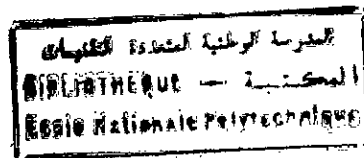


ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie-Civil

THÈSE DE MAGISTER

Présenté par : Slimane LOURDJANE
Ingénieur d'Etat Université de Tizi-Ouzou



THÈME

ANALYSE NON-LINEAIRE DES DALLES
EN BETON ARME PAR LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS MULTICOUCHES

Soutenue en Juillet 1994 devant le Jury composé de :

MM.B. TILIOUINE	Professeur (E.N.P)	Président
A.CHARIF	Professeur (U.Batna)	Rapporteur
M.K.BERRAH	Maître de conférences (E.N.P)	Examineur
M.BOUGHOUFALLAH	Chargé de cours (E.N.P)	Examineur
M.DEMIDEM	Chargé de cours (E.N.P)	Examineur

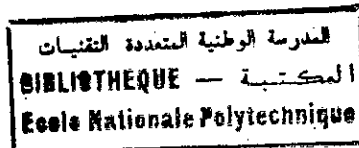
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie-Civil

THESE DE MAGISTER

Présenté par : Slimane LOURDJANE
Ingénieur d'Etat Université de Tizi-Ouzou



THEME

ANALYSE NON-LINEAIRE DES DALLES
EN BETON ARME PAR LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS MULTICOUCHES

Soutenue en Juillet 1994 devant le Jury composé de :

MM.B. TILIOUINE	Professeur (E.N.P)	Président
A.CHARIF	Professeur (U.Batna)	Rapporteur
M.K.BERRAH	Maître de conférences (E.N.P)	Examineur
M.BOUGHOUFALLAH	Chargé de cours (E.N.P)	Examineur
M.DEMIDEM	Chargé de cours (E.N.P)	Examineur

THESE DE MAGISTER

ANALYSE NON LINEAIRE DES DALLES EN BETON ARME
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS MULTICOUCHES

Par : Slimane LOURDJANE

Directeur de thèse : Abdelhamid CHARIF

ملخص

نصف طريقة الحساب بالصاهر المنتهية للبلاط من الخرسانة المسلحة حتى إنهارها وخاصة في مرحلة عدم الإسقامة ، و نحصي تأثير التشقق ، لدونة الخرسانة ولدونة الفئبان الحديدية . كما نأخذ بعين الإعتبار تغيرات خصائص المواد على سلك السفيحة بتقسيم هذه الأخيرة إلى طبقات ذات خصائص مختلفة . نقدم مقارنة بين النتائج النظرية والتجريبية للطبقتين محملتين من المركز : الأولى مدعة من الأركان الأربعة والأخرى عبر طول الجوانب الأربعة فقط . ونقدم تجربة عديدة للطبقتين المدعمتين على الجوانب الأربعة : الأولى منهارا الهذبة لحمولة منتظمة والأخرى لحمولة مطبقة في مركز السفيحة .

ABSTRACT

A non-linear finite element procedure is presented for the inelastic stress analysis of reinforced concrete slabs including the effects of cracking and yielding of reinforcing steel. The variation of the material properties through the slabs thickness is accounted for in a discretized fashion by means of a layering approach. A comparison is made between the computed and experimental results for two centrally loaded plates: One is a corner propped slab, the other is simply supported along the four edges. A numerical experiment is made for a two simply supported plates along the four edges: One is subject to a uniform load, the other is subject to a central load applied at the centre of the plate.

RESUME

On décrit une méthode de calcul par éléments finis des dalles en béton armé jusqu'à la ruine, et en particulier dans la phase non linéaire: On examine l'influence de la fissuration, de la plastification du béton ainsi que de la plastification des barres d'armature. On tient compte de la variation des propriétés du matériau sur l'épaisseur de la plaque en divisant celle-ci en couches de propriétés différentes. On présente une expérimentation numérique pour deux plaques simplement appuyées le long des quatre bords: L'une est soumise à une charge uniforme, l'autre est soumise à une charge concentrée appliquée au centre de la plaque.

DEDICACES

*Je dédie ce modeste travail à:
mes parents,
mes frères et soeurs,
ma fiancée SADJIA,
tous ceux qui croient en Dieu et le craignent,
et à tous ceux qui me sont chers.*

S.LOURDJANE

REMERCIEMENTS

Qu'il me soit permis de remercier tous ceux qui m'ont aidé et guidé à entamer, et finaliser ce projet de Magister.

Je remercie, tout d'abord, Monsieur le professeur A. CHARIF qui a bien voulu me proposer ce sujet original, et m'y encadrer. Monsieur le professeur A. CHARIF m'a guidé avec rigueur et fermeté, je lui dois beaucoup pour ma formation et pour l'aboutissement de ce travail.

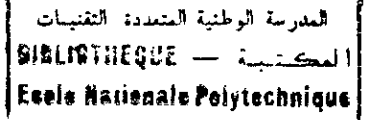
Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le professeur B. TILIOUINE, directeur de l'E.N.P, d'avoir bien voulu accepter de présider le jury de cette thèse.

Je remercie Messieurs M.K.BERRAH, M. BOUGHOUFALLAH et M. DEMIDEM, d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

J'exprime également toute ma gratitude au personnel et responsable des laboratoires de l'E.N.P, de l'institut de Génie-Civil (T-O) et de l'institut d'informatique (T-O) pour leur soutien, et leur serviabilité. Que Monsieur A. BOUHRAOUA, directeur de l'institut de Génie-Civil (T-O) soit remercié.

Mes remerciements vont également à Monsieur M. BENRADOUANE pour ses conseils en programmation et Monsieur A. KHENNANE pour ses conseils et son aide dans la rédaction.

SOMMAIRE



Chapitre 1

1. INTRODUCTION GENERALE

1.1	Introduction.....	1
1.2	synthèse bibliographique.....	3
1.3	Présentation de la thèse.....	5

Chapitre 2

2. THEORIE DES PLAQUES EN FLEXION

2.1	Introduction.....	6
2.2	Equations d'équilibre.....	6
2.3	Déformations et courbures.....	8
2.4	Charges, contraintes et moments.....	11
2.5	Relation contraintes-déformations.....	14
2.6	Conditions aux limites.....	17
2.6.1	Bord encasté.....	17
2.6.2	Bord simplement appuyé.....	18
2.6.3	Bord libre.....	18
2.7	Méthodes de résolution de l'équation gouvernante.....	18
2.8	Conclusion.....	19

Chapitre 3

3. LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1	Introduction.....	20
3.2	Formulation des éléments finis.....	20
3.2.1	Discrétisation par éléments finis.....	20
3.3	Formulation des plaques Mindlin.....	22
3.3.1	Introduction.....	22
3.3.2	Littérature sur l'approche multicouches....	23
3.3.3	Modélisation multicouches.....	24
3.3.4	Représentation des déplacements pour l'élément.....	26
3.3.5	Fonctions de forme.....	26

3.3.6	Relation déformations-déplacements.....	29
3.3.7	Dérivées cartésiennes des fonctions de forme.....	31
3.3.8	Relation contraintes-déformations.....	32
3.3.9	Matrice de rigidité et vecteur force élémentaire.....	32
3.3.10	Les forces résultantes.....	33
3.4	Conclusion.....	34

Chapitre 4

4. LES METHODES NUMERIQUES NON LINEAIRES

4.1	Introduction.....	35
4.2	Techniques numériques pour l'analyse non linéaire.....	36
4.2.1	Formulation de base.....	36
4.2.2	Méthode incrémentale.....	37
4.2.3	Méthode itérative.....	38
4.2.4	Méthode mixte.....	41
4.3	La procédure utilisée dans ce travail.....	42
4.4	Critère de convergence.....	42
4.5	Discussion générale sur le critère de convergence.....	44
4.6	Les étapes de base dans la méthode utilisée.....	45
4.7	Technique de la résolution du système linéaire....	47
4.8	Conclusion.....	49

Chapitre 5

5. MODELES CONSTITUTIFS DU COMPORTEMENT FLEXIONNEL DU BETON

ARME

5.1	Introduction.....	52
5.2	Comportement mécanique du béton sous différents états de chargement.....	52
5.2.1	Comportement sous contraintes uniaxiales...	53
5.2.2	Comportement sous contraintes biaxiales....	55
5.2.3	Cisaillement à travers les fissures.....	57
5.2.4	Raidissement à la traction du béton fissuré.....	59

5.3	Comportement mécanique de l'acier.....	
5.3.1	Brève description du comportement de l'acier.....	60
5.3.2	Adhérence entre acier et béton.....	62
5.4	Modélisation rhéologique.....	62
5.4.1	Introduction.....	62
5.4.2	Fissuration du béton.....	64
5.4.3	Critère de rupture.....	64
5.5	Modèles utilisés.....	67
5.5.1	Analyse élastique.....	67
5.5.2	Analyse non linéaire - relation contraintes- déformations.....	69
5.5.3	Modèle du comportement de l'acier.....	79
5.6	Conclusion.....	81

Chapitre 6

6. PRESENTATION ET DISCUSSION DES RESULTATS

6.1	Introduction.....	84
6.2	Programme.....	84
6.2.1	Subroutine INPUT.....	85
6.2.2	Subroutine ZERO.....	86
6.2.3	Subroutine LOADPB.....	86
6.2.4	Subroutine INCREM.....	87
6.2.5	Subroutine ALGOR.....	87
6.2.6	Subroutine STIFPB.....	87
6.2.7	Subroutine FRONT.....	87
6.2.8	Subroutine STREPB.....	87
6.2.9	Subroutine ACTSTR.....	88
6.2.10	Subroutine PLOAD.....	88
6.2.11	Subroutine RESMPA.....	88
6.2.12	Subroutine OUTMPA.....	88
6.3	Comparaison avec des résultats expérimentaux.....	92
6.3.1	Dalle carrée simplement appuyée sur ses quatre angles.....	92
6.3.2	Dalle carrée simplement appuyée.....	98
6.4	Expérimentation numérique.....	101
6.4.1	Maille des éléments.....	105
6.4.2	Nombre de couches.....	110

6.4.3 Tolérance de convergence...
6.5 Conclusion.....128

Chapitre 7

7. CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

7.1 Conclusions.....140
7.2 Recommandations.....141

BIBLIOGRAPHIE

NOTATIONS

- A Surface de la plaque.
- [B] Matrice déformations.
- {b} Vecteur des forces volumiques.
- B_{fi} Matrice déformation associée aux déformations flexionnelles.
- B_{pi} Matrice déformation associée aux déformations planes.
- B_{si} Matrice déformation associée aux déformations de cisaillement.
- C_1 et C_2 Coefficients du raidissement à la traction du béton.
- D Module d'élasticité d'un matériau isotrope.
- [D] Matrice d'élasticité.
- [D'] Matrice d'élasticité instantanée.
- D° Matrice d'élasticité du béton fissuré dans le système de coordonnées locales.
- D_c Matrice d'élasticité du béton fissuré.
- D_s Matrice d'élasticité de l'acier.
- D_{pi} Matrice d'élasticité associée aux contraintes planes.
- D_{si} Matrice d'élasticité associée aux contraintes de cisaillement.
- D_x et D_y Modules d'élasticité dans les directions (X) et (Y) respectivement.
- D_{x1} Module d'élasticité
- D_{xy} Module de cisaillement dans le plan (XY).
- dz Différentielle suivant la direction (Z).
- dz_i Epaisseur de la i^{eme} couche.
- E Module de Young d'un matériau isotrope.
- E_c Module d'élasticité du béton.
- E_i Module d'élasticité instantané du béton.
- E_s Module d'élasticité de l'acier.
- E_x et E_y Modules de Young dans les directions (X) et (Y)

respectivement.

- E_{x1} Terme en dehors de la diagonale de la matrice d'élasticité
- $\{F\}$ Vecteur forces.
- f_c Résistance à la compression du béton.
- f_{cc} Résistance à la compression intermédiaire du béton.
- f_{cu} Résistance à la compression ultime du béton.
- f_d Résistance à la compression équivalente du béton sous compression biaxiale.
- f_t Résistance à la traction du béton.
- F_{ui} Force résiduelle au i^{eme} déplacement.
- G Module de cisaillement d'un matériau isotrope.
- H Paramètre d'écroûissage de l'acier.
- $[J]$ Matrice Jacobienne.
- $[K]$ Matrice de rigidité.
- k Facteur de cisaillement.
- m Rapport entre les résistance à la traction et à la compression du béton.
- M_x et M_y Moments de flexion par unité de longueur dans les directions (X) et (Y) respectivement.
- M_{xy} Moment de torsion dans le plan (XY).
- $[N]$ Matrice des fonctions de forme.
- n Nombre total de couches.
- (n, t) Système de coordonnées locales.
- N_x, N_y et N_{xy} Forces dans dans le plan de la plaque
- N_i Fonction de forme associée au noeud i .
- $\{p\}$ Vecteur des tractions de surface.
- q Intensité du chargement normal.
- Q_x et Q_y Forces de cisaillement par unité de longueur le long des directions (X) et (Y) respectivement.
- r Nombre d'itérations.
- R_i Charge totale externe appliquée au i^{eme} déplacement.
- S_x et S_y Modules de cisaillement effectifs dans les directions

(X) et (Y) respectivement.

[T] Matrice de transformation.

u, v et w Déplacements suivant les directions (X), (Y) et (Z) respectivement.

u_0, v_0 et w_0 Déplacement de référence.

V Volume de la plaque.

W Déplacement transversal dans la direction (Z).

(X, Y, Z) Système de coordonnées cartésiennes.

Z Position du point considéré par rapport au plan moyen de la plaque.

Z_i Distance entre le plan moyen de la plaque et la $i^{\text{ème}}$ couche.

β Facteur de conservation de cisaillement du béton.

γ_{xy} Déflexion de cisaillement du plan moyen.

$\Delta\{f_i\}$ Vecteur incrément forces.

Δf_{ui} Incrément de force résiduelle au $i^{\text{ème}}$ déplacement.

$\Delta\{\delta_i\}$ Vecteur incrément de déplacements.

$\Delta\{\epsilon_i\}$ Vecteur incrément de déformations.

$\Delta\{\sigma_i\}$ Vecteur incrément de contraintes.

$\{\delta\}$ Vecteur déplacement virtuel.

$\{\delta^e\}$ Vecteur déplacement nodal.

$\{\epsilon\}$ Vecteur déformations.

ϵ_{cr} Déformation du béton fissuré.

ϵ_f Déformation fictive normale à la fissure.

ϵ_p Déformation plastique correspondant au pic.

ϵ_u Déformation ultime.

ϵ_x et ϵ_y Déformations planes dans les directions (X) et (Y) respectivement.

θ Angle des axes principaux par rapport à (X).

θ_{cr} Angle de fissuration du béton par rapport à (X).

θ_x et θ_y Rotations de la normale dans les plans (XZ) et (YZ) respectivement.

μ Coefficient de Poisson.

(ζ, η) Système de coordonnées locales.

$\{\sigma\}$ Vecteur contraintes.

$\{\sigma_0\}$ Vecteur de contraintes initiales.

σ_1 et σ_2 Contraintes principales.

σ_{oct} Contrainte normale octaédrale.

σ_p Contrainte de pic.

σ_n Contrainte normale associée à l'angle θ .

σ_{nt} Contrainte de cisaillement dans le plan local (nt).

σ_n et σ_t Contraintes normales dans les directions locales (n) et (t) respectivement.

σ_x et σ_y Contraintes planes dans les directions (X) et (Y) respectivement.

τ_{oct} Contrainte de cisaillement octaédrale.

τ_{xy} , τ_{xz} et τ_{yz} Contraintes de cisaillement dans les plans (XY), (XZ) et (YZ) respectivement.

ϕ_x et ϕ_y Rotations moyennes dû au cisaillement transversal dans les plans (XZ) et (YZ) respectivement.

Ω Rapport des contraintes principales.

∇ Laplacien.

INTRODUCTION GENERALE

1.1 INTRODUCTION

Les dalles en béton armé sont parmi les plus grands éléments structuraux, relativement minces et plats, dont la fonction principale est de transmettre l'action du chargement normal à leurs plans. Les dalles sont utilisées comme: Plancher et toit des constructions, mur des réservoirs et des constructions, ponts pour supporter les charges concentrées relativement lourdes dues au trafic.

Les procédures analytiques qui peuvent souvent déterminer les états de contraintes et de déformations dans les éléments du béton armé sont compliquées à cause de plusieurs facteurs. Parmi eux on trouve:

-La non linéarité de la réponse charge-déformation du béton et les difficultés dans la formulation des relations constitutives souhaitables sous contraintes combinées.

-Fissuration progressive du béton sous augmentation de la charge et la complexité de la formulation du comportement de la rupture pour divers états de contraintes.

-Considération des armatures et interaction entre les constituants béton et acier qui forment le système composite.

A cause de ces complexités, beaucoup de méthodes d'analyse et d'étude des structures en béton armé ont été proposées et souvent basées sur l'analyse élastique combinée avec diverses procédures classiques ainsi que sur la formulation empirique développée sur la base d'un large recueil des données expérimentales. De telles approches sont toujours nécessaires, désirables et continuent d'être les plus convenables comme méthodes effectives pour l'étude ordinaire. Cependant, le développement rapide des techniques numériques d'analyse moderne et la haute expédition digitale des ordinateurs ont doté les chercheurs d'un puissant outil pour une analyse non linéaire complète des structures en béton armé.

L'analyse non linéaire des structures en béton armé est

devenue d'une grande importance ces dernières années. L'analyse non linéaire développe et dévoile le comportement de la rupture progressive d'une structure jusqu'à son effondrement, ce type d'analyse est particulièrement désirable pour certaines structures telles que: Les réacteurs de vaisseaux de béton, les structures nucléaires etc. Les études expérimentales sur ces systèmes de structures sont très coûteuses et les approches empiriques, seules, ne sont pas suffisantes pour une évaluation adéquate de la sécurité. Une analyse non linéaire adéquate peut donc réduire le prix de revient d'une structure tout en augmentant sa sécurité.

Avec l'état présent de développement des programmes par ordinateur basés sur la méthode des éléments finis, le modèle inadéquat des matériaux en béton armé est souvent l'un des facteurs majeurs, limitant la capacité de l'analyse structurelle. Ceci est dû au fait que le béton armé possède un comportement très complexe enveloppant des phénomènes tels que: Inélasticité, fissuration, effet interactif entre le béton et les armatures etc. Le développement des modèles des matériaux pour le béton fissuré et non fissuré pour tout état de chargement constitue un champ de défi particulier dans le domaine d'analyse non linéaire des structures.

La non linéarité de la réponse du béton armé est due à quatre effets matériels majeurs:

- Fissuration du béton.
- Plastification des armatures et du béton comprimé.
- Glissement entre le béton et les armatures.
- Effets dépendant du temps tels que: Retrait, fluage,...

Seuls les deux premiers facteurs de non linéarité du béton armé sont considérés dans cette étude.

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des structures en béton armé a été introduite pour la première fois par Ngo et Scordelis en 1967 [38]. Durant ces dernières années, la méthode des éléments finis a connu une grande application dans l'analyse des structures en béton armé, particulièrement dans la réponse du comportement non linéaire de

ces structures.

Le succès de l'application de la méthode des éléments finis au béton armé [5] est lié de près au développement de l'information quantitative et qualitative sur le comportement charge-déformation du béton. La formulation des relations charge-déformation est nécessaire dans la technique analytique. La méthode des éléments finis est la méthode la plus efficace pour reproduire le comportement complexe du béton armé.

1.2 SYNTHÈSE BIBLIOGRAPHIQUE

L'étude des dalles était régie jusqu'à la fin du siècle dernier par la seule théorie de Kirchhoff qui considère qu'une section droite et normale à la fibre moyenne avant déformation restait droite après déformation.

Au début de notre siècle, Karmann (1910) mit au point la théorie des grands déplacements qui intéresse la famille de dalles très minces. L'influence du cisaillement et de la contrainte normale au plan moyen de la dalle mise en évidence par Reissner en 1945 sur le plan statique a été complétée en 1951 par Mindlin en dynamique où il a mis en relief les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation [67]. Cet effet intéresse la famille de dalles épaisses.

Le concept de la méthode des éléments finis sur l'analyse structurelle a été introduit par Turner et Al [81], Arguris et Kelsey [6] au milieu des années 50. Ngo et Scordelis (1967) ont développé la première analyse en éléments finis sur un système en béton armé. Les propriétés des matériaux linéaires et les modèles de fissuration prédéfinis sont pris en compte. A plusieurs reprises Nilson (1968) a justifié la fissuration par le changement de la maille des éléments. Rashid (1968) a modélisé l'effet de la fissuration par modification des éléments de rigidité et de contrainte. L'élément de rigidité dans la direction perpendiculaire à la surface de la fissure et la contrainte transversale à celle-ci sont nulles. Zienkiewicz et Al (1972) ont adopté une approche similaire en utilisant des éléments finis isoparamétriques avec intégration numérique.

Lin et Scordelis (1975) [67] ont classé l'étude par éléments

finis des plaques et coques en béton armé en deux approches différentes: (1) l'approche de la rigidité modifiée et (2) l'approche multicouches. La première approche est basée sur une relation empirique moment-courbure, où les différentes rigidités flexionnelles sont assumées pour les différents états matériels. Jofriet et McNiece [55] ont utilisé une relation bilinéaire moment-courbure pour étudier les problèmes des plaques flexionnelles en béton armé. L'approche multicouches est basée sur la relation de base contraintes-déformations non linéaires. L'élément est divisé en couches de béton imaginaires. Chaque couche peut avoir des propriétés matérielles différentes correspondant à son état matériel. Hand et Al [43] ont utilisé cette approche pour étudier l'histoire de la courbe charge-déflexion des plaques et coques en béton armé jusqu'à la rupture. Cervenka [14] a analysé les panneaux en béton armé chargés dans leur plan en utilisant cette technique. Les déformations flexionnelles et la variation des propriétés des matériaux à travers l'épaisseur des panneaux sont prévues dans cette technique.

Dotreppe [30], Lin [62], Hand [43], Jofriet [55], Harmon [44], Abdel-Hafez [1], Benradouane [12] et d'autres ont obtenu des résultats satisfaisants en comparaison aux résultats expérimentaux en utilisant le modèle multicouches sur les dalles en béton armé.

L'approche multicouches est largement utilisée avec divers types d'éléments. Wegmuller [86] a utilisé un élément rectangulaire avec 3 degrés de liberté par noeud. Cet élément ignore les effets dans le plan et suppose une position fixe du plan moyen au milieu du plan de la dalle. Pour les problèmes de flexion, comme les fissures progressent suivant la profondeur de la dalle, la position du plan moyen change et tend vers la face de compression. Hand [43], Cope [26] et d'autres ont utilisé un élément rectangulaire avec 5 degrés de liberté par noeud. Abdel-Hafez [1] a appliqué la théorie de Mindlin avec l'approche multicouches sur les dalles inclinées en béton armé en utilisant l'élément isoparamétrique à 5 degrés de liberté par noeud.

Benradouane [12] a utilisé aussi le même élément sur les dalles en béton armé. Ce modèle multicouches sera appliqué dans cette étude pour analyser différents types de dalles en béton armé.

1.3 PRESENTATION DE LA THESE

Cette thèse comporte sept chapitres:

-Le chapitre 1 donne une description générale du problème et des objectifs de l'étude.

-Le chapitre 2 présente une comparaison entre la théorie de Kirchhoff et celle de Mindlin.

-Le chapitre 3 présente l'application de la méthode des éléments finis aux plaques en flexion avec le modèle multicouches utilisé dans le programme d'analyse non linéaire.

-Le chapitre 4 décrit les méthodes de résolution non linéaires et présente aussi la technique utilisée dans cette étude.

-Le chapitre 5 présente les modèles mathématiques, les critères de rupture des matériaux et le modèle de fissuration du béton.

-Dans le chapitre 6, sont présentés et discutés les résultats obtenus, en utilisant le programme d'analyse non linéaire multicouches, sur différents types de dalles.

-Dans le chapitre 7, sont, enfin, présentés les conclusions et les recommandations pour des travaux futurs.

THEORIE DES PLAQUES EN FLEXION

2.1 INTRODUCTION

En analyse des structures, les dalles en béton armé sont considérées comme des structures de surface plane, leurs épaisseurs sont petites en comparaison aux autres dimensions. Dans ce chapitre, sont développées les théories des plaques décrivant leur comportement vis à vis des charges appliquées perpendiculairement à leurs plans. Les bords des plaques peuvent être libres, simplement appuyés ou encastres.

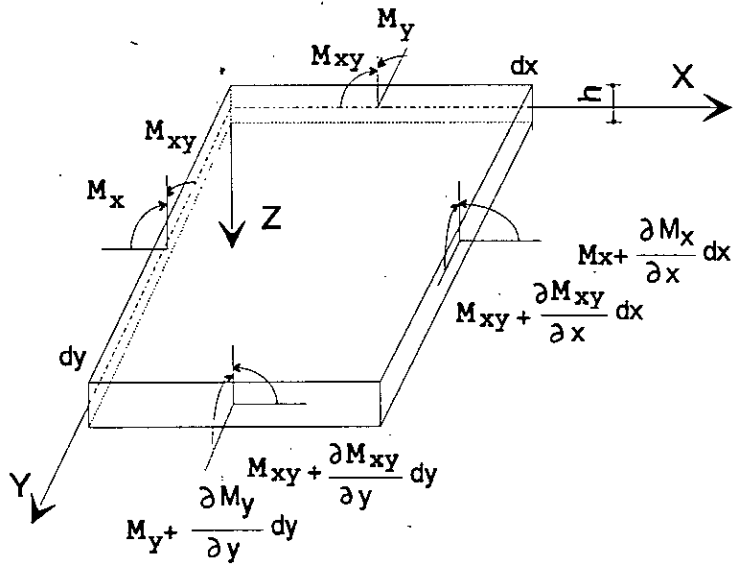
Deux théories des plaques sous comportement élastique, la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff) et la théorie des plaques épaisses de Mindlin, seront discutées dans cette section. Dans la théorie de Kirchhoff, il est supposé que la déformation de cisaillement et les effets dans le plan dus à la restriction aux frontières peuvent être ignorés. Cette théorie est valable pour les plaques minces dont la déflexion latérale est suffisamment petite par rapport à l'épaisseur de la plaque. La théorie de Mindlin, prend en compte l'effet de la déformation de cisaillement transversal et peut être utilisée pour les deux types de plaques minces et épaisses.

Les équations générales décrivant les relations entre déflexion, charges, cisaillement et moments sont développées dans ce présent chapitre.

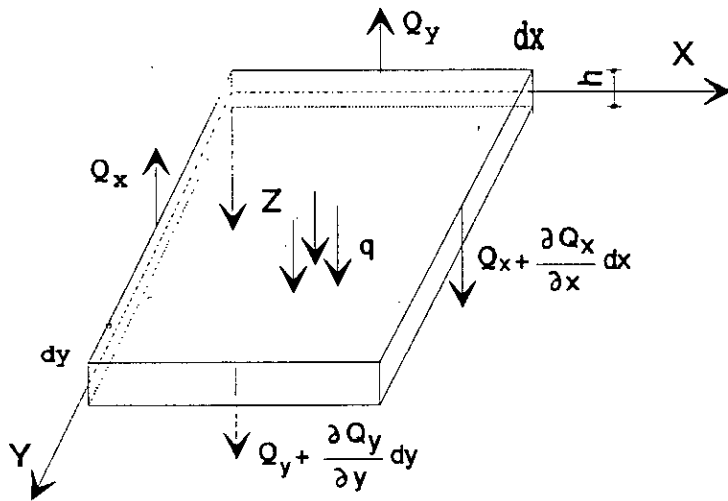
2.2 EQUATIONS D'EQUILIBRE

Considérons l'équilibre des forces agissant sur l'élément de dalle montré sur la figure(2-1), de dimensions (dx) et (dy) dans les directions (X) et (Y) respectivement et d'épaisseur (h) dans la direction (Z) . Les équations d'équilibre peuvent être déterminées comme suit:

-Equilibre vertical (figure(2-1b)):



(a) Moments par unité de longueur



(b) Forces de cisaillement par unité de longueur

Fig (2.1): Equilibre de l'élément de plaque

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (2-1)$$

-Equilibre des moments autour de l'axe (X) (figure(2-1a)):

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2-2)$$

-Equilibre des moments autour de l'axe (Y) (figure(2-1a)):

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2-3)$$

Où q est l'intensité du chargement normal, $q=q(x,y)$.

Q_x et Q_y sont les forces de cisaillement par unité de longueur le long des directions (X) et (Y) respectivement.

M_x , M_y et M_{xy} sont les moments de flexion par unité de longueur le long des directions (X) et (Y) et le moment de torsion respectivement.

Par élimination des forces de cisaillement (Q_x) et (Q_y) dans les trois équations précédentes, on obtient l'équation différentielle de second ordre reliant les moments à l'intensité de la charge.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \quad (2-4)$$

L'équation (2-4) est connue sous le nom de l'équation d'équilibre des plaques.

2.3 DEFORMATIONS ET COURBURES

Dans le cas de la théorie classique des plaques, quatre hypothèses de base doivent être satisfaites:

a- Le matériau obéit à la loi de Hooke, contraintes proportionnelles aux déformations.

b- La déflexion est petite par rapport à l'épaisseur de la plaque.

c- La contrainte normale à la surface médiane est négligeable.

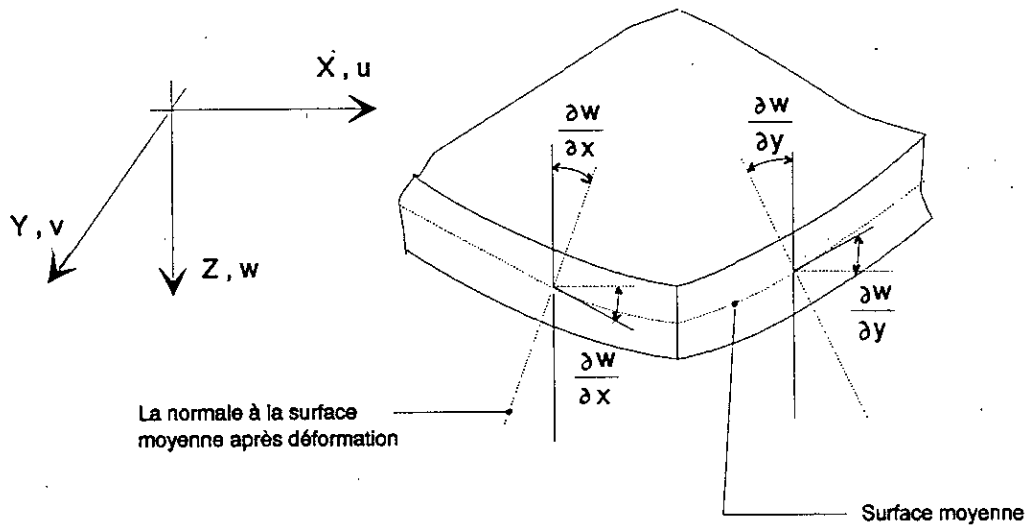


Fig (2.2): Déformation d'un élément de plaque (Kirchhoff)

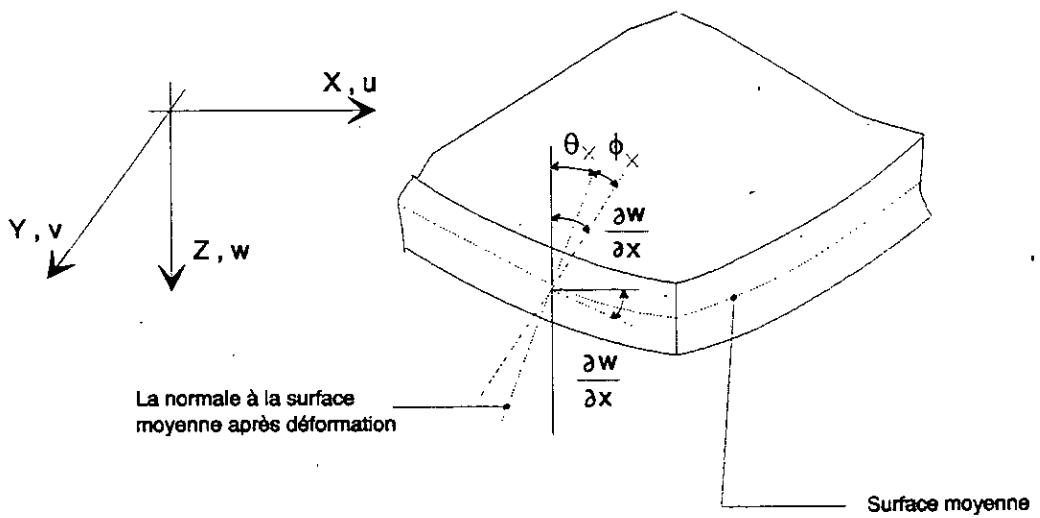


Fig (2.3): Déformation de cisaillement d'un élément de plaque (Mindlin)

d- La section plane avant déformation reste plane après déformation.

Cette dernière hypothèse permet d'exprimer les déplacements (u,v) dans le plan de la plaque en fonction du déplacement transversal (w) du plan moyen. Considérant la figure(2-2), on aura:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2-5)$$

Dérivons la première expression par rapport à (X) et la deuxième par rapport à (Y) , on aura:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2-6a)$$

Où ϵ_x et ϵ_y sont les déformations planes au niveau (Z) en un point dans les directions (X,Y) respectivement.

Dérivons la première expression de l'équation (2-5) par rapport à (Y) et la seconde par rapport à (X) et par addition, on obtient:

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2-6b)$$

Où γ_{xy} est la déflexion de cisaillement du plan moyen.

A cause de sa simplicité, la théorie de kirchhoff était devenue très populaire auprès des ingénieurs pendant plusieurs années [80], bien qu'elle ne prenne pas en compte la déformation de cisaillement transversal. Une petite erreur est ainsi introduite pour les plaques épaisses telles que les dalles en béton armé. Cependant, dans la formulation en éléments finis, cette erreur peut être minimisée en utilisant une théorie qui prend en compte les déformations de cisaillement transversal. Cette théorie développée par Reissner et puis Mindlin (1951) est basée sur les hypothèses suivantes:

- a- La déflexion de la plaque est petite.
- b- La contrainte normale à la surface médiane est négligeable.

c- La normale à la surface médiane avant déformation reste rectiligne mais n'est pas nécessairement normale à la surface médiane après déformation.

Le déplacement latéral (w) au plan moyen et les rotations des lignes de cisaillement normales au plan moyen (θ_x, θ_y) sont traités comme variables indépendantes. En se référant à la figure(2-3), on obtient.

$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \quad \text{et} \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \quad (2-7)$$

Où ϕ_x et ϕ_y sont les rotations moyennes dues aux cisaillement transversal dans les directions (X) et (Y) respectivement.

Les déformations dans le plan sont données par:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad , \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (2-8a)$$

$$\text{et} \quad \gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \quad (2-8b)$$

La comparaison des équations (2-6) et (2-8) montre immédiatement l'une des principales différences entre les deux approches. Les déformations données par la théorie de Kirchhoff sont fonctions d'une seule variable (w) et de second ordre. Par contre, les déformations données par la théorie de Mindlin sont fonctions de trois variables indépendantes (w, θ_x, θ_y) et du premier ordre.

2.4 CHARGES, CONTRAINTES ET MOMENTS

Une plaque plate, supporte des charges transversales agissant en flexion. La figure(2-4) montre les contraintes qui agissent sur les sections transversales d'une plaque. Les contraintes normales σ_x et σ_y varient linéairement avec (Z) et sont associées avec les moments de flexion M_x et M_y . La contrainte de cisaillement τ_{xy} varie aussi linéairement avec (Z) et elle est associée avec le moment de torsion M_{xy} . La contrainte σ_z est considérée négligeable en comparaison avec σ_x , σ_y et τ_{xy} .

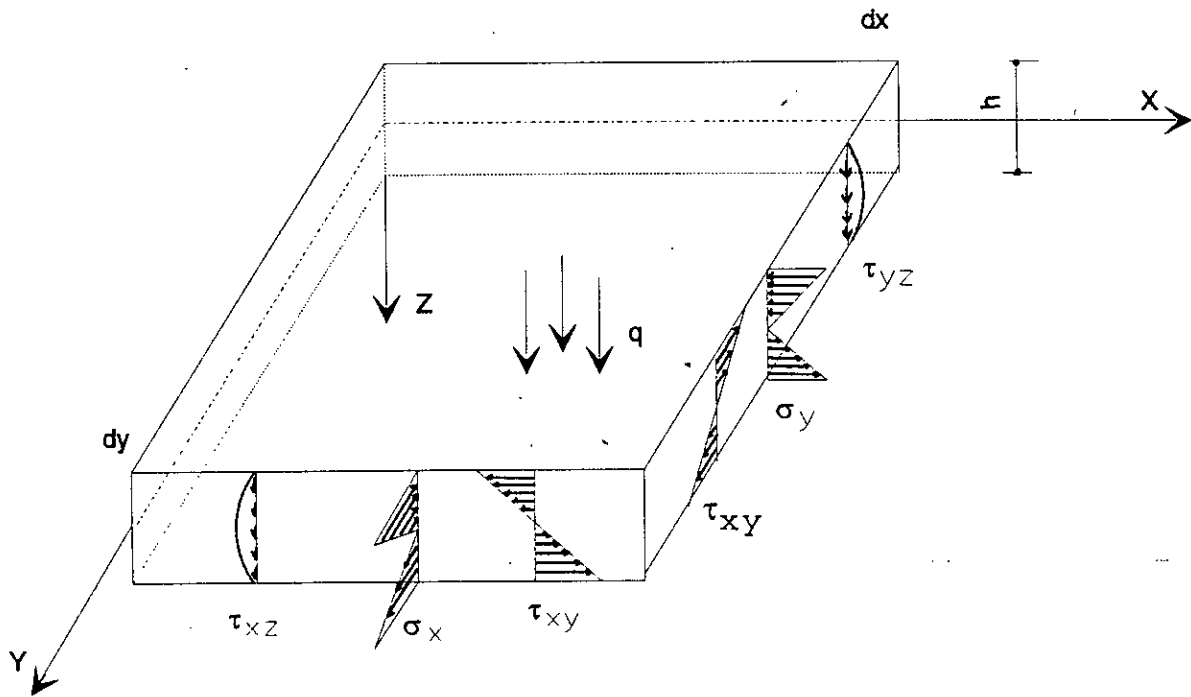


Fig (2.4): Les contraintes agissant sur un élément différentiel d'une plaque homogène et linéairement élastique

Les contraintes de cisaillement transversal τ_{xz} et τ_{yz} varient de manière quadratique avec (Z). La charge latérale (q) comprend la charge de surface et de volume, les deux étant dans la direction (Z).

Les contraintes montrées sur la figure(2-4) produisent les moments fléchissants {M} et les forces de cisaillement {Q}.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad , \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad \text{et} \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (2-9a)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad \text{et} \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (2-9b)$$

2.5 RELATION CONTRAINTES-DEFORMATIONS

La formulation des relations contrainte-déformation se rapporte aux contraintes résultant au plan médian de la plaque. Il est supposé que le plan médian comprend la surface moyenne après déformation. Cela implique que les forces de contraintes résultantes au-dessus du plan médian sont positives et égales à celles du bas, et leurs lignes d'action sont également distantes par rapport au plan médian.

Pour les conditions de contraintes planes, si les contraintes correspondant aux déformations ($\epsilon_x, \epsilon_y, \delta_{xy}$) sont ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) donc, on aura les équations constitutives suivantes:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & E_{x1} & 0 \\ E_{x1} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-10)$$

Où E_x, E_y, G et E_{x1} sont les caractéristiques mécaniques dépendantes du matériau qui sont nécessaires pour définir les propriétés élastiques de la plaque.

Pour la théorie classique des plaques, les équations constitutives sont données par:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} E_x & E_{x1} & 0 \\ E_{x1} & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (2-11)$$

$$\text{ou} \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_{x1} & 0 \\ D_{x1} & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2-12)$$

$$\text{Où} \quad D_x = \frac{E_x h^3}{12}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12}, \quad D_{xy} = \frac{Gh^3}{12}$$

$$\text{et} \quad D_{x1} = \frac{E_{x1} h^3}{12} \quad (2-13)$$

Pour la théorie de Mindlin, les moments et les forces de cisaillement peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_{x1} & 0 \\ D_{x1} & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right) \end{Bmatrix} \quad (2-14)$$

$$\text{Où} \quad D_x = \frac{E_x h^3}{12}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12}$$

$$D_{xy} = \frac{Gh^3}{12} \quad \text{et} \quad D_{x1} = \frac{E_{x1} h^3}{12} \quad (2-15)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

$$\text{Où} \quad S_x = S_y = \frac{kEh}{2(1+\mu)} \quad (2-17)$$

Où S_x et S_y sont les modules de cisaillement effectifs dans les directions (X) et (Y) respectivement, et (k) est le facteur de forme de cisaillement introduit pour corriger l'hypothèse selon laquelle le cisaillement transversal est constant à travers l'épaisseur de la plaque. On prend généralement (k) égal à 5/6 dans le cas d'un matériau isotrope. donc

$$S_x = S_y = \frac{5}{12} \frac{Eh}{(1+\mu)} \quad (2-18)$$

Par substitution des équations constitutives (2-12) dans l'équation d'équilibre des plaques (2-4), on obtient l'équation aux dérivées partielles de quatrième ordre de la théorie des plaques dans le système de coordonnées cartésiennes (X,Y).

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{x1} + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (2-19a)$$

Introduisons, la notation, $H = D_{x1} + 2D_{xy}$, on obtient

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (2-19b)$$

Pour les plaques isotropes:

$$E_x = E_y = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad E_{x1} = \mu \frac{E}{1-\mu^2} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

et l'équation (2-19a) se réduit à:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2-19c)$$

$$\text{Ou} \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (2-19d)$$

Où E et μ sont les valeurs du module de Young et le coefficient de Poisson respectivement.

Les équations correspondant à la théorie de Mindlin peuvent être obtenues par les équations constitutives (2-14), (2-16) et l'équation d'équilibre (2-4). De plus il est possible d'éliminer les fonctions θ_x et θ_y des équations ci-dessus pour arriver à l'équation suivante:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{D}{kGh} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) q = q \quad (2-20a)$$

$$\text{Ou} \quad D \nabla^4 w + \frac{D}{kGh} \nabla^2 w q - q = 0 \quad (2-20b)$$

2.6 CONDITIONS AUX LIMITES

Le déplacement latéral (W) doit satisfaire aux équations différentielles d'équilibre en tout point intérieur de la plaque et aux conditions aux limites en tout point de la frontière de celle-ci.

2.6.1 BORD ENCASTRE

Le long d'un bord encasté, la flèche (W) est nulle ainsi que les rotations des normales à la surface moyenne non fléchie et donc:

$$w|_{x=a} = \theta_x|_{x=a} = \theta_y|_{x=a} = 0$$

Notons que dans la théorie de Kirchhoff $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ et $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ et la condition $\theta_x(x=a)=0$ veut dire que le plan tangent à la surface moyenne fléchie le long de ce bord coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque.

2.6.2 BORD SIMPLEMENT APPUYE

Si le bord d'équation $(x=a)$ de la plaque est simplement appuyé, la flèche (w) le long de ce bord est nulle. Cependant, ce bord pourra tourner librement autour de l'axe $Y(x=a)$, c'est à dire qu'il n'existe pas de moment de flexion par rapport à l'axe (Y) le long de ce bord.

La représentation des conditions aux limites est alors:

$$W|_{x=a} = M_x|_{x=a} = 0$$

On a aussi $\theta_x|_{x=a} = 0$ puisque la rotation autour de l'axe (X) n'est pas permise.

2.6.3 BORD LIBRE

Si le bord d'équation $X=a$ est entièrement libre, cela veut dire que ce bord ne subit ni moment de torsion ou de flexion ni forces de cisaillement transversal et alors:

$$Q_x|_{x=a} = M_x|_{x=a} = M_{xy}|_{x=a} = 0$$

2.7 METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTE

La résolution de l'équation gouvernante peut se faire dans

les cas les plus simples par les méthodes analytiques, où les déflexions de la plaque sont représentées soit par une série double de Fourier infinie (solution de Navier) soit par une série simple de Fourier infinie (solution de Levy) [80]. Dans le cas où les solutions sont difficiles à déterminer analytiquement, les méthodes énergétiques peuvent être utilisées. Parmi ces méthodes, on peut citer: La méthode de Ritz et la méthode de Galerkin.

La résolution analytique des problèmes de flexion n'existe que pour des problèmes de géométrie simple et de conditions aux limites régulières. En effet, la résolution de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne le comportement flexionnel d'une plaque est fastidieuse et parfois même impossible. C'est pourquoi on a recours aux méthodes numériques qui se sont avérées être un outil puissant, pratique et essentiel pour le calcul des structures. Parmi ces méthodes, on peut citer:

- La méthode des différences finies.
- La méthode des bandes finies.
- La méthode des éléments finis.
- La méthode des éléments aux frontières.

Nous développerons, dans la présente étude la méthode des éléments finis que nous détaillerons dans le prochain chapitre.

2.8 CONCLUSION

La théorie de Mindlin prend en compte l'effet de la déformation du cisaillement transversal, par contre la théorie de Kirchhoff l'ignore. Par conséquent la théorie de Mindlin est utilisée pour les plaques épaisses, cas des dalles en béton armé, d'où l'application de celle-ci dans cette étude.

LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

3.1 INTRODUCTION

Le concept de la méthode des éléments finis est originalement introduit pour l'analyse structurelle par Turner et Al [81], Arguris et Kelsey [6] au milieu des années 50. Le nom élément fini a été utilisé pour la première fois dans un article publié par Clough [22] en 1960.

La méthode des éléments finis a connu par la suite une progression générale rapide et elle est devenue maintenant la plus utilisée dans l'analyse structurelle. La famille des éléments isoparamétriques est introduite pour la première fois par Taig [77] et Irons [52]. L'élément est appelé isoparamétrique parce que la même fonction d'interpolation utilisée pour définir la variation des déplacements dans l'élément est aussi utilisée pour définir la géométrie de l'élément. La procédure de base est d'exprimer les coordonnées et les déplacements de l'élément par des fonctions exprimées en terme des coordonnées naturelles de l'élément. A noter que les coordonnées naturelles en général ne sont pas orthogonales au système de coordonnées globales. Dans ce chapitre, la méthode des éléments finis est décrite pour l'analyse non linéaire détaillée des dalles.

3.2 FORMULATION DES ELEMENTS FINIS

Comme la procédure standard d'analyse en éléments finis est bien connue [89], il n'est pas nécessaire de la décrire ici en détail. Cependant, quelques termes de la méthode sont présentés. Cela est donné avec référence particulière à la formulation de l'élément de plaques Mindlin en flexion [47].

3.2.1 DISCRETISATION PAR ELEMENTS FINIS

Dans un milieu continu, le nombre de degrés de liberté est infini et à moins qu'une solution de forme fermée ne soit

utilisée, une analyse exacte est impossible. Une solution approchée est adoptée par supposition que le comportement du milieu continu peut être représenté par un nombre fini d'inconnues. Dans la méthode des éléments finis, le milieu continu est divisé en une série d'éléments de forme géométrique simple qui sont connectés en un nombre de points connus sous le nom de points nodaux, ce processus est appelé discrétisation. Dans la méthode des éléments finis des déplacements, le déplacement est supposé avoir des valeurs inconnues uniquement aux points nodaux et sa variation à l'intérieur des éléments est décrite en terme des valeurs nodales par moyen des fonctions d'interpolation. Ainsi:

$$\{\delta\} = [N] \{\delta^e\} \quad (3-1)$$

N est une matrice de fonctions d'interpolation appelées les fonctions de forme et δ^e est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément. Pour les applications structurelles, la dérivation des équations gouvernantes d'équilibre est communément basée sur le principe du travail virtuel donné par:

$$\int_V \delta \epsilon^T \sigma dv - \int_A \delta u^T b dA - \int_A \delta u^T p dA = 0 \quad (3-2)$$

Où ϵ , σ , b , p et δ sont respectivement le vecteur déformation, le vecteur contrainte, les forces de volume, les tractions de surface et les déplacements virtuels.

Considérons une plaque en flexion:

Le vecteur des forces volumiques: $b = (b_x, b_y, b_z, M_x, M_y)^T$

Les tractions de surface: $p = (p_x, p_y, p_z, p_{mx}, p_{my})^T$

Déplacement virtuel: $\delta = (\delta_u, \delta_v, \delta_w, \delta_{\theta_x}, \delta_{\theta_y})^T$

Les intégrations sont faites sur le volume (V) de la plaque chargée et sur l'aire de surface (A).

Le premier terme de l'équation précédente (3-2) représente l'énergie de déformation, le second et troisième termes sont respectivement les contributions du travail des forces volumiques et les charges distribuées sur la surface de la plaque.

Dans la représentation en éléments finis, si les relations déformations-déplacements et les relations linéaires contraintes-déformations sont substituées dans l'expression du travail virtuel de l'équation (3-2), on peut obtenir le système d'équations suivant:

$$[K] \{\delta\} - \{F\} = 0 \quad (3-3)$$

Où la matrice de rigidité [K] est donnée par:

$$K = \int_V B^t D B dv \quad (3-4)$$

Le vecteur des forces nodales équivalentes est:

$$F = \int_V N b dv + \int_A N p dA \quad (3-5)$$

et b sont les forces poids par unité de volume.

p les tractions appliquées sur la surface (A).

B est la matrice déformation généralement composée des dérivées des fonctions de forme (N).

D est la matrice linéaire élastique ou élasto-plastique reliant les contraintes et les déformations.

3.3 FORMULATION DES PLAQUES MINDLIN

3.3.1 INTRODUCTION

Les éléments finis basés sur les hypothèses de Mindlin ont un avantage important par rapport aux éléments basés sur la théorie classique des plaques minces. Les déformations données par la théorie de Mindlin sont fonctions de 3 variables indépendantes (w, θ_x, θ_y) et elles sont du premier ordre. Par contre, les déformations données par la théorie de Kirchhoff sont fonctions d'une seule variable (w) et sont du second ordre. Les éléments des plaques Mindlin exigent uniquement la continuité $C(0)$. Les déplacements considérés sont les déplacements dans le plan (U) et (V), le déplacement latéral (W) et les rotations

nodales indépendantes (θ_x) et (θ_y). Cependant, les éléments basés sur la théorie classique des plaques minces exigent la continuité $C(1)$, en d'autres termes $\frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial y}$ aussi bien que (U), (V) et (W) doivent être continus à travers les interfaces de l'élément. L'élément de plaques Mindlin est simple à formuler par rapport à celui de la théorie classique des plaques et possède en plus l'avantage d'être capable de modéliser le faible cisaillement aussi bien que le fort cisaillement de la plaque. A cause des non linéarités à travers l'épaisseur de la plaque et afin de réduire la dimension du problème (deux dimensions au lieu de trois dimensions), la formulation multicouches a été développée. L'élément isoparamétrique à huit noeuds [46] utilisant la représentation multicouches est utilisée dans cette étude.

3.3.2 LITTÉRATURE SUR L'APPROCHE MULTICOUCHES

Dans la Littérature, on trouve deux points de vue différents sur les relations constitutives nécessaires. Dans la première approche, utilisée par Jofriet et McNiece [55] et Bell [40], une combinaison semi-empirique de la relation moment-courbure est employée pour essayer de modéliser la non linéarité du comportement du matériau. Cette approche est limitée car elle utilise un modèle macroscopique sous la forme d'une relation moment-courbure. La seconde approche est basée directement sur les relations idéalisées contraintes-déformations pour le béton et les armatures, tous ensemble avec diverses hypothèses concernant la compatibilité des déformations entre les deux matériaux. Cervenka [14] a analysé les panneaux en béton armé sous charges planes en utilisant cette technique. Pour la déformation flexionnelle, la variation des propriétés des matériaux à travers l'épaisseur n'est pas prise en compte. Cela peut être accompli par la discrétisation en multicouches ou par l'introduction des points d'intégration numérique à travers l'épaisseur de la plaque.

L'approche multicouches est largement utilisée avec divers types d'éléments. Le premier élément utilisé par Wegmuller [86] est un élément rectangulaire avec trois degrés de liberté (W, θ_x, θ_y). Cet élément ignore les effets dans le plan et suppose

aussi une position fixe du plan moyen au milieu du plan de la plaque. Une telle supposition est limitée uniquement aux problèmes où les forces membranaires sont négligeables ou il y a un petit changement dans la position du plan moyen.

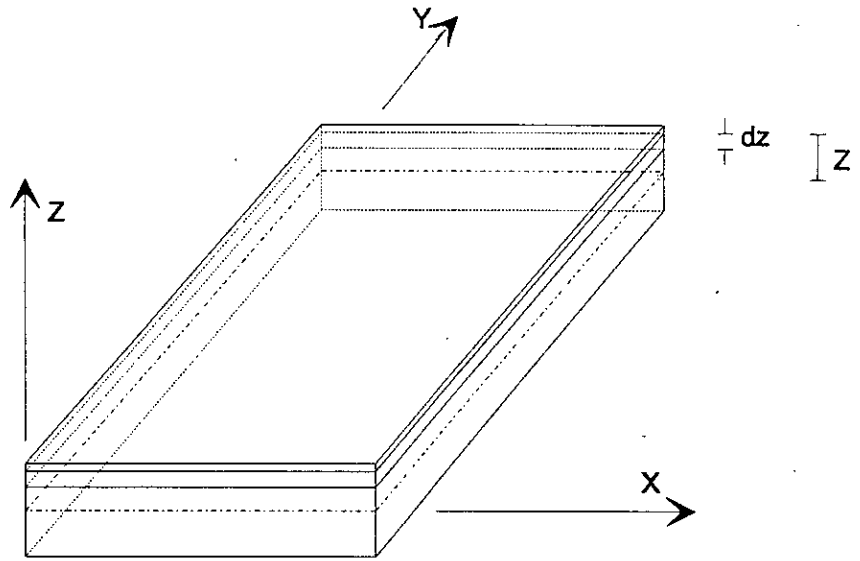
Pour les problèmes de flexion, comme les fissures progressent dans la profondeur de la dalle, le changement de la position de l'axe neutre par rapport à la position initiale est inévitable. Elle tend vers la face de compression. Wegmuller [86], Hand [43] et Cope [26] ont utilisé un élément rectangulaire avec cinq degrés de liberté ($U, V, W, \theta_x, \theta_y$) par noeud. Abdel-Hafez [1] et Benradouane [12] ont utilisé des éléments isoparamétriques à huit noeuds avec cinq degrés de liberté ($U, V, W, \theta_x, \theta_y$) par noeud, en utilisant la théorie de Mindlin. Dans cette analyse ce dernier type d'élément est utilisé et les formulations sont faites séparément pour chaque couche.

3.3.3 MODELISATION MULTICOUCHES

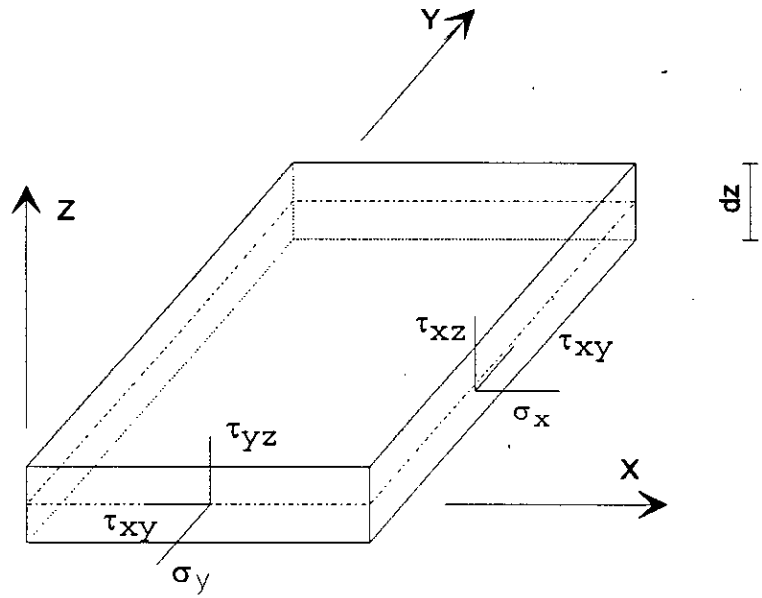
L'application de la théorie des stratifiés consiste en la modélisation de l'association acier-béton d'une dalle en béton armé, par un empilement de couches isotropes (les barres étant assimilées à une plaque d'acier d'épaisseur équivalente), dont le comportement d'ensemble se rapproche de celui d'une pièce isotrope. Une multicouche représente un empilement de couches différentes dont l'assemblage est supposé parfait.

Il est important de souligner qu'une plaque stratifiée peut fléchir sous l'action des sollicitations de membranes: En effet, si la symétrie miroir n'est pas respectée, il y a couplage entre le comportement en membrane et le comportement en flexion. Par contre, lorsque la symétrie miroir existe, le comportement en flexion est indépendant du comportement en membrane.

La plaque épaisse est divisée en un nombre fini de couches parallèles au plan médian de la plaque comme le montre la figure(3-1). Chaque couche est supposée résister aux contraintes planes et aux contraintes de cisaillement transversal. Chaque couche peut être constituée d'un matériau différent. Ainsi pour un élément de béton armé, chaque constituant du matériau est désigné par une couche différente. L'adhérence entre toutes les



(a) Idéalisaton par couche



(b) Convention de signe pour les contraintes planes et de cisaillement (positives comme elles sont représentées)

Fig (3.1): Modèle de plaque en couche

couches est supposée parfaite. La variation de la contrainte à travers l'épaisseur de la couche est ignorée. La formulation de Mindlin prend en compte la déformation de cisaillement transversal et elle est basée sur les hypothèses qui ont été citées dans le chapitre précédent.

La détérioration de la rigidité de la dalle est représentée par la variation des propriétés des couches convenablement changées au fur et à mesure que se développe la non linéarité. La pénétration des fissures à travers l'épaisseur de la dalle peut ainsi être suivie sans aucun inconvénient par ce modèle multicouches.

3.3.4 REPRESENTATION DES DEPLACEMENTS POUR L'ELEMENT

En utilisant les hypothèses de la théorie de Mindlin des plaques, les déplacements (U), (V) et (W) en n'importe quel point de la dalle avec les coordonnées cartésiennes (X,Y,Z) peuvent être exprimés comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, y, z) \\ V(x, y, z) \\ W(x, y, z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} U_0(x, y) - z\theta_x(x, y) \\ V_0(x, y) - z\theta_y(x, y) \\ W_0(x, y) \end{array} \right\} \quad (3-6)$$

U_0 , V_0 et W_0 sont les déplacements de la surface de référence de la plaque dans les directions (X), (Y) et (Z) respectivement, θ_x et θ_y sont les rotations normales dans les plans (XZ) et (YZ) respectivement. En ce qui concerne la convention de signe, voir la figure(3-3).

3.3.5 FONCTIONS DE FORME

Une fonction de forme définit la variation du champ de variables et ses dérivées à travers un élément en termes de ses valeurs aux noeuds. Donc, les fonctions de forme sont liées au nombre de noeuds et le type d'élément. En utilisant l'idéalisation en éléments finis, le vecteur déplacement en n'importe quel point dans un élément isoparamétrique à huit

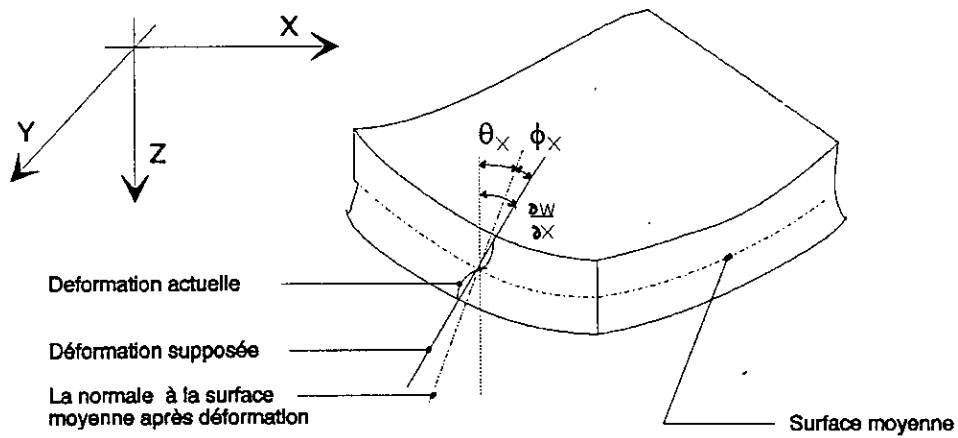


Fig (3.2): Déformation de la section transversale de la plaque Mindlin

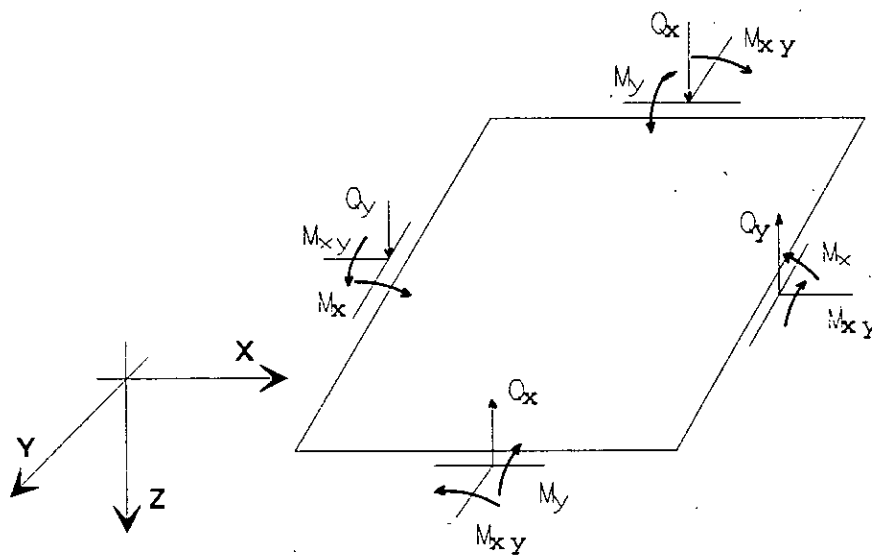


Fig (3.3): Plaque typique de Mindlin

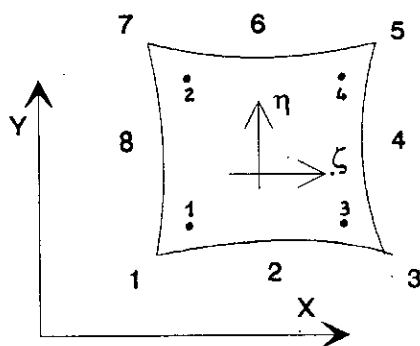


Fig (3.4): Élément isoparamétrique de plaque en flexion

noeuds basé sur l'élément de plaques Mindlin est donné par l'expression suivante:

$$\begin{Bmatrix} U^e \\ V^e \\ W^e \\ \theta_x^e \\ \theta_y^e \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i^e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ w_i^e \\ \theta_{x_i}^e \\ \theta_{y_i}^e \end{Bmatrix} \quad (3-7)$$

N_i^e est la fonction de forme dans un noeud (i) en termes de coordonnées locales (ζ, η) et $(U, V, W, \theta_x, \theta_y)$ est le vecteur des déplacements nodaux au noeud (i) suivant la formulation isoparamétrique standard. Les valeurs des coordonnées $X(\zeta, \eta)$ et $Y(\zeta, \eta)$ en n'importe quel point de l'élément (figure(3-4)), peuvent être définies par les expressions suivantes:

$$X(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) X_i \quad \text{et} \quad Y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) Y_i \quad (3-8)$$

Où (X_i, Y_i) sont les coordonnées du noeud (i) et (ζ, η) est le système de coordonnées naturelles qui permet l'utilisation des éléments sous formes curvilinéaires. $N_i(\zeta, \eta)$ sont les fonctions de forme quadratiques à deux dimensions données par Zienkiewicz [89] comme suit (figure(3-4)):

Pour les noeuds d'angles: $i=1, 3, 5, 7$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\eta \eta_i - 1) \quad (3-9)$$

Pour les noeuds intermédiaires: $i=2, 4, 6, 8$

$$N_i = \xi_i^2 (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2} (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi^2) \quad (3-10)$$

3.3.6 RELATION DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS

Dans l'analyse à deux dimensions basée sur la théorie des plaques de Mindlin en flexion et en contraintes planes, la relation déformations-déplacements peut être écrite comme suit:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \quad (3-11)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y$$

Où ϵ_x , ϵ_y et γ_{xy} sont les composantes des déformations planes. γ_{xz} et γ_{yz} sont les composantes de la déformation de cisaillement transversal. Z est la distance entre le centre de la couche et le plan de référence comme le montre la figure(3-1a). Les équations (3-11) peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} & -z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (3-12)$$

En utilisant l'idéalisation en éléments finis, on peut écrire:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & 0 & 0 & -z \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & -z \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & -N_i^e & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & 0 & -N_i^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (3-13a)$$

qu'on peut réécrire simplement:

$$\{\epsilon\} = \sum_{i=1}^8 B_i \{\delta_i\} \quad (3-13b)$$

Où B est la matrice de déformation qui contient les dérivées cartésiennes des fonctions de forme.

B_i peut être écrite sous la forme suivante:

$$B_i = \begin{bmatrix} B_{p_i} & B_{f_i} \\ 0 & B_{s_i} \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

B_{p_i} est la matrice de déformation associée avec les déformations planes.

B_{f_i} est la matrice de déformation associée avec les déformations flexionnelles.

B_{s_i} est la matrice de déformation associée avec les déformations de cisaillement.

3.3.7 DERIVEES CARTESIENNES DES FONCTIONS DE FORME

Dans les expressions ci-dessus, les dérivées cartésiennes des fonctions de forme peuvent être obtenues en utilisant la règle de chaîne des dérivées partielles.

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\text{et } \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (3-15)$$

En utilisant la formulation isoparamétrique standard [31], la matrice Jacobienne (J) peut être obtenue sous la forme suivante:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

L'inverse de la matrice Jacobienne (J) est donnée par l'expression suivante:

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

Les dérivées cartésiennes des fonctions de forme peuvent être ainsi calculées par les équations (3-13) et (3-15), qui seront utilisées ensuite pour le calcul de la matrice de déformation (B). L'élément de volume discretisé dans les formulations isoparamétriques est donné par:

$$dV = (dx dy) dz = (\det J d\xi d\eta) dz \quad (3-18)$$

3.3.8 RELATION CONTRAINTES-DEFORMATIONS

Pour l'analyse linéaire du béton non fissuré et en absence des contraintes et des déformations initiales, la relation

contraintes-déformations peut être écrite sous la forme suivante:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (3-19)$$

Où D est la matrice d'élasticité qui prend la forme suivante:

$$[D] = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{k} \end{bmatrix} \quad (3-20a)$$

E est le module de Young d'élasticité, μ est le coefficient de Poisson et k est le facteur de forme de cisaillement, usuellement égal à 5/6.

La matrice d'élasticité (D) peut être écrite comme suit:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{p_i} & 0 \\ 0 & D_{s_i} \end{bmatrix} \quad (3-20b)$$

Où, D_p est relative aux contraintes planes et D_s est relative aux contraintes de cisaillement transversal.

3.3.9 MATRICE DE RIGIDITE ET VECTEUR FORCE ELEMENTAIRE

Toute l'information requise pour évaluer la matrice de rigidité élémentaire [K] a été donné précédemment, ainsi que par l'équation (3-4). La matrice de rigidité élémentaire peut donc être écrite sous forme:

$$K = \sum_{i=1}^n \left(\iint B^T D B \, dx dy \right) dz_i \quad (3-21)$$

Où dz_i est l'épaisseur de la i^{eme} couche, n est le nombre total de couches, B est la matrice de déformation et D est la matrice

d'élasticité dépendante du type de matériau et de l'état de contraintes (acier ou béton, élastique, plastique ou fissuré) de la couche considérée.

L'intégration numérique peut être utilisée pour évaluer la matrice de rigidité qui est donnée par l'expression précédente (3-21) et les règles d'intégration Gauss-Legendre sont choisies pour satisfaire l'intégration sur l'aire de l'élément.

Le vecteur force $\{F\}$ pour chaque élément s'écrit sous la forme suivante:

$$F = \int N^t p \, dx dy \quad (3-22)$$

Où p est le vecteur force de surface élémentaire. L'intégration numérique est utilisée pour calculer l'intégrale ci-dessus.

Dans cette analyse la règle d'intégration de Gauss 2*2 est utilisée pour développer l'élément isoparamétrique à huit noeuds [1].

3.3.10 LES FORCES RESULTANTES

Les forces dans le plan de la plaque (N_x, N_y, N_{xy}), les moments de flexion (M_x, M_y, M_{xy}) et les forces de cisaillement (Q_x, Q_y) peuvent être écrites comme suit:

$$\{ F \} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ z_i \sigma_x \\ z_i \sigma_y \\ z_i \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2-23)$$

Où z_i est la distance entre le plan moyen de la plaque et la $i^{\text{ème}}$ couche, n est le nombre total de couches.

3.4 CONCLUSION

L'application de la méthode des éléments finis multicouches à l'étude des dalles en béton armé en utilisant l'élément

isoparamétrique de Mindlin à 5 degrés de liberté par noeud avec intégration numérique de Gauss 2×2 semble très appropriée, car elle permet de prendre en compte l'effet de cisaillement et de suivre les différentes non linéarités matérielles à travers les couches composant chaque plaque. Intégration réduite 2×2 permet de résoudre le problème du verrouillage de cisaillement.

LES METHODES NUMERIQUES NON LINEAIRES

4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente les méthodes utilisées pour la résolution des problèmes non linéaires. Il n'existe pas de méthodes générales directes de résolution des systèmes non linéaires. Les problèmes non linéaires sont toujours solutionnés par la résolution de plusieurs problèmes linéaires successifs où les conditions non linéaires sont respectées pour certaines tolérances. En mécanique des structures, un problème est non linéaire si la matrice de rigidité ou le vecteur chargement dépend des déplacements. Un problème structurel non linéaire doit vérifier les lois de base de la mécanique des milieux continus: Equilibre, compatibilité et lois constitutives de rhéologie. La compatibilité des déplacements est automatiquement vérifiée avec la méthode des éléments finis (formulation déplacements) qui conduit à une formulation discretisée des problèmes non linéaires. Il suffit donc, de vérifier les lois rhéologiques tout en préservant l'équilibre de la structure. L'une des techniques les plus utilisées est de calculer les contraintes à partir du champ de déplacements et des lois constitutives. Ces contraintes sont statiquement équivalentes à un système de forces nodales internes qui doivent équilibrer les forces externes.

Généralement ces deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée forces résiduelles. Ces dernières doivent être annulées pour assurer l'équilibre.

En général pour un niveau particulier de chargement, un nombre de solutions linéaires successives est nécessaire pour éliminer les forces résiduelles à un degré de précision désiré. La méthode est évidemment itérative en nature et les résultats finaux dépendront des facteurs associés avec le processus itératif; par exemple la grandeur de l'incrément, la précision désirée, la technique de la solution employée etc. Clairement,

il est impossible d'obtenir une solution unique à un problème particulier à cause de ces facteurs.

Les relations contraintes-déformations sont une source majeure de la non linéarité. Celles-ci peuvent varier par les relations non linéaires à court terme entre les contraintes et les déformations telles que: Plasticité, fissuration, élasticité non linéaire etc.

Dans cette étude, seule la non linéarité causée par le comportement à court terme du béton et de l'acier est prise en considération. Celle-ci comprend en outre la résistance du béton fissuré, les relations contraintes-déformations non linéaires du béton en compression et l'écoulement de l'acier. Les détails exacts des lois représentant ces comportements seront donnés dans le chapitre 5.

En général, la solution d'un problème non linéaire est très dépendante de ces lois matérielles. Une loi plus raffinée doit donner une solution meilleure. Mais comme mentionné auparavant, la solution peut aussi dépendre de la procédure non linéaire employée.

4.2 TECHNIQUES NUMERIQUES POUR L'ANALYSE NON LINEAIRE

4.2.1 FORMULATION DE BASE

Les problèmes non linéaires dans la méthode des éléments finis sont usuellement résolus par l'une des trois techniques suivantes:

- a- Incrémentale (procédure pas à pas)
- b- Itérative
- c- Incrémentale/itérative (procédure mixte)

Pour les problèmes de non linéarité matérielle uniquement (petites déformations), la relation entre contraintes et déformations est supposée être de la forme:

$$f(\sigma, \epsilon) = 0$$

La matrice de rigidité élémentaire est fonction des propriétés matérielles et peut être écrite comme suit:

$$[K] = K(\sigma, \epsilon)$$

Les forces nodales externes $\{F\}$ sont fonction des déplacements nodaux $\{\delta\}$ à travers l'épaisseur de l'élément et peuvent être exprimées par:

$$\{F\} = [K] \{\delta\}$$

$$\text{D'où} \quad \{\delta\} = [K]^{-1} \{F\}$$

$$\text{Ou} \quad \{\delta\} = [K(\sigma, \epsilon)]^{-1} \{F\} \quad (4-1)$$

Cette dérivation explique la relation non linéaire de base entre $\{\delta\}$ et $\{F\}$, due à l'influence de la loi matérielle sur $[K]$.

L'équation (4-1) est résolue par une succession d'approximations linéaires. Les différentes méthodes d'application de ces chemins charge-déplacement influencent la solution finale. Ces méthodes sont expliquées en détail dans ce chapitre.

4.2.2 METHODE INCREMENTALE

Le principe de la méthode incrémentale est la subdivision du vecteur chargement en plusieurs incréments; pas forcément égaux. Durant chaque incrément de charge l'équation:

$$\{F\} = [K] \{\delta\}$$

est supposée être linéaire avec une valeur constante de K déduite des résultats de l'incrément précédent. Des déplacements nodaux sont obtenus pour chaque incrément et sont ajoutés aux déplacements cumulés précédemment. Le processus est répété jusqu'au chargement final. Il n'y a pas d'itérations dans l'incrément pour restaurer l'équilibre et la précision dépend de la taille de l'incrément. La modification qui peut se faire est d'appliquer la moitié de l'incrément de charge et de calculer la

nouvelle rigidité structurelle correspondant aux contraintes totales de cette valeur. La matrice de rigidité actualisée sera donc utilisée pour l'incrément de charge. La méthode incrémentale d'origine ou de forme modifiée ne prend pas en compte la distribution de forces durant l'application de la charge incrémentale.

L'analyse des méthodes incrémentales est la meilleure description du comportement force-déplacement. L'inconvénient majeur est la difficulté de la prédétermination des incréments nécessaires pour assurer une bonne précision.

4.2.3 METHODE ITERATIVE

Dans la méthode itérative, le chargement est appliqué en un seul incrément avec une certaine matrice de rigidité initiale, et on calcule les déplacements. Les contraintes sont déduites selon les lois constitutives et on déduit les forces nodales internes équivalentes qui n'équilibrent pas forcément les forces externes. Les forces résiduelles sont appliquées à leur tour et on déduit de nouveaux déplacements qu'on doit ajouter aux précédents. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouvelles forces résiduelles. Ce processus est répété jusqu'à élimination des forces résiduelles à une certaine tolérance. Plusieurs techniques itératives de calcul de la matrice de rigidité et des forces résiduelles existent.

A - EVALUATION DES FORCES NODALES NON EQUILIBREES

Les forces internes sont calculées comme des forces dues à des contraintes initiales [90]. Cette méthode peut être expliquée comme suit:

Evaluer les relations contraintes-déformations.

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (4-2)$$

Où $\{\sigma_0\}$ est le vecteur des contraintes initiales et $[D]$ est la matrice d'élasticité.

Supposons initialement $\sigma_0=0$, l'équation (4-1) est résolue avec une matrice $[D]$ appropriée et une déformation ϵ_a , pour

obtenir un certain niveau de contraintes σ_{A1} où.

$$\{\sigma_{A1}\} = [D] \{\epsilon_A\}$$

La contrainte qui est produite est:

$$\{\sigma_{A2}\} = [D'] \{\epsilon_A\}$$

Où D' est la matrice d'élasticité instantanée.

La différence entre les contraintes:

$$\sigma_0 = \{\sigma_{A2}\} - \{\sigma_{A1}\} \quad (4-3)$$

est utilisée comme contrainte initiale dans l'équation (4-2), et les forces nodales non équilibrées équivalentes $\{F\}$ sont calculées par:

$$\{F\} = -\int_V B^T \sigma_0 dv \quad (4-4)$$

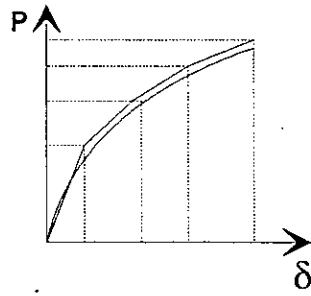
Les forces sont éliminées en les appliquant à la structure pour obtenir une correction de δ . Ce processus est répété jusqu'à élimination de σ_0 .

B - METHODE D'EVALUATION DES ELEMENTS DE LA MATRICE DE RIGIDITE

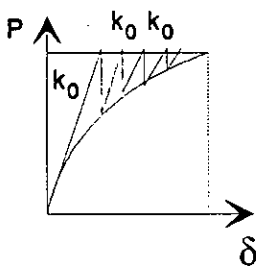
Généralement, la matrice de rigidité peut rester constante, ou bien varier durant le processus itératif.

B.1 - METHODE DE RIGIDITE CONSTANTE

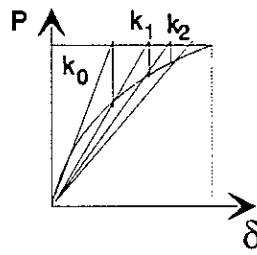
Dans cette méthode, la rigidité initiale linéaire est utilisée pour chaque étape dans l'analyse. Cette méthode possède des avantages économiques parce que la matrice de rigidité est calculée uniquement une seule fois. Son inconvénient principal est qu'elle requiert usuellement un large nombre d'itérations



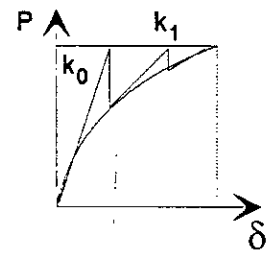
a) Processus incrémental



Procédure de rigidité constante

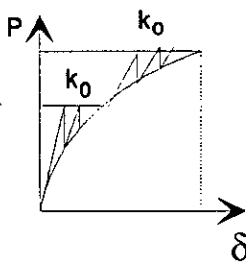


Procédure de rigidité variable (approche du module secant)

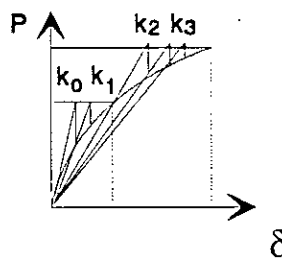


Procédure de rigidité variable (approche du module tangent)

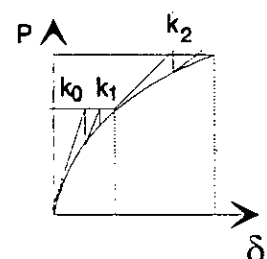
b) Processus itératif



Procédure de rigidité constante



Procédure de rigidité variable (approche du module secant)



Procédure de rigidité variable (approche du module tangent)

c) Procédure mixte

Fig (4.1): Les principales procédures pour la solution non-linéaire

pour atteindre la précision désirée, notamment après fissuration du béton et écoulement des armatures. Plusieurs processus d'accélération ont été suggérés, mais l'utilisation de ces techniques demeure limitée [26, 73].

B.2 - METHODE DE RIGIDITE VARIABLE

Dans la méthode de rigidité variable, la méthode Newton-Raphson ou sa version modifiée est utilisée. Dans la méthode Newton-Raphson complète, la matrice de rigidité tangente est actualisée et un système complètement nouveau d'équations est résolu à chaque itération. Ce processus peut être particulièrement très chère si les incréments de charge relativement petits sont utilisés.

Pour remédier à cela, une modification dans l'algorithme total de Newton-Raphson est recommandée par actualisation de la matrice de rigidité occasionnellement.

Le processus itératif est généralement plus rapide et la procédure d'itération est facile à incorporer dans un programme linéaire. L'inconvénient majeur est que les déplacements ne sont déterminés que pour un seul incrément. Si le problème réside dans l'étude d'un chargement variable avec le temps (dynamique, fluage...) ou si le chargement total est inconnu (recherche de la charge d'instabilité ou de rupture) ou encore si les lois constitutives dépendent du chemin parcouru (plasticité, fluage...) alors la méthode itérative est inutilisable.

4.2.4 METHODE MIXTE

Les méthodes mixtes sont une combinaison des deux méthodes citées précédemment. Le chargement est appliqué par incréments et la solution dans chaque étape du chargement est obtenue itérativement jusqu'à satisfaction de l'équilibre à une précision donnée. La méthode mixte combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative et elle est la plus utilisée. La figure(4-1c) montre les différentes méthodes de la procédure mixte.

4.3 LA PROCEDURE UTILISEE DANS CE TRAVAIL

Une version de la procédure mixte est utilisée dans ce travail. L'approche Newton-Raphson modifiée [90] est utilisée pour évaluer la matrice de rigidité. La matrice de rigidité est utilisée pour toutes les itérations du premier incrément car les non linéarités ne sont pas prononcées. Pour les incréments suivants la matrice de rigidité est actualisée après la première itération et les itérations 2, 5, 8, 11, 15, 20, 25 et 30. Ainsi les effets non linéaires sont régulièrement pris en compte dans la matrice de rigidité. Comme la méthode Newton-Raphson modifiée nécessite moins de calculs de rigidité que la version complète, des économies numériques sont donc obtenues. Cependant, un large nombre d'itérations est requis pour la convergence, particulièrement s'il y a une perte significative de rigidité dans le système durant l'incrément de charge dû à la fissuration du béton ou à l'écoulement des armatures.

4.4 CRITERE DE CONVERGENCE

Dans la stratégie incrémentale-itérative, il est important de contrôler la convergence de la solution obtenue à la fin de chaque itération. Le critère de convergence, usuellement utilisé pour l'analyse structurelle non linéaire est basé soit sur la norme des déplacements soit sur la norme des forces résiduelles et parfois sur l'énergie de déformation initiale. Dans la présente étude, la convergence est basée sur les normes des forces résiduelles parce qu'elles indiquent directement comment les exigences d'équilibre sont vérifiées [5]. Puisqu'il est difficile et cher de contrôler l'élimination des forces résiduelles pour tous les degrés de liberté, une combinaison d'évaluation par usage des normes des forces est utilisée comme suit:

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^N (F_{ui}^r)^2 \right|^{0.5}}{\left| \sum_{i=1}^N (R_i)^2 \right|^{0.5}} \times 100 \leq \text{Tolérance} \quad (4-5)$$

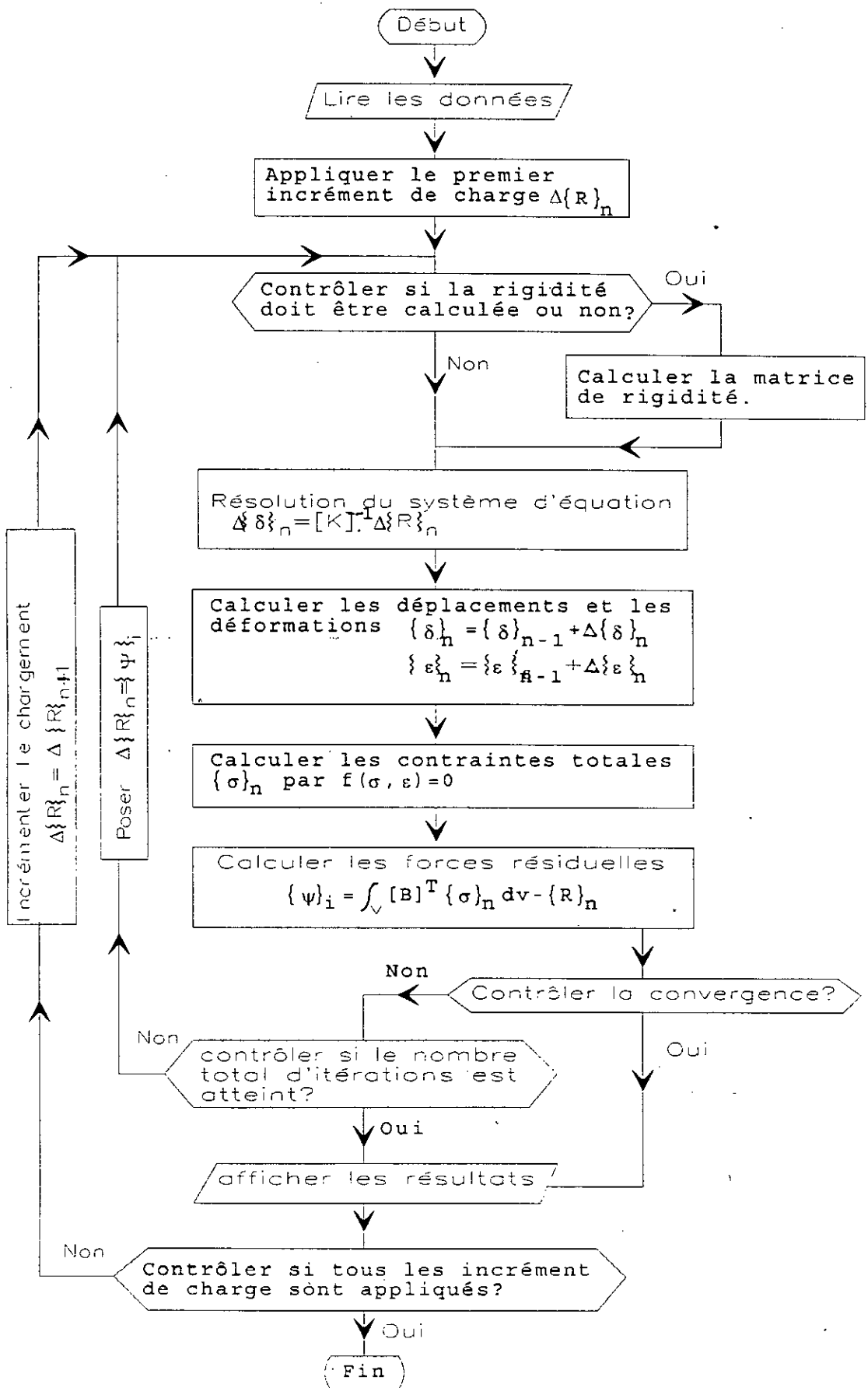


Fig (4.2): Organigramme de la procédure non linéaire utilisée dans cette étude

N est le nombre total des points nodaux des déplacements non nuls dans la structure. r dénote le nombre d'itérations, F_{ui} est la force résiduelle au i^{eme} déplacement et R_i est la charge totale externe appliquée au i^{eme} déplacement.

Il y a lieu de noter que dans la formulation adaptée pour l'élément de plaques Mindlin, les contraintes sont séparées en contraintes planes et contraintes de cisaillement transversal. Les contraintes planes sont supposées suivre la loi matérielle courante, comme les relations contraintes-déformations. Par contre les contraintes de cisaillement transversal restent constantes sauf là où le béton est écrasé, dans ce cas toutes les contraintes sont supprimées.

4.5 DISCUSSION GENERALE SUR LE CRITERE DE CONVERGENCE

La fonction principale du critère de convergence est de contrôler le nombre d'itérations dans un incrément. Le contrôle est exercé à travers le choix des tolérances de convergence et le type de normes. Un nombre maximum d'itérations est souvent recommandé afin d'éviter le déroulement indéfini du programme en cas de divergence. Le nombre d'itérations influence la forme finale de la courbe charges-déformations et la charge ultime. De là, il est important que les facteurs influençant le comportement de la convergence et la redistribution des forces soient bien cernés.

De bonnes tolérances sont théoriquement désirables, mais peuvent être très chères à obtenir parce qu'elles exigent souvent beaucoup d'itérations. Elles peuvent être particulièrement difficiles à atteindre là où les lois matérielles discontinues (comme la fissuration) forment une partie du comportement non linéaire. Les discontinuités de pente dans les lois matérielles peuvent causer de larges forces résiduelles et ces dernières doivent être redistribués. Cependant, ces redistributions causent beaucoup de discontinuités et donc, d'autres forces résiduelles dans les itérations subséquentes. Dans de tels cas la vitesse d'accumulation des forces résiduelles peut être supérieure à la vitesse de leurs distributions. Une autre situation se présente quand les forces résiduelles sont presque redistribuées lorsque

une nouvelle discontinuité surgit causant une nouvelle augmentation des forces résiduelles et nécessitant un plus grand nombre d'itérations. Cela peut retarder considérablement la convergence. En pratique, l'initiation des fissures particulières est sujet de quelques variations et il est discutable s'il est nécessaire d'attendre jusqu'à ce qu'une situation complètement stable de fissuration soit atteinte dans n'importe quel incrément par usage des tolérances très exigeantes. Un compromis est donc recommandé.

Dans cette étude le critère de convergence en forces est utilisé parce qu'il contrôle directement l'équilibre. Le critère en déplacement peut quelques fois donner des résultats ne garantissant pas l'équilibre. Dans de telles circonstances, cette norme peut être petite et décroître alors que les forces résiduelles peuvent augmenter à cause du changement local dans la rigidité.

Finalement la vitesse de convergence dépend de la méthode utilisée dans la solution. Il est bien connu que la rigidité constante conduit à une convergence lente et cela conduit à une solution non économique [5]. Un processus d'accélération peut être inclus pour donner une convergence rapide, mais les problèmes peuvent être compliqués et ne donnent pas de garantie que la solution sera la même comme la solution non accélérée.

4.6 LES ETAPES DE BASE DANS LA METHODE UTILISEE

1- Appliquer un incrément de charge Δf_i et calculer la première valeur du déplacement incrémental.

$$\Delta\{\delta_i\} = [K]^{-1}\Delta\{f_i\}$$

Où K peut être la rigidité élastique initiale ou la rigidité tangentielle basée sur les conditions prévalant au début de l'incrément.

2- Calculer les incréments des déformations et des contraintes.

$$\Delta\{\epsilon_i\} = \int [B]^t \Delta\{\delta_i\}$$

$$\Delta\{\sigma_i\} = [D] \Delta\{\epsilon_i\}$$

3- Calculer les déplacements totaux, les déformations et les contraintes par addition des valeurs incrémentales aux valeurs précédentes.

$$\delta_i = \delta_{i-1} + \Delta\delta_i$$

$$\epsilon_i = \epsilon_{i-1} + \Delta\epsilon_i$$

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta\sigma_i$$

4- Contrôler l'état de contraintes contre le critère d'écoulement intermédiaire ou final. Si un critère est violé, les contraintes sont conduites à la surface d'écoulement.

5- Trouver les forces nodales équivalentes dues à (σ_i) , qui sont à l'intérieur de la surface de rupture. Calculer la force non équilibrée.

$$\Delta f_{ui} = \int B\sigma_i dv - f_i$$

f_i est la charge totale externe.

Cette étape est l'étape d'élimination des forces résiduelles.

6- Contrôler la norme des forces ou critère de convergence.

Si le critère de convergence est satisfait, donc appliquer un nouvel incrément de charge et répéter toutes les étapes précédentes de (1) à (6). Sinon, appliquer les forces résiduelles (Δf_{ui}) et calculer les déplacements correctifs ($\Delta \delta_i$) causés par les forces résiduelles.

$$\Delta \delta_i = [K]^{-1} \Delta \{f_{ui}\}$$

Retourner à la 2^{ème} étape et répéter le processus jusqu'à ce que les conditions de convergence soient satisfaites.

4.7 TECHNIQUES DE LA RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE

La résolution simultanée des équations joue un rôle majeur dans l'efficacité d'un programme en éléments finis. Cela est particulièrement vrai dans un programme non linéaire en éléments finis parce qu'un grand nombre de procédures est utilisé dans la résolution des équations.

Dans cette étude, la résolution par la méthode frontale est utilisée. Elle fut introduite originalement par Irons [51], et fut subséquemment modifiée par Hinton et Owen [46]. La solution frontale est une solution de procédure directe très efficace. Son attraction principale est que les variables sont introduites en dernière étape et rapidement éliminées par rapport à la plupart des autres méthodes. En plus de cela elle utilise moins d'espace mémoire, et donc un grand nombre d'éléments peut être utilisé sans besoin d'un grand espace pour le stockage. Cela est important spécialement dans l'analyse des structures complexes.

L'idée principale de la solution frontale est d'assembler

les équations et éliminer les variables en même temps. Une fois que les coefficients d'une équation sont complètement assemblés par la contribution de tous les éléments considérés, alors leurs variables qui leurs sont correspondantes peuvent être éliminées. Ceci signifie que la matrice de rigidité totale n'est jamais formée entièrement, puisque après élimination l'équation réduite est immédiatement transférée au disque de stockage pour une utilisation ultérieure.

Le noyau contient, à n'importe quel instant donné, le triangle de la partie supérieure d'une matrice carrée contenant les équations qui sont formées en un temps particulier. Les noeuds et les degrés de liberté correspondants aux équations sont appelés le "front". Le nombre d'inconnues dans le front est la "largeur du front". La grandeur maximum du problème qui peut être résolu est gouvernée par la "largeur maximale du front". Les équations, les noeuds et les degrés de liberté appartenant au front sont dits "actifs"; ceux qui ne sont pas considérés sont dits "inactifs"; ceux qui sont passés à travers le front et sont éliminés sont dits "désactivés".

Durant le processus assemblage-élimination les éléments sont considérés chacun son tour selon un ordre retenu. Chaque fois qu'un nouvel élément est appelé, ses coefficients de rigidité sont lus par la machine et additionnés soit aux équations existantes si les noeuds sont déjà actifs, soit aux nouvelles équations qui sont déjà incluses dans le front si les noeuds sont activés pour la première fois. Si quelques noeuds sont apparus pour la dernière fois, les équations correspondantes peuvent être

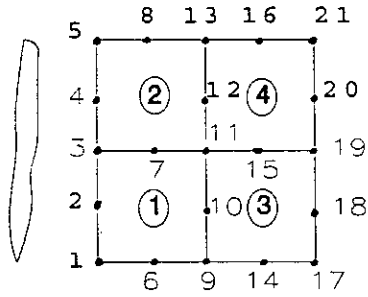
éliminées et stockées dans un fichier du disque.

Quoique, la solution frontale est efficace, les opérations périphériques du transfert à un disque de stockage représentent un inconvénient parce que le transfert est une opération très lente et coûteuse, surtout avec un grand nombre d'éléments. La solution peut être améliorée par stockage des équations réduites correspondantes à la variable éliminée dans le noyau temporaire dit "buffer area". Une fois cette aire est complète, l'information est transférée au disque. L'introduction de "buffer area" peut réduire le coût de 50% environ en comparaison avec l'utilisation du disque de stockage ordinaire. Al-Manaseer [5] dans son étude a conclu que le transfert au disque est très rarement exigé, mais cela, dépend de la grandeur du noyau de stockage principal de l'ordinateur utilisé.

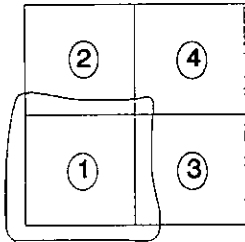
Pour mieux assimiler le processus assemblage/élimination de la méthode frontale, on propose un petit exemple de 4 éléments isoparamétriques à 8 noeuds (figure(4.3)).

4.8 CONCLUSION

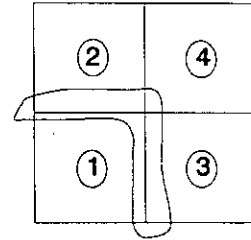
La procédure mixte est la mieux adoptée pour la résolution des problèmes non linéaires par la méthode des éléments finis parce qu'elle combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative et la méthode frontale est choisie pour résolution du système linéaire.



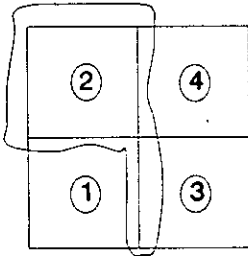
Etape 1: Initialisation



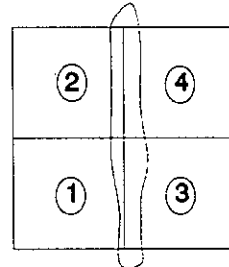
Etape 2: Assemblage ; élément 1



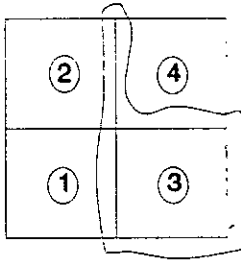
Etape 3: Elimination ; élément 1



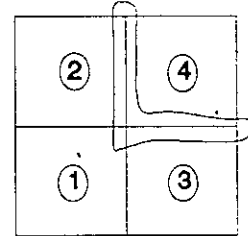
Etape 4: Assemblage ; élément 2



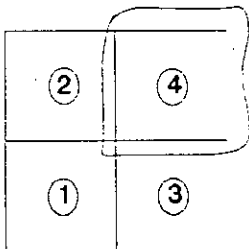
Etape 5: Elimination ; élément 2



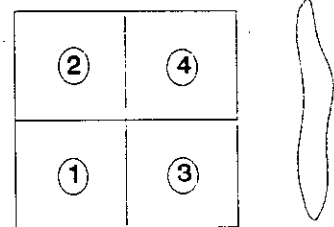
Etape 6: Assemblage ; élément 3



Etape 7: Elimination ; élément 3



Etape 8: Assemblage ; élément 4



Etape 9: Elimination ; élément 4

Fig (4.3): Procéssus assemblage / élimination de la méthode frontale

MODELES CONSTITUTIFS DU COMPORTEMENT FLEXIONNEL DU BETON ARME

5.1 INTRODUCTION

Une prédiction sûre du comportement des structures en béton armé requiert une connaissance du comportement du béton dans les domaines élastique et plastique. Une bonne loi matérielle doit être capable de décrire le comportement exact d'une structure, mais cela dépend des données expérimentales utilisées. Malgré les nombreux efforts consentis pendant des décennies, la quantité et la qualité des résultats expérimentaux demeurent très insuffisants pour une bonne description du comportement du béton armé pour divers états de contraintes. Les modèles rhéologiques doivent vérifier les principes de la mécanique des milieux continus et reproduire les résultats expérimentaux. aujourd'hui, la puissance des ordinateurs est telle que les lois constitutives complexes peuvent être incorporées sans trop de difficultés. Le problème principal est comment définir une loi convenable. Dans ces dernières années, beaucoup de travaux ont été réalisés pour modéliser le comportement du béton armé.

Les relations contraintes-déformations uniaxiales et biaxiales pour les différents matériaux (béton et acier), la représentation des fissures ainsi que le critère de rupture pour le béton sont présentés dans ce chapitre.

5.2 COMPORTEMENT MECANIQUE DU BETON SOUS DIFFERENTS ETATS DE CHARGEMENT

Le béton est un mélange de ciment, eau et agrégats fins et gros. La résistance du béton est fonction de la résistance du ciment, de l'agrégat et de l'interaction entre les composants. Les courbes typiques contraintes-déformations des agrégats et la pâte de ciment sont montrées sur la figure(5-1). Il est clair que la relation est linéaire sauf aux grands niveaux de contraintes. Les modules d'élasticité pour l'agrégat et la pâte de ciment sont

différents [5]. La réponse combinée de ces matériaux est d'une manière marquante non linéaire. Cela est dû principalement à la nature de l'adhérence ciment-agrégat. Dans la prochaine section on donne le comportement contraintes-déformations et la résistance du béton sous un chargement statique de courte durée. Cela sera décrit sous deux états de contraintes: Uniaxial et biaxial.

5.2.1 COMPORTEMENT SOUS CONTRAINTES UNIAXIALES

A - Région de compression

Une courbe typique contraintes-déformations pour le béton soumis à la compression uniaxiale présente un comportement linéaire élastique jusqu'à environ 30% de sa résistance maximale à la compression (f_c). Pour les contraintes au dessus de ce point, la courbe montre une augmentation graduelle en courbure évaluée autour de 75% à 90% de la résistance ultime à la compression (f_c). Au-delà du pic (f_c), la courbe contraintes-déformations possède une partie descendante jusqu'à rupture par écrasement se produisant à une déformation ultime (ϵ_u) quelconque. La forme de la courbe contraintes-déformations montrée sur la figure(5-2) est associée de près avec le mécanisme de la microfissuration progressive interne. Pour une contrainte avoisinant environ 30% de (f_c), les fissures existantes dans le béton, avant chargement, restent presque inchangées. Pour une contrainte entre 30% et 50% de (f_c), les fissures commencent à s'étendre à cause des concentrations des contraintes à la pointe de la fissure. Pour une contrainte entre 50% à 75% de (f_c), quelques fissures près des surfaces des agrégats apparaissent dans le mortier fissuré. En même temps d'autres fissures continuent à s'étendre lentement. Si la charge reste constante, les fissures continueront à se propager avec une vitesse décroissante jusqu'à ce qu'elles atteignent leurs longueurs finales. Pour les contraintes de compression au dessus de 75% de (f_c) environ, les larges fissures atteignent des dimensions critiques causant éventuellement la rupture.

La rupture progressive du béton est causée en premier lieu par les microfissures à travers le mortier. Ces dernières

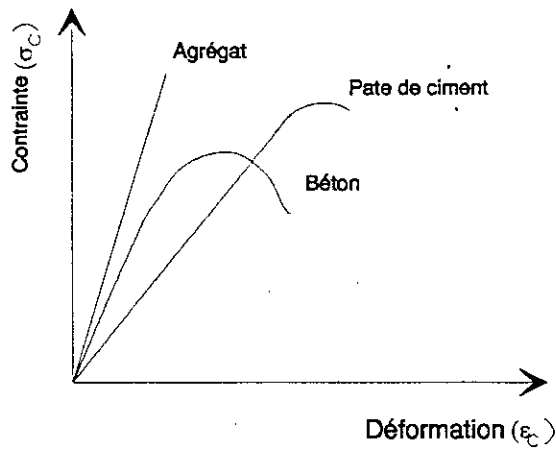


Fig (5.1): Courbes contraintes- déformations pour agrégat , pâte de ciment et béton

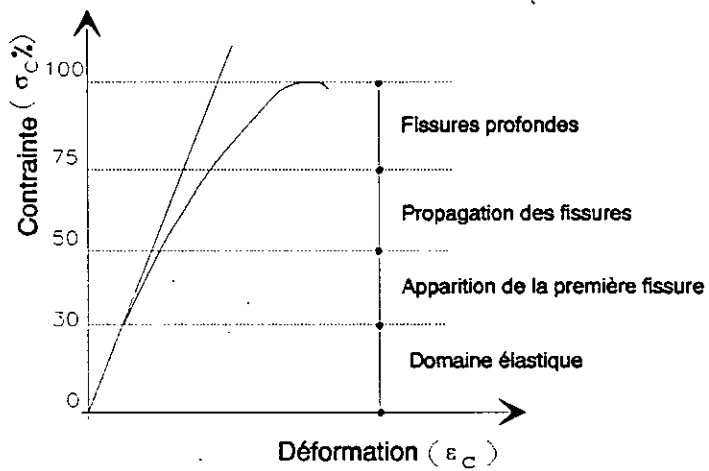


Fig (5.2): Courbe typique contraintes- déformations sous compression uniaxiale

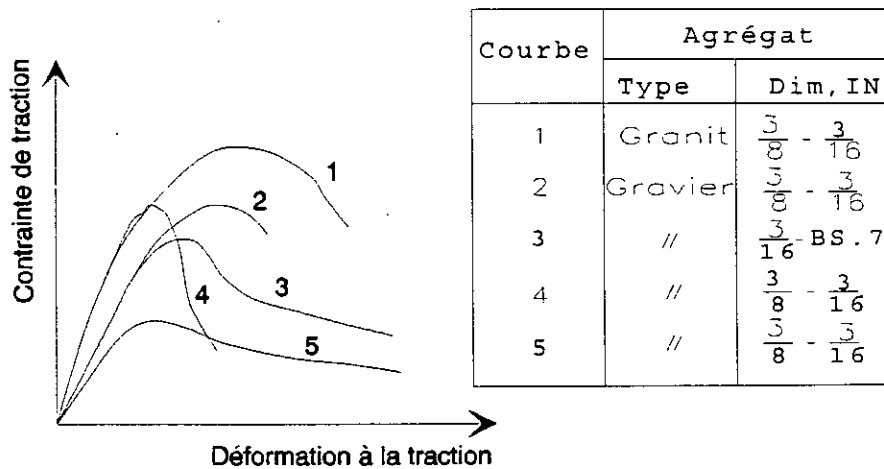


Fig (5.3): Courbes contraintes- déformations pour le béton sous traction uniaxiale avec différents types d'agrégats

joignent une bande de microfissures dans les surfaces proches des agrégats et forment les zones de microfissures. Avec l'augmentation de la déformation compressive, l'endommagement du béton continue à s'accumuler, et le béton entre dans la portion descendante de sa courbe contraintes-déformations, d'où l'apparition de fissures.

Le module d'élasticité initial du béton dépend de sa résistance à la compression, figure(5-2). Le coefficient de Poisson (μ) du béton sous chargement uniaxial de compression varie entre 0.15 et 0.22. Une valeur représentative est de l'ordre de 0.19 ou 0.20. Sous chargement uniaxial, le coefficient de Poisson (μ) reste constant jusqu'à 80% de (f_c) environ. Au-delà de cette valeur de contraintes, le coefficient de Poisson augmente. Dans les modèles mathématiques, une valeur de ce coefficient égale à 0.15 est très utilisée [1].

B - Zone tendue

La figure(5-3) montre les courbes contraintes-déformations pour le béton avec différents types d'agrégats sous traction uniaxiale. Toutes les courbes sont presque linéaires jusqu'à un niveau de contraintes relativement grand. Pour la contrainte inférieure à 60% environ de la résistance à la traction uniaxiale (f_t), les nouvelles microfissures qui sont créées sont négligeables. Aussi ce niveau de contraintes correspond à une limite d'élasticité, au-delà de ce niveau, la bande de microfissures commence à se propager. Le rapport entre la résistance à la traction uniaxiale et la résistance à la compression uniaxiale varie entre 0.05 et 0.10. Le module d'élasticité sous traction uniaxiale est légèrement grand et le coefficient de Poisson est petit comme dans le cas de la compression uniaxiale.

5.2.2 COMPORTEMENT SOUS CONTRAINTES BIAxiaLES

Une condition de contraintes biaxiales se produit si les contraintes principales agissent dans deux directions uniquement, et la troisième contrainte principale est nulle. Les courbes typiques contraintes-déformations pour le béton sous un état

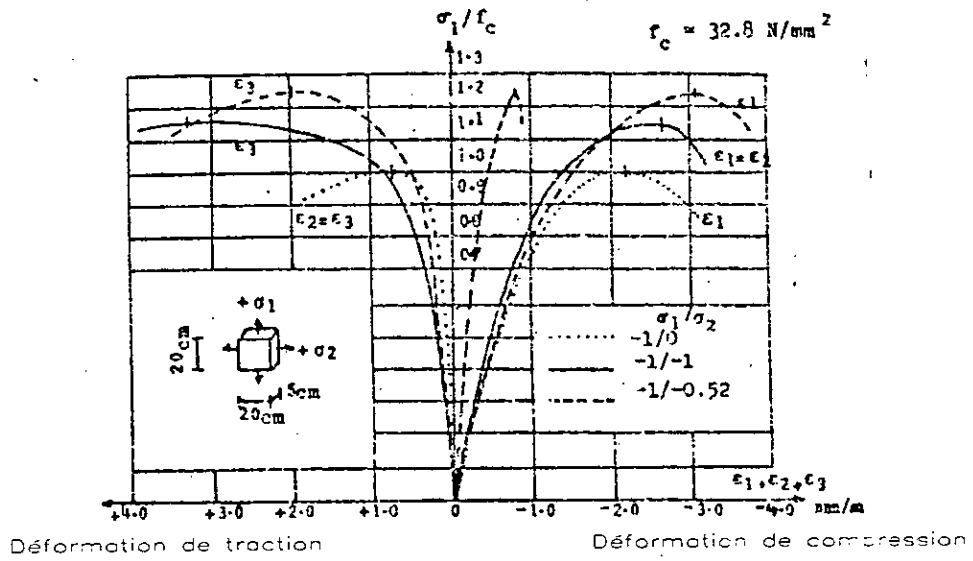


Fig (5.4): Relation contraintes- déformations du béton sous compression biaxiale

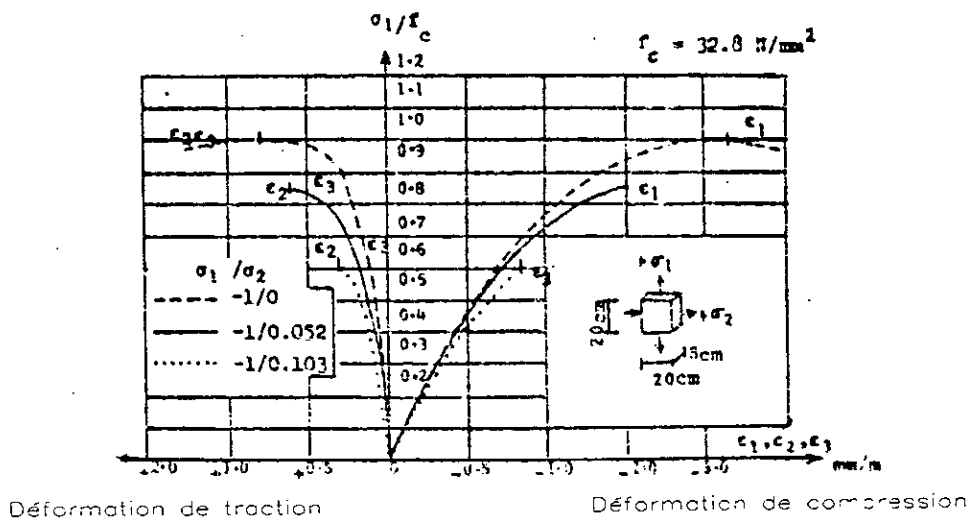


Fig (5.5): Courbes expérimentales contraintes- déformations sous traction - compression biaxiales

biaxial de contraintes dans les régions: compression-compression, traction-compression et traction-traction sont montrées sur les figures(5-4) à (5-6). Celles-ci sont obtenues par des tests expérimentaux de Kupfer et Al [60]. Les courbes contraintes-déformations de compression sont aussi montrées sur les trois figures citées précédemment.

Les relations contraintes-déformations sont essentiellement linéaires jusqu'à 30% de la contrainte de rupture, avec un petit taux de déformation permanent dû à la microfissuration. Beaucoup d'auteurs considèrent ce point comme le point de la limite élastique [5]. Dans l'espace de contraintes principales à deux dimensions, cette limite élastique est représentée par la première enveloppe montrée sur la figure(5-7). Pour les états de contraintes en dehors de cette enveloppe élastique, les fissures se forment, une destruction interne de la structure du matériau apparait et des déformations substantielles se produisent. Les enveloppes 2, 3 et 4 de la figure(5-7) montrent les limites d'autres points importants dans la relation contraintes-déformations.

A partir des courbes précédentes sur le comportement du béton, on peut dire que la résistance ultime du béton sous compression biaxiale est supérieure à celle de la compression uniaxiale. La raison principale de l'augmentation est due au confinement des microfissures [16]. La résistance maximale augmente approximativement de 25% pour un rapport de contraintes ($\sigma_1/\sigma_2=0.5$) et l'augmentation est uniquement de 16% environ sous un état de compression biaxiale égal ($\sigma_1/\sigma_2=1$). Sous traction-compression biaxiale, figure(5-5), la résistance à la compression décroît presque linéairement quand la contrainte de traction augmente. La figure(5-6) montre que la résistance à la traction biaxiale du béton est approximativement égale à sa résistance uniaxiale et les courbes contraintes-déformations sont de formes similaires pour les états de traction uniaxiale et biaxiale.

5.2.3 CISAILLEMENT A TRAVERS LES FISSURES

Immédiatement après formation d'une fissure, la contrainte de cisaillement parallèle à la fissure est nulle parce que la

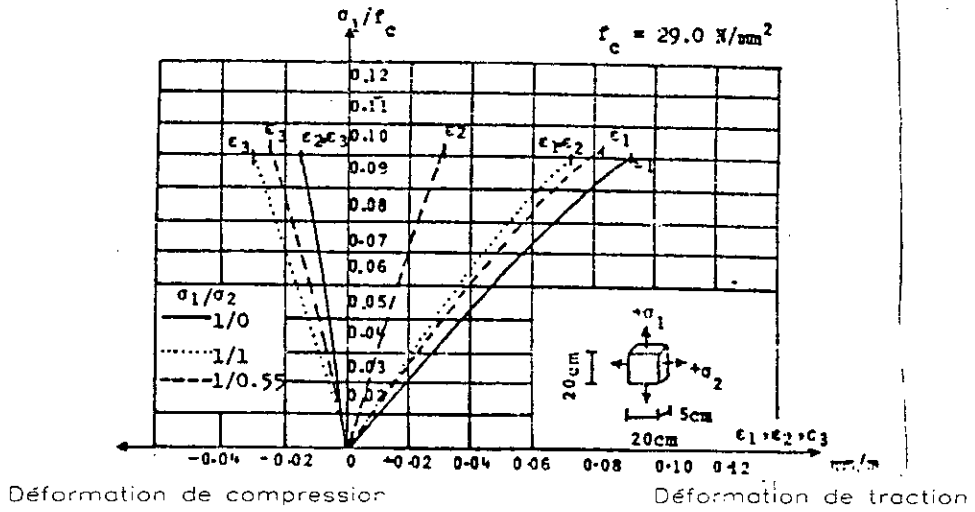


Fig (5.6): Courbes expérimentales sous traction uniaxiale

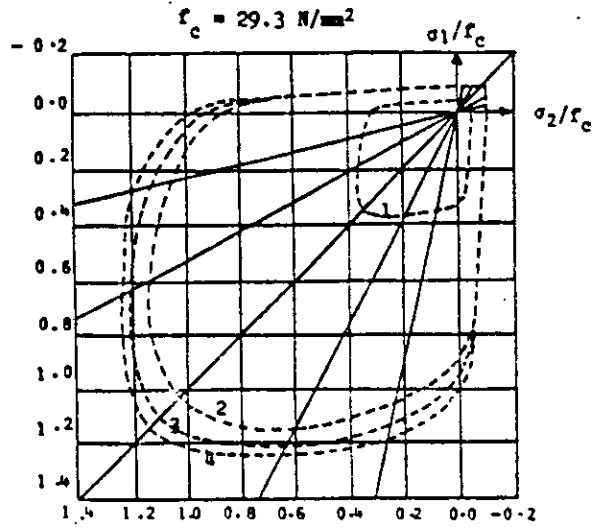


Fig (5.7): Zones de comportement sous l'état de contraintes biaxiales (Kupfer)

fissure est perpendiculaire à la contrainte principale. Tant qu'il n'existe pas de mouvement de cisaillement à la surface de la fissure, la contrainte de cisaillement parallèle à la fissure reste nulle. Cependant, si un tel mouvement a lieu, comme le montre la figure(5-8), des contraintes de cisaillement substantielles peuvent être développées à cause de la rugosité de la surface de la fissure et la présence des armatures qui traversent la fissure. La rugosité de la surface de la fissure conduit au transfert de cisaillement par engrenage des agrégats. Cela est plus effectif lorsque l'acier traverse la fissure parce qu'il a tendance s'opposer au mouvement relatif des deux levres de la fissure.

La plus importante observation des tests expérimentaux, est que la largeur de la fissure possède une grande influence sur la rigidité au cisaillement [1]. Le taux d'acier qui traverse la fissure et l'orientation des armatures par rapport à la fissure ont eux aussi une influence substantielle sur la résistance au cisaillement ultime et la rigidité au cisaillement.

Les surfaces fissurées du béton sont usuellement accidentées et irrégulières. Lorsqu'une force (V) est appliquée sur une fissure, un glissement tangentiel (δ) et un déplacement normal (W) résultent comme le montre la figure(5-10). Lorsque le déplacement normal est retenu par les barres des armatures transversalement à la fissure, les contraintes de traction axiales se développent dans les armatures et induisant des contraintes de compression verticales dans le béton. Ce mécanisme de conservation de cisaillement dans le béton fissuré est appelé "conservation de cisaillement aux interfaces" [1]. Il est clair que la largeur initiale de la fissure est la variable principale qui affecte ce mécanisme.

5.2.4 RAIDISSEMENT A LA TRACTION DU BETON FISSURE

La fissuration a une grande importance dans le comportement non linéaire des éléments du béton armé. Lorsqu'une contrainte principale dépasse la résistance à la traction du béton (F_t), une fissure se forme dans une direction normale à la direction de la

contrainte principale.

La figure(5-9) montre la situation physique au voisinage d'une fissure dans un membre tendu du béton armé [12]. Cette figure indique que dans une fissure la charge totale est prise uniquement par les armatures. Par contre dans les zones entre fissures, la charge est répartie entre l'acier et le béton. Cette aptitude du béton entre les fissures de reprendre la charge de traction avec les armatures est appelée "raidissement à la traction". Ainsi lorsque la contrainte du béton est nulle aux fissures, la contrainte moyenne dans une région fissurée n'est pas nulle. Cependant, quand la charge est augmentée et la contrainte dans le béton entre les fissures atteint la résistance ultime, le béton se rompt et une nouvelle fissure se forme entre les fissures principales. Par conséquent, la contrainte moyenne du béton dans la région fissurée décroît progressivement avec le chargement.

En plus du niveau de contraintes, les autres facteurs affectant le raidissement à la traction du béton sont: les caractéristiques d'adhérence, la résistance à la traction du béton, les espacements des fissures et les dimensions des barres et leurs arrangements. La plupart de ces facteurs ont été étudiés par Clark et Cranston [1]. Ils seront discutés en détail dans les sections suivantes.

5.3 COMPORTEMENT MECANIQUE DE L'ACIER

5.3.1 BREVE DESCRIPTION DU COMPORTEMENT DE L'ACIER

Puisque la résistance uniaxiale des armatures est prédominante, il n'est pas nécessaire d'introduire la complexité d'une relation constitutive multiaxiale de l'acier.

Un diagramme uniaxial contraintes-déformations pour l'acier est montré sur la figure(5-11). Initialement, la relation est linéaire et élastique jusqu'à la limite d'élasticité (P). Le point d'écoulement (Y) est donc atteint juste après le point (P) et la déformation plastique se produit. La différence entre les points (P) et (Y) est petite, pour la plupart des aciers, elle est usuellement négligeable dans les applications pratiques. Au-delà du point d'écoulement (Y), la plasticité apparaît avec

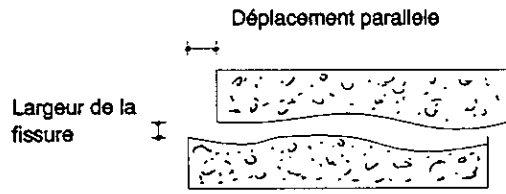


Fig (5.8): Inter- agrégat d'un béton fissuré

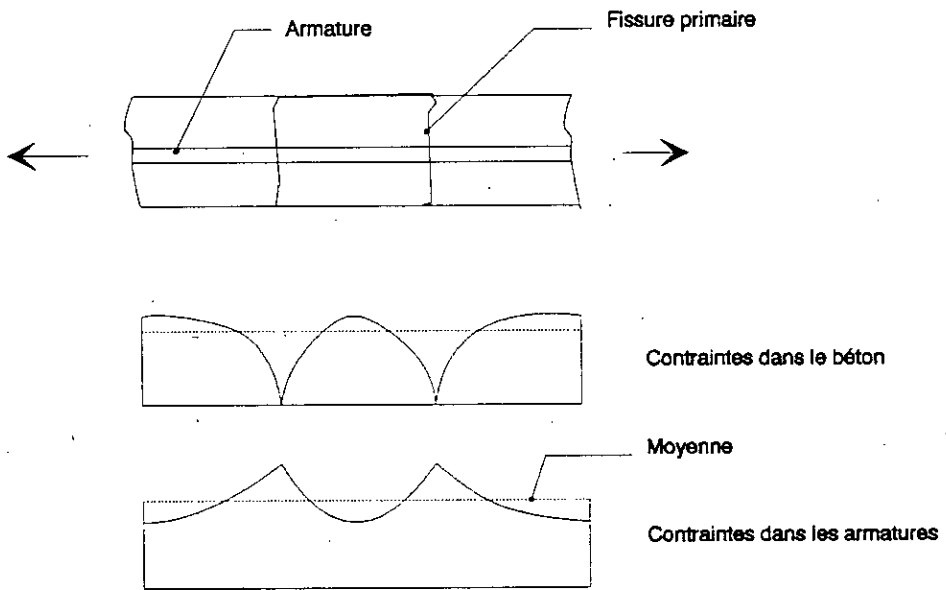


Fig (5.9): Distribution des contraintes dans le béton armé fissuré

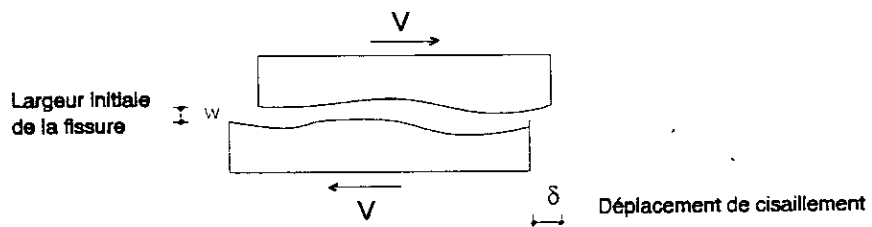


Fig (5.10): Phénomène de conservation de cisaillement

l'augmentation de la déformation avec un taux très grand. Généralement, la contrainte augmente légèrement, c'est ce qu'on appelle écrouissage. Eventuellement une contrainte maximale est enfin atteinte au point de pic (V). La rupture se produit après le pic dans la zone descendante au point (F).

5.3.2 ADHERENCE ENTRE ACIER ET BETON

La contrainte d'adhérence est la cause de la contrainte de cisaillement parallèle à l'axe de la barre sur l'interface acier-béton. Cette Adhérence transmet la force de la barre de l'acier au béton qui l'entoure et vice versa. L'adhérence entre le béton et l'acier est de nature complexe: Adhésion chimique, mécanique et friction. Pour les barres du béton armé, l'adhésion chimique et la friction sont les facteurs majeurs contribuant à la résistance de l'adhérence, par contre l'interaction mécanique joue un rôle mineur [5].

La figure(5-12) montre la résistance à l'adhérence pour une barre déformée qui agit le long de l'interface sous une pression donnée. Celle-ci peut être décomposée en deux composantes. La première composante agit parallèlement à la barre et tend à cisailier le béton le long d'une surface de rupture cylindrique et la seconde composante agit radialement et tend à créer une division longitudinale. Le dernier mode est le plus fréquent.

Les barres des armatures agissent aussi comme goujon comme le montre la figure(5-13). La déformation maximale de cisaillement se produit après le développement de la fissure et la barre reprend la force de cisaillement concentrée. Quelques facteurs peuvent affecter l'action du goujon tels que; la variation des diamètres des barres, la géométrie du spécimen, la longueur des armatures et leurs arrangements et le béton d'enrobage [5].

5.4 MODELISATION RHEOLOGIQUE

5.4.1 INTRODUCTION

Les relations contraintes-déformations uniaxiale et biaxiale pour les différents matériaux et le critère d'écoulement qui leur correspond sont requis dans le modèle multicouches. Les relations

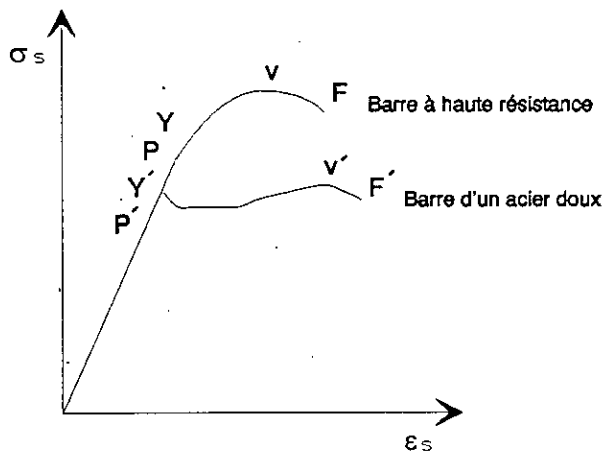


Fig (5.11): courbes typiques contraintes- déformations des aciers

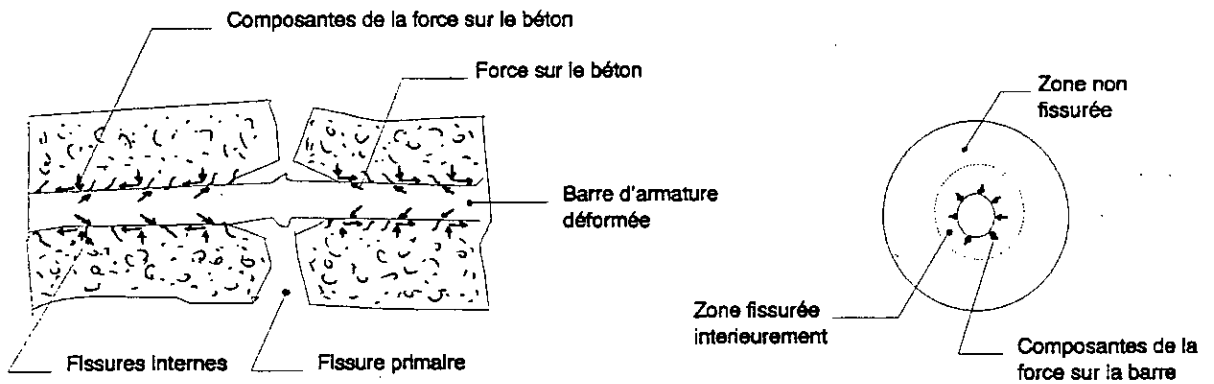


Fig (5.12): Déformation du béton autour des barres des armatures

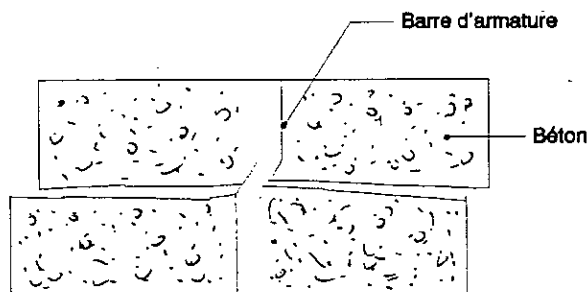


Fig (5.13): Action de goujon d'une barre d'armature

contraintes-déformations, la représentation des fissures et le critère de rupture pour le béton font l'objet de cette section.

5.4.2 FISSURATION DU BETON

La fissuration due à la traction, en général possède un effet dominant sur la réponse non linéaire, par contre l'écrasement dû à la compression du béton n'influe pas beaucoup sur la réponse non linéaire. Deux approches sont utilisées pour le modèle de fissuration du béton: La représentation discrète et la modélisation continue des fissures.

A - Modèle des fissures discrètes, figure(5-14):

Dans ce modèle [16], les noeuds des éléments adjacents sont supposés être séparés une fois qu'une fissure se produit. Une difficulté évidente dans ce modèle, est que la localisation et l'orientation des fissures ne sont pas connues en avance et que, des restrictions géométriques sont imposées par la maille présélectionnée des éléments finis. Cela peut être amélioré en réactualisant la discretisation des éléments, ces techniques sont très raffinées et donnent des informations détaillées sur le comportement local des structures mais sont extrêmement complexes et coûteuses.

B - Modèle des fissures continues, figure(5-15):

Dans ce modèle [16], les fissures sont supposées continues dans toute la région fissurée, avec un nombre infini de fissures. Ce modèle suppose que le béton devient un matériau orthotrope après l'apparition de la première fissure. C'est le modèle le plus utilisé et il a été retenu dans cette étude parce qu'il est capable de prédire la description générale du comportement du béton.

5.4.3 CRITERE DE RUPTURE

Pour le cas des dalles, en général, la connaissance du comportement sous contraintes biaxiales est suffisant. La surface de rupture adoptée dans cette étude peut être exprimée en terme de contrainte de cisaillement octaédrale sous la forme suivante

[1].

$$\tau_{oct} = a + b \sigma_{oct} \quad (5-1)$$

τ_{oct} est la contrainte de cisaillement octaédrale.

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}$$

σ_{oct} est la contrainte normale octaédrale.

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y)$$

a et b sont des constantes déterminées expérimentalement.

Prenons (f_c) comme résistance à la compression uniaxiale du béton et (f_d) comme résistance à la compression équivalente sous une compression biaxiale $f_d = 1.16f_c$, et en définissant le rapport $m = f_c/f_c$. Les constantes de l'équation (5-1) peuvent être établies comme suit:

A - Compression-compression:

- Pour la compression uniaxiale:

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} f_c \quad \text{et} \quad \sigma_{oct} = -\frac{f_c}{3}$$

Donc de l'équation (5-1), on obtient.

$$\frac{\sqrt{2}}{3} f_c = -b \frac{f_c}{3} + a \quad (5-2)$$

- Pour la compression biaxiale:

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} f_d \quad \text{et} \quad \sigma_{oct} = -\frac{2}{3} f_d$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} f_d = -\frac{2}{3} b f_d + a \quad (5-3)$$

Après résolution des équations (5-2) et (5-3), on trouve le critère de rupture du béton dans le cas de la compression biaxiale.

$$\frac{\tau_{oct}}{f_c} + 0.1714 \frac{\sigma_{oct}}{f_c} - 0.4143 = 0 \quad (5-4)$$

B - Traction-Compression:

Les deux comportements sont découplés.

- Pour la traction uniaxiale:

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} f_t \quad \text{et} \quad \sigma_{oct} = \frac{f_t}{3}$$

d'où

$$\frac{\sqrt{2}}{3} f_t = b \frac{f_t}{3} + a$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{2}}{3} m f_c = \frac{b}{3} m f_c + a \quad (5-5)$$

- Pour la compression uniaxiale:

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} f_c \quad \text{et} \quad \sigma_{oct} = -\frac{f_c}{3}$$

d'où

$$\frac{\sqrt{2}}{3} f_c = -\frac{b}{3} f_c + a \quad (5-6)$$

En résolvant les équations (5-5) et (5-6), on obtient le critère de rupture dans le cas de traction-compression.

$$\frac{\tau_{oct}}{f_c} + \sqrt{2} \frac{1-m}{1+m} \frac{\sigma_{oct}}{f_c} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m}{1+m} = 0 \quad (5-7)$$

C - Traction-traction:

Puisque il n'y a pas d'augmentation de la résistance à la traction ultime à cause de la traction biaxiale, la condition du cercle simple est suffisante pour décrire le critère de rupture dans le cas de traction-traction.

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{f_t}\right)^2 - 1 = 0 \quad (5-8)$$

Où σ_1 et σ_2 sont des contraintes principales.

5.5 MODELES UTILISES

Avant la description du modèle constitutif particulier utilisé dans cette étude, il est important de noter qu'il est supposé que la contrainte de cisaillement transversal n'affecte pas le comportement non linéaire, sauf dans le cas où le béton est écrasé, c'est à dire que la rigidité du béton est nulle dans toutes les directions.

5.5.1 ANALYSE ELASTIQUE

Dans le modèle multicouches, chaque couche est supposée être dans un état de contraintes planes. Une couche est aussi supposée être constituée d'un même matériau, ses propriétés sont fixées aux niveaux des points d'intégration de Gauss. En contraintes planes, les relations contraintes-déformations d'une couche en béton élastique et isotrope sont données, par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_c}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5-9)$$

E_c est le module d'élasticité du béton et μ son coefficient de Poisson.

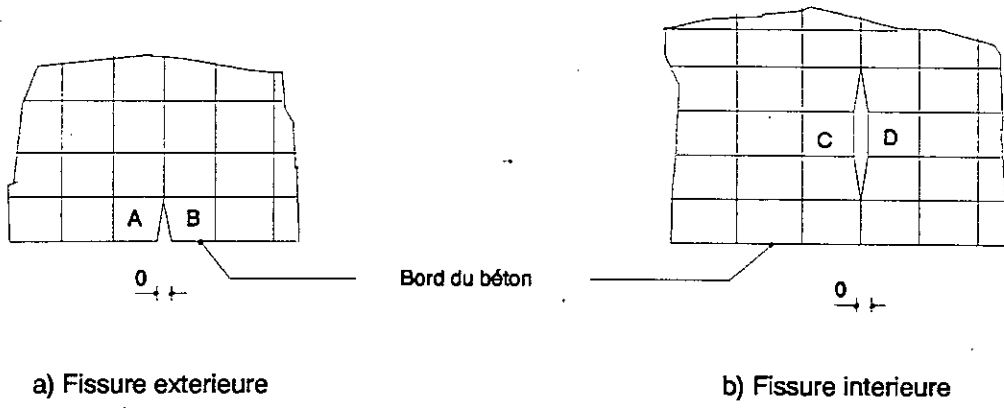


Fig (5.14): Développement des fissures discrètes

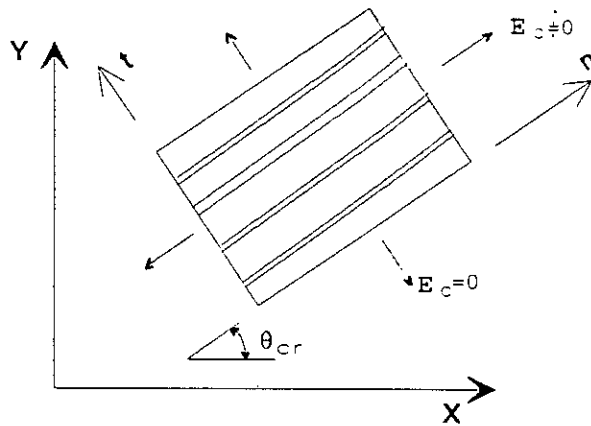


Fig (5.15): Présentation des fissures continues

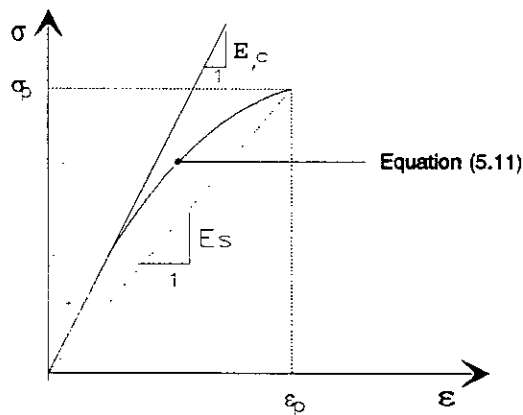


Fig (5.16): Courbe contraintes- déformations uniaxiale équivalente

5.5.2 ANALYSE NON LINEAIRE - RELATION CONTRAINTES-DEFORMATIONS

L'analyse élastique du matériau composite est utilisée pour évaluer les contraintes et les déformations pour chaque couche en chaque point de Gauss.

Les contraintes et les déformations principales sont calculées afin de contrôler le critère de rupture selon l'état des contraintes: Compression-compression, traction-compression ou traction-traction, figure(5-7) [12].

5.5.2.1 RUPTURE PAR COMPRESSION BIAXIALE

Il a été déjà mentionné dans la section précédente qu'un comportement élastique linéaire initial pour le béton sous compression est valable uniquement pour des charges inférieures ou égales à 30% de sa capacité ultime (f_c). Au-delà, un comportement non linéaire est observé, figure(5-16).

Prenons la relation contraintes-déformations du béton sous forces de compression, il y a plusieurs manières possibles de représenter le changement de la rigidité avec l'augmentation de la déformation. Le modèle proposé par Liu, Nilson et State [1] est utilisé dans cette étude.

Le concept de base de ce modèle est de traiter le comportement de la relation contraintes-déformations du béton comme un cas uniaxial équivalent. La contrainte dans la direction principale est évaluée seulement par l'incrément de la déformation principale dans la même direction. La rigidité tangente qui est en fonction du rapport des contraintes principales, tient compte de tous les effets biaxiaux.

La relation contraintes-déformations est de la forme:

$$\sigma = \frac{A + BE\epsilon}{(1 - \mu\Omega)(1 + C\epsilon + D\epsilon^2)} \quad (5-10)$$

Où A, B, C et D sont des constantes pouvant être retrouvées par les conditions suivantes en utilisant la courbe contraintes-déformations en compression.

- Pour $\epsilon=0$, $\sigma=0$

- Pour $\epsilon=0$, $\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{E}{1-\mu\Omega}$
- Pour $\epsilon=\epsilon_p$, $\sigma=\sigma_p$
- Pour $\epsilon=\epsilon_p$, $d\sigma/d\epsilon=0$

Où Ω est le rapport entre la contrainte principale dans la direction orthogonale et la contrainte principale dans la direction considérée ($\Omega = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$). σ_p et ϵ_p sont la contrainte de pic en compression biaxiale et la déformation correspondante respectivement.

En utilisant les valeurs de ces résultats dans l'équation (5-10) et en introduisant la rigidité sécante ($E_s = \frac{\sigma_p}{\epsilon_p}$), on obtient.

$$\sigma = \frac{E_c \epsilon}{(1-\mu\Omega) \left[1 + \left(\frac{1}{1-\mu\Omega} \frac{E_c}{E_s} - 2 \right) \frac{\epsilon}{\epsilon_p} + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_p} \right)^2 \right]} \quad (5-11)$$

Où σ et ϵ sont respectivement la contrainte et la déformation sous chargement biaxial.

E_c est le module d'élasticité du béton sous chargement uniaxial.

μ est coefficient de Poisson du béton.

ϵ_p est la déformation en contraintes maximales du béton sous compression biaxiale (0.0025).

$\Omega = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ est le rapport entre la contrainte principale dans la direction orthogonale et la contrainte principale dans la direction considérée.

$E_s = \frac{\sigma_p}{\epsilon_p}$ est le module sécant.

σ_p est la résistance ultime du béton sous compression biaxiale (prise égale à f_{cu}).

Cette équation décrit le comportement contraintes-déformations du béton sous compression biaxiale jusqu'au pic de déformation égal à 0.0025. Au-delà de ce pic, l'équation cesse d'être valide à cause de l'adoucissement du béton. Puisque l'effet majeur sur la réponse non linéaire du béton armé en flexion est dû à la fissuration, le comportement du béton en

compression au-delà du pic peut être ignoré. Par conséquent, dans cette étude l'adoucissement du béton est négligé en supposant que le comportement du béton est parfaitement plastique.

Dans la procédure numérique adoptée dans cette étude, l'équation (5-11) est linéarisée incrémentalement durant le chargement monotone. Cela est usuellement réalisé en utilisant des surfaces de chargement intermédiaires d'après Bell et Elms [11], Chen et Al [19]. De telles surfaces sont montrées sur la figure(5-7). La première surface de chargement correspond à la discontinuité initiale dans le diagramme contraintes-déformations. Les surfaces de chargement postérieures sont supposées avoir la forme de la surface de rupture. Par contre, les surfaces intermédiaires sont représentées par l'équation (5-9), mais avec une résistance intermédiaire (f_{cc}) au lieu de (f_c). Une formule empirique pour le calcul de (f_{cc}) a été suggérée par Johnarry [1] et elle a été utilisée par Benradouane [12].

$$f_{cc} = f_{co} - f_t + f_t \left(\frac{E_c}{E_i} \right)$$

Où $f_{co} = 0.5f_c$

E_c est le module d'élasticité initiale.

f_t est la résistance à la traction du béton.

E_i est le module d'élasticité instantané.

Une fois que la condition de rupture est satisfaite par l'équation (5-11), le module instantané (E_i) est déterminé comme suit.

Si $\epsilon_i \leq 0.0025$, $E_i = d\sigma_i / d\epsilon_i$ par l'équation (5-11)

Si $0.0025 \leq \epsilon_i \leq 0.0035$, $E_i = f_{cu} / \epsilon_i$

Si $\epsilon_i \geq 0.0035$, $E_i = 0$

5.5.2.2 TRACTION DU BETON - MODELE DE FISSURATION

Le modèle de fissuration est basé sur le modèle de fissures continues. Plusieurs théories ont été utilisées pour décrire la formation de la fissure et son orientation [12].

Deux modèles sont possibles pour représenter les fissures

suivant la contrainte principale à la traction.

A - Analyse de la fissure de direction fixée:

Dans cette analyse, la direction de la première fissure est fixée suivant la direction de la contrainte principale à la traction au moment où la contrainte principale à la traction est égale à la résistance de traction du béton. La matrice d'élasticité est modifiée en annulant la rigidité perpendiculaire à la fissure. Ainsi on suppose que les contraintes de traction sont maintenues nulles perpendiculairement aux plans fixes de la fissure. Cependant, puisque la contrainte de cisaillement peut agir dans les surfaces fissurées, cela signifie qu'une contrainte de traction peut se développer selon des directions autres que la direction de la fissure.

B - Analyse de la fissure de direction non fixée:

Dans cette analyse, le béton est traité comme un matériau sans traction, avec la contrainte principale à la traction prise égale à zéro dans toutes les étapes de l'analyse. La matrice d'élasticité n'est jamais transformée, ainsi cette approche définit à chaque étape de l'analyse, un nouvel angle de fissuration sans aucune référence au précédent.

La fissuration du béton aura lieu lorsque la contrainte en un point satisfait le critère de rupture biaxial soit en zone traction-traction, soit en zone traction-compression.

Dans la zone traction-traction, le béton est supposé fissuré si le critère de rupture de l'équation (5-8) est violé. La direction de la fissure est supposée normale à la direction de la contrainte principale. Deux fissures orthogonales peuvent se former si les deux contraintes principales dépassent la résistance à la traction du béton. Par contre, sous l'état traction-compression, la fissuration du béton aura lieu lorsque le critère de rupture de l'équation (5-7) avec ($f_c = f_{cu}$) est violé. La direction de la fissure dans ce cas est supposée normale à la contrainte principale de traction. En cas d'augmentation du chargement, le béton, qui était déjà fissuré dans une direction peut se fissurer aussi dans une autre direction, selon un angle

de moins de 30° par rapport à la direction de la première fissure (si les fissures non orthogonales sont considérées) [1]. Par contre, si les fissures sont supposées orthogonales, une nouvelle fissure peut être formée mais avec la restriction que la deuxième fissure est normale à la direction de la fissure initiale [12]. Autrement, si le béton est soumis à des contraintes élevées de compression parallèles à la direction de la fissure, la rupture et l'écrasement subséquent du béton peuvent avoir lieu. La direction de la fissure peut être calculée par la formule suivante:

$$\operatorname{tg}2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5-13)$$

Où $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$

La direction de la fissure actuelle (θ_{cr}) est déterminée par rapport à l'axe (X) comme suit:

* Calculer les contraintes principales avec l'expression standard suivante:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5-14)$$

** Calculer la contrainte normale associée à l'angle θ avec l'expression standard suivante:

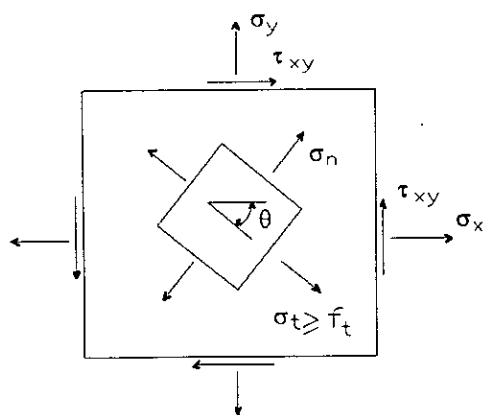
$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad (5-15)$$

*** Comparer les valeurs des contraintes principales (σ_1, σ_2) avec la contrainte normale (σ_n).

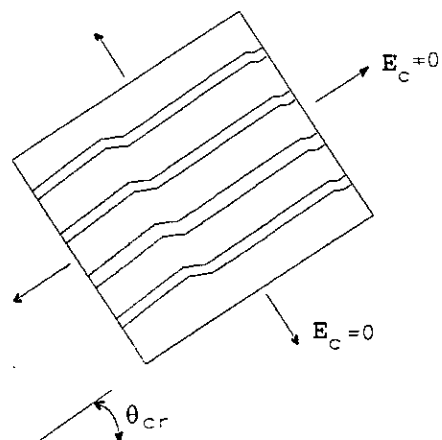
- Si $\sigma_n = \sigma_1$ l'angle de la fissure est: $\theta_{cr} = \theta$
- Si $\sigma_n = \sigma_2$ l'angle de la fissure est: $\theta_{cr} = \theta + 90^\circ$

B.1- Fissuration simple du béton:

Le béton fissuré est traité comme un matériau orthotrope avec des axes d'orthotropie parallèles et normaux à la direction de la fissure. L'effet de Poisson est négligeable à cause du



a) Formation d'une fissure



b) Représentation d'une fissure

Fig (5.17): Simple fissure continue

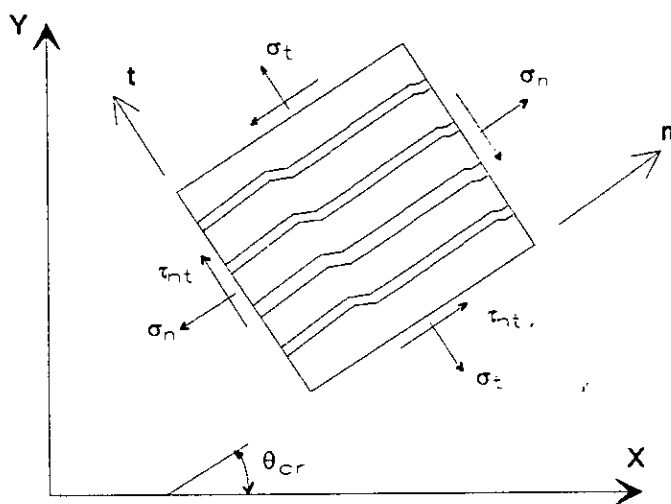
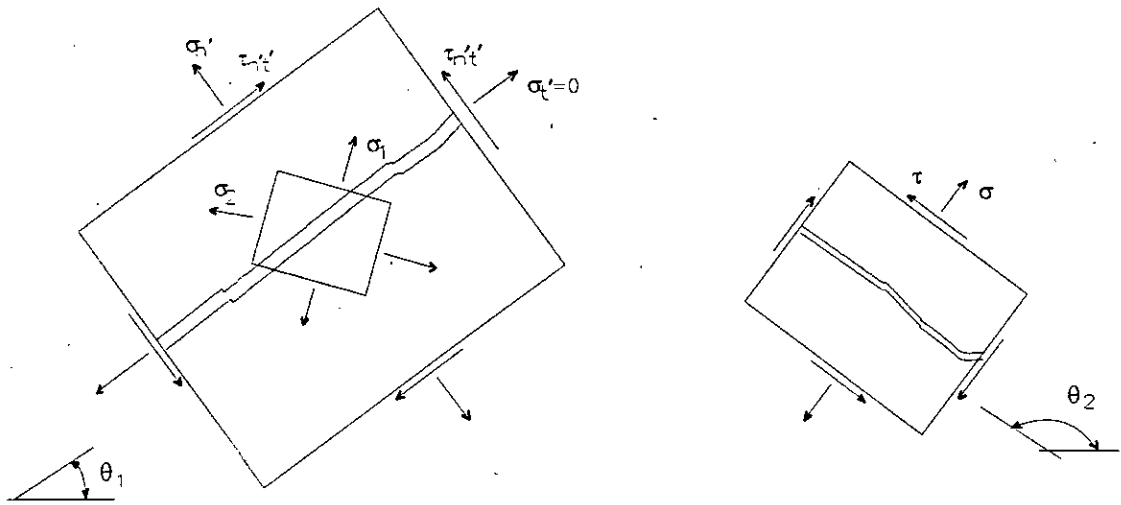


Fig (5.18): Coordonnées locales pour un béton fissuré



Formation de la fissure secondaire

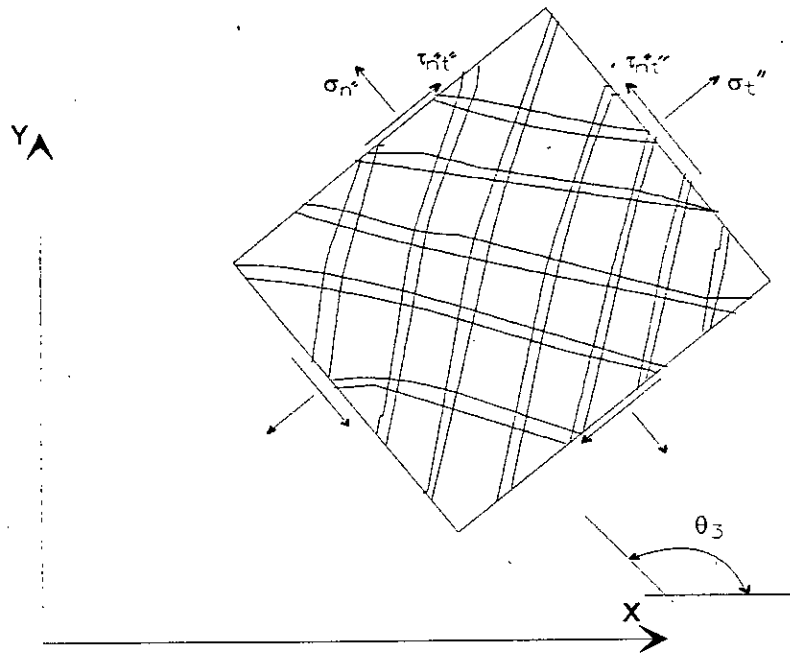


Fig (5.19): Contraintes dans le béton doublement fissuré

manque d'interaction entre les deux directions orthogonales après fissuration et le module d'élasticité du béton normal à la direction de la fissure est réduit à zéro. Ainsi, les contraintes totales après fissuration sont données par rapport au système de coordonnées locales (n,t), figure(5-18).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (5-15)$$

Où E_c est le module d'élasticité du béton.

β est le facteur de conservation de cisaillement du béton ($0 < \beta < 1$), le choix de la valeur souhaitable pour ce facteur sera discutée antérieurement.

G est le module de cisaillement du béton.

B.2- Fissuration double du béton:

Dans le modèle utilisé dans cette étude, le béton peut se fissurer selon deux directions orthogonales. Les possibilités suivantes sont admises:

Dans le béton non fissuré, les fissures continues dans deux directions orthogonales se développent là où les deux contraintes principales sont de traction et excèdent la résistance à la traction du béton, figure(5-19). Dans ce cas la relation contraintes-déformations est donnée par:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_t \\ \tau_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_t \\ \gamma_{nt} \end{Bmatrix} \quad (5-16)$$

Afin de transformer les contraintes dans le béton fissuré simplement ou doublement, et qui sont définies par rapport aux axes d'orthotropie, dans le système de coordonnées globales (X,Y), la procédure standard pour la transformation de coordonnées peut être utilisée comme suit.

$$D^* = T^t D_c T \quad (5-17)$$

Où

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

Où $c = \cos\theta_{cr}$, $s = \sin\theta_{cr}$ et θ_{cr} est l'angle de la fissure par rapport à l'axe (X), et (D_c) est la propriété matérielle dans les axes locaux d'orthotropie et dépend du type de fissuration du béton, qui est donnée par les équations (5-15) et (5-16). Les contraintes finales dans le système de coordonnées globales (X,Y) peuvent être obtenues avec l'équation suivante:

$$\{\sigma\} = [D^*] \{\epsilon\} \quad (5-19)$$

C - Raidissement à la traction

La forme du raidissement à la traction qui est présentée ci-dessous est la même que celle qui est donnée par la référence [1], figure(5-20).

Zone 1:

$$\epsilon_{cr} < \epsilon \leq C_1 \epsilon_{cr} \quad , \quad \sigma = \left(2 - \frac{\epsilon}{\epsilon_{cr}}\right) f_t$$

Zone 2:

$$C_1 \epsilon_{cr} < \epsilon \leq C_2 \epsilon_{cr} \quad , \quad \sigma = \frac{2 - C_1}{C_2 - C_1} \left(C_2 - \frac{\epsilon}{\epsilon_{cr}}\right) f_t$$

Zone 3:

$$\epsilon > C_2 \epsilon_{cr} \quad , \quad \sigma = 0$$

Où f_t est la résistance à la traction du béton et (ϵ_{cr}) est la déformation de fissuration (0.0001).

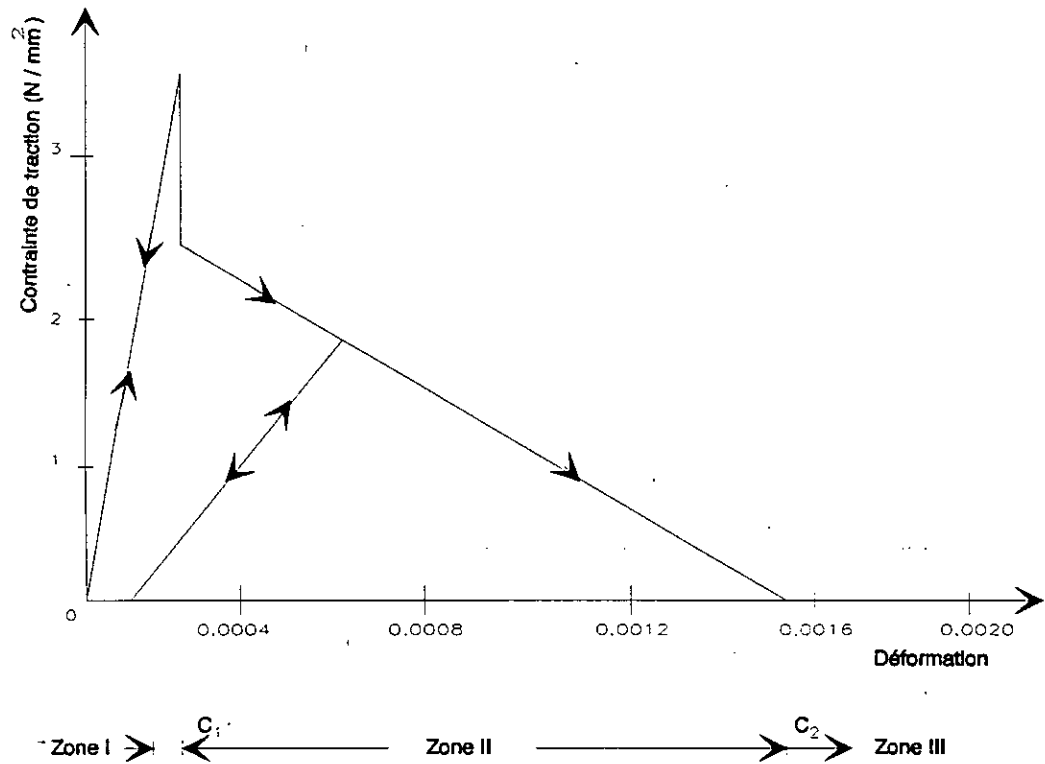


Fig (5.20): Courbe contraintes- déformations du béton à la traction

Les coefficients $C_1=1,3$ et $C_2=15$ sont déterminés empiriquement pour assurer une bonne prédiction pour les dalles et les poutres [1].

D - Conservation de cisaillement

Les faces du béton fissuré sont rugueuses, donc elles sont capables de transmettre les forces de cisaillement à travers les fissures par frottement. Pour prendre en compte la rigidité de cisaillement du béton, le module de cisaillement réduit égal à (βG) est pris en compte dans les relations contraintes-déformations données par les équations (5-15) et (5-16). Hand et Al [43] ont proposé l'approche du module de cisaillement réduit pour éviter les difficultés numériques. Ils ont utilisé une valeur constante de (β) durant toute l'analyse. Par la suite, Cedolin et Poli [1] ont utilisé une valeur de β qui décroît linéairement avec une déformation fictive normale à la fissure (qui représente la largeur de la fissure). Al- Mahaidi (1979) avait aussi suggéré une variation hyperbolique de (G) avec la déformation fictive normale à la fissure. Dans cette étude l'équation (5-20) due à Al- Mahaidi est utilisée par Hafez [1] a été retenue.

$$\beta = \frac{0.4}{\frac{\epsilon_f}{\epsilon_{cr}}} \quad (5-20)$$

Où ϵ_{cr} est la déformation du béton fissuré ($\epsilon_{cr}=f_t/E_c$) et (ϵ_f) est la déformation fictive normale à la fissure et est donnée par l'équation suivante:

$$\epsilon_f = \epsilon_x \sin^2 \theta_{cr} + \epsilon_y \cos^2 \theta_{cr} - \epsilon_{xy} \sin \theta_{cr} \cos \theta_{cr} \quad (5-21)$$

Où ϵ_x , ϵ_y , et ϵ_{xy} sont les déformations planes et (θ_{cr}) est l'angle de fissuration.

5.5.3 MODELE DU COMPORTEMENT DE L'ACIER

Dans le développement d'un modèle en éléments finis du béton armé, deux représentations possibles des armatures sont

utilisées, figure(5-21).

1- Représentation discrète:

Les forces axiales ou les barres peuvent être utilisées avec deux degrés de liberté aux noeuds. Donc les éléments utilisés dans ce cas sont unidimensionnels [1].

2- Représentation continue:

L'acier est supposé être distribué sur l'élément de béton avec une orientation d'angle donné (α). Une adhérence parfaite est supposée entre le béton et l'acier, et l'acier résiste aux contraintes dans la direction originale de la barre uniquement. Pour l'analyse multicouches en éléments finis, le modèle continu est usuellement utilisé, figure(5-22). La couche d'acier est supposée être élasto-plastique dans les deux cas traction et compression avec ou sans écrouissage, figure(5-23). Pour des raisons de simplification dans l'analyse, il est usuel d'idéaliser la courbe contraintes-déformations uniaxiale de l'acier (élasto-plastique avec écrouissage linéaire), figure(5-22).

Puisque les barres d'acier peuvent être orientées selon n'importe quel angle par rapport aux axes globaux (X,Y), le comportement multicouches est d'abord décrit dans la direction des axes locaux (X',Y'), puis transformé aux axes globaux (X,Y). La transformation au système de coordonnées globales se fait par usage de la matrice de transformation qui dépend de l'angle (α) d'orientation des barres. En utilisant la procédure standard de transformation, la matrice d'élasticité de l'acier s'écrit:

$$D_s = E_s \begin{bmatrix} C^4 & C^2S^2 & C^3S \\ S^2C^2 & S^4 & CS^3 \\ SC^3 & CS^3 & C^2S^2 \end{bmatrix} \quad (5-22)$$

Où $C = \cos\alpha$, $S = \sin\alpha$ et (α) est l'angle d'inclinaison des barres par rapport à l'axe (X), (E_s) est le module d'élasticité de l'acier.

La relation incrémentale élastique contraintes-déformations est donnée par.

$$\Delta \sigma = E_s \Delta \epsilon \quad (5-23)$$

La où la contrainte uniaxiale de l'acier atteint sa valeur d'écoulement (f_y), la relation contraintes-déformations élasto-plastique prend la forme suivante:

$$\Delta \sigma = E_s \left(1 - \frac{E_s}{E_s + H}\right) \Delta \epsilon \quad (5-24)$$

Où H est le paramètre d'écrouissage de l'acier (considéré constant dans cette étude).

5-6 CONCLUSION

Le modèle d'analyse non linéaire en éléments finis adopté dans la présente étude, qui est basé sur l'approche multicouches, a été testé en utilisant des données expérimentales et a reporté des résultats satisfaisant en comparaison aux résultats expérimentaux [1].

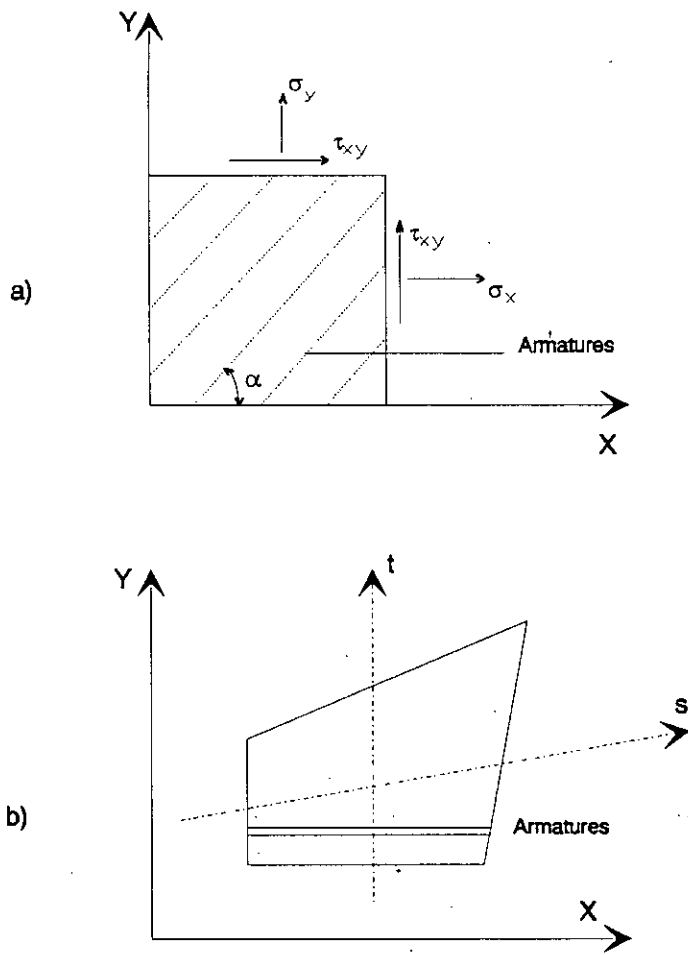


Fig (5.21): Représentation alternative de l'acier; a) Continue , b) Discrete

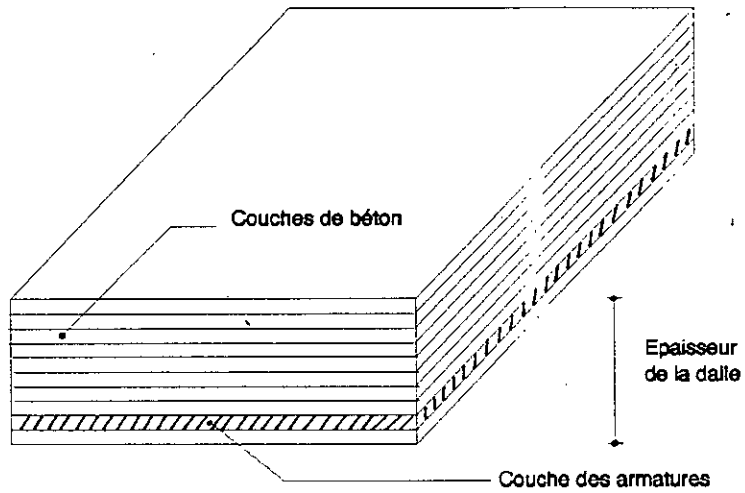
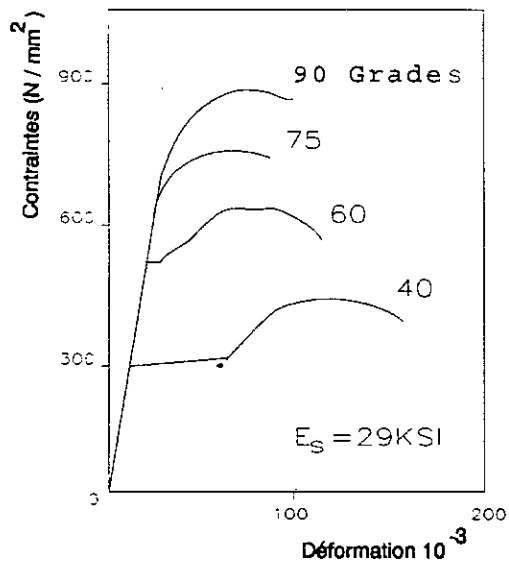
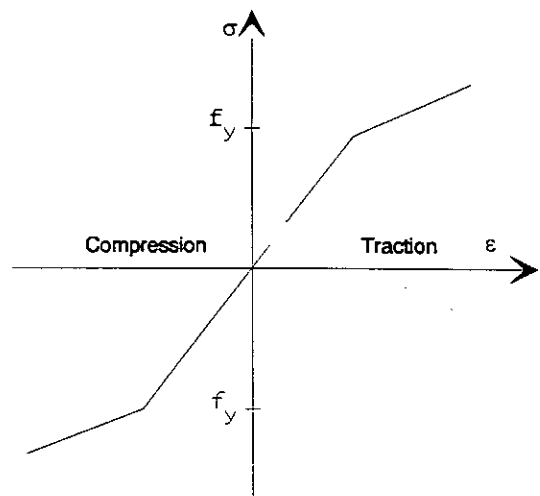


Fig (5.22): Élément de dalle flexionnelle multicouches



a) Courbes typiques de déformations pour l'acier



b) Courbe contraintes- déformations idéalisée pour l'acier

Fig (5.23): Courbes contraintes- déformations pour l'acier

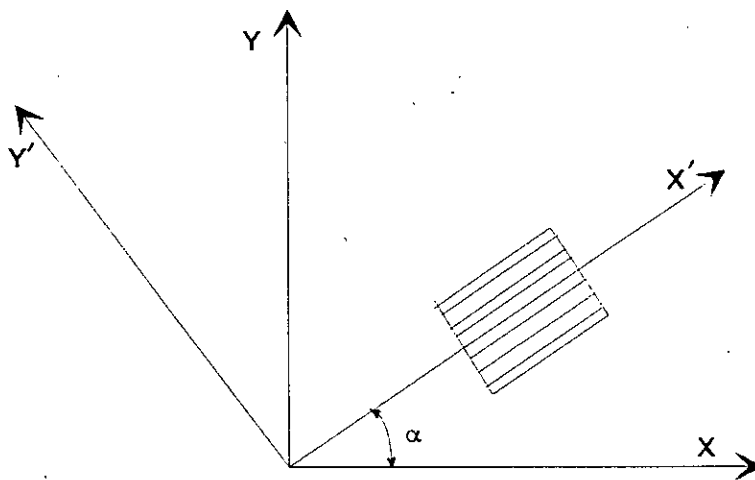


Fig (5.24): L'acier dans la direction des coordonnées locales

PRESENTATION ET DISCUSSION DES RESULTATS

6.1. INTRODUCTION

Dans ce présent chapitre une analyse non linéaire détaillée est utilisée pour simuler le comportement des dalles sous un chargement latéral quelconque. Ceci permet une évaluation réelle des contraintes et déformations jusqu'à la rupture. Le modèle multicouches pour l'analyse non linéaire des dalles en béton armé, développé dans le chapitre 3, est utilisé dans cette étude.

Un programme par éléments finis utilisant l'approche multicouches a été développé pour réaliser une série d'expériences numériques sur plusieurs modèles de dalles en béton armé chargées jusqu'à la rupture.

6.2. PROGRAMME

Le programme développé dans cette étude est inspiré du programme Mindlin [46]. La même structuration et les mêmes sous-programmes ont été utilisées avec une modification au niveau du modèle rhéologique. Le programme de Hinton et Owen [46] utilise les critères de rupture de Tresca et de Von Mises qui sont applicables aux métaux. Par contre, le présent programme multicouches utilise le critère de rupture de Kupfer [60] qui est développé essentiellement pour le béton. Ce critère est déjà présenté dans le chapitre précédent. La structure globale du programme d'analyse non linéaire multicouches des dalles est présentée ci-après (figure(6.1)).

En plus des sous-routines utilisées dans l'analyse linéaire, ce programme contient des sous-routines développées essentiellement pour l'analyse non linéaire telles que: Une sous-routine pour les forces résiduelles et le critère de rupture. Les sous-programmes décrits en détail dans la référence [46] sont résumés ci-après.

6.2.1. SUBROUTINE INPUT

L'entrée des données se fera au moyen de la subroutine INPUT, les données à introduire sont de six sortes:

A- Les données relatives à la géométrie de la structure

Pour la subdivision de la structure en éléments quadratiques définissant sa topologie structurelle, trois types d'informations sont requises:

- Nombre de couches nécessaires pour chaque élément et les données définissant le type du matériau.

- Nombre de noeuds de chaque élément (génération automatique en donnant les pas selon les directions X et Y).

- La position de chaque point nodal est spécifié par ses coordonnées cartésiennes.

B- Les données définissant les conditions aux appuis

Le degré de liberté ($u, v, w, \theta_x, \theta_y$) peut être fixé ou libre en n'importe quel point nodal. Le code 1 est utilisé pour indiquer qu'un degré de liberté particulier en un point nodal donné est fixé et le code 0 est utilisé pour indiquer qu'il est libre.

C- Les données relatives aux propriétés matérielles (béton et acier)

Les propriétés physiques des matériaux (béton et acier) sont spécifiées par un code d'identification pour chacun d'eux. Chaque code est associé à l'épaisseur des couches et la valeur de la charge distribuée.

D- Les données relatives au chargement

Une combinaison de la charge nodale et la charge distribuée peut être prise dans un problème donné. Le type du chargement peut être spécifié par:

- La charge nodale.
- La charge uniformément distribuée.
- Le déplacement nodal imposé fournit indirectement une

charge et elle est spécifiée par une condition d'appui.

E- Contrôle des résultats

A cause d'une large spécification des résultats, on sélectionne des résultats bien précis pour l'affichage. Le contrôle est utilisé pour l'affichage des résultats nécessaires à une fréquence bien précise. Les déplacements aux noeuds et les contraintes et les déformations aux points de Gauss sont requis et spécifiés, ainsi que les éléments auxquels ils appartiennent. Les contraintes et les déformations dans les couches d'un élément donné sont contrôlés pour n'importe quels itération et incrément de charge.

F- Grandeur de l'incrément et la tolérance de convergence

- L'incrément de la charge ainsi que sa grandeur en pourcentage par rapport à la charge totale appliquée doivent être spécifiés.

- La valeur de la tolérance de convergence doit être spécifiée.

- Le nombre maximal d'itérations doit être spécifié.

- L'affichage des réactions et les déplacements aux points nodaux et les contraintes et les déformations dans les couches des éléments pour chaque incrément doivent être contrôlés par un indicateur.

6.2.2. SUBROUTINE ZERO

La fonction de cette subroutine est d'initialiser les vecteurs et les matrices au début du programme.

6.2.3. SUBROUTINE LOADPB

Pour l'application des plaques en flexion, deux types de chargement sont considérés. Le premier type est les composantes de la charge correspondant aux forces généralisées qui peuvent être prescrites aux points nodaux. Le second type est le chargement latéral uniforme. Le chargement doit être converti aux forces nodales équivalentes.

6.2.4. SUBROUTINE INCREM

Le rôle de cette subroutine est d'incrémenter le chargement appliqué. Cette subroutine est appelée à la première itération de chaque incrément de charge. Pour chaque incrément de charge, les données sont posées sous forme de la limite supérieure du nombre d'itérations, la fréquence d'affichage des résultats finaux, la magnitude de la charge et la tolérance de convergence.

6.2.5. SUBROUTINE ALGOR

La fonction de cette subroutine est de contrôler la procédure de la solution. Elle possède un indicateur qui prend soit la valeur 1 dans le cas de la reformulation des éléments de la matrice de rigidité, soit la valeur 2 si la matrice de rigidité ne doit pas être actualisée et par conséquent la matrice de rigidité reste la même que celle de l'itération précédente (Newton-Raphson modifiée).

6.2.6. SUBROUTINE STIFPB

Le rôle de cette subroutine est de formuler la matrice de rigidité pour chaque élément en utilisant l'algorithme multicouches. Cette subroutine est utilisée uniquement lorsque la matrice de rigidité doit être actualisée, cela est contrôlé par un indicateur de la subroutine ALGOR. Pour plus de détails, voir le chapitre 3.

6.2.7. SUBROUTINE FRONT

La fonction de cette subroutine est d'assembler la contribution de chaque élément sous forme de matrice de rigidité globale et du vecteur de charge global. Par la suite la résolution des équations simultanées se fait par élimination directe de Gauss. Le rôle principal de la solution frontale est d'assembler les équations et d'éliminer les variables en même temps. Pour plus de détails, voir le chapitre 4.

6.2.8. SUBROUTINE STREPB

Le rôle de cette subroutine est de calculer à partir des

déplacements les contraintes et les déformations dans les couches pour chaque élément.

6.2.9. SUBROUTINE ACTSTR

La fonction de cette subroutine est de déterminer les relations contraintes-déformations uniaxiales et biaxiales pour les différents matériaux (béton et acier), ainsi que la représentation des fissures et le critère de rupture pour le béton (figure(6.2)). Les modèles rhéologiques des matériaux sont représentés aussi dans cette subroutine et pour plus de détails, voir le chapitre 5.

6.2.10. SUBROUTINE PLOAD

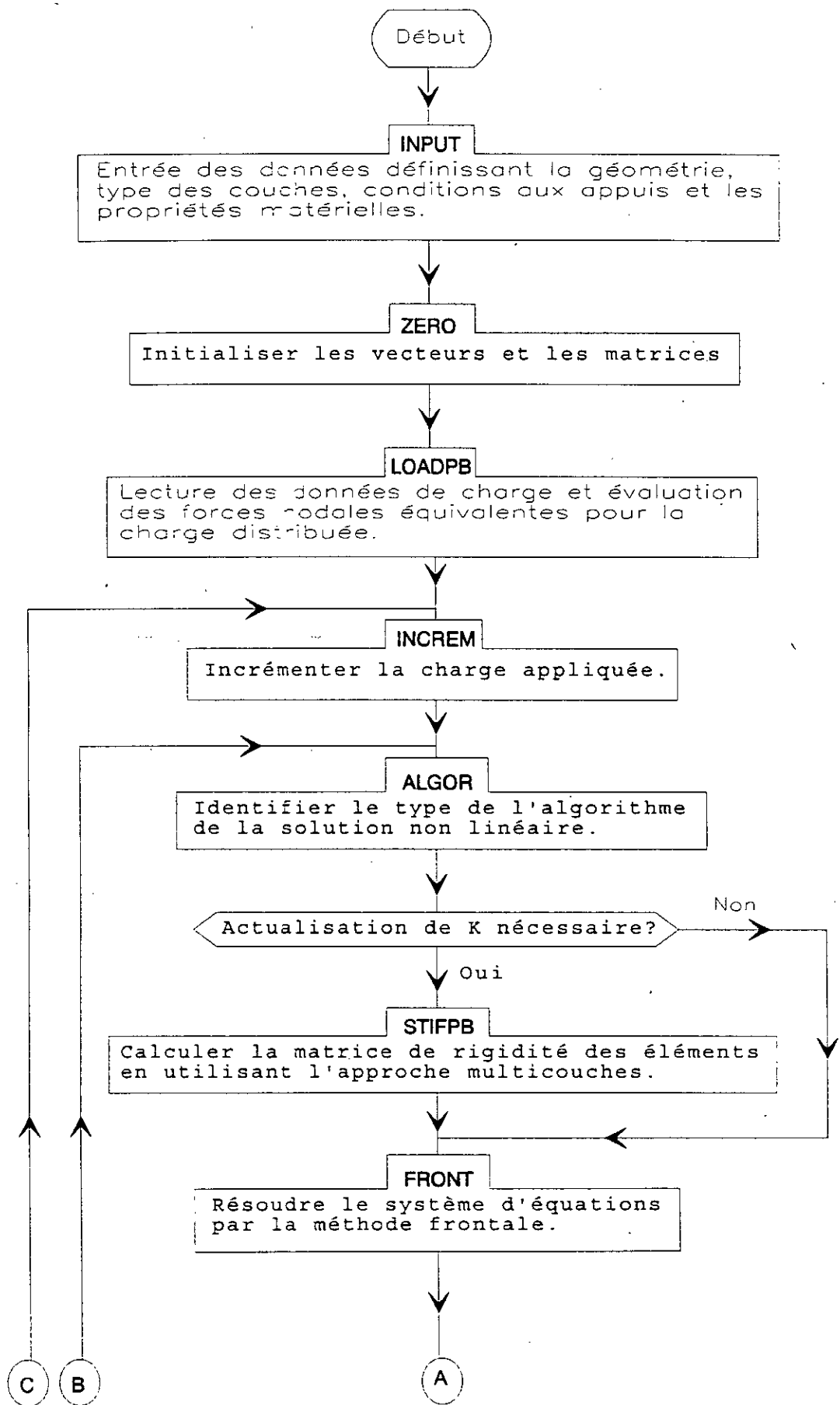
Le rôle de cette subroutine est d'évaluer les forces nodales à partir des contraintes résultantes.

6.2.11. SUBROUTINE RESMPA

Le rôle de cette subroutine est de calculer les forces résiduelles à partir des forces nodales et la charge appliquée. Elle contrôle aussi, la convergence de la solution par usage de la norme des forces résiduelles.

6.2.12. SUBROUTINE OUTMPA

La fonction de cette subroutine est d'afficher les résultats finaux à une fréquence bien déterminée par un paramètre d'affichage des résultats. Ces résultats sont les déplacements et les réactions aux noeuds et les contraintes et les déformations dans les couches aux points de Gauss de chaque élément.



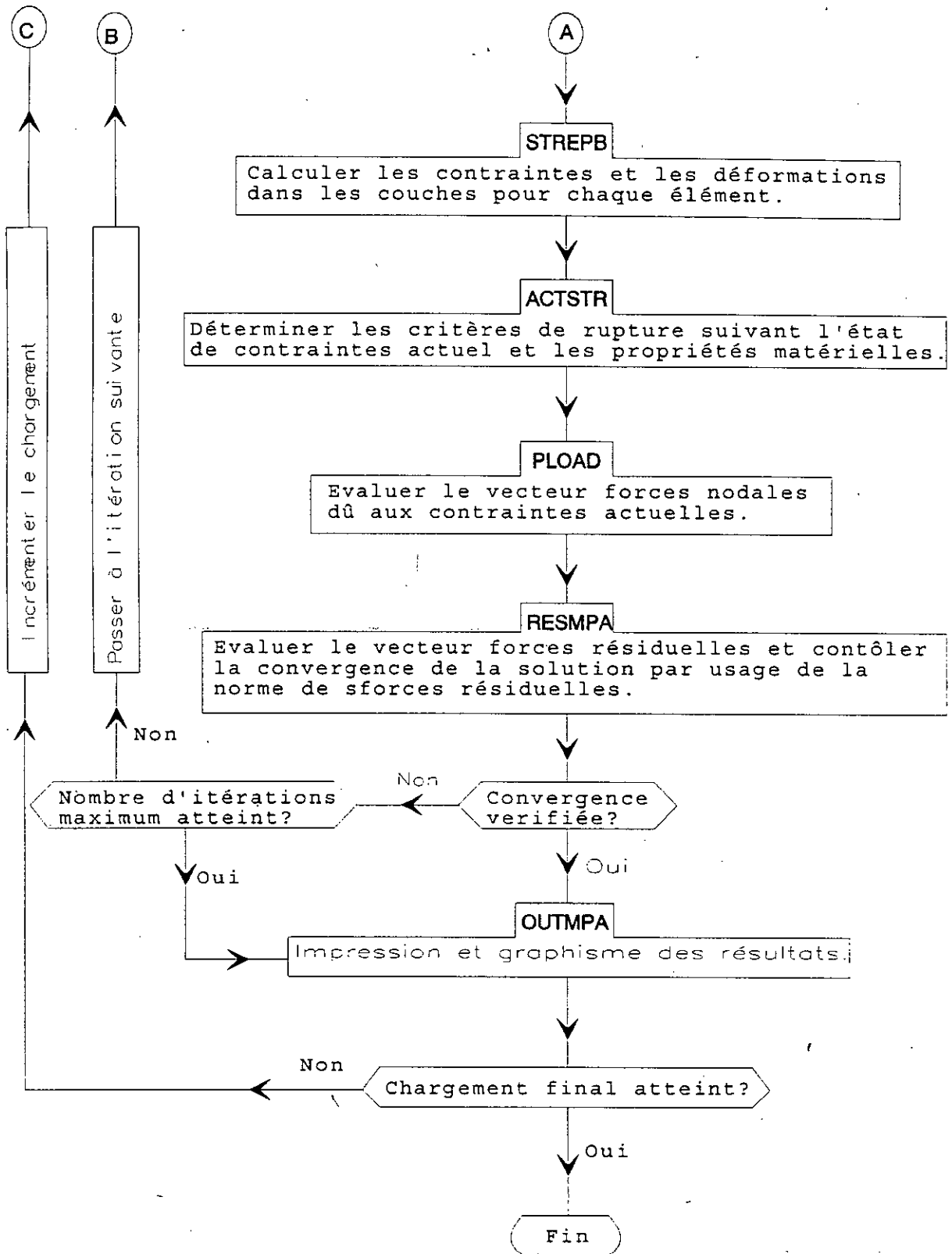


Fig (6.1): Organigramme général du programme d'analyse non linéaire multicouches

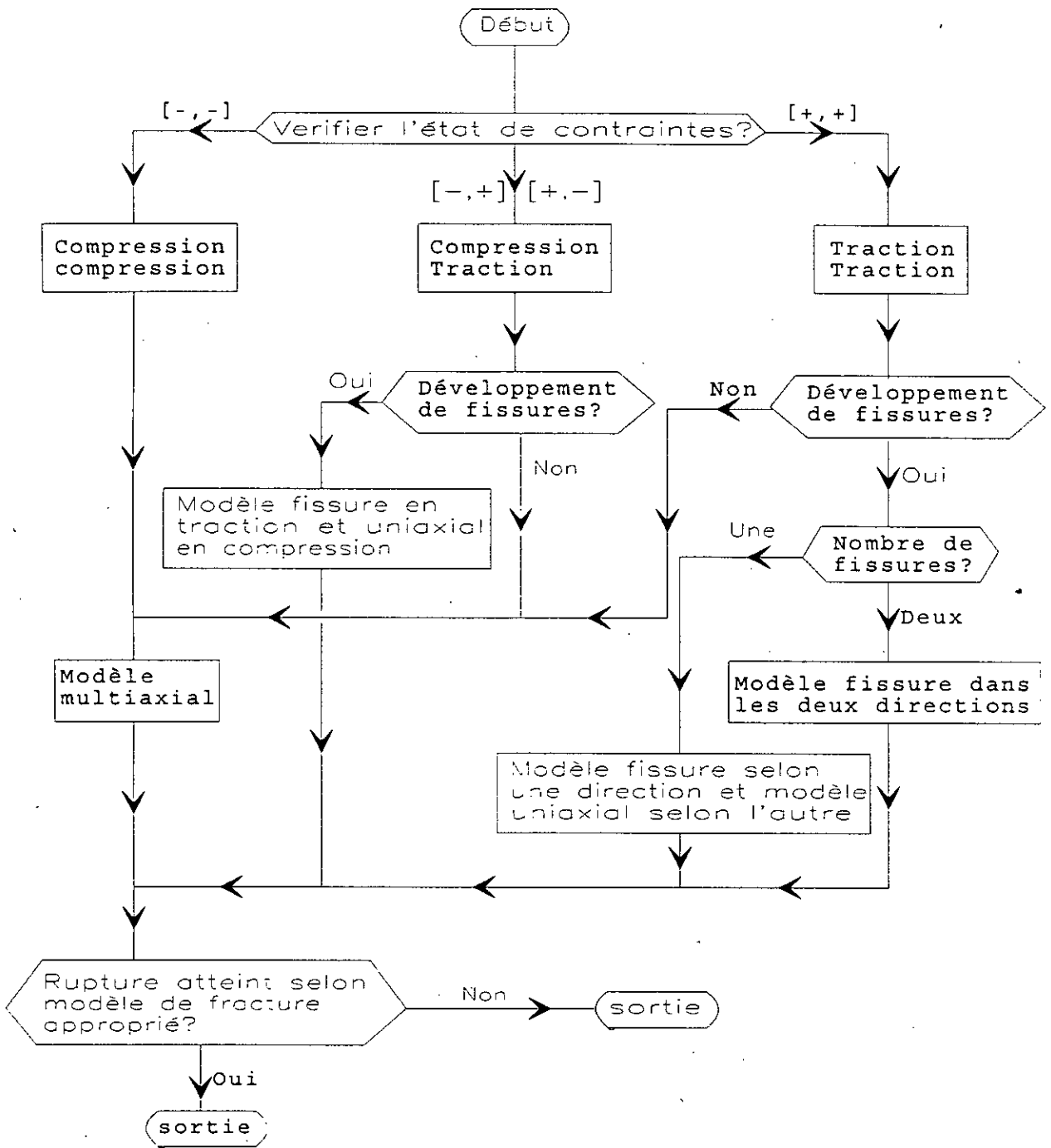


Fig (6.2): Modèle de béton avec fissuration (subroutine ACTSTR)

6.3. COMPARAISON AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Pour valider les résultats numériques qui sont obtenus par le programme d'analyse non linéaire multicouches, une comparaison avec d'autres résultats s'avère nécessaire. La solution analytique pour de tels problèmes est inaccessible, la validation des résultats numériques ne peut se faire qu'avec des résultats expérimentaux. Pour cela deux exemples seront analysés et présentés dans cette étude.

6.3.1. DALLE CARREE SIMPLEMENT APPUYEE SUR SES QUATRE ANGLES

Une dalle carrée simplement appuyée sur ses quatre angles de Jofriet et McNeice [55] est analysée et les résultats numériques et expérimentaux sont confrontés. La dalle est carrée de 91,44 cm de côté et 4,47 cm d'épaisseur avec une maille d'armatures isotrope de 0,85%. La dalle est testée sous une charge concentrée appliquée en son centre. Elle est modélisée en deux couches d'armatures et quatre couches de béton à travers son épaisseur. L'étude est effectuée en considérant une analyse des fissures orthogonales, et le nombre maximum d'itérations est fixé à 50 pour chaque incrément. Quant à la tolérance de convergence, elle est prise égale à 5%.

La figure (6.3.1) montre la discretisation par éléments finis et la numérotation des noeuds ainsi que les propriétés matérielles du béton et l'acier. Les figures (6.3.2) à (6.3.5) montrent les courbes charge-déflexion obtenus numériquement expérimentalement en 4 points de la dalle. Une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et ceux prédits par cette étude peut être observée avec un comportement flexible au début du chargement et un comportement rigide en fin du chargement. Les résultats présentés par Dotreppe [30] au noeud 39 donne une allure presque similaire à celle trouvée dans cette étude. Ceux de Branson [55] et de Beeby [55] montrent un comportement rigide au début du chargement et un comportement flexible en fin de celui-ci. Les résultats de Beeby sont meilleurs que ceux de Branson. Les résultats de cette étude sont également meilleurs que ceux de Branson.

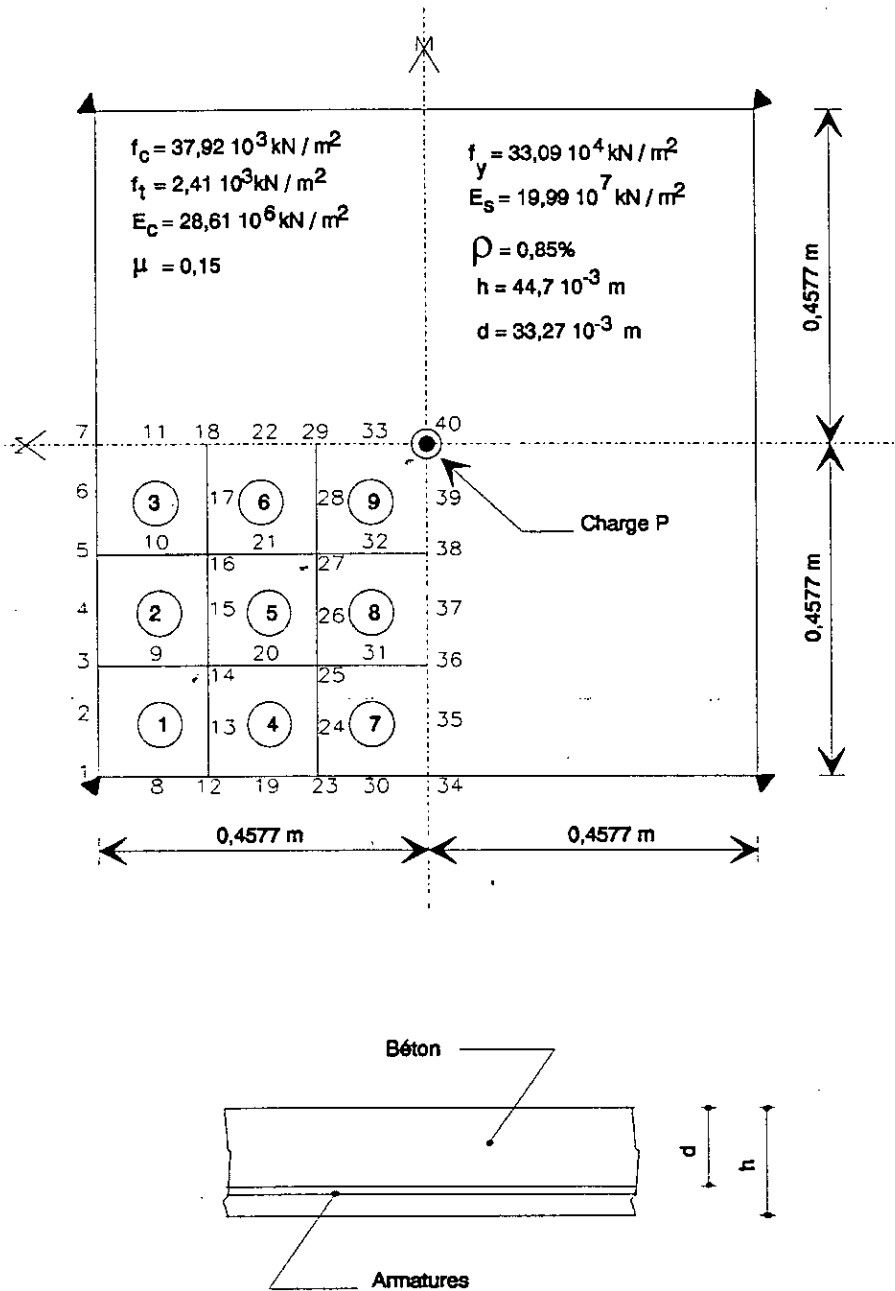


Fig (6.3.1): Propriétés géométriques et matérielles d'une dalle carrée simplement appuyée à ses quatre coins

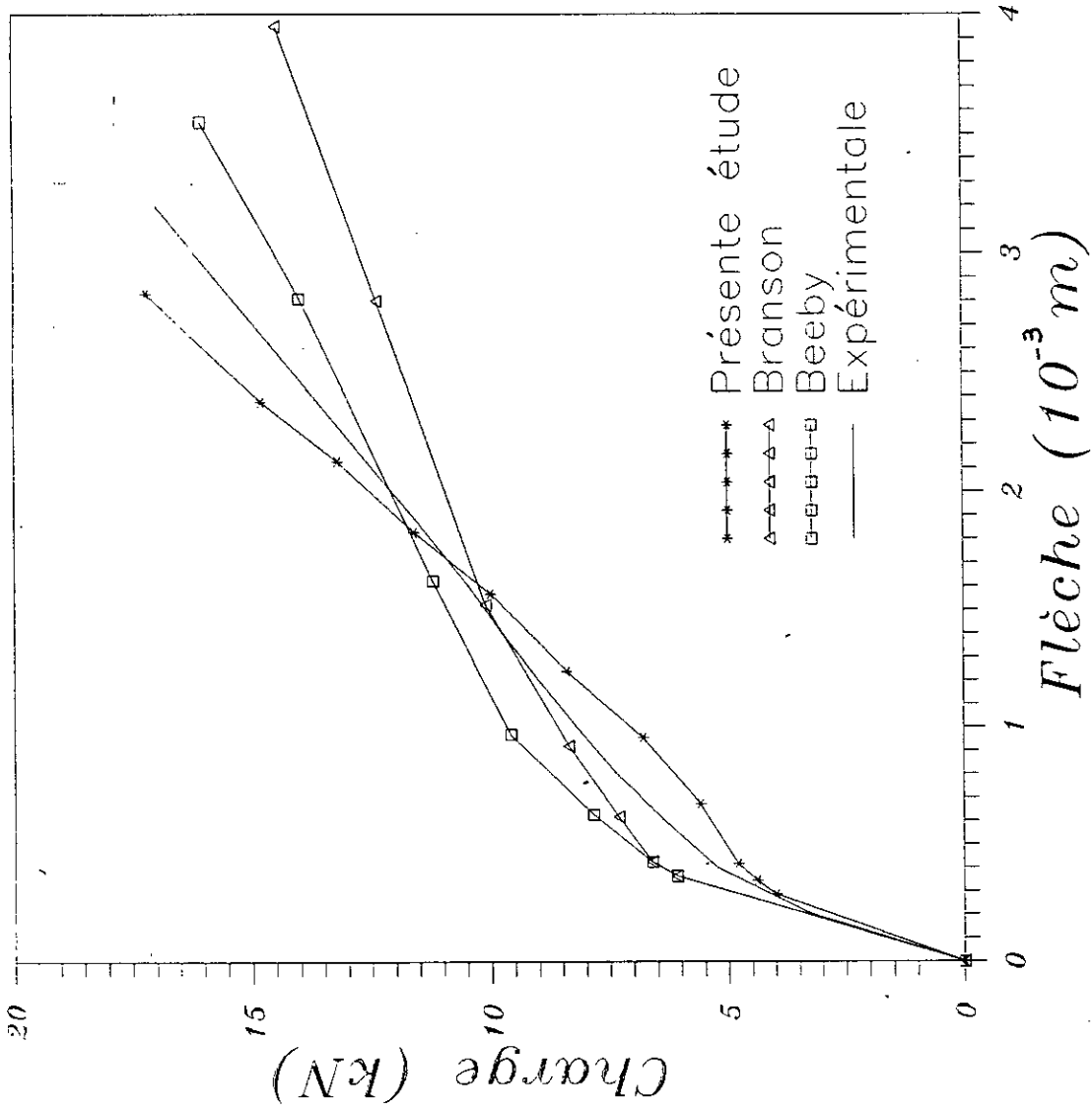


Fig. (6.3.2): Courbes charge-déflexion au noeud 19 d'une dalle carrée simplement appuyée à ses quatre angles

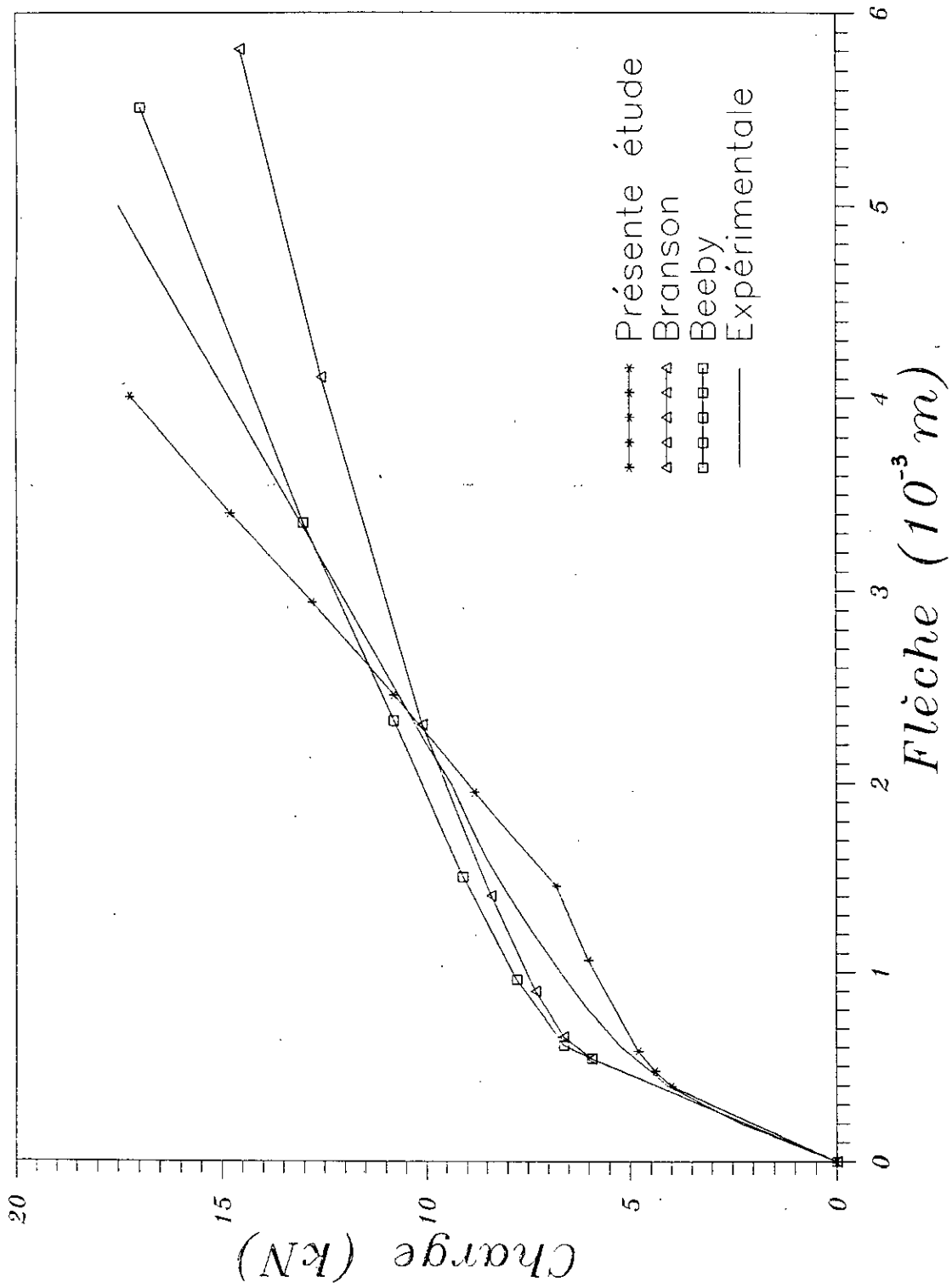


Fig. (6.3.3): Courbes charge-déflexion au noeud 34 d'une dalle carrée simplement appuyée à ses quatre angles

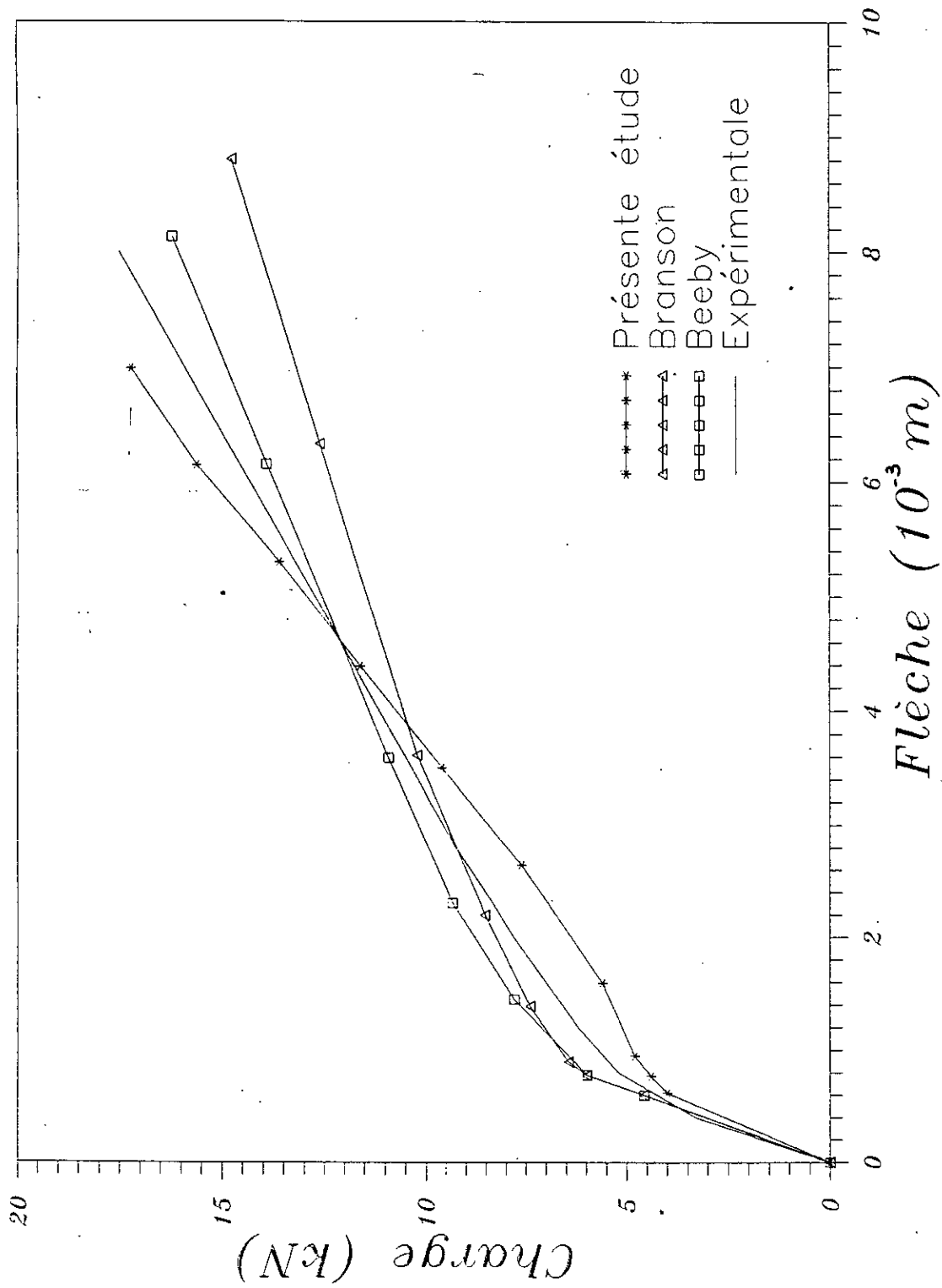


Fig. (6.3.4): Courbes charge-déflexion au noeud 37 d'une dalle carrée simplement appuyée à ses quatre angles

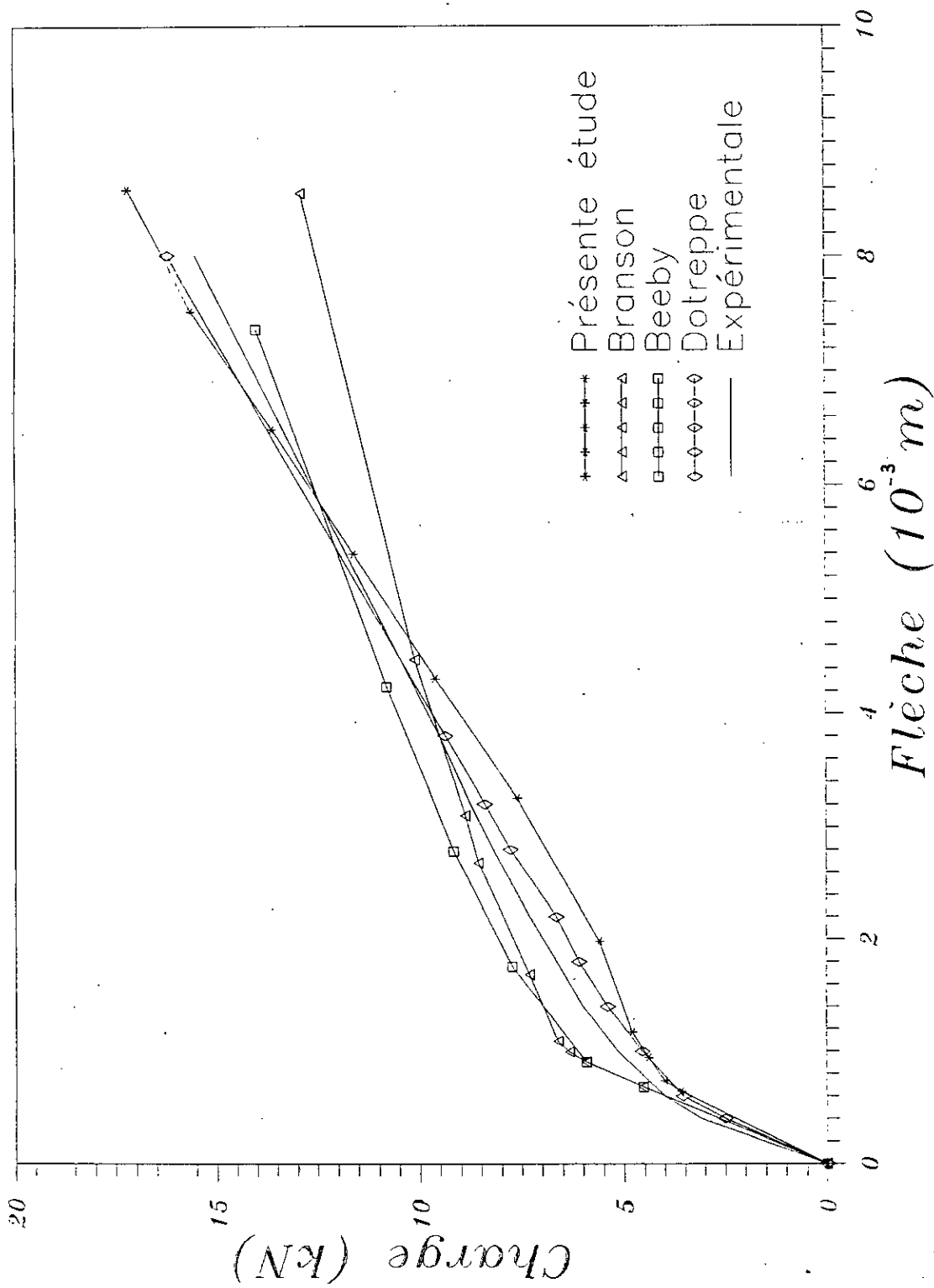


Fig. (6.3.5): Courbes charge-déflexion au noeud 39 d'une dalle carrée simplement appuyée à ses quatre angles

6.3.2. DALLE CARREE SIMPLEMENT APPUYEE

Un autre exemple est aussi présenté ici pour comparer les résultats de cette étude avec les résultats expérimentaux. L'étude expérimentale de ce modèle de dalle a été réalisée par l'Association du Ciment Portland et était analysé par la suite par Dotreppe [30]. La dalle est carrée de 182,88 cm de côté par 13,97 cm d'épaisseur avec une maille d'armatures isotrope de 0,99% (figure(6.3.7)). La charge est appliquée au centre de la dalle sur une colonne carrée de 25,4 cm de côté, comme le montre la figure(6.3.7). La dalle est modélisée en deux couches d'armatures et quatre couches de béton à travers son épaisseur. L'étude est effectuée en considérant une analyse des fissures orthogonales, et le nombre maximum d'itérations est égal à 50 pour chaque incrément. Quant à la tolérance de convergence, elle est prise égale à 5%.

La figure(6.3.8) montre la discretisation par éléments finis et la numérotation des noeuds ainsi que les propriétés matérielles du béton et l'acier. La figure(6.3.9) montre les courbes charge-déflexion des résultats numériques et expérimentaux au centre de la dalle. Les allures globale des courbes sont similaires. Les résultats de cette étude donne un comportement flexible au début du chargement et un comportement rigide en fin du chargement. Parcontre, les résultats de Dotreppe [30] donnent un comportement rigide au début du chargement et un comportement flexible en fin du chargement. D'après ces résultats, on peut dire que les résultats de cette étude sont meilleurs que ceux de Dotreppe. La différence des résultats de cette étude et ceux expérimentaux ne dépasse pas 3%, donc on peut dire aussi qu'ils sont meilleurs que ceux trouvés dans l'exemple précédent. De là on peut raisonnablement conclure que le programme multicouches donne des résultats satisfaisants, et est fiable pour une expérimentation numérique ultérieure.

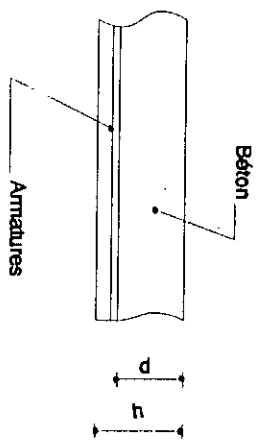
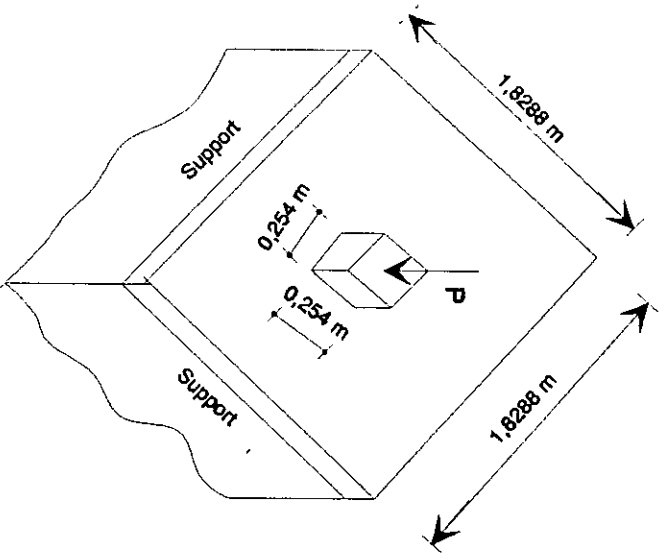
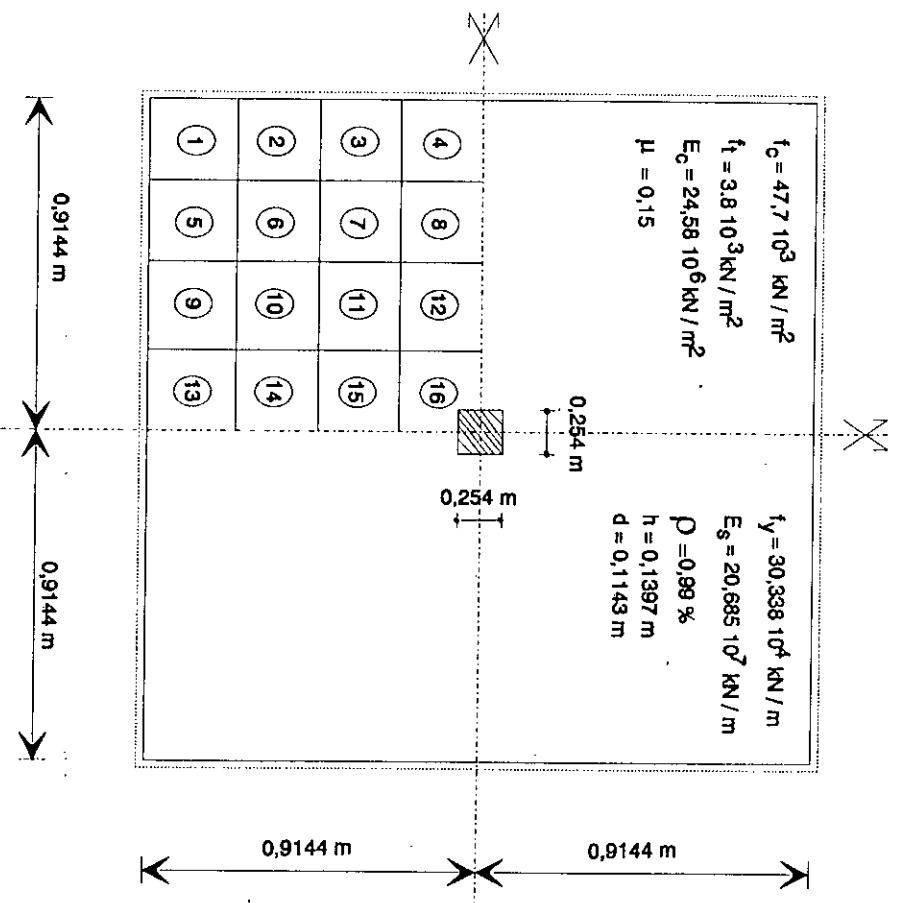


Fig.6.3.7): Propriétés géométriques et matérielles d'une dalle carrée simplement appuyée

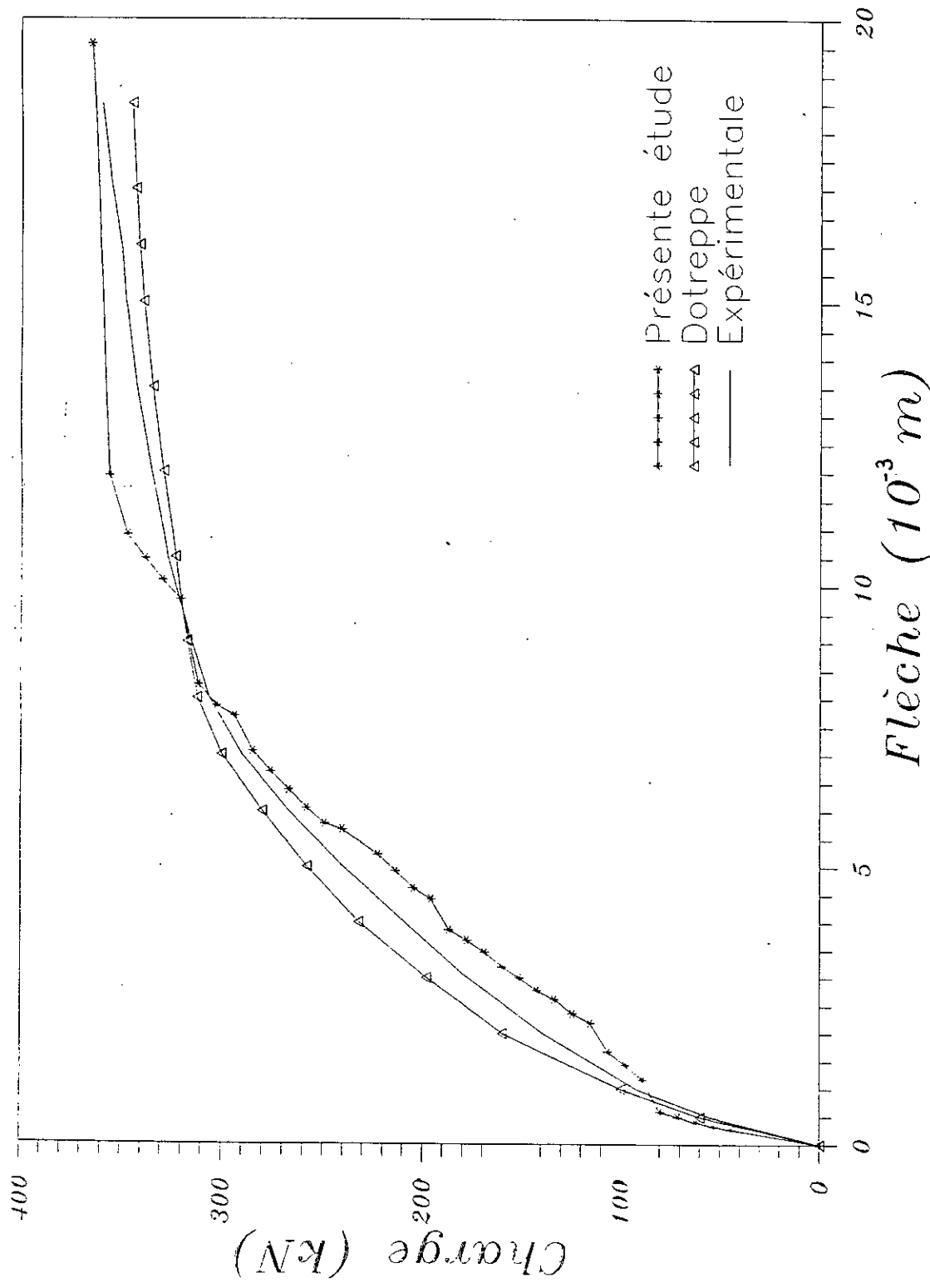


Fig. (6.3.8): Courbes charge-déflexion au centre d'une dalle carrée simplement appuyée

6.4. EXPERIMENTATION NUMERIQUE

Le programme multicouches qui a été présenté précédemment pour une analyse non linéaire des dalles en béton armé par la méthode des éléments finis est utilisé pour analyser deux modèles de dalles en faisant varier quelques paramètres numériques tels que:

- Nombre d'éléments.
- Nombre de couches.
- Tolérance de convergence.

Toutes les dalles sont doublement symétriques, par conséquent uniquement un quart de la dalle est analysé. Pour les deux modèles, les propriétés géométriques et matérielles sont les mêmes et le pourcentage des armatures dans le béton dans les deux directions est aussi le même. Cependant ces armatures sont modélisées en quatre couches, deux supérieures et deux autres inférieures. Le nombre de couches du béton varie de 4 à 8 plus deux couches d'enrobage des armatures.

Les propriétés matérielles pour le béton et l'acier sont les suivantes:

- Résistance à la compression du béton, $f_{cu} = 47,7 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$.
- Résistance à la traction du béton, $f_t = 3,5 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$.
- Module de Young du béton, $E_c = 27,58 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$.
- Module de Young de l'acier, $E_s = 20,68 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$.
- Coefficient de Poisson du béton, $\mu = 0,15$.
- Résistance à l'écoulement de l'acier, $f_y = 30,68 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$.

Toutes les expériences sont destinées à étudier les effets des paramètres numériques cités ci-dessus sur le comportement des dalles. Les dalles testées dans la première série sont carrées et simplement appuyées sur leurs contours et soumises à une charge uniforme qui croît de façon monotone (figure(6.4.1)). Les dalles testées dans la deuxième série ne diffèrent pas des dalles de la première série sauf dans le type du chargement qui est constitué de quatre charges concentrées qui croissent, aussi de façon monotone (figure(6.4.2)).

L'étude est effectuée en considérant une analyse des fissures de directions fixes (orthogonales) comme présenté dans le chapitre 5. Dans toutes les analyses effectuées, le nombre

maximum d'itérations est fixé à 50 pour chaque incrément. Ce nombre est atteint uniquement là où la non linéarité est importante. Le raidissement à la traction du béton ainsi que l'écroutissement des armatures sont ignorés. Finalement, la solution non linéaire mixte adoptée dans cette étude est présentée dans le chapitre 4.

Pour chaque test les aspects du comportement structurel suivants sont étudiés:

- 1- Les déflexions en fonction de l'augmentation de la charge, par simplicité, on a considéré le point de déflexion maximale.
- 2- Une mesure quantitative des fissures n'est pas faisable avec ce présent modèle, puis qu'on utilise une approche de fissures continues. Par contre, la largeur des fissures peut être liée aux déformations des armatures. Ces déformations peuvent être utilisées comme une mesure de la largeur des fissures. Par conséquent les déformations des armatures en fonction du chargement seront suivies dans cette étude.

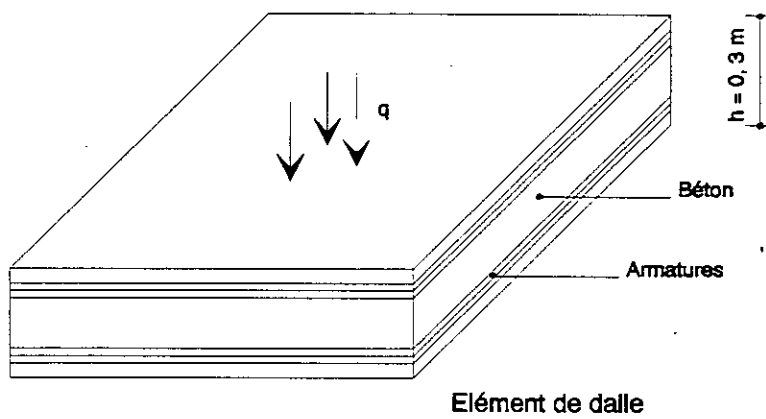
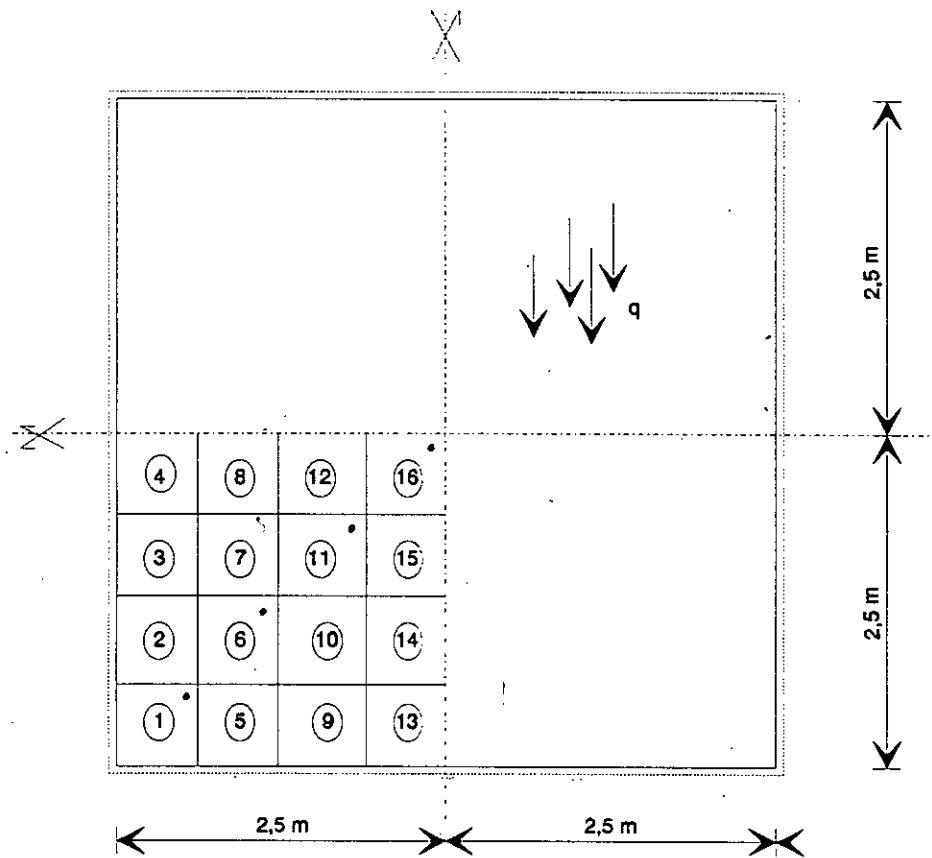


Fig (6.4.1): Dalle carrée simplement appuyée sous charge uniforme (serie 1)

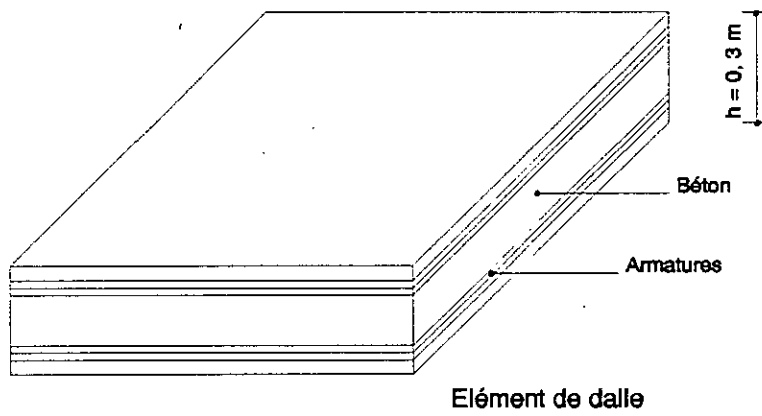
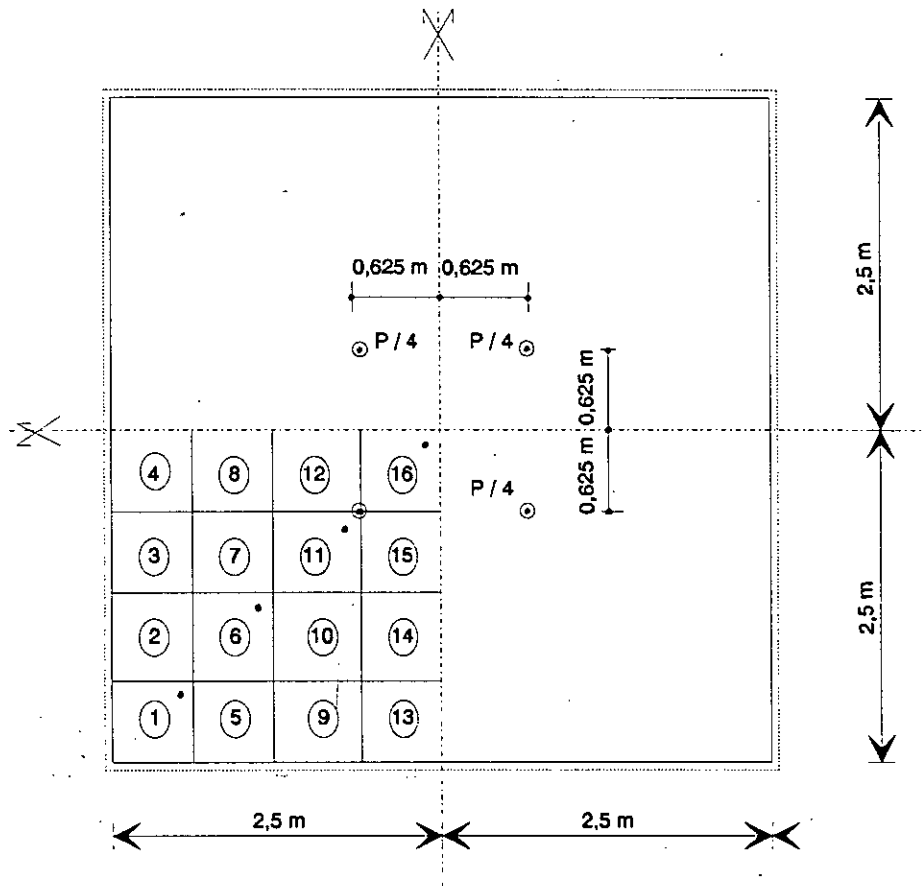
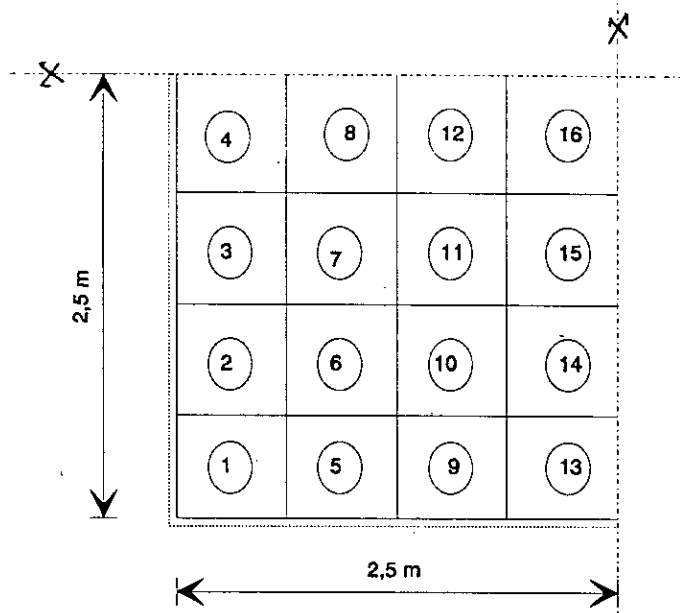


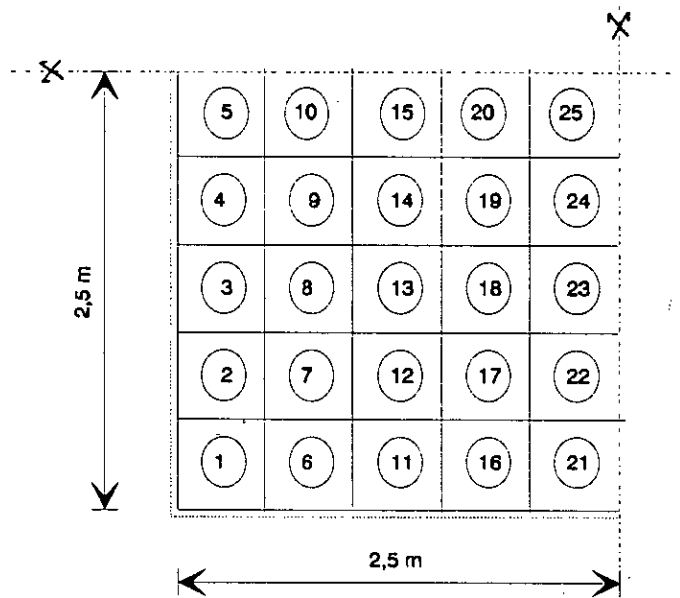
Fig (6.4.2): Dalle carrée simplement appuyée sous 4 charges concentrées (série 2)

6.4.1. MAILLE DES ELEMENTS

Le modèle de dalles de la série 1 présentée précédemment est utilisé pour étudier l'effet de la maille des éléments sur le comportement des dalles. Pour cela, on utilise deux discrétisations avec 64 et 100 éléments comme le montre la figure (6.4.3). Cette analyse est présentée par les figures (6.4.4) à (6.4.6). Comme on peut constater d'après ces figures qui montrent les courbes charge-déflexion obtenues pour un nombre de couches égal à 10 et 12 ainsi que pour une tolérance de convergence égale à 3% et 5%, les résultats sont approximativement les mêmes. La différence dans la charge limite ultime pour les deux types d'éléments ne dépasse pas 2%. Cependant, une discrétisation avec 64 éléments est suffisante pour ce modèle de dalles. D'après la référence [1], plus le nombre d'éléments augmente plus l'analyse devient précise, parce que avec un assez grand nombre d'éléments on approche le milieu continu. Le champ des déplacements devient précis avec un grand nombre d'éléments. Par conséquent, toutes les expériences numériques qui suivent seront étudiées avec un nombre d'éléments égal à 64.



a) Discrétisation un quart de la dalle avec 16 éléments



b) Discrétisation un quart de la dalle avec 25 éléments

Fig (6.4.3): Maille des éléments finis avec les conditions aux frontières

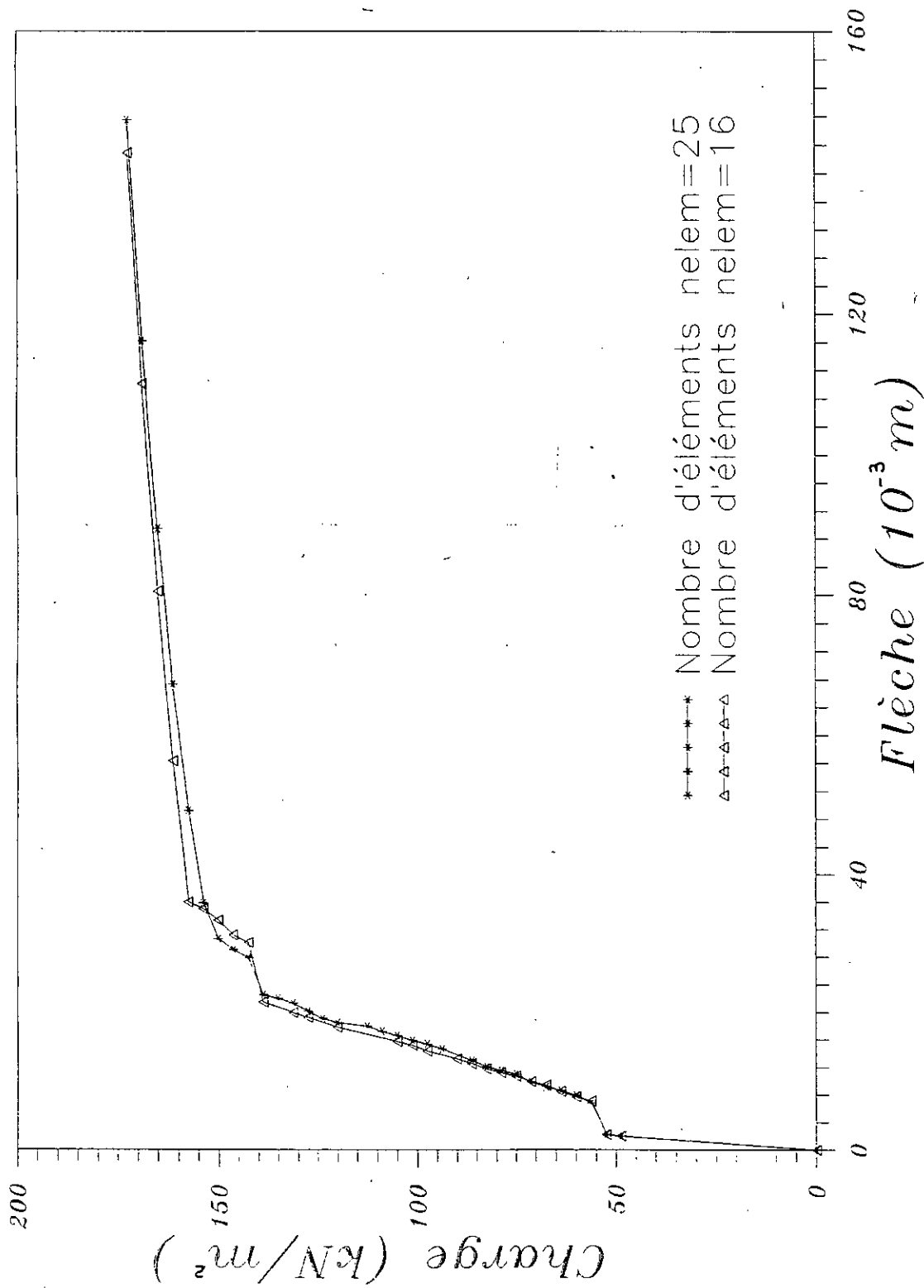


Fig (6.4.4): Courbes charge-déflexion pour une dalle simplement appuyée à ses quatre cotés sous charge uniforme, $nlayer=10$ et $Tr=5\%$

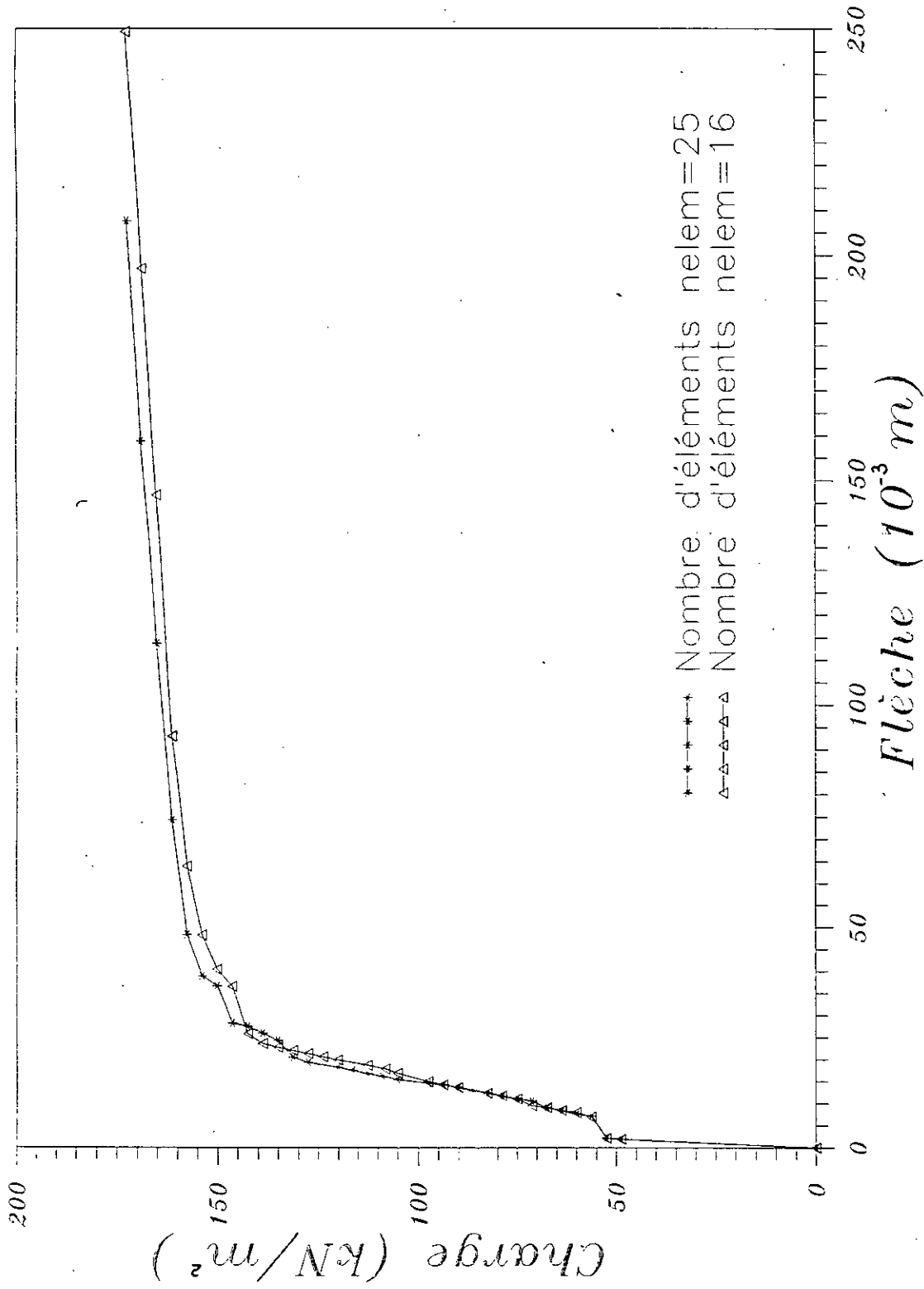


Fig (6.4.5): Courbes charge-déflexion pour une dalle simplement appuyée à ses quatre cotés sous charge uniforme, $n_{layer}=12$ et $Tr=5\%$

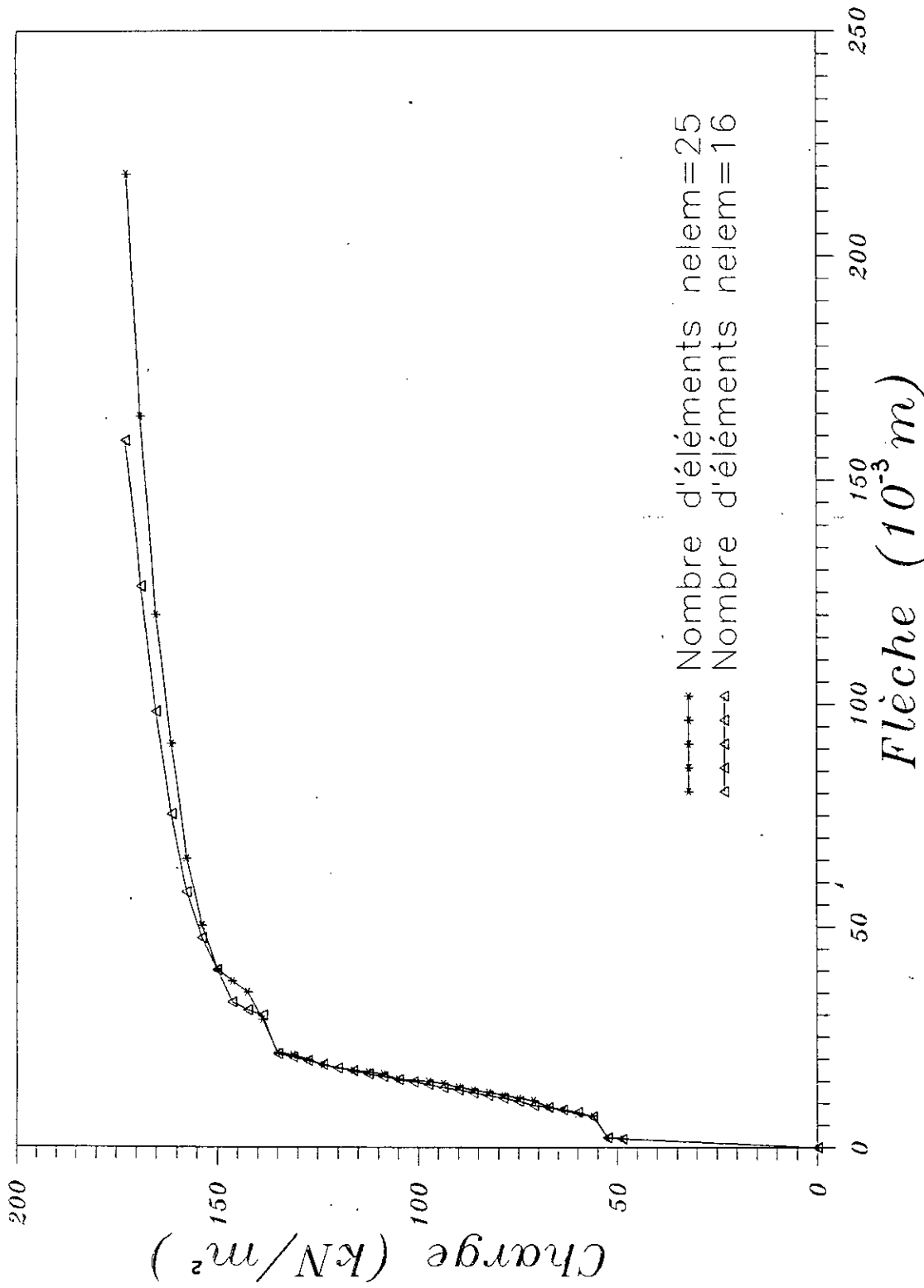


Fig (6.4.6): Courbes charge-déflexion pour une dalle simplement appuyée à ses quatre cotés sous charge uniforme, $n_{layer}=12$ et $Tr=3\%$

6.4.2. NOMBRE DE COUCHES

Pour analyser chaque point à travers l'épaisseur d'une plaque épaisse, il est nécessaire de subdiviser celle-ci en plusieurs plaques minces. Le modèle multicouches qui a été présenté dans le chapitre 3 est utilisé dans ce chapitre pour démontrer son utilité en faisant varier le nombre de couches suivant l'épaisseur de la dalle. L'étude de ce paramètre est très importante dans cette analyse. On a donc considéré les deux modèles de dalles, série 1 et série 2. Les figures(6.4.7) à (6.4.18) montrent la comparaison des résultats pour les courbes charge-déflexion et charge-déformation des armatures de la nappe inférieure.

6.4.2.1. MODELE DE LA SERIE 1

A - Courbes charge-déflexion

Les figures(6.4.7) à (6.4.9) montrent la comparaison des résultats charge-déflexion obtenus pour les nombres de couches égaux à 10, 12 et 14 pour différents cas de tolérance de convergence 3%, 4% et 5%. Les courbes ont la même allure pour tous les cas de tolérance de convergence. On remarque qu'au palier de plastification il y a une légère différence entre les courbes, par contre avant celui-ci, toutes les courbes sont confondues car la non linéarité est très faible. Les courbes montrent que la charge limite ultime obtenue par le nombre de couches égal à 10 est légèrement supérieure à celle obtenue par le nombre de couches égal à 12 et 14. De là on peut dire que plus le nombre de couches augmente, plus la charge limite ultime diminue. La non linéarité flexionnelle mieux mise en évidence par

un nombre de couches plus grand. Un nombre de couches réduit ne reflète pas fidèlement les redistributions des efforts notamment après plastification des aciers et donne une charge de rupture légèrement supérieure. Il est évident que la précision des résultats augmente avec le nombre de couches élevé, mais la durée d'exécution du programme d'analyse non linéaire multicouches devient plus grande.

B - Courbes charge-déformation des armatures inférieures

Les figures (6.4.10) à (6.4.13) montrent les courbes charge-déformation des armatures inférieures pour les modèles 10, 12 et 14 couches dans les différents points de la dalle. D'après ces courbes, on remarque que dans les différents points de la dalle, la charge limite ultime est légèrement supérieure en utilisant le modèle avec 10 couches. Dans les 4 points de la dalle, on remarque que les déformations des armatures inférieures augmentent avec l'augmentation de la charge. A un certain niveau de chargement, on distingue de grandes déformations, celles-ci forment le palier de plastification et donnent la charge limite. En comparant les figures (6.4.10) à (6.4.13) donnant les déformations sur différents points situés sur la diagonale de la dalle, on remarque aussi qu'en se rapprochant, de plus en plus, du centre de la dalle, les déformations des armatures inférieures augmentent suivant la diagonale. Ceci est dû au fait que le centre de la dalle est plus sollicité par rapport aux autres points de celle-ci. A cause du chargement latéral uniforme de la dalle, la déflexion est maximale au centre de celle-ci. Donc la première fissure doit apparaître dans la fibre inférieure au

centre de la dalle.

L'effet du nombre de couches, confirme les observations précédentes. On observe le transfert presque instantané des efforts vers l'acier à la fissuration du béton. La courbe est non linéaire (à cause du comportement non linéaire du béton) bien avant la plastification de l'acier. Le comportement des armatures est ductile car à la rupture, la déformation ultime atteint 0,4% à 0,6%.

6.4.2.2. MODELE DE LA SERIE 2

A - Courbes charge-déflexion

La figure(6.4.14) montre les courbes charge-déflexion des résultats obtenus pour les différents nombres de couches 10, 12 et 14 à la tolérance de convergence égale à 5%. On observe les mêmes tendances que celles présentées dans les courbes charge-déflexion du modèle de la série 1.

B - Courbes charge-déformation des armatures inférieures

Différentes courbes charge-déformation des armatures inférieures pour les modèles 10, 12 et 14 couches dans les différents points de la dalle sont présentées sur les figures(6.4.15) à (6.4.18). Ces résultats montrent que la charge limite ultime obtenue par le modèle de 10 couches est légèrement supérieure à celle obtenue par les modèles de 12 et 14 couches dans les quatre points de la dalle. On remarque que, les déformations augmentent avec l'augmentation de la charge dans les deux points proches du centre de la dalle, par contre aux deux autres points on observe des discontinuités dans les courbes. La

réduction partielle et monotone des déformations peut s'expliquer par l'apparition brusque des discontinuités de fissuration causant des redistributions des efforts.

En comparant les figures (6.4.15) à (6.4.18) donnant les déformations sur différents points situés sur la diagonale de la dalle, on remarque aussi qu'en se rapprochant, de plus en plus, du centre de la dalle, les déformations augmentent suivant la diagonale. A cause du chargement concentré latéral à la dalle, la déformation maximale des armatures se situe au centre de la dalle.

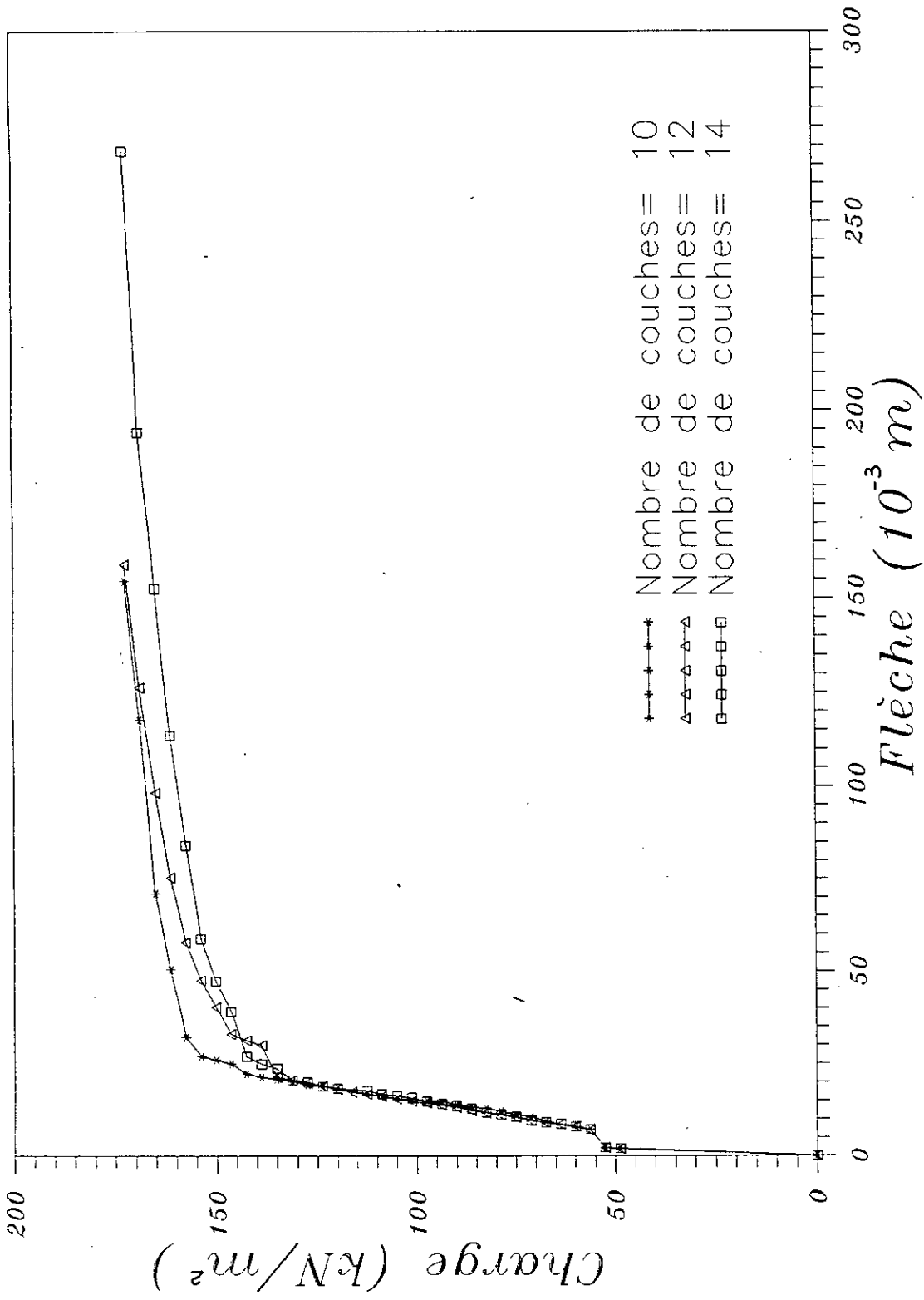


Fig (6.4.7): Courbes charge-déflexion pour une dalle carrée simplement appuyée soumise à une charge uniforme avec $Tr=3\%$

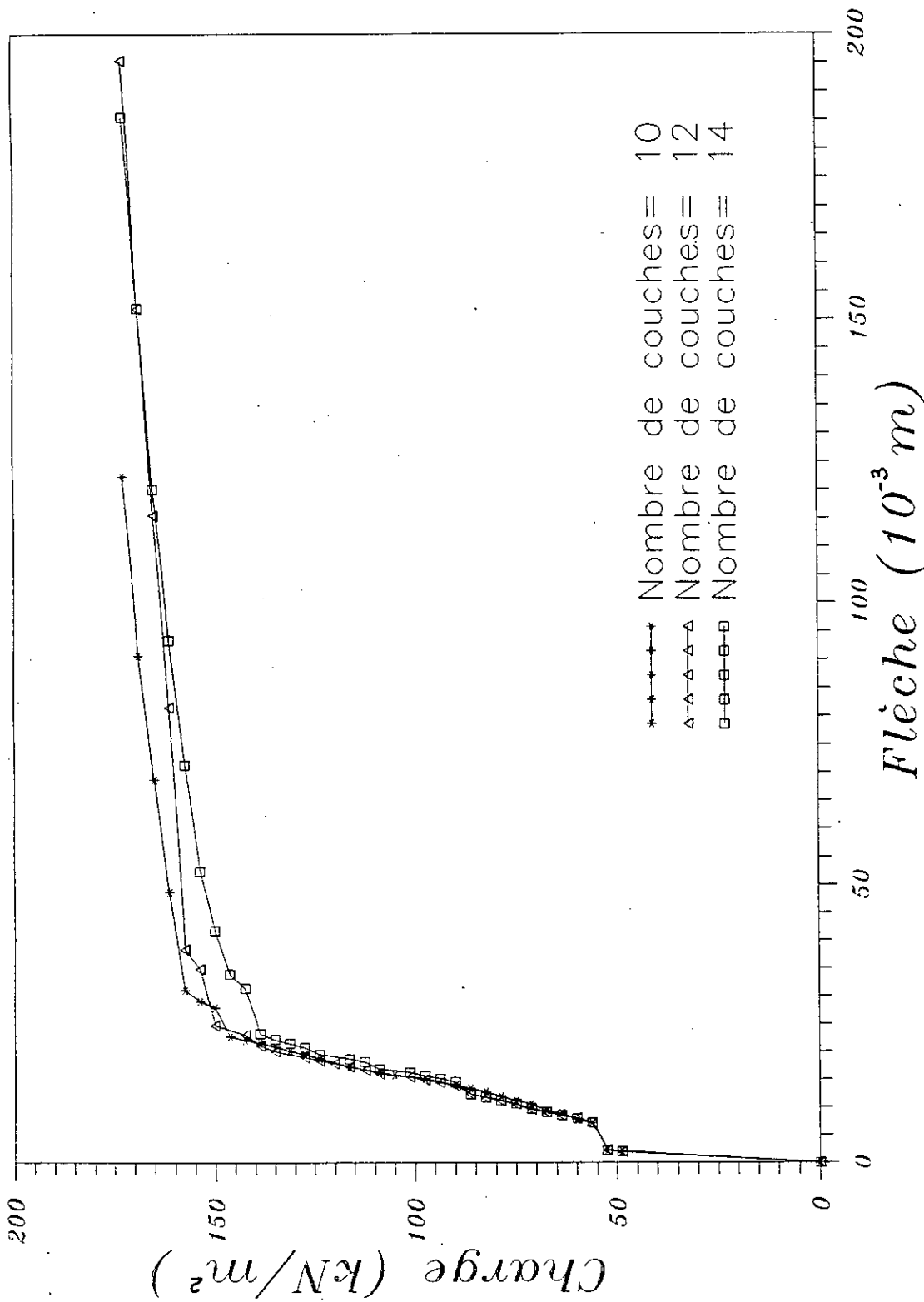


Fig. (6.4.8): Courbes charge-déflexion pour une dalle carrée simplement appuyée soumise à une charge uniforme avec $Tr=4\%$

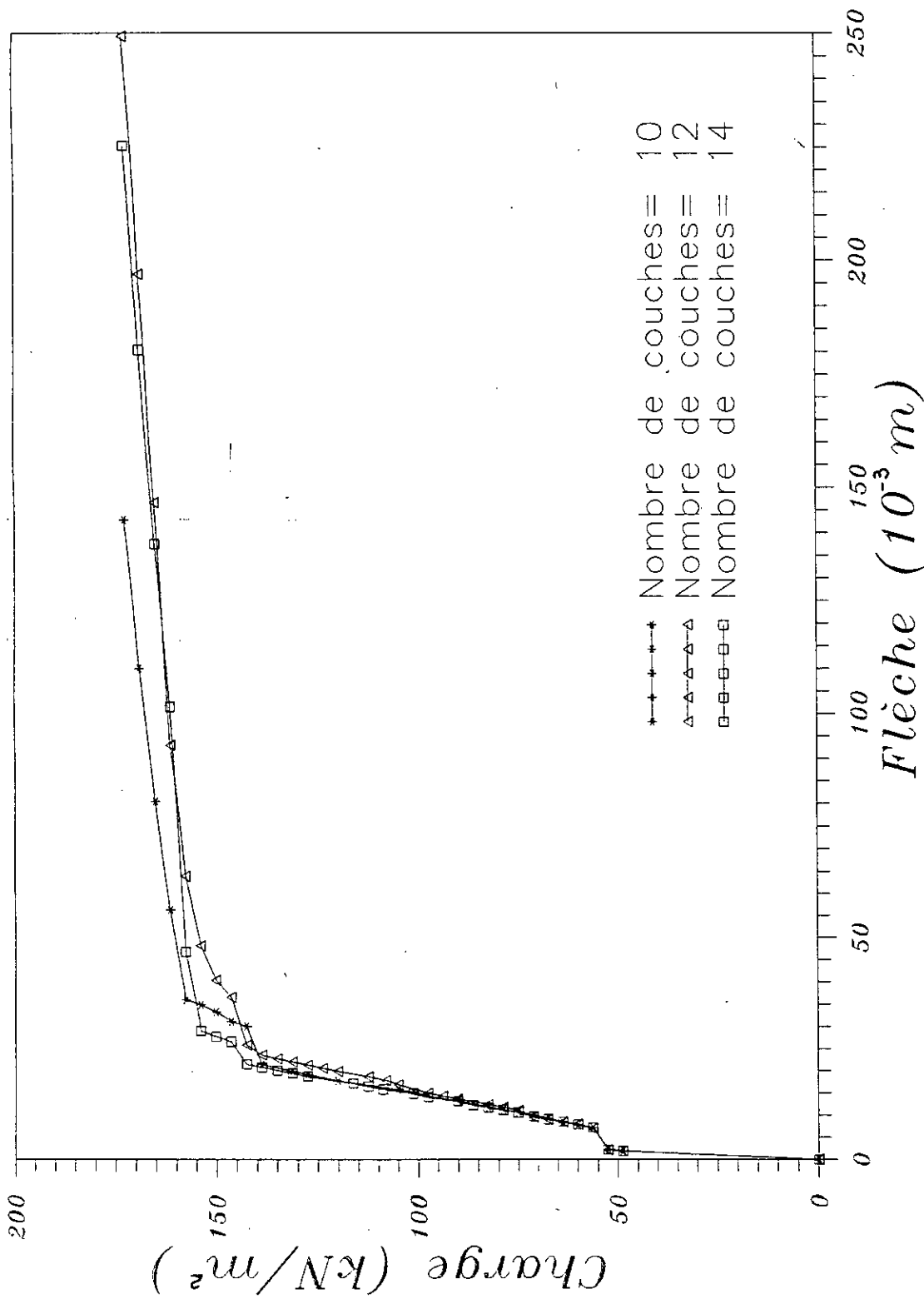


Fig (6.4.9): Courbes charge-déflexion pour une dalle carrée simplement appuyée soumise à une charge uniforme avec $Tr=5\%$

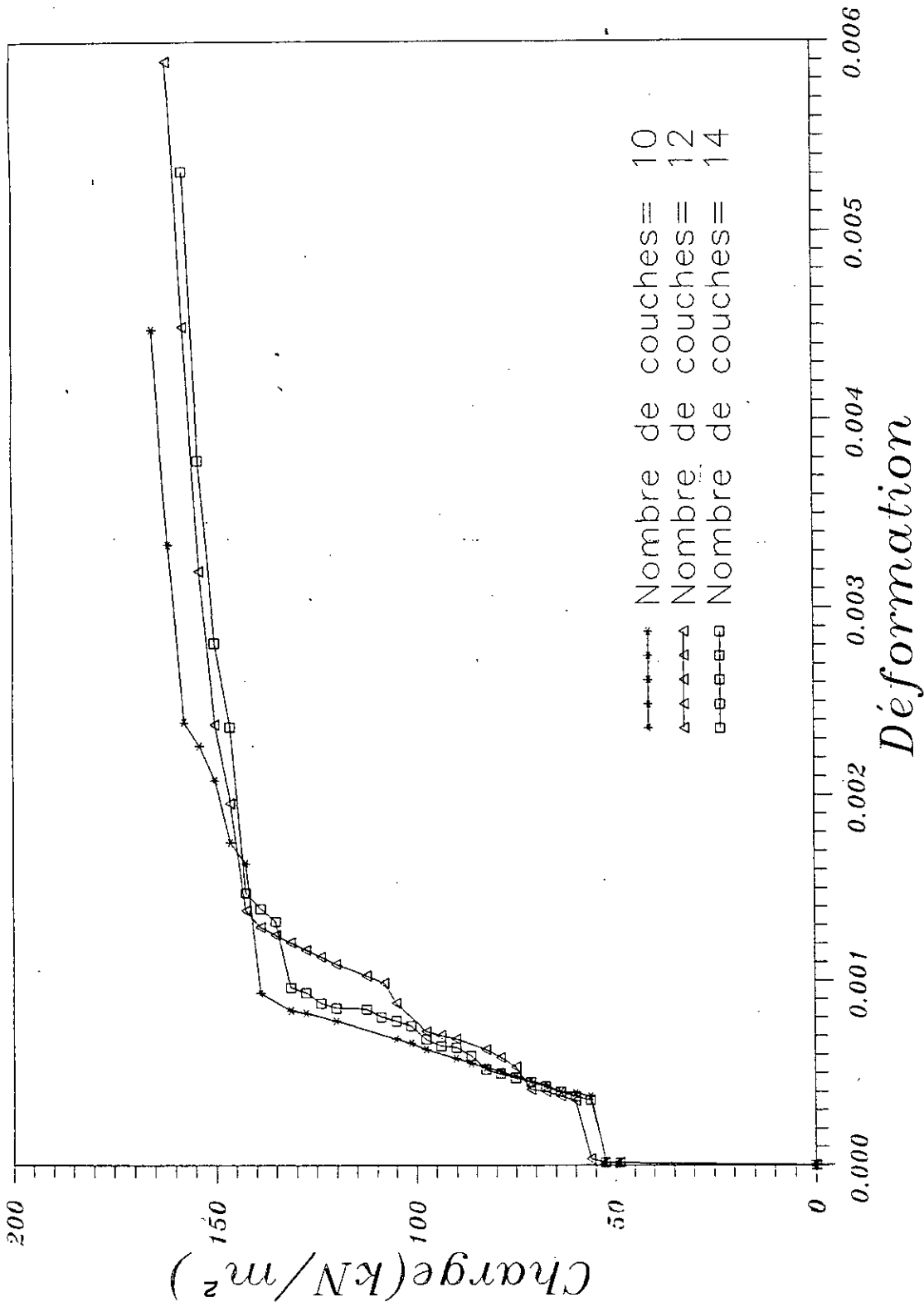


Fig. (6.4.10): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.1, PG.no.4) pour une dalle sous charge uniforme, Tr=5%

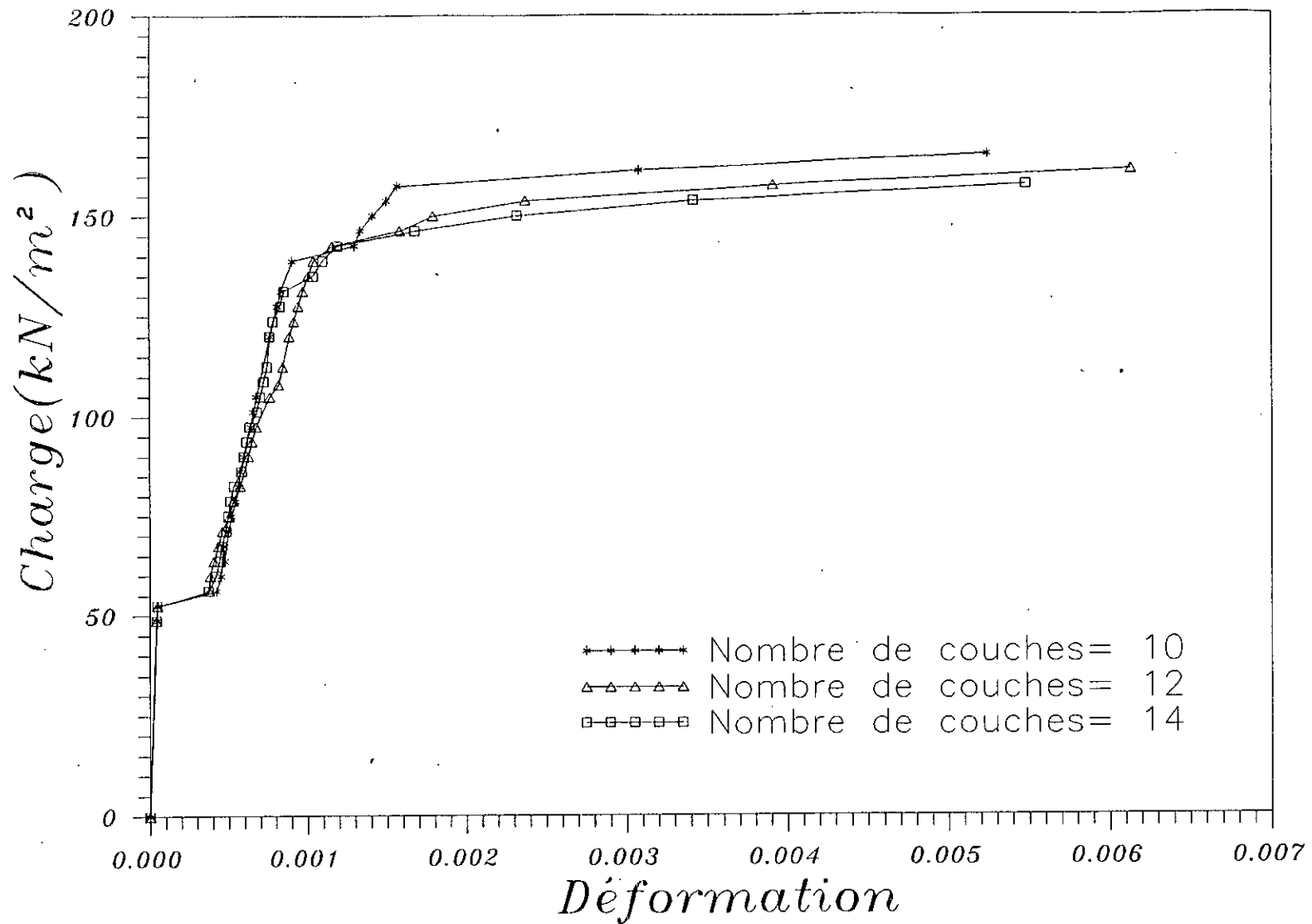


Fig (6.4.11): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.6, PG.no.4) pour une dalle sous charge uniforme, $T_r=5\%$

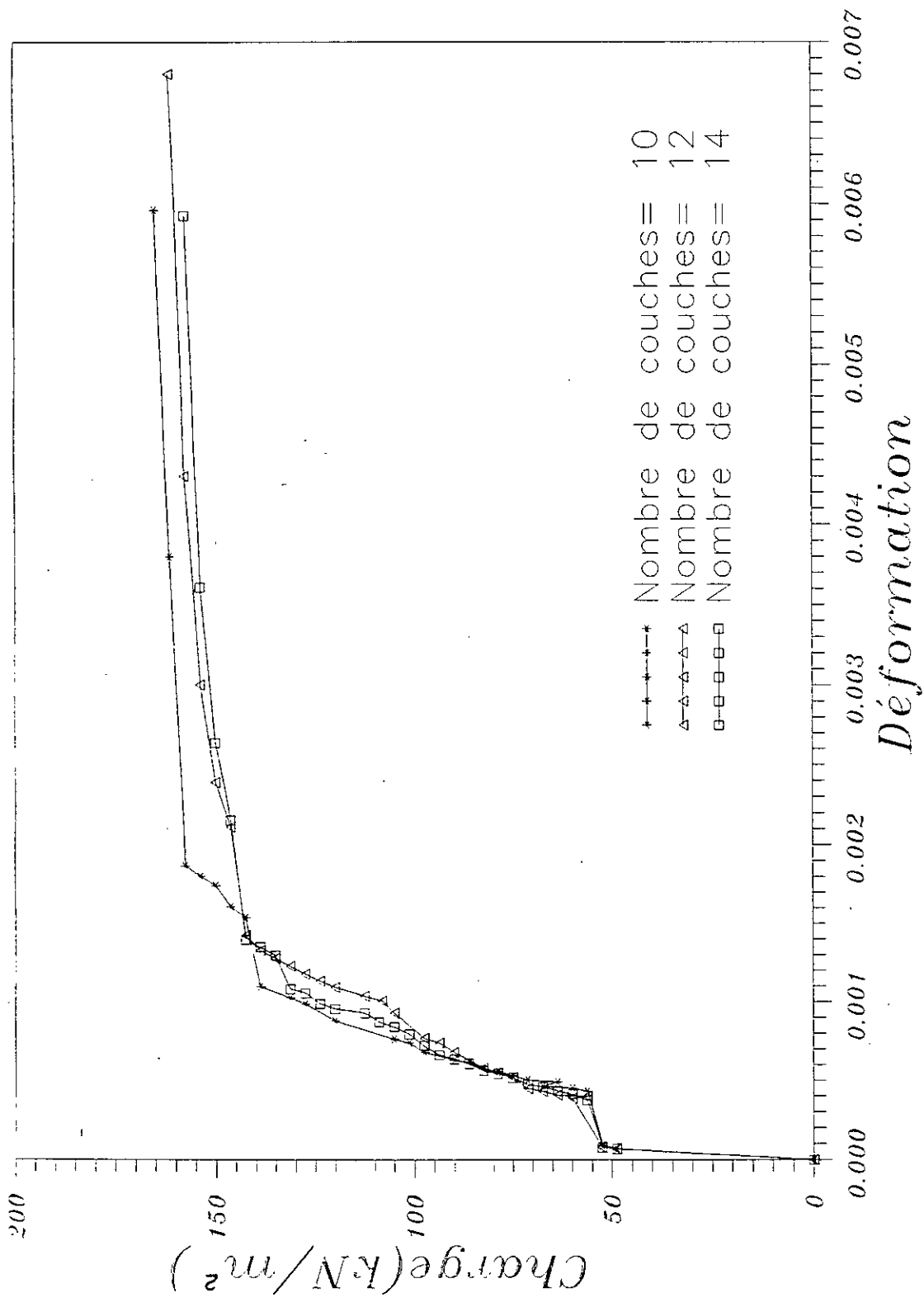


Fig. (6.4.12): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (éll.11, P.C.n.o.4) pour une dalle sous charge uniforme, $\eta = 5\%$

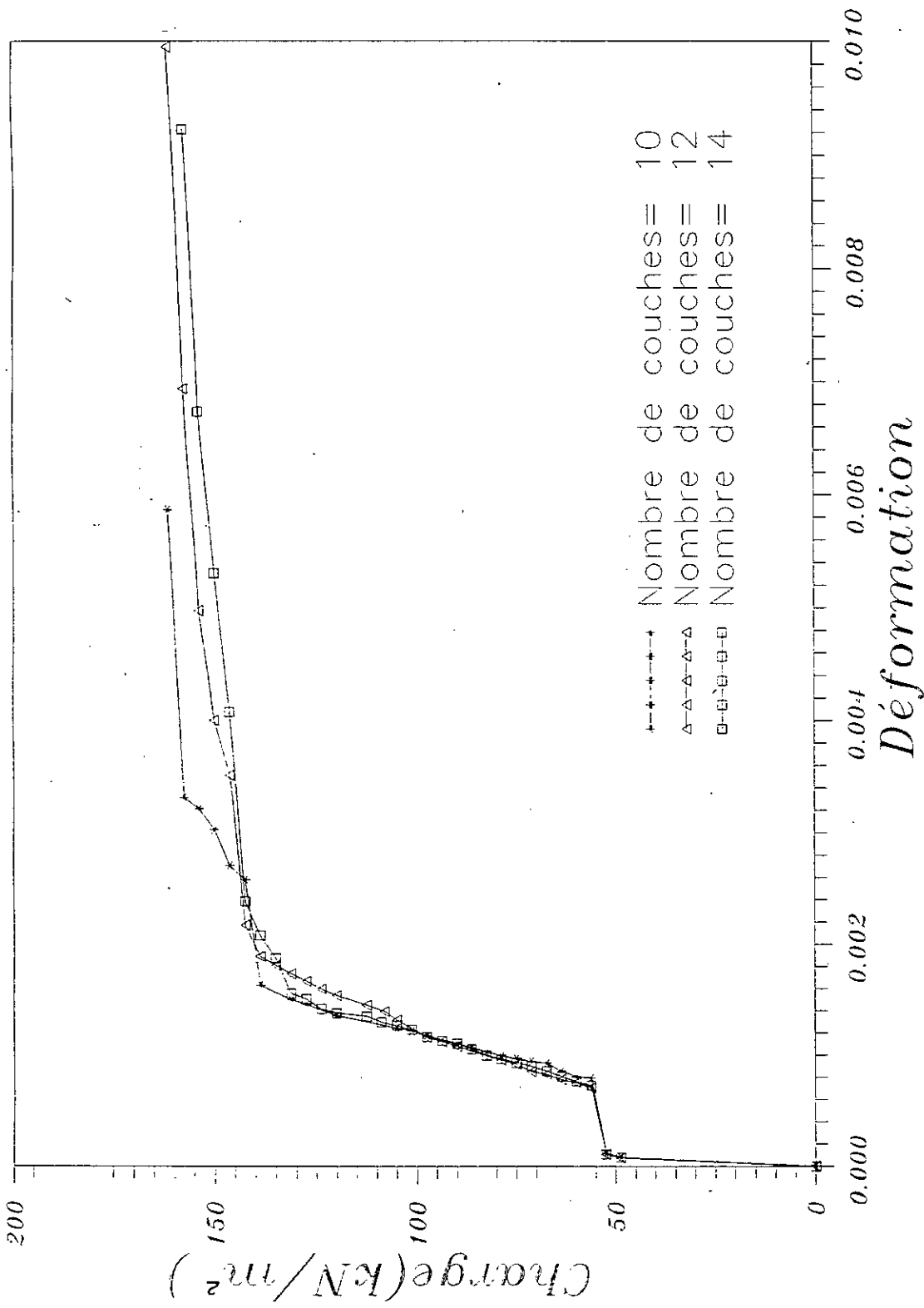


Fig. (6.4.13): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.16, PG.no.4) pour une dalle sous charge uniforme, $t_r=5\%$

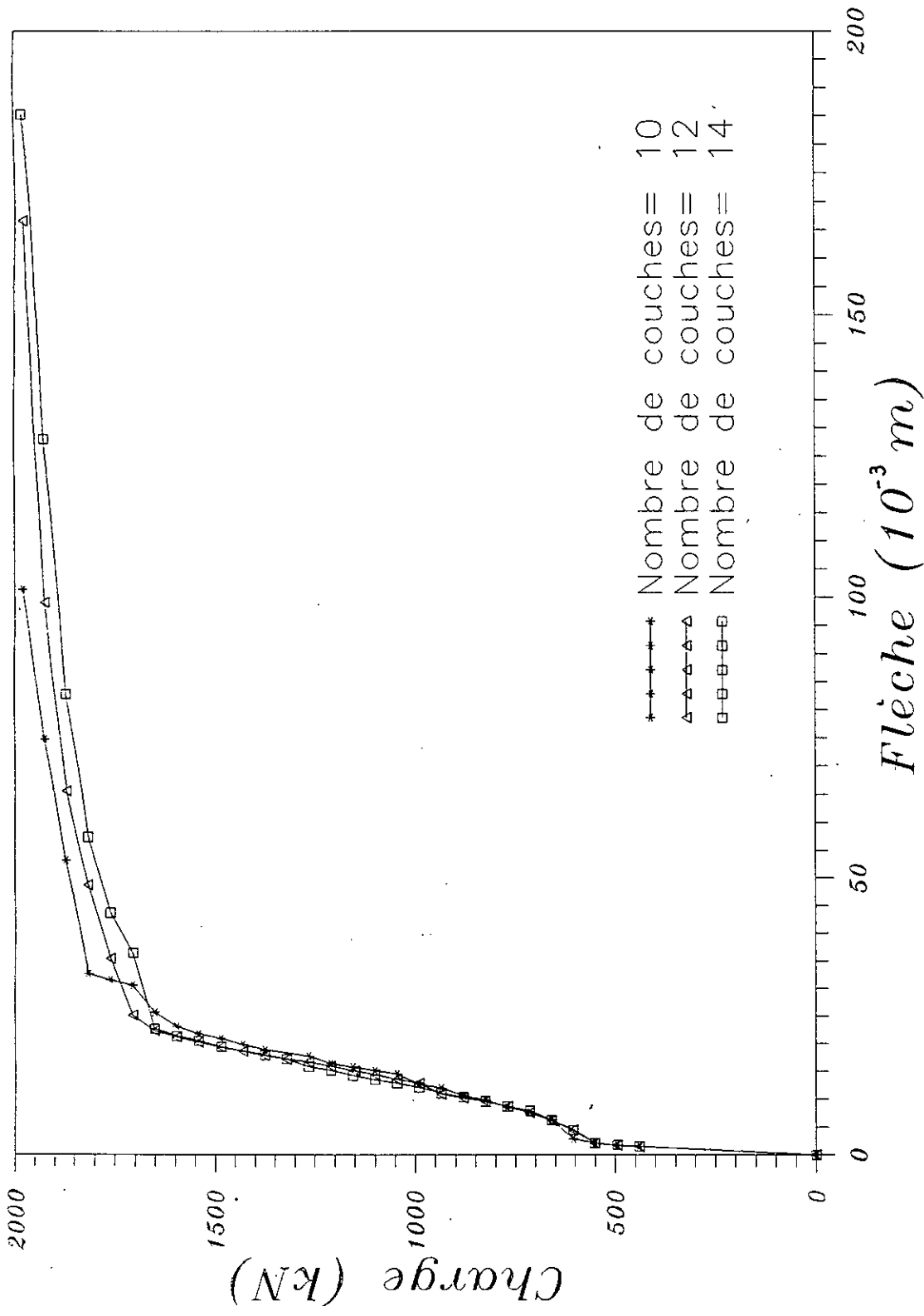


Fig. (6.4.14): Courbes charge-déflexion pour une dalle carrée simplement appuyée soumise à quatre charges concentrées avec $Tr=5\%$

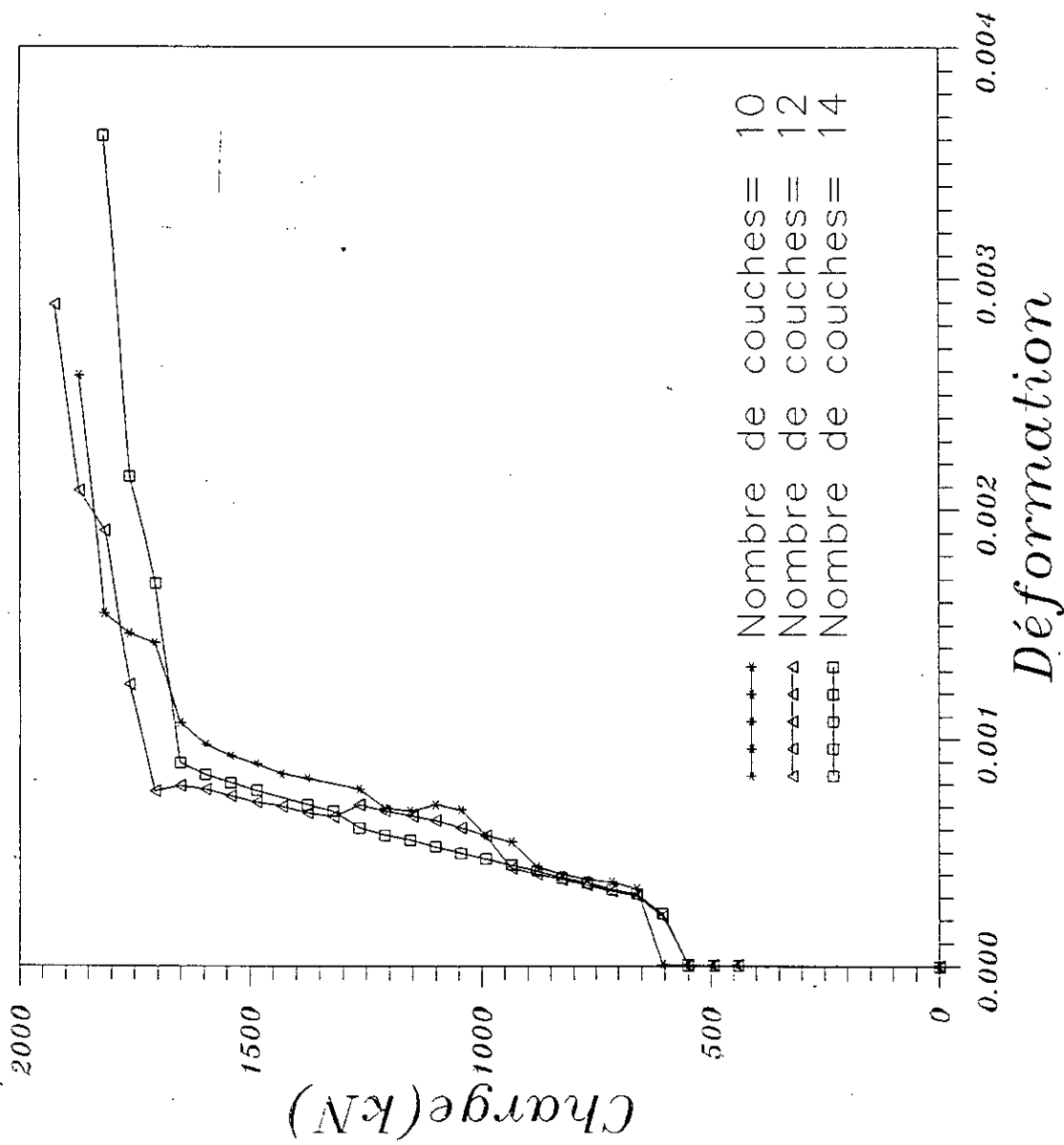


Fig (6.4.15): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.1, PG.no.4) pour une dalle sous quatre charges concentrées, $T_r=5\%$

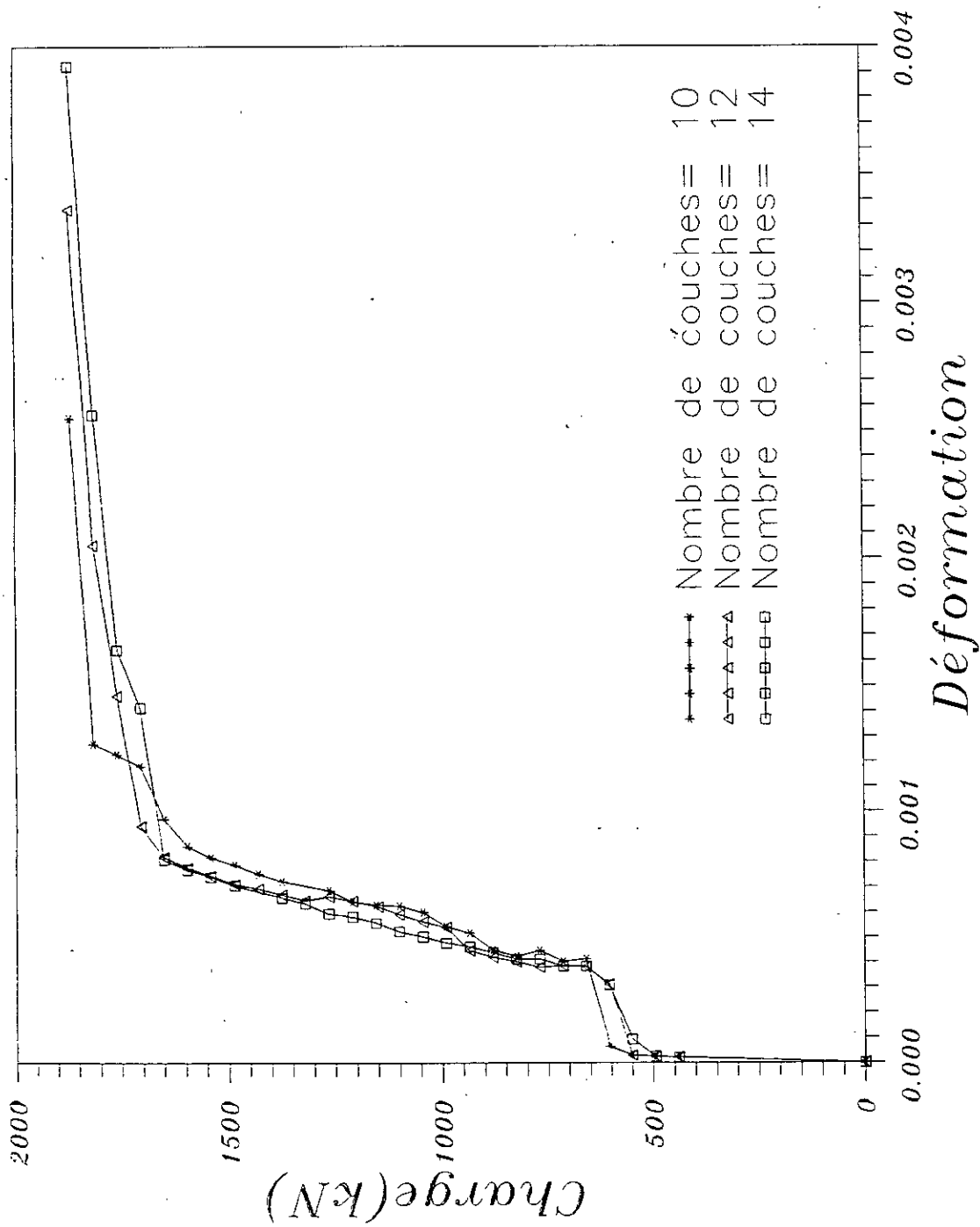


Fig. (6.4.16): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.6, PG.no.4) pour une dalle sous quatre charges concentrées, $Tr=5\%$

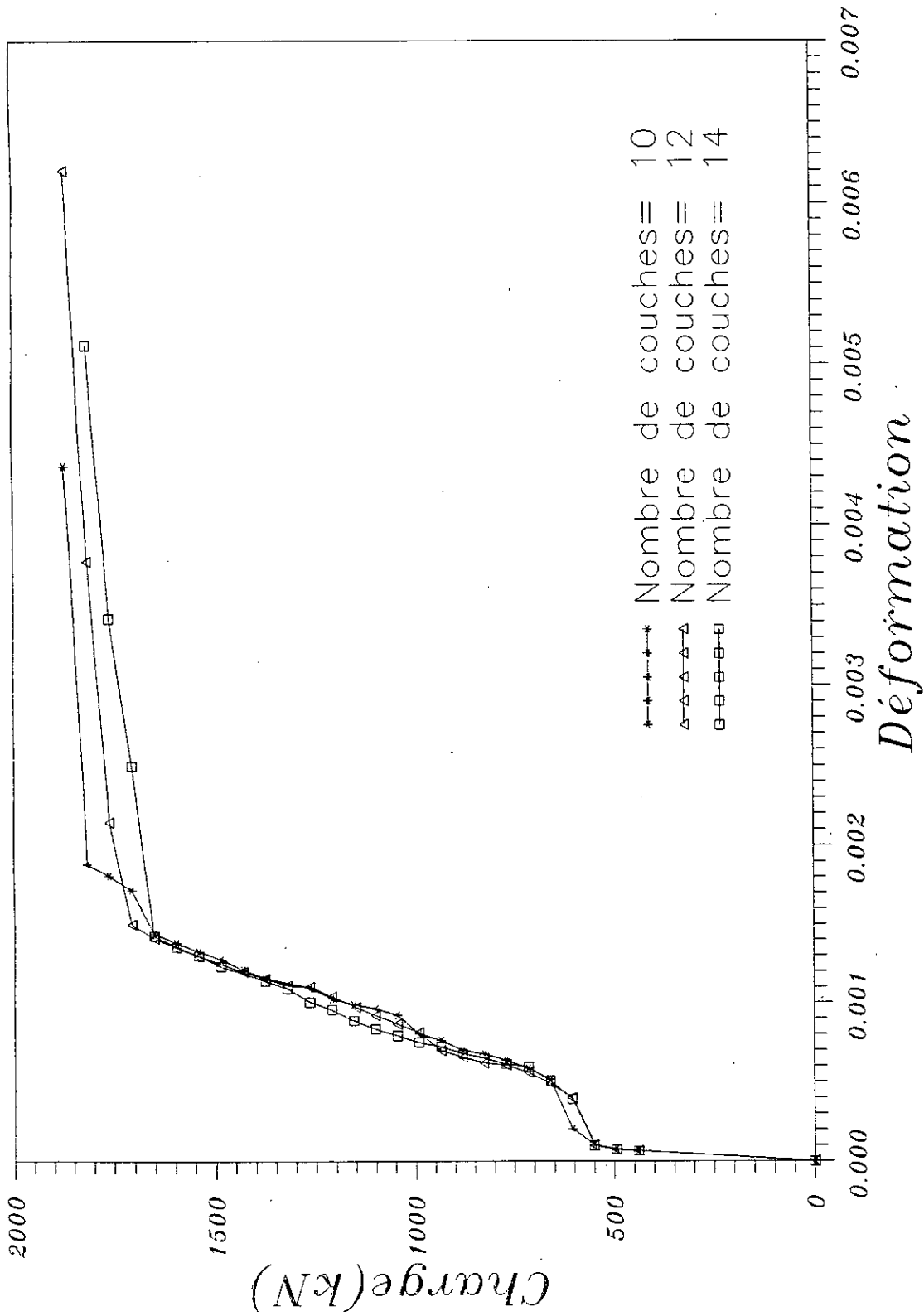


Fig. (6.4.17): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.11, PG.no.4) pour une dalle sous quatre charges concentrées, $Tr=5\%$

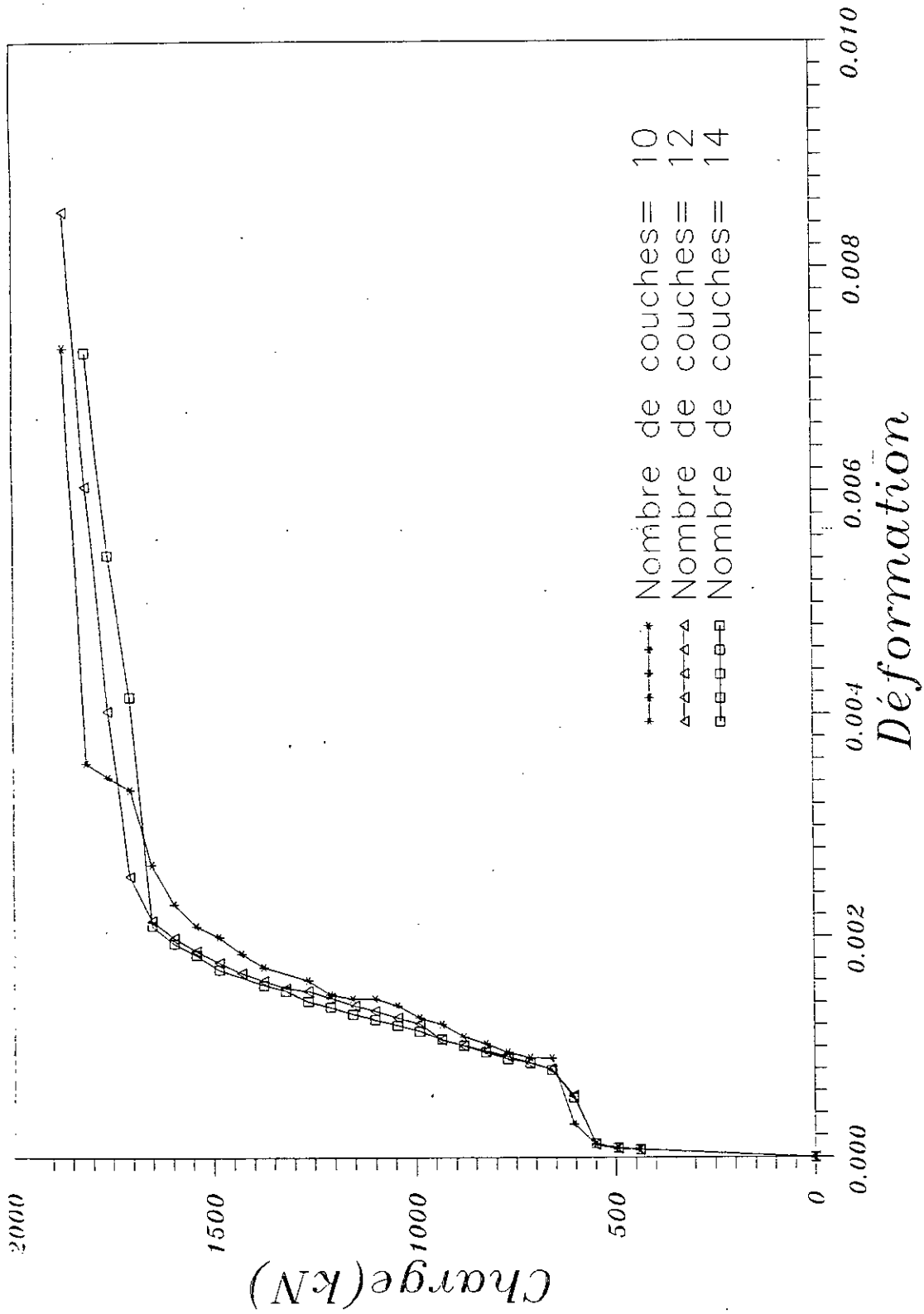


Fig (6.4.18): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.16, PG.no.4) pour une dalle sous quatre charges concentrées, $Tr=5\%$

6.4.3. TOLERANCE DE CONVERGENCE

Pour un programme d'analyse non linéaire, l'effet de la tolérance de convergence sur la solution joue un rôle très important. Dans ce qui suit, on va considérer l'influence de ce paramètre sur les résultats de notre étude. Plusieurs valeurs de ce paramètre sont utilisées pour les modèles de dalles série 1 et 2. Les figures (6.4.19) à (6.4.28) montrent la comparaison des résultats pour les différentes courbes charge-déflexion et charge-déformation des armatures de la nappe inférieure.

6.4.3.1. MODELE DE LA SERIE 1

A - Courbes charge-déflexion

Différentes courbes charge-déflexion avec le modèle de 12 couches sont présentées sur la figure (6.4.19), pour les tolérances de convergence 1%, 3% et 5%. Les courbes présentent une légère différence dans le palier, par contre avant celui-ci, elles sont confondues. La différence entre ces courbes ne dépasse pas 3%. A partir de la figure (6.4.19), on remarque que la plus petite limite ultime est donnée pour la tolérance de convergence égale à 1%. De là on peut dire que la charge limite ultime diminue avec une tolérance de convergence plus petite. Puisque les résultats sont relativement similaires pour tous les différents cas de la tolérance de convergence, donc l'analyse de ce modèle de dalles à une tolérance de convergence égale à 5% est suffisante.

B - Courbes charge-déformation des armatures inférieures

Les figures (6.4.20) à (6.4.23) montrent la comparaison des

résultats charge-déformation des armatures inférieures pour les tolérances de convergence 1%, 3% et 5% obtenues aux différents points de la dalle. Toutes les courbes présentent presque la même allure. La charge limite ultime est légèrement plus petite pour la tolérance de convergence égale à 1%. La différence n'apparaît qu'après fissuration du béton et cela par les raisons évoquées au chapitre 4 (effet des discontinuités sur la redistribution des forces résiduelles). En comparant les figures citées ci-dessus, on remarque qu'en se rapprochant, de plus en plus, du centre de la dalle, les déformations des armatures inférieures augmentent suivant la diagonale. Le centre de la dalle est le point de déflexion maximale, à cause du chargement latéral uniforme de la dalle.

6.4.3.2. MODELE DE LA SERIE 2

A - Courbes charge-déflexion

La figure(6.4.24) montre les courbes charge-déflexion des résultats obtenus pour les différentes tolérances de convergence 1%, 3% et 5% avec le nombre de couches égal à 12. On remarque aussi les mêmes observations que celles citées pour les courbes charge-déflexion du modèle de la série 1. On plus de ça, on peut dire qu'ici ces courbes sont encore plus rapprochées.

B - Courbes charge-déformation des armatures inférieures

Les courbes charge-déformation des armatures inférieures pour les tolérances de convergence 1%, 3% et 5% obtenues avec le modèle de 12 couches sont présentées sur les figures(6.4.25) à (6.4.28). Les courbes sont presque confondues entre elles, la

différence ne dépasse pas 2%. Les courbes sont plus rapprochées que celles obtenues dans le modèle de la série 1. La charge limite ultime reste la même pour les deux cas de la tolérance de convergence égale à 3% et 5%, par contre pour la tolérance de convergence égale à 1% la charge limite ultime est légèrement inférieure aux autres. On remarque que dans les deux points proches du centre de la dalle, les déformations augmentent avec l'augmentation de la charge. Par contre, dans les deux autres points, dans certains niveaux du chargement les déformations diminuent avec l'augmentation de la charge. Ceci donne un raccourcissement aux armatures, donc une fermeture des fissures dans le cas où le béton est déjà fissuré. On remarque aussi que la déformée est plus grande au centre de la dalle.

La réduction partielle et monotone des déformations peut s'expliquer par l'apparition brusque des discontinuités de fissuration causant des redistribution des efforts. La figure (6.4.25) montre des discontinuités brusques en certains points peuvent "soulager" d'autres points.

6.5. Conclusion

Le programme d'analyse non linéaire multicouches en éléments finis présenté dans le chapitre 3, s'est avéré comme un outil très intéressant pour prédire le comportement des dalles en béton armé chargées jusqu'à la rupture.

L'analyse des deux modèles de dalles a donné des résultats proches des résultats expérimentaux et meilleurs à d'autres résultats numériques obtenus par d'autres. Malgré les écarts minimes observés entre les résultats expérimentaux et numériques,

on peut dire que les résultats obtenus dans cette étude sont satisfaisants. La simulation en éléments finis multicouches et les modèles rhéologiques utilisés pour le béton et l'acier se sont donc avérés très judicieux.

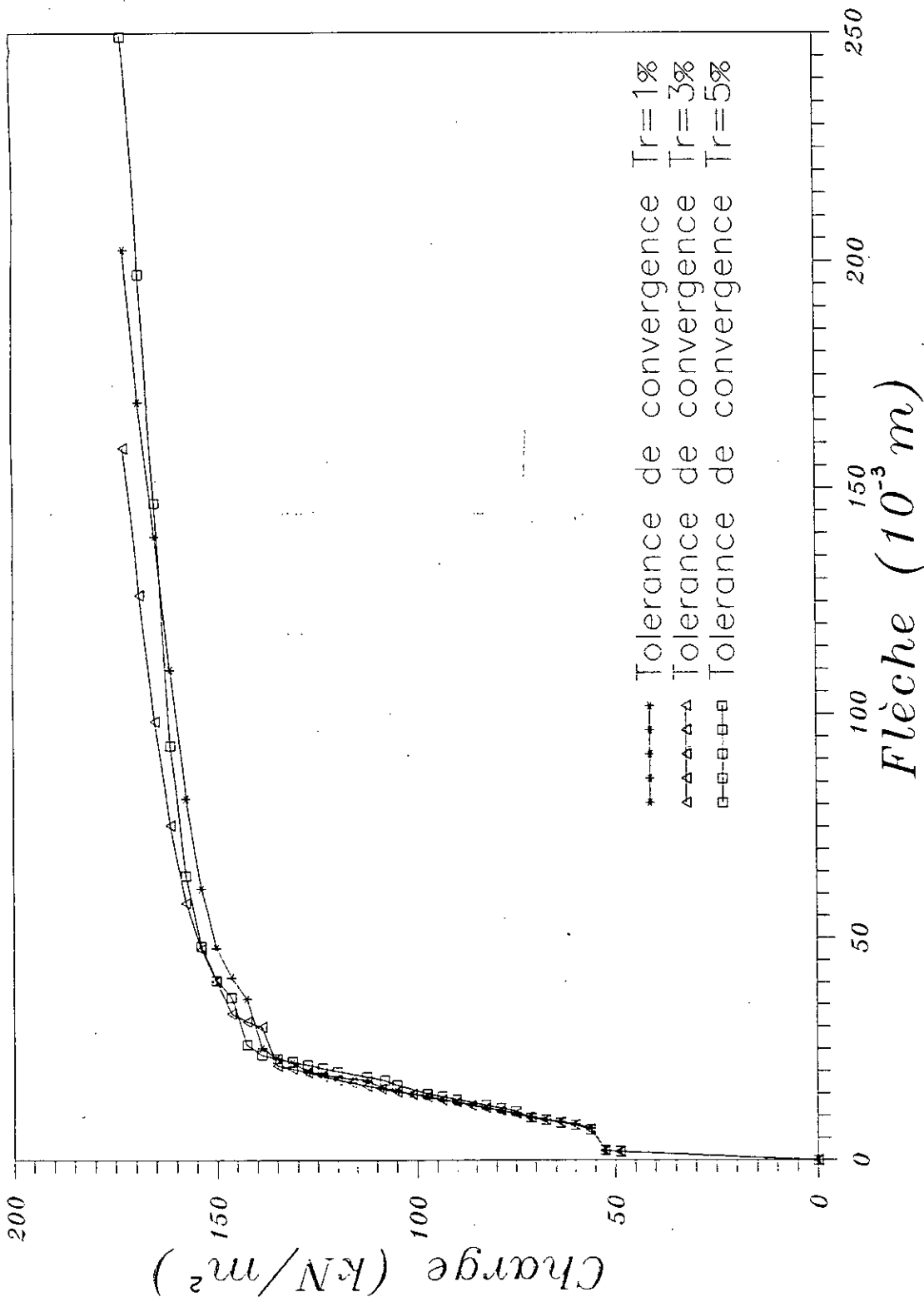


Fig (6.4.19): Courbes charge-déflexion pour une dalle carrée simplement appuyée soumise à une charge uniforme avec $n_{\text{layer}}=12$

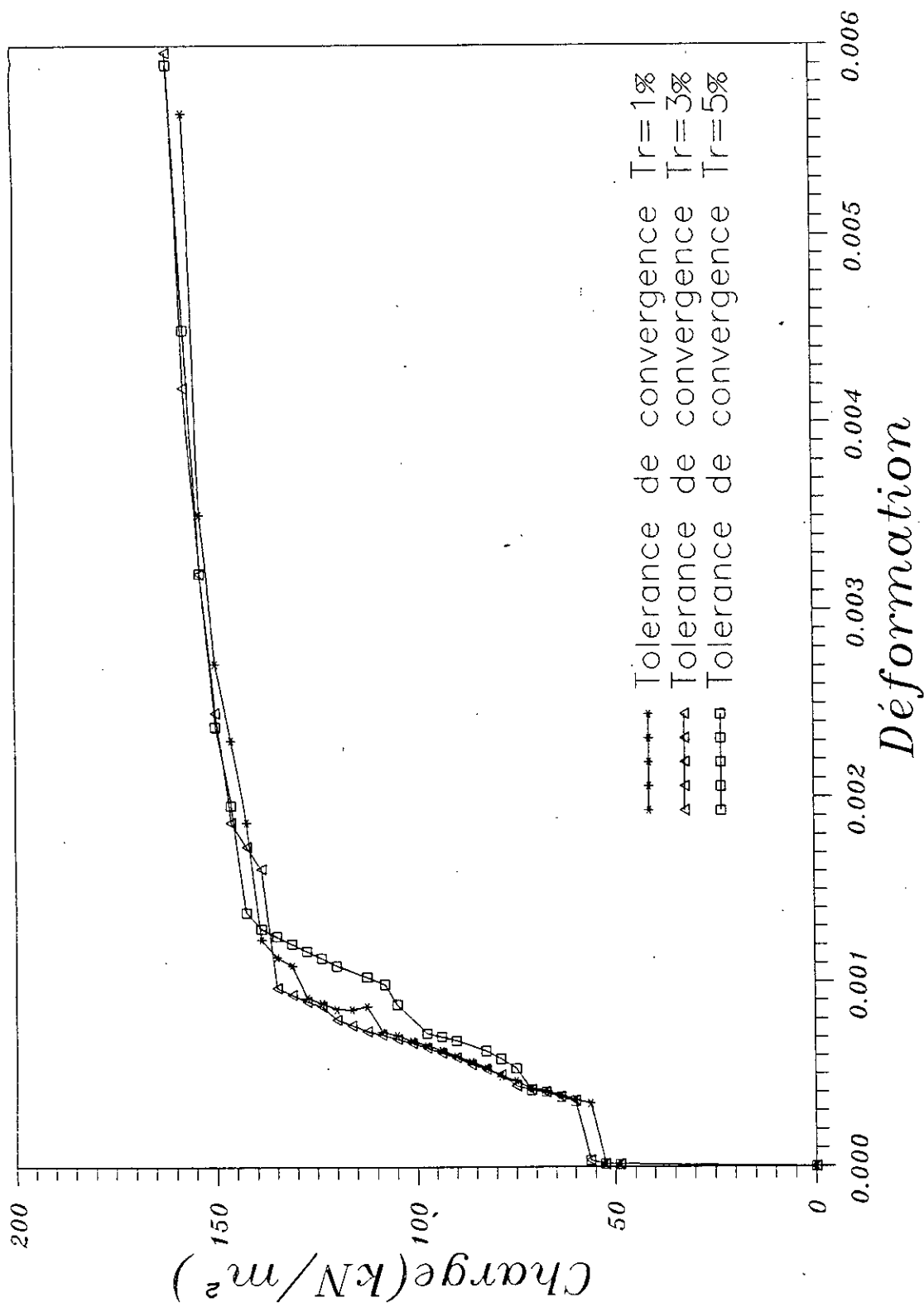


Fig. (6.4.20): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.1, couche.no.11, PG.no.4) pour une dalle sous charge uniforme, nlayer=12

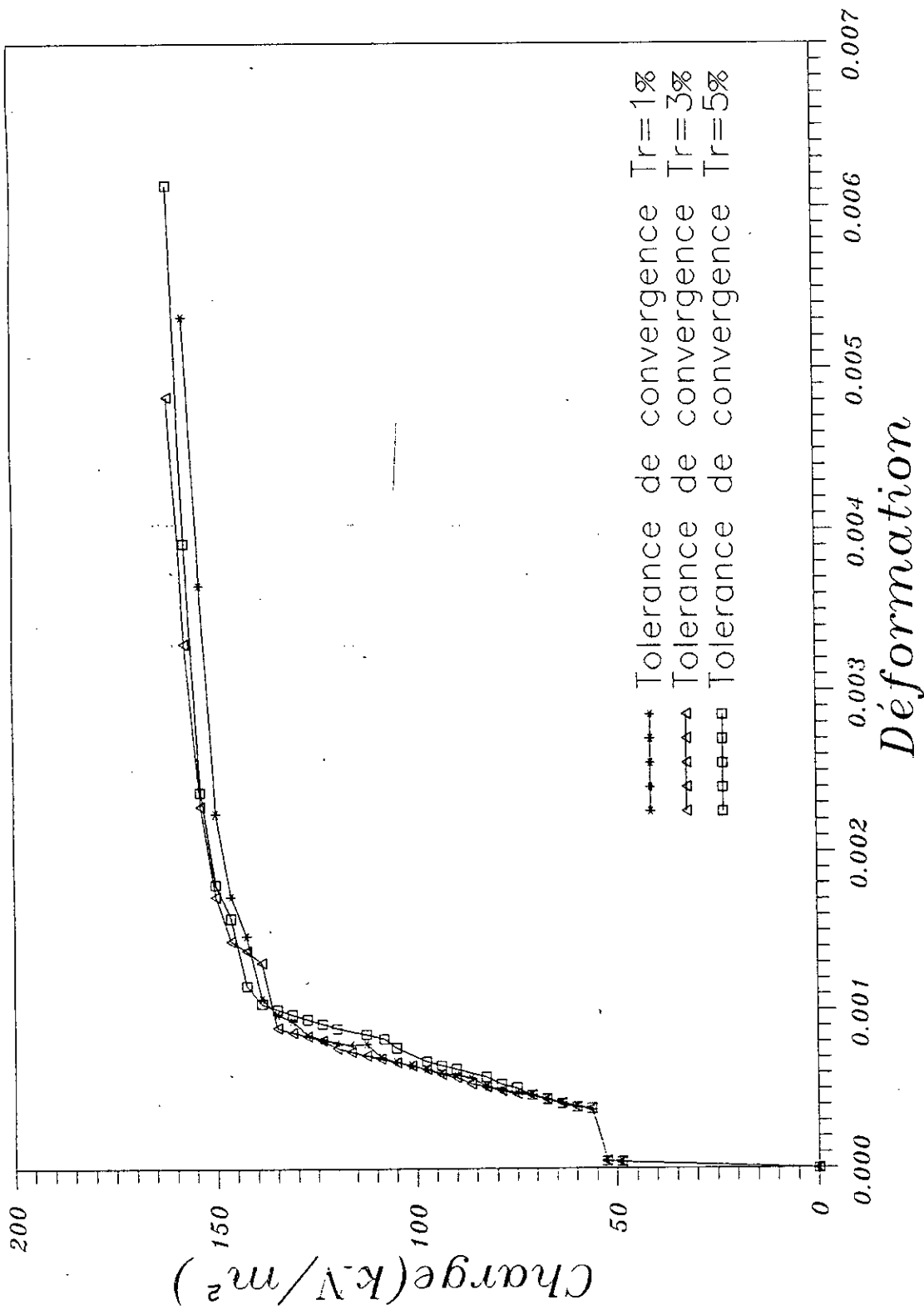


Fig (6.4.21): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.6, couche.no.11, PG.no.4) pour une dalle sous charge uniforme, nlayer=12

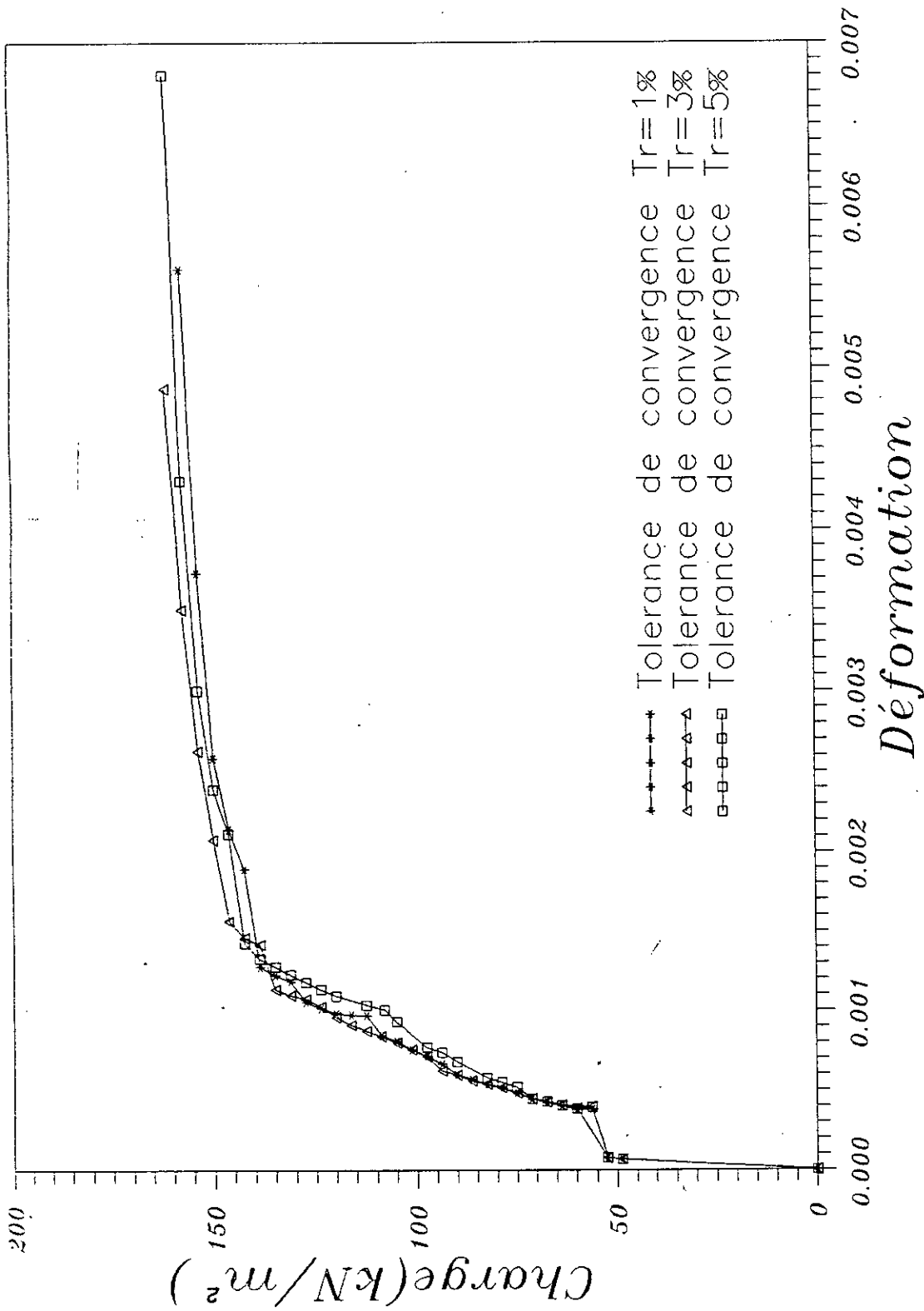


Fig (6.4.22): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.11, couche.no.11, PG.no.4) pour une dalle sous charge uniforme, nlayer=12

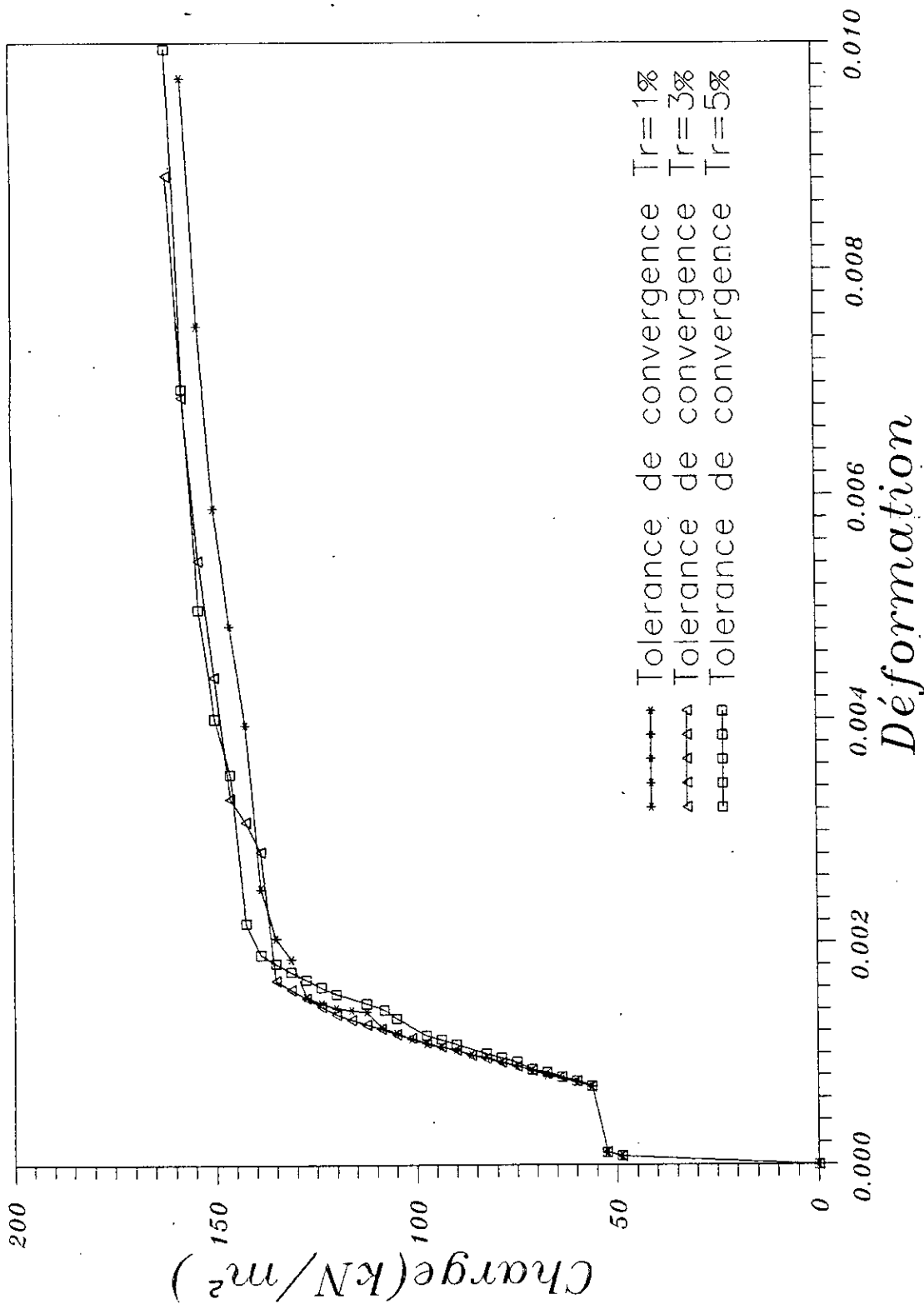


Fig (6.4.23): Courbes charge--déformation des armatures de la nappe inférieure (ét.16, couche.no.11, PG.no.4) pour une dalle sous charge uniforme, nlayer=12

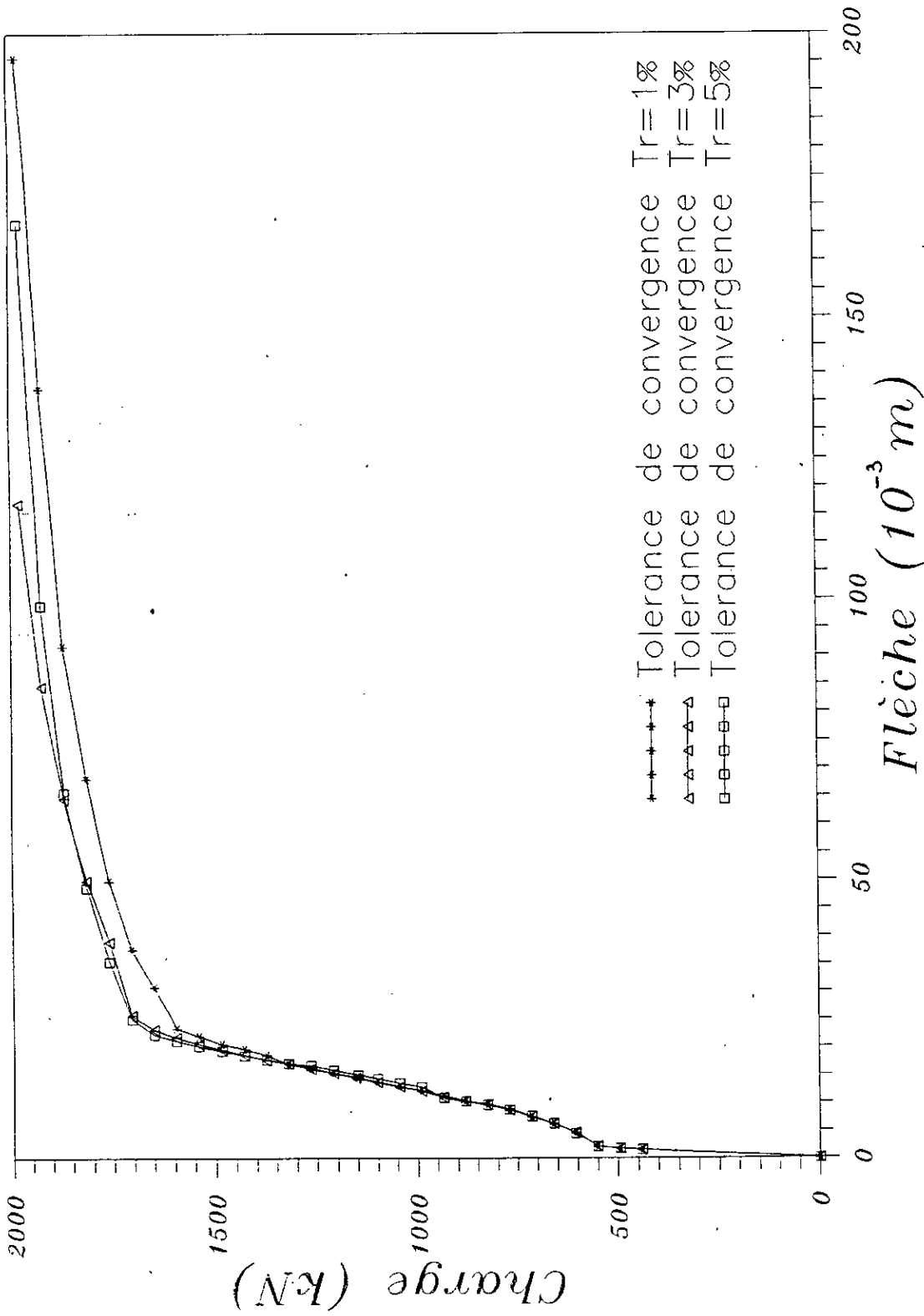


Fig. (6.4.24): Courbes charge-déflexion pour une dalle carrée simplement appuyée soumise à quatre charges concentrées avec $nlayer=12$

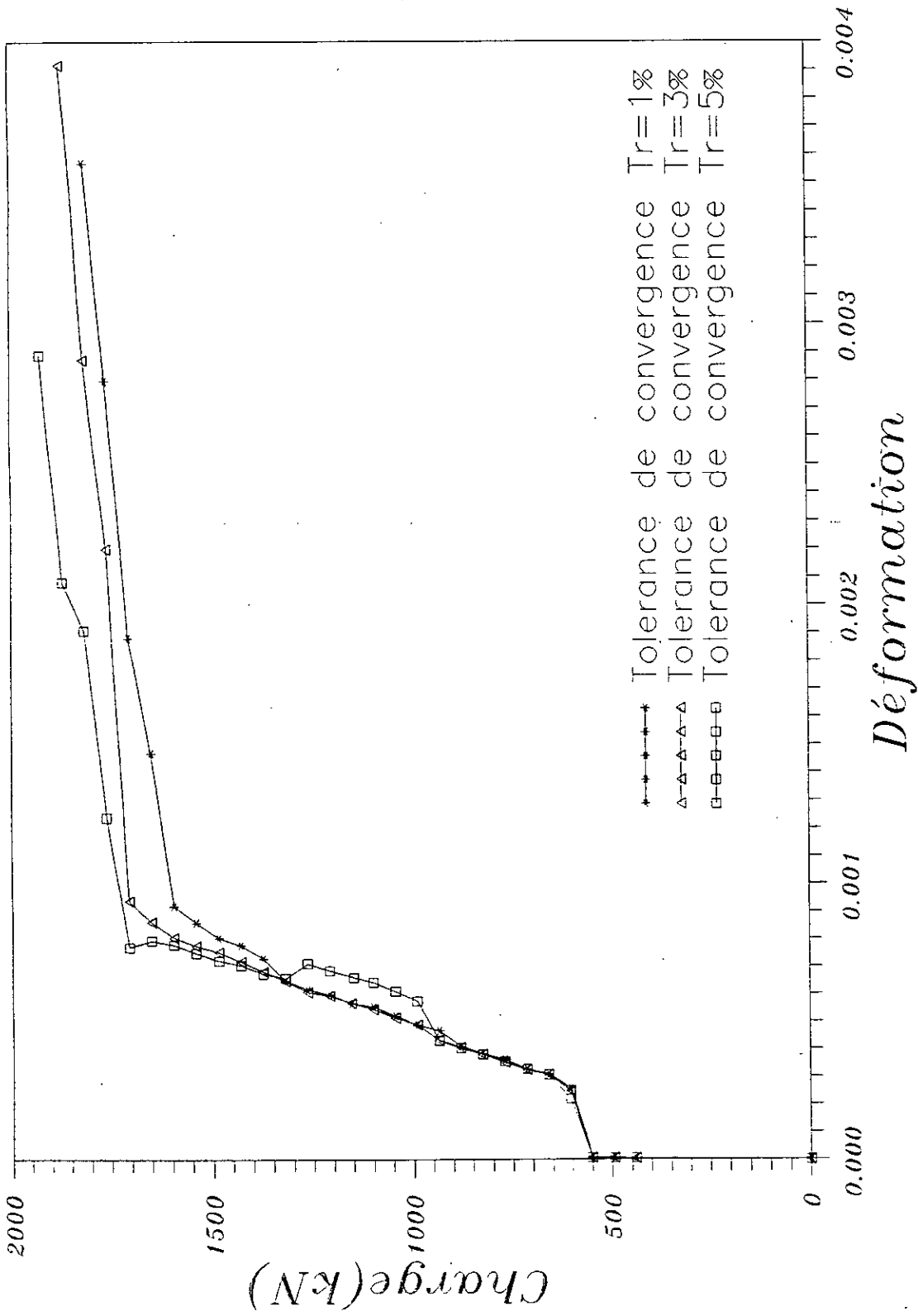


Fig. (6.4.25): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.1, couche.no.11, PG.no.4) pour une dalle sous quatre charges concentrées, nlayer=12

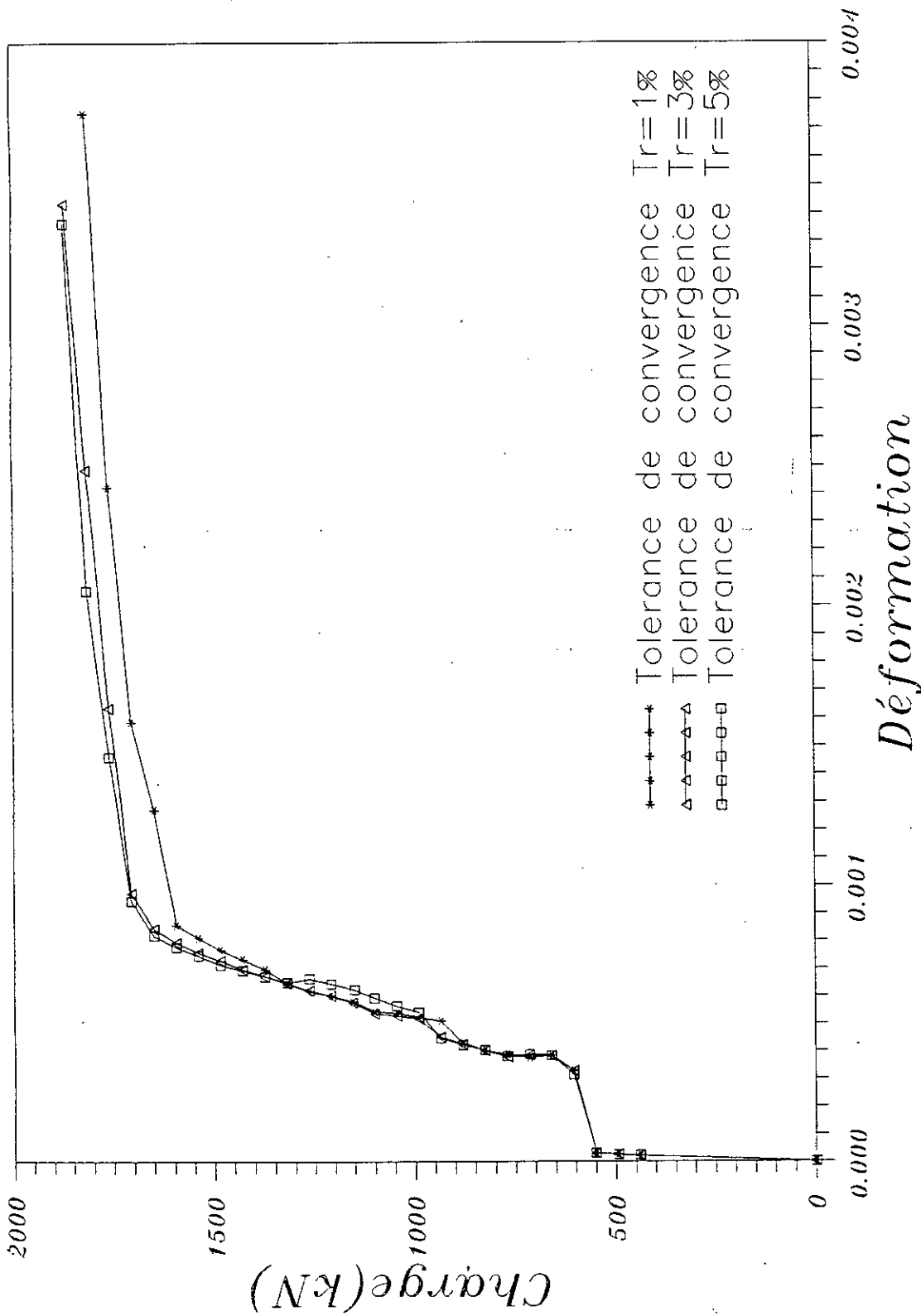


Fig (6.4.26): Courbes charge--déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.6, couche.no.11, PG.no.4) pour une dalle sous charge concentrées, nlayer=12

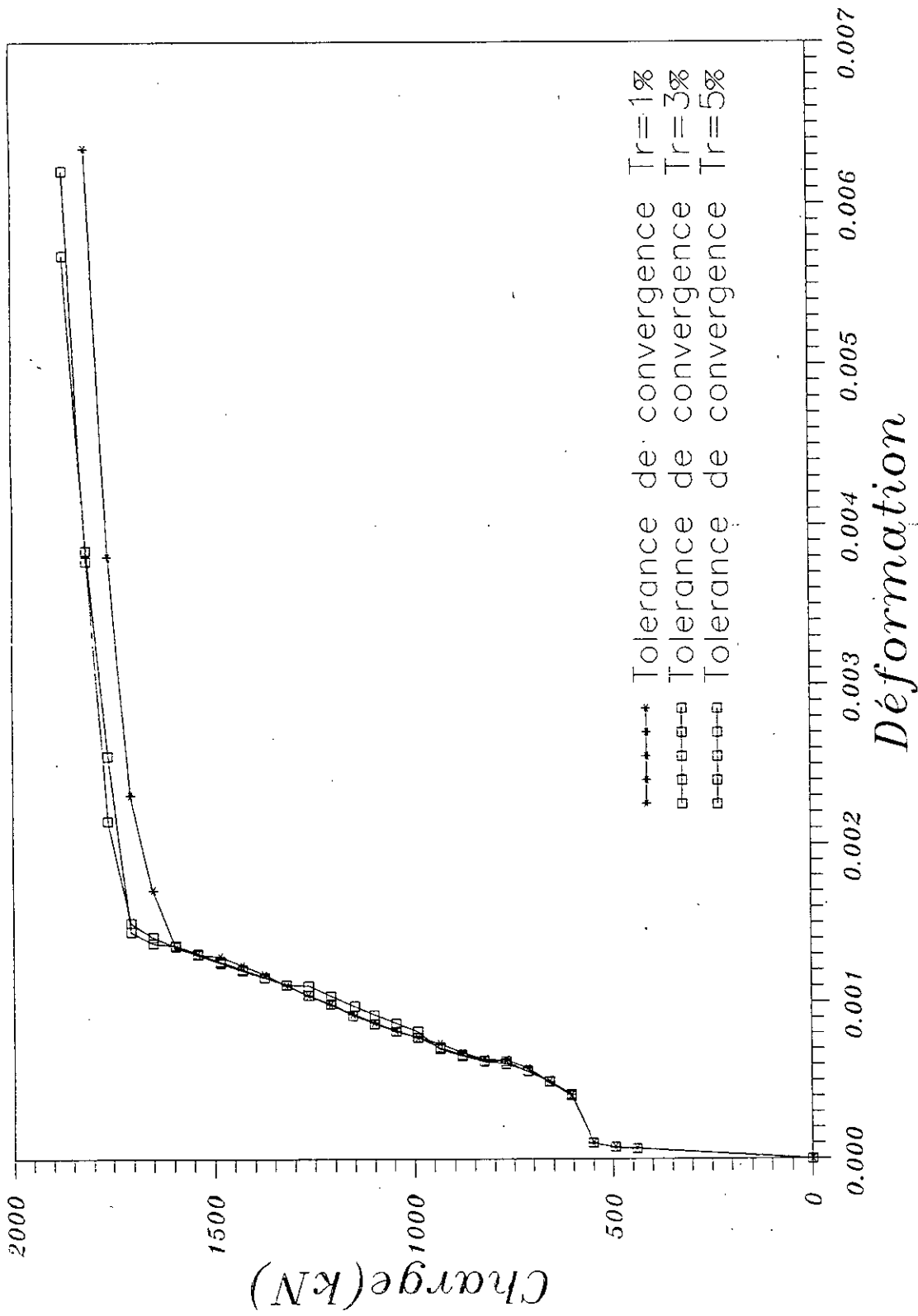


Fig (6.4.27): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.11, couche.no.11, PG.no.4) pour une dalle sous quatre charge concentrées, $n_{layer}=12$

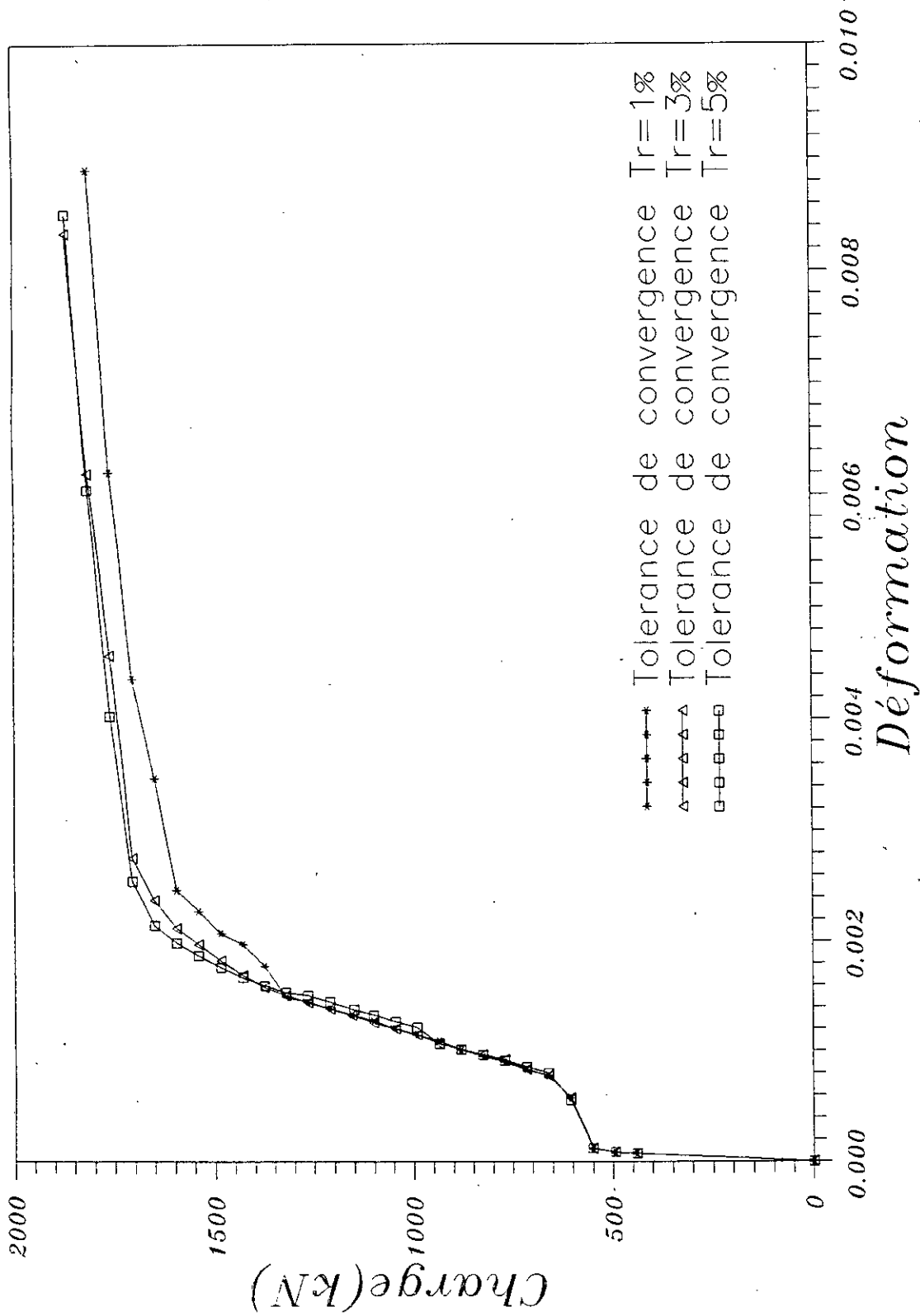


Fig (6.4.28): Courbes charge-déformation des armatures de la nappe inférieure (élt.16, couche.no.11, PG.no.4) pour une dalle sous quatre charge concentrées, $nlayer=12$

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

7.1. CONCLUSIONS

A partir de l'analyse théorique et numérique rapportée dans cette étude, on tire les conclusions suivantes:

- 1 - L'analyse des dalles en béton armé en utilisant la théorie de Mindlin par la méthode des éléments finis avec un élément isoparamétrique à 5 degrés de liberté donne des résultats satisfaisants.
- 2 - La modélisation multicouches permet de réduire la dimension du problème et permet aussi l'étude de la non linéarité flexionnelle à travers les couches.
- 3 - Le modèle multicouches adopté est capable de prédire le comportement des dalles en béton armé chargées jusqu'à la rupture.
- 4 - Les modèles rhéologiques des matériaux adoptés sont capables de reproduire le comportement dominant des telles structures en béton armé chargées jusqu'à la rupture.
- 5 - Le modèle des fissures de direction fixée peut être utilisé dans le cas des armatures orthogonales.
- 6 - La maille des éléments pour ce cas de type d'élément n'a pas vraiment une grande influence sur le coût de l'analyse.
- 7 - Le comportement prédit et le coût de l'analyse, ne sont pas influencés de manière significative par le nombre de couches adoptées pour le béton, d'où un nombre total de 8 couches est suffisant pour modéliser la dalle à travers son épaisseur.
- 8 - La flèche et la charge limite ultime ne sont pas très affectées par la valeur de la tolérance de convergence. La tolérance 5% est recommandée dans la phase élastique et début de plastification, par contre cette tolérance doit être réduite dans la phase de plastification jusqu'à la rupture.

7.2 RECOMMANDATIONS

Les recommandations et les suggestions sont les suivantes:

- 1 - La théorie de Mindlin est recommandée pour les dalles

épaisses où l'effet du cisaillement n'est pas négligeable (cas des dalles en béton armé).

2 - Les dalles testées dans la présente étude sont soumises à des charges particulièrement simples, alors d'autres études sont souhaitées pour le cas de chargement complexe.

3 - Le modèle de fissures discrètes peut être utilisé pour ce cas de types de structures en béton armé.

4 - Le critère de rupture pour le béton suggéré par Buyukozturk [13] peut être introduit dans le programme multicouches.

5 - Des modèles rhéologiques cycliques et dynamiques peuvent être incorporés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- Abdel-Hafez, L. M. "Direct design of reinforced concrete skew slabs". Ph.D Thesis, Dept. of Civ. Eng, University of Glasgow, oct. 1986.
- [2]- Abdel Rahman, H. H. and Hinton, E. "Non linear finite element analysis of reinforced concrete stiffened and cellular slabs". Computers and structures, Vol. 23, N° 3, 1986, PP.333-350.
- [3]- Abdel Rahman, H. H., Hinton, E. and Zienkiewicz, O. C. "Computational models for reinforced concrete systems". In advanced mechanics of reinforced concrete. Final report. IABSE colloquium, Delft 1981, PP 303-313.
- [4]- Aissaoui, F. et Benallegue, M. "Analyse flexionnelle des plaques multicouches par éléments finis conformes". Thèse de projet de fin d'études. 1989 Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.
- [5]- Al-Manaseer, A. A. " A nonlinear finite element study of reinforced concrete beams". Ph.D. Thesis, 1983 Glasgow University.
- [6]- Argyris, J. H. and Kelsey, G. "Energy theorems and structural analysis". Butterworth, 1960. (Collection of papers published in Aircraft Eng. in 1954 and 1955).
- [7]- Bashur, F. K. and Darwin, D. "Nonlinear model for reinforced concrete slabs". Journal of the structural Division, ASCE, st1, Jan. 1978, PP 157-170.
- [8]- Bathe, K. J. and Dvorkin, E. N. "A four node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation". Int. Jnl. for numerical methodes in Eng. Vol. 21, 1985, PP 367-383.

- [9]- **Bathe, K. J., Walczak, J., Welch, A. and Mistry, N.** "Nonlinear analysis of concrete structures". Computers and structures, Vol. 32, N°.79, June 1972, PP 63-70.
- [10]- **Behr, B. A., Minor, J. E., Linden, M. P. and Vallabhan, C. V. G.** "Laminated glass units under uniform lateral pressure". Journal of structural Eng. Vol. 111, N°. 5, May 1985, PP 1037-1050.
- [11]- **Bell, J. C. and Elms, D. G.** "Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs". Magazine of concrete research, Vol. 24, N°. 79, June 1972, PP 63-70.
- [12]- **Benradouane, M.** "Direct design of reinforced concrete slabs using non elastic stress fields". Master of science, Dept. of Civil Eng. University of Glasgow, Oct. 1988.
- [13]- **Buyukozturk, O.** "Nonlinear analysis of reinforced concrete structures". Computers and structures, Vol. 7, Feb. 1977, PP 149-156.
- [14]- **Cervenka, V. and Gerstle, K. H.** " Inelastic analysis of reinforced concrete panels". Publs. int. Ass. Bridge structural Eng. 1972, 32-11, PP 25-39.
- [15]- **Chang, T. Y., Taniguchi, H. and Chen, W. F.** "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete panels". Jnl. of str. Engineering, ASCE, Vol. 113, N°. 1, Jan. 1987, PP 122-140.
- [16]- **Chen, W. F.** "Plasticity in reinforced concrete". McGraw-Hill book company, 1982.
- [17]- **Chen, W. F. and Han, D. J.** "Plasticity for structural engineers". Springer-Verlag New-York 1988.
- [18]- **Chen, W. F. and Saleeb, A. F.** "Constitutive equations for engineering materiels". Volume 1: Elasticity and

modeling. Wiley- interscience publication, 1981.

- [19]- Chen, W. F. and Ting, E. C. "Constitutive models for concrete". Journal of the Eng. Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, N°. EM1, Feb. 1979, PP 1-19.
- [20]- Cheung, Y. K. "Finite strip method in structural analysis". Pergamon press, 1976.
- [21]- Cheung, Y. K. and Yieo, M. F. "A practical introduction to the finite element analysis". North American editorial office, 1979.
- [22]- Clough, R. W. "The finite element method in plane stress analysis". Proc. 2nd conf. on electronic computation, ASCE, New York 1960, PP 345-377.
- [23]- Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E. "Concepts and applications of finite element analysis". Third edition, Madison, 1989.
- [24]- Cope, R. J. "Flexural shear failure of reinforced concrete slabs bridges". Proc. inst. Civ. Engrs. Vol. 79, sep. 1985, PP 559-583.
- [25]- Cope, R. J. and Clark, L. A. "Concrete slabs analysis and design". Elsevier applied science publishers Ltd. 1984.
- [26]- Cope, R. J. and Rao, P. V. "Nonlinear finite element analysis of concrete slab structures". Proc. inst. Civ. Engrs. part 2, N°. 63, March 1977, PP 159-179.
- [27]- Djemaoun, A. "Etude statique et dynamique de poutres et dalles épaisses". Thèse de Magister, 1984, Université d'Oran.
- [28]- Dhatt, G. et Touzot, G. "Une présentation de la méthode des éléments finis". 2^{me} édition, Maloine S.A. Editeur

Paris 1984.

- [29]- Divakar, M. P., Fafitis, A. and Shah, S. P.
"Constitutive model for shear transfer in cracked concrete". Jnl. of struct. Eng. Vol. 113, N°. 5, May 1987, PP 1046-1062.
- [30]- Dotreppe, J. C., Schnobrich, W. C. and Perknold, D. A.
"Layered finite element procedure for inelastic analysis of reinforced concrete slabs". Publications of the Int. Association for Bridges on Str. Engrs., Vol. 33, N°. 2, 1973, PP 53-68.
- [31]- Ergatoudis, J. G., Irons, B. M. and Zinkiewicz, O. C.
"Curved isoparametric quadrilateral elements for finite element analysis". Int. jnl. of solids and structures, Vol. 4, 1968, PP 31-42.
- [32]- Frantzeskakis, C. and Theillout, J. N. "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures with a particular strategy following the cracking process". Computers and structures, Vol. 31, N°. 3, 1989, PP 395-412.
- [33]- Gajar, G. and Dux, P. F. "Crack band based model for finite element method analysis of concrete structures". Jnl. of str. Eng. Vol. 116, N°. 6, June 1990, PP 1696-1714.
- [34]- Gajar, G. and Dux, P. F. "Simplified nonorthogonal crack model for concrete". Jnl. of str. Eng. Vol. 117, NO. 1, Jan. 1991, PP 149-164.
- [35]- Gorji, M. "Nonlinear analysis of plates with plastic orthotropy". Jnl. of str. Engineering, ASCE, Vol. 111, N°. 10, Oct. 1985, PP 2214-2226.
- [36]- Gilbert, R. I. and Warner, R. F. "Tension stiffening in reinforced concrete slabs". Jnl. of the str. Division,

ASCE, Vol. 104, N°. st12, Dec. 1978, PP 1885-1900.

- [37]- **Gordaninejad, F.** "A finite element model for the analysis of thick, anisotropic, bimodular, fibrous-composite plates". Computers and structures, Vol. 31, N°. 6, 1989, PP 907-912.
- [38]- **Grayson, R and Stevens, L. K.** "Nonlinear analysis of structural systems of steel and concrete". Proceedings of the third Int. Conf. in Australia on finite element methods, July 1979, the University of south wales, PP. 179-196.
- [39]- **Gupta, A. K.** "Combined membrane and flexural reinforcement in plates and shells". Jnl. of str. Engineering, ASCE, Vol. 112, N°. 3, March 1986, PP 550-558.
- [40]- **Gupta, A. K. and Akbar, H.** "Cracking in reinforced concrete analysis". Jnl. of str. Engineering, Vol. 110, N°. 8, Aug. 1984, PP 1735-1747.
- [41]- **Gupta, A. K. and Maestrini, S. R.** "Post-cracking behavior of membrane reinforced concrete elements including tension stiffening". Jnl. of str. Engineering, Vol. 115, N°. 4, Apr. 1989, PP 957-976.
- [42]- **Gupta, A. K. and Sen, S.** "Design of flexural reinforcement in concrete slabs". Jnl. of thr str. Division, Apr. 1977, st4, PP 793-805.
- [43]- **Hand, A. K., Pecknold, D. A. and Schnobrich, W. C.** "Nonlinear layered analysis of reinforced concrete plates and shells". Jnl. of the str. Division, ASCE, st7, July 1973, PP 1491-1505.
- [44]- **Harmon, T. G. and Zhangyuan, N.** "Shear strength of reinforced concrete plates and shells determined by finite element analysis using layered elements". Jnl. of

str. Engineering, ASCE, Vol. 115, N°. 5, May 1989, PP 1141-1157.

- [45]- **Hinton, E. and Huang, H. C.** "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields". Computers and structures, Vol. 23, N°. 3, 1986, PP 409-432.
- [46]- **Hinton, E and Owen, D. R. J.** "Finite elements in plasticity". (Theory and practice), Pineridge press, 1980.
- [47]- **Hinton, E. and Owen, D. R. J.** "Finite element programming". Academic press 1977.
- [48]- **Hinton, E. and Owen, D. R. J.** "Finite element software for plates and shells". Pineridge press, 1984.
- [49]- **Hsieh, S. S., Ting, E. C. and Chen, W. F.** "Applications of a plastic-fracture model to concrete structures". Computers and structures, Vol. 28, N°. 3, 1988, PP 373-394.
- [50]- **Huang, H. C. and Hinton, E.** "A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation". Eng. computers, Vol. 1, Dec. 1984, PP 369-379.
- [51]- **Irons, B. M.** "A frontal solution program for finite element analysis". Int. jnl. num. Mech. Eng., Vol. 2, 1970, PP 2-32.
- [52]- **Irons, B. M.** "Engineering application of numerical integration in stiffness method". J.A.I.A.A., Vol. 14, 1966, PP 2035-2037.
- [53]- **Jain, S. C. and Kennedy, J. B.** "Yield criterion for reinforced concrete slabs". Journal of the str. Division, ASCE, March 1974, st3, PP 631-644.

- [54]- Jenq, Y. S. and Shah, S. P. "Crack propagation in fiber reinforced concrete". Jnl. of str. Engineering, Vol. 112, N°. 1, Jan. 1986, PP 19-34.
- [55]- Jofriet, J. C. and McNeice, G. M. "Finite element analysis of reinforced concrete slabs". Journal of the structural Division, March 1971, st3, PP 785-805.
- [56]- Discussion of ref. [54] by Cardenas, A. E. and Branson, D. E. "Finite element analysis of reinforced concrete slabs". Jnl. of the str. Division, st12, Dec. 1971, PP 2905-2911.
- [57]- Kam, J. Y. and Lai, M. D. "Multilevel optimal design of laminated composite plate structures". Computers and structures, Vol. 28, N°. 3, 1988, PP 373-394.
- [58]- Kant, T. and Hinton, E. "Mindlin plate analysis by the segmentation method". Jnl. Eng. Mech. Division, ASCE, Vol. 109, 1983, PP 537-556.
- [59]- Kemp, K. O. "The yield criterion for orthotropically reinforced concrete slabs". Int. jnl. Mech. science, Vol. 7, 1965, PP 737-746.
- [60]- Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. and Rusch, H. "Behavior of concrete under biaxial stresses". ACI Journal, Aug. 1969, PP 656-666.
- [61]- Lemaitre, J. and Chaboche, J. L. "Mécanique des matériaux solides". 2^{me} édition Dunod 1988.
- [62]- Lin, C. S. and Scordelis, A. C. "Nonlinear analysis of reinforced concrete shells of general form". Jnl. str. Division, ASCE, Vol. 101, st3, March 1975, PP 523-538.
- [63]- Ma, S. Y. A. and May, I. M. "The Newton-Raphson method used in the non-linear analysis concrete structures". Computers and structures, Vol. 24, N°. 2, 1986, PP 177-

- [64]- **Matthies, H. and Strang, G.** "The solution of nonlinear finite element equations". Int. jnl. for numerical methods in Engineering, Vol. 14, 1979, PP 1613-1626.
- [65]- **May, G. W. and Gerslste, K. H.** "Elasto-plastic bending of rectangular plates". Jnl. of the str. Division, ASCE, Vol. 97, st7, July 1971, PP 1863-1878.
- [66]- **Meroueh, K. A.** "On a formulation of a nonlinear theory of plates and shells with applications". Computers and structures, Vol. 24, N°. 5, 1986, PP 691-705.
- [67]- **Mindlin, R. D.** "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic plates". Jnl. appl. Mech., Vol. 37, 1951, PP 1031-1036.
- [68]- **Mirza, S. A. and MacGregor, J. G.** "Variability of Mechanical properties of reinforcing bars". Jou. of the str. Division, ASCE, Vol. 105, N°. st5, May 1979, PP 921-937.
- [69]- **Mottram, J. T.** "A simple non-linear analysis of multi-layered rectangular plate". Computers and structures, Vol. 26, N°. 4, 1987, PP 597-608.
- [70]- **Mottram, J. T. and Selby, A. R.** "Bending of thin laminated plates". Computers and structures, Vol. 25, N°. 2, 1987, PP 271-280.
- [71]- **Nawy, E. G. and Orenstein, G. S.** "Crack width control in reinforced concrete two-way slabs". Jnl. of the str. Division, ASCE, March 1970, st3, PP 701-721.
- [72]- **Nilson, A. H.** "Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method". ACI journal, Sep. 1968, PP 757-766.
- [73]- **Phillips, D. V. and Zienkiewicz, O. C.** "Finite element

nonlinear analysis of concrete structures". Proc. Instn. Civ. Engrs. part 2, 61, March 1976, PP 59-88.

- [74]- Rajagopal, S. V., Singh, G. and Rao, Y. V. K. S. "Non-linear analysis of sandwich plates". Int. jnl. Non-linear Mechanics, Vol. 22, N°. 2, 1987, PP 161-172.
- [75]- Rajasekaran, S. and Murray, M. D. W. "Incremental finite element matrices". Jnl. of the str. Division, ASCE, Dec. 1973, st12, PP 2423-10231.
- [76]- Rangan, B. V. "Simplified approach to lower bound solutions of slabs". Jnl. of the str. Division, ASCE, March 1970, st3, PP 747-749.
- [77]- Razaqpar, A. G. and Nofal, M. "Analytical modelling of nonlinear behavior of composite bridges". Jnl. of str. Engineering, vol. 116, N°. 6, June 1990, PP 1715-1733.
- [78]- Taig, I. G. "Structural analysis by the matrix displacement method". Eng. Elastic Aviation repport N°. sol7, 1961.
- [79]- Taylor, R., Maher, D. R. H. and Hayes, B. "Effect of the arrangement of reinforcement on the behavior of reinforced concrete slabs". Magazine of concrete reseach, Vol. 18, N°. 55, June 1966, PP 85-93.
- [80]- Timoshenko, S. et Woinowsky-Kreiger, S. "Théorie des plaques et coques". 2^{me} édition Americaine, Librairie Polytechnique Beranger Ch. 1961.
- [81]- Turner, M. J., Clough, R. W., Marlin, H. C. and Topp, L. J. "Stiffness and deflection analysis of complex structures". Jnl. Aero. Sci., Vol. 23, 1956, PP 805-823.
- [82]- Vallabhan, C. V. G., Minor, J. E. and Nagalla, S. R. "Stress in layered glass units and monolithic glass plates". Jou. of str. Engineering, Vol. 113, N°. 1, Jan.

1987, PP 36-43.

- [83]- Valliappan, S. and Doolan, J. F. "Non-linear stress analysis of reinforced concrete". Jnl. of the str. Division, ASCE, Vol. 98, N°. St4, Proc. Paper 8815, Apr. 1972, PP 885-898.
- [84]- Vecchio, F. and Collins, M. P. "Stress-Strain characteristics of reinforced concrete in pure shear". Advanced Mechanics of reinforced concrete IABSE Rapport, Vol. 31, Delft, the Nether Lands, 1981, PP 35-42.
- [85]- Wanchoo, M. K. and May, G. W. "Cracking analysis of reinforced concrete plates". Jnl. of the str. Division, ASCE, Jan. 1974, St1, PP 201-215.
- [86]- Wegmuller, A. W. "Elastic-plastic finite element analysis of plates". Proc. instn. Civil Engrs., Part 2, Vol. 57, Sep. 1974, PP 535-543.
- [87]- Wegmuller, A. W. "Full-range analysis of eccentrically stiffened plates". Jnl. of the str. Division, ASCE, Vol. 100, N°. st1, Jan. 1974, PP 143-159.
- [88]- Wu, Z., Yoshikawa, H. and Tanabe, T. "Tension stiffness model for cracked reinforced concrete". Jnl. of str. Engineering, Vol. 117, N°. 3, March 1991, PP 715-731.
- [89]- Zienkiewicz, O. C. "La méthode des éléments finis". 3^{me} édition, Mc Graw-Hill Inc., Paris 1979.
- [90]- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. "The finite element method" 4th Edition M. Graw-Hill 1989 (Tome 1), 1991 (tome 2).
- [91]- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. Too, J. M. "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells". Int. Jnl. for Numerical method in Engineering, Vol. 3, 1971, PP 275-290.