.41	70.43	55.47	38.29	61.99	19.48	98.05	47.90
33	53.86	65.15	93.01	44.73	46.96	61.54	51.19	64.65	72.12	38.98
34	47.40	92.46	85.91	42.20	34.49	51.81	57.61	66.05	93.90	103.85
35	56.79	74.82	54.65	10.44	68.59	75.64	52.43	65.44	39.04	85.57
36	57.73	78.11	74.45	11.34	40.37	118.53	26.96	69.19	22.90	78.13
37	65.29	80.22	87.06	80.50	73.10	51.10	70.80	24.30	80.26	20.03
38	41.89	79.72	19.15	59.41	29.31	51.02	64.19	66.37	72.01	63.58
39	42.27	75.11	60.76	48.89	07.42	61.66	42.75	133.79	66.38	93.90
40	67.50	77.20	33.92	56.40	23.89	15.21	109.27	107.66	39.63	91.65
41	13.43	54.28	96.68	29.34	39.16	49.41	47.57	97.88	105.61	122.94
42	66.61	11.40	104.13	44.29	45.65	31.94	93.44	110.18	64.40	40.00
43	55.24	97.28	92.88	38.52	39.71	63.00	82.56	86.40	51.50	85.52
44	48.34	30.58	57.61	50.53	51.06	61.08	135.90	17.36	17.61	80.36
45	15.02	01.92	10.20	09.08	34.99	90.09	93.02	41.78	57.70	63.83
46	78.97	25.79	20.42	13.76	110.29	80.39	61.45	47.40	73.65	85.79
47	95.48	66.86	33.01	78.99	51.63	104.99	78.14	62.61	69.27	113.52
48	74.12	45.10	98.94	83.13	57.07	62.94	68.85	118.61	96.66	58.06
49	32.05	93.98	102.09	105.52	72.24	40.87	50.75	62.72	79.55	00.41
50	40.88	138.78	76.89	52.34	05.45	65.88	105.32	64.38	26.98	54.44
51	26.28	102.86	142.97	57.15	40.30	57.79	112.39	83.79	49.61	121.27
52	52.23	98.66	146.78	69.90	55.68	88.37	70.49	59.05	128.81	118.18
53	66.34	81.06	146.55	47.30	32.49	78.42	52.02	70.86	94.28	118.50
54	26.95	60.24	129.75	98.79	78.87	104.98	69.22	85.06	109.25	65.76
55	66.25	58.52	71.27	123.93	84.06	115.36	105.68	39.29	151.46	47.51
56	74.60	154.26	52.44	59.18	109.05	102.28	107.78	31.35	145.48	56.66
57	86.25	102.95	105.89	83.23	70.81	67.11	60.51	50.37	108.05	84.77
58	80.24	130.37	62.18	58.47	64.78	06.85	73.45	138.35	61.35	95.81
59	67.90	88.40	67.59	102.98	103.91	27.94	75.80	72.44	100.95	115.52
60	84.26	64.30	96.31	42.95	144.93	70.76	83.47	81.17	84.53	124.86

- Suite -

séries →	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	71.91	51.06	65.75	54.17	22.94	77.18	53.48	68.14	50.64	04.35
2	38.37	92.50	84.81	83.46	40.78	113.05	92.65	65.84	39.74	25.01
3	64.20	52.71	48.39	35.99	34.16	117.83	79.76	54.52	110.48	76.52
4	61.49	75.90	83.42	23.50	57.24	136.42	92.06	28.14	108.15	77.09
5	91.91	108.43	90.71	20.32	73.91	89.99	52.30	57.50	110.30	70.84
6	65.27	98.30	61.38	82.96	67.94	65.58	77.64	75.38	52.05	79.72
7	27.64	85.36	50.46	72.57	22.77	83.03	90.11	37.34	27.86	71.03
8	26.31	114.68	68.96	89.55	32.60	91.66	53.79	96.78	42.93	103.72
9	62.19	87.79	65.54	74.63	65.59	87.36	19.11	94.85	24.15	103.93
10	92.69	104.51	77.77	62.61	97.18	94.81	39.82	70.62	21.12	101.26
11	52.47	51.16	68.62	54.89	78.24	101.99	124.04	66.45	79.94	115.05
12	57.98	66.58	26.47	14.00	61.95	56.81	98.61	98.76	80.29	35.24
13	85.23	55.79	59.63	39.11	70.98	102.60	113.42	88.54	92.10	14.27
14	72.98	70.53	15.49	92.72	11.26	89.26	50.27	112.88	87.28	53.18
15	136.66	88.64	36.41	61.99	35.96	71.27	63.65	40.24	35.20	52.72
16	111.40	34.73	105.07	36.76	62.54	89.06	61.65	52.45	54.70	68.08
17	61.28	83.33	22.08	52.64	55.93	52.35	55.19	59.82	53.60	63.49
18	64.61	95.36	09.41	79.32	69.32	34.28	103.83	107.54	55.06	62.31
19	19.82	70.03	55.66	114.94	41.60	59.67	79.68	62.59	95.84	81.65
20	89.77	67.71	59.66	81.43	80.84	89.42	96.83	68.45	91.76	69.84
21	109.03	84.03	98.10	122.79	71.36	34.79	71.30	82.26	105.81	22.43
22	104.54	123.84	86.12	39.87	28.01	38.49	78.44	71.43	67.98	23.14
23	104.49	89.27	91.37	37.48	83.23	61.13	124.12	62.89	51.18	21.62
24	71.02	55.69	50.45	21.72	68.29	70.55	123.13	77.47	72.76	31.15
25	53.84	73.35	82.95	62.01	75.47	108.63	49.34	47.58	83.57	60.35
26	47.32	77.63	69.84	80.75	64.87	78.23	47.81	64.20	102.28	89.07
27	58.32	15.16	76.59	79.15	41.10	101.82	119.45	89.44	45.70	119.05
28	51.29	26.32	88.32	78.82	56.56	115.63	68.82	71.92	63.45	53.77
29	47.18	36.40	34.68	42.02	94.25	41.92	37.95	46.77	64.34	11.01
30	20.36	84.59	35.29	99.85	105.24	66.71	83.36	52.48	81.74	58.45
31	79.10	25.95	91.92	100.39	81.13	08.14	26.78	62.21	126.45	41.47
32	75.71	96.75	98.18	80.22	79.58	40.15	92.72	58.06	95.24	35.16
33	21.17	68.76	119.08	95.62	55.84	119.58	88.25	17.96	54.25	89.68
34	14.50	55.19	75.48	44.67	79.40	99.55	79.85	29.22	62.78	41.77
35	20.61	104.84	86.35	58.01	35.74	45.55	80.14	92.11	91.46	20.15
36	68.04	118.07	76.83	84.63	53.53	70.90	35.85	50.38	52.49	32.29
37	42.57	93.23	54.00	100.56	44.06	42.03	80.04	59.92	47.02	74.88
38	48.37	95.30	26.75	103.77	110.61	105.55	88.56	63.80	57.96	133.42
39	42.29	106.76	76.11	92.52	81.55	105.12	75.75	60.64	117.74	103.20
40	79.60	132.75	103.94	77.53	94.99	85.63	58.02	81.02	32.17	136.08
41	25.96	139.58	79.54	105.95	75.41	96.45	64.79	41.03	52.21	112.07
42	27.72	131.61	87.23	131.79	101.15	82.50	83.26	45.66	105.18	84.00
43	66.49	99.52	67.00	68.80	100.26	62.79	78.33	42.20	95.40	118.79
44	58.35	61.20	58.30	65.49	38.95	75.07	117.96	33.25	69.45	142.91
45	46.66	76.20	108.58	89.45	86.71	37.99	23.00	72.93	97.02	124.50
46	53.09	73.31	122.63	76.48	43.51	77.13	52.14	88.16	51.32	98.13
47	64.59	85.59	105.31	62.08	64.57	87.92	39.32	91.57	24.64	75.02
48	68.15	57.12	89.37	50.39	08.89	74.33	35.85	20.07	60.88	31.01
49	82.81	90.73	50.86	86.24	18.01	91.03	44.05	52.53	41.42	20.64
50	72.41	60.47	56.74	83.36	29.95	143.97	61.27	71.11	78.69	00.55
51	92.18	70.02	60.62	99.08	80.98	96.19	16.56	102.25	24.03	23.46
52	44.78	97.64	67.31	95.90	57.19	107.90	44.10	77.87	63.08	50.27
53	67.40	110.12	72.58	133.57	80.08	101.53	47.27	86.32	18.77	41.53
54	37.35	82.41	61.60	101.50	110.17	65.94	18.08	66.59	51.95	68.60
55	48.40	83.55	47.87	77.99	83.23	65.24	31.61	35.58	40.87	57.04
56	66.06	70.35	47.47	121.73	56.93	64.34	27.05	89.45	72.24	110.26
57	62.39	51.22	89.72	60.13	65.43	84.38	26.34	108.32	81.97	71.44
58	122.64	65.10	102.63	85.22	87.71	80.04	53.46	105.56	103.15	98.73
59	68.84	35.97	69.64	76.38	75.93	73.77	86.28	114.48	116.85	20.12
60	36.86	56.82	104.71	31.98	63.97	84.83	79.04	69.40	78.43	52.50

- Suite -

séries →	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	06.17	20.62	72.11	46.98	47.78	69.51	68.18	94.77	20.88	56.21
2	52.78	68.34	67.50	43.42	69.32	42.83	93.41	43.52	63.93	82.25
3	68.49	53.01	67.05	85.93	83.56	90.82	69.71	78.38	41.59	107.32
4	39.83	63.03	71.60	62.55	79.34	38.93	55.99	48.21	82.58	54.83
5	54.74	54.61	95.22	85.61	96.08	85.90	57.24	75.34	58.76	89.04
6	52.01	68.01	70.38	82.82	85.05	61.72	71.76	110.04	39.79	116.53
7	48.51	27.68	70.86	106.55	97.10	53.32	88.08	74.59	59.08	103.33
8	61.50	85.93	74.86	107.72	131.91	73.10	83.91	71.20	31.31	48.79
9	41.85	73.63	78.61	92.65	84.81	20.92	104.60	61.00	78.18	55.20
10	126.51	75.53	77.31	79.84	63.33	65.03	73.96	125.40	111.01	76.32
11	57.14	100.84	38.69	84.68	84.68	46.87	42.96	104.79	117.20	65.24
12	79.29	85.23	51.44	74.60	28.21	59.87	60.66	82.34	44.48	66.03
13	56.75	49.38	62.02	71.64	91.93	101.48	49.67	61.77	95.27	48.88
14	105.62	76.00	97.39	89.96	85.88	88.46	58.12	70.48	100.87	49.10
15	68.65	84.80	106.88	74.40	89.91	59.43	32.96	58.00	69.77	78.14
16	39.74	68.66	64.24	75.97	74.53	68.95	94.98	17.82	105.04	92.22
17	16.48	19.11	62.72	77.16	62.82	51.45	83.66	50.20	59.63	79.80
18	34.02	97.33	72.60	88.06	148.22	09.91	126.24	88.44	65.53	53.08
19	74.18	23.94	52.82	42.20	86.58	62.70	69.41	78.41	49.99	64.66
20	72.83	46.94	69.22	16.17	79.20	43.98	67.61	61.64	97.28	55.67
21	60.59	40.83	119.40	50.82	43.24	63.64	41.22	106.03	102.99	98.02
22	74.36	56.46	70.85	68.33	103.79	50.27	17.82	103.87	125.44	85.44
23	27.57	61.50	92.73	40.26	116.64	11.36	35.75	75.32	75.73	78.02
24	58.76	65.68	58.87	86.19	111.25	48.92	31.11	38.82	81.73	108.29
25	43.25	105.98	86.43	94.52	72.34	153.57	14.85	103.40	103.74	73.33
26	51.92	63.79	154.13	81.53	119.27	111.48	36.68	146.32	94.71	31.97
27	79.18	93.45	105.54	61.84	76.21	82.81	34.26	133.11	56.74	112.43
28	85.09	43.82	64.42	81.51	89.64	96.00	56.07	53.07	61.07	105.05
29	89.06	82.43	48.79	71.98	96.88	66.38	44.26	54.27	57.89	67.95
30	84.61	87.45	110.84	114.06	92.03	78.94	14.40	37.58	85.31	47.76
31	147.35	103.62	51.07	38.05	22.74	54.21	59.73	65.63	67.03	99.38
32	78.62	29.87	27.31	110.93	49.46	64.20	56.84	132.40	76.21	95.73
33	68.63	80.97	59.76	95.57	65.13	69.25	94.29	121.36	53.83	94.51
34	42.97	141.91	73.20	102.05	38.35	02.58	111.14	27.37	84.08	33.72
35	63.15	72.47	109.09	99.19	75.38	56.55	124.31	54.69	136.49	18.67
36	93.15	110.61	84.94	136.61	86.97	14.56	72.22	59.92	113.03	48.56
37	114.35	147.02	84.03	87.84	85.03	80.19	55.38	85.15	81.65	57.98
38	126.56	80.48	43.52	72.41	70.26	65.45	66.37	112.16	82.57	89.44
39	49.83	120.80	38.86	32.9	71.52	70.63	71.98	113.82	40.25	58.30
40	103.92	106.82	107.98	78.69	100.43	93.12	42.22	52.43	87.26	84.10
41	54.78	113.78	71.01	74.83	36.85	66.93	39.48	96.09	47.52	94.59
42	131.89	95.76	58.19	68.82	61.70	113.20	32.99	64.03	42.76	80.56
43	30.66	35.53	65.19	27.14	60.34	135.64	70.07	39.34	55.80	27.88
44	39.48	56.68	72.24	57.73	62.81	111.58	20.97	52.82	72.17	51.35
45	57.00	88.42	66.40	74.44	83.62	36.96	21.30	69.96	70.96	08.08
46	14.39	102.30	108.68	53.25	65.27	25.21	56.32	25.81	41.33	31.51
47	44.13	37.97	81.57	43.84	114.66	46.33	109.94	93.66	27.77	69.13
48	66.26	33.38	33.78	94.81	132.92	91.18	79.36	50.18	67.15	74.29
49	36.75	32.66	45.62	108.90	118.68	91.47	99.84	17.68	67.95	73.91
50	35.21	02.78	43.35	68.03	97.56	68.91	126.91	35.87	43.71	54.28
51	78.88	69.12	68.96	33.86	57.89	89.34	84.72	29.01	37.64	58.89
52	37.25	70.32	59.87	09.89	46.31	108.43	95.86	31.01	56.60	84.80
53	35.83	71.69	27.48	50.57	83.22	94.74	69.49	08.45	47.78	85.62
54	26.69	53.38	01.94	63.21	113.17	112.59	48.96	15.09	48.23	31.65
55	110.25	56.68	52.05	33.79	86.03	94.95	38.70	49.20	99.61	88.89
56	76.89	58.17	16.21	27.88	123.60	78.77	100.91	101.75	80.03	90.60
57	34.06	63.40	58.25	33.08	124.89	110.61	93.84	74.89	58.89	80.46
58	95.09	80.70	35.30	81.00	100.11	114.70	33.02	108.11	106.50	90.16
59	91.92	72.57	04.41	73.33	51.85	122.44	21.53	101.72	108.63	80.55
60	104.73	56.84	26.62	95.16	51.51	97.09	67.65	61.45	56.01	39.30

- Suite -

séries →	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	69.47	23.58	80.10	43.40	96.16	43.84	87.04	73.56	36.48	65.37
2	61.26	67.85	62.77	20.62	70.69	83.73	102.00	91.96	124.62	47.56
3	72.92	08.00	33.99	80.31	08.58	90.89	74.09	55.28	91.52	54.76
4	71.69	38.48	65.39	30.26	79.74	51.28	84.49	83.72	85.11	67.83
5	99.23	54.37	87.57	33.35	91.67	91.36	57.30	85.58	53.03	64.23
6	78.05	94.05	52.86	35.15	111.01	84.66	51.03	84.19	42.37	12.81
7	78.40	61.59	71.61	54.87	71.56	84.14	26.15	76.94	49.03	49.48
8	77.23	62.66	26.46	12.02	69.71	60.67	58.93	64.35	63.17	06.75
9	70.33	89.17	67.28	79.34	74.41	47.33	61.87	99.84	85.22	16.79
10	52.76	105.22	36.42	97.37	41.65	52.33	59.81	90.35	72.46	73.45
11	71.07	77.41	54.73	97.61	33.76	47.98	30.92	80.90	77.81	74.98
12	103.71	103.90	77.57	112.33	44.65	65.42	28.13	78.98	62.25	55.95
13	117.42	65.47	73.41	107.57	95.80	70.27	44.45	51.73	84.98	71.93
14	87.14	94.09	67.09	97.44	112.45	76.49	103.55	82.70	133.81	60.18
15	62.18	67.68	95.96	46.49	136.22	127.47	114.16	111.61	65.43	66.58
16	51.56	141.86	56.33	32.42	45.24	111.80	134.29	79.21	77.21	69.34
17	42.66	109.22	63.45	27.40	46.93	92.67	89.73	57.28	45.53	74.57
18	27.56	80.45	105.22	57.60	23.68	69.23	108.60	38.09	41.63	51.37
19	32.05	34.46	117.21	62.22	90.74	50.01	67.47	37.64	79.79	07.56
20	66.68	54.01	28.84	41.00	63.46	78.94	62.30	13.73	48.17	16.38
21	89.82	34.18	55.78	47.07	77.82	66.98	101.30	34.29	98.60	48.44
22	112.89	33.10	34.04	46.40	79.73	48.26	114.88	60.65	54.39	89.92
23	60.02	20.96	72.35	65.45	39.24	73.29	77.48	68.30	69.13	105.34
24	34.09	47.88	92.22	65.70	85.29	92.30	70.28	89.52	70.28	63.93
25	55.63	66.45	119.21	37.48	119.41	71.96	86.43	50.86	55.90	47.50
26	88.96	26.89	129.26	92.25	73.80	115.35	100.32	110.29	81.01	32.16
27	110.64	28.96	93.18	80.99	61.58	50.79	92.04	46.47	114.71	67.64
28	54.68	40.29	31.69	90.62	74.83	55.81	56.03	29.26	88.39	103.92
29	108.81	73.13	54.67	126.16	35.79	68.78	102.74	23.93	129.70	127.28
30	128.73	88.88	59.34	77.45	91.06	34.93	21.15	73.91	112.56	70.26
31	62.52	63.06	38.05	42.66	84.29	71.96	31.61	85.07	70.39	36.22
32	21.51	67.37	28.98	87.48	60.37	74.97	65.43	45.37	46.01	23.68
33	68.63	121.20	79.13	100.97	09.50	50.31	102.32	23.52	38.74	45.88
34	64.87	60.28	53.69	139.13	33.22	36.20	52.74	50.16	44.88	54.75
35	68.61	62.30	81.60	53.08	48.02	54.98	51.74	75.94	71.98	71.75
36	121.67	43.52	22.46	67.84	94.94	56.83	30.12	94.75	104.45	76.34
37	134.25	116.36	67.31	99.12	54.32	77.42	56.11	88.67	111.13	45.47
38	120.50	119.82	23.72	44.69	97.42	96.27	81.31	28.17	67.70	105.61
39	104.13	104.55	69.31	64.68	56.87	85.43	67.93	30.02	63.18	73.57
40	85.12	89.88	70.99	49.42	72.28	46.38	33.66	18.56	41.70	83.40
41	87.10	96.44	94.21	82.49	48.94	42.72	67.56	59.78	46.65	97.57
42	114.96	118.15	109.29	91.29	18.99	113.15	59.55	65.01	89.86	69.81
43	100.38	13.85	65.31	59.07	32.21	122.41	58.53	61.14	66.05	61.65
44	119.34	21.12	93.68	40.54	97.77	122.86	43.77	88.69	18.40	125.86
45	54.65	30.53	86.93	29.35	104.50	107.30	80.91	47.58	15.39	28.62
46	88.30	39.43	62.82	49.39	68.88	99.31	41.74	17.34	28.41	58.65
47	86.29	36.04	16.77	09.48	64.73	66.78	37.78	54.61	26.66	90.04
48	52.10	76.81	66.95	66.24	20.99	29.41	60.55	23.09	50.01	99.55
49	69.78	77.14	51.91	61.95	44.66	37.53	71.53	26.51	37.60	92.75
50	66.91	53.00	39.41	75.54	61.59	85.71	112.85	48.70	141.95	38.57
51	66.24	28.75	32.63	25.38	143.22	121.74	89.89	82.95	129.95	63.10
52	57.53	103.19	63.75	81.35	109.14	128.64	89.05	98.79	98.27	84.09
53	90.42	39.03	29.71	80.53	37.67	74.78	56.01	49.94	94.84	37.02
54	109.91	25.15	127.34	70.43	71.31	73.71	56.88	54.66	83.77	33.70
55	75.88	18.74	119.41	47.09	71.98	85.63	35.10	45.21	90.87	63.28
56	64.39	25.88	61.73	79.60	71.32	107.79	80.64	58.30	57.66	123.39
57	66.75	23.07	86.39	97.67	74.55	64.30	71.42	61.54	85.78	167.83
58	76.45	87.28	68.88	73.02	50.47	62.93	59.47	30.14	69.56	107.80
59	80.30	27.74	62.90	24.25	85.67	91.43	91.77	52.98	118.65	88.44
60	94.86	05.40	78.99	38.29	83.99	68.04	48.28	54.41	95.68	113.15

- Suite -

lignes →	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
1	73.98	25.82	41.76	47.87	42.75	60.33	23.02	97.31	81.32	65.21
2	66.67	05.94	59.03	77.35	69.72	85.24	24.43	67.32	101.99	29.56
3	100.14	03.95	64.09	100.46	131.00	22.28	32.20	60.03	58.55	51.81
4	31.95	44.15	23.67	64.15	78.48	42.15	48.19	80.90	60.09	120.82
5	22.85	60.16	48.30	52.20	70.90	01.94	47.42	145.65	80.03	108.38
6	57.07	64.51	74.90	51.30	32.63	54.82	86.62	128.18	95.65	34.82
7	49.16	70.51	50.64	26.15	54.29	76.35	86.20	61.88	97.92	24.64
8	39.45	104.03	76.65	44.65	80.60	53.67	108.30	107.88	16.12	34.49
9	26.38	109.09	123.33	45.94	56.51	25.60	60.42	90.34	06.69	13.55
10	84.82	72.35	88.71	93.82	77.47	02.39	44.53	81.79	62.22	39.03
11	72.56	66.98	92.73	71.75	107.15	16.23	26.57	57.50	90.34	48.45
12	78.93	51.23	71.15	28.84	55.29	79.93	55.15	69.39	119.09	40.91
13	70.35	34.03	64.31	104.64	41.87	73.77	42.90	50.95	53.81	69.35
14	41.37	34.77	122.43	68.86	76.21	80.22	83.69	83.72	84.44	99.68
15	67.95	29.73	74.87	85.73	101.40	87.92	71.60	136.31	79.79	118.86
16	109.34	71.16	40.38	96.34	49.55	104.22	39.76	70.91	83.76	54.73
17	76.19	53.23	54.91	34.55	18.93	115.88	62.92	79.49	56.63	43.52
18	91.28	63.32	58.69	41.16	21.05	95.08	45.69	68.53	40.07	11.53
19	49.03	91.82	69.03	85.98	29.37	60.56	81.59	92.79	77.36	40.20
20	91.13	87.51	63.96	71.08	55.74	59.84	86.75	133.62	66.91	21.68
21	44.72	55.95	59.34	5.25	39.21	84.04	84.82	99.61	26.11	50.04
22	72.13	74.53	77.05	45.93	83.02	57.54	110.24	122.67	66.09	85.98
23	91.59	100.53	35.05	60.29	104.26	70.98	55.85	90.57	47.57	75.19
24	85.56	61.18	24.18	121.28	104.72	69.05	13.49	93.38	51.07	108.43
25	91.25	43.19	31.13	71.19	69.24	115.06	58.92	68.19	69.47	63.89
26	98.57	123.00	18.14	77.72	67.89	70.11	57.66	48.49	77.08	13.45
27	93.11	89.92	49.79	41.25	55.37	91.26	49.98	74.70	93.41	50.50
28	90.98	78.14	120.73	56.30	56.60	38.18	71.30	83.64	67.66	31.95
29	91.92	60.07	94.97	61.55	74.45	13.18	68.99	66.83	15.38	39.44
30	102.24	61.94	59.09	51.59	57.14	19.34	70.35	86.81	7.66	49.01
31	123.16	82.14	91.95	53.12	44.58	56.72	103.70	105.49	29.10	51.19
32	126.99	82.12	65.07	57.28	22.74	18.35	91.78	61.60	46.18	93.43
33	107.90	101.53	84.95	15.59	89.18	67.62	90.12	75.49	31.26	58.32
34	80.07	121.29	57.52	15.93	117.12	81.23	55.70	67.84	69.73	58.76
35	77.10	133.68	27.47	09.42	90.38	44.25	159.68	58.95	82.26	84.27
36	92.58	88.13	61.33	69.04	63.88	51.49	89.22	96.89	62.04	73.46
37	78.88	128.49	68.18	46.97	70.81	51.58	102.70	15.22	40.16	77.62
38	84.75	85.13	32.20	25.62	10.92	91.95	80.75	57.40	93.18	42.35
39	67.21	123.98	94.70	62.66	45.06	89.73	78.86	111.13	89.32	46.06
40	61.89	107.84	90.09	61.59	63.82	125.61	88.50	49.51	72.29	48.87
41	85.26	21.81	111.76	61.28	71.97	133.39	31.68	48.60	100.90	80.07
42	100.25	44.53	120.19	02.98	87.45	46.79	54.93	29.05	113.54	47.92
43	102.63	40.79	80.70	42.44	145.15	48.50	61.02	30.84	117.05	66.96
44	72.64	33.41	71.27	88.18	140.54	66.41	36.85	128.74	115.31	80.46
45	95.99	93.49	44.45	92.12	89.95	69.12	90.18	185.41	123.47	101.92
46	90.99	45.48	98.37	132.43	104.16	32.24	68.22	99.63	113.85	63.61
47	67.25	33.48	138.46	68.07	63.47	84.21	73.82	110.77	115.09	118.11
48	59.22	90.09	113.09	47.94	75.03	45.02	36.27	77.97	69.77	34.79
49	63.24	122.28	77.00	59.50	121.41	91.73	52.88	73.78	99.58	51.71
50	114.03	64.16	75.62	84.99	94.39	66.42	75.63	80.89	86.24	52.21
51	94.62	68.98	25.37	77.69	63.24	80.00	76.72	102.06	36.30	23.71
52	83.53	64.09	85.57	52.17	93.31	35.01	106.96	100.26	71.88	02.65
53	122.28	27.78	79.72	37.23	43.97	29.18	60.02	56.53	92.08	15.71
54	54.40	47.53	60.41	39.54	88.90	103.40	102.00	29.70	107.13	39.25
55	80.06	64.47	55.03	11.17	110.93	93.60	93.28	39.56	80.21	04.74
56	64.29	59.29	55.00	35.27	80.00	12.37	74.81	5.78	68.79	37.39
57	61.98	58.67	51.37	56.37	127.51	06.13	45.25	61.74	37.94	106.43
58	49.61	58.71	67.08	100.73	118.85	83.64	20.37	34.09	109.91	79.20
59	08.02	96.47	69.80	97.72	54.84	99.08	14.61	28.29	60.60	114.96
60	50.21	78.04	79.15	112.64	75.26	101.07	73.96	102.75	49.03	133.32

- Suite -

séries →	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
1	25.25	34.83	90.71	01.41	31.53	98.35	94.85	77.35	67.74	52.72
2	56.51	15.41	79.94	66.28	34.72	108.31	93.82	132.11	68.08	63.66
3	107.89	55.57	74.77	118.55	65.94	106.00	121.33	80.11	33.06	39.95
4	67.89	69.12	95.13	93.77	38.47	70.83	124.52	21.69	54.71	94.43
5	39.15	39.41	33.65	71.74	14.36	107.93	108.40	65.20	110.27	83.49
6	74.13	85.33	26.45	57.44	02.21	122.75	110.71	117.23	69.92	81.18
7	22.72	90.04	71.28	41.76	23.75	100.64	74.73	64.94	54.49	73.19
8	30.62	82.80	70.20	42.66	78.26	87.18	119.97	116.47	29.17	65.78
9	44.71	97.59	61.59	60.56	90.53	82.69	46.01	92.83	15.20	65.10
10	32.92	64.03	65.40	23.11	109.44	44.36	64.62	85.16	26.48	50.12
11	42.09	84.50	107.38	22.11	82.21	44.83	131.20	95.04	27.46	42.02
12	100.07	137.42	89.63	02.66	110.01	91.47	63.85	65.33	56.36	89.16
13	122.02	71.17	80.11	47.94	104.27	42.91	38.95	68.54	91.16	44.92
14	94.26	75.33	99.37	06.34	119.03	72.59	56.13	77.48	100.90	80.87
15	60.24	77.72	64.88	69.86	73.75	82.92	45.21	81.56	44.07	98.80
16	76.23	123.38	87.05	90.80	89.37	109.99	22.36	88.37	84.98	55.65
17	77.24	94.06	100.31	89.98	74.45	111.26	46.49	65.07	98.18	78.19
18	125.65	102.36	87.89	100.87	72.16	68.29	85.64	95.21	85.24	89.38
19	84.66	117.97	82.34	134.28	67.12	82.00	68.35	98.81	65.44	90.61
20	75.13	92.23	27.57	106.74	55.39	51.45	79.35	88.55	96.36	83.83
21	64.72	41.47	104.93	91.33	69.08	53.39	53.85	102.41	64.17	24.35
22	97.73	37.01	79.13	90.64	66.76	62.16	24.69	61.60	83.03	40.85
23	80.34	63.57	33.77	94.75	72.24	67.68	32.03	95.05	103.47	39.68
24	40.04	67.94	39.27	62.15	46.09	77.73	91.52	62.41	70.05	78.01
25	98.94	94.40	55.36	110.33	17.77	59.55	104.13	134.98	75.61	41.90
26	50.15	56.54	54.52	89.92	73.08	76.97	100.48	34.50	80.41	65.15
27	95.76	11.59	65.47	85.27	93.40	102.24	50.94	105.50	69.43	65.80
28	81.75	99.54	50.51	98.00	58.05	67.84	74.68	116.03	48.70	75.54
29	36.58	87.76	138.32	93.21	32.69	82.9	119.10	57.22	43.99	79.93
30	65.44	38.60	75.02	94.52	106.05	90.98	103.00	70.35	120.10	99.95
31	115.69	32.23	95.41	40.26	91.49	15.29	65.74	66.24	52.37	63.15
32	51.91	29.39	27.44	67.89	72.54	15.89	42.41	64.19	58.81	73.59
33	76.74	59.57	21.40	62.24	43.15	54.85	19.73	15.77	13.20	73.34
34	70.87	70.57	18.39	87.64	56.90	56.18	38.86	18.75	94.33	117.35
35	10.93	111.98	114.96	67.20	82.37	80.79	34.42	77.05	68.48	115.57
36	38.04	45.00	139.56	44.26	50.78	112.21	93.28	75.19	81.43	77.09
37	87.59	90.80	134.19	38.06	89.70	118.96	33.10	104.54	70.21	78.12
38	93.89	57.75	90.48	91.36	92.78	76.62	101.59	85.40	48.59	73.02
39	101.77	74.42	93.23	90.06	120.08	54.43	118.93	106.98	69.73	44.70
40	108.79	79.18	114.66	74.23	85.80	68.46	42.86	93.75	94.68	37.90
41	49.00	54.22	99.59	32.38	81.91	69.12	108.90	62.44	123.49	32.89
42	43.57	88.37	74.39	85.16	58.53	74.90	110.74	54.91	123.14	19.24
43	15.92	83.82	86.79	57.22	46.34	101.18	112.62	75.09	100.67	100.73
44	09.53	86.38	105.83	114.94	57.65	75.97	49.94	46.94	89.64	98.53
45	04.22	86.56	65.31	64.58	90.85	66.53	101.03	36.28	125.52	61.90
46	48.57	67.71	37.03	110.40	92.62	122.72	88.71	33.32	138.50	54.09
47	50.25	42.64	55.18	96.69	82.58	44.19	136.80	33.59	112.77	37.24
48	76.75	7.51	74.12	29.13	19.81	47.68	132.68	66.56	83.69	88.20
49	86.80	43.74	91.55	61.56	91.01	75.53	70.14	67.66	38.06	80.25
50	91.93	38.58	73.60	116.62	102.23	103.95	71.69	69.83	76.25	83.53
51	55.79	39.97	86.20	106.84	53.05	54.49	61.24	14.63	94.59	13.33
52	75.46	105.73	65.34	71.83	23.66	78.46	82.43	01.27	87.58	58.14
53	70.81	92.58	90.95	49.24	95.60	45.79	75.71	39.07	76.91	101.07
54	69.27	74.66	49.75	108.04	106.83	55.05	95.46	58.86	07.61	107.25
55	10.48	96.86	68.36	84.22	78.03	41.42	71.15	54.92	07.18	102.83
56	52.10	107.46	35.19	59.41	27.84	52.49	77.94	76.02	43.20	108.36
57	66.34	72.42	23.23	56.48	25.93	69.56	77.28	44.69	19.42	95.56
58	14.51	114.31	44.92	30.75	34.25	121.99	81.65	48.44	46.30	110.17
59	59.42	88.02	83.93	44.33	87.68	110.70	94.49	08.70	82.94	58.85
60	52.95	101.60	7.77	71.28	81.65	61.32	88.86	76.68	86.79	67.90

- Suite -

séries →	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
1	57.44	48.92	68.58	56.41	34.59	27.30	107.92	72.30	57.57	19.97
2	45.58	79.23	91.44	54.43	43.05	101.30	85.32	64.62	68.30	50.05
3	52.24	98.55	55.77	42.77	32.56	97.62	34.06	88.62	84.50	134.35
4	60.93	45.67	57.51	50.31	125.82	53.11	51.07	47.52	116.62	93.08
5	79.63	73.37	75.27	101.04	93.97	63.56	95.62	88.56	44.11	44.23
6	117.55	64.45	78.32	71.77	89.43	80.44	51.25	82.77	47.72	65.39
7	157.23	55.45	123.84	56.07	76.25	134.92	23.78	72.36	52.21	35.04
8	105.20	50.86	75.70	98.29	23.47	61.98	32.30	113.14	62.08	49.82
9	31.04	36.48	17.98	79.95	52.30	73.54	57.87	80.82	63.10	19.56
10	93.86	63.00	85.34	34.67	34.41	73.30	60.78	36.56	86.25	96.32
11	23.43	58.53	107.39	42.34	100.99	45.98	85.17	40.35	72.41	76.41
12	41.37	38.65	74.73	73.44	73.02	56.69	79.06	85.27	81.09	57.01
13	42.48	22.62	47.18	131.34	49.02	92.89	87.19	34.74	68.19	76.36
14	35.47	63.08	81.79	85.59	80.01	48.08	62.73	73.76	103.42	85.33
15	02.68	98.71	49.79	106.08	15.37	51.31	57.18	59.54	92.04	55.71
16	67.55	60.06	84.71	66.87	40.06	11.53	30.99	41.76	71.14	77.62
17	40.89	84.29	30.51	65.51	75.36	28.73	62.91	51.74	77.42	137.48
18	10.26	98.02	35.74	73.77	119.63	45.98	68.77	87.20	120.39	118.57
19	94.30	123.66	92.65	110.28	92.38	02.74	77.04	67.46	74.21	97.04
20	60.23	52.24	91.50	104.20	94.88	66.48	69.65	93.69	112.06	111.06
21	36.92	95.78	56.67	123.20	87.89	83.28	24.43	87.20	114.33	79.44
22	17.07	00.20	72.17	79.23	73.83	113.69	28.70	75.92	81.38	29.23
23	36.55	69.28	77.90	78.25	62.41	109.05	43.23	39.11	53.45	57.71
24	119.34	66.55	73.84	50.67	97.96	112.80	16.22	49.81	134.64	62.62
25	80.62	90.00	54.05	35.01	52.15	114.65	81.22	09.54	109.26	41.39
26	68.63	91.84	82.00	61.13	103.01	58.17	35.38	47.71	114.65	78.40
27	45.94	24.63	41.02	69.53	95.45	40.78	42.76	110.37	109.54	84.09
28	20.53	70.31	59.04	40.69	124.09	49.03	34.53	91.20	80.81	38.17
29	28.72	50.49	66.81	40.65	68.49	03.20	69.23	74.95	116.53	36.03
30	30.56	66.39	56.15	59.70	40.45	49.20	104.87	88.05	76.66	48.70
31	89.84	113.27	72.47	53.94	48.85	50.15	56.63	109.25	68.57	55.09
32	43.17	62.75	54.37	98.11	58.83	57.83	53.78	53.62	62.57	29.51
33	93.21	31.22	13.70	25.28	71.88	84.57	96.59	62.76	12.68	55.54
34	71.35	56.28	20.20	68.92	75.21	81.96	112.65	54.98	56.97	70.50
35	65.00	100.90	77.75	63.87	63.29	51.63	75.41	79.34	55.82	51.25
36	07.85	133.75	100.44	71.67	65.22	64.65	105.15	46.14	79.74	60.10
37	48.08	137.85	61.89	68.64	75.48	110.59	90.48	65.70	88.53	83.56
38	07.70	113.60	47.92	33.11	68.93	103.40	87.23	55.18	74.38	54.20
39	59.58	119.29	18.79	74.75	25.84	100.47	64.80	92.79	92.71	75.44
40	39.36	68.51	01.39	46.38	39.32	84.07	92.73	69.55	75.80	07.73
41	31.04	53.00	19.00	97.19	37.68	120.90	91.03	79.12	102.27	72.00
42	41.06	42.52	46.77	98.89	41.46	83.12	37.86	82.07	97.80	115.96
43	80.57	35.26	35.50	54.49	37.20	82.39	03.40	83.19	104.19	45.40
44	76.07	12.30	58.04	104.58	31.45	70.82	23.75	36.34	98.21	35.64
45	74.57	20.22	45.42	95.62	50.19	94.61	76.12	67.21	46.00	93.29
46	59.63	22.68	68.42	19.26	39.95	08.83	30.68	118.08	40.63	98.90
47	83.59	25.57	22.86	29.33	49.89	47.29	27.96	118.29	94.20	58.62
48	117.10	22.58	11.47	33.67	79.09	116.47	00.70	123.24	84.27	74.68
49	114.28	35.13	44.84	62.85	121.31	98.55	37.55	87.39	70.16	78.64
50	94.91	27.87	54.25	65.02	121.56	96.39	57.86	119.40	29.90	72.43
51	74.83	76.07	73.57	109.63	20.00	66.42	51.90	118.54	122.36	36.04
52	100.55	69.70	66.94	124.05	43.50	63.73	47.27	100.05	50.09	32.88
53	83.94	62.62	84.79	96.43	59.09	52.55	97.08	132.40	37.45	49.82
54	79.16	60.49	102.01	88.16	36.13	75.93	78.57	58.79	51.68	59.04
55	25.46	24.89	98.88	119.89	51.54	59.33	55.87	69.39	80.22	79.29
56	50.76	91.61	30.45	131.35	74.76	76.51	151.69	55.31	70.80	59.49
57	46.37	56.13	32.70	65.77	49.63	48.96	68.14	70.77	48.34	74.31
58	88.79	40.03	61.41	116.56	100.78	73.70	02.30	101.87	57.61	77.58
59	56.10	16.18	119.69	124.19	93.70	85.37	81.90	63.81	04.94	111.19
60	103.97	55.36	62.20	112.71	71.13	91.92	47.77	56.33	75.69	122.35

- Suite -

séries →	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	43.92	38.10	50.96	79.36	53.01	68.91	60.99	92.52	68.58	93.98
2	74.53	90.37	33.02	72.89	46.04	49.62	13.93	86.37	91.44	72.73
3	93.79	89.53	51.60	85.26	46.69	72.05	86.01	92.37	55.77	100.94
4	123.96	62.99	96.46	86.22	11.65	65.57	24.00	72.58	57.51	107.61
5	78.23	53.93	79.14	98.61	57.73	28.92	58.02	37.28	75.27	58.88
6	119.69	64.26	73.44	97.45	94.51	17.33	68.58	26.05	78.32	34.70
7	117.56	14.78	84.68	92.63	108.80	39.45	120.99	61.74	123.84	49.58
8	125.75	26.89	106.34	79.26	67.83	60.33	62.26	74.97	75.70	110.11
9	98.19	09.33	80.89	79.24	62.57	101.17	49.40	55.07	17.98	94.35
10	44.74	05.31	63.43	77.14	23.04	175.84	85.07	83.53	85.34	84.01
11	86.20	19.22	62.56	96.07	51.74	130.45	90.31	69.79	107.39	146.34
12	79.31	34.34	43.33	66.78	127.14	158.68	68.29	52.38	74.73	99.48
13	76.06	98.01	26.91	57.50	38.50	115.89	43.79	68.54	47.18	60.67
14	71.60	75.55	46.89	59.27	92.55	85.59	22.08	29.35	81.79	48.09
15	33.64	95.94	35.25	87.62	120.43	106.13	53.34	29.78	49.79	57.30
16	31.13	77.96	38.45	119.95	133.03	93.89	58.12	49.60	84.71	09.31
17	82.47	75.77	17.67	112.74	138.15	72.60	120.77	49.15	30.51	28.07
18	62.51	85.27	34.62	106.34	95.60	76.75	99.99	45.74	35.74	84.86
19	64.11	94.19	100.23	84.41	59.23	58.34	43.48	62.76	92.65	89.62
20	52.50	139.07	62.02	82.09	49.53	51.21	78.04	40.90	91.50	61.37
21	58.77	29.69	96.94	105.85	67.77	51.49	35.40	22.31	56.67	30.46
22	31.27	60.28	96.30	85.47	81.36	113.52	30.19	77.57	72.17	63.29
23	78.95	37.85	99.67	74.06	117.24	107.58	72.29	102.40	77.90	14.66
24	103.67	102.85	73.14	81.97	77.92	48.58	107.49	61.46	73.84	91.18
25	104.33	52.38	08.68	77.33	90.69	73.64	71.29	54.67	54.05	44.29
26	67.19	107.19	38.05	45.44	78.67	80.09	45.90	84.26	82.00	49.83
27	104.73	117.40	58.83	68.85	63.04	50.27	39.64	71.11	41.02	47.85
28	70.78	130.17	75.77	40.10	52.73	107.61	66.76	18.35	59.04	31.78
29	75.42	116.79	64.92	73.11	44.97	82.67	57.33	09.91	66.81	41.00
30	55.45	53.78	63.64	96.15	84.61	129.12	62.09	52.21	56.15	86.24
31	17.14	50.19	44.68	63.18	08.99	93.12	88.09	38.05	72.47	22.37
32	43.05	76.94	88.64	87.62	67.85	20.45	60.39	29.67	54.37	75.73
33	97.22	107.97	89.83	55.63	96.87	39.66	84.66	82.54	13.70	103.34
34	94.46	130.64	106.10	22.20	93.76	84.18	27.10	124.03	20.20	100.58
35	62.89	129.59	87.84	74.73	86.31	109.79	56.42	127.51	77.75	84.53
36	43.46	128.62	58.44	127.23	85.76	72.77	46.27	75.17	100.44	72.54
37	54.57	63.91	59.68	103.96	50.72	60.24	74.32	63.27	61.89	54.95
38	59.77	50.42	92.96	102.93	91.31	79.73	105.35	43.44	47.92	64.33
39	55.09	71.80	78.91	98.54	67.89	83.62	116.06	46.89	18.79	22.41
40	60.30	77.26	119.14	73.37	60.83	115.72	119.42	26.95	01.39	100.26
41	56.73	33.08	75.97	84.38	43.27	86.94	114.07	59.81	19.00	76.21
42	63.89	101.41	94.56	128.45	81.14	31.43	86.22	40.72	46.77	55.92
43	87.69	131.37	96.93	114.77	48.79	78.53	108.86	50.03	35.50	36.25
44	82.35	71.19	96.48	111.33	61.13	48.58	61.32	28.81	58.04	66.84
45	114.54	14.99	111.73	37.60	54.16	79.31	42.99	78.53	45.42	31.09
46	105.72	81.28	57.00	68.77	51.13	18.65	105.20	93.47	68.42	22.45
47	37.02	54.48	58.81	88.17	78.97	38.72	136.87	64.92	22.86	43.29
48	80.75	86.80	74.54	85.67	40.18	43.95	100.27	30.70	11.47	56.48
49	74.84	78.08	93.08	101.07	62.05	53.87	94.48	57.39	44.84	82.44
50	47.38	28.98	107.04	125.23	87.43	42.30	81.97	76.28	54.25	55.86
51	46.72	47.17	83.23	84.88	85.29	97.61	48.50	81.83	73.57	71.04
52	81.54	73.53	50.83	34.54	46.13	104.55	79.24	43.97	66.94	54.25
53	119.37	41.81	73.39	66.39	59.30	85.54	109.59	74.36	84.79	22.83
54	66.41	92.00	41.66	81.29	44.36	45.01	54.11	51.15	102.01	38.61
55	36.47	38.51	113.33	82.72	70.57	72.28	29.55	38.81	98.88	13.93
56	90.89	21.16	79.23	83.22	75.05	82.00	39.15	61.56	30.45	77.10
57	67.89	75.13	86.45	51.71	98.73	18.41	58.38	43.12	32.70	50.53
58	74.56	110.49	84.80	72.34	53.97	25.98	65.28	41.86	61.41	35.72
59	49.06	124.08	104.87	104.81	76.48	56.10	31.35	57.66	119.69	106.91
60	79.53	155.69	40.61	96.90	77.55	24.05	56.49	22.90	62.20	45.27

2.5. Conclusion :

La méthode de Box-Jenkins présentée dans ce chapitre nous a conduit à la détermination d'un modèle simple et efficace qui représente d'une manière adéquate la série des apports annuels du Barrage de Béni-Bahdel.

L'analyse des séries générées montre le pouvoir de ce modèle de reproduire les caractéristiques statistiques les plus importantes de la série historique. Parmi lesquelles nous citons la moyenne, la variance, les valeurs extrêmes ainsi que le premier coefficient d'autocorrélation. Cependant, le coefficient de Hurst qui mesure la persistance (Phénomène d'autocorrélation à long terme) dans une série historique, est mal reproduit. L'utilisation d'un autre type de modèles à mémoire plus longue, tels que les modèles de ligne brisée, est donc souhaitée.

Il est à conclure donc que la méthode de Box- Jenkins s'adapte particulièrement bien au traitement des séries chronologiques, et généralement aux situations dans lesquelles les lois fondamentales, régissant la dynamique du processus étudié, ne sont pas immédiatement apparentes.

CHAPITRE 3

PREVISION
DES APPORTS ANNUELS
EN TEMPS REEL

3.1. Introduction:

Par définition, la prévision est le comportement future probable d'un processus. La confiance qui lui est assignée dépend de la nature du processus étudié et de la qualité de l'adéquation du modèle choisi pour mieux le représenter [28].

En hydrologie, ces processus sont complexes, non linéaires dépendant du temps et d'un certain nombre de paramètres incertains. Tenir compte dans un modèle mathématique, de toutes ces considérations est une tâche ardue, de ce fait, les formulations basées sur des hypothèses simplificatrices de linéarité, invariance temporelle ...etc., peuvent provoquer des différences substantielles entre les valeurs observées et les valeurs prédites [41].

Ces prévisions, si elles sont valables, forment la base pour les décisions concernant la gestion et le contrôle des ressources hydriques. Clairement, la fiabilité de telles prévisions gouvernera celle de ces décisions, et si en plus cette validité est étendue au temps réel, les résultats peuvent alors être interpolés ou extrapolés à n'importe quel temps puisque la nouvelle donnée est tout-à-fait valable.

Dans le contexte d'une utilisation en temps réel [2], il est important de distinguer entre les deux modes avec lesquels un modèle peut fonctionner :

3.1.1. Mode de simulation:

La sortie du modèle est basée sur son entrée. On peut éventuellement utiliser les sorties du modèle comme nouvelles entrées dans le calcul de nouvelles sorties. Cependant, il est exclu d'utiliser la sortie observée comme entrée du modèle, celle-ci peut être utilisée à des fins de calibration ou autres.

3.1.2. Mode adaptatif:

Ici, la sortie courante du modèle peut être basée sur les sorties observées antérieures du système. Ceci peut se faire selon deux façons :

-La sortie courante du modèle est exprimée en fonction des sorties observées antérieures en plus de l'entrée.

-La sortie courante du modèle est calculée en utilisant une forme adaptative telle que celle utilisée par le filtre de Kalman.

Dans la prévision en temps réel, il est nécessaire de travailler dans le mode adaptatif, ceci implique l'utilisation d'un modèle ayant une structure avec rétroaction, c-à-d que la sortie $S(t)$ au temps courant t est reliée aux sorties observées précédentes :

$$S(t) = f(S_{t-1}, S_{t-2}, \dots, S_{t-n}).$$

Une autre caractéristique, souvent évoquée dans la formulation des modèles de prévision en temps réel, est l'hypothèse de linéarité. Cependant, l'insuffisance de cette approximation qui rend linéaire la réponse très complexe d'un système hydrologique, est compensée par l'introduction d'un terme de perturbations stochastiques (résidus) qu'on additionne au modèle.

Dans ce chapitre, notre attention sera focalisée sur les modèles à temps discrets pouvant être représentés par des équations de différence plutôt que des équations différentielles. Cette restriction nous paraît assez raisonnable, sachant que les prévisions en hydrologie se font à des temps discrets. Pour cela, nous allons emprunter un outil bien connu chez les automaticiens : le filtre de Kalman.

3.2. Le Filtre de Kalman, intérêt et applications:

Dans ce paragraphe nous allons définir d'abord ce que c'est que le filtrage, ensuite nous présenterons son intérêt pratique à la lumière des différentes applications qui ont été faites notamment celles qui utilisent le filtre de Kalman.

3.2.1. Définition du problème de filtrage linéaire:

Si l'on dispose d'une série d'observations z_t qui ne sont que des mesures d'une variable x_t , entachées d'erreurs de mesure d'origines diverses:

$$z_t = x_t + e_t$$

Si x_t est décrite par un modèle d'évolution, le problème du filtrage est celui d'obtenir des estimations optimales (variance de l'erreur d'estimation minimale) notées \hat{x}_t à partir des observations : z_1, z_2, \dots, z_t . En d'autres termes, essayer de supprimer en quelque sorte la présence du bruit e_t d'où le nom : filtrage.

Si on considère que l'on dispose de mesures jusqu'au temps t , trois sortes de problèmes de l'estimation de l'état du système x_t sont intéressants [2] et [52]:

- Le filtrage proprement dit: estimation de x_t à $\tau = t$.
- Le lissage ou (interpolation) : estimation de x_t à $\tau < t$.
- La prévision ou (extrapolation) : estimation de x_t à $\tau > t$.

3.2.2. Intérêt et applications pratiques :

Le filtre de Kalman est l'un des outils les plus puissants dans la théorie moderne de contrôle. Il a été proposé par Kalman en 1960 [22], et se base sur le concept des moindres carrés.

La nouvelle méthode de filtrage que nous offre cet outil jouit d'une propriété très importante, à savoir l'optimisation séquentielle. Cette dernière est une conséquence directe de la structure de feed-back que possède le filtre de Kalman, et qui fait que le modèle est recalé au fur et à mesure que les sorties arrivent. Ceci, est un grand avantage puisque ça permet de prendre en considération les variations dans le temps des paramètres du modèle, ce qui est d'une importance primordiale en hydrologie où l'on a souvent affaire à des modèles non parfaitement stationnaires.

Ce filtre peut être utilisé à des fins différentes, sa fonction de base est la procuration des estimations de l'état courant du système, mais peut également servir à la prévision des

valeurs futures de la variable décrite ou à l'amélioration des estimations antérieures de la dite variable.

Depuis son introduction par Kalman en 1960, et ses applications initiales par Kalman et Bucy [23] et [61], le filtre de Kalman n'a pas cessé d'intriguer les chercheurs. Plusieurs recherches théoriques [13] ont été stimulées par les problèmes rencontrés lors de l'application de ce filtre à des problèmes pratiques par Jazwinski en 1969 [19], Sorenson en 1971[43], et depuis on a constaté l'explosion de son application à des problèmes divers.

Les publications les plus récentes du filtre de Kalman sont faites par Sorenson en 1985[44], par Russel en 1983[39] concernent la détermination de l'orbite des satellites, d'autres publications concernent des problèmes d'océanographie Brammer et al. en 1983[6], dynamique des navires et avions par Menahem en 1983[30] et Fung et al. en 1983[36], processus industriels par Bialkovski 1983[4] et Guy1983[16] et systèmes d'énergie par Wallace 1983[49] qui représentent les applications majoritaires du filtre de Kalman.

En hydrologie, on trouve également quelques applications comme celle de Wood en 1978[52] qui traite l'estimation de l'état et celle de Maissis en 1977[28] qui traite le problème de prévision en temps réel.

Ce qui est intéressant, en parcourant les différents articles concernant l'application du filtre de Kalman, c'est l'identification des problèmes en commun et la comparaison des manières au moyen desquelles, leur solution a été approchée et évaluée. En fait, malgré la diversité des problèmes et de leur spécificité, les aspects communs tels que les problèmes des erreurs du modèle, de la modélisation et de la description de la variable d'état ont des origines et conséquences identiques.

En fin, il faut souligner qu'à travers ces articles et dans la plupart des cas, les modèles de dynamique qui sont généralement décrits par des représentations très complexes et non commodes, tendent à être simplifiés et le concept de développement de modèles sur lesquels le filtre de Kalman peut être basé, est devenu quelque chose de fondamentale.

3.3. Modèle mathématique et problématique:

Si on considère un système dynamique dont l'état est décrit par une équation de différence vectorielle linéaire:

$$x_k = \phi_{k,k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k,k-1} u_{k-1} + w_{k-1} \quad (3.1)$$

- La variable indépendante k , indiquant le temps, peut prendre les valeurs : $k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_N$, où les k_i ne sont pas nécessairement équidistants.
- x_k : vecteur à N dimension donnant l'état du système au temps k .
- u_{k-1} : est un vecteur de contrôle (entrée) à 'p' dimension de l'intervalle $[t_{k-1}, t_k]$.
- $\phi_{k,k-1}$: est la matrice de transition qui permet le passage de l'état au temps $k-1$ à l'état au temps k .
- $\Gamma_{k,k-1}$: est la matrice ($N \times p$) reliant le vecteur de contrôle au vecteur d'état.
- w_{k-1} : est le vecteur de séquences aléatoires avec les statistiques connues : moyenne (μ) nulle et matrice de covariance (Q) supposée définie positive.

L'état initial est considéré comme un vecteur de variables aléatoires avec les statistiques connues: moyenne (μ) nulle et matrice de covariance (σ^2).

Supposant qu'à chaque instant k il ya m mesures z_k qui sont linéairement reliées à l'état et qui sont perturbées par un bruit v_k :

$$z_k = h_k \cdot x_k + v_k \quad (3.2)$$

- h_k : est la matrice des observations à ($m \times N$) dimension, connue.
- v_k : est le vecteur bruit additif de séquences aléatoires avec les statistiques connues: moyenne nulle et matrice de covariance connue (R) définie positive.

Maintenant, notre problème de prévision hydrologique en temps réel peut être formulé comme suit : Etant donné un modèle bruité de la dynamique de l'état du système (3.1) et une sortie bruitée ou mesure de celui-ci (3.2), peut-on trouver une prévision optimale (minimisant la variance de l'erreur de prévision) de notre état et notre vecteur sortie?

En d'autres termes est-ce qu'on peut estimer l'état x_k au temps t_k qui soit une combinaison linéaire de l'estimation \hat{x}_{k-1} au temps t_{k-1} et de la mesure z_k ? cette estimation doit être meilleure, dans le sens que l'espérance de la valeur de la somme des carrés de l'erreur de l'estimation doit être minimum :

$$E[(\hat{x}_k - x_k)^T (\hat{x}_k - x_k)] = \min$$

Sous certaines hypothèses, la réponse est affirmative. Ceci est obtenu en balançant l'erreur du modèle et celle de la mesure pour donner un estimateur de l'état avec une erreur de variance minimale [23]. Ce mécanisme nous est exactement procuré par l'algorithme de Kalman.

-Finalement, à quoi sert le filtre de Kalman ?

-Etant donné un modèle d'évolution de la dynamique d'une variable (équation d'état) et une série de mesures de cette dite variable, le filtre de Kalman nous sert soit à l'identification des paramètres du modèle encore incertains [52] soit à faire une prévision à court terme d'une série du modèle [28]. Dans notre étude, on suppose que le modèle est non parfaitement calé et on projette de faire de l'identification et la prévision à court terme.

3.4. Développement de l'algorithme du filtre Kalman:

Pour la dérivation du filtre de Kalman, considérons les deux équations (3.1a) une forme plus simplifiée de (3.1) qui est le modèle décrivant la dynamique de l'état, et l'équation (3.2a) qui est l'équation de mesure :

$$x_k = \phi_{k,k-1} x_{k-1} + w_k \quad (3.1a)$$

$$z_k = h_k x_k + v_k \quad (3.2a)$$

• w_k, v_k : bruits blancs gaussiens .

L'état évolue selon (3.1a) de telle manière que si l'on dispose de l'estimation x_{k-1} au temps t_{k-1} , il serait possible de prédire l'estimation au temps t_k tel que:

$$x_k' = \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} \quad (3.3)$$

Ceci, dans l'absence de toute information supplémentaire. Mais, si l'on dispose en plus d'une mesure à t_k , cette dernière peut être utilisée pour corriger et améliorer cette estimation.

En effet, en se basant sur (3.3) et (3.2a), on peut s'attendre à ce que la valeur mesurée à t_k sera $h_k \hat{x}'_k$. Cependant, une erreur d'estimation sur \hat{x}'_k peut être reflétée par une erreur dans la valeur de la mesure espérée.

$$e_k = z_k - h_k \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} \tag{3.4}$$

Maintenant, selon la pose du problème, l'estimation filtrée de l'état au temps t_k en étant au temps t_k , va être corrigée proportionnellement à l'erreur de la valeur mesurée espérée. On établira donc son équation qui est une combinaison linéaire de la prévision estimée et la nouvelle mesure:

$$\hat{x}_k = \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} + k_k [z_k - h_k \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}] \tag{3.5}$$

k_k est appelée matrice de pondération ou gain du filtre. Elle varie dans le temps et est spécifiée selon les conditions imposées au filtre à savoir:

- filtre non biaisé.
- minimum de variance.

k_k est déterminée tel que : $E [(\hat{x}_k - x_k)^T (\hat{x}_k - x_k)]$ soit minimale. Si on définit \tilde{x}_k tel que:

$$\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k.$$

Alors,

$$E [(\hat{x}_k - x_k)^T (\hat{x}_k - x_k)] = E [\tilde{x}_k^T \tilde{x}_k] = \text{trace de } E [\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T]$$

Par définition, la quantité $E [\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T]$ est la matrice de covariance de l'erreur de l'état filtré, notée P_k , $P_k = E [\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T]$.

Si on forme $\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k$,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= (\phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} + k_k [z_k - h_k \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}]) - \phi_{k,k-1} x_{k-1} \\ &= \phi_{k,k-1} \tilde{x}_{k-1} - k_k h_k \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} + k_k (h_k x_k + v_k) \\ \tilde{x}_k &= (I - k_k h_k) \phi_{k,k-1} \tilde{x}_{k-1} + k_k v_k \end{aligned}$$

La matrice P_k peut maintenant être formulée par:

$$\begin{aligned}
 P_k &= E \left\{ \left[(I - k_k h_k) \phi_{k,k-1} \tilde{x}_{k-1} + k_k v_k \right] \left[(I - k_k h_k) \phi_{k,k-1} \tilde{x}_{k-1} + k_k v_k \right]^T \right\} \\
 &= (I - k_k h_k) \phi_{k,k-1} E(\tilde{x}_{k-1} \tilde{x}_{k-1}^T) \phi_{k,k-1}^T (I - k_k h_k)^T + k_k E(v_k \tilde{x}_{k-1}^T) \phi_{k,k-1}^T (I - k_k h_k)^T \\
 &\quad + (I - k_k h_k) \phi_{k,k-1} E(\tilde{x}_{k-1} v_k^T) k_k^T + k_k E(v_k v_k^T) k_k^T
 \end{aligned}$$

Par définition,

$$E[\tilde{x}_{k-1} \tilde{x}_{k-1}^T] = P_{k-1} \quad \text{et}$$

$$E[v_k v_k^T] = R_k .$$

il s'en suit d'après les hypothèses faites précédemment, que

$$E[v_k \tilde{x}_{k-1}^T] = E[\tilde{x}_{k-1} v_k^T] = 0$$

du fait que $E[v_k v_{k-1}^T] = 0$ et $E[v_k x_0^T] = 0$

Ainsi, P_k peut être réécrite comme suit :

$$P_k = (I - k_k h_k) P_k' (I - k_k h_k)^T + k_k R_k k_k^T \quad \text{où} \quad (3.6)$$

$$P_k' = \phi_{k,k-1} P_{k-1} \phi_{k,k-1}^T \quad (3.7)$$

Si on étend (3.6), P_k peut être reformulée ainsi :

$$P_k = P_k' - k_k h_k P_k' - P_k' h_k^T k_k^T + k_k (h_k P_k' h_k^T + R_k) k_k^T \quad (3.8)$$

Kalman a montré que quand la trace de P_k est minimale, la matrice gain optimale est obtenue (voir Annexe (3.1)). Cette matrice est donnée par la relation suivante :

$$k_k = P_k' h_k^T [h_k P_k' h_k^T + R_k]^{-1} \quad (3.9)$$

en l'injectant dans (3.6), on obtient la matrice de covariance minimale:

$$P_k = P_k' - k_k h_k P_k' \quad (3.10)$$

En conclusion, on peut dire que les équations du filtre de Kalman se résument en cinq équations qui sont les relations récursives suivantes :

$$\hat{x}_k = \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} + k_k [z_k - h_k \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}] \quad (\text{mise à jour du vecteur d'état})$$

$$z_k = h_k x_k \quad (\text{mesure enregistrée})$$

$$P_k = \phi_{k,k-1} P_{k-1} \phi_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \quad (\text{prédiction de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation d'état})$$

$$k_k = P_k' h_k^T [h_k P_k' h_k^T + R_k]^{-1} \quad (\text{estimation du gain})$$

$$P_k = P_k' - k_k h_k P_k' \quad (\text{correction de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation})$$

Les cinq relations matricielles récursives indiquées ci-dessus, sont les équations de base dans le calcul du filtre de Kalman. Elles sont utilisées de la manière qui suit et qui constitue l'algorithme du filtre.

Supposons que la première mesure nous arrive à t_1 , l'ensemble des opérations demandées à chaque instant de mesure est décrit par les étapes suivantes:

1°- à t_0 , initialiser P_0 , x_0 , Q_0

soit $t = t_1$.

2°- former l'estimation projetée de la covariance de l'erreur d'estimation :

$$P_1' = \phi_{1,0} P_0 \phi_{1,0}^T + Q_0$$

3°- Calculer la matrice gain :

$$k_1 = P_1' h_1^T [h_1 P_1' h_1^T + R_1]^{-1}$$

4°- Former l'estimateur de l'état à t_1 en considérant la mesure z_1 :

$$\hat{x}_1 = \phi_{1,0} x_0 + k_1 [z_1 - h_1 \phi_{1,0} \hat{x}_0]$$

5°- Calculer la covariance de l'erreur de l'estimation

$$P_1 = P_1' - k_1 h_1 P_1'$$

6°- Soit $t = t_2$, refaire l'étape 2° en incrémentant tous les indices de un .

3.5. Considérations à prendre en compte:

Avant de passer à l'application propre du filtre, il faut tenir compte de ce qui suit:

3.5.1. Les conditions initiales :

Si les mesures ont commencé au temps t_1 , la première question qui se pose, concerne les valeurs de x_0 et P_0 qui doivent être introduites dans le calcul de x_k et P_k .

Généralement, l'état initial n'est pas connu précisément par contre, on connaît bien sa moyenne et sa covariance. Dans l'absence de toute mesure au temps t_0 , l'estimation initiale sera choisie tel que :

$$\hat{x}_0 = E(x_0) \tag{3.11}$$

$$P_0 = E(x_0 x_0^T) \tag{3.12}$$

Ce choix est satisfaisant et possède en plus l'avantage de rendre l'estimation pour tout k non biaisée (voir Annexe(3.2)). Il faut noter qu'une erreur dans l'estimation de x_0 et/ou P_0 est permise si elle n'est pas importante au point de rendre le filtre inefficace

(voir exemple en Annexe (3.3)). Ceci est dû au fait que cette information est moins déterminante au fur et à mesure que l'on avance dans les calculs, grâce aux corrections du filtre.

3.5.2. Les hypothèses d'application :

L'estimateur de Kalman est un estimateur qui est linéaire et optimal parmi tous les estimateurs à variance minimale, des écarts de prévisions .Ceci est vrai tant que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

- Les résidus sont des bruits blancs .
- Les résidus sont indépendants entre eux et indépendants des autres variables.
- Les termes non aléatoires du système sont parfaitement connus à chaque instant .
- Toutes les variables sont gaussiennes.

La dernière condition n'est pas absolument nécessaire devant la présence des autres hypothèses à ce moment, le filtre de Kalman reste optimal parmi les estimateurs linéaires à variance minimale. Si on peut vérifier ces hypothèses à priori, se sera évidemment la meilleure solution .

3.6. Etapes d'application du filtre de Kalman:

Si on résume les quantités qui doivent être procurées au mécanisme de calcul, on trouve qu'il faut d'abord:

1°- Définir le modèle stochastique que suit le processus étudié .Choisir la variable d'état x tel que le modèle dont on dispose puisse se mettre sous la forme linéaire de (3.1a).Ce choix dépend évidemment du but; selon que l'on veut faire de l'identification, pour calculer les paramètres du modèle encore mal déterminés, ou faire de la prévision en supposant que les paramètres du modèle sont parfaitement connus ou encore faire les deux en même temps .

2°-Vérifier les hypothèses d'application :

- linéarité du système.
- normalité des résidus.
- résidus aléatoires bruits blancs.

3°-On doit estimer les conditions initiales \hat{x}_0 et P_0 .

-Déterminer les matrices h et ϕ .

-Connaître les estimateurs de Q et R covariances des résidus à chaque instant.

4°-Calcul conformément à l'algorithme de calcul.

3.7. Tests de performance du filtre de Kalman:

Pour tester la performance du filtre, nous devons étudier la dépendance des innovations données par (3.4).

3.7.1. Les propriétés des innovations:

Par définition, l'innovation e_k du filtre est donnée par l'équation :

$$e_k = z_k - h_k x_k'$$

$$e_k = z_k - h_k \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}$$

Elle consiste en l'erreur de prévision de l'état basée sur les observations $(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k)$ et possède une distribution gaussienne avec une moyenne nulle et une matrice de covariance égale à:

$$\text{cov}(e_k) = R + h_k P_{k,k-1} h_k^T.$$

En 1970, Jazwinski [19] a montré que si le filtre est optimal, alors les e_k sont indépendants (non corrélés) de e_s et de z_s pour tout $s < k$, d'où les relations:

$$E(e_k) = 0 \quad \forall k.$$

$$E(e_k e_s) = 0 \quad \forall k, \forall s, k \neq s.$$

$$E(e_k z_s) = 0 \quad \forall k, \forall s, s < k.$$

qui sont appelées, propriétés des innovations; elles nous procurent un mécanisme pour tester la performance du filtre. Ici nous allons utiliser les tests d'indépendance et de normalité déjà mentionnés dans le chapitre 2.

3.7.2. Stabilité du filtre :

Quand nous avons parlé de l'optimalité du filtre, nous n'avons pas fait allusion à sa stabilité vis-à-vis de la divergence. En effet, un filtre optimal n'est pas automatiquement stable et sa stabilité doit être prouvée.

On dit qu'il y a divergence du filtre, quand l'estimation qu'il nous fournit est entachée d'erreurs qui deviennent de plus en plus importantes. Le filtre devient alors instable et donc insatisfaisant. Le critère de convergence est donné par la matrice de covariance P_k qui doit être définie positive et minimale à la fin de la dernière itération. Elle doit donc converger vers le zéro au fur et à mesure que l'on avance dans le calcul sans pour autant lui être inférieure.

Les problèmes de stabilité du filtre sont reliés à la connaissance exacte des matrices P_0 , F_k , h_k , Q et R -notamment leur structures -et se traduisent par le fait que l'algorithme donne l'état erroné qui peut bien fonctionner à travers quelques données, mais qui n'est plus optimal pour longtemps. A ce moment, P_k ne mesure plus exactement la variance de l'erreur de l'estimation, et on assiste à une progression de l'erreur de l'estimation du vecteur x_k dans le temps.

Ce problème peut être dû au fait que le modèle a été utilisé d'une manière erronée pouvant être engendrée par une mauvaise estimation des paramètres, comme ça peut être le résultat d'une simplification du modèle lui même qui gère la dynamique du système. Il peut être accentué, quand les termes de bruit dans l'équation d'état du système, ou celle de mesure deviennent trop petits. Dans ce cas, la covariance de l'erreur devient tellement petite que le gain devienne lui aussi petit et par conséquent, les observations qui viennent au fur et à mesure, ont un effet minime sur l'estimation (voir exemple tiré de [33] en annexe (3.4)).

Il ya un certain nombre de méthodes qui peuvent intervenir pour éviter l'apparition de tels problèmes. La procédure la plus utilisée est celle qui consiste à modifier les équations du filtre de sorte que les mesures récentes puissent avoir une influence plus grande sur les estimations de ce dernier et plus les mesures sont lointaines dans le temps, moins devient leur influence. Ces modifications sont apportées par des ensembles de pondération ($1, e^{-1\tau}, e^{-2\tau}, \dots, e^{-k\tau}$) pouvant être appliqués aux observations ($z_k, z_{k-1}, \dots, z_{k-k}$) où τ est la mémoire du modèle.

3.8. Application aux apports annuels de Beni -Bahdel:

Dans ce chapitre, nous allons utiliser le modèle autorégressif précédemment décrit dans le chapitre 2. Celui-ci va être formulé dans l'espace des états, afin de répondre aux

exigences du filtre. On suppose que l'évolution de l'état est décrite par le comportement temporel du paramètre autorégressif du modèle, et on projette de faire de l'identification d'une part, pour connaître les variations dans le temps de la structure du modèle et comparer le résultat trouvé avec celui du chapitre 2. D'autre part, faire de la prévision de l'état qui sera utilisée dans la prévision à court terme de la mesure .

3.8.1. Formulation du modèle dans l'espace des états:

Dans le cas d'un modèle autorégressif, le système d'équations (3.1a) et (3.1b) s'écrit comme suit:

$$x_k = I x_{k-1} \quad (3.13)$$

$$z_k = h_k x_k + v_k \quad (3.14)$$

La variable d'état x_k est choisie comme étant le paramètre du modèle. Elle va être appelée ϕ_k pour éviter tout conflit de notation relativement au chapitre 2. L'équation de mesure n'est autre que le modèle autorégressif . Dans ce cas, les erreurs de mesure v_k sont les résidus du modèle et h_k n'est rien d'autre que la mesure au pas $k-1$. I étant la matrice unité.

3.8.2. Les conditions initiales:

Les conditions initiales fournies à l'algorithme de calcul sont :

$$\phi_0 = E(\phi_k)$$

$$P_0 = \gamma I$$

- γ : un grand nombre.
- I : matrice unité.

dans notre cas, nous ne connaissons rien sur ces grandeurs . Nous prenons :

$$\phi_0 = 0$$

$$P_0 = 1000$$

et d'après la formulation du modèle, on sait déjà que

$$h_k = z_{k-1} \quad Q = 0$$

$$v_k = e_k \quad R = 777$$

3.8.3. Résultats et interprétations:

Le filtre de Kalman a été appliqué aux apports annuels centrés de Béni-Bahdel. Ceux-ci s'étendent sur une période de 68 ans allant de 1925-26 à 1993.

Dans un premier temps, nous avons travaillé sur la période 26 -85 (période sur laquelle le modèle a été ajusté). Ceci nous permet de tester la qualité des prévisions faites une année en avance, de connaître également les variations dans le temps du paramètre autorégressif, et de comparer en fin la valeur que prend ce dernier en 1985 à celle trouvée au chapitre 2.

Dans un deuxième temps, nous avons travaillé sur la période allant de 85 à 93. Ici, des prévisions en temps réel ont été faites. Ces estimations sont effectuées une année à l'avance, la valeur de la mesure au temps k sert à corriger l'estimation projetée au temps $k+1$ et ainsi de suite.

Dans un troisième temps, des prévisions sont faites de 1985 à 1993 en supposant que l'on ne dispose pas de mesure. La qualité de ces prévisions, comparée à celles effectuées sur la même période mais en temps réel, nous donne une idée sur l'horizon des prévisions que l'on pourrait faire et qui soient satisfaisantes, ceci en l'absence de toute mesure.

a- Prévisions en temps réel une année à l' avance 26-85:

Etant donné, les conditions initiales et la série des observations, l'algorithme de calcul peut être amorcé. Les calculs sont faits selon deux étapes. La première est la prévision de l'état au temps $k+1$ en étant au temps k . La deuxième est une étape de correction (filtrage) où cette prévision d'état est corrigée moyennant la mesure qui arrive au temps $k+1$. En fin, l'estimation filtrée de l'état au temps $k+1$ est utilisée dans la prévision de la mesure au même temps.

Les résultats de ces prévisions sont présentés au tableau (3.1). La figure (3.1) montre les apports réels (observés) en trait continu superposés à leur prévision en trait discontinu.

D'après cette figure, on remarque clairement que l'allure générale des estimations du filtre varie dans le même sens que celle des valeurs réelles.

Les écarts de prévision dans la même figure paraissent relativement importants, mais en se référant à la théorie de ce filtre, ce sont des écarts optimaux. Ceci est prouvé par la figure (3.2) qui représente la matrice de covariance des erreurs quadratiques de prévision.

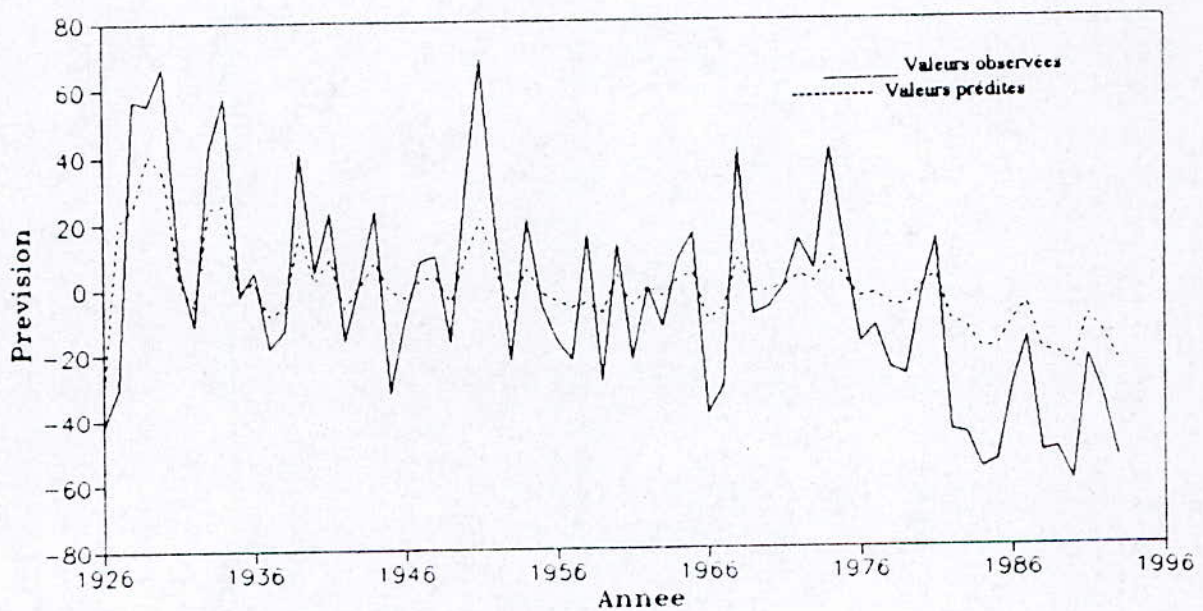


Fig.(3.1)

Prévisions des apports annuels une année à l'avance 1925-26 à 1992-93.

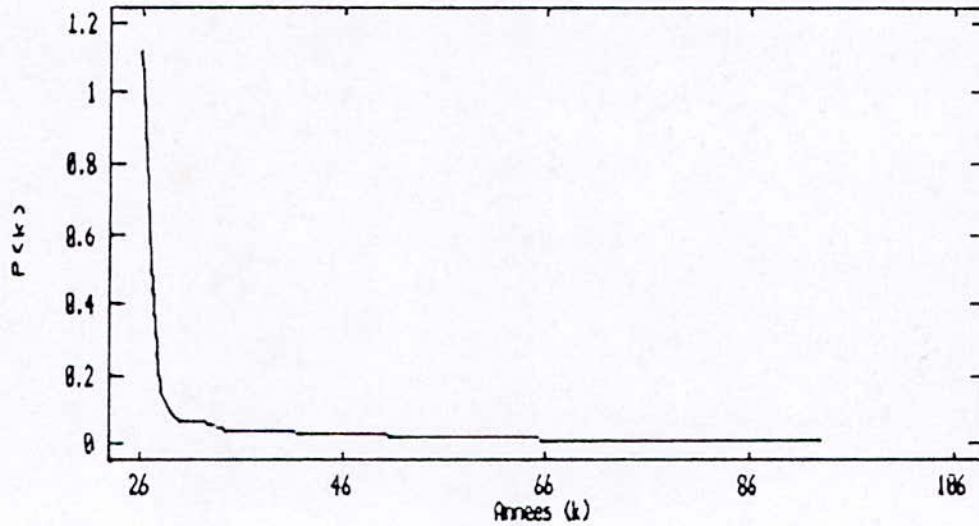


Fig.(3.2)

Covariance des écarts de prévision 1925-26 à 1992-93.

Il est évident que l'algorithme converge. Cette convergence s'amorce rapidement après les trois premières itérations. La matrice de covariance des erreurs quadratiques des prévisions tend vers zéro d'une manière régulière tout en restant toujours positive. Cette régularité dans le temps de cette matrice aurait pu être interrompue, spécialement aux points 25, 40 et 42 correspondant respectivement aux années 50, 65 et 67 où un apport relativement important a été observé. Cependant, ceci n'a pas eu lieu. C'est le comportement que nous espérons de l'algorithme, chose qui exprime l'adéquation du modèle ajusté et son pouvoir représentatif pour le processus étudié.

La relation (3.5) montre qu'à chaque itération le vecteur paramètre est corrigé par une quantité égale à l'erreur de prédiction pondérée par le vecteur gain K_k . Ce vecteur calculé à partir de l'expression (3.9) exprime la confiance courante du modèle estimé à chaque itération.

Pendant les premiers pas, le vecteur K_k (voir figure(3.3) et tableau (3.3)) prend de grandes valeurs. Ceci est dû au fait que l'estimation est inévitablement mauvaise au début, autrement dit on fait plus confiance aux données qu'au modèle. Cependant, avec le

Tableau(3.3): Variations du paramètre autorégressif du modèle de 1925-26 à 1985-86.

Année(k)	1925-26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$\phi_k(k)$	0.716	-0.690	0.445	0.741	0.523	0.515	0.471	0.585	0.477	0.476
Année(k)	1935-36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$\phi_k(k)$	0.470	0.466	0.433	0.407	0.411	0.385	0.379	0.381	0.340	0.338
Année(k)	1945-46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
$\phi_k(k)$	0.334	0.336	0.330	0.260	0.321	0.310	0.290	0.270	0.263	0.264
Année(k)	1955-56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
$\phi_k(k)$	0.271	0.276	0.276	0.283	0.270	0.262	0.259	0.259	0.256	0.258
Année(k)	1965-66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
$\phi_k(k)$	0.243	0.260	0.228	0.213	0.214	0.214	0.214	0.215	0.216	0.216
Année(k)	1975-76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
$\phi_k(k)$	0.213	0.216	0.221	0.231	0.229	0.228	0.215	0.243	0.279	0.342
Année(k)	1985-86	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$\phi_k(k)$	0.35289	-	-	-	-	-	-	-	-	-

b-Prévisions en temps réel une année à l'avance 86-87 à 93:

Ces prévisions sont représentées à la figure (3.1) conjointement avec ceux de la période 26-86. La qualité de ces dernières est remarquable pour la totalité de la série. Leurs résultats sont présentés dans le tableau (3.4).

Tableau (3.4): Prévisions des apports une année à l'avance 1986-87 à 1992-93.

Années(k)	1986-87	88	89	90	91	92	93
Observations y_k	-15.93	-51.45	-50.54	-60.28	-22.03	-34.18	-53.62
Prévision z_k	-05.84	-20.14	-21.21	-25.13	-09.33	-15.10	-23.7
P_k	0.01210	0.01162	0.01121	0.01065	0.01058	0.01041	0.01041

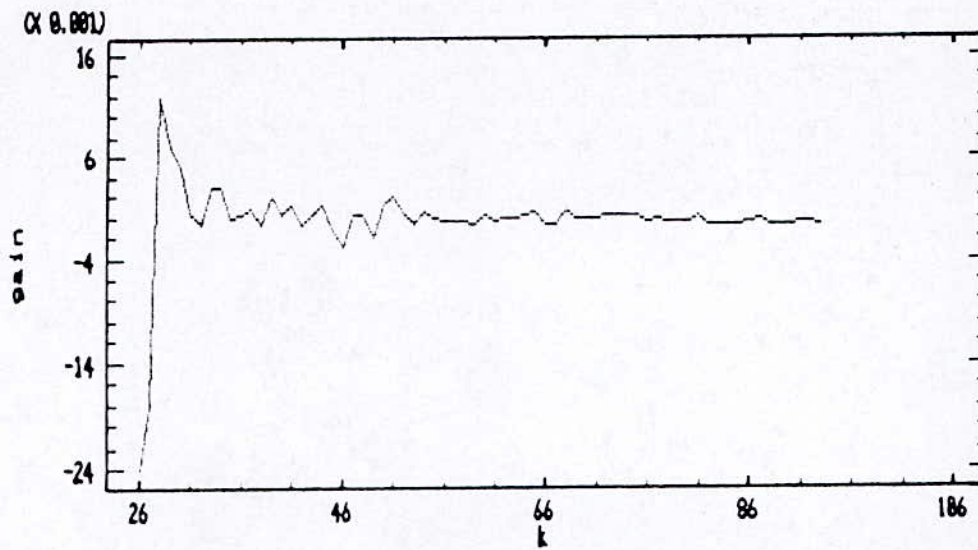


Fig.(3.3)
Gain du filtre K_k de 1925-26 à 1992-93.

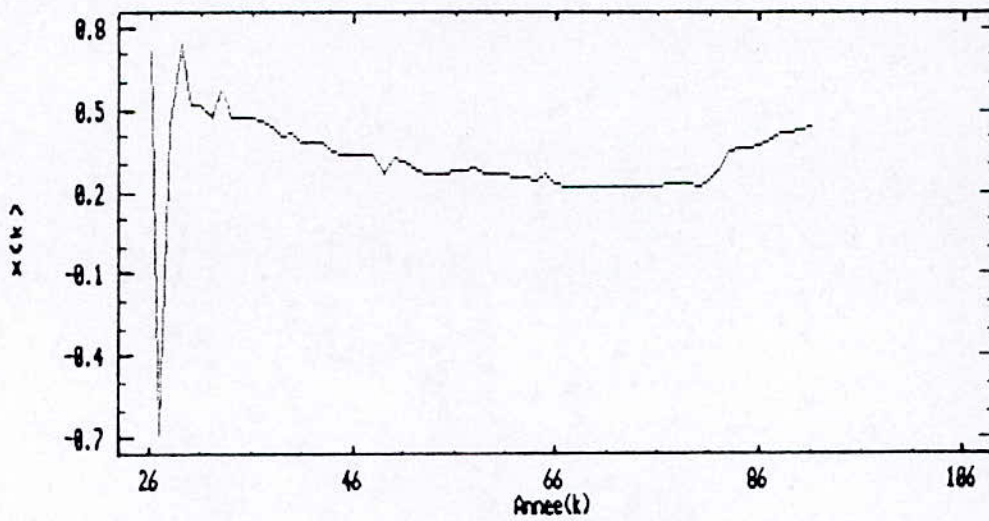


Fig.(3.4)
Variations du paramètre autorégressif $\phi_k(k)$ de 1925-26 à 92-93.

Ceux du vecteur gain et du vecteur paramètre sont donnés par les tableaux (3.5) et (3.6) respectivement. Leur représentation graphique est donnée par les figures (3.3) et (3.4) pour des raisons de continuité graphique.

Tableau (3.5): Gain du filtre de K_k 1986-87 à 1992-93.

Années(k)	1986-87	88	89	90	91	92	93
K_k	-0.00025	-0.00077	-0.0007	-0.00082	-0.0003	-0.00046	-0.00069

Tableau (3.6): Variation du paramètre autorégressif de 1986-87 à 1992-93.

Années(k)	1986-87	88	89	90	91	92	93
$\phi_k(k)$	0.3554	0.3670	0.3914	0.4197	0.4170	0.4240	0.4420

c- Prévisions à moyen terme 85-93:

Maintenant nous supposons que nous sommes en 1985. Nous n'avons aucune mesure des apports annuels futurs, et il nous est demandé de faire des prévisions à moyen terme.

Du moment qu'en réalité nous disposons des valeurs réelles et prédites sur la même période, nous pouvons dès lors calculer ces prévisions en supposant que l'estimation donnée par le filtre concernant la mesure au temps $k+1$ est égale à la mesure elle-même comme si elle avait été réellement observée.

Les résultats de ces prévisions sont donnés par le tableau (3.7). La figure (3.5) regroupe ces prévisions avec celles effectuées en temps réel avec un intervalle tracé à 95 % de confiance.

Les limites de confiance pour ces prévisions sont calculées par les deux formules suivantes:

$$z_k \pm 2 \sigma_e \quad (\text{pour une proba de 95 \%}) \quad (3.15)$$

$$\sigma_e^2 = 1/(N-n) \sum^k e_k^2 \quad k:n+1, \dots, N \quad (3.16)$$

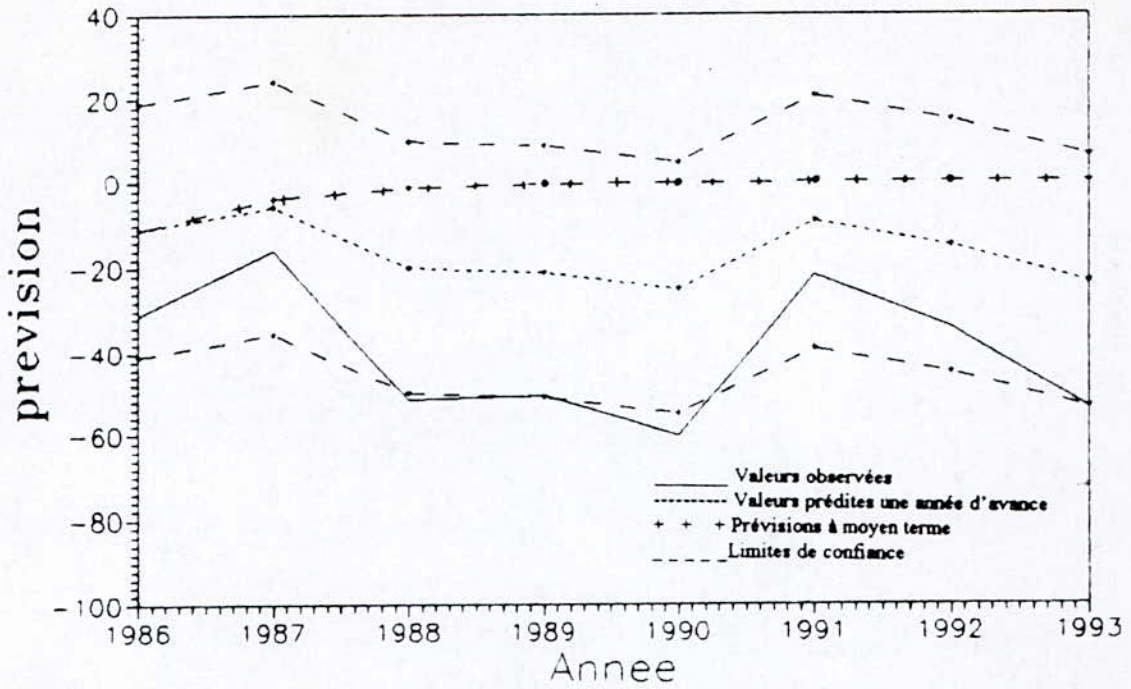


Fig.(3.5)

Prévisions effectuées sur la période 86-93.

Tableau (3.7): Prévisions à court et moyen termes de 1986-87 à 1992-93.

Année(k)	y(k)	z(k)	$z(k) + 2 \sigma_e$	$z(k) - 2 \sigma_e$	$z_{\text{moy.terme}}(k)$
1986	-31.19	-11.08	18.68	-40.84	-11.06
1987	-15.93	-5.84	23.92	-35.60	-3.88
1988	-51.45	-20.14	9.62	-49.90	-1.37
1989	-50.54	-21.21	8.55	-50.97	-0.48
1990	-60.28	-25.13	4.63	-54.89	-0.17
1991	-22.02	-9.33	20.43	-39.09	-0.06
1992	-34.18	-15.10	14.66	-44.86	0.02
1993	-53.62	-23.70	6.06	-53.46	0.01

3.8.4. Analyse des innovations du filtre :

Les innovations ont été calculées à partir des estimations du filtre sur la totalité de la série. Les résultats de ces calculs sont présentés dans le tableau (3.6) et la figure (3.6). L'analyse de ces dernières nous permet de tester la performance du filtre et de vérifier les hypothèses de son application en même temps.

Tableau (3.8): Innovations du filtre de 1925-26 à 1992-93.

Année(k)	1925-26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
e_k	-29.79	41.99	64.41	16.41	-14.59	-0.05	0.50	4.83	-6.27	0.01
Année(k)	1935-36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
e_k	-0.03	0.08	0.42	-1.07	0.02	-0.61	0.102	0.004	-0.97	9.82
Année(k)	1945-46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
e_k	0.03	0.02	-0.06	1.15	1.80	-0.76	-0.34	0.45	-0.14	0.00
Année(k)	1955-56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
e_k	-0.11	-0.1	-0.12	0.37	-0.11	0.06	0.00	0.04	0.01	-0.24
Année(k)	1965-66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
e_k	-0.66	0.982	-0.62	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.01	-0.04
Année(k)	1975-76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
e_k	-0.05	-0.07	-0.25	0.06	0.00	-0.18	-1.24	-1.63	-3.55	-0.59
Année(k)	1985-86	-	-	-	-	-	-	-	-	-
e_k	-0.08	-	-	-	-	-	-	-	-	-

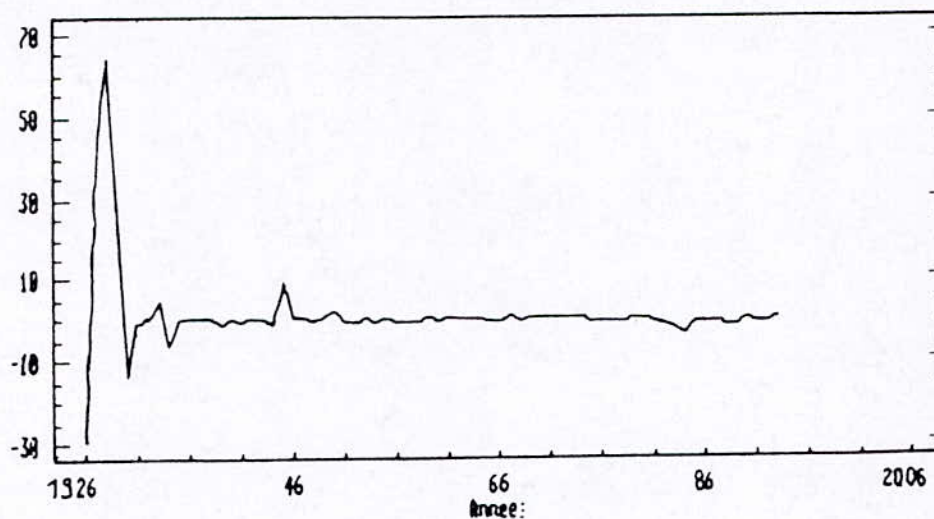


Fig.(3.6)

Innovations du filtre de 1925-26 à 1992-93.

a- La normalité des innovations:

Afin de tester leur normalité, les innovations du filtre ont fait l'objet d'un ajustement statistique de la loi Normale. La figure (3.7) montre le résultat de cet ajustement. L'adéquation de ce dernier est confirmée par le test du χ^2 dont les résultats sont présentés au tableau (3.9). D'après ces résultats, nous pouvons dire que les innovations sont des variables Gaussiennes.

Tableau (3.9): Test du chi-deux appliqué aux innovations du filtre.

Limite supérieure	Limite inférieure	Fréquence observée	Fréquence espérée	Le chi-deux
-29.79 ≤	-6.27	10	9.8	0.408
-6.27	-1.07	9	9.1	0.300
-1.07	-0.97	5	4.9	0.570
-0.97	0.00	12	12.7	0.778
0.00	1.15	8	8.1	2.453
1.15	16.41	6	6.3	0.321
16.41	41.99	10	9.8	0.504
≥41.99		8	6.7	0.412
le chi-deux	à 7 DDL	= 14.067	>	4.3577

b - L'autocorrélation:

Les autocorrélations des innovations sont tracées dans la figure (3.8). Le tableau (3.10) regroupe les résultats de ces calculs.

Les valeurs des coefficients ne sortent pas de l'intervalle de confiance ce qui met en évidence leur indépendance.

Tableau (3.10): Autocorrélations des innovations du filtre.

Pas (k)	r_k	Pas (k)	r_k	Pas (k)	r_k
1	0.189	9	0.081	17	0.077
2	-0.450	10	-0.182	18	0.056
3	-0.277	11	-0.342	19	-0.047
4	0.223	12	0.146	20	-0.005
5	0.078	13	-0.003	21	0.010
6	-0.153	14	-0.004	22	0.018
7	-0.185	15	-0.023	23	-0.007
8	0.070	16	0.008	24	-0.017

c- Test du Portmanteau:

Les résultats de ce test sont présentés dans le tableau (3.11).

Tableau (3.11): Test du Portmanteau appliqué aux innovations du filtre.

L	v	DDL	Q	Q _{théorique}
7	6	59	-0.579	12.86

Ces tests nous ont permis de vérifier que les innovations du filtre sont des bruits blancs Gaussiens. En termes pratiques, ceci veut dire qu'aucune information n'a été laissée dans la séquence de mesure (l'intégralité de l'information a été extraite) durant la procédure de l'estimation, et que l'on ne pourrait obtenir de meilleures estimations avec le modèle utilisé. L'optimalité de ces résultats est bien illustrée par la fonction d'autocorrélation et par la convergence de la matrice de covariance des erreurs de prévision.

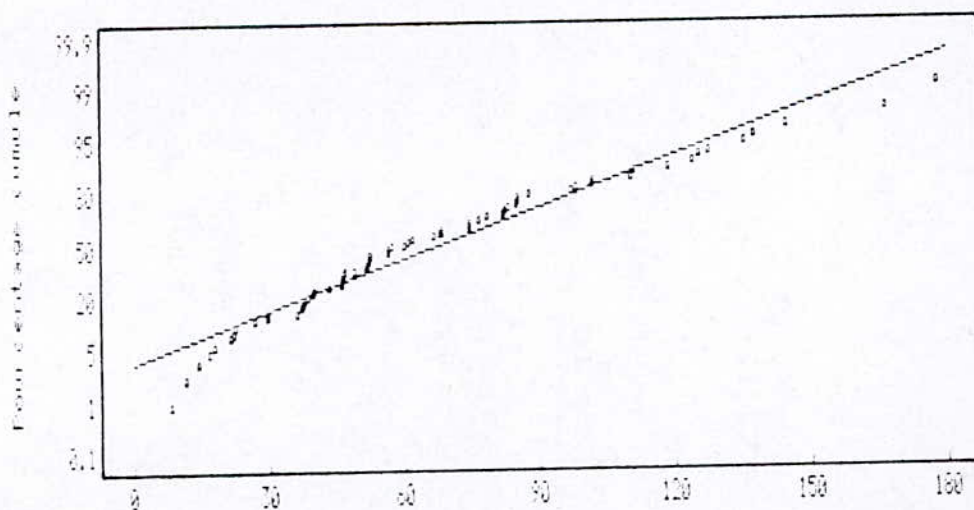


Fig.(3.7)

Ajustement Normal des innovations du filtre .

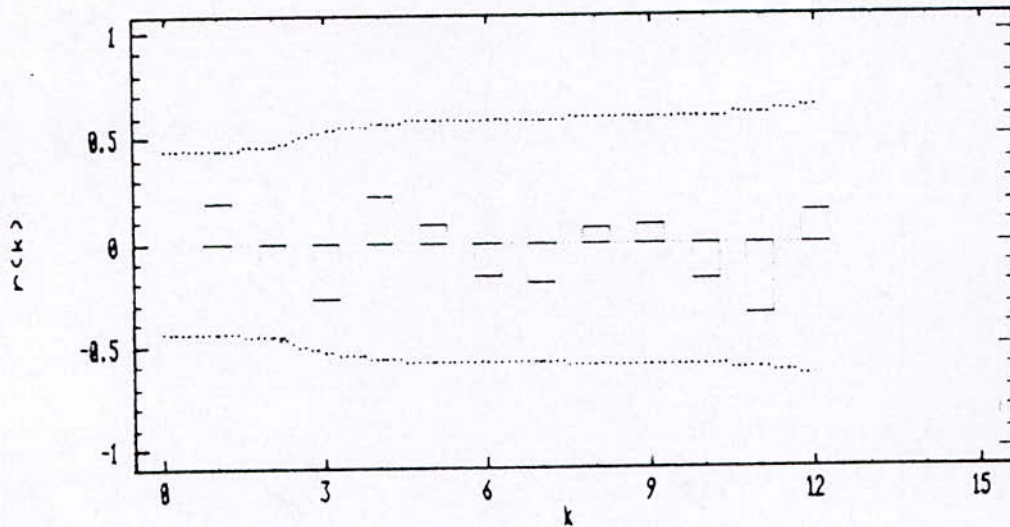


Fig.(3.8)

Autocorrélations des innovations du filtre.

3.9. Conclusion :

Dans ce chapitre, un modèle de prévision à court terme en temps réel a été formulé et appliqué aux apports liquides annuels du barrage de Béni-Bahdel.

Cette formulation modélise les paramètres dans l'équation d'état, et la dynamique du processus dans l'équation de mesure. Ceci permet aux paramètres de varier dans le temps. C'est une manière de prendre en compte la réponse non linéaire du système qui peut être due aux changements dans les infiltrations, l'humidité du sol et toute autre variable pouvant affecter le cours des apports d'une manière générale.

Une telle formulation a été utilisée dans l'algorithme récursif de Kalman qui prédit les états, leur fait subir un filtrage optimal suite à quoi des prévisions optimales des mesures sont effectuées à court terme.

Les prévisions à court terme calculées par ce filtre sont satisfaisantes. Ces dernières sont certainement d'une grande importance dans l'établissement de plans d'opération annuelles du barrage. Il faut noter, cependant, qu'en dépit du fait que ces prévisions sont

satisfaisantes pour de telles applications, il serait intéressant d'essayer d'améliorer leur précision. Ceci peut se faire en les combinant avec d'autres informations telles que les précipitations à titre d'exemple, ou autres variables pouvant affecter le cours des apports.

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS .

Le travail que nous avons effectué, comporte deux objectifs essentiels. Le premier est la modélisation des apports annuels pour la génération synthétique, le second est la prévision à court terme de ces apports afin de fournir aux gestionnaires du barrage de Béni-Bahdel une prévision fiable.

Nous avons procédé dans un premier temps, à l'analyse de la série chronologique des apports annuels de Béni-Bahdel, dans l'ouest Algérien. La série originale présentait des défauts d'homogénéité et de tendance. Ceci se traduisait par les résultats des tests de Wilcoxon et de Kendal où il a été constaté que l'hétérogénéité de la série était due à la tendance.

La composante de tendance a été éliminée moyennant la méthode des doubles masses en utilisant les précipitations annuelles de la station d'El-Khémis. Cependant, l'allure du périodogramme est celle du corrélogramme écartent toute possibilité de composante périodique.

L'examen du corrélogramme et la manière avec laquelle se fait la succession des autocorrélations indiquait un type de dépendance autorégressif avec l'éventualité d'une composante en moyenne mobile. Il indique également, l'existence d'une persistance à long terme confirmée par le calcul du coefficient de Hurst qui est de 0.84.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés aux modèles de Box-Jenkins dans l'hypothèse de stationnarité. A cet effet, pour l'identification des modèles valables, nous sommes basés sur les fonctions d'autocorrélations et celles des autocorrélations partielles de la série corrigée et centrée.

A cet effet, pour l'identification des modèles valables, nous nous sommes basés sur les fonctions d'autocorrélations et celles des autocorrélations partielles de la série corrigée et centrée, ainsi que sur les critères AICC, BIC et FPE.

Les quatre modèles que nous avons ajustés sont: ARMA(1,0) ARMA(2,0), ARMA(1,1) et ARMA(2,1). Ces derniers après avoir subi, avec plus ou moins de succès, les tests d'indépendance, de normalité et d'homoscédasticité, ont fait l'objet de la génération synthétique d'une centaine de séries homologues. Les tests de validité de ces dernières ont révélé que ce type de modèles (ARMA(p,q)) reproduit bien la moyenne, la variance, les valeurs extrêmes ainsi que le premier coefficient d'autocorrélation. Par contre, le coefficient de Hurst, qui représente la dépendance à long terme dans une série chronologique, est mal reproduit ce qui confirme que la mémoire de ce type de modèle est courte. En fin, la comparaison des résultats des différents critères a permis de choisir du modèle AR(1) pour représenter au mieux la série originale.

En fin, nous avons procédé à une prévision à court terme en temps réel. La méthodologie utilisée est l'une des techniques les plus performantes dans la théorie moderne de contrôle: Le filtre de Kalman.

Ce dernier possède une propriété très importante que lui offre sa structure de feedback : les données observées au fur et à mesure servent à recalculer le modèle qui est souvent non parfaitement stationnaire .

Le filtre de Kalman dans le cas discret et linéaire, doit être formulé dans l'espace des états du système. Il comporte deux équations. la première est celle de la dynamique de l'état, la deuxième est l'équation de mesure. Il fonctionne également en deux étapes, la prévision et la correction. Pour la première équation, nous avons investi les résultats de la deuxième partie de ce travail, en supposant que la dynamique de l'état est parfaitement gérée par le modèle ARMA(1,0), l'état du système étant le paramètre autorégressif. Ce modèle a ensuite été adopté pour se plier aux exigences du filtre à savoir sa formulation dans l'espace des états. Son introduction dans l'équation qui contient les observations constitue la deuxième équation du filtre.

Les hypothèses d'indépendance et de normalité ont été vérifiées au sujet des innovations du filtre et les conditions initiales ont été estimées à partir des caractéristiques statistiques de la série historique.

L'algorithme de calcul converge pratiquement et les estimations des prévisions qu'il donne sont satisfaisantes. Ceci se traduit par les tests des innovations et de stabilité qui se sont avérés positifs.

A travers ce travail, nous considérons que nous avons exploité la modélisation pour atteindre les deux objectifs fondamentaux, à savoir la simulation et la prévision.

Compte tenu des résultats obtenus, qu'il nous soit permis d'apporter les conclusions et recommandations suivantes:

1°/ Une bonne modélisation ne peut être faite en ignorant les structures internes inhérentes aux séries chronologiques traitées.

2°/ La qualité de représentation d'un modèle est relative et nous ne pouvons parler d'un meilleur modèle mais de modèles valables.

3°/ La justification d'un type de modèles ne peut être faite qu'après avoir effectué des opérations de simulation ou de prévision. Ceci en répondant aux questions suivantes : -est-ce que l'opération était optimale ? y avait-il des défaillances? et est-ce que l'opération aurait été améliorée si un autre type de modèles avait été utilisé ?

4°/ Dans ce contexte, l'étude d'un autre type de modèles à mémoire plus longue est souhaitée afin de prendre en considération toutes les caractéristiques statistiques de la série historique y compris la dépendance des valeurs à long terme.

5°/ La prévision à court terme effectuée moyennant le filtre de Kalman est optimale. Dans notre cas, son application a été faite sur les apports annuels ce qui présente un inconvénient majeur, d'un point de vue pratique, puisqu'il faudra attendre une année pour que l'étape de correction soit faite. C'est pour cette raison, que nous recommandons

l'utilisation de ce filtre uniquement lorsqu'on dispose de mesures rapprochées dans le temps, données journalières, hebdomadaires ou même mensuelles.

6°/ La prévision au pas annuel, dans le cas concret de l'exploitation d'un ou plusieurs barrages dans une région donnée, ne peut servir à une gestion opérationnelle de ces ouvrages. Cette prévision annuelle est néanmoins très importante pour estimer les périodes de sécheresse potentielles et préserver en conséquence la réserve interannuelle du barrage. En effet, il est plus commode de commencer au plutôt les restrictions de la demande annuelle de façon graduelle, ce qui évitera à coup sûr une rupture de la demande garantie dont les conséquences peuvent être graves.

7°/ La gestion effective doit se faire en principe au pas mensuel, ce qui nous conduit à une prévision au même pas de temps. Dans ce cas, il serait possible d'améliorer les limites de confiance pour ces prévisions en combinant les paramètres statistiques de ces données, sachant la loi de distribution et la variance de chaque mois.

8°/ Le modèle AR(1) introduit dans la formulation du filtre est un cas simple puisqu'il est unidimensionnel. Les matrices de covariance Q et R sont, dans ce cas, des scalaires. L'utilisation d'un modèle pluridimensionnel est donc souhaitée.

9°/ L'utilisation du filtre de Kalman dans la prévision des crues est d'un intérêt particulier, puisque son estimateur est capable d'estimer les relations pluie-débit à partir d'un échantillon observé ce qui permet la réduction de l'influence des jugements personnels au sujet du phénomène physique en question.

10°/ Les prévisions des apports liquides, obtenues par le filtre de Kalman, peuvent être utilisées dans la prévision des apports solides, puisqu'il existe des formules analytiques entre les deux. Les valeurs ainsi estimées sont utilisables dans le calcul de l'envasement des barrages.

11°/ Les résultats obtenus dans la prévision sont optimurns. Cependant, il est recommandé de les comparer à d'autres prévisions obtenues moyennant d'autres prédicteurs.

**RÉFÉRENCES
BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] **Alengrin G., J.Zerubla J.,** 'A Methode to Estimate the Parameters of an ARMA Model', IEEE, Vol.AC-32, NO.12, Dec. 1987.
- [2] **Anderson M.G., Burt.T.B.,** 'Hydrological forecasting', Chichester, John Wiley et fils, 604 p, 1985.
- [3] **Aristidis P.G.,** 'Extended Linear Quadratic Gaussian Control: Further Extensions', Water Resources Research, Vol.25, No.2, pp.191-201, Fev. 1989.
- [4] **Blalkovski W.L.,** 'Application of Kalman Filters to the Regulation of Dead Time Processes', IEEE, Vol .AC-28, NO.3, Mar. 1983.
- [5] **Box G.E.P., Jenkins G.M.,** 'Time Series Analysis and Control', Holden day, San Francisco, Californie, 500 p, 1970.
- [6] **Brammer R.F., et al,** 'Bathymetric and Oceanographic Applications of Kalman Filtring Techniques', IEEE, Vol .AC-28, NO.3, Mar. 1983.
- [7] **Caines P.E.,** 'Prediction Error Identification Methods for Stationnary Stockastic Proceses', IEEE, Vol. AC-19, pp.500-505, Aout 1976.
- [8] **Carlson R.F., Watts,** 'Application of Linear Random Models to Four Annual Streamflow Series', Water Resources Research, Vol.6, NO.4, 1970.
- [9] **Chow Ven Te,** 'Handbook of Applied Hydrology', New York, Mc Graw hill, 572 p, 1988/1964.
- [10] **Delleur J.W.,** 'Les Processus du Type ARIMA pour la Prévision et la Simulation en Hydrométéorologie', La Houille Blanche, NO.6, pp.391-400, 1978.
- [11] **Gérard A., Josiane Z.,** 'A Method to Estimate The Parameters of an ARMA Model', IEEE, Vol. AC-32, NO.12, pp.1113-1115, Dec.1987.
- [12] **Godbole S.S.,** 'Kalman Filtring with no Priori Information about Noise -White noise case: Identification of Covariances', IEEE, Vol.AC-19, pp.326-336, Oct. 1974.
- [13] **Goodwin G.C., Sin K.S ,** 'Adaptatif Filtring Prediction and Control', Engelwood Cliffs, Prentice-Hall, 540p, 1985.
- [14] **Granger C.W.T.,** 'Forecasting Economic Time Series', Orlands, Academic press, 338p, 1986.
- [15] **Graupe D, Moore D.J.,** 'Identification of Autoregressive Moving Average Parameters of Time Series', IEEE, Vol.AC-19, Feb. 1975.
- [16] **Guy Ruckebusch,** 'A Kalman Filtring Approach to Natural Gamma Ray Spectroscopy in Well Logging', IEEE, Vol.AC-28, NO.3, pp.372-380, Mars 1983.
- [17] **Hannan E.J.,** 'Time Series Analysis', IEEE, Vol. AC-6, Dec. 1975.
- [18] **Hippel K.W., McLeod A.I., Lennox W.C.,** 'Advances in Box-Jenkins Modeling. 1-Model Construction', WRR. Vol.13. NO.3, 1977.
- [19] **Jazwinski A.H.,** 'Adaptative Filtring', Automatica, Vol.5, pp.475-485, Jui. 1969.
- [20] **Jenkins ,** 'Spectral Analysis and it's Application', Holden day, San Francisco, 420p, 1968.
- [21] **Johnston J.,** 'Econometric Methodes', Mc Graw -Hill, 568 p, 1984.

- [22] **Kalman R.E.**, 'A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems', Trans. ASME, J. Basic Eng. Series, Vol. 830, pp.95-108, Mar. 1961.
- [23] **Kalman R.E., Bucy R.S.**, 'New Results in Linear Filtering and Prediction Theory', Trans. ASME, J. Basic Eng. Series, Vol. 830, pp.95-108, Mar. 1961.
- [24] **Kottegoda N.T.**, 'Stochastic Water Resources Technology', Londres, Mc Millon, 384 p., 1980.
- [25] **Krishan P., et Singh M.**, 'Synthetic Hydrologic Information - a case of study', Journal Of the Hydraulics Division .HY10, Oct. 1979.
- [26] **Leibundgut B.G., et al.**, 'Application of Kalman Filtering to Demographic Models', IEEE, Vol. AC-28, NO.3, Mar. 1983.
- [27] **Linsley, Kohler**, 'Hydrology of Engineers', Mc Graw Hill, 1982.
- [28] **Malsis A.H.**, 'Optimal filtering techniques for hydrological forecasting', Journal of Hydrology Vol.33, pp.319-330, 1977.
- [29] **Mallinvaud E.**, 'Methodes Statistiques de l'économétrie', Dunod, Paris, 634 p, 1964.
- [30] **Menabem M.S.**, 'On The Feasibility of Real-Time Prediction of Aircraft Carrier Motion at Sea', IEEE, Vol.AC-28, pp.350-355, Mars 1983.
- [31] **Mendel J. M.**, 'Computational Requirements for a Discrete Kalman Filter', IEEE, Vol.A-C.16, pp.748-758, Dec. 1971.
- [32] **Mendel J.M.**, 'Posts Flight Data Analysis by Means of Adaptive Iterated Extended Kalman Filtering', IEEE, Vol. AC-19, NO.5, Oct. 1974.
- [33] **Moylan P.J.**, 'A note on Kalman - Bucy Filters with Zero Measurement Noise', IEEE, pp.263-265, Jui 1974.
- [34] **Neilson B.J., Hsieh B.B.**, 'Analysis of Water Temperature Records Using a Deterministic Stochastic Model', tiré de: 'Time Series Methods in Hydrosciences', édité par El Shaaraoui A.H., Esterby S.R., Elsevier, pp.465-473, 1982.
- [35] **Parzen E.**, 'Some Recent Advances in Time Series Modeling', IEEE, Vol.AC-19, Dec. 1974.
- [36] **Patarford R.M.**, 'On The Storage Size-Demand-Reliability Relationship', tiré de: 'Time Series Methods in Hydrosciences', édité par El Shaaraoui A.H., Esterby S.R., Elsevier, pp.498-509, 1982.
- [37] **Patrick Tze-Kwai Fung, et al.**, 'Dynamic Ship Positioning using a Self-Tuning Kalman Filter', IEEE, Vol.A-C.28, pp.339-349, Mar. 1983.
- [38] **Rao R.A., Kashyap R.L.**, 'Stochastic Modeling of River Flows', IEEE, Vol.AC-28, NO.6, pp.874-881, Dec. 1974.
- [39] **Rao S.G., Quillan E.D.**, 'Stochastic ARIMA Models for Monthly Streamflows', tiré de: 'Time Series Methods in Hydrosciences', édité par El Shaaraoui A.H., Esterby S.R., Elsevier, pp.474-484, 1982.
- [40] **Russell F.B.**, 'Estimation and Prediction for Maneuvring Target Trajectories', IEEE, Vol.A-C 28, pp.294-304, Mar. 1983.
- [41] **Salas, Delleur, Yevjevich, Lane**, 'Applied Modeling of Hydrologic Time Series', ENP.
- [42] **Schlee F.H., et al.**, 'Divergence in the Kalman Filter', AIAAJ, Vol.5, pp.1114 -1120, Jui. 1967.

- [43] **Société Hydrotechnique de France**, ' *Guide de Prévision des Crues* ', Tome II, pp 407-424, 1987 .
- [44] **Sorenson H.W.**, ' *Kalman Filtring Techniques* ', Tiré de ' *Advances in Control Systems Theory and Applications* ', Vol .3, édité par C.T.Leondes, pp.219-292, Academic press, 1966.
- [45] **Sorenson H.W.**, ' *Kalman Filtring Theory and Applications* ', pp.90-126, IEEE press, 1985.
- [46] **Sorenson H.W., Sacks J.E.** ' *Recursive Fading Mamory Filtring* ', Inform-Sci, vol.3, pp.101-119, Jan.1971.
- [47] **Unny T.E.**, ' *On Stockastic Modelling of Hydrologic Data* ', tiré de: ' *Time Series Methods in Hydrosiences* ', édité par El Shaaraoui A.H., Esterby S.R., Elsevier, pp.224-242, 1982.
- [48] **Venetis C.**, ' *A Stochastic Model of Monthly Reservoir Storage* ', Water Resources Research, Vol.5, NO.3, pp.729-734, Jun.1969.
- [49] **Vladimir J.L.**, ' *Estimation and Prediction of Unmeasurable Variables in The Steel Mill Soaking Pit Control Systems* ', IEEE, Vol.AC-28, pp.388-400, Mars 1983.
- [50] **Wallace J.N., Clarke R.**, ' *The Application of Kalman Filtring Estimation Techniques in Power Station Control Systems* ', IEEE, Vol.AC-28, NO.3, pp.416-426, Mars 1983.
- [51] **Wood E.F.**, ' *Recent Development in Real Time Forecasting, Control of Water Ressources Systems* ', Oxford Pergamon, 1980.
- [52] **Wood E.F., Andras Szollosi-Nagy**, ' *An adaptative algorithm for analysing short terme structural and parameter changes in hydrologic prediction models* ', Water Resources Research , Vol.14, NO.4, Aou.1978.
- [53] **Yevjevich V.**, ' *Stochastic Processes in Hydrology* ', Water Ressources Publications, Fort Collins, Colorado, 276 p, 1972.
- [54] **Zouaoui O., Bennour D.**, ' *Contribution à l'étude de régularisation et dimensionnement du Barrage de Béni- Bahdel* ', U.S.T.H.B. , 1993.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Aristidis P.G., Marks D.H.**, 'A New Method for the Real Time Operation of Reservoir Systems', *Water Resources Research*, Vol.23,NO.7,pp.1376-1390,Jun. 1987.
- [2] **Bartolini P., Salas J.D., Obeysekera J.T.B.**, 'Multivariate Periodic ARMA (1,1) Process', *Water Resources Research*, Vol. 24, NO.8, pp.1237-1246,Aout 1988.
- [3] **Ben Chie Yen , ASCE A.M.**, 'Risks in Hydrologic Disign of Engineering Projects', *Journal Of The Hydraulics Division*, HY4, pp.959-966, Avr.1970.
- [4] **Bolzern P., et al.**, 'Stockastic Flood Predictors: experience in a Small Bassin', tiré de: 'Time Series Methods in Hydrosiences', édité par El Shaaraoui A.H., Esterby S.R., Elsevier, pp.530-537, 1982.
- [5] **Bras R.L., Curry K., et Buchanan R.**, 'The Multivariate Broken-Line Model Revisited :A Discussion on Capabilities and Limitations ', *Journal Of Hydrology*, Vol.53, pp.31-51, 1981. "
- [6] **Caroni E., et al.**, 'Rainfall-Flow Relationship in Some Italian Rivers by Multiple Stockastic Models', tiré de: 'Time Series Methods in Hydrosiences', édité par El Shaaraoui A.H., Esterby S.R., Elsevier, pp.455-464, 1982.
- [7] **Diskin M.H., Simon E.**, 'A Procedure for The Selection of Objective Functions for Hydrologic Simulation Models', *Journal Of Hydrology*,Vol. 34, pp.129-149, 1977.
- [8] **Georgakakos K.P., et Bras R.L.**, 'Real time statistically linearized. Adaptive flood routing.', *WRR.*, vol.18, pp.513-524, Jun 1982.
- [9] **Godebole S.S.**, 'Comparision of Friedland's and Lin-Sage's Bias Estimation Algorithmes', *IEEE*, Vol.AC-19, pp.143-145, Avr.1974.
- [10] **Huynh Ngoc Phien**, 'Reservoir Sedimentation with Correlated Inflows', *Journal Of Hydrology*, Vol.53, pp.327-341,1981.
- [11] **Lazaro R.C., John W.Labadie, Jozé D.Salas**, 'optimal management of multireservoir systemes using stream flow forecasts', pris de: 'Time series methodes in hydrocsiences.A.H El Shaaraoui et al. Elsevier' 1982.
- [12] **Lloyd E.H., Warren D.**, 'The Linear Research with Seasonal Gamma-distributed Markovian Inflows', tiré de: 'Time Series Methods in Hydrosiences'. édité par El Shaaraoui A.H., Esterby S.R., Elsevier, pp.487-497, 1982.
- [13] **Maldment D.R., Ven Te Chow**, 'Stochastic State Variable Dynamic Programing for Reservoir Systems Analysis', *Water Resources Research*, Vol.17,NO.6,pp.1578-1584,Dec.1981.
- [14] **Mejia J.M., et al.**, 'Streamflow Simulation 2-The Broken-Line Processes as A Potential Model for Hydrologic Simulation', *Water Resources Research*, Vol.8, pp.931-941, Aug.1972.
- [15] **Mejia J.M., et al.**, 'Miltivariate Generation of Mixtures of Normal and Log Normal Variables', *Water Resources Research*, Vol.10, NO.4, pp.691-693, Aout 1974.
- [16] **Mejia J.M., et al.**, 'Streamflow Simulation 2- The Broken-Line Proceses as a Potential Model for Hydrologic Simulation', *Water Resources Research*, Vol.8, NO.4, pp.931-941, Aout 1972.
- [17] **Mejia J.M., et al.**, 'Streamflow Simulation 3-The Broken-Line Process and Oerational Hydrology', *Water Resources Research*, Vol.10, NO.2, pp.242-245, Avr.1974.
- [18] **Mejia J.M., et al.**, 'Multivariate Generation of Mixtures of Normal and Log Normal Variables', *Water Resources Research*, Vol.10, NO.4, pp.691-693, Aug 1974

- [19] **Metcalf A.V., et Mawdsley J.A.**, '*Estimation Of Extreme LowFlows for Pumped Storage Reservoir Disign*', Water Resources Research, Vol.17, NO.6, pp.1715-1721, Dec.1981.
- [20] **Michael P., et al.**, '*Drug Reduction in Hydraulic Transport of Solids*', Journal Of The Hydraulics Division, HY4, pp.903-908, Avr. 1970.
- [21] **Mikio Hino**, '*Runoff Forecasting by variable Transformation*', Journal Of the Hydraulics Division', ASCE, HY.4, Apr. 1970.
- [22] **O'connor K.M.**, '*A discrete Linear Cascade Model for Hydrology*', Journal Of Hydrology, Vol.29, pp/203-242, 1976.
- [23] **Oliveira G.C., et al.**, '*A Representation of Spatial Cross Correlations in Large Stochastic Seasonal Streamflow Models*', Water Resources Research, Vol.24, NO.5, pp.781-785, May 1988.
- [24] **Patarford R.M.**, '*On The Storage Size-Demande-Reliability Relationship*', tiré de: 'Time Series Methods in Hydrosiences', édité par El Shaaraoui A.H., Esterby S.R., Elsevier, pp.498-509, 1982.
- [25] **Rao T.S., Howell Tong**, '*Linear Time-Dependant Systems*', IEEE, Vol.AC-19, NO.6, pp.735-737, Dec.1974.
- [26] **Rougée A., et al.**, '*Optimum Robust Detection of Changes in The AR Part of a Multivariable ARMA Process*', IEEE, Vol.AC-32? NO.12, Dec.1987.
- [27] **Srikanthan R., Mc Mahon T.A.**, '*Generation of Annual Streamflows Using a Filtred Fractional Gaussian Noise Model*', Journal Of Hydrology, Vol.37, pp.13-21,1978.
- [28] **Stedinger J., Pel D.**, '*An Annual - Monthly Streamflow Model for Incorporating Parameter Uncertainty Into Reservoir Simulation*', tiré de: 'Time Series Methods in Hydrosiences', édité par El Shaaraoui A.H., Esterby S.R., Elsevier, pp.520-529, 1982.
- [29] **Young P.C., et al.**, '*Recursive Estimation and Forecasting of Non Stationary Time Series*', Journal Of Forecasting, Vol.9, pp.173-204, 1990.
- [30] **Zekal sen**, '*Autorun Analysis of Hydrologic Time Series*', Journal Of Hydrology, NO.36, 1974.

ANNEXES

Annexe 1

Annexe (1.1): Série x_t originale.

N°	Valeur	N°	Valeur	N°	Valeur	N°	Valeur
1	26.86	19	56.54	37	68.33	55	60.71
2	38.61	20	22.50	38	56.50	56	76.45
3	125.24	21	36.33	39	76.77	57	22.16
4	123.91	22	46.88	40	84.65	58	21.35
5	135.42	23	78.22	41	29.62	59	11.34
6	74.54	24	52.11	42	37.70	60	14.33
7	57.27	25	98.01	43	110.14	61	37.29
8	110.85	26	137.30	44	60.02	62	52.55
9	166.39	27	85.33	45	61.87	63	17.03
10	87.61	28	46.16	46	67.99	64	17.94
11	97.02	29	144.67	47	82.90	65	8.20
12	66.54	30	101.48	48	118.49	66	46.45
13	51.62	31	52.12	49	177.69	67	34.30
14	101.54	32	46.24	50	127.37	68	14.86
15	68.23	33	52.15	51	82.33	-	-
16	85.11	34	39.90	52	51.85	-	-
17	48.97	35	81.90	53	39.98	-	-
18	43.38	36	46.32	54	37.98	-	-

Annexe(1.2): Autocorrélations de la série x_t .

k	r_k	err.stnd	k	r_k	err.stnd
1	0.447	0.121	2	0.180	0.143
3	0.244	0.146	4	0.263	0.152
3	0.268	0.159	6	0.229	0.165
7	0.094	0.170	8	0.054	0.171
9	0.050	0.171	10	0.138	0.171
11	0.108	0.173	12	0.002	0.174
13	0.025	0.174	14	-0.005	0.174
15	-0.128	0.174	16	-0.060	0.175
17	0.049	0.175	18	0.038	0.176
19	-0.035	0.176	20	0.031	0.176
21	0.172	0.176	22	0.103	0.178
23	0.100	0.179	24	0.040	0.180

Annexe 2

Annexe(2.1): ACF de la série z_t .

k	r_k	k	r_k	k	r_k
1	0.447	2	0.180	3	0.244
4	0.263	5	0.268	6	0.229
7	0.094	8	0.054	9	0.050
10	0.138	11	0.108	12	0.002
13	0.025	14	-0.005	15	-0.128
16	-0.060	17	0.049	18	0.038
19	-0.035	20	0.031	21	0.172
22	0.103	23	0.103	24	0.040

Annexe (2.2): PACF de la série z_t .

k	$\phi_k(k)$	k	$\phi_k(k)$	k	$\phi_k(k)$
1	0.447	2	-0.024	3	0.216
4	0.099	5	0.137	6	0.048
7	-0.089	8	-0.030	9	-0.056
10	0.113	11	-0.018	12	-0.044
13	0.042	14	-0.079	15	-0.166
16	0.020	17	0.104	18	0.062
19	-0.019	20	0.119	21	0.181
22	-0.063	23	0.047	24	-0.125

Annexe(2.3): Autocorrélations des résidus
des modèles ajustés.

k	R(1,0)	R(2,0)	R(1,1)	R(2,1)
1	0.047	0.020	-0.000	-0.002
2	-0.141	-0.039	0.012	0.003
3	0.062	0.113	0.054	0.040
4	0.043	0.034	0.046	0.054
5	0.072	0.058	0.058	0.054
6	0.095	0.096	0.100	0.102
7	-0.066	-0.063	-0.072	-0.074
8	-0.063	-0.042	-0.036	-0.037
9	-0.049	-0.056	-0.061	-0.061
10	0.075	0.059	0.062	0.066
11	0.043	0.032	0.028	0.026
12	-0.061	-0.058	-0.039	-0.038
13	0.011	0.006	-0.006	-0.007
14	0.039	0.048	0.045	0.046
15	-0.160	-0.151	-0.156	-0.158

**Annexe(2.4):Autocorrélations partielles des résidus
des modèles ajustés.**

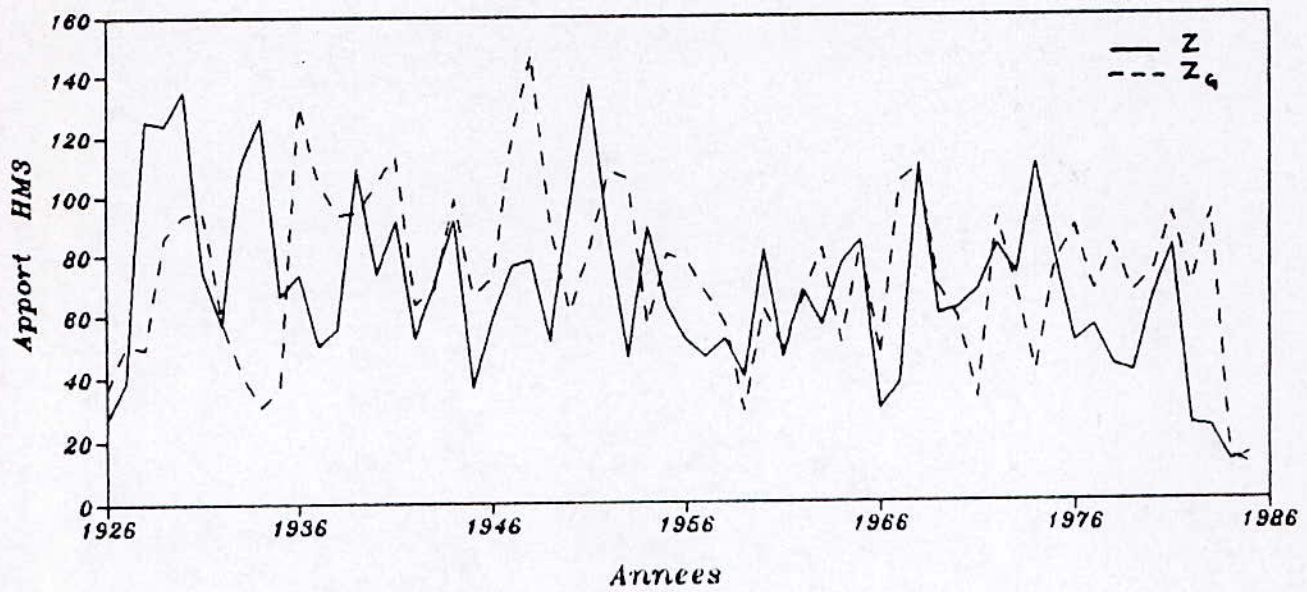
k	R(1,0)	R(2,0)	R(1,1)	R(2,1)
1	0.004	0.015	0.000	-0.015
2	-0.068	-0.043	-0.059	-0.059
3	0.138	0.158	0.142	0.133
4	0.150	0.150	0.154	0.178
5	0.145	0.137	0.145	0.129
6	0.169	0.167	0.168	0.171
7	0.003	-0.000	0.001	0.006
8	-0.002	-0.008	-0.002	0.003
9	-0.038	-0.139	-0.140	-0.155
10	0.073	0.070	0.072	0.099
11	0.029	0.028	0.031	-0.007
12	-0.042	-0.040	-0.044	-0.010
13	0.078	0.070	0.076	0.050
14	0.004	0.010	0.004	0.017
15	-0.151	-0.152	-0.150	-0.145
16	-0.139	-0.132	-0.139	-0.171
17	0.042	0.049	0.042	0.081

Annexe (2.5) : Périodogramme cumulé des résidus des modèles ajustés

R(1,0)		R(2,0)		R(1,1)		R(2,1)	
freq	ordo	freq	ordo	freq	ordo	freq	ordo
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.016	0.024	0.016	0.031	0.016	0.030	0.016	0.029
0.033	0.049	0.033	0.060	0.033	0.058	0.033	0.056
0.050	0.143	0.050	0.172	0.050	0.168	0.050	0.163
0.060	0.165	0.060	0.196	0.060	0.192	0.060	0.187
0.080	0.195	0.080	0.230	0.080	0.226	0.080	0.220
0.100	0.253	0.100	0.283	0.100	0.282	0.100	0.276
0.116	0.264	0.116	0.293	0.116	0.291	0.116	0.285
0.133	0.297	0.133	0.323	0.133	0.323	0.133	0.317
0.150	0.329	0.150	0.351	0.150	0.352	0.150	0.346
0.160	0.363	0.160	0.380	0.160	0.381	0.160	0.376
0.183	0.388	0.183	0.399	0.183	0.400	0.183	0.396
0.200	0.448	0.200	0.443	0.200	0.444	0.200	0.442
0.216	0.460	0.216	0.452	0.216	0.453	0.216	0.451
0.233	0.547	0.233	0.519	0.233	0.517	0.233	0.518
0.250	0.555	0.250	0.526	0.250	0.523	0.250	0.524
0.266	0.574	0.266	0.541	0.266	0.535	0.266	0.537
0.283	0.624	0.283	0.585	0.283	0.575	0.283	0.578
0.300	0.711	0.300	0.668	0.300	0.646	0.300	0.649
0.316	0.724	0.316	0.682	0.316	0.657	0.316	0.660
0.333	0.751	0.333	0.710	0.333	0.683	0.333	0.685
0.350	0.787	0.350	0.747	0.350	0.715	0.350	0.717
0.366	0.807	0.366	0.768	0.366	0.735	0.366	0.736
0.383	0.873	0.383	0.844	0.383	0.807	0.383	0.806
0.400	0.883	0.400	0.855	0.400	0.819	0.400	0.818
0.416	0.897	0.416	0.871	0.416	0.837	0.416	0.835
0.433	0.924	0.433	0.905	0.433	0.876	0.433	0.874
0.450	0.953	0.450	0.940	0.450	0.920	0.450	0.917
0.466	0.964	0.466	0.954	0.466	0.938	0.466	0.935
0.483	0.978	0.483	0.972	0.483	0.962	0.483	0.960
0.500	1.000	0.500	1.000	0.500	1.000	0.500	1.000

Annexe (2.4):

Comparaison d'une série générée par le modèle $AR(1)$
avec la série observée Z



Annexe 3

Annexe (3.1):

A partir de la relation (3.8) de P_k nous avons:

$$P_k = P'_k - K_k h_k P'_k - P'_k h_k^T K_k^T + K_k (h_k P'_k h_k^T + R_k) K_k^T$$

Pour avoir le gain optimal, on dérive P_k par rapport à K_k et on égalise à zéro:

$$(\partial / \partial K_k^T) \text{trace} (P'_k - K_k h_k P'_k - P'_k h_k^T K_k^T + K_k h_k P'_k h_k^T + K_k R_k K_k^T) = 0$$

$$\Rightarrow -2 P'_k h_k^T + 2 K_k h_k P'_k h_k^T + 2 K_k R_k = 0$$

$$\Rightarrow -2 (I - K_k h_k) P'_k h_k^T + 2 K_k R_k = 0$$

d'où, la valeur optimale de K_k :

$$K_k = P'_k h_k^T (h_k P'_k h_k^T + R_k)^{-1}$$

Annexe (3.2):

Par définition, une estimation \hat{x} d'un vecteur de variable aléatoire x est dite non biaisée, si et seulement si : $E(\hat{x}) = E(x)$. L'estimation de x étant une variable aléatoire, on peut calculer son espérance :

$$\hat{x}_k = \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} + k_k [z_k - h_k \phi_{k,k-1} \hat{x}_{k-1}] \quad (1)$$

$$E(\hat{x}_k) = \phi_{k,k-1} E(\hat{x}_{k-1}) + k_k [E(z_k) - h_k E(\hat{x}_{k-1})] \quad (1)'$$

où,

$$* E(z_k) = h_k E(x_k) = h_k \phi_{k,k-1} E(x_{k-1})$$

$$* E(\hat{x}_{k-1}) = \phi_{k,k-1} E(\hat{x}_{k-1})$$

Puisque $E(w_{k-1}) = E(v_k) = 0$,

(1)' peut être simplifiée tel que:

$$E(\hat{x}_k) = \phi_{k,k-1} E(\hat{x}_{k-1}) + k_k h_k \phi_{k,k-1} [E(x_{k-1}) - E(\hat{x}_{k-1})]$$

pour $k=1$:

$$E(\hat{x}_1) = \phi_{1,0} E(\hat{x}_0) + k_1 h_1 \phi_{1,0} [E(x_0) - E(\hat{x}_0)] \quad (2)$$

\hat{x}_0 , doit être spécifié tel que:

$$E(\hat{x}_0) = \hat{x}_0.$$

Supposons que \hat{x}_0 ait été choisi égal à $E(x_0)$, (2) devient alors :

$$E(\hat{x}_1) = \phi_{1,0} E(x_0)$$

Considérons d'autre part, la valeur espérée à l'état actuel :

$$\begin{aligned} E(x_1) &= \phi_{1,0} E(x_0) + E(w_0) \\ &= \phi_{1,0} E(x_0). \end{aligned}$$

On aura ainsi:

$$E(x_1) = E(\hat{x}_1),$$

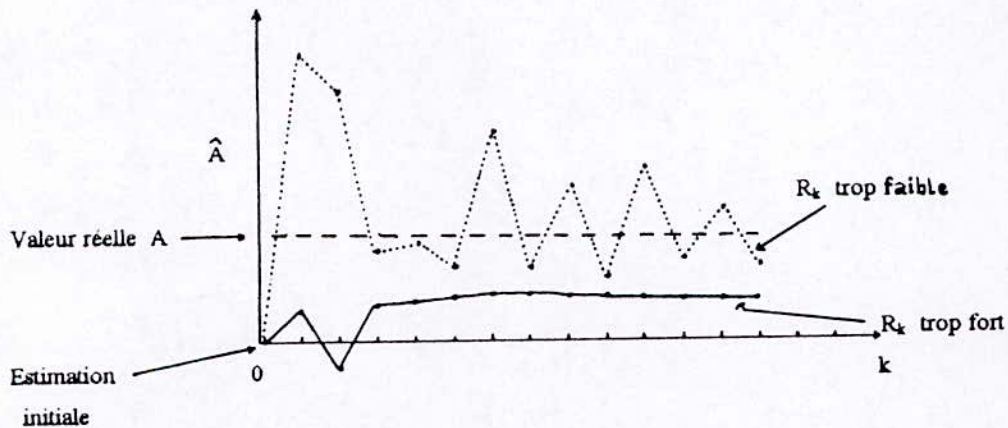
d'où, par récurrence:

$$E(x_k) = E(\hat{x}_k).$$

Il s'ensuit que la relation (1) est un estimateur non biaisé. Noter bien que $E(x_0)$ n'est pas nécessairement nul.

Annexe (3.3):

Exemple sur l'influence de R_k et Q_k sur la recherche d'une constante.



Annexe (3.4):

Soit l'équation d'état et l'équation de mesure :

$$x_k = F x_{k-1} + w_k \quad (1)$$

$$z_{k-1} = x_{k-1} + v_{k-1} \quad (2)$$

supposons que w_k dans (1) est nul, la covariance de l'erreur de prévision est:

$$P_k' = F P_{k-1} F^T \quad (3)$$

Si le système est stationnaire, F a des valeurs inférieures à l'unité donc P_k' sera inférieure à P_{k-1}' . Le gain peut alors être écrit :

$$k_k = P_k' / (P_k' + R)$$

qui va être inférieure à l'unité. La covariance de l'erreur du filtre au temps k sera:

$$P_k = (I - k_k) P_k' \quad (4)$$

En commençant par P_0 spécifiée, noter comment: $P_1' < P_0$ de (3) et $P_1 < P_1'$ de (4), quand k augmente, k_k tend vers zéro, P_k' tend vers zéro et P_k également. De même, si on suppose que les bruits v_{k-1} de l'équation (2) sont nuls, dans ce cas, le gain $k_k = I$, $P_k' = Q$ et $P_k = 0$. Ceci peut conduire à des problèmes de stabilité puisque Jazwinski en 1970[] prouva que tous les systèmes dynamiques discrets, complètement contrôlables et complètement observables pour lesquels $P_0 \geq 0$.