

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique d'Alger
Département d'Hydraulique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

THESE DE MAGISTER

Présentée par:

Abdelhamid Messameh

**SIMULATION NUMERIQUE DES ECOULEMENTS
SOUTERRAINS EN REGIME TRANSITOIRE
- APPLICATION AU BARRAGE ZONE DE BISKRA -**

Soutenue publiquement le 27 / 10 /1996 devant le Jury composé de :

Président :	Mr Tiliouine Boualem	Professeur	E.N.P
Examineurs :	Mr Cherrared Marzouk	Maître de Conférences	E.N.P
	Mr Mouloudi Yahia	Chargé de Cours	E.N.P
	Mr Achour Bachir	Chargé de Cours	C.U.Biskra
Rapporteur :	Mr Berkani Miloud	Chargé de Cours	E.N.P
Invité :	Mr Belhadi Miloud	Ingénieur	A.N.R.H

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'HYDRAULIQUE

Résumé de thèse de Magister intitulée:

Simulation numérique des écoulements souterrains en régime transitoire
- Application au barrage zoné de Biskra -

Mr A. Messameh

Ingénieur

Mr B. Khammari

Maître de Conférence

Mr M. Berkani

Chargé de Cours

ملخص:

لقد تم إنشاء نموذج عددي لمحاكاة حركة المياه الجوفية التي تتسم بنظام جريان إنتقالي والذي يركز على الطرق العددية (التجزينات المتناهية والتفرقات المتناهية) بهدف تعيين مختلف العوامل الهيدروديناميكية كالحمولة والضغط المسامي وكذلك كمية الماء المتسربة ومعرفة سرعة وزمن عمالية الإفراغ السريع في المدود.

إن استعمال النماذج العددية يسمح بدراسة المواضيع المعقدة (عدم التجانس، شكل هندسي معقد، مسائل غير خطية). خلال هذا العمل قمنا بدراسة حركة المياه المضغوطة أو التي لها مساحة حرة (في حالتها سيلان مستقر أو إنتقالي).

أثبتت الدراسة التجريبية التي أجريت بالمخبر تقارب النتائج المتحصل عليها وبالتالي مدى مصداقية

RESUME :

النموذج العددي.

Le modèle de simulation numérique des écoulements souterrains bidimensionnels en régime transitoire développé, basé sur le schéma implicite (A.D.I) des différences finies et celle des éléments finis, permet d'évaluer les différents paramètres hydrodynamiques tels que la charge hydraulique $h(t)$, le débit $Q(t)$, le temps et la vitesse de vidange de la retenue.

L'emploi des modèles numériques s'avère intéressant, puisqu'ils traitent les problèmes de configuration complexe qu'ils soient hétérogènes ou non-linéaires (écoulements à surface libre ou dans la zone non saturée) à condition de disposer des données fiables. Les problèmes traités sont:

- Les écoulements en charge ou à surface libre .
- Les écoulements permanents ou transitoire.

L'étude expérimentale réalisée au laboratoire a permis la validation de ce modèle, les résultats montrent la fiabilité de ce dernier, en plus d'autres cas simulés ont été comparés aux résultats expérimentaux ou analytiques disponibles dans la littérature scientifique.

ABSTRACT :

A two-dimensional numerical simulation model to analyse the transient groundwater flow, is developed using the finite element method and the Alternating Direction Implicit of finite difference method. the aim, is to determine the evolution of different hydrodynamics parameters (hydraulic head , rate of seepage, time and speed of the rapid drawdown).

The use of numerical models seems to be particularly suitable to deal the complex flows governed by non-linear equations with a complex physical geometry and a wide variety of boundary conditions . This model is able to simulate a real problems of soil hydraulics, in most case (free or confined flows ,steady or transitory).

An experimental study is realised in order to validation this model . The comparison of simulation results to experiment results shows a fairly good agreement.

REMERCIEMENTS



Tous mes sincères remerciements

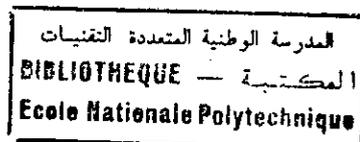
à Monsieur Berkani M. mon Directeur de thèse
pour ses précieux conseils et ses critiques

à tous ceux qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse
par leurs commentaires, corrections et soutiens;
je pense notamment à Mr Uppaluri , Kahawita R.
(E.N.P de Montreal) et Khammari M.

à tous les membres de jury , en particulier Mr Tiliouine B.
Pour l'intérêt qu'il témoigne aux jeunes chercheurs et
sa méthode pédagogique très distinguée
et Monsieur Achour B. Directeur de l'Institut d'Hydraulique
de Biskra pour ses encouragements,
sans oublier Mr Cherrared et Mr Mouloudi qui ont accepté
de m'accorder une partie de leur temps
pour examiner ce travail.

à tous mes amis et collègues enseignants au centre
universitaire de Biskra

TABLES DES MATIERES



INTRODUCTION GENERALE

1 - Généralités	1
2 - L'objectif de l'étude	2
3 - Présentation du travail	2
4 - Synthèse bibliographique	3

CHAPITRE I PROPRIETES DES ECOULEMENTS ET FORMULATION DES EQUATIONS DE BASE

1.1 Introduction	4
1.2 L'emmagasinement	5
1.3 Phénomène de succion	6
1.4 Courbes caractéristiques des sols	7
1.4.1 Courbes de perméabilités	7
1.4.2 Relations caractéristiques utilisées.....	9
1.5 Fondements mathématiques	9
1.6 Différents cas traités	11
1.7 Conditions aux limites associées	15
1.8 Conclusion	17

CHAPITRE II CONCEPTS SUR LA METHODE NUMERIQUE DES DIFFERENCES FINIES ET ELEMENTS FINIS

2.1 Introduction	18
2.2 Présentation de la méthode des différences finies.....	18
2.2.1 Introduction	19
2.2.2 Discrétisation du domaine	19
2.2.3 Approximation des dérivées partielles (E.D.P)	20
2.2.4 Différents schémas aux différences	22
2.2.5 Méthode des directions alternées (A.D.I).....	24
2.2.6 Algorithme de Thomas	25
2.3 Présentation de la méthode des éléments finis	27
2.3.1 Discrétisation du domaine	27
2.3.2 Fonctions d'interpolations.....	27
2.4 Critères d'analyse des méthodes numériques.....	28
2.5 Conclusion	30

CHAPITRE III APPLICATION AUX PROBLEMES DES ECOULEMENTS SOUTERRAINS

	المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات المكتبة — BIBLIOTHEQUE Ecole Nationale Polytechnique	
3.0 Introduction		30
3.1 Ecoulement dans un milieu saturé		30
3.1.1 Approximation par la M.D.F		30
3.1.2 Approximation par la M.E.F		34
3.2 Ecoulement dans un milieu non saturé		40
3.3 Conditions aux limites		42
3.4 Conclusion		44

CHAPITRE IV ETUDE EXPERIMENTALE ET NUMERIQUE DES ECOULEMENTS SOUTERRAINS

A/ Approche experimentale	45
A.4.1 Introduction	45
A.4.2 Description du matériel utilisé	45
A.4.3 Matériaux utilisés	46
A.4.4 Présentation des essais	46
1- Essais d'écoulement à surface libre	46
2- Essais d'écoulement en charge	46
A.4.5 Résultats des essais	47
1- Essais d'écoulement à surface libre	47
2- Essais d'écoulement en charge	50
A.4.6 Conclusion	51
B/ Approche numerique	51
B.4.1 Introduction	51
B.4.2 Ecoulement en régime permanent	51
1- Détermination de la surface libre	51
B.4.3 Ecoulement en régime transitoire	53
1- Conditions initiales	53
B.4.4 Différents cas simulés	53
B.4.5 Ecoulement dans la zone non saturée	67
B.4.6 Résultats et discussion	68

CHAPITRE V PROGRAMMATION

5.1 Introduction	69
5.2 Programmation en différences finies	69
5.2.1 Introduction des données	69
5.2.2 Définition des variables utilisées	70
5.2.3 Subroutines utilisées	71
5.2.4 Organigramme	72
5.3 Programmation en éléments finis	73
5.3.1 Introduction des données	73

5.3.2 Définition des variables utilisées	74
5.3.3 Subroutines utilisées	75
5.3.4 Organigramme	76
5.4 Conclusion	79

CHAPITRE VI APPLICATION A UN CAS CONCRET : BARRAGE ZONE DE FONTAINE DES GAZELLES (W. BISKRA)

6.1 Description du barrage	81
6.1.1 Situation géographique	81
6.1.2 Situation topographique	81
6.1.3 Etude hydrologique	81
6.1.5 Caractéristiques du barrage	82
6.2 Analyse de l'écoulement	84
6.2.1 Domaine d'écoulement	84
6.2.2 Comportement hydraulique des sols	84
6.3 Résolution du problème permanent	84
6.3.1 Maillage du domaine d'écoulement	84
6.3.2 Conditions aux limites	85
6.3.3 Détermination de la surface libre	85
6.4 Simulation d'une vidange rapide	85
6.4.1 Définition d'une durée d'une vidange	85
6.4.2 Conditions initiales	86
6.4.3 Calcul du débit	86
6.5 Conclusion	88
CONCLUSION GENERALE	89
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	91

ANNEXE A : Approximations des dérivées partielles dans un domaine de référence

ANNEXE B : Sous-programme de résolution d'un système tridiagonal (algorithme de Thomas).

LISTE DES SYMBOLES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
 المكتبة — BIBLIOTHEQUE
 Ecole Nationale Polytechnique

<u>SYMBOLE</u>	<u>DIMENSION</u>	<u>UNITE</u>	<u>DEFINITION</u>
a_p, b_p, c_p, d_p	-	-	coefficients du système, tridiagonal ($p=i$ pour les lignes et $p-j$ pour les colonnes).
a, n, m	-	-	paramètres de régression de l'eq. non linéaire (1.12).
e	-	-	indice des vides (eq. 1.3).
E_w	$[ML^{-1} T^2]$	kpa	module d'élasticité de l'eau.
E_s	«	«	module d'élasticité du sol.
g	$[LT^{-2}]$	m/s ²	accélération terrestre.
$h(x,y,t)$	$[L]$	m	charge hydraulique.
H_1	«	«	charge en amont.
H_2	«	«	charge en aval.
i, j, k	-	-	indices caractérisant les pas de discretisation.
k_c	$[LT^{-1}]$	m/s	perméabilité effective.
k_s	«	«	perméabilité à l'état saturé.
$k(h)$	«	«	perméabilité dans les zones non saturées.
k_x	«	«	perméabilité longitudinale.
k_y	«	«	perméabilité transversale.
k_{ij}	«	«	permeab. au point ij .
M_y	-	-	nombre des noeuds selon l'axe des y .
N_x	-	-	nombre de noeuds selon l'axe des x .
N	-	-	nombre de noeuds à calculer.
NN	-	-	« « du maillage.
NR	-	-	« « spécifiés par les C.L.
N_i	-	-	fonctions d'interpolation.
p	$[ML^{-1} T^2]$	kpa	pression de l'eau.
$q(x,y,t)$	$[L^3 T^{-1}]$	m ³ /s	débit d'écoulement.
q_0	«	«	débit volumique.
S	-	-	coeff. d'emmagasinement.
S_s	$[L]$	m	coeff. d'emmagasinement spécifique.
b	$[L]$	m	épaisseur de la couche aquifère
S_w	-	-	degré de saturation.
S_y	-	-	porosité de drainage.
u	$[L]$	m	pression interstitielle.
v	$[LT]$	m/s	vitesse d'écoulement.
V_t	$[L^3]$	m ³	volume élémentaire total.
V_w	«	«	volume élém. d'eau.
V_v	«	«	« des vides.
V_s	«	«	« du solide.
V_g	«	«	vol. élém. d'eau susceptible d'être drainé par gravité.
x, y, t	-	-	coordonnées d'un point.
x_0, y_0, t_0	-	-	coordonnées initiales.
α	$[M^{-1} LT^{-2}]$	kpa ⁻¹	coefficient de compressibilité de l'eau.
β	«	«	coef. de compressibilité du solide.

α, β

λ_x

λ_y

λ_t

γ

η_c

η_t

η_{ret}

ν

θ

θ_r

θ_s

ε

ζ

σ

ω

ϖ

Ψ

Ω

η, ξ

$\Delta x, \Delta y, \Delta \xi, \Delta \eta, \Delta t$

	[ML ⁻³]	kg/m ³
	-	-
	-	-
	-	-
	[ML ⁻¹ T]	g/cm/s
	-	-
	-	-
	-	-
	-	-
	-	-
	-	-
	-	-
	[L]	m
	-	-

coef. de l'algorithme de Thomas.

constante ($k_x / \Delta x^2$).

constante ($k_y / \Delta y^2$).

constante ($2.S_s / \Delta t$).

pois spécifique.

porosité efficace.

porosité totale.

capacité de rétention (eq. 1.6)

viscosité cinématique.

teneur en eau volumique.

teneur en eau résiduaire.

teneur en eau à saturation

l'erreur de discrétisation.

terme diagonal dominant (eq. 3.44)

constante des c.l (eq. 1.35)

facteur de sur-relaxation . (eq. 5.1)

facteur de schéma numérique vis à vis du temps.

tension capillaire (suction)

domaine d'écoulement.

coordonnées du domaine de référence

(annexe A).

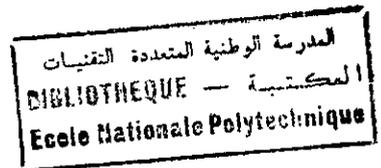
pas de discretisation spatio-temporels.

LISTE DES FIGURES



- Figure 1.1 : volume élémentaire du sol.
Figure 1.2 : courbe de succion en fonction de la teneur en eau.
Figure 1.3 : courbes de perméabilité en fonction de la succion.
Figure 1.4 : variation de la perméabilité en fonction du degré de saturation.
Figure 1.5 : conditions aux limites dans les barrages.
Figure 1.6 : conditions aux limites d'un barrage aux palplanches.
Figure 2.1a : discrétisation d'un domaine quelconque.
Figure 2.1b : discrétisation par des mailles rectangulaires.
Figure 2.2a : molécule de discrétisation par la M.D.F (05 points).
Figure 2.2b : molécule de discrétisation par la M.D.F (09 points).
Figure 2.3 : schéma explicite.
Figure 2.4 : schéma implicite.
Figure 2.5 : élément quadrilatère dans le plan x, y .
Figure 2.6 : élément de référence.
Figure 4.1.1 : schéma du banc d'essai utilisé.
Figure 4.1.2 : visualisation de la surface libre dans le laboratoire (essai N° 1).
Figure 4.1.3 : visualisation de la surface libre pour l'essai N° 2 .
Figure 4.1.4 : schéma d'un barrage mixte avec le repère adopté (essai N° 3).
Figure 4.1.5 : visualisation des lignes de courant d'un écoulement sous les palplanches (essai N° 4).
Figure 4.2 : schéma du barrage reposant sur une fondation imperméable (essai N° 1)
Figure 4.2.1 : convergence de la surface libre (essai N° 1).
Figure 4.2.2 : comparaison des positions de la surface libre simulée et mesurée (essai N° 1).
Figure 4.3 : convergence de la charge hydraulique en fonction des itérations (essai N° 1).
Figure 4.4.1 : évolution de la surface libre lors d'une vidange rapide (essai N° 1).
Figure 4.4.2 : évolution de la surface libre lors d'une vidange rapide (adimensionnel).
Figure 4.4.3 : courbe de variation de la charge en fonction du temps (essai N° 1).
Figure 4.5.1 : influence de la vitesse d'une vidange sur l'évolution de la s.l (essai N° 1).
Figure 4.5.2 : influence du coefficient d'emmagasinement sur l'évolution de la surface libre.
Figure 4.5.3 : influence du coefficient d'emmagasinement sur la vitesse d'une vidange.
Figure 4.6 : variation du débit en fonction du temps lors d'une vidange rapide (essai N° 1).
Figure 4.7 : schéma du barrage à parois verticales (essai N° 2).
Figure 4.8.1 : convergence de la surface libre (essai N° 2).
Figure 4.8.2 : comparaison de la surface libre simulée et mesurée (essai N° 2).
Figure 4.9 : convergence de la charge hydraulique en fonction des itérations (essai N° 2).
Figure 4.10 : fluctuation de la surface libre et l'influence de la vitesse d'une vidange (essai N° 2).
Figure 4.11.1 : courbe adimensionnelle de variation de la charge hydraulique en fonction du temps (essai N° 2).
Figure 4.11.2 : courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps pour le noeud 232 (essai N° 2).
Figure 4.11.2.2 : courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps pour le noeud 2 (essai N° 2).
Figure 4.11.3 : variation de débit en fonction du temps lors d'une vidange d'un barrage.
Figure 4.11.4 : variation adimensionnelle de débit en fonction du temps lors d'une vidange (essai N° 2).
Figure 4.13.1 : schéma du barrage mixte avec les données (essai N° 3)
Figure 4.13.2 : forme de la surface libre observée et simulée (essai N° 3).
Figure 4.14.1 : variation de la charge hydraulique en fonction du temps. (essai N° 3).
Figure 4.14.2 : variation du débit en fonction du temps (essai N° 3).
Figure 4.15 : schéma du barrage aux palplanches (essai N° 4).

- Figure 4.16.1 : variation du débit en fonction de la fiche des palplanches et l'influence du nombre d'éléments (essai N° 4).
- Figure 4.16.2 : variation du débit en fonction de la fiche des palplanches et l'influence du nombre d'éléments (courbes adimensionnelles).
- Figure 4.17 : variation de la charge hydraulique en fonction du temps (essai N° 4).
- Figure 4.18 : schéma d'un barrage rigide.
- Figure 4.19 : domaine d'écoulement d'une nappe captive.
- Figure 4.21 : la forme de la surface libre analytique expérimentale et simulée (essai N° 2).
- Figure 4.22.1 : variation de la forme de la surface libre pour une vitesse de drainage très faible (essai N° 2).
- Figure 4.22.2 : variation de la forme de la surface libre pour une vitesse de drainage très importante (essai N° 2).
- Figure 5.1 : illustration des variables utilisées dans le programme en différences finies.
- Figure 5.2 : numérotation adoptée pour le maillage.
- Figure 6.1 : coupe type du barrage de Fontaine des Gazelles (échelle 1/500).
- Figure 6.2 : coupes géologiques transversales de la vallée (échelle 1/1500).
- Figure 6.3.1 : forme de la surface libre pour un barrage dans le cas homogène et hétérogène.
- Figure 6.3.2 : évolution de la surface libre lors d'une vidange rapide.
- Figure 6.4 : variation de la charge en fonction du temps.
- Figure 6.5 : variation du débit en fonction du temps.



LISTE DES TABLEAUX



- Tableau 3.1 : paramètres des points d'intégration de Gauss.
- Tableau 4.1 : résultats du débit de l'essai N° 1.
- Tableau 4.2 : les coordonnées de la surface libre de l'essai N° 1.
- Tableau 4.3 : résultats du débit de l'essai N° 2.
- Tableau 4.4 : coordonnées de la surface libre de l'essai N° 2.
- Tableau 4.5 : résultats du débit de l'essai N° 3.
- Tableau 4.6 : coordonnées de la surface libre de l'essai N° 3.
- Tableau 4.7 : résultats du débit de l'essai N° 4.
- Tableau 4.8 : mesure de la charge piézométrique de l'essai N° 4.
- Tableau 4.9 : paramètres de régression nonlinéaires (d'après Von Genuchten).
- Tableau 4.10: paramètres de régression nonlinéaires (d'après Chung & Horton).
- Tableau 4.11: paramètres de régression nonlinéaires adoptés.
- Tableau 4.12: récapitulation des résultats du débit.
- Tableau 4.13: la charge piézométrique mesurée et simulée.
- Tableau 6.1 : données principales du barrage de Fontaine des Gazelles.
- Tableau 6.2 : caractéristiques des ouvrages annexes du barrage.

INTRODUCTION GENERALE

1- GENERALITES :

Le mouvement de l'eau dans le sol en conditions naturelles est très complexe à cause de l'hétérogénéité des sols due à leur histoire de formation (structures stratifiées et tectoniques des couches), ce qui ne permet pas d'étudier ce phénomène d'une façon efficace.

Nombreux chercheurs ont tenté de résoudre les différents problèmes des écoulements souterrains dans les milieux poreux en introduisant des hypothèses afin de pouvoir appliquer les différentes lois de comportement, en commençant par les écoulements stationnaires [1], [11], [14]. Concernant le régime non permanent, certains travaux ont été effectués ces dernières années, en considérant les écoulements dans les milieux à saturation partielle [6], [21],[25],[27],[28].

Le phénomène d'écoulement souterrain à l'instar d'autres phénomènes physiques importants est régi par des équations aux dérivées partielles (E.D.P) de type parabolique (*Bear* [6]) et peuvent être traités par les différentes techniques de résolution:

- Méthodes analytiques ;
- Méthodes analogiques ;
- Méthodes numériques.

A partir des relations mathématiques représentant ces phénomènes physiques, on peut concevoir des modèles numériques approchés permettant la résolution des cas concrets en tenant compte des particularités des domaines (conditions géométriques), la précision du modèle dépend de plusieurs facteurs dont la méthode numérique utilisée et le schéma de résolution adopté.

Signalons que le développement des modèles numériques a été possible grâce à la mise au point des ordinateurs avec leurs caractéristiques importantes (rapidité , capacité).

A cet effet un modèle bidimensionnel basé d'une part ,sur la méthode des différences finies utilisant une technique de résolution, d'A.D.I "Alternating Direction Implicit " (*Beam et al.* 1980, [5]) et d'autre part , sur la méthode des éléments finis, est proposé afin de prévoir le comportement de l'eau dans le milieu souterrain en mettant en évidence les différents cas d'écoulements d'eau à travers les milieux poreux et en particulier dans les barrages avec ces différentes configurations :

- Ecoulement en charge ou à surface libre.
- Milieu homogène ou hétérogène.
- Milieu saturé ou non saturé.

Il est important de noter que le problème à surface libre présente une non linéarité géométrique tandis que les écoulements dans la zone non saturée présentent une non linéarité physique (le coefficient de perméabilité dépend de la charge hydraulique).

L'algorithme implicite des différences finies ramène une équation différentielle à un système linéaire à matrice pentadiagonale, qui se transforme en une matrice tridiagonale par l'application de la technique de résolution citée auparavant, ce qui facilite énormément les calculs en utilisant l'algorithme de *Thomas* [14]. Lorsqu'il s'agit d'un domaine non uniforme (écoulements à surface libre), on utilise une approche récente qui consiste en des mailles curvilignes [4]. L'idée de base est de créer un domaine fictif uniforme de calcul discrétisé par des mailles uniformes et à l'aide d'un changement de variable, on exprime la solution dans le domaine réel.

Notons que ce modèle peut être appliqué aux calculs des nappes souterraines en adoptant des conditions aux limites spécifiques.

2- L'OBJECTIF DE L'ETUDE :

Le but principal de ce travail s'adresse d'une part, aux étudiants désirant améliorer leurs connaissances fondamentales concernant le mécanisme des écoulements dans les milieux poreux, et d'autre part aux Ingénieurs confrontés à des différents problèmes techniques liés aux écoulements (débit de fuite, stabilité, etc...), [11], [24]. Pour contribuer à résoudre ces problèmes, nous proposons un modèle numérique basé sur la résolution des E.D.P de type parabolique.

- équation de Laplace dans l'étude du régime stationnaire.
- équation de la chaleur dans l'étude du régime transitoire.

Les principaux objectifs de cette étude se résument à :

- 1/ La détermination de la distribution spatio-temporelle de la charge hydraulique et de pression de l'eau dans un domaine d'écoulement.
- 2/ L'évaluation du débit de fuite.
- 3/ La localisation de la position et la variation de la surface libre.
- 4/ La détermination de la vitesse et la durée d'une vidange rapide d'une retenue ainsi que la fluctuation de la surface libre.

Signalons que ce modèle dépend de plusieurs paramètres, qui sont difficilement mesurables et qui influent beaucoup sur l'exactitude des résultats, notamment pour les écoulements dans un milieu non saturé (*Van Genuchten*, 1980, [39]).

3- PRESENTATION DU TRAVAIL:

Il s'agit de proposer un modèle déterministe basé sur l'application des relations mathématiques décrivant des phénomènes physiques afin de simuler les problèmes des écoulements souterrains. Un modèle numérique bidimensionnel est développé, basé sur le schéma implicite aux différences finies inconditionnellement stable et la méthode des éléments finis.

Cette étude est traitée principalement en quatre parties :

- 1°/ Etude théorique (formulation des équations de base);
(chp I)
- 2°/ Modélisation numérique du phénomène des infiltrations;
(chp II, chp III)
- 3°/ Etude expérimentale et validation du modèle .
(chp IV ,chp V)
- 4°/ Application au barrage zoné de Fontaine des Gazelles qui est en cours de construction, pour simuler sa stabilité hydraulique et déterminer le temps nécessaire à une vidange rapide pour une vitesse donnée (chp VI).

4 - SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE :

Il est très utile de signaler qu'une étude bibliographique concernant la théorie et les méthodes d'analyse des écoulements permanents a été réalisée par D. Abderrahim (1990), [1] lors de ses travaux de Magister.

Concernant les écoulements en régime transitoire, la formulation mathématique est basée sur la loi de comportement. Richards (1931) proposa l'équation générale qui tient compte du milieu non saturé. Theis (1941) utilisa les intégrales de convolution pour étudier le problème de pompage des nappes souterraines en régime non permanent.

Les différentes recherches relatives aux écoulements dans un milieu à saturation variable avaient conduit à proposer les relations des coefficients non linéaires telle que la perméabilité, Gardner (1958), Brooks et Corey (1966), Irmay (1967), B. Jacob (1968).

La simulation numérique des écoulements transitoires a fait l'objet de plusieurs publications, on peut citer Taylor et Brown (1967) qui ont proposé un modèle en différences finies pour les écoulements saturés à surface libre, P. Guellec (1970) a traité le problème sans tenir compte de la zone non saturée, Neumann (1973) [30], Marino (1975), Cannon et Brebbia (1976) [10], Haverkamp et al (1977), Winter (1983), P. Humbert (1984) [21], Nielson et al (1986), Celia et al (1987) [12], Milly (1988), Thomas and Rees (1990) [36]. Tous ces chercheurs et d'autres ont modélisé les problèmes des écoulements souterrains soit par la méthode des différences finies ou celle des éléments finis et ont contribué à comprendre et à maîtriser relativement ce phénomène physique.

Récemment, nous assistons à un développement des modèles considérant une continuité entre la zone saturée et non saturée, Fredlund et Morgenstern (1977), Vaucelin (1979), Van Genchten (1980) [39] a réalisé une étude comparative des différents modèles existants avec l'expérimentation, il a conclu que le modèle de Mualem (1976) qui exprime les paramètres non linéaires de l'équation représentant les écoulements dans un milieu non saturé fournit des résultats satisfaisants.

CHAPITRE I

PROPRIETES DES ECOULEMENTS ET FORMULATION DES EQUATIONS DE BASE

1.1 INTRODUCTION:

Etant donné la nature hétérogène des sols, on est amené à définir quelques paramètres physiques en vue de mieux étudier, analyser et classer les sols. Rappelons les principales propriétés et caractéristiques des sols (saturés ou non saturés) qui constituent les données paramétriques dans l'étude de simulation, elles se résument à: [6], [25] (voir la fig 1.1)

- LA TENEUR EN EAU (VOLUMIQUE):

$$\theta = V_w / V_t \quad (1.1)$$

- LA POROSITE TOTALE :

$$\eta_t = V_v / V_t \quad (1.2)$$

- L'INDICE DES VIDES :

$$e = V_v / V_s = \eta_t / (1 - \eta_t) \quad (1.3)$$

- LE DEGRE DE SATURATION :

$$S_w = \theta / \eta_t \times 100 \quad (1.4)$$

On peut ajouter d'autres paramètres liés spécifiquement à un milieu non saturé, tels que:

- POROSITE DE DRAINAGE (SPECIFIC YIELD):

$$S_y = V_g / V_t \quad (1.5)$$

- LA CAPACITE DE RETENTION :

C'est la différence entre la porosité totale et la porosité de drainage représentant la partie du volume des vides non drainés.

$$\eta_{ret} = \eta_t - S_y \quad (1.6)$$

- où; V_t : représente le volume élémentaire total.
- V_w : représente le volume d'eau.
- V_v : représente le volume des vides.
- V_g : volume d'eau susceptible d'être drainé par gravité.

Enfin la (figure 1.1) illustre les différentes formes de l'eau dans le sol.

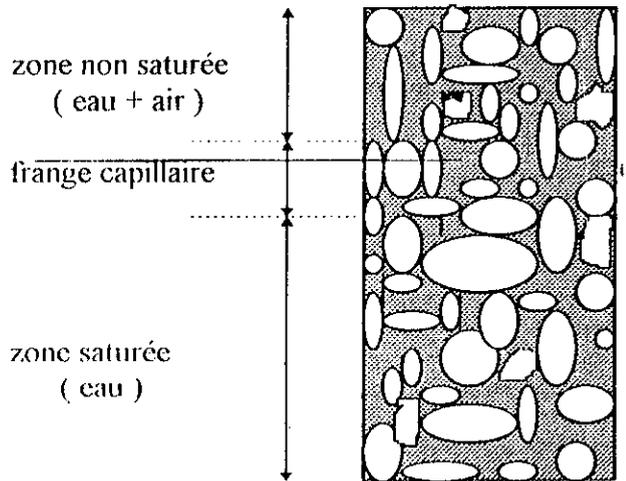


figure 1.1 : volume élémentaire du sol.

1.2 L'EMMAGASINEMENT :

La notion d'emménagement revêt un intérêt particulier dans l'étude des écoulements souterrains, elle indique la capacité d'un sol d'emmagasiner ou de libérer un certain volume d'eau, cette notion a été introduite par *Meinzer* (1925) afin d'interpréter les essais de pompage.

L'emménagement est lié à la compressibilité élastique du milieu et de l'eau, il représente un volume équivalent à la réduction des pores (fig 1.2).

En milieu d'écoulement à surface libre, il est prouvé que le coefficient d'emménagement est égal à la porosité de drainage en d'autres termes à la porosité efficace du milieu (*Bonnet*, 1982, [8]).

Le coefficient d'emménagement S est défini comme étant le volume d'eau libéré ou emmagasiné par unité de surface et par unité de rabattement (*Theis* 1935). Une autre notion généralement utilisée est l'emménagement spécifique S_s [L], qui correspond à une valeur normée de l'emménagement par unité de profondeur de l'aquifère (b).

$$S = S_s \cdot b \tag{1.7}$$

Lohman (1972) a évalué le coefficient S à partir du coefficient de la compressibilité totale de la nappe ;

$$\beta_t = \frac{-\delta V}{V \delta P} \tag{1.8}$$

où : V : est le volume de la nappe (pour une section unitaire $1 \times b$) ;
 δV : est la variation du volume d'eau pour une section unitaire et pour une variation unitaire de la charge hydraulique elle correspond au coefficient S .
 δP : variation de pression ($-\gamma \cdot h$)
 avec h qui représente la variation de la charge hydraulique unitaire, et γ le poids spécifique.

Donc la relation (1.8) devient ;

$$\beta_t = S / (b \times \gamma) \quad (1.8.1)$$

ou encore ;

$$S = \beta_t \cdot b \cdot \gamma \quad (1.8.2)$$

Par ailleurs, le coefficient de compressibilité peut s'écrire:

$$\beta_t = \left[\frac{1}{E_s} + \frac{\eta_t}{E_w} \right] \quad (1.8.3)$$

où :

E_s : est le module d'élasticité de l'eau .

E_w : est le module d'élasticité du sol.

Si on pose $\alpha = 1 / E_s$; $\beta = 1 / E_w$, on retrouve la relation de **Humbert** (1984) [21].

$$S = (\alpha + \eta \cdot \beta) \cdot \gamma \cdot b \quad (1.8.4)$$

Donc le coefficient d'emmagasinement spécifique devient:

$$S_s = (\alpha + \eta \cdot \beta) \cdot \gamma \quad (1.8.5)$$

L'ordre de grandeur du coefficient d'emmagasinement pour les zones aquifères selon **Lohman** (1972)

- Ecoulement en charge	$10^{-5} < S_s < 10^{-3}$	(1.8.6)
- Ecoulement à surface libre	$0.003 < S_s < 0.3$	

1.3 PHENOMENE DE SUCCION :

La notion de succion ou tension capillaire Ψ est liée à un milieu non saturé, elle traduit le comportement physique de l'eau dans les pores, qui est influencé par le pourcentage de l'air, on distingue trois parties principales (fig 1.1) (**De Marsilly** 1981).

La pression capillaire n'existe qu'à la présence d'une phase gazeuse, puisqu'elle provient de la tension qui se développe à l'interface air-eau. Notons que cette pression est négative et qu'il existe une relation entre la succion et la teneur en eau ($\Psi = f(\theta)$) selon la fig 2.4. [6], [21].

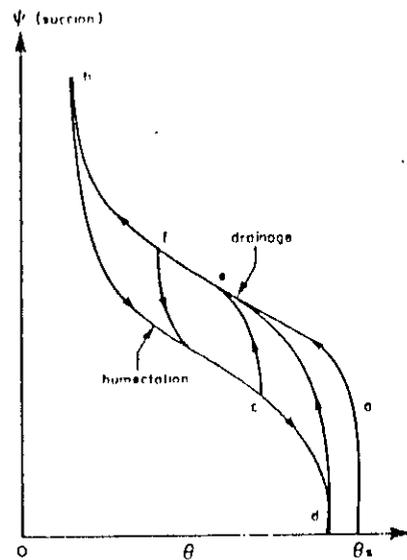


figure 1.2 : courbe de succion en fonction de la teneur en eau

1.4 COURBES CARACTERISTIQUES DES SOLS :

1.4.1 COURBES DE PERMEABILITE:

La perméabilité effective dans un milieu non saturé peut être exprimée en fonction de plusieurs variables, soit par:

- la teneur en eau $K(\theta)$;
- la pression capillaire $K(\Psi)$;
- la charge hydraulique $K(h)$;

La forme générale de la loi reliant la perméabilité à ces variables s'écrit:

$$K_s = K_r \cdot K_s \quad (1.9)$$

où : K_r : perméabilité relative $0 < K_r < 1$
 K_s : perméabilité à l'état saturé.

Notons que les relations de la perméabilité en milieu non saturé sont non linéaires; étant donné que cette perméabilité dépend de l'inconnue (charge hydraulique) ce qui complique davantage les calculs.

Concernant l'évaluation du coefficient de la perméabilité, plusieurs auteurs avaient proposé des formules expérimentales, puisqu'il varie d'une manière stochastique, on cite : [39], [14], [25]

Irmay (1967):

$$K(\theta) = K_s \cdot \left[\frac{(S_w - S_{w0})}{(1 - S_{w0})} \right]^4 \quad (1.10)$$

Gardner (1958):

$$K(\psi) = \frac{\alpha}{(\bar{h} + \psi)} \quad (1.11)$$

Van Genuchten (1980):

$$K(h) = K_s \left[1 - (a.h)^{n-1} \left(1 + (a.h)^n \right) \right] / \left[1 + (a.h)^n \right]^{m/2} \quad (1.12)$$

où : S_w : degré de saturation
 S_{w0} : degré de saturation maximal
 h : la valeur absolue de la charge hydraulique.
 a, b, n, m : les paramètres de régression non linéaire ($m=1-n/2$)

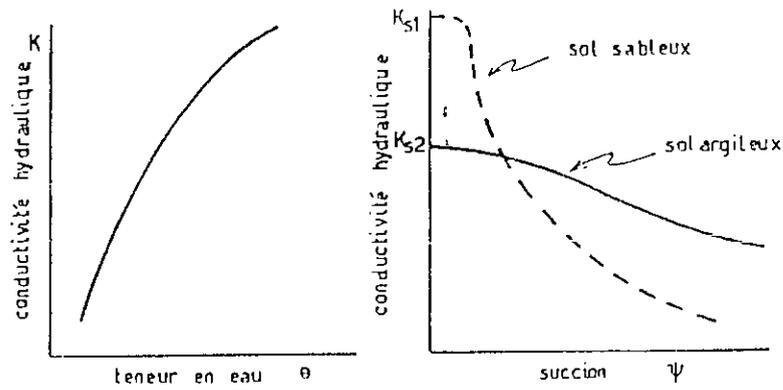


figure 1.3 : courbes de la perméabilité en fonction du suction.

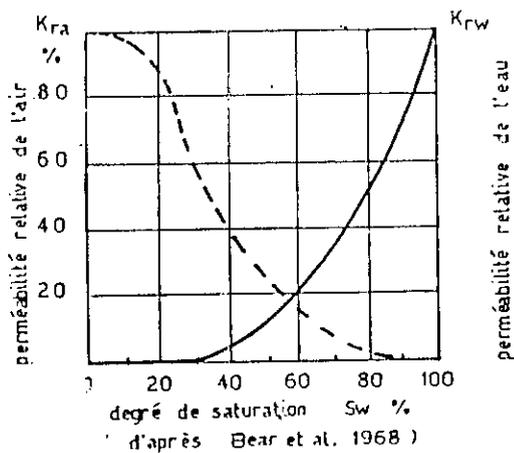


figure 1.4 : variation de la perméabilité relative en fonction du degré de saturation (d'après Bear 1968).

1.4.2 RELATIONS CARACTERISTIQUES UTILISEES :

Diverses relations empiriques des paramètres hydrauliques ont été proposées afin de prédire le comportement d'un sol non saturé, toutefois la difficulté réside dans la caractéristique non linéaire de ces relations. Dans cette simulation les paramètres nécessaires au fonctionnement du programme sont seulement la perméabilité et la teneur en eau, les relations adoptées sont [39]:

Mualem (1976) pour la teneur en eau :

$$\theta(h) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[1 + (a \cdot h)^n \right]^m \quad (1.13)$$

avec;

- θ_r : teneur en eau résiduaire.
- θ_s : teneur en eau à saturation.
- h : la valeur absolue de la charge hydraulique.
- a, n, m : paramètres de régression.

Van Genuchten (1980) [39] pour le coefficient de la perméabilité: (cf. L'eq. 1.12)

Il est important de signaler qu'on a évité l'utilisation des courbes caractéristiques (problème de saisie des données), ce qui nous a amené d'adopter des relations empiriques tirées de la littérature spécialisée et qui fournissent directement des valeurs discrètes (*Chung & Austin*, 1987, [13]).

1.5 FONDEMENTS MATHÉMATIQUES :

1.5.1 INTRODUCTION :

Dans le but de présenter un modèle mathématique simulant le phénomène d'écoulement en régime transitoire aussi bien dans un milieu saturé que non saturé, il est utile d'exposer les principales méthodologies utilisées dans l'étude de ce phénomène qui se résument en deux théories:

- La première admet une différence entre un écoulement dans une zone saturée et un écoulement dans une zone non saturée en essayant de modéliser chaque cas séparément.
- La seconde propose un modèle traitant l'écoulement en deux zones simultanément en considérant une certaine continuité entre ces deux zones (*Freeze* 1971, [15]).

Concernant notre étude, nous avons adopté la seconde approche, étant donné que mathématiquement c'est la même forme d'équation utilisée dans les deux zones, seulement les paramètres de l'équation changent. Le développement de l'équation régissant le phénomène des écoulements repose sur quelques principes physiques et relations exprimant les paramètres du sol, toutefois il est utile d'exposer les différentes hypothèses de validité de cette étude, afin de simplifier la forme de l'équation de base sans altérer sa représentativité à l'égard du phénomène à simuler.

1.5.2 HYPOTHESES DE CALCUL :

- a / Ecoulement bidimensionnel: Dans les barrages, la composante longitudinale est négligeable devant celles d'un plan transversal,

$$h = f(x, z, t)$$

b / Fluide incompressible et ses propriétés physiques sont invariantes avec la température;

$$\rho = \text{constante}$$

c / Milieu incompressible;

d / Ecoulement laminaire, puisque la vitesse écoulement est faible.

e / la conductivité hydraulique est une fonction continue dans le milieu non saturé.

f / écoulement horizontal (hypothèse de **Dupuit**).

1.5.3 EQUATION DE CONTINUTE DU FLUIDE :

Elle exprime le principe de conservation de la matière et s'applique en occurrence à tout corps en mouvement dans le sol. La relation générale de continuité s'obtient comme étant la différence entre les débits entrant et les débits sortant et qui correspond à la variation du volume des pores ($d\eta_e$) d'un élément de référence durant un moment (dt); mathématiquement elle s'écrit sous la forme:

$$\left(\frac{\partial(\rho.v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.v)}{\partial z} \right) dx.dy.dz + \rho.q_0 = -\frac{\partial(\rho.\eta)}{\partial t} dx.dy.dz \quad (1.14)$$

En considérant le fluide incompressible, cette expression peut s'écrire ;

$$\text{div}(v) + q_0 = -\frac{\partial\eta_e}{\partial t} \quad (1.15)$$

où :

- v : vitesse d'écoulement ;
- η_e : porosité efficace du sol ;
- ρ : masse volumique ;
- q_0 : débit volumique (terme d'apport ou de prélèvement) ;
- dx, dy, dz : dimensions de l'élément de référence .

1.5.4 LOI DE DARCY :

Historiquement, il s'agit d'une loi expérimentale qui révèle une conséquence particulière (mouvement de l'eau unidirectionnel dans un champ de pesanteur). Elle traduit l'application aux écoulements du principe fondamental de la mécanique qui exprime la relation entre le mouvement de l'eau et les forces qui l'engendrent.

Cette loi associe le vecteur vitesse **v** (du fluide) au gradient hydraulique **i** ($i = -\partial h / \partial x$) et à un paramètre **k** lié aux propriétés du milieu d'écoulement; mathématiquement, elle s'exprime:

$$v = -k . i \quad (1.16)$$

avec ;

- v : vitesse du fluide ;
- k : tenseur de perméabilité du milieu perméable ;
- i : gradient hydraulique

L'équation (1.16) est celle de *Darcy*, elle est la base de l'hydraulique souterraine, Notamment sous sa forme généralisée (en trois dimensions).

1.5.4.1 CONDUCTIVITE HYDRAULIQUE :

C'est un paramètre structural essentiel dans le modèle, il varie en fonction des caractéristiques physiques du milieu et celles du fluide. Lorsqu'il s'agit d'un milieu saturé le coefficient de perméabilité s'exprime souvent par cette relation (*Musy*, 1974 [28]) :

$$K = \frac{\rho \cdot g}{32 \cdot \nu} \cdot d^2 \quad (1.17)$$

avec :

ρ : poids spécifique du fluide [g/cm³]
 g : accélération terrestre [cm/s²]
 d : diamètre d'une sphère moyenne [cm]
 ν : viscosité dynamique [g/cm/s]

Il est important de signaler que le coefficient de linéarité de la relation (1.16) **K** correspond à la vitesse apparente, par ailleurs si on divise **k** par la porosité efficace, on obtient la vitesse réelle.

Cependant lorsqu'il s'agit d'un milieu non saturé le coefficient **K** devient un paramètre non linéaire puisqu'il s'exprime en fonction de la charge hydraulique (l'inconnue du problème) la relation de **K** est donnée par l'expression (1.12) où k_s correspond au coefficient de perméabilité dans un milieu saturé.

1.6 DIFFERENTS CAS TRAITES :

1.6.1 ECOULEMENT EN MILIEU SATURE :

L'équation de continuité (1.14) s'écrit d'une manière concise:

$$\text{div}(\rho \cdot v) + \rho \cdot q_0 = -\frac{\partial(\rho \cdot \eta_e)}{\partial t} \quad (1.18)$$

En dérivant le terme de droite, l'équation (1.18) devient;

$$\text{div}(\rho \cdot v) + \rho \cdot q_0 = -\left[\rho \cdot \frac{\partial \eta_e}{\partial t} + \eta_e \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \quad (1.19)$$

Le terme $(\partial \eta_e / \partial t)$ exprime la variation de volume des vides dans le temps (déformation du milieu) et le terme $(\partial \rho / \partial t)$ exprime l'expansion de l'eau.

Considérant ces deux termes qui déterminent l'emmagasinement spécifique (voir & 1.2 s'exprimant par la relation (2.7);

$$S_s = (\alpha + \eta_e \cdot \beta) \cdot \gamma \quad (1.7)$$

Signalons qu'une étude a été développée par **Bear** (1972), [6] où il a utilisé l'analogie des courbes de compressibilité en considérant :

$$\alpha = - \partial \eta / \partial p \quad (1.20.1)$$

et encore ;

$$\beta = - \partial \rho / \partial p \quad (1.20.2)$$

avec ;

$$\partial p = \gamma \partial h \quad (1.20.3)$$

Donc, il en résulte que l'écoulement en régime transitoire pour une particule de volume s'exprime par :

$$dh(\rho, v) + \rho q_0 = -\rho S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.21)$$

puisque $\rho =$ constante, l'équation (1.21) se simplifie:

$$dh(v) + q_0 = -S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.22)$$

La combinaison de (1.22) et l'équation de **Darcy** (1.16) permet d'écrire :

$$dh(K, grah) - q_0 = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.23)$$

Pour un milieu isotrope où k est une constante l'équation (1.23) se réduit à:

$$dh(gra h) - q_0 / K = (S_s / K) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.24)$$

Bien entendu, lorsque l'écoulement est considéré comme stationnaire on obtient une équation de Poisson de la forme :

$$dh(gra h) = q_0 / K \quad (1.25)$$

Si en plus l'écoulement est conservatif (l'apport est nul), on aura :

$$dh(gra h) = 0 \quad (1.26)$$

ou encore,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (1.26a)$$

Donc la solution recherchée dans un cas général (1.23) est la détermination de la charge hydraulique dans l'espace et dans le temps, elle décrit l'écoulement dans un milieu ayant un emmagasinement spécifique S_s . L'équation (1.26) est connue par les mathématiciens sous le nom de l'équation de *Laplace*.

1.6.2 ECOULEMENT EN MILIEU NON SATURÉ :

Dans un milieu non saturé, l'écoulement est influencé par l'effet de succion (§ 1.3), on doit considérer un milieu composé de sol-eau-air en tenant compte des transferts globaux entre ces trois composantes. La relation de *Darcy* est toujours applicable [6], néanmoins le coefficient de perméabilité devient une fonction directe de la teneur en eau ou de la charge hydraulique :

$$v = - K(\theta) \cdot \text{grad } h(\theta) \quad (1.27)$$

Nous constatons que la formulation mathématique est similaire au cas précédent à l'exception que l'équation régissant les écoulements dans un milieu à saturation partielle est non linéaire.

Neumann (1979) [31], *Hilfel* (1980) [22], *Van Genuchten* (1982) [39] ont développé l'équation décrivant l'écoulement transitoire en milieu non saturé sous plusieurs formes, soit en fonction de:

- la teneur en eau :

$$\text{div} \left[D(\theta) \cdot \text{grad } \theta \right] - q_0 = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.28)$$

- la charge hydraulique :

$$\text{div} \left[K(h) \cdot \text{grad } h \right] - q_0 = C(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.29)$$

Parfois, on rencontre une forme mixte (h, θ) :

$$\text{div} \left[\bar{K}(h) \cdot \text{grad } h \right] - q_0 = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.30)$$

où :

- $C(h) = \partial \theta / \partial h$: porosité de drainage [L]
- $K(h)$: conductivité hydraulique en milieu non saturé.
- $D(\theta)$: diffusivité en milieu non saturé [L² / T]
- Z : élévation [L].

On remarque que les paramètres de ces équations sont non linéaires, ce qui nécessite une procédure de linearisation (par le procédé itératif) afin d'effectuer les calculs.

Dans cette étude, nous avons adopté l'équation (1.29) puisqu'elle s'adapte mieux à une modélisation numérique. Cette équation s'écrit:

$$\text{div} \left[K(h) \cdot \text{grad } h \right] - q_0 = C(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.31)$$

Ou sous sa forme développée, pour un problème bidimensionnel :

$$\frac{\partial_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + k_x \frac{\partial h}{\partial x^2} + \frac{\partial_y}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + k_y \frac{\partial h}{\partial y^2} - q_0 = c(h) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.32)$$

où ;

$$c(h) = \partial \theta / \partial h + \delta \cdot S_s \quad (1.32a)$$

avec; $\delta = \theta/\eta$; tel que :

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si le milieu est saturé} \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \quad (1.32b)$$

et;

$$\partial \theta / \partial h = \begin{cases} 0 & \text{si le milieu est saturé} \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases} \quad (1.32c)$$

Afin d'évaluer $\theta(h)$, plusieurs formules ont été proposées, parmi lesquelles celle de **Mualem** (1976) [39].

$$\theta(h) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \cdot \left[1 + (a \cdot h)^n \right]^m \quad (1.13)$$

La dérivée de θ par rapport à h est :

$$\frac{\partial \theta}{\partial h} = \frac{1}{h} \cdot (n-1)(\theta_s - \theta_r) \left[1 - \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{n/(n-1)} \right] \quad (1.33)$$

Remarque 1.1:

La capacité spécifique de l'eau c représente la variation θ - h dans la zone non saturée et correspond à l'emmagasinement spécifique S_s en milieu saturé.

1.7 CONDITIONS AUX LIMITES ASSOCIEES :

L'analyse d'un phénomène physique quelconque nécessite la connaissance d'une part, des équations mathématiques représentatives et d'autre part, la géométrie du domaine de ce phénomène ainsi que les valeurs de la fonction à imposer sur ses limites, afin d'obtenir une solution unique pour chaque cas .

En ce qui concerne les conditions aux limites pour les écoulements souterrains, soit en régime permanent ou transitoire (limites variables dans le temps), elles sont de trois types:

- condition de type **Dirichlet** .
- condition de type **Neumann** .
- condition mixte

1.7.1 CONDITION DE DIRICHLET :

Lorsque la valeur de la fonction (dans notre cas la charge) est imposée sur une des limites du domaine, alors on peut écrire :

$$H(x,y,t) = H_0 \quad \text{pour } (x,y) \in \text{aux frontières}$$

avec ; H_0 étant une fonction connue.

1.7.2 CONDITION DE NEUMANN :

Cette condition présente une certaine difficulté par rapport à la précédente, dans la mesure où le gradient de la fonction est spécifié c'est-à-dire le flux traversant une frontière est connu, mathématiquement, nous pouvons écrire:

$$q_n = -k_{xx} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot n_x - k_{yy} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot n_y \quad (1.34)$$

avec ; $q_n = f_1(x,y,t)$ représente une fonction connue ;
 n_x, n_y : les normales aux limites dirigées vers l'extérieur.

1.7.3 CONDITION MIXTE :

Lorsqu'on rencontre les deux conditions précédentes sur une même limite, on parle d'une condition mixte ou condition de *Cauchy* (cas de la surface libre) :

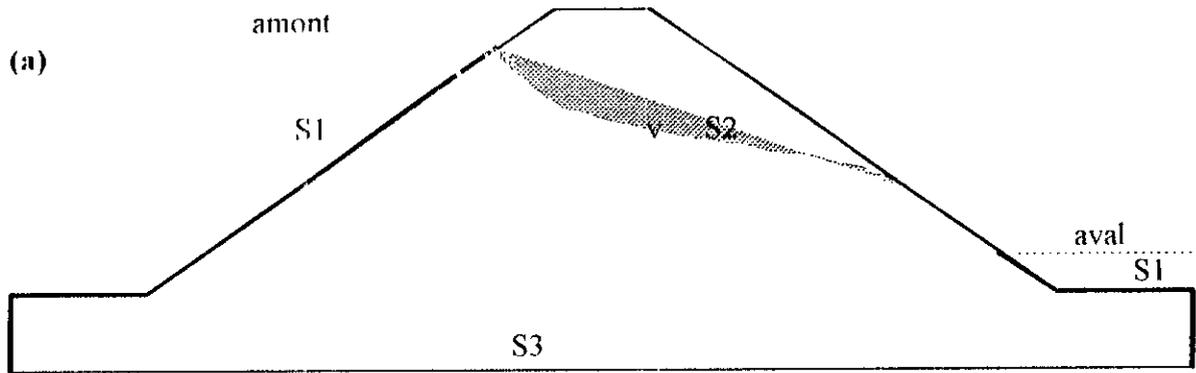
$$\sigma_1 \cdot \frac{\partial h}{\partial n} + \sigma_2 \cdot h = F_0 \quad (1.35)$$

avec ; F_0 : est une fonction connue
 σ_1, σ_2 : constantes ($0 < \sigma_1 < 1$; $0 < \sigma_2 < 1$).

1.7.4 CONDITIONS INITIALES :

Dans le cas d'un écoulement en régime transitoire; où la fonction évolue avec le temps, il est impératif de fixer l'état initial ($t_0 = 0$) afin de déterminer le champ de la fonction à l'état suivant, en fixant le pas de temps Δt .

1.7.5 CONDITIONS APPLIQUEES AUX BARRAGES :



avec:

- S_1 : condition de *Dirichlet*
- S_2 : condition de *Cauchy*
- S_3 : condition de *Neumann*

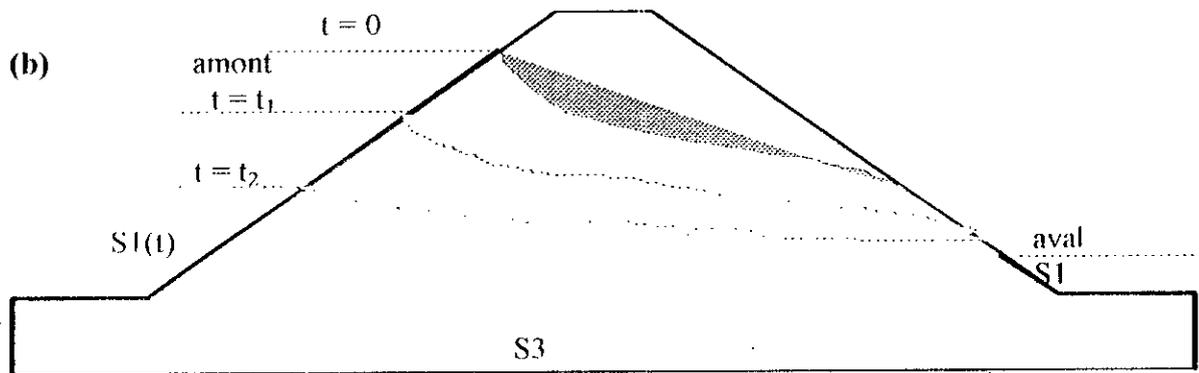


figure 1.5 : conditions aux limites dans les barrages en terre (écoulement à surface libre) a: régime permanent.
b: régime transitoire.

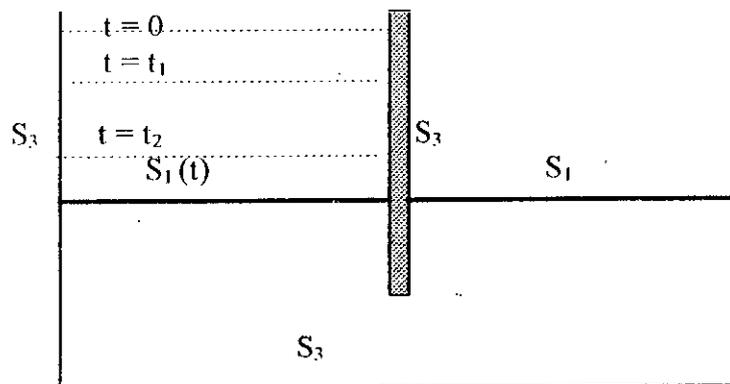


figure 1.6 : conditions aux limites pour un barrage aux palplanches (écoulements en charge), en régime transitoire

1.8 CONCLUSION :

Les coefficients des différentes équations formulées constituent les données paramétriques de l'étude. Ils sont déterminés, soit par voie expérimentale, soit à partir des relations caractéristiques (1.12) et (1.13) en évaluant préalablement les paramètres de régression.

Dans le cas des écoulements à surface libre, le coefficient de la dérivée par rapport au temps serait dû à la contribution des deux facteurs: porosité de drainage S_y (volume drainé par gravité) et la compressibilité élastique S_e qui est négligeable devant S_y . Signalons que nous avons négligé la capillarité et le milieu non saturé est considéré uniquement dans le cas transitoire.

CHAPITRE II

CONCEPTS SUR LES METHODES NUMERIQUES DES DIFFERENCES FINIES ET ELEMENTS FINIS

2.1 INTRODUCTION :

L'analyse numérique couvre les domaines d'études des algorithmes qui permettent la résolution numérique des problèmes physiques dont la formulation mathématique est établie.

Les équations différentielles aux dérivées partielles utilisées dans plusieurs domaines de la physique peuvent être résolues par l'une des méthodes numériques telle que la méthode des différences finies (**M.D.F**) ou celle des éléments finis (**M.E.F**). Ce sont des méthodes spécifiques aux traitements informatiques vu le nombre important des équations algébriques à manipuler. Notons que les méthodes analytiques ne peuvent être utilisées que pour des cas simples avec des conditions géométriques bien élaborées.

En mathématique, on distingue trois types d'équations aux dérivées partielles (E.D.P) régissant la plupart des phénomènes physiques:

- type elliptique (exemple l'équation de Laplace).
- type parabolique (exemple l'équation de la chaleur).
- type hyperbolique (exemple l'équation des ondes).

Donc la mise en œuvre d'une méthode numérique pour chaque type d'E.D.P passe par un certain nombre d'étapes:

- 1/ Evaluation des dérivées en chaque point.
- 2/ Représentation des conditions aux limites.
- 3/ Constitution d'un système numérique.
- 4/ Résolution de ce système.

Nous allons examiner chacune de ces deux méthodes pour mieux connaître leurs particularités spécifiques.

2.2 PRESENTATION DE LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES :

2.2.1 INTRODUCTION:

La méthode des différences finies (M.D.F) est simple à mettre en œuvre, elle est applicable aux différents problèmes régis par des équations aux dérivées partielles notamment lorsqu'il s'agit d'une géométrie régulière. La précision de cette méthode est généralement valable à condition de bien choisir les conditions aux frontières ainsi que l'algorithme de résolution.

Cette méthode numérique consiste à évaluer la fonction à chaque point du réseau d'une manière discrète et ceci par l'approximation des équations différentielles en se basant sur le

développement d'une fonction en série de Taylor. Donc le principe de cette méthode est de transformer une équation aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques qui sera résolu par l'un des algorithmes d'analyse numérique.

2.2.2 DISCRETISATION DU DOMAINE :

Soit un domaine plan Ω (le siège d'un phénomène quelconque) décomposé en des sous-domaines Ω_i tel que:

$$\Omega = \sum \Omega_i \quad (2.1)$$

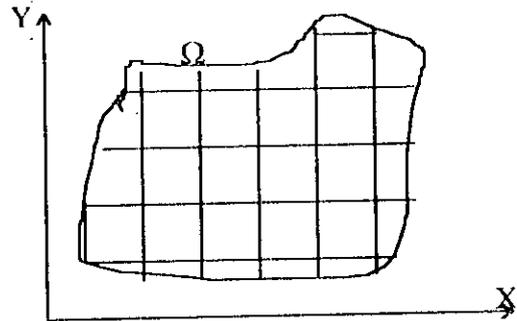


figure 2.1a: discrétisation d'un domaine quelconque

Chaque maille est définie par ses noeuds de coordonnées:

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + i \cdot \Delta x \\ y_j &= y_0 + j \cdot \Delta y \\ t_k &= t_0 + k \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec ;

Δx : pas de discrétisation selon l'axe x

Δy : pas de discrétisation selon l'axe y

Δt : pas de discrétisation dans le temps t

x_0, y_0, t_0 : positions initiales relatives à un repère donné.

i, j, k : indices muets caractérisant les différents pas de discrétisation.

Remarque 2.1 :

Il est possible d'utiliser un maillage variable dans l'espace et dans le temps en considérant des pas de discrétisation suivants $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta t_k$ (voir *Hirsh*, 1988, [19]).

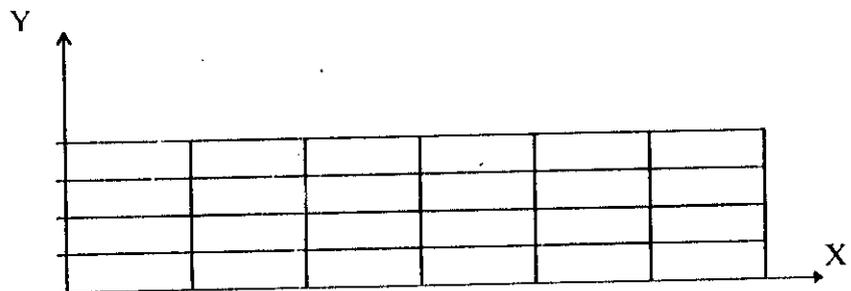


fig 2.1b : discrétisation d'un domaine par des mailles rectangulaires.

Chaque noeud est localisé par deux indices i (selon l'axe des abscisses) et j (selon l'axe des ordonnées) ;

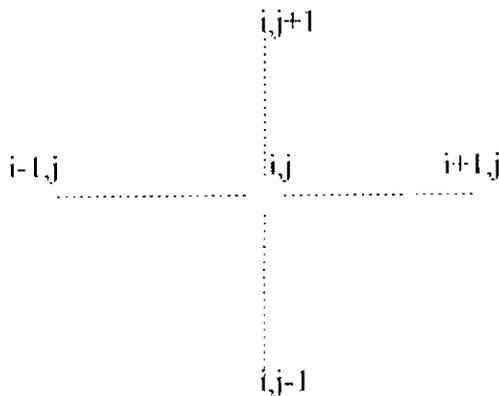


fig 2.2a : molécule de discretisation par les différences finies (5 points)

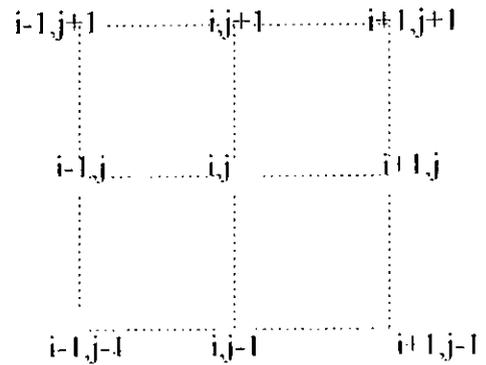


fig 2.2b : molécule de discrétisation (09 points)

Signalons que dans cette étude, on a utilisé des mailles quadratiques curvilignes pour les problèmes à géométrie variable (écoulement à surface libre), (voir l'annexe A).

2.2.3 APPROXIMATION DES DERIVEES PARTIELLES:

Rappelons que le développement en série de Taylor d'une fonction $f(x,y)$ s'écrit:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}) f(x, y) + \frac{1}{2!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^n f(x, y) \quad (2.3)$$

A partir de cette relation, on exprime les termes de dérivées partielles en fonction de $f(x,y)$, $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$, $f(x-\Delta x, y-\Delta y)$.

2.2.3.1 : NOTATION ADOPTEE :

Dans le but de faciliter la programmation, on utilise la notation indicielle:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_i \\ f(x+\Delta x) &= f_{i+1} \\ f(x-\Delta x) &= f_{i-1} \\ f(x,y) &= f_{i,j} \\ f(x+\Delta x,y) &= f_{i+1,j} \\ f(x-\Delta x,y) &= f_{i-1,j} \end{aligned}$$

De même pour la direction des ordonnées;

Concernant les dérivées partielles, on utilise la notation suivante: [17]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx} \quad , \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = f_{xxxx}$$

de même par Y ;

(2.4)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy} \quad , \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = f_{yyyy} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

2.2.3.2 - EXPRESSIONS AUX DIFFERENCES :

Appliquons la relation (2.3) selon l'axe des X, en tenant compte de cette notation, avec l'hypothèse que la fonction $f = f(x)$, on aura:

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \cdot f_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot f_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot f_{xxx} + R \quad (2.5.1)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \cdot f_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot f_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot f_{xxx} + R \quad (2.5.2)$$

On combinant ces deux dernières relations, on obtient les expressions des dérivées partielles:

$$f_x = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} \cdot f_{xxx} \quad (2.6)$$

$$f_{xx} = \frac{(f_{i+1} - 2 \cdot f_i + f_{i-1}))}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \cdot f_{xxxx} \quad (2.7)$$

Remarque 2.2:

Souvent, on néglige le deuxième terme de la droite qui s'appelle l'erreur d'approximation des dérivées partielles et qui s'écrit $O(\Delta x)^2$.

On procède de la même manière pour obtenir les expressions des dérivées selon l'axe des ordonnées, on aura:

$$f_y = \frac{(f_{j+1} - f_{j-1}))}{2 \cdot \Delta y} + O(\Delta y)^2 \quad (2.8)$$

$$f_{yy} = \frac{(f_{j+1} - 2 \cdot f_j + f_{j-1}))}{\Delta y^2} + O(\Delta y)^2 \quad (2.9)$$

Notons qu'il existe d'autres formes de ces relations algébriques, (Bear , 1979, [6] et Hirsch , 1988 , [19]). Cependant les relations (2.8) et (2.9) qui s'appellent les différences centrales ont l'avantage d'être les plus utilisées (schémas de base). Concernant la première dérivée, on ajoute ces deux formes:

- Différence avant (forward différence) :

$$f'_y = (f_{j+1} - f_j) / (\Delta y) + O(\Delta y)^2 \quad (2.10)$$

- Différence arrière (backward différence) :

$$f'_y = (f_j - f_{j-1}) / (\Delta y) + O(\Delta y)^2 \quad (2.11)$$

- **Dérivées d'ordre supérieur :**

L'approximation des dérivées partielles d'ordre trois et quatre sont données par les relations suivantes, en utilisant la différence centrale;

$$f_{xxx} = \frac{1}{2\Delta x^3} \cdot (f_{i+2} - f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}) - \frac{\Delta x^2}{4} \cdot f_{xxxx} \quad (2.12a)$$

$$f_{xxxx} = \frac{1}{\Delta x^4} \cdot (f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) - \frac{\Delta x^2}{6} \cdot f_{xxxxx} \quad (2.12b)$$

de même pour les dérivées selon Y , en changeant l'indice i par j , et x par y .

Remarque 2.3 :

Pour les problèmes plans où la fonction f dépend de x , y , on ajoute un deuxième indice à f aux différentes expressions de l'approximation ($f_{i,j}$).

Remarque 2.4 :

Lorsqu'une limite d'un domaine ne coïncide pas avec les noeuds, on doit faire une correction des expressions de l'approximation des dérivées, en considérant les pas de discrétisation $\beta_1 \Delta x$, $\beta_2 \Delta y$ (β_1, β_2 comprise entre 0 et 1). Pour notre cas, nous avons procédé autrement, en utilisant un maillage ajustable.

2.2.4 LES DIFFERENTS SCHEMAS AUX DIFFERENCES :

Il existe essentiellement trois types de schémas de base pour la résolution des équations aux dérivées partielles, en régime non permanent ($f=f(x,y,t)$) :

- Schéma explicite.
- Schéma implicite.
- Schéma de type Crank-Nicholson

Examinons les particularités de chaque schéma, en considérant comme exemple équation de la chaleur.

$$f_{xx} + f_{yy} = \partial f / \partial t \quad (2.14)$$

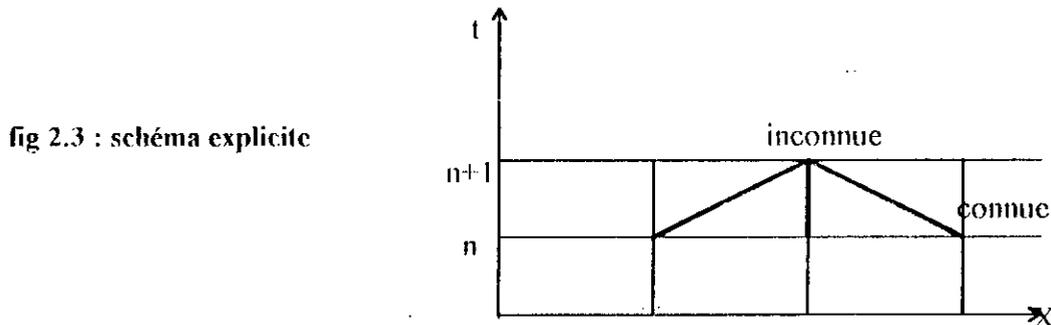
2.2.4.1 SCHEMA EXPLICITE :

En utilisant les relations (2.7) et (2.9) avec la différence avancée pour la dérivée dans le temps (dérivée d'*Euler*), on peut écrire:

$$f_{xx}^n + f_{yy}^n = \frac{(f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n)}{\Delta t} \quad (2.15)$$

Connaissant la solution à l'instant $n.\Delta t$ et cherchant à déterminer la solution à l'instant $(n+1).\Delta t$, donc il s'agit d'une équation à une seule inconnue (équation directe).

Bear [6] a schématisé cette forme par:



Signalons que l'inconvénient principal de ce schéma est sa stabilité numérique, un choix judicieux de Δt supprime ce problème, en vérifiant cette condition, d'après **Bear** [6]:

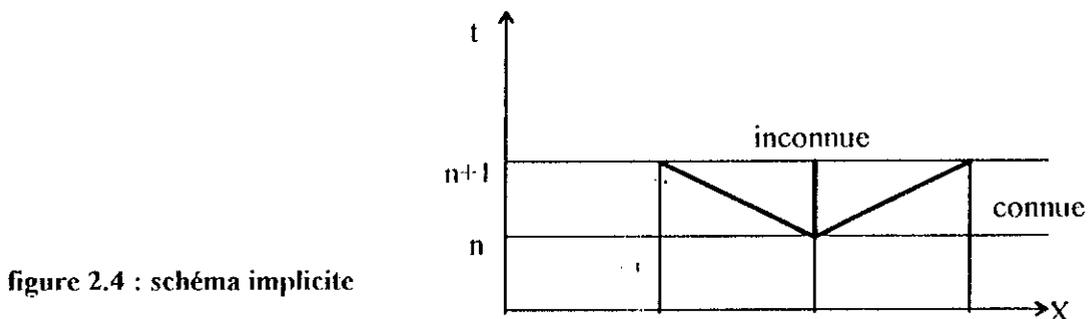
$$r \left[\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right] \leq 1/2 \quad (2.16)$$

2.2.4.2 SCHEMA IMPLICITE :

Si on exprime le premier membre de l'équation (2.15) à l'instant $(n+1)$, on obtient la forme implicite suivante:

$$f_{xx}^{n+1} + f_{yy}^{n+1} = \frac{(f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n)}{\Delta t} \quad (2.17)$$

On constate que l'équation (2.17) contient uniquement un seul terme connu et cinq termes inconnus à l'instant $(n+1).\Delta t$. Pour résoudre cette équation, on doit procéder par l'approche itérative (méthode des approximations successives). Notons que ce schéma est stable quel que soit le pas du temps Δt .



2.2.4.3 SCHEMA DE CRANK-NICHOLSON :

C'est une combinaison de deux schémas précédents, en divisant le premier membre en deux parties l'une à l'instant (n) et l'autre à l'instant (n+1), on aura :

$$\frac{1}{2}(f_{xx}^n + f_{xx}^{n+1} + f_{yy}^n + f_{yy}^{n+1}) = \frac{(f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n)}{\Delta t} \quad (2.18)$$

L'avantage de cette méthode est stable, ainsi que l'erreur de troncation sur le terme Δt est nettement inférieure aux cas précédents;

Notons que les trois schémas peuvent s'écrire sous forme commune:

$$\varpi \cdot f_{xx}^n + (1 - \varpi) f_{xx}^{n+1} + \varpi \cdot f_{yy}^n + (1 - \varpi) \cdot f_{yy}^{n+1} = \frac{(f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n)}{\Delta t} \quad (2.19)$$

On retrouve ;

- Schéma implicite si $\varpi = 0$;
- Schéma explicite si $\varpi = 1$;
- Schéma de Crank-Nicolson si $\varpi = 1/2$

2.2.5 METHODE DES DIRECTIONS ALTERNÉES (A.D.I) :

La méthode des directions alternées (A.D.I) est proposée initialement par *Beaceman* et *Rachford* (1955), elle est largement utilisée dans les programmes de résolution des équations aux dérivées partielles de type parabolique. [6] , [19] , [5] .

Le principe de cette méthode pour un problème bidimensionnel est l'utilisation de deux équations aux différences avec un pas de temps de $\Delta t/2$ pour chaque équation.

- la première équation est implicite uniquement en x (lignes), en utilisant l'approximation des termes selon y qui sont déjà connus à l'instant $n \cdot \Delta t$.
- La seconde est implicite seulement en y (colonnes), en utilisant les termes selon x calculés précédemment.

Donc la résolution d'un problème (e.g équation de la chaleur) passe par ces deux étapes, *Beam & Warming* (1980), [5] :

- 1^{ère} étape : (implicite en x)

$$f_{xx}^* + f_{yy}^n = \frac{(f_{i,j}^* - f_{i,j}^n)}{\Delta t} \quad (2.20a)$$

- 2^{ème} étape : (implicite en y)

$$f_{xx}^* + f_{yy}^{n+1} = \frac{(f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n)}{\Delta t} \quad (2.20b)$$

où ;

- l'indice (*) indique l'instant intermédiaire (n+1/2).Δt
- l'indice (n) indique l'instant explicite.

Les relations (2.20.a) et (2.20.b) sont traitées d'une façon itérative, les inconnues dans ces deux relations respectivement sont:

$$f_{i+1,j}^* , f_{i,j}^* , f_{i-1,j}^*$$

puis ;

$$f_{i,j+1}^{n+1} , f_{i,j}^{n+1} , f_{i,j-1}^{n+1}$$

Nous obtenons ainsi un système tridiagonal équations pour les lignes et un système similaire pour les colonnes de la forme:

$$A_i \cdot f_{i-1,j} + B_i \cdot f_{i,j} + C_i \cdot f_{i+1,j} = D_i \tag{2.21}$$

Ce système obtenu grâce à l'utilisation d'A.D.I est facile à résoudre par l'un des algorithmes numériques (pour notre étude, nous avons adopté l'algorithme de *Thomas*).

Notons que l'A.D.I converge et stable pour toute les valeurs de r (voir la relation 2.16); à condition que ces dernières ne soient pas très grandes.

Il est important de noter, que cette technique peut être utilisée encore pour les problèmes permanents, ainsi que les problèmes tridimensionnels (*Douglas 1962*), en obtenant trois formules au lieu de deux; avec un pas de temps de Δt / 3 pour chacune des équations.

2.2.6 ALGORITHME DE THOMAS :

L'utilisation de la méthode d'A.D.I conduit à des systèmes tridiagonaux (2.21). matriciellement cette relation s'écrit:

$$[AA](F) = (D)$$

ou encore ;

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \dots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ \dots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Cette matrice peut être triangularisée par la méthode d'élimination de Gauss, ce qui facilite davantage la résolution.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha\alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha\alpha_5 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \dots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\beta_1 \\ \beta\beta_2 \\ \beta\beta_3 \\ \beta\beta_4 \\ \beta\beta_5 \\ \dots \\ \beta\beta_{n-2} \\ \beta\beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Ce système particulier peut être résolu par les différents algorithmes numériques mais l'algorithme de **Thomas** présente l'avantage d'être facile à programmer. [5], [19], [28].

L'inconnue f_i est donnée par:

$$\begin{cases} f_{n-1} = \beta\beta_{n-1} & (2.24a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_i = \beta\beta_i - \alpha\alpha_i \cdot f_{i+1} & (i = n-2, n-3, \dots, 2) \end{cases} \quad (2.24b)$$

Substituant (2.24b) dans (2.21) seulement pour le terme f_{i-1} , on obtient:

$$A_i (\beta\beta_{i-1} - \alpha\alpha_{i-1} \cdot f_i) + B_i \cdot f_{i,j} + C_i \cdot f_{i+1,j} = D_i \quad (2.25)$$

Après l'arrangement des coefficients de la fonction f , on aura :

$$f_i = c_i / (b_i - a_i \cdot \alpha\alpha_{i-1}) \cdot f_{i+1} + (d_i - a_i \cdot \beta\beta_{i-1}) / (b_i - a_i \cdot \alpha\alpha_{i-1}) \quad (2.26)$$

avec $(i = 2, \dots, n-1)$

En comparant (2.26) et (2.24b), nous déduisons que:

$$\begin{cases} \alpha\alpha_i = c_i / (b_i - a_i \cdot \alpha\alpha_{i-1}) & (i = 3, 4, \dots, n-2) \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} \beta\beta_i = (d_i - a_i \cdot \beta\beta_{i-1}) / (b_i - a_i \cdot \alpha\alpha_{i-1}) & (i=3, 4, \dots, n-1) \end{cases} \quad (2.28)$$

A partir des conditions aux limites on détermine :

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_2 &= c_2 / b_2 \\ \beta\beta_2 &= d_2 / b_2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Cet algorithme (2.24) est plus connu sous le nom de **Thomas**.

Notons que la solution converge si la matrice AA est diagonalement dominante; où ces relations sont vérifiées:

$$|h_i| \geq |a_i| + |c_i| \quad (2.30)$$

$$|h_2| > |c_1|, \quad |b_{n-1}| > |a_{n-1}|$$

Remarque 2.5 :

On calcule les coefficients α_i , β_i (2.27) et (2.28) par ordre croissant de i . Cependant les valeurs de f_i seront calculées par ordre décroissant ($i=n-1, n-2, \dots, 2$) par la relation (2.24).

2.3- PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS : [10],[21], [31],[42]

Bien que le principe de cette méthode soit similaire aux différences finies, cependant elle est caractérisée par une étape essentielle et particulière qui est la définition de la forme intégrale du problème physique par ces deux approches :

- Approche variationnelle liée à l'énergie minimum.
- Approche des résidus pondérés qui est exprimé en termes de l'équation différentielle partielle.

Dans ce paragraphe, nous exposons uniquement les propriétés fondamentales de cette méthode et les lecteurs intéressés peuvent consulter les références sus-cités.

4.3.1 DISCRETISATION DU DOMAINE :

Le domaine du problème est divisé en sous-domaines (éléments) de différentes formes et tailles, permettant de prendre en compte à la fois la géométrie réelle, mais aussi les zones de grand gradient ' zones sensibles '. Ce découpage consiste à choisir pour variables la valeur de la fonction en quelques points (noeuds) du contour de l'élément et d'admettre une variation linéaire ou quadratique de la fonction entre ces points; les caractéristiques de chaque élément peuvent être différentes (milieu hétérogène). De même les conditions aux limites sont traitées de telle manière qu'elles peuvent être introduites au contour de tous les éléments *Zienkiewics* [42]. On utilise aussi les éléments à côté curviligne (isoparametriques) et les éléments à haute précision (quadratiques et cubiques). Dans cette étude, nous avons utilisé uniquement les éléments simples (linéaires). Notons que pour chaque élément correspond une matrice de rang égale au nombre de variable de l'élément.

2.3.2 FONCTIONS D'INTERPOLATION :

L'approximation nodale consiste à choisir une combinaison linéaire de fonctions supposées connues aux noeuds, comme suit:

$$h = \sum_{i=1}^{nelem} N_i \cdot h_i \quad (2.31a)$$

où ; N_i : fonction d'interpolation.
 h_i : valeurs nodales.
 $nelem$: nombre de noeuds pour chaque élément.

Les N_i sont des fonctions définies et continues sur l'élément et entre les éléments, ses propriétés essentielles sont:

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.31b)$$

avec ; $\sum N_i = 1$

Autrement dit, la fonction $N_i = 1$ au nœud i et 0 aux autres nœuds de l'élément, cette fonction est nulle à l'extérieur de l'élément. Cette fonction s'exprime en fonction des coordonnées physiques (x, y) ou en fonction des coordonnées naturelles (ξ, η) . Prenons l'exemple d'un élément quadrilatéral (utilisé dans cette étude), la charge est approximée par:

$$h = N_1.h_1 + N_2.h_2 + N_3.h_3 + N_4.h_4 \quad (2.32)$$

où ;

$$N_1 = 1/4.(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = 1/4.(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_3 = 1/4.(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = 1/4.(1+\xi)(1-\eta)$$

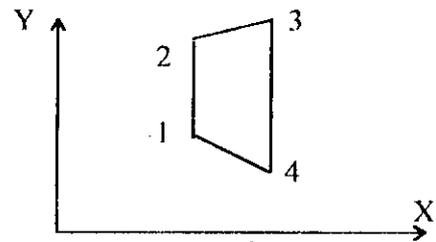


figure 2.5 : élément réel

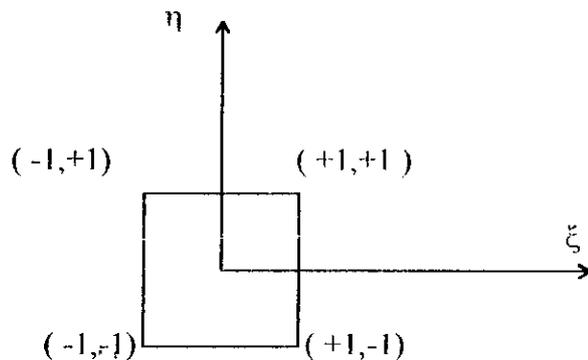


figure 2.6 : élément de référence

Notons encore que cette méthode est caractérisée par la technique d'assemblage permettant de passer des matrices et vecteurs élémentaires à un système global, comme nous allons voir dans le prochain chapitre).

2.4 CRITERE D'ANALYSE D'UNE METHODE NUMERIQUE :

Afin d'étudier la fiabilité et l'efficacité de ces méthodes, il est impératif d'examiner ces éléments:

- Erreur de discrétisation.
- convergence.
- stabilité numérique.

2.4.1 ERREUR DE DISCRETISATION :

On définit une erreur $\varepsilon(x)$ de l'approximation des dérivées partielles par la différence en valeur absolue entre la solution exacte et celle obtenue numériquement.

$$\varepsilon(x) = |f_i - \varphi_i| \quad (2.33)$$

où :

φ_i : est la valeur exacte de la fonction.

f_i : est la valeur calculée.

Il est évident que $\varepsilon(x)$ détermine la précision de chaque schéma.

2.4.2 CONVERGENCE :

Un schéma est convergent avec l'équation qu'il discrétise si l'erreur de discrétisation tend vers zéro en diminuant le pas de discrétisation:

$$\text{quand } \begin{array}{l} \varepsilon(x) \longrightarrow 0 \\ \Delta x \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.34)$$

2.4.3 STABILITE NUMERIQUE:

La méthode est dite stable ; si une perturbation sur la fonction $f(x)$ n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution approchée et cela quel que soit le pas de discrétisation. Autrement dit, la solution de l'équation par une méthode numérique demeure bornée à la limite dans son amplitude. (*Hirsch*, 1988, [19])

On peut schématiser ces critères d'analyse d'une méthode numérique comme suit : [19]

solution numérique $\xrightarrow{\text{stabilité}}$ solution exacte de l'équation discrète.

solution numérique $\xrightarrow{\text{convergence}}$ solution exacte de l'équation différentielle.

solution exacte de l'eq. discrète $\xrightarrow{\text{l'erreur}}$ solution exacte de l'équation différentielle.

2.5 CONCLUSION :

Après cet aperçu de ces méthodes numériques utilisées dans l'analyse des écoulements souterrains, nous pouvons dire que la méthode des différences finies est simple à mettre en oeuvre mais il faudra améliorer sa précision par, d'une part l'utilisation des expressions des différences qui ne néglige pas le terme de l'erreur et d'autre part l'utilisation des mailles curvilignes (voir l'annexe A). Dans cette étude, nous n'avons pas pu appliquer cette méthode aux cas des milieux hétérogènes ou non saturés (problème d'instabilité numérique). Par contre, la méthode des éléments finis s'apprête à toutes les configurations.

CHAPITRE III

APPLICATION AUX PROBLEMES DES ECOULEMENTS SOUTERRAINS

3.0 INTRODUCTION :

La formulation mathématique étant développée précédemment, l'application de la méthode numérique des différences finies et celle des éléments finis permet d'avoir des systèmes algébriques d'équations discrètes. Nous allons traiter le problème d'écoulement dans les milieux saturés et à saturation partielle dans le cas des écoulements transitoires.

3.1 ECOULEMENTS DANS LES MILIEUX SATURES :

Nous avons vu que l'équation générale représentant le phénomène d'écoulement transitoire en milieu saturé s'écrit:

$$\operatorname{div}(K \cdot \operatorname{grad} h) - q_0 = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.23)$$

Ou sous une forme développée (en deux dimensions) ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) - q_0 = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.1)$$

Ou encore :

$$\frac{\partial K_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + K_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial K_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + K_y \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - q_0 = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.2)$$

Lorsqu'il s'agit d'un milieu homogène l'équation (3.2) se simplifie à:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - q_0 = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.3)$$

3.1.1 APPROXIMATION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES :

La discrétisation de l'équation (3.2) qui représente le cas général sur tout le domaine conduit à des équations aux différences pour chaque noeud i, j , en adoptant la notation ci-après [19]:

$$\delta_x K \cdot \delta_x h + K_x \cdot \delta_x^2 h + \delta_y K \cdot \delta_y h + K_y \cdot \delta_y^2 h - q_0 = S_s \cdot \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.4)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 \delta_x k &\equiv (K_{x_{i+1,j}} - K_{x_{i,j}}) / \Delta x ; \\
 \delta_y k &\equiv (K_{y_{i,j+1}} - K_{y_{i,j}}) / \Delta y ; \\
 \delta_x h &\equiv (h_{i+1,j} - h_{i,j}) / \Delta x ; \\
 \delta_y h &\equiv (h_{i,j+1} - h_{i,j}) / \Delta y ; \\
 \delta_x^2 h &\equiv (h_{i-1,j} - 2 \cdot h_{i,j} + h_{i+1,j}) / (\Delta x)^2 \\
 \delta_y^2 h &\equiv (h_{i,j-1} - 2 \cdot h_{i,j} + h_{i,j+1}) / (\Delta y)^2
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

L'utilisation de la méthode des directions alternées **(A.D.I) Beam & Warming** [5] conduit à traiter l'équation (3.4) en deux étapes avec un demi pas de temps ($\Delta t / 2$) pour chacune de ces étapes. La première étape où l'équation aux différences est implicite uniquement en x (toutes les lignes); suivie en deuxième étape par une équation qui est implicite seulement en y (pour les colonnes).

- étape 1 :

$$\delta_x K^* \cdot \delta_x h^* + K^*_{x_{i,j}} \cdot \delta_x^2 h^* + \delta_y K^n \cdot \delta_y h^n + K_{y_{i,j}}^n \cdot \delta_y^2 h^n - q_0 = S_s \cdot \frac{h_{i,j}^* - h_{i,j}^n}{\Delta t / 2} \tag{3.6a}$$

- étape 2 :

$$\delta_y K^* \cdot \delta_y h^* + K^*_{x_{i,j}} \cdot \delta_y^2 h^* + \delta_x K^{n+1} \cdot \delta_x h^{n+1} + K_{y_{i,j}}^{n+1} \cdot \delta_y^2 h^{n+1} - q_0 = S_s \cdot \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^*}{\Delta t / 2} \tag{3.6b}$$

Dans le cas général, les coefficients S_s , K , q_0 varient dans le temps, on les exprime à des instants explicites afin de surmonter le problème de non-linéarité de ces coefficients, en suivant cette procédure:

- 1/ Détermination des coefficients à l'instant n ;
- 2/ Calcul de l'inconnue h à l'instant intermédiaire $n+1/2$ par l'équation (3.6a);
- 3/ Détermination des coefficients en fonction de $h^{n+1/2}$;
- 4/ Evaluation de la charge hydraulique à l'instant ($n+1$) par l'équation (3.6b).

L'avantage d'utiliser la technique d' A.D.I est d'avoir pour chaque étape un système tridiagonal sous la forme:

$$A_p \cdot h_{p-1} + B_p \cdot h_p + C_p \cdot h_{p+1} = D_p \tag{3.7}$$

où : $p = i$ pour les lignes.
 $p = j$ pour les colonnes

Nous allons transformer les relations (3.6a) et (3.6b) à une forme similaire à (3.7) afin de déterminer les coefficients A, B, C, D pour chaque relation.

L'équation (3.6.a) et (3.6b) s'écrivent :

$$\frac{2.S_s}{\Delta t}(h_{i,j}^* - h_{i,j}^n) = \frac{1}{\Delta x^2} \left[(Kx_{i+1,j}^* - Kx_{i,j}^*)(h_{i+1,j}^* - h_{i,j}^*) + Kx_{i,j}^*(h_{i-1,j}^* - 2h_{i,j}^* + h_{i+1,j}^*) \right] + \frac{1}{\Delta y^2} \left[(Ky_{i,j+1}^n - Ky_{i,j}^n)(h_{i,j+1}^n - h_{i,j}^n) + Ky_{i,j}^n(h_{i,j-1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j+1}^n) \right] - q_0^* \quad (3.8a)$$

suivie par :

$$\frac{2.S_s}{\Delta t}(h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n) = \frac{1}{\Delta x^2} \left[(Kx_{i+1,j}^* - Kx_{i,j}^*)(h_{i+1,j}^* - h_{i,j}^*) + Kx_{i,j}^*(h_{i-1,j}^* - 2h_{i,j}^* + h_{i+1,j}^*) \right] + \frac{1}{\Delta y^2} \left[(Ky_{i,j+1}^{n+1} - Ky_{i,j}^{n+1})(h_{i,j+1}^{n+1} - h_{i,j}^{n+1}) + Ky_{i,j}^{n+1}(h_{i,j-1}^{n+1} - 2h_{i,j}^{n+1} + h_{i,j+1}^{n+1}) \right] - q_0^{n+1} \quad (3.8b)$$

Il est important de signaler que les paramètres physiques tels que la perméabilité k , le coefficient d'emmagasinement spécifiques S_s et le débit volumique q_0 sont estimés à l'instant explicite c'est-à-dire :

- Dans équation (3.8.a) :

$$\begin{aligned} Kx^* &\equiv Kx^n \\ q_0^* &\equiv q_0^n \end{aligned}$$

Et dans équation (3.8.b) :

$$\begin{aligned} Ky^{n+1} &\equiv ky^* \\ q_0^{n+1} &\equiv q_0^* \end{aligned}$$

Notons aussi que $h_{i,j}^*$ représente la valeur intermédiaire (la valeur à la fin de la 1^{ère} étape et au début de la seconde).

Nous constatons que les relations (3.8.a) et (3.8.b) sont implicites avec uniquement 03 inconnues dans chacune de ces deux relations, ce qui nous permet de déterminer ainsi les coefficients de l'équation (3.7).

- 1^{ère} étape:

$$A_i \cdot h_{i-1} + B_i \cdot h_i + C_i \cdot h_{i+1} = D_i \quad (3.7.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_i &= -kx_{i-1/2,j} / \Delta x^2 \\ B_i &= 2.S_s / \Delta t + (kx_{i+1/2,j} + kx_{i-1/2,j}) / \Delta x^2 \\ C_i &= -kx_{i+1/2,j} / \Delta x^2 \\ D_i &= 2.S_s / \Delta t \cdot h_{i,j}^n + 1 / \Delta y^2 \cdot (ky_{i,j+1/2} (h_{i,j+1} - h_{i,j}) - ky_{i,j-1/2} (h_{i,j} - h_{i,j-1})) + q_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

où :

$$\begin{aligned} kx_{i-1/2,j} &= (kx_{i+1,j} + kx_{i,j}) / 2 \\ ky_{i,j+1/2} &= (ky_{i,j+1} + ky_{i,j}) / 2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

L'indice i varie entre 1 et N_x (le nombre de points selon X).

- 2^{ème} étape :

$$A_j \cdot h_{j-1} + B_j \cdot h_j + C_j \cdot h_{j+1} = D_j \tag{3.7.2}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_j &= -k_{y_{i,j-1/2}} / \Delta y^2 \\ B_j &= 2.S_s/\Delta t + (k_{y_{i,j+1/2}} + k_{y_{i,j-1/2}}) / \Delta y^2 \\ C_j &= -k_{y_{i,j+1/2}} / \Delta y^2 \\ D_j &= 2.S_s/\Delta t \cdot h_{i,j}^* + 1/\Delta x^2 \cdot (k_{x_{i+1/2,j}}(h_{i+1,j} - h_{i,j}) - k_{x_{i-1/2,j}}(h_{i,j} - h_{i-1,j})) + q_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

où :

L'indice j varie de 1 à N_y (nombre de points selon y)

Considérons un milieu anisotrope (k_{x_{ij}} = k_{xx} = constante et k_{y_{ij}} = k_{yy} = c^{te}), nous aurons une forme simplifiée des coefficients de l'équation (3.7).

Les relations (3.9) deviennent :

$$\begin{aligned} A_i &= -k_{xx} / \Delta x^2 \\ B_i &= 2.S_s/\Delta t + 2 k_{xx} / \Delta x^2 \\ C_i &= -k_{xx} / \Delta x^2 \\ D_i &= 2.S_s/\Delta t \cdot h_{i,j}^* + k_{yy}/\Delta y^2 (h_{i,j-1} - 2.h_{i,j} + h_{i,j+1}) + q_0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

De même pour les relations (3.11),

$$\begin{aligned} A_j &= -k_{yy} / \Delta y^2 \\ B_j &= 2.S_s/\Delta t + 2. k_{yy} / \Delta y^2 \\ C_j &= -k_{yy} / \Delta y^2 \\ D_j &= 2.S_s/\Delta t \cdot h_{i,j}^* + k_{xx}/\Delta x^2 (h_{i-1,j} - 2.h_{i,j} + h_{i+1,j}) + q_0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Dans chaque instant, il s'agit de résoudre un système tridiagonal pour chacune des deux étapes et à chaque instant en tenant compte des conditions aux limites et des conditions initiales.

L'équation (3.7) est représentée matriciellement par :

$$[AA] \cdot (H) = (D) \tag{3.14a}$$

Ou encore :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ \dots \\ h_{n-2} \\ h_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ \dots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.14b}$$

Le système (3.14) sera résolu par l'algorithme de *Thomas* (§ 2.1.6) où AA est définie *positive* et diagonalement dominant (et symétrique dans le cas d'un milieu homogène), *Mc Donald & Harbaugh* (1988).

- AA : Contient les coefficients du système dépendant de la perméabilité et des caractéristiques géométriques de discretisation.
- H : représente le vecteur des charges hydrauliques aux noeuds du domaine.
- D : Est le vecteur contenant des termes connus tel que les charges spécifiées par les conditions aux limites et le coefficient d'emménagement spécifique ainsi que le débit volumique q_0 .

3.1.1.2 CONDITIONS AUX LIMITES :

- Condition de Dirichlet :

Lorsqu'on écrit l'équation (3.7) pour l'indice $p = 2$ (la première équation), on aura :

$$b_2 \cdot h_2 + c_2 \cdot h_3 = d_2 - a_2 h_1 = \bar{d}_2 \quad (3.15a)$$

De même pour la dernière équation du système :

$$a_{nx-1} \cdot h_{nx-2} + b_{nx-1} \cdot h_{nx-1} = d_{nx-1} - c_{nx-1} h_{nx} = \bar{d}_{nx-1} \quad (3.15b)$$

On remarque que lorsqu'il s'agit d'une condition de *Dirichlet*, la première et la dernière valeur du vecteur D seront modifiées comme indiqué ci-dessus.

- Condition de Neumann :

Dans le cas où la limite d'un domaine est imperméable ($\partial h / \partial n = 0$ ou $h_{p+1} = h_p$), la première équation du système (3.14) s'écrit :

$$(a_2 + b_2) \cdot h_2 + c_2 \cdot h_3 = d_2 \quad (3.16a)$$

où :

$$\bar{b}_2 = a_2 + b_2$$

De même pour la dernière équation ($nx-1$) :

$$a_{nx-1} h_{nx-1} + (b_{nx-1} + c_{nx-1}) h_{nx} = d_{nx-1} \quad (3.16b)$$

avec :

$$\bar{b}_{nx-1} = b_{nx-1} + c_{nx-1}$$

Donc cette condition influe sur les coefficients b_2 et b_{nx-1} .

3.1.2 APPROXIMATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

L'approximation de l'équation (1.23) par éléments finis implique l'écriture de cette relation sous forme algébrique pour chaque élément (système local) et faire l'assemblage pour obtenir un système global (voir § 4.3), en passant par la formulation intégrale de (1.23).

3.1.2.1 formulation intégrale :

Pour une fonction de pondération N (selon **Galerkin**), la forme intégrale de l'équation (3.3) peut s'écrire (voir **Zienkiewicz** ,1979 , [42]) :

$$\varpi = \int_{\Omega} N (\text{div} (K \text{ grad } h) - S_s \cdot \partial h / \partial t - q_0) \cdot d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

Ou encore ;

$$\int_{\Omega} N (\text{div} (K \text{ grad } h) \cdot d\Omega = \int_{\Omega} N \cdot S_s \cdot \partial h / \partial t \cdot d\Omega + \int_{\Omega} N \cdot q_0 \cdot d\Omega = 0 \quad (3.19)$$

Dans un domaine à deux dimensions (x,y) on aura :

$$\int_{\Omega} N \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} (k_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y}) \right) dx \cdot dy = \int_{\Omega} N \cdot S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} N \cdot q_0 \cdot d\Omega \quad (3.20)$$

Integrant le premier membre par partie :

$$\iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} k \cdot \frac{\partial h}{\partial n} \cdot N \cdot d\Gamma = \int_{\Omega} N \cdot S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot d\Omega + \int_{\Omega} N \cdot q_0 \cdot d\Omega \quad (3.21)$$

Où ; Ω : Domaine d'écoulement.
 Γ : Limite d'un domaine.

Sur Γ , on a les conditions imposées:

a/ $h = \bar{h}$ (potentiel imposé sur Γ_h).
 b/ $k \cdot \partial h / \partial n = \bar{q}$ (débit imposé sur Γ_q).
 c/ $\int_{\Gamma} k \cdot \partial h / \partial n \cdot N \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_q} N \cdot \bar{q} \cdot d\Gamma$ (la condition mixte est ramenée à l'une des deux premières conditions).

$$(3.22)$$

La charge hydraulique est approximée par les valeurs nodales (voir § 2.3) :

$$h = N_i (x,y) \cdot h (t) \quad (3.23)$$

Substituant cette relation dans (3.21), on obtiendra:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot k_x \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot k_y \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] h_i \cdot dx dy = - \int_{\Omega} N_j \cdot N_i \cdot S_s \cdot \frac{\partial h_i}{\partial t} \cdot dx dy - \int_{\Omega} N_j \cdot q_0 \cdot dx dy + \int_{\Gamma_q} N_j \cdot \bar{q} \cdot d\Gamma \quad (3.24)$$

Ce qui peut se mettre sous la forme globale:

$$[KK] \cdot \{H\} + [CC] \cdot \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} = \{F\} \quad (3.25)$$

Avec :

$KK = \sum k_{ij}^e$: matrice d'écoulement.

$CC = \sum c_{ij}^e$: matrice contenant les termes de compressibilité du milieu.

$F = \sum f_{ij}^e$: vecteur débit et conditions aux limites.

En comparant les deux relations (3.25) et (3.24), on écrit:

$$K_{i,j}^e = \int_{\Omega_e} \left[k_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dx dy \quad (3.26a)$$

$$C_{i,j}^e = \int_{\Omega_e} N_j \cdot N_i \cdot S_s \cdot dx dy \quad (3.26b)$$

$$F_i^e = - \int_{\Omega_e} N_j \cdot q_0 \cdot dx dy + \int_{\Gamma_{qc}} N_j \bar{q} d\Gamma \quad (3.26c)$$

Ces matrices et vecteur sont exprimées dans un repère local lié à chaque élément. Le passage à un repère global s'effectue à l'aide d'une technique d'assemblage (voir [35], [37], [42]).

3.1.2.2 Intégration dans le temps :

On remplace la dérivée par rapport au temps $\partial h / \partial t$ par l'expression des différences finies (voir § 2.2.3):

$$\partial h / \partial t = (h^{n+1} - h^n) / \Delta t \quad (3.27)$$

En choisissant le schéma implicite et en remplaçant cette relation dans (5.25), on obtient:

$$[KK] \cdot \{H\}^{n+1} + [CC] \cdot \left\{ \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \right\} = \{F\} \quad (3.28)$$

Ou encore ;

$$\left\{ [KK] + \frac{1}{\Delta t} [CC] \right\} \cdot \{h\}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \cdot [CC] \cdot \{h\}^n + \{F\} \quad (3.29)$$

et l'équation peut se mettre sous la forme :

$$[KG] \cdot \{h\}^{n+1} = \{FG\} \quad (3.30a)$$

avec ;

$$[KG] = [KK] + \frac{1}{\Delta t} [CC] \quad (3.30b)$$

$$\{FG\} = \frac{1}{\Delta t} \cdot [CC] \cdot \{h\}^n + \{F\} \quad (3.30c)$$

Finalement, on obtient un système d'équations algébriques où la matrice et le vecteur dépendent du temps soit dans le repère local, soit dans le repère global (3.30a).

En introduisant les différentes conditions aux limites et les conditions initiales (la solution h^0), ce système sera résolu par la méthode d'élimination de **Gauss**, (**Touzot & Dhett** [37]). Il faut connaître les conditions initiales (la solution h^0) pour déterminer l'évolution de la solution aux instants ultérieurs.

3.1.2.3 élément utilisé et transformation des dérivées : [37] , [42]

Nous avons utilisé un élément quadrilatéral isoparamétrique à 4 noeuds, comme en différences finies pour une meilleure comparaison des résultats.

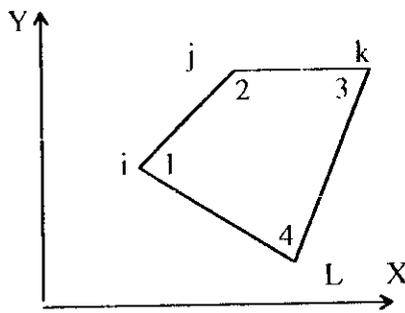


figure 3.1 : élément réel (x, y)

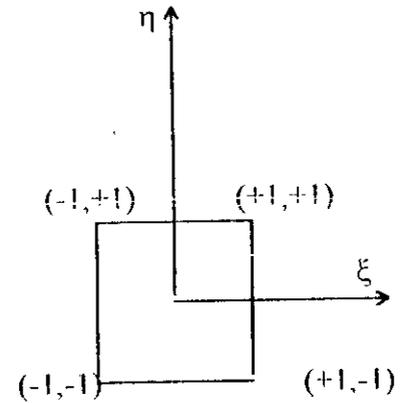


figure 3.2 : élément de référence

Les coordonnées des noeuds s'écrivent (voir § 2.3) :

$$x(\xi, \eta) = N_i \cdot x_i = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.32a)$$

De même pour y :

$$y(\xi, \eta) = N_i \cdot y_i = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (3.32b)$$

L'approximation des dérivées sur l'élément réel étant complexe, ceci nous a amené à choisir l'élément isoparamétrique. La transformation des dérivées entre le plan (x, y) et le plan (xi, eta) se fait au moyen d'une matrice dite ' Jacobienne ' noté **J** (voir l'annexe A).

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = [J] \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Exprimant les dérivées dans le plan (x,y) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} = [J^{-1}] \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.34a)$$

avec ;

$$[J^{-1}] = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.34b)$$

le déterminant |J| est donné par :

$$|J| = \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (3.34c)$$

Le Jacobien peut s'écrire en fonction des fonctions d'interpolation N_i comme suit (**Smith & Griffiths** 1988 [35] :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} (x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} [N_i] \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \\ x_l & y_l \end{bmatrix} \quad (3.35a)$$

En utilisant les relations de N_i (voir relation 4.)

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\xi) \\ -(1-\xi) & -(1+\eta) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \\ x_l & y_l \end{bmatrix} \quad (3.35b)$$

Ou encore ;

$$[J] = [DER] [Coord] \quad (3.35c)$$

De même, la transformation d'une intégrale d'une fonction sur l'élément réel s'écrit **Touzot & Dhatt** [37] :

$$\int_{\Omega_e} f(x) . dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta)) . |J| d\xi . d\eta \quad (3.36a)$$

L'intégration numérique est effectuée par la méthode de quadrature de **Gauss** [35], on aura :

$$\iint f(\xi, \eta) . d\xi . d\eta = \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} w_i . w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.36b)$$

où ;

w_i, w_j : 'poids' des coefficients.

ξ_i, η_j : coordonnées des points d'intégration à l'intérieur de l'élément.

NG : nombre de points d'intégration..

Le tableau ci-dessous nous donne quelques valeurs des ces paramètres;

tableau 3.1: paramètres d'integration de Gauss

Nombre de points NG	coordonnées ξ_i, η_i	poids w_i, w_j
1	0	2
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3	$\pm\sqrt{3/5}$	5/9
	0	8/9

3.1.2.4 discretisation de l'équation de base : [35]

Nous avons vu que l'approximation de l'équation generale (1.23) régissant les problèmes des écoulements transitoires s'écrit pour chaque élément:

$$[KK].\{H\} + [CC].\left\{\frac{\partial H}{\partial t}\right\} = \{F\} \tag{3.25}$$

Ou encore;

$$[KK].\{H\}^{n+1} + [CC].\left\{\frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t}\right\} = \{F\} \tag{3.28}$$

Ces matrices élémentaires peuvent se mettre sous la forme: (voir les relations 5.26x)

$$[kk] = \iint \mathcal{D}^T . K . D . dx . dy = \iint \mathcal{D}^T . K . D . |J| . d\xi . d\eta \tag{3.37a}$$

$$[cc] = \iint S_x . N_i . N_j . dx . dy = \iint S_x . N_i . N_j . |J| . d\xi . d\eta \tag{3.37b}$$

avec:

$$K = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Dans l'absence du débit volumique (q_0) ou surfacique (\bar{q}), le vecteur F est nul. L'équation (3.28) devient:

$$([CC] + \omega \Delta t [KK])\{H\}^{n+1} = ([CC] - (1-\omega) \Delta t [KK])\{H\}^n \tag{3.38}$$

où:

- ω : facteur définissant le schéma choisi,
- $\omega=1$ pour le schéma implicite
- $\omega=0$ pour le schéma explicite

Après l'assemblage, nous aurons un système de la forme:

$$[B] \{H\}^{n+1} = ([BK] \{H\}^n) \quad (3.39)$$

avec:

$$\begin{aligned} [B] &= \sum [C] + \sum [K] \\ [BK] &= \sum [C] + \sum [K] - \sum [K] / \omega \end{aligned}$$

Rappelons que les matrices de (3.39) sont stockées sous forme d'un vecteur (voir chp 5) et le schéma implicite est adopté. La résolution de ce système est effectuée à l'aide de la méthode d'élimination de **Gauss**. [35], [37], [42]

3.2 : ECOULEMENTS SOUTERRAINS EN MILIEU NON SATURÉ :

On a vu dans le chapitre deux que les écoulements en milieu non saturé sont régis par une équation (1.31) similaire à celle d'un milieu saturé. Elle est caractérisée par une non-linéarité physique, étant donné que les paramètres physiques (perméabilité, coefficient d'emmagasinement) dépendent de la variation de la charge hydraulique (l'inconnue du problème). Ce type de problème peut être traité sans pour cela que l'on soit conduit à en reprendre complètement la formulation. Cependant on doit procéder par approximation successive dans laquelle les coefficients non linéaires de l'équation régissant ce problème sont ajustés de telle façon qu'elle satisfasse la condition de convergence (**Zienkiewics** , 1979, [42]).

Rappelons que l'équation s'écrit:

$$\operatorname{div} \left[K(h) \operatorname{grad} h \right] - q_0 = C(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1.31)$$

Ou d'une manière développée:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) - q_0 = C(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.40)$$

Lorsqu'il s'agit d'un milieu homogène, l'équation (5.17) se simplifie à:

$$K_x(h) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y(h) \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - q_0 = C(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.41)$$

L'approximation de (3.17) par les différences finies en utilisant la même notation que le cas d'un milieu saturé nous fournit une équation de la forme (3.7) qui sera traitée par la technique d' A.D.I comprenant deux étapes comme précédemment. Donc la résolution des systèmes tridiagonaux s'effectue de la même manière que pour le cas d'un milieu saturé en remplaçant S_s par $C(h)$ et la perméabilité K par $K(h)$ et en effectuant des itérations pour linéariser les coefficients de l'équation (3.41).

Rappelons que la perméabilité est donnée par la relation de **Van Genuchten** (1980) [39]:

$$K(h) = K_s \cdot \left[1 - (\bar{a} \cdot h)^n \right]^{-1} \cdot \left(1 + (\bar{a} \cdot h)^n \right)^m \cdot \left[1 + (\bar{a} \cdot h)^n \right]^{m/2} \quad (1.12)$$

Où : S_w : degré de saturation.
 S_{w0} : degré de saturation maximal.
 H : la valeur absolue de la charge hydraulique.
 a, n, m : les paramètres de régression non linéaire ($m=1-n/2$).

La porosité de drainage $C(h)$ pour un milieu non saturé (§ 1.6.2) est donnée par :

$$C(h) = \partial \theta / \partial h \quad (1.32a)$$

On a adopté la formule de **Mualem** (1976) [39].

$$\theta(h) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[1 + (a \cdot h)^n \right]^m \quad (1.13)$$

Donc la dérivée de θ par rapport à h est :

$$\frac{\partial \theta}{\partial h} = \frac{1}{h} (m+1) (\theta_s - \theta_r) \left[1 - \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{m/(m+1)} \right] \quad (1.33)$$

Signalons que les variables θ_s, θ_r, k_s peuvent être déterminées par l'expérimentation au laboratoire, cependant les paramètres de régression non linéaire sont estimés par l'interpolation à partir des courbes caractéristiques $k(h), \theta(h)$ (**Tracy J.** 1976). **VAN GENUCHTEN** (1980) [39] a réalisé une étude intéressante, en comparant les différents modèles avec l'expérimentation. Il a conclu que le modèle de **Mualem** (1976) est plus représentatif (voir l'équation 1.13).

Dans cette étude, étant donné la difficulté de déterminer les courbes caractéristiques, on a considéré les données proches de notre matériau reportées par **Van Genuchten** [39]. (§ B4.4)

Enfin, il est important de signaler comment on contourne la difficulté due à la non-linéarité de l'équation (1.31), en procédant de cette façon pour chaque étape :

- a/ On calcule la charge hydraulique $h_{i,j}$ à l'instant $(n+1)$ par équation (3.7) en utilisant les coefficients A, B, C, D calculés à l'instant intermédiaire $(n+1/2)$.
- b/ On évalue les paramètres physiques $K(h), C(h)$ donnés par les relations (2.12) et (1.33) respectivement en fonction de la charge $h_{i,j}$ calculée en (a).
- c/ On recalcule la charge $h_{i,j}$ en fonction des coefficients évalués en (b).

Donc il s'agit de résoudre le système tridiagonale (3.7) en deux itérations afin de linéariser les coefficients A_p, B_p, C_p, D_p qui sont en fonction de la charge hydraulique h_p .

Remarque 3.2:

On applique le même principe pour évaluer la matrice (3.30b) et le vecteur (3.30c) du système d'équations non linéaires (3.30a) en faisant deux itérations pour chaque pas du temps (Δt) (voir **Touzot & Dhatt**, [37]).

3.3 CONDITIONS AUX LIMITES :

Un problème d'écoulement souterrain ne peut être traité que si les conditions aux limites sont connues. L'unicité de la solution de l'équation d'écoulement est satisfaite par la vérification de ces conditions qui sont comme nous avons vu dans (§ 1.7), soit de type:

- **Dirichlet** (charge spécifiée).
- **Neumann** (flux spécifié).
- **Cauchy** (condition mixte).

Considérons le cas d'un barrage en terre reposant sur une fondation perméable (fig 4.1.3), les différentes conditions aux limites appliquées sont:

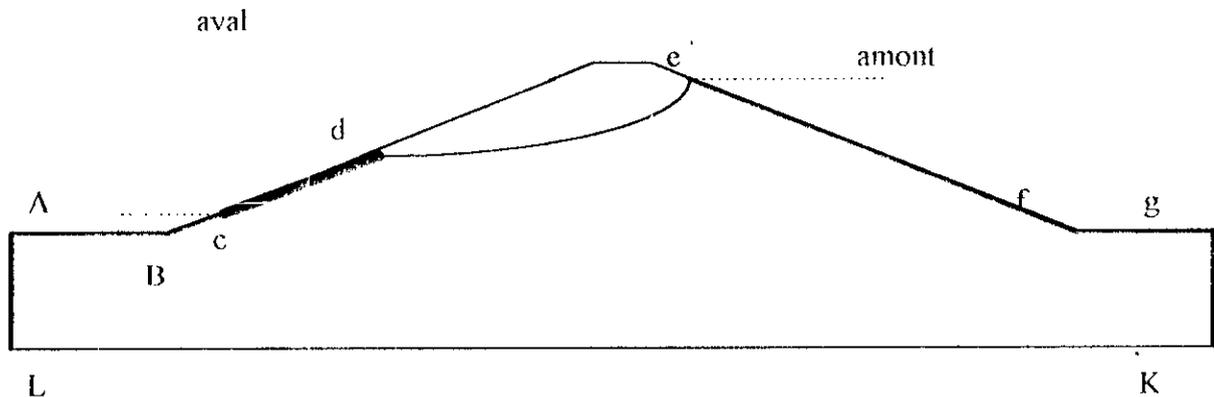


figure 3.1 : les différentes conditions aux limites d'un barrage type en terre.

- 1 / Au contact d'une paroi imperméable limitant l'écoulement le flux q_n est nul, équation (1.34). Cette paroi est une ligne de courant. C'est le cas du substratum (limite LK).
- 2 / En tout points de la retenue et en contact du parement amont du barrage la répartition de pression est hydrostatique.
 - pour le parement amont (limite EFGK) : $h(x,y) = H_1$
 - pour le parement aval : (limite LABC) $h(x,y) = H_2$

où :

H_1 : est la hauteur du barrage correspond à N.N.R.

H_2 : est le niveau à l'aval du barrage.

Remarque 3.3 :

la charge sur le parement amont est égale à H_1 à condition que la référence des cotes soit la base du barrage (LK).

3 / surface libre (limite ED) :

C'est une limite variable où le flux est nul dans la direction normale à cette surface sur laquelle la pression $u = 0$ (pression atmosphérique), et la charge hydraulique d'un point égale à la cote Z . Il s'agit d'une ligne de courant.

Signalons que la frange capillaire n'est pas considérée dans cette étude.

4 / surface de suintement (limite CD) :

Sur cette surface la direction du vecteur vitesse est quelconque donc elle n'est pas une ligne de courant , mais les conditions aux limites sont les même que la surface libre .

3.3.1 INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES :

3.3.1.1 méthode des différences finies :

Après avoir défini les différents types de conditions aux limites susceptibles d'être appliquées sur les contours d'un domaine d'écoulement, nous allons exprimer ces conditions aux limites (C.L) algébriquement.

Bien entendu la condition de **Dirichlet** ne pose aucune difficulté, puisque la charge spécifiée aux noeuds appartenant à une limite est exprimée algébriquement par :

$$h_{i,j} = f_0$$

où ; f_0 : est une constante.
 i,j : indice du noeud appartenant à une limite.

Il est évident que les équations correspondant à ces noeuds sont éliminées, ce qui simplifie le système (2.21).

Par contre la condition de **Neumann** spécifie le gradient de la charge hydraulique sur la frontière c'est-à-dire le flux traversant une limite donnée selon l'équation (1.34) (voir § 1.7.1). En appliquant cette condition sur une limite et en discrétisant équation (2.21), on obtient l'expression de la charge appartenant à cette limite. L'application de la condition de **Neumann** ne permet pas d'obtenir les valeurs numériques de la charge comme précédemment mais des expressions exprimant la charge aux noeuds fictifs (noeuds situés à l'extérieur du domaine).

La relation (1.34) peut être simplifiée pour :

a) limite horizontale :

$$q = -k_y \cdot \partial h / \partial y = \text{constante} \quad (3.42a)$$

avec ;

$$\begin{aligned} n_x &= 0 \\ n_y &= 1 \end{aligned}$$

La forme discrétisée de l'équation (3.42a) s'écrit :

$$q_n = -k_y \cdot \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{2 \cdot \Delta y} \quad (3.42b)$$

. Ou encore ;

$$h_{i,j+1} = h_{i,j} - 2 \cdot \Delta y \cdot q_n / k_y \quad (3.42c)$$

Nous remarquons que lorsqu'il s'agit d'une limite étanche ($q_n = 0$), on aura l'égalité entre la charge au noeud fictif et la charge au noeud symétrique.

b) limite verticale :

Même procédé que pour la limite horizontale, on aura à la fin une relation de la forme:

$$h_{i+1,j} = h_{i-1,j} - 2 \cdot \Delta x \cdot q_n / k_x \quad (3.43)$$

Remarque 3.4 :

Lorsqu'il s'agit d'une limite inclinée, les normales n_x , n_y prennent des valeurs entre 0 et 1.

En résumé, algébriquement la condition d'une charge spécifiée conduit à une réduction du nombre d'inconnues. Par ailleurs, la condition du flux permet de simplifier les équations des noeuds appartenant aux limites correspondantes en remplaçant les noeuds situés à l'extérieur du domaine par des noeuds du réseau selon l'expression (3.42c) ou (3.43).

5.3.1.2 la méthode des éléments finis :

La condition de charge imposée $h_i = \bar{h}_i$ est introduite dans le système global en utilisant la méthode du terme diagonal dominant. [35]

Supposons que la charge au noeud i est connue, la méthode consiste à remplacer:

- dans la matrice KG : kg_{ii} par $kg_{ii} + \zeta$
- dans le vecteur FG : fg_i par $\zeta \cdot fg_i$

Donc, l'équation du système correspondante à i s'écrit:

$$\sum_{j=1}^{NV} kg_{ij} \cdot h_j + (kg_{ii} + \zeta) \cdot h_i = \zeta \cdot fg_i \quad (3.44a)$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^{NV} kg_{ij} \cdot h_j + \zeta \cdot h_i = \zeta \cdot fg_i \quad (3.44b)$$

Nous constatons que pour satisfaire cette condition aux limites, il faut que le terme de sommation ($\sum kg_{ij} \cdot h_j$) soit négligeable devant le terme de la droite de l'équation (3.44b). Autrement dit, la valeur de ζ doit être très grande. Dans cette étude, nous l'avons prise égale à 10^{20} .

3.4 CONCLUSION :

L'application des méthodes numériques aux équations régissant le phénomène d'écoulement sous ses différents aspects nous a permis d'avoir des systèmes d'équations algébriques. L'utilisation de la méthode d'A.D.I conduit à la réduction des rangs de ces systèmes; ce qui facilite les calculs. La linéarisation de l'équation (3.41) se fait à l'aide des itérations supplémentaires. Notons qu'il faudra une grande importance au choix et à l'application des différentes conditions aux limites.

CHAPITRE IV

ETUDE EXPERIMENTALE ET NUMERIQUE DES ÉCOULEMENTS SOUTERRAINS

A- APPROCHE EXPERIMENTALE :

A4.1 INTRODUCTION :

Afin d'examiner la fiabilité du modèle numérique, une analyse sur un modèle de sable est effectuée au niveau du laboratoire d'hydraulique. Dans ce chapitre nous allons présenter les essais réalisés sur un banc d'essais (*DRAINAGE AND SEEPAGE TANK*). Ces essais expérimentaux nous ont permis d'une part, de visualiser les lignes de courant par l'utilisation d'un colorant et d'autre part, de déterminer le débit de percolation à travers les massifs poreux ainsi que la pression de l'eau.

Deux types d'essais ont été réalisés pour traiter les écoulements:

- Ecoulement à surface libre (essai n°1 , 2, 3).
- Ecoulement en charge (essai n° 4).

Quant au problème d'une vidange rapide de la retenue qui est un problème transitoire, on a trouvé une grande difficulté de visualiser la surface libre à chaque instant à cause de la grande perméabilité du sable. Par ailleurs les débits instantanés ont été mesurés et présentés sous forme graphique (fig 4.6 & fig 4.11.2)

A4.2 DESCRIPTION DU MATERIEL UTILISÉ :

Le matériel utilisé consiste principalement en un banc d'essais qui comporte:

- réservoir de drainage et d'infiltration (1), possédant un cadre en U (3).
- un déchargeoir (9) utilisé lors du nettoyage de l'équipement.
- une membrane imperméable et un tuyau d'admission (14).
- deux rails en aluminium le long des côtés supérieurs du réservoir pour soutenir l'écran (2).
- deux types de décharge indépendante et réglable (13).
- un panneau avant en verre trempé.
- une citerne (4).
- une tablette (5).
- une pompe centrifuge (11).
- un support ajustable soutenant le réservoir (8).
- matériel d'injection du colorant, il est composé d'un réservoir de colorant soutenu avec un support avec un ensemble de tubes de diamètre interne de 6 mm et de pièce en T. Ces tubes alimentent les aiguilles d'injection.

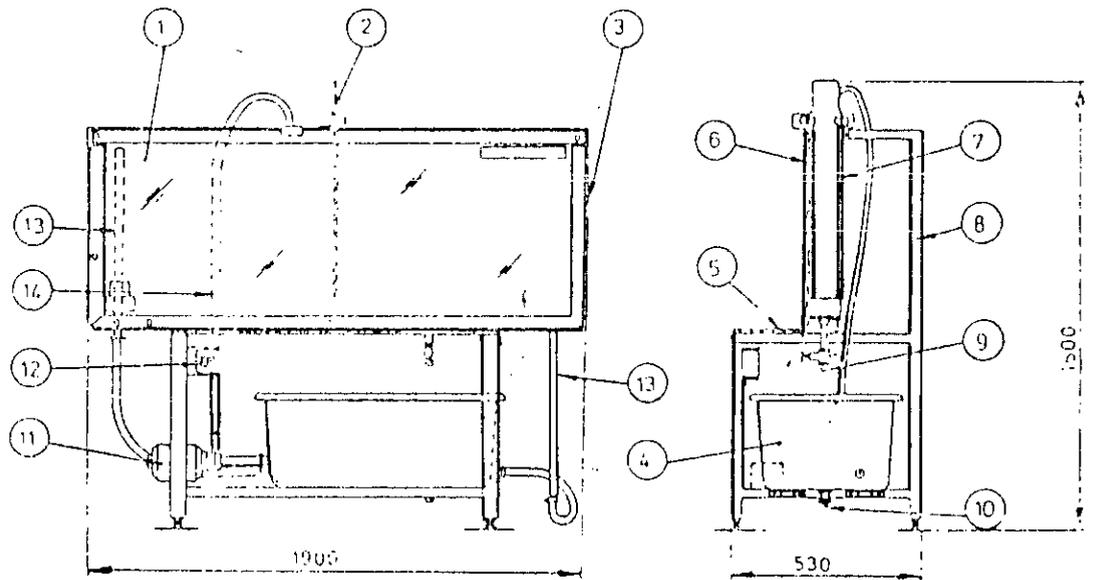


fig. 8 schéma du banc d'essais utilisé

A4.3 MATERIAUX UTILISES :

Nous avons utilisé comme milieu poreux un sable propre de propriétés connues, le diamètre variant dans la gamme de 0.5 à 1 mm. Sa perméabilité est de l'ordre de 7×10^{-4} m/s. Le colorant est utilisé pour visualiser les lignes de courant et notamment la surface libre pour les écoulements non confinés. C'est une solution d'encre fluorescente préparée par les techniciens de laboratoire d'hydraulique. La couleur de ce produit varie en fonction de sa concentration, généralement elle est orange-verte.

Un mastic spécial est utilisé pour éliminer les problèmes d'étanchéité surtout pour le cas des écoulements en charge.

A4.4 PRESENTATION DES ESSAIS :

A4.4.1 - ESSAIS D'ÉCOULEMENT A SURFACE LIBRE :

Ces essais ont été réalisés dans le but de déterminer le réseau hydrodynamique (lignes de courant et les lignes équipotentiels) et en particulier la ligne de saturation, ainsi que le débit de percolation. Pour cela nous avons étudié expérimentalement ces trois configurations:

- Un modèle d'un barrage trapézoïdal avec une fondation imperméable (essai n° 1).
- Un modèle d'un barrage trapézoïdal avec une fondation perméable (essai n° 2).
- Un modèle d'un barrage à parois verticales (essai n° 3).

A4.4.2 - ESSAIS D'ÉCOULEMENT EN CHARGE :

Ce type d'écoulement s'effectue dans un domaine saturé, l'objectif est similaire à la première série, plus la détermination de la pression en quelques points. La seule différence est que le domaine d'écoulement est connu au début (limites sont fixes). Le problème majeur rencontré est celui

d'assurer une bonne étanchéité de l'écran étanche. le modèle réalisé consiste à un écoulement sous les palplanches (essai n°4).

A4.4.3 REALISATION DES ESSAIS :

Le modèle d'essai à réaliser a été tracé sur l'écran du réservoir avant la mise en place du sable, on vérifie le bon fonctionnement de l'équipement, et on commence l'essai par:

- 1- Mise en place du sable en s'assurant de l'homogénéité du milieu par l'utilisation de l'eau.
- 2 - Remplir lentement le reservoir en commençant par le bassin aval jusqu'au niveau fixé et ensuite le bassin amont.
- 3 -Fixer la bouteille de colorant, et enfoncer l'aiguille verticalement dans le sable à une profondeur de 6 mm dans une position choisie afin de visualiser la ligne de courant passant par cette position.

Une fois la ligne de courant est visible, on la trace sur un papier calque appliqué contre la paroi transparente du réservoir. Ensuite, on change la position de l'aiguille pour tracer une autre ligne.

A4.4.3.1 MESURE DU DEBIT :

Le débit est mesuré à l'aide d'une éprouvette graduée et d'un chronomètre, on mesure le volume recueilli à des intervalles de temps bien déterminés. L'opération est répétée plusieurs fois pour éliminer les erreurs éventuelles. Les résultats pour chaque essai sont présentés dans les tableaux suivants.

A4.4.3.2 DETERMINATION DE LA SURFACE LIBRE:

Concernant les écoulements à surface libre la ligne de saturation correspond à la limite séparant la zone humide et la zone sèche, lorsqu'on place l'aiguille au niveau max amont la première ligne de courant tracé sera la surface libre. Cette limite est influencée par la transition de saturation du sable ce qui nous donne une limite très large comme indiqué sur les photos ci-dessus.

A4.5 - RESULTATS DES ESSAIS:

A4.5.1 - ESSAIS D'ECOULEMENT A SURFACE LIBRE :

A4.5.1.1 barrage reposant sur une fondation imperméable (essai n° 01):

Le schéma de ce barrage est représenté par la figure 4.2

- résultats du débit :

tableau 4.1 : résultats du débit de l'essai n° 1

temps (s)	120	120	30	300	300	300
volume (ml)	140	138	33	350	346	352.5
débit (10^{-4} m ³ /s/ml)	0.11	0.109	0.1047	0.1111	0.1098	0.1119

Donc la moyenne du débit est: $Q = 0.1094 \times 10^{-4}$ m³/s/ml

- la position de la surface libre :

tableau 4.2 : coordonnées de la surface libre de l'essai n° 1

abscisse x (cm)	46.3	48.3	50	60	70	80	90	99	100	107
ordonnée Y (cm)	15.5	14.45	13.5	12.2	10.8	9.05	7.5	7.05	5.75	6.3

4.5.1.2 - massif perméable à parois verticales (essai n° 02) :
(voir la figure 4.7)

- mesure du débit d'infiltration :

tableau 4.3 : résultats du débit de l'essai n° 2

temps (s)	120	120	120
volume (ml)	4.36	4.34	4.36
débit (10^{-4} m ³ /s/ml)	0.346	0.344	0.346

Le débit moyen : $Q = 0.3453 \times 10^{-4}$ m³/s/ml

- la position de la surface libre :

tableau 4.4 : coordonnées de la surface libre pour l'essai n° 2

X (cm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	131.5
Y (cm)	33	32.9	32.5	32	31	30	28.5	28	28	27.75	26.5	24	20	8

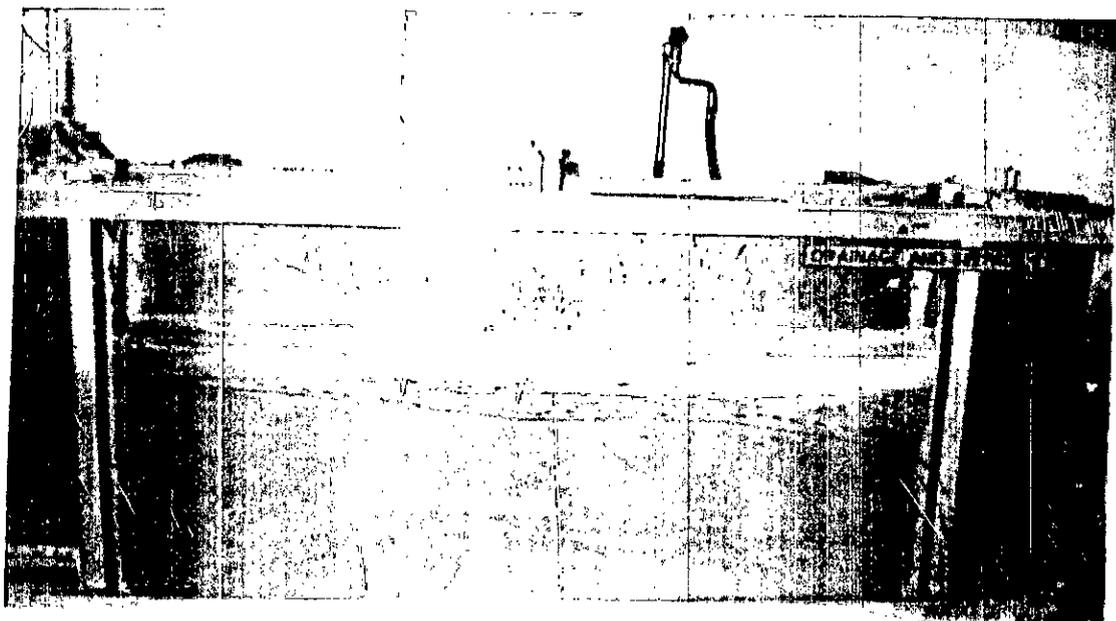


figure 4.1.2 : visualisation de la surface libre

4.5.1.3 - barrage trapézoïdal reposant sur une fondation perméable (essai n° 3) :

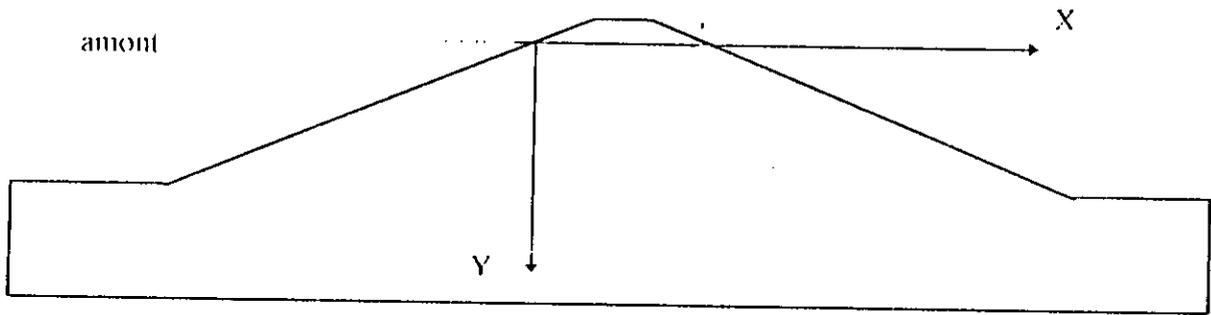


figure 4.1.3 : schéma du barrage avec le repère des coordonnées.

- mesure du débit d'infiltration :

tableau 4.5 : résultats du débit de l'essai n° 3

temps (s)	120	112	150	45	180	90
volume (ml)	276	269	350	130	470	242
débit ($10^{-3} \text{ m}^3/\text{s/ml}$)	0.219	0.211	0.222	0.275	0.248	0.256

Le débit moyen : $Q = 0.240 \times 10^{-3} \text{ (m}^3/\text{s/ml)}$

- position de la surface libre :

tableau 4.6 : coordonnées de la surface libre pour l'essai n° 3

abscisse X (cm)	0	10	20	30	40	50	59.5
ordonnée Y (cm)	1.30	5.90	6.30	9.20	10.65	12	12.20

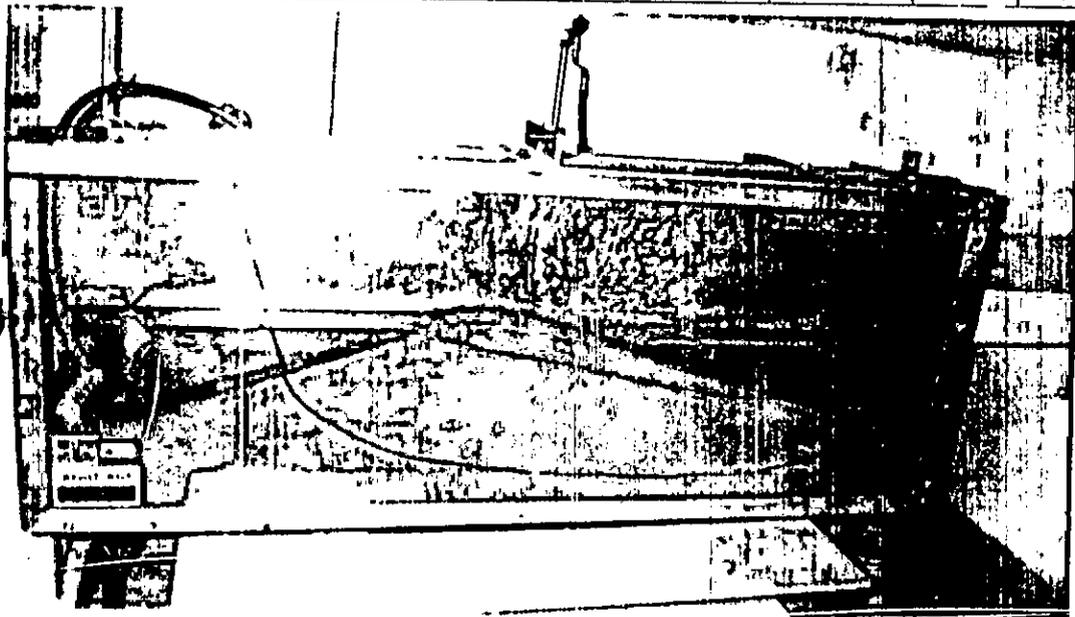


figure 4.1.4 : visualisation de la surface libre et une ligne de courant

A4.5.2 - ESSAIS D'ÉCOULEMENT EN CHARGE :

A4.5.2.1 - écoulement sous les palplanches (essai n° 4) : (voir la figure 4.15)

- mesure du débit :

tableau 4.7 : résultats du débit de l'essai n° 4

temps (s)	120	120	120
volume (ml)	520	512	514
débit (10^{-4} m ³ /s/ml)	0.4126	0.4064	0.4079

Donc la moyenne des débits est : $Q = 0.409 \times 10^{-4}$ (m³/s/ml)

- mesure de la charge piézométrique :

tableau 4.8 : charge piézométrique pour l'essai 4

piézomètre	P1	P2	P3
position du piézomètre / écran d'étanchéité	3 cm	13.0 cm	23.0 cm
charge (cm)	11.0	8.50	6.00

Remarque 4.1 :

Le diamètre de chaque piézomètre est égal à 5 mm

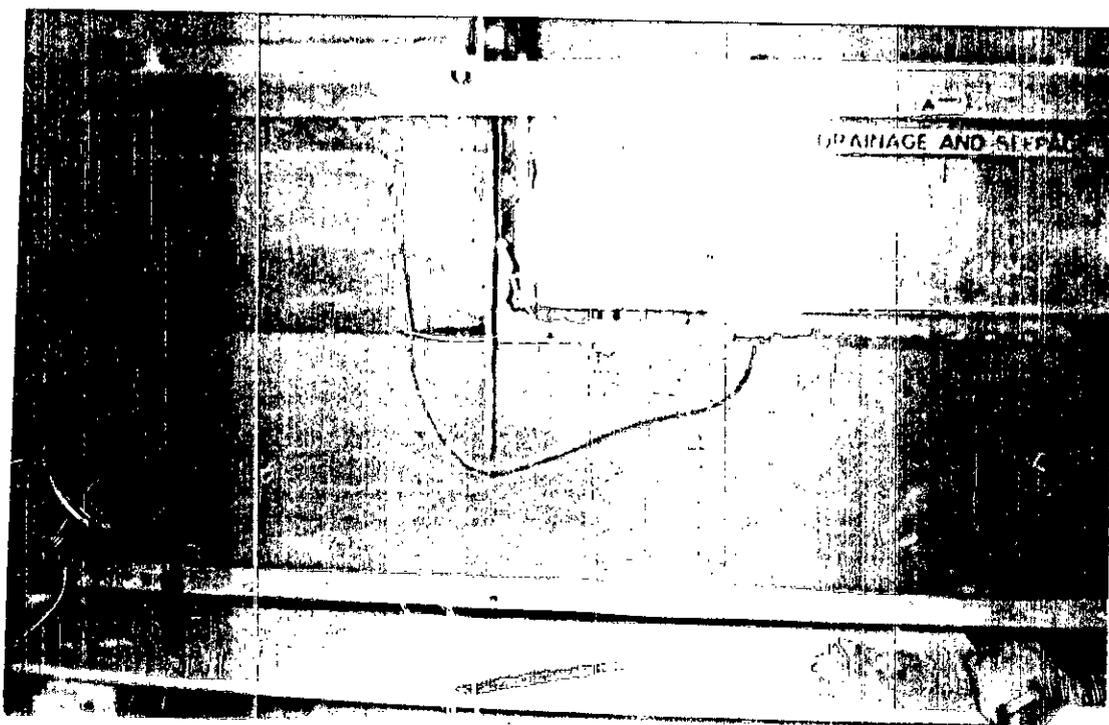


figure 4.1.5 : visualisation des lignes de courant sous les palplanches

A4.6 CONCLUSION :

Les différents modèles des écoulements réalisés au laboratoire mettent en évidence quelques cas particuliers de la circulation d'eau à travers un milieu perméable. Le but de cette étude expérimentale est d'examiner la fiabilité du modèle numérique en comparant les différents résultats obtenus et mesurés, comme nous allons voir dans le prochain chapitre.

Dans l'étude expérimentale qui est caractérisée par l'avantage d'utiliser des matériaux homogènes aux propriétés connues, plusieurs règles fondamentales doivent être respectées si l'on veut obtenir de bons résultats. Tout d'abord, une attention particulière doit être consacrée à la réalisation d'une bonne étanchéité au contact des écrans avec les parois du réservoir. Ensuite, il faudra remplir le réservoir lentement avec de l'eau, en commençant par le bassin aval. Finalement, il faudra mélanger le sable au moment du remplissage du côté amont pour éviter les lentilles dans la couche du sable et s'assurer d'une bonne homogénéité du milieu.

Les résultats expérimentaux obtenus sont dans l'ensemble acceptables. Les lignes de courant obtenues montrent une bonne concordance avec les trajets théoriques des particules d'eau, comme indiqué dans les différentes photos. Les débits et pressions sont mesurés plusieurs fois afin de diminuer les erreurs systématiques.

B- APPROCHE NUMERIQUE :

B4.1 INTRODUCTION :

Dans le cadre de l'application du programme de calcul et afin d'examiner sa fiabilité, plusieurs problèmes types des écoulements dans les sols sont traités en comparant les résultats obtenus aux solutions analytiques [9], [6] ou expérimentales. L'étude est faite pour les problèmes plans hétérogènes avec les conditions géométriques quelconques.

Les différents problèmes examinés dans cette étude sont:

- Ecoulement permanent en charge.
- Ecoulement permanent à surface libre.
- Ecoulement transitoire en charge.
- Ecoulement transitoire à surface libre.
- Ecoulement mixte.

Notons que le problème des écoulements à surface libre présente une double non-linéarité:

- géométrique (puisque la hauteur est variable)
- physique (l'existence d'une zone non saturée où les paramètres hydrodynamiques varient en fonction de l'inconnue du problème (§ 3.2).

Cependant, nous avons considéré la zone non saturée uniquement pour les problèmes transitoires lors d'une vidange d'une retenue, en négligeant la capillarité et le phénomène d'hystérèse entre h et θ (*Hillel*, 1980,[22]).

B4.2 ECOULEMENTS EN REGIME PERMANENT :

Sachant que les écoulements en régime permanent sont décrits par l'équation (1.24) où le problème revient à déterminer la répartition spatiale de la charge hydraulique et de pression interstitielle en tenant compte des conditions aux frontières qui ne dépendent pas du temps.

B4.2.1- ECOULEMENT A SURFACE LIBRE :

Généralement, l'analyse d'un phénomène physique donné nécessite la connaissance, d'une part des équations mathématiques décrivant son comportement et d'autre part, des limites géométriques du domaine.

Etant donné que dans ce problème d'écoulement la surface libre constitue une limite inconnue a priori sur laquelle soit imposée deux conditions distinctes:

- condition de charge spécifiée: $h(x,y) = z$
- condition de flux imposé : $\partial h / \partial n = 0$

Donc nous devons déterminer cette surface libre pour délimiter le domaine d'étude, ce qui nous permet de calculer la répartition de la charge hydraulique à l'intérieur de ce domaine d'écoulement.

B4.2.1.1 DETERMINATION DE LA SURFACE LIBRE : [25] , [30]

Considérons qu'une telle surface ne peut exister qu'à la séparation entre le domaine saturé et le domaine non saturé du milieu, plus précisément c'est le lieu géométrique des points où la pression interstitielle est nulle.

Donc un problème d'écoulement à surface libre consiste à déterminer :

- le champ de la charge hydraulique,
- la position et la forme de la surface libre.

La répartition de la charge hydraulique est obtenue en appliquant l'équation (3.11) en tout point à l'intérieur du domaine saturé. Cependant la forme de la surface libre se détermine comme suit:

*" Le principe de base consiste à se fixer au départ d'une façon arbitraire la position de la surface libre et à lui imposer la condition de flux nul et à ajuster sa position à chaque itération en essayant à satisfaire la condition sur la charge, cela s'obtient en déplaçant les points de la surface libre à ce que leur cote soit égale à leur charge " (**Neumann** , 1973 , [30]).*

Autrement dit, on procède par des itérations jusqu'à la vérification des deux conditions aux limites citées auparavant.

Pour valider notre modèle, nous avons effectué l'expérimentation numérique en considérant les essais réalisés au laboratoire avec les données du matériau utilisé ($k_x = k_y = 7 \times 10^{-4}$ m/s et la porosité efficace $n_e = 0.30$), en plus nous avons examiné l'influence de quelques paramètres sur la conception de tels ouvrages.

Signalons que d'autres applications ont été faites sur des cas traités dans la littérature scientifique afin de montrer les performances du modèle développé.

B4.3 REGIME TRANSITOIRE :

Le régime transitoire est une phase où les paramètres hydrauliques varient avec le temps, il est considéré généralement comme une superposition de plusieurs états stationnaires **Humbert** [11].

Dans cette étude, ce régime est illustré par le problème de variation du niveau de la retenue c'est-à-dire la vidange rapide d'un barrage.

Compte tenu de la non-linéarité de ces problèmes, les coefficients des équations dépendent de la charge hydraulique (voir chp 1), nous avons essayé de traiter ces problèmes en observant la fluctuation de la surface libre ainsi que l'influence d'une saturation partielle sur l'écoulement et ceci pour les différentes perméabilités.

B4.3.1 CONDITIONS INITIALES :

Lorsqu'il s'agit d'un problème transitoire où les variables dépendent du temps, il est impératif de définir un état de départ, afin de suivre l'évolution de ce problème dans le temps.

Ces conditions initiales conditionnent la solution à l'instar des conditions aux limites comme nous allons voir ultérieurement. Le choix de ces C.I revient à définir une distribution de la charge hydraulique (ou la pression interstitielle) aux noeuds à l'instant initial ($t=0$).

Dans le souci d'avoir la convergence de la solution ainsi que la stabilité du schéma numérique, il est utile de considérer l'état stationnaire (permanent) comme étant un état initial pour le cas d'une vidange de la retenue pour plusieurs vitesses.

Examinons l'évolution des différents paramètres hydrauliques pour les cas traités au laboratoire.

B4.4 DIFFERENTS CAS SIMULES:

B4.4.1 barrage reposant sur une fondation imperméable (essai n° 01):

B4.4.1.1 domaine d'écoulement :

Il s'agit d'un barrage homogène d'une hauteur de 18 cm, les parements amont et aval ont une inclinaison de 1/4 et 1/3 respectivement (fig 7.1). Le domaine est discrétisé en 84 éléments quadrilatérales à 4 noeuds (un seul degré de liberté). Le nombre total de noeuds est de 104. Le maillage est composé de deux parties, l'une est fixe (au-dessous du niveau aval) et l'autre variable en fonction de la position de la surface libre (maillage ajustable) pour avoir une bonne allure de cette surface.

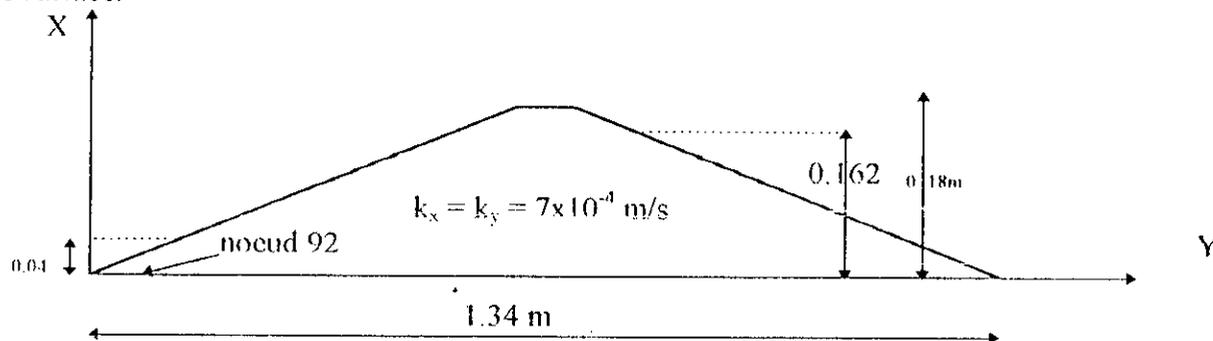


figure 4.2 : schéma du barrage avec les données.

B4.4.1.2 conditions aux limites :

Les noeuds situés sur le parement amont et la partie immergée du parement aval sont à potentiel imposé (15 noeuds), la position de la surface libre initiale est supposée horizontale avec une élévation de 16.2 cm.

B4.4.1.3 résultats :

La position de la surface libre est obtenue après 17 itérations avec une précision imposée de 0.001, la figure (4.2.1) montre la convergence de cette surface. La répartition de la charge hydraulique dans le domaine satisfait les différentes conditions aux limites, la figure (4.3) montre la variation de la charge en fonction de l'erreur du noeud 92 (le 2^{ème} noeud du substratum à partir de la référence).

Signalons qu'une surface de suintement se manifeste puisque la surface libre ne se raccorde pas avec le niveau aval. Le débit traversant la digue est $q = 1.06 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$. L'utilisation de plusieurs perméabilités (10^{-3} à 10^{-6}) nous a montré qu'il n'y a aucune influence sur la position de la surface libre, par contre le débit varie d'une façon proportionnelle.

La position de la surface libre simulée ne coïncide pas sur la surface mesurée au laboratoire qui est caractérisée par une épaisseur relativement large à cause de l'influence de la capillarité. La figure (4.2.2) montre l'écart entre les deux surfaces.

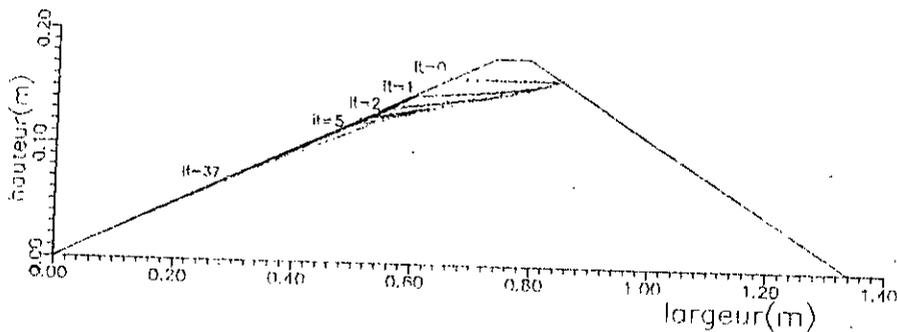


fig 4.2.1 convergence de la surface libre

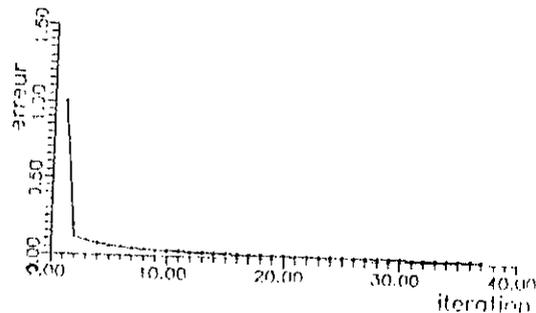


fig 4.3: convergence de la solution en fonction des iterations (cas N 1)

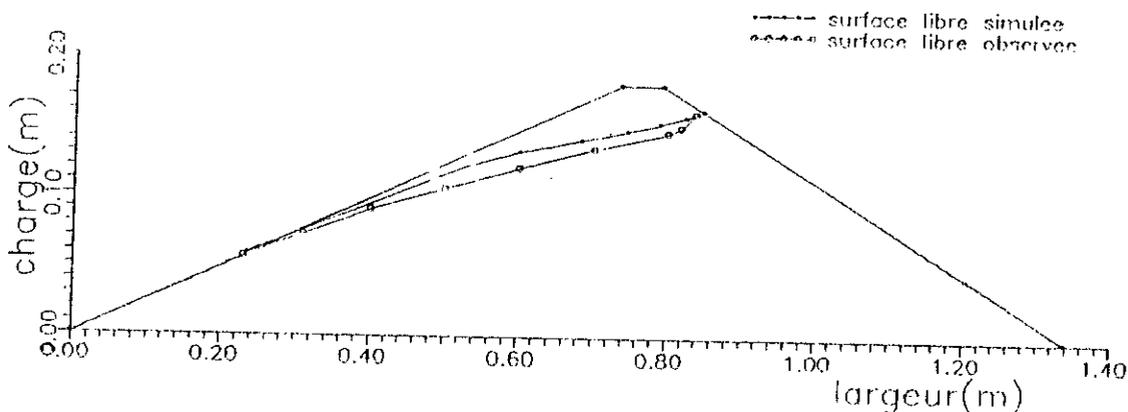


fig 4.2.2: Comparaison des positions de la surface libre simulée et mesurée

Concernant le régime transitoire, nous avons procédé à une vidange rapide de la retenue d'une vitesse égale à 2 mm/s. La porosité de drainage est prise égale à la porosité efficace $n_e = 0.3$. La fluctuation (descente) de la position de la surface libre à chaque instant est représentée par la figure (4.4.1). Afin que ces résultats puissent être utilisés pour d'autre cas similaire, nous avons adopté les paramètres adimensionnels où le temps est exprimé par :

$$\tau = K_x \cdot \text{temps} / (n_e \cdot \text{largeur}) \quad (4.1)$$

Pour les dimensions géométriques, nous avons considéré L/H et h/H comme indiqué dans la figure 4.4.2 (H est la hauteur de la retenue à l'instant initial)

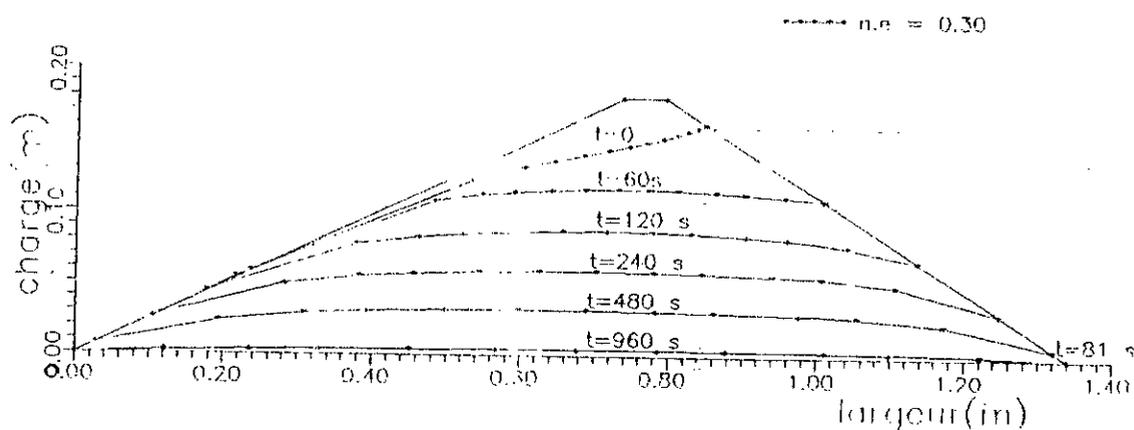


fig 4.4.1: Evolution de la surface libre lors d'une vidange rapide

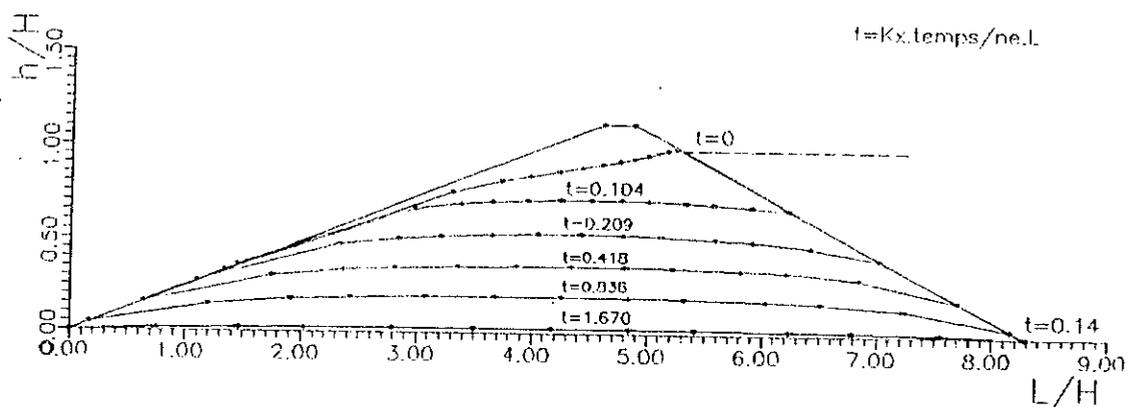


fig 4.4.2: Evolution de la surface libre lors d'une vidange rapide

La durée d'une vidange constitue un paramètre très important du régime transitoire. La figure 4.4.3 montre que la durée correspond à $\tau = 1.5$ soit $t = 1400$ s. La variation de la charge hydraulique en fonction du temps s'effectue d'une façon exponentielle.

Quant au débit, nous avons considéré le parement amont comme étant la section traversée par l'eau. La figure 4.6 indique que le débit était positif avant de changer le signe. Ceci s'explique par le fait que le l'écoulement se dirige vers l'amont après quelques instants. Ce débit converge vers zéro.

Une étude paramétrique est réalisée pour examiner l'influence de la vitesse sur l'évolution de la surface libre. La figure (4.5.1) montre que l'augmentation de la vitesse accélère la descente de la surface libre. Nous avons examiné l'influence du coefficient d'emmagasinement (porosité) d'une part, sur la surface libre (figure 4.5.2) et d'autre part, sur la vitesse d'une vidange.

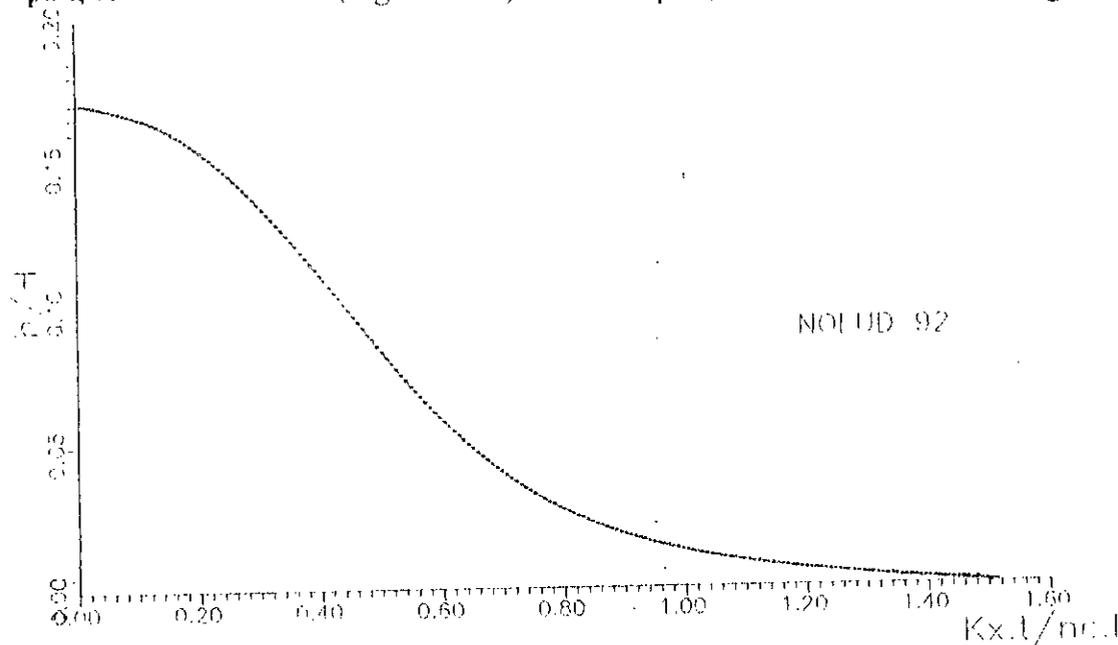


fig 4.4.3 : courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps

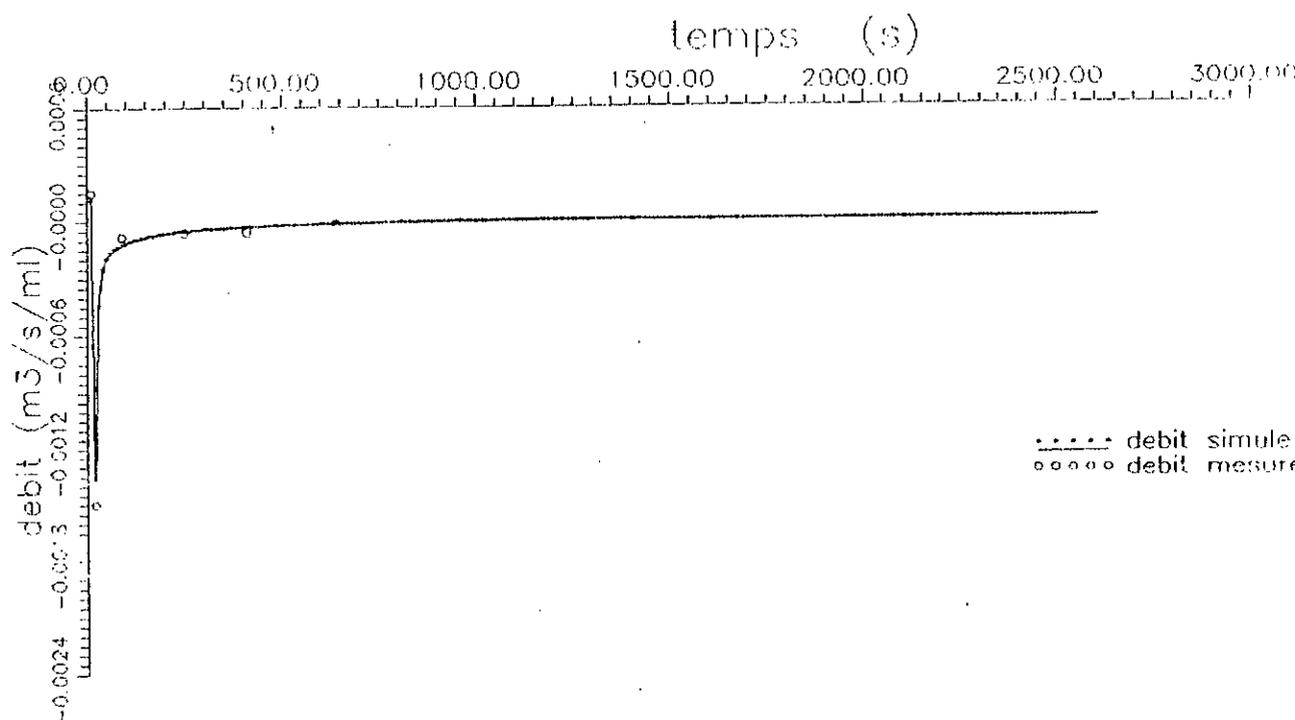


fig 4.6 : variation de débit en fonction du temps lors d'une vidange d'un barrage

$$\tau = Kx \cdot \text{temps} / n \cdot L$$

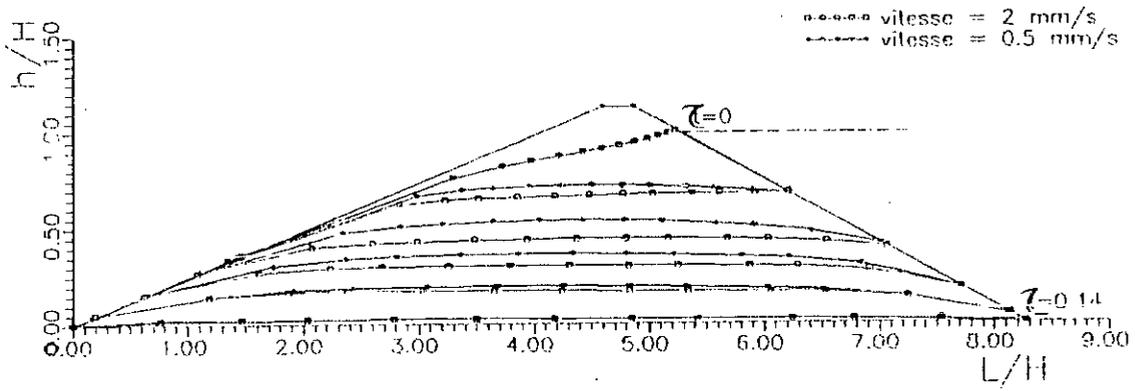


fig 4.5.1 : Influence de la vitesse d'une vidange sur l'évolution de la surface libre

$$t = Kx \cdot \text{temps} / n \cdot L$$

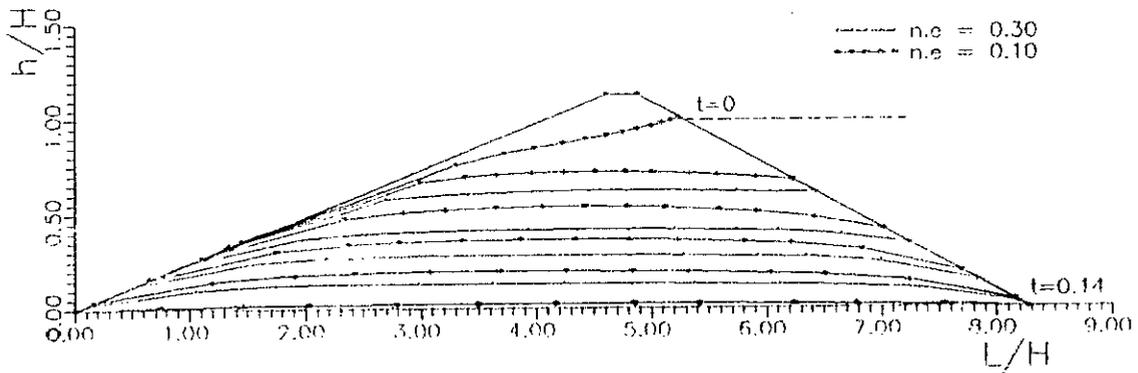


fig 4.5.2 : Influence de coefficient d'emmagasinement sur l'évolution de la surface libre

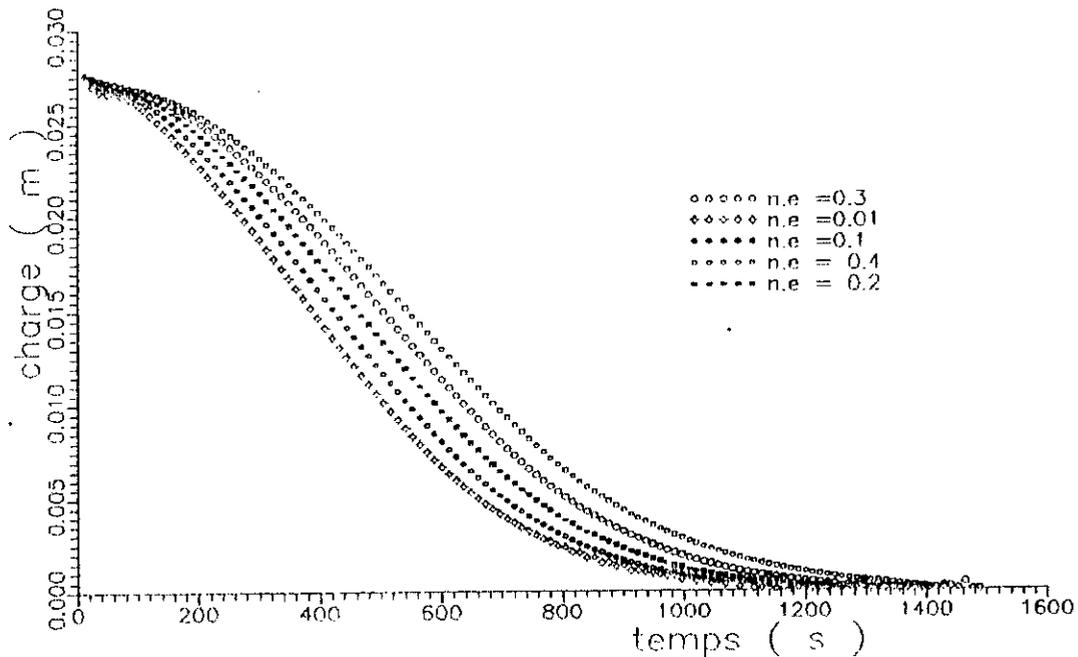


fig 4.5.3 influence du coefficient d'emmagasinement sur la vitesse d'une vidange

B4.4.2 massif perméable à parois verticales (essai n° 02) :

Le cas d'un barrage à parois verticales peut être illustré par le problème d'un écoulement vers une tranchée, ou le cas d'un écoulement radial en deux dimensions d'une nappe à surface libre.

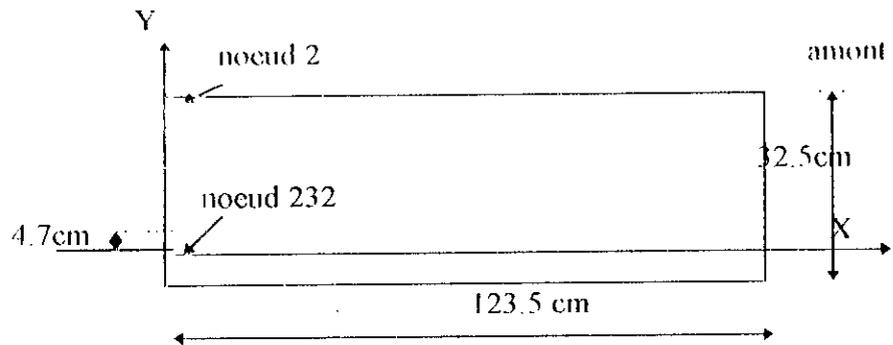


figure 4.7 : schéma du barrage à parois verticales.

B4.4.2.1 domaine d'écoulement :

La forme rectangulaire du domaine facilite l'introduction des données sous forme d'un fichier très réduit (cf. chp 5), la base du barrage est de 123.5 cm et la hauteur est de 33 cm, les niveaux amont et aval sont indiqués sur la figure (4.7). Le domaine est discrétisé en 220 éléments et 252 nœuds.

B4.4.2.2 conditions aux limites :

Le nombre des nœuds spécifiés par la condition de **Dirichlet** sont 23 (parement amont et aval) et la surface libre initiale est prise comme étant une ligne équipotentielle horizontale avec une côte de 32.5 cm.

B4.4.2.3 résultats :

La position de la surface libre est obtenue après 37 itérations avec une précision imposée de 0.001, (figure 4.8.1). La répartition de la charge hydraulique dans le domaine satisfait les différentes conditions aux limites. La figure (4.9) montre la variation de l'erreur du noeud 232 (le 2^{ème} noeud du substratum à partir de la référence) en fonction du nombre d'itérations.

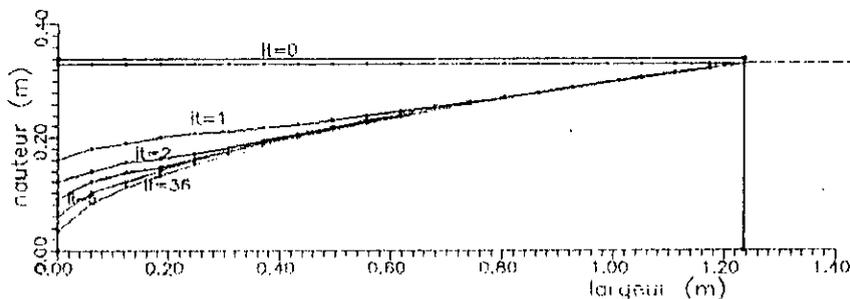


fig 4.8.1 : convergence de la surface libre (essai N 2)

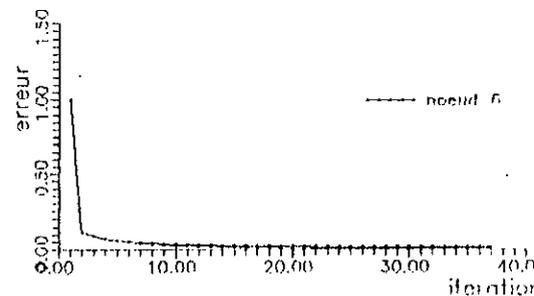


fig 4.9: convergence de la solution en fonction des itérations

Une surface de suintement se manifeste puisque la surface libre ne se raccorde pas avec le niveau aval. Le débit traversant le massif perméable est $q = 3.0878 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$ (la section considérée pour le calcul du débit est celle du parement amont). Signalons qu'il existe une formule analytique du débit pour ce cas:

$$Q = K.(H^2 - H_0^2)/2.L \quad (4.2)$$

L'application numérique nous donne un débit de $2.9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$

L'utilisation de plusieurs perméabilités (10^{-3} à 10^{-6}) nous a montré qu'il n'y a aucune influence sur la position de la surface libre, par contre le débit varie d'une façon proportionnelle comme pour le premier cas.

La figure 4.8.2 montre un certain écart entre la position de la surface libre observée au laboratoire et la surface calculée.

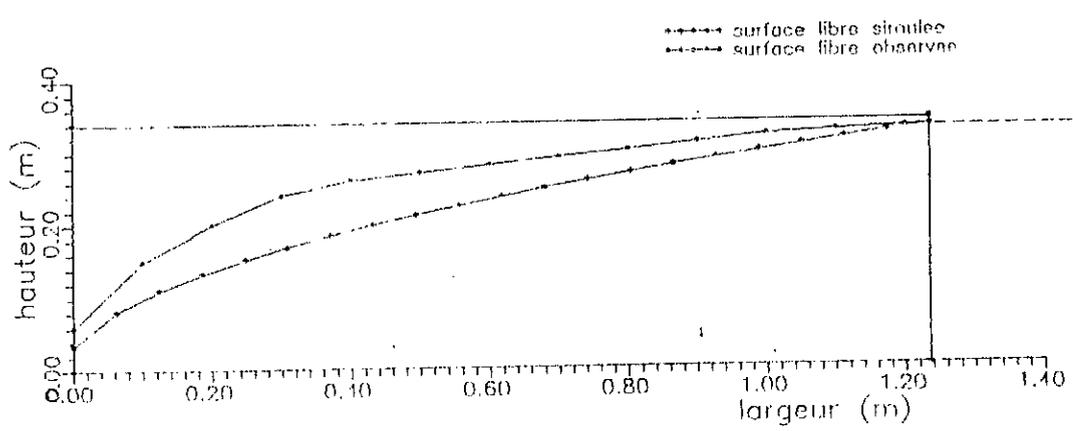


fig 4.8.2 : la forme de la surface libre observée et simulée (essai N 2)

Concernant le régime transitoire, nous avons examiné l'influence de la vitesse sur l'évolution de la surface libre. A cet effet, nous avons utilisé deux vitesses l'une égale à 11mm/s et l'autre égale à 34mm/s, comme indiqué dans la figure (4.10).

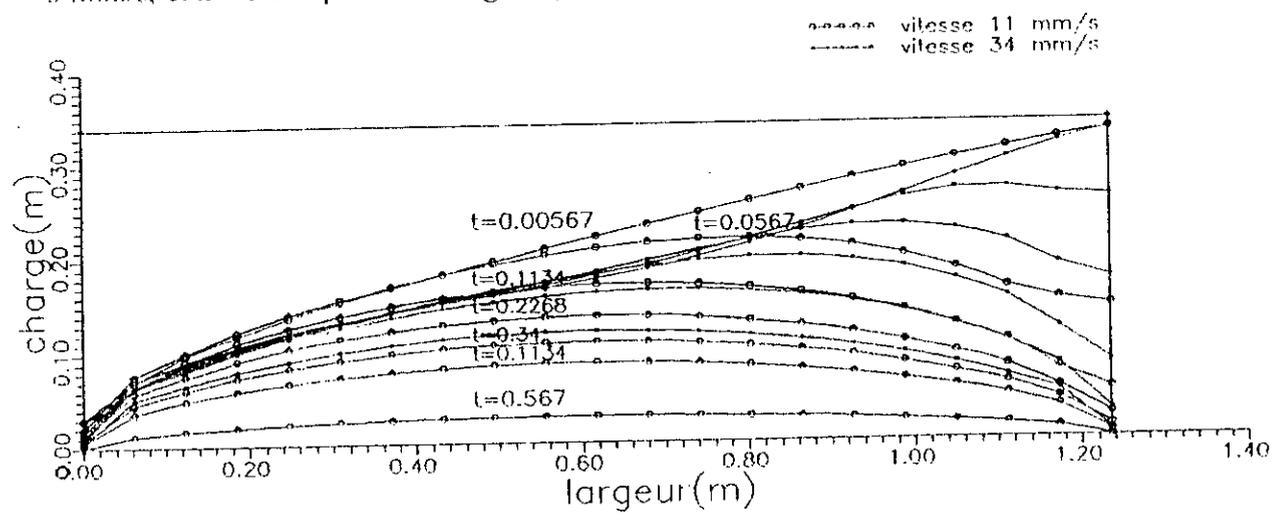


fig 4.10: fluctuation de la surface libre et l'influence de la vitesse d'une vidange

Pour évaluer la durée d'une vidange, nous avons utilisé la même vitesse que laboratoire ($v=2\text{mm/s}$) et la durée était d'environ 700 s qui correspond à $\tau = 1.4$ (voir les figures 4.11.1 et 4.11.2). La variation du débit est donnée par des courbes semblables au premier cas, comme indiqué dans les figures (4.11.3) et (4.11.4).

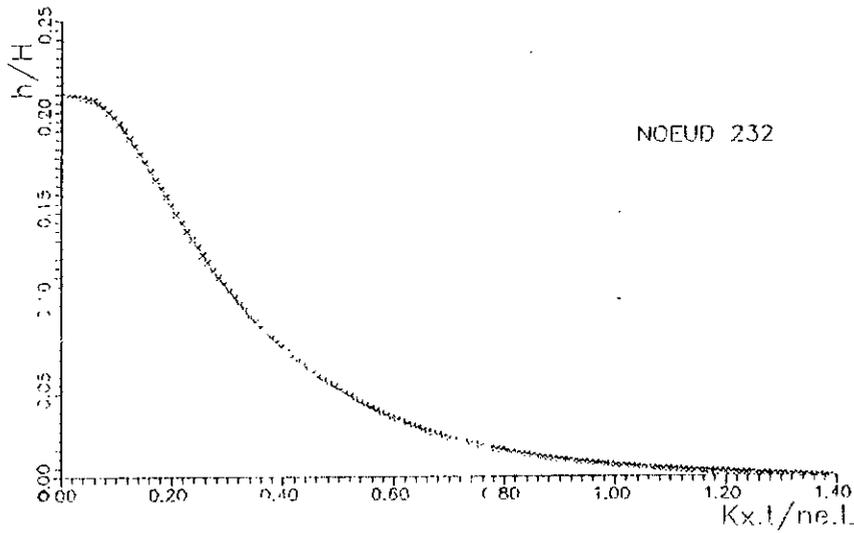


fig 4.11.1 :courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps

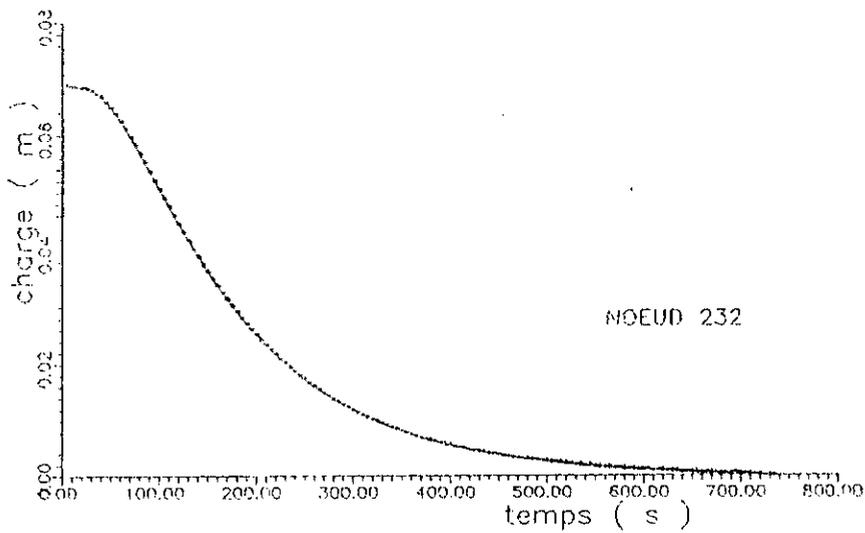


fig 4.11.2 :courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps

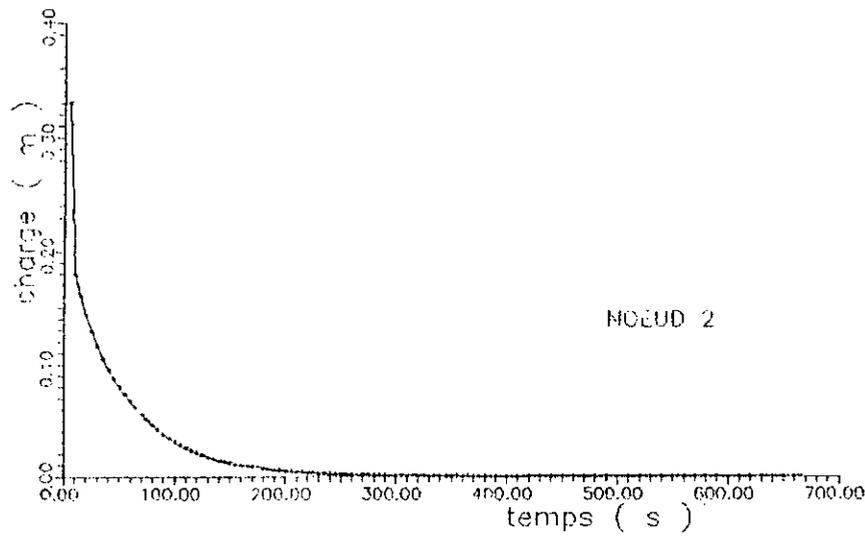


fig 4.11.2.2 : courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps

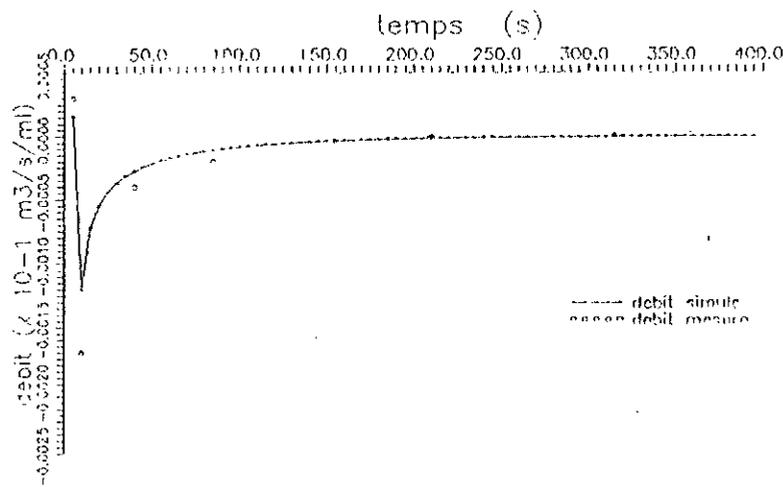


fig 4.11.3 : variation de débit en fonction du temps lors d'une vidange d'un barrage

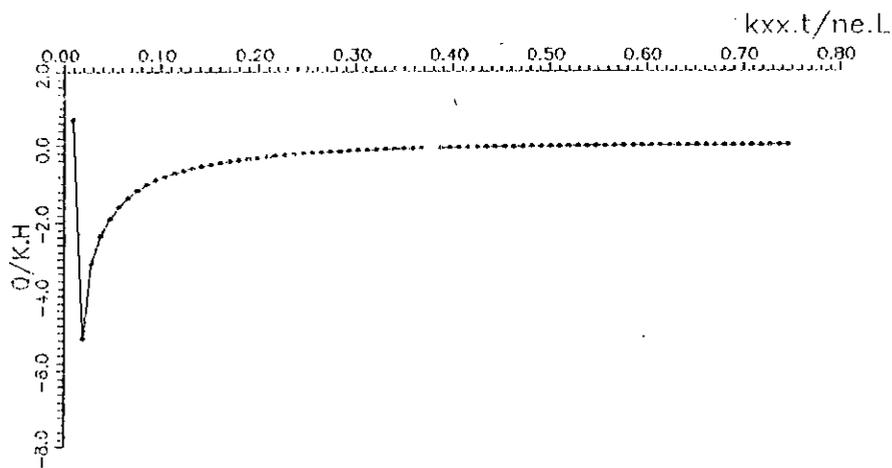


fig 4.11.4 : variation du débit en fonction du temps lors d'une vidange d'un barrage

B4.4.3 barrage trapézoïdal reposant sur une fondation perméable (essai n° 3) :

L'essai N° 3 est semblable à l'essai N°1 avec une sol de fondation perméable. La discrétisation du domaine s'effectue à l'aide des mailles quadrilatérales pour la digue et par des mailles rectangulaires pour le sol de fondation. Le nombre d'éléments est de 108 avec 130 nœuds. Le nombre des nœuds imposés est 19.

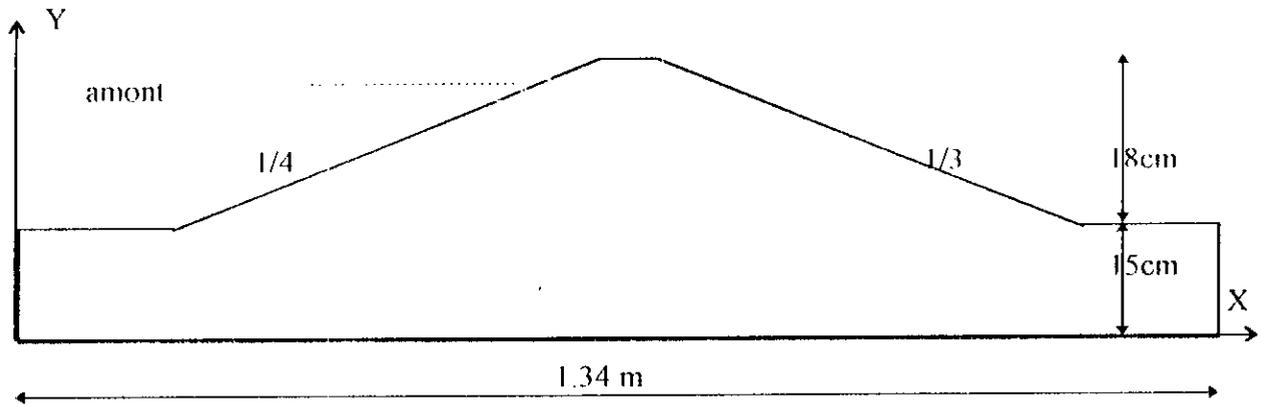


figure 4.13.1 : schéma du barrage avec le repère des coordonnées

En comparant ce cas au premier essai, nous avons constaté que l'existence d'une couche de fondation n'affecte pas la valeur du débit, puisqu'il dépend de la différence ΔH entre l'amont et l'aval. Par contre la charge hydraulique augmente en fonction de la hauteur de la couche de fondation.

Quant aux résultats, la position de la surface libre est donnée par la figure (4.13.2), elle est presque identique à la surface mesurée. Cette surface est obtenue après 26 itérations. Le débit de fuite simulé est de l'ordre de $0,199 \times 10^{-1} \text{ m}^3/\text{s/ml}$.

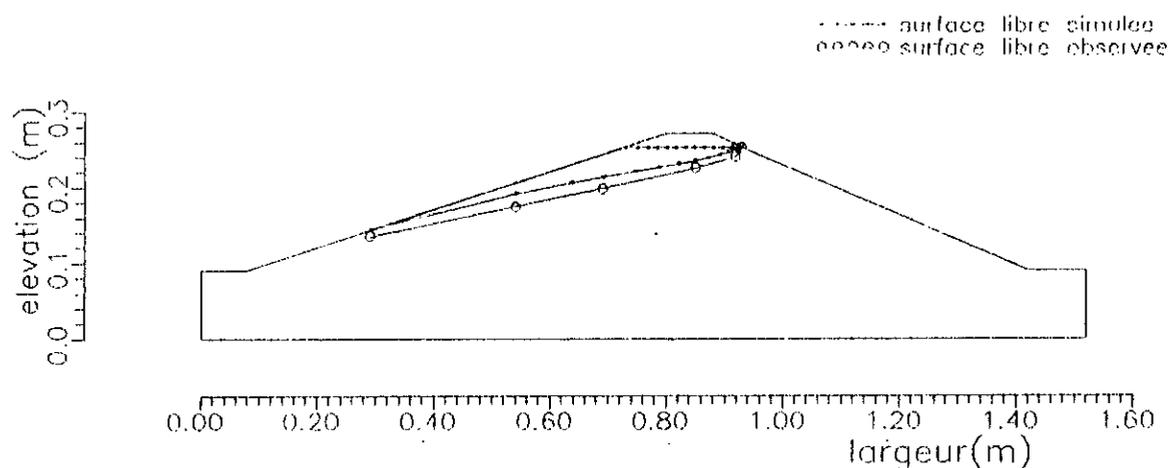


fig 4.13.2: la forme de la surface libre observée et simulée (essai N 3)

Concernant les résultats du régime transitoire, la durée d'une vidange correspond à $\tau = 1.5$ comme indiqué dans la figure (4.14.1) avec une forme exponentielle de la courbe de variation de la charge en fonction du temps.

La variation du débit est représentée par la figure (4.14.2).

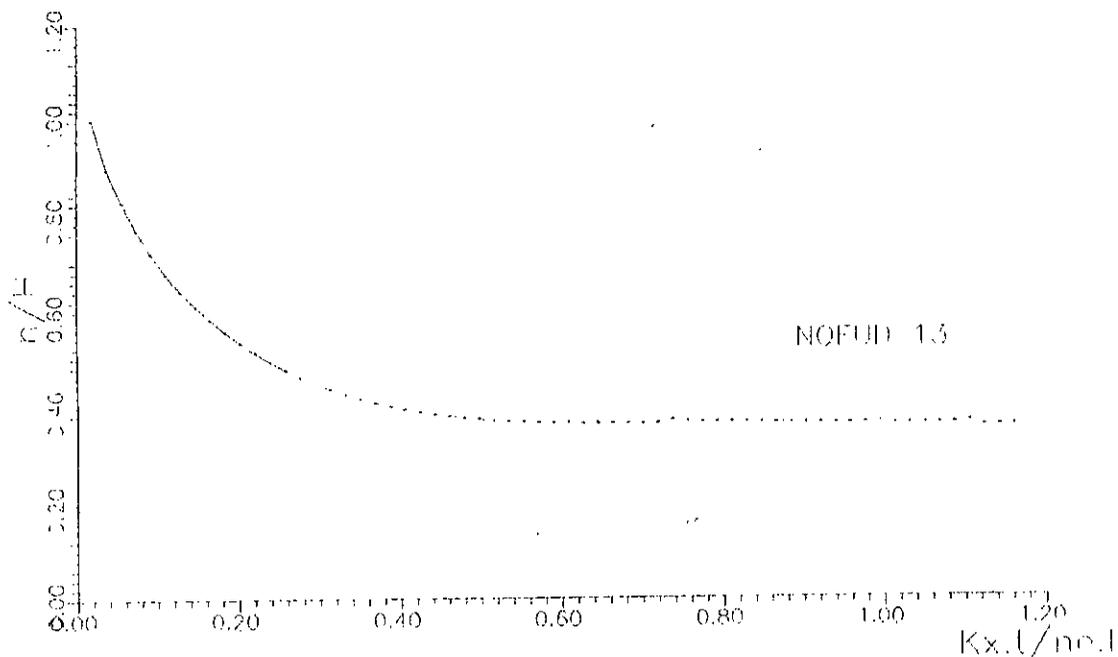


fig 4.14.1 : courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps (essai N 3)

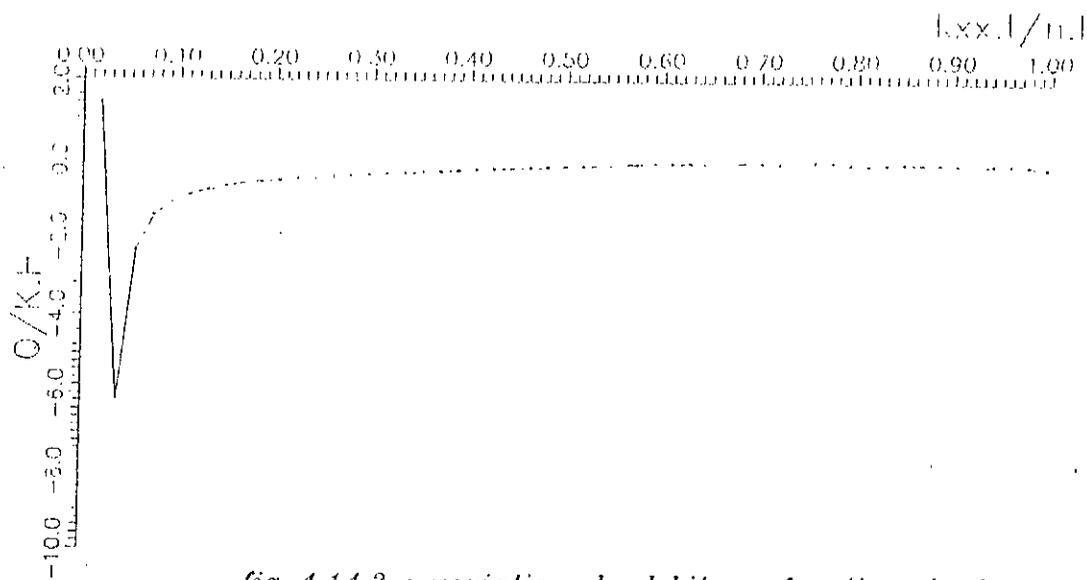


fig 4.14.2 : variation de débit en fonction du temps lors d'une vidange d'un barrage

B4.4.4 - écoulement sous les palplanches (essai n° 4) :

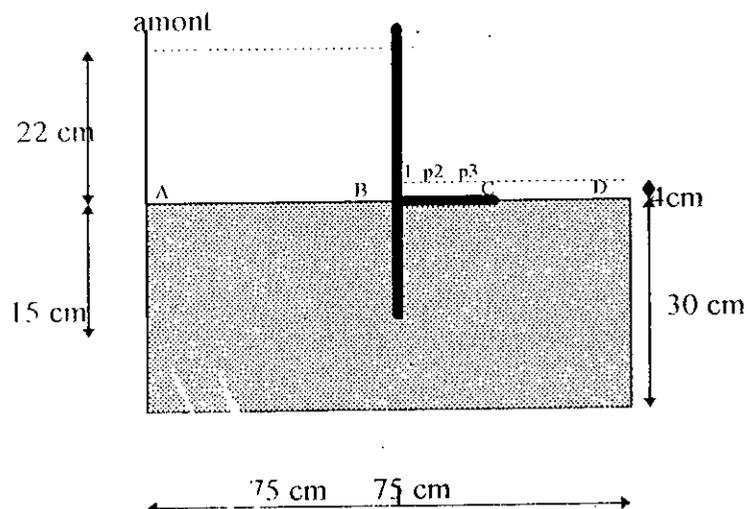


figure 4.15 : schéma d'un barrage aux palplanches.

Dans ce type d'écoulement, on s'intéresse davantage à la détermination de la répartition de la charge hydraulique ou la pression interstitielle à l'intérieur du domaine ainsi que le débit de percolation. La figure (4.15) montre le domaine d'écoulement avec les données utilisées. Ce domaine n'est pas symétrique, il est discrétisé par des mailles (éléments) rectangulaires variables afin de tenir compte du grand gradient de la pression sous la plaque, ce qui nous permet de calculer la pression aux points p_1 , p_2 , p_3 . Le nombre d'éléments est 77 avec 90 noeuds et le calcul se fait d'une façon directe (sans itérations).

Les conditions aux limites sont de type **Neumann** (flux nul) sur toutes les limites à l'exception des limites AB et CD (voir la figure 4.15).

Le débit de percolation est calculé en considérant la section médiane (sous la fiche des palplanches), il est de $0.496 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ /s/ml}$. Le calcul de la répartition de la charge hydraulique a permis d'évaluer la pression aux points p_1 , p_2 , p_3 connaissant la côte ($z = 30 \text{ cm}$) les valeurs de pressions sont:

- au point p_1 (79,30) : $p = 10.83 \text{ cm}$
- au point p_2 (89,30) : $p = 8.54 \text{ cm}$
- au point p_3 (99,30) : $p = 6.87 \text{ cm}$

Nous avons calculé le débit pour deux maillages (70 et 176 éléments), le résultat est donné par la figure 4.16.1 ou d'une manière adimensionnelle par la figure (4.16.2). La courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps est similaire au cas d'écoulement à surface libre (figure 4.17) où la durée d'une vidange est de 1100s.

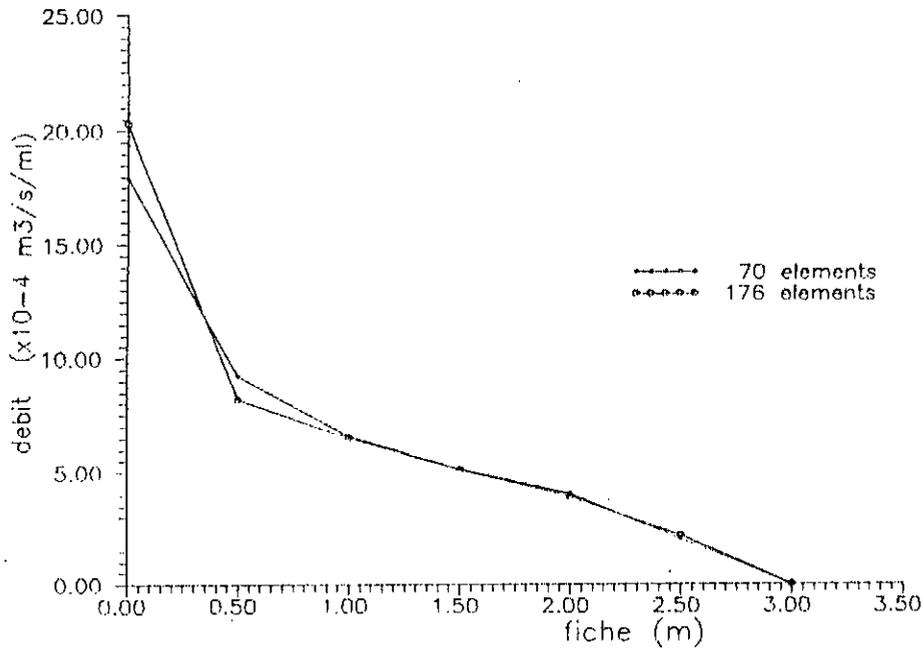


fig 4.16.1 : variation du débit en fonction de la fiche des palplanches

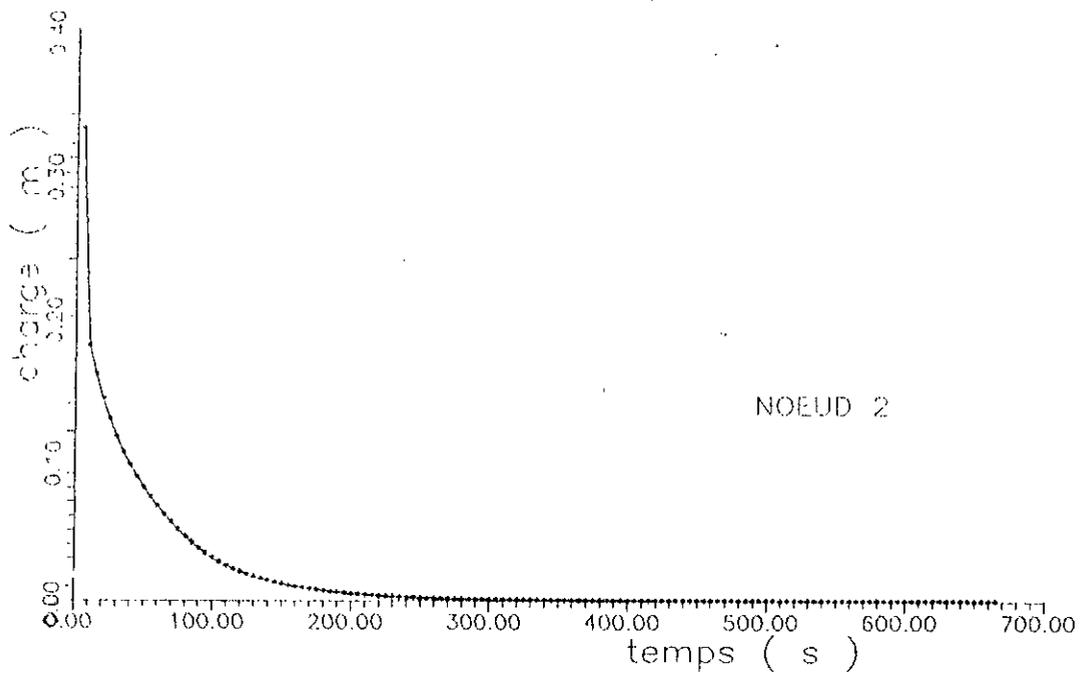


fig 4.17.2 : courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps

B4.4.5 - écoulement sous les barrages en béton :

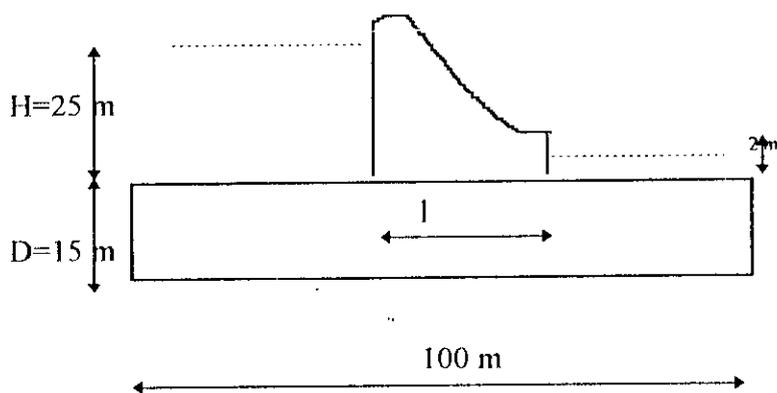


figure 4.18 : schéma d'un barrage rigide

Il s'agit d'un barrage homogène symétrique. Nous avons discrétisé uniquement la moitié amont par des éléments de forme carrée, le nombre d'éléments est de 230 avec 264 noeuds.

Nous avons considéré les différentes perméabilités (10^{-4} à 10^{-6} m/s) ainsi que les différentes conditions aux limites sur le côté aval, les limites latérales sont prises comme étant des limites équipotentielles. Le débit calculé pour une perméabilité isotrope de 10^{-5} m/s avec une charge à l'aval nulle est de 0.421×10^{-4} m³/s/ml.

Nous n'avons pas étudié ce cas dans le laboratoire, mais nous allons comparer ce résultat avec la solution analytique donné par la formule de *Pavlovsky* (1956) [28] :

$$\frac{Q}{KH} = \frac{K\sqrt{Y}}{\sqrt{1-Y}}$$

où

$$Y = e^{-\pi \cdot l/D} \quad (4.2)$$

Avec les données du problème, nous avons trouvé un débit de 0.66×10^{-4} m³/s/ml

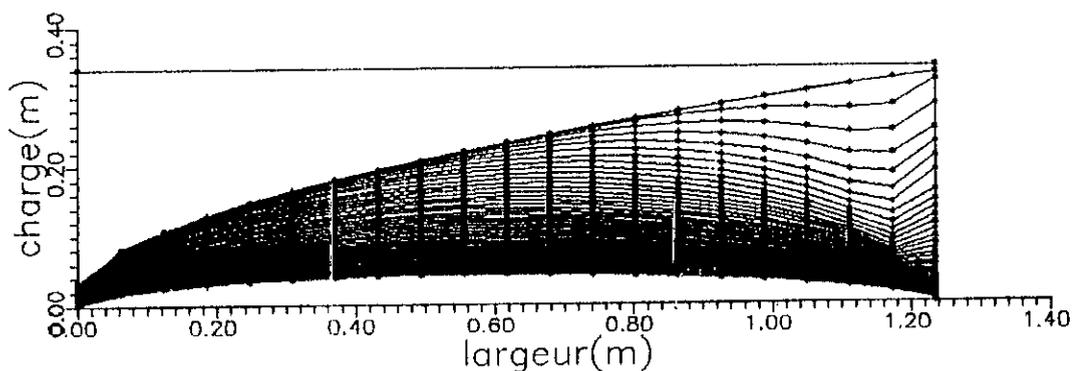


fig 4.2.2 : variation de la forme de la surface libre pour une vitesse de drainage très grande

B4.4 ECOULEMENT DANS LA ZONE DE DESATURATION:

Dans ce type de problème, la difficulté majeure consiste à déterminer les différents paramètres de la régression non-linéaire de l'équation (2.11). Dans cette étude, nous l'avons tiré ces paramètres à partir de la littérature scientifique (**Van Genuchten** , 1980, [39]) comme nous avons indiqué auparavant (§ 3. 2). Ce chercheur a étudié 04 types de sol dont les données sont récapitulées dans le tableau suivant:

	θ_s	θ_r	k_s (cm/j)	\bar{a}	\bar{n}	\bar{m}
sable	0.250	0.153	108.0	0.0079	10.4	0.903
silt-marneux	0.469	0.19	303.0	0.005	7.09	0.859
marne	0.396	0.131	4.96	0.0042	2.06	0.514
argile	0.446	0.0	0.082	0.0015	1.17	0.145

tableau 4.9 : paramètres de la régression non linéaires pour les différents types de sol (d'après **Van Genuchten** 1980)

Signalons qu'une autre étude est réalisée par **Chung et Horthon** (1987) [14]. Ils ont utilisé ces paramètres pour un matériau similaire à notre matériau utilisé dans nos essais:

θ_s	θ_r	k_s (m/s)	\bar{a}	\bar{n}	\bar{m}
0.368	0.102	9.22×10^{-5}	0.0033	2	0.5

tableau 4.10 : données paramétriques pour un sable non saturé (d'après **Chung & Horton**)

Dans notre étude, nous avons adopté ces paramètres:

θ_s	θ_r	k_s (m/s)	\bar{a}	\bar{n}	\bar{m}
0.37	0.1	7.0×10^{-5}	0.004	2.2	0.51

tableau 4.11 : données paramétriques pour le sable utilisé.

B4.6 DISCUSSION DES RESULTATS :

L'analyse des différents résultats de l'étude a montré une bonne concordance entre les résultats simulés et expérimentaux (voir les figures 4.4.2 et 4.13) à part quelques cas (e.g la forme de la surface libre d'un barrage à parois verticales). La difficulté majeure rencontrée dans la détermination de la position de la surface libre (S.L) est due principalement à la non linéarité géométrique de l'écoulement. La position d'équilibre est obtenue après une dizaine d'itérations comme indiqué dans les figures (4.2.1), (4.3), (4.8.1) et (4.9) malgré la précision est relativement bonne qui est fixée à 0.001. L'utilisation de plusieurs perméabilités (10^{-3} à 10^{-6}) nous a montré qu'il n'y a aucune influence sur la position de la surface libre en régime permanent, par contre l'évolution de cette surface varie en fonction de cette perméabilité.

Compte tenu d'une perméabilité du sable utilisé dans le laboratoire, nous n'avons pas pu visualiser cette surface à des différents instants.

Les figures (4.3) et (4.9) montre la manière de la convergence de la solution pour quelques noeuds selon une fonction exponentielle.

Quant au débit, les résultats sont récapitulés dans le tableau (4.12):

Essai N°	débit expérimental $\times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$	débit simulé $\times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$	débit analytique $\times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$	écart entre Q_{exp} et Q_{cal} (%)
01	0.109	0.106	-	2.75
02	0.345	0.308	0.298	10.7
03	0.24	0.199	-	17
04	0.409	0.496	-	17.54
barrage rigide	-	0.424	0.66	-

tableau 4.12: récapitulation des résultats du débit.

Concernant la répartition du potentiel à l'intérieur du domaine d'écoulement, elle suit globalement les profils théoriques des lignes équipotentiels. Nous avons comparé les valeurs de la charge piézométrique sous les palplanches (voir tableau 4.13). Les résultats nous fournissent une grande satisfaction.

Tableau 4.13: la charge piézométrique expérimentale et simulée

Points	charge exp. (cm)	charge cal. (cm)	erreur (%)
01	11.0	10.83	1.54
02	8.50	8.54	0.47
03	6.0	6.87	12.66

En ce qui concerne le régime transitoire, la grande difficulté consiste dans le choix de pas de temps Δt . Nous avons constaté que ce paramètre influe sur la manière d'évolution de la surface libre, et que nous devons le choisir en fonction des caractéristiques géométriques et physiques de l'ouvrage selon la relation (4.1). Si Δt est très faible ou très important, on aura une incompatibilité des deux vitesses (vitesse de la descente de la retenue et la vitesse de drainage) comme indiqué dans les figures (4.22.1) et (4.22.2). Pour éviter ces cas de figures, nous devons choisir Δt d'une manière que le paramètre adimensionnel τ soit compris entre 0.1 et 1.6. De même que la durée d'une vidange correspond généralement à $\tau = 1.6$.

L'étude paramétrique a montré que le coefficient d'emmagasinement revêt un intérêt particulier, puisqu'il influe sur la durée et la vitesse d'une vidange comme indiqué dans les figures (4.5.2) et (4.5.3).

Signalons que le choix des conditions initiales est très important notamment lorsque nous considérons la zone de désaturation. La conséquence de tenir compte de cette zone est l'augmentation du nombre d'itération donc le temps de calcul. Nous avons constaté que la présence de cette zone n'affecte pas la solution d'une façon remarquable et cela dû que cet écoulement est vertical.

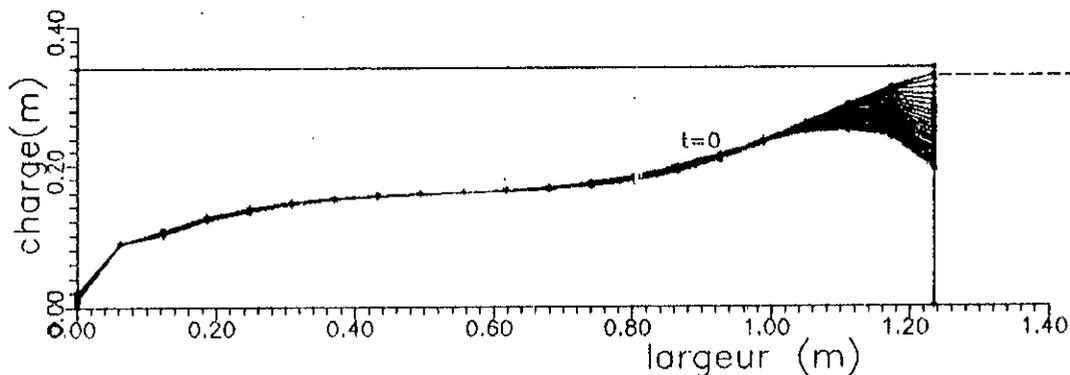


fig 4.2.3: variation de la forme de la surface libre pour une vitesse de drainage très faible

CHAPITRE V

PROGRAMMATION

5.1 INTRODUCTION :

Dans le but de résoudre les systèmes d'équations algébriques résultant de l'application des méthodes numériques (M.D.F . et la M.E.F) deux programmes de simulation des écoulements dans les milieux perméables ont été développés. Ce sont des programmes permettant la détermination de quelques caractéristiques d'un réseau d'écoulement souterrain (charge hydraulique, pression interstitielle, débit, la position de la surface libre, etc. ...) en tenant compte de l'écoulement dans la zone non saturée du sol ainsi que son évolution dans le temps (écoulements transitoires). Ces programmes sont écrits en fortran 77, utilisant des fichiers de données en accès direct avec format libre.

5.2 PROGRAMMATION EN DIFFERENCES FINIES :

Il est basé sur un schéma implicite aux différences, utilisant la méthode des directions alternées et les systèmes d'équations obtenus sont résolus par l'algorithme de **Thomas**, ce programme est composé de:

- a/ Introduction et lecture des données.
- b/ Etablissement des équations aux noeuds avec la prise en compte des conditions aux limites et éventuellement des conditions initiales .
- c/ Résolution des systèmes d'équations tridiagonaux.
- d/ Impression des résultats.

5.2.1 LECTURE DES DONNEES :

L'introduction des données s'effectue à l'aide d'un fichier en accès direct non formaté (afin d'éviter le risque de non-conformité de l'écriture des données avec leurs variables écrites dans le programme). Ce fichier contient les informations suivantes:

5.2.1.1 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES :

- perméabilité longitudinale.
- perméabilité transversale.
- porosité efficace.

5.2.1.2 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES :

- dimensions du domaine d'écoulement.
- paramètres de discretisation dans l'espace.

5.2.1.3 PARAMETRES D'EVOLUTION DU PHENOMENE (Transitoire)

- durée du phénomène.
- pas de discrétisation du temps.

5.2.1.4 NIVEAUX DES RETENUES :

- charge hydraulique en amont.
- charge hydraulique en aval.
- charge initiale.

5.2.1.5 PRECISION & NOMBRE D'ITERATION MAX**5.2.1.6 STRUCTURE DE FICHIER DE DONNEES :**

```
lire(2,*) lxm, lxd, lxx, lyf, lyd
Lire(2,*) am, av
Lire(2,*) dx, dy, dt, periode
Lire(2,*) kx, ky, Ss, q0
Lire(2,*) H1, H2, H0
lire(2,*) itmax, eps
```

La signification des différentes variables utilisées dans le programme est donnée dans le paragraphe suivant:

5.2.2 DEFINITION DES VARIABLES UTILISEES :

<u>variable</u>	<u>définition</u>
ax, bx, cx, dxx	coefficients de l'équation de résolution selon l'axe des X.
ay, by, cy, dyy	cof. de l'équation de résolution selon l'axe des Y.
am	pende du parement amont.
av	pende du parement aval.
bm	l'ordonne de l'équation du parement amont.
bv	l'ordonne de l'équation du parement aval.
S _s	coef. d'emmagasinement spécifique.
dx	paramètre de discretisation selon l'axe des abscisses.
dy	paramètre de discretisation selon l'axe des ordonnées.
dt	paramètre de discretisation de temps.
lxt	largeur totale du sol de fondation du barrage.
lxm	largeur du sol de fondation (coté amont).
lxv	largeur du sol de fondation (coté aval).
lxd	base de la digue du barrage.
ly	hauteur de la couche de fondation.
ly2	hauteur du corps de la digue.
kx	perméabilité longitudinale dans la digue.
ky	perméabilité transversale dans la digue.
période	durée du phénomène transitoire.
q ₀	débit volumique.
H ₁	la charge hydraulique en amont.
H ₂	la charge hydraulique en aval.
H ₀	la charge hydraulique estimé (valeur initiale).
ham	la condition aux limites de la charge en amont.
hav	la condition aux limites de la charge en aval.

$h(i,j)$	la charge hydraulique au noeud (i,j).
$u(i,j)$	la charge hydraulique à l'étape n° 1 (implicite en x).
$v(i,j)$	la charge hydraulique à l'étape n° 2 (implicite en y).
N_x	nombre de noeuds selon l'axe des x.
M_y	nombre de noeuds selon l'axe des y.
$nstep$	nombre de pas de temps.

Nous complétons par un schéma général d'un barrage en terre type avec les notations utilisées

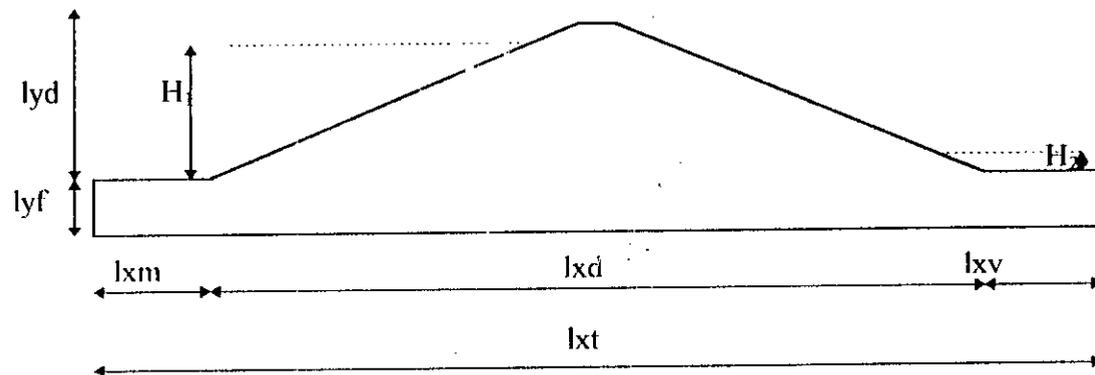


figure 5. 1: illustration des variables utilisées dans le programme pour un barrage.

5.2.3 SUBROUTINES UTILISEES :

Le programme de calcul comprend un certain nombre de sous-programmes (S/P) réalisant les opérations nécessaires pour obtenir la solution:

S/P DATA : Introduction des données;

S/P PRDATA : Lecture et vérification des données pour détecter les erreurs éventuelles;

S/P CLH : Contient les informations des noeuds imposés (C.L);

S/P PARAMX : Calcule les coefficients du système tridiagonal dans la direction x;

S/P PARAMY : Calcule les coefficients du système tridiagonal dans la direction y;

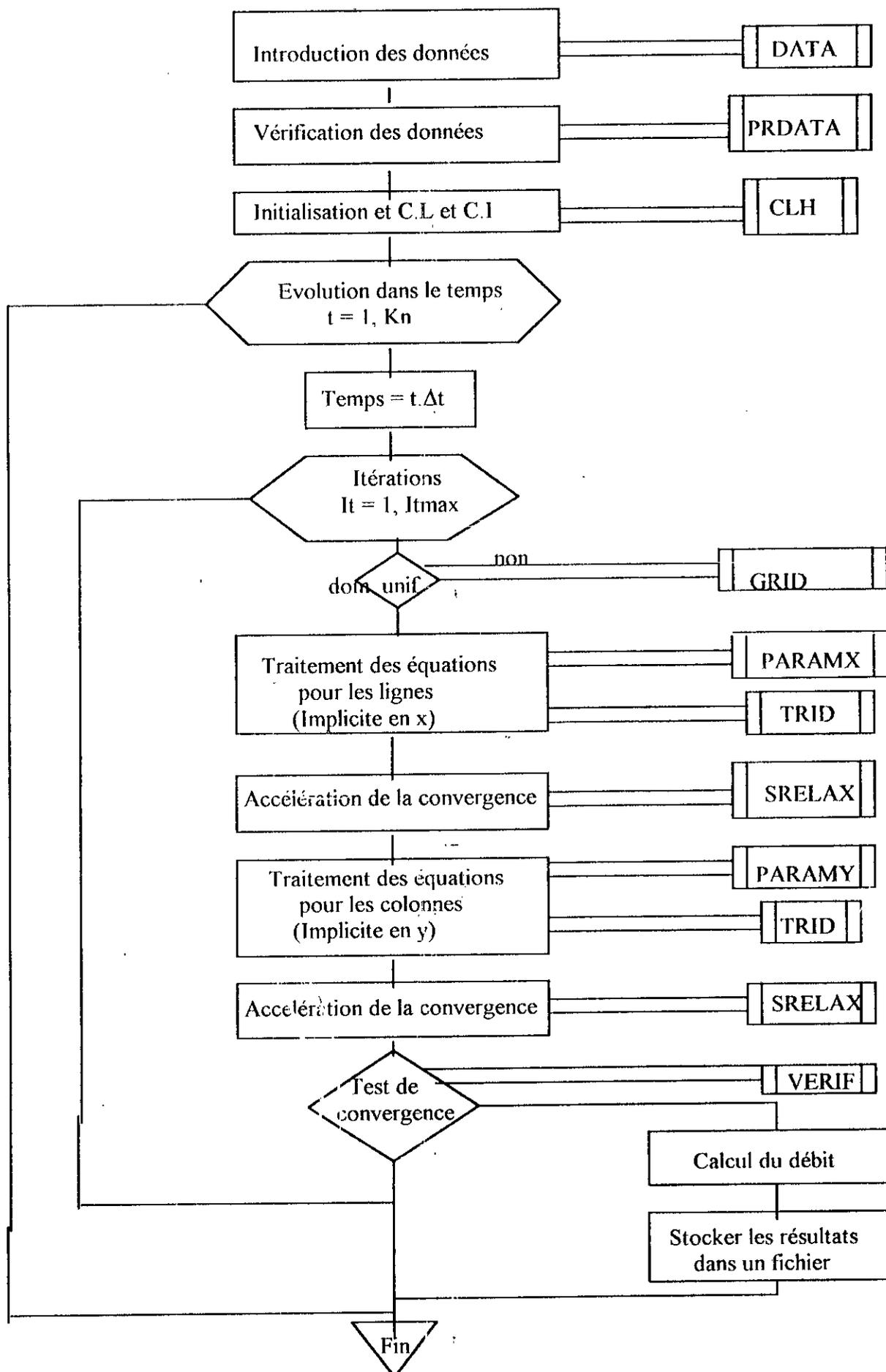
S/P TRID : Résout les systèmes tridiagonaux résultant de l'application de la méthode d'A.D.I;

S/P SRELAX : Permet l'accélération de la convergence par le calcul du facteur de sur-relaxation (ω);

S/P GRID : exprime les coordonnées x,y en fonction des coordonnées de référence.

S/P VERIF : Vérifie la convergence du processus itératif en imposant une certaine précision.

5.2.4 ORGANIGRAMME SIMPLIFIE :



5.3 PROGRAMMATION EN ELEMENTS FINIS :

Ce programme est développé à partir d'un programme (**Smith & Griffiths** [38]) traitant les problèmes de champs en régime permanent avec des conditions géométriques et physiques uniformes. Il a été adapté aux écoulements dans les barrages en tenant compte de l'hétérogénéité du sol et en utilisant un maillage variable.

Ce programme est caractérisé par sa capacité de traiter d'une part, les problèmes non-linéaires (géométriques et physiques), et d'autres part de tenir compte de l'hétérogénéité du milieu.

La méthode de résolution des systèmes d'équations algébriques est celle d'élimination de **Gauss**. Notons que la matrice d'écoulement KG (eq. 5.) est stockée dans la mémoire sous forme d'un vecteur de dimension $N*(IW+1)^*$, afin d'économiser la place mémoire.

La structure du programme est similaire à celui en D.F. L'introduction des données représente l'étape primordiale, conditionnant la qualité de la solution numérique. C'est pour cette raison, qu'on a prévu une étape de vérification des données selon notre choix.

5.3.1 INTRODUCTION DES DONNEES :

L'introduction des données se fait à l'aide d'un fichier à format libre, ce fichier est très réduit pour les problèmes homogènes avec un maillage uniforme, étant donné que tous les éléments possèdent les mêmes propriétés et le maillage est généré automatiquement.

5.3.1.1 STRUCTURE DE FICHIER DE DONNEES :

5.3.1.1.1 DONNEES GENERALES:

lire(2, A40) titre

lire(2, *) nn, nr, n, iw, nfix, nne, nxe, nye, nelem, nmat, ndim, ng, itmax**

si le régime est transitoire lire(2, *) valo, dt, duree, theta, npri, nres, ss

5.3.1.1.2 PROPRIETES HYDRAULIQUES :

pour in=1, nmat

lire(2, *) im, (xprop(im, jn), jn=1, ndim)

5.3.1.1.3 COORDONNEES POUR CHAQUE NOEUD :

pour in=1, nn

lire(2, *) in, (vcord(i, in), i=1, ndim)

5.3.1.1.4 CONNECTIVITE POUR CHAQUE ELEMENT AVEC SON TYPE DE MTX :

pour ie=i, nelem

lire(2, *) ie, (kconec(i, ie), i=1, nod), mat(ie)

5.3.1.1.5 LA POSITION DE LA SURFACE LIBRE INITIALE :

lire(2, *) (surff(i), i=1, nxe+1)**

(*) Il existe d'autres méthodes de stockage comme celle de lignes de ciel ou la méthode frontale (**Zienkiewics** [36]).

(**) Ces variables sont spécifiques uniquement aux écoulements à surface libre.

5.3.1.1.6 CONDITIONS AUX LIMITES :

lire (2,*) nfix,(no(i),i=1,nfix)

lire(2,*) yfix,nv

Remarque 5.1 :

La structure du fichier de données pour un problème homogène et uniforme est :

lire(2,(A40))titre

read(2,*)nn,nr,n,iw,nfix,nne,nxe,nye,nelem,nmat,ndim,ng,itmax**

si le regime est transitoire, lire (2,*)valo,dt,duree,itheta,npri,nres,ss

lire(2,*)(xprop(1,j),j=1,ndim)

lire(2,*)(surf(i),i=1,nxe+1)**

lire(2,*)(xlarg(i),i=1,nxe+1)

lire(2,*)nfix,(no(i),i=1,nfix)

lire(2,*)yfix,nv

Remarque 5.2 :

La numérotation des noeuds se fait horizontalement à partir de la gauche, et les éléments d'une façon verticale comme indiqué ci-dessous :

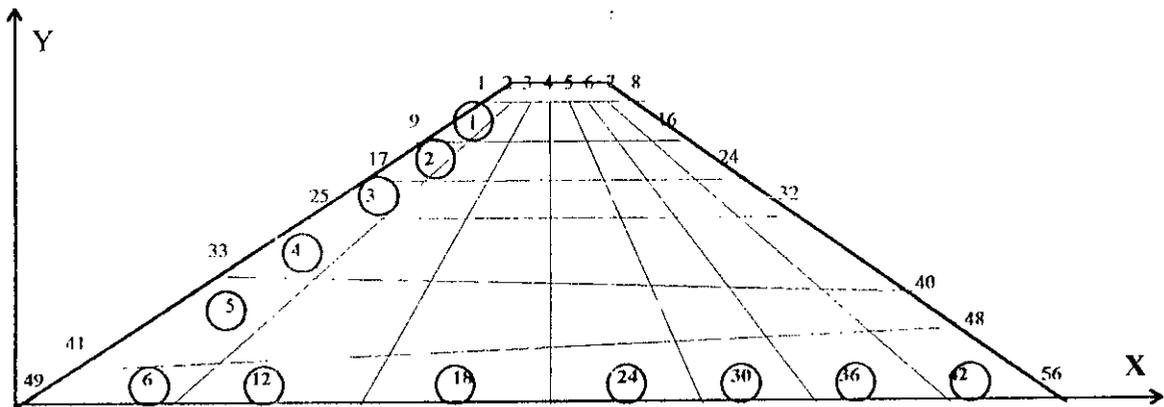


figure 5.2 : numérotation adoptée pour le maillage. (exemple d'un barrage).

5.3.2 DEFINITION DES VARIABLES DU PROGRAMME :

variable

définition

Ndin:	nombre de dimensions du problème.
Nmat	nombre de matériaux.
Nelem	nombre total d'éléments.
NXE	nombre éléments selon la direction X.
NYE	nombre éléments selon la direction Y.
NV	nombre éléments se situant au dessus du niveau aval.
NNE	nombre de noeuds par élément.
NN	nombre total de noeuds.
NR	nombre de noeuds libres (h=0).
N	nombre d'équations à résoudre (N = NN - NR).
Nfix	nombre de noeuds spécifiés par les conditions aux limites.
NO	numéro de noeud dont la charge est imposée.

VAL	la valeur de la charge imposée.
Valo	solution initiale pour le régime transitoire.
IR	la dimension de la matrice d'écoulement stocké sous forme d'un vecteur ($IR = N*(IW+1)$).
NG	nombre de point d'intégration de Gauss selon chaque direction.
Nodof	nombre de degré de liberté par noeud.
Itmax	nombre d'itérations max.
dt	pas de discrétisation du temps.
duree	durée du phénomène transitoire.
Theta	theta = 1 pour le schéma est implicite. theta = 0 pour le schéma explicite.
Npri	pour avoir les résultats transitoire à un instant donné.
Nres	pour avoir les résultats transitoire du noeud NRES.
ss	coefficient d'emmagasinement.
xprop	perméabilité.
perm	matrice de perméabilité.
surf	la position de la surface libre.
xlarg	le pas de discrétisation selon X (Δx).
yfix	le niveau de l'eau à l'aval à partir de la référence.
JAC	matrice jacobienne.
Det	déterminant de Jacobien.
FUN	fonctions d'interpolation en fonction dans le plan (ξ, η).
DER	dérivée des fonctions d'interpolation dans (ξ, η).
DERIV	dérivée des fonctions d'interpolation dans (x, y).
KP	matrice de rigidité élémentaire.
KV	matrice de rigidité globale.
KCONEC	les connectivité de élément.
VCORD	les coordonnées de noeud.
CH	la charge hydraulique.
DEBIT	le débit.

5.3.3 SUBROUTINES UTILISEES :

- Data** : lecture des données pour un problème quelconque.
- Dataf** : lecture des données pour un problème relativement simple (homogène, uniforme).
- Prdata** : verification des données introduites.
- Fsurf** : ajustement du maillage pour les écoulements à surface libre.
- Fsvar** : même rôle que Fsurf , utilisée pour les problèmes homogènes et uniformes.
- Inter** : interpolation aux points d'integration .
- Math** : opération du calcul matriciel (addition , multiplication , inversion , etc...).
- Result** : écriture des résultats dans un fichier

En plus les sous-routines de calcul matriciel qui sont disponibles dans les ouvrages des éléments finis [36] , [38] , [40] . Nous avons utilisé celles de *Smith & Griffiths* [38] .

Gauss : integration numerique par la quadrature de gauss.

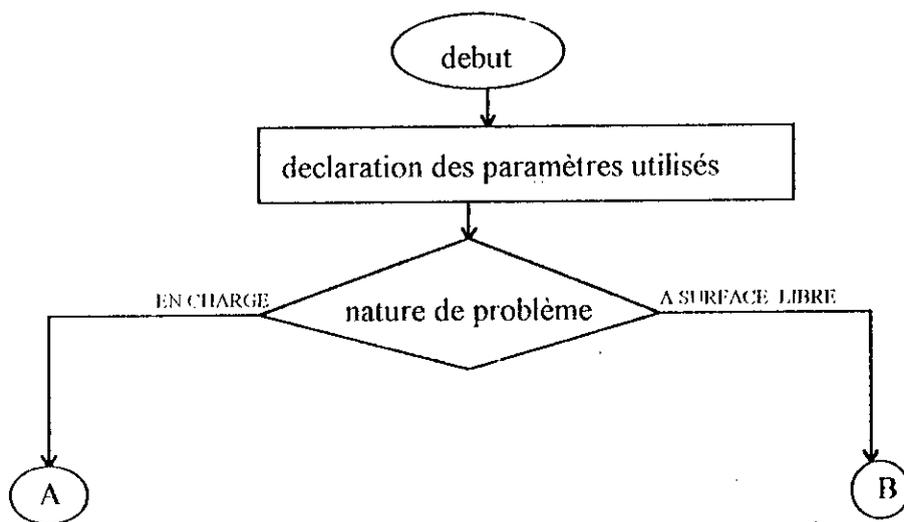
Formkv : assemble les matrices elementaires et forme la matrice globale d'écoulement.

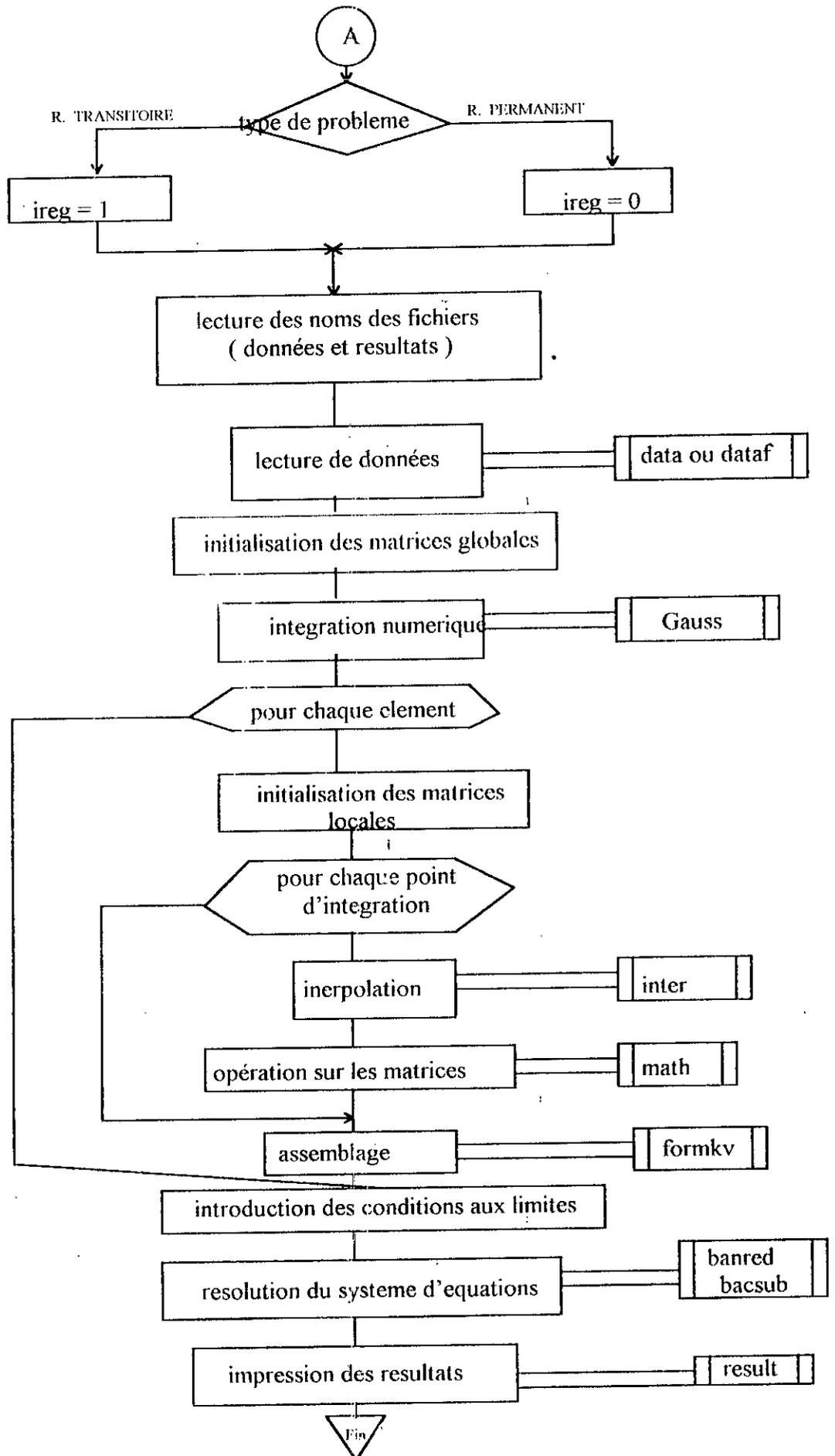
Banred : donne la reduction de Gauss de la matrice d'écoulement stockée sous forme d'un vecteur de dimension IR.

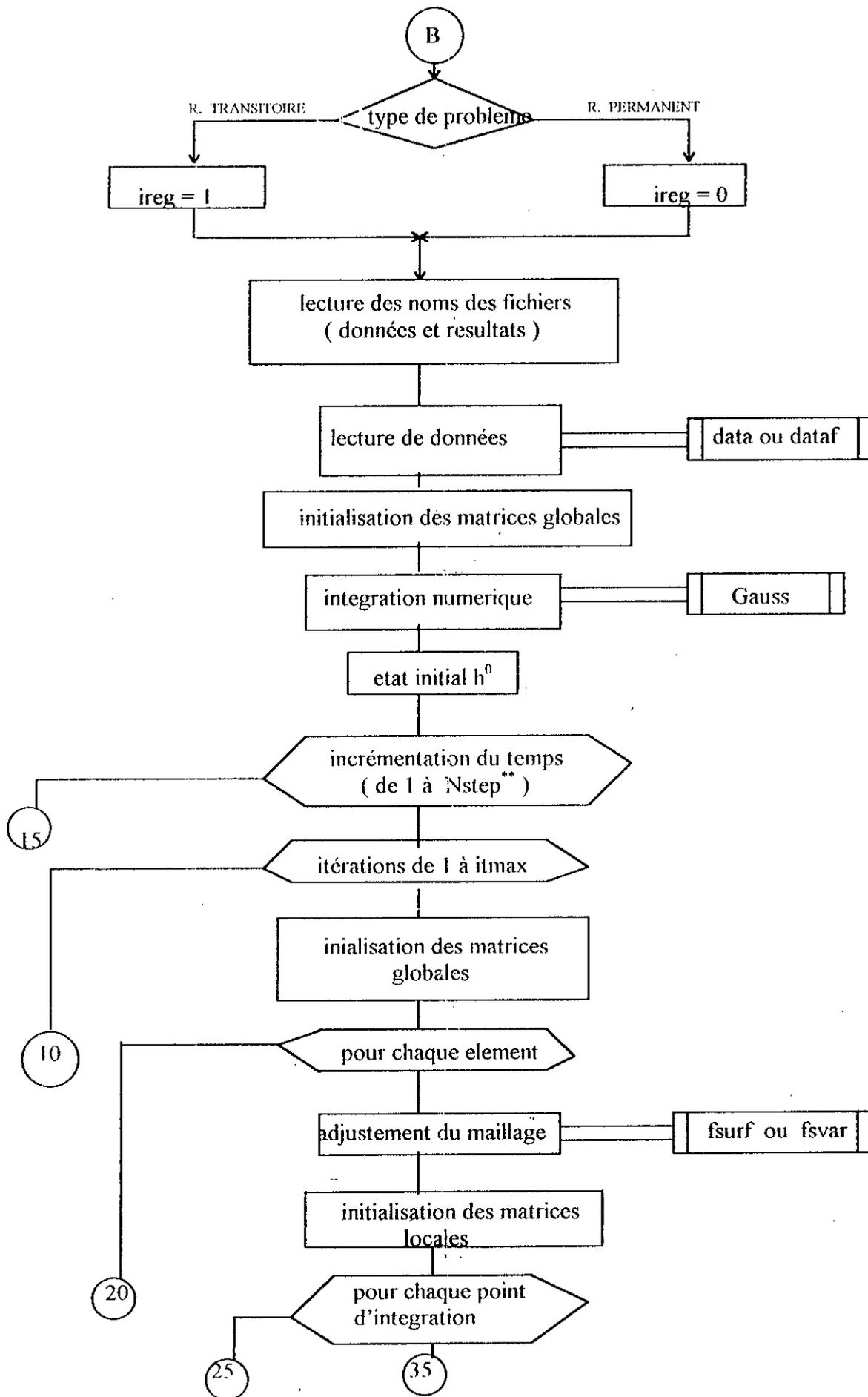
Bacsub : application de la methode d'elimination de Gauss.

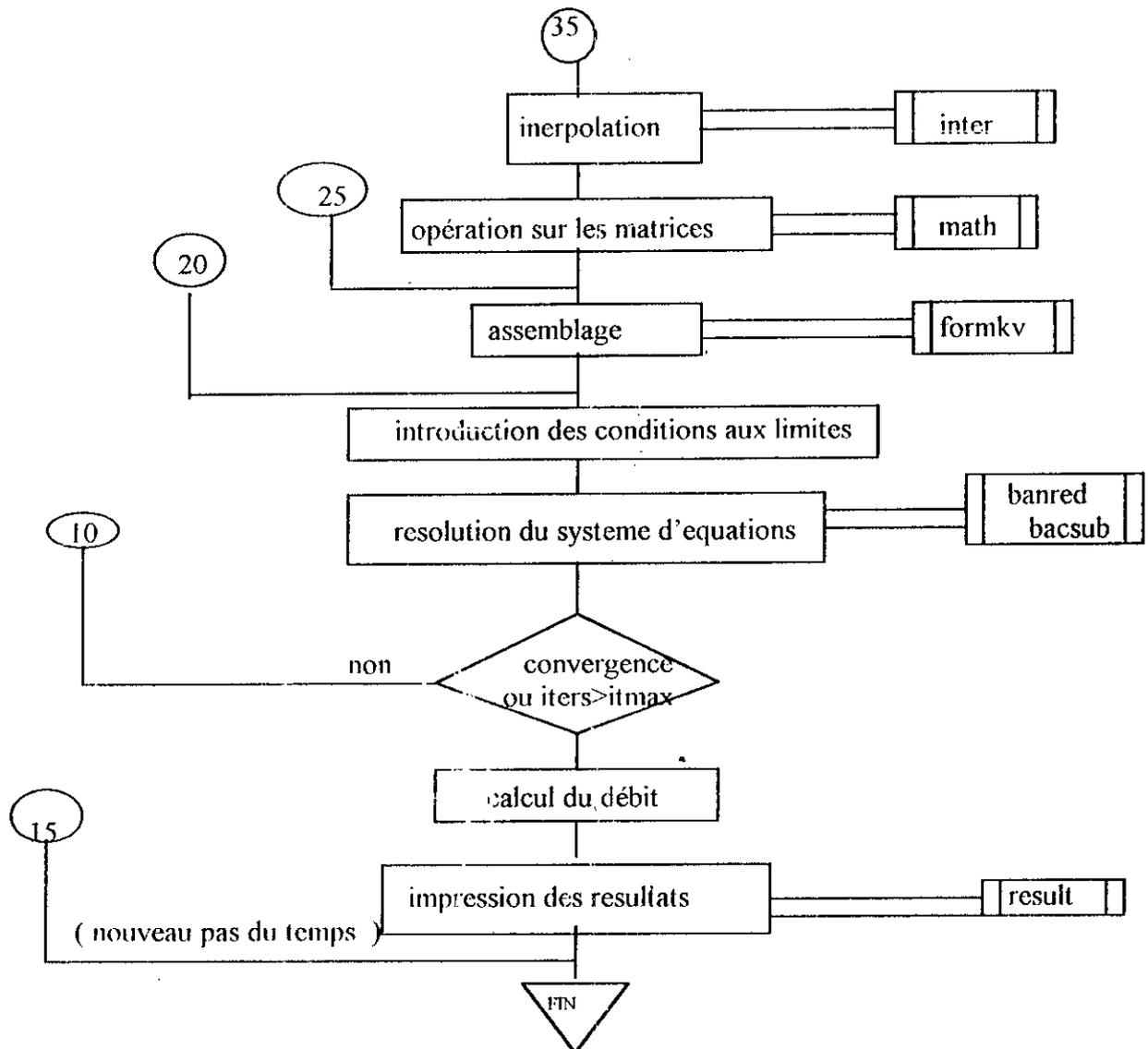
Checon : verification de la convergence.

5.3.4 ORGANIGRAMME :









5.4 CONCLUSION :

La programmation des problèmes d'écoulement par les deux méthodes numériques (M.D.F et M.E.F) est facilitée par la disponibilité dans la littérature des sous programmes effectuant les différentes opérations (programmation modulaire).

Dans l'approximation par les différences finies, à chaque itération, on résout un système tridiagonal pour chaque ligne et puis pour chaque colonne, la dimension de ces systèmes est réduite. Pour accélérer la convergence, le facteur de sur-relaxation est introduit de cette façon:

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n + \omega (h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n)$$

avec , $1 \leq \omega \leq 2$ (5.1)

Ce programme utilise un maillage non uniforme et variable pour les problèmes des écoulements à surface libre grâce à un changement de plan comme indiqué dans l'annexe A.

Concernant le programme en éléments finis, il est caractérisé par sa capacité de traiter les problèmes hétérogènes ainsi que les problèmes non-linéaires. Pour les écoulements permanents en charge, on résout un système d'équations algébriques de N inconnues une seule fois, par contre pour les problèmes à surface libre, à cause de l'ajustement du maillage (nouvelles coordonnées des noeuds), on aura des matrices différentes pour chaque itération et la résolution se fait à chaque itération. La capacité mémoire indispensable est réduite grâce à la manière de stockage des matrices globales (sous forme de vecteurs)

CHAPITRE IX

Application à un cas réel : barrage zoné de Fontaine des Gazelles (W. de Biskra)

6.1 DESCRIPTION DU BARRAGE :

6.1.1- Situation géographique :

Le site du barrage qui est en cours de construction, est situé à 37 km au Nord de la ville de Biskra, près de la route N° 3 (vers Batna), il est proche du village ' fontaines des gazelles '.

6.1.2- Situation topographique :

Une étude topographique du site a permis de déceler une gorge creusée par les eaux de Oued El Hai, passant par les brèches d'El Kantara. La région d'implantation de l'ouvrage est montagneuse, le lit de l'Oued au niveau de la gorge est relativement large (environ 70 m). L'altitude des versants de la gorge est de 1726 m.

Notons qu'une grande partie du village des fontaines des gazelles se trouve dans la cuvette du barrage, ce qui nécessite des solutions adéquates.

6.1.3- Etude hydrologique :

Le site du barrage est caractérisé par un climat semi-aride, la température moyenne annuelle est de 21.8 ° c avec un minimum de -01°C et un maximum de +49.2°C. Les précipitations sont irrégulières, avec une moyenne de l'ordre de 316 mm (200-500). Le mois le plus pluvieux est Janvier avec une moyenne de 42.8 mm, par contre le mois le plus sec est Août avec une moyenne de 5.5 mm.

L'ensemble des Oueds de la région d'étude font partie du grand bassin versant saharien du chott Melghir (B.V 06 selon le découpage administratif). Oued El-Hai sur lequel le barrage est construit a un régime temporaire, il draine un bassin versant de 1660 km² de surface et de 190 km de périmètre.

6.1.4-Etude géologique :

Les sondages effectués sur le site du barrage ont montré l'existence d'une couche rocheuse d'une cinquantaine de mètres composée notamment de calcaire et marne schisteuse alternés avec un pendage de 45° de direction Nord Nord-Est du côté aval de l'axe de la digue. (fig 6.2)

Les investigations préliminaires ont décrit deux petites failles sur le côté amont, situées en dehors des fondations. Le sous sol rocheux se situe au dessus de la couche des sédiments quaternaires de conglomérats, graviers, sable, limon et éboulis, cette couche est d'ordre de 15 -20 m d'épaisseur.

Compte tenu de la grande perméabilité du sous sol rocheux formé par des calcaires et marnes altérées jusqu'à la profondeur de 30 - 40 m , une voile d'injection est réalisé d'une profondeur d'au moins 50 m.

6.1.5- Caractéristique du barrage :

Le profil type du barrage (fig 6.1) montre qu'il s'agit d'un barrage zoné, constitué d'un noyau de limons argileux dont les caractéristiques sont données dans les tableaux (6.1) et (6.2). Les recharges sont composées d'un matériau alluvionnaire, avec un filtre de sable entre le noyau et les recharges.

TABLEAU 6.1 : Données principales du barrage en terre de fontaine des Gazelles.

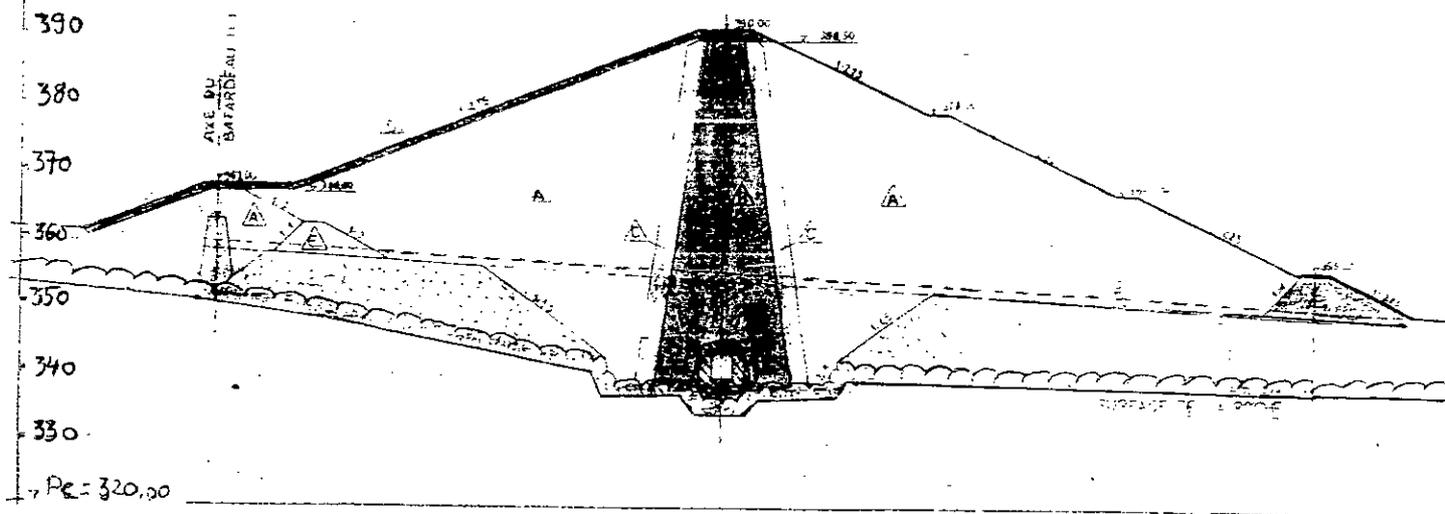
caractéristique géométrique	
Côte de la crête du barrage	390.00 m
Hauteur du barrage	56.0 m
Hauteur hors sol	42.5 m
Largeur en crête	8.5 m
Longueur en crête	370.00 m
Côte max de la retenue	388.00 m
Niveau normal de la retenue	384.00 m
Niv. d'exploitation min	368.70 m
Sup. du bassin versant	1660 km ²
Sup. de la cuvette	566.80 ha
Vol. de la retenue normale	55.5 hm ³
Volume régularisé	14 hm ³
Volume mort	7.0 hm ³

caractéristiques géotechniques :	
<u>Noyau d'argile :</u>	
perméabilité	$K=5.07 \times 10^{-10}$ m/s
porosité	$n_c=32.35$ %
poids spécifique humide	$\gamma_h=20.9$ kn/m ³
poids spécifique sec	$\gamma_d=18.30$ kn/m ³
poids spécifique des grains solides	$\gamma_s=27.20$ kn/m ³
limite de liquidité	$L_q=38.09$ %
limite de plasticité	$L_p=17.06$ %
Indice de plasticité	$I_p=21.23$ %
teneur en eau	$\omega=14.03$ %
<u>Alluvions :</u>	
perméabilité	$K=1.06 \times 10^{-5}$ m/s
porosité	$n_c=30$ %
poids spécifique humide	$\gamma_h=19.20$ kn/m ³
poids spécifique sec	$\gamma_d=18.7$ kn/m ³
teneur en eau	$\omega=2.90$ %
<u>Sable des filtres :</u>	
perméabilité	$K=1.3 \times 10^{-5}$ m/s
porosité	$n_c=30$ %
teneur en eau	$\omega=6.10$ %

TABLEAU 6.2 : Caractéristiques des ouvrages annexes du barrage.

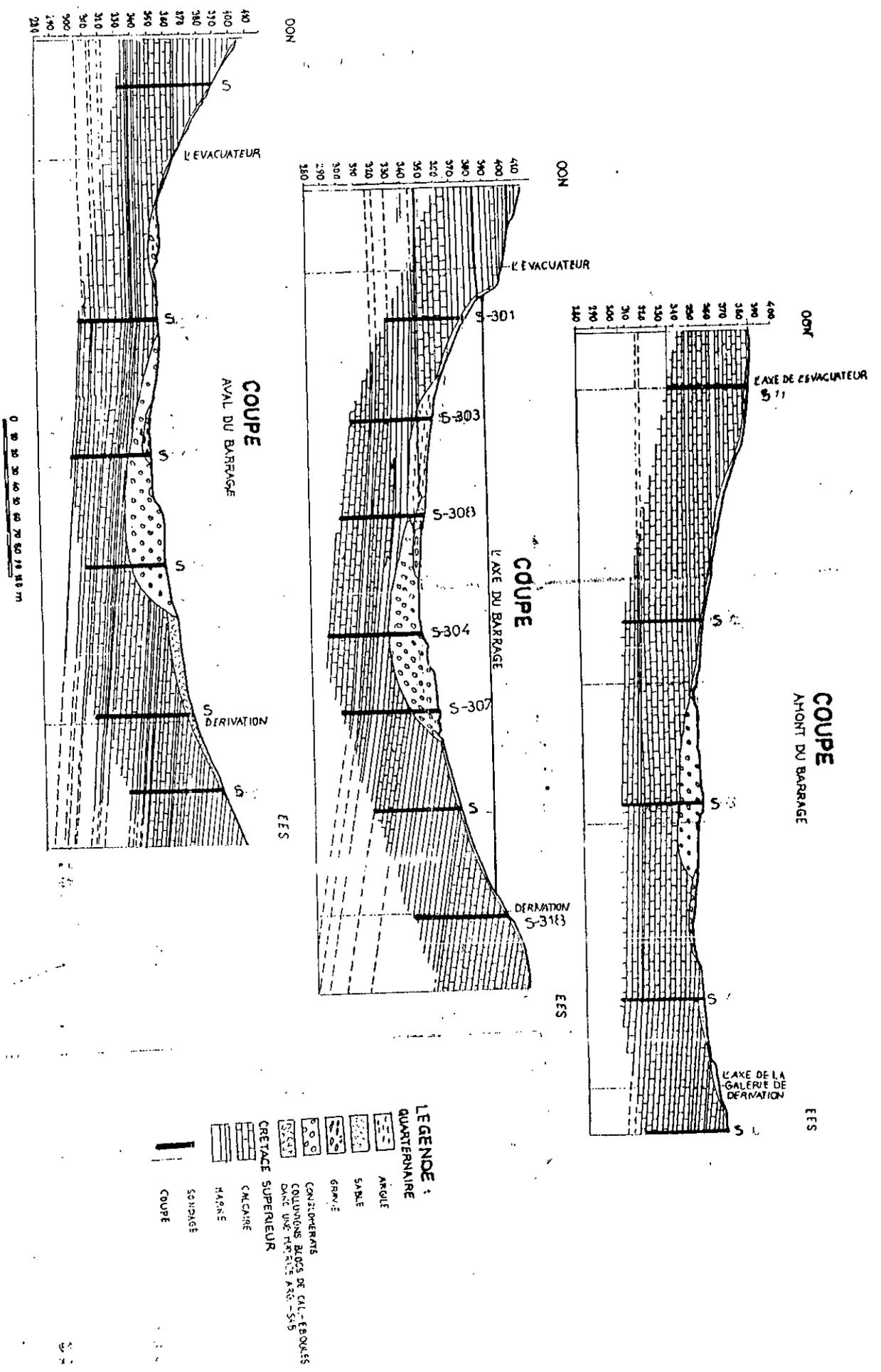
Ouvrages annexes :	
<u>Galerie de dérivation :</u>	
diamètre	8.00 m
longueur	200 m
débit	800 m ³ /s
<u>Vidange de fond :</u>	
dimensions	$\phi 2 \times 1200$ mm
débit	2×10 m ³ /j
<u>Tour de prise :</u>	
Nombre de prise	04
débit	4 m ³ /s
diamètre	1200 mm
<u>Evacuateur de crue :</u>	
débit	3000 m ³ /s
dimensions	25 x 210 m ²

figure 6.1: Coupe type du barrage de Fontaine des Gazelles (éch. 1/500)



<u>LEGENDE</u>	
	REMBLAI
	NOYAU ARGILE
	FILTRE
	RIP-RAP TYPE A
	RIP-RAP TYPE C
	BALLUNONS
	ROCHE
	BÉTON BARRAGE
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية	
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE	
وزارة الري والرياحنة والتغذية	وكالة الوطنية لتسوير
A - N - B	
<u>LA DIGUE</u>	
BARRAGE FONTAINE DES GAZELLES	
<u>COUPE TYPE</u>	1:500

Figure 6.2: Coupes géologiques transversales de la vallée (éch. 1/1500)



6.2 - ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT :

6.2.1- DOMAINE D'ÉCOULEMENT :

La section étudiée du barrage en terre s'élève sur une hauteur en crête de 56m à partir du sol de fondation (selon l'axe central). Il s'agit d'un barrage hétérogène constitué de 05 zones, une partie centrale (noyau d'argile), deux zones de recharges intérieure et extérieure composées d'un matériau alluvionnaire, deux zones de part et d'autre du noyau constituent les filtres sableux, (figure 6.1).

Les pentes des parements amont et aval sont de 1:2.75 et 1:2.25 respectivement avec un iseberme du côté amont et trois du côté aval, par contre les pentes du noyau central sont très raides (7:1). Ce noyau est constitué à partir d'un sol cohérent caractérisé par un haut indice de plasticité, il est identifié comme étant un limon argileux dont les caractéristiques géotechniques ont été indiquées auparavant (tableau 6.1).

6.2.2 - COMPORTEMENT HYDRAULIQUE DES SOLS :

Les paramètres principaux influençant le comportement hydraulique sont le tenseur de perméabilité et le coefficient d'emménagement ou la porosité efficace dans le cas d'un écoulement à surface libre.

La perméabilité a été mesurée au laboratoire pour les différents matériaux utilisés (voir tableau 6.1). D'après l'étude géotechnique du projet, l'hypothèse d'isotropie pour chaque zone du barrage est adoptée, ce qui suppose qu'on doit compacter d'une façon efficace afin d'éliminer la stratification des couches. La perméabilité du noyau est très faible ($k = 5.07 \times 10^{-10}$ m/s) pour réduire le débit de percolation et faire rabattre la ligne piézométrique comme nous allons le voir ultérieurement.

6.3 - RESOLUTION DU PROBLEME PERMANENT :

Rappelons que la résolution d'un problème d'écoulement à travers un barrage en terre revient à déterminer :

- 1 - La position et la forme de la surface libre afin d'examiner la stabilité du parement aval.
- 2 - Calcul du débit de fuite afin de quantifier la perte de la retenue par des infiltrations.
- 3 - La répartition de la charge hydraulique ou la pression à l'intérieur du massif.

6.3.1 - MAILLAGE DU DOMAINE D'ÉCOULEMENT :

Le domaine est discrétisé en 299 éléments quadratiques et 336 noeuds. Les données du maillage sont introduites au début par un fichier de données, ensuite ce maillage sera réajusté à chaque itération en fonction du déplacement de la surface libre, puisque la limite supérieure du maillage coïncide toujours avec celle de la surface piézométrique. L'avantage d'un maillage ajustable est de mieux calculer la position de la surface libre, sans recours à des interpolations, lorsque cette surface ne coïncide pas avec des noeuds.

Signalons que la partie qui se trouve au dessous du niveau aval est fixe (dans notre cas le sol de fondation).

6.3.2 - CONDITIONS AUX LIMITES :

Les conditions aux limites utilisées sont celles d'un barrage en terre (cf. § 3.3) la surface supérieure qui représente la surface libre initiale est considérée comme étant une ligne équipotentielle $h=z=50$ m (élévation de 384.00 m qui représente le NNR). Les noeuds appartenant à cette limite sont numérotés de 1 à 24, les noeuds du parement amont sont $24 \times N$ (avec $N=1,14$), la charge de ces noeuds est de 50 m . Concernant la condition des noeuds du parement aval, c'est une condition de suintement $h=Z$ (élévation), les noeuds concernés sont 1,25,49,73,97,121,145,169,193,217,241. Les noeuds 241,265,289,313 appartiennent à une ligne équipotentielle avec $h=16.0$ m (niveau de la fondation).

Le substratum, caractérisé par sa double inclinaison (fig 6.1) avec une partie centrale horizontale, est une limite imperméable; donc la condition appliquée est celle de Neumann, et la charge aux noeuds sera calculée. Notons que les parois de la galerie de visite constituent la limite du maillage. On peut encore procéder autrement en supposant que la perméabilité des éléments appartenant à cette galerie est nulle.

6.3.3 - DETERMINATION DE LA SURFACE LIBRE :

La détermination de la position de la surface libre présente un problème non linéaire (non linéarité géométrique). Pour cela, nous proposons une solution initiale qui s'améliore d'une itération à l'autre jusqu'à la satisfaction du critère de convergence. Dans notre cas la surface initiale est horizontale d'une hauteur de 50 m (élévation de 384.00 m) et la surface finale est obtenue après 21 itérations (avec une précision de 0.001), cette surface est donnée dans la figure 6.3.

D'après l'allure de la surface libre, nous constatons que les zones de décharge (alluvions) se comportent comme des drains, puisque la forme de cette surface est presque horizontale, et le noyau d'argile se comporte comme une digue.

Afin d'examiner l'utilité de ce noyau d'argile, nous avons supposé un barrage homogène avec une perméabilité des alluvions de $K = 1.05 \times 10^{-5}$ m/s, la surface obtenue montre l'existence du suintement c'est-à-dire que l'eau sort à l'air libre en traversant le parement aval, ce qui met le barrage en péril. (fig 6. 4)

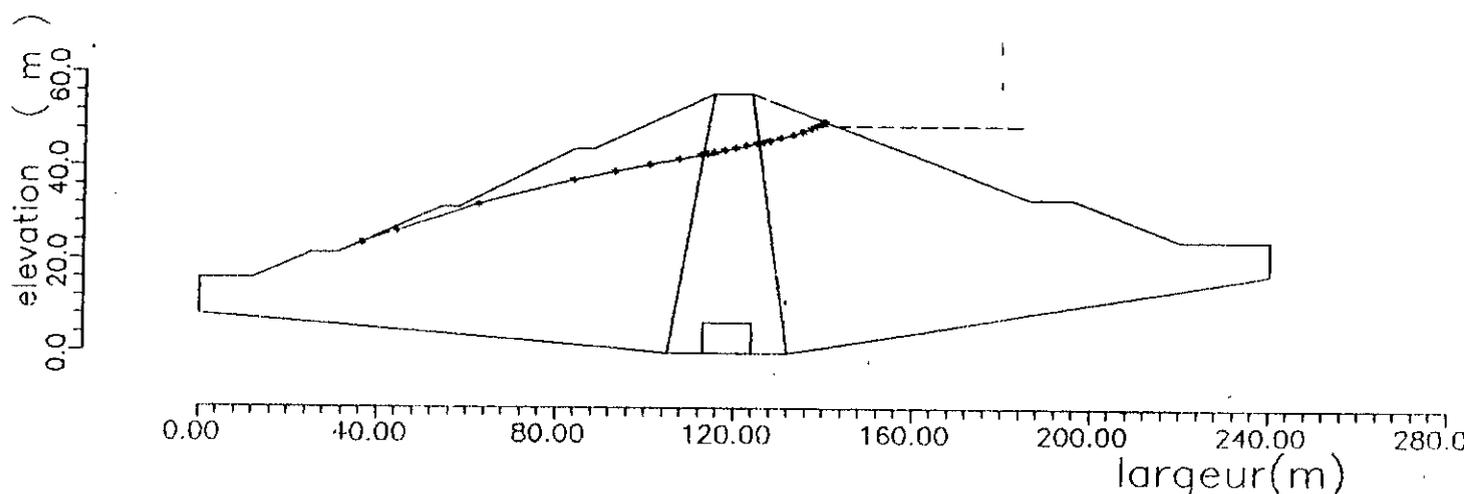


fig 6.3A: la forme de la surface libre pour un barrage homogène

6.4 - SIMULATION D'UNE VIDANGE RAPIDE :

6.4.1- DEFINITION DU TEMPS D'UNE VIDANGE:

Comme nous avons signalé dans le paragraphe précédent que le noyau se comporte comme une digue à cause de sa faible perméabilité par rapport aux autres zones, la durée d'une vidange partielle ou totale dépend de la perméabilité du noyau, de sa largeur à sa base et aussi de sa porosité efficace ($n_e = 0.3235$). Le paramètre adimensionnel utilisé est :

$$\tau = k_{xx}.t/n_e.L \quad (6.1)$$

Ce paramètre définit d'une façon efficace le temps nécessaire pour la vidange, en choisissant une vitesse convenable. D'après les exemples traités, nous avons remarqué que ce paramètre varie dans une intervalle de (0.1 à 1.6). Faute de quoi, le problème d'incompatibilité des deux vitesses (celle de la retenue et celle à l'intérieur du massif perméable) se manifeste (figure 6.4).

6.4.2 - CONDITIONS INITIALES :

Le problème d'une vidange rapide est un problème non permanent (transitoire) qui nécessite une solution initiale, c'est-à-dire la répartition de la charge à l'intérieur du domaine d'écoulement à l'instant de référence. Le choix de cette solution influe sur le nombre d'itérations à effectuer.

Dans notre cas, cette condition initiale considérée est la solution en régime permanent, donc nous calculons la charge pour un niveau constant de la retenue et ensuite, nous commençons à faire baisser le niveau de la retenue selon la vitesse adoptée.

L'avantage de ce procédé est d'éviter de donner une solution arbitraire ou encore d'introduire la solution point par point.

6.4.3 - CALCUL DU DEBIT :

Afin de calculer le débit, nous devons choisir une section donnée, traversée par l'écoulement. Dans notre étude, nous avons calculé le débit traversant le parement amont en régime permanent; il est de l'ordre de $0.275 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} / \text{ml}$. Connaissant la longueur du barrage $L = 370.00 \text{ m}$, le débit total traversant le barrage est $0.001 \text{ m}^3/\text{s}$ soit 87.912 m^3 par jour .

Concernant le débit instantané lors d'une vidange, il diminue d'une manière exponentielle selon la figure 6.5.

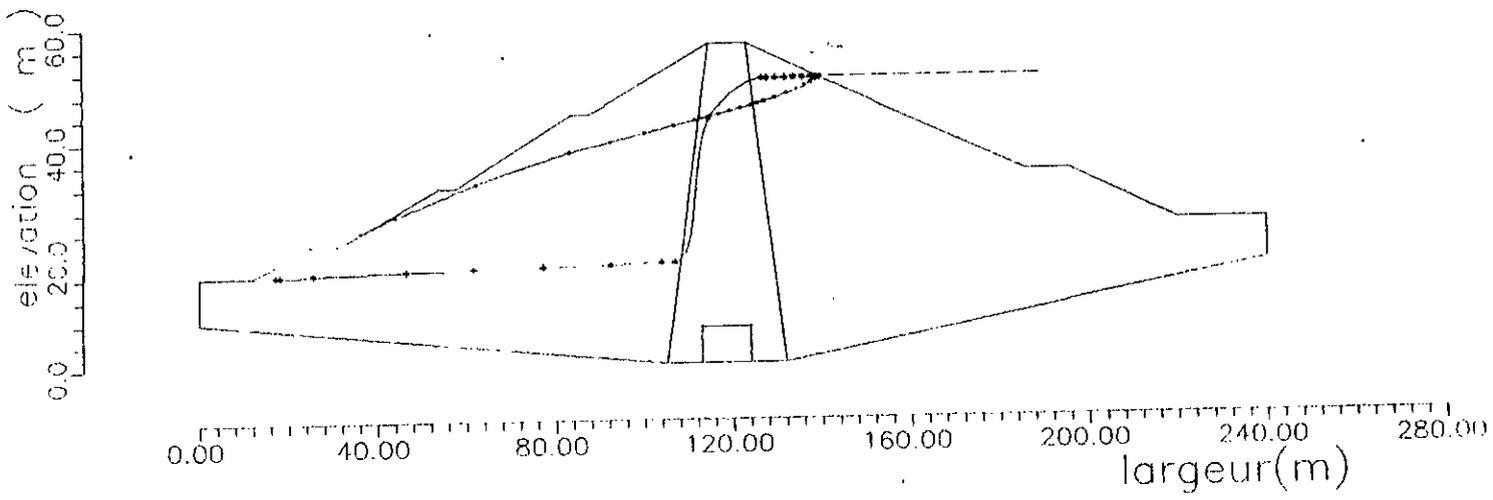


fig 6.3 : la forme de la surface libre du barrage des Fontaines des Gazelles

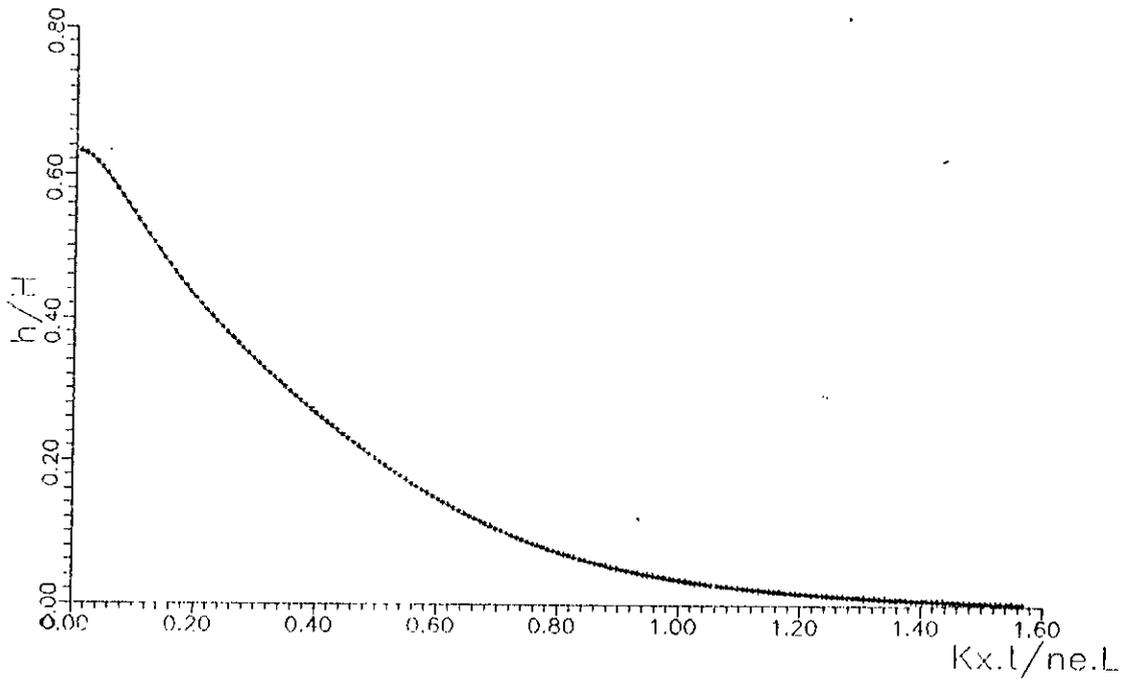


fig 6.4 : courbe de variation de la charge hydraulique en fonction du temps

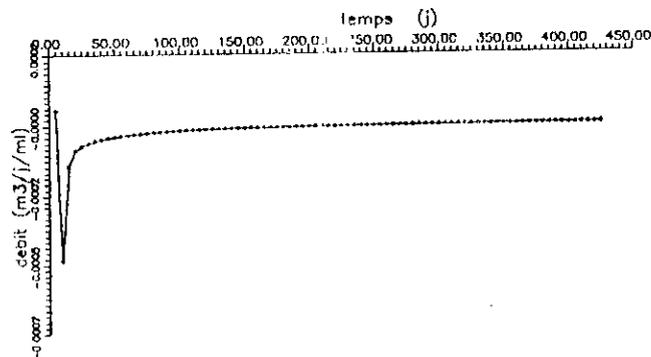


fig 6.5 : variation de debit en fonction du temps lors d'une vidange d'un barrage

6.5 - CONCLUSION :

L'application du modèle numérique à un cas concret a permis d'améliorer le programme en tenant compte de particularités non prévues initialement telle que l'inclinaison du substratum et l'existence des vides à l'intérieur du domaine (la galerie de visite).

L'étude des écoulements à travers le barrage de Fontaine des Gazelles a montré le bon choix du concepteur de prévoir un noyau central afin de rabattre la surface libre (figure 6. 4) et d'avoir un débit minimum (si on considère le barrage homogène composé des alluvions on aura un débit de $2437.46 \text{ m}^3 / \text{j}$ soit un rapport de 28).

La simulation d'une vidange nous a fourni une idée sur l'évolution de la surface libre dans le temps, ce qui aide les gestionnaires de ce barrage à choisir la vitesse de la vidange et à connaître le temps nécessaire à une vidange partielle ou totale ainsi que d'évaluer le débit de fuite.

CONCLUSION GENERALE

La variété de problèmes provoqués par l'écoulement d'eau dans le sol est vaste et d'une importance considérable pour le concepteur afin d'améliorer les conditions d'exécution des travaux et d'assurer la stabilité hydraulique des ouvrages:

Dans cette étude, les problèmes bidimensionnels sont traités et analysés sous ces deux aspects numérique et expérimental.

- Le premier avait pour objet de simuler les différents problèmes des écoulements (en charge et surface libre), pour pouvoir y parvenir, il fallait d'abord établir un modèle mathématique avec les conditions aux limites qui reflètent au mieux la réalité et ensuite choisir un algorithme de résolution conditionnant la qualité des solutions numériques.

Pour cela deux méthodes numériques sont appliquées :

- méthode des différences finies (M.D.F), basé sur le schéma implicite, utilisant un maillage curviligne et variable pour les problèmes à surface libre (S.L).
- méthode des éléments finis, caractérisée par une grande souplesse à traiter les problèmes complexes (non-linéaires, hétérogènes, ...).

- Le second avait pour objectif de valider le modèle numérique en comparant les résultats obtenus. Compte tenu de la difficulté de réaliser des essais pour tous les cas simulés (cas anisotrope, hétérogène, milieu non saturé), on a eu recours aux résultats expérimentaux et analytiques disponibles dans la littérature scientifique.

Quant aux résultats de l'étude, on distingue deux régimes:

- **régime permanent** : Il suffit de prendre le pas du temps (Δt) très grand, les résultats simulés montrent une bonne concordance, soit en terme de débit (écart varie entre 2.75 à 17 %), soit la répartition de la charge hydraulique, soit la position de la surface libre.

Signalons que la S.L. observée est relativement épaisse à cause de l'influence de la capillarité qui n'est pas prise en compte dans le modèle. On a constaté que la valeur de la perméabilité n'influence pas sur la position de la S.L.

Le tableau (4.12) récapitulant les résultats de ^{h(t)} débit pour les différents ^{points} cas montre une bonne concordance des résultats (l'erreur varie de 0.47 à 12 %)

- **régime transitoire** : Ce régime correspond à la résolution d'une succession d'états permanents et exige un temps de calcul important. La simulation de vidange de la retenue pour les différentes vitesses a montré que la durée du phénomène transitoire a une grande importance sur la fluctuation de la S.L., en utilisant un paramètre adimensionnel du temps (τ) dépendant de la perméabilité et la porosité ainsi que la largeur de l'ouvrage selon cette relation (6.1). On a constaté que lorsque $\tau < 0.1$ ou $\tau > 1.6$, une incompatibilité entre la vitesse d'abaissement dans la retenue et la vitesse de fluctuation dans le milieu perméable se manifeste (fig 4.22.1 et 4.22.2).

Le coefficient de perméabilité agit d'une façon proportionnelle sur la vitesse de vidange donc sur la position de la surface libre à un instant donné. Par contre l'augmentation du coefficient d'emmagasinement spécifique engendre une augmentation de la durée du phénomène transitoire selon la figure (4.5.3).

L'application à un cas concret (barrage zoné de Fontaines des Gazelles) a permis en outre de préciser les performances du modèle (milieu hétérogène, substratum incliné, etc...)

L'étude a montré que le choix du concepteur est justifié, puisque si on considère l'hypothèse d'homogénéité, on aura une surface de suintement sur le parement aval avec les effets néfastes sur la stabilité mécanique de l'ouvrage. Etant donné la grande différence de perméabilité entre le noyau et les recharges ($k_{rech} / k_{noy} \cong 10^5$), les courbes de la surface libre à chaque instant ont montré que les recharges constituées d'un matériau alluvionnaire se comportent comme des drains (forme presque horizontale de la S.L).

L'étude des écoulements dans la zone non saturée est considérée uniquement dans le cas transitoire (domaine entre la position de la S.L à l'instant initial et à l'instant donné), il faut noter que la loi de comportement de ces écoulements est non linéaire; les paramètres de régression non linéaires sont tirés de la littérature [39] à partir des courbes caractéristiques d'un matériau similaire. Les résultats ont montré que la présence de la zone non saturée semble ne pas trop affecter la solution; notamment le débit.

En guise de conclusion, nous pouvons dire que si le développement des modèles de simulation numérique doit contribuer à résoudre les différents problèmes causés par la circulation d'eau dans le sol d'une façon efficace, il faudra attacher une grande importance à l'évaluation expérimentale des différentes données relatives aux milieux non saturés telles que la perméabilité, le taux de saturation et le coefficient d'emmagasinement, afin d'avoir des courbes caractéristiques représentatives. Nous recommandons d'étudier ce phénomène en tenant compte d'une part, de l'interaction entre le champ hydraulique et chimique et même thermique, puisque le gradient hydraulique n'est pas la seule cause de circulation d'eau souterraine et d'autre part, de l'influence de la 3^{ème} dimension.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Abderrahim D.** , (1990) ‘ *Contribution à la détermination de la pression interstitielle dans les barrages en terre homogène* ’ , Thèse de Magister , Ecole Nationale Polytechnique d’Alger.
- [2] **Bathe K.J & Oden J.T & Wunderlich W.** , (1976) ‘ *Finite Element Analysis of Flow Diffusion and Salt Water Intrusion in Porous Media* ’ , Germany Symposium on Finite Element Methods Held at M.I.T.
- [3] **Bathe K.J & Khoshgoftaar M.R.** , (1979) ‘ *Finite Element Free Surface Seepage Analysis Without Mesh Iteration* ’ , International Jour for Numerical and Analysis Methods in Geomechanics , vol. 3 , pp 13-22.
- [4] **Beam R.M & Warming R.F.** , (1976) ‘ *An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic systems in conservation law form* ’ , Journal of computational physics , N° 22 , pp 87-110.
- [5] **Beam R.M & Warming R.F.** , (1980) ‘ *Alternating Direction Implicit Methods for Parabolic Equations with a Mixed Derivative* ’ , Society for Industrial and applied Mathematics Journal (SIAMJ) , vol 1 , N° 1 , pp 131-159 .
- [6] **Bear J.** (1979) , ‘ *Hydraulics of Groundwater* ’ , édition McGraw - Hill , series in water Resources and Environmental engineering , printed in USA .
- [7] **Blanc G. & Baradat & Lagarde A.** , (1973) ‘ *utilisation de modèles mathématiques multidimensionnels pour l'étude des écoulements dans les digues et barrages en terre* ’ , la houille blanche , N° 5/6 , pp 435-441 .
- [8] **Bonnet M.** (1982) , ‘ *Méthodologie des modèles de simulation en hydrogéologie* ’ , Thèse de Doctorat d’Etat en Science ; Institut National Polytechnique de Lorraine Nancy (France) .
- [9] **Burger A. & Recordon E. & Bovet D. & Cotton L. & Saugy B.** (1985) , ‘ *Thermique des Nappes Souterraines* ’ , presses polytechniques romandes Suisse.
- [10] **Cannor J.J & Brebbia C.A** (1976) , ‘ *Finite Element Techniques for Fluid Flow* ’ , Newnes-Butterworths London .
- [11] **Casandjian C. & Vuez A. & Amoros D. & Laquerbe M.** (1980) ‘ *Ecoulement de l'eau à travers une digue perméable , modélisation analytique* ’ , Matériaux et construction Dunod , N° 78 , pp 413-429 .
- [12] **Celia M.A & Bouloutas E.T** (1990) , ‘ *A General Mass Conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation* ’ , Water Res. Research , vol 26 , No 7 , pp 1483-1496 .
- [13] **Chung S.O & Horton R.** (1987) , ‘ *Soil Heat and Water Flow with a Partial Surface Mulch* ’ , Water Res. Research , vol 23 , No 12 , pp 2175-2186 .

- [14] Chung S.O & Austin T.A (1987) , ' *Modelling Saturated-Unsaturated Water Flow in Soils* ' , J. of Irrigation and Drainage Eng. , vol 113 , No 2 , pp 233-251 .
- [15] Freeze R.A & Thomas J.W (1971) , ' *three-dimensional Transient Saturated Unsaturated Flow in a Groundwater Basin* ' , Water Res. Research vol. 7, No 2, pp 347-365.
- [16] Gupta R.S & Kumar D. (1980) , ' *A Modified Variable Time Step Method for the One Dimensional Stefan problem* ' , Inter. J. Heat Mass transfer, vol. 23 , No 23 , pp 101-109.
- [17] Gupta R.S & Kumar D. (1980) , ' *Variable Time Step Methods for One Dimensional Stefan Problem With Mixed Boundary Condition* ' , Inter. J. Heat Mass Transfer , vol. 24 , pp 251-259 .
- [18] Hildebrand F.B (1968), ' *Finite Difference Equations and Simulations* ' , Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs New Jersey .
- [19] Hirsch C. (1988) , ' *Numerical Computation of Internal and External Flows* ' , vol. 1, John Wiley & sons Ltd UK .
- [20] Hill M.C (1990) , ' *Solving Groundwater Flow Problems by Conjugate Gradient Methods and the Strongly Implicit Procedure* ' , Water Res. Research vol. 26 , No 9 , pp 1961-1965 .
- [21] Humbert P. (1984) , ' *Application de la Méthode des Eléments Finis aux Ecoulements en Milieux Poreux* ' , Bulletin de liaison Labo. Ponts et Chaussées, No 132 , pp 21-37 .
- [22] Hillel D. (1984) , ' *L'eau et le sol - principes et processus physiques* ' , Edition CABAY, France
- [23] Karalis T.K (1990) , ' *compressibilité des argiles gonflantes non saturées à partir des essais rhéologiques* ' , Can. Geotech. Journal , vol. 27 , pp 90-104 .
- [24] Karki K.C & Patanker S.V (1988) , ' *Solution of some two-dimensional incompressible flow problems using a curvilinear coordinate system based calculation procedure* ' , Numerical Heat Transfer, vol. 14 , pp 309-321.
- [25] Leguy C. (1987) , ' *Analyse de l'Écoulement à travers des Barrages en Terre lors du Remplissage du Réservoir* ' , Thèse (M. sc.A), Ecole Polytechnique de Montréal Canada.
- [26] Marsily G. de (1976) , ' *Représentation par modèle mathématique des grands systèmes aquifères multicouches - théorie et application-* ' , Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Fontainebleau, France
- [27] Messameh A. & Zeraoula M. (1988) , ' *Étude des écoulements et dimensionnement* ' , Thèse d'Ingénieur d'Etat , Ecole Nationale des Travaux Publics d'Alger.
- [28] Musy A. (1974) , ' *contribution à l'étude par simulation des écoulements souterrains en milieux poreux* ' , Thèse de Doctorat , Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse) .
- [29] Neuman S.P & Witherspoon P.A (1971), ' *Analysis of Nonsteady Flow with a Free Surface Using the Finite Element Method* ' , Water Res. Research, vol. 7, No 3, pp 611-623.

- [30] Neuman S.P (1973) , ' *Saturated-Unsaturated seepage by Finite Elements* Journal of the hydraulics division , N° HY12 , pp 2233-2250 .
- [31] Neuman S.P & Witherspoon P.A (1979) , ' *Finite Element Method of Analysis Steady Seepage with a Free surface* ' , Water resources Research, vol. 6, No 3 , pp 889-896 .
- [32] Nimmo J.R (1990) , ' *Experimental Testing of Transient Unsaturated Flow Theory at Low Water Content in a Centrifugal Field* ' , Water Res. Research, vol. 26, No 9, pp 1951-1960.
- [33] Paganakis A.T & Fredlung D.G (1984) , ' *A Steady State Model for Flow in Saturated-Unsaturated Soils* ' , Can. Geotech. Journal , vol. 21, pp 419-430.
- [34] Shih T.M (1985) , ' *A Procedure to Debug Computer Programs* ' , Inter. Jour. for Numerical Methods in Engineering , vol. 21 , pp 1027-1037 .
- [35] Smith I.M & Griffiths D.V (1988) , ' *Programming the finite element method* ' , second edition , Wiley & sons LTD U.K
- [36] Thomas H.R & Rees S.W (1990) , ' *Modelling Field Infiltration into Unsaturated Clay* ' , Journal of Geol. Engineering, vol. 116, No 10, pp 1483-1499 .
- [37] Touzot G. & Dhatt G. (1981) , ' *une représentation de la méthode des éléments finis* ' , Edition Maloine France .
- [38] Tracy J.c & Marino M.A (1987) , ' *Seepage into variably saturated porous medium* ' , Journal of Irrigation and Drainage Engineering, vol. 113, N° 2 , pp 198-232.
- [39] Van Genuchten T. (1980) , ' *A closed-forme equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils* ' , Soil Science Society of America Journal , vol. 44, N°5, pp 892- 898.
- [40] Williams W.O (1978) , ' *Constitutive Equations for Flow of an Incompressible Viscous Fluid Through a Porous Medium* ' , Quarterly of Applied Mathematics, pp 255-267.
- [41] Youngs E.G (1971), ' *Seepage Through Unconfined Aquifers with Lower Boundaries of any Shape* ' , Water Res. Research , vol. 7 , No 3 , pp 624-639
- [42] Zienkiewics O.C (1979) , ' *La méthode des éléments finis* ' , 3^{ème} edition , groupe McGraw Hill paris .

ANNEXE A

APPROXIMATION DES DERIVEES DANS LE PLAN DE REFERENCE

La possibilité de traiter les différents problèmes physiques de configuration complexe est offerte par l'utilisation d'une approche récente permettant d'appliquer la M.D.F avec des mailles quadrilatères non orthogonales afin d'éliminer les erreurs de discrétisation du domaine. L'idée de base est de créer un domaine fictif du problème dont la solution est facile à calculer numériquement. Cette approche est appliquée aux problèmes des écoulements à surface libre.

Les relations de passage entre le domaine réel (X,Y) et celui de calcul (ξ,η) :

$$\begin{aligned} X &= X(\xi, \eta) \\ Y &= Y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (A.1)$$

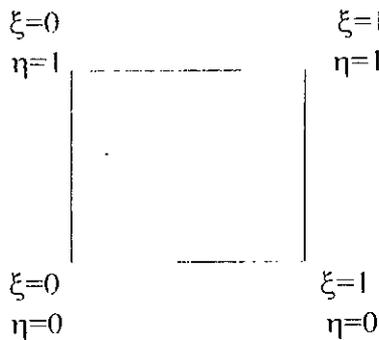


fig A.2 : domaine fictif de calcul.

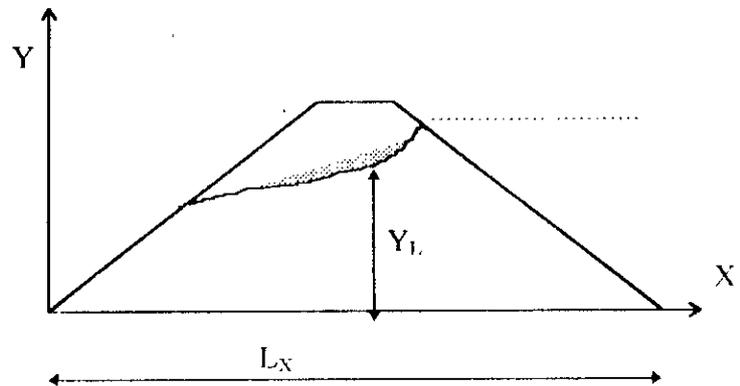


fig A.1 : massif perméable (domaine physique x,y).

A.1 : Calcul des dérivées :

A.1.1 : dérivées premières:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (A.2)$$

où matriciellement ;

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (A3)$$

Dans le but de faciliter l'écriture, on adopte cette notation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= f_x & ; & \quad \frac{\partial}{\partial y} = f_y & ; & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} & ; & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} & ; & \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = f_{xy} & \quad (A.4) \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \xi_x & ; & \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta_x & ; & \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \xi_{xx} & ; & \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = \eta_{yy} & ; & \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = \xi_{xy} \end{aligned}$$

La matrice du système (A.3) est l'inverse du Jacobien J^{-1} qui peut être exprimé par :

$$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

où $|J|$ est le déterminant de Jacobien ;

$$|J| = x_\xi \cdot y_\eta - x_\eta \cdot y_\xi \quad (A.6)$$

la relation (A.3) devient donc :

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_\xi \\ f_\eta \end{pmatrix} \quad (A.7)$$

ou d'une manière développée :

$$f_x = \frac{1}{|J|} (y_\eta \cdot f_\xi - y_\xi \cdot f_\eta) \quad (A.7a)$$

$$f_y = \frac{1}{|J|} (-x_\eta \cdot f_\xi + x_\xi \cdot f_\eta) \quad (A.7b)$$

La comparaison des relations (A.3) et (A.5) permet d'écrire ces expressions :

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{y_\eta}{|J|} \\ \eta_x &= \frac{-y_\xi}{|J|} \\ \xi_y &= \frac{-x_\eta}{|J|} \\ \eta_y &= \frac{x_\xi}{|J|} \end{aligned} \quad (A.8)$$

Donc il suffit de connaître les dérivées dans le plan de calcul (ξ, η) ainsi que le Jacobien pour calculer les dérivées et la fonction dans le plan (x, y).

A.3.2 dérivées seconde :

On dérive les relations (A.7a) et (A.7b) une autre fois, et après quelques opération on obtient: [16], [17], [22]

$$f_{xy} = \frac{(y_\eta^2 \cdot f_{\xi\xi} - 2y_\xi \cdot y_\eta \cdot f_{\xi\eta} + y_\xi^2 \cdot f_{\eta\eta})}{|J|^2} + \frac{(y_\eta^2 \cdot y_{\xi\xi} - 2y_\xi \cdot y_\eta \cdot y_{\xi\eta} + y_\xi^2 \cdot y_{\eta\eta})(x_\eta \cdot f_\xi - x_\xi \cdot f_\eta)}{|J|^3} + \frac{(y_\eta^2 \cdot x_{\xi\xi} - 2y_\xi \cdot y_\eta \cdot x_{\xi\eta} + y_\xi^2 \cdot x_{\eta\eta})(y_\xi \cdot f_\eta - y_\eta \cdot f_\xi)}{|J|^3} \quad (\text{A.9a})$$

$$f_{yy} = \frac{(x_\eta^2 \cdot f_{\xi\xi} - 2x_\xi \cdot x_\eta \cdot f_{\xi\eta} + x_\xi^2 \cdot f_{\eta\eta})}{|J|^2} + \frac{(x_\eta^2 \cdot y_{\xi\xi} - 2x_\xi \cdot x_\eta \cdot y_{\xi\eta} + x_\xi^2 \cdot y_{\eta\eta})(x_\eta \cdot f_\xi - x_\xi \cdot f_\eta)}{|J|^3} + \frac{(x_\eta^2 \cdot x_{\xi\xi} - 2x_\xi \cdot x_\eta \cdot x_{\xi\eta} + x_\xi^2 \cdot x_{\eta\eta})(y_\xi \cdot f_\eta - y_\eta \cdot f_\xi)}{|J|^3} \quad (\text{A.9b})$$

Concernant le second membre de l'équation (1.23), qui est la dérivée par rapport au temps elle s'exprime par:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right)_{x,y} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \cdot \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \quad (\text{A.10a})$$

ou encore ;

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\xi,\eta} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right)_{x,y} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad (\text{A.10b})$$

$$= f_t \Big|_{x,y} + f_x \cdot x_t + f_y \cdot y_t \quad (\text{A.11a})$$

donc on aura ;

$$f_t \Big|_{x,y} = f_t \Big|_{\xi,\eta} - x_t \cdot f_x - y_t \cdot f_y \quad (\text{A.11b})$$

Donc la dérivée (A.10) dans le plan (x,y) est fonction de la dérivée dans le plan (\xi,\eta) et en fonction de la vitesse de déplacement éventuel des limites du domaine, si le domaine est fixe on aura une vitesse nulle (x_t=y_t=0) , dans le cas contraire on parle des limites dynamique.

Afin d'écrire l'équation correspondante à l'équation (A.1) dans le plan fictif (\xi,\eta), il suffit de remplacer ces termes par les expressions (A.7) et (A.11b). A partir des relations de passage (A.8) , on pourra évaluer les dérivées des coordonnées x(\xi,\eta), y(\xi,\eta).

A.4 : CONDITIONS AUX LIMITES :

Les conditions de type Dirichlet où le potentiel est imposé sont exprimées comme dans le domaine physique (x,y) divisé par la hauteur de la retenue H. Par contre, la condition de Neumann imposée sur les limites imperméable (cas de substratum) représente quelques difficultés pour exprimer ces conditions dans le plan fictif de calcul (ξ,η), cette condition s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \right)_{\eta = \text{cte}} = 0 \quad (\text{A.12a})$$

et ;

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} \right)_{\xi = \text{cte}} = 0 \quad (\text{A.12b})$$

Après quelques transformations de ces relations, on obtient [17],[33]

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{|J| \cdot \sqrt{\alpha_{11}}} \cdot (\alpha_{11} \cdot f_{\eta} - \alpha_{12} \cdot f_{\xi}) = 0 \quad (\text{A.13a})$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} = \frac{1}{|J| \cdot \sqrt{\alpha_{22}}} \cdot (\alpha_{22} \cdot f_{\xi} - \alpha_{12} \cdot f_{\eta}) = 0 \quad (\text{A.13b})$$

avec ;

$$\alpha_{11} = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (\text{A.14a})$$

$$\alpha_{12} = x_{\xi} \cdot x_{\eta} + y_{\xi} \cdot y_{\eta} \quad (\text{A.14b})$$

$$\alpha_{22} = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (\text{A.14c})$$

A.5 DISCRETISATION DU DOMAINE :

La discrétisation du domaine d'écoulement (plan physique) se fait soit par un maillage uniforme, soit par un maillage variable afin de tenir compte de zones de grandes variations (fig 6). Ce maillage se réajuste après chaque itération en fonction de la position de la surface libre. Les coordonnées généralisées $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ s'expriment par:

$$\xi = X/L_x \quad (\text{A.15a})$$

$$\eta = y/y_L \quad (\text{A.15b})$$

Si on introduit les indices i,j, on écrit ;

$$\xi = \Delta \xi \cdot (i-1) \quad (\text{A.16a})$$

$$\eta = \Delta \eta \cdot (j-1) \quad (\text{A.16b})$$

où ;

$\Delta \xi$: pas de discrétisation selon l'axe des ξ ;

$\Delta \eta$: pas de discrétisation selon l'axe des η ;