

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Electronique
Laboratoire des Dispositifs de Communication
et de Conversion Photovoltaïque



Thèse de Doctorat

Présentée par **KHODJA Mohamed**
Magistère en Cybernétique, CDTA-Haut Commissariat à la Recherche

Thème

Analyse des Performances des Algorithmes MUSIC et ESPRIT Temps-Fréquence pour la Localisation de Sources en Présence d'Erreurs de Modèle

Membres du jury

Président :	Mohamed TRABELSI	(Professeur, ENP)
Rapporteur :	Adel BELOUHRANI	(Professeur, ENP)
Examineurs :	Hacene BELBACHIR	(Professeur, USTHB)
	Abdeldjalil AISSA EL BEY	(MC-HDR, ENST Bretagne, France)
	Mustapha DJEDDOU	(MC-A, EMP)
Invité :	Messaoud THAMERI	(Docteur/MRB, CRD/CFDAT)

ENP 2015

ملخص

تركز هذه الأطروحة على تحديد مواقع الإشارات الغير الثابتة التي تتلقاها شبكة الهوائيات المعرضة للاضطرابات. لقد استعملنا خوارزميات الفضاءات الجزئية من فئة MUSIC و ESPRIT باستخدام مناهج التحليلات المحددة لمصفوفات التغيرات و مصفوفات التوزيعات للترددات - الزمان- المكانية (DTFS) للإشارة المستقبلية من طرف الهوائي. و لقد تم توحيد تعابير المصفوفات الناجمة عن تلك التحليل لكل من الخوارزميات و المناهج حيث تم وضع تعبير عام و موحد لتغيرات الأخطاء المتعلقة بتقدير اتجاهات وصول الإشارات. إن عملية التوحيد هذه و التي تعتبر إحدى النقاط الهامة بالنسبة لهذه الأطروحة، قد تم مقارنتها بنجاح بنتائج المحاكات الرقمية. و قد تم إجراء التحليل المقارن لأداء المناهج والخوارزميات المستعملة على أساس هذه التعابير النظرية حيث تبين مدى تأثير إعدادات نموذج المعطيات على أداء هذه المناهج والخوارزميات. إن النتائج المحصل عليها تبين تفوق خوارزمية MUSIC على ESPRIT من جهة، و منهج الترددات - الزمانية على منهج إحصاءات الصف الثاني من جهة أخرى. و قد تبين بأنه كلما كان معدل الإشارة على الضوضاء (SNR) و معدل الإشارة على الاضطرابات (SPR) ضعيفين، كلما ازداد تفوق منهج الترددات - الزمانية. زيادة عن هذا، قد تبين من خلال هذه النتائج بأن تأثير اضطرابات الهوائيات أقوى على أداء الخوارزميات من التأثير الناجم عن الضوضاء.

مفاتيح الكلمات

تقدير وجهات الوصول، خوارزميات الفضاءات الجزئية، توزيعات الترددات الزمانية المكانية، اضطراب النموذج، تعابير موحدة.

RESUME

Cette thèse porte sur la localisation de signaux non stationnaires reçus par un réseau d'antennes soumis à des perturbations. Des algorithmes sous espaces de types MUSIC et ESPRIT sont considérés en utilisant les méthodes de décomposition propre des matrices de covariance et de distribution temps-fréquence spatiale (DTFS) des signaux reçus par un réseau d'antennes. Les expressions des matrices résultant de ces décompositions sont unifiées pour l'ensemble de ces algorithmes et méthodes, et une expression analytique générale de la variance de l'erreur d'estimation des directions d'arrivée a été établie. L'unification de ces expressions théoriques, qui constituent l'un des points importants de cette thèse, est validée par simulation numérique. L'analyse des performances de ces algorithmes et méthodes a été effectuée sur la base de ces expressions analytiques et a montré l'effet des paramètres intervenant dans le modèle de données. Les résultats obtenus montrent la prédominance de l'algorithme MUSIC sur l'algorithme ESPRIT d'une part, et de la méthode temps-fréquence sur celle de la statistique de second ordre d'autre part. La prédominance de la méthode temps-fréquence s'est avérée d'autant plus forte que les rapports signal sur bruit et signal sur perturbation sont faibles. En outre il est montré à travers ces résultats que, par rapport au bruit additif, la perturbation des capteurs a plus d'impact sur les performances des deux algorithmes.

MOTS CLES

Estimation des Directions d'Arrivée, Algorithmes Sous Espaces, Distributions Temps-Fréquence Spatiales, Perturbation du Modèle, Expressions Unifiées.

ABSTRACT

This thesis deals with the localization of non stationary signal sources impinging on an array antenna submitted to perturbations. Subspace algorithms types of MUSIC and ESPRIT are investigated by using eigen decompositions of the covariance and the spatial time frequency distribution (STFD) matrices of the array signal response. The analytical expressions of the resulted matrices are unified for both methods and a general analytical expression is derived. The unification of these theoretical expressions, which constitute one of the important points of this thesis, is validated by numerical simulation. The analysis of the performances of these algorithms and methods was carried out on the basis of these analytical expressions and showed the effect of the parameters intervening in the data model. The results obtained show the predominance of the algorithm MUSIC over the algorithm ESPRIT on one hand, and of the time-frequency method over that of the second order statistics on the other hand. The predominance of the time-frequency method has been proved as stronger as the signal to noise and the signal to perturbation ratios are weak. Moreover it is shown through these results that, compared to the additive noise, the perturbation of the sensors has more impact on the performances of the two algorithms.

KEYWORDS

Directions Of arrival Estimation, Sub Space Algorithms, Spatial Time Frequency Distributions, Model Perturbation, Unified Expressions.

Remerciements

Je remercie le directeur de cette thèse, le Professeur Adel Belouchrani, qui m'a encouragé à entreprendre ce projet et qui m'a apporté son soutien et son aide tout au long de ce travail. Je tiens aussi à remercier le Professeur Karim Abed Meraim pour son aide et pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

J'adresse également mes remerciements à la Direction de l'Ecole Nationale Polytechnique de m'avoir permis de préparer cette thèse au sein du Laboratoire des Dispositifs de Communication et de Conversion Photovoltaïque du Département d'Electronique.

Mes sincères remerciements vont également au président et aux membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail.

Enfin j'aimerais tout particulièrement remercier ma famille pour son soutien et ses encouragements, mais aussi pour la patience dont elle a fait preuve durant toute la période de préparation de cette thèse.

Table des matières

List of Figures	vi
List of Tables	vii
Abbreviations	viii
1 Introduction	1
1.1 Les réseaux d’antennes et leurs applications	1
1.1.1 Concept général	1
1.1.2 Applications	3
1.2 Contexte, contribution et organisation de la thèse	6
1.2.1 Contexte de l’étude	6
1.2.2 Contribution	8
1.2.3 Organisation de la thèse	10
1.3 Conclusion sur le chapitre	10
2 Notions de base	12
2.1 Signaux stationnaires et non stationnaires	12
2.1.1 La stationnarité	12
2.1.2 La non-stationnarité	13
2.2 Signaux analytiques et transformation de Hilbert	13
2.2.1 Définition	13
2.2.2 Propriétés	14
2.3 Les méthodes de traitement d’antennes pour la localisation de sources	15
2.3.1 Modèle d’observation	16
2.3.2 Formation de voies (beamforming)	19
2.3.3 Méthodes sous espaces	23
2.3.3.1 La Méthode MUSIC	26
2.3.3.2 La Méthode ESPRIT	27
2.4 Outils temps-fréquence pour l’analyse des signaux non stationnaires	32
2.4.1 Transformée de Fourier à court terme (TFCT)	32
2.4.2 Transformée en ondelettes (Wavelet Transform : WT)	35
2.4.3 Distributions de la classe de Cohen	37
2.4.4 Distribution de Wigner Ville	38
2.4.4.1 Propriétés de la distribution de Wigner Ville	39
2.4.4.2 Limitations de la distribution de Wigner Ville	40
2.4.5 La pseudo distribution de Wigner Ville (PDWV)	43

2.4.6	La distribution de Choi-Williams	44
2.4.7	La distribution de Born-Jordan	45
2.5	Conclusion sur le chapitre	45
3	Méthodes temps-fréquence d'estimation des DDAs	46
3.1	Traitement d'antennes temps-fréquence	46
3.1.1	Bloc-diagonalisation conjointe (ou simultanée)	49
3.1.2	Technique de moyennage	50
3.2	Les Distributions Temps-Fréquence Spatiales (DTFS)	52
3.2.1	Structure de la DTFS	52
3.2.2	Selection des auto-termes et des termes croisés dans le domaine temps-fréquence	53
3.3	Conclusion sur le chapitre	54
4	Perturbation du modèle d'observation	55
4.1	Modèle de données en présence de perturbations	55
4.1.1	Types de perturbations	55
4.1.2	Modèle perturbé de données	56
4.2	Expression unifiée des matrices de covariance et de distribution TF	58
4.2.1	Méthode conventionnelle	58
4.2.2	Méthode temps-fréquence	60
4.2.3	Unification des expressions de matrices de covariance et de distri- bution temps-fréquence	62
4.3	Expression de l'erreur d'estimation des DDAs	64
4.3.1	SOS-MUSIC et TF-MUSIC	64
4.3.2	SOS-ESPRIT et TF-ESPRIT	67
4.3.3	Expression unifiée de l'erreur d'estimation des DDAs	68
4.4	Conclusion sur le chapitre	68
5	Expression analytique unifiée de la variance d'erreur d'estimation des DDAs et validation numérique	70
5.1	Expression analytique unifiée de la variance	70
5.1.1	SOS-MUSIC et SOS-ESPRIT	71
5.1.2	TF-MUSIC et TF-ESPRIT	77
5.2	Validation numérique des expressions analytiques	86
5.2.1	Procédures de validation	86
5.2.2	Discussion des résultats de validation	88
5.3	Conclusion sur le chapitre	91
6	Analyse des performances de MUSIC et ESPRIT en présence d'erreurs du modèle	92
6.1	Performances par rapport aux algorithmes et méthodes utilisés	92
6.2	Performances par rapport aux paramètres du modèle	93
6.3	Conclusion sur le chapitre	94
7	Conclusion générale et perspectives	102
7.1	Conclusion générale	102
7.2	Perspectives	104

A	Expression de la perturbation des sous espaces	105
B	Calcul d'espérances mathématiques	107
B.1	Espérances mathématiques de l'expression (5.21)	107
B.2	Espérances mathématiques de l'expression (5.63)	110
C	Articles	113
	Références bibliographiques	114

Table des figures

1.1	Formation de faisceaux	2
1.2	Antennes radar	4
1.3	Sonar monté sous la coque d'un navire	5
1.4	Antenne "intelligente"	6
1.5	réseau de capteurs sismiques	6
2.1	Signaux non stationnaires	13
2.2	Spectre de signaux réel et analytique	15
2.3	Réseau d'antennes linéaire et uniforme	16
2.4	Formation de voies : schéma de principe	20
2.5	Formation de voie de Bartlett	22
2.6	Spectres de formation de voies	23
2.7	Pseudo-spectre MUSIC	28
2.8	Réseau ESPRIT	29
2.9	Spectrogrammes de chirplets	34
2.10	Ondelette de Morlet	35
2.11	Scalogrammes d'ondelettes	36
2.12	Représentation temps-fréquence de Wigner-Ville	38
2.13	Artéfacts internes pour les DWV	41
2.14	DWV d'un signal composé de deux chirp	42
2.15	DWV de signaux Chirp	44
2.16	Effet du paramètre de dispersion σ	45
3.1	DTFSs de chirps linéaires et d'ondelettes	48
3.2	Distribution de Wigner-Ville d'un chirp linéaire	51
3.3	DTFS de signaux chirp	53
5.1	Validation des résultats théoriques pour la méthode SOS	89
5.2	Validation des résultats théoriques pour la méthode TF	90
6.1	Effet du SPR par rapport au SNR sur le réseau	95
6.2	Performances de MUSIC et de ESPRIT par rapport au RSB	96
6.3	Performances de MUSIC et de ESPRIT par rapport au RSP	97
6.4	Comparaison des performances MUSIC-ESPRIT	98
6.5	Effet du nombre de capteurs	99
6.6	Effet du nombre de snapshots	100
6.7	Effet du noyau de la distribution TF	101

Liste des tableaux

2.1	Noyaux de quelques distributions	37
4.1	Expressions des paramètres d'estimation	68

Abbreviations

BJD	B orn J ordan D istribution
CDMA	C ode D ivision M ultiple A ccess
CWD	C hoi W illiams D istribution
DDA	D irection D ' A rrivée
DOA	D irection O f A rrival
DTFS	D istribution T emps F requence S patiale
ESPRIT	E stimation of S ignal P arameter via R otational I nvariance T echnique
FI	F requence I stantannée
FDMA	F requency D ivision M ultiple A ccess
GSM	G lobal S ystem for M obil C ommunications
IF	I ntermediate F requency
MUSIC	M ultiple S ignal C lassification
PWVD	P seudo W igner V ille D istribution
RLU	R éseau L inéaire U niforme
RSB	R apport S ignal sur B ruit
RSP	R apport S ignal sur P erturbation
SDMA	S pace D ivision M ultiple A ccess
SNR	S ignal to N oise R atio
SOS	S econd O rdre S tatistique
SPR	S ignal to P erturbation R atio
SPWVD	S patial P seudo W igner V ille D istribution
SSO	S tatistique du S econd O rdre
STFD	S patial T ime F requence D istribution
TDMA	T ime D ivision M ultiple A ccess
TF	T emps F requence
TFCT	T ransformée de F ourier à C ourt T erme
TO	T ransformée en O ndelette
ULA	U niform L inear A rray

Liste des symboles

K	nombre de signaux sources
L	nombre de capteurs
M	nombre d'échantillons (snapshots)
θ_k	$k^{\text{ème}}$ direction d'arrivée
$\mathbf{a}(\theta_k)$	$k^{\text{ème}}$ vecteur de direction
$\mathbf{A}(\theta)$	matrice de direction du réseau
ϕ_k	phase du $k^{\text{ème}}$ signal source
\mathbf{I}_L	matrice identité $L \times L$
$(\cdot)^*$	complexe conjugué de (\cdot)
$(\cdot)^H$	transposé du complexe conjugué de (\cdot)
$Tr(\cdot)$	trace de (\cdot)
$\delta_{i,k}$	symbole de Kronecker

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les réseaux d'antennes et leurs applications

1.1.1 Concept général

Un réseau d'antennes est un groupement d'antennes élémentaires identiques arrangées en une structure géométrique pour former une antenne unique. Une combinaison judicieuse des antennes élémentaires augmente le rayonnement global du réseau et permet de le focaliser dans les directions désirées. Cette opération, illustrée par la figure 1.1, constitue le principe même de formation de faisceaux ou formation de voies (*beamforming*). La figure représente un réseau linéaire constitué de plusieurs capteurs uniformément répartis, chaque capteur est alimenté avec un gradient de phase fonction de la géométrie du réseau d'antennes et de la direction d'orientation désirée du faisceau. La commande adaptative de cette alimentation confère au faisceau une grande agilité ce qui permet, par exemple, l'optimisation de la capacité de communication des systèmes cellulaires utilisés dans les stations de base de téléphonie mobile, et l'amélioration de la capacité de détection des radars grâce au balayage électronique de l'espace d'exploration.

Durant ces trois dernières décennies, un intérêt particulier a été porté à ces réseaux pour les nombreuses applications qu'ils offrent dans plusieurs domaines et secteurs d'activité. L'émergence de technologies basées sur l'emploi de ce type de réseaux a poussé au développement de techniques appropriées et de plus en plus performantes permettant l'extraction et le traitement de signaux reçus par les systèmes multi capteurs. Ces techniques reposent sur des notions de "traitement d'antennes", un sous domaine du traitement du signal qui exploite la diversité spatiale qui caractérise les réseaux d'antennes.

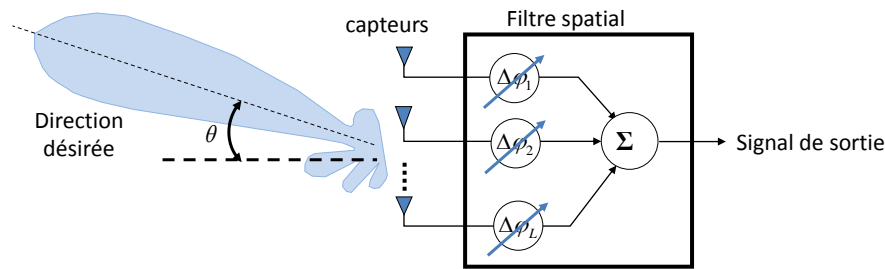


FIGURE 1.1 – Formation de voies : schéma de principe

L'un des buts principaux du traitement d'antennes est d'estimer les directions d'arrivée (DDA) de signaux sources en exploitant les déphasages induits par l'espacement entre les éléments du réseau d'antennes.

Le domaine d'estimation des directions d'arrivée est tellement vaste qu'il serait prétentieux de dresser une liste exhaustive des méthodes utilisées. Il importe toutefois de noter que ces méthodes se distinguent par leur précision et leur résolution, mais aussi par le temps de traitement requis. Parmi les méthodes les plus connues et que nous allons développer dans le prochain chapitre, nous citons les méthodes haute résolution et les méthodes à résolution limitée. Ces dernières sont des méthodes non paramétriques de formation de voies telles que celles de Bartlett et de Capon, dont la résolution est limitée par la largeur du lobe principal à mi-puissance définie par la limite de Rayleigh. Quant aux méthodes dites "haute résolution", elles sont beaucoup plus performantes et offrent une résolution supérieure à la limite de Rayleigh. Il s'agit des méthodes sous-espaces et des méthodes du maximum de vraisemblance pour ne citer que celles les plus utilisées actuellement et qui sont des méthodes d'estimation paramétrique, c'est à dire des méthodes basées sur le modèle paramétrique du signal.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés aux méthodes sous-espaces de type MUSIC (MULTiple Signal Classification) et ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique) pour l'estimation des directions d'arrivées de signaux sources, et nous nous sommes intéressés aux signaux non stationnaires à bande étroite reçus par un réseau d'antennes linéaire. Ces méthodes sont connues pour être les plus performantes en matière de localisation de signaux stationnaires, mais elles ont toutefois montré leurs limites pour des signaux non stationnaires. La non stationnarité du signal rend ces méthodes plus exigeantes en terme de rapport signal sur bruit, et donc moins performantes. Cependant, pour les mêmes rapports signal sur bruit, nous

aboutissons à de meilleures performances en appliquant aux matrices de distribution temps-fréquence la technique de décomposition en sous espaces propres. Aussi, et afin d'éviter par la suite toute ambiguïté dans la notation de ces deux méthodes, nous avons désigné par "SOS-MUSIC" (Second Order Statistic MUSIC) et "SOS-ESPRIT" (Second Order Statistic ESPRIT) les algorithmes utilisant les matrices de covariance, et par TF-MUSIC (Time Frequency MUSIC) et TF-ESPRIT (Time Frequency ESPRIT) les algorithmes utilisant les matrices de distribution temps-fréquence.

MUSIC et ESPRIT étant des algorithmes d'estimation paramétriques, ils s'appliquent donc à des modèles d'observation dépendant d'un ou plusieurs paramètres. Or dans la pratique, les modèles de données représentent des systèmes physiques soumis souvent à des perturbations de diverses natures (bruit, erreurs de mesure ou de calibration, etc...) qui affectent de façon aléatoire les paramètres du modèle. Cette problématique est au coeur des travaux de cette thèse dans laquelle nous considérons le cas d'un réseau d'antennes soumis à des perturbations dues à des erreurs du modèle d'observation. En outre, nous supposons que les signaux reçus sont entachés d'un bruit additif dû au canal de transmission.

Ces perturbations vont évidemment influencer sur les performances des algorithmes d'estimation des directions d'arrivée (DDA) des signaux sources. L'évaluation de ces performances, appliquée dans cette étude aux algorithmes MUSIC et ESPRIT conventionnels et temps-fréquence, est réalisée par le calcul de la variance de l'erreur d'estimation des DDAs pour différentes valeurs des rapports signal sur perturbation (RSP) et signal sur bruit (RSB).

1.1.2 Applications

Le spectre d'applications des réseaux d'antennes couvre des secteurs d'activités très divers et ne cesse de s'accroître à la faveur du développement spectaculaire des technologies de l'information et de la communication. Parmi les domaines où ces réseaux sont largement utilisés nous pouvons citer le radar, le sonar, la radiocommunication et la sismologie (prospection pétrolière et minière notamment). Les techniques appliquées à ces domaines sont généralement orientées vers la localisation de signaux sources.

Le radar :

Les radars classiques sont dotés d'antennes à balayage mécanique (figure 1.2-a), l'exploration en azimut et en site s'effectuent au moyen d'une rotation mécanique horizontale et un balancement mécanique vertical. La motorisation de ces antennes constitue le principal défaut de ce type de radar surtout dans les conditions météorologiques difficiles. L'apparition des techniques numériques a favorisé le développement d'antennes réseau à balayage électronique évitant ainsi les contraintes d'un pointage mécanique du faisceau (1.2-b). Ce type d'antennes est constitué de plusieurs éléments rayonnants identiques commandés par un dispositif électronique, ce qui permet la formation et le contrôle du diagramme de rayonnement ainsi qu'une commutation rapide du faisceau radar. Ce principe est utilisé par le radar panoramique tridimensionnel à balayage électronique sans utiliser le balancement mécanique.

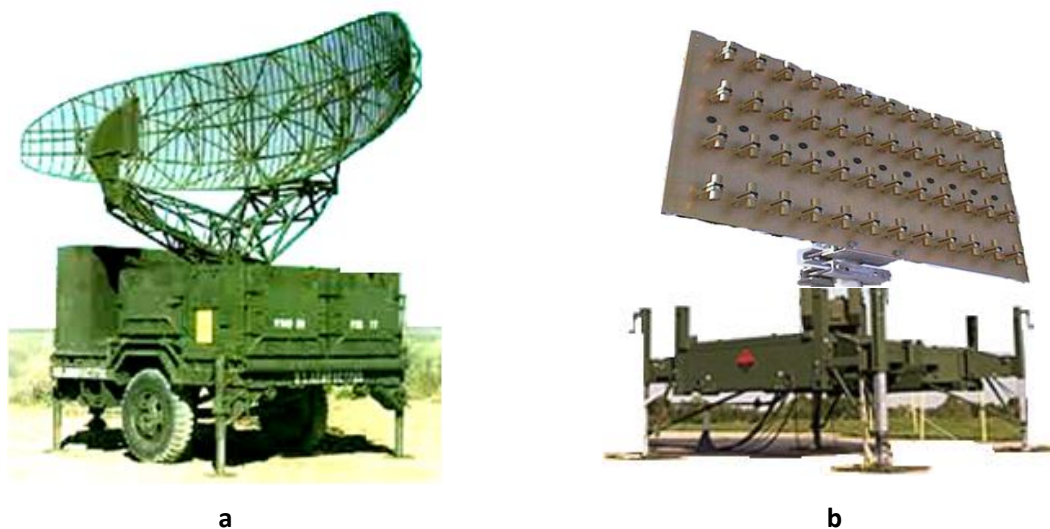


FIGURE 1.2 – Antennes radar : à balayage mécanique (a) et à balayage électronique(b)

Le sonar :

Il existe de grandes similitudes entre le fonctionnement du sonar et celui du radar. Ces deux systèmes sont dotés de dispositifs d'émission et de réception similaires pour la détection d'objets. Cependant, le sonar utilise des ondes acoustiques dont la propagation dans l'océan est beaucoup plus compliquée que celle de l'onde électromagnétique dans l'espace. L'antenne du sonar est généralement constituée d'une série d'hydrophones élémentaires formant un réseau de capteurs qui permettent la détermination des directions d'arrivées des signaux acoustiques. La figure 1.3 montre l'image grossie d'un sonar

actif constitué d'un réseau de transducteurs à balayage acoustique.

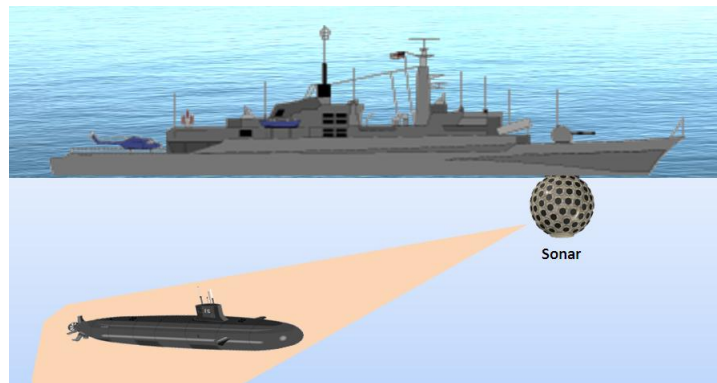


FIGURE 1.3 – Image grossie d'un sonar actif monté sous la coque d'un navire

La Radiocommunication :

Dans les systèmes de radiocommunication classiques, les antennes sont omnidirectionnelles ou sectorielles avec des diagrammes de rayonnement figés. Ce type d'antennes ne peut donc pas s'adapter à un environnement changeant et caractérisé par la présence d'obstacles, sources de trajets multiples, ou par des interférences causées par des signaux parasites. En revanche, les réseaux d'antennes utilisés dans les systèmes de radiocommunications modernes ont permis de surmonter ces contraintes grâce aux techniques de formation de voies et du traitement du signal associé. Les antennes dites "intelligentes" est un exemple éloquent d'innovation sur les technologies des réseaux d'antennes adaptatives (1.4). Dans le domaine de la téléphonie mobile (GSM), ces antennes ont apporté une solution au problème de saturation dans les réseaux en augmentant la capacité des systèmes radiomobiles grâce à la possibilité de réutilisation des ressources (FDMA, CDMA, TDMA, SDMA). L'emploi de ce type d'antennes dans les réseaux cellulaires permet, en outre, de réduire les interférences co-canaux des cellules voisines et d'autoriser l'utilisation d'un même canal par plusieurs utilisateurs.

La sismologie :

Les réseaux de capteurs sismiques (sondes et géophones sismiques) utilisés dans la sismologie depuis les années cinquante, servent à l'enregistrement des ondes produites de façon naturelle (tremblements de terre, activités volcaniques) ou artificielle (explosions sous terraines pour la prospection minière et les essais nucléaires). Les signaux reçus et

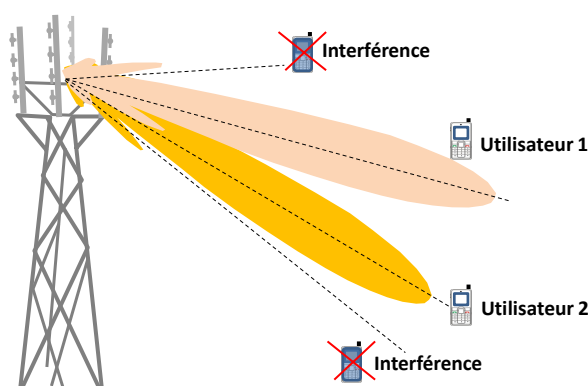


FIGURE 1.4 – Antenne "intelligente" du réseau GSM

enregistrés par le réseau sont traités et analysés en vue de leur exploitation. La localisation de la zone d'intérêt est effectuée grâce à la diversité spatiale qui caractérise le réseau de capteurs. La figure 1.5 illustre cette technique appliquée à la localisation des couches du sous sol par un réseau de géophones dans le cas de l'exploration en onshore, et d'hydrophones pour l'exploration en offshore.

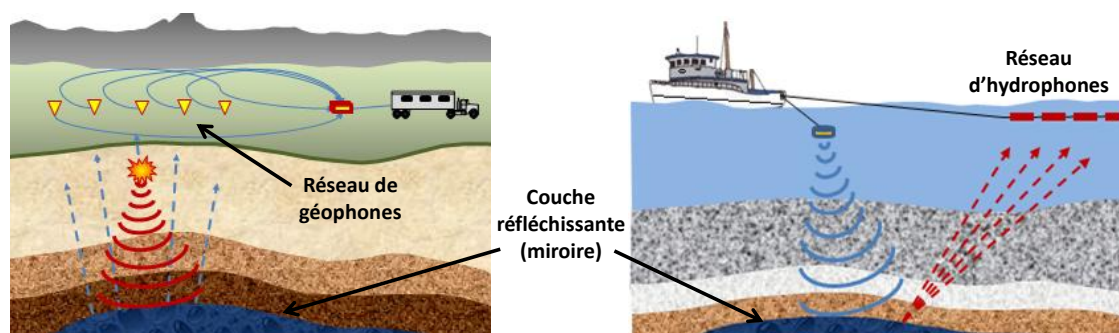


FIGURE 1.5 – Exploration du sous sol par des réseaux de capteurs sismiques : exploration en onshore (a) et exploration en offshore(b)

1.2 Contexte, contribution et organisation de la thèse

1.2.1 Contexte de l'étude

Cette thèse a pour objectif l'étude des performances des algorithmes d'estimation des directions d'arrivée de signaux non stationnaires reçus par un réseau d'antennes soumis à des perturbations. Au cours de cette étude, nous évaluons et comparons les performances de deux variantes d'algorithmes sous espaces MUSIC et ESPRIT, à savoir

SOS-MUSIC et SOS-ESPRIT d'une part et TF-MUSIC et TF-ESPRIT d'autre part. Ces variantes utilisent, respectivement, la décomposition propre de la matrice de covariance et de la matrice de distribution temps-fréquence des signaux de réponse du réseau d'antennes.

De nombreux travaux ont été consacrés à l'évaluation des performances de ces algorithmes et de leurs variantes en présence d'erreurs du modèle. Dans [1], une analyse de perturbation des algorithmes MUSIC et root-MUSIC a été présentée pour divers types d'erreurs de modèle d'observation tels que l'erreur d'amplitude et de phase du signal de réponse du réseau d'antenne, l'erreur de position de l'antenne ainsi que les perturbations dues à l'estimation des matrices de covariance des signaux et du bruit. Les expressions théoriques de l'erreur d'estimation des DDAs ont été établies en fonction des caractéristiques statistiques des erreurs du modèle. Cette analyse a été étendue aux algorithmes DML (deterministic maximum likelihood), WSF (weighted subspace fitting) et ESPRIT [2]. Les résultats numériques obtenus montrent la prédominance de l'algorithme MUSIC sur les autres algorithmes.

Dans [3], les auteurs ont étudié l'influence d'erreurs de modèle sur les performances de quelques méthodes d'estimation des DDAs, en l'occurrence la méthode du propagateur et celles de la formation de voie et de MUSIC. Ils ont analysé le comportement de ces méthodes en présence de perturbations d'origines physiques diverses telles que celles induites par le couplage inter éléments du réseau, le bruit de mesure ou encore les erreurs de position. Les auteurs ont établi un lien explicite entre les perturbations et l'erreur d'estimation qui en résulte.

Toutes ces études ont été réalisées pour des signaux stationnaires, alors que les phénomènes naturels et artificiels sont généralement modélisés par des signaux non stationnaires. Ainsi, dans les applications de traitement d'antennes, notamment celles concernant l'estimation des DDAs, on rencontre souvent des signaux non-stationnaires tels que les signaux radar, sonar, sismiques, de parole, à modulation de fréquence, etc... Ces signaux, dont les caractéristiques statistiques ou spectrales varient dans le temps, nécessitent des représentations autres que celles utilisées pour les signaux stationnaires. Ceux-ci admettent des représentations séparées temporelles ou fréquentielles, alors que les signaux non stationnaires, de par leur définition, nécessitent des représentations qui fournissent l'information sur la variation de la fréquence du signal au cours du temps.

Or cela ne peut être réalisé qu'à travers des représentations simultanées temporelles et fréquentielles (RTF).

A la représentation spatio temporelle des signaux reçus par le réseau d'antennes, va s'ajouter la dimension fréquentielle à cause de la non stationnarité de ces signaux. Dans ce cas, les méthodes classiques de localisation de sources basées sur la décomposition propre de la matrice de covariance des observations, nécessitent une adaptation qui puisse tenir compte de la non stationnarité des signaux. C'est dans [4, 5] que Belouchrani et al. ont introduit une nouvelle approche à cette problématique en appliquant la méthode des sous espaces à travers la décomposition propre des matrices de distribution temps-fréquence spatiale des observations (DTFS ou STFD pour Spatial Time Frequency Distribution). Cette approche a été appliquée à l'estimation des DDAs de signaux modulés en fréquence en utilisant la méthode MUSIC à travers la décomposition de la matrice de distribution de Pseudo-Wigner Ville Spatiale (SPWVD) [6]. L'analyse présentée dans [7] a montré que pour de faibles rapports signal sur bruit la méthode TF-MUSIC réalise de meilleures performances que MUSIC conventionnelle.

1.2.2 Contribution

L'étude de situations dans lesquelles le modèle d'observation est soumis à des erreurs, a été effectuée séparément de celle relative à la non stationnarité des signaux sources. Cette thèse s'inscrit dans le prolongement de ces études et se veut une contribution au domaine d'estimation des DDAs en considérant des situations plus réalistes dans lesquelles des signaux non stationnaires sont reçus par un réseau d'antennes soumis à des perturbations d'origines diverses. Pour cela, nous avons considéré un modèle de données auquel ont été appliqués les algorithmes haute résolution MUSIC et ESPRIT à travers la décomposition en sous espaces signal et perturbation des matrices de covariance et de distribution temps-fréquence spatiale des observations. Nous en avons déduit, pour les deux méthodes, des expressions analytiques reliant les perturbations du modèle à l'erreur d'estimation des DDAs. Ces expressions ont été regroupées sous une forme générale valable pour l'ensemble des algorithmes et méthodes abordés dans cette étude. L'analyse des performances de ces algorithmes et méthodes a montré la prédominance de l'algorithme MUSIC sur l'algorithme ESPRIT et de la méthode temps-fréquence sur celle de la statistique de second ordre. Les résultats obtenus montrent que la prédominance de la méthode temps-fréquence est d'autant plus forte que les rapports signal sur bruit et

signal sur perturbation sont faibles. En outre, il est montré à travers ces résultats que les erreurs dues à la perturbation des capteurs ont plus d'impact que le bruit additif sur les performances des deux algorithmes. Les résultats de simulation ont également montré que les algorithmes du second ordre statistique, bien qu'ils aient été initialement développés pour les signaux stationnaires, ils peuvent toutefois être utilisés pour des signaux non stationnaires mais avec des performances réduites particulièrement pour de faibles rapports signal sur bruit et pour des perturbations élevées. Notre contribution s'inscrit dans une démarche d'amélioration des performances d'estimation des DDA de signaux sources. Plus spécifiquement, cette contribution se décline en trois aspects :

1. Utilisation d'algorithmes haute résolution basés sur la décomposition en sous espaces des matrices de distribution temps-fréquence en considérant le cas de signaux reçus par un réseau de capteurs soumis à des perturbations ;
2. Obtention des expressions analytiques de la variance de l'erreur d'estimation des directions d'arrivée pour les méthodes de la statistique de second ordres et temps-fréquence ;
3. Unification de ces expressions sous forme d'une expression générale applicable à l'ensemble des algorithmes et méthodes abordés dans cette étude.

Ces contributions ont fait l'objets des publications suivantes,

- M. Khodja and A. Belouchrani, "Performance Analysis for the MUSIC Algorithm in Presence of Both Additif noise and Array Calibration Error", Proc. 5ème séminaire sur les systèmes de detection « DAT 2011 » ;
- M. Khodja and A. Belouchrani and K. Abed-Meraim, "Performance analysis for time-frequency MUSIC algorithm in presence of both additive noise and array calibration errors", EURASIP Journal on Advances in Signal Processing 2012, 94(2012) ;
- M. Khodja and A. Belouchrani, "Performance Analysis of Time-Frequency ESPRIT Algorithm in Presence of Model Errors", Proc. 6ème séminaire sur les systèmes de detection « DAT 2014 » ;
- A. Belouchrani and M. Khodja, "Performance analysis for time-frequency Sub-space based Finding algorithms in presence of perturbed array manifold". IEEE 8th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM), 22-25 June 2014, A coruna, Spain.

1.2.3 Organisation de la thèse

Cette thèse est organisée en sept chapitres. Dans le premier chapitre nous introduisons la notion de réseaux d'antennes et leurs applications ainsi que les traitements associés. Nous définissons ensuite le contexte de cette thèse ainsi que les contributions apportées. Dans le chapitre 2, nous avons estimé nécessaire de présenter quelques notions de base devant servir comme support dans le cadre de ce travail. Il s'agit des notions de signaux non stationnaires et de signaux analytiques, ainsi que des méthodes de localisation de sources et des outils temps-fréquence utilisés dans cette thèse. Le chapitre 3 a été consacré à l'application de ces outils au traitement d'antennes en utilisant les distributions temps-fréquence spatiales (DTFS), plus connues sous l'abréviation STFD (Spatial Time-Frequency Distribution). Les notions et outils de base présentés dans les chapitres 2 et 3 nous ont servi dans le chapitre 4 à l'élaboration du modèle de signal de réponse du réseau d'antennes perturbé et à l'application des méthodes temps-fréquence aux algorithmes MUSIC et ESPRIT. Dans ce chapitre, nous avons mis sous une forme unifiée les expressions des matrices de covariance et de distribution temps-fréquence ainsi que celles des erreurs d'estimation des directions d'arrivée associées à MUSIC et ESPRIT. Dans le chapitre 5 nous avons établi les expressions analytiques de la variance de l'erreur d'estimation des directions d'arrivée pour les algorithmes MUSIC et ESPRIT en utilisant les méthodes de la statistique de second ordre et temps-fréquence. Ces expressions ont été ensuite validées par la méthode de simulation de Monte Carlo. Le chapitre 6 est consacré à l'évaluation des performances des algorithmes et méthodes abordés dans cette thèse. Cette étude se termine par le chapitre 7 dans lequel nous présentons une conclusion générale sur l'ensemble du travail réalisé et sur les contributions apportées. Dans ce chapitre, nous proposons également quelques perspectives de recherche susceptibles d'apporter une amélioration à la présente étude.

1.3 Conclusion sur le chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté la notion de réseaux d'antennes et leurs applications dans différents domaines tels que ceux du radar, du sonar, des télécommunications et de la sismologie. Nous avons présenté les traitements associés aux réseaux d'antennes ainsi que les types d'algorithmes les plus utilisés dans le domaine. Nous avons souligné

l'importance du choix des algorithmes et des méthodes en insistant sur les méthodes temps-fréquence et leur importance pour le traitement de signaux non stationnaires. Toutes ces notions et concepts seront développés dans les prochains chapitres de cette thèse. Ensuite, nous avons défini le contexte de cette thèse dont l'objectif s'articule selon deux axes : Celui d'établir des expressions analytiques unifiées pour les variantes SOS et TF des algorithmes MUSIC et ESPRIT d'une part, et celui de présenter une étude comparative des ces algorithmes pour l'estimation des directions d'arrivée de signaux non stationnaires reçus par un réseau d'antennes soumis à des perturbations d'autre part.

Chapitre 2

Notions de base

Dans ce chapitre, nous présentons quelques rappels sur les méthodes d'estimation de directions d'arrivée de signaux et sur les méthodes d'analyse temps-fréquence. En outre, comme nous considérons dans cette thèse des signaux non stationnaires et des signaux analytiques, il nous semble également opportun de dédier un bref aperçu à ces deux notions.

2.1 Signaux stationnaires et non stationnaires

2.1.1 La stationnarité

Un signal stationnaire se définit par l'invariance dans le temps de ses caractéristiques statistiques et spectrales. Si le signal stationnaire est déterministe, il peut s'exprimer sous forme d'ondes pures ou d'une combinaison d'ondes pures,

$$x(t) = \sum_{n \in N} A_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n) \quad \text{pour un signal réel} \quad (2.1)$$

$$x(t) = \sum_{n \in N} A_n \exp[j(2\pi f_n t + \phi_n)] \quad \text{pour un signal complexe} \quad (2.2)$$

Où A_n , f_n et ϕ_n représentent, respectivement l'amplitude, la fréquence et la phase à l'origine des ondes constituant le signal. Quand le signal est aléatoire, il est qualifié de stationnaire au sens large si son espérance mathématique $E[x(t)]$ est indépendante du temps, et si sa fonction d'autocorrélation ne dépend que du retard τ entre deux instants, c'est à dire,

$$E[x(t_1)x^*(t_2)] = R_x(\tau), \quad \text{avec } \tau = t_1 - t_2 \quad (2.3)$$

2.1.2 La non-stationnarité

La non-stationnarité est une non-propriété, c'est à dire qu'elle est définie par son contraire. Ainsi, un signal est dit non stationnaire si ses caractéristiques statistiques ou spectrales varient au cours du temps. La classe de signaux non stationnaires correspond à la majorité des situations réelles et intervient dans des domaines applicatifs extrêmement variés dont certains ont été cités dans le chapitre précédent. La figure 2.1 montre l'exemple de trois signaux non stationnaires. Le signal de gauche est de moyenne constante mais de variance variable dans le temps, alors que le signal du centre a sa moyenne et sa variance qui varient dans le temps. Quant au signal de droite, bien que ses deux caractéristiques statistiques, en l'occurrence sa moyenne et sa variance, paraissent constantes, sa forme montre que ses caractéristiques spectrales ne le sont pas puisque sa fréquence varie dans le temps. Ce dernier signal, modulé en fréquence, fait partie de la classe de signaux non stationnaires la plus répandue en télécommunications, particulièrement dans les applications radar et sonar. D'ailleurs, dans cette thèse nous nous intéressons à l'estimation des DDAs de signaux chirp qui, par définition, sont des signaux sinusoïdaux dont la fréquence varie dans le temps.

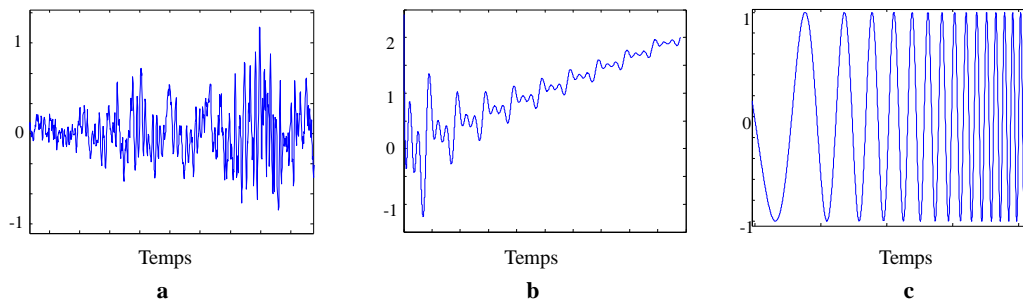


FIGURE 2.1 – Exemples de signaux non stationnaires

2.2 Signaux analytiques et transformation de Hilbert

2.2.1 Définition

Un signal analytique $z_s(t)$ associé à un signal réel $s(t)$ est défini par,

$$z_s(t) = s(t) + jH[s(t)] \quad (2.4)$$

$H[s(t)]$ est la transformée de Hilbert de $s(t)$ définie par la relation,

$$H[s(t)] = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(t-\tau)}{\tau} d\tau \quad (2.5)$$

où $v.p$ désigne la valeur principale de Cauchy. Comme le signal analytique $z_s(t)$ est une grandeur complexe, il peut s'exprimer sous la forme,

$$z_s(t) = a_s(t) e^{j(\text{Arg}\{z_s(t)\})} \quad (2.6)$$

2.2.2 Propriétés

Partant de la forme exponentielle (2.6), les caractéristiques de modulation du signal analytique sont définies par,

$$\text{son enveloppe : } a_s(t) = |z_s(t)|, \quad (2.7)$$

$$\text{sa fréquence instantannée : } f_s(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \text{Arg}\{z_s(t)\}, \quad (2.8)$$

$$\text{et son retard de groupe : } \tau_s(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \text{Arg}\{Z_s(f)\}, \quad (2.9)$$

avec $Z_s(f)$ le spectre du signal analytique $z_s(t)$ associé au signal réel $s(t)$,

$$Z_s(f) = S(f) + j[-j \text{sign}(f)] S(f) = 2U(f)S(f), \quad (2.10)$$

où $S(f)$ représente le spectre du signal réel, et $U(f)$ l'échelon unité de Heaviside. L'expression (2.10) montre que le spectre du signal analytique est nul pour les fréquences négatives, et que son amplitude est double de celle du signal réel associé pour les fréquences positives (figure 2.2), c'est à dire,

$$Z_s(f) = \begin{cases} 2S(f), & \text{pour } f \geq 0, \\ S(f), & \text{pour } f = 0, \\ 0, & \text{pour } f < 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

Compte tenu de ces propriétés, il convient de noter que, relativement à la forme réelle du signal, sa forme analytique est la plus utilisée dans les représentations temps-fréquence.

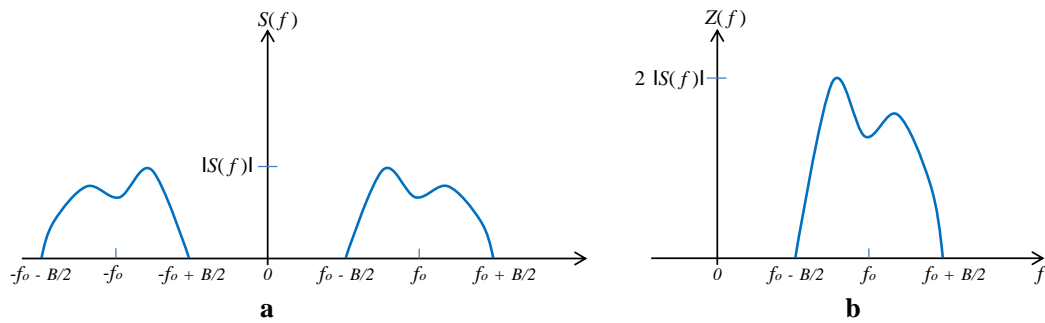


FIGURE 2.2 – Spectres d'un signal réel (a) et du signal analytique associé(b)

2.3 Les méthodes de traitement d'antennes pour la localisation de sources

Le traitement d'antennes est une discipline qui a acquis ses lettres de noblesse techniques dans le domaine du traitement de signal grâce à ses aptitudes à trouver des solutions optimales aux problèmes de localisation et de séparation de sources. L'idée fondamentale sur laquelle repose cette technique consiste en la combinaison et le traitement des signaux reçus par un réseau d'antennes afin d'en extraire les informations pertinentes nécessaires à la mise en œuvre des solutions préconisées. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un modèle d'observation qui reflète au mieux le comportement du signal à étudier et sur lequel sera appliqué une méthode de traitement adaptée à l'estimation des paramètres d'intérêt.

Telle est la démarche à laquelle nous avons procédé en introduisant un modèle d'observation qui sera adopté pour l'ensemble des algorithmes présentés dans la suite de ce chapitre. Ces algorithmes exploitent la structure spatio-temporelle des signaux fournis par le réseau d'antennes et sont basés sur des méthodes d'estimation généralement classées selon leur degré de performance en deux grandes catégories, à savoir les méthodes de formation de voies qui recherchent les angles d'arrivée pour lesquels la puissance du signal en sortie du filtre spatial présente des maxima locaux, et les méthodes dites "haute résolution" basées sur le maximum de vraisemblance ou sur la décomposition en sous-espaces de la matrice des données. Ces méthodes sont largement étudiées dans la littérature, et les algorithmes associés ont souvent fait l'objet d'implémentations. Ainsi, dans [8] les auteurs ont présenté une revue des méthodes de traitement d'antennes utilisées pour l'estimation des paramètres de signaux. Les auteurs relatent le développement

du traitement d'antennes en mettant l'accent sur les algorithmes haute résolution basés sur les méthodes sous espaces [9, 10] et les méthodes du maximum de vraisemblance [10, 11]. Les études de ces méthodes présentées dans [11, 12] et où les expressions analytiques de la Borne de Cramer Rao (CRB) ont été dérivées, a permis d'établir une évaluation de la qualité des estimateurs étudiés et de montrer que les méthodes sous espace sont des estimateurs efficaces.

Le présent travail est focalisé sur une approche basée sur les algorithmes MUSIC et ESPRIT considérés comme des techniques sous espaces les plus répandues dans le domaine de traitement d'antennes.

2.3.1 Modèle d'observation

Nous partons d'un modèle de données qui reflète la réalité d'une manière simplifiée en considérant un réseau d'antennes constitué de L capteurs linéairement et uniformément espacés d'une distance égale à la demi-longueur d'onde ($d = \lambda/2$) et recevant K signaux à bande étroite non corrélés et de moyenne nulle (figure 2.3). Les ondes incidentes sont supposées provenir de sources lointaines et sont donc considérées comme planes.

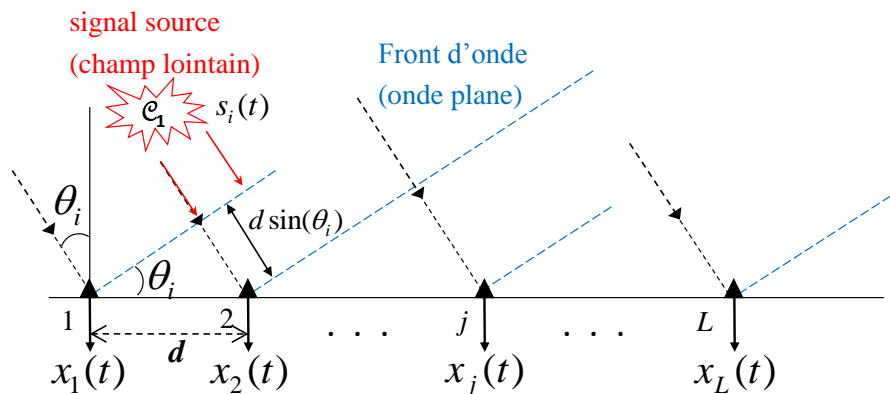


FIGURE 2.3 – Réseau d'antennes linéaire et uniforme

Nous considérons aussi dans un premier temps que, hormis le bruit additif, le réseau d'antennes n'est soumis à aucune autre perturbation. Ce n'est que dans le quatrième chapitre que nous tiendrons compte de la perturbation du modèle.

Le signal source reçu par le réseau d'antennes est un signal passe bande $z(t)$ à valeurs réelles avec une fréquence centrale f_c , et dont l'enveloppe complexe constitue le signal

bande de base $s(t)$,

$$z(t) = \operatorname{Re} \left[s(t)e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (2.12)$$

Avec l'enveloppe complexe (signal bande base),

$$s(t) = s_p(t) + js_q(t) \quad (2.13)$$

Pour une antenne recevant un signal avec un retard τ , le signal passe bande est donné par,

$$z_\tau(t) = z_\tau(t - \tau) = \operatorname{Re} \left[s(t - \tau)e^{j2\pi f_c(t - \tau)} \right] = \operatorname{Re} \left[s(t - \tau)e^{-j2\pi f_c \tau} e^{j2\pi f_c t} \right] \quad (2.14)$$

dont l'enveloppe complexe a donc pour expression,

$$s_\tau(t) = s(t - \tau)e^{-j2\pi f_c \tau} \quad (2.15)$$

Si W est la bande passante du signal en bande de base $s(t)$, alors, $\forall |f| \leq \frac{W}{2}$, nous aurons,

$$s(t - \tau) = \int_{-W/2}^{W/2} S(f)e^{j2\pi f(t - \tau)} df = \int_{-W/2}^{W/2} S(f)e^{-j2\pi f \tau} e^{j2\pi f t} df \quad (2.16)$$

Or en considérant des signaux à bande étroite ($\tau \ll \frac{1}{W}$), et sachant que $|f| \leq \frac{W}{2}$, nous avons donc $e^{-j2\pi f \tau} \approx 1$, et l'expression (2.16) peut s'écrire,

$$s(t - \tau) \approx \int_{-W/2}^{W/2} S(f)e^{j2\pi f t} df = s(t) \quad (2.17)$$

et nous aurons,

$$s_\tau(t) = s(t)e^{-j2\pi f_c \tau} \quad (2.18)$$

Cela signifie que pour les signaux à bande étroite, un retard faible par rapport à l'inverse de la bande passante se traduit par un déphasage pur de l'enveloppe complexe du signal. Si $s(t)$ est le signal incident en bande de base, le signal au niveau du premier élément

du réseau d'antennes sera,

$$x_1(t) = s(t) \quad (2.19)$$

Sachant que l'espacement entre les éléments de l'antenne crée un retard $\tau = \frac{d}{c} \sin(\theta)$ (figure 2.3), où θ est l'angle d'incidence du signal $s(t)$ sur le réseau, nous aurons au niveau du $2^{\text{ème}}$ élément le signal suivant,

$$x_2(t) = x_1(t - \tau) = s(t - \tau) \quad (2.20)$$

or,

$$s(t - \tau) = s(t) e^{j2\pi f_c \tau} = s(t) e^{j2\pi f_c \frac{d}{c} \sin(\theta)} \quad (2.21)$$

Si le retard cumulé au niveau de tous les éléments est faible par rapport à l'inverse de la largeur de la bande passante du signal $s(t)$, c'est à dire, si,

$$(L - 1) \frac{d}{\lambda} \sin(\theta) \ll \frac{f_c}{W} \quad (2.22)$$

le signal à l'issue du $l^{\text{ème}}$ élément d'antenne sera donné par,

$$x_l(t) = x_1 \left[t - (l - 1)\tau \right] = s(t) e^{j2\pi f_c (l-1) \frac{d}{c} \sin(\theta)}, \quad l = 1, \dots, L \quad (2.23)$$

En rangeant les signaux reçus $x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t)$ sous forme d'un vecteur $\mathbf{x}(t)$ nous aurons,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\varphi} \\ \vdots \\ e^{-j(L-1)\varphi} \end{bmatrix} s(t) = \mathbf{a}(\theta) s(t) \quad (2.24)$$

$$\text{où } \begin{cases} \mathbf{x}(t), & \text{vecteur des données à l'instant } t; \\ \mathbf{a}(\theta), & \text{vecteur directionnel;} \\ \varphi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta), & \text{angle électrique.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Pour un réseau recevant K signaux sources, chacun provenant d'une direction $\theta_k, k = 1, \dots, K$, le modèle de données s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{a}(\theta_1)s_1(t) + \mathbf{a}(\theta_2)s_2(t) + \dots + \mathbf{a}(\theta_K)s_K(t) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) & \dots & \mathbf{a}(\theta_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_L(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\text{où } \begin{cases} \mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) & \dots & \mathbf{a}(\theta_K) \end{bmatrix}, & \text{matrice directionnelle} \\ \mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) & s_2(t) & \dots & s_K(t) \end{bmatrix}^T, & \text{vecteur des signaux sources} \end{cases} \quad (2.27)$$

En présence d'un bruit additif $\mathbf{n}(t)$, le modèle de données (2.26) devient,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.28)$$

dont la matrice de covariance est définie par,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = E [\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] \quad (2.29)$$

Sachant que les signaux sources sont indépendants du bruit, et que celui-ci est blanc, de moyenne nulle et de variance σ_n^2 , les expressions (2.28) et (2.29) permettent de retrouver l'expression suivante de la matrice de covariance,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H(\theta) + \sigma_n^2\mathbf{I}_L \quad (2.30)$$

$$\text{où } \begin{cases} \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} = E [\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)], & \text{matrice de covariance des signaux sources;} \\ \mathbf{I}_L, & \text{matrice unité de dimensions } (L \times L). \end{cases} \quad (2.31)$$

2.3.2 Formation de voies (beamforming)

La formation de voies, appelée aussi formation de faisceaux ou *beamforming*, est la plus ancienne des techniques utilisées dans la localisation de sources. C'est une méthode

qui consiste en la combinaison linéaire des observations fournies par les éléments du réseau d'antennes afin de former le diagramme de rayonnement du réseau (figure 2.4). La sortie du filtre spatial est donnée par,

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=0}^L w_i^* x_i(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (2.32)$$

dont la puissance est,

$$P_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |\mathbf{y}(m)|^2 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{w}^H \mathbf{x}(m) \mathbf{x}^H(m) \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} \mathbf{w} \quad (2.33)$$

$$\text{avec } \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{x}(m) \mathbf{x}^H(m) \quad (2.34)$$

Où $\mathbf{y}(m), m = 1, \dots, M$, sont les échantillons temporels de la sortie du filtre spatial, $\mathbf{w} = [w_1 w_2 \dots w_L]^T$ le vecteur de pondération, $\{w_i\}_{i=1}^L$ les gains élémentaires du réseau d'antennes, $\{x_i(t)\}_{i=1}^L$ les observations fournies par les éléments d'antennes, et $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}$ l'estimée de la matrice de covariance des observations $\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(m) \mathbf{x}^H(m)\}$. La variation des gains élémentaires $\{w_i\}_{i=1}^L$ de l'antenne permet de commander électroniquement l'orientation du faisceau d'antenne dans les directions désirées.

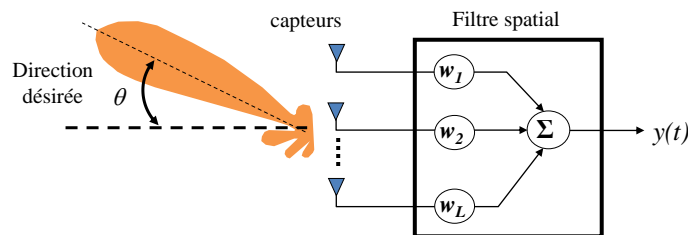


FIGURE 2.4 – Principe de formation de voies.

La méthode utilisée pour la détermination du vecteur de pondération \mathbf{w} a donné lieu à différents formateurs de voies dont les plus connues sont les formateurs de voies de Bartlett et de Capon. Le principe commun à ces deux techniques est de déterminer les valeurs de pondération \mathbf{w} qui optimisent la puissance de sortie du filtre spatial. Il s'agit donc d'un problème d'optimisation.

A : Méthode conventionnelle (Algorithme de Bartlett)

Le problème du formateur de voie conventionnel est formulé comme suit,

Etant donnés :

- le modèle de données pour une direction θ :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\theta)s(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2.35)$$

- et la sortie du filtre spatial :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=0}^L w_i^* x_i(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (2.36)$$

déterminer le vecteur de pondération w permettant :

- de maximiser la puissance de sortie du filtre spatial :

$$\max_{\mathbf{w}} P_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}) \quad (2.37)$$

- sous la contrainte :

$$|\mathbf{w}|^2 = 1 \quad (2.38)$$

En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, ce problème d'optimisation avec contrainte sera converti en un problème sans contrainte. La forme du multiplicateur de Lagrange est donnée par la fonction objective suivante :

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = P_{\mathbf{y}}(\mathbf{w}) + \lambda(|\mathbf{w}|^2 - 1) \quad (2.39)$$

dont la maximisation par rapport aux paramètres (\mathbf{w} et λ) permet de trouver le vecteur de pondération optimal pour la direction θ :

$$\mathbf{w}_{BF} = \frac{\mathbf{a}(\theta)}{\sqrt{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)}} \quad (2.40)$$

Le vecteur optimal \mathbf{w}_{BF} est un filtre spatial adapté à la direction θ , et en remplaçant son expression (2.40) dans celle de la puissance, nous obtenons le spectre spatial conventionnel de Bartlett,

$$P_{BF}(\theta) = \frac{\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}\mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta)} \quad (2.41)$$

dont les maxima locaux (pics) correspondent aux directions d'arrivée des signaux sources. La figure 2.5 représente les pseudo-spectres normalisés de Bartlett de deux signaux sources reçus par un réseau de cinq capteurs. Les sources de la figure 2.5(a) sont situées dans les directions $\theta_1 = -20^\circ$ et $\theta_2 = 20^\circ$ et sont nettement distinctes. Par contre celles de la figure 2.5(b), bien qu'elles soient assez éloignées l'une de l'autre ($\theta_1 = -5^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$), elles n'ont pu être séparées par l'algorithme de Bartlett. Afin de s'affranchir de cette limitation et d'améliorer le pouvoir de résolution, Capon a proposé une méthode de formation de voie adaptative.

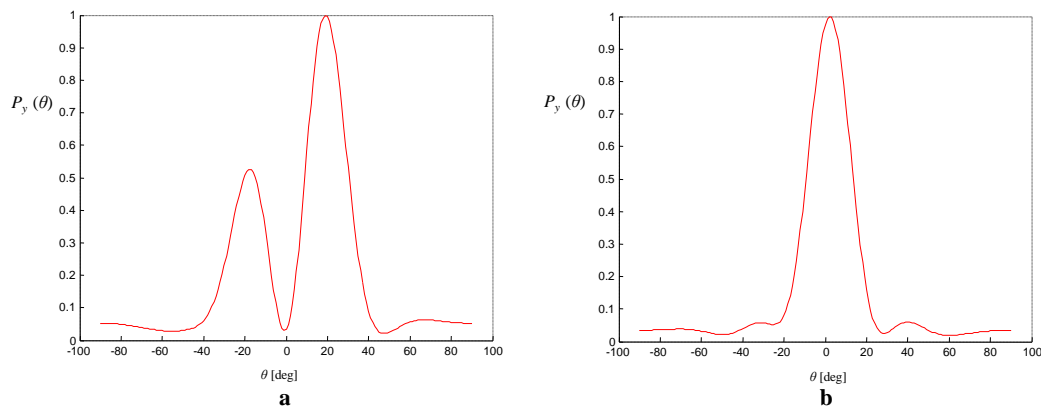


FIGURE 2.5 – Formation de voies de Bartlett : sources éloignées $\theta_1 = -20^\circ$ et $\theta_2 = 20^\circ$ (a) et sources proches $\theta_1 = -5^\circ$ et $\theta_2 = 5^\circ$ (b)

B : Méthode adaptative (Algorithme de Capon)

Le formateur de voie de Capon, appelé aussi "réponse sans distorsion à variance minimale" (MVDR pour Minimum Variance Distortionless Response), est une approche adaptative qui consiste à minimiser les contributions dues au bruit et aux signaux provenant d'autres directions tout en maintenant un gain fixe en direction de la source. Il s'agit donc d'un problème d'optimisation qui consiste à :

- Minimiser la puissance de la sortie du filtre spatial $P_y(\mathbf{w})$;
- Sous la contrainte :

$$\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) = 1 \quad (2.42)$$

Il en résulte le filtre spatial de Capon,

$$\mathbf{w}_{CAP} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (2.43)$$

dont la puissance de sortie est donnée par,

$$\mathbf{P}_{CAP} = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{a}(\theta)} \quad (2.44)$$

La méthode de formation de voies de Capon offre une meilleure résolution que celle de Bartlett mais nécessite le calcul de l'inverse de matrices, ce qui la rend plus complexe à mettre en œuvre. La figure 2.6 montre que les méthodes de formation de voies sont des méthodes basse résolution et peu précises. Cependant, grâce à la facilité de leur mise en œuvre, ces méthodes classiques sont toujours utilisées notamment en tant que pré-processeurs pour indiquer le nombre de signaux sources et leur localisation approximative.

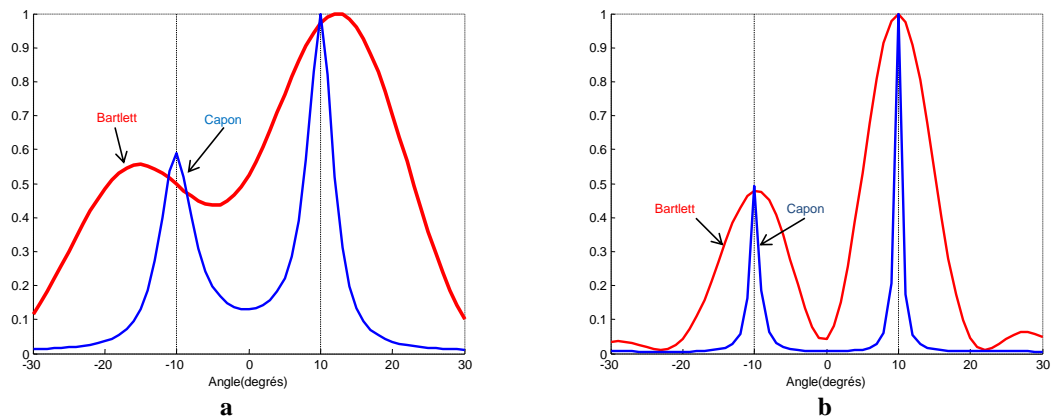


FIGURE 2.6 – Spectre de formation de voies de Bartlett et de Capon pour $\theta_1 = -10^\circ$ et $\theta_2 = 10^\circ$: réseaux de 5 capteurs (a) et de 10 capteurs (b)

2.3.3 Méthodes sous espaces

Les méthodes sous espace sont des méthodes haute résolution qui exploitent la décomposition propre de la matrice de covariance des observations $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ donnée par,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}\mathbf{A}^H(\theta) + \mathbf{R}_{\mathbf{m}\mathbf{m}} \quad (2.45)$$

et qui possède les propriétés suivantes :

1°) Si les sources ne sont pas corrélées, alors la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}$ est de rang plein ($\text{rang}(\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}) = K$), et si elles sont corrélées alors $\text{rang}(\mathbf{R}_{\mathbf{s}\mathbf{s}}) < K$;

2°) Si les colonnes de la matrice de directions $\mathbf{A}(\theta)$ sont indépendantes, ce qui est

généralement le cas lorsque les DDAs des K sources sont différentes, alors cette matrice sera aussi de rang plein K .

D'après ces deux propriétés, la matrice $\mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{A}^H(\theta)$ est de rang K et doit donc avoir K valeurs propres non nulles et $(L - K)$ valeurs propres nulles :

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_K > \alpha_{K+1} = \dots = \alpha_L = 0 \quad (2.46)$$

En l'absence du bruit, la matrice de covariance \mathbf{R}_{xx} est donnée par,

$$\mathbf{R}_{\text{xx}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{A}^H(\theta) \quad (2.47)$$

et peut se mettre sous la forme décomposée suivante :

$$\mathbf{R}_{\text{xx}} = \sum_{i=1}^L \alpha_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (2.48)$$

Où $\{\alpha_i\}_1^L$ sont les valeurs propres de \mathbf{R}_{xx} et $\{\mathbf{v}_i\}_1^L$ sont les vecteurs propres associés.

En présence du bruit, que l'on considère additif, blanc, gaussien, de moyenne nulle et de variance σ_n^2 , la matrice de covariance du signal reçu devient :

$$\mathbf{R}_{\text{xx}} = \sum_{i=1}^L \alpha_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_L \quad (2.49)$$

Cela montre que toutes les valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i=1}^L$ de \mathbf{R}_{xx} sont augmentées de σ_n^2 , c'est-à-dire,

$$\lambda_i = \begin{cases} \alpha_i + \sigma_n^2 & \text{pour } 1 \leq i \leq K, \\ \sigma_n^2 & \text{pour } K + 1 \leq i \leq L, \end{cases} \quad (2.50)$$

et la matrice \mathbf{R}_{xx} peut donc se mettre sous la forme décomposée suivante :

$$\mathbf{R}_{\text{xx}} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^H = \sum_{i=1}^L \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H, \text{ avec } \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_L\} \quad (2.51)$$

Les matrices Λ et \mathbf{U} sont respectivement constituées des valeurs propres $\{\lambda_i\}_1^L$ et des vecteurs propres associés $\{\mathbf{u}_i\}_1^L$. L'ensemble de ces vecteurs propres peut être partitionné en deux sous ensembles :

- $\mathbf{E}_s = \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^K$ constitué de K vecteurs propres associés aux K plus grandes valeurs

propres et qui forment la base du sous espace signal \mathbf{E}_s ;

- $\mathbf{E}_n = \{\mathbf{u}_i\}_{i=K+1}^L$ constitué des $L - K$ vecteurs propres associés aux $L - K$ plus faibles valeurs propres, ou valeurs propres nulles en cas d'absence de bruit, et qui forment la base du sous espace bruit \mathbf{E}_n .

Les sous espaces \mathbf{E}_s et \mathbf{E}_n sont orthogonaux et les matrices \mathbf{U} et Λ peuvent être décomposées en sous matrices :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Où

- $\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K]$: matrice des vecteurs propres constituant la base du sous espace signal \mathbf{E}_s ;
- $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_L]$: matrice des vecteurs propres constituant la base du sous espace bruit \mathbf{E}_n ;
- $\Lambda_s = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_K]$: matrice des valeurs propres associés aux vecteurs propres de la matrice \mathbf{U}_s ;
- $\Lambda_n = \text{diag}[\lambda_{K+1}, \dots, \lambda_L]$: matrice des valeurs propres associés aux vecteurs propres de la matrice \mathbf{U}_n ;

La matrice de covariance $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$ peut donc se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U}_s \Lambda_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \Lambda_n \mathbf{U}_n^H \end{aligned} \quad (2.53)$$

ce qui nous permet d'écrire pour tout vecteur propre \mathbf{u}_n de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \mathbf{u}_n = \sigma_n^2 \mathbf{u}_n \quad (2.54)$$

En reprenant l'expression (2.30) de la matrice de covariance, nous avons,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} \mathbf{u}_n = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{u}_n + \sigma_n^2 \mathbf{u}_n, \text{ pour } \theta \in \{\theta_1, \dots, \theta_K\} \quad (2.55)$$

et compte tenu de l'expression (2.54) il résulte,

$$\mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{u}_n = 0 \quad (2.56)$$

ce qui permet d'écrire,

$$\mathbf{u}_n^H \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{u}_n = 0 \quad (2.57)$$

Par ailleurs, sachant que \mathbf{R}_{ss} est une matrice diagonale à éléments réels positifs, elle est définie positive, et nous avons donc,

$$\mathbf{v} \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{v}^H > 0, \quad \forall \mathbf{v} \neq 0 \quad (2.58)$$

En posant $\mathbf{v} = \mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{u}_n$, l'expression (2.57) ne peut donc être vérifiée que si le vecteur \mathbf{v} est nul, c'est à dire,

$$\mathbf{A}^H(\theta) \mathbf{u}_n = 0, \quad \forall \theta \in \{\theta_1, \dots, \theta_K\} \quad (2.59)$$

Cela signifie que tous les vecteurs propres constituant la matrice \mathbf{U}_n , et donc formant la base du sous espace bruit \mathbf{E}_n , sont orthogonaux à tous les vecteurs de la matrice de direction $\mathbf{A}(\theta)$. Par conséquent, comme ces mêmes vecteurs propres sont orthogonaux aux vecteurs propres constituant la base du sous espace signal, alors les vecteurs de direction $\{\mathbf{a}(\theta_i)\}_{i=1}^K$ constituent aussi une base du sous espace signal. Les directions d'arrivées $\{\theta_i\}_{i=1}^K$ seront donc estimées pour les valeurs annulant la projection des vecteurs de direction dans le sous espace bruit en cas d'absence de bruit, ou bien minimisant cette projection en cas de présence de bruit.

2.3.3.1 La Méthode MUSIC

La méthode MUSIC, avec ses nombreuses variantes, est de loin la plus utilisée des méthodes sous espaces. C'est une technique développée en parallèle par R.O.Schmidt sous l'acronyme de "MUSIC" pour Multiple Signal Classification [9], et par G.Bienvenu et L. Kopp sous l'appellation de "goniomètre" [10]. C'est une technique haute résolution d'estimation des directions d'arrivée des signaux qui utilise la décomposition propre de la matrice de covariance des signaux reçus en se basant sur le principe suivant :

La famille de vecteurs $\mathbf{a}(\theta)$ paramétrés par l'angle d'arrivée θ est projetée dans le sous espace bruit, et les directions d'arrivée $\{\theta_i\}_{i=1}^K$ seront déterminées par les valeurs minimales de cette projection ou bien par les valeurs maximales de son inverse. Cela revient à chercher les pics d'une fonction notée ci-dessous par P_{MUSIC} et représentant l'inverse

du carré de la norme de projection du vecteur de direction dans le sous espace bruit,

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(\theta)} = \frac{1}{\|\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(\theta)\|^2} \text{ pour } \theta_{min} \leq \theta < \theta_{max} \quad (2.60)$$

Les figures 2.7 -a,-b,-c , représentent le pseudo spectre $P_{MUSIC}(\theta)$ pour le cas de trois sources se trouvant dans les directions $\theta_1 = -10^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$ et $\theta_3 = 15^\circ$. Ces figures montrent l'effet des paramètres du modèle de données sur les performances de résolution de l'algorithme MUSIC, à savoir le rapport signal sur bruit (SNR), le nombre de capteurs du réseau (L) et le nombre de snapshots (M). Nous constatons que plus les valeurs de ces paramètres sont élevées, meilleure est la résolution de l'algorithme.

2.3.3.2 La Méthode ESPRIT

L'algorithme ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotationnal Invariance Techniques) fait partie des méthodes haute résolution d'estimation des directions d'arrivée de signaux incidents sur un réseau d'antennes. Cette méthode a été développée par R. Roy et T. Kailath [11] et dont le principe de fonctionnement est illustrée par la figure 2.8. ESPRIT consiste donc à scinder le réseau en deux sous-réseaux identiques de $(L - n)$ antennes, décalés d'une distance $n \times d$. Les signaux délivrés par les deux sous réseaux sont :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{A}_1(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_1(t) \text{ pour de sous réseau 1;} \\ \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{A}_2(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_2(t) \text{ pour de sous réseau 2;} \end{cases} \quad (2.61)$$

En prenant $n = 1$, la sous matrice $\mathbf{A}_1(\theta)$ est obtenue en supprimant la dernière ligne de la matrice $\mathbf{A}(\theta)$ donnée par (2.27) , et la sous matrice $\mathbf{A}_2(\theta)$ est obtenue en supprimant la première ligne de la matrice $\mathbf{A}(\theta)$, ce qui permet d'écrire,

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\theta) \\ \text{ligne } L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ligne } 1 \\ \mathbf{A}_2(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

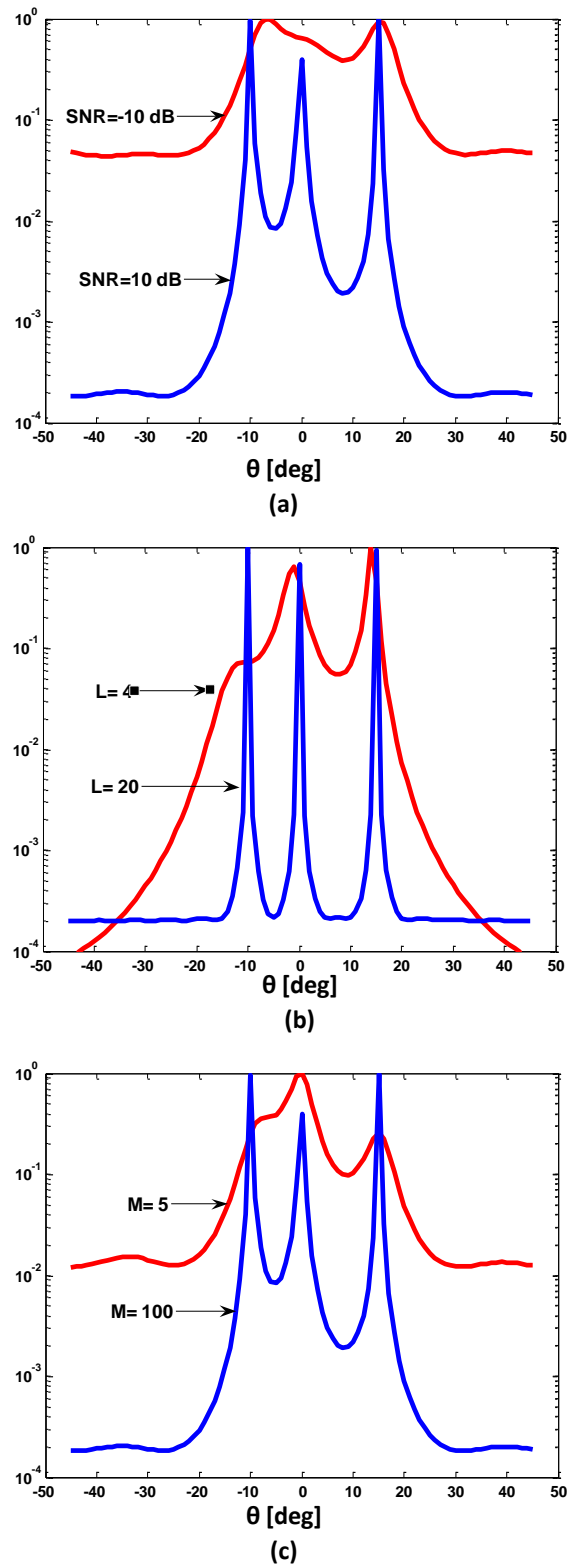


FIGURE 2.7 – Pseudo-spectre MUSIC : influence des paramètres du modèle de données sur les performances de l'algorithme MUSIC :

- a- influence du rapport signal sur bruit (RSB), avec $L=8$ et $M=100$;
- b- influence du nombre de capteurs (L), avec RSB=10 dB et $M=100$;
- c- influence du nombre de snapshots (M), avec RSB=10 dB et $L=8$.

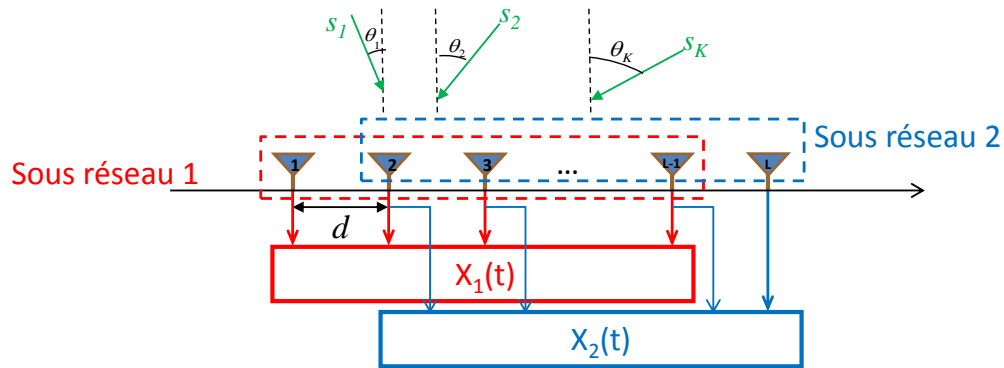


FIGURE 2.8 – Réseau ESPRIT

$$\text{où } \mathbf{A}_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\varphi_1} & \dots & e^{-j\varphi_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(L-2)\varphi_1} & \dots & e^{-j(L-2)\varphi_K} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_2(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi_1} & \dots & e^{-j\varphi_K} \\ e^{-j2\varphi_1} & \dots & e^{-j2\varphi_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(L-1)\varphi_1} & \dots & e^{-j(L-1)\varphi_K} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Les vecteurs directionnels $\mathbf{a}_1(\theta_i)$ et $\mathbf{a}_2(\theta_i)$ formant respectivement les sous matrices $\mathbf{A}_1(\theta)$ et $\mathbf{A}_2(\theta)$ sont donnés par :

$$\mathbf{a}_1(\theta_i) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\varphi_i} \\ \vdots \\ e^{-j(L-2)\varphi_i} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_2(\theta_i) = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi_i} \\ e^{-j2\varphi_i} \\ \vdots \\ e^{-j(L-1)\varphi_i} \end{bmatrix} \quad \text{pour } i = 1, \dots, K \quad (2.64)$$

Ces vecteurs sont linéairement dépendants puisque nous avons :

$$\mathbf{a}_2(\theta_i) = e^{-j\varphi_i} \mathbf{a}_1(\theta_i), \quad \text{pour } i = 1, \dots, K \quad (2.65)$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2(\theta) &= \begin{bmatrix} e^{-j\varphi_1} \mathbf{a}_1(\theta_1) & \dots & e^{-j\varphi_K} \mathbf{a}_K(\theta_K) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\theta_1) & \dots & \mathbf{a}_K(\theta_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-j\varphi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-j\varphi_K} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1(\theta) \Phi \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\text{où } \Phi = \text{diag}(e^{-j\varphi_1}, \dots, e^{-j\varphi_K}) \quad (2.67)$$

La matrice Φ contient l'information sur les directions d'arrivée des signaux sources, et l'algorithme ESPRIT consiste en la résolution de l'équation (2.67).

En l'absence de bruit (présence du signal utile seul), la matrice de covariance du signal reçu est donnée par :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H(\theta) \quad (2.68)$$

Nous avons montré que les vecteurs directionnels $\mathbf{a}(\theta_i)$, $i = 1, \dots, K$ engendrent le sous espace signal \mathbf{E}_s . D'autre part, nous savons que les vecteurs propres \mathbf{u}_i de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$ engendrent aussi le sous espace signal \mathbf{E}_s , et par conséquent les vecteurs \mathbf{u}_i et $\mathbf{a}(\theta_i)$, $i = 1, \dots, K$, sont colinéaires et que l'un peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire de l'autre,

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^K \omega_{i,j} \mathbf{a}(\theta_i) \quad (2.69)$$

La matrice \mathbf{U}_s des vecteurs propres constituant la base du sous espace signal \mathbf{E}_s peut donc s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K \omega_{i,1} \mathbf{a}(\theta_i) & \cdots & \sum_{i=1}^K \omega_{i,K} \mathbf{a}(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

et peut aussi se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(\theta_1) & \cdots & \mathbf{a}_K(\theta_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,1} & \cdots & \omega_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{K,1} & \cdots & \omega_{K,K} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\theta)\Omega \quad (2.71)$$

Compte tenu de l'expression (2.62), nous avons,

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\theta) \\ \text{ligne } L \end{bmatrix} \Omega = \begin{bmatrix} \text{ligne } 1 \\ \mathbf{A}_2(\theta) \end{bmatrix} \Omega \quad (2.72)$$

De cette relation il vient,

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{s1}(\theta) \\ \text{ligne } L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ligne } 1 \\ \mathbf{U}_{s2}(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Où

$$\mathbf{U}_{s1} = \mathbf{A}_1(\theta)\Omega \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_{s2} = \mathbf{A}_2(\theta)\Omega = \mathbf{A}_1(\theta)\Phi\Omega = \mathbf{U}_{s1}\Omega^{-1}\Phi\Omega \quad (2.74)$$

En posant,

$$\Psi = \Omega^{-1}\Phi\Omega, \quad (2.75)$$

nous aurons,

$$\mathbf{U}_{s2} = \mathbf{U}_{s1}\Psi \quad (2.76)$$

ce qui signifie que les matrices Φ et Ψ sont semblables ($\Psi = \Omega^{-1}\Phi\Omega$), et qu'elles ont donc les mêmes valeurs propres qui, de par la diagonalité de la matrice Φ , sont égales aux éléments diagonaux de cette matrice, c'est à dire,

$$\lambda_{\Psi,i} = \Phi(i, i) \quad i=1, \dots, K \quad (2.77)$$

Le problème d'estimation des directions d'arrivée par la méthode ESPRIT revient donc à déterminer la matrice Ψ vérifiant la relation (2.76), de calculer ses valeurs propres, et d'en déduire les éléments diagonaux de Φ . Comme la matrice \mathbf{U}_{s1} est de rang plein ($\text{rang}(\mathbf{U}_{s1}) = K$) et que $L > K$, la matrice est directement calculée à partir de l'équation (2.76) en utilisant la pseudo inverse de \mathbf{U}_{s1} , c'est à dire,

$$\Psi = [\mathbf{U}_{s1}^H \mathbf{U}_{s1}]^{-1} \mathbf{U}_{s1}^H \mathbf{U}_{s2} = \mathbf{U}_{s1}^+ \mathbf{U}_{s2} \quad (2.78)$$

dont les valeurs propres, d'après l'équation (2.77), sont données par,

$$\mu_i = \lambda_{\Psi,i} = e^{-j\varphi_i}, \quad \text{où} \quad \varphi_i = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta_i) \quad (2.79)$$

D'où l'on déduit l'estimé des directions d'arrivée par la méthode ESPRIT,

$$\hat{\theta}_i = -\arcsin \left[\frac{\lambda}{2\pi d} \arg(\mu_i) \right], \quad i = 1, \dots, K \quad (2.80)$$

2.4 Outils temps-fréquence pour l'analyse des signaux non stationnaires

Les méthodes basées sur la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance des observations fournies par le réseau d'antennes, réalisent de bonnes performances d'estimation des DDAs de signaux stationnaires. Or ces techniques ont montré leurs limites et perdent de leurs performances quand elles sont appliquées à des signaux non stationnaires. Cette limitation est due à la non propriété de ces signaux dont les caractéristiques spectrales varient dans le temps et auxquels ne peut donc s'appliquer l'analyse spectrale classique basée sur la transformée de Fourier. Il devint alors indispensable de développer des outils de traitement et d'analyse appropriés permettant de décrire l'évolution temporelle des caractéristiques fréquentielles de ces signaux. L'idée première fut celle d'appliquer des outils d'analyse déjà existants en les adaptant au cas non stationnaire grâce à un découpage du signal en tranches temporelles supposées localement stationnaires et ce, afin d'y appliquer une analyse de Fourier classique. Cette technique simple et intuitive a donné lieu à deux approches bien connues, à savoir la transformation de Fourier à court terme (TFCT ou STFT pour Short Time Fourier Transform) et la transformée en ondelettes (WT pour Wavelets Transform).

2.4.1 Transformée de Fourier à court terme (TFCT)

La transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ est définie par,

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.81)$$

où les paramètres t et f représentent le temps et la fréquence du signal. Cette forme intégrale décrit la variation de l'amplitude des composantes fréquentielles du signal temporel $s(t)$ sans pour autant indiquer les instants d'apparition de ces composantes. Or cette information temporelle est nécessaire pour l'analyse de signaux non stationnaires

caractérisés par la variation temporelle de leurs propriétés spectrales. Ainsi, la transformée de Fourier, de par son expression (2.81), n'est pas adaptée à cette classe de signaux. L'analyse des signaux non stationnaires doit donc nécessairement passer par une représentation simultanée en temps et en fréquence. La technique appelée à juste titre transformation de Fourier à court terme TFCT (Short Time Fourier Transform), est une approche qui permet une telle représentation en appliquant la transformation de Fourier classique au signal à analyser, mais en le pondérant par une fenêtre glissante de forme et de durée prédéterminées. Analytiquement, la TFCT est définie par l'intégrale suivante,

$$S_s(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)h(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.82)$$

Où le produit $h(t - \tau)e^{-j2\pi ft}$ représente la fonction analysante, et le paramètre τ indique la position temporelle de la fenêtre glissante h dont la forme détermine la qualité de localisation dans le plan temps-fréquence. Le module au carré de la TFCT, appelé spectrogramme de puissance, représente la densité spectrale d'énergie du signal fenêtre $s(t)h(t - \tau)$,

$$P_{spec}(t, f) = |S_s(t, f)|^2 \quad (2.83)$$

$P_{spec}(t, f)$ est une mesure de l'énergie du signal contenue dans le domaine temps-fréquence centré au point (t, f) . La figure 2.9 représente les spectrogrammes d'un signal non stationnaire composé de deux chirps gaussiens, appelés aussi chirplets, de type,

$$s(t) = e^{-\alpha t^2} e^{j2\pi(\beta t + \gamma t^2)} \quad (2.84)$$

Ces signaux sont des chirps linéaires modulés en amplitude par une gaussienne, où α , β et γ sont des nombres réels non nuls fixant la forme de la chirplet. Ces signaux peuvent représenter les échos radar (ou sonar) de deux cibles distantes (figure 2.9-a, -c et -e) et voisines (figure 2.9-b, -d et -f) dont les spectrogrammes représentent les motifs temps-fréquence pour différentes longueurs de la fenêtre $h(t)$. La figure montre que la TFCT fournit des informations plus ou moins précises sur les composantes temporelles et fréquentielles du signal à analyser. Comme le plan temps-fréquence est découpé en atomes ou pavés d'analyse constants, il en résulte que les améliorations de la résolution temporelle et de la résolution fréquentielle se font l'une au détriment de l'autre. En outre,

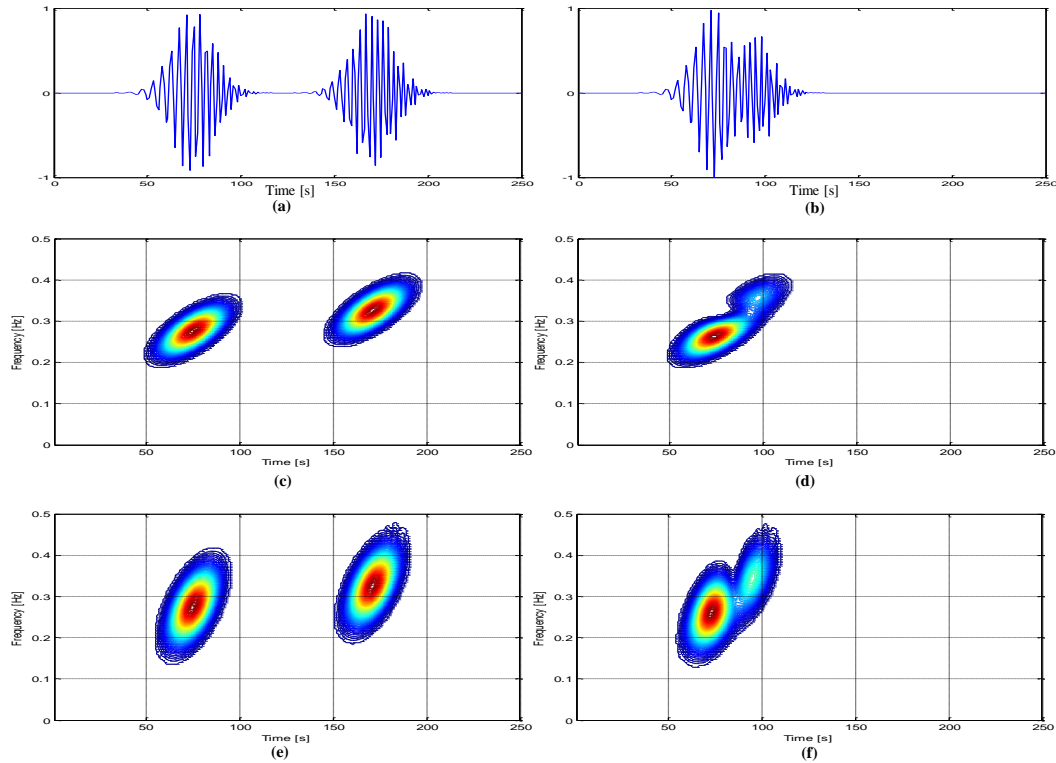


FIGURE 2.9 – Spectrogrammes de deux chirplets gaussiennes distantes (a) et voisines (b) pour différentes longueurs (L_h) de la fenêtre : meilleure résolution fréquentielle pour $L_h = 32$ (c) et (d), que pour $L_h = 8$ (e) et (f)

la qualité de localisation des points temps-fréquence dépend de la forme de la fenêtre glissante utilisée et reste limitée par le principe d'incertitude de Heisenberg qui formalise le compromis entre résolution temporelle et résolution fréquentielle par la relation,

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi} \quad (2.85)$$

D'après cette relation, la localisation optimale correspond à la limite inférieure atteinte par le pavé " $\Delta t \cdot \Delta f$ ", c'est à dire la valeur pour laquelle $\Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{4\pi}$. Dans [13] Gabor a montré qu'une telle égalité est obtenue pour une fenêtre glissante de forme gaussienne. L'autre inconvénient de la TFCT est que la fenêtre est appliquée avec la même durée sur toutes les tranches du signal à analyser, alors que de nombreux signaux, compte tenu de leurs formes particulièrement "accidentées", nécessitent une adaptation de cette durée aux variations locales du signal. L'analyse en ondelettes apporte une solution à cet inconvénient en introduisant une fenêtre dont la taille varie avec la fréquence [14–16].

2.4.2 Transformée en ondelettes (Wavelet Transform : WT)

Comme son nom l'indique, l'ondelette est une "mini-onde" de durée limitée. Elle se définit comme une fonction $\psi_{a,b}$ de carré intégrable ($\psi_{a,b} \in L^2(\mathbb{R})$) et de moyenne nulle. Le scalaire "a" est un paramètre d'échelle non nul et positif indiquant la dilatation ($a > 1$) ou la contraction ($a < 1$) de l'ondelette, et le scalaire "b" est un paramètre de translation indiquant la position temporelle de l'ondelette. La fonction $\psi_{a,b}$ représente donc une famille d'ondelettes que nous pouvons exprimer par la relation,

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.86)$$

L'ondelette pour laquelle $a = 1$ et $b = 0$ correspond à l'ondelette de base $\psi_{1,0}(t)$, appelée aussi ondelette mère ($\psi_{1,0}(t) = \psi(t)$). L'ondelette de base peut prendre différentes formes dont la plus fréquemment utilisée est l'ondelette de Morlet qui se présente sous la forme d'une exponentielle complexe modulée par une enveloppe gaussienne, c'est à dire,

$$s(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-j2\pi f_c t) \quad (2.87)$$

où f_c désigne la fréquence d'oscillation de l'ondelette et σ indique sa décroissance. Les trois ondelettes de la figure 2.10 représentent la partie réelle de l'ondelette de Morlet pour différentes valeurs du facteur d'échelle "a" et du paramètre de translation "b".

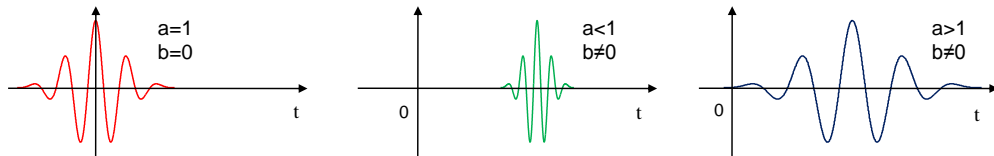


FIGURE 2.10 – Ondelette de Morlet, de gauche à droite : Ondelette de base ($a = 1$ et $b = 0$), contractée ($a < 1$ et $b \neq 0$) et dilatée ($a > 1$ et $b \neq 0$)

La transformée en ondelette (TO) du signal $s(t)$ est définie comme le produit scalaire de l'ondelette avec le signal à analyser et s'exprime sous la forme intégrale suivante [14, 15],

$$S_s(a, b) = \langle s(t), \psi_{a,b}^* \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.88)$$

où * indique le complexe conjugué.

L'analyse des signaux par la transformée en ondelettes se distingue de celle de la TFCT

par la capacité de la TO d'adapter la forme de l'ondelette d'analyse aux caractéristiques locales du signal en jouant sur le paramètre d'échelle [16], ce qui permet une amélioration de la résolution temps-fréquence. Cependant, comme pour le cas de la TFCT, cette résolution demeure toujours limitée par la relation d'incertitude d'Heisenberg donnée par (2.85). Ainsi, une amélioration de la résolution fréquentielle requiert une dilatation de la fenêtre temporelle et, réciproquement, une amélioration de la résolution temporelle nécessite la contraction de cette fenêtre. Cette opération d'échelonnage de la fenêtre d'analyse définit la transformée en ondelettes comme un outil d'analyse temps-échelle (au lieu de temps-fréquence utilisé pour la TFCT). Le carré du module de cette transformée, appelé scalogramme (au lieu du spectrogramme utilisé pour la TFCT), représente la distribution énergétique du signal à analyser dans le plan temps-échelle. La figure 2.11 représente le scalogramme des signaux tests donnés par (2.87).

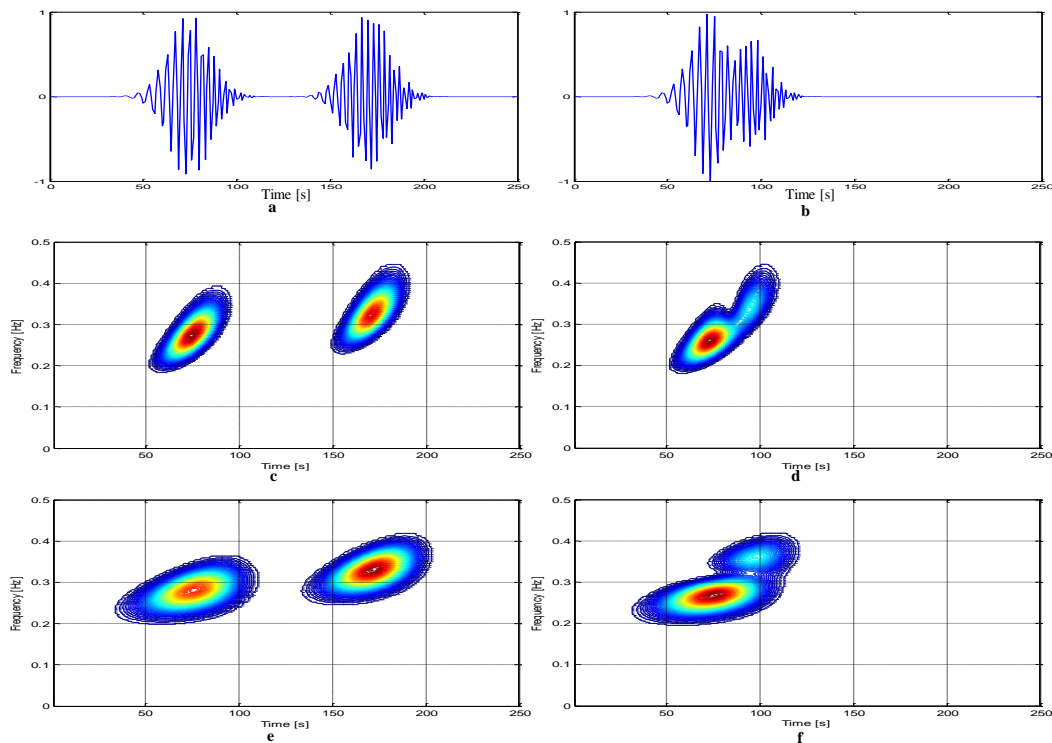


FIGURE 2.11 – Scalogrammes du signal test pour différentes longueurs de la fenêtre L_h : cas de signaux distants (a,c,e) et proches (b,d,f).

2.4.3 Distributions de la classe de Cohen

Les distributions de la classe de Cohen sont définies comme la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction de caractérisation $T_x(\nu, \tau)$ donnée par,

$$T_x(\nu, \tau) = g(\nu, \tau)A_x(\nu, \tau) \quad (2.89)$$

où $g(\theta, \tau)$ est une fonction de paramétrisation désignant le noyau de la distribution, et $A_x(\theta, \tau)$ la fonction d'ambiguïté à bande étroite du signal à analyser $x(t)$ et telle que,

$$A_x(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{j2\pi\nu t} dt \quad (2.90)$$

d'où la forme quadratique de la distribution de Cohen,

$$C_x(t, f) = \iint T_x(\nu, \tau) e^{-j2\pi(\nu t + f\tau)} d\nu d\tau \quad (2.91)$$

Compte tenu des expressions (2.89), (2.90) et (2.91), nous obtenons la distribution de Cohen sous sa forme la plus communément connue définie par,

$$C_z(t, f) = \iiint e^{j2\pi\nu(u-t)} g(\nu, \tau) z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\nu du d\tau, \quad (2.92)$$

La fonction $g(\nu, \tau)$, connue aussi sous le vocable de noyau "Doppler-lag", détermine le type de distribution et ses propriétés. Le tableau 2.1 donne les noyaux $g(\nu, \tau)$ des distributions les plus couramment rencontrées. En particulier, en choisissant $g(\nu, \tau) = 1$ nous retrouvons la distribution de Vigner-Ville.

Distribution	Doppler-lag Kernel : $g(\nu, \tau)$
Wigner-Ville	1
PWV	$h(\tau)$
Spectrogram	$\int_0^\infty h\left(u + \frac{\tau}{2}\right) h^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{j2\pi\nu u} du$
Choi-Williams	$e^{-\nu^2\tau^2/\sigma}$
Born-Jordan	$\text{sinc}(2\alpha\nu\tau)$
Rihaczek	$e^{-j\pi\nu\tau}$

TABLE 2.1 – Noyaux de quelques distributions

2.4.4 Distribution de Wigner Ville

La distribution de Wigner Ville (DWV) est un outil d'analyse temps-fréquence adapté pour l'étude de signaux non stationnaires. Elle est définie par,

$$W_z(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (2.93)$$

Cette expression est semblable à celle de la transformée de Fourier à court terme (TFCT) avec comme différence la fenêtre d'analyse. En effet, celle-ci est remplacée ici par la version renversée du signal à analyser, et c'est ce qui confère à la distribution de Wigner Ville sa forme bilinéaire et quadratique [13, 17]. Cependant, il importe de noter que cette distribution se distingue de la TFCT par le fait qu'elle n'utilise pas les méthodes classiques de traitement local par la transformée de Fourier [18]. Les motifs temps-fréquence obtenus par cette distribution dépendent du mode de représentation, réel ou analytique, du signal. Ceci est illustré par la figure 2.12 qui montre l'avantage d'une représentation analytique du signal par rapport à sa représentation réelle. En effet, la représentation du signal réel indique la présence de deux signaux chirp au lieu d'un seul signal. Ceci est dû au recouvrement spectral induit par les fréquences négatives du spectre du signal réel. D'où l'avantage d'une représentation du signal analytique qui n'occupe que la demi-bande du signal évitant ainsi le problème de repliement spectral [19].

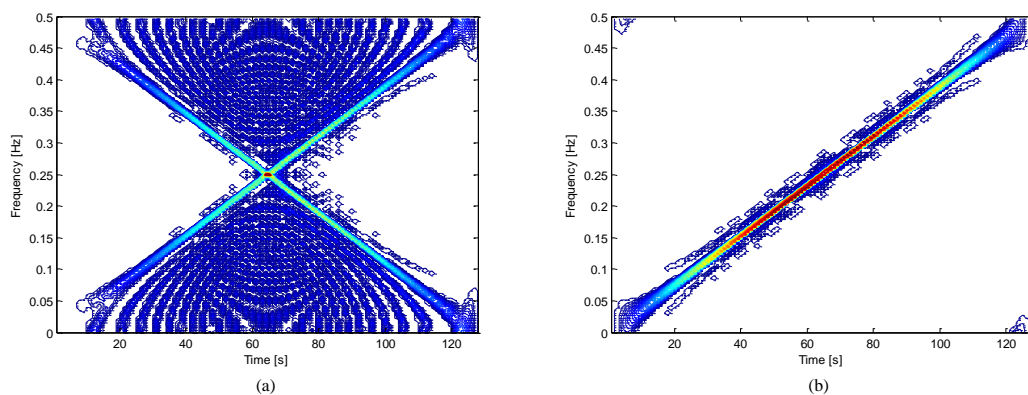


FIGURE 2.12 – Distribution temps-fréquences de Wigner-Ville d'un chirp linéaire : distribution de la partie réelle du signal (a), et du signal analytique associé (b)

2.4.4.1 Propriétés de la distribution de Wigner Ville

La distribution de Wigner Ville possède plusieurs propriétés dont les plus fréquemment rencontrées sont citées ci-dessous :

- **La DWV est à valeurs réelles** : En effet, sachant que,

$$W_{z_i, z_j}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z_j^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.94)$$

il est aisé de vérifier que,

$$W_{z_i, z_j}(t, f) = W_{z_i, z_j}^*(t, f) \quad (2.95)$$

prouvant la valeur réelle de la DWV.

- **Invariance par translations temporelle et fréquentielle** : Une translation temporelle (fréquentielle) du signal produit la même translation temporelle (fréquentielle) de sa DWV. S'agissant de la translation temporelle nous avons,

$$z_0(t) = z(t - t_0) \implies W_{z_0}(t, f) = W_z(t - t_0, f) \quad (2.96)$$

et pour la translation fréquentielle,

$$z_0(t) = z(t)e^{j2\pi f_0 t} \implies W_{z_0}(t, f) = W_z(t, f - f_0) \quad (2.97)$$

- **Les marginales temporelles et fréquentielles** : Par définition, la marginale en temps est obtenue par intégration de la DWV sur le domaine fréquentiel,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) df &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} df d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f\tau} df d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \delta(\tau) d\tau \\ &= |z(t)|^2 \end{aligned} \quad (2.98)$$

Il en est de même pour la marginale en fréquence, en intégrant sur le domaine temporel,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} dt d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f\tau} dt d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
&= |Z(f)|^2
\end{aligned} \tag{2.99}$$

• **Conservation de l'énergie** : L'énergie obtenue par la transformation de Wigner Ville d'un signal est égale à l'énergie de ce signal. En effet, compte tenu des propriétés de marginalité (2.98) et (2.99) et en appliquant la relation de Parseval-Plancherel, nous avons,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) df dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt \tag{2.100}$$

• **Accès à la fréquence instantanée et au retard de groupe** : Le moment de premier ordre en fréquence de la DWV permet de retrouver la fréquence instantanée du signal,

$$f_z(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg z(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f W_z(t, f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) df} \tag{2.101}$$

Le calcul est dual pour le retard de groupe obtenu en calculant le moment de premier ordre en fréquence de la DWV du signal,

$$t_z(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \arg Z(f) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t W_z(t, f) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) dt} \tag{2.102}$$

• **Inversibilité** : La DWV est inversible,

$$z(t) = \frac{1}{z^*(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} W_z(t, f) e^{j2\pi ft} df \tag{2.103}$$

2.4.4.2 Limitations de la distribution de Wigner Ville

Comme nous venons de le montrer, la DWV possède un ensemble de propriétés intéressantes qui font d'elle la distribution la plus connue et la mieux appréciée par la

communauté des traiteurs de signaux. Cependant, cette distribution comporte des inconvénients qui limitent son utilisation. A ce propos, la DWV souffre de sa non positivité qui l'exclue de la classe des densités énergétiques, mais son inconvénient majeur réside dans les artéfacts qu'elle génère et qui rendent difficile l'interprétation des résultats obtenus. Ces effets gênants sont dus à la forme quadratique et bilinéaire de la DWV et qui se manifestent pour des signaux mono-composantes FM non linéaires, mais aussi et surtout pour les signaux multi-composantes à cause de la présence des termes croisés.

- **Artéfacts internes** : Ils sont propres aux DWV de signaux mono-composantes. Pour les signaux FM linéaires, la DWV fournit une estimation optimale de la fréquence instantanée, ce qui permet une bonne représentation du motif temps-fréquence (2.13-a), alors qu'il en est autrement pour les signaux non linéaires pour lesquels l'estimation de la fréquence instantanée n'est qu'approximative. Dans ce cas, les motifs obtenus sont plus ou moins étalés dans le plan temps-fréquence et, en outre, ils sont encombrés par des artéfacts qui nuisent à la lisibilité de la représentation temps-fréquence et altèrent l'interprétation et la signification des résultats (2.13-b).

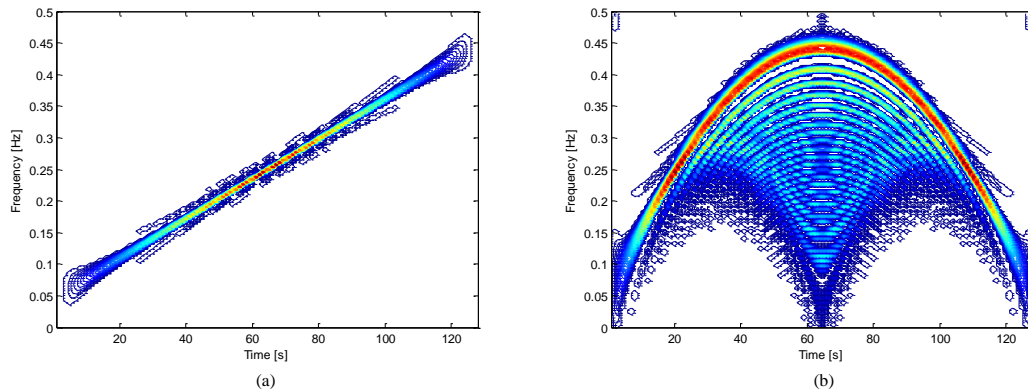


FIGURE 2.13 – Artéfacts internes pour les DWV de signaux monocomposantes : signaux FM linéaire (a), et non linéaire (b)

- **Artéfacts externes** : Ce type d'artéfacts est propre aux DWV de signaux multi-composantes qu'ils soient FM linéaires ou non linéaires. Sachant qu'un signal multicomposantes $z(t)$ est formé par la somme de signaux élémentaires z_i , c'est à dire,

$$z(t) = \sum_{i=0}^K z_i(t), \quad (2.104)$$

sa distribution de Wigner-Ville s'écrit,

$$\begin{aligned}
 W_z(t, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=0}^K z_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \right] \left[\sum_{i=0}^K z_i^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \sum_{i=0}^K \int_{-\infty}^{+\infty} z_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) z_i^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j2\pi f\tau} \\
 &+ \sum_{i=0}^K \sum_{j \neq i} \int_{-\infty}^{+\infty} z_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) z_j^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.105)
 \end{aligned}$$

Cette expression traduit le comportement de la DWV d'un signal multicomposantes qui, de par sa forme bilinéaire, est constituée non seulement par la somme des DWV des composantes individuelles du signal, mais aussi par la somme des DWV inter-composantes. Or ces termes croisés sont générateurs d'interférences et leur apparition est d'autant accentuée que le nombre de composantes est élevé. Ainsi, un signal constitué de K composantes génère K auto-termes et $K(K-1)/2$ termes croisés (cross-terms).

$$W_z(t, f) = \sum_{i=0}^K W_{z_i}(t, f) + \sum_{i=0}^K \sum_{j \neq i} W_{z_i, z_j}(t, f) \quad (2.106)$$

Ce phénomène est illustré par la figure 2.14 qui représente la DWV d'un signal composé de deux chirps linéaires. Les motifs des deux signaux dans le plan temps-fréquence sont séparés par des résultats factices donnant l'impression de la présence d'une troisième composante. L'apparition de ce "mirage", qui n'existe pas dans le cas du signal monocomposante donné par la figure 2.13-a, est due à la présence des termes croisés de l'expression (2.106).

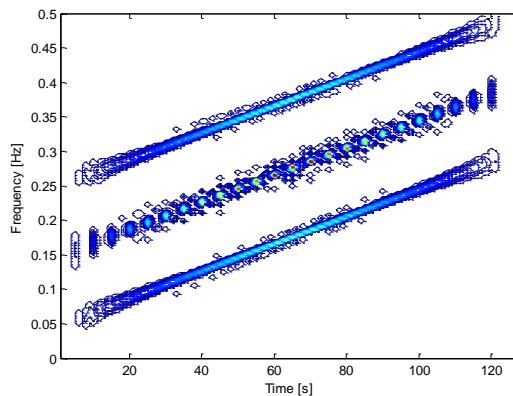


FIGURE 2.14 – DWV d'un signal composé de deux chirps linéaires montrant l'apparition d'artéfacts externes

• **Procédés d'élimination des artefacts** : Comme les termes générateurs d'artefacts apparaissent aussi bien pour les fréquences positives que pour les fréquences négatives, il sera possible de supprimer la contribution des fréquences négatives par l'utilisation de signaux analytiques tel que montré par la figure 2.12-b. Outre ce nettoyage préliminaire des artefacts, il existe d'autres techniques utilisant des noyaux de lissage de la DWV et qui ont été développées dans le but de réduire les interférences et d'améliorer la lisibilité de la représentation temps-fréquence [20]. Cette opération doit toutefois s'effectuer sans trop affecter le caractère local du signal, d'où l'importance du choix d'un noyau qui puisse répondre au mieux à cette contrainte. Dans ce cadre, plusieurs types de distributions utilisant des noyaux particuliers ont été proposés et qui font généralement partie des distributions quadratiques de la classe de Cohen [21].

2.4.5 La pseudo distribution de Wigner Ville (PDWV)

La distribution de Wigner Ville définie par l'expression 2.94 nécessite la connaissance du signal sur un domaine temporel infini, ce qui est évidemment irréalisable en pratique. Cette formulation purement théorique est remplacée par une version fenêtrée utilisable appelée Pseudo Distribution de Wigner-Ville (PDWV ou PWVD pour pseudo Wigner-Ville distribution) définie par,

$$PW_z(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) z\left(t + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.107)$$

et dont la forme discrète est donnée par,

$$PW_z(t, f) = \sum_{\tau=-\frac{L_h-1}{2}}^{\frac{L_h-1}{2}} z(t + \tau) z^*(t - \tau) e^{-j4\pi f\tau} \quad (2.108)$$

Où L_h est la longueur de la fenêtre rectangulaire $h(\tau)$. Ce fenêtrage a pour effet de lisser en fréquence la distribution de Wigner-Ville, ce qui permet d'atténuer les interférences inter-composantes dans la PDWV. Cette opération est illustrée par la figure 2.15 représentant le signal test composé de trois chirplets (figure 2.15-a) ainsi que les distributions associées de Wigner-Ville (figure 2.15-b) et du Pseudo Wigner-Ville (figures 2.15-c et 2.15-d). Les interférences présentes dans la figure 2.15-(b) sont atténuées dans

2.15-c, voire éliminées dans la figure 2.15-d. Cette amélioration, qui dépend de la longueur de la fenêtre temporelle L_h , s'est toutefois effectuée au prix d'une réduction de la résolution temps-fréquence de la distribution.

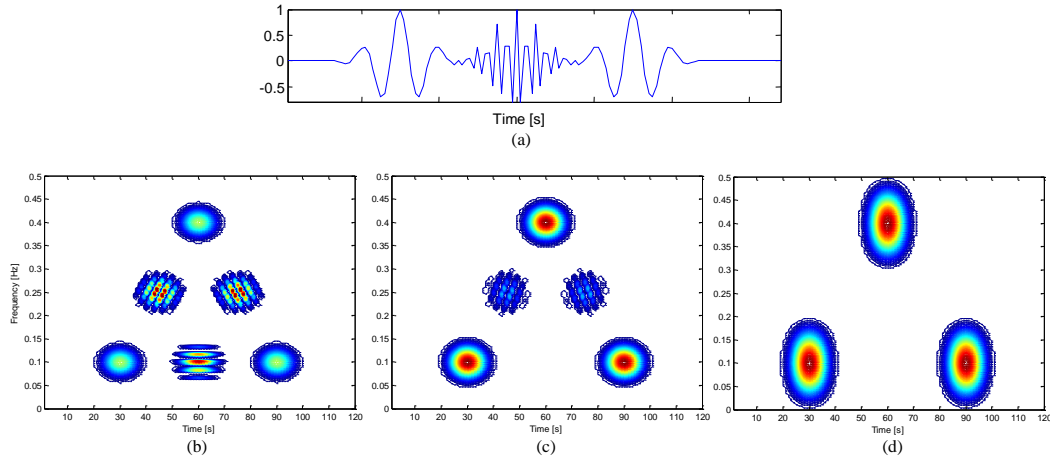


FIGURE 2.15 – signal test (a), sa distribution de Wigner-Ville (b) et ses distributions de la pseudo Wigner-Ville pour $L_h = 16$ (c), et $L_h = 4$ (d)

En conclusion, il importe de préciser qu'il n'existe pas un noyau "universel" qui puisse convenir à toutes les classes de signaux, d'où l'intérêt croissant porté au développement de méthodes dites adaptatives permettant d'adapter le noyau au contenu local du signal à analyser [22].

2.4.6 La distribution de Choi-Williams

Le noyau de la distribution de Choi-Williams [23] est une fonction de forme gaussienne à deux dimensions centrée autour de l'origine du plan d'ambiguïté, et il est défini par l'expression,

$$g(\nu, \tau) = e^{-\nu^2 \tau^2 / \sigma} \quad (2.109)$$

dont la distribution associée est donnée par,

$$CW_z(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi\sigma}{|\tau|}} e^{-\frac{\pi^2\sigma(t-u)^2}{\tau^2}} z(t + \frac{\tau}{2}) z^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} dud\tau, \quad (2.110)$$

Le paramètre σ contrôle la dispersion du noyau et, de ce fait, il contrôle le taux des termes croisés ainsi que la résolution des auto-termes de la distribution [24]. Comme il est montré par les figures 2.16-a et 2.16-b, plus la valeur de σ est importante, plus la

distribution de Choi-Williams tend vers celle de Wigner-Ville, et une diminution de σ a pour effet d'atténuer les interférences mais au prix d'une dégradation de la résolution en temps-fréquence de la distribution (2.16-c).

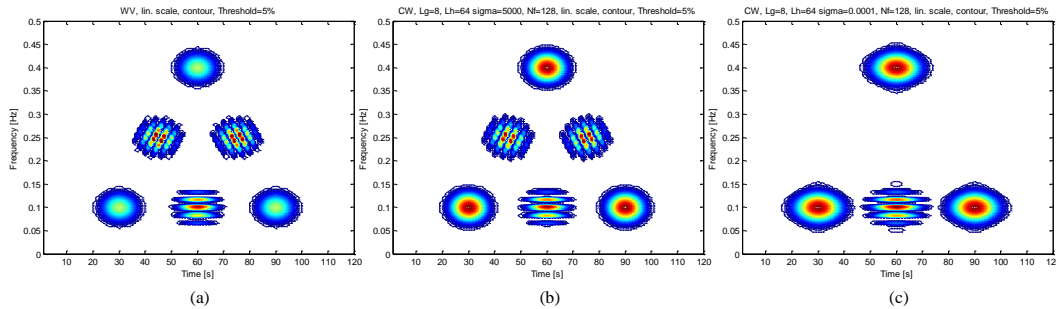


FIGURE 2.16 – Effet du paramètre de dispersion σ .

2.4.7 La distribution de Born-Jordan

Le noyau de la distribution de Born-Jordan est une fonction de forme en *sinc* définie par,

$$g(\nu, \tau) = \frac{\sin 2\pi a \tau \nu}{2\tau \nu} \quad (2.111)$$

dont la distribution associée est donnée par,

$$BJ_z(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2a|\tau|} \int_{t-a\tau}^{s+a\tau} z\left(s + \frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) ds \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad (2.112)$$

2.5 Conclusion sur le chapitre

Ce chapitre a été entamé par un bref aperçu sur les notions de signaux non stationnaires et de signaux analytiques. Nous avons établi le modèle de données correspondant à des signaux à bande étroite reçus par un réseau linéaire et uniforme. Ensuite, nous avons présenté les méthodes basse résolution de formation de voie, ainsi que les méthodes sous espaces et les algorithmes associés d'estimation des DDAs. Le chapitre est clôturé par la présentation d'outils temps-fréquence qui serviront dans la suite de cette étude, à établir les expressions analytiques de la variance d'estimation des directions d'arrivée.

Chapitre 3

Méthodes temps-fréquence d'estimation des DDAs

3.1 Traitement d'antennes temps-fréquence

En traitement d'antennes le vecteur d'observation se présente sous une forme spatio-temporelle qui interprète la diversité spatiale caractérisant le réseau d'antennes. Cette forme de représentation, parfaitement adaptée aux signaux stationnaires, n'est cependant pas suffisante pour les signaux non stationnaires. Comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, la représentation de signaux non stationnaires nécessite l'intervention de la dimension temps-fréquence. Cette idée a donné lieu à l'introduction des distributions temps-fréquence spatiales (DTFS), plus connues sous l'abréviation anglaise STFD (spatial time-frequency distributions). Ce type de distributions, introduit pour la première fois par A. Belouchrani et M. Amin dans [4], a été d'abord utilisé dans la résolution de problèmes de séparation de signaux sources non stationnaires avant d'être appliqué à la résolution de problèmes d'estimation des directions d'arrivée [5, 6, 25]. Ce type de distributions est une extension des distributions temps-fréquence aux vecteurs de signaux et il s'exprime sous la forme matricielle suivante,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u, \tau) \mathbf{x}(u + \frac{\tau}{2}) \mathbf{x}^H(u - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} du d\tau, \quad (3.1)$$

De façon analogue à la distribution de signaux multicomposantes exprimés par la relation (2.106), la matrice des termes croisés (cross-terms) entre les vecteurs de signaux \mathbf{x}_i et \mathbf{x}_j , $i \neq j$, est définie par,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u, \tau) \mathbf{x}_i(u + \frac{\tau}{2}) \mathbf{x}_j^H(u - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} du d\tau, \quad (3.2)$$

La fonction $g(t-u, \tau)$ est le noyau "Doppler-lag" qui définit le type de distribution utilisé, et conformément au tableau 2.1 nous avons $g(t-u, \tau) = 1$ pour une distribution de Wigner-Ville. La matrice de la pseudo distribution de Wigner-Ville spatiale (SPWVD) se présente sous la forme discrète suivante,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f) = \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \mathbf{x}(t+\tau)\mathbf{x}^H(t-\tau)e^{-j4\pi f\tau} \quad (3.3)$$

Avec N un entier naturel impaire qui désigne la longueur de la fenêtre temporelle. Pour une facilité de lecture, nous avons gardé les mêmes notations du temps (t) et de la fréquence (f) que celles utilisées dans le cas continu. Cette forme de distributions s'est avérée de grande importance dans le traitement d'antennes et a été utilisée dans les problèmes de séparations de sources et d'estimation des directions d'arrivée de signaux [4, 5].

En reprenant le modèle de données (2.28) et en lui appliquant la distribution (3.3), nous obtenons,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)\mathbf{A}^H(\theta) + \mathbf{A}(\theta)\mathbf{D}_{\mathbf{sn}}(t, f) + \mathbf{D}_{\mathbf{ns}}(t, f)\mathbf{A}^H(\theta) + \mathbf{D}_{\mathbf{nn}}(t, f) \quad (3.4)$$

où $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)$ est la matrice de distribution temps-fréquence du signal source,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f) = \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \mathbf{s}(t+\tau)\mathbf{s}^H(t-\tau)e^{-j4\pi f\tau} \quad (3.5)$$

La structure de $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)$ est illustrée par la figure 3.1 représentant les auto-terms et les cross-terms des DTFSs de deux types de signaux : des signaux chirp linéaires et des ondelettes.

$\mathbf{D}_{\mathbf{sn}}(t, f)$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{ns}}(t, f)$ sont des matrices de distribution des termes croisés entre les vecteurs signal et bruit. Comme les signaux sources et le bruit sont non corrélés, l'espérance mathématique de ces distributions est nulle,

$$E[\mathbf{D}_{\mathbf{sn}}(t, f)] = E[\mathbf{D}_{\mathbf{ns}}(t, f)] = 0 \quad (3.6)$$

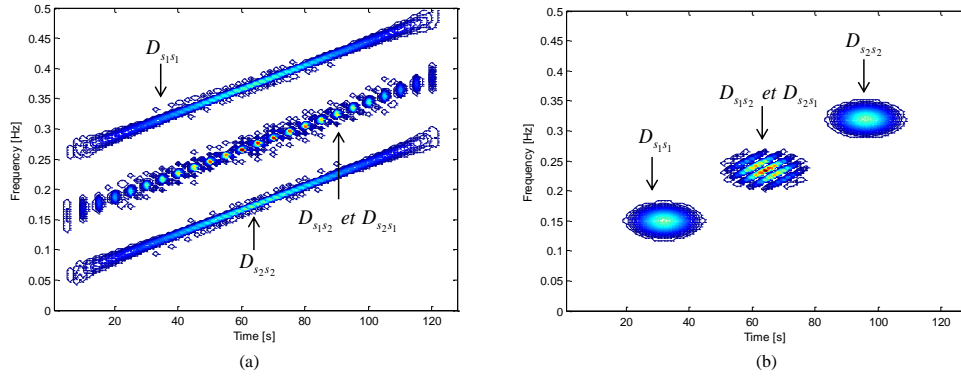


FIGURE 3.1 – DTFSs de deux chirps linéaires (a) et de deux ondelettes (b)

$\mathbf{D}_{\mathbf{nn}}(t, f)$ est la matrice de distribution du vecteur bruit donnée par,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{nn}}(t, f) = \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \mathbf{n}(t + \tau) \mathbf{n}^H(t - \tau) e^{-j4\pi f \tau} \quad (3.7)$$

En considérant le bruit additif blanc, de moyenne nulle et de variance σ_n^2 , nous avons,

$$E[\mathbf{D}_{\mathbf{nn}}(t, f)] = \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} E[\mathbf{n}(t + \tau) \mathbf{n}^H(t - \tau)] e^{-j4\pi f \tau} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_L \quad (3.8)$$

où \mathbf{I}_L est la matrice identité de dimension $L \times L$.

L'espérance mathématique de l'expression (3.3) se présente donc sous la forme,

$$E[\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f)] = \mathbf{A}(\theta) E[\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)] \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_L \quad (3.9)$$

En utilisant les notations,

$$\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}(t, f) = E[\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f)] \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{ss}}(t, f) = E[\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)] \quad (3.10)$$

nous aurons,

$$\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}(t, f) = \mathbf{A}(\theta) \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{ss}}(t, f) \mathbf{A}^H(\theta) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_L \quad (3.11)$$

Cette forme de la matrice de distributions est similaire à celle de la matrice de covariance donnée par l'expression (2.30). Cette similitude a été exploitée en appliquant aux DTFSs la même procédure de décomposition en sous espaces orthogonaux que celle appliquée

à la matrice de covariance pour estimer les DDAs de signaux non stationnaires. Par ailleurs, sachant que la matrice $\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}(t, f)$ donnée par l'expression (3.11) est définie pour tout point appartenant au plan (t, f) , le bruit d'observation doit donc s'étaler sur tout ce plan et il serait judicieux de le réduire en choisissant les points (t, f) des régions contenant les signaux sources, ce qui devra améliorer le rapport signal sur bruit. Pour ce faire, plusieurs approches sont proposées dans la littérature, parmi lesquelles nous présenterons les deux plus importantes et les plus connues utilisées dans l'estimation des DDAs et la séparation de sources. La première approche est basée sur une technique de bloc diagonalisation conjointe des DTSFs, et la seconde approche, plus simple à utiliser, consiste à calculer la moyenne des DTFs sur plusieurs points (t, f) avant de lui appliquer la décomposition en sous espaces.

3.1.1 Bloc-diagonalisation conjointe (ou simultanée)

En absence du bruit additif, l'expression (3.4) s'écrit,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)\mathbf{A}^H(\theta) \quad (3.12)$$

Dans ce cas, les sous espaces engendrés par les vecteurs propres de $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f)$ sont les mêmes que ceux engendrés par les vecteurs colonnes de la matrice de direction $\mathbf{A}(\theta)$. La matrice $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)$ de distribution temps-fréquence des signaux sources est de dimension $K \times K$ et ses éléments diagonaux sont les auto-DTFs. Quant aux cross-DTFs qui représentent les éléments extra-diagonaux de $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)$, ils sont nuls. Cette matrice est donc diagonale pour les points (t, f) correspondant aux auto-termes de la matrice des signaux.

La décomposition en valeurs singulières (DVS) de la matrice de direction, s'écrit,

$$\mathbf{A}(\theta) = [E_s \ E_n] [G \ 0]^T V^H \quad (3.13)$$

et compte tenu de l'expression (3.11), nous avons,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f) = [E_s \ E_n] B(t, f) [E_s \ E_n]^H \quad (3.14)$$

où $B(t, f)$ est une matrice bloc-diagonale donnée par,

$$B(t, f) = \text{diag} [GV^H \mathbf{D}_{\text{ss}}(t, f)VG \quad 0] \quad (3.15)$$

Comme les matrices E_s et E_n engendrant respectivement les sous espaces signal et bruit sont indépendantes des coordonnées temps-fréquence (t,f), la relation (3.13) montre que toute matrice $\mathbf{D}_{\text{xx}}(t, f)$ est bloc-diagonalisable par transformation unitaire $E = [E_s \ E_n]$. Une simple façon d'estimer E_s et E_n est d'appliquer la décomposition en valeurs singulières (DVS ou SVD pour Singular Value Decomposition) sur une seule matrice $\mathbf{D}_{\text{xx}}(t, f)$, mais dans ce cas il y a un risque d'indéterminations à cause de singularités de $\mathbf{D}_{\text{ss}}(t, f)$ qui peuvent apparaître. Afin d'éviter ce problème, une solution a été proposée dans [26] et qui consiste à utiliser une bloc-diagonalisation conjointe (BDC ou JBD pour joint bloc-diagonalization) de la combinaison d'un ensemble de Q distributions $\{\mathbf{D}_{\text{xx}}(t_q, f_q)\}_{q=1}^Q$ en exploitant la structure conjointe (3.14) des matrices $\mathbf{D}_{\text{xx}}(t, f)$. Cette bloc-diagonalisation conjointe peut être réalisée en maximisant le critère suivant [27],

$$C(U) = \sum_{q=1}^Q \sum_{i,j=1}^K |u_i^* \mathbf{D}_{\text{xx}}(t, f) u_j|^2 \quad (3.16)$$

pour l'ensemble des matrices unitaires $U = [u_1, \dots, u_L]$. Un algorithme de bloc-diagonalisation conjointe consiste à maximiser ce critère par des rotations de Givens successives est proposé dans [28, 29]. Une fois les sous espaces signal et bruit estimés, on peut utiliser n'importe quelle technique sous espace pour estimer les directions d'arrivée.

3.1.2 Technique de moyennage

Cette technique est illustrée par l'exemple de signaux à modulation de fréquence (MF) tels que celui montré par la figure 3.2. La distribution de la pseudo Wigner-Ville (DPWV) de ce signal a une valeur constante sur la période d'observation à l'exception des extrémités qui correspondent aux montées et descentes de la DPWV. La technique de moyennage consiste à calculer la moyenne arithmétique des DTFSS de K_o sources sur la période d'observation correspondant à $T_o = M - N + 1$ points (t,f) pour chaque source, où N représente la longueur de la fenêtre temporelle, ce qui revient à calculer,

$$\hat{\mathbf{D}}_{\text{xx}} = \frac{1}{K_o T_o} \sum_{k=1}^{K_o} \sum_{i=1}^{T_o} \mathbf{D}_{\text{xx}}(t_i, f_{k,i}(t_i)) \quad (3.17)$$

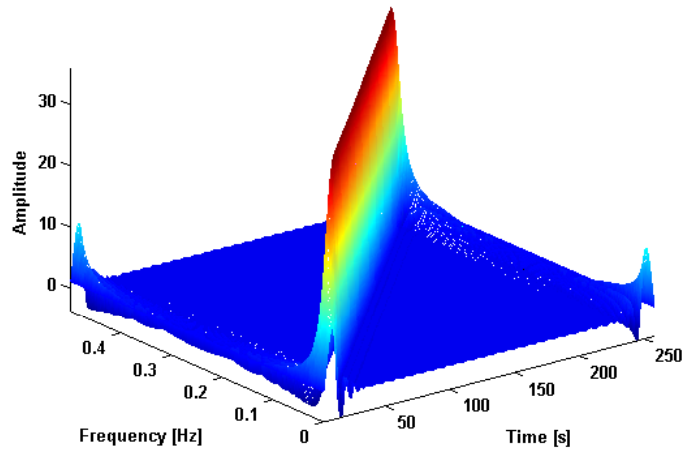


FIGURE 3.2 – Distribution temps-fréquences de Wigner-Ville d'un chirp linéaire

où $f_{k,i}(t_i)$ est la fréquence à l'instant t_i du $k^{\text{ème}}$ signal source.

L'opération de moyennage permet de réduire les éléments non diagonaux ou cross-termes des DTFSs ainsi que le bruit sans pour autant affecter les éléments diagonaux ou auto-termes correspondant aux signaux sources. Cela favorise l'émergence des auto-termes et les rend plus faciles à détecter, et par conséquent cette opération améliore les performances d'estimation des DDAs. Au cas où K_o signaux sources sont utilisés parmi les K signaux incidents, l'expression (3.11) devient,

$$\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}(t, f) = \mathbf{A}^o(\theta) \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{ss}}^o(t, f) (\mathbf{A}^o)^H(\theta) + \sigma_n^2 I_L \quad (3.18)$$

où $\mathbf{A}^o(\theta) = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{K_o}]$ et $\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{ss}}^o(t, f)$ représentent, respectivement, la matrice de direction et la matrice DTFS correspondant aux K_o signaux sources. Dans ce cas la condition reliant le nombre de capteurs à celui des signaux sources (c-à-d $L > K$) se réduit à $L > K_o$, ce qui signifie que, contrairement aux méthodes conventionnelles basées sur la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance, l'estimation des DDAs basée sur les techniques temps-fréquence peut être effectuée avec un nombre de capteurs inférieur à celui des signaux sources. Dans notre étude nous avons choisi la méthode de moyennage pour la formation de l'estimé de la matrice de distribution qui sert à la formation des sous espaces orthogonaux.

3.2 Les Distributions Temps-Fréquence Spatiales (DTFS)

3.2.1 Structure de la DTFS

La DTFS $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f)$ définie par l'expression (3.1) est formée d'auto-DTFSs notées $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}^a(t, f)$ et de cross-DTFSs notées $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}^c(t, f)$. Les distributions $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}^a(t, f)$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}^c(t, f)$ sont évaluées pour les points correspondant respectivement aux auto-termes et aux termes croisés. En l'absence du bruit, le vecteur signal à la sortie de l'antenne est donné par,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) \quad (3.19)$$

Compte tenu de l'expression (3.4), la DTFS de ce modèle s'écrit donc,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)\mathbf{A}^H(\theta) \quad (3.20)$$

où $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)$ est la matrice de distribution du vecteur signal source donnée par,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f) = \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \mathbf{s}(t + \tau)\mathbf{s}^H(t - \tau)e^{-j4\pi f\tau} \quad (3.21)$$

dont la forme matricielle s'écrit,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1}(t, f) & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2}(t, f) & \cdots & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_1\mathbf{s}_K}(t, f) \\ \mathbf{D}_{\mathbf{s}_2\mathbf{s}_1}(t, f) & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_2\mathbf{s}_2}(t, f) & \cdots & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_2\mathbf{s}_K}(t, f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{\mathbf{s}_K\mathbf{s}_1}(t, f) & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_K\mathbf{s}_2}(t, f) & \cdots & \mathbf{D}_{\mathbf{s}_K\mathbf{s}_K}(t, f) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

avec les éléments diagonaux $\{\mathbf{D}_{\mathbf{s}_i\mathbf{s}_i}(t, f)\}_{i=1}^K$ représentant les auto-termes, et les éléments hors-diagonaux $\{\mathbf{D}_{\mathbf{s}_i\mathbf{s}_j}(t, f)\}_{i,j=1}^K, j \neq i$ représentant les termes croisés. En considérant l'effet de la fenêtre négligeable, l'auto-DTFS $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}^a(t, f)$ est diagonale pour tout point (t,f) correspondant à l'auto-terme du signal source, et la DTFS croisée $\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}^c(t, f)$ est anti-diagonale pour tout point (t,f) correspondant au terme croisé du signal source [30]. Les distributions définies plus haut permettent l'utilisation des techniques sous espaces dans la résolution de problèmes de traitement d'antennes, notamment ceux liés à l'estimation des directions d'arrivée et dont les performances de résolution angulaire se

trouvent considérablement améliorées par rapport aux méthodes sous espaces conventionnelles basées sur la décomposition propre de la matrice de covariance des signaux d'observation. En effet, les DTFSs, grâce à leur structure tridimensionnelle, permettent le traitement des signaux reçus dans le domaine espace-temps-fréquence, ce qui en toute évidence est plus pertinent que le traitement spatio-temporel réalisé par les méthodes conventionnelles. Le traitement est plus raffiné prenant en compte les signaux affectés par des interférences occupant la même bande fréquentielle ou le même intervalle temporel, ce qui favorise la sélection des signaux (figure 3.3). En outre, et comme le montre la figure 3.3-(b), dans l'approche basée sur les DTFSs l'effet du bruit est considérablement réduit du fait de sa dispersion sur tout le plan temps-fréquences favorisant ainsi l'émergence du signal utile, tandis que dans le cas de représentations temporelle ou fréquentielle le signal est quasiment noyé dans du bruit.

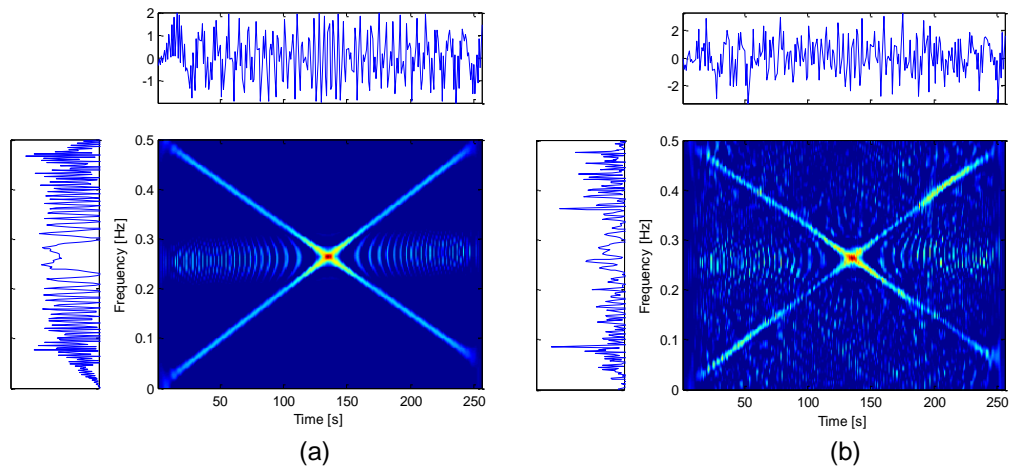


FIGURE 3.3 – Représentations du signal au niveau du premier capteur : présence d'interférences (a) ; présence d'interférences et du bruit(b)

3.2.2 Selection des auto-termes et des termes croisés dans le domaine temps-fréquence

Nous avons vu au paragraphe précédent que les méthodes sous espaces font appel aux techniques de bloc diagonalisation conjointe ou de moyennage de DTFSs de données obtenues à partir de points (t,f) correspondant aux signaux sources préalablement sélectionnés. Comme la signature de ces signaux n'est pas toujours connue a priori, la sélection des points (t,f) n'est donc pas systématique.

La sélection des auto-termes et cross-termes dans le domaine temps-fréquence est une opération qui consiste à localiser dans le plan TF les points correspondant aux pics des DTFSs et de déterminer s'ils correspondent à des auto-termes ou à des cross-termes. Cela revient à déterminer pour ces points si les matrices de DTFSs correspondantes exhibent une structure diagonale ou anti-diagonale. Plusieurs méthodes ont été développées dans ce domaine avec l'intérêt de mieux localiser les pics d'énergie dans le plan temps-fréquence [26, 31, 32]. Dans cette étude nous considérons des signaux chirp dont les signatures temps-fréquence sont connues, et nous utilisons la technique de moyennage pour renforcer les éléments diagonaux et réduire les éléments anti-diagonaux des matrices de distribution temps-fréquence spatiale (DTFS) comme décrit au paragraphe 3.1.2.

3.3 Conclusion sur le chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté la matrice de distribution temps-fréquence spatiale (DTFS) sur laquelle est fondée la méthode temps-fréquence d'estimation des DDAs de signaux reçus par un réseau d'antennes. Cette méthode utilise la même technique de décomposition en sous espaces que celle utilisée par la méthode conventionnelle de la statistique de second ordre mais qui nécessite un prétraitement lui permettant une telle décomposition. Pour cela, nous avons présenté deux approches, en l'occurrence la technique de bloc-diagonalisation conjointe et la technique de moyennage de DTFSs.

Chapitre 4

Perturbation du modèle d'observation

4.1 Modèle de données en présence de perturbations

4.1.1 Types de perturbations

Le modèle de données représenté par l'équation (2.28) ne tient compte que des perturbations dues au bruit de fond. Ce type de bruit est connu pour sa présence systématique dans tout dispositif électronique sous tension. Il est généralement additif, stationnaire et de distribution gaussienne. Ces propriétés statistiques permettent une simplicité de traitement du signal. Cependant, dans les cas pratiques le réseau d'antennes est soumis à d'autres perturbations de différentes natures dues notamment aux défauts de fabrication, d'installation ou de calibration de l'antenne, ou encore aux effets environnementaux et aux perturbations de positions des éléments d'antenne. Ces phénomènes sont de nature à dévier le modèle de données de sa forme nominale le rendant non représentatif de la réalité. Les erreurs de modèle qui en résultent dégradent de façon significative la performance des algorithmes d'estimation utilisés et rendent ainsi leur évaluation moins pertinente, voire sans intérêt. Dans ce chapitre, après avoir défini les principaux types de perturbations, nous présentons un modèle de données qui tient compte des erreurs dues à ces perturbations.

Erreurs de calibration : La calibration d'un réseau d'antennes n'est jamais parfaite à cause de phénomènes dont les effets sont plus ou moins importants sur les performances du réseau. Ces phénomènes sont généralement dus aux défauts de fabrication et de montage des éléments du réseau, au manque d'identité des éléments d'antennes et à

l'environnement immédiat du réseau [33]. A ces phénomènes vient s'ajouter les erreurs de mesures lors de l'opération de calibration proprement dite et qui affectent l'amplitude et la phase des signaux sous test.

Erreurs de position : Ce type de perturbation est dû à la force du vent ou au mouvement de la plateforme du réseau d'antennes causant ainsi la distorsion des fronts d'onde du fait du déplacement des capteurs par rapport à leurs positions d'origine [34]. Les erreurs qui en résultent sont aggravées lorsque les antennes sont souples ou lorsqu'elles sont dépourvues de radomes qui servent d'enveloppes de protection contre les effets climatiques tout en laissant passer les ondes électromagnétiques.

4.1.2 Modèle perturbé de données

Dans les situations pratiques, il est impossible d'établir avec exactitude le modèle des signaux de réponse du réseau d'antennes. La matrice de direction $A(\theta)$, généralement obtenue par des procédures de calibration ou expérimentalement, diffère de sa forme réelle à cause des perturbations qui entachent le réseau. En considérant les perturbations représentées par une variation aléatoire des vecteurs de direction, et si $\{\mathbf{a}(\theta_i)\}_{i=1}^K$ représente le modèle nominal des vecteurs de direction, et que $\{\Delta\mathbf{a}(\theta_i)\}_{i=1}^K$ représente les perturbations respectives, la matrice de direction aura la forme suivante,

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\theta) &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_1) + \Delta\mathbf{a}(\theta_1) & \mathbf{a}(\theta_2) + \Delta\mathbf{a}(\theta_2) & \cdots & \mathbf{a}(\theta_k) + \Delta\mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}(\theta) + \Delta\mathbf{A}(\theta)\end{aligned}\quad (4.1)$$

Le signal de réponse s'écrit donc,

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}(\theta) + \Delta\mathbf{A}(\theta)]\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)\quad (4.2)$$

où $\mathbf{s}(t)$ est le vecteur de signaux sources $s_i(t)$, $i = 1, \dots, K$, tels que,

$$s_i(t) = S_i e^{j\psi_i(t)}\quad (4.3)$$

S_i et $\psi_i(t)$ représentent respectivement l'amplitude et la phase du $i^{\text{ème}}$ signal source. L'amplitude S_i est considérée aléatoire, lentement variable dans le temps comparée aux oscillations de la phase $\psi_i(t)$, et elle est de moyenne nulle et de variance $\sigma_{s_i}^2$. Le modèle de données (4.2) tient compte à la fois des perturbations et du bruit additif et peut

s'exprimer ainsi,

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4.4)$$

$$\text{où } \mathbf{x}_o(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) \text{ et } \mathbf{x}_p(t) = \Delta\mathbf{A}\mathbf{s}(t) \quad (4.5)$$

désignant respectivement le signal en absence et en présence de perturbation.

Le modèle (4.2) est largement adopté dans les travaux traitant de cas similaires et il est considéré comme assez réaliste pour être utilisé dans les études de performances [35–40]. En outre, nous considérons dans cette thèse les variables $\{\Delta\mathbf{a}(\theta_i)\}_{i=1}^K$ comme pouvant représenter les différents types de perturbations citées au paragraphe précédent, qu'elles sont non corrélées avec le bruit, de moyennes nulles, et de variance $\sigma_{\Delta\mathbf{a}_{i,j}}^2$. Les moments de second ordre de cette variable sont donnés par,

$$\begin{aligned} E[\Delta\mathbf{a}(\theta_i)\Delta\mathbf{a}^H(\theta_j)] &= \sigma_{\Delta\mathbf{a}_{i,j}}^2 I\delta_{i,j} \\ E[\Delta\mathbf{a}(\theta_i)\Delta\mathbf{a}^T(\theta_j)] &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

En définissant le rapport signal sur perturbation (*RSP* ou *SPR* pour "signal to perturbation ratio") par le logarithme du rapport de la variance du signal $\mathbf{x}_o(t)$ à celle de la perturbation $\mathbf{x}_p(t)$, nous aurons au niveau du $i^{\text{ème}}$ élément d'antenne,

$$SPR_{[dB]} = 10\log \left[\frac{\text{var}(\sum_{k=1}^K a_{i,k}s_k)}{\text{var}(\sum_{k=1}^K \Delta a_{i,k}s_k)} \right] \quad (4.7)$$

où s_k est le $k^{\text{ème}}$ signal source, et où $a_{i,k}$ et $\Delta a_{i,k}$ représentent le $(i,k)^{\text{ème}}$ élément respectivement des matrices \mathbf{A} et $\Delta\mathbf{A}$. Les perturbations $\Delta a_{i,k}$ sont de variance $\sigma_{\Delta a}^2$ et sont indépendantes des signaux sources s_k . Ces signaux étant à bande étroite, nous avons donc $|a_{i,k}|^2 = 1$, et l'expression ci-dessus s'écrit,

$$SPR_{[dB]} = 10\log \left[\frac{\sum_{k=1}^K |a_{i,k}|^2 \text{var}(s_k)}{\sum_{k=1}^K \text{var}(\Delta a_{i,k}) \text{var}(s_k)} \right] = 10\log \left[\frac{\sum_{k=1}^K \text{var}(s_k)}{\sigma_{\Delta a}^2 \sum_{k=1}^K \text{var}(s_k)} \right] \quad (4.8)$$

$$\text{d'où, } SPR_{[dB]} = -10\log(\sigma_{\Delta a}^2) \quad (4.9)$$

Remarque : Le rapport signal sur perturbation (*SPR*) est considéré comme un indicateur de robustesse du réseau face aux perturbations qui l'affectent.

4.2 Expression unifiée des matrices de covariance et de distribution TF

Dans ce paragraphe nous appliquons les méthodes haute résolution d'estimation des paramètres de localisation de sources au modèle du signal reçu par le réseau de capteurs donné par l'équation (4.2). Pour cela nous utilisons la décomposition en sous espaces orthogonaux des matrices de covariance et de distribution temps-fréquence du signal de réception.

4.2.1 Méthode conventionnelle

La matrice de covariance du signal de réponse du réseau d'antennes, est définie par,

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = E[\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^H(t)] \quad (4.10)$$

En remplaçant $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ par son expression donnée par (4.2), nous obtenons,

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\theta)E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]\mathbf{A}^H(\theta) + E[\Delta\mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\Delta\mathbf{A}^H(\theta)] + E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] \quad (4.11)$$

Le calcul du premier et du troisième terme de cette équation est immédiat et nous avons,

$$\mathbf{A}(\theta)E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]\mathbf{A}^H(\theta) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H(\theta) \quad (4.12)$$

$$\text{et } E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \sigma_n^2\mathbf{I}_L \quad (4.13)$$

Quant au deuxième terme de (4.11), en exprimant le vecteur $\mathbf{s}(t)$ et la matrice $\Delta\mathbf{A}$ sous les formes suivantes,

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) & \cdots & s_K(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} S_1 e^{j\varphi_1(t)} & \cdots & S_K e^{j\varphi_K(t)} \end{bmatrix}^T \quad (4.14)$$

$$\mathbf{\Delta A} = \begin{bmatrix} \Delta a_{1,1} & \Delta a_{1,2} & \cdots & \Delta a_{1,K} \\ \Delta a_{2,1} & \Delta a_{2,2} & \cdots & \Delta a_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta a_{L,1} & \Delta a_{L,2} & \cdots & \Delta a_{L,K} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

nous aurons,

$$\begin{aligned} E[\Delta A(\theta)\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\Delta A^H(\theta)] &= E \left\{ \left[\begin{array}{cccc} \sum_{i=1}^K \Delta a_{1,i} s_i & \sum_{i=1}^K \Delta a_{2,i} s_i & \cdots & \sum_{i=1}^K \Delta a_{L,i} s_i \end{array} \right]^T \right. \\ &\times \left. \left[\begin{array}{cccc} \sum_{j=1}^K \Delta a_{1,j}^* s_j^* & \sum_{j=1}^K \Delta a_{2,j}^* s_j^* & \cdots & \sum_{j=1}^K \Delta a_{L,j}^* s_j^* \end{array} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

et puisque les erreurs du modèle sont indépendantes des signaux sources, l'expression (4.16) est donc une matrice de dimension $L \times L$ dont les éléments sont donnés par,

$$\sigma_{p,q} = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K E[\Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^*] E[s_i s_j^*] \quad (4.17)$$

Par ailleurs, comme les perturbations du modèle sont supposées indépendantes, de moyennes nulles et de variances $\sigma_{\Delta a}^2$, nous avons,

$$E[\Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^*] = \sigma_{\Delta a}^2 \delta_{i,j} \delta_{p,q} \quad (4.18)$$

et en notant par $\sigma_{s_k}^2$ la variance du $k^{\text{ème}}$ signal source, nous avons,

$$E[s_i s_j^*] = \sigma_{s_i} \sigma_{s_j} \delta_{i,j} \quad (4.19)$$

Le deuxième terme de l'expression (4.11) est donc une matrice diagonale qui s'écrit,

$$E[\Delta A(\theta)\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\Delta A^H(\theta)] = \sigma_{\Delta a}^2 \left(\sum_{i=1}^K \sigma_{s_i}^2 \right) \mathbf{I}_L = \sigma_{\Delta a}^2 \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}) \mathbf{I}_L \quad (4.20)$$

où $\mathbf{R}_{\text{ss}} = \text{diag}[\sigma_{s_1}^2, \dots, \sigma_{s_K}^2]$ est la matrice de covariance des signaux sources. En substituant (4.12), (4.13) et (4.20) dans (4.11) nous aurons,

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\text{ss}}\mathbf{A}^H(\theta) + [\sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}) + \sigma_n^2] \mathbf{I}_L \quad (4.21)$$

4.2.2 Méthode temps-fréquence

La méthode de décomposition en sous espaces propres de la matrice de covariance $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ s'adapte bien pour l'estimation des DDAs de signaux sources stationnaires, mais elle perd de son intérêt pour les signaux non stationnaires à cause de la variation au cours du temps de leurs propriétés spectrales. Les techniques utilisées pour de tels signaux sont généralement basées sur les méthodes temps-fréquence. Les distributions temps-fréquences spatiales (DTFS) que nous avons présentées au chapitre précédent, sont considérées comme un outil puissant pour l'analyse des signaux non stationnaires. Comparées aux techniques basées sur les statistiques de second ordre, les techniques utilisant les DTFSs se sont avérées de meilleures performances. La forme intégrale de la matrice DTFS est donnée par l'expression (3.1) que nous reprenons dans ce chapitre en tenant compte cette fois-ci des erreurs du modèle de signaux,

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u, \tau) \tilde{\mathbf{x}}(u + \frac{\tau}{2}) \tilde{\mathbf{x}}^H(u - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} du d\tau, \quad (4.22)$$

dont la forme matricielle relative à la pseudo distribution de Wigner-Ville spatiale (SPWVD) est donnée par,

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t, f) = \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \tilde{\mathbf{x}}(t+\tau) \tilde{\mathbf{x}}^H(t-\tau) e^{-j4\pi f\tau} \quad (4.23)$$

En substituant (4.2) dans (4.23), nous obtenons,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t, f) &= \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \left\{ \left[(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) \mathbf{s}(t+\tau) + \mathbf{n}(t+\tau) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) \mathbf{s}(t-\tau) + \mathbf{n}(t-\tau) \right]^H \right\} e^{-j4\pi f\tau} \end{aligned} \quad (4.24)$$

En développant cette expression et en tenant compte des propriétés statistiques de $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ et $\Delta\mathbf{A}$ dont les composantes sont non corrélées entre elles et de moyennes nulles, l'espérance mathématique de (4.24) s'écrit,

$$E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t, f)] = \mathbf{A}E[\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)]\mathbf{A}^H + E[\Delta\mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)\Delta\mathbf{A}^H] + E[\mathbf{D}_{\mathbf{nn}}(t, f)] \quad (4.25)$$

$\mathbf{D}_{ss}(t, f)$ est une matrice de distribution temps-fréquence spatiale des signaux sources. Pour une distribution de Wigner-Ville, et pour des signaux donnés par (4.3), les éléments de cette matrice s'écrivent,

$$d_{s_i s_k}(t, f) = S_i S_k \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{j[\varphi_i(t+\tau) - \varphi_k(t-\tau) - 4\pi f \tau]} \quad (4.26)$$

où les termes diagonaux $d_{s_i s_i}(t, f)$ sont les auto-DTFs (distributions temps-fréquence) des signaux sources, et les termes anti-diagonaux $d_{s_i s_k}(t, f)$, ($i \neq k$), sont les cross-DTFs. Nous considérons uniquement les points t-f constituant les fréquences instantanées de chaque signal. En outre, en se limitant à une approximation de second ordre de la dérivée de la phase, nous avons,

$$\varphi_i(t + \tau) - \varphi_i(t - \tau) - 4\pi f_i(t)\tau = 0 \quad (4.27)$$

où la fréquence instantanée $f_i(t)$ est définie par,

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} \quad (4.28)$$

Il résulte de l'équation (4.26) que,

$$E [d_{s_i s_i}(t, f)] = N \sigma_{s_i}^2 \quad (4.29)$$

Afin de pouvoir appliquer à la DTFS donnée par (4.23) la décomposition en valeurs et vecteurs propres, nous utilisons la méthode de la moyenne à l'image de celle utilisée par (3.17) dans le cas d'absence de perturbation, c'est à dire,

$$\hat{\mathbf{D}}_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} \mathbf{D}_{\bar{x}\bar{x}}(t_i, f_{k,i}) \quad (4.30)$$

d'espérance mathématique égale à,

$$\bar{\mathbf{D}}_{\bar{x}\bar{x}} = E[\hat{\mathbf{D}}_{\bar{x}\bar{x}}] = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} E[\mathbf{D}_{\bar{x}\bar{x}}(t_i, f_{k,i})] \quad (4.31)$$

où $f_{k,i}$ est la fréquence instantanée (FI) correspondant au $i^{\text{ème}}$ échantillon du $k^{\text{ème}}$ signal. En posant la matrice directionnelle $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_K]$, avec $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}(\theta_i)$, et en considérant

l'équation (4.25) pour les points $(t_i, f_{k,i})$ et la substituant dans (4.31), nous aurons,

$$\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} \left\{ E[\mathbf{a}_k d_{s_k s_k}(t_i, f_{k,i}) \mathbf{a}_k^H] + E[\Delta \mathbf{a}_k d_{s_k s_k}(t_i, f_{k,i}) \Delta \mathbf{a}_k^H] + \sigma_n^2 \mathbf{I}_L \right\} \quad (4.32)$$

et en tenant compte de (4.29), nous obtenons,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} &= \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \left\{ \sum_{i=1}^{T_o} N \sigma_{s_k}^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H + N \sigma_{s_k}^2 E[\Delta \mathbf{a}_k \Delta \mathbf{a}_k^H] + \sigma_n^2 \mathbf{I}_L \right\} \\ &= \frac{N}{K} \sum_{k=1}^K \left\{ \sigma_{s_k}^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H + \sigma_{s_k}^2 \sigma_{\Delta a}^2 \mathbf{I}_L \right\} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_L \\ &= \frac{N}{K} \sum_{k=1}^K \left\{ \sigma_{s_k}^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H \right\} + \frac{N}{K} \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) \mathbf{I}_L + \sigma_n^2 \mathbf{I}_L \end{aligned} \quad (4.33)$$

d'où,

$$\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{N}{K} \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H(\theta) + \left[\frac{N}{K} \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) + \sigma_n^2 \right] \mathbf{I}_L \quad (4.34)$$

où $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)] = \text{diag}[\sigma_{s_1}^2, \dots, \sigma_{s_K}^2]$, et $\text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) = \left(\sum_{i=1}^K \sigma_{s_i}^2 \right)$. Nous obtenons donc une matrice qui peut être décomposée en vecteurs propres constituant la base de sous espaces orthogonaux.

4.2.3 Unification des expressions de matrices de covariance et de distribution temps-fréquence

Les expressions de $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ et $\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ données respectivement par (4.21) et (4.34), sont la somme de trois termes correspondant au signal, à la perturbation du modèle et au bruit additif. Ces matrices peuvent être mises sous la forme unifiée suivante,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \alpha \mathbf{P}_{\mathbf{x}_o \mathbf{x}_o} + \sigma_p^2 \mathbf{I}_L \quad (4.35)$$

$$\text{où } \alpha = \begin{cases} 1, & \text{pour la méthode de covariance,} \\ \frac{N}{K}, & \text{pour la méthode TF} \end{cases} \quad (4.36)$$

$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_o\mathbf{x}_o}$ est la matrice de covariance en l'absence de perturbations et de bruit,

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_o\mathbf{x}_o} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H(\theta) \quad (4.37)$$

et σ_p^2 représente la puissance de la perturbation et du bruit,

$$\sigma_p^2 = \alpha\sigma_{\Delta a}^2 Tr(\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}) + \sigma_n^2 \quad (4.38)$$

La décomposition propre de la matrice $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ permet d'écrire,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}^{sos} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{sos} (\tilde{\mathbf{U}}^{sos})^H, \text{ pour la méthode de covariance;} \\ \tilde{\mathbf{U}}^{tf} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{tf} (\tilde{\mathbf{U}}^{tf})^H, \text{ pour la méthode TF.} \end{cases} \quad (4.39)$$

où le super script "sos" indique la statistique de second ordre (second order statistics) pour la méthode basée sur la décomposition propre de la matrice de covariance, tandis que le super script "tf" indique le temps-fréquence pour la méthode basée sur la décomposition propre de la matrice de DTFS.

L'expression (4.39) peut donc se mettre sous la forme unifiée suivante,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\tilde{\mathbf{U}}^H = \sum_{i=1}^L \lambda_i \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^H \quad (4.40)$$

où $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}[\lambda_i, i = 1, \dots, L]$ est la matrice des valeurs propres de $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$, et les $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}_{i=1}^L$ sont les vecteurs propres correspondant. La matrice $\tilde{\mathbf{U}}$ peut être arrangée en deux sous matrices,

$$\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{\mathbf{U}}_s \quad \tilde{\mathbf{U}}_p] \quad (4.41)$$

avec d'une part $\tilde{\mathbf{U}}_s = [\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_K]$, où les $\tilde{\mathbf{u}}_i$ sont les vecteurs propres de la matrice $\tilde{\mathbf{U}}_s$ formant la base du sous espace signal, et d'autre part $\tilde{\mathbf{U}}_p = [\tilde{\mathbf{u}}_{K+1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_L]$, où les $\tilde{\mathbf{u}}_j$ sont les vecteurs propres de la matrice $\tilde{\mathbf{U}}_p$ formant la base du sous espace perturbation appelé sous espace orthogonal. L'équation (4.40) peut donc s'écrire sous la forme,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_s & \tilde{\mathbf{U}}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Lambda}}_s & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_s^H \\ \tilde{\mathbf{U}}_p^H \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{\Lambda}}_s \tilde{\mathbf{U}}_s^H + \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \end{aligned} \quad (4.42)$$

où $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_s = \text{diag}[\lambda_i, i = 1, \dots, K]$ est la matrice des valeurs propres correspondant au sous espace signal, et $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_p = \text{diag}[\lambda_i, i = K + 1, \dots, L]$ la matrice des valeurs propres correspondant au sous espace perturbation. Comme une perturbation de $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ implique celle des deux sous espaces, les matrices $\tilde{\mathbf{U}}_s$ et $\tilde{\mathbf{U}}_p$ s'écrivent donc,

$$\tilde{\mathbf{U}}_p = \mathbf{U}_p + \Delta\mathbf{U}_p \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{U}}_s = \mathbf{U}_s + \Delta\mathbf{U}_s \quad (4.43)$$

où $\Delta\mathbf{U}_s$ et $\Delta\mathbf{U}_p$ représentent respectivement la perturbation du sous espace signal et du sous espace orthogonal. Nous montrons en annexe A qu'une approximation de premier ordre des matrices $\Delta\mathbf{U}_s$ et $\Delta\mathbf{U}_p$ nous donne,

$$\Delta\mathbf{U}_s = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}} \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s^{-1} \quad (4.44)$$

$$\Delta\mathbf{U}_p = -\mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \mathbf{U}_p \quad (4.45)$$

La matrice $\Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ représente la perturbation induite à la fois par l'erreur du modèle du signal de réponse du réseau d'antennes et par le bruit additif,

$$\Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}} = \begin{cases} \Delta\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}, & \text{pour la méthode de covariance;} \\ \Delta\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}, & \text{pour la méthode temps-fréquence.} \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\text{où} \quad \Delta\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{M} [\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t)^H - \mathbf{x}_o(t)\mathbf{x}_o(t)^H] \quad (4.47)$$

$$\text{et} \quad \Delta\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} [\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t_i, f_{k,i}) - \mathbf{D}_{\mathbf{x}_o\mathbf{x}_o}(t_i, f_{k,i})] \quad (4.48)$$

4.3 Expression de l'erreur d'estimation des DDAs

4.3.1 SOS-MUSIC et TF-MUSIC

Dans un environnement perturbé, les directions d'arrivée $\{\theta_k\}_{k=1}^K$ sont entachées d'erreurs $\{\Delta\theta_k\}_{k=1}^K$, et l'estimé de la $k^{\text{ème}}$ DDA correspondant au $k^{\text{ème}}$ signal source

s'écrit,

$$\tilde{\theta}_k = \theta_k + \Delta\theta_k \quad (4.49)$$

Les directions d'arrivée estimées par l'algorithme MUSIC sont obtenues en localisant les pics de l'inverse de la fonction objective donnée par,

$$F(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}(\theta) \quad (4.50)$$

En développant la dérivée partielle de cette fonction sous forme de série de Taylor, nous aurons,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\tilde{\theta}_k)}{\partial \theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} F(\theta_k)}{\partial \theta^{n+1}} (\Delta\theta_k)^n \\ &= \frac{\partial F(\theta_k)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F(\theta_k)}{\partial \theta^2} \Delta\theta_k + \dots + \frac{1}{i!} \frac{\partial^{i+1} F(\theta_k)}{\partial \theta^{i+1}} \Delta\theta_k^i + \dots, \end{aligned} \quad (4.51)$$

et en se limitant à une analyse à l'ordre deux, l'équation (4.51) peut être approximée par ses deux premiers termes,

$$\frac{\partial F(\tilde{\theta}_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta} = \frac{\partial F(\theta_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F(\theta_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta^2} \Delta\theta_k \quad (4.52)$$

et comme les maxima locaux (pics) de la fonction objective sont donnés par les zéros de (4.52), l'expression de l'erreur $\Delta\theta_k$ s'écrit donc,

$$\Delta\theta_k \approx - \frac{\frac{\partial F(\theta_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta}}{\frac{\partial^2 F(\theta_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta^2}}, \quad k = 1, \dots, K \quad (4.53)$$

$$\text{où } \frac{\partial F(\theta_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta_k} = \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}(\theta_k) + \mathbf{a}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{\partial^2 F(\theta_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta_k^2} &= \mathbf{a}^{(2)}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}(\theta_k) + 2\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) \\ &+ \mathbf{a}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}^{(2)}(\theta_k) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Les super scripts (1) et (2) désignent respectivement la dérivée première et seconde par rapport à θ du vecteur de direction $\mathbf{a}(\theta)$. En remplaçant $\tilde{\mathbf{U}}_p = \mathbf{U}_p + \Delta\mathbf{U}_p$ dans l'équation ci-dessus, et sachant que les sous espaces engendrés par $\mathbf{a}(\theta_k)$ et \mathbf{U}_p sont orthogonaux (c-à-d, $\mathbf{a}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p = 0$) d'une part, et en négligeant les dérivées et perturbations du second ordre d'autre part, nous obtenons,

$$\frac{\partial F(\theta_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta_k} = 2Re[\mathbf{a}(\theta_k)^H \Delta\mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)] \quad (4.56)$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 F(\theta_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta_k^2} = 2\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) + 2Re[\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p \Delta\mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)] \quad (4.57)$$

et en posant $\Delta\mathbf{U}_p = \varepsilon \mathbf{U}_p$ où $\varepsilon \ll 1$, nous aurons,

$$\frac{\partial^2 F(\theta_k, \tilde{\mathbf{U}}_p)}{\partial \theta_k^2} = 2(1 + \varepsilon) \|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2 \approx 2 \|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2 \quad (4.58)$$

En substituant les expressions (4.56) et (4.58) dans (4.53), nous obtenons l'expression de l'erreur d'estimation de la $k^{\text{ème}}$ direction d'arrivée,

$$\Delta\theta_k = \frac{Re[-\mathbf{a}(\theta_k)^H \Delta\mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)]}{\|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2} \quad (4.59)$$

En remplaçant $\Delta\mathbf{U}_p$ par son expression donnée par (4.45), nous obtenons,

$$\Delta\theta_k = \frac{Re[\mathbf{a}(\theta_k)^H \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)]}{\|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2}, \quad k = 1, \dots, K \quad (4.60)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme condensée suivante [41],

$$\Delta\theta_k = \frac{Re[\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k]}{\gamma_k} \quad (4.61)$$

où les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_k$ et $\boldsymbol{\beta}_k$ et le scalaire γ_k sont donnés par,

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \mathbf{a}(\theta_k) \quad (4.62)$$

$$\boldsymbol{\beta}_k = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) \quad (4.63)$$

$$\gamma_k = \|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2 \quad (4.64)$$

L'expression unifiée de l'erreur d'estimation de la $k^{\text{ème}}$ direction d'arrivée donnée par (4.61) s'applique aux deux algorithmes SOS-MUSIC et TF-MUSIC et ce, en tenant compte de l'expression de $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ donnée par la relation (4.46).

4.3.2 SOS-ESPRIT et TF-ESPRIT

Dans le cas de l'algorithme ESPRIT, en reprenant le même schéma de perturbation que celui de la méthode MUSIC, et sachant que la perturbation des directions d'arrivée due à l'erreur du modèle implique celle des matrices \mathbf{U}_{s1} et \mathbf{U}_{s2} définies par (2.74), nous pouvons écrire pour les deux sous réseaux,

$$\tilde{\mathbf{U}}_{s1} = (\mathbf{U}_{s1} + \Delta \mathbf{U}_{s1}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{U}}_{s2} = (\mathbf{U}_{s2} + \Delta \mathbf{U}_{s2}) \quad (4.65)$$

En utilisant la relation (2.76), et en appliquant la formule de l'erreur d'un produit, nous obtenons,

$$\Delta \mathbf{U}_{s2} = \mathbf{U}_{s1} \Delta \Psi + \Delta \mathbf{U}_{s1} \Psi \quad (4.66)$$

$$\text{d'où} \quad \Delta \Psi = \mathbf{U}_{s1}^+ (\Delta \mathbf{U}_{s2} - \Delta \mathbf{U}_{s1} \Psi) \quad (4.67)$$

où $[\cdot]^+$ désigne l'opérateur de la pseudo-inverse, c'est à dire :

$$\mathbf{U}_{s1}^+ = [\mathbf{U}_{s1}^H \mathbf{U}_{s1}]^{-1} \mathbf{U}_{s1}^H \quad (4.68)$$

et tenant compte de l'expression de l'erreur d'estimation de la DDA donnée dans [41], nous aurons,

$$\Delta \theta_k = \text{Re} [\alpha_k^H \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}} \beta_k] \quad (4.69)$$

où $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ est définie par les relations (4.46), et où les vecteurs α_k et β_k sont donnés par,

$$\alpha_k = C_k \mathbf{v}_k \mathbf{U}_{s1}^+ (\mathbf{U}_{p2} \lambda_k^{-1} - \mathbf{U}_{p1}) \mathbf{U}_p^H \quad \text{et} \quad \beta_k = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s^{-1} \mathbf{u}_k \quad (4.70)$$

avec $C_k = \frac{\lambda_c}{2\pi \cos(\theta_k)}$ et λ_c la longueur d'onde centrale du signal incident. Les vecteurs \mathbf{v}_k et \mathbf{u}_k sont les vecteurs propres orthonormaux de gauche et de droite de la matrice

Ψ respectivement associés aux valeurs propres $\{\lambda_k\}_{k=1}^K$, tandis que \mathbf{U}_{p1} et \mathbf{U}_{p2} sont les sous matrices de la matrice du sous espace perturbation \mathbf{U}_p définie par,

$$\mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{p1} \\ \text{dernière ligne de } \mathbf{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{première ligne de } \mathbf{U}_p \\ \mathbf{U}_{p2} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

4.3.3 Expression unifiée de l'erreur d'estimation des DDAs

Les expressions (4.61) et (4.69) de l'erreur d'estimation relatives respectivement aux méthodes sous espaces MUSIC et ESPRIT, peuvent être groupées sous la forme unifiée suivante,

$$\Delta\theta_k = \frac{Re[\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k]}{\gamma_k} \quad (4.72)$$

où l'expression de la matrice $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ dépend du type d'algorithme utilisé (MUSIC ou ESPRIT). Il en est de même pour les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_k$ et $\boldsymbol{\beta}_k$ et le scalaire γ_k dont les expressions dépendent de la méthode utilisée (SOS ou TF). Cette approche est illustrée par le tableau récapitulatif ci-dessous,

	$\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$	$\boldsymbol{\alpha}_k$	$\boldsymbol{\beta}_k$	γ_k
SOS-MUSIC	$\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$	$\mathbf{U}_s^{os} \boldsymbol{\Lambda}_s^{os-1} \mathbf{U}_s^{osH} \mathbf{a}(\theta_k)$	$\mathbf{U}_p^{os} \mathbf{U}_p^{osH} \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)$	$\ \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p^{os}\ ^2$
TF-MUSIC	$\Delta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}$	$\mathbf{U}_s^{tf} \boldsymbol{\Lambda}_s^{tf-1} \mathbf{U}_s^{tfH} \mathbf{a}(\theta_k)$	$\mathbf{U}_p^{tf} \mathbf{U}_p^{tfH} \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)$	$\ \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p^{tf}\ ^2$
SOS-ESPRIT	$\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}$	$C_k \mathbf{V}_k^{os} \mathbf{U}_{s1}^{os+} \left(\mathbf{U}_{p2}^{os} \boldsymbol{\Lambda}_k^{os-1} - \mathbf{U}_{p1}^{os} \right) \mathbf{U}_p^{osH}$	$\mathbf{U}_s^{os} \boldsymbol{\Lambda}_s^{os-1} \mathbf{u}_k^{os}$	1
TF-ESPRIT	$\Delta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}$	$C_k \mathbf{V}_k^{tf} \mathbf{U}_{s1}^{tf+} \left(\mathbf{U}_{p2}^{tf} \boldsymbol{\Lambda}_k^{tf-1} - \mathbf{U}_{p1}^{tf} \right) \mathbf{U}_p^{tfH}$	$\mathbf{U}_s^{tf} \boldsymbol{\Lambda}_s^{tf-1} \mathbf{u}_k^{tf}$	1

TABLE 4.1 – Expressions des paramètres d'estimation

4.4 Conclusion sur le chapitre

Dans ce chapitre nous avons défini le modèle de données perturbé et établi les expressions des matrices de covariance et de distribution temps-fréquence spatiale pour MUSIC et ESPRIT que nous avons regroupé sous une forme unifiée. Nous avons fait le lien entre la méthode de la statistique de second ordre et la méthode temps-fréquence en adoptant la même technique de décomposition propre de matrices pour la formation

des sous espaces orthogonaux. Cela nous a permis d'aboutir à une expression générale de l'erreur d'estimation des DDAs. Les résultats de ces étapes que nous avons présentées dans un tableau récapitulatif, serviront dans le prochain chapitre à établir les expressions analytiques des variances de l'erreur d'estimation des DDAs, et serviront également pour la validation numérique de ces expressions.

Chapitre 5

Expression analytique unifiée de la variance d'erreur d'estimation des DDAs et validation numérique

Après avoir établi au chapitre précédent l'expression unifiée de l'erreur d'estimation des DDAs pour les algorithmes MUSIC et ESPRIT, on se propose dans ce chapitre d'établir les expressions analytiques de la variance de cette erreur. Ces expressions seront ensuite comparées aux résultats obtenus par simulation numérique de Monte Carlo. Cette étape est importante, car une fois validée par simulation elle nous permettra de procéder à l'évaluation des performances des algorithmes MUSIC et ESPRIT en se basant uniquement sur les expressions théoriques des variances.

5.1 Expression analytique unifiée de la variance

L'erreur d'estimation de la $k^{\text{ème}}$ DDA donnée par (4.61) a pour variance,

$$\text{var}(\Delta\theta_k) = \text{var}\left(\frac{\text{Re}[\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k]}{\gamma_k}\right) = \frac{\text{var}[\text{Re}(\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k)]}{|\gamma_k|^2} \quad (5.1)$$

$$\text{où } \text{var}[\text{Re}(\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k)] = \frac{1}{4} \text{var}[\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta\mathbf{P}^H \boldsymbol{\beta}_k + \boldsymbol{\alpha}_k^T \Delta\mathbf{P}^T \boldsymbol{\beta}_k^*] \quad (5.2)$$

et où les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_k$ et $\boldsymbol{\beta}_k$ et le scalaire γ_k sont définis dans le tableau 2.1. La matrice de perturbation unifiée $\Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ représente la différence entre la valeur de la matrice $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ en présence de perturbations et sa valeur $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_o\mathbf{x}_o}$ en absence de perturbation, c'est à dire,

$$\Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} - \mathbf{P}_{\mathbf{x}_o\mathbf{x}_o} \quad (5.3)$$

En désignant par $\alpha_{i,k}$ et $\beta_{i,k}$ les composantes des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}_k$ et $\boldsymbol{\beta}_k$, et par $\Delta p_{j,i}$ celles de la matrice $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$, nous avons,

$$\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \alpha_{i,k}^* \Delta p_{j,i}^* \beta_{j,k} \quad (5.4)$$

$$\text{et } \boldsymbol{\alpha}_k^T \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^T \boldsymbol{\beta}_k^* = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \alpha_{i,k} \Delta p_{j,i} \beta_{j,k}^* \quad (5.5)$$

En substituant (5.4) et (5.5) dans (5.2) nous obtenons,

$$\text{var} [Re(\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k)] = \frac{1}{4} \text{var} \left[\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L (\alpha_{i,k}^* \beta_{j,k} \Delta p_{j,i}^* + \alpha_{i,k} \beta_{j,k}^* \Delta p_{j,i}) \right] \quad (5.6)$$

et en considérant indépendantes les parties réelles et imaginaires de $\Delta p_{j,i}$, ainsi que les erreurs $\Delta p_{j_1,i_1}^*$ et $\Delta p_{j_2,i_2}^*$ pour $i_1 \neq i_2$ et $j_1 \neq j_2$, nous aurons,

$$\text{var}(\Delta p_{j,i}^*) = \text{var}(\Delta p_{j,i}) \quad (5.7)$$

$$\text{et } \text{covar}(\Delta p_{j_1,i_1}^*, \Delta p_{j_2,i_2}^*) = \text{covar}(\Delta p_{j_1,i_1}, \Delta p_{j_2,i_2}) = 0 \quad (5.8)$$

ce qui permet d'écrire,

$$\text{var}(\Delta \theta_k) = \frac{1}{2|\gamma_k|^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L |\alpha_{i,k} \beta_{j,k}|^2 \text{var}(\Delta p_{j,i}) \quad (5.9)$$

Cette expression montre que le calcul de la variance de l'erreur d'estimation des DDAs revient au calcul de la variance des éléments de la matrice $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$.

5.1.1 SOS-MUSIC et SOS-ESPRIT

En appliquant la relation (5.9) pour SOS-MUSIC et SOS-ESPRIT, la variance d'erreur d'estimation de la $k^{\text{ème}}$ DDA s'écrit,

$$\text{var}(\Delta \theta_k) = \frac{1}{2|\gamma_k|^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L |\alpha_{i,k} \beta_{j,k}|^2 \text{var}(\Delta r_{j,i}) \quad (5.10)$$

D'après (5.10) le calcul de $\text{var}(\Delta\theta_k)$ revient à celui de $\text{var}(\Delta r_{p,q})$ qui est la variance du $(p, q)^{\text{ème}}$ élément de la matrice d'erreur induite par la perturbation de la matrice de covariance du signal d'antenne, et qui est donnée par,

$$\Delta\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} - \mathbf{R}_{\mathbf{x}_o\mathbf{x}_o} \quad (5.11)$$

où $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_o\mathbf{x}_o}$ est la matrice de covariance du signal non perturbé, et $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ la matrice de covariance du signal perturbé, telle que,

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{1}{M} \tilde{\mathbf{X}} \tilde{\mathbf{X}}^H \quad (5.12)$$

$$\text{où } \tilde{\mathbf{X}} = [\mathbf{A}(\theta) + \Delta\mathbf{A}] \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (5.13)$$

avec $\tilde{\mathbf{X}}$: la matrice $L \times M$ de données perturbées, L : le nombre de capteurs du réseau, et M : le nombre d'observations (ou échantillons). En substituant (5.13) dans (5.12) nous obtenons,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} &= \frac{1}{M} \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{A}^H + \frac{1}{M} (\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \Delta \mathbf{A}^H + \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{N}^H + \Delta \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{A}^H + \Delta \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \Delta \mathbf{A}^H \\ &+ \Delta \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{N}^H + \mathbf{N} \mathbf{S}^H \mathbf{A}^H + \mathbf{N} \mathbf{S}^H \Delta \mathbf{A}^H + \mathbf{N} \mathbf{N}^H) \end{aligned} \quad (5.14)$$

d'où l'on déduit les expressions de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}_o\mathbf{x}_o}$ et $\Delta\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{x}_o\mathbf{x}_o} &= \frac{1}{M} \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{A}^H \\ \text{et } \Delta\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} &= \frac{1}{M} (\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \Delta \mathbf{A}^H + \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{N}^H + \Delta \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{A}^H + \Delta \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{S}^H \Delta \mathbf{A}^H + \Delta \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{N}^H \\ &+ \mathbf{N} \mathbf{S}^H \mathbf{A}^H + \mathbf{N} \mathbf{S}^H \Delta \mathbf{A}^H + \mathbf{N} \mathbf{N}^H) \end{aligned} \quad (5.15)$$

En utilisant la notation indicielle des éléments des matrices nous obtenons l'expression suivante des éléments (p, q) de la matrice $\Delta\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}$,

$$\begin{aligned}
 \Delta r_{p,q} &= \frac{1}{M} \left\{ \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^M (a_{p,i} \Delta a_{q,j}^* + a_{q,j}^* \Delta a_{p,i} + \Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^*) s_{i,m} s_{j,m}^* \right. \\
 &+ \sum_{i=1}^K \sum_{m=1}^M (a_{p,i} + \Delta a_{p,i}) s_{i,m} n_{q,m}^* + \sum_{i=1}^K \sum_{m=1}^M (a_{q,i}^* + \Delta a_{q,i}^*) s_{i,m}^* n_{p,m} \\
 &\left. + \sum_{m=1}^M n_{p,m} n_{q,m}^* \right\} \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

où les a_{i_1, j_1} , $\Delta a_{i_2, j_2}$, s_{i_3, j_3} et n_{i_4, j_4} , sont respectivement les éléments des matrices $\mathbf{A}_{[L \times K]}$, $\Delta \mathbf{A}_{[L \times K]}$, $\mathbf{S}_{[K \times M]}$ et $\mathbf{N}_{[L \times M]}$.

Comme la variance de $\Delta r_{p,q}$ est définie par,

$$var(\Delta r_{p,q}) = E[|\Delta r_{p,q}|^2] - |E(\Delta r_{p,q})|^2 \quad (5.17)$$

nous devons donc calculer les termes $E[|\Delta r_{p,q}|^2]$ et $|E(\Delta r_{p,q})|^2$.

a) Calcul de l'expression de $|E(\Delta r_{p,q})|^2$

Compte tenu des propriétés statistiques des variables de l'expression (5.16) de $\Delta r_{p,q}$, c'est à dire non corrélées et de moyennes nulles, tous les termes sont d'espérance mathématique nulle à l'exception de $E[\Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^* s_{i,m} s_{j,m}^*]$ et $E[n_{p,i} n_{q,i}^*]$, et nous avons donc,

$$\begin{aligned}
 E(\Delta r_{p,q}) &= \frac{1}{M} \left[\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^M \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_{s_i}^2 \delta_{i,j} \delta_{p,q} + \sum_{i=1}^M \sigma_n^2 \delta_{p,q} \right] \\
 &= \frac{1}{M} \left[M \sigma_{\Delta a}^2 \sum_{i=1}^K \sigma_{s_i}^2 + M \sigma_n^2 \right] \delta_{p,q} \\
 &= [\sigma_{\Delta a}^2 Tr(R_{ss}) + \sigma_n^2] \delta_{p,q} \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } |E(\Delta r_{p,q})|^2 &= [E(\Delta r_{p,q})][E(\Delta r_{p,q})]^* \\
 &= \left[\sigma_{\Delta a}^4 [Tr(R_{ss})]^2 + 2\sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) + \sigma_n^4 \right] \delta_{p,q} \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

b) Calcul de l'expression de $E [|\Delta r_{p,q}|^2]$

En posant dans (5.16),

$$\begin{aligned}
 A_1(i, j) &= a_{p,i} \Delta a_{q,j}^* + a_{q,j}^* \Delta a_{p,i} + \Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^* \\
 A_2(i) &= a_{p,i} + \Delta a_{p,i} \\
 A_3(i) &= a_{q,i}^* + \Delta a_{q,i}^*
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

nous aurons,

$$\begin{aligned}
 E [|\Delta r_{p,q}|^2] &= \frac{1}{M^2} \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \left\{ \sum_{i_1=1}^K \sum_{j_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K \sum_{j_2=1}^K E [A_1(i_1, j_1) A_1^*(i_2, j_2)] \right. \\
 &\quad \times E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^* s_{i_2, m_2} s_{j_2, m_2}^*] \\
 &\quad + \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K E [A_2(i_1) A_2^*(i_2)] E [s_{i_1, m_1} s_{i_2, m_2}^* n_{q, m_1}^* n_{q, m_2}] \\
 &\quad + \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K E [A_3(i_1) A_3^*(i_2)] E [s_{i_1, m_1}^* s_{i_2, m_2} n_{p, m_1} n_{p, m_2}^*] \\
 &\quad + \sum_{i_1=1}^K \sum_{j_1=1}^K E [A_1(i_1, j_1)] E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^* n_{p, m_2}^* n_{q, m_2}] \\
 &\quad + \sum_{i_2=1}^K \sum_{j_2=1}^K E [A_1^*(i_2, j_2)] E [s_{i_2, m_2}^* s_{j_2, m_2} n_{p, m_1} n_{q, m_1}^*] \\
 &\quad \left. + E [n_{p, m_1} n_{q, m_1}^* n_{p, m_2}^* n_{q, m_2}] \right\} \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

et en posant,

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \sum_{i_1=1}^K \sum_{j_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K \sum_{j_2=1}^K E [A_1(i_1, j_1) A_1^*(i_2, j_2)] E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^* s_{i_2, m_2} s_{j_2, m_2}^*] \\
 X_2 &= \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K E [A_2(i_1) A_2^*(i_2)] E [s_{i_1, m_1} s_{i_2, m_2}^* n_{q, m_1}^* n_{q, m_2}] \\
 X_3 &= \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K E [A_3(i_1) A_3^*(i_2)] E [s_{i_1, m_1}^* s_{i_2, m_2} n_{p, m_1} n_{p, m_2}^*] \\
 X_4 &= \sum_{i_1=1}^K \sum_{j_1=1}^K E [A_1(i_1, j_1)] E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^* n_{p, m_2}^* n_{q, m_2}] \\
 X_5 &= \sum_{i_2=1}^K \sum_{j_2=1}^K E [A_1^*(i_2, j_2)] E [s_{i_2, m_2}^* s_{j_2, m_2} n_{p, m_1} n_{q, m_1}^*] \\
 X_6 &= E [n_{p, m_1} n_{q, m_1}^* n_{p, m_2}^* n_{q, m_2}]
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

l'expression (5.21) s'écrit,

$$E [|\Delta r_{p,q}|^2] = \frac{1}{M^2} \sum_{m_1=1}^M \sum_{m_2=1}^M \left[\sum_{i_1=1}^6 X_i \right] \quad (5.23)$$

Les espérances mathématiques formant cette expression sont calculées en annexe B1, et nous avons,

$$\begin{aligned} X_1 &= \sigma_{\Delta a}^4 [(\delta_{m_1, m_2} + \delta_{p, q})(Tr(R_{ss}))^2 + (1 + \delta_{m_1, m_2} \delta_{p, q})Tr(R_{ss}^2)] \\ &\quad + 2\sigma_{\Delta a}^2 [\delta_{m_1, m_2}(Tr(R_{ss}))^2 + Tr(R_{ss}^2)] \\ X_2 &= X_3 = \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \delta_{m_1, m_2} Tr(R_{ss}) + \sigma_n^2 \delta_{m_1, m_2} Tr(R_{ss}) \\ X_4 &= X_5 = \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \delta_{p, q} Tr(R_{ss}^2) \\ X_6 &= \sigma_n^2 (\delta_{m_1, m_2} + \delta_{p, q}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

et en les remplaçant dans (5.23), nous obtenons,

$$\begin{aligned} E [|\Delta r_{p,q}|^2] &= \sigma_{\Delta a}^4 \left\{ \left[\frac{1}{M}(Tr(R_{ss}))^2 + Tr(R_{ss}^2) \right] + \left[(Tr(R_{ss}))^2 + \frac{1}{M}Tr(R_{ss}^2) \right] \delta_{p,q} \right\} \\ &\quad + 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\frac{1}{M} [Tr(R_{ss})]^2 + Tr(R_{ss}^2) \right] + 2\sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \left(\frac{1}{M} + \delta_{pq} \right) Tr(R_{ss}) \\ &\quad + \frac{2}{M} \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) + \sigma_n^4 \left(\frac{1}{M} + \delta_{p,q} \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Les résultats donnés par (5.19) et (5.25) permettent d'écrire,

$$\begin{aligned} var(\Delta r_{p,q}) &= \sigma_{\Delta a}^4 \left[\frac{1}{M}(Tr(R_{ss}))^2 + \left(1 + \frac{1}{M} \delta_{p,q} \right) Tr(R_{ss}^2) \right] \\ &\quad + 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\frac{1}{M}(Tr(R_{ss}))^2 + Tr(R_{ss}^2) \right] + \frac{2}{M} \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) \\ &\quad + \frac{2}{M} \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) + \frac{1}{M} \sigma_n^4 \end{aligned} \quad (5.26)$$

En substituant cette expression dans (5.10) nous obtenons la variance de l'erreur d'estimation de la $k^{\hat{e}me}$ DDA,

$$\begin{aligned} var(\Delta \theta_k) &= \frac{1}{2|\gamma_k|^2} \sum_{p=1}^L \sum_{q=1}^L |\alpha_{q,k} \beta_{p,k}|^2 \left\{ \sigma_{\Delta a}^4 \left[\frac{1}{M}(Tr(R_{ss}))^2 + \left(1 + \frac{1}{M} \delta_{p,q} \right) Tr(R_{ss}^2) \right] \right. \\ &\quad + 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\frac{1}{M}(Tr(R_{ss}))^2 + Tr(R_{ss}^2) \right] + \frac{2}{M} \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) \\ &\quad \left. + \frac{2}{M} \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) + \frac{1}{M} \sigma_n^4 \right\} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Cette expression peut aussi se mettre sous la forme suivante,

$$\begin{aligned}
 var(\Delta\theta_k) &= \frac{\sigma_{\Delta a}^4}{2M|\gamma_k|^2} Tr(R_{ss}^2) \sum_{i=1}^L |\alpha_{i,k}\beta_{i,k}|^2 \\
 &+ \frac{\|\alpha_k\|^2\|\beta_k\|^2}{2|\gamma_k|^2} \left\{ \sigma_{\Delta a}^4 \left[\frac{1}{M} (Tr(R_{ss}))^2 + Tr(R_{ss}^2) \right] \right. \\
 &+ 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\frac{1}{M} (Tr(R_{ss}))^2 + Tr(R_{ss}^2) \right] + \frac{2}{M} \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) \\
 &\left. + \frac{2}{M} \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) + \frac{1}{M} \sigma_n^4 \right\} \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

C'est une expression qui montre que la variance de l'erreur d'estimation des DDAs ne dépend pas des indices p et q .

Remarque 1 : Dans les situations où les termes en $\sigma_{\Delta a}^4$ sont négligeables (perturbations et signaux sources faibles), l'expression de $var(\Delta r)$ devient également indépendante des indices p et q , et prend la forme suivante,

$$\begin{aligned}
 var(\Delta r) &= 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[Tr(R_{ss}^2) + \frac{1}{M} (Tr(R_{ss}))^2 \right] + \frac{2}{M} \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) \\
 &+ \frac{2}{M} \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) + \frac{1}{M} \sigma_n^4 \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

dans ce cas, la variance de l'erreur d'estimation de la $k^{\text{ème}}$ DDA devient égale à,

$$\begin{aligned}
 var(\Delta\theta_k) &= \frac{\|\alpha_k\|^2\|\beta_k\|^2}{2|\gamma_k|^2} \left\{ 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[Tr(R_{ss}^2) + \frac{1}{M} (Tr(R_{ss}))^2 \right] + \frac{2}{M} \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) \right. \\
 &\left. + \frac{2}{M} \sigma_n^2 Tr(R_{ss}) + \frac{1}{M} \sigma_n^4 \right\} \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Remarque 2 : Si en outre les signaux sources sont d'égales puissances (c.à.d $\mathbf{R}_{ss} = \sigma_s^2 \mathbf{I}_K$), l'expression ci-dessus devient,

$$\begin{aligned}
 var(\Delta\theta_k) &= \frac{\|\alpha_k\|^2\|\beta_k\|^2}{2|\gamma_k|^2} \left\{ 2\sigma_{\Delta a}^2 \sigma_s^4 \left(K + \frac{K^2}{M} \right) + \frac{2}{M} K \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \sigma_s^2 + \frac{2}{M} K \sigma_n^2 \sigma_s^2 + \frac{1}{M} \sigma_n^4 \right\} \\
 &\quad (5.31)
 \end{aligned}$$

où K est le nombre de sources et M le nombre d'échantillons, et où σ_s^2 , σ_n^2 , et $\sigma_{\Delta a}^2$ représentent respectivement les puissances du signal source, du bruit et de la perturbation du modèle.

5.1.2 TF-MUSIC et TF-ESPRIT

En appliquant la relation (5.1) pour TF-MUSIC et TF-ESPRIT, la variance d'erreur d'estimation de la $k^{\text{ème}}$ DDA s'écrit,

$$\text{var}(\Delta\theta_k) = \text{var} \left(\frac{\text{Re} \left[\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k \right]}{\gamma_k} \right) = \frac{\text{var} \left[\text{Re} \left(\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k \right) \right]}{|\gamma_k|^2} \quad (5.32)$$

$$\text{où } \text{var} \left[\text{Re} \left(\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k \right) \right] = \frac{1}{4} \text{var} \left[\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k + \boldsymbol{\alpha}_k^T \Delta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}^H \boldsymbol{\beta}_k^* \right] \quad (5.33)$$

Comme pour le cas conventionnel, nous considérons indépendantes les parties réelles et imaginaires des éléments $\Delta \bar{d}_{p,q}$ de la matrice $\Delta \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{xx}}$, et nous écrivons donc $\text{var}(\Delta \bar{d}_{p,q}^*) = \text{var}(\Delta \bar{d}_{p,q})$. En outre, nous considérons $\Delta \bar{d}_{p_1,q_1}^*$ et $\Delta \bar{d}_{p_2,q_2}^*$ pour $p_1 \neq p_2$ et $q_1 \neq q_2$ indépendants, c'est à dire $\text{covar}(\Delta \bar{d}_{p_1,q_1}^*, \Delta \bar{d}_{p_2,q_2}^*) = \text{covar}(\Delta \bar{d}_{p_1,q_1}, \Delta \bar{d}_{p_2,q_2}) = 0$. Dans ce cas, l'expression (5.32) s'écrit,

$$\begin{aligned} \text{var}(\Delta\theta_k) &= \frac{1}{4|\gamma_k|^2} \sum_{p=1}^L \sum_{q=1}^L [|\alpha_{q,k}^* \beta_{p,k}|^2 + |\alpha_{q,k} \beta_{p,k}^*|^2] \text{var}(\Delta \bar{d}_{p,q}) \\ &= \frac{1}{2|\gamma_k|^2} \sum_{p=1}^L \sum_{q=1}^L |\alpha_{q,k} \beta_{p,k}|^2 \text{var}(\Delta \bar{d}_{p,q}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Cette expression montre que le calcul de l'expression analytique de $\text{var}(\Delta\theta_k)$ revient à calculer celle de $\text{var}(\Delta \bar{d}_{p,q})$, ($p, q = 1, \dots, L$) définie par,

$$\text{var}(\Delta \bar{d}_{p,q}) = E[|\Delta \bar{d}_{p,q}|^2] - |E(\Delta \bar{d}_{p,q})|^2 \quad (5.35)$$

Pour calculer cette variance nous devons d'abord calculer l'expression de l'erreur $\Delta \bar{d}_{p,q}$. Pour cela, nous partons de la forme discrète de la classe de Cohen des distributions temps-fréquence des signaux $\tilde{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, L$. En utilisant une fenêtre rectangulaire de longueur impaire N nous aurons,

$$D_{\tilde{x}_i \tilde{x}_i}(t, f) = \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) \tilde{x}_i(t+h+l) \tilde{x}_i^*(t+h-l) e^{-j4\pi fl} \quad (5.36)$$

où t et f représentent respectivement les variables temps et fréquence. Le noyau $\phi(h, l)$ caractérise la distribution où les variables h et l représentent respectivement le temps et

le retard. La distribution croisée des signaux $\tilde{x}_i(t)$ et $\tilde{x}_k(t)$ est définie par,

$$D_{\tilde{x}_i\tilde{x}_k}(t, f) = \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) \tilde{x}_i(t+h+l) \tilde{x}_k^*(t+h-l) e^{-j4\pi fl} \quad (5.37)$$

Les expressions (5.36) et (5.37) servent à la formation de la matrice de distribution temps-fréquence spatiale (STFD) du vecteur de données $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ [4],

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t, f) = \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) \tilde{\mathbf{x}}(t+h+l) \tilde{\mathbf{x}}^H(t+h-l) e^{-j4\pi fl} \quad (5.38)$$

En considérant le modèle perturbé (4.2), nous avons,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t, f) &= \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) [(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) \mathbf{s}(t+h+l) + \mathbf{n}(t+h+l)] \\ &\times [(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) \mathbf{s}(t+h-l) + \mathbf{n}(t+h-l)]^H e^{-j4\pi fl} \\ &= \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) \left\{ \mathbf{A}\mathbf{s}(t+h+l) \mathbf{s}^H(t+h-l) \mathbf{A}^H \right. \\ &+ \mathbf{A}\mathbf{s}(t+h+l) \mathbf{s}^H(t+h-l) \Delta\mathbf{A}^H + \Delta\mathbf{A}\mathbf{s}(t+h+l) \mathbf{s}^H(t+h-l) \mathbf{A}^H \\ &+ \Delta\mathbf{A}\mathbf{s}(t+h+l) \mathbf{s}^H(t+h-l) \Delta\mathbf{A}^H + \mathbf{A}\mathbf{s}(t+h+l) \mathbf{n}^H(t+h-l) \\ &+ \Delta\mathbf{A}\mathbf{s}(t+h+l) \mathbf{n}^H(t+h-l) + \mathbf{n}(t+h+l) \mathbf{s}(t+h-l)^H \mathbf{A}^H \\ &\left. + \mathbf{n}(t+h+l) \mathbf{s}^H(t+h-l) \Delta\mathbf{A}^H + \mathbf{n}(t+h+l) \mathbf{n}^H(t+h-l) \right\} e^{-j4\pi fl} \end{aligned} \quad (5.39)$$

que l'on peut exprimer sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t, f) &= \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f) \mathbf{A}^H + \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f) \Delta\mathbf{A}^H + \Delta\mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f) \mathbf{A}^H + \Delta\mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f) \Delta\mathbf{A}^H \\ &+ \mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{sn}}(t, f) + \Delta\mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{sn}}(t, f) + \mathbf{D}_{\mathbf{ns}}(t, f) \mathbf{A}^H + \mathbf{D}_{\mathbf{ns}}(t, f) \Delta\mathbf{A}^H + \mathbf{D}_{\mathbf{nn}}(t, f) \end{aligned} \quad (5.40)$$

où les éléments des matrices $\mathbf{D}_{ss}(t, f)$, $\mathbf{D}_{sn}(t, f)$, $\mathbf{D}_{ns}(t, f)$, et $\mathbf{D}_{nn}(t, f)$ sont respectivement donnés par,

$$\begin{aligned}
 d_{s_i, s_j}(t_m, f_{k,m}) &= \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) s_i(t_m + h + l) s_j^*(t_m + h - l) e^{-j4\pi f_{k,m} l} \\
 d_{s_i, n_j}(t_m, f_{k,m}) &= \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) s_i(t_m + h + l) n_j^*(t_m + h - l) e^{-j4\pi f_{k,m} l} \\
 d_{n_i, s_j}(t_m, f_{k,m}) &= \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) n_i(t_m + h + l) s_j^*(t_m + h - l) e^{-j4\pi f_{k,m} l} \\
 d_{n_i, n_j}(t_m, f_{k,m}) &= \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) n_i(t_m + h + l) n_j^*(t_m + h - l) e^{-j4\pi f_{k,m} l}
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Afin de pouvoir appliquer à la matrice (5.40) une décomposition propre, nous devons au préalable lui appliquer la méthode de moyennage sur K_o signaux sources et T_o points (t_i, f_i) [6]. Dans ce cas, la moyenne des DTFSS s'écrit,

$$\bar{\mathbf{D}}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} = \frac{1}{K_o T_o} \sum_{k=1}^{K_o} \sum_{m=1}^{T_o} \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}(t_m, f_{k,m}) \tag{5.42}$$

où $f_{k,m}$ est la fréquence instantanée du $k^{\text{ème}}$ signal relatif au $m^{\text{ème}}$ échantillon. En substituant (5.40) dans (5.42) nous aurons,

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{D}}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss} \mathbf{A}^H + \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss} \Delta \mathbf{A}^H + \Delta \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss} \mathbf{A}^H + \Delta \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss} \Delta \mathbf{A}^H \\
 &+ \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{sn} + \Delta \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{sn} + \bar{\mathbf{D}}_{ns} \mathbf{A}^H + \bar{\mathbf{D}}_{ns} \Delta \mathbf{A}^H + \bar{\mathbf{D}}_{nn}
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

Comme pour le cas de la statistique de second ordre, le premier terme de cette somme correspond au signal non perturbé, et les autres termes correspondent à la perturbation du modèle, c'est à dire,

$$\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{x}_o \mathbf{x}_o} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss} \mathbf{A}^H \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et } \Delta \bar{\mathbf{D}}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss} \Delta \mathbf{A}^H + \Delta \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss} \mathbf{A}^H + \Delta \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{ss} \Delta \mathbf{A}^H \\
 &+ \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{sn} + \Delta \mathbf{A} \bar{\mathbf{D}}_{sn} + \bar{\mathbf{D}}_{ns} \mathbf{A}^H + \bar{\mathbf{D}}_{ns} \Delta \mathbf{A}^H + \bar{\mathbf{D}}_{nn}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

En utilisant le calcul indiciel des matrices, les éléments de la matrice $\Delta \bar{\mathbf{D}}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}$ s'écrivent,

$$\begin{aligned} \Delta \bar{d}_{p,q} &= \sum_{i=1}^{K_o} \sum_{j=1}^{K_o} (a_{p,i} \Delta a_{q,j}^* + \Delta a_{p,i} a_{q,j}^* + \Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^*) \bar{d}_{s_i, s_j} \\ &+ \sum_{i=1}^{K_o} (a_{p,i} + \Delta a_{p,i}) \bar{d}_{s_i, n_q} + \sum_{i=1}^{K_o} (a_{q,i}^* + \Delta a_{q,i}^*) \bar{d}_{n_p, s_i} + \bar{d}_{n_p, n_q} \end{aligned} \quad (5.46)$$

dont la variance est donnée par,

$$\begin{aligned} var(\Delta \bar{d}_{p,q}) &= E \left\{ [\Delta \bar{d}_{p,q} - E(\Delta \bar{d}_{p,q})] [\Delta \bar{d}_{p,q} - E(\Delta \bar{d}_{p,q})]^* \right\} \\ &= E [\Delta \bar{d}_{p,q} \Delta \bar{d}_{p,q}^*] - E [\Delta \bar{d}_{p,q}] E [\Delta \bar{d}_{p,q}^*] \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\text{et où} \left\{ \begin{array}{l} \bar{d}_{s_i, s_j} = \frac{1}{K_o T_o} \sum_{k=1}^{K_o} \sum_{m=1}^{T_o} d_{s_i, s_j}(t_m, f_{k,m}); \\ \bar{d}_{s_i, n_j} = \frac{1}{K_o T_o} \sum_{k=1}^{K_o} \sum_{m=1}^{T_o} d_{s_i, n_j}(t_m, f_{k,m}); \\ \bar{d}_{n_i, s_j} = \frac{1}{K_o T_o} \sum_{k=1}^{K_o} \sum_{m=1}^{T_o} d_{n_i, s_j}(t_m, f_{k,m}); \\ \bar{d}_{n_i, n_j} = \frac{1}{K_o T_o} \sum_{k=1}^{K_o} \sum_{m=1}^{T_o} d_{n_i, n_j}(t_m, f_{k,m}); \end{array} \right. \quad (5.48)$$

a) Calcul de l'expression de $E(\Delta \bar{d}_{p,q})$

Comme les signaux sources sont indépendants des perturbations du modèle et du bruit, l'espérance mathématique de $\Delta \bar{d}_{p,q}$ s'écrit,

$$\begin{aligned} E[\Delta \bar{d}_{p,q}] &= \sum_{i=1}^{K_o} \sum_{j=1}^{K_o} E[a_{p,i} \Delta a_{q,j}^* + \Delta a_{p,i} a_{q,j}^* + \Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^*] E[\bar{d}_{s_i, s_j}] \\ &+ \sum_{i=1}^{K_o} E[a_{p,i} + \Delta a_{p,i}] E[\bar{d}_{s_i, n_q}] + \sum_{i=1}^{K_o} E[a_{q,i}^* + \Delta a_{q,i}^*] E[\bar{d}_{n_p, s_i}] + E[\bar{d}_{n_p, n_q}] \end{aligned} \quad (5.49)$$

Compte tenu des propriétés statistiques des variables de la relation (5.46), l'expression ci-dessus devient,

$$E[\Delta \bar{d}_{p,q}] = \sum_{i=1}^{K_o} \sum_{j=1}^{K_o} E[\Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^*] E[\bar{d}_{s_i, s_j}] + E[\bar{d}_{n_p, n_q}] \quad (5.50)$$

et en appliquant les relations (5.48) aux signaux donnés par (4.3), nous aurons,

$$\begin{aligned}
 E [\bar{d}_{s_i, s_j}] &= \frac{1}{K_o T_o} \sum_{k=1}^{K_o} \sum_{m=1}^{T_o} \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) E [s_i(m+h+l) s_j^*(m+h-l)] \\
 &\times e^{-j4\pi f_{k,m} l} \\
 &= \frac{1}{K_o T_o} \sum_{k=1}^{K_o} \sum_{m=1}^{T_o} \sum_{l=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, l) E [S_i(m+h+l) S_j^*(m+h-l)] \\
 &\times e^{j[\varphi_i(m+h+l) - \varphi_j(m+h-l)]} e^{-j4\pi f_{k,m} l} \tag{5.51}
 \end{aligned}$$

$$\text{Or } E [S_i(m+h+l) S_j^*(m+h-l)] = \sigma_{s_i} \sigma_{s_j} \delta_{i,j} \delta_{m+h+l, m+h-l} = \sigma_{s_i} \sigma_{s_j} \delta_{i,j} \delta(l) \tag{5.52}$$

$$\text{avec } \delta(l) = \begin{cases} 1 & \text{si } l=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.53}$$

$$\text{d'où } E [\bar{d}_{s_i, s_j}] = \sigma_{s_i} \sigma_{s_j} \delta_{i,j} \frac{1}{T_o} \sum_{m=1}^{T_o} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, 0) e^{j[\varphi_i(m+h) - \varphi_j(m+h)]} \tag{5.54}$$

que l'on peut écrire sous la forme condensée suivante ;

$$E [\bar{d}_{s_i, s_j}] = \sigma_{s_i} \sigma_{s_j} \delta_{i,j} W_\phi(i, j) \tag{5.55}$$

$$\text{où } W_\phi(i, j) = \frac{1}{T_o} \sum_{m=1}^{T_o} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, 0) e^{j[\varphi_i(m+h) - \varphi_j(m+h)]} \tag{5.56}$$

et où les indices i et j indiquent la présence ($i \neq 0$ ou $j \neq 0$) ou l'absence ($i = 0$ ou $j = 0$), respectivement des arguments $\varphi_i(\cdot)$ et $\varphi_j(\cdot)$ dans l'expression de $W_\phi(i, j)$.

En appliquant la même procédure de calcul pour \bar{d}_{n_p, n_q} , nous obtenons,

$$E [\bar{d}_{n_p, n_q}] = \sigma_{n_i}^2 \delta_{p,q} W_\phi(0, 0) \tag{5.57}$$

$$\text{où } W_\phi(0, 0) = \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, 0) \tag{5.58}$$

Compte tenu des relations (5.56) et (5.58), l'expression (5.50) s'écrit,

$$\begin{aligned}
 E(\Delta \bar{d}_{p,q}) &= \left[\sigma_n^2 W_\phi(0,0) + \sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_{s_i} \sigma_{s_j} W_\phi(i,j) \delta_{i,j} \right] \delta_{p,q} \\
 &= \left[\sigma_n^2 W_\phi(0,0) + \sigma_{\Delta a}^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i,i) \right] \delta_{p,q} \quad (5.59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } |E(\Delta \bar{d}_{p,q})|^2 &= [E(\Delta \bar{d}_{p,q})] [E(\Delta \bar{d}_{p,q})]^* \\
 &= \left\{ \sigma_n^4 |W_\phi(0,0)|^2 + 2\sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \operatorname{Re} [W_\phi^*(0,0) W_\phi(i,i)] \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_{\Delta a}^4 \sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i,i) W_\phi^*(j,j) \right\} \delta_{p,q} \quad (5.60)
 \end{aligned}$$

Remarque : pour $W_\phi(i,i) = 1$, $i = 0, 1, \dots, K$, nous retrouvons les expressions (5.18) et (5.19) obtenues pour la méthode de la statistique de second ordre (SOS).

b) Calcul de l'expression de $E[\Delta \bar{d}_{p,q} \Delta \bar{d}_{p,q}^*]$:

d'après (5.46), nous avons,

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{d}_{p,q} \Delta \bar{d}_{p,q}^* &= \left[\sum_{i_1=1}^{Ko} \sum_{j_1=1}^{Ko} (a_{p,i_1} \Delta a_{q,j_1}^* + \Delta a_{p,i_1} a_{q,j_1}^* + \Delta a_{p,i_1} \Delta a_{q,j_1}^*) \bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i_1=1}^{Ko} (a_{p,i_1} + \Delta a_{p,i_1}) \bar{d}_{s_{i_1}, n_q} + \sum_{i_1=1}^{Ko} (a_{q,i_1}^* + \Delta a_{q,i_1}^*) \bar{d}_{n_p, s_{i_1}} + \bar{d}_{n_p, n_q} \right] \\
 &\quad \times \left[\sum_{i_2=1}^{Ko} \sum_{j_2=1}^{Ko} (a_{p,i_2}^* \Delta a_{q,j_2} + \Delta a_{p,i_2}^* a_{q,j_2} + \Delta a_{p,i_2}^* \Delta a_{q,j_2}) \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^* \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i_2=1}^{Ko} (a_{p,i_2}^* + \Delta a_{p,i_2}^*) \bar{d}_{s_{i_2}, n_q}^* + \sum_{i_2=1}^{Ko} (a_{q,i_2} + \Delta a_{q,i_2}) \bar{d}_{n_p, s_{i_2}}^* + \bar{d}_{n_p, n_q}^* \right] \quad (5.61)
 \end{aligned}$$

En utilisant les relations (5.20) nous aurons,

$$\begin{aligned}
 E [|\Delta \bar{d}_{p,q}|^2] &= \sum_{i_1=1}^{Ko} \sum_{j_1=1}^{Ko} \sum_{i_2=1}^{Ko} \sum_{j_2=1}^{Ko} E [A_1(i_1, j_1) A_1^*(i_2, j_2)] E [\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^*] \\
 &+ \sum_{i_1=1}^{Ko} \sum_{i_2=1}^{Ko} E [A_2(i_1) A_2^*(i_2)] E [\bar{d}_{s_{i_1}, n_q} \bar{d}_{s_{i_2}, n_q}^*] \\
 &+ \sum_{i_1=1}^{Ko} \sum_{i_2=1}^{Ko} E [A_3(i_1) A_3^*(i_2)] E [\bar{d}_{n_p, s_{i_1}} \bar{d}_{n_p, s_{i_2}}^*] \\
 &+ \sum_{i_1=1}^{Ko} \sum_{j_1=1}^{Ko} E [A_1(i_1, j_1)] E [\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{n_p, n_q}^*] \\
 &+ \sum_{i_2=1}^{Ko} \sum_{j_2=1}^{Ko} E [A_1^*(i_2, j_2)] E [\bar{d}_{n_p, n_q} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^*] \\
 &+ E [\bar{d}_{n_p, n_q} \bar{d}_{n_p, n_q}^*]
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

que l'on peut mettre sous la forme,

$$E [|\Delta \bar{d}_{p,q}|^2] = \sum_{i_1=1}^6 Y_i \tag{5.63}$$

où,

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \sum_{i_1=1}^K \sum_{j_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K \sum_{j_2=1}^K E [A_1(i_1, j_1) A_1^*(i_2, j_2)] E [\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^*] \\
 Y_2 &= \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K E [A_2(i_1) A_2^*(i_2)] E [\bar{d}_{s_{i_1}, n_q} \bar{d}_{s_{i_2}, n_q}^*] \\
 Y_3 &= \sum_{i_1=1}^K \sum_{i_2=1}^K E [A_3(i_1) A_3^*(i_2)] E [\bar{d}_{n_p, s_{i_1}} \bar{d}_{n_p, s_{i_2}}^*] \\
 Y_4 &= \sum_{i_1=1}^K \sum_{j_1=1}^K E [A_1(i_1, j_1)] E [\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{n_p, n_q}^*] \\
 Y_5 &= \sum_{i_2=1}^K \sum_{j_2=1}^K E [A_1^*(i_2, j_2)] E [\bar{d}_{n_p, n_q} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^*] \\
 Y_6 &= E [\bar{d}_{n_p, n_q} \bar{d}_{n_p, n_q}^*]
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Les expressions des Y_i , $i = 1, \dots, 6$, sont calculées en annexe B2, et en les substituant dans (5.63) nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 E [|\Delta \bar{\mathbf{d}}_{p,q}|^2] &= \sigma_{\Delta a}^4 \left\{ \left[\sum_{i=1}^{K_o} \sum_{j=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^4 |W_\phi(i, i)|^2 \right] \right. \\
 &+ \left. \left[\sum_{i=1}^{K_o} \sum_{j=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, i) W_\phi^*(j, j) + \sum_{i=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^4 W_\phi(i, i, i, i) \right] \delta_{p,q} \right\} \\
 &+ 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\sum_{i=1}^{K_o} \sum_{j=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^4 |W_\phi(i, i)|^2 \right] \\
 &+ 2\sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^2 \left[W_\phi(i, 0, i, 0) + \text{Re} (W_\phi(i, i) W_\phi^*(0, 0)) \delta_{p,q} \right] \\
 &+ 2\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) + \sigma_n^4 \left[W_\phi(0, 0, 0, 0) + W_\phi(0, 0) \delta_{p,q} \right]
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

où les expressions de $W_\phi(\cdot, \cdot)$ sont données par (5.56) et (5.58), et celles de $W_\phi(\cdot, \dots, \cdot)$ par,

$$\begin{aligned}
 W_\phi(i_1, j_1, i_2, j_2) &= \frac{1}{(K_o T_o)^2} \sum_{k_1=1}^{K_o} \sum_{k_2=1}^{K_o} \sum_{m_1=1}^{T_o} \sum_{m_2=1}^{T_o} \sum_{h_1=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{h_2=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \phi(h_1, l) \phi^*(h_2, l) \\
 &\times e^{j[\varphi_{i_1}(m_1+h_1+l) - \varphi_{j_1}(m_1+h_1-l)]} e^{-j[\varphi_{i_2}(m_2+h_2+l) - \varphi_{j_2}(m_2+h_2-l)]} \\
 &\times e^{-j4\pi(f_{k_1, m_1} - f_{k_2, m_2})l} \delta_{m_1+h_1, m_2+h_2}
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

En remplaçant (5.60) et (5.65) dans (5.47) nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 \text{var} (\Delta \bar{\mathbf{d}}_{p,q}) &= \sigma_{\Delta a}^4 \left[\sum_{i=1}^{K_o} \sum_{j=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^4 \left(|W_\phi(i, i)|^2 + W_\phi(i, i, i, i) \delta_{p,q} \right) \right] \\
 &+ 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\sum_{i=1}^{K_o} \sum_{j=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^4 |W_\phi(i, i)|^2 \right] \\
 &+ 2\sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) + 2\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{K_o} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) + \sigma_n^4 W_\phi(0, 0, 0, 0)
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

Finalement, nous déduisons des expressions (5.34) et (5.67), l'expression analytique de la variance de l'erreur d'estimation de la $k^{\text{ème}}$ direction d'arrivée,

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\Delta\theta_k) &= \frac{1}{2|\gamma_k|^2} \sum_{p=1}^L \sum_{q=1}^L |\alpha_{q,k}\beta_{p,k}|^2 \left\{ \sigma_{\Delta a}^4 \left[\sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) \right. \right. \\
 &+ \left. \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^4 \left(|W_\phi(i, i)|^2 + W_\phi(i, i, i, i) \delta_{p,q} \right) \right] \\
 &+ 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^4 |W_\phi(i, i)|^2 \right] \\
 &+ \left. 2\sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) + 2\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) + \sigma_n^4 W_\phi(0, 0, 0, 0) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

En calculant le terme en $\delta_{p,q}$, l'expression ci-dessus devient,

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\Delta\theta_k) &= \frac{\sigma_{\Delta a}^4}{2|\gamma_k|^2} \left(\sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^4 W_\phi(i, i, i, i) \right) \sum_{j=1}^L |\alpha_{j,k}\beta_{j,k}|^2 \\
 &+ \frac{\|\alpha_k\|^2 \|\beta_k\|^2}{2|\gamma_k|^2} \left\{ \sigma_{\Delta a}^4 \left[\sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^4 |W_\phi(i, i)|^2 \right] \right. \\
 &+ 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^4 |W_\phi(i, i)|^2 \right] \\
 &+ \left. 2\sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) + 2\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) + \sigma_n^4 W_\phi(0, 0, 0, 0) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Remarque : Dans les situations où les termes en $\sigma_{\Delta a}^4$ sont négligeables (perturbations et signaux sources faibles), l'expression ci-dessus devient,

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\Delta\theta_k) &= \frac{\|\alpha_k\|^2 \|\beta_k\|^2}{2|\gamma_k|^2} \left\{ 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^4 |W_\phi(i, i)|^2 \right] \right. \\
 &+ \left. 2\sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) + 2\sigma_n^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) + \sigma_n^4 W_\phi(0, 0, 0, 0) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.70}$$

Les expressions (5.67), (5.69) et (5.70) de la variance obtenues dans le cas de la méthode temps-fréquence sont analogues respectivement aux expressions (5.26), (5.28) et (5.29) de la variance obtenues dans le cas de la méthode de la statistique de second ordre, sauf que les expressions de la méthode temps-fréquence sont pondérées par les W_ϕ (d'où la notation W pour "weight").

Cas particulier : Pour des coefficients de pondération $W_\phi(.,.) = 1$ et $W_\phi(.,.,.,.) = 1/M$, les expressions obtenues pour les deux méthodes prennent la même forme et nous aurons $var(\Delta\bar{\mathbf{d}}_{p,q}) = var(\Delta\mathbf{r}_{p,q})$ et $[var(\Delta\theta_k)]_{TF} = [var(\Delta\theta_k)]_{SOS}$.

Ces résultats nous permettent de déduire la propriété suivante,

Propriété : L'expression (5.69) est une forme générale de la variance d'estimation de l'erreur d'estimation des directions d'arrivée pour le modèle de données étudié dans cette thèse. Elle s'applique aux deux algorithmes MUSIC et ESPRIT dans leur variantes conventionnelle (SOS) et temps-fréquence (TF).

5.2 Validation numérique des expressions analytiques

5.2.1 Procédures de validation

Pour valider les expressions théoriques obtenues des variances de l'erreur d'estimation des DDAs par voie de simulation numérique, nous considérons deux signaux sources chirp $s_1(t) = S_1 \exp[j((w_{12} - w_{11})(t^2/2) + w_{11}t)]$ et $s_2(t) = S_2 \exp[j((w_{22} - w_{21})(t^2/2) + w_{21}t)]$ d'égales puissances $\sigma_{s_1}^2 = \sigma_{s_2}^2 = 4$, et de fréquences variant respectivement de $w_{11} = 0$ à $w_{12} = \pi$ et de $w_{21} = \pi$ à $w_{22} = 0$. Ces signaux, dont la durée d'observation est de 128 échantillons, sont localisés dans les directions $\theta_1 = -10^\circ$ et $\theta_2 = 10^\circ$ et sont reçus par un réseau de huit antennes linéairement et uniformément réparties avec une distance inter éléments égale à la demi-longueur d'onde centrale. En plus du bruit additif que nous supposons gaussien, de moyenne nulle et de variance σ_n^2 , le signal de sortie du réseau est entaché de perturbations dues à des erreurs de modèle. Ces perturbations sont considérées gaussiennes, non corrélées, de moyennes nulles et de variance $\sigma_{\Delta a}^2$. Comme les résultats pour les deux signaux sources sont similaires, nous

nous sommes restreints à la présentation de ceux obtenus pour le premier signal. Aussi, en considérant le premier signal source, l'estimé de l'angle d'arrivée $\tilde{\theta}_1$ est comparé à la valeur de consigne θ_1 . La variance des différences $\Delta\theta_1 = \tilde{\theta}_1 - \theta_1$ obtenues à partir de 400 réalisations indépendantes, constitue le résultat de simulation. Cette variance est calculée en fonction du rapport signal sur bruit (RSB) et pour des rapports signal sur perturbation (SPR) de $15dB$, $20dB$ et $25dB$. Il convient de préciser que pour la simulation des algorithmes temps-fréquence (TF), nous avons considéré la distribution de Born-Jordan car, comme il sera montré au paragraphe 6.2, cette distribution exhibe de meilleures performances d'estimation par rapport aux autres distributions abordées dans cette étude, notamment celle de Wigner-Ville. Quant à la procédure de validation, elle est propre à chaque algorithme et se présente comme suit :

- **pour MUSIC**, il s'agit de localiser les maxima locaux de l'inverse du spectre angulaire $F(\theta)$ donné par la relation (4.50) et d'en déduire les DDAs des signaux sources. L'algorithme MUSIC se décline en trois étapes, à savoir :

1. La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ des signaux reçus ;
2. Le classement de ces valeurs propres par ordre croissant et l'identification des $(L-K)$ vecteurs propres associés aux valeurs propres les plus faibles. Ces vecteurs propres constituent la base du sous espace bruit ;
3. Les DDAs estimées $\tilde{\theta}_i$ sont obtenues pour chaque réalisation en localisant les pics de l'inverse du spectre angulaire $F_{MUSIC}(\theta)$.

- **pour ESPRIT**, il s'agit d'appliquer la relation (2.80) donnant l'estimé de la DDA. La procédure utilisée se décline en six étapes, à savoir :

1. La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ des signaux délivrés par le réseau complet ;
2. Le classement de ces valeurs propres par ordre croissant et l'identification, pour chaque sous réseau, des K vecteurs propres associés aux valeurs propres les plus significatives. Ces vecteurs propres constituent la base des sous espaces signaux \mathbf{E}_{s1} et \mathbf{E}_{s2} ;
3. La formation des matrices de vecteurs propres des sous matrices \mathbf{U}_{s1} et \mathbf{U}_{s2} ;
4. Le calcul de la matrice $\Psi = [\mathbf{U}_{s1}^H \mathbf{U}_{s1}]^{-1} \mathbf{U}_{s1}^H \mathbf{U}_{s2}$;

5. Le calcul des valeurs propres de Ψ : $\mu_i = e^{-j\varphi_i}$;
6. Le calcul des estimés des DDA : $\tilde{\theta}_i = -\arcsin \left[\frac{\lambda}{2\pi d} \arg(\mu_i) \right]$.

Pour les deux algorithmes nous considérons le premier signal source. A chaque réalisation, l'angle $\tilde{\theta}_1$ est comparé à la valeur de consigne θ_1 . La variance des différences $\Delta\theta_1 = \tilde{\theta}_1 - \theta_1$ est alors estimée sur les 400 réalisations indépendantes.

5.2.2 Discussion des résultats de validation

Les résultats obtenus par la méthode du second ordre statistique (SOS) et la méthode temps-fréquence (TF) sont présentés, respectivement, sur les figures 5.1 et 5.2. Les courbes décrivent la variation de l'écart type de l'erreur d'estimation de la direction d'arrivée du premier signal source ($std(\Delta\theta_1) = \sqrt{var(\Delta\theta_1)}$) en fonction du rapport signal sur bruit (RSB) et pour différentes valeurs du rapport signal sur perturbation (RSP).

Ces figures montrent l'adéquation entre les résultats théoriques (courbes en traits pleins) et ceux obtenus par simulation numérique (courbes en traits discontinus). Cependant, nous relevons de légères différences entre ces résultats et qui sont dues aux approximations effectuées dans le calcul des expressions analytiques. En effet, lors de ces calculs nous avons effectué un développement au premier ordre de l'erreur d'estimation de la DDA donnée par l'expression (4.61), mais aussi lors du calcul des expressions (4.44) et (4.45) donnant les erreurs sur les matrices de vecteurs propres constituant la base des sous espaces signal et perturbation. En outre, nous constatons à partir des figures (5.1-a et 5.1-b) que les algorithmes conventionnel SOS-MUSIC et SOS-ESPRIT ne sont plus applicables pour des rapports signal sur bruit trop faibles ($< -5dB$) ce qui rend toute comparaison caduque en deçà de cette limite. En revanche, et comme le montre les figures (5.2-a et 5.2-b) les algorithmes temps-fréquence TF-MUSIC et TF-ESPRIT restent applicables et ce, grâce à la répartition du bruit sur la totalité du plan temps-fréquence.

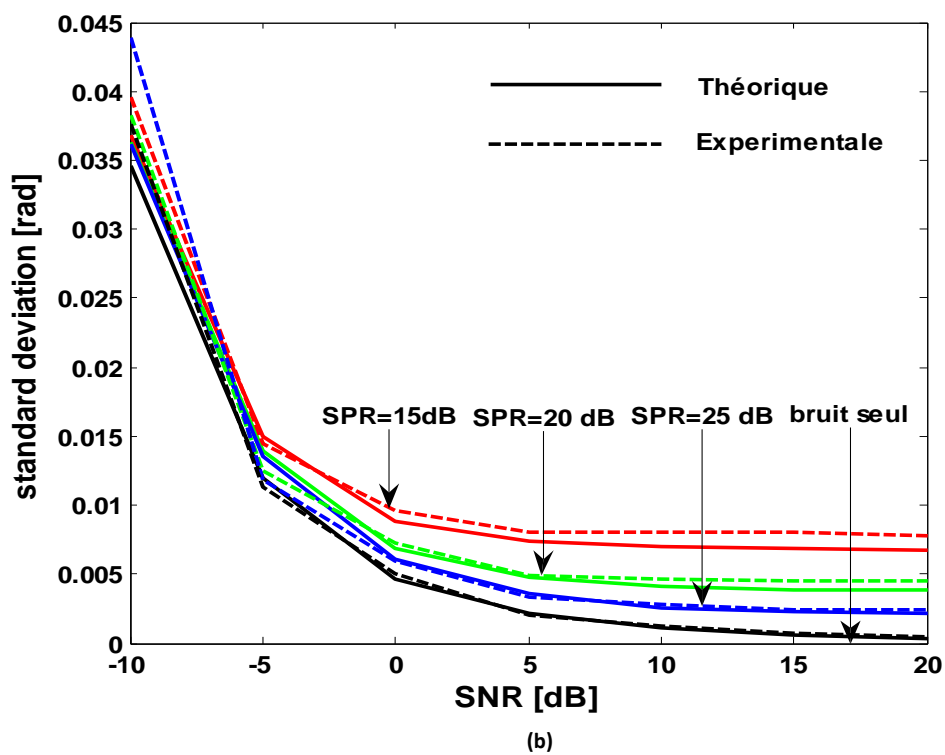
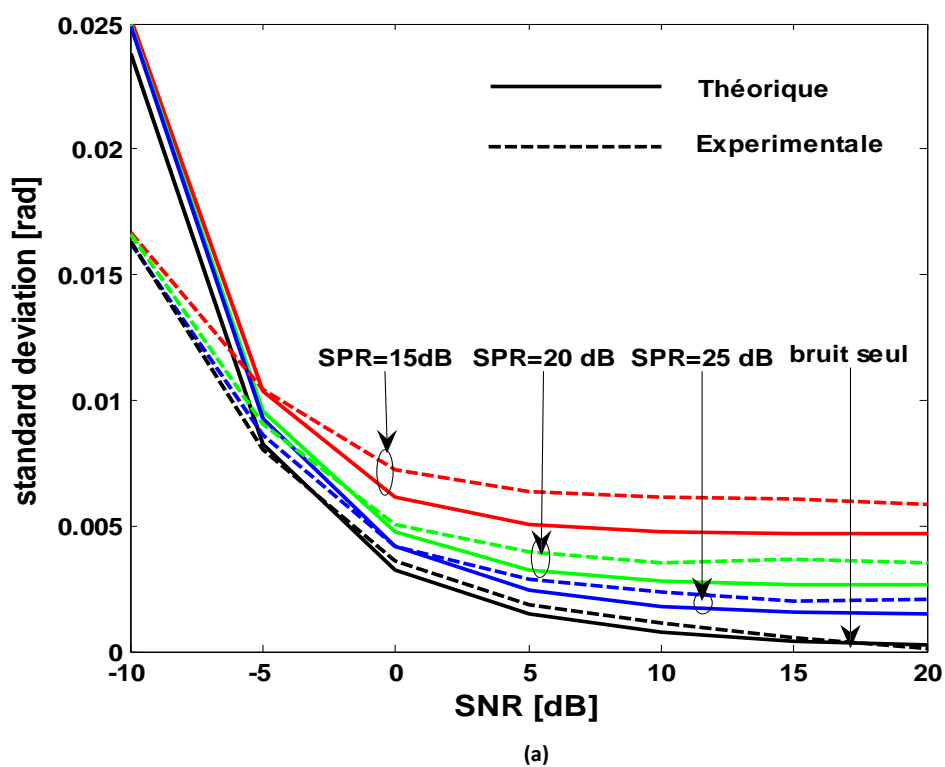


FIGURE 5.1 –
 Ecart type de l'erreur d'estimation de la DDA en fonction du RSB pour différents RSP :
 comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques pour SOS-MUSIC (a) et
 SOS-ESPRIT (b), avec $L=8$ et $M=128$.

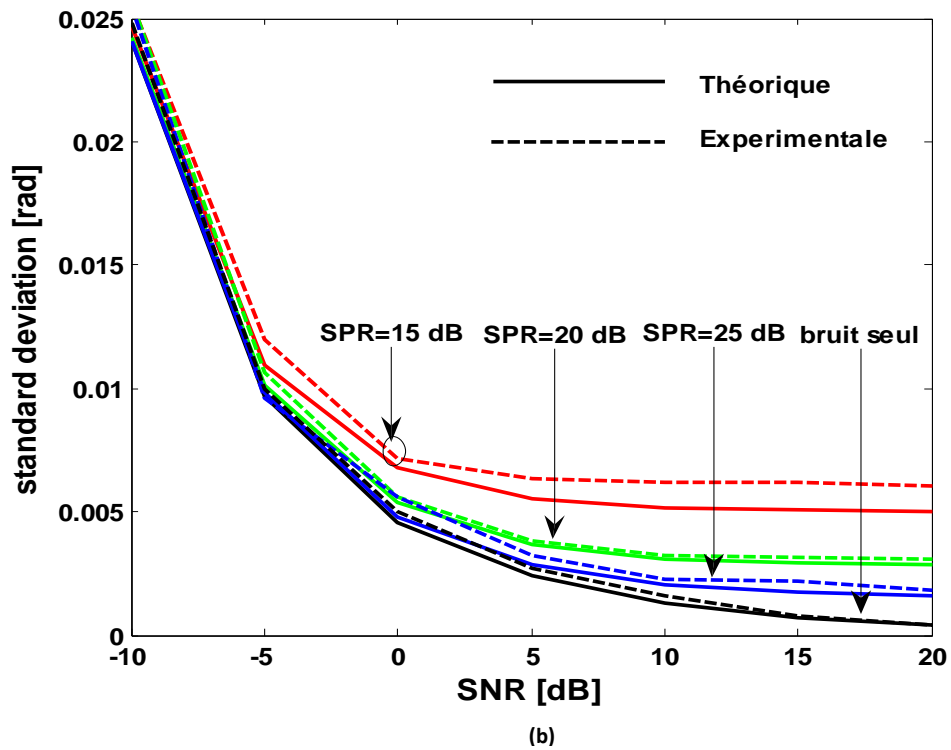
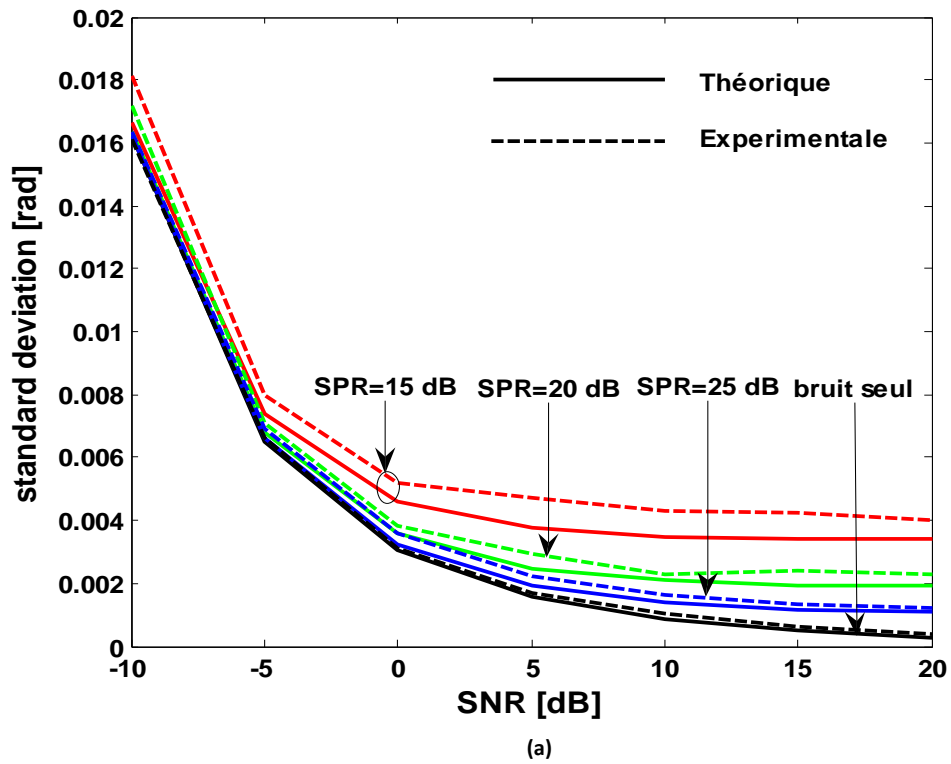


FIGURE 5.2 –

Ecart type de l'erreur d'estimation de la DDA en fonction du RSB pour différents RSP : comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques pour TF-MUSIC (a) et TF-ESPRIT (b), avec $L=8$ et $M=128$.

5.3 Conclusion sur le chapitre

Dans ce chapitre nous avons établi les expressions analytiques de la variance de l'erreur d'estimation des directions d'arrivée pour les algorithmes MUSIC et ESPRIT en utilisant la méthode de la statistique de second ordre et la méthode temps-fréquence. Nous avons montré que les expressions obtenues par les deux méthodes sont analogues à un coefficient de pondération près. Cela nous a amené à conclure que l'expression obtenue par la méthode temps-fréquence est une forme générale qui s'applique également pour le cas conventionnel de la statistique de second ordre.

Ces expressions théoriques ont été ensuite validées par la méthode de simulation de Monte Carlo, ce qui va nous permettre d'évaluer les performances de l'ensemble des variantes SOS et TF des algorithmes MUSIC et ESPRIT en se basant uniquement sur ces expressions.

Chapitre 6

Analyse des performances de MUSIC et ESPRIT en présence d'erreurs du modèle

Ce chapitre est consacré à l'analyse des performances des algorithmes MUSIC et ESPRIT en utilisant comme critère d'évaluation la variance de l'erreur d'estimation des directions d'arrivée. Les expressions théoriques de cette variance, et qui ont été validées par voie de simulation dans le chapitre précédent, vont servir ici pour l'évaluation des performances de ces algorithmes. Cette façon de procéder permet une facilité de traitement dans l'évaluation par rapport aux paramètres du modèle de données et un gain de temps substantiel par rapport à la méthode de Monte Carlo.

6.1 Performances par rapport aux algorithmes et méthodes utilisés

Dans cette analyse, nous nous sommes restreints à la présentation des résultats obtenus pour le premier signal source sachant que ceux relatifs au deuxième signal sont similaires. En outre, nous nous sommes limités à de petites perturbations du modèle de données en considérant le rapport signal sur perturbation variant entre 15 dB et 25 dB, car comme illustré par la figure 2.7-a, la présence de perturbations plus importantes rend l'algorithme inapplicable et le réseau inopérant. L'impact de ces perturbations sur les performances du réseau est d'ailleurs beaucoup plus important que celui du bruit. En effet, et comme le montre la figure 6.1-a, une variation de 5dB du rapport signal sur perturbation (RSP) implique une variation remarquable de l'écart type de l'erreur d'estimation de la DDA, alors que la variation de cet écart type, telle que montrée par la figure 6.1-b, est pratiquement négligeable pour une variation du rapport signal sur

bruit (RSB) égale à celle du rapport signal sur perturbation (RSP).

Les figures 6.2-a et 6.2-b montrent l'effet du bruit et de la perturbation du modèle sur les performances du réseau d'antennes, et indiquent le degré de performance des algorithmes utilisant la méthode temps-fréquence (TF-MUSIC et TF-ESPRIT) et des algorithmes utilisant la méthode de la statistique du second ordre (SOS-MUSIC et SOS-ESPRIT) et dont les résultats sont représentés par des courbes respectivement en traits continus et en traits discontinus. En présence du bruit seul, les deux figures montrent l'amélioration apportée par la méthode temps-fréquence pour les $RSBs$ de faibles valeurs ($RSB < 0dB$) et que les deux méthodes (SOS et TF) sont équivalentes pour des $RSBs$ plus importants. De même, en présence de perturbation du modèle, la méthode temps-fréquence prédomine celle de la statistique de second ordre pour les faibles rapports signal sur bruit notamment ($RSB < 0dB$). Cependant, cette prédominance, comme le montre la figure 6.3, tend à s'atténuer avec l'importance du rapport signal sur perturbation et devient négligeable pour de trop faibles perturbations. Par ailleurs, en examinant l'écart entre les courbes en traits continus et celles en traits discontinus des figures 6.4-a et 6.4-b, nous en déduisons que l'algorithme MUSIC réalise de meilleures performances que l'algorithme ESPRIT et que la méthode temps-fréquence donne de meilleurs résultats que celle de la statistique de second ordre.

6.2 Performances par rapport aux paramètres du modèle

Les figures 6.5-a et 6.5-b représentent, respectivement pour les algorithmes MUSIC et ESPRIT, la variation de l'écart type de l'erreur d'estimation de la direction d'arrivée du signal source en fonction du RSB pour des réseaux de tailles différentes (huit et seize capteurs). A travers ces figures nous remarquons pour MUSIC le rapprochement entre les résultats obtenus par la méthode temps-fréquence (traits continus) et ceux obtenus par la méthode de la statistique de second ordre (traits discontinus) et qu'il suffit d'un nombre modéré de capteurs pour que les deux méthodes sont équivalentes (c-à-d SOS et TF). Tandis que pour la méthode ESPRIT l'écart entre les deux méthodes persiste au bénéfice de la méthode temps-fréquence et qu'il s'atténue avec l'augmentation du nombre de capteurs.

Quant aux figures 6.6-a et 6.6-b, elles montrent l'effet du nombre d'échantillons sur les performances des algorithmes MUSIC et ESPRIT. Ces figures représentent la variation

de l'écart type de l'erreur d'estimation de la DDA du signal source en fonction du RSB pour 128 et 256 échantillons et pour un SPR de $20dB$. La méthode SOS (traits discontinus) est clairement dominée par la méthode TF (traits pleins) et l'algorithme MUSIC réalise de meilleures performances que l'algorithme ESPRIT. Il convient de noter à partir de ces figures, que pour une durée d'observation importante ($M \geq 256$) et pour un SPR et une taille du réseau donnés, le réseau devient insensible aux $SNR > -5dB$. Par ailleurs, il convient de tenir compte dans cette analyse de l'effet du noyau de la distribution temps-fréquence dans les performances de la méthode temps-fréquence. Ce paramètre qui joue un rôle de lissage des distributions de la classe de Cohen, intervient dans l'expression de pondération de la variance de l'erreur d'estimation et, à ce titre, il influe sur les performances de l'algorithme utilisé. Le résultat de cette influence est montré par les figures 6.7-a et 6.7-b où l'on remarque l'écart existant entre la pseudo-distribution de Wigner-Ville (PWVD) d'une part, et celles de Born-Jordan (BJD) et Choi-Williams (CWD) d'autre part. Pour de faibles rapports signal sur bruit, ces deux dernières distributions (BJD et CWD) ont pratiquement le même effet pour TF-MUSIC et TF-ESPRIT, avec toutefois un léger avantage de BJD pour TF-ESPRIT. De façon générale, en examinant les deux figures, nous constatons la prédominance de TF-MUSIC sur TF-ESPRIT et ce, pour l'ensemble des noyaux utilisés dans cette évaluation.

6.3 Conclusion sur le chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté une évaluation des performances des algorithmes MUSIC et ESPRIT dans l'estimation des directions d'arrivée de signaux sources reçus par un réseau d'antennes soumis à des perturbations. Nous avons analysé les performances de ces algorithmes en appliquant deux méthodes sous espaces, à savoir la méthode de décomposition propre de la matrice de covariance des signaux d'antenne, et celle de la décomposition propre de la matrice de distribution temps-fréquence spatiale. Les résultats d'évaluation montrent que pour les deux méthodes, et dans tous les cas de figure, l'algorithme MUSIC réalise de meilleures performances que l'algorithme ESPRIT, et que la méthode temps-fréquence est meilleure que celle de la statistique de second ordre notamment pour les cas défavorables, c'est à dire pour de faibles $SNRs$ et $SPRs$.

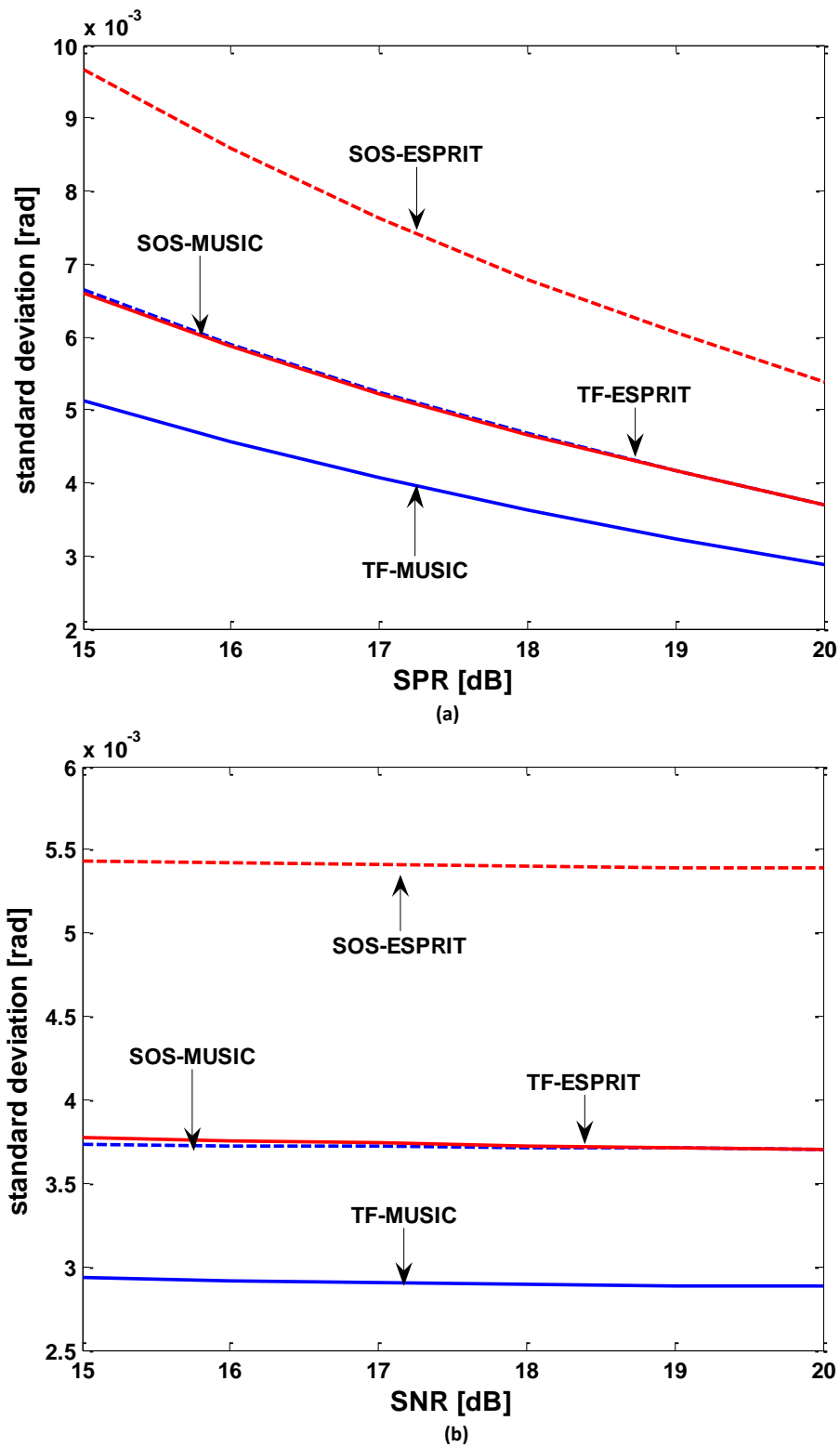
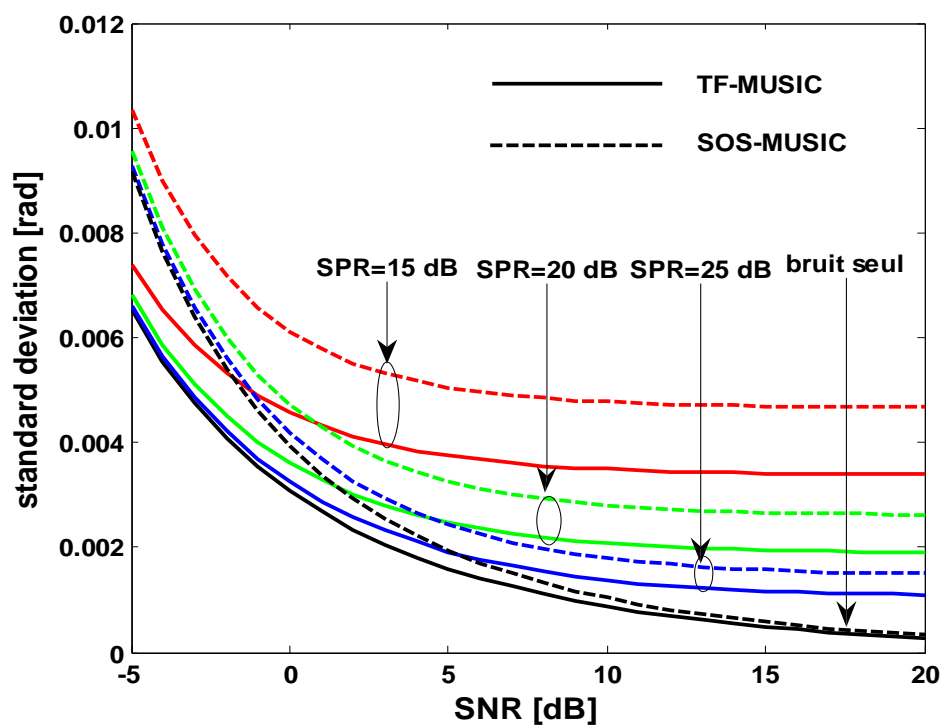
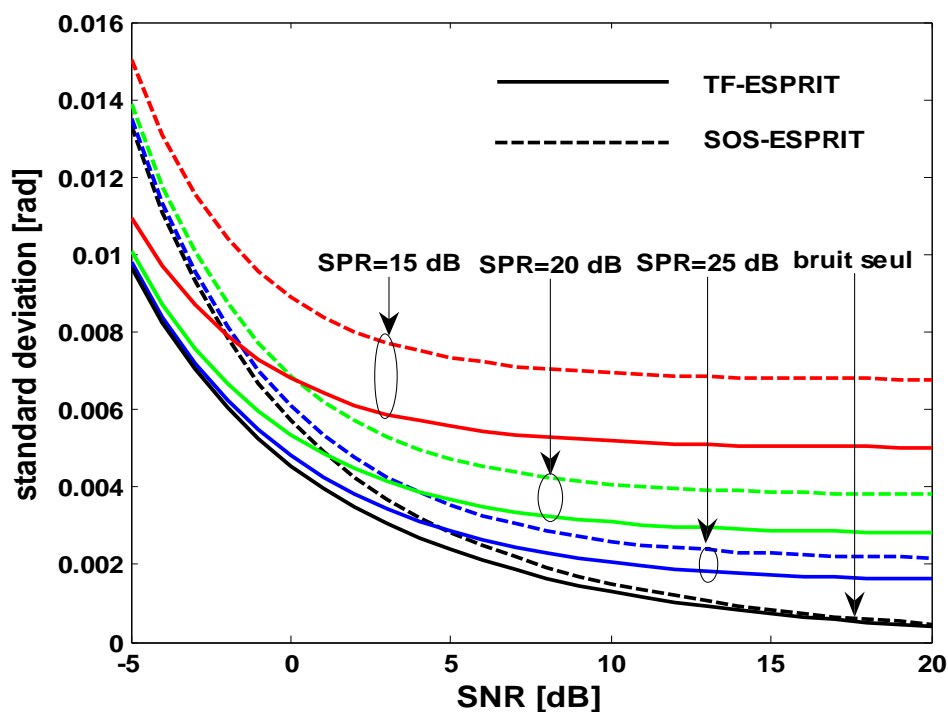


FIGURE 6.1 –
 Comparaison des effets de la perturbation (a) et du bruit (b) sur les performances des algorithmes MUSIC et ESPRIT et méthodes SOS et TF, avec $L=8$ et $M=128$:



(a)



(b)

FIGURE 6.2 –

Ecart type de l'erreur d'estimation de la DDA du signal source en fonction du RSB pour différents RSP, avec $L=8$ et $M=128$: comparaison des performances de SOS-MUSIC et TF-MUSIC (a) et entre SOS-ESPRIT et TF-ESPRIT (b)

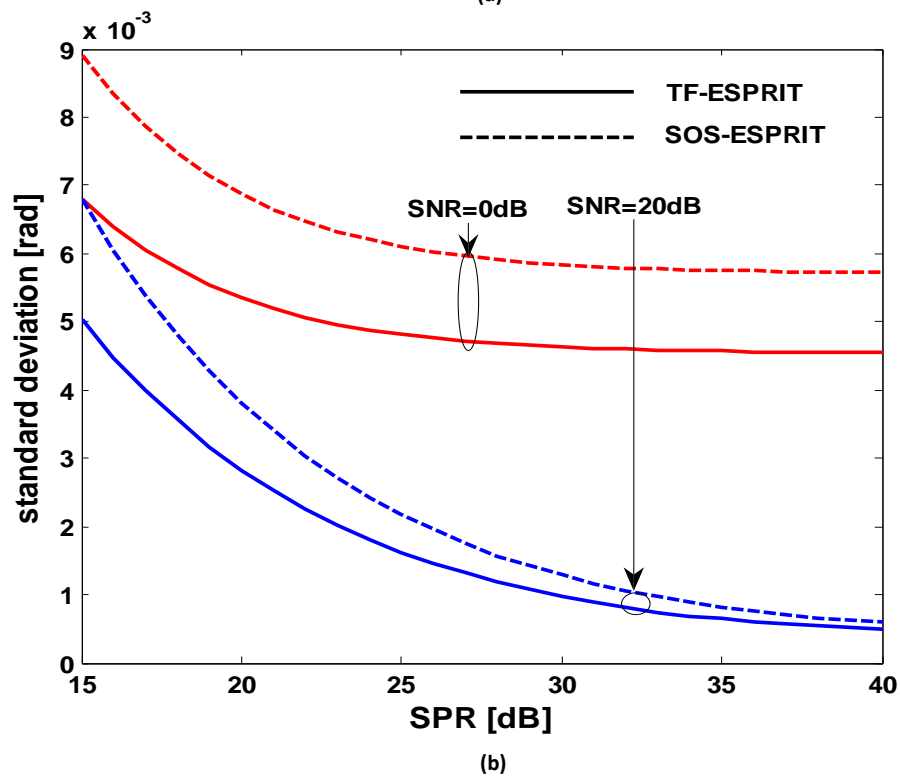
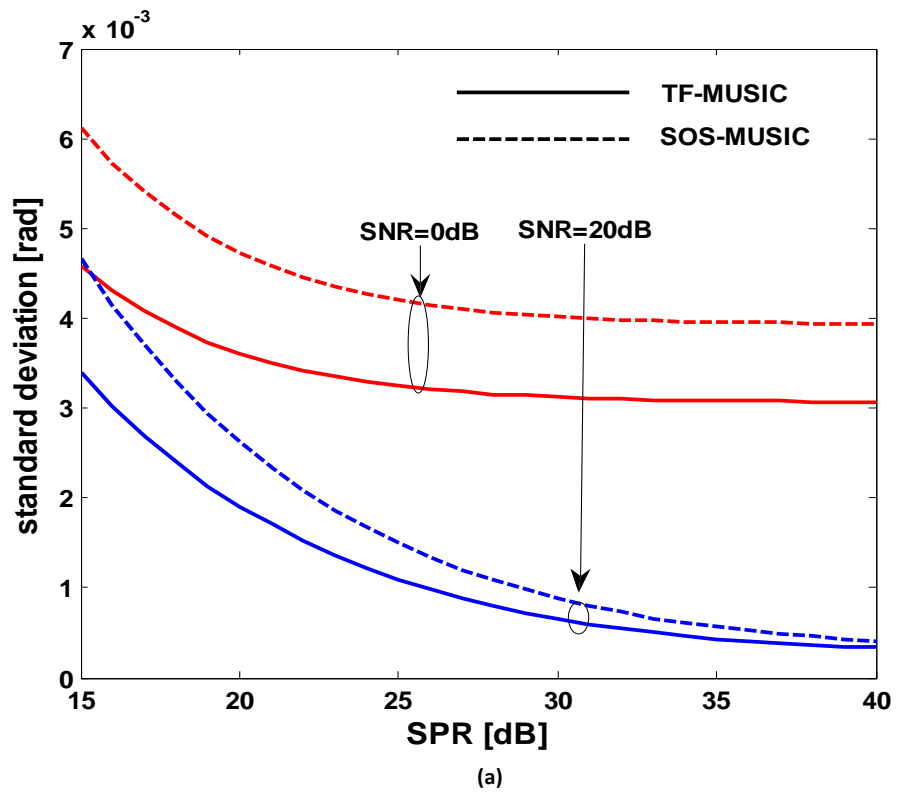
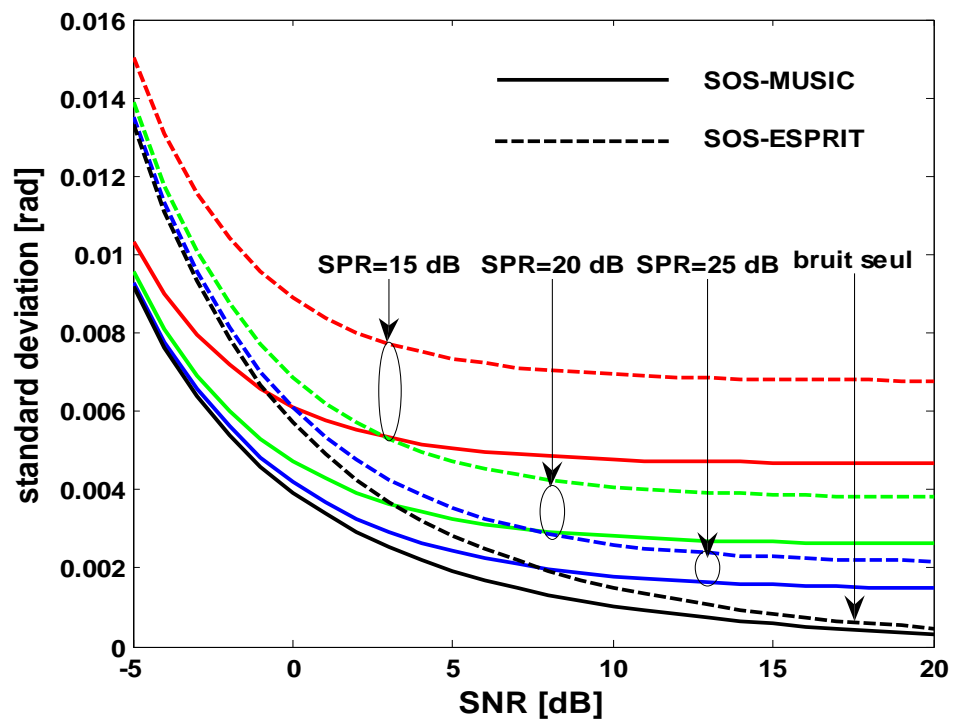
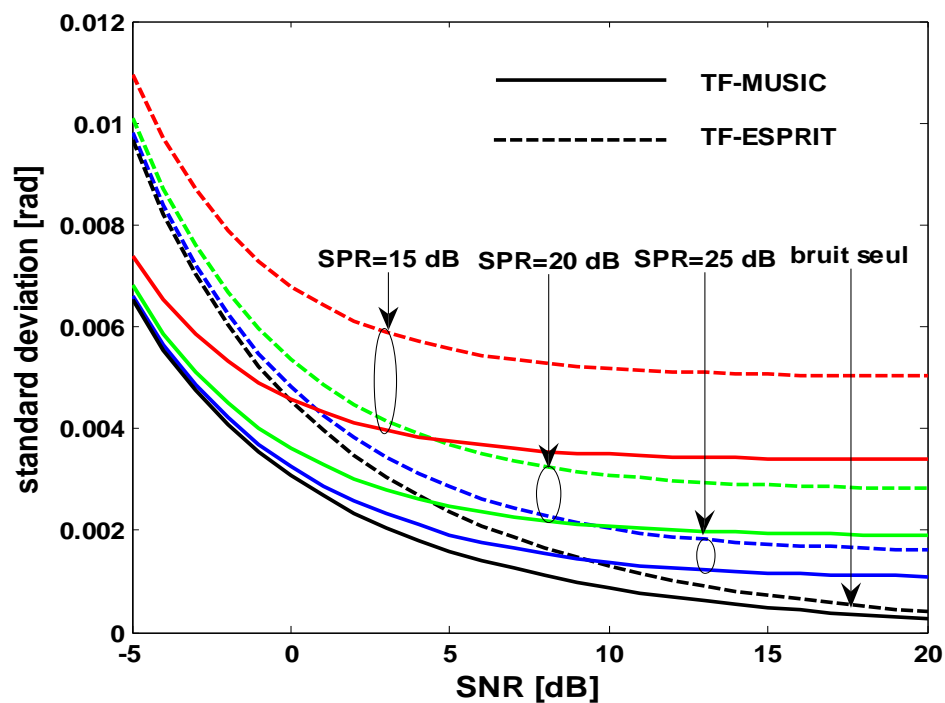


FIGURE 6.3 –
 Ecart type de l'erreur d'estimation de la DDA du signal source en fonction du RSP pour différents RSB, avec $L=8$ et $M=128$: comparaison des performances de SOS-MUSIC et TF-MUSIC (a) et entre SOS-ESPRIT et TF-ESPRIT (b)



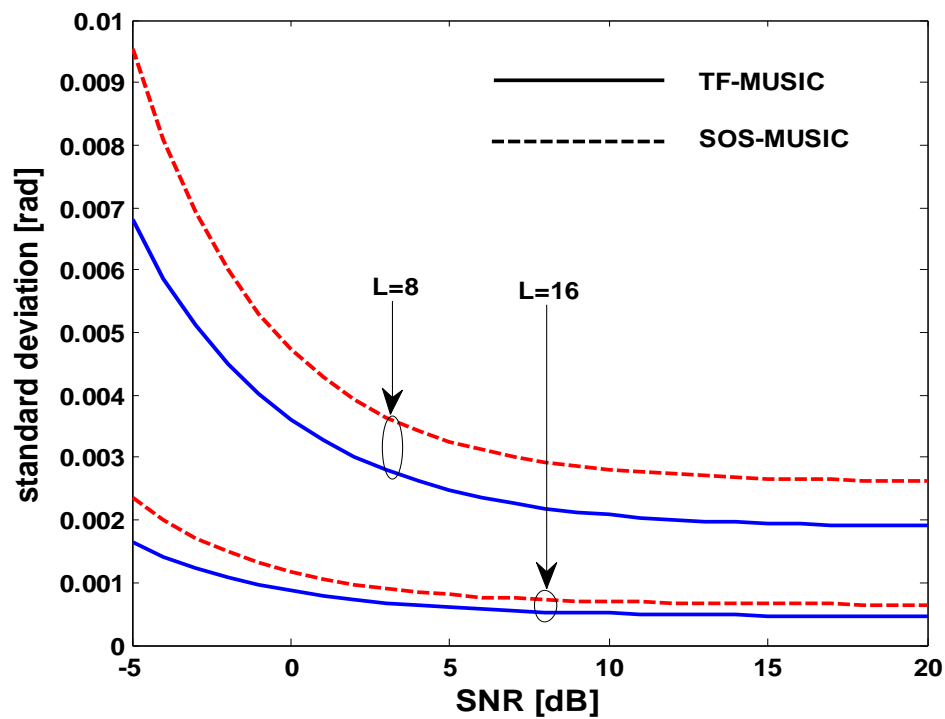
(a)



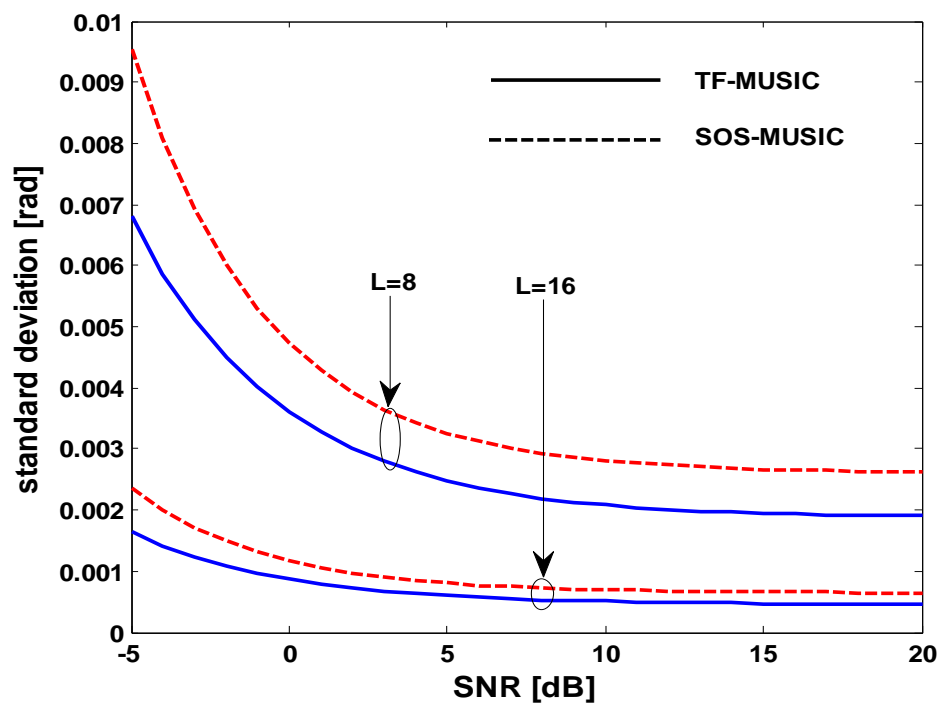
(b)

FIGURE 6.4 –

Ecart type de l'erreur d'estimation de la DDA du signal source en fonction du RSB pour différents RSP, avec $L=8$ et $M=128$: comparaison des performances de SOS-MUSIC et SOS-ESPRIT (a) et entre TF-MUSIC et TF-ESPRIT (b)



(a)



(b)

FIGURE 6.5 –

Ecart type de l'erreur d'estimation de la DDA du signal source en fonction du RSB pour différents nombres de capteurs (L) et pour $\text{SPR}=20$ dB avec $M=128$: comparaison des performances de SOS-MUSIC et TF-MUSIC (a) et entre SOS-ESPRIT et TF-ESPRIT (b)

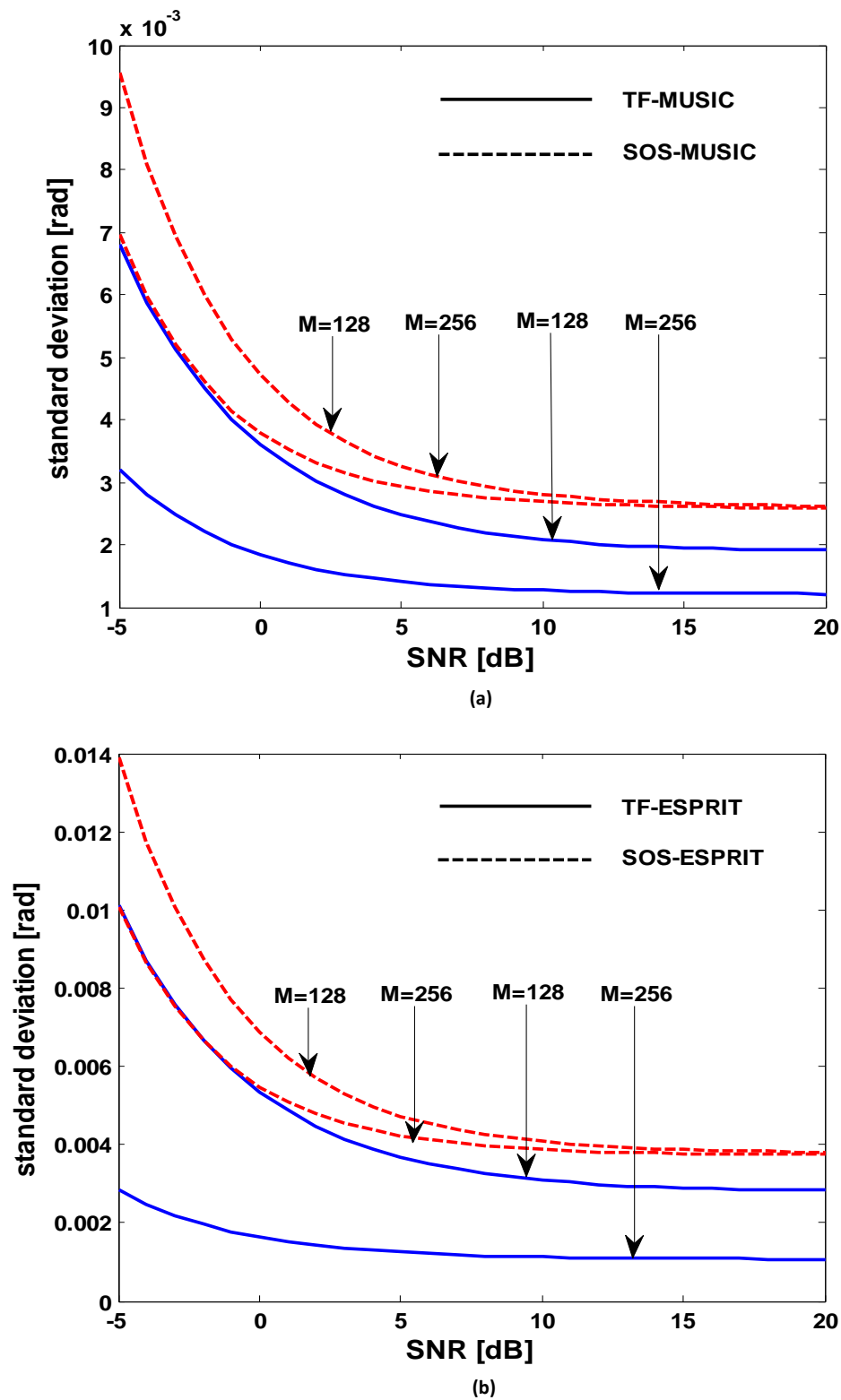


FIGURE 6.6 –
 Ecart type de l'erreur d'estimation de la DDA du signal source en fonction du RSB pour différents nombres de snapshots (M) et pour $\text{SNR}=20$ dB avec $L=8$: comparaison des performances de SOS-MUSIC et TF-MUSIC (a) et entre SOS-ESPRIT et TF-ESPRIT (b)

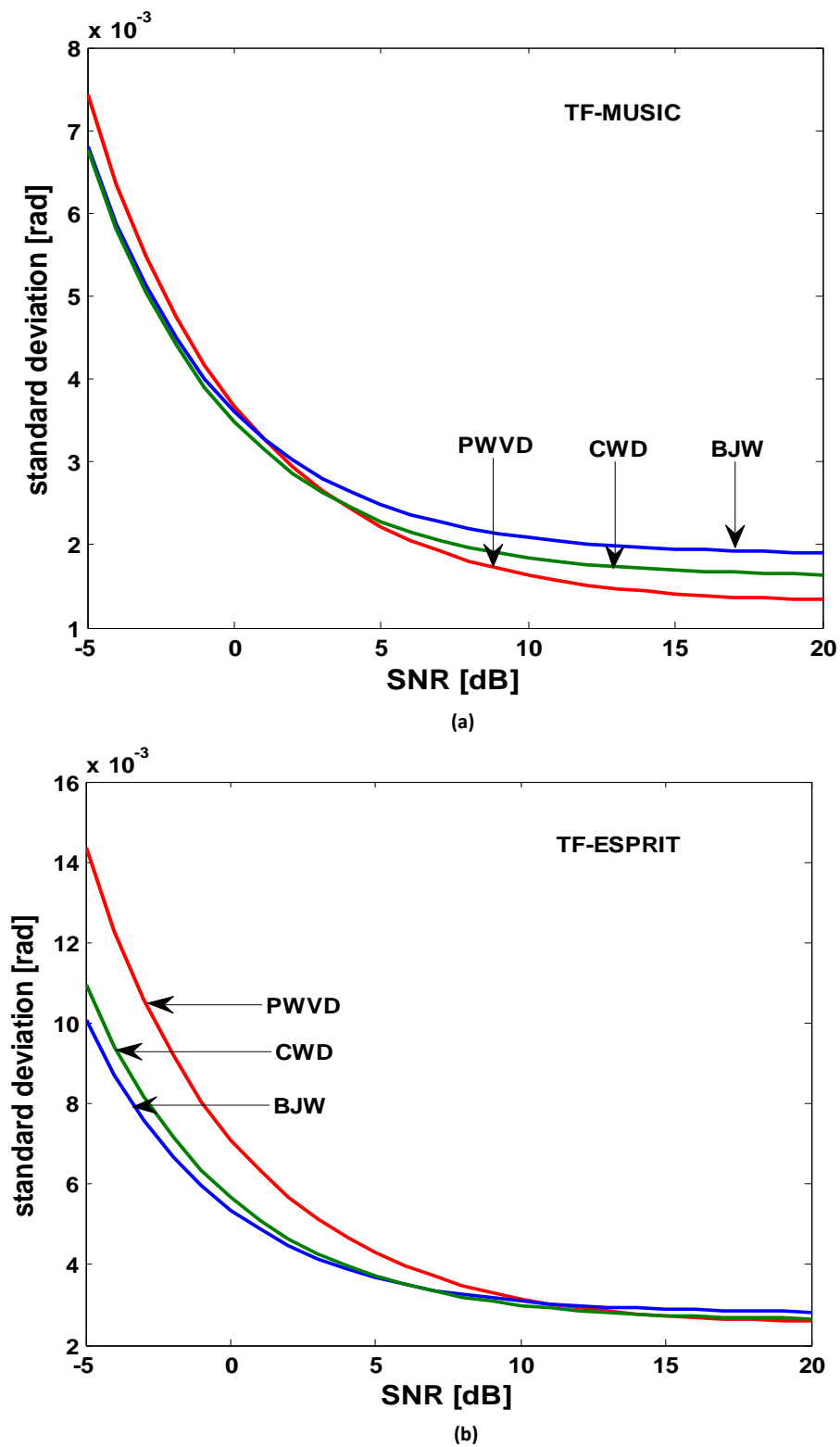


FIGURE 6.7 –

Écart type de l'erreur d'estimation de la DDA du signal source en fonction du RSB pour différents types de noyaux et pour $SPR=20$ dB, avec $L=8$ et $M=128$: Evaluation des performances pour TF-MUSIC (a) et TF-ESPRIT (b)

Chapitre 7

Conclusion générale et perspectives

7.1 Conclusion générale

Les travaux de cette thèse ont porté sur les performances d'algorithmes d'estimation des directions d'arrivée de signaux à bande étroite non stationnaires reçus par un réseau d'antennes soumis à des perturbations. Nous nous sommes intéressés aux algorithmes sous espaces MUSIC et ESPRIT selon deux approches menées en parallèle. La première est une approche classique basée sur la méthode de la statistique de second ordre utilisant la décomposition propre de la matrice de covariance des signaux reçus. Quant à la seconde approche, plus récente, elle est basée sur les méthodes temps-fréquence et utilise la décomposition propre de la matrice de distribution temps-fréquence spatiale de ces signaux.

Après avoir présenté un bref aperçu sur des notions de traitement d'antennes et de représentations temps-fréquence, nous nous sommes proposés un modèle de données perturbé sur lequel seront appliqués les algorithmes et méthodes mentionnés ci-dessus. Partant de ce modèle de données, nous avons établi les expressions des matrices de covariance et de distribution temps-fréquence spatiale pour les algorithmes MUSIC et ESPRIT. Ces expressions ont été regroupées sous une forme unifiée applicable aussi bien par la méthode temps-fréquence que par celle de la statistique de second ordre. De cette unification a résulté une expression générale de l'erreur d'estimation des DDAs, et un tableau définissant les paramètres correspondant à chaque algorithme et méthode a été établi. Cette expression générale et ce tableau ont servi respectivement pour la mise en forme d'expressions analytiques de la variance de l'erreur d'estimation des directions

d'arrivée d'une part, et pour la validation de ces expressions par simulation numérique d'autre part.

Expressions analytiques de la variance de l'erreur d'estimation

L'établissement des expressions analytiques de la variance de l'erreur d'estimation constitue l'un des points importants de cette thèse, puisque c'est grâce à ces expressions que nous avons pu évaluer les performances d'algorithmes et méthodes retenus dans cette étude. En appliquant la définition de la variance de l'erreur d'estimation pour chaque méthode séparément nous avons obtenu, à des coefficients près, des expressions analytiques analogues. En fait, ces coefficients sont des facteurs de pondération des termes de la variance établie pour la méthode temps-fréquence. A ce titre, l'expression de la variance obtenue pour la méthode temps-fréquence est une forme générale applicable également dans le cas de la statistique de second ordre moyennant des facteurs de pondération unitaires.

Validation des expressions analytiques

Une fois les expressions analytiques établies, nous avons procédé à leur validation par simulation numérique en utilisant les paramètres du tableau sus mentionné. Ces paramètres résultent de la décomposition propre de matrices de covariance et de distribution temps-fréquence. L'opération de validation a montré l'adéquation entre les résultats théoriques et ceux obtenus par simulation numérique. Cette étape de validation a montré la limite des algorithmes de la statistique de second ordre SOS-MUSIC et SOS-ESPRIT pour des rapports signal sur bruit très faibles ($RSB < -5dB$), tandis que les algorithmes temps-fréquence TF-MUSIC et TF-ESPRIT restent applicables et ce, grâce à la répartition du bruit sur la totalité du plan temps-fréquence. Cette phase de validation est d'autant importante qu'elle permette l'emploi des expressions analytiques pour évaluer les performances des algorithmes utilisés. Cette façon de procéder a permis une facilité de traitement dans l'évaluation par rapport aux paramètres du modèle de données et un gain de temps substantiel par rapport à la méthode de Monte Carlo.

Evaluation des performances des algorithmes

L'analyse des performances des algorithmes et méthodes présentés dans cette étude, a montré la prédominance de l'algorithme MUSIC sur l'algorithme ESPRIT et de la

méthode temps-fréquence sur celle de la statistique de second ordre. L'étude comparative des différentes approches abordées permettent de conclure que la méthode temps-fréquence s'adapte mieux pour les signaux non stationnaires et que l'algorithme MUSIC garde sa prédominance sur l'algorithme ESPRIT. Les résultats obtenus montrent que la prédominance de la méthode temps-fréquence est d'autant plus forte que les rapports signal sur bruit et signal sur perturbation sont faibles. Les erreurs dues à la perturbation des capteurs ont plus d'impact que le bruit additif sur les performances des deux algorithmes qui ce sont révélés plus sensibles aux variations du rapport signal sur perturbation que celles du rapport signal sur bruit.

7.2 Perspectives

Les travaux de cette thèse traitent d'un aspect important mais restreint du problème de localisation de sources par un réseau de capteurs. Les hypothèses émises dans ces travaux, bien qu'elles limitent le cadre de la présente étude, ont toutefois le mérite de révéler des perspectives de développement variés parmi lesquelles nous proposons notamment :

- De reprendre la présente étude en considérant des signaux sources à large bande reçus par un réseau planaire de capteurs ;
- D'étudier le cas de signaux corrélés et d'en examiner l'impact sur les performances des algorithmes d'estimation abordés dans cette thèse.

Annexe A

Expression de la perturbation des sous espaces

Nous démontrons dans cette annexe l'expression générale de la perturbation des sous espaces signal et perturbation valable pour les algorithmes SOS-MUSIC et TF-MUSIC.

Compte tenu de l'expression (4.42) nous avons,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{\Lambda}}_s \tilde{\mathbf{U}}_s^H + \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \quad (\text{A.1})$$

En multipliant à droite et à gauche $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ par les matrices $\tilde{\mathbf{U}}_p^H$ and $\tilde{\mathbf{U}}_s$, et compte tenu de l'orthogonalité entre ces matrices, nous avons,

$$\tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{U}}_s = 0 \quad (\text{A.2})$$

et compte tenu de (4.43), l'expression ci-dessus s'écrit,

$$(\mathbf{U}_p + \Delta \mathbf{U}_p)^H (\mathbf{P}_{\mathbf{x}_o \mathbf{x}_o} + \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}) (\mathbf{U}_s + \Delta \mathbf{U}_s) = 0 \quad (\text{A.3})$$

En négligeant les termes de perturbation d'ordre supérieur à un et tenant compte de l'orthogonalité entre les sous espaces signal et perturbation, nous aurons,

$$\mathbf{U}_p^H \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}} \mathbf{U}_s + \Delta \mathbf{U}_p^H \mathbf{P}_{\mathbf{x}_o \mathbf{x}_o} \mathbf{U}_s = 0 \quad (\text{A.4})$$

Sachant que la décomposition propre de la matrice $\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ en absence de perturbation est donné par $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_o \mathbf{x}_o} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H$, et en utilisant la propriété d'unitarité de \mathbf{U}_s (c-à-d $\mathbf{U}_s^H \mathbf{U}_s = \mathbf{I}$), nous avons,

$$\Delta \mathbf{U}_p^H = -\mathbf{U}_p^H \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}} \mathbf{U}_s [\mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s]^\sharp \quad (\text{A.5})$$

Où $[\cdot]^\sharp$ défini la pseudo-inverse de la matrice $[\mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s]$ par la relation,

$$[\mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s]^\sharp = [(\mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s)^H (\mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s)]^{-1} (\mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s)^H = \mathbf{\Lambda}_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \quad (\text{A.6})$$

En substituant (A.6) dans (A.5), nous obtenons,

$$\Delta \mathbf{U}_p = -\mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}^H \mathbf{U}_p \quad (\text{A.7})$$

En appliquant la même procédure de calcul pour $\Delta \mathbf{U}_s$, nous obtenons l'expression de la perturbation du sous espace signal en fonction de la perturbation $\Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$,

$$\Delta \mathbf{U}_s = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \Delta \mathbf{P}_{\mathbf{xx}} \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s^{-1} \quad (\text{A.8})$$

Annexe B

Calcul d'espérances mathématiques

B.1 Espérances mathématiques de l'expression (5.21)

Il s'agit de calculer les espérances mathématiques formant les expressions (5.22) données par,

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sum_{i_1=1}^{K_o} \sum_{j_1=1}^{K_o} \sum_{i_2=1}^{K_o} \sum_{j_2=1}^{K_o} E [A_1(i_1, j_1) A_1^*(i_2, j_2)] E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^* s_{i_2, m_2}^* s_{j_2, m_2}] \\
X_2 &= \sum_{i_1=1}^{K_o} \sum_{i_2=1}^{K_o} E [A_2(i_1) A_2^*(i_2)] E [s_{i_1, m_1} s_{i_2, m_2}^* n_{q, m_1}^* n_{q, m_2}] \\
X_3 &= \sum_{i_1=1}^{K_o} \sum_{i_2=1}^{K_o} E [A_3(i_1) A_3^*(i_2)] E [s_{i_1, m_1}^* s_{i_2, m_2} n_{p, m_1} n_{p, m_2}^*] \\
X_4 &= \sum_{i_1=1}^{K_o} \sum_{j_1=1}^{K_o} E [A_1(i_1, j_1)] E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^* n_{p, m_2}^* n_{q, m_2}] \\
X_5 &= \sum_{i_2=1}^{K_o} \sum_{j_2=1}^{K_o} E [A_1^*(i_2, j_2)] E [s_{i_2, m_2}^* s_{j_2, m_2} n_{p, m_1} n_{q, m_1}^*] \\
X_6 &= E [n_{p, m_1} n_{q, m_1}^* n_{p, m_2}^* n_{q, m_2}]
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
E [A_1(i_1, j_1) A_1^*(i_2, j_2)] &= E [a_{p, i_1} a_{p, i_2}^* \Delta a_{q, j_1}^* \Delta a_{q, j_2}] + E [a_{p, i_1} a_{q, j_2} \Delta a_{q, j_1}^* \Delta a_{p, i_2}^*] \\
&+ E [a_{p, i_1} \Delta a_{q, j_1}^* \Delta a_{p, i_2}^* \Delta a_{q, j_2}] + E [\Delta a_{q, j_1}^* a_{p, i_2}^* \Delta a_{p, i_1} \Delta a_{q, j_2}] \\
&+ E [a_{q, j_1}^* a_{q, j_2} \Delta a_{p, i_1} \Delta a_{p, i_2}^*] + E [\Delta a_{q, j_1}^* \Delta a_{p, i_1} \Delta a_{q, j_2} \Delta a_{p, i_2}^*] \\
&+ E [a_{p, i_2}^* \Delta a_{p, i_1} \Delta a_{q, j_1}^* \Delta a_{q, j_2}] + E [a_{q, j_2} \Delta a_{p, i_1} \Delta a_{q, j_1}^* \Delta a_{p, i_2}^*] \\
&+ E [\Delta a_{p, i_1} \Delta a_{q, j_1}^* \Delta a_{p, i_2}^* \Delta a_{q, j_2}]
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Les termes de cette expression sont nuls, à l'exception des trois termes suivants :

$E [a_{p,i_1} a_{p,i_2}^* \Delta a_{q,j_1}^* \Delta a_{q,j_2}]$, $E [a_{q,j_1}^* a_{q,j_2} \Delta a_{p,i_1} \Delta a_{p,i_2}^*]$ et $E [\Delta a_{p,i_1} \Delta a_{q,j_1}^* \Delta a_{p,i_2}^* \Delta a_{q,j_2}]$, et nous avons donc,

$$\begin{aligned} E [A_1(i_1, j_1) A_1^*(i_2, j_2)] &= a_{p,i_1} a_{p,i_2}^* \sigma_{\Delta a}^2 \delta_{j_1, j_2} + a_{q,j_1}^* a_{q,j_2} \sigma_{\Delta a}^2 \delta_{i_1, i_2} + \sigma_{\Delta a}^4 (\delta_{i_1, j_1} \delta_{i_2, j_2} \delta_{p, q} \\ &+ \delta_{i_1, i_2} \delta_{j_1, j_2}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En utilisant la même procédure de calcul, nous avons,

$$\begin{aligned} E [A_2(i_1) A_2^*(i_2)] &= E [a_{p,i_1} a_{p,i_2}^* + a_{p,i_1} \Delta a_{p,i_2}^* + a_{p,i_2}^* \Delta a_{p,i_1} + \Delta a_{p,i_1} \Delta a_{p,i_2}^*] \\ &= a_{p,i_1} a_{p,i_2}^* + \sigma_{\Delta a}^2 \delta_{i_1, i_2} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} E [A_3(i_1) A_3^*(i_2)] &= E [a_{q,i_1}^* a_{q,i_2} + a_{q,i_1}^* \Delta a_{q,i_2} + a_{q,i_2} \Delta a_{q,i_1}^* + \Delta a_{q,i_1}^* \Delta a_{q,i_2}] \\ &= a_{q,i_1}^* a_{q,i_2} + \sigma_{\Delta a}^2 \delta_{i_1, i_2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} E [A_1(i_1, j_1)] &= E [a_{p,i_1} \Delta a_{q,j_1}^* + a_{q,j_1}^* \Delta a_{p,i_1} + \Delta a_{p,i_1} \Delta a_{q,j_1}^*] \\ &= \sigma_{\Delta a}^2 \delta_{i_1, j_1} \delta_{p, q} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Quant aux espérances mathématiques relatives aux signaux sources, nous avons,

$$\begin{aligned} E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^* s_{i_2, m_2} s_{j_2, m_2}^*] &= E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^*] E [s_{i_2, m_2} s_{j_2, m_2}^*] \\ &+ E [s_{i_1, m_1} s_{i_2, m_2}^*] E [s_{j_1, m_1}^* s_{j_2, m_2}] \\ &= \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{j_1}} \sigma_{s_{i_2}} \sigma_{s_{j_2}} [\delta_{i_1, j_1} \delta_{i_2, j_2} + \delta_{i_1, i_2} \delta_{j_1, j_2} \delta_{m_1, m_2}] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} E [s_{i_1, m_1} s_{i_2, m_2}^* n_{q, m_1}^* n_{q, m_2}] &= E [s_{i_1, m_1} s_{i_2, m_2}^*] E [n_{q, m_1}^* n_{q, m_2}] \\ &= \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{i_2}} \sigma_n^2 \delta_{i_1, i_2} \delta_{m_1, m_2} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} E [s_{i_1, m_1}^* s_{i_2, m_2} n_{p, m_1} n_{p, m_2}^*] &= E [s_{i_1, m_1}^* s_{i_2, m_2}] E [n_{p, m_1} n_{p, m_2}^*] \\ &= \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{i_2}} \sigma_n^2 \delta_{i_1, i_2} \delta_{m_1, m_2} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned}
E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^* n_{p, m_2}^* * n_{q, m_2}] &= E [s_{i_1, m_1} s_{j_1, m_1}^*] E [n_{p, m_2}^* * n_{q, m_2}] \\
&= \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{j_1}} \sigma_n^2 \delta_{i_1, j_1} \delta_{p, q}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
E [s_{i_2, m_2}^* s_{j_2, m_2} n_{p, m_1} n_{q, m_1}^*] &= E [s_{i_2, m_2}^* s_{j_2, m_2}] E [n_{p, m_1} n_{q, m_1}^*] \\
&= \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{i_2}} \sigma_n^2 \delta_{i_1, i_2} \delta_{m_1, m_2}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
E [n_{p, m_1} n_{q, m_1}^* n_{p, m_2}^* n_{q, m_2}] &= E [n_{p, m_1} n_{q, m_1}^*] E [n_{p, m_2}^* n_{q, m_2}] \\
&+ E [n_{p, m_1} n_{p, m_2}^*] E [n_{q, m_2} n_{q, m_1}^*] \\
&= \sigma_n^4 (\delta_{m_1, m_2} + \delta_{p, q})
\end{aligned} \tag{B.12}$$

En substituant (B.3) à (B.12) dans (B.1) nous aurons,

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sigma_{\Delta a}^4 [(\delta_{m_1, m_2} + \delta_{p, q})(Tr(R_{ss}))^2 + (1 + \delta_{m_1, m_2} \delta_{p, q})Tr(R_{ss}^2)] \\
&+ 2\sigma_{\Delta a}^2 [\delta_{m_1, m_2}(Tr(R_{ss}))^2 + Tr(R_{ss}^2)] \\
X_2 &= X_3 = \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \delta_{m_1, m_2} Tr(R_{ss}) + \sigma_n^2 \delta_{m_1, m_2} Tr(R_{ss}) \\
X_4 &= X_5 = \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \delta_{p, q} Tr(R_{ss}^2) \\
X_6 &= \sigma_n^4 (\delta_{m_1, m_2} + \delta_{p, q})
\end{aligned} \tag{B.13}$$

B.2 Espérances mathématiques de l'expression (5.63)

Il s'agit de calculer les espérances mathématiques formant les expressions (5.64) données par,

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \sum_{i_1=1}^{K_o} \sum_{j_1=1}^{K_o} \sum_{i_2=1}^{K_o} \sum_{j_2=1}^{K_o} E[A_1(i_1, j_1)A_1^*(i_2, j_2)] E[\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^*] \\
Y_2 &= \sum_{i_1=1}^{K_o} \sum_{i_2=1}^{K_o} E[A_2(i_1)A_2^*(i_2)] E[\bar{d}_{s_{i_1}, n_q} \bar{d}_{s_{i_2}, n_q}^*] \\
Y_3 &= \sum_{i_1=1}^{K_o} \sum_{i_2=1}^{K_o} E[A_3(i_1)A_3^*(i_2)] E[\bar{d}_{n_p, s_{i_1}} \bar{d}_{n_p, s_{i_2}}^*] \\
Y_4 &= \sum_{i_1=1}^{K_o} \sum_{j_1=1}^{K_o} E[A_1(i_1, j_1)] E[\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{n_p, n_q}^*] \\
Y_5 &= \sum_{i_2=1}^{K_o} \sum_{j_2=1}^{K_o} E[A_1^*(i_2, j_2)] E[\bar{d}_{n_p, n_q} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^*] \\
Y_6 &= E[\bar{d}_{n_p, n_q} \bar{d}_{n_p, n_q}^*]
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Les espérances mathématiques des termes de la matrice de direction sont calculées en annexe B1. Quant aux espérances mathématiques relatives aux signaux sources, elles sont calculées ci-dessous,

$$\begin{aligned}
E[\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^*] &= \frac{1}{(K_o T_o)^2} \sum_{k_1=1}^{K_o} \sum_{k_2=1}^{K_o} \sum_{m_1=1}^{T_o} \sum_{m_2=1}^{T_o} d_{s_{i_1}, s_{j_1}}(t_{m_1}, f_{k_1, m_1}) d_{s_{i_2}, s_{j_2}}^*(t_{m_2}, f_{k_2, m_2}) \\
&= \frac{1}{(K_o T_o)^2} \sum_{k_1=1}^{K_o} \sum_{k_2=1}^{K_o} \sum_{m_1=1}^{T_o} \sum_{m_2=1}^{T_o} \sum_{h_1=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{h_2=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l_2=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l_1=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \\
&\times \phi(h_1, l_1) \phi(h_2, l_2) E[S_{i_1}(m_1 + h_1 + l_1) S_{j_1}^*(m_1 + h_1 - l_1)] \\
&\times S_{i_2}(m_2 + h_2 + l_2) S_{j_2}^*(m_2 + h_2 - l_2)] e^{j[\varphi_{i_1}(m_1 + h_1 + l_1) - \varphi_{j_1}(m_1 + h_1 - l_1)]} \\
&\times e^{j[\varphi_{i_2}(m_2 + h_2 + l_2) - \varphi_{j_2}(m_2 + h_2 - l_2)]} e^{-j4\pi(f_{k_1, m_1} l_1 - f_{k_2, m_2} l_2)} \tag{B.15}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& E \left[S_{i_1}(m_1 + h_1 + l_1) S_{j_1}^*(m_1 + h_1 - l_1) S_{i_2}(m_2 + h_2 + l_2) S_{j_2}^*(m_2 + h_2 - l_2) \right] \\
&= E \left[S_{i_1}(m_1 + h_1 + l_1) S_{j_1}^*(m_1 + h_1 - l_1) \right] E \left[S_{i_2}(m_2 + h_2 + l_2) S_{j_2}^*(m_2 + h_2 - l_2) \right] \\
&+ E \left[S_{i_1}(m_1 + h_1 + l_1) S_{j_2}^*(m_2 + h_2 - l_2) \right] E \left[S_{j_1}^*(m_1 + h_1 - l_1) S_{i_2}(m_2 + h_2 + l_2) \right] \quad (\text{B.16}) \\
&= \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{j_1}} \sigma_{s_{i_2}} \sigma_{s_{j_2}} \delta_{i_1, j_1} \delta_{i_2, j_2} \delta_{l_1} \delta_{l_2} \\
&+ \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{j_1}} \sigma_{s_{i_2}} \sigma_{s_{j_2}} \delta_{i_1, i_2} \delta_{j_1, j_2} \delta_{m_1 + h_1 + l_1, m_2 + h_2 + l_2} \delta_{m_1 + h_1 - l_1, m_2 + h_2 - l_2}
\end{aligned}$$

En substituant (B.16) dans (B.15), nous aurons,

$$E \left[\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^* \right] = \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{j_1}} \sigma_{s_{i_2}} \sigma_{s_{j_2}} \left[\delta_{i_1, j_1} \delta_{i_2, j_2} W_\phi(i_1, j_1) W_\phi^*(i_2, j_2) + \delta_{i_1, i_2} \delta_{j_1, j_2} W_\phi(i_1, j_1, i_2, j_2) \right] \quad (\text{B.17})$$

où les expressions de $W_\phi(i_1, j_1)$, $W_\phi(i_2, j_2)$ et $W_\phi(i_1, j_1, i_2, j_2)$ sont respectivement données par,

$$W_\phi(i_1, j_1) = \frac{1}{T_o} \sum_{m=1}^{T_o} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, 0) e^{j[\varphi_{i_1}(m+h) - \varphi_{j_1}(m+h)]} \quad (\text{B.18})$$

$$W_\phi(i_2, j_2) = \frac{1}{T_o} \sum_{m=1}^{T_o} \sum_{h=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \phi(h, 0) e^{j[\varphi_{i_2}(m+h) - \varphi_{j_2}(m+h)]} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned}
\text{et } W_\phi(i_1, j_1, i_2, j_2) &= \frac{1}{(K_o T_o)^2} \sum_{k_1=1}^{K_o} \sum_{k_2=1}^{K_o} \sum_{m_1=1}^{T_o} \sum_{m_2=1}^{T_o} \sum_{h_1=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{h_2=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \phi(h_1, l) \phi^*(h_2, l) \\
&\times e^{j[\varphi_{i_1}(m_1 + h_1 + l) - \varphi_{j_1}(m_1 + h_1 - l)]} e^{-j[\varphi_{i_2}(m_2 + h_2 + l) - \varphi_{j_2}(m_2 + h_2 - l)]} \\
&\times e^{-j4\pi(f_{k_1, m_1} - f_{k_2, m_2})l} \delta_{m_1 + h_1, m_2 + h_2} \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

En appliquant la même procédure de calcul que celle utilisée pour $E \left[\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^* \right]$, nous obtenons pour les autres termes,

$$E \left[\bar{d}_{s_{i_1}, n_q} \bar{d}_{s_{i_2}, n_q}^* \right] = \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{i_2}} \sigma_n^2 \sigma_n^2 \delta_{i_1, i_2} W_\phi(i_1, 0, i_2, 0) \quad (\text{B.21})$$

$$E \left[\bar{d}_{n_p, s_{i_1}} \bar{d}_{n_p, s_{i_2}}^* \right] = \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{i_2}} \sigma_n^2 \sigma_n^2 \delta_{i_1, i_2} W_\phi(0, i_1, 0, i_2) \quad (\text{B.22})$$

$$E \left[\bar{d}_{s_{i_1}, s_{j_1}} \bar{d}_{n_p, n_q}^* \right] = \sigma_{s_{i_1}} \sigma_{s_{j_1}} \sigma_n^2 \delta_{i_1, j_1} \delta_{p, q} W_\phi(i_1, j_1) W_\phi^*(0, 0) \quad (\text{B.23})$$

$$E \left[\bar{d}_{n_p, n_q} \bar{d}_{s_{i_2}, s_{j_2}}^* \right] = \sigma_{s_{i_2}} \sigma_{s_{j_2}} \sigma_n^2 \delta_{i_2, j_2} \delta_{p, q} W_\phi^*(i_2, j_2) W_\phi(0, 0) \quad (\text{B.24})$$

$$E \left[\bar{d}_{n_p, n_q} \bar{d}_{n_p, n_q}^* \right] = \sigma_n^4 [W_\phi(0, 0, 0, 0) + W_\phi(0, 0) \delta_{p, q}] \quad (\text{B.25})$$

En substituant (B.17) et (B.21) à (B.25) dans (B.13) nous aurons,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \sigma_{\Delta a}^4 \left\{ \left[\sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^4 |W_\phi(i, i)|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, i) W_\phi^*(j, j) + \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^4 W_\phi(i, i, i, i) \right] \delta_{p, q} \right\} \\ &\quad + 2\sigma_{\Delta a}^2 \left[\sum_{i=1}^{Ko} \sum_{j=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 \sigma_{s_j}^2 W_\phi(i, j, i, j) + \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^4 |W_\phi(i, i)|^2 \right] \\ Y_2 &= (\sigma_{\Delta a}^2 + 1) \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, 0, i, 0) \\ Y_3 &= (\sigma_{\Delta a}^2 + 1) \sigma_n^2 \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(0, i, 0, i) \\ Y_4 &= \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \delta_{p, q} \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi(i, i) W_\phi^*(0, 0) \\ Y_5 &= \sigma_{\Delta a}^2 \sigma_n^2 \delta_{p, q} \sum_{i=1}^{Ko} \sigma_{s_i}^2 W_\phi^*(i, i) W_\phi(0, 0) \\ Y_6 &= \sigma_n^4 [W_\phi(0, 0, 0, 0) + W_\phi(0, 0) \delta_{p, q}] \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

et, compte tenu de la symétrie de la fonction (B.20), nous avons, $W_\phi(0, i, 0, i) = W_\phi(i, 0, i, 0)$, c'est à dire $Y_3 = Y_2$.

Annexe C

Articles

Dans cette annexe sont reproduits trois articles portant sur le même sujet et qui traitent des algorithmes MUSIC et ESPRIT dont les performances sont évaluées sur la base des résultats de simulation :

- M. Khodja and A. Belouchrani and K. Abed-Meraim, "Performance analysis for time-frequency MUSIC algorithm in presence of both additive noise and array calibration errors", EURASIP Journal on Advances in Signal Processing 2012, 94(2012) ;
- M. Khodja and A. Belouchrani, "Performance Analysis of Time-Frequency ESPRIT Algorithm in Presence of Model Errors", Proc. 6ème séminaire sur les systèmes de detection « DAT 2014 » ;
- A. Belouchrani and M. Khodja, "Performance analysis for time-frequency Subspace based Finding algorithms in presence of perturbed array manifold". IEEE 8th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM), 22-25 June 2014, A coruna, Spain.

RESEARCH

Open Access

Performance analysis for time-frequency MUSIC algorithm in presence of both additive noise and array calibration errors

Mohamed Khodja^{1*}, Adel Belouchrani¹ and Karim Abed-Meraim²

Abstract

This article deals with the application of Spatial Time-Frequency Distribution (STFD) to the direction finding problem using the Multiple Signal Classification (MUSIC) algorithm. A comparative performance analysis is performed for the method under consideration with respect to that using data covariance matrix when the received array signals are subject to calibration errors in a non-stationary environment. An unified analytical expression of the Direction Of Arrival (DOA) error estimation is derived for both methods. Numerical results show the effect of the parameters intervening in the derived expression on the algorithm performance. It is particularly observed that for low Signal to Noise Ratio (SNR) and high Signal to sensor Perturbation Ratio (SPR) the STFD method gives better performance, while for high SNR and for the same SPR both methods give similar performance.

1 Introduction

Advances in antennas technology and signal processing have allowed the emergence of the generation of “the so-called” smart antennas. The latter are commonly used for the direction of arrival (DOA) estimation of far field sources from multiple antenna outputs. DOA estimation is currently one of the important issues in next generation wireless communications, namely the space division multiple access (SDMA).

The techniques used in DOA estimation depend on the nature of the signals under consideration. When the impinging signals are stationary, conventional methods such as the eigen-subspace decomposition of the covariance data matrix are usually used [1,2]. These methods lose of their performance for non-stationary signals. Other high resolution techniques like the ones based on the spatial time-frequency distributions (STFD) were introduced to cope with the non-stationary nature of the signals [3-6]. STFD based methods are based on the use of the quadratic time-frequency distributions of the received signals at the array antenna. High resolution DOA estimation consists of applying the eigen-subspace

decomposition of the STFD instead of the conventional covariance data matrix. In [7], performance comparison between the Time-Frequency MUSIC (TF-MUSIC) and the conventional MUSIC, in presence of additive noise, is provided. In [8], statistical performance analysis in presence of sensor errors without considering the presence of observation noise are conducted for DOA estimation algorithms based on second-order statistics (SOS). In [9], first-order perturbation analysis of the conventional SOS MUSIC and root-MUSIC algorithms is presented.

In this article, our interest is focused on the performance analysis of the conventional MUSIC and the TF-MUSIC algorithms in the presence of both additive noise and sensor errors. These errors can incorporate the effect of imprecisely known sensor location, perturbations in the antenna amplitude and phase patterns that we consider as the calibration errors. A unified analytical expression of the DOA error estimation is derived for both methods. An analysis of the effect of the sensor perturbations on the performance of the considered algorithms is also provided.

* Correspondence: mohamed.khodja@enp.edu.dz

¹Electrical Engineering Department, Ecole Nationale Polytechnique, Algiers, Algeria

Full list of author information is available at the end of the article

Notations

In this article, boldface symbols are used in lower-case letters for vectors (e.g., **a**), and in upper-case letters for

matrices (e.g., \mathbf{A}). The principal symbols and notations used are listed below.

- K number of signal sources
- L number of sensors
- M number of snapshots
- θ_k k th direction of arrival
- $\mathbf{a}(\theta_k)$ k th steering vector
- $\mathbf{A}(\theta)$ array response matrix
- \mathbf{I} $L \times L$ identity matrix
- $(\cdot)^*$ complex conjugate of (\cdot)
- $(\cdot)^H$ complex conjugate transpose of (\cdot)
- $\text{Tr}(\cdot)$ trace of (\cdot)
- $\delta_{i,k}$ Kronecker delta function.

2 Data model

We consider a uniform linear array (ULA) of L sensors receiving K incident signals. The data vector at the output of the sensors at time t is given by,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

This model is commonly used in array signal processing, where $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \dots y_L(t)]^T$ is the output array vector, with $y_i(t)$, $i = 1, \dots, L$, the output of the i th sensor. $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \dots \mathbf{a}(\theta_K)]$ is the $L \times K$ structured mixing matrix known as the array steering matrix, each vector $\mathbf{a}(\theta_j)$, $j = 1, \dots, K$, is an array response to a signal $s_j(t)$ from direction θ_j . $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \dots n_L(t)]^T$ is an additive noise that we assume to be a zero mean white complex stationary process with covariance matrix $\mathbf{R}_{nn} = E[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t)] = \sigma_n^2 \mathbf{I}$, and $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \dots s_K(t)]^T$ is the source signal vector with covariance matrix $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$. The source signals $s_i(t)$, $i = 1, \dots, K$, are assumed mutually uncorrelated and frequency modulated signals of the form

$$s_i(t) = S_i e^{j\phi_i(t)} \quad (2)$$

where S_i and $\phi_i(t)$ are the amplitude and phase of the i th source signal. The amplitude S_i is assumed to be a random variable with zero mean and variance $\sigma_{s_i}^2$, while the phase $\phi_i(t)$ is time varying.

When the sensors are subject to perturbations due to errors in calibration or in sensor location, the signal response is corrupted by errors characterized by the vectors $\{\Delta \mathbf{a}_i\}_{i=1}^K$ added to the steering vectors $\{\mathbf{a}(\theta_i)\}_{i=1}^K$. These errors are randomly changing from one observation period to another. Furthermore, we assume that these errors are uncorrelated random variables with zero mean and equal variances $\sigma_{\Delta a}^2$. The disturbed array manifold matrix can then be written as,

$$\tilde{\mathbf{A}}(\theta) = \mathbf{A}(\theta) + \Delta \mathbf{A} \quad (3)$$

This is a widely used disturbance model [8-12] that take into account different sensor errors including those related to calibration. According to Equations (1) and (3), the disturbed data model is,

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}}(\theta) + \Delta \mathbf{A}] \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

and can be expressed under the form

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathring{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{p}(t) \quad (5)$$

where $\mathring{\mathbf{y}}(t)$ is the perturbation free data matrix, and $\mathbf{p}(t)$ is the perturbation vector including the sensor errors and the additive noise assumed uncorrelated,

$$\mathring{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t) \quad (6)$$

$$\mathbf{p}(t) = \Delta \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (7)$$

3 Covariance matrix perturbation

The covariance matrix of (5) is given by,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} &= E[\tilde{\mathbf{y}}(t)\tilde{\mathbf{y}}^H(t)] \\ &= E[(\mathring{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{p}(t))(\mathring{\mathbf{y}}^H(t) + \mathbf{p}^H(t))] \end{aligned} \quad (8)$$

Substituting $\mathbf{p}(t)$ with its expression (7) into (8), and since $\Delta \mathbf{A}$ is zero mean ($E[\Delta \mathbf{A}] = E[\Delta \mathbf{A}^H] = 0$), it results that,

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = E[\mathring{\mathbf{y}}(t)\mathring{\mathbf{y}}^H(t)] + E[\Delta \mathbf{A} \mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\Delta \mathbf{A}^H] + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (9)$$

where \mathbf{I} is the $L \times L$ identity matrix, and,

$$\begin{aligned} E[\mathring{\mathbf{y}}(t)\mathring{\mathbf{y}}^H(t)] &= \mathbf{A}(\theta) E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)] \mathbf{A}^H(\theta) \\ &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H(\theta) \end{aligned} \quad (10)$$

where $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)] = \text{diag}[\sigma_{s_1}^2, \dots, \sigma_{s_K}^2]$. It is proven in Appendix 1 that the second term in the Equation (9) is given by,

$$E[\Delta \mathbf{A} \mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)\Delta \mathbf{A}^H] = \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) \mathbf{I} \quad (11)$$

where $\text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) = \sum_{i=1}^K \sigma_{s_i}^2$. Substituting (10) and (11) into (9), the covariance matrix of the perturbed data can then be written as,

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H(\theta) + [\sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) + \sigma_n^2] \mathbf{I} \quad (12)$$

4 STFD matrix perturbation

The STFD based techniques exploit both the time-frequency representation of the signals and the spatial

diversity provided by the multi-sensor platform. In this article, we consider the discrete form of the spatial pseudo Wigner-Ville distribution (PWVD) matrix using a rectangular window of odd length N that we apply to the perturbed data $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ vector,

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}(t, f) = \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \tilde{\mathbf{y}}(t + \tau) \tilde{\mathbf{y}}^H(t - \tau) e^{-j4\pi f \tau} \quad (13)$$

Substituting (5) into (13) we obtain,

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}(t, f) = \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ}(t, f) + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{p}}}(t, f) + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}}}(t, f) + \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{p}}}(t, f) \quad (14)$$

$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ}(t, f)$ is the STFD data matrix in absence of the sensor error and the additive noise, and $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{p}}}$ is the perturbation STFD matrix, while $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{p}}}$ and $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}}}$ are the cross STFDs matrices. Under the property of zero mean of noise $\mathbf{n}(t)$ and sensor error represented by $\Delta\mathbf{A}$, the expectation of the cross-terms vanishes (i.e., $E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{p}}}] = 0$ and $E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}}}] = 0$), and it follows,

$$E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}(t, f)] = E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ}(t, f)] + E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{p}}}(t, f)] \quad (15)$$

Considering the spatially and temporally white assumptions of the perturbed steering matrix and noise, and using Equations (6) and (7) the above equation becomes,

$$E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}(t, f)] = E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ}(t, f)] + E[\Delta\mathbf{A}\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)\Delta\mathbf{A}^H] + E[\mathbf{D}_{\mathbf{nn}}(t, f)] \quad (16)$$

Where

$$E[\mathbf{D}_{\mathbf{nn}}(t, f)] = \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (17)$$

and

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ}(t, f) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)\mathbf{A}^H(\theta) \quad (18)$$

$\mathbf{D}_{\mathbf{ss}}(t, f)$ is a $K \times K$ source signal STFD matrix whose elements are given by,

$$d_{s_i s_k}(t, f) = S_i S_k \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{j[\varphi_i(t+\tau) - \varphi_k(t-\tau) - 4\pi f \tau]} \quad (19)$$

where the diagonal elements $d_{s_i s_i}(t, f)$ are the auto-TFDs of the source signals, while the off-diagonal elements $d_{s_i s_k}(t, f)$, ($i \neq k$), are the cross-TFDs. We consider only the t-f points along the actual instantaneous frequency (IF) of each signal. Furthermore, assuming a second-order approximation of the derivative of the phase, we have,

$$\varphi_i(t + \tau) - \varphi_i(t - \tau) - 4\pi f_i(t)\tau = 0 \quad (20)$$

where the IF $f_i(t)$ is given by,

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_i(t)}{dt} \quad (21)$$

Therefore, it results from (19) that,

$$E[d_{s_i s_i}(t, f)] = N\sigma_{s_i}^2 \quad (22)$$

In order to exploit the STFD given by (13) under an eigen-decomposition form, we use an averaging method which consists of averaging the STFD matrix $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}(t, f)$ at (t_i, f_i) points over the selected sources and over a number of T_o selected tf-points ($T_o = M - N + 1$), where M is the number of snapshots.

$$\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}(t_i, f_{k,i}) \quad (23)$$

whose expectation is given by,

$$E[\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}] = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}(t_i, f_{k,i})] \quad (24)$$

where $f_{k,i}$ is the IF of the k th signal at the i th time sample. Considering the Equation (14) for the $(t_i, f_{k,i})$ points and substituting it into (23), we obtain, after a straightforward calculation carried out in Appendix 2, the following expression,

$$\hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = E[\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}] = \frac{N}{K} \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H(\theta) + \left[\frac{N}{K} \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}) + \sigma_n^2 \right] \mathbf{I} \quad (25)$$

5 Perturbation analysis: unified formulation

Expressions of $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}$ and $\hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}$ given by (12) and (25), respectively, are a sum of three terms corresponding to the perturbation free signal, the sensor error, and the additive noise. These expressions can be written under a unified form as follows,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ} + \sigma_p^2 \mathbf{I} \quad (26)$$

where,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ} = \begin{cases} \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H(\theta), & \text{for covariance based method,} \\ \hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ} = \frac{N}{K} \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H(\theta), & \text{for STFD based method} \end{cases} \quad (27)$$

$\hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\circ}$ is the STFD matrix corresponding to the sources in absence of both noise and sensor errors, and,

$$\sigma_p^2 = \begin{cases} (\sigma_p^{\text{cov}})^2 = \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}) + \sigma_n^2, & \text{for covariance based method,} \\ (\sigma_p^{\text{stfd}})^2 = \frac{N}{K} \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}) + \sigma_n^2, & \text{for STFD based method} \end{cases} \quad (28)$$

In Equation (28), the superscript “*sos*” stands for second-order statistics associated to the covariance matrix based method, and the superscript “*tf*” stands for time-frequency associated to the STFD based method.

Remarks

- It is important to observe from Equation (25) that in absence of additive noise, the STFD based method do not make any improvement compared to the conventional MUSIC.
- On the other hand, in presence of additive noise, as it is always the case in a real-life situation, the signal to noise ratio (SNR) is improved by a factor N/K for the STFD based method. This improvement would be still better for larger window length.

According to (26) and (27), $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}$ is a positive definite matrix and can be expressed under an eigen-decomposition form as follows,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}^{sos} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{sos} (\tilde{\mathbf{U}}^{sos})^H, & \text{for covariance based method,} \\ \tilde{\mathbf{U}}^{tf} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{tf} (\tilde{\mathbf{U}}^{tf})^H, & \text{for STFD based method} \end{cases} \quad (29)$$

which can be expressed under the following unified form

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = \sum_{i=1}^L \lambda_i \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^H = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{U}}^H \quad (30)$$

where $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}[\lambda_i, i = 1, \dots, L]$ is the matrix of the eigenvalues of $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}$, and $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}_{i=1}^L$ are the corresponding eigenvectors.

These definitions and notations being made, and for the sake of simplicity we consider in the sequel only the unified form $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}$ given by Equation (30) to deal with both the covariance and the STFD based methods.

The matrix $\tilde{\mathbf{U}}$ can be arranged as $\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{\mathbf{U}}_s \quad \tilde{\mathbf{U}}_p]$, where $\tilde{\mathbf{U}}_s = [\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_K]$ forms the signal subspace, and $\tilde{\mathbf{U}}_p = [\tilde{\mathbf{u}}_{K+1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_L]$ forms the perturbed subspace known as the orthogonal subspace. The Equation (30) can then be rewritten as follows,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} &= (\tilde{\mathbf{U}}_s \quad \tilde{\mathbf{U}}_p) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Lambda}}_s & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_s^H \\ \tilde{\mathbf{U}}_p^H \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{\Lambda}}_s \tilde{\mathbf{U}}_s^H + \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \end{aligned} \quad (31)$$

where $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_s = \text{diag}[\lambda_i, i = 1, \dots, K]$ is the signal eigenvalue matrix, and $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_p = \text{diag}[\lambda_i, i = K + 1, \dots, L]$ the perturbation eigenvalue matrix. Thus, consequently to (31), a perturbation $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}$ leads to the perturbation of

both subspaces. The matrices $\tilde{\mathbf{U}}_s$ and $\tilde{\mathbf{U}}_p$ can then be expressed as,

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \mathbf{U}_s + \Delta \mathbf{U}_s \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{U}}_p = \mathbf{U}_p + \Delta \mathbf{U}_p \quad (32)$$

where $\Delta \mathbf{U}_s$ and $\Delta \mathbf{U}_p$ represent, respectively, the perturbation of the signal subspace and the orthogonal subspace.

It is shown in Appendix 3 that the first-order expressions for $\Delta \mathbf{U}_s$ and $\Delta \mathbf{U}_p$ are given by,

$$\Delta \mathbf{U}_s = \mathbf{U}_p + \mathbf{U}_p^H \Delta \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \quad (33)$$

$$\Delta \mathbf{U}_p = -\mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \Delta \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} \mathbf{U}_p \quad (34)$$

$\Delta \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}$ represents the perturbation resulting from the presence of sensor errors and the additive noise in the data signal,

$$\Delta \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = \begin{cases} \Delta \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}, & \text{for covariance based method,} \\ \Delta \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}, & \text{for STFD based method} \end{cases} \quad (35)$$

where,

$$\Delta \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = \frac{1}{M} [\tilde{\mathbf{y}}(t) \tilde{\mathbf{y}}(t)^H - \hat{\mathbf{y}}(t) \hat{\mathbf{y}}(t)^H] \quad (36)$$

and,

$$\Delta \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}} = \frac{1}{KT_0} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_0} [\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}(t_i, f_{k,i}) - \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}}^\circ(t_i, f_{k,i})] \quad (37)$$

6 DOA error estimation for the MUSIC and TF-MUSIC algorithms

In the MUSIC and TF-MUSIC algorithms, the DOA are found by locating the K largest peaks over the angle of arrival θ of the following spatial spectrum function,

$$F(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}(\theta) \quad (38)$$

In a perturbed environment, the direction of arrivals $\{\theta_k\}_{k=1}^K$ are corrupted by the errors $\{\Delta\theta_k\}_{k=1}^K$. Thus, the k th estimated DOA corresponding to the k th signal can be written as,

$$\tilde{\theta}_k = \theta_k + \Delta\theta_k \quad (39)$$

and the expression for the perturbation of DOA estimate, proved in Appendix 4, is given by,

$$\Delta\theta_k = \frac{\text{Re} [-\mathbf{a}(\theta_k)^H \Delta \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)]}{\|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2} \quad (40)$$

$\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) = \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_k}$, $k = 1, \dots, K$. Substituting $\Delta\mathbf{U}_p$ by its expression given in (34), we obtain,

$$\Delta\theta_k = \frac{\text{Re}[\mathbf{a}(\theta_k)^H \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \Delta \mathbf{P}_{yy}^H \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)]}{\|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2} \quad (41)$$

which can be written under the following form [1],

$$\Delta\theta_k = \frac{\text{Re} [\alpha_k^H \Delta \mathbf{P}_{yy}^H \beta_k]}{\gamma_k} \quad (42)$$

where the vectors α_k and β_k are given by,

$$\alpha_k = \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \mathbf{a}(\theta_k) \quad (43)$$

$$\beta_k = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) \quad (44)$$

and the scalar γ_k is given by,

$$\gamma_k = \|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2 \quad (45)$$

The variance of the k th DOA error estimate $\Delta\theta_k$ is then given by,

$$\text{var} (\Delta\theta_k) = \frac{1}{\gamma_k^2} \text{var} [\text{Re} (\alpha_k^H \Delta \mathbf{P}_{yy}^H \beta_k)] \quad (46)$$

Taking into account the notations given in the previous section, the results (41) and (46) are valid for both the conventional and time-frequency MUSIC.

$$\text{var} [\Delta\theta_k] = \begin{cases} \text{var} [\Delta\theta_k^{\text{sos}}], & \text{for conventional MUSIC algorithm} \\ \text{var} [\Delta\theta_k^{\text{tf}}], & \text{for TF-MUSIC algorithm} \end{cases} \quad (47)$$

where,

$$\text{var} [\Delta\theta_k^{\text{sos}}] = \frac{1}{(\gamma_k^{\text{sos}})^2} \text{var} [\text{Re} ((\alpha_k^{\text{sos}})^H \Delta \mathbf{R}_{yy}^H \beta_k^{\text{sos}})] \quad (48)$$

and

$$\text{var} [\Delta\theta_k^{\text{tf}}] = \frac{1}{(\gamma_k^{\text{tf}})^2} \text{var} [\text{Re} ((\alpha_k^{\text{tf}})^H \Delta \mathbf{D}_{yy}^H \beta_k^{\text{tf}})] \quad (49)$$

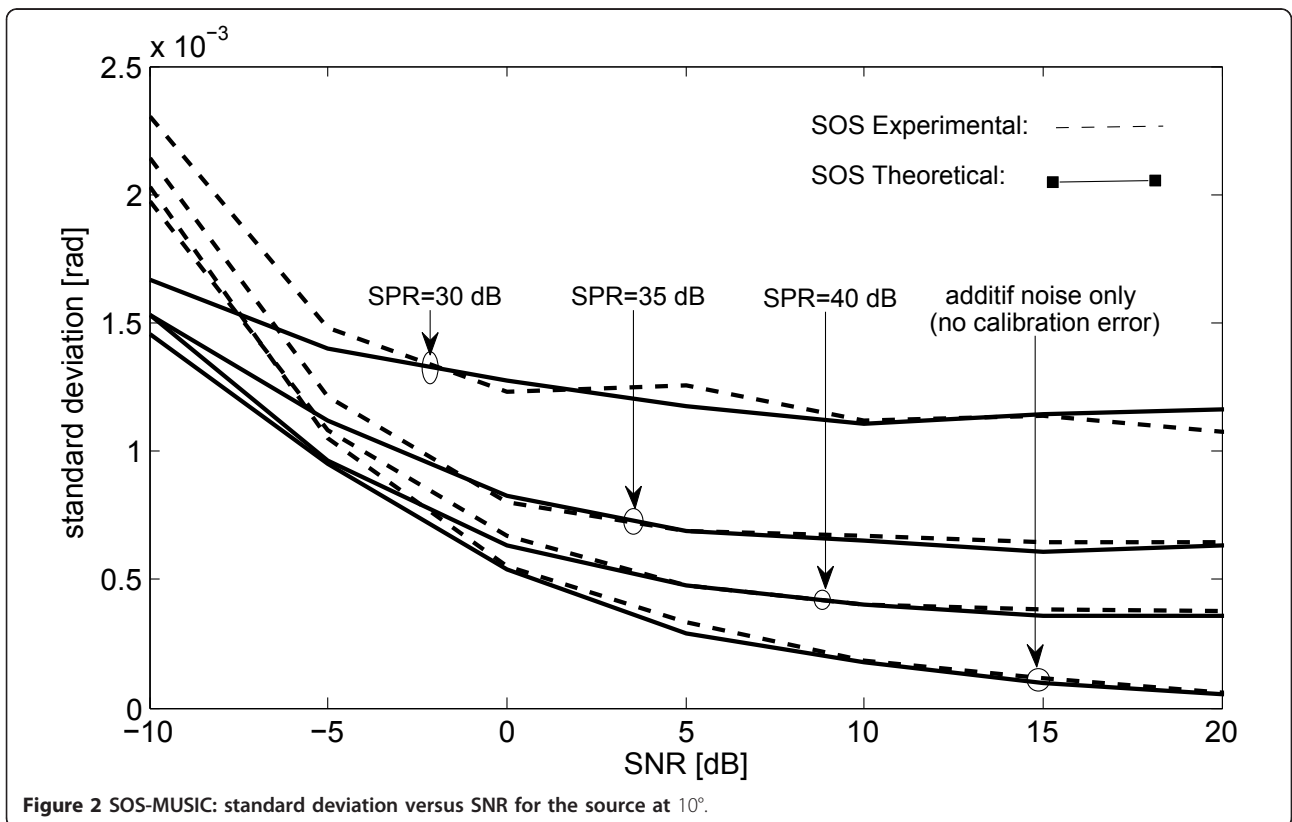
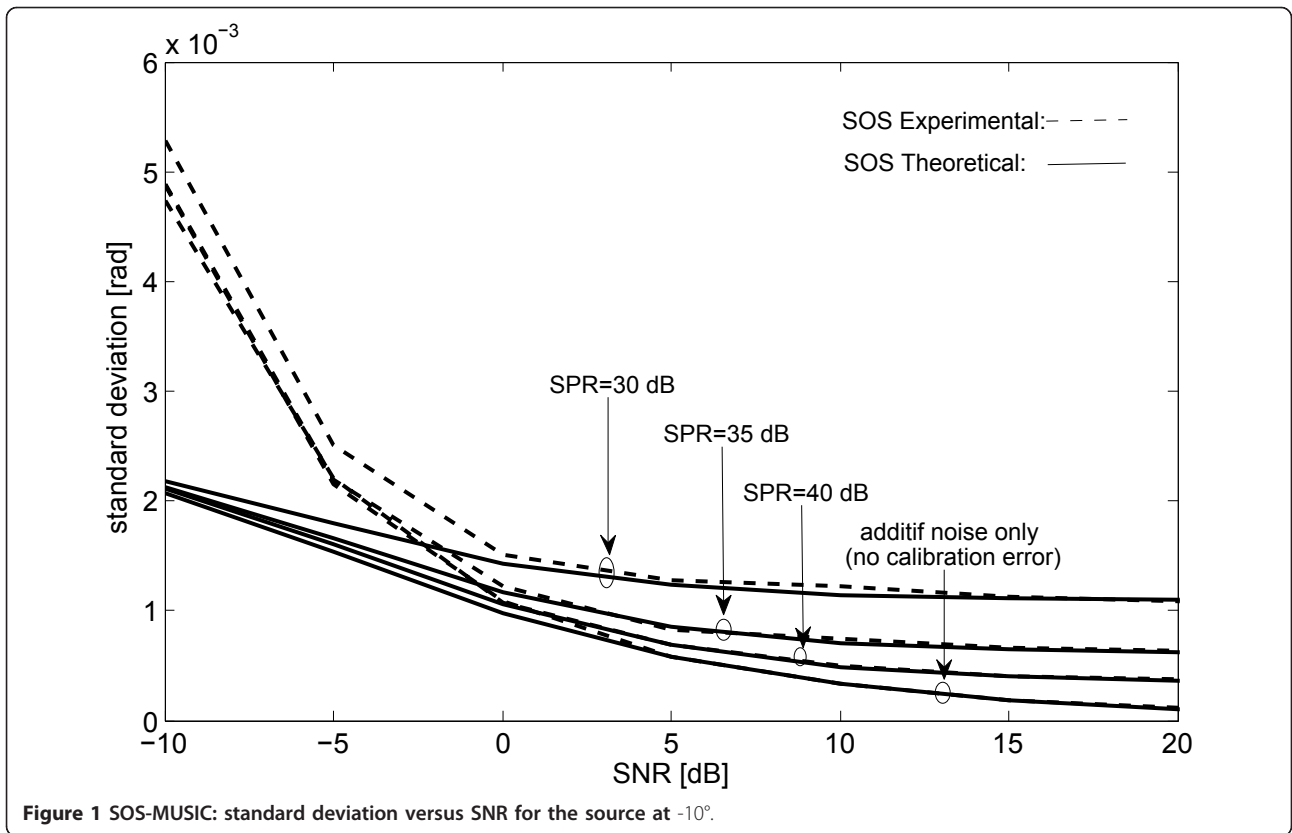
7 Performance evaluation

In this section, simulation results are given for the STFD and the SOS MUSIC methods. Two received chirp source signals are considered, $s_1(t) = S_1 \exp[j((w_{12} - w_{11})(t^2/2) + w_{11}t)]$ and $s_2(t) = S_2 \exp[j((w_{22} - w_{21})(t^2/2) + w_{21}t)]$ with powers $\sigma_{s_1}^2 = 1$ and $\sigma_{s_2}^2 = 4$, and with frequencies varying from $w_{11} = \pi/6$ to $w_{12} = \pi$ and from $w_{21} = \pi$ to $w_{22} = \pi/6$, respectively. The signals are positioned at angles $\theta_1 = -10^\circ$ and $\theta_2 = 10^\circ$ and are received

by a uniform linear array of eight sensors spaced by half-wavelength. The signal at the output of the array is disturbed by calibration errors in addition to the additive noise. These perturbations are assumed uncorrelated Gaussian variables with zero mean. In all simulations, we limit our discussion to small calibration errors and consider the signal to perturbation ratio (SPR) for the values 30, 35, and 40 dB. In the STFD based method, a PWVD with rectangular window length of 129 is applied to the sensor output data. The observation period is 1024 snapshots and the results are averaged over 500 independent Monte Carlo trials. DOA estimates $\tilde{\theta}_1$ and $\tilde{\theta}_2$ are obtained for each Monte Carlo run by locating the peaks of the spectrum and comparing them to θ_1 and θ_2 , respectively. The variance of the differences $\Delta\theta_1 = \tilde{\theta}_1 - \theta_1$ and $\Delta\theta_2 = \tilde{\theta}_2 - \theta_2$, constitute the simulation results. As for numerical results related to the variance terms in Equations (48) and (49), they are obtained by Monte Carlo method.

Figures 1, 2, 3, and 4 show the statistical performance of each method versus the SNR for different values of the SPR. The curves in these figures compare the empirical standard deviation with the theoretical expressions shown by (48) and (49). The results presented in Figures 1 and 3 are obtained using $\Delta\theta_1$, whereas the results presented in Figures 2 and 4 are obtained for $\Delta\theta_2$. As we can see from Figures 1 and 2, the simulation results for the SOS-based method agree closely with the results of the derived analytical expression for $\text{SNR} \geq 0$ dB. The same observation is made for the STFD-based method from Figures 3 and 4 but for a larger range of SNRs. We can also observe that for the SOS-based method the matching between empirical and theoretical results is lost for very low SNR values (i.e., $\text{SNR} < 0$) due to the fact that the first order disturbance analysis is not pertinent in this context. However, for the STFD-based method, the matching between empirical and theoretical results still hold because the local SNR value at the auto-source time-frequency point is relatively large even at $\text{SNR} = -10$ dB. This robustness with respect to noise may be explained by the effect of spreading the noise power over the time-frequency plan and of localizing the source energy in the t-f domain. Moreover, as shown in the above referenced equations, this result is supported by the SNR improvement of a factor equal to the t-f window length N over the SNR associated to SOS based method.

Next, the conducted performance comparison of the SOS and TF-based methods are carried out with respect to the first DOA, the comparison results with respect to the second one being similar. Figure 5 shows no significant difference between the two methods for $\text{SNRs} \geq -5$ dB and high SPRs values, whereas for lower SNRs (≤ -5



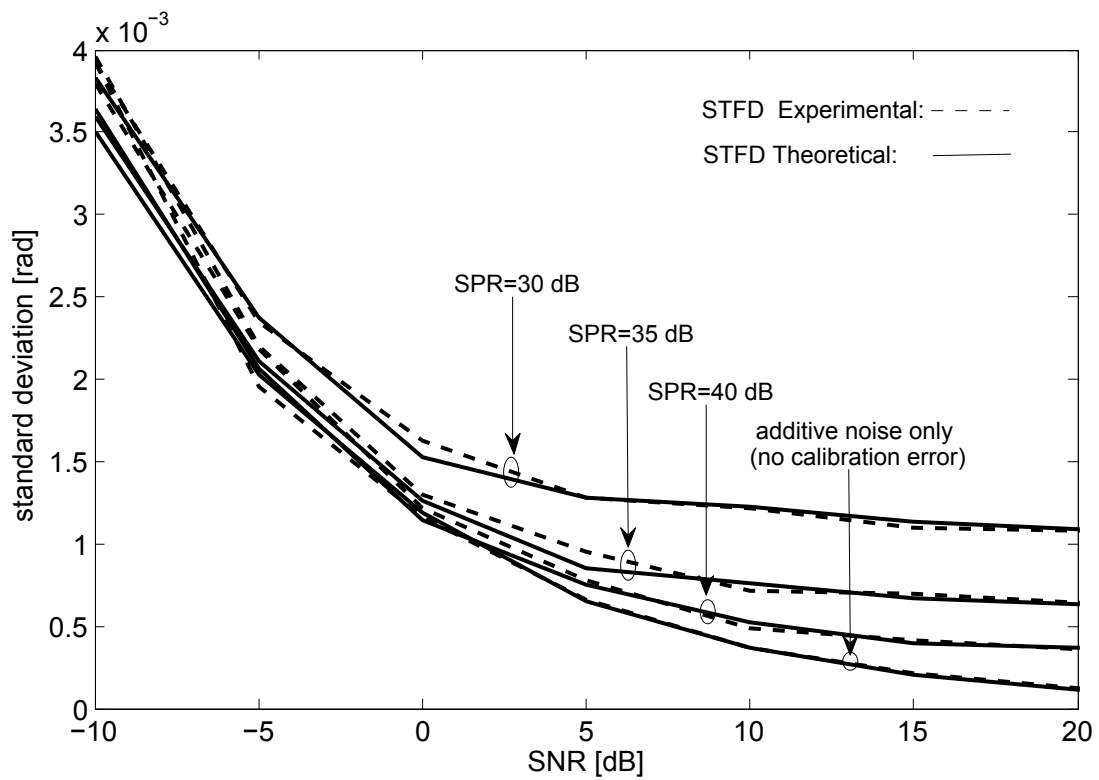


Figure 3 STFD-MUSIC: standard deviation versus SNR for the source at -10° .

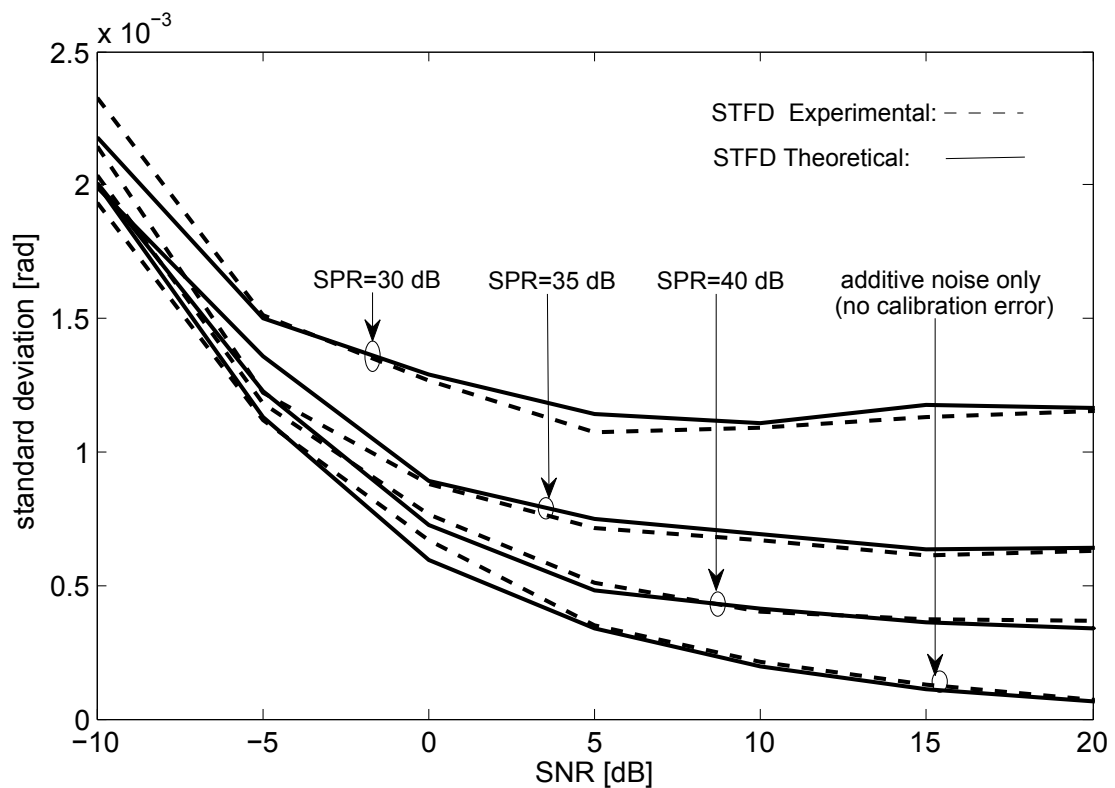


Figure 4 STFD-MUSIC: standard deviation versus SNR for the source at 10° .

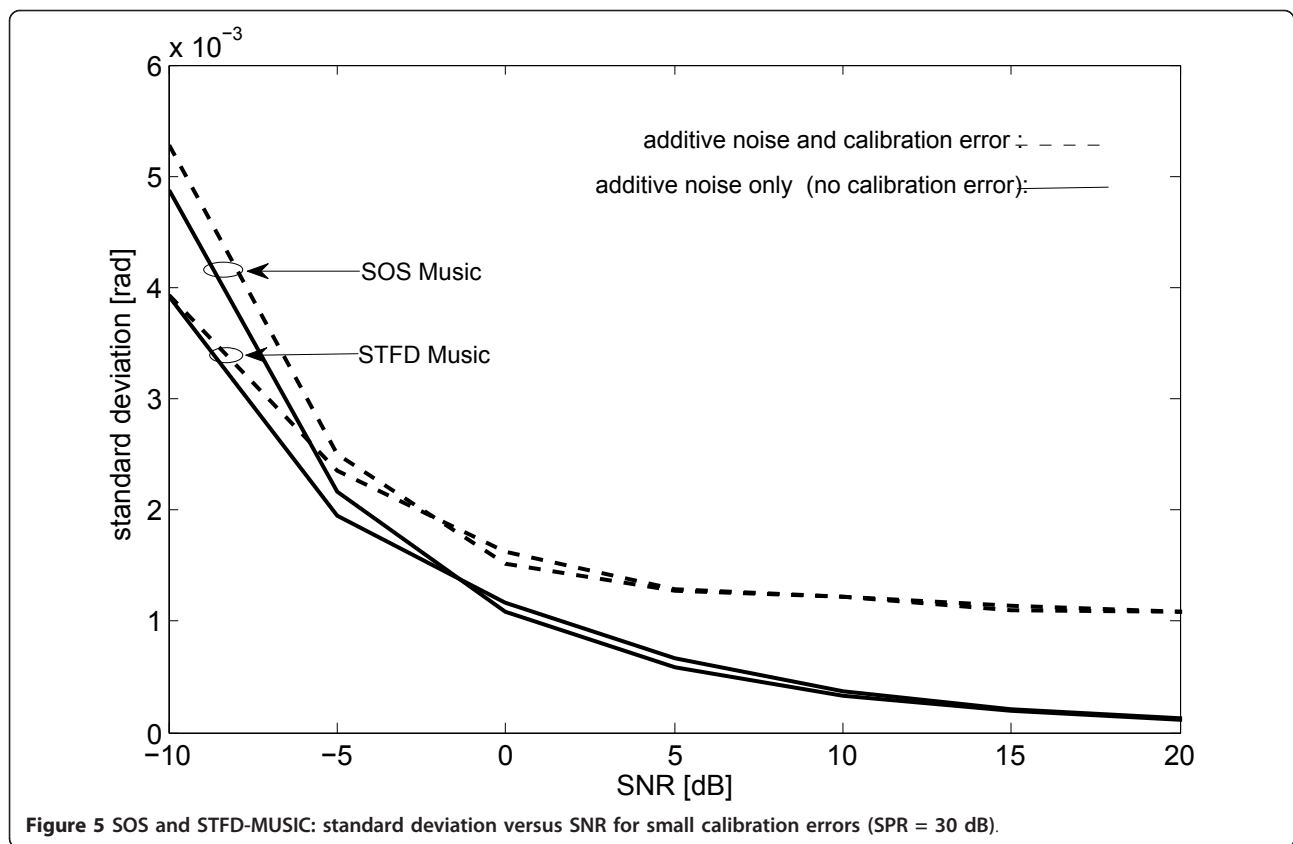


Figure 5 SOS and STFD-MUSIC: standard deviation versus SNR for small calibration errors (SPR = 30 dB).

dB) the STFD-based method significantly outperforms the SOS-based one. This difference, as shown in Figures 6 and 7, is further affected by the number of sensors which is a parameter of resolution and thus of performance. It is clear from these figures that more the number of sensors is large, better is the performance of the algorithms. Figure 6 shows the improvement carried out by the STFD-based method in presence of high additive noise (SNR = -10 dB). As expected from data model (4) and Equation (28), it is observed in this figure that the presence of small calibration errors (SPR = 30 dB) have no significant effect on both methods and all occurs as if there were only the presence of the additive noise. However, as shown in Figure 7, the presence of weak noise with the same calibration error value as in the previous figure, produce a significant performance degradation and the two methods become equivalent.

8 Conclusion

The STFD-based direction finding and covariance matrix-based methods have been considered and a unified analytical expression of the DOA error estimation have been derived for both methods. It is shown that in presence of calibration errors and large additive noise the STFD-based method has better performance than

the SOS-based method, and that in presence of weak noise both methods are equivalent in their performance. However, even for small sensor perturbations, degradation in performance remains significant because of the multiplicative character of the perturbation with the signal. Through the results obtained in this article, it clearly appears that the TF-MUSIC algorithm plays an important role in the performance improvement, however the implementation of this algorithm may be useless if the sensors are already at the outset too badly calibrated.

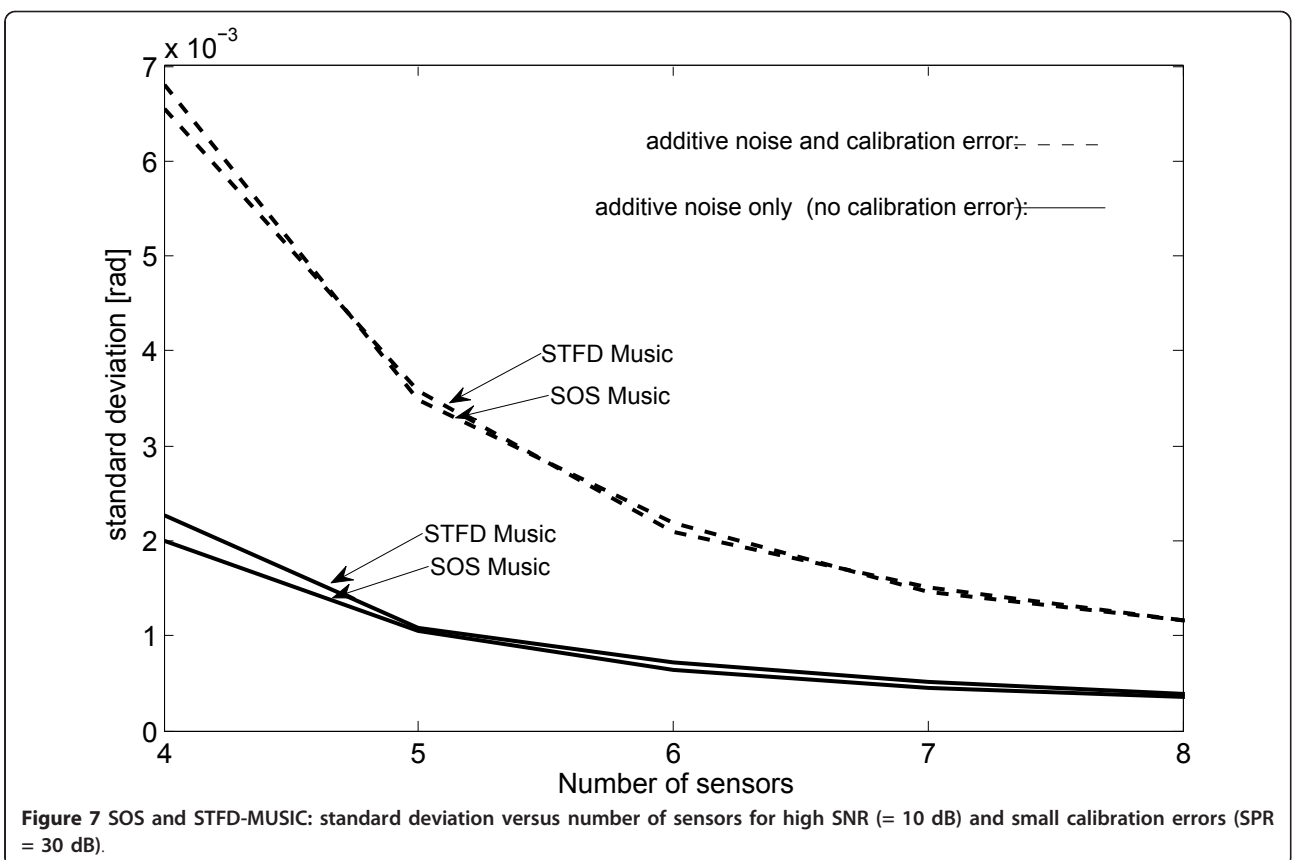
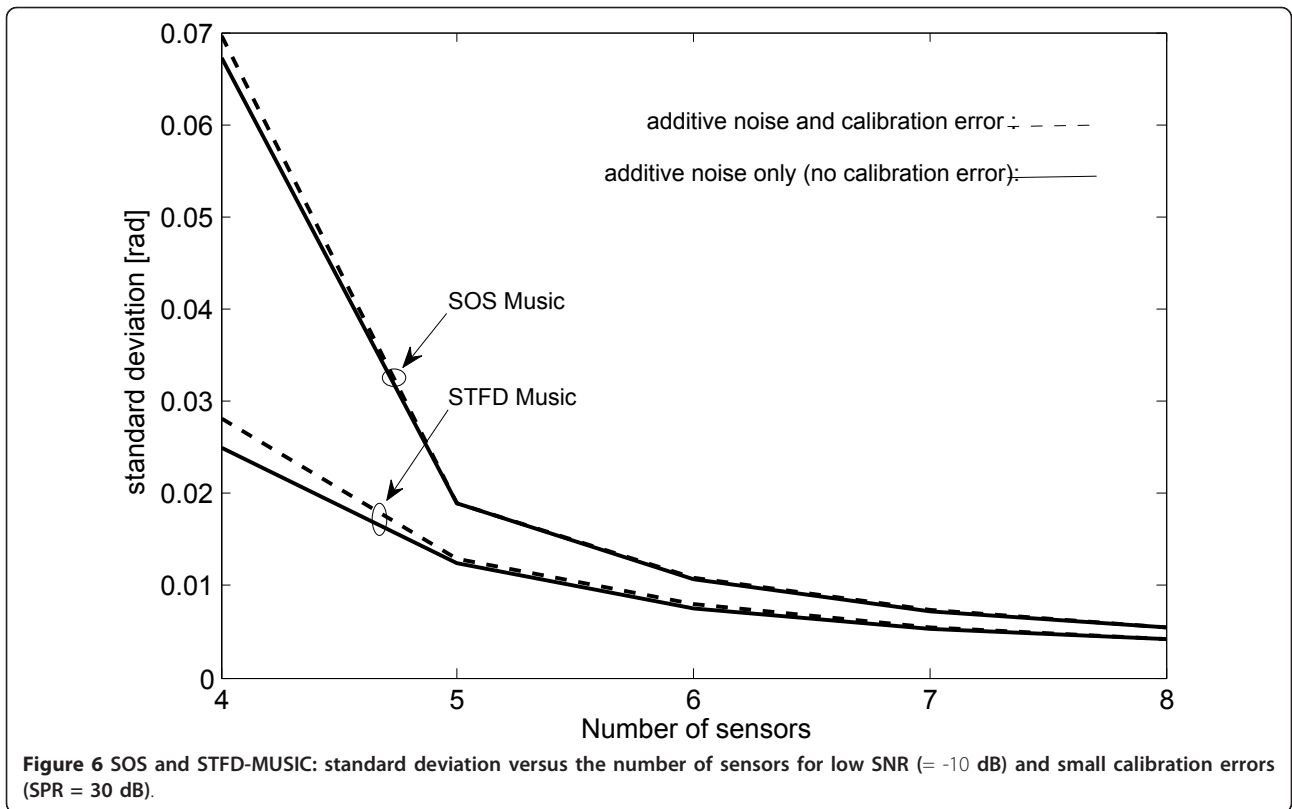
Appendix 1: Proof of Equation (11)

Herein, we derive the expression of (11) given by,

$$E[\Delta \mathbf{A} \mathbf{s}(t) \mathbf{s}^H(t) \Delta \mathbf{A}^H] \quad (1.1)$$

Before calculate this expression, we start by defining the matrix $\Delta \mathbf{A}$ and the vector $\mathbf{s}(t)$ as,

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta a_{1,1} & \Delta a_{1,2} & \cdots & \Delta a_{1,K} \\ \Delta a_{2,1} & \Delta a_{2,2} & \cdots & \Delta a_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta a_{L,1} & \Delta a_{L,2} & \cdots & \Delta a_{L,K} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$



and omitting the argument t of s_k for brevity, we get,

$$E[\Delta \mathbf{A} \mathbf{s}(t) \mathbf{s}^H(t) \Delta \mathbf{A}^H] = E \left\{ \left[\sum_{i=1}^K \Delta a_{1,i} s_i \sum_{i=1}^K \Delta a_{2,i} s_i \dots \sum_{i=1}^K \Delta a_{L,i} s_i \right]^T \times \left[\sum_{j=1}^K \Delta a_{1,j}^* s_j^* \sum_{j=1}^K \Delta a_{2,j}^* s_j^* \dots \sum_{j=1}^K \Delta a_{L,j}^* s_j^* \right] \right\} \quad (1.3)$$

Since the source signals s_i , $i = 1, \dots, K$, and the sensor errors $\Delta a_{i,j}$, $j = 1, \dots, L$, are assumed independent and zero mean with variances $\sigma_{s_i}^2$ and $\sigma_{\Delta a}^2$, respectively, the above expression is an $L \times L$ matrix whose elements are given by,

$$\begin{aligned} \sigma_{p,q} &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K E[\Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^* s_i s_j^*] \\ &= \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K E[\Delta a_{p,i} \Delta a_{q,j}^*] E[s_i s_j^*] \\ &= \sigma_{\Delta a}^2 \left(\sum_{j=1}^K \sigma_{s_j}^2 \right) \delta_{p,q} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Therefore, the matrix given by (1.1) is a diagonal matrix which can be expressed as,

$$E[\Delta \mathbf{A} \mathbf{s}(t) \mathbf{s}^H(t) \Delta \mathbf{A}^H] = \sigma_{\Delta a}^2 \left(\sum_{i=1}^K \sigma_{s_i}^2 \right) \mathbf{I} = \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) \mathbf{I} \quad (1.5)$$

Appendix 2: Proof of Equation (25)

Herein, we derive the expression of (25),

$$E[\bar{\mathbf{D}}_{\bar{y}\bar{y}}] = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} E[\mathbf{D}_{\bar{y}\bar{y}}(t_i, f_{k,i})] \quad (2.1)$$

Considering equation (16) for the k th source signal at the (t_i, f_k, i) points, and substituting it into (2.1) we have,

$$E[\bar{\mathbf{D}}_{\bar{y}\bar{y}}] = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} \{ E[\mathbf{a}_k d_{s_{s_k}}(t_i, f_{k,i}) \mathbf{a}_k^H] + E[\Delta \mathbf{a}_k d_{s_{s_k}}(t_i, f_{k,i}) \Delta \mathbf{a}_k^H] + \sigma_n^2 \mathbf{I} \} \quad (2.2)$$

Taking into account (22) we obtain,

$$\begin{aligned} E[\bar{\mathbf{D}}_{\bar{y}\bar{y}}] &= \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \left\{ \sum_{i=1}^{T_o} N \sigma_{s_k}^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H + N \sigma_{s_k}^2 E[\Delta \mathbf{a}_k \Delta \mathbf{a}_k^H] + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right\} \\ &= \frac{N}{K} \sum_{k=1}^K \{ \sigma_{s_k}^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H + \sigma_{s_k}^2 \sigma_{\Delta a}^2 \mathbf{I} \} + \sigma_n^2 \mathbf{I} \\ &= \frac{N}{K} \sum_{k=1}^K \{ \sigma_{s_k}^2 \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H \} + \frac{N}{K} \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) \mathbf{I} + \sigma_n^2 \mathbf{I} \\ &= \frac{N}{K} \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H(\theta) + \left[\frac{N}{K} \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) + \sigma_n^2 \right] \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.3)$$

where $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{s}(t) \mathbf{s}^H(t)] = \text{diag}[\sigma_{s_1}^2, \dots, \sigma_{s_K}^2]$ and $\text{Tr}(\mathbf{R}_{ss}) = \left(\sum_{i=1}^K \sigma_{s_i}^2 \right)$

Appendix 3: Proof of Equations (33) and (34)

According to (31) we have,

$$\mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}} = \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\Lambda}_s \tilde{\mathbf{U}}_s^H + \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\Lambda}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \quad (3.1)$$

Multiplying both sides of $\mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}}$ by the matrices $\tilde{\mathbf{U}}_p^H$ and $\tilde{\mathbf{U}}_s$ and using the orthogonality property between these matrices, it follows,

$$\tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}} \tilde{\mathbf{U}}_s = 0 \quad (3.2)$$

that we can write as,

$$(\mathbf{U}_p + \Delta \mathbf{U}_p)^H (\mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}} + \Delta \mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}}) (\mathbf{U}_s + \Delta \mathbf{U}_s) = 0 \quad (3.3)$$

Expanding the above equation and neglecting the terms higher than the first-order perturbation, and, on another hand, considering relation (27) and the orthogonality property between the signal subspace and the orthogonal subspace, it follows,

$$\tilde{\mathbf{U}}_p^H \Delta \mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}} \mathbf{U}_s + \Delta \mathbf{U}_p^H \mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}} \mathbf{U}_s = 0 \quad (3.4)$$

since the eigenvalue decomposition of the perturbation free matrix is given by $\mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}} = \mathbf{U}_s \Lambda_s \mathbf{U}_s^H$, and using the unitary property of \mathbf{U}_s (i.e., $\mathbf{U}_s^H \mathbf{U}_s = \mathbf{I}$), we get,

$$\Delta \mathbf{U}_p^H = -\mathbf{U}_p^H \Delta \mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}} \mathbf{U}_s [\mathbf{U}_s \Lambda_s]^\# \quad (3.5)$$

where $[\cdot]^\#$ defines the pseudo-inverse operator, hence $[\mathbf{U}_s \Lambda_s]^\#$ is given by,

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_s \Lambda_s]^\# &= [(\mathbf{U}_s \Lambda_s)^H (\mathbf{U}_s \Lambda_s)]^{-1} (\mathbf{U}_s \Lambda_s)^H \\ &= \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \end{aligned} \quad (3.6)$$

Substituting (3.6) in (3.5), we obtain,

$$\Delta \mathbf{U}_p = -\mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \Delta \mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}} \mathbf{U}_p \quad (3.7)$$

Using the same steps applied to derive the above equation, we obtain the expression of the signal subspace perturbation $\Delta \mathbf{U}_s$ versus the perturbation matrix $\Delta \mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}}$,

$$\Delta \mathbf{U}_s = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \Delta \mathbf{P}_{\bar{y}\bar{y}} \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \quad (3.8)$$

Appendix 4: Proof of Equation (40)

Herein, we derive the expression (40) of the estimate of the error $\Delta\theta_k$, $k = 1, \dots, K$, due to the sensor error and the additive noise. For this purpose, we use the extremum search method which consists of finding the zeros of the derivative of the objective function derived from the estimated orthogonal subspace,

$$F(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}(\theta) \quad (4.1)$$

A well known method is to expand under Taylor series the first partial derivative of the above function with respect to θ and to use a second-order approximation to extract $\Delta\theta_k$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\tilde{\theta}_k)}{\partial \theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} F(\theta_k)}{\partial \theta^{n+1}} (\Delta\theta_k)^n \\ &= \frac{\partial F(\theta_k)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F(\theta_k)}{\partial \theta^2} \Delta\theta_k + \dots + \frac{1}{i!} \frac{\partial^{i+1} F(\theta_k)}{\partial \theta^{i+1}} \Delta\theta_k^i + \dots, \end{aligned} \quad (4.2)$$

that we approximate by the two first terms,

$$\frac{\partial F(\tilde{\theta}_k)}{\partial \theta} \approx \frac{\partial F(\theta_k)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F(\theta_k)}{\partial \theta^2} \Delta\theta_k \quad (4.3)$$

Setting the above equation to zero leads to the following expression of $\Delta\theta_k$,

$$\Delta\theta_k \approx -\frac{\frac{\partial F(\theta_k)}{\partial \theta}}{\frac{\partial^2 F(\theta_k)}{\partial \theta^2}}, \quad k = 1, \dots, K \quad (4.4)$$

where,

$$\frac{\partial F(\theta_k)}{\partial \theta} = \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}(\theta_k) + \mathbf{a}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) \quad (4.5)$$

and,

$$\frac{\partial^2 F(\theta_k)}{\partial \theta^2} = \mathbf{a}^{(2)}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}(\theta_k) + 2\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) + \mathbf{a}(\theta_k)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}^{(2)}(\theta_k). \quad (4.6)$$

the superscripts (1) and (2) correspond to the first and the second-order derivatives of $\mathbf{a}(\theta)$ with respect to θ , respectively.

Substituting $\tilde{\mathbf{U}}_p = \mathbf{U}_p + \Delta\mathbf{U}_p$ in the above equations, and using the property of orthogonality between the subspaces spanned by $\mathbf{a}(\theta_k)$ and \mathbf{U}_p (i.e., $\mathbf{a}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p = 0$), and neglecting the derivatives and the perturbation terms of second-order, we obtain,

$$\frac{\partial F(\theta_k)}{\partial \theta_k} = 2\text{Re} [\mathbf{a}(\theta_k)^H \Delta\mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)] \quad (4.7)$$

and

$$\frac{\partial^2 F(\theta_k)}{\partial \theta_k^2} = 2\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) + 2\text{Re} [\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p \Delta\mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)] \quad (4.8)$$

Assuming that $\Delta\mathbf{U}_p = \varepsilon \mathbf{U}_p$, where $\varepsilon \ll 1$, the above equation can be written as,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(\theta_k)}{\partial \theta_k^2} &= 2(1 + \varepsilon) \|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2 \\ &\approx 2 \|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituting (4.7) and (4.9) into (4.4), it results the expression of the perturbation in the k th estimated direction of arrival as follows,

$$\Delta\theta_k = \frac{\text{Re} [-\mathbf{a}(\theta_k)^H \Delta\mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)]}{\|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2} \quad (4.10)$$

Author details

¹Electrical Engineering Department, Ecole Nationale Polytechnique, Algiers, Algeria ²Télécom ParisTech, TSI, 75634, Paris Cedex 13, France

Competing interests

The authors declare that they have no competing interests.

Received: 17 October 2011 Accepted: 30 April 2012

Published: 30 April 2012

References

1. F Li, H Liu, RJ Vaccaro, Performance analysis for DOA estimation algorithms: unification, simplification, and observations. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **29**(4), 1170–1183 (1993)
2. P Stoica, A Nehorai, MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound. *IEEE Trans. Acoustics Speech Signal Processing.* **37**(5), 720–741 (1989)
3. A Belouchrani, M Amin, Time-frequency MUSIC. *IEEE Signal Process. Lett.* **6**, 109–110 (1999)
4. A Belouchrani, M Amin, A new approach for blind source separation using time-frequency distribution, in *Proceeding SPIE Conference on Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing*, vol. 2846. Denver, Colorado, pp. 193–203 (Oct 1996)
5. B Belouchrani, M Amin, Blind source separation based on time-frequency signal representations. *IEEE Trans. Signal Process.* **46**(11), 2888–2898 (1998)
6. B Boashash, *Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference*, (Elsevier Science Publ, San Diego, 2003)
7. Z Yimin, M Weifeng, M Amin, Subspace analysis of spatial time-frequency distribution matrices. *IEEE Trans. Signal Process.* **49**(4), 747–759 (2001)
8. F Li, RJ Vaccaro, Sensitivity analysis of DOA estimation algorithms to sensor errors. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **28**(3), 708–717 (1992)
9. AL Swindlehurst, T Kailath, A performance analysis of subspace-based methods in the presence of model errors, Part I: the MUSIC algorithm. *IEEE Trans. Signal Process.* **40**(7), 1758–1774 (1992)
10. AL Swindlehurst, A maximum a posteriori approach to beamforming in the presence of calibration errors, in *Proc. 8th IEEE Workshop Stat. Signal Array Process*, Corfu, Greece, pp. 82–85 (June 1996)
11. J Yang, AL Swindlehurst, The effect of array calibration errors on DF-based signal copy performance. *IEEE Trans. Signal Process.* **43**(11), 2724–2732 (1995)
12. C Vaidyanathan, KM Buckley, Performance analysis of the MVDR spatial spectrum estimator. *IEEE Trans. Signal Process.* **43**(6), 1427–1437 (1995)

doi:10.1186/1687-6180-2012-94

Cite this article as: Khodja et al.: Performance analysis for time-frequency MUSIC algorithm in presence of both additive noise and array calibration errors. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2012 2012:94.

**PERFORMANCE ANALYSIS OF TIME-FREQUENCY ESPRIT ALGORITHM
IN PRESENCE OF MODEL ERRORS.**

Mohamed Khodja and Adel Belouchrani

Electrical Engineering Department, Ecole Nationale Polytechnique, Algier, Algeria

ABSTRACT

Estimation signal parameter via rotational invariance technique (ESPRIT) is a subspace based method that exploit the spatial diversity configuration of the antenna array to estimate the direction of arrival of signal sources. For the stationary signals, conventional ESPRIT achieve excellent performance by using the second order statistic (SOS) of the antenna response. However, when the sources are non stationary the performance is degraded and is made worse by the presence of modelling errors. In this paper a time-frequency ESPRIT (TF-ESPRIT) algorithm based on Spatial-Time Frequency Distributions (STFDs) is adopted to deal with such a situation. The performance of this algorithm is analysed and compared to that of the conventional ESPRIT, and the sensitivity to model errors of both these algorithms is examined.

1. INTRODUCTION

Over the past three decades, a particular interest is given to antenna array processing for its wide range of applications in various domains such as radar, sonar, radio-communication, etc. One of the principal goals of the antenna processing is to estimate the directions of arrival (DOA) of signals sources by exploiting the time delay induced by spacing between the elements of the array. Extensive research has been accomplished in this domain which remains so vast that it would be pretentious to draw up an exhaustive state of the art on the used estimation methods. However, it is worthwhile to notice that these methods are characterized not only by their precision and resolution, but also by the required computational cost that is often viewed as the main determining factor in deciding which method option to use.

Subspace based methods such MUSIC (multiple signal classification) and ESPRIT (estimation signal parameter via rotational invariance technique) are known as the most popular high resolution algorithms used in DOA estimation applications. For stationary receiving signals, these methods use the eigen-subspace decomposition of the covariance data matrix, and they achieve high performance with reasonable computational cost. Unfortunately, in practical situations the receiving signals are often non stationary and the aforementioned methods lose of

their performance. It becomes necessary to adopt a convenient technique to deal with such signals whose spectral and statistical properties evolve over time. To this end, an interesting time-frequency tool has been developed to cope with the non-stationary nature of the signals received by an array of antennas. It is the spatial time-frequency distribution (STFD) which is considered as a generalisation of the time-frequency distribution to a vector signal. The STFD, introduced in [1], is based on the use of the quadratic time-frequency distributions of the received signals at the array antenna, and thanks to this method, the sub-space eigen-decomposition traditionally applied to the covariance matrix, is extended to the time-frequency techniques. This method is used in many array applications to solve DOA estimation and source separation problems [2, 3].

In this paper we propose an application of the STFD method to the direction finding problem where a time-frequency ESPRIT (TF-ESPRIT) algorithm is used and illustrated through simulations on two chirp signals. A performance analysis of the TF-ESPRIT algorithm is carried out in presence of both noise and model errors. The modelling errors are a sempiternal problem which is inherent to the array antenna processing because of the mismatch between the actual model and the nominal model. This effect is due to various factors such as mutual coupling between sensors, imprecisely sensor position, gain and phase errors, quantization effects, etc.

In [4] a sensitivity analysis of DOA estimation algorithms to sensor errors has been addressed and a unified statistical performance analysis was applied to conventional subspace based algorithms. In previous studies, we have discussed the non-stationary and the modelling errors issues, and have carried out some performance analysis where MUSIC algorithm and his time-frequency variant (i.e TF-MUSIC) have been applied to direction finding. So, in [5] we have analysed the DOA estimation performance of the MUSIC algorithm in presence of noise and model calibration errors, while in further work we have presented a more realistic study where both non-stationarity of the signals and array perturbation model have been considered [6].

Similar studies are conducted in the present paper but for the time-frequency ESPRIT algorithm, and this is intended as a contribution to the DOA estimation field es-

pecially in situations where the signals are non stationary and the data models are subject to perturbations. The goal is being to assess the performance of the TF-ESPRIT algorithm in these non ideal situations and to carry out a comparative performance analysis versus the conventional ESPRIT algorithm.

Notations:

Boldface lower-case letters denote vectors (e.g. \mathbf{a}), and boldface upper-case letters denote matrices (e.g. \mathbf{A}). The major symbols and notations used in this paper are listed below.

K	number of signal sources
L	number of sensors
M	number of snapshots
θ_k	k th direction of arrival
$\mathbf{a}(\theta_k)$	k th steering vector
$\mathbf{A}(\theta)$	array response matrix
\mathbf{I}	$L \times L$ identity matrix
$(\cdot)^*$	complex conjugate of (\cdot)
$(\cdot)^H$	complex conjugate transpose of (\cdot)
$Tr(\cdot)$	trace of (\cdot)
$\delta_{i,k}$	Kronecker delta function.

2. PERTURBED MODEL FORMULATION

We consider K narrow-band far-field signals received by a linear array of L isotropic antennas uniformly spaced by a distance of one half wavelength ($d = \lambda/2$). The data vector at the output of the sensors at time t is given by,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

where $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_L(t)]^T$ is the output array vector, with $x_i(t)$, $i = 1, \dots, L$, the output of the i th sensor. The matrix $\mathbf{A}(\theta)$ is a set of K column vectors,

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \dots \mathbf{a}(\theta_K)] \quad (2)$$

Each steering vector $\mathbf{a}(\theta_j)$, $j = 1, \dots, K$, is an array response to a signal $s_j(t)$ from direction θ_j and is given by,

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1 \ e^{-j\varphi_i} \ e^{-j2\varphi_i} \ \dots \ e^{-j(L-1)\varphi_i}]^T \quad (3)$$

$$\text{where } \varphi_i = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta_i \quad (4)$$

The vector $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) \dots n_L(t)]^T$ represents the additive noise which is assumed to be a zero mean circular white complex stationary process with covariance matrix,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{nn}} = E[n(t)n^H(t)] = \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (5)$$

and $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \dots s_K(t)]^T$ is the source signal vector. The source signals $s_i(t)$, $i = 1, \dots, K$, are assumed mutually uncorrelated and frequency modulated (FM) signals of the form,

$$s_i(t) = S_i e^{j\omega_i(t)} \quad (6)$$

where S_i and $\omega_i(t)$ are the amplitude and phase of the i th source signal. The phase $\omega_i(t)$ is time varying, while the amplitude S_i is assumed to be a random variable with zero mean and variance $\sigma_{s_i}^2$. The covariance matrix is then,

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ss}} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)] = \text{diag}(\sigma_{s_1}^2, \dots, \sigma_{s_K}^2) \quad (7)$$

In practical situations, the model is often subject to errors in its structure or formulation, resulting to a significant degradation in DOA estimation performance. Hence, the nominal model given by (1) must be reviewed and adapted to the perturbed situation. The most known sources of modelling errors are mutual coupling between sensors, gain and phase uncertainties of sensors, finite sample effects of noise and imprecise antenna position. These errors lead to mismatch between the desired and measured directions resulting to a vector error $\{\Delta\mathbf{a}_i\}_{i=1}^K$ assumed herein as an additive random variable to the known nominal steering vector $\{\mathbf{a}(\theta_i)\}_{i=1}^K$,

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) + \Delta\mathbf{a} \quad (8)$$

The errors $\{\Delta\mathbf{a}_i\}_{i=1}^K$ will represent all perturbations mentioned above and are assumed with zero mean and second-order moments given by ,

$$E[\Delta\mathbf{a}(\theta_i)\Delta\mathbf{a}^H(\theta_j)] = \sigma_{\Delta a_{i,j}} I \delta_{i,j} \quad (9)$$

$$E[\Delta\mathbf{a}(\theta_i)\Delta\mathbf{a}^T(\theta_j)] = 0 \quad (10)$$

where $\sigma_{\Delta a_{i,j}} I$ is the error covariance matrix and $\delta_{i,j}$ is the Kronecker delta. According to equations (1) and (8), the perturbed data model is,

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (11)$$

where $\tilde{\mathbf{A}}(\theta)$ is the perturbed array manifold matrix,

$$\tilde{\mathbf{A}}(\theta) = \mathbf{A}(\theta) + \Delta\mathbf{A} \quad (12)$$

This model is commonly used in DOA error situation [4, 7] and can be expressed under the form,

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{p}(t) \quad (13)$$

where $\hat{\mathbf{x}}(t)$ is the perturbation free data vector, and $\mathbf{p}(t)$ is the perturbation vector including the modelling errors and the additive noise,

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) \quad (14)$$

$$\mathbf{p}(t) = \Delta\mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (15)$$

The covariance matrix of the perturbed data is defined as,

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = E[\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^H(t)] \quad (16)$$

In [6] we have shown that this expression is derived as follows,

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}\mathbf{A}^H(\theta) + [\sigma_{\Delta\mathbf{a}}^2 Tr(\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}) + \sigma_n^2] \mathbf{I} \quad (17)$$

This covariance matrix is well suitable to estimate the DOA of stationary signal sources, but in the case where these signals are non-stationary, the use of the covariance matrix loses of its efficiency because the variation over the time of the spectral properties of the signal sources. In such a situation, the time frequency techniques are generally used instead of the second order statistics based methods, and the spatial time frequency distributions (STFDs) is considered as a powerful tool which is successfully used in nonstationary signal analysis. These distributions, introduced by Belouchrani et al. for the blind source separation problems [1], are a generalisation of the TFDs applications to array processing. They have been shown to give better performance compared to DOA estimation approaches based on the covariance matrix. The STFD matrix of a data vector $\mathbf{x}(t)$ is given by,

$$\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u, \tau) \mathbf{x}(u + \frac{\tau}{2}) \mathbf{x}^H(u - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} du d\tau, \quad (18)$$

where $g(t, \tau)$ is the Doppler-lag kernel function which is one ($g(t, \tau) = 1$) for Wigner-Ville distribution (PWVD). The discrete form of the spatial pseudo Wigner-Ville distribution (SPWVD) matrix using a rectangular window of odd length N applied to the perturbed data vector $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ is expressed as,

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{xx}}}(t, f) = \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \tilde{\mathbf{x}}(t+\tau) \tilde{\mathbf{x}}^H(t-\tau) e^{-j4\pi f\tau} \quad (19)$$

In the above equation, we use the same notation for both continuous and discrete versions of the time, frequency and lag parameters. It will be interesting to use the expression (19) under an eigen-decomposition form in similar way to that used for the covariance matrix in conventional DOA estimation methods. To this end we use an averaging operation which consists of averaging the STFD matrix $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{xx}}}(t, f)$ at (t_i, f_i) points over the signal sources and over a number of T_o selected tf-points ($T_o = M - N + 1$), where M is the number of snapshots, i.e.,

$$\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{xx}}} = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{xx}}}(t_i, f_{k,i}) \quad (20)$$

whose expectation is given by,

$$E[\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{xx}}}] = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{xx}}}(t_i, f_{k,i})] \quad (21)$$

where $f_{k,i}$ is the instantaneous frequency (IF) of the k th signal at the i th time sample. In [6] we have shown that the expectation of the averaged STFD can be expressed as follows,

$$\hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{xx}}} = E[\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{xx}}}] = \frac{N}{K} \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H(\theta) + \left[\frac{N}{K} \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}) + \sigma_n^2 \right] \mathbf{I} \quad (22)$$

3. UNIFIED SUBSPACE DECOMPOSITION

Expressions of $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{xx}}}$ and $\hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{xx}}}$ given by (17) and (22) respectively, are a sum of three terms corresponding to the perturbation free signal, the modelling error and the additive noise. These expressions can be written under a unified form as follows,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{xx}}} = \alpha \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{xx}}} + \sigma_p^2 \mathbf{I} \quad (23)$$

where,

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{for covariance based method,} \\ \frac{N}{K}, & \text{for TF based method} \end{cases} \quad (24)$$

$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{xx}}}$ is the free perturbation covariance matrix,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{xx}}} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\mathbf{ss}} \mathbf{A}^H(\theta) \quad (25)$$

and σ_p^2 represents the perturbation power,

$$\sigma_p^2 = \alpha \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{ss}}) + \sigma_n^2 \quad (26)$$

According to (17) and (22), $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{xx}}}$ is a positive definite matrix and can be expressed under an eigen-decomposition form as follows,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{xx}}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}^{sos} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{sos} (\tilde{\mathbf{U}}^{sos})^H, & \text{for covariance based method;} \\ \tilde{\mathbf{U}}^{tf} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{tf} (\tilde{\mathbf{U}}^{tf})^H, & \text{for TF based method.} \end{cases} \quad (27)$$

where the superscript "sos" stands for second order statistics associated to the covariance matrix based method, and the superscript "tf" stands for time-frequency associated to the STFD based method.

Expression (27) can be written under the following unified form,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{xx}}} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{U}}^H = \sum_{i=1}^L \lambda_i \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^H \quad (28)$$

where $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}[\lambda_i, i = 1, \dots, L]$ is the matrix of the eigenvalues of $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{xx}}}$, and $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}_{i=1}^L$ are the corresponding eigenvectors.

The matrix $\tilde{\mathbf{U}}$ can be arranged as $\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{\mathbf{U}}_s \quad \tilde{\mathbf{U}}_p]$, where $\tilde{\mathbf{U}}_s = [\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_K]$ forms the signal subspace, and $\tilde{\mathbf{U}}_p = [\tilde{\mathbf{u}}_{K+1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_L]$ forms the perturbed subspace known as the orthogonal subspace. The equation (28) can then be rewritten as follows,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{xx}}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_s & \tilde{\mathbf{U}}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{\Lambda}}_s & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_s^H \\ \tilde{\mathbf{U}}_p^H \end{pmatrix} \quad (29) \\ = \tilde{\mathbf{U}}_s \tilde{\mathbf{\Lambda}}_s \tilde{\mathbf{U}}_s^H + \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{\Lambda}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H$$

where $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_s = \text{diag}[\lambda_i, i = 1, \dots, K]$ is the signal eigenvalue matrix, and $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_p = \text{diag}[\lambda_i, i = K + 1, \dots, L]$ the perturbation eigenvalue matrix.

4. DOA ERROR ESTIMATION FOR THE SOS-ESPRIT AND TF-ESPRIT ALGORITHMS

In ESPRIT algorithm the array of L elements is divided into two identical sub arrays of $L - 1$ elements as depicted in figure 1. Using the free error model given by (1), the output signals at the two sub-arrays are respectively,

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{A}_1(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (30)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{A}_2(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (31)$$

The sub-matrices $\mathbf{A}_1(\theta)$ and $\mathbf{A}_2(\theta)$ are obtained by deleting the last and first rows from the manifold matrix $\mathbf{A}(\theta)$ respectively, i.e,

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\theta) \\ \text{last row} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first row} \\ \mathbf{A}_2(\theta) \end{bmatrix} \quad (32)$$

According to the structure of the steering vectors defined by (3), the matrices $\mathbf{A}_1(\theta)$ and $\mathbf{A}_2(\theta)$ are related as,

$$\mathbf{A}_2(\theta) = \mathbf{A}_1(\theta)\Phi \quad (33)$$

where Φ is a diagonal matrix,

$$\Phi = \text{diag}(e^{-j\varphi_1}, \dots, e^{-j\varphi_K}) \quad (34)$$

In absence of perturbations (i.e noise and model errors), the steering vectors $\mathbf{a}(\theta_i)$ span the signal sub-space since in this case the signal at the output of the array is a linear combination of $\mathbf{a}(\theta_i)$,

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) = \sum_{i=1}^K s_i(t)\mathbf{a}(\theta_i) \quad (35)$$

Therefore the vectors $\{\mathbf{a}(\theta_i)\}_{i=1}^K$ are linearly dependent to the eigenvectors \mathbf{u}_i of the signal sub-space \mathbf{U}_s , i.e,

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^K \tau_{i,j}\mathbf{a}(\theta_i), \quad \tau_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad i, j = 1, \dots, K \quad (36)$$

The matrix \mathbf{U}_s is then,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K \tau_{i,1}\mathbf{a}(\theta_i) & \sum_{i=1}^K \tau_{i,2}\mathbf{a}(\theta_i) & \dots & \sum_{i=1}^K \tau_{i,K}\mathbf{a}(\theta_i) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}(\theta)\mathbf{T} \end{aligned} \quad (37)$$

where $\mathbf{T} = [\tau_{i,j}]$, $i, j = 1, \dots, K$.

According to (37) we have,

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{s1} \\ \text{last row of } \mathbf{A}\mathbf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first row of } \mathbf{A}\mathbf{T} \\ \mathbf{U}_{s2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

where,

$$\mathbf{U}_{s1} = \mathbf{A}_1(\theta)\mathbf{T} \quad \text{and} \quad \mathbf{U}_{s2} = \mathbf{A}_2(\theta)\mathbf{T} \quad (39)$$

It result from (33) and (39),

$$\mathbf{U}_{s2} = \mathbf{U}_{s1}\Psi, \quad \text{where} \quad \Psi = \mathbf{T}^{-1}\Phi\mathbf{T} \quad (40)$$

As shown above, the ESPRIT approach is based on the exploitation of the subspace signal. The matrices $\tilde{\mathbf{U}}_s$ can then be expressed as,

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \mathbf{U}_s + \Delta\mathbf{U}_s \quad (41)$$

where $\Delta\mathbf{U}_s$ represent the perturbation of the signal sub-space. According to (40), the above expression allows to write,

$$(\mathbf{U}_{s2} + \Delta\mathbf{U}_{s2}) = (\mathbf{U}_{s1} + \Delta\mathbf{U}_{s1})(\Psi + \Delta\Psi) \quad (42)$$

Expand the above equation and neglect the second order term, it follows,

$$\Delta\mathbf{U}_{s2} = \mathbf{U}_{s1}\Delta\Psi + \Delta\mathbf{U}_{s1}\Psi \quad (43)$$

Thus,

$$\Delta\Psi = \mathbf{U}_{s1}^+ (\Delta\mathbf{U}_{s2} - \Delta\mathbf{U}_{s1}\Psi) \quad (44)$$

Where $[\cdot]^+$ defines the pseudo-inverse operator, i.e:

$$\mathbf{U}_{s1}^+ = [\mathbf{U}_{s1}^H \mathbf{U}_{s1}]^{-1} \mathbf{U}_{s1}^H \quad (45)$$

The DOAs errors $\{\Delta\theta_k\}_{k=1}^K$ are given by [8],

$$\Delta\theta_k = \text{Im} [\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}\boldsymbol{\beta}_k] \quad (46)$$

where,

$$\boldsymbol{\alpha}_k = C_k \mathbf{v}_k \mathbf{U}_{s1}^+ (\mathbf{U}_{p2} \lambda_k^{-1} - \mathbf{U}_{p1}) \mathbf{U}_p^H \quad (47)$$

$$\boldsymbol{\beta}_k = \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{u}_k \quad (48)$$

The vectors \mathbf{v}_k and \mathbf{u}_k are the left and right orthonormal eigenvectors of Ψ associated with the respective eigenvalues $\{\lambda_k\}_{k=1}^K$. The coefficients $\{C_k\}_{k=1}^K$ are given by $C_k = \lambda/2\pi d \cos\theta_k$, while \mathbf{U}_{p1} and \mathbf{U}_{p2} are the sub matrices of the perturbation sub-space matrix \mathbf{U}_p defined as,

$$\mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{p1} \\ \text{last row of } \mathbf{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first row of } \mathbf{U}_p \\ \mathbf{U}_{p2} \end{bmatrix} \quad (49)$$

The matrix $\Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ represents the perturbation resulting from the modelling errors and the additive noise [5],

$$\Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}} = \begin{cases} \Delta\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}, & \text{for covariance based method,} \\ \Delta\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}, & \text{for STFD based method} \end{cases} \quad (50)$$

where,

$$\Delta\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{M} [\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t)^H - \hat{\mathbf{x}}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)^H] \quad (51)$$

and

$$\Delta\mathbf{D}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} [\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t_i, f_{k,i}) - \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}(t_i, f_{k,i})] \quad (52)$$

The variance of the k th DOA error estimate $\Delta\theta_k$ is given by,

$$\text{var}(\Delta\theta_k) = \text{var}[\text{Im}(\boldsymbol{\alpha}_k^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}\boldsymbol{\beta}_k)] \quad (53)$$

Taking into account the notations given in the previous section, the results (46) and (53) are valid for both the conventional and time-frequency ESPRIT.

$$\text{var}[\Delta\theta_k] = \begin{cases} \text{var}[\Delta\theta_k^{\text{sos}}], & \text{for SOS-ESPRIT algorithm} \\ \text{var}[\Delta\theta_k^{\text{tf}}], & \text{for TF-ESPRIT algorithm} \end{cases}$$

$$\text{where } \text{var}[\Delta\theta_k^{\text{sos}}] = \text{var}[\text{Im}((\alpha_k^{\text{sos}})^H \Delta \mathbf{R}_{\text{xx}}^H \beta_k^{\text{sos}})] \quad (54)$$

$$\text{and } \text{var}[\Delta\theta_k^{\text{tf}}] = \text{var}[\text{Im}((\alpha_k^{\text{tf}})^H \Delta \mathbf{D}_{\text{xx}}^H \beta_k^{\text{tf}})] \quad (55)$$

with α_k^{sos} , β_k^{sos} , α_k^{tf} and β_k^{tf} , the values of α_k and β_k of equations (47) and (48) obtained when using \mathbf{R}_{xx} and \mathbf{D}_{xx} , respectively.

5. PERFORMANCE EVALUATION

In this section we present some computer simulation to show the performance improvement achieved by the time frequency ESPRIT algorithm over the conventional ESPRIT in presence of modelling errors and additive noise. The performance assessment use the Root-Mean-Square Errors (RMSE) versus signal to noise ratios (SNR) for different signal to perturbation ratio (SPR) values corresponding to the modelling errors.

We consider two narrowband chirp signals impinging on a linear multi-sensor array of eight elements equispaced by half-wavelength. These signal sources are modelled as $s_1(t) = S_1 \exp[j((w_{12} - w_{11})(t^2/2) + w_{11}t)]$ and $s_2(t) = S_2 \exp[j((w_{22} - w_{21})(t^2/2) + w_{21}t)]$ with frequencies varying from $w_{11} = 0$ to $w_{12} = \pi$ and from $w_{21} = \pi$ to $w_{22} = 0$, respectively. The incident angles are $\theta_1 = -10^\circ$ and $\theta_2 = 10^\circ$. The length of these signals are 256 samples from which a time frequency matrix of 256×256 is formed. The STFD matrices are averaged over a total of $T_0 \times K = 240 \times 2 = 480$ t-f points. The perturbations due to the modelling errors and additive noise are assumed uncorrelated Gaussian variables with zero mean and normalized variances. In this simulation 300 Monte Carlo trials are used to estimate the DOAs provided by both conventional and time-frequency ESPRIT algorithms and to carry out the statistical evaluation of their performance.

Figure 2 shows the pseudo Wigner-Ville distribution of the signals under interest in absence of noise, where the artefacts due to cross terms in the distribution are clearly apparent. This effect, as shown in figure 3, is worsened by the presence of the noise and the modelling errors which embed the signal signatures in an extensive cloudy disturbance. In this unfavourable context, figure 4 shows the improvement achieved by the TF-ESPRIT algorithm in presence of noise alone on the one hand, and in presence of both the modelling errors and the additive noise on the other hand. It is observed in this figure that for low SNRs (≤ 0 dB) the TF-ESPRIT algorithm outperforms the SOS-ESPRIT, whereas for high SNRs values ($\text{SNR} \geq 0$ dB), no significant difference between the two algorithms is noticed. Figure 5 shows that for high SNRs values ($\text{SNR} \geq 0$

dB) both algorithms are equally sensitive to modelling errors, but the sensitivity to these effects is more pronounced for TF-ESPRIT and performs better than SOS-ESPRIT at lower SNR levels. The sensitivity of both algorithms to number of sensors is shown in figure 6 where it can be seen that for lower SNRs, the gap between SOS-ESPRIT and TF-ESPRIT algorithms decreases with the increase of array elements number, and that the TF-ESPRIT keeps its dominance over the conventional ESPRIT algorithm for low SNRs values. Whereas, for higher SNRs both algorithms remain equally sensitive to the array size.

6. CONCLUSION

In this paper a unified formulation of subspace based methods estimation is developed and applied to time-frequency ESPRIT algorithm for estimating the DOA of non stationary signals in a context of perturbed model parameters. This algorithm, based on the eigen-decomposition of the spatial time frequency distribution (STFD), is compared to the conventional ESPRIT algorithm. For low SNRs, significant improvement is achieved by the TF-ESPRIT algorithm. However, the computational complexity of this technique prevents its widespread use especially for the real time applications. In return, the implementation of this algorithm is successfully used in non real time application like seismology data processing in mineral exploration, diagnostic data processing in medicine, etc.

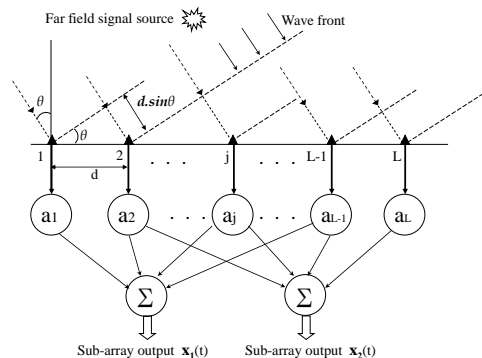


Fig. 1. The ESPRIT array structure

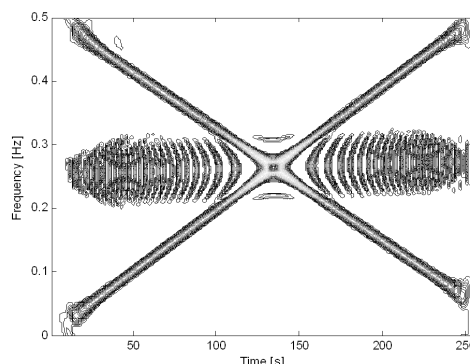


Fig. 2. The time-frequency representation of the pseudo Wigner-Ville distribution (TFRPVW) of two FM signals

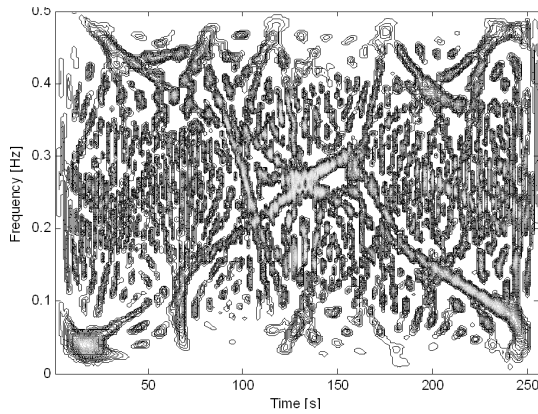


Fig. 3. TFRPWV of two corrupted FM signals with SNR=-5dB

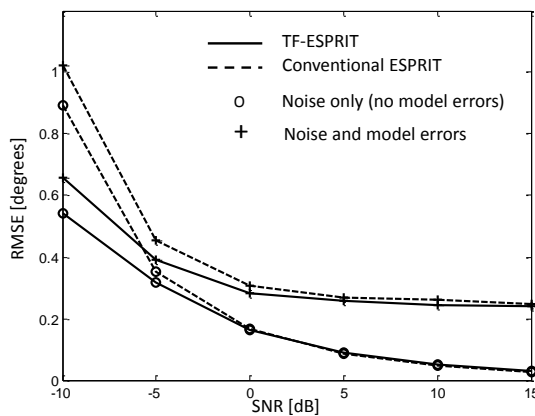


Fig. 4. SOS and TF-ESPRIT: RMSEs versus SNR in presence of model errors (SPR=20 dB)

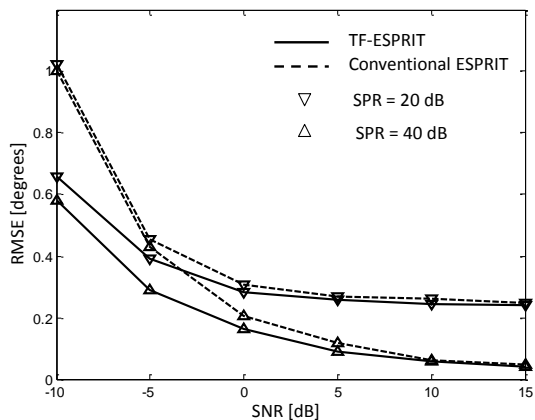


Fig. 5. SOS and TF-ESPRIT: RMSEs versus SNR in presence of model errors (SPR=20 dB and 40dB)

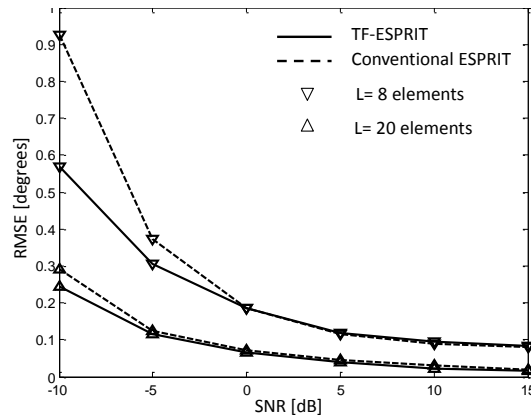


Fig. 6. SOS and TF-ESPRIT: RMSEs versus the number of sensors in presence of model errors (SPR=30 dB)

7. REFERENCES

[1] Belouchrani A, Amin M, "A New Approach for Blind Source Separation using Time-Frequency Distribution," *Proceeding SPIE Conference on Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing, Denver, Colorado, 1996.*

[2] Belouchrani A, and Amin M. G , "Blind source separation based on time-frequency signal representations," *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 46, no. 11, pp. 2888-2897, Nov. 1998.

[3] Belouchrani A, and Amin M. G , "Time-frequency MUSIC," *IEEE Signal Processing Letters.*, vol. 6, no. 5, pp. 109-110, May 1999.

[4] Li F, Vaccaro RJ, "Sensitivity Analysis of DOA Estimation Algorithms to Sensor Errors," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 1992, 28:3.

[5] Khodja M, Belouchrani A, "Performance Analysis for the MUSIC Algorithm in Presence of Both Additive noise and Array Calibration Error," *Proc. 5me syminaire sur les systemes de detection DAT'2011. Alger, Fev. 2011 .*

[6] Khodja M, Belouchrani A, and Abed-Meraim K, "Performance analysis for time-frequency MUSIC algorithm in presence of both additive noise and array calibration errors," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2012, 94(2012), pp. 1-11 .

[7] Swindlehurst A.L, Kailath T, "A Performance Analysis of Subspace-Based Methods in the Presence of Model Errors, Part I: The MUSIC Algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing* 1992, 40:7.

[8] Li F, Liu H, Vaccaro RJ, "Performance Analysis for DOA Estimation Algorithms: Unification, Simplification, and Observations," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 1993, 29:4.

Performance Analysis of Time frequency Subspace based Direction Finding algorithms in presence of perturbed array manifold

Adel Belouchrani and Mohamed Khodja

Electrical Engineering Department, Ecole Nationale Polytechnique, Algiers, Algeria

Email: adel.belouchrani@enp.edu.dz, mohamed.khodja@enp.edu.dz

Abstract—Conventional subspace based direction finding approaches such as MUSIC and ESPRIT algorithms commonly use the array data covariance matrix. In non stationary context, the use of the Spatial Time-Frequency Distribution (STFD) instead of the covariance matrix can significantly improve the performance of such algorithms. In this paper we are interested in the performance analysis of such approaches in the presence of both additive noise and perturbed array manifold. An unified expression of the Direction Of Arrival (DOA) error estimation is derived for both approaches. The obtained results show that for low Signal to Noise Ratio (SNR) and high Signal to Sensor Perturbation Ratio (SPR) the STFD based DOA estimations perform better, while for high SNR and for the same SPR both Covariance and STFD based approaches have similar performance.

I. INTRODUCTION

One of the task of the array signal processing is the estimation of the directions of arrival (DOA) of source signals received on an antenna array. The related techniques depend on the nature of the signals under consideration. When the impinging signals are stationary, conventional methods such as the eigen-decomposition of the covariance data matrix are usually used [1], [2]. These methods lose of their performance for non-stationary signals. Other high resolution techniques like the ones based on the spatial time-frequency distributions (STFD) were introduced to cope with the non-stationary nature of the signals [3], [4]. STFD based methods are based on the use of the quadratic time-frequency distributions of the received signals at the array antenna. High resolution DOA estimation consists of applying the eigen-decomposition of the STFD instead of the conventional covariance data matrix. In [6], performance comparison between the Time-Frequency MUSIC (TF-MUSIC) and the conventional MUSIC, in presence of additive noise, is provided. In this paper, we present the performance analysis, in the presence of both additive noise and sensor errors¹, of DOA estimation algorithms based on the eigen decomposition of the data covariance matrix and the STFDs, respectively. As eigen decomposition approaches, we consider the well known MUSIC and ESPRIT algorithms. A unified analytical expression of the DOA error estimation is provided for both approaches. An analysis of the effect of

¹These kind of errors can incorporate the effect of imprecisely known sensor location, perturbations in the antenna gain and phase patterns that are often considered as the calibration errors.

the sensor perturbations on the performance of the considered algorithms is also provided.

II. PERTURBED DATA MODEL FORMULATION

Consider K narrow-band far-field signals received by a uniform linear array of L antennas. The array output vector $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \dots x_L(t)]^T$ is given by,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

where $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \dots \mathbf{a}(\theta_K)]$ is the steering matrix whose columns are given by $\mathbf{a}(\theta_i) = [1 \ e^{-j\varphi_i} \ e^{-j2\varphi_i} \ \dots \ e^{-j(L-1)\varphi_i}]^T$, with $\varphi_i = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta_i$. And $\mathbf{n}(t)$ is an additive white stationary noise with zero mean and covariance matrix, $\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$. While $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \dots s_K(t)]^T$ is the source signal vector with covariance matrix $\mathbf{R}_{ss} = \sigma_s^2 \mathbf{I}$. The source signals $s_i(t)$, $i = 1, \dots, K$, are assumed mutually uncorrelated and frequency modulated (FM) signals of the form $s_i(t) = S_i e^{j\omega_i(t)}$, where S_i and $\omega_i(t)$ are the amplitude and phase of the i th source signal. The phase $\omega_i(t)$ is time varying, while the amplitude S_i is assumed to be a random variable with zero mean and variance $\sigma_{s_i}^2$. In practical situations, the model is often subject to perturbation in the array manifold leading to a mismatch between the desired and measured directions resulting to error vectors $\{\Delta \mathbf{a}_i\}_{i=1}^K$ assumed herein as additive random variables with zero mean and covariance matrices $E[\Delta \mathbf{a}(\theta_i) \Delta \mathbf{a}^H(\theta_j)] = \sigma_{\Delta a_{i,j}} I \delta_{i,j}^2$,

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta) = \mathbf{a}(\theta) + \Delta \mathbf{a} \quad (2)$$

According to equations (1) and (2), the perturbed data model is then,

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}(\theta)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (3)$$

where $\tilde{\mathbf{A}}(\theta)$ is the perturbed array manifold matrix,

$$\tilde{\mathbf{A}}(\theta) = \mathbf{A}(\theta) + \Delta \mathbf{A} \quad (4)$$

In [5], we have shown that the perturbed data covariance matrix, $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = E[\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}^H(t)]$, has the following expression,

$$\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H(\theta) + [\sigma_{\Delta \mathbf{a}}^2 Tr(\mathbf{R}_{ss}) + \sigma_n^2] \mathbf{I} \quad (5)$$

The STFD based approaches exploit both the time-frequency representation of the signals and the spatial diversity provided

² $\delta_{i,j}$ is the Kronecker delta.

by the antenna array. Herein, we consider the discrete form of the spatial pseudo Wigner-Ville distribution (PWVD) using a rectangular window of odd length N that we apply to the perturbed data $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ vector,

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t, f) = \sum_{\tau=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \tilde{\mathbf{x}}(t + \tau)\tilde{\mathbf{x}}^H(t - \tau)e^{-j4\pi f\tau} \quad (6)$$

Note that the expression (6) can be used under an eigen-decomposition form similarly to the one used for the covariance matrix in conventional DOA estimation methods. For this purpose, one can use an averaging of the STFD matrices at (t_i, f_i) points over the signal sources and over a number of T_o selected tf-points ($T_o = M - N + 1$), where M is the number of snapshots, i.e.,

$$\hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t_i, f_{k,i}) \quad (7)$$

whose expectation is given by,

$$E[\hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}] = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} E[\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}(t_i, f_{k,i})] \quad (8)$$

where $f_{k,i}$ is the instantaneous frequency (IF) of the k th signal at the i th time sample. In [5], we have expressed the expectation of the averaged STFD as follows,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} &= E[\hat{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}] = \frac{N}{K} \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{A}^H(\theta) \\ &+ \left[\frac{N}{K} \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}) + \sigma_n^2 \right] \mathbf{I} \end{aligned} \quad (9)$$

Observe from Equation (9) that in absence of additive noise, the STFD based approaches do not make any improvement compared to the conventional Covariance based approaches. However, in presence of additive noise, the signal to noise ratio (SNR) is improved by a factor N/K for the STFD based approach. This improvement would be still better for larger window length.

III. UNIFIED SUBSPACE DECOMPOSITION

Expressions of $\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ and $\bar{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ given by (5) and (9) respectively, are a sum of three terms corresponding to the perturbation free signal, the array manifold errors and the additive noise. These expressions can be written under a unified form as follows,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \alpha \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} + \sigma_p^2 \mathbf{I} \quad (10)$$

where for covariance based approaches, $\alpha = 1$ and for TF based approaches, $\alpha = \frac{N}{K}$. $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ is the free perturbation covariance matrix,

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{R}_{\text{ss}} \mathbf{A}^H(\theta) \quad (11)$$

and σ_p^2 represents the perturbation power, $\sigma_p^2 = \alpha \sigma_{\Delta a}^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_{\text{ss}}) + \sigma_n^2$. According to (5) and (9), $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$ is a

positive definite matrix. Its sample version can be expressed under an eigen-decomposition form as follows,

$$\hat{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}^{sos} \tilde{\Lambda}^{sos} (\tilde{\mathbf{U}}^{sos})^H, \\ \text{for covariance based approaches;} \\ \tilde{\mathbf{U}}^{tf} \tilde{\Lambda}^{tf} (\tilde{\mathbf{U}}^{tf})^H, \\ \text{for TF based approaches.} \end{cases} \quad (12)$$

where "sos" stands for second order statistics associated with the covariance based approaches, and "tf" stands for time-frequency associated with the STFD based approaches. Expression (12) can be written under the following unified form,

$$\hat{\mathbf{P}}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{U}}^H = \sum_{i=1}^L \lambda_i \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{u}}_i^H \quad (13)$$

where $\tilde{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_i, i = 1, \dots, L]$ is the matrix of the eigenvalues of $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}}$, and $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}_{i=1}^L$ are the corresponding eigenvectors. The matrix $\tilde{\mathbf{U}}$ can be arranged as $\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{\mathbf{U}}_s \quad \tilde{\mathbf{U}}_p]$, where $\tilde{\mathbf{U}}_s = [\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_K]$ forms the signal subspace, and $\tilde{\mathbf{U}}_p = [\tilde{\mathbf{u}}_{K+1}, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_L]$ forms the perturbed subspace known as the orthogonal subspace.

IV. SOS AND TF DOA ERROR ESTIMATION USING THE ESPRIT APPROACH

When considering the ESPRIT approach, the array is divided into two identical sub arrays of $L - 1$ elements. The two sub-arrays are,

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{A}_1(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{A}_2(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (15)$$

The sub-matrices $\mathbf{A}_1(\theta)$ and $\mathbf{A}_2(\theta)$ are obtained by deleting the last and first rows from the manifold matrix $\mathbf{A}(\theta)$, respectively. According to the structure of the steering vectors, the matrices $\mathbf{A}_1(\theta)$ and $\mathbf{A}_2(\theta)$ are related by,

$$\mathbf{A}_2(t) = \mathbf{A}_1(t) \Phi \quad (16)$$

where $\Phi = \text{diag}(e^{-j\varphi_1}, \dots, e^{-j\varphi_{L-1}})$. In absence of perturbations, the steering vectors $\mathbf{a}(\theta_i)$ span the signal subspace. Therefore the vectors $\{\mathbf{a}(\theta_i)\}_{i=1}^K$ are linearly dependent to the eigenvectors \mathbf{u}_i of the signal sub-space \mathbf{U}_s , i.e.,

$$\mathbf{u}_j = \sum_{i=1}^K \tau_{i,j} \mathbf{a}(\theta_i), \quad \tau_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad i, j = 1, \dots, K \quad (17)$$

The matrix \mathbf{U}_s is then,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s &= \left[\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^K \tau_{i,1} \mathbf{a}(\theta_i) & \sum_{i=1}^K \tau_{i,2} \mathbf{a}(\theta_i) & \dots & \sum_{i=1}^K \tau_{i,K} \mathbf{a}(\theta_i) \end{array} \right] \\ &= \mathbf{A}(\theta) T \end{aligned} \quad (18)$$

where $T = [\tau_{i,j}]$, $i, j = 1, \dots, K$.

Accordingly, we have,

$$\mathbf{U}_s = \left[\begin{array}{c} \mathbf{U}_{s1} \\ \text{last row} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{first row} \\ \mathbf{U}_{s2} \end{array} \right] \quad (19)$$

with,

$$\mathbf{U}_{s1} = \mathbf{A}_1(\theta)T \text{ and } \mathbf{U}_{s2} = \mathbf{A}_2(\theta)T \quad (20)$$

It results,

$$\mathbf{U}_{s2} = \mathbf{U}_{s1}\Psi, \text{ where } \Psi = T^{-1}\Phi T \quad (21)$$

The ESPRIT approach is based on the exploitation of the subspace signal. The matrices $\tilde{\mathbf{U}}_s$ and $\tilde{\mathbf{U}}_p$ can be expressed as,

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \mathbf{U}_s + \Delta\mathbf{U}_s \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_p = \mathbf{U}_p + \Delta\mathbf{U}_p \quad (23)$$

where $\Delta\mathbf{U}_s$ represents the perturbation of the signal subspace. According to (21), the above expression allows to write,

$$(\mathbf{U}_{s2} + \Delta\mathbf{U}_{s2}) = (\mathbf{U}_{s1} + \Delta\mathbf{U}_{s1})(\Psi + \Delta\Psi) \quad (24)$$

By neglecting the second order terms, one gets,

$$\Delta\mathbf{U}_{s2} = \mathbf{U}_{s1}\Delta\Psi + \Delta\mathbf{U}_{s1}\Psi \quad (25)$$

Thus,

$$\Delta\Psi = \mathbf{U}_{s1}^+ (\Delta\mathbf{U}_{s2} - \Delta\mathbf{U}_{s1}\Psi) \quad (26)$$

Where $[\cdot]^+$ defines the pseudo-inverse operator, that is $\mathbf{U}_{s1}^+ = [\mathbf{U}_{s1}^H\mathbf{U}_{s1}]^{-1}\mathbf{U}_{s1}^H$. The DOAs errors $\{\Delta\theta_k\}_{k=1}^K$ are given by [7],

$$\Delta\theta_k = \text{Im} [\alpha_k^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}} \beta_k] \quad (27)$$

where,

$$\alpha_k^H = C_k \mathbf{v}_k \mathbf{U}_{s1}^+ (\mathbf{U}_{p2} \lambda_k^{-1} - \mathbf{U}_{p1}) \mathbf{U}_p^H \quad (28)$$

$$\beta_k = \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{u}_k \quad (29)$$

The vectors \mathbf{v}_k and \mathbf{u}_k are the left and right orthonormal eigenvectors of Ψ associated with the eigenvalue λ_k , and $C_k = \lambda/2\pi d \cos\theta_k$. \mathbf{U}_{p1} and \mathbf{U}_{p2} are obtained from

$$\mathbf{U}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{p1} \\ \mathbf{U}_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first row} \\ \mathbf{U}_{p2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

The matrix $\Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$ represents the perturbation resulting from the array manifold errors and the additive noise [5],

$$\Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}} = \begin{cases} \Delta\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}, & \text{for covariance based method,} \\ \Delta\mathbf{D}_{\mathbf{xx}}, & \text{for STFD based method} \end{cases} \quad (31)$$

where,

$$\Delta\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M [\tilde{\mathbf{x}}(t)\tilde{\mathbf{x}}(t)^H - \hat{\mathbf{x}}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)^H] \quad (32)$$

$$\Delta\mathbf{D}_{\mathbf{xx}} = \frac{1}{KT_o} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{T_o} [\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}}}(t_i, f_{k,i}) - \mathbf{D}_{\hat{\mathbf{x}\hat{\mathbf{x}}}}(t_i, f_{k,i})] \quad (33)$$

The variance of the k th DOA error estimate $\Delta\theta_k$ is given by,

$$\text{var}(\Delta\theta_k) = \text{var}[\text{Im}(\alpha_k^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{xx}} \beta_k)] \quad (34)$$

Taking into account the notations given in the previous section, the results (27) and (34) are valid for both the conventional and time-frequency ESPRIT.

V. SOS AND TF DOA ERROR ESTIMATION USING THE MUSIC APPROACH

When using the MUSIC approach, the DOAs are found by locating the K largest peaks over the angle θ of the spatial spectrum function,

$$F(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^H \tilde{\mathbf{U}}_p \tilde{\mathbf{U}}_p^H \mathbf{a}(\theta) \quad (35)$$

In a perturbed environment, the k th estimated DOA can be written as,

$$\tilde{\theta}_k = \theta_k + \Delta\theta_k \quad (36)$$

The variance of the k th DOA error estimate $\Delta\theta_k$ is given by[2],

$$\text{var}(\Delta\theta_k) = \frac{1}{\gamma_k^2} \text{var}[\text{Re}(\alpha_k^H \Delta\mathbf{P}_{\mathbf{yy}} \beta_k)] \quad (37)$$

where

$$\alpha_k = \mathbf{U}_s \Lambda_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \mathbf{a}(\theta_k) \quad (38)$$

$$\beta_k = \mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^H \mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) \quad (39)$$

$$\gamma_k = \|\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k)^H \mathbf{U}_p\|^2 \quad (40)$$

with $\mathbf{a}^{(1)}(\theta_k) = \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta}|_{\theta=\theta_k}$. Taking into account the notations given in the previous section, result (37) is valid for both the conventional and time-frequency MUSIC.

VI. PERFORMANCE EVALUATION

Two chirp source signals received on a uniform linear array of 8 sensors spaced by half-wavelength are considered, $s_1(t) = S_1 \exp[j((w_{12} - w_{11})(t^2/2) + w_{11}t)]$ and $s_2(t) = S_2 \exp[j((w_{22} - w_{21})(t^2/2) + w_{21}t)]$ with powers $\sigma_{s_1}^2 = 1$ and $\sigma_{s_2}^2 = 4$, and with frequencies varying from $w_{11} = \pi/6$ to $w_{12} = \pi$ and from $w_{21} = \pi$ to $w_{22} = \pi/6$, respectively. The sources arrive from $\theta_1 = -10^\circ$ and $\theta_2 = 10^\circ$. The array perturbations are assumed uncorrelated Gaussian variables with zero mean. A sample size of 1024 snapshots is considered. For the STFD approaches, a PWVD with rectangular window length of 129 is applied to the sensor output data. The instantaneous frequency of the source signals are assumed to be known. The results are obtained over 500 Monte Carlo runs. Note that the performance comparison are carried out with respect to the first DOA, the comparison results with respect to the second one being similar.

Figures 1 and 2 show the experimental and theoretical performance of the SOS and STFD MUSIC based approaches versus the SNR for different values of the signal to perturbation ratio (SPR) set here to the values 30, 35, and 40 dB.

It appears from Figure 1 that the simulation results for the SOS-based method agree closely with the results of the derived analytical expression for $\text{SNR} \geq 0$ dB. The same observation is made for the STFD-based method from Figures 2 but for a larger range of SNRs. We can also observe that for the SOS-based method the matching between experimental and theoretical results is lost for very low SNR values due to the fact that the first order disturbance analysis is not pertinent in this context. However, for the STFD-based method, the

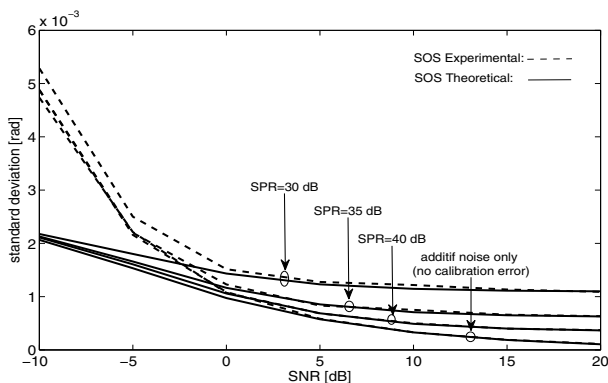


Figure 1. SOS-MUSIC: standard deviation versus SNR for the source at -10° .

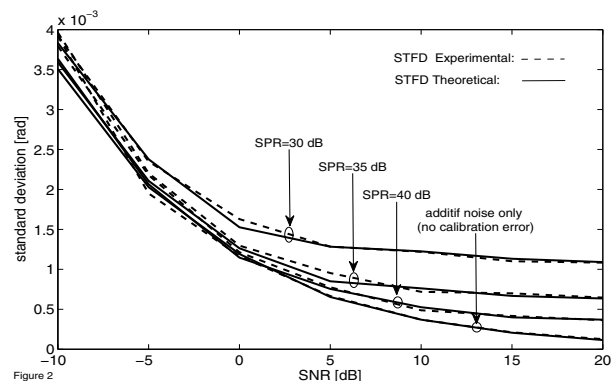


Figure 2. STFD-MUSIC: standard deviation versus SNR for the source at -10° .

matching between experimental and theoretical results still hold because the local SNR value at the auto-source time-frequency point is relatively large even at $\text{SNR} = -10\text{ dB}$. This robustness with respect to noise may be explained by the effect of spreading the noise power over the time-frequency plan and of localizing the source energy in the t-f domain. Moreover, as shown by the derived expressions, this result is supported by the SNR improvement of a factor equal to the t-f window length N over the SNR associated to the SOS based approach.

Figure 3 compares the performance of the SOS and STFD MUSIC approaches. It shows no significant difference between the two methods for $\text{SNRs} \geq -5\text{ dB}$ and high SPRs values, whereas for lower SNRs ($\leq -5\text{ dB}$) the STFD-based method significantly outperforms the SOS-based one.

Figure 4 compares the performance of the SOS and STFD ESPRIT approaches. It shows that for high SNRs values ($\text{SNR} \geq 0\text{ dB}$) both algorithms are equally sensitive to modelling errors, but the sensitivity to these effects is more pronounced for the TF-ESPRIT and performs better than the SOS-ESPRIT at lower SNR levels.

VII. CONCLUSION

The STFD-based direction finding and Covariance matrix-based approaches have been considered and a unified ana-

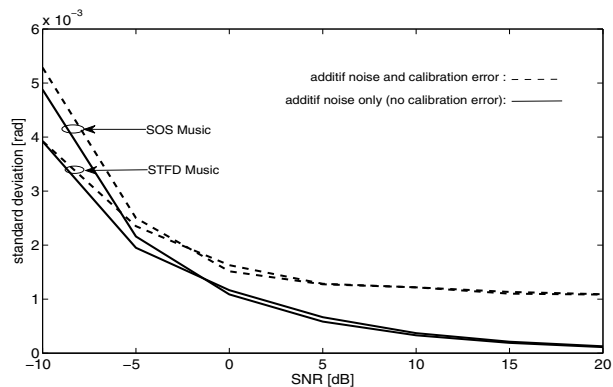


Figure 3. SOS and STFD-MUSIC: standard deviation versus SNR for small calibration errors ($\text{SPR} = 30\text{ dB}$).

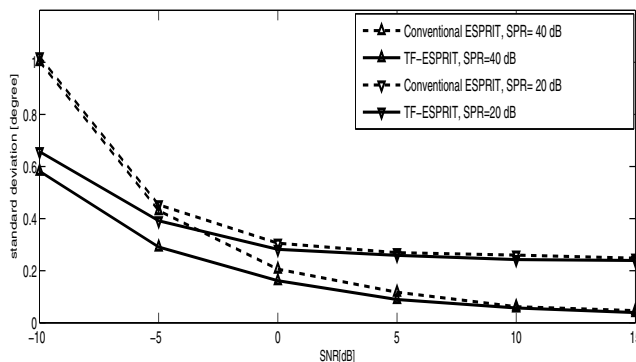


Figure 4. SOS and TF-ESPRIT: standard deviation versus SNR in presence of model errors ($\text{SPR}=20\text{ dB}$ and 40 dB)

lytical expression of the DOA error estimation have been derived. It is shown that in presence of calibration errors and large additive noise the STFD-based approaches has better performance than the SOS-based ones, and that in presence of weak noise both methods are equivalent in their performance.

REFERENCES

- [1] M. Haardt, M. Pesavento, F. Reimer and M. N. El Kerso, "Subspace Methods and Exploitation of Special Array Structures", Academic Press Library in Signal Processing : Volume 2, 1st Edition, Communications and Radar Signal Processing, Elsevier, 2013.
- [2] F Li, H Liu, RJ Vaccaro, Performance analysis for DOA estimation algorithms: unification, simplification, and observations. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **29**(4),1170–1183 (1993)
- [3] A Belouchrani, M Amin, Time-frequency MUSIC. *IEEE Signal Process. Lett.* **6**, 109–110 (1999)
- [4] B Belouchrani, M Amin, Blind source separation based on time-frequency signal representations. *IEEE Trans. Signal Process.* **46**(11), 2888–2898 (1998)
- [5] Khodja M, Belouchrani A, and Abed-Meraim K, Performance analysis for time-frequency MUSIC algorithm in presence of both additive noise and array calibration errors, *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2012, 94(2012).
- [6] Z Yimin, M Weifeng, M Amin, Subspace analysis of spatial time-frequency distribution matrices. *IEEE Trans. Signal Process.* **49**(4), 747–759 (2001)
- [7] F Li, RJ Vaccaro, Sensitivity analysis of DOA estimation algorithms to sensor errors. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **28**(3), 708–717 (1992)

Références bibliographiques

- [1] A. Lee Swindlehurst and T. Kailath. "A performance analysis of subspace-based methods in the presence of model errors : Part I-the MUSIC algorithm". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(8) :1758–1774, Sep. 1993.
- [2] A. Lee Swindlehurst and T. Kailath. "A performance analysis of subspace-based methods in the presence of model errors : Part II - multidimensionnal algorithms". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(9) :2882–2890, Sep. 1993.
- [3] A. Marsal and S. Marcos. "Influence d'erreurs de modèles sur diverses méthodes d'analyse spatiale". *Traitement du Signal*, 10(5-6) :423–441, 1993.
- [4] A. Belouchrani and M. Amin. "Blind source separation based on time-frequency signal representation". *IEEE Trans. Signal Processing*, 46 :2888–2898, Nov. 1998.
- [5] A. Belouchrani and M. Amin. "Time-frequency MUSIC". *IEEE Signal Processing Lett.*, 6 :109–110, Mai 1999.
- [6] Yimin Zhang, Weifeng Mu, and Moeness G. Amin. "Subspace analysis of spatial time-frequency distribution matrices". *IEEE Trans. Signal Processing*, 49 :747–759, April 2001.
- [7] M. Khodja, A. Belouchrani, and K. Abed-Meraim. "Performance analysis for time-frequency MUSIC algorithm in presence of both additive noise and array calibration errors". *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing 2012*, 94(2012), pages 1–11, 2012.
- [8] H. Krim and M. Viberg. "Two decades of array signal processing research". *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 67–94, July 1996.
- [9] R. O. Schmidt. "Multiple emitter location and signal parameter estimation". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(3) :276–280, March 1986.

-
- [10] G. Bienvenu and L. Kopp. "Optimality of high resolution array processing using the eigensstructure approach". *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 31(5) :1235–1245, Oct. 1983.
- [11] R. Roy and T. Kailath. "ESPRIT - Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques". *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-37 :984–995, 1989.
- [12] P. Stoica and K. C. Sharman. "Maximum likelihood methods for direction of arrival estimation". *IEEE Transactions on Acoustics Speech, and Signal Processing*, 38 : 1132–1143, July 1990.
- [13] D. Gabor. "Theory of communication". *Journal of the Institute of Electrical Engineers*, (93) :429–457, 1946.
- [14] A. Yger. "Traitement du signal et ondelettes". *Cours Master Ingénierie Mathématique*, pages 1–165, Mai 2012.
- [15] Chun-Lin Liu. "a tutorial of the wavelet transform". pages 1–72, Feb. 2010.
- [16] O. Chapa Joseph and M. Raghuvver Rao. "Algorithms for designing wavelets to match a specified signal". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48(12) :3395–3406, Dec. 2000.
- [17] G. Jones and B. Boashash. "Generalized instantaneous parameters and window matching in the time-frequency plane". *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(5) : 1264–1275, May 1997.
- [18] P. Flandrin and B. Esquidié. "Principe et mise en oeuvre de l'analyse temps-fréquence par transformation de wigner-ville". *Traitement du Signal*, 2(2) :143–151, 1985.
- [19] F. Auger, P. Flandrin, P. Gonçalves, and O. Lemoine. "Time-frequency toolbox, for use with matlab". 1997.
- [20] S. Pikula and P. Benes. "A new method for interference reduction in the smoothed pseudo wigner-ville distribution". *Proceedings of the 8th International Conference on Sensing Technology, Liverpool, UK, 2014*, pages 559–603, Sept 2014.

- [21] H. Garudadri. "A comparison of smoothing kernels for computing bilinear time-frequency representations". *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP -1991 Toronto*, 5 :3221–3224, 1991.
- [22] D.L. Jones and R.G. Baraniuk. "An adaptive optimal kernel time-frequency representation". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(10) :2361–2371, Oct. 1995.
- [23] H. I. Choi and W. J. Williams. "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels". *IEEE Transactions on Acoustics, Speech. and Signal Processing*, 37(6) :862–871, June 1989.
- [24] P. Honeine and C. Richard. "Distribution temps- fréquence et paramétrisation radialement gaussienne optimisée pour la classification". *Traitement du signal*, 25 (6) :469–479, 2008.
- [25] M. G. Amin, Y. Zhang, G. Frazer B. Obeidat, and B. Mohammadi. "Classification and discrimination of sources with time-varying frequency and spatial spectra ". *Technical report, submitted to Office Of Naval Research*, 2003.
- [26] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, and Moeness G. Amin. "Joint anti-diagonalization for blind source separation". *Proceeding ICASSP, Utah.*, 5 :2789–2792, May 2001.
- [27] B. Boashash, A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, and N.T. Nguyen. "Time-frequency signal processing for wireless communication ". *Signal Processing for Mobile Communications Handbook, Chap. 25*, pages 1–41, 2004.
- [28] A. Belouchrani and K. Abed-Meraim. "A blind source separation technique based on second order statistics". *IEEE Trans. Signal Processing*, 45 :434–444, 1997.
- [29] K. Abed-Meraim and A. Belouchrani. "Algorithms for joint block diagonalization". *Proc. EUSIPCO04, Vienna, Austria*, pages 209–212, 2004.
- [30] Moeness G. Amin A. Belouchrani and K. Abed-Meraim. "Direction finding in correlated noise fields based on joint block-diagonalization of spatio-temporal correlation matrices ". *IEEE Signal Processing Lett.*, 4(9) :266–269, Sept. 1997.

- [31] A. Belouchrani and Moeness G. Amin. "A new approach for blind source separation using time-frequency distribution". in *Proceeding SPIE Conference on advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing, Denver, Colorado*, Aug. 1996.
- [32] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, Moeness G. Amin, and A. Zoubir. "A new approach for blind source separation using time-frequency distribution". in *Proceeding of ICASSP, Utah*, 5 :2789–2792, May. 2001.
- [33] A. Le Chevalier, D. Medynski, and D. Muller. "Position et nature des problèmes de calibration d'antennes. particularité de l'application au radar". *Traitement du signal*, 10(5) :361–369, 1993.
- [34] M. Zhenhua and K. C. Ho. "A study on the effects of sensor position error and the placement of calibration emitter for source localization". *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 13(10) :3395–3406, Oct. 2014.
- [35] J. Yang and A. Lee Swindlehurst. "The effects of array calibration errors on df-base signal copy performance". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(11) : 2724–2732, Nov. 1995.
- [36] C. Vaidyanathan and M. Buckley. "Performance analysis of the mvdr spatial spectrum estimator". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(6) :2724–2732, June 1995.
- [37] M. Viberg and A. Lee Swindlehurst. "Analysis of the combined effects of finite samples and model errors on array processing performance". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(11) :3073–3083, Nov. 1995.
- [38] B. Friedlander and A. Weiss. "The effects of model errors on signal reconstruction". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(1) :145–155, 1994.
- [39] Z. Xu. "Perturbation analysis for subspace decomposition with applications in subspace-based algorithms". *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(11) : 2820–2830, Nov. 2002.
- [40] C. Vaidyanathan and K. M. Buckley. "Comparative studies of music and mvdr location estimators for model perturbations". *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP 1995*, 3 :1665–1668, 1995.

-
- [41] F. Li H. Liu and R. Vaccaro. "Performance analysis for DOA estimation algorithms : Unification, simplification, and observations". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, pages 29–4, 1993.