

M0004/00B

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

Thèse de Magister

Présentée par :

HACHI Brahim El Khalil
Ingénieur d'Etat en génie mécanique (E.N.P).

Spécialité : Construction mécanique

Thème :

**CONTRIBUTION À L'APPLICATION DE LA
MÉTHODE DE DISCONTINUITÉ DE
DÉPLACEMENT (M-D-D) EN
TRIDIMENSIONNEL**

Soutenue le : 06 mars 2000.

Devant le jury :

S. RECHAK	Professeur	E.N.P	Président.
A. BALI	Professeur	E.N.P	Examineur.
B. KEBLI	Ph. D.	E.N.P	Examineur.
K. AZOUAOUI	C.C	U.S.T.H.B	Examineur.
Y. BELKACEMI	Docteur	E.N.P	Rapporteur.

ملخص

يهدف هذا العمل الى دراسة الأوساط المتجانسة، ذات المرونة الخطية و ثلاثية الأبعاد بواسطة إحدى الطرق العددية و المتمثلة في طريقة الإنتقالات غير المستمرة. في بداية الأمر قمنا بتشكيل القاعدة الرياضية لهذه الطريقة في الفضاء ثم حولناها الى الصيغة العددية، و في النهاية أنجزنا برنامجاً حسابياً يمكننا من إيجاد حقل الإجهادات و الإنتقالات بالنسبة للأجسام ثلاثية الأبعاد بالإضافة الى حساب معامل شدة الإجهادات بالنسبة للأوساط المشققة.

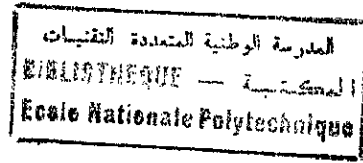
ABSTRACT

This work consists to study the three-dimensional homogenous isotropic bodies in linear elasticity with the displacement discontinuity method. First, we built the mathematical formulation of the method in 3-D. We built the numerical procedure, and construction of the computer program.

With this program we determine the stresses and the displacements for the 3-D bodies and compute the stress intensity factors for the crack problems.

RESUME

Ce travail porte sur la modélisation des milieux tridimensionnels, homogènes, isotropes et linéairement élastiques par la méthode des discontinuités de déplacement. En premier lieu, la construction de la formulation mathématique de la méthode en 3-D, puis la mise en forme de la procédure numérique et enfin l'élaboration d'un code de calcul. Avec ce code, on peut déterminer le champ de contraintes et le champ de déplacements pour les milieux tridimensionnels, ainsi le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour les problèmes de fissuration en trois dimensions.



REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier très sincèrement *Mr Y. BELKACEMI*, directeur de cette thèse qui, tout au long de ce travail, n'a cessé de me diriger en me laissant une grande liberté dans mes initiatives.

Mes remerciements à Monsieur le président et Messieurs les membres du jury qui ont accepté d'évaluer cette thèse.

Je remercie aussi tout le personnel de bibliothèque de l'école et en particulier *Mr A. CHETTOUH*.

Mes remerciements s'adressent également à *Mr A. RABIAI*, *Mr A. ZOBIRI* et à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

SOMMAIRE

Introduction	1
1- Généralités	4
1.1- Généralités sur la mécanique des milieux continus	4
1.1.1- Contrainte	4
1.1.2- Déformation	4
1.1.3- Loi de Hooke généralisée	5
1.2- généralités sur la mécanique de la rupture	6
1.2.1- Introduction	6
1.2.2- Facteur d'intensité de contrainte	6
1.3- Transformation des coordonnées	8
2- Présentation de la méthode des discontinuités de déplacement en 3-D	10
2.1- Introduction	10
2.2- Formulation mathématique de la méthode	10
2.2.1- Problèmes bidimensionnels	10
2.2.2- Problèmes tridimensionnels	12
2.3- Intégration des fonctions de Green en 3-D	13
2.4- Etude des cas limites des fonctions primitives	17
2.5- Problème de fissure	20
2.6- Procédure numérique	23
2.7- Relations de transformations	26
2.8- Coefficients d'influence	28
2.9- Conditions de symétrie	30
2.10- Calcul du facteur d'intensité de contrainte	34
2.11- Code de calcul réalisé	36
2.11.1- Structure du code de calcul	36
2.11.2- Temps d'exécution du code de calcul	38
2.11.3- Présentation du code de calcul	39
3- Exemples, résultats et interprétations	40
3.1- Introduction	40
3.2- Première catégorie d'exemples	40
3.2.1- Détermination du champ de contraintes pour un milieu infini contenant une fissure circulaire chargée intérieurement	40
3.2.2- Détermination du champ des contraintes pour un milieu semi-infini chargé sur une bande de largeur $2a$	45
3.2.3- Détermination du champ des contraintes pour un milieu semi-infini chargé sur un rectangle $2a \times 2b$	51
3.2.4- Détermination du champ des contraintes sous une bille exerçant une force P sur un milieu semi-infini	53
3.2.5- Conclusion	60
3.3- Deuxième catégorie d'exemples (Problèmes de mécanique de la rupture)	61
3.3.1- Détermination du facteur d'intensité de contrainte pour une éprouvette fissurée	61
3.3.2- Détermination du facteur d'intensité de contrainte sur le contour de fissure elliptique dans un milieu infini	64
3.3.3- Détermination du facteur d'intensité de contrainte pour un corps contenant une fissure semi-elliptique débouchante	66
3.3.4- Détermination du facteur d'intensité de contrainte pour un corps contenant une fissure elliptique au voisinage d'une frontière du domaine et sollicitée par une pression variant linéairement sur le petit axe de l'ellipse	68
3.3.5- Conclusion	70
Conclusion générale	71
Références bibliographiques	73
Annexe	76

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Trois principales méthodes numériques sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de structures en mécanique : méthode des éléments finis, méthode des différences finies et la méthode des équations intégrales de frontière. Fréquemment, nous relevons des études comparatives de l'efficacité de la méthode des éléments finis par rapport à la méthode des équations intégrales et nous relevons que l'on oppose l'une par rapport à l'autre.

Chacune des deux méthodes numériques a ses avantages, cependant la méthode des éléments finis reste la plus populaire. Néanmoins, la méthode des équations intégrales offre des avantages certains dans des configurations de problèmes dont :

- La résolution en domaines infinis
- La résolution de problèmes de corps fissurés.

Le dernier domaine d'application en tridimensionnel reste un champ d'étude encore à développer.

La famille des équations intégrales de frontière est divisée en deux groupes : la méthode directe et la méthode indirecte.

La méthode directe est la plus développée « Brebbia (1987) » et traite de l'ensemble des problèmes de mécanique. L'approche indirecte, plus intuitive, est la moins populaire et regroupe la méthode des contraintes fictives ou la méthode de discontinuité de contrainte et la méthode de discontinuité de déplacement. Cette méthode s'est avérée la plus performante pour traiter les matériaux fissurés et les problèmes de contact.

Cette méthode a été introduite en premier grâce aux travaux de « Panasyuk et al. (1977) » et formulée en champ complexe. Cette investigation en champ complexe a permis de mettre en œuvre des éléments de discrétisation de différents types et de différents ordres « Bouhaddane (1987) », « Belkacemi (1990) ». Différents travaux ont pu aboutir à l'exploitation de cette formulation pour l'étude de la propagation de fissures en ouverture ou en contact en utilisant différents types d'éléments

« Belkacemi (1990) », « Miguez et al. (1989) ». La formulation en champ complexe est par essence en bidimensionnel. La formulation en champ complexe est par essence en bidimensionnel.

La formulation de la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel en coordonnées cartésiennes est due à « Crouch (1976 & 1983) ». Cette contribution a permis d'assurer une plus grande popularité de la méthode et a pu être utilisée dans la modélisation de problème de contact de failles « Crawford, (1983) », ruptures autour de cavités « Kondo (1989) » et en élasto-dynamique. Son exploitation pour les problèmes non linéaires est au stade d'étude « Kondo (1999) ».

Les travaux de « Wiles et al. (1983) » constituent la première publication concernant l'application de la méthode de discontinuité de déplacement en tridimensionnel.

Le présent travail prend sa source dans cet article et constitue une contribution pour l'application de la méthode de discontinuité de déplacement en tridimensionnel et son test particulièrement en mécanique de la rupture.

Cette étude comporte trois chapitres.

Le premier chapitre est une introduction à la mécanique des milieux continus et de la mécanique de la rupture.

Le deuxième chapitre rassemble un lourd travail analytique et numérique. Le travail analytique est une étude sur les fonctions de Green, l'étude des problèmes liées aux singularités etc... La partie numérique concerne la construction du code de calcul pour simuler les structures tridimensionnelles par la méthode de discontinuité de déplacement.

Nous terminons l'étude par le troisième chapitre. Ce chapitre englobe les tests de validation concernant des cas ayant des solutions analytiques et des tests de simulation. Le chapitre est divisé en deux parties :

La première partie d'exemples concerne des structures tridimensionnelles continues.

La deuxième partie d'exemple concerne des structures tridimensionnelles présentant des fissures interne ou débouchantes. Les résultats sont discutés en terme de contraintes ou en terme de facteur d'intensité de contrainte.

L'étude est terminée par une conclusion générale.

GÉNÉRALITÉS

GÉNÉRALITÉS

1.1- Généralités sur la mécanique des milieux continus

1.1.1 Contrainte

Le concept de contrainte est utilisé pour spécifier la façon par laquelle les forces sont transmises à travers un solide continu. Les contraintes agissantes sur les plans dont les normales sont parallèles aux axes du repère sont appelées les composantes σ_{ij} du tenseur de contrainte $\bar{\bar{\sigma}}$. Le premier indice (i) se rapporte à la direction de la normale au plan sur lequel la contrainte agit, le second (j) se rapporte à la direction de la contrainte. Les contraintes de traction sont comptées positives.

1.1.1.1 Equation d'équilibre

Un solide est en équilibre s'il satisfait les conditions :

- Le tenseur de contrainte est symétrique $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.
- les composantes du tenseur de contrainte satisfont l'équation d'équilibre suivante :

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad (1.1.1)$$

où $\sigma_{ji,j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$ et F_i sont les forces de volume.

1.1.1.2 Vecteur contrainte.

Les contraintes peuvent être représentées par un vecteur appelé vecteur contrainte donné par $\vec{T} = (t_1, t_2, t_3)$.

Les composantes du vecteur contrainte sont reliées aux composantes de la contrainte et la normale à la facette considérée par :

$$t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad (1.1.2)$$

1.1.2 Déformation

Le concept de déformation est utilisé pour spécifier la façon par laquelle un solide continu se déforme quand il est soumis à des contraintes. Dans plusieurs problèmes pratiques, les déformations sont des quantités infinitésimales. L'état de

déformation en un point du solide est donné par les composantes du tenseur de déformation. Elles sont définies en termes des déplacements $u_i = (u_1, u_2, u_3)$ en un point (x_1, x_2, x_3) par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}$$

Soit: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$

1.1.3 Loi de Hooke généralisée

Le comportement d'un solide est élastique s'il y a une correspondance biunivoque entre les contraintes et les déformations. Un solide est linéairement élastique si chacune des composantes des contraintes peut être exprimée par une combinaison linéaire de toutes les composantes de déformations. La loi de comportement dans ce cas est appelée loi de Hooke généralisée est telle que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{trace} \bar{\sigma} \delta_{ij} \quad (1.3.1)$$

Où E est le module de Young, ν le coefficient de poisson et $G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)}$.

Une relation inverse peut être trouvée pour σ_{ij} en fonction de ε_{ij} .

La notation indicielle d'un problème d'élasticité peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{j,i} + F_i &= 0 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} &= 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

où $\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{pour } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases}$

1.2- Généralités sur la mécanique de la rupture

1.2.1 Introduction

La rupture est la séparation ou la fragmentation, d'un corps en deux ou plusieurs parties sous l'effet des contraintes. Le processus de rupture peut être considéré comme le fait combiné de deux phénomènes que sont l'initiation et la propagation de la fissure « Irwin G.R. (1987) ».

On dénombre deux grandes catégories de rupture des matériaux ; *la rupture ductile* et *la rupture fragile*. Une rupture ductile est caractérisée par une zone de déformation plastique appréciable avant et durant la propagation de fissure. La rupture fragile dans les solides (*cas de notre étude*) est caractérisée par une vitesse de propagation de fissure élevée sans grandes déformations et très peu de micro-déformations. La rupture fragile a tendance à s'accroître avec des températures basses, des taux de déformations rapides et une triaxialité du champ des contraintes « Labbens R. (1980) ».

On va essayer dans cette section de présenter une idée sommaire de la mécanique de la rupture. La rupture produite par chargement uniaxial indépendamment de la vitesse et de la température.

1.2.2 Facteur d'intensité de contrainte

Le facteur d'intensité de contrainte est un paramètre couramment utilisé pour caractériser le comportement à la fissuration des matériaux. On le définit comme une quantité qui caractérise la singularité du champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure. Une définition plus intéressante consiste à l'introduire par le champ de déplacement relatif des deux lèvres de la fissure « Bui H.D. (1978) ». On définit trois modes simples d'ouverture de la fissure.

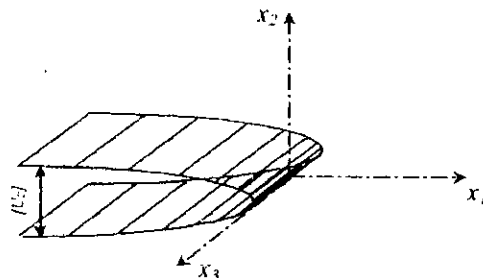


Figure 1.2.1 Exemple d'une ouverture normale de la fissure.

Ces modes sont définis selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissure :

- Mode I : $[U_1] = 0 [U_2] \neq 0 [U_3] = 0$
 - Mode II : $[U_1] \neq 0 [U_2] = 0 [U_3] = 0$
 - Mode III : $[U_1] = 0 [U_2] = 0 [U_3] \neq 0$
- (1.2.1)

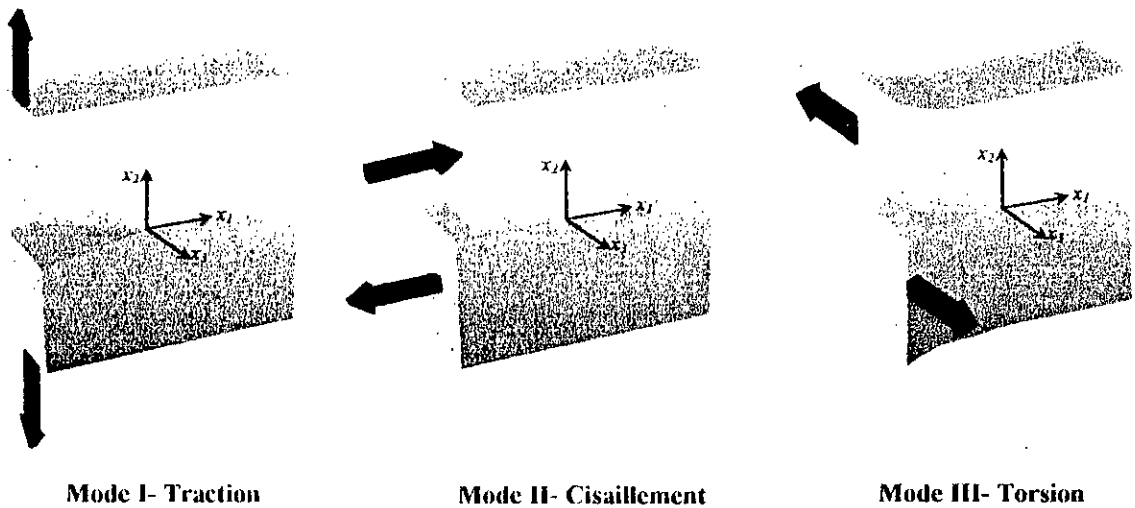


Figure 1.2.2 Les trois modes de rupture.

Dans le cas général, les problèmes tridimensionnels d'élasticité présentent de grandes difficultés et peu de solutions explicites existent pour caractériser les champs de contraintes et déplacements au voisinage de fissures surfaciques dans les milieux à trois dimensions.

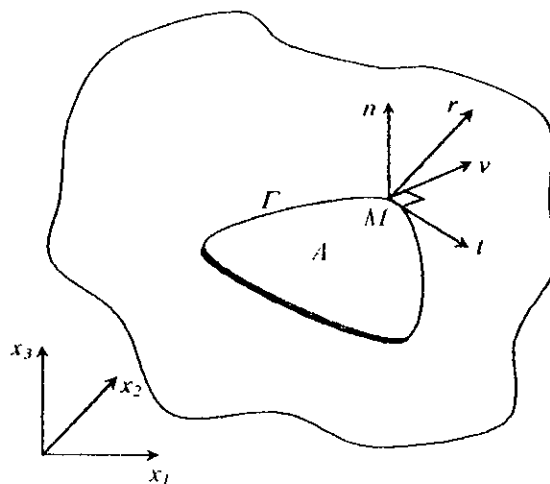


Figure 1.2.3 Fissure dans un milieu tridimensionnel.

Considérons la fissure présentée sur la figure (1.2.3) de surface A et de ligne de front Γ dans un milieu tridimensionnel repéré par rapport à un repère globale (O, x_1, x_2, x_3) dont l'axe x_3 est normale à la fissure et soit le repère local (M, n, t, v) orthonormé sur lequel on mesure l'abscisse r du plan (M, n, v) avec t tangente à Γ en M .

Les facteurs d'intensité de contrainte en M sont définis en utilisant la méthode de WESTERGAARD, comme suit « Lemaitre J. et al. (1989) » :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{nn} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_{II}] \right) \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{nt} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_{IV}] \right) \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{tt} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_{VI}] \right)
 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

1.3- Transformation des coordonnées

En pratique, on travaille souvent avec deux systèmes de coordonnées cartésiens ou plus. Pour cela il est nécessaire d'introduire les relations qui permettent le passage d'un système à un autre. Prenons par exemple les systèmes x_i et \bar{x}_i illustrés sur la figure (1.3.1).

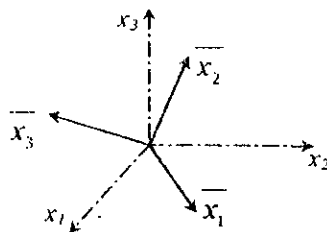


Figure 1.3.1 Orientations relatives des deux systèmes.

Soit un vecteur \vec{V} exprimé dans le repère x_i par ces composantes :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{1.3.1}$$

Pour exprimer ce vecteur dans le repère \bar{x}_i on doit calculer la matrice de passage du repère x_i au repère \bar{x}_i : $[P]$. La matrice $[P]$ est définie comme suit :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_4 & p_7 \\ p_2 & p_5 & p_8 \\ p_3 & p_6 & p_9 \end{bmatrix} \quad (1.3.2)$$

où :

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}_{(x_i)}, \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix}_{(x_i)}, \quad \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{bmatrix}_{(x_i)} \quad (1.3.3)$$

L'expression \bar{V} dans le repère \bar{x}_i est donnée par la relation suivante :

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix}_{(x_i)} = \left([\bar{V}]_{(x_i)} [P] \right)^t = \left([v_1 \quad v_2 \quad v_3] \begin{bmatrix} p_1 & p_4 & p_7 \\ p_2 & p_5 & p_8 \\ p_3 & p_6 & p_9 \end{bmatrix} \right)^t \quad (1.3.4)$$

Si on considère maintenant une matrice $[A]$ donnée dans le repère x_i par :

$$[A]_{(x_i)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix}_{(x_i)} \quad (1.3.5)$$

L'expression de cette matrice dans le repère \bar{x}_i est donnée par :

$$[A]_{(x_i)} = [P]^{-1} [A]_{(x_i)} [P] = \begin{bmatrix} p_1 & p_4 & p_7 \\ p_2 & p_5 & p_8 \\ p_3 & p_6 & p_9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix}_{(x_i)} \begin{bmatrix} p_1 & p_4 & p_7 \\ p_2 & p_5 & p_8 \\ p_3 & p_6 & p_9 \end{bmatrix} \quad (1.3.6)$$

Dans notre travail, nous allons utiliser les relations (1.3.4) dans les transformations des coordonnées pour le vecteur position et le vecteur déplacement, et les relations (1.3.6) pour les tenseurs de contrainte.

PRÉSENTATION DE
LA M.D.D EN
TRIDIMENSIONNEL

2.1 Introduction

Comme pour toutes les méthodes numériques, la méthode de discontinuité de déplacements doit avoir un appui mathématique pour sa formulation. Les fonctions de Green constituent la base de cet appui. Elles sont développées en bidimensionnel en premier temps puis en tridimensionnel. Elles donnent sous une forme intégrale les contraintes et les déplacements d'un point arbitraire situé dans un milieu (Ω) linéairement élastique dus à une discontinuité de déplacement de surface A .

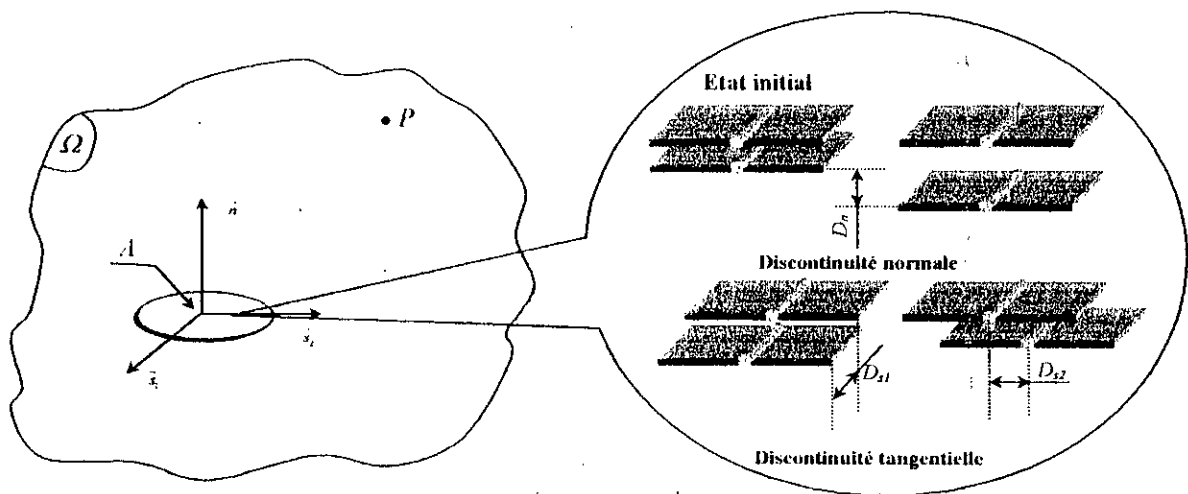


Figure 2.1.1 Discontinuité de déplacement dans un milieu élastique.

2.2 Formulation mathématique de la méthode

2.2.1 Problèmes bidimensionnels

Pour les problèmes bidimensionnels la solution est obtenue par Crouch en basant sur les équations d'équilibre. La deuxième formulation de la méthode est celle utilisant les fonctions de Green. L'avantage de cette dernière est d'avoir la possibilité d'utiliser des éléments non-constants (*linéaire, quadratique, ...*), comme on peut le voir dans les paragraphes suivants.

Considérons une fissure élémentaire de longueur L caractérisée par ses composantes de discontinuité de déplacement D_i (voir la figure 2.2.1).

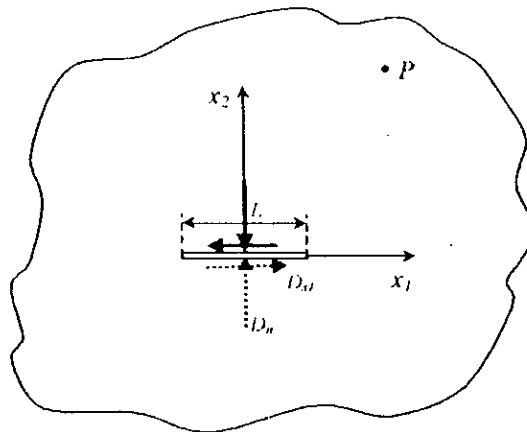


Figure 2.2.1 La discontinuité de déplacement dans un milieu plan.

Les déplacements u_i et les contraintes σ_{ij} en point arbitraire $P(x_1, x_2)$ du plan sont données par les relations indicielles suivantes « Wiles T.D. et al.(1983) » :

$$\begin{aligned}
 u_i(x_1, x_2) &= \int_L f_{ij}(x_1 - x'_1, x_2) D_j(x'_1) dx'_1 \\
 \sigma_{ij}(x_1, x_2) &= \int_L g_{ijk}(x_1 - x'_1, x_2) D_k(x'_1) dx'_1
 \end{aligned}
 \quad (i, j, k \text{ 1 à 2}) \quad (2.2.1)$$

avec :

- u_i : composantes de déplacement du point P.
- σ_{ij} : composantes de contrainte du point P.
- L : longueur de la fissure élémentaire.
- D_1 : composante tangentielle de la discontinuité de déplacement.
- D_2 : composante normale de la discontinuité de déplacement.
- f_{ij} : fonctions de Green concernant les déplacements.
- g_{ijk} : fonctions de Green concernant les contraintes.

Si on prend les D_i constantes, on tombe sur la solution de Crouch. Dans le cas général D_i sont des fonctions polynomiales (élément d'ordre supérieur) :

$$D_i = (a_0)_i + (a_1)_i x_1 + (a_2)_i x_1^2 + \dots + (a_n)_i x_1^n \quad (i=1 \text{ à } 2) \quad (2.2.2)$$

Dans le cas de la fissuration, la méthode de discontinuité de déplacement (M.D.D) représente une bonne approche pour la détermination du champ de contrainte et de déplacement mais l'étude de rupture par le champ de contrainte nécessite l'utilisation d'un élément spécial qui permet d'approcher le plus possible du bout de

fissure en évitant la singularité sur les contraintes. Pour cela Crouch a choisi l'élément de variation parabolique suivante « Crouch S.L. et al. (1983) » :

$$D_i = a_i \sqrt{x_i} \quad (2.2.3)$$

Mais un meilleur moyen de traiter la rupture est de travailler avec l'ouverture de fissure, dans notre cas nous utilisons l'intensité de discontinuité pour déduire le facteur d'intensité de contrainte en mode I, mode II ou mode III.

Les fonctions de Green en bidimensionnel sont présentées dans la partie Annexe.

Beaucoup de problèmes qui possèdent une géométrie complexe, ne peuvent pas être traités en bidimensionnel. Les fonctions de Green présentent l'avantage du fait qu'on peut les prolonger à l'analyse tridimensionnelle.

2.2.2 Problèmes tridimensionnels

Comme en bidimensionnel la solution en terme des fonctions de Green pour un milieu homogène, isotrope et linéairement élastique (voir la figure 2.2.2), contenant une fissure élémentaire surfacique est donnée en 3D sous la forme suivante « Wiles T.D. et al.(1983) » :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \iint_A f_{ij}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) D_j(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2$$

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \iint_A g_{ijk}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) D_k(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 \quad (i, j, k=1 \text{ à } 3) \quad (2.2.4)$$

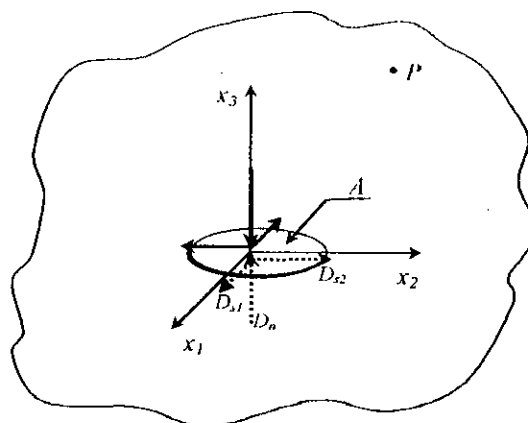


Figure 2.2.2 La discontinuité de déplacement dans un milieu tridimensionnel.

Les fonctions de Green en tridimensionnel sont également présentées dans la partie Annexe.

2.3 Intégration des fonctions de Green en 3D

D'après les équations (2.2.4) on remarque que la solution est donnée sous la forme des intégrales à déterminer. Ces intégrales peuvent être déterminées analytiquement ou numériquement. Nous sommes tentés de faire une intégration numérique des fonctions de Green en 3D. Le problème qui va se poser est la présence de singularité des fonctions en $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$ et en $\frac{1}{r^7}$. Cela demande toute une étude sur les techniques de traitement des singularités, qui est l'objet de beaucoup de recherches récentes ⁽¹⁾.

Pour les raisons précédentes, on a préféré l'utilisation de l'intégration analytique, en se limitant aux éléments rectangulaires de discontinuité de déplacement, et le gain sur le temps et la précision de calcul sera remarquable.

La surface A de l'élément (fissure élémentaire) est un rectangle de longueur $2a$ et de largeur $2b$.

$$A = \int_{-b}^b \int_{-a}^a dx'_1 dx'_2 = 4ab \quad (2.3.1)$$

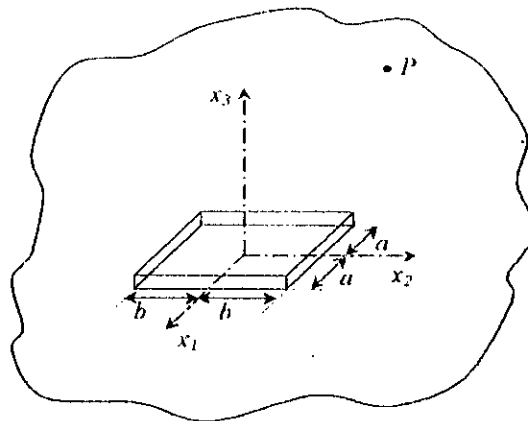


Figure 2.3.1 Présentation de l'élément rectangulaire de discontinuité.

Les équations (2.2.4) deviennent :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \int_{-b}^b \int_{-a}^a f_j(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) D_j(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2 \quad (i, j, k=1 \text{ à } 3) \quad (2.3.2)$$

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \int_{-b}^b \int_{-a}^a g_{jkt}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) l_k(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2$$

⁽¹⁾ Guiggianni, Rizzo et al. ont fait une étude sur le traitement de singularité dans l'intégration numérique en $1/r$, $1/r^2$ et en $1/r^3$ pour la méthode intégrale directe en septembre 1992 « Guiggianni M. et al. (1992) » .

Pour simplifier les calculs des intégrales, on utilise les éléments avec des composantes de discontinuité constantes :

$$D_i(x'_1, x'_2) = D_i = \text{Constante} \quad (i = 1 \text{ à } 3) \quad (2.3.3)$$

Les équations (2.3.2) deviennent :

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3) &= F_{ij} D_j \\ \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) &= G_{ijk} D_k \end{aligned} \quad (i, j, k = 1 \text{ à } 3) \quad (2.3.4)$$

F_{ij} , G_{ijk} sont respectivement les fonctions intégrales des fonctions de Green f_{ij} , g_{ijk} , avec :

$$\begin{aligned} F_{ij}(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a f_{ij}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) dx'_1 dx'_2 \\ G_{ijk}(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a g_{ijk}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3) dx'_1 dx'_2 \end{aligned} \quad (i, j, k = 1 \text{ à } 3) \quad (2.3.5)$$

Exemple :

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1, x_2, x_3) &= \int_{-b}^b \int_{-a}^a \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_3}{\left(\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2}\right)^3} [(1-2\nu) + \\ &\frac{3(x_1 - x'_1)^2}{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2}] dx'_1 dx'_2 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

On va combiner entre les techniques de calcul des intégrales doubles pour trouver les 27 intégrales de la formulation, qui sont illustrés sous la forme des tableaux suivant :

Les fonctions primitives concernant les déplacements.	
$F_{11}^* = \alpha \left[\frac{(xd_1)(xd_2)x_3}{C_{13}r} - 2(\nu - 1) \arctan \left(\frac{(xd_1)(xd_2)}{x_3 r} \right) \right]$	$F_{31}^* = -\alpha \left(\frac{-(x_3)^2 xd_2}{C_{13}r} + (1 - 2\nu) \ln(r - xd_2) \right)$
$F_{12}^* = F_{21}^* = 3\alpha \left(\frac{x_3}{3r} \right)$	$F_{32}^* = -\alpha \left(\frac{-(x_3)^2 xd_1}{C_{23}r} + (1 - 2\nu) \ln(r - xd_1) \right)$
$F_{13}^* = -\alpha \left(\frac{x_3^2 (xd_2)}{C_{13}r} + (1 - 2\nu) \ln(r - xd_2) \right)$	$F_{33}^* = \begin{cases} \alpha \frac{(x_3)xd_2}{xd_1} \left(\frac{1}{C_{23}} - \frac{(x_3)^2}{C_{13}r} \right) + 2(1 - \nu) \arctan \left(\frac{(xd_1)(xd_2)}{x_3 r} \right) \\ \text{ou} \\ \alpha \frac{(x_3)xd_1}{xd_2} \left(\frac{1}{C_{13}} - \frac{(x_3)^2}{C_{23}r} \right) + 2(1 - \nu) \arctan \left(\frac{(xd_1)(xd_2)}{x_3 r} \right) \end{cases}$
$F_{22}^* = \alpha \left[\frac{(xd_1)(xd_2)x_3}{C_{23}r} - 2(\nu - 1) \arctan \left(\frac{(xd_1)(xd_2)}{x_3 r} \right) \right]$	
$F_{23}^* = -\alpha \left(\frac{(x_3)^2 xd_1}{C_{23}r} + (1 - 2\nu) \ln(r - xd_1) \right)$	

Tableau 2.3.1 Présentation des fonctions primitives de la méthode concernant les déplacements

Les fonctions primitives concernant les contraintes.	
$G_{111}^* = \beta \left[\frac{x_3(xd_2)}{C_{13}r} \left(\frac{(xd_1)^2}{r^2} + \frac{(x_3)^2 + 3(xd_1)^2}{C_{13}} \right) \right]$	$G_{133}^* = \beta \frac{x_3(xd_2)}{rC_{13}} \left(\frac{(x_3)^2 - (xd_1)^2}{C_{13}} + \frac{(x_3)^2}{r^2} \right)$
$G_{112}^* = 3\beta \left[\frac{x_3(xd_1)}{r} \left(\frac{-1}{r^2} + \frac{2\nu}{C_{23}} \right) \right]$	$G_{221}^* = \beta \frac{x_3(xd_2)}{r} \left(\frac{2\nu}{C_{13}} - \frac{1}{r^2} \right)$
$G_{121}^* = \beta \frac{x_3(xd_1)}{r} \left(\frac{(1-\nu)}{C_{23}} - \frac{1}{r^2} \right)$	$G_{222}^* = \beta \frac{(x_3)(xd_1)}{C_{23}r} \left[\frac{(xd_2)^2}{r^2} + \frac{3(xd_2)^2 + (x_3)^2}{C_{23}} \right]$
$G_{122}^* = \beta \frac{x_3(xd_2)}{r} \left(\frac{(1-\nu)}{C_{13}} - \frac{1}{r^2} \right)$	$G_{231}^* = G_{132}^*$
$G_{123}^* = \frac{\beta}{r} \left((1-2\nu) - \frac{(x_3)^2}{r^2} \right)$	$G_{233}^* = \beta \frac{(x_3)(xd_1)}{C_{23}r} \left[\frac{(x_3)^2}{r^2} + \frac{(x_3)^2 - (xd_2)^2}{C_{23}} \right]$
$G_{132}^* = \frac{\beta}{r} \left(\nu - \frac{(x_3)^2}{r^2} \right)$	$G_{331}^* = G_{133}^* \text{ et } G_{332}^* = G_{233}^*$
$G_{133}^* = \begin{cases} \beta r(xd_2) \left[\frac{-2\nu}{(xd_1)C_{23}} + \frac{1}{C_{13}r^2} \left(\frac{xd_1(x_3)^2}{r^2} + \frac{(1+4\nu)(x_3)^2(xd_1)^2 + 2\nu(x_3)^4 - (1-2\nu)(xd_1)^4}{(xd_1)^2C_{13}} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r \frac{xd_1}{xd_2} \left[\frac{1}{C_{13}} \left(\frac{2(x_3)^2}{C_{13}} - \frac{C_{23}}{(xd_1)^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{(1-2\nu)(xd_1)^4 + 2(x_3)^2(xd_1)^2 + (x_3)^4 - (x_3)^2}{(xd_1)^2C_{23}} \right) \right] \end{cases}$	
$G_{131}^* = \begin{cases} \beta r(xd_2) \left[\frac{(\nu-1)}{C_{23}(xd_1)} + \frac{1}{C_{13}r^2} \left(\frac{(x_3)^2(xd_1)}{r^2} + \frac{(1-\nu)(x_3)^4 + (3-2\nu)(xd_1)^2(x_3)^2 - \nu(xd_1)^4}{(xd_1)C_{13}} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r \frac{xd_1}{xd_2} \left[\frac{1}{C_{13}} \left(\frac{2(x_3)^2}{C_{13}} - \frac{C_{23}}{(xd_1)^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\nu(xd_1)^4 + 2(x_3)^2(xd_1)^2 + (x_3)^4 - (x_3)^2}{(xd_1)^2C_{23}} \right) \right] \end{cases}$	
$G_{223}^* = \begin{cases} \beta r \frac{xd_2}{xd_1} \left[\frac{1}{C_{23}} \left(\frac{2(x_3)^2}{C_{23}} - \frac{C_{13}}{(xd_1)^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{(1-2\nu)(xd_1)^4 + 2(x_3)^2(xd_1)^2 + (x_3)^4 - (x_3)^2}{(xd_1)^2C_{13}} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r(xd_1) \left[\frac{-2\nu}{(xd_2)C_{13}} + \frac{1}{C_{23}r^2} \left(\frac{xd_2(x_3)^2}{r^2} + \frac{(1+4\nu)(x_3)^2(xd_2)^2 + 2\nu(x_3)^4 - (1-2\nu)(xd_2)^4}{(xd_2)C_{23}} \right) \right] \end{cases}$	
$G_{232}^* = \begin{cases} \beta r(xd_1) \left[\frac{(\nu-1)}{C_{13}(xd_2)} + \frac{1}{C_{23}r^2} \left(\frac{(x_3)^2(xd_2)}{r^2} + \frac{(1-\nu)(x_3)^4 + (3-2\nu)(xd_2)^2(x_3)^2 - \nu(xd_2)^4}{(xd_1)C_{23}} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r \frac{xd_2}{xd_1} \left[\frac{1}{C_{23}} \left(\frac{2(x_3)^2}{C_{23}} - \frac{C_{13}}{(xd_1)^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\nu(xd_1)^4 + 2(x_3)^2(xd_1)^2 + (x_3)^4 - (x_3)^2}{(xd_1)^2C_{13}} \right) \right] \end{cases}$	
$G_{331}^* = \begin{cases} \beta r \frac{xd_2}{xd_1} \left[\frac{1}{C_{23}} \left(\frac{(x_3)^2 - (xd_1)^2}{(xd_1)^2} - \frac{2(x_3)^2}{C_{23}} \right) + \frac{(xd_1)}{C_{13}r^2} \left(\frac{(xd_1)^2}{r^2} - \frac{2(xd_1)^4 + (xd_1)^2(x_3)^2 + (x_3)^4}{(xd_1)^2C_{13}} \right) \right] \\ \text{ou} \\ \beta r \frac{xd_1}{xd_2} \left[\frac{1}{C_{13}} \left(\frac{(x_3)^2 - (xd_2)^2}{(xd_2)^2} - \frac{2(x_3)^2}{C_{13}} \right) + \frac{(xd_2)}{C_{23}r^2} \left(\frac{(xd_2)^2}{r^2} - \frac{2(xd_2)^4 + (xd_2)^2(x_3)^2 + (x_3)^4}{(xd_2)^2C_{23}} \right) \right] \end{cases}$	

Tableau 2.3.2 Présentation des fonctions primitives de la méthode concernant les contraintes.

Tels que :

- $\alpha = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}$ et $\beta = -\frac{3G}{4\pi(1-\nu)}$
- $x_1 d_1 = (x_1 - x'_1)$ et $x_2 d_2 = (x_2 - x'_2)$
- $C_{13} = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_3)^2]$ et $C_{23} = [(x_2 - x'_2)^2 + (x_3)^2]$
- $r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + x_3^2}$
- ν : Coefficient de Poisson, G : module de cisaillement.
- $F_y = \left[[F_y^*]_{x_1=a}^{x_1=b} \right]_{x_2=b}^{x_2=b}$ et $G_{y,k} = \left[[G_{y,k}^*]_{x_1=a}^{x_1=b} \right]_{x_2=b}^{x_2=b}$

Remarque :

Parfois, les deux intégrales $\int \left(\int f(x,y) dx \right) dy$ et $\int \left(\int f(x,y) dy \right) dx$ ne donnent pas la même forme de fonction primitive, mais après l'injection des bornes constantes et d'après la règle d'intégration sous le signe somme « Bass J., pp. 544 (1968) », elles prennent la même valeur :

$$\int_b^b \left(\int_a^a f(x,y) dx \right) dy = \int_a^a \left(\int_b^b f(x,y) dy \right) dx$$

C'est pour cela, certains fonctions dans les tableaux 2.3.1 et 2.3.2 sont données en double forme, cette présentation multiforme nous a permet d'éviter quelques cas de singularités des fonctions primitives.

2.4 Étude des cas limites des fonctions primitives

D'après les tableaux 2.3.1 et 2.3.2, on remarque que les fonctions primitives possèdent plusieurs singularités, celles-ci sont généralement une division par zéro ou un logarithme de zéro, on doit donc chercher les limites des intégrales pour ces cas (*elles deviennent des intégrales impropres*). Pour les fonctions F_{ii} , le calcul des limites des intégrales lorsque $x_3 \rightarrow 0$, ne donne pas les bons résultats à cause de la présence de l'arctangente qui est une fonction périodique dans F_{11}^* , F_{22}^* et F_{33}^* . Ceci nous conduit à calculer ses limites sur les fonctions $F_{ii} = \left[\int_{x_1=a}^{x_1=a} \int_{x_2=a}^{x_2=b} \right]$ après intégration, donc :

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0} [F_{ii}^*] = 0 + \frac{1}{4\pi} \lim_{x_3 \rightarrow 0} \left(\arctan \left[\frac{(x_1 - x_1')(x_2 - x_2')}{x_3 r} \right]_{x_1=a}^{x_1=a} \right)_{x_2=b}^{x_2=b} \quad (i=1 \text{ à } 3) \quad (2.4.1)$$

pour trouver cette limite on doit se référer au cas général :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctan \left[\frac{C}{x} \right] \right) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} \text{ pour } (C > 0) \text{ et } (x \rightarrow 0^+) \\ -\frac{\pi}{2} \text{ pour } (C < 0) \text{ et } (x \rightarrow 0^+) \\ -\frac{\pi}{2} \text{ pour } (C > 0) \text{ et } (x \rightarrow 0^-) \\ +\frac{\pi}{2} \text{ pour } (C < 0) \text{ et } (x \rightarrow 0^-) \end{cases} \quad (2.4.2)$$

- En premier lieu prenons le cas où $x_3 \rightarrow 0$, dans ce cas les équations (2.4.1) vont être :

$$\begin{aligned} \lim_{x_3 \rightarrow 0} [F_{ii}^*] &= \frac{1}{4\pi} \lim_{x_3 \rightarrow 0} \left(\arctan \left[\frac{(x_1 - a)(x_2 - b)}{x_3 \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3)^2}} \right] \right) - \\ &\frac{1}{4\pi} \lim_{x_3 \rightarrow 0} \left(\arctan \left[\frac{(x_1 + a)(x_2 - b)}{x_3 \sqrt{(x_1 + a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3)^2}} \right] \right) - \\ &\frac{1}{4\pi} \lim_{x_3 \rightarrow 0} \left(\arctan \left[\frac{(x_1 - a)(x_2 + b)}{x_3 \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 + b)^2 + (x_3)^2}} \right] \right) + \\ &\frac{1}{4\pi} \lim_{x_3 \rightarrow 0} \left(\arctan \left[\frac{(x_1 + a)(x_2 + b)}{x_3 \sqrt{(x_1 + a)^2 + (x_2 + b)^2 + (x_3)^2}} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

On distingue les quatre cas suivants :

➤ $|x_1| < a, |x_2| < b$:

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} [J'_{ii}] = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{1}{2} \quad (2.4.4)$$

➤ $|x_1| > a, |x_2| < b$:

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} [J'_{ii}] = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = 0 \quad (2.4.5)$$

➤ $|x_1| < a, |x_2| > b$:

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} [J'_{ii}] = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] = 0 \quad (2.4.6)$$

➤ $|x_1| > a, |x_2| > b$:

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} [J'_{ii}] = \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 0 \quad (2.4.7)$$

Récapitulons les résultats :

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^+} [J'_{ii}] = \begin{cases} -\frac{1}{2}, \text{ pour } : |x_1| < a, |x_2| < b \\ 0, \text{ pour } : |x_1| > a, |x_2| < b \\ 0, \text{ pour } : |x_1| < a, |x_2| > b \\ 0, \text{ pour } : |x_1| > a, |x_2| > b \end{cases} \quad (2.4.8)$$

• Pour le cas où $x \rightarrow 0^-$, on trouverait de la même manière :

$$\lim_{x_3 \rightarrow 0^-} [J'_{ii}] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, \text{ pour } : |x_1| < a, |x_2| < b \\ 0, \text{ pour } : |x_1| > a, |x_2| < b \\ 0, \text{ pour } : |x_1| < a, |x_2| > b \\ 0, \text{ pour } : |x_1| > a, |x_2| > b \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Les tableaux 2.4.1 et 2.4.2 présentent les principales limites dans le reste des cas de singularités :

Fonction	Expression de la limite	
G_{111}	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_2 \rightarrow b$
	$\beta \left[\frac{1}{2a} \left(\frac{32\nu a^3 + 4a^2(1+2\nu)(xd_1)^2 + (xd_2)^4}{xd_1(\sqrt{4a^2 + (xd_1)^2})^3} \right) \right]_b^a$	$\beta \left[-\frac{1}{2b} \left(\sqrt{xd_1^2 + 4b^2} \left[\frac{(1-2\nu)xd_1}{xd_1^2 + 4b^2} - \frac{1}{xd_1} \right] \right) \right]_a^b$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	
$8\beta ab \left[32a^2(b^2 b^2 + (1+2\nu)a^2 + 2\nu a^4) + 8(-b^4 + (1+6\nu)a^2 + 4\nu b^2 a^2)x_3^2 + 2(2\nu(b^2 + 3a^4) - (3b^2 + a^4))x_3^4 - (1-\nu)x_3^6 \right] \frac{-1}{(4b^2 + x_3^2)(4a^2 + x_3^2)(4b^2 + 4a^2 + x_3^2)^2}$		
G_{112}	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_2 \rightarrow b$
	$\beta \left[\frac{1}{2a} \left(\frac{16(1-\nu)a^4 + 4a^2(2-\nu)(xd_1)^2 + (xd_2)^4}{xd_1(\sqrt{4a^2 + (xd_1)^2})^3} \right) \right]_b^a$	$\beta \left[-\frac{1}{2b} \left(\sqrt{xd_1^2 + 4b^2} \left[\frac{\nu xd_1}{xd_1^2 + 4b^2} - \frac{1}{xd_1} \right] \right) \right]_a^b$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	
$4\beta ab \left[64a^2(b^2 b^2 + (2-\nu)a^2 + (1-\nu)a^4) + 16((4-3\nu)a^2 + 2(1-\nu)\nu b^2 b^2 - b^4)x_3^2 + (8(a^2 - b^2) - 4\nu(b^2 + 3a^4))x_3^4 - (1+\nu)x_3^6 \right] \frac{-1}{(4b^2 + x_3^2)(4a^2 + x_3^2)(4b^2 + 4a^2 + x_3^2)^2}$		
G_{221}	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_2 \rightarrow b$
	$\beta \left[-\frac{1}{2a} \left(\sqrt{xd_1^2 + 4a^2} \left[\frac{(1-2\nu)xd_1}{xd_1^2 + 4a^2} - \frac{1}{xd_1} \right] \right) \right]_b^a$	$\beta \left[\frac{1}{2b} \left(\frac{32\nu b^4 + 4b^2(1+2\nu)(xd_1)^2 + (xd_2)^4}{xd_1(\sqrt{4b^2 + (xd_1)^2})^3} \right) \right]_a^b$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	
$8\beta ab \left[32b^2(a^2 a^2 + (1+2\nu)b^2 + 2\nu b^4) + 8(-a^4 + (1+6\nu)b^2 + 4\nu a^2 b^2)x_3^2 + 2(2\nu(a^2 + 3b^4) - (3a^2 + b^4))x_3^4 - (1-\nu)x_3^6 \right] \frac{-1}{(4a^2 + x_3^2)(4b^2 + x_3^2)(4b^2 + 4a^2 + x_3^2)^2}$		
G_{222}	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_3 \rightarrow 0$ et $ x_2 \rightarrow b$
	$\beta \left[-\frac{1}{2a} \left(\sqrt{xd_1^2 + 4a^2} \left[\frac{\nu xd_1}{xd_1^2 + 4a^2} - \frac{1}{xd_1} \right] \right) \right]_b^a$	$\beta \left[\frac{1}{2b} \left(\frac{16(1-\nu)b^4 + 4b^2(2-\nu)(xd_1)^2 + (xd_2)^4}{xd_1(\sqrt{4b^2 + (xd_1)^2})^3} \right) \right]_a^b$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_2 \rightarrow b$	
$4\beta ab \left[64b^2(a^2 a^2 + (2-\nu)b^2 + (1-\nu)b^4) + 16((4-3\nu)b^2 + 2(1-\nu)\nu a^2 b^2 - a^4)x_3^2 + (8(b^2 - a^2) - 4\nu(a^2 + 3b^4))x_3^4 - (1+\nu)x_3^6 \right] \frac{-1}{(4a^2 + x_3^2)(4b^2 + x_3^2)(4a^2 + 4b^2 + x_3^2)^2}$		

... Suite du tableau

G_{33}	<i>pour</i> $x_1 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow a$	<i>pour</i> $x_1 \rightarrow 0$ et $ x_1 \rightarrow b$
	$\beta \left[\frac{1}{2a} \left(\frac{16a^4 + 8a^4(xd_1)^2 + (xd_1)^4}{xd_1(\sqrt{4a^2 + (xd_1)^2})^3} \right) \right]_a$	$\beta \left[\frac{1}{2b} \left(\frac{16b^4 + 8b^2(xd_1)^2 + (xd_1)^4}{xd_1(\sqrt{4b^2 + (xd_1)^2})^3} \right) \right]_a$
	<i>pour</i> $ x_1 \rightarrow a$ et $ x_1 \rightarrow b$	
$-32\beta ab \left[\frac{(22x_3^4 + 32a^2b^2)(a^2 + b^2) + 24(a^2 + b^2)x_3^2 + 8(a^2 + b^2)x_3^6 + x_3^8}{(4b^2 + x_1^2)(4a^2 + x_1^2)(4b^2 + 4a^2 + x_1^2)^2} \right]$		

Tableau 2.4.1 Les limites des intégrales concernant les contraintes.

Fonction	Voisinage	Expression de la limite.	
		$ x_i < b$	$ x_i > b$
$F_{33} = -F'_{33}$	$x_1 \rightarrow -a$	$-\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\frac{\sqrt{4a^2 + xd_1^2} - xd_1}{xd_1} \right) \right]_a^b$	$-\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\frac{\sqrt{4a^2 + xd_1^2} - xd_1}{xd_1} \right) \right]_b^a$
	$x_1 \rightarrow a$	$\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\frac{\sqrt{4a^2 + xd_1^2} - xd_1}{xd_1} \right) \right]_a^b$	$\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\frac{\sqrt{4a^2 + xd_1^2} - xd_1}{xd_1} \right) \right]_b^a$
$F'_{33} = -F_{33}$	$x_2 \rightarrow -b$	$-\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\frac{\sqrt{4b^2 + xd_1^2} - xd_1}{xd_1} \right) \right]_a^b$	$-\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\frac{\sqrt{4b^2 + xd_1^2} - xd_1}{xd_1} \right) \right]_a^b$
	$x_2 \rightarrow b$	$\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\frac{\sqrt{4b^2 + xd_1^2} - xd_1}{xd_1} \right) \right]_a^b$	$\alpha(1-2\nu) \ln \left[\left(\frac{\sqrt{4b^2 + xd_1^2} - xd_1}{xd_1} \right) \right]_a^b$
F_{33}	$ x_1 \rightarrow a$ et $ x_1 \rightarrow b$	$\alpha \left(\frac{8abx_3(2(a^2 + b^2) + x_3^2)}{(4b^2 + x_1^2)(4a^2 + x_1^2)\sqrt{4a^2 + 4b^2 + x_3^2}} + 2(1-\nu) \arctan \left[\frac{4ab}{x_3\sqrt{4a^2 + 4b^2 + x_3^2}} \right] \right)$	

Tableau 2.4.2 Les limites des intégrales concernant les déplacements.

Les paramètres utilisés dans les expressions des limites sont définis dans la section (2.3).

2.5 Problème de fissure :

La solution donnée ultérieurement forme la base d'une méthode intégrale de frontière pour la recherche des solutions numériques des problèmes aux limites, en

élasticité linéaire. En premier lieu, on traite les problèmes de fissuration dans un milieu infini, qui présentent le champ principal d'application de la méthode de discontinuité de déplacement, puis on passe à l'étude des problèmes généraux dans la prochaine section.

Prenons comme exemple une fissure circulaire dans un milieu élastique infini avec les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \text{ pour } : x_3 = 0 \text{ et } V(x_1, x_2) \\ \sigma_{33} = -p, \text{ pour } : x_3 = 0 \text{ et } (x_1^2 + x_2^2) \leq r^2 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

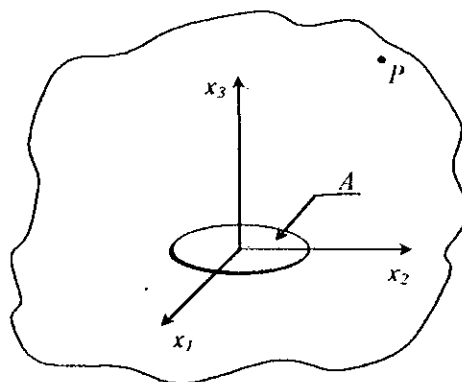


Figure 2.5.1 Fissure circulaire dans un milieu infini.

Pour ce problème la frontière à discrétiser est celle de la fissure. Vu l'élément utilisé dans l'intégration des fonctions de Green (l'élément rectangulaire) dans la section (2.3), on doit diviser toute la fissure avec la manière présentée sur le quart du cercle dans la figure(2.5.2).

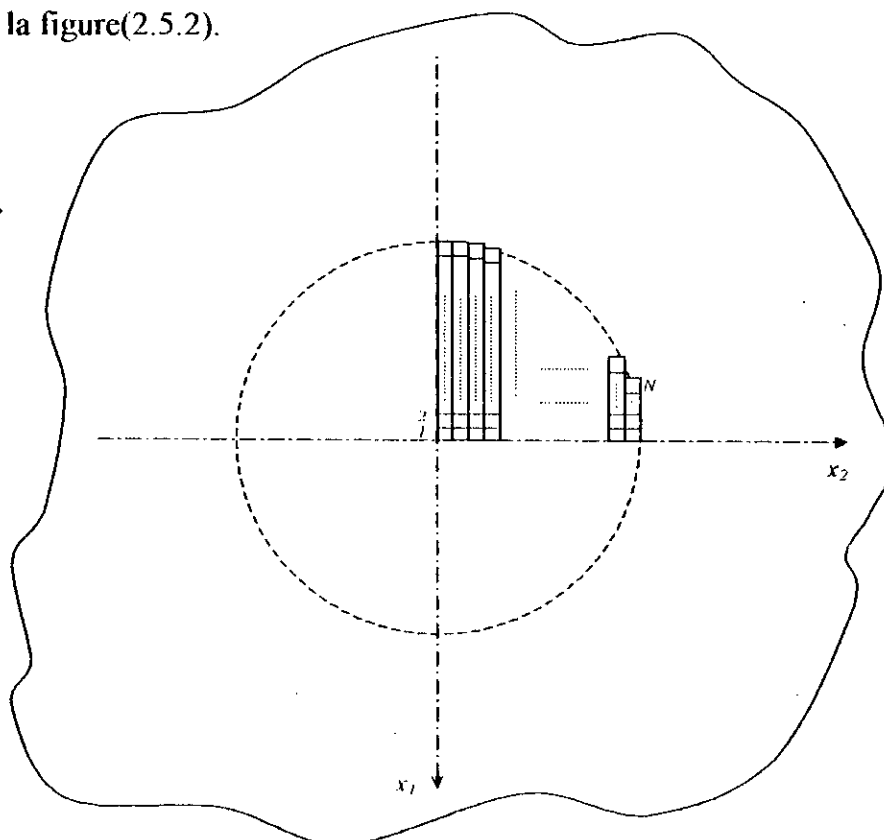


Figure 2.5.1 Présentation de la discrétisation d'une fissure circulaire dans son plan.

D'après les équations (2.2.8) la contrainte normale au plan de la fissure en chaque point du corps est donner par :

$$\sigma_{33} = G_{331}^y D_1^j + G_{332}^y D_2^j + G_{333}^y D_3^j \quad (j = 1 \text{ à } N) \quad (2.5.2)$$

N étant le nombre des éléments de fissure.

Si le point de calcul de la contrainte normale est situé dans le plan de la fissure ($x_3=0$) et d'après le tableau (2.2.1), on aura :

$$G_{331}^y = G_{332}^y = 0 \quad (j=1 \text{ à } N) \quad (2.5.3)$$

L'équation (2.5.2) va être simplifiée en :

$$\sigma_{33} = G_{333}^y D_3^j \quad (j = 1 \text{ à } N) \quad (2.5.4)$$

Donc la contrainte normale pour chaque élément $[i]$ de la fissure σ_{33}^i peut être exprimée en fonction des composantes de la discontinuité de l'élément $[j]$ par :

$$\sigma_{33}^i = G_{333}^y D_3^j \quad (i, j = 1 \text{ à } N) \quad (2.5.5)$$

Avec l'influence des composantes de la discontinuité des N éléments sur l'élément $[i]$, on aura :

$$\sigma_{33}^i = \sum_{j=1}^N G_{333}^y D_3^j \quad (i = 1 \text{ à } N) \quad (2.5.6)$$

Cette contrainte est égale à la contrainte appliquée sur chaque élément $[i]$:

$$\sigma_{33}^i = -p = \sum_{j=1}^N G_{333}^y D_3^j \quad (i=1 \text{ à } N) \quad (2.5.7)$$

En utilisant l'une des méthodes numériques de résolution des systèmes d'équations linéaires (*comme la méthode de Gauss directe*), on peut résoudre le système (2.5.7) de N équations à N inconnues, qui sont les ouvertures normales de la fissure dans ce cas : D_3^j avec $j=1 \text{ à } N$.

2.6 Procédure numérique :

Dans le cas général la fissure est de forme quelconque comme elle est présentée sur la figure 2.6.1. Elle est discrétisée en N éléments joint l'un à l'autre. Les positions et les orientations de ces éléments sont spécifiées par rapport au système global (x_1, x_2, x_3) comme il est indiqué sur la figure 2.6.1.

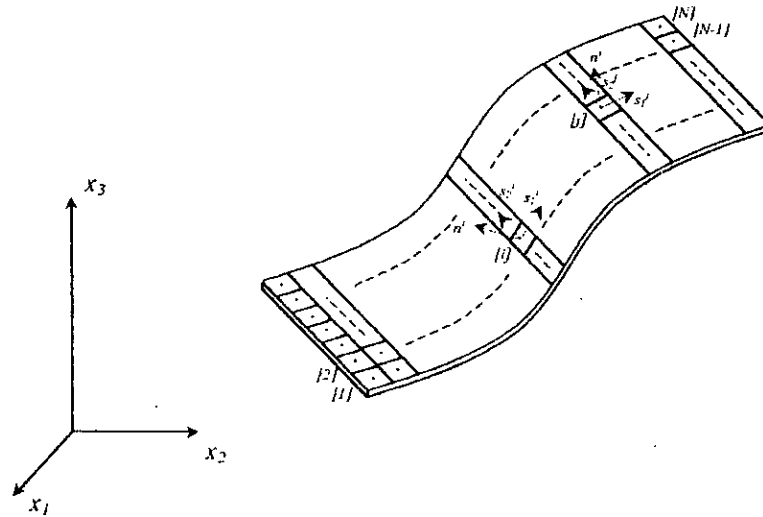


Figure 2.6.1 Représentation d'une fissure à N éléments en 3D.

Chaque élément de discontinuité de déplacement élémentaire représente une discontinuité de déplacement réelle pour une fissure. C'est pourquoi la M.D.D est l'approche la plus adéquate à l'étude des problèmes de fissuration, car la fissure est discrétisée une seule fois, ce que n'est pas le cas pour les autres approches, qui nécessitent une discrétisation des deux lèvres de la fissure séparément.

Les composantes de discontinuité des déplacements élémentaires dans les directions des axes des repères locaux (s_1, s_2, n) sont définies par :

$$\begin{aligned} D_{s_1}^j &= u_{s_1}^{j-1} - u_{s_1}^{j+1} \\ D_{s_2}^j &= u_{s_2}^{j-1} - u_{s_2}^{j+1} \\ D_n^j &= u_n^{j-1} - u_n^{j+1} \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

avec :

$u_{s_1}^j$: déplacement tangentiel dans la direction s_1 .

$u_{s_2}^j$: déplacement tangentiel dans la direction s_2 .

u_n^j : déplacement normal dans la direction n .

Les signes $/+ /$ et $/- /$ dans l'équation (2.6.1) désignent respectivement la surface positive et celle négative de la fissure, d'après sa position vis à vis l'axe \vec{n} du repère local.

Les contraintes tangentielle et normales de l'élément $/i /$ appartenant à la fissure peuvent être exprimées en terme des composantes de la discontinuité de déplacement de l'élément $/j /$ en tenant compte des positions et des orientations relatives entre l'élément $/i /$ et l'élément $/j /$:

$$\begin{aligned} \sigma_{s_1}^i &= \sum_{j=1}^N A_{s_1 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N A_{s_1 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N A_{s_1 n}^{ij} D_n^j \\ \sigma_{s_2}^i &= \sum_{j=1}^N A_{s_2 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N A_{s_2 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N A_{s_2 n}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N A_{ns_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad (i=1 \text{ à } N) \quad (2.6.2)$$

$A_{s_1 s_1}^{ij}, \dots$ etc, sont les coefficients d'influence concernant les contraintes. Par exemple $A_{s_2 n}^{ij}$ donne la contrainte tangentielle dans la direction s_2 de l'élément $/i /$ due la composante de discontinuité de déplacement normale unitaire ($D_n^j = 1$) de l'élément $/j /$. Si les contraintes $\sigma_{s_1}^i, \sigma_{s_2}^i, \sigma_n^i$ sont données pour chaque élément de la fissure (contraintes appliquées), les équations (2.6.2) vont former un système algébrique de $3N$ équations à $3N$ inconnus $D_{s_1}^j, D_{s_2}^j, D_n^j$ avec $j = 1$ à N . Après la résolution du système d'inconnues $D_{s_1}^j, D_{s_2}^j, D_n^j$, on peut déterminer les déplacements et les contraintes en n'importe quel point du corps avec le même principe de superposition des influences utilisé pour la construction du système d'équations (2.6.2). Les déplacements pour chaque élément $/i /$ de la fissure sont donnés par :

$$\begin{aligned} u_{s_1}^i &= \sum_{j=1}^N B_{s_1 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N B_{s_1 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N B_{s_1 n}^{ij} D_n^j \\ u_{s_2}^i &= \sum_{j=1}^N B_{s_2 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N B_{s_2 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N B_{s_2 n}^{ij} D_n^j \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N B_{ns_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad (i=1 \text{ à } N) \quad (2.6.3)$$

Les déplacements sont discontinus en passant d'une face à l'autre de fissure. Par conséquent on doit distinguer entre les faces de la fissure dans le calcul des

coefficients d'auto-influence ($j = i$) $B_{s_1 s_1}^u, \dots$ etc. D'après la section (2.4) F_{11}, F_{22} et F_{33} présentent une singularité lorsque $x_3 \rightarrow 0$, tandis que les autres fonctions F_{ij} sont nulles. Dans ce cas les coefficients hors diagonal sont tous nuls :

$$B_{s_1 s_2}^u = B_{s_1 n}^u = B_{s_2 s_1}^u = B_{s_2 n}^u = B_{n s_1}^u = B_{n s_2}^u = 0 \quad (2.6.4)$$

et d'après la section (2.4) ceux de diagonal sont :

$$B_{s_1 s_1}^u = F_{11} \Big|_{\substack{x_3 \rightarrow 0 \\ x_1 = 0, x_2 = 0}} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ pour } : x_3 \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow 0 \\ \frac{1}{2} \text{ pour } : x_3 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow n \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

$$B_{s_2 s_2}^u = F_{22} \Big|_{\substack{x_3 \rightarrow 0 \\ x_1 = 0, x_2 = 0}} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ pour } : x_3 \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow 0 \\ \frac{1}{2} \text{ pour } : x_3 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow n \rightarrow 0^+ \end{cases} \quad (2.6.5)$$

$$B_{nn}^u = F_{33} \Big|_{\substack{x_3 \rightarrow 0 \\ x_1 = 0, x_2 = 0}} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \text{ pour } : x_3 \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow 0 \\ \frac{1}{2} \text{ pour } : x_3 \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow n \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

Considérons maintenant le problème d'une cavité parallélépipédique dans un milieu infini. On discrétise ce parallélépipède en N éléments. On associe à chaque élément trois composantes de discontinuité de déplacement D'_{s_1}, D'_{s_2} et D'_n comme pour la fissure. Les D^j pour la fissure ont une signification physique et qui représentent une discontinuité réelle entre les deux lèvres de la fissure et simulent dans ce cas les trois modes de rupture (*ouverture, glissement plan et anti-plan*). Pour le cas des frontières de cavité ou des frontières des corps finis, elles représentent des quantités fictives et leur calcul est un calcul intermédiaire.

D'après la figure 2.6.2, on doit respecter une convention pour le choix du repère local $(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{n})$ de chaque élément. Le vecteur \vec{n} doit être normal en sortant de la matière. Les autres vecteurs \vec{s}_1, \vec{s}_2 doivent former avec \vec{n} un trièdre $(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{n})$ orthonormé direct.

A partir de cette convention les valeurs des coefficients d'auto-influence de l'équation (2.6.5) vont être celles correspondantes à $n \rightarrow 0$:

$$B_{s_1 s_1}^u = B_{s_2 s_2}^u = B_{nn}^u = -\frac{1}{2} \quad (2.6.6)$$

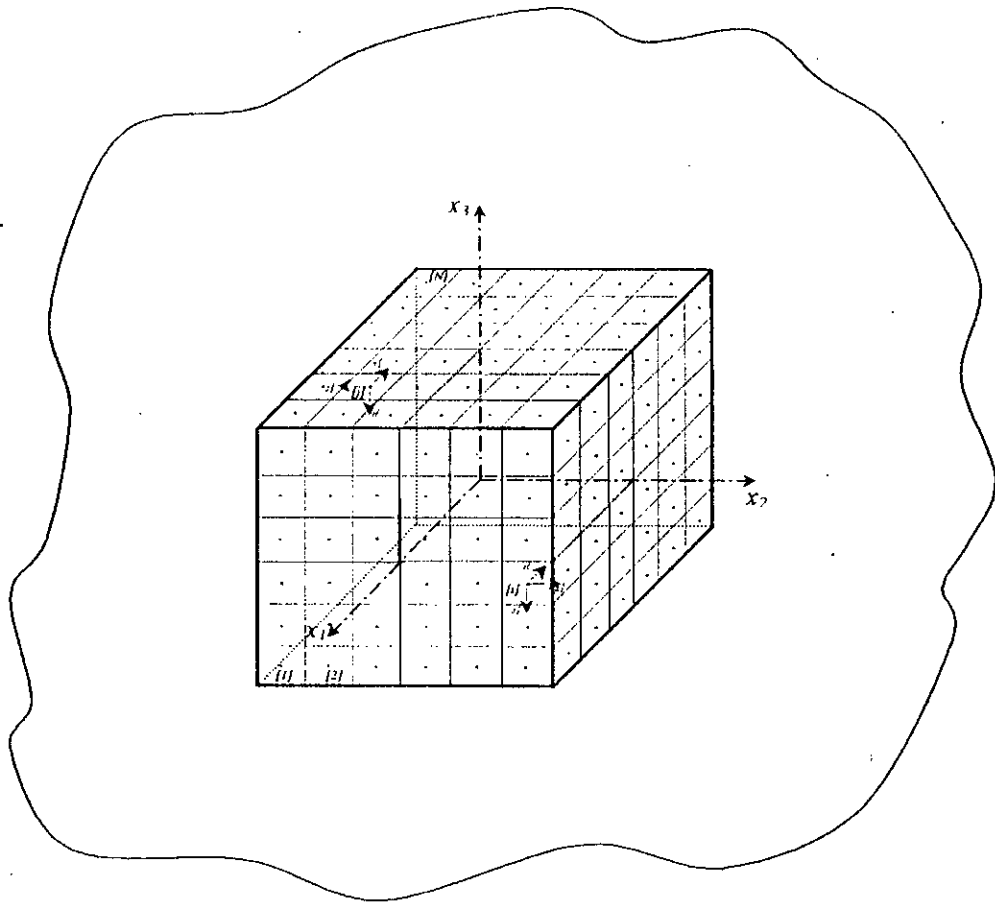


Figure 2.6.2 Discretisation d'une cavité dans un milieu infini.

Certains problèmes présentent des symétries par rapport à un, deux ou trois plans de l'espace, dans ce dernier cas la discrétisation va se réduire à la discrétisation du premier quadrant du milieu étudié en figure 2.6.2 (*partie entourée en rouge*).

2.7 Relations de transformations :

Les coordonnées $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ liées au repère local $(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_3)$ sont reliées avec celles liées au repère global $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par la relation tirée à partir de l'équation (1.3.4) :

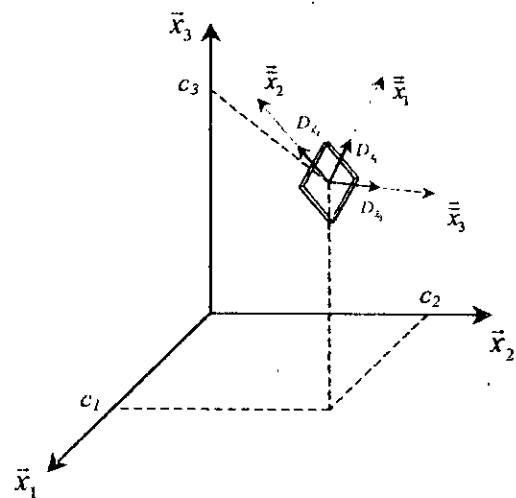


Figure 2.7.1 Discontinuité de déplacements à travers un élément d'orientation arbitraire.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} (x_1 - c_1) & (x_2 - c_2) & (x_3 - c_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_4 & p_7 \\ p_2 & p_5 & p_8 \\ p_3 & p_6 & p_9 \end{bmatrix} \right)^t \quad (2.7.1)$$

avec $\begin{bmatrix} p_1 & p_4 & p_7 \\ p_2 & p_5 & p_8 \\ p_3 & p_6 & p_9 \end{bmatrix}$: La matrice de passage du repère global au repère local

définie par l'équation (1.3.3).

Les déplacements et les contraintes dus aux composantes de discontinuité de déplacement locales sont donnés d'après les équations (2.3.4) par :

$$\left. \begin{aligned} u_{\bar{x}_1} &= D_{\bar{x}_1} \bar{F}_{11} + D_{\bar{x}_2} \bar{F}_{12} + D_{\bar{x}_3} \bar{F}_{13} \\ u_{\bar{x}_2} &= D_{\bar{x}_1} \bar{F}_{21} + D_{\bar{x}_2} \bar{F}_{22} + D_{\bar{x}_3} \bar{F}_{23} \\ u_{\bar{x}_3} &= D_{\bar{x}_1} \bar{F}_{31} + D_{\bar{x}_2} \bar{F}_{32} + D_{\bar{x}_3} \bar{F}_{33} \end{aligned} \right\} \quad (2.7.2)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_1 \bar{x}_1} &= D_{x_1} \bar{G}_{111} + D_{x_2} \bar{G}_{112} + D_{x_3} \bar{G}_{113} \\ \sigma_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} &= D_{\bar{x}_1} \bar{G}_{121} + D_{\bar{x}_2} \bar{G}_{122} + D_{\bar{x}_3} \bar{G}_{123} \\ \sigma_{\bar{x}_1 \bar{x}_3} &= D_{\bar{x}_1} \bar{G}_{131} + D_{\bar{x}_2} \bar{G}_{132} + D_{\bar{x}_3} \bar{G}_{133} \\ \sigma_{\bar{x}_2 \bar{x}_2} &= D_{x_1} \bar{G}_{221} + D_{x_2} \bar{G}_{222} + D_{x_3} \bar{G}_{223} \\ \sigma_{\bar{x}_2 \bar{x}_3} &= D_{\bar{x}_1} \bar{G}_{231} + D_{\bar{x}_2} \bar{G}_{232} + D_{\bar{x}_3} \bar{G}_{233} \\ \sigma_{\bar{x}_3 \bar{x}_3} &= D_{x_1} \bar{G}_{331} + D_{x_2} \bar{G}_{332} + D_{x_3} \bar{G}_{333} \end{aligned} \right\} \quad (2.7.3)$$

- Les fonctions \bar{G}_{ijk} et \bar{F}_{ij} sont les fonctions G_{ijk} et F_{ij} exprimées dans le repère local.

Les déplacements et les contraintes dans le système global $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ peuvent être déduits en utilisant les équations suivantes :

$$[u]_R = \begin{bmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} & u_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{\bar{x}_1} & u_{\bar{x}_2} & u_{\bar{x}_3} \end{bmatrix} [P]^{-1} \quad (2.7.4)$$

$$[\sigma]_R = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1 x_1} & \sigma_{x_1 x_2} & \sigma_{x_1 x_3} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2 x_2} & \sigma_{x_2 x_3} \\ \sigma_{x_3 x_1} & \sigma_{x_3 x_2} & \sigma_{x_3 x_3} \end{bmatrix} = [P] [\sigma]_{\bar{R}} [P]^{-1} \quad (2.7.5)$$

Tels que :

- R : le repère global $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.
- \bar{R} : le repère local $(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_3)$.
- $[P]$: la matrice de passage de R à \bar{R} .

2.8 Coefficients d'influence :

Considérons un milieu infini avec une cavité de forme cubique (voir figure (2.6.2)) divisée en N éléments de discontinuité de déplacements caractérisé par un système local de coordonnées $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ et d'orientations arbitraires par rapport au système global $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

Les influences des composantes de déplacements tangentielle et normales de l'élément $/// D'_{s_1}, D'_{s_2}$ et D'_n sur les déplacements et les contraintes d'un point arbitraire du corps peuvent être calculée directement à partir des équations (2.7.4) et (2.7.5).

Les influences des quantités D'_{s_1}, D'_{s_2} et D'_n sur les déplacements et les contraintes au centre de l'élément $///$ représentent les coefficients d'influence de frontière $B''_{s_1 s_1}, \dots$ etc, de l'équation (2.6.3) et $A''_{s_1 s_1}, \dots$ etc, de l'équation (2.6.2). Ces coefficients d'influence peuvent être calculés en utilisant les transformations (2.7.4) et (2.7.5) du repère local lié à l'élément $///$ vers le repère global. Avec des transformations du même genre vers le repère local lié à l'élément $///$, on trouve :

$$[u]_{R'} = [u_{x'_1} \quad u_{x'_2} \quad u_{x'_3}] = [u^i_{s_1} \quad u^i_{s_2} \quad u^i_n] = [u_{x_1} \quad u_{x_2} \quad u_{x_3}] [P^i] \quad (2.8.1)$$

$$[\sigma]_{R'} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'_1 x'_1} & \sigma_{x'_1 x'_2} & \sigma_{x'_1 x'_3} \\ \sigma_{x'_2 x'_1} & \sigma_{x'_2 x'_2} & \sigma_{x'_2 x'_3} \\ \sigma_{x'_3 x'_1} & \sigma_{x'_3 x'_2} & \sigma_{x'_3 x'_3} \end{bmatrix} = [P^i]^T [\sigma]_R [P^i] \quad (2.8.2)$$

Tels que :

- R : le repère global $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.
- R' : le repère local $(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3)$.
- $[P^i]$: la matrice de passage de R à R' .

Il est à indiquer qu'on peut tirer les valeurs $\sigma^i_{s_1}, \sigma^i_{s_2}$ et σ^i_n à partir de l'équation (2.8.2), qui sont respectivement $\sigma_{x'_1 x'_1}, \sigma_{x'_2 x'_1}$ et $\sigma_{x'_3 x'_1}$. En injectant pour chaque élément $///$ trois conditions aux limites (aux frontières) du problème qui peuvent être en déplacements $(u^i_{s_1})^0, (u^i_{s_2})^0$ et $(u^i_n)^0$, en contraintes $(\sigma^i_{s_1})^0, (\sigma^i_{s_2})^0$ et $(\sigma^i_n)^0$ ou mixtes, (voir les étapes présentées sur la section 2.6), on obtient un système algébrique de $3N$

équations à $3N$ inconnues (les composantes de discontinuités de déplacement de chaque élément $[j]$) de forme générale :

$$\begin{aligned}
 b_{s_1}^i &= \sum_{j=1}^N C_{s_1 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N C_{s_1 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N C_{s_1 n}^{ij} D_n^j \\
 b_{s_2}^i &= \sum_{j=1}^N C_{s_2 s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N C_{s_2 s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N C_{s_2 n}^{ij} D_n^j \quad (i=1 \text{ à } N) \quad (2.8.3) \\
 b_n^i &= \sum_{j=1}^N C_{n s_1}^{ij} D_{s_1}^j + \sum_{j=1}^N C_{n s_2}^{ij} D_{s_2}^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j
 \end{aligned}$$

avec :

- $b = (u)^0$ ou $(\sigma)^0$ selon les conditions aux limites du problème.
- $C_{s_1 s_1}^{ij} = B_{s_1 s_1}^{ij}, \dots$ etc, ou $A_{s_1 s_1}^{ij}, \dots$ etc, tirés à partir des équations (2.8.1) ou (2.8.2).

Dans le cas de fissure la discontinuité des déplacements existe et les déplacements ont des valeurs différentes en passant de la face négative à la face positive de la fissure ($u^+ \neq u^-$) et la différence entre les deux valeurs égale à la discontinuité :

$$\begin{cases}
 D_{s_1}^i = u_{s_1}^{i+} - u_{s_1}^{i-} \\
 D_{s_2}^i = u_{s_2}^{i+} - u_{s_2}^{i-} \\
 D_n^i = u_n^{i+} - u_n^{i-}
 \end{cases} \quad (2.8.4)$$

Le calcul des déplacements de chaque élément par la M.D.D nous donne les déplacements de la face inférieure (négative) pour le cas de fissure car nous avons prêté comme convention que \vec{n} est normal en sortant de la matière, les résultats vont être dans ce cas pour $n \rightarrow 0^-$, les déplacements de la face supérieure vont être calculés en utilisant les équations (2.8.4) :

$$\begin{cases}
 u_{s_1}^{i-} = u_{s_1}^{i+} - D_{s_1}^i \\
 u_{s_2}^{i-} = u_{s_2}^{i+} - D_{s_2}^i \\
 u_n^{i-} = u_n^{i+} - D_n^i
 \end{cases} \quad (2.8.4)$$

2.9 Conditions de symétrie

En 3D on rencontre souvent des problèmes qui possèdent un plan de symétrie. Les propriétés physiques du matériau, la forme géométrique et les conditions de chargement sont symétriques par rapport à ce plan. Les propriétés physiques pour un matériau homogène et isotropique sont identiques et indépendantes de la position et de l'orientation, par conséquent on doit respecter seulement les deux dernières conditions de symétrie.

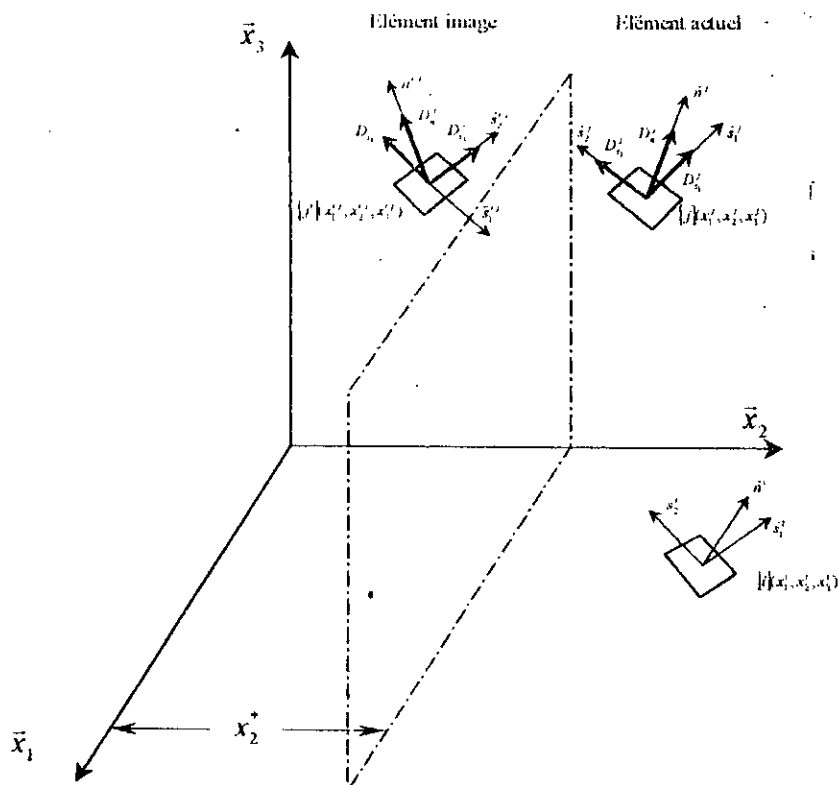


Figure 2.9.1 Conditions de symétrie par rapport au plan $x_2 = x_2^*$

Chaque élément de la frontière admet un élément symétrique par rapport au plan de symétrie. Pour déduire la position et l'orientation de cet élément et ses composantes de discontinuité des déplacements, on doit l'assimiler à une image réfléchié par un miroir qui est le plan de symétrie.

L'existence d'un plan de symétrie peut être introduite dans la M.D.D par la superposition des effets d'élément actuel avec les effets de son élément image dans le calcul des coefficients d'influence. Pour détailler cette procédure, on va considérer le cas particulier $x_2 = x_2^*$ comme plan de symétrie.

Par raison de simplicité on va discuter la procédure seulement pour le cas des coefficients d'influence de frontière, et par analogie on peut déduire le cas des coefficients d'influence pour les points intérieurs du corps. Considérons les deux éléments $[i](x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ et $[j](x_1^j, x_2^j, x_3^j)$ tel que. Les composantes de la discontinuité de déplacement pour l'élément actuel $[j]$ sont $D_{s_1}^j, D_{s_2}^j$ et D_n^j comme il est représenté sur la figure 2.9.1. La matrice de passage associée a cet élément par rapport au repère global est $[P]^j$. Les coordonnées de l'élément image $[j']$ sont $(x_1^{j'}, x_2^{j'}, x_3^{j'})$, sa matrice de passage est $[P']^{j'}$ et les composantes de la discontinuité de déplacement sont $D_{s_1}^{j'}, D_{s_2}^{j'}$ et $D_n^{j'}$.

D'après la figure 2.9.1 on déduit :

$$\begin{cases} x_1^{j'} = x_1^j \\ x_2^{j'} = x_2^* + (x_2^* - x_2^j) = 2x_2^* - x_2^j \\ x_3^{j'} = x_3^j \end{cases} \quad (2.9.1),$$

$$[P']^{j'} = \begin{bmatrix} P_1^{j'} & P_4^{j'} & P_7^{j'} \\ P_2^{j'} & P_5^{j'} & P_8^{j'} \\ P_3^{j'} & P_6^{j'} & P_9^{j'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_1^j & P_4^j & P_7^j \\ P_2^j & -P_5^j & -P_8^j \\ -P_3^j & P_6^j & P_9^j \end{bmatrix} \quad (2.9.2)$$

$$\text{et : } \begin{cases} D_{s_1}^{j'} = -D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{j'} = D_{s_2}^j \\ D_n^{j'} = D_n^j \end{cases} \quad (2.9.3)$$

Dans le cas d'un plan de symétrie d'équation $x_1 = x_1^*$ et avec une procédure similaire on déduit :

$$\begin{cases} x_1^{j'} = x_1^* + (x_1^* - x_1^j) = 2x_1^* - x_1^j \\ x_2^{j'} = x_2^j \\ x_3^{j'} = x_3^j \end{cases} \quad (2.9.4),$$

$$[P']^{j'} = \begin{bmatrix} P_1^j & -P_4^j & -P_7^j \\ -P_2^j & P_5^j & P_8^j \\ -P_3^j & P_6^j & P_9^j \end{bmatrix} \quad (2.9.5), \quad \text{et : } \begin{cases} D_{s_1}^{j'} = -D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{j'} = D_{s_2}^j \\ D_n^{j'} = D_n^j \end{cases} \quad (2.9.6)$$

et pour un plan de symétrie $x_3 = x_3^*$ on aura :

$$\begin{cases} x_1^{j'} = x_1^j \\ x_2^{j'} = x_2^j \\ x_3^{j'} = x_3^* + (x_3^* - x_3^j) = 2x_3^* - x_3^j \end{cases} \quad (2.9.7),$$

$$[P^j]' = \begin{bmatrix} -P_1^j & P_4^j & P_7^j \\ -P_2^j & P_5^j & P_8^j \\ P_3^j & -P_6^j & -P_9^j \end{bmatrix} \quad (2.9.8), \text{ et : } \begin{cases} D_{s_1}^{j'} = -D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{j'} = D_{s_2}^j \\ D_n^{j'} = D_n^j \end{cases} \quad (2.9.9)$$

Parfois, les problèmes traités possèdent deux plans de symétrie perpendiculaires $x_1 = x_1^*$ et $x_2 = x_2^*$ (Par exemple). L'élément $[j]$ dans ce cas possède trois éléments images $[j']$, $[j'']$ et $[j''']$ comme il est illustré dans la figure 2.9.2.

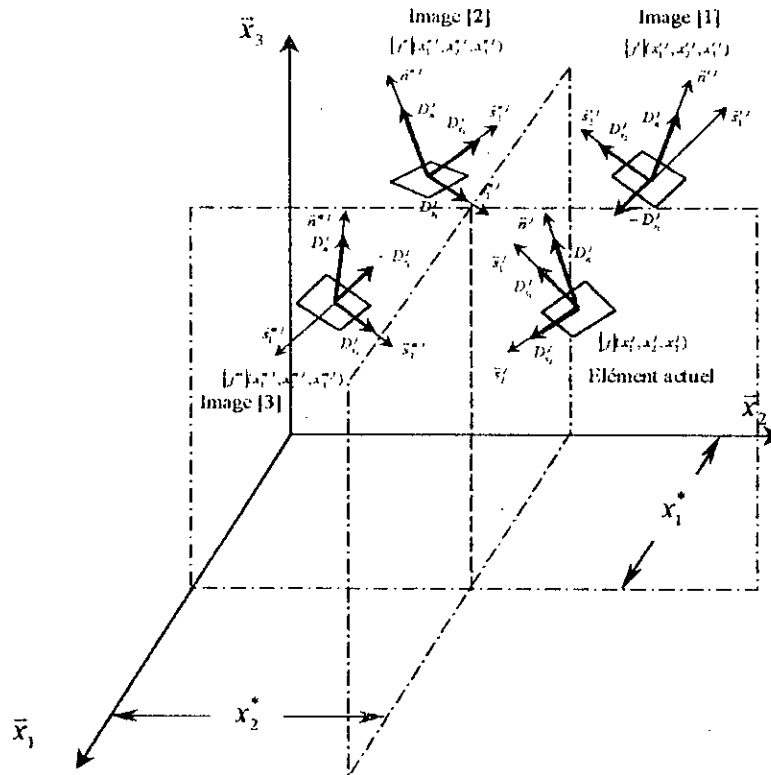


Figure 2.9.2 Conditions de symétrie par rapport aux plans $x_1 = x_1^*$ et $x_2 = x_2^*$.

Les relations qui lient l'élément actuel avec ses éléments images sont :

$$\begin{cases} x_1^{j'} = 2x_1^* - x_1^j \\ x_2^{j'} = x_2^j \\ x_3^{j'} = x_3^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{j''} = 2x_1^* - x_1^j \\ x_2^{j''} = 2x_2^* - x_2^j \\ x_3^{j''} = x_3^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{j'''} = x_1^j \\ x_2^{j'''} = 2x_2^* - x_2^j \\ x_3^{j'''} = x_3^j \end{cases} \quad (2.9.10),$$

$$[P^j]^j = \begin{bmatrix} P_1^j & -P_4^j & -P_7^j \\ -P_2^j & P_5^j & P_8^j \\ -P_3^j & P_6^j & P_9^j \end{bmatrix} \Rightarrow [P^{m^j}]^j = \begin{bmatrix} -P_1^j & -P_4^j & -P_7^j \\ -P_2^j & -P_5^j & -P_8^j \\ P_3^j & P_6^j & P_9^j \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[P^{m^j}]^j = \begin{bmatrix} -P_1^j & P_4^j & P_7^j \\ P_2^j & -P_5^j & -P_8^j \\ -P_3^j & P_6^j & P_9^j \end{bmatrix} \quad (2.9.11)$$

$$\text{et : } \begin{cases} D_{s_1}^{j^j} = -D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{j^j} = D_{s_2}^j \\ D_n^{j^j} = D_n^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{s_1}^{m^j} = D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{m^j} = D_{s_2}^j \\ D_n^{m^j} = D_n^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{s_1}^{m^j} = -D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{m^j} = D_{s_2}^j \\ D_n^{m^j} = D_n^j \end{cases} \quad (2.9.12)$$

Des équations similaires peuvent être déduites pour le cas où $x_1 = x_1^*$ et $x_3 = x_3^*$ sont deux plans de symétrie, et pour le cas où $x_2 = x_2^*$ et $x_3 = x_3^*$ sont deux plans de symétrie.

On passe directement au cas de triple symétrie par rapport aux plans $x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$ et $x_3 = x_3^*$. L'élément actuel $[j]$ admet dans ce cas sept éléments images $[j']$, $[j'']$, $[j''']$, $[j^{(4)}]$, $[j^{(5)}]$, $[j^{(6)}]$ et $[j^{(7)}]$. Les relations qui lient l'élément actuel avec les quatre autres images sont (les relations concernant les trois premières images sont exactement les mêmes que celles données précédemment) :

$$\begin{cases} x_1^{(4)j} = x_1^j \\ x_2^{(4)j} = x_2^j \\ x_3^{(4)j} = 2x_3^* - x_3^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(5)j} = 2x_1^* - x_1^j \\ x_2^{(5)j} = x_2^j \\ x_3^{(5)j} = 2x_3^* - x_3^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(6)j} = 2x_1^* - x_1^j \\ x_2^{(6)j} = 2x_2^* - x_2^j \\ x_3^{(6)j} = 2x_3^* - x_3^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(7)j} = x_1^j \\ x_2^{(7)j} = 2x_2^* - x_2^j \\ x_3^{(7)j} = 2x_3^* - x_3^j \end{cases} \quad (2.9.13),$$

$$[P^{(4)}]^j = \begin{bmatrix} -P_1^j & P_4^j & P_7^j \\ -P_2^j & P_5^j & P_8^j \\ P_3^j & -P_6^j & -P_9^j \end{bmatrix} \Rightarrow [P^{(5)}]^j = \begin{bmatrix} -P_1^j & -P_4^j & -P_7^j \\ P_2^j & P_5^j & P_8^j \\ -P_3^j & -P_6^j & -P_9^j \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[P^{(6)}]^j = \begin{bmatrix} P_1^j & -P_4^j & -P_7^j \\ P_2^j & -P_5^j & -P_8^j \\ P_3^j & -P_6^j & -P_9^j \end{bmatrix} \Rightarrow [P^{(7)}]^j = \begin{bmatrix} P_1^j & P_4^j & P_7^j \\ -P_2^j & -P_5^j & -P_8^j \\ -P_3^j & -P_6^j & -P_9^j \end{bmatrix} \quad (2.9.14)$$

$$\text{et : } \begin{cases} D_{s_1}^{(4)j} = -D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{(4)j} = D_{s_2}^j \\ D_n^{(4)j} = D_n^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{s_1}^{(5)j} = D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{(5)j} = D_{s_2}^j \\ D_n^{(5)j} = D_n^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{s_1}^{(6)j} = -D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{(6)j} = D_{s_2}^j \\ D_n^{(6)j} = D_n^j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{s_1}^{(7)j} = D_{s_1}^j \\ D_{s_2}^{(7)j} = D_{s_2}^j \\ D_n^{(7)j} = D_n^j \end{cases} \quad (2.9.15)$$

Cette étude de symétrie a beaucoup d'importance, car en appliquant le principe de superposition dans le calcul des coefficients d'influence de l'élément actuel [j] et ses éléments images la taille de la matrice des coefficients d'influence va être réduite selon l'ordre de symétrie et par conséquent la réduction de l'espace mémoire utilisé dans le code de calcul. Dans le cas d'un seul plan de symétrie la matrice se réduit d'un demi en chaque dimension, pour une double symétrie la taille de la matrice va être réduite au quart en chaque dimension et au (1/8) pour le cas d'une triple symétrie.

2.10 Calcul de facteur d'intensité de contrainte

Beaucoup de relations existent donnant l'expression du facteur d'intensité de contrainte (*F.I.C*), les deux principales relations qui peuvent être utilisées numériquement sont :

- La relation basée sur la méthode de WESTERGAARD, qui donne l'expression de Facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'ouverture de fissure (*voir l'équation 1.2.2*).
- L'autre relation est celle basée sur la méthode énergétique qui est déduite en introduisant les intégrales de Rice et de Bui dans l'expression du taux de restitution d'énergie.

A cause de la grande complexité de l'utilisation de la deuxième relation en fissuration tridimensionnelle, nous préférons calculer le facteur d'intensité de contrainte par la M.D.D en se basant essentiellement sur son expression en terme de la discontinuité de déplacement au voisinage du bout de fissure :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [D_n] \right) \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [D_{s_1}] \right) \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [D_{s_2}] \right)
 \end{aligned} \tag{2.10.1}$$

Le facteur d'intensité de contrainte est calculé au centre de chaque élément situé au bout de la fissure. La distance r dans l'équation précédente va être égale à la

distance entre le centre de l'élément et la limite de la fissure. Cela nous oblige à raffiner de plus en plus les éléments au voisinage du bout de la fissure pour obtenir une meilleure précision sur la valeur du facteur d'intensité de contrainte.

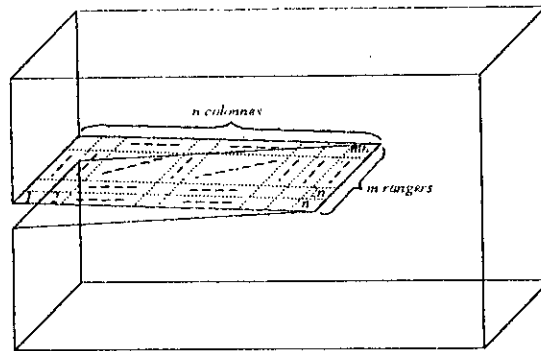


Figure 2.10.1 Procédure numérique pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte.

Si on prend comme exemple la fissure rectangulaire représentée sur la figure 2.10.1, l'expression utilisée pour le calcul numérique de facteur d'intensité de contrainte est :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{a_{kn}}} (D_n)_{kn} \right) \\
 K_{II} &= \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{a_{kn}}} (D_{s_1})_{kn} \right) \\
 K_{III} &= \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{a_{kn}}} (D_{s_2})_{kn} \right)
 \end{aligned} \quad (k=1 \text{ à } m) \quad (2.10.2)$$

tel que a_{kn} est la distance entre le centre de l'élément bout de fissure et le bout de la fissure.

2.11 Code de calcul réalisé

2.11.1 Structure du code de calcul

Le code de calcul est fait avec le langage *FORTRAN77* en utilisant le compilateur *F32* sous windows. Le code est constitué de trois programmes *LOCA*, *CDD* et *PSPI* qui travaillent dans cet ordre.

LOCA est le programme qui comporte la lecture des principales données ; les caractéristiques mécaniques, le chargement, le raffinement des faces et le positionnement du problème. Il discrétise le corps à étudier et il affecte à chaque élément sa position, son orientation et ses conditions aux limites. En seconde étape, *LOCA* localise les points spécifiques à l'intérieur du corps où on veut déterminer le champ de contrainte et de déplacement. Les résultats de ce programme constituent deux bases de données, la première pour le programme *CDD* et la deuxième pour le programme *PSPI*.

CDD est le programme principal de la méthode. Il récupère les données à partir de *LOCA* et il calcule les coefficients d'influence entre chaque couple d'éléments de la frontière du corps en appelant au sous-programme *COEFF*. En suite, il construit le système algébrique d'équations pour le résoudre par le sous-programme *SOLVE* pour obtenir les composantes de discontinuité des déplacements de chaque élément. Ces résultats vont être chargés dans un fichier qui va être utilisé comme une base de données pour le troisième programme *PSPI*. Finalement, *CDD* calcule le champ de contraintes et de déplacement pour chaque élément de frontière, ainsi que le facteur d'intensité de contrainte pour l'élément du bout de fissure si elle existe, et les stocker dans un autre fichier de résultats.

Le programme *PSPI* est le dernier programme à exécuter dans le code de calcul si on veut s'intéresser à des points intérieurs du corps, sinon, son exécution n'est pas indispensable. *PSPI* prend la localisation des points spécifiques de l'intérieur du corps à partir des résultats du premier programme *LOCA* et les composantes de discontinuité des déplacements de chaque élément de frontière depuis les résultats de *CDD*. Il calcule les coefficients d'influence entre les points spécifiques et les éléments de frontière en utilisant le même sous-programme *COEFF* afin de trouver le champ de contraintes et de déplacements en ces points.

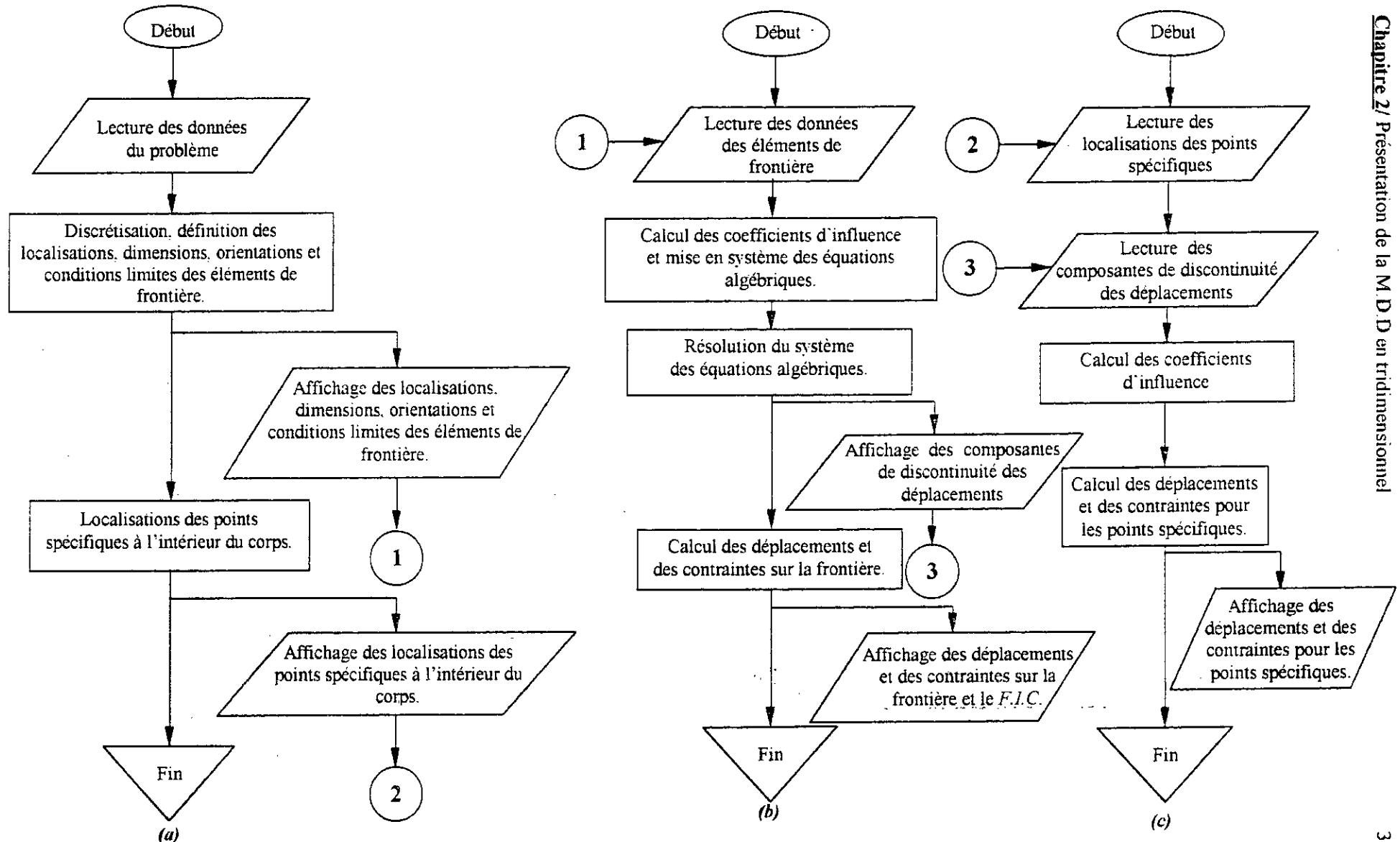


Figure 2.11.1 Organigramme global du code de calcul ; (a) :LOCA. (b) :CDD. (c) :PSPI.

Parfois, on veut changer les points spécifiques à l'intérieur du corps pour le même problème. Pour cela au lieu de refaire l'exécution de toute la succession des trois programmes, on exécute uniquement le premier programme *LOCA* et le dernier *PSPI*. A cet effet, on a choisi la structure du code de calcul mentionnée sur la figure 3.11.1, pour qu'on puisse accéder à chaque programme séparément.

2.11.2 Temps d'exécution du code de calcul

Le micro-ordinateur utilisé dans la partie numérique est un Pentium-II-Celeron300A muni d'un coprocesseur mathématique et une mémoire vive SDRAM64Mo. La mise en évidence du temps d'exécution de chacun des programmes est nécessaire pour compléter tous les paramètres influents sur le choix du nombre d'éléments nécessaire et suffisant pour une meilleure modélisation du problème considéré.

Pour le premier programme *LOCA*, le temps d'exécution est très faible. Par exemple, pour 800 éléments de frontière sans l'existence des points spécifiques à l'intérieur du corps, le temps d'exécution est 0.49 seconde. Avec 1000 points spécifiques, il augmente à 0.60 seconde. Il est donc inutile d'étudier la variation du temps en fonction du nombre d'éléments de frontière ou en fonction des points spécifiques.

Le temps d'exécution du second programme *CDD* est important relativement aux deux autres programmes, à cause de la complexité des calculs concernant les coefficients d'influence qui peuvent atteindre $(3n \times 3n)$ et $(9n \times 3n)$ coefficients, respectivement avant et après la résolution de système d'équations (où n est le nombre d'éléments de frontière). Ainsi le temps s'écoulant dans la résolution du système algébrique d'équations est très important, vu la taille de la matrice constituant le système algébrique $(3n \times 3n)$, ce qui explique l'allure de la courbe présentée sur la figure 2.11.2, qui montre que le temps augmente de plus en plus rapidement en augmentant le nombre d'éléments.

Le programme *PSPI* prend moins du temps dans son exécution, ceci est dû à l'absence de résolution de système d'équations, il reste seulement le calcul des coefficients d'influence des éléments de frontière sur les points spécifiques $(9m \times 3n)$

coefficients, m étant le nombre de points spécifiques). Pour le même nombre d'éléments de frontière $n=200$ éléments, on a calculé le temps d'exécution en augmentant le nombre des points spécifiques, la variation du temps dans ce cas est linéaire (voir la figure 2.11.3), à cause de l'augmentation linéaire de nombre d'opérations concernant les coefficients d'influence.

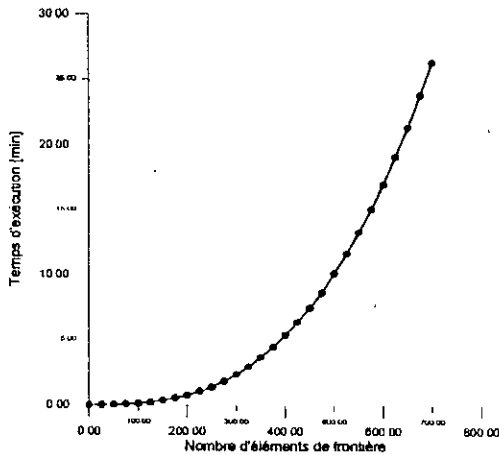


Figure 2.11.2 Variation de temps d'exécution en fonction de nombre d'élément de frontière.

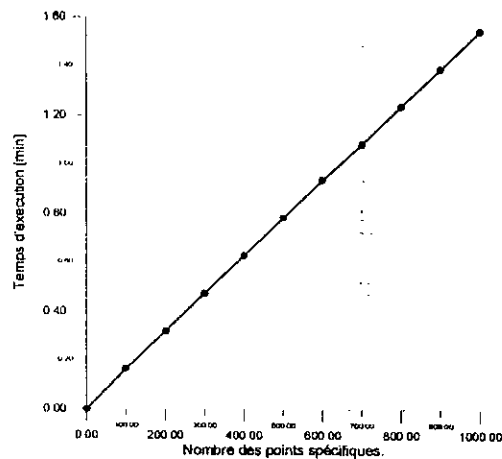


Figure 2.11.3 Variation de temps d'exécution en fonction de nombre de points spécifiques.

2.11.3 Présentation du code de calcul

Pour faciliter l'accès aux fichiers d'entrée et de sortie ainsi que l'exécution des différents programmes du code de calcul, nous avons présenté le code par une interface windows réalisée en « Delphi 4 » comme représentée sur la figure 2.11.4.

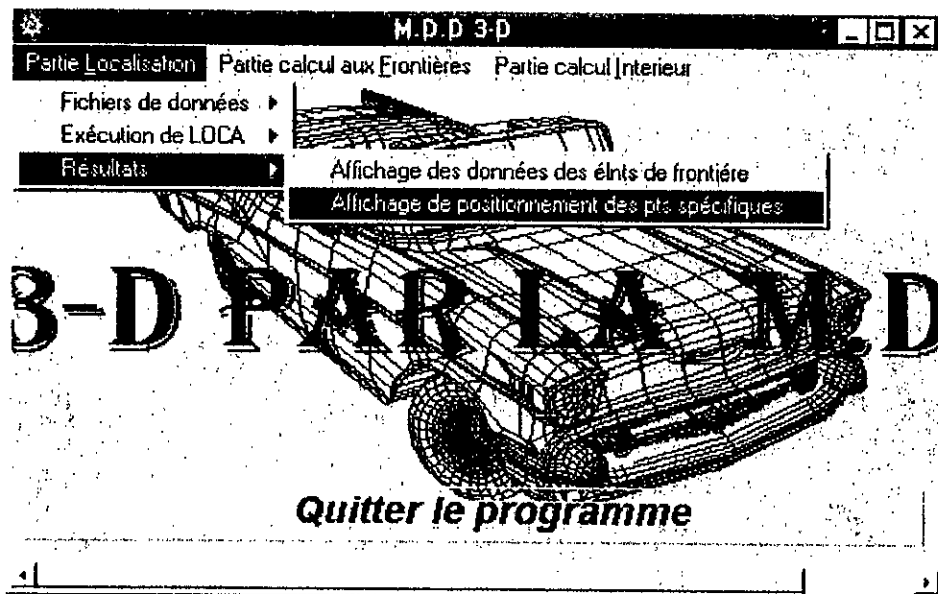


Figure 2.11.4 Présentation du code de calcul.

**EXEMPLES,
RÉSULTATS ET
INTERPRÉTATIONS**

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va essayer de traiter un nombre d'exemples pratiques en mécanique des solides, et qui peuvent être simulés numériquement par la méthode de discontinuité de déplacement (M.D.D) en tridimensionnel. Ces exemples peuvent être divisés en deux catégories :

- La première catégorie d'exemples concerne le cas où nous désirons calculer le champ de contrainte en des points particuliers du corps continu à étudier. Dans cette catégorie on traite des exemples qui possèdent une solution analytique qu'on compare avec celle trouvée numériquement par la M.D.D. Ces exemples constituent des validations du code de calcul. D'autres exemples plus compliqués n'ont pas de solution analytique, pour les quels nous présentons la solution numérique uniquement.
- La deuxième catégorie concerne les problèmes de la mécanique de rupture. Nous calculons le facteur d'intensité de contrainte (F.I.C) et de les comparons avec ceux donnés par les différentes relations empiriques.

3.2 Première catégorie d'exemples

3.2.1 Détermination du champ de contraintes pour un milieu infini contenant une fissure circulaire chargée intérieurement.

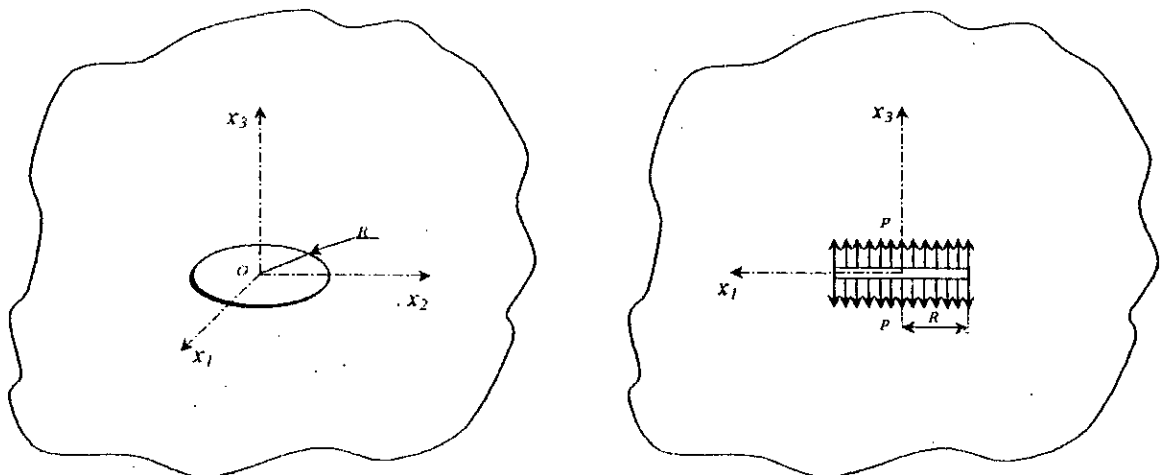


Figure 3.2.1 Milieu infini contenant une fissure circulaire sous pression uniforme.

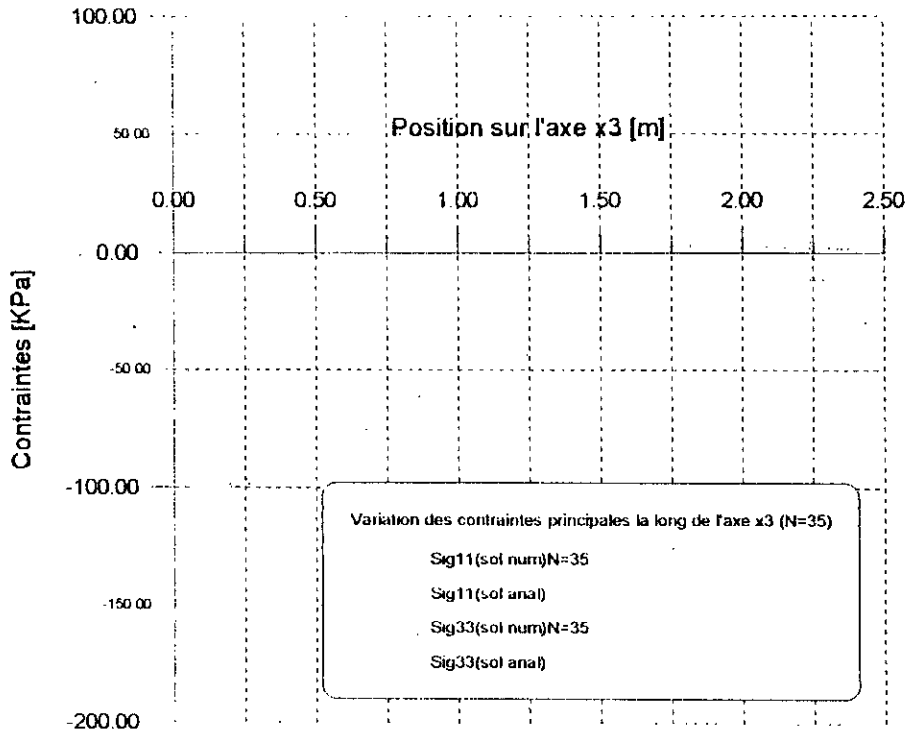


Figure 3.2.4 Variation des contraintes principales sur l'axe x_3 pour $N=35$.

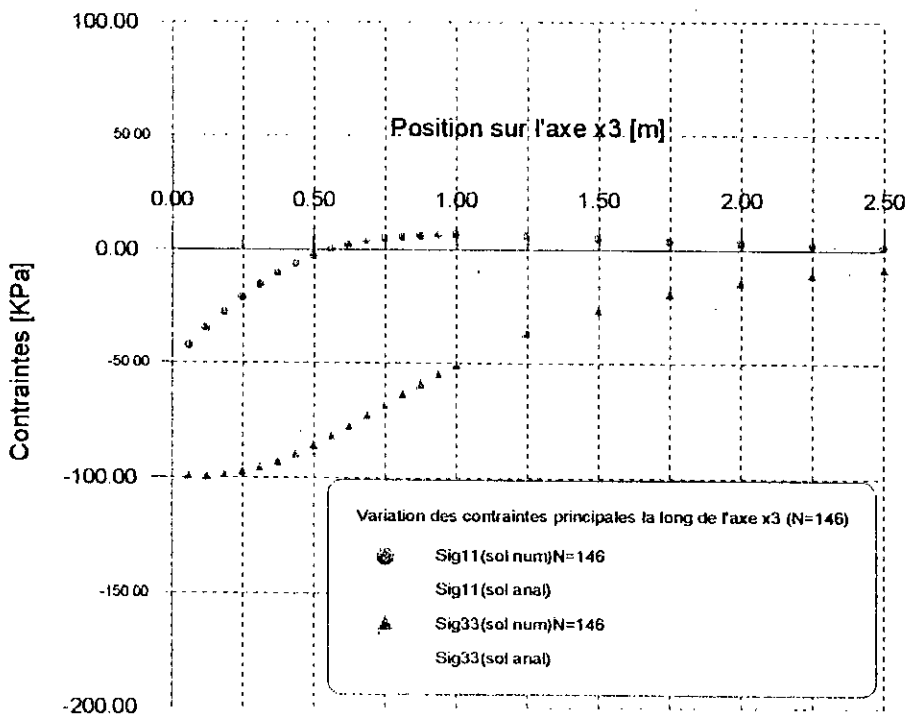


Figure 3.2.5 Variation des contraintes principales sur l'axe x_3 pour $N=146$.

Considérons le milieu linéairement élastique et infini présenté sur la figure 3.2.1, contenant une fissure circulaire de rayon $R=1m$ soumise à une pression uniforme qui a tendance à l'ouvrir. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont les suivantes : $E=2.10^5 KPa$ et $\nu=0$ ⁽¹⁾ respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson. Avec un chargement $p=100KPa$, la condition aux limites prise pour la fissure sera donc : $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 0, \sigma_n = -100KPa$. La présence d'une double symétrie dans cet exemple nous conduit à considérer seulement le quart de la fissure dans le calcul numérique. On utilise deux discrétisations de la fissure. La première est obtenue en divisant la fissure en 7 éléments dans le sens de x_1 et 7 éléments dans le sens de x_2 soit 35 éléments. La deuxième discrétisation utilise 14 éléments dans le sens de x_1 et 14 éléments dans le sens de x_2 pour obtenir au total 146 éléments

Nous calculons les contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} sur l'axe (Ox_1) , l'axe (Ox_3) et sur le plan (Ox_1x_3) . Les résultats obtenus sont illustrés sous la forme des graphes dans les figures 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7 et 3.2.8.

La solution analytique présentée sur les figures 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5 est tirée directement des résultats présentés sous forme des graphes dans « Wiles T.D. et al. (1983) ».

D'après les graphes des figures 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5, la solution trouvée par la M.D.D est très proche de la solution analytique. Cela est valable au voisinage du bout de la fissure sur l'axe x_1 où la variation des contraintes σ_{11} et σ_{33} est très rapide. La condition aux limites $\sigma_{33}=100KPa$ est respectée pour $x_3 \rightarrow 0$ dans les figures 3.2.4 et 3.2.5.

L'influence du raffinement de discrétisation est remarquable uniquement pour le cas de calcul sur l'axe x_1 , où la variation des contraintes est rapide au voisinage de la tête de fissure le long de cette partie de l'axe x_1 .

Les figures 3.2.6, 3.2.7 et 3.2.8 représentent le champ de contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} dans le plan (Ox_1x_3) . Nous remarquons la présence des zones de traction au voisinage du bout de fissure pour σ_{11} et σ_{33} . La fissure dans ce cas risque de se propager en mode I.

⁽¹⁾ Pour conserver les mêmes données utilisées par « Wiles T.D. et al. (1983) ».

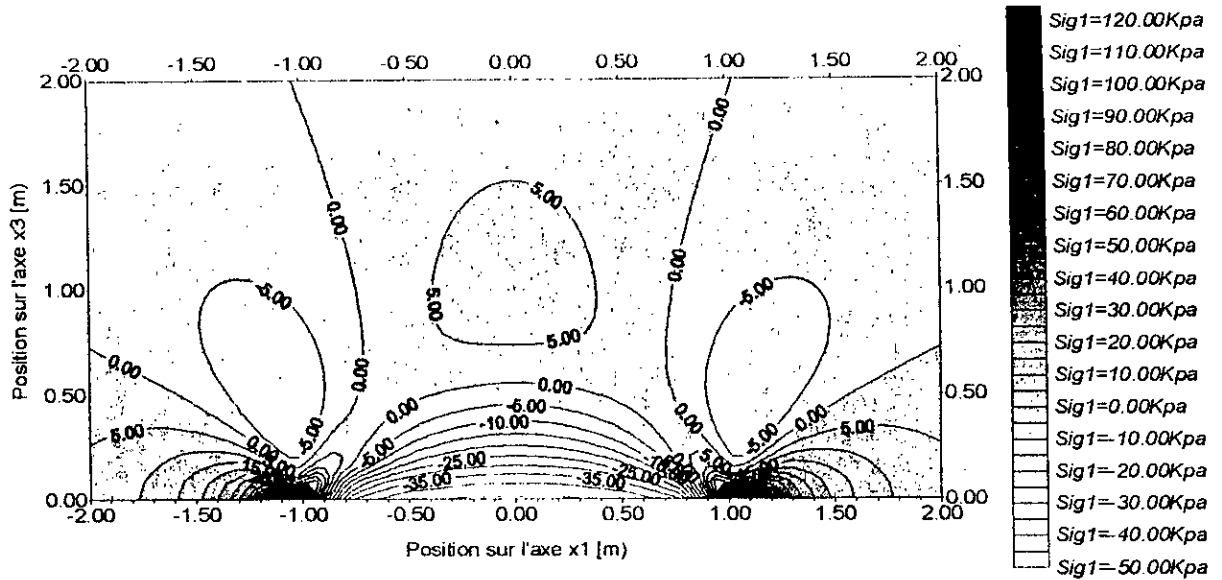


Figure 3.2.6 Variation de la contraintes σ_{11} dans le plan (Ox_1x_3) .

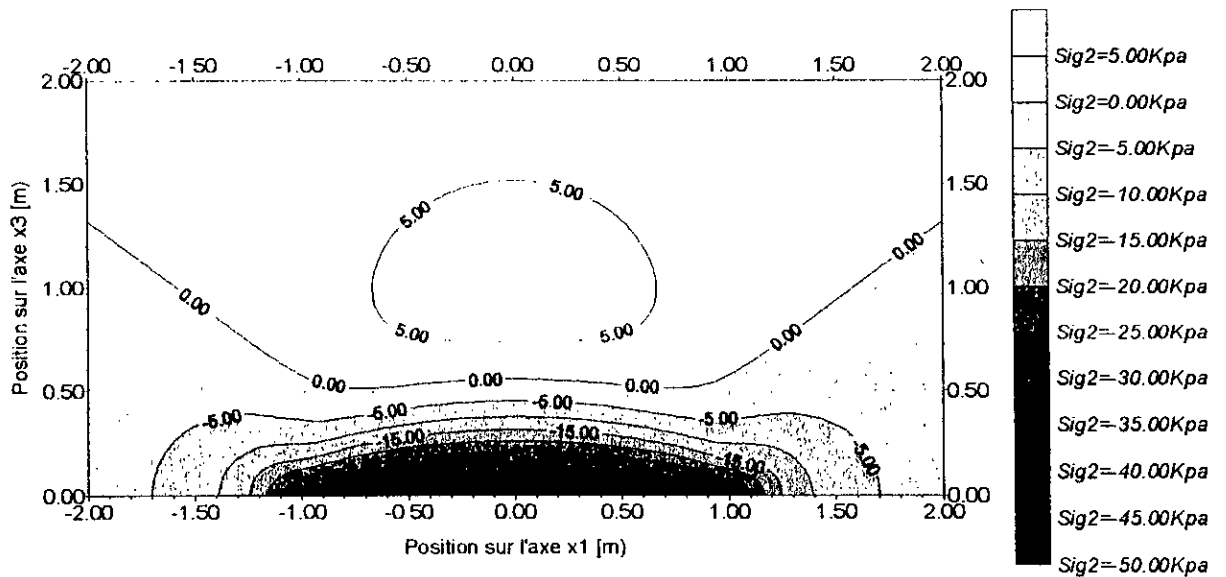


Figure 3.2.7 Variation de la contraintes σ_{22} dans le plan (Ox_1x_3) .

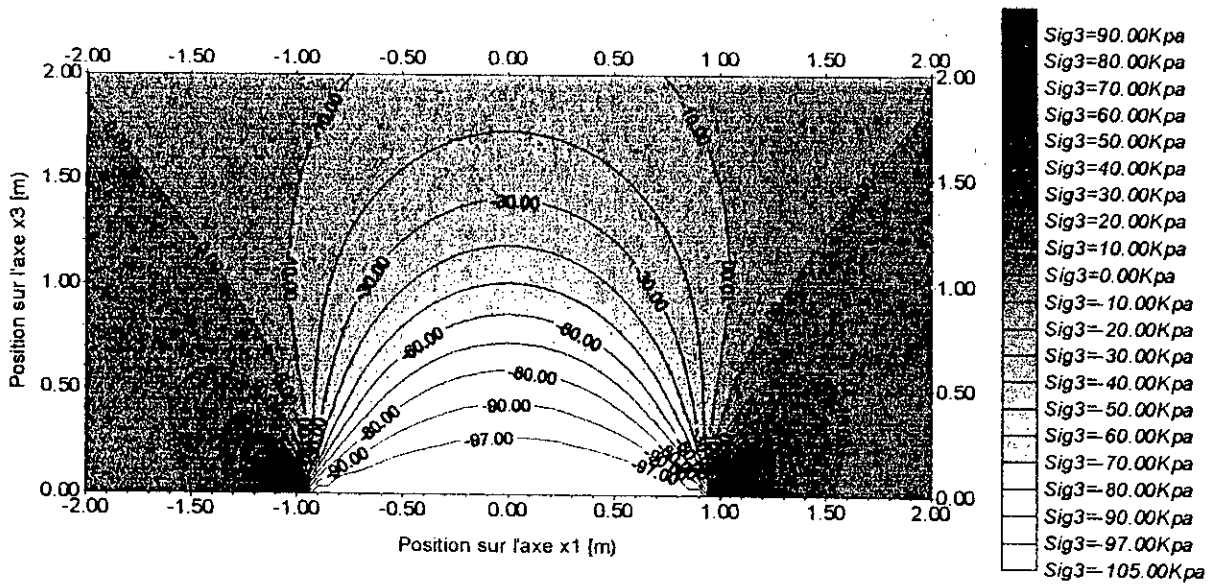


Figure 3.2.8 Variation de la contraintes σ_3 dans le plan (Ox_1, x_3) .

3.2.2 Détermination du champ de contraintes pour un milieu semi-infini chargé sur une bande de largeur $2a$.

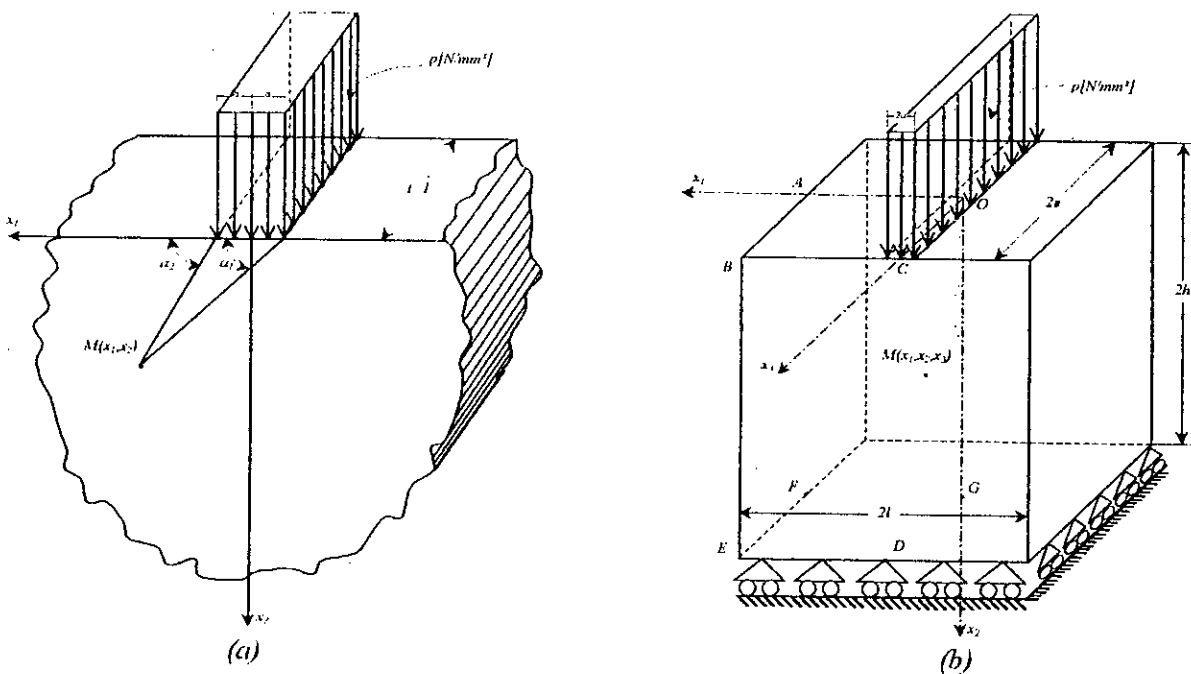


Figure 3.2.9 Présentation d'un milieu semi-infini chargée sur une bande $2a$.

(a) *Modèle réel.* (b) *Modèle numérique.*

On considère le problème d'un milieu semi-infini, linéairement élastique et chargé sur une bande de largeur $2a$ (voir figure 3.2.9 (a)). Pour traiter ce problème numériquement par la M.D.D, on simule le problème physique par le modèle numérique en figure 3.2.9(b). Le domaine à discrétiser doit être de très grandes dimensions. Il doit reposer sur des appuis simples (pour simuler un milieu semi-infini). Ce modèle présente une double symétrie par rapport aux plans (Ox_1x_2) , (Ox_2x_3) . De ce fait, on considère le quart du parallélépipède dans la discrétisation. Les caractéristiques du matériau, le chargement et les dimensions du problème sont :

$$\begin{array}{l|l} E = 206000 \text{ KPa} & b = 20 \text{ m} \\ \nu = 0.3 & h = 20 \text{ m} \\ p = -1000 \text{ KPa} & e = 35 \text{ m} \\ a = 0.067 \text{ m} & \end{array}$$

Pour obtenir une bonne précision au voisinage du chargement (la partie la plus sollicitée), on doit raffiner de plus en plus la face $(O-A-B-C)$ en se rapprochant du chargement et du centre O (projection de l'axe, où on calcul les contraintes). La discrétisation du modèle numérique est donnée par la figure et le tableau suivants :

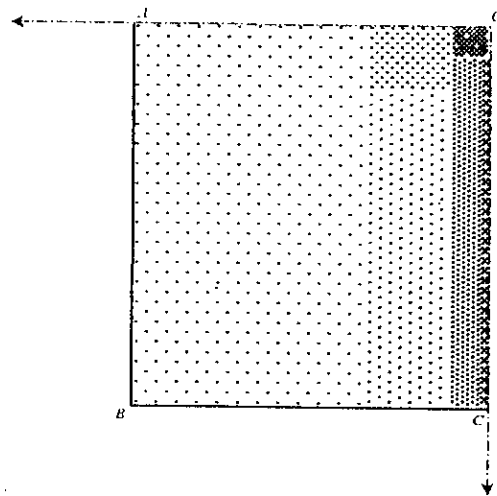


Figure 3.2.10 Discretisation de la face supérieure du modèle numérique.

La face de frontière considérée	E-F-G-D	E-D-C-B	A-B-E-F	A-B-C-O					
Les conditions aux limites	$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = 0$ $\sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = 0$ $\sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = 0$ $\sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = 0$ $\sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = 0$ $\sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = -100$	$\sigma_{s1} = 0$ $\sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = -100$
Dimensions	$e \times l$	$l \times 2h$	$e \times 2h$	$3l/4 \times e$	$9l/40$ x $6e/7$	$9l/40$ x $e/7$	$7l/300$ x $69e/70$	$l/600$ x $69e/70$	$l/40$ x $e/70$
Raffinage [élément]	8×6	6×6	8×6	6×12	3×18	7×8	2×60	1×40	15×15
Nombre total d'éléments	699 éléments								

Tableau 3.2.1 dimensions et discrétisation du modèle numérique.

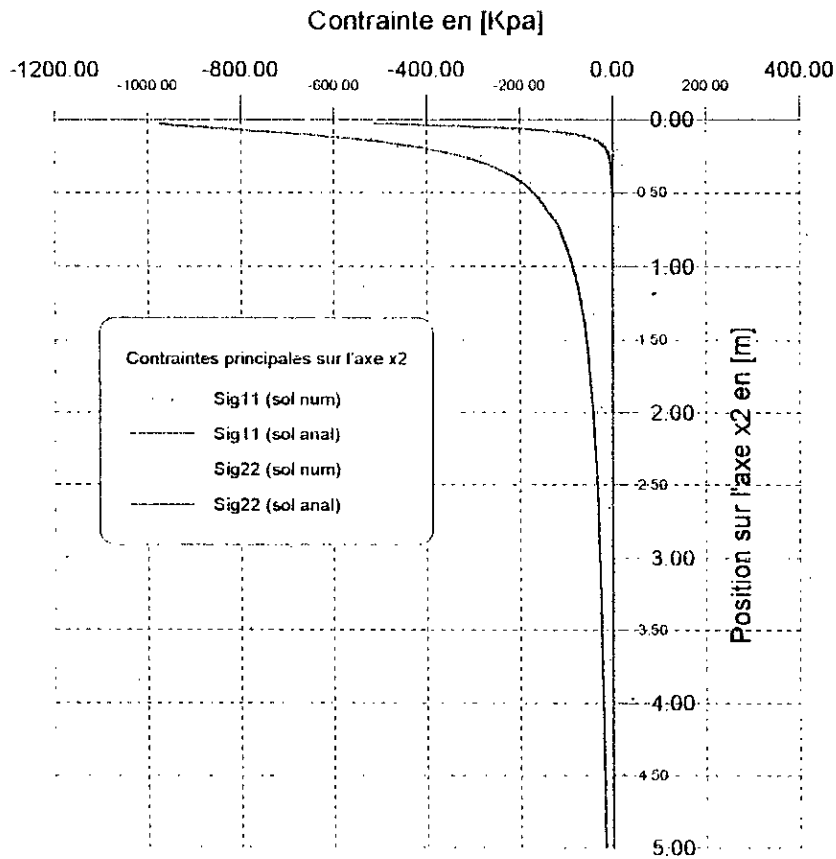


Figure 3.2.11 Variation des contraintes σ_{11} et σ_{22} le long de l'axe x_2 .

Ce problème a été traité analytiquement comme un problème en déformation plane tant que sa troisième dimension est grande (pour cela, on a pris « e » très grand). La solution analytique « Durelli A.J. et al.(1958) » est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{f}{\pi} \left[\alpha_2 - \alpha_1 + \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \right] \\ \sigma_{22} &= -\frac{f}{\pi} \left[\alpha_2 - \alpha_1 - \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \right] \\ \tau_{12} &= +\frac{f}{2\pi} (\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

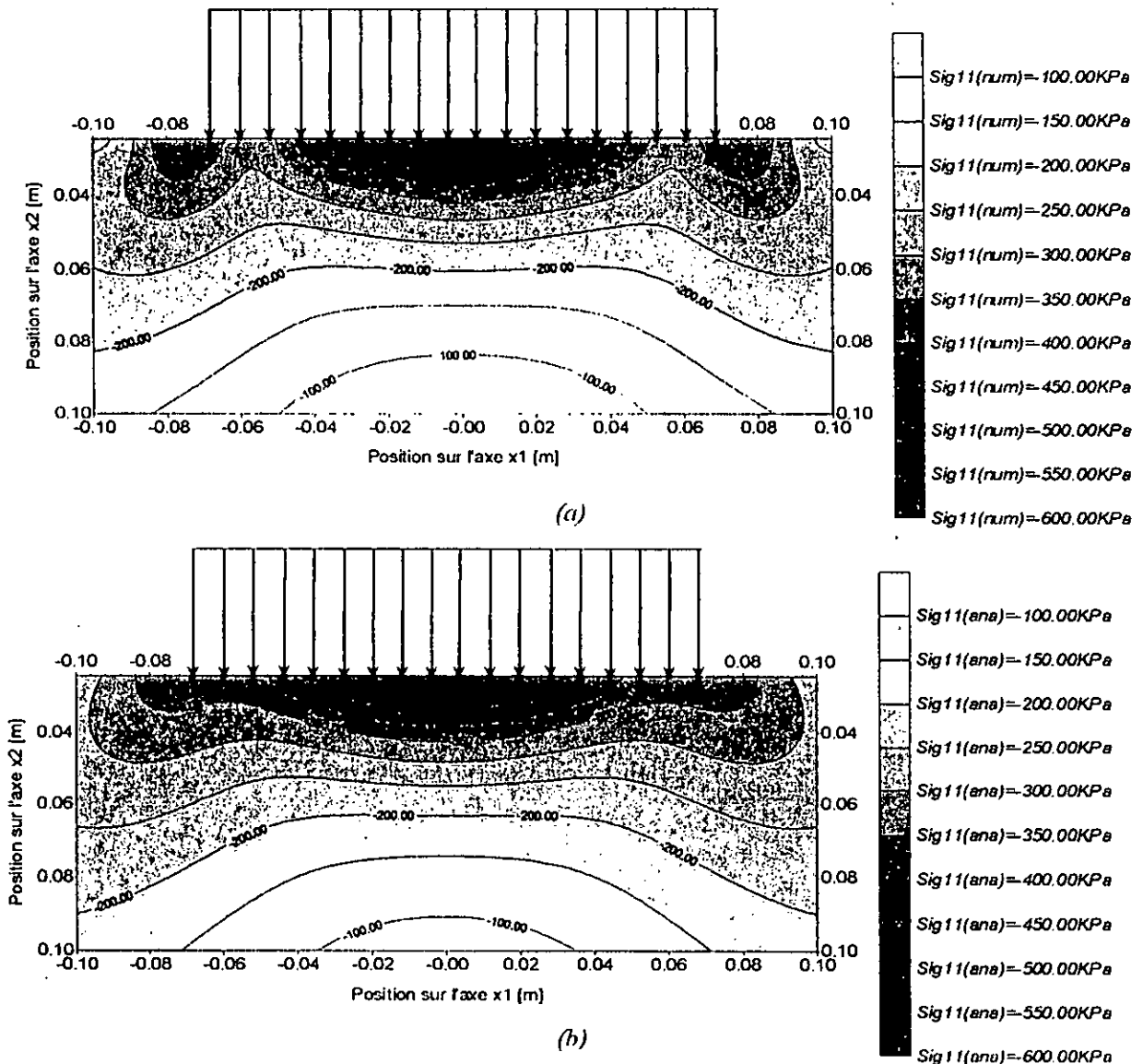
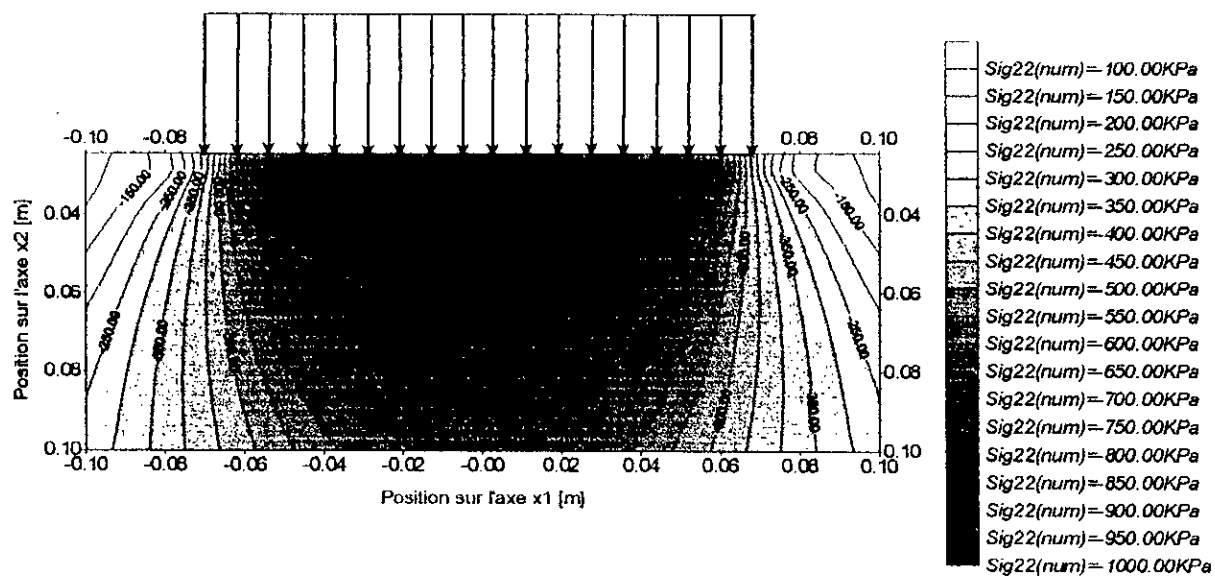
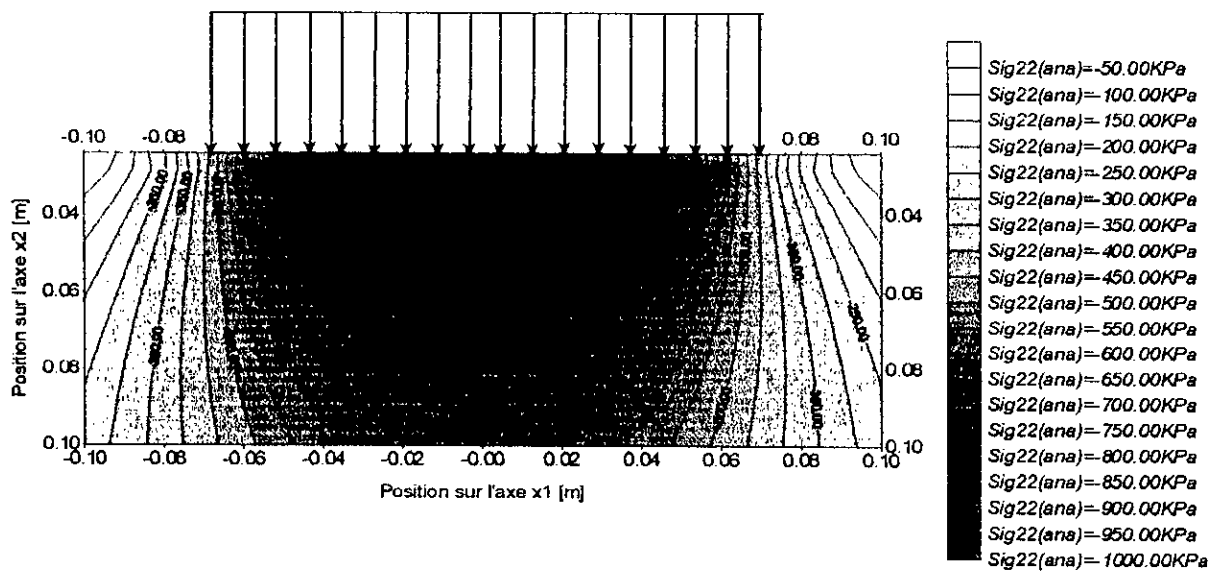


Figure 3.2.12 Présentation du champ de contrainte σ_{11} dans le plan (Ox_1x_2) .

(a) : Solution numérique (M.D.D). (b) : Solution analytique.



(a)



(b)

Figure 3.2.13 Présentation du champ de contrainte σ_{22} dans le plan (Ox_1x_2) .

(a) : Solution numérique (M.D.I). (b) : Solution analytique.

D'après le graphe de la figure 3.2.11, on constate une bonne corrélation entre la solution numérique et la solution analytique, surtout en se rapprochant du plan de chargement. La condition $\sigma_{22} \rightarrow p$ est remplie.

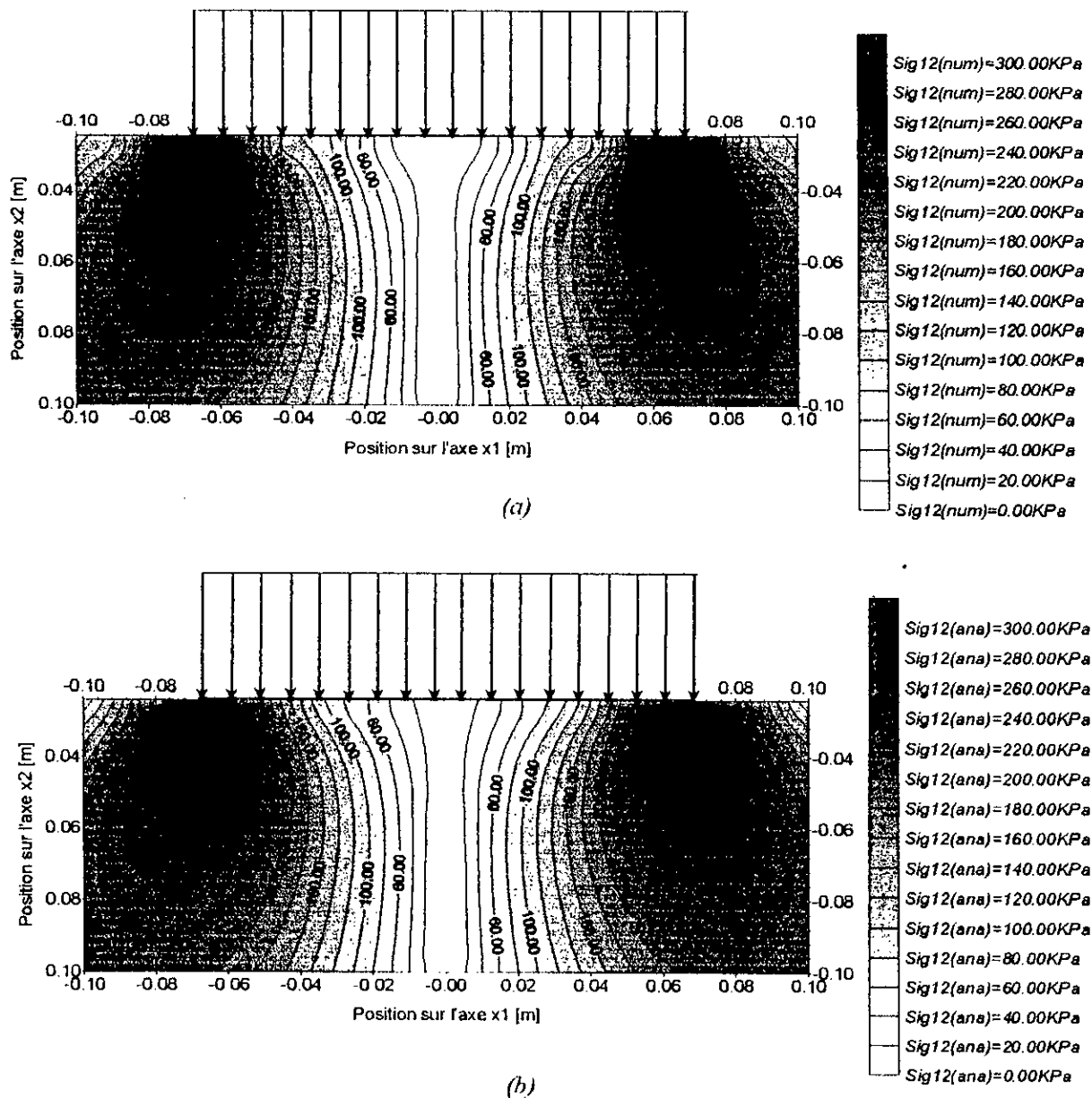


Figure 3.2.14 Présentation du champ de contrainte σ_{12} dans le plan (Ox_1x_2) .

(a) : Solution numérique (M.D.D). (b) : Solution analytique.

A partir des figures 3.2.12, 3.2.13 et 3.2.14, on observe clairement que l'allure globale des solutions données par la M.D.D est très semblable à celle des solutions analytiques et de plus en plus en se rapprochant du plan du chargement. On constate aussi que la condition aux limites $\sigma_{22} = 1000KPa$ est remplie dans le graphe de la figure 3.2.13 et que la contrainte de cisaillement est maximale au niveau des bords de bande de chargement $(x_1 = \pm a)$ dans la figure 3.2.14, ce qui est très logique.

3.2.3 Détermination du champ de contraintes pour un milieu semi-infini chargé sur un rectangle $2a \times 2b$.

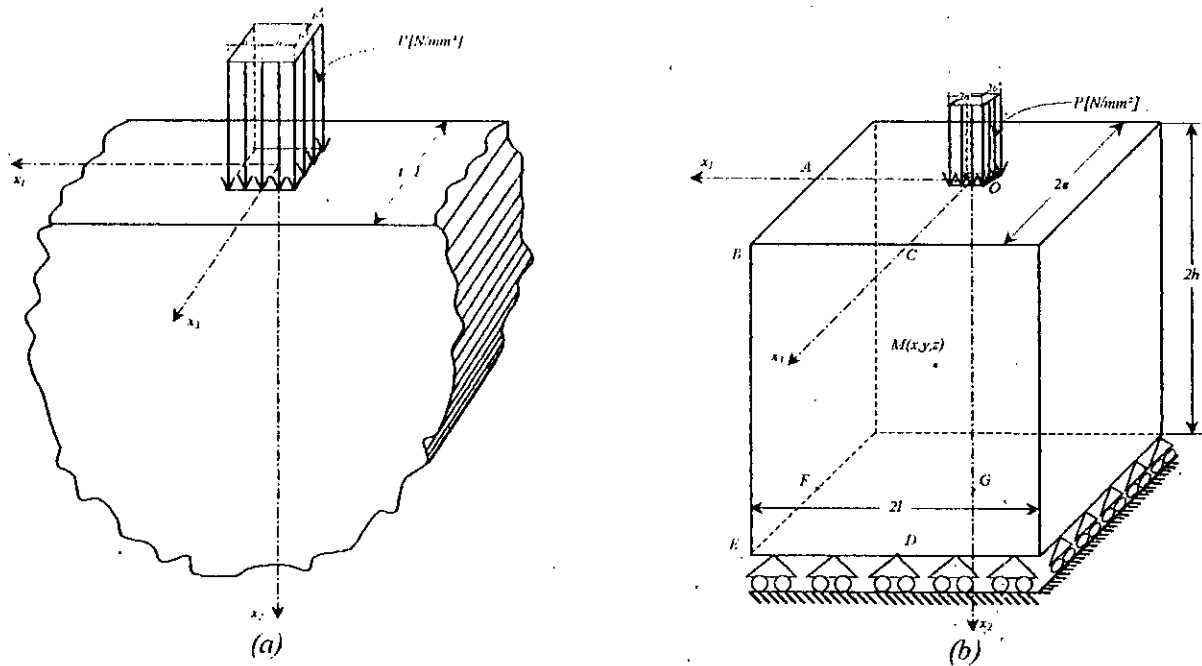


Figure 3.2.15 Présentation d'un milieu semi-infini chargé sur un rectangle $2a \times 2b$.
 (a) : Model réel. (b) : Modèle numérique.

Nous considérons le même problème tridimensionnel précédent, dont le chargement est sur un rectangle de longueur $2b$ et de largeur $2a$. Nous conservons les mêmes dimensions, la même discrétisation et la même valeur du chargement $p=1000KPa$ que l'exemple précédent. Nous prenons dans le premier cas : $b=2a=0.067m$ et dans le second cas : $b=a=0.067$ (chargement sur un carré). Nous nous intéressons au calcul des contraintes le long de l'axe x_2 .

D'après le graphe de la figure 3.2.16, nous remarquons que les contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} commencent très faibles pour $x_2 \geq 1m$. Au-delà de ce point, la contrainte σ_{22} augmente jusqu'à la valeur de la condition aux limites p . Cependant, σ_{11} et σ_{33} restent faibles jusqu'à $x_2=0.5$. σ_{11} et σ_{33} commencent à augmenter rapidement pour atteindre des valeurs maximales semblables au voisinage de la face chargée. La différence entre σ_{11} et σ_{33} près de la frontière est bien vérifiée sur le graphe 3.2.16. Dans le graphe 3.2.17 concernant un chargement carré, les contraintes sont bien confondues sur tout le domaine étudié.

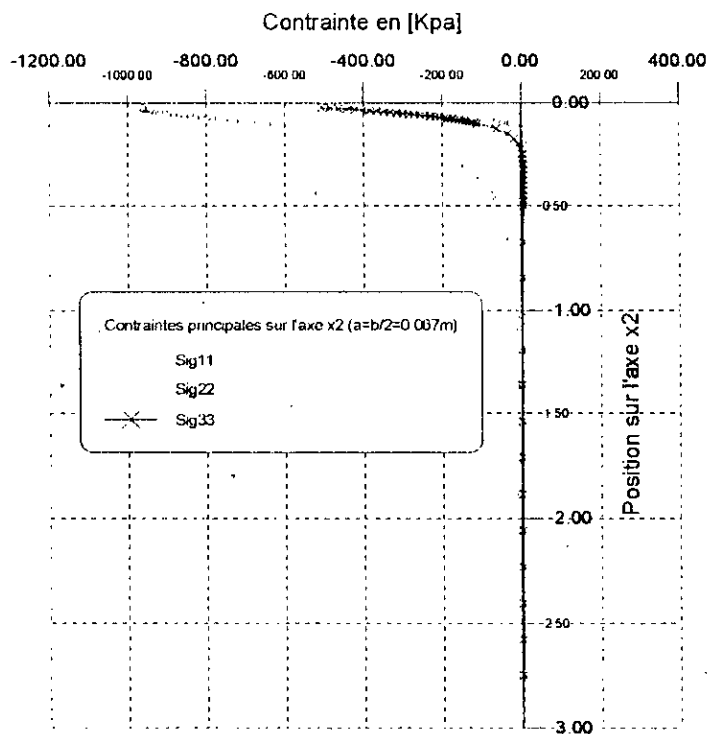


Figure 3.2.16 La Variation des contraintes le long de l'axe x_2 avec $a=b/2$.

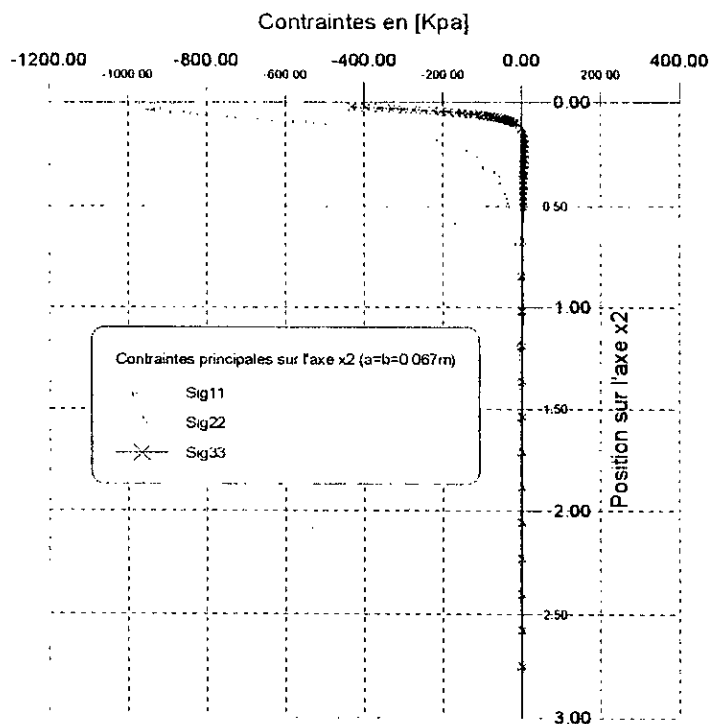


Figure 3.2.17 La Variation des contraintes le long de l'axe x_2 avec $a = b$.

3.2.4 Détermination du champ de contraintes sous une bille exerçant une force P sur un milieu semi-infini.

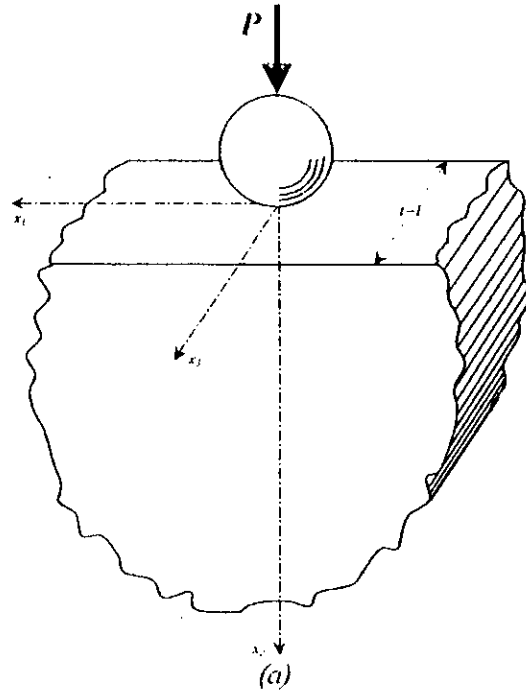


Figure 3.2.18 Présentation d'un milieu semi-infini soumis à un chargement exercé par une bille.

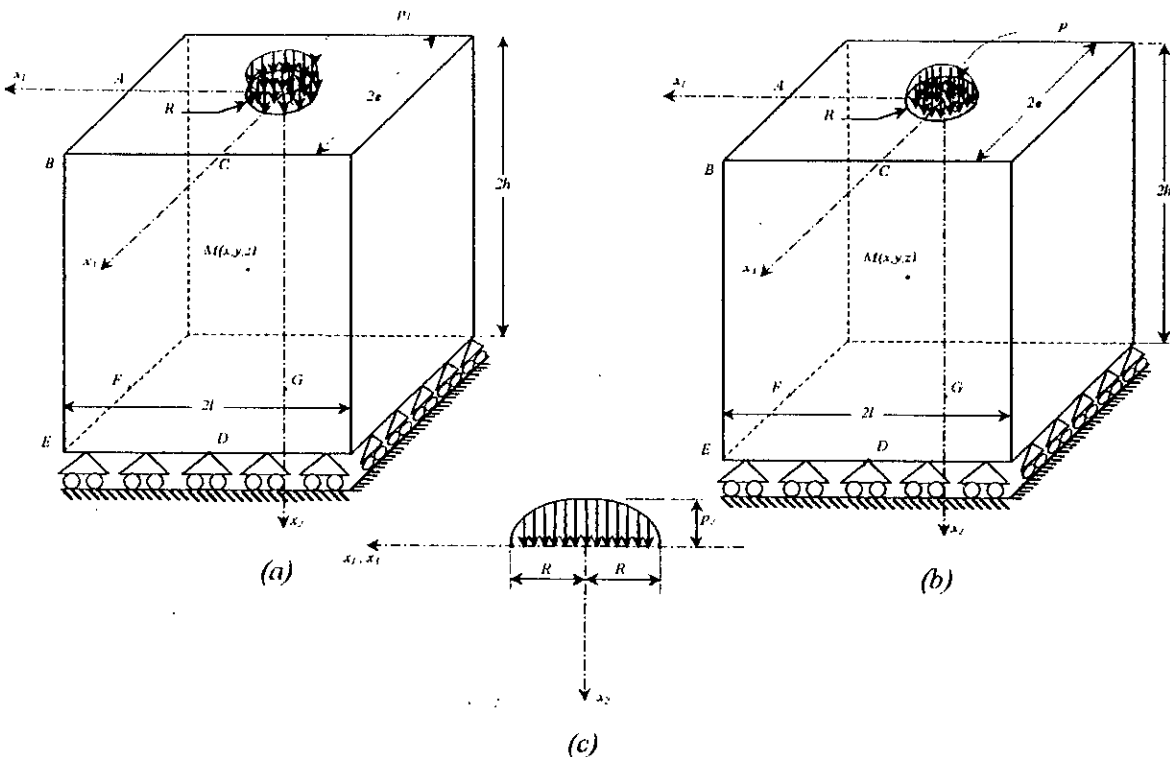


Figure 3.2.19 Modèles numériques. (a) : Approximation avec un chargement constant. (b) : Approximation avec un chargement semi-ellipsoïdal. (c) : Projection du chargement semi-ellipsoïdal sur les plans (Ox_1x_2) et (Ox_2x_3) .

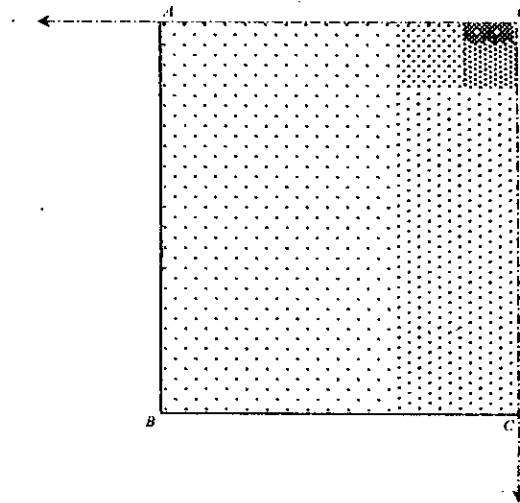


Figure 3.2.20 Discretisation de la fosse supérieure du modèle numérique.






La face de frontière considérée	E-F-G-D	E-D-C-B	A-B-E-F	A-B-C-O				
								
Dimensions	$e \times l$	$l \times 2h$	$e \times 2h$	$3l/4 \times e$	$l/4 \times 6e/7$	$3l/20 \times e/7$	$l/10 \times 9e/70$	$l/10 \times e/70$
Raffinage [élément]	8×6	6×6	8×6	5×10	5×30	6×10	5×10	32×8
Nombre total d'éléments	698 éléments							

Tableau 3.2.2 dimensions et discrétisation du modèle numérique.

Nous présentons dans cet exemple un problème très pratique. C'est le problème du contact d'une bille rigide qui exerce un effort P sur un milieu semi-infini et linéairement élastique (voir figure 3.2.18). Pour modéliser ce problème numériquement, Nous reprenons le même modèle utilisé dans les deux exemples précédents avec les mêmes caractéristiques mécaniques, mais avec une répartition circulaire du chargement et une discrétisation de la face supérieure plus compatible avec le chargement (voir figure 3.2.20). Nous supposons en première approximation que la répartition de pression sous la bille est uniforme $p - p_1$ (voir figure 3.2.19(a)). En

seconde approximation, nous supposons - comme pour tout contact entre solides - que la répartition suit les lois de Hertz⁽¹⁾ : la répartition des pressions sous la bille est semi-ellipsoïdale (voir figures 3.2.19(b) et 3.2.19(c)), soit :

$$p(x_1, x_3) = p_2 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{R}\right)^2 - \left(\frac{x_3}{R}\right)^2} \quad (3.2.2)$$

On doit exprimer p_1 et p_2 en fonction de l'effort P exercé par la bille sur le milieu semi-infini :

- Pour la première approximation :

$$P = p_1 S \Rightarrow p_1 = \frac{P}{S} = \frac{P}{\pi R^2} \quad (3.2.3)$$

Tel que S est la surface du cercle chargé.

- Pour la deuxième approximation :

$$P = \int_{(S)} p(x_1, x_3) ds = \int_{(S)} p_2 \sqrt{1 - \frac{x_1^2 + x_3^2}{R^2}} ds$$

Or : $x_1^2 + x_3^2 = r^2$, en prenant $ds = 2\pi r dr$ on trouve :

$$P = 2\pi p_2 \int_{r=0}^R r \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} dr = 2\pi p_2 \left(\frac{R^2}{3}\right)$$

Alors :

$$p_2 = \frac{3P}{2\pi R^2} \quad (3.2.4)$$

Si dans cet exemple $R=0.5m$ et $P=1000 KN$, nous trouvons d'après les équations (3.2.3) et (3.2.4) : $p_1=1273.23KPa$ et $p_2=1909.86KPa$. Pour ces données, nous calculons l'état de contrainte (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{12}) au plan (Ox_1x_2) pour les deux approximations. Les résultats sont illustrés sous la forme des graphes des figures 3.2.21, 3.2.22, 3.2.23 et 3.2.24.

Dans la figure 3.2.21, nous constatons pour la deuxième approximation, une augmentation plus rapide des contraintes au voisinage de centre du chargement (-1100KPa contre 800KPa pour la 1^{re} approximation) à cause de la concentration du chargement au centre (O).

⁽¹⁾ La relation en 2-D est présentée dans « Caignaret G. et al. (1988) ».

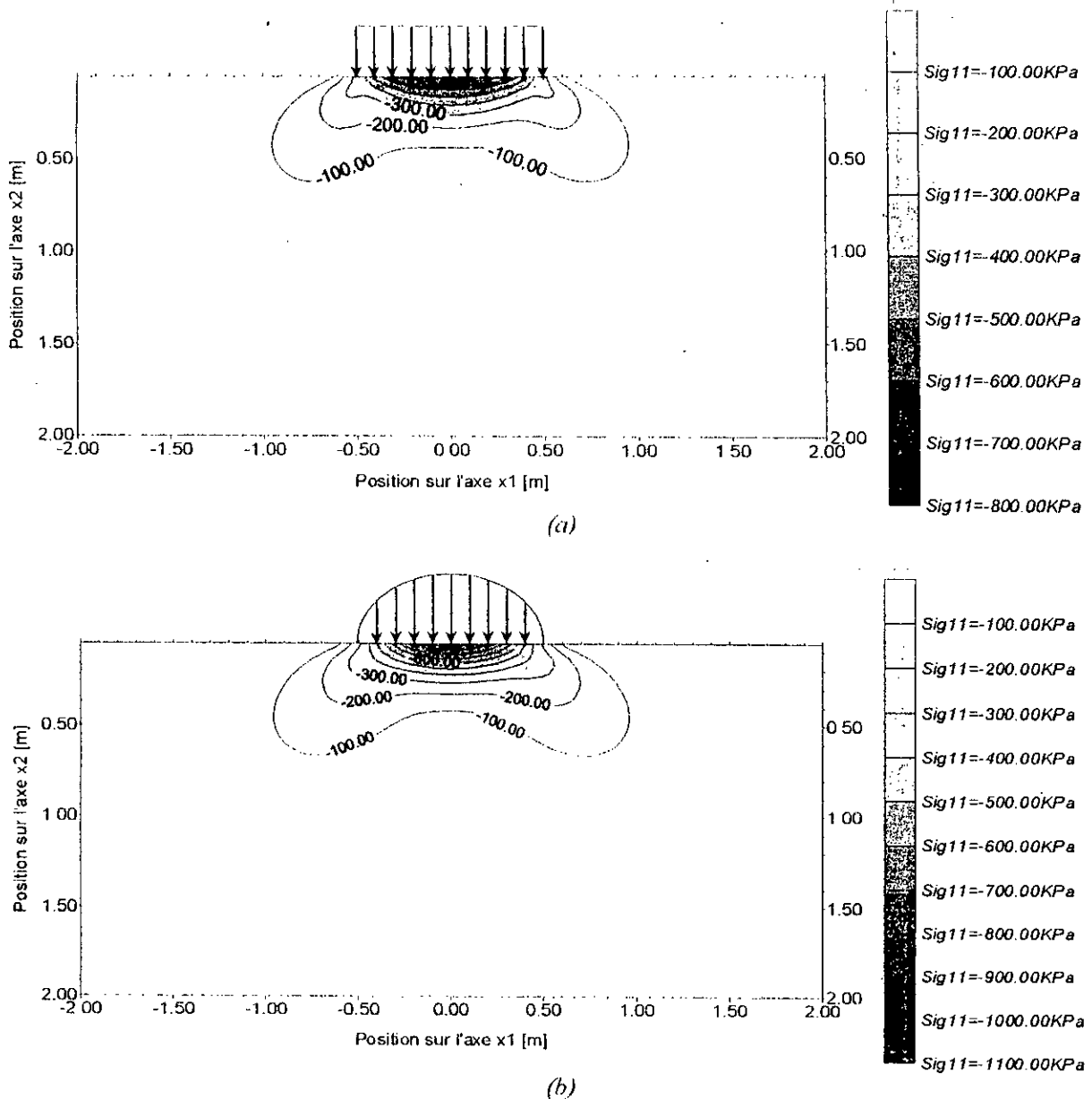
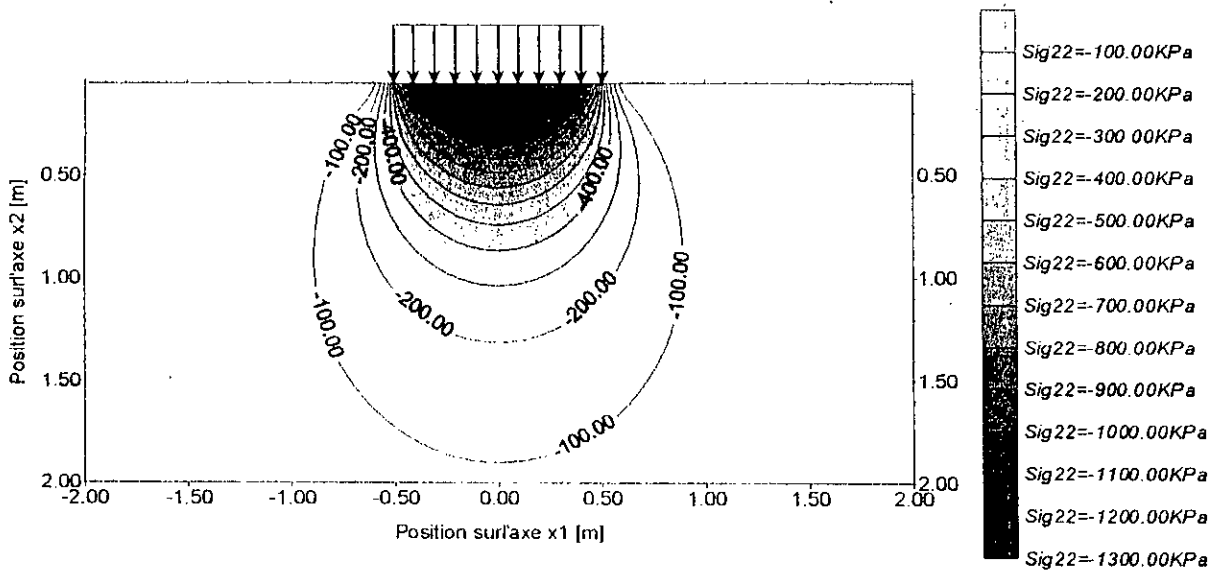


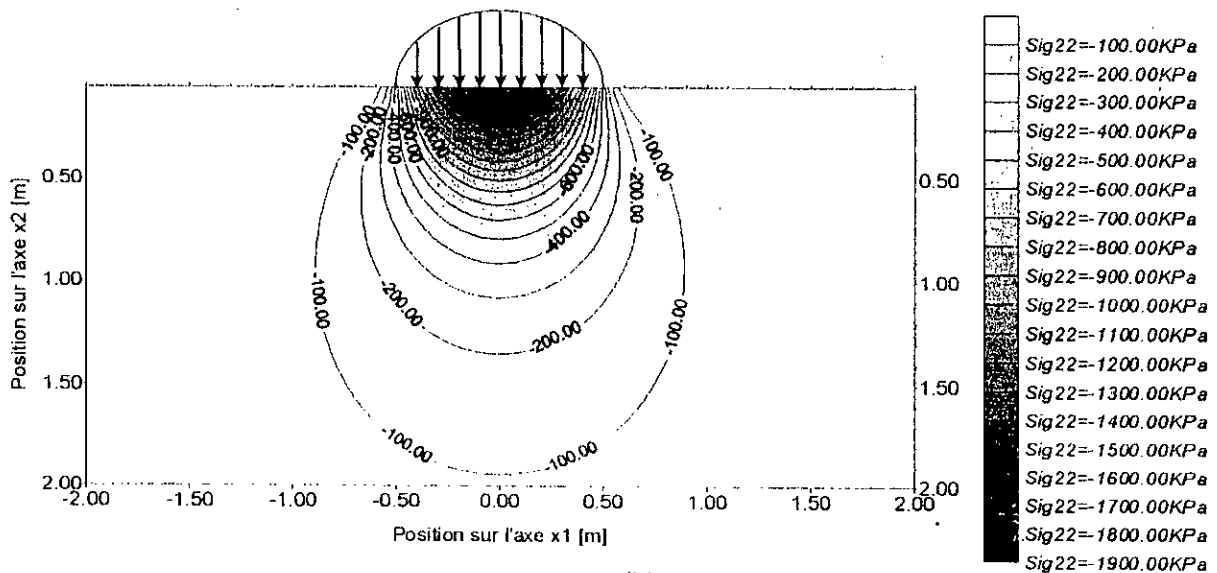
Figure 3.2.21 Variation de la contrainte σ_{11} dans le plan (Ox_1, Ox_2) .

(a) : Pression uniforme. (b) : Pression semi-ellipsoïdale.

Les mêmes remarques peuvent être tirées pour la variation de σ_{33} dans la figure 3.2.23. Ainsi, Nous remarquons la coïncidence entre la variation de σ_{11} et σ_{33} le long de l'axe x_2 , axe de révolution du chargement appliqué. Il est aussi à remarquer que l'effet du chargement pour les deux contraintes a une influence très locale (autour du chargement).



(a)



(b)

Figure 3.2.22 Variation de la contrainte σ_{22} dans le plan (Ox_1x_2) .

(a) : Pression uniforme. (b) : Pression semi-ellipsoïdale.

En ce qui concerne la répartition de la contrainte σ_{22} sur le plan (Ox_1x_2) , elle est représentée par la figure 3.2.22. Nous constatons que l'influence du chargement semi-ellipsoïdal est plus importante que celle du chargement uniforme en se rapprochant du centre, à cause de la différence des conditions aux limites ($p_1=1273.23KPa$ et $p_2=1909.86KPa$).

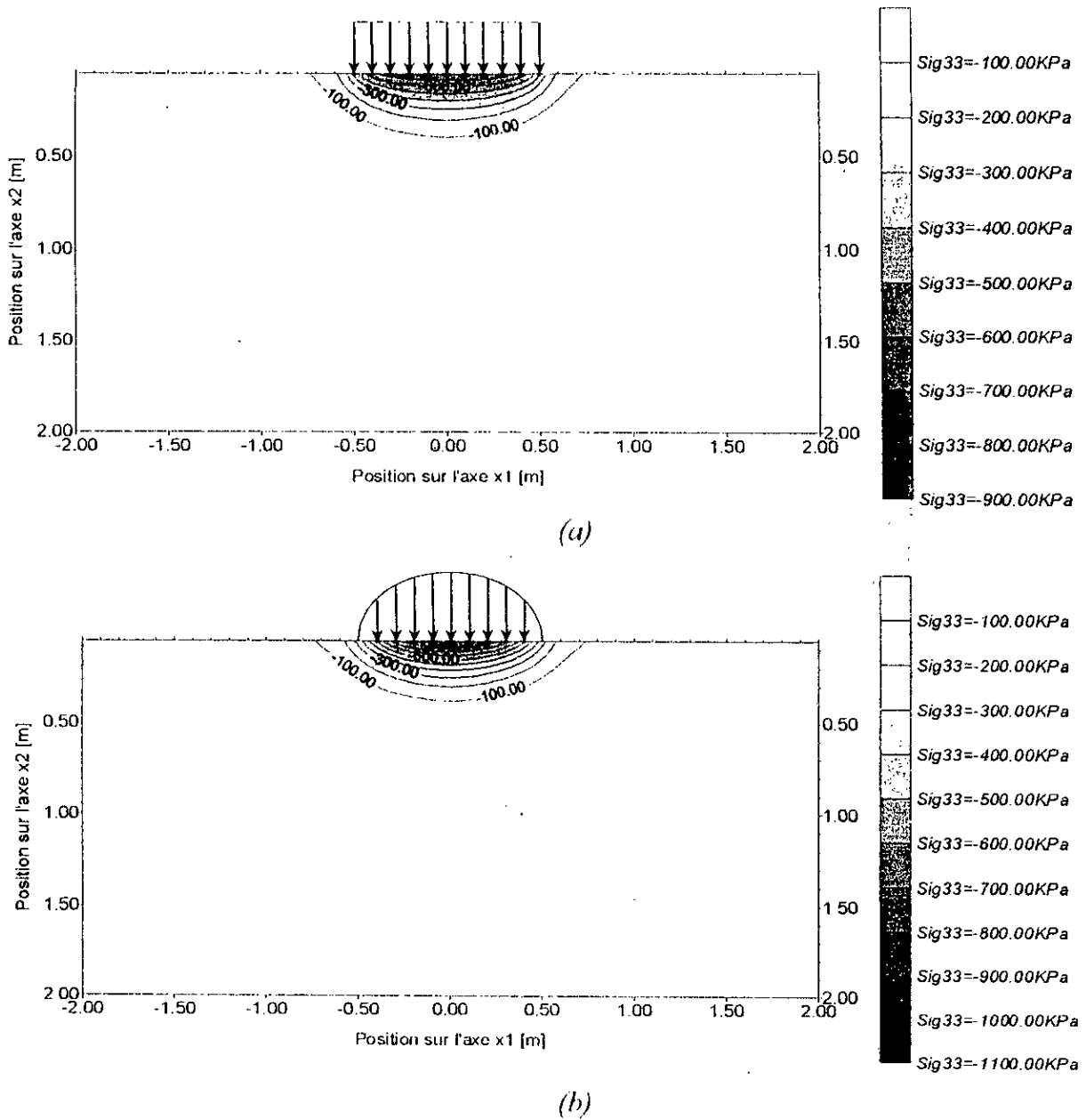


Figure 3.2.23 Variation de la contrainte σ_{33} dans le plan (Ox_1x_2) .

(a) : Pression uniforme. (b) : Pression semi-ellipsoïdale.

Pour la variation de la contrainte de cisaillement σ_{12} présenté sur la figure 3.2.24, la concentration de cisaillement est directement sous les deux extrémités du chargement pour le cas du chargement circulaire uniforme ce qui est logique. Par contre la concentration du cisaillement pour la deuxième approximation est déplacé à

l'intérieur. Cela est dû essentiellement au fait que le chargement aux extrémités du cercle est nul ($p(r=R)=0$).

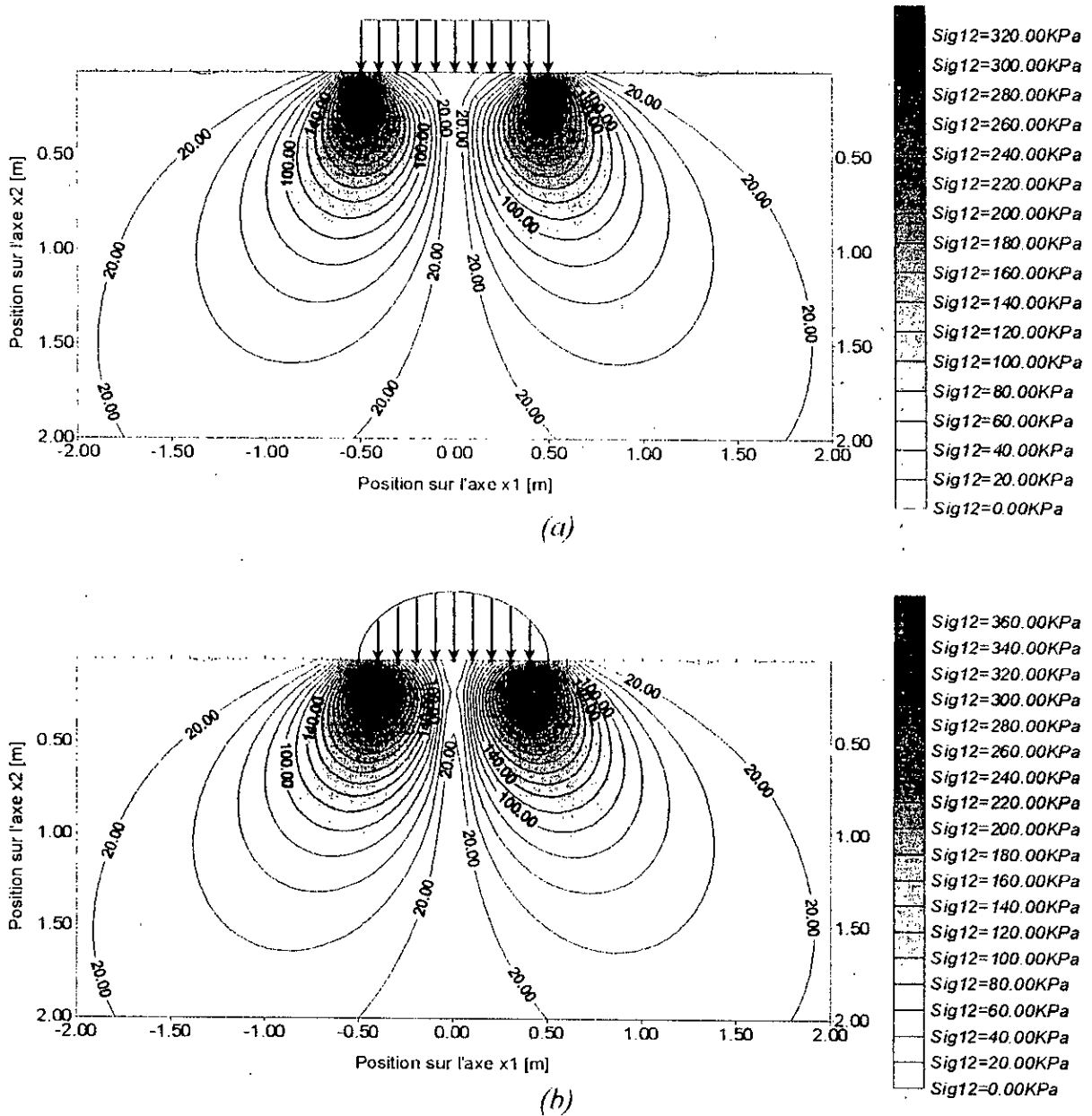


Figure 3.2.24 Variation de la contrainte σ_{12} dans le plan (Ox_1, Ox_2) .

(a) : Pression uniforme. (b) : Pression semi-ellipticale.

Cependant, nous remarquons que pour la contrainte de cisaillement, l'effet du chargement semi-ellipsoïdal est plus grand et la contrainte engendrée est plus importante relativement au cas du chargement uniforme.

Finalement, pour cet exemple, nous pouvons conclure que l'approximation avec un chargement semi-ellipsoïdal (*qui est la plus proche de réalité*) provoque des effets plus importants. Pour cela, on doit faire le choix de matériau du milieu semi-infini qui doit résister à l'action de la bille, selon les résultats trouvés en utilisant cette approximation.

3.2.5 Conclusion

Les exemples traités dans cette partie sont des exemples pratiques et les résultats trouvés ont un grand intérêt pour le choix du matériau et sa résistance aux chargements imposés dans les problèmes.

Les résultats trouvés par la M.D.D dans les deux premiers exemples sont très proches à ceux trouvés analytiquement, ce qui valide l'utilisation de cette méthode pour ce genre de problèmes.

Pour les deux derniers exemples, la M.D.D donne une approximation très fiable vu la compatibilité des solutions trouvées avec les conditions aux limites et la flexibilité du choix de répartitions des chargements et les variations des dimensions et des raffinages de la discrétisation.

3.3 Deuxième catégorie d'exemples (Problèmes de Mécanique de la rupture) :

3.3.1 Détermination du facteur d'intensité de contrainte pour une éprouvette fissurée.

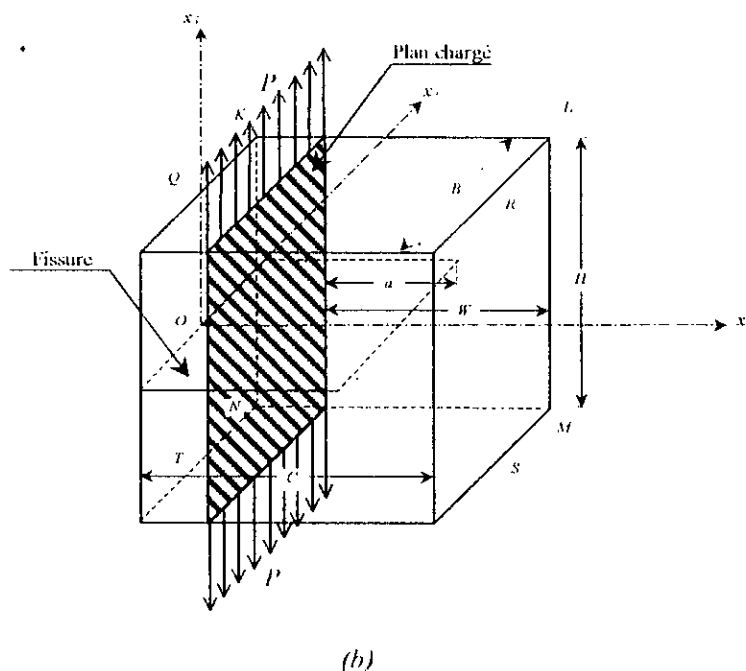


Figure 3.3.1 Eprouvette chargée perpendiculairement à sa fissure.

Ce modèle d'éprouvette est utilisé souvent dans les études expérimentales, il existe en deux types ; Eprouvette de type (CT : Compact-Tension) et éprouvette de type (WOL : Wedge-Opening-Loading). Les dimensions des deux types sont données par « Barsom J.M. et al. (1987) » et « Ewalds H.L. et al. (1986) » :

- Pour l'éprouvette (CT) :

$$H = 1.2 W, C = 1.25 W$$

$$a = 0.5 W, B \geq 0.5 W$$

- Pour l'éprouvette (WOL) :

$$H = 1.2 W, C = 1.25 W$$

$$a = 0.5 W, B \geq 0.5 W.$$

Beaucoup de méthodes numériques ont traité ce problème en bidimensionnel en le considérant comme état de déformation plane telles que la méthode des éléments

finis M.E.F et la méthode intégrale directe M.I.D. Nous essayons dans notre cas d'utiliser la M.D.D en tridimensionnel pour modéliser ce problème à fin de tester la validité de la M.D.D dans son emploi en mécanique de la rupture.

Nous prenons dans notre calcul :

E 100000KPa, ν 0.1, W 2.03125m.

La discrétisation est faite sur la moitié de l'éprouvette à cause de la présence d'un plan de symétrie (Ox_1x_3). Elle est présentée dans les tableaux 3.3.1 et 3.3.2 pour les deux types d'éprouvettes

La face de frontière considérée	S-M-L-R	R-L-K-Q	Q-K-N-T	T-N-M-S	M-N-K-L	La fissure
Dimensions [m x m]	3 x 2,4	3 x 2,5	3 x 2,4	3 x 2,4	2,5 x 2,4	3 x 1,5
Raffinage [élément]	8 x 6	10 x 8	16 x 12	10 x 8	8 x 8	20 x 10
Nombre total d'éléments	664					

Tableau 3.3.1 Discrétisation de l'éprouvette (CT).

La face de frontière considérée	S-M-L-R	R-L-K-Q	Q-K-N-T	T-N-M-S	M-N-K-L	La fissure
Dimensions [m x m]	3 x 1,974	3 x 2,5	3 x 1,974	3 x 2,5	2,5 x 1,974	3 x 1,5
Raffinage [élément]	8 x 5	10 x 8	16 x 10	10 x 8	10 x 8	20 x 10
Nombre total d'éléments	640					

Tableau 3.3.2 Discrétisation de l'éprouvette (WOL).

Le calcul numérique du facteur d'intensité de contrainte se fait en utilisant la discontinuité de déplacement représenté par l'équation (2.10.2). Les relations empiriques qui donnent l'expression du facteur d'intensité de contrainte de cet exemple sont :

$$\bullet K_{I(emp)} = \frac{P}{B\sqrt{a}} f\left(\frac{a}{W}\right) \ll \text{Barsom J.M. et al. (1987)} \gg \quad (3.3.1)$$

où :

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \left[29.6\left(\frac{a}{W}\right) - 185.5\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 655.7\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 1017\left(\frac{a}{W}\right)^4 + 638.9\left(\frac{a}{W}\right)^5 \right],$$

Pour une éprouvette de type (CT).

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \left[30.96\left(\frac{a}{W}\right) - 195.8\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 730.6\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 1186.3\left(\frac{a}{W}\right)^4 + 754.6\left(\frac{a}{W}\right)^5 \right],$$

Pour une éprouvette de type (WOL).

- $K_{I(emp2)} = \frac{P}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right)$ « Ewalds H.L. et al. (1986) » (3.3.2)

où :

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(2 + \frac{a}{W}\right) \left[0.886 + 4.64\left(\frac{a}{W}\right) - 13.32\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.6\left(\frac{a}{W}\right)^4 \right]}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{3/2}},$$

Pour l'éprouvette de type (CT).

Le calcul du facteur d'intensité de contrainte par la M.D.D et par les relations empiriques nous donne :

- Pour l'éprouvette de type (CT) :

$$K_{I(num)} = 222.30 \text{ KPa} \cdot \sqrt{m}$$

$$K_{I(emp1)} = 215.50 \text{ KPa} \cdot \sqrt{m}$$

$$K_{I(emp2)} = 216.90 \text{ KPa} \cdot \sqrt{m}$$

Avec une erreur relative par rapport à chacun des valeurs empiriques :

$$\xi\%_{(emp1)} = 3.2\%$$

$$\xi\%_{(emp2)} = 2.5\%$$

- Pour l'éprouvette de type (WOL) :

$$K_{I(num)} = 227.48 \text{ KPa} \cdot \sqrt{m}$$

$$K_{I(emp1)} = 230.63 \text{ KPa} \cdot \sqrt{m}$$

Avec une erreur relative par rapport à la valeur empirique :

$$\xi\%_{(emp1)} = 1.4\%$$

D'après ces résultats, nous pouvons conclure que la méthode de discontinuité des déplacements en 3D donne une bonne approximation du calcul de facteur d'intensité de contrainte en mode I pour les éprouvettes de forme d'un parallélépipède à cause de leur compatibilité avec l'élément de discrétisation utilisé (l'élément rectangulaire).

3.3.2 Détermination du facteur d'intensité de contrainte sur le contour d'une fissure elliptique dans un milieu infini :

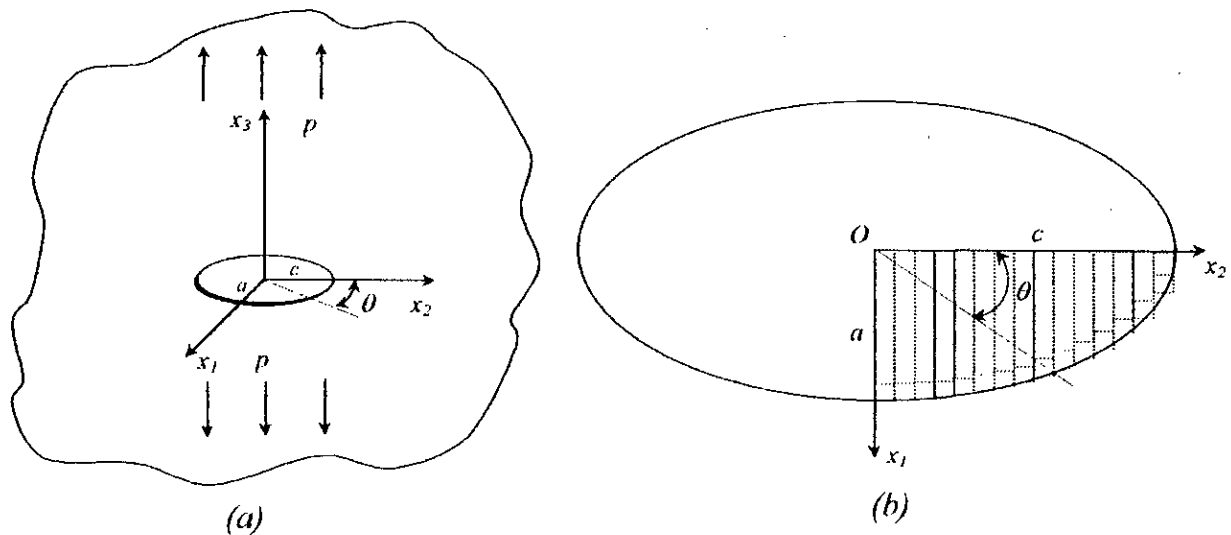


Figure 3.3.2 Fissure elliptique dans un milieu infini chargé à l'infini.

(a) : Schéma du problème. (b) : Discrétisation de la fissure.

Considérons un milieu infini, linéairement élastique et homogène contenant une fissure elliptique et soumis à un chargement p de traction à l'infini normal au plan de la fissure. Les caractéristiques mécaniques du matériau utilisé sont :

$$E=70000MPa, \nu=0,2 \text{ et } \sigma_e=250MPa.$$

Le chargement est :

$$p=200MPa.$$

Le problème possède deux plans de symétrie (Ox_1x_3) et (Ox_2x_3). Nous nous intéressons donc au quart de l'ellipse en prenant $a=1cm$. La relation analytique qui donne l'expression du facteur d'intensité de contrainte « Barsom J.M. et al. (1987) » est :

$$K_{I(ana)} = p \sqrt{\frac{\pi a}{Q} \left(\sin^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^{1/4}} \quad (3.3.3)$$

Q est un paramètre qui est dépend des rapports a/c et p/σ_e , il est donné sous forme d'abaque « Barsom J.M. et al., pp. 47 (1987) ».

Nous calculons le facteur d'intensité de contrainte maximum pour différentes valeurs du rapport a/c , d'après l'équation (3.3.3), K_I atteint sa valeur maximale à $\theta=90^\circ$. Pour cet angle, nous trouvons les résultats suivants :

$\theta=90^\circ$					
Le rapport a/c	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$K_{I(num)}/p [cm^{1/2}]$	2.092	1.910	1.731	1.560	1.409
$K_{I(ana)}/p [cm^{1/2}]$	1.809	1.635	1.457	1.296	1.116
$Er [\%]$	15.61	16.82	18.81	20.33	20.83

Tableau 3.3.3 Comparaison entre le $K_{I(num)}/p$ et le $K_{I(ana)}/p$ pour différentes valeurs du rapport (a/c).

Notons que les résultats numériques du facteur d'intensité de contrainte sont obtenus en utilisant un élément rectangulaire constant dans la discrétisation pour toute la fissure. Ceci explique l'augmentation relative de l'erreur. Cette erreur diminue de plus en plus avec la diminution du rapport a/c . Ceci est dû au fait que lorsque a/c est faible, l'élément rectangulaire est plus représentatif du bout de la fissure.

Passons maintenant au calcul du facteur d'intensité de contrainte sur le contour de l'ellipse pour le cas $a/c = 0,6$. Les résultats obtenus sont illustrés sous la forme des graphes de la figure 3.3.3.

D'après les graphes de la figure 3.3.3, nous constatons que la courbe de variation du facteur d'intensité de contrainte obtenue par la M.D.D est de même forme que celle trouvée analytiquement. L'erreur relative varie en fonction de l'angle θ . Elle atteint ses valeurs maximales (environ 21%) pour θ appartenant à l'intervalle $[40^\circ, 60^\circ]$. Ceci peut être expliqué, si on met en considération la forme rectangulaire de l'élément utilisé dans la discrétisation de la fissure (voir la figure 3.3.1(b)).

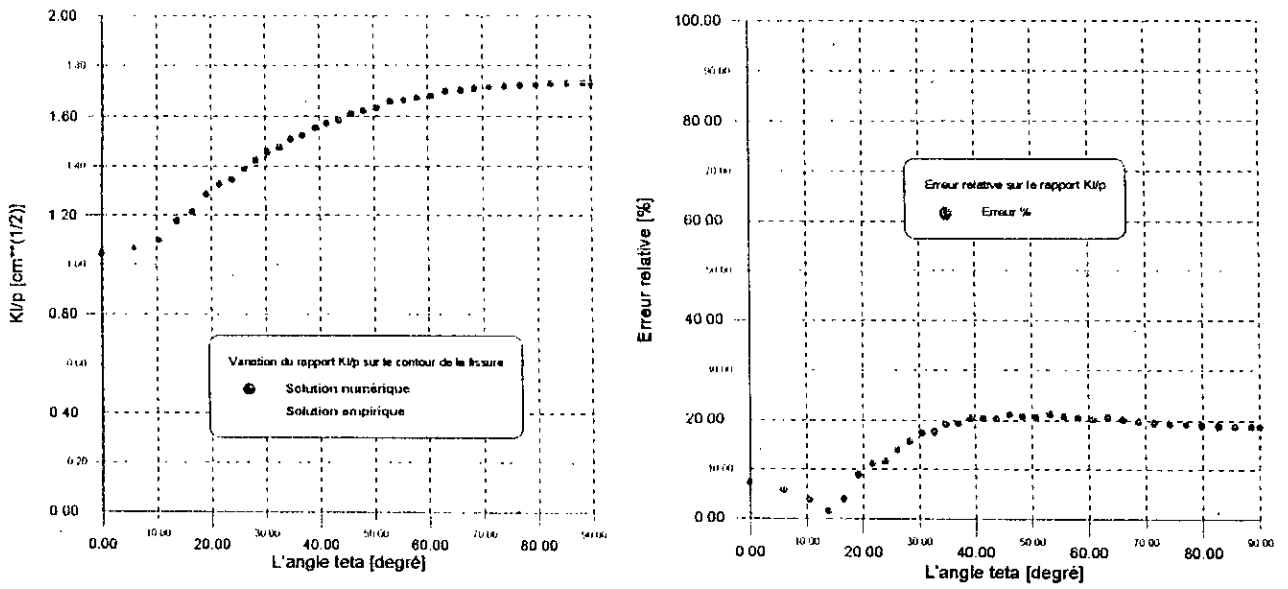


Figure 3.3.3 Variation du facteur d'intensité de contrainte et de l'erreur relative sur le contour de l'ellipse.

3.3.3 Détermination du facteur d'intensité de contrainte pour un corps contenant une fissure semi-elliptique extérieure :

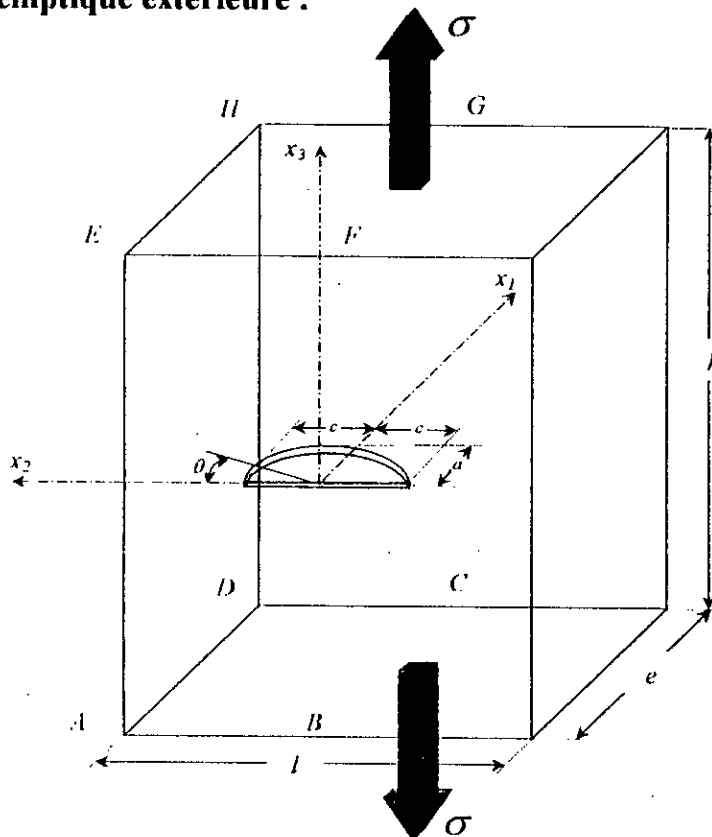


Figure 3.3.4 Corps chargé en traction et contenant une fissure semi-elliptique débouchante.

Le présent exemple représente un parallélépipède linéairement élastique, homogène, chargé en traction et contenant une fissure semi-elliptique débouchante (voir figure 3.3.4). Ce type de fissure a été intensivement étudié car on le rencontre assez fréquemment dans les structures soudées. Le problème admet un plan de symétrie (Ox_1x_3), ce qui nous permet à considérer la moitié du corps. La discrétisation des faces de frontière et de fissure et les conditions aux limites du problème sont mentionnées sur le tableau 3.3.4.

La face de frontière considérée	A-B-C-D	D-C-G-H	H-G-F-E	E-F-B-A	A-D-H-E	La fissure	Le corps entier
Raffinage [élément]	6 x 3	2 x 8	6 x 3	6 x 24	3 x 24	300	570
Les conditions aux limites	$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = \sigma$	$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = \sigma$	$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = 0$	$\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = 0$ $\sigma_n = 0$	-----

Tableau 3.3.4 La discrétisation et les conditions aux limites des frontières et de la fissure.

Nous prenons pour ce problème :

$$E = 70000 \text{MPa}, \nu = 0,2, \sigma_e = 250 \text{MPa} \text{ et } \sigma = 200 \text{MPa}.$$

$$a = 3 \text{cm}, e = 5 \text{cm}, h = 40 \text{cm}, l = 20 \text{cm}.$$

L'expression analytique de K_I de cet exemple est de même forme que celle de l'exemple précédent, mais avec deux coefficients correcteurs. Le premier concerne les fissures extérieures, le deuxième est en fonction du rapport a/e « Barsom J.M. et al. (1987) » :

$$K_{I(amd)} = 1.12\sigma \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \left(\sin^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^{1/4} M_K \tag{3.3.4}$$

avec :

$$M_K = 1.0 + 1.2 \left(\frac{a}{e} - 0.5 \right) \tag{3.3.5}$$

Dans cet exemple nous calculons le facteur d'intensité de contrainte K_I sur le contour de la fissure pour un rapport $a/c = 0.6$, et le comparons avec celui trouvé par la relation analytique (3.3.4). Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.3.5.

Les résultats trouvés par la M.D.D sont représentés par des graphes de même forme que ceux de l'exemple précédent. Une légère augmentation de l'erreur relative

par rapport au cas d'un milieu infini apparaît à cause de la présence des faces de frontière (*effet de bord*) et de la diminution du nombre d'éléments qui discrétisent la fissure (*limitation du nombre d'éléments*).

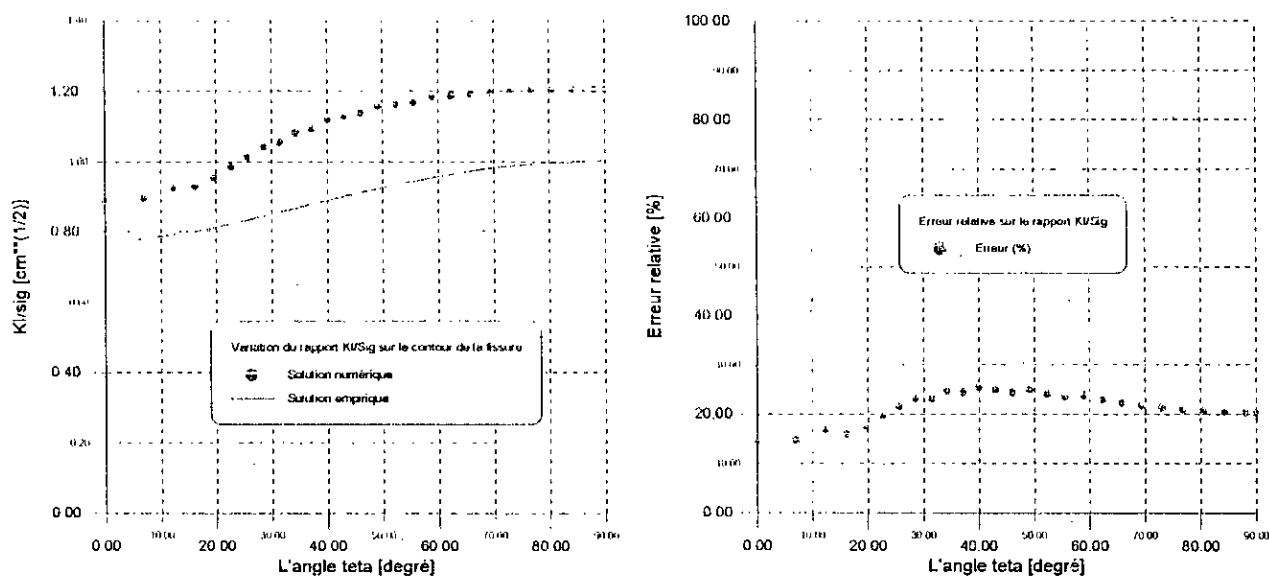


Figure 3.3.5 Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques de K_I Sur le contour de la fissure.

3.3.4 Détermination du facteur d'intensité de contrainte pour un corps contenant une fissure elliptique au voisinage d'une frontière du domaine et sollicitée intérieurement par une pression variant linéairement sur le petit axe de l'ellipse⁽¹⁾ (fissure elliptique non débouchante) :

Nous considérons dans cet exemple un corps contenant une fissure elliptique au voisinage d'une frontière du domaine (*voir figure 3.3.6. (a)*) et sollicitée intérieurement par une pression variant linéairement sur son petit axe (*cas d'une plaque en flexion par exemple*). Nous reprenons le même modèle numérique utilisé dans l'exemple précédent avec les mêmes dimensions et les mêmes caractéristiques mécaniques. La fissure est de dimensions plus faibles pour s'éloigner au maximum des autres faces du corps : $a = 0,3\text{cm}$, $c = 0,5\text{cm}$ soit $a/c = 0,6$. La variation de pression est donnée par :

⁽¹⁾ Cet exemple et sa solution analytique sont tirés de la référence « Barthélémy B., pp. 61 (1980) ».

$q = p \left(1 - \frac{x_1}{a} \right)$, avec $p = -200\text{MPa}$. L'expression analytique du facteur d'intensité de contrainte dans ce cas est :

$$K_{I(uml)} = M \cdot p \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \left(\cos^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{1/4} \left[1 - \frac{k^2 E(k) \cos \theta}{(1+k^2)E(k) - (1-k^2)K(k)} \right]$$

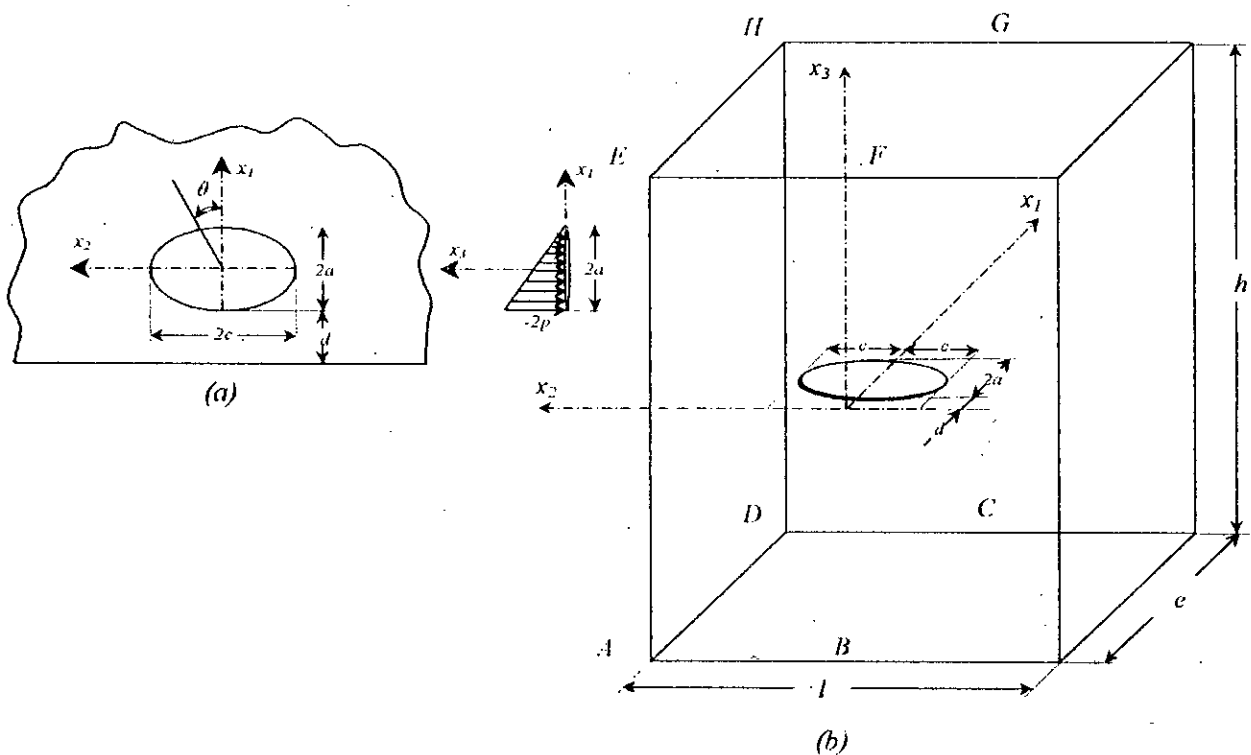


Figure 3.3.6 Corps contenant une fissure elliptique voisine à l'une de ces faces.

Tels que, $k^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$, $K(k)$ est l'intégrale elliptique de première espèce, $E(k)$ est l'intégrale elliptique de seconde espèce et M est un coefficient appelé facteur d'amplification qui est fonction de la position sur la fissure (l'angle θ) et de l'éloignement de la fissure de la surface libre (rapport a/d). Le facteur M est donné sous forme d'abaques « Barthélémy B. (1980) ». Les valeurs de K_I sur le contour de la fissure trouvées par la M.D.D sont présentées sous la forme des graphes de la figure 3.3.7. Le premier graphe montre la grande corrélation entre la solution numérique et la

solution analytique. K_I prend sa valeur maximale à $\theta = 180^\circ$ où l'erreur relative atteinte environ 13%.

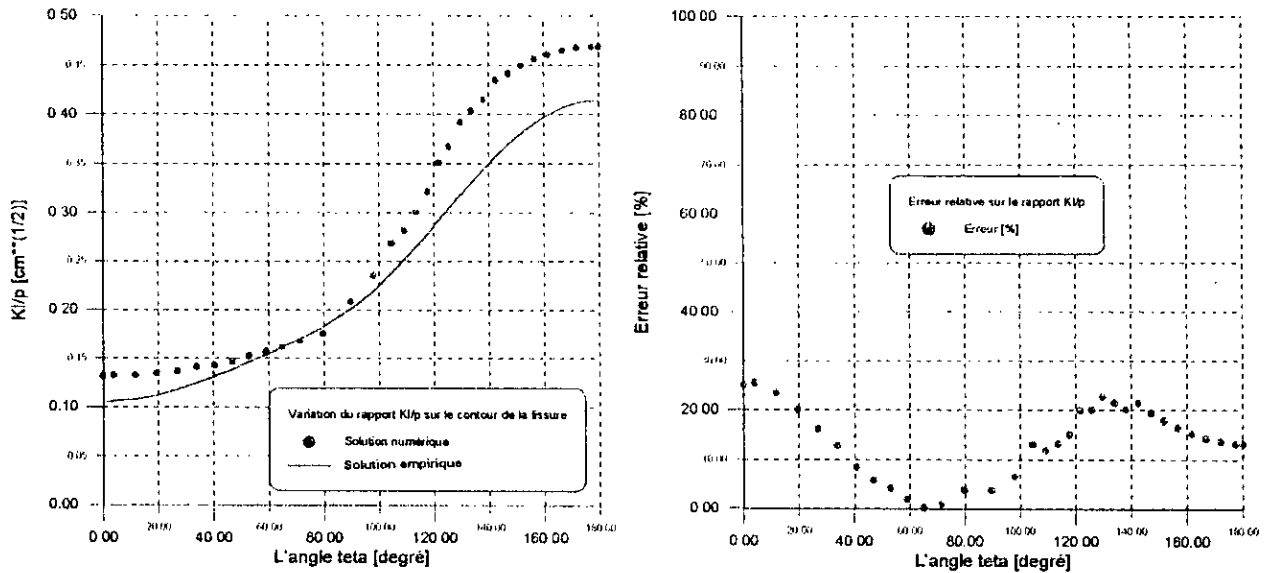


Figure 3.3.7 Comparaison entre les valeurs numériques et analytiques de K_I Sur le contour de la fissure.

3.3.3 Conclusion

Dans cette partie d'exemples, nous avons traité des problèmes pratiques liés à la mécanique de la rupture, le domaine dans lequel la M.D.D présente de grands avantages. Les deux derniers exemples sont très fréquents dans les structures métalliques (*fissures débouchantes et fissures près du bord*). Nous pouvons déduire pour cette catégorie d'exemples, que les résultats trouvés présentent un bon argument à l'utilisation de la M.D.D comme une approximation numérique pour la simulation en fissuration en 3-D.

Dans cette série d'exemples, les erreurs relatives sont très acceptables dans le cas des éprouvettes (CT) et (WOL) où l'élément rectangulaire respecte la forme à discrétiser. Cette erreur relative augmente dans le cas des fissures elliptique mais reste acceptable. Il faut noter que dans ce cas, les conditions de compatibilité sont plus restrictives.

Il faut indiquer, pour avoir un ordre d'idée, que Crouch « Crouch S.L. et al. (1983) », en utilisant un élément spécial bout de fissure en bidimensionnel (*de variation parabolique du premier ordre*) obtient 6% d'erreur.

**CONCLUSION
GÉNÉRALE**

CONCLUSION GENERALE

Ce travail montre les grandes possibilités qu'offre la méthode de discontinuité de déplacement pour la résolution des problèmes de l'élasticité et de mécanique de la rupture en tridimensionnel.

Nous avons montré en introduction que les travaux sur cette méthode en tridimensionnel sont rares. Nous avons montré dans le chapitre deux les lourds calculs sur les fonctions de Green. Nous aurions pu être tenté, au regard de la forme des fonctions de Green, de procéder à des intégrations numériques en utilisant les différents algorithmes d'intégration numériques disponibles pour la totalité de l'étude. Cette solution faciliterait peut être les choses mais cela aurait démultiplié le temps machine douze fois au minimum. Cette différence du temps de calcul a été tentée, en utilisant une intégration numérique d'ordre 8.

Nous avons pu procéder à des intégrations analytiques, pour éviter les différentes singularités en $\frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^5}, \frac{1}{r^7}$. Les techniques utilisées pour le traitement de ce type de singularités constituent des contributions importantes et restent une grande préoccupation pour les chercheurs utilisant les techniques numériques.

La discrétisation de structures tridimensionnelles continues ou fissurées que nous avons réalisé avec notre code de calcul utilise un élément surfacique de forme rectangulaire. Malgré sa forme simple, cet élément peut reproduire les différents domaines que l'on désire discrétiser.

Il est clair que des problèmes de compatibilité peuvent apparaître avec cet élément dans le cas de structures gauches. Dans ce cas un élément spécial pourrait être proposé. Nous ne pouvons conclure sur une possibilité d'intégration analytique dans ce cas, mais une intégration numérique pourrait être envisagée. Il reste alors à prendre en compte les problèmes liés aux différents cas de singularités. Il faudra alors un outil de travail à la mesure du sujet.

Les exemples traités ont particulièrement montré la puissance de cette méthode en mécanique de la rupture.

Dans la première série d'exemples pour les domaines continus, nous nous sommes intéressés à l'étude des contraintes. Elles constituent les préoccupations de l'ingénieur. La comparaison des résultats donnés par nos calculs et les résultats analytiques montrent que ces tests de validation présentent une bonne corrélation.

Dans la deuxième série d'exemples, nous nous sommes intéressés au calcul du facteur d'intensité de contrainte. Ce paramètre est évidemment un élément d'appréciation fondamental de l'outil mécanique de la rupture. Quantifier cette grandeur par le calcul de contrainte n'est pas possible vu le gradient de contrainte important en tête de fissure. Nous avons donc opté de calculer le facteur d'intensité de contrainte en utilisant la discontinuité de déplacement normale. Le calcul aurait pu concerner le facteur d'intensité de contrainte en mode 2 et mode 3 en utilisant les deux discontinuités tangentielles en bout de fissure. Mais nous nous sommes limités au mode 1 car considéré en général le plus dangereux. Les résultats peuvent être considérés très satisfaisants dans le cas des éprouvettes (CT) et (WOL) et l'être moins pour les exemples concernant les fissures elliptiques.

Ceci peut être expliqué par le fait que dans le premier cas de figure les conditions de compatibilité sont mieux respectées que dans la deuxième catégorie d'exemples.

Le présent travail laisse encore un champ large à son application pour la discrétisation des structures en utilisant des éléments surfaciques gauches et d'ordre supérieur. Cet apport sera remarquable surtout pour le traitement des fissures elliptiques pour mieux respecter les conditions de compatibilité.

RÉFÉRENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Amoura N. (1997) « Etude de la fissuration dans les matériaux viscoélastiques linéaires - simulation numérique et validation expérimentale - » Thèse de Magistère, E.N.P Alger.
- Balabane M., Duflo M., Frisch M., Guegan D. (1982) « Somme : intégration » Vuibert université, Paris.
- Barthelemy B. (1980) « Notions pratiques de la mécanique de la rupture », Ed. Eyrolles.
- Barsom J.M., Rolfe S.T. (1987) « Fracture and fatigue control in structures » Englewood cliffs New Jersey.
- Bass J. (1968) « Cours de mathématique (*tome I*) », Masson & C^{ie} Editeurs.
- Belkacemi Y. (1990) « Méthode des Discontinuités de Déplacement en Champ Complexe- Développements Analytiques et Numériques- Application aux Milieux Fissurés. » Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, France.
- Benrabeh Z., Zegoune A. (1994) « Modélisation de la rupture des matériaux viscoélastiques par la méthode de discontinuité de déplacement » P.F.E , E.N.P Alger.
- Bouhaddane A. (1987) « Application de l'Intégrale de Cauchy à la Méthode des Discontinuités de Déplacement et Autres Méthodes de Collocation. » Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, France.
- Boukria H., Dilmi, R. (1995) « Application de la méthode des contraintes fictives aux milieux anisotropes » P.F.E à l'E.N.P, Alger.
- Brebbia C.A. (1978) « The Boundary Element Method for Engineers » Pentech Press, London.
- Bui H.D. (1978) « Mécanique de la rupture fragile » Ed. Masson, Paris.
- Calgnaret G., Henry J.P. (1988) « Exercices d'élasticité » Dunod université.
- Crawford A.M., Curran J.H. (1983) « A Displacement Discontinuity Approach to Modelling the Creep Behaviour of Rock and Discontinuities. » Int. J. of Num. and Anal. Meth. In Geomech., Vol 7, pp 245-267.
- Crouch S.L., Starfield. A.M. (1983) « Boundary element in solid mechanics » G. Allen, Anwin., Winchester.
- Crouch S.L., Tian Y. (1988) « A two-dimentional direct boundary integral method for elastodynamics » Int J. Rock Mech, Min, & Geomech. Absir. Vol. 25, N° 3, pp. 149-158.
- Dautray R., Lions J.L. (1988) « Analyse mathématique et calcul numérique, vol. 6 : méthodes intégrales et numériques » Ed. Masson Paris.

- Deutsch G., Gross M., Richter K., Richter N. (1998) « Grand livre Borland Delphi 3 » Ed. Micro-Application, Paris.
- Dhatt G., Touzot G. (1985) « Une présentation de la méthode des éléments finis » Ed. Maloine, Paris.
- Durelli A.J., Philips E.A., Tsao C.H. (1958) « Analysis of stress and strain » McGraw-Hill Book Company, Inc. New York.
- Evans G. (1993) « Practical numerical integration » John Wiley & Sons Ltd. Chichester.
- Ewalds H.L., Wanhill R.J.H. (1986) « Fracture mechanics » Ed Edward Arnold.
- G.A.M.N.I (1980) « Méthodes numériques dans les sciences de l'ingénieur », G.A.M.N.I, 2^{ème} congrès, Ed. Dunod Paris.
- Giarlet P.G. (1986) « Elasticité tridimensionnelle » Ed. Masson, Paris.
- Guiggiani M., Gigante A. (1990) « A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method » Transactions of the ASME J. App Mech. Vol. 57, pp. 906-915, December 1990.
- Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J. (1992) « A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations » Transactions of the ASME J. App Mech. Vol. 59, pp. 604-614, September 1992.
- Hancock H. (1958) « Elliptic integrals » Dover publications, Inc., New York.
- Irwin G.R. (1987) « Fracture mechanics » Metal Handbook volume 8, pp. 439-464, Ed 1987.
- Kondo D. (1989) « Modelisation du Comportement des Roches par la Mécanique Linéaire de la Rupture : Application à l'Etude de la Stabilité des Ouvrages Souterrains », Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, France.
- Kondo D. (1999) - Correspondance particulière - Université des Sciences et Techniques de Lille, France.
- Labbens R. (1980) « Introduction à la mécanique de la rupture » Ed. Pularis.
- Lachat C. (1975) « A further development of the boundary integral technique for elastostatics » Ph.D. Thesis, the faculty of engineering & applied science, Univ. of Southampton.
- Lemaitre J., Chaboche J.L. (1989) « Mécanique des matériaux solides » Ed Dunod, Paris.
- Liebowitz H. (1968) « Fracture II » Mathematical fundamentals, Academic Press.

Miguez R., Belkacemi Y., Henry J.P (1989) « Higher Order Displacement Discontinuities in Complex Variables- Application to the Description of Cracks Path with Friction. » 3rd. Int. Conf. on Num. Meth. In Geom. NUMOG III, Niagara Falls, Canada, Elsevier Applied Sciences, pp. 447-454.

Panasyuk Y.V, Savruk H.P., Datsyshyn A.D. (1977) « A General Method of Solution of Two Dimensional Problems in the Theory of Cracks » Eng. Fracture Mech. Vol. 9, pp. 489-497.

Salençon J. (1987) « Mécanique des milieux continus » tome 1-2, Ed. Ecole nationale polytechnique, France.

Timoshenko S. (1948) « Théorie de l'élasticité, librairie polytechnique, CH. Beranger.

Wiles T.D., Curran J.H. (1983) « A General 3-D displacement discontinuity method » Proceeding of the 4th Int. Conf. Meth. in Geomechanics, Edmondson, Canada, Vol. 1, pp. 103-111.

ANNEXE

Les fonctions de Green en 2D pour la méthode des discontinuités de déplacement à l'origine par rapport à un système d'axes orthogonaux (\bar{x}_1, \bar{x}_2) sont données par les expressions suivantes :

- **Discontinuité tangentielle dans la direction \bar{x}_1 (glissement).**

$$g_{111} = \frac{2G}{2\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_2}{r^6} [3x_1^2 - x_2^2]$$

$$g_{221} = \frac{2G}{2\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_2}{r^6} [3x_2^2 - x_1^2]$$

$$g_{121} = g_{211} = \frac{-G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^6} [x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 x_2^2]$$

$$f_{11} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_2}{r^2} \left[(1-2\nu) + \frac{2x_1^2}{r^2} \right]$$

$$f_{21} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{r^2} \left[(1-2\nu) + \frac{2x_2^2}{r^2} \right]$$

- **Discontinuité normale dans la direction \bar{x}_2 (ouverture - fermeture).**

$$g_{112} = \frac{-G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^6} [x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 x_2^2]$$

$$g_{222} = \frac{-G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^6} [x_1^4 - 3x_2^4 + 6x_1^2 x_2^2]$$

$$g_{122} = g_{212} = \frac{2G}{2\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_2}{r^6} [3x_2^2 - x_1^2]$$

$$f_{12} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{r^2} \left[(1-2\nu) - \frac{2x_2^2}{r^2} \right]$$

$$f_{22} = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_2}{r^2} \left[(1-2\nu) + \frac{2x_2^2}{r^2} \right]$$

avec : $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Les fonctions de Green en 3D pour la méthode des discontinuités de déplacement à l'origine par rapport à un système d'axes orthogonaux $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ sont données

par :

- Discontinuité tangentielle dans la direction \bar{x}_1 (glissement).

$$g_{111} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_3}{r^5} \left[1 - \frac{5x_1^2}{r^2} \right]$$

$$g_{221} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_3}{r^5} \left[(1-2\nu) - \frac{5x_2^2}{r^2} \right]$$

$$g_{331} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_3}{r^5} \left[1 - \frac{5x_3^2}{r^2} \right]$$

$$g_{121} = g_{211} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_2 x_3}{r^5} \left[\nu - \frac{5x_1^2}{r^2} \right]$$

$$g_{231} = g_{321} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_2}{r^5} \left[\nu - \frac{5x_3^2}{r^2} \right]$$

$$g_{131} = g_{311} = \frac{-G}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^3} \left[(1+\nu) - \frac{3\nu x_2^2}{r^2} - \frac{15x_1^2 x_3^2}{r^4} \right]$$

$$f_{11} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_3}{r^3} \left[(1-2\nu) + \frac{3x_1^2}{r^2} \right]$$

$$f_{21} = \frac{-3}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_2 x_3}{r^5}$$

$$f_{31} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{r^3} \left[(1-2\nu) + \frac{3x_3^2}{r^2} \right]$$

- **Discontinuité tangentielle dans la direction \bar{x}_2 (glissement).**

$$g_{112} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_2 x_3}{r^5} \left[(1-2\nu) - \frac{5x_1^2}{r^2} \right]$$

$$g_{222} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_2 x_3}{r^5} \left[1 - \frac{5x_2^2}{r^2} \right]$$

$$g_{332} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_2 x_3}{r^5} \left[1 - \frac{5x_3^2}{r^2} \right]$$

$$g_{122} = g_{212} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_3}{r^5} \left[\nu - \frac{5x_2^2}{r^2} \right]$$

$$g_{232} = g_{322} = \frac{-G}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^3} \left[(1+\nu) - \frac{3\nu x_1^2}{r^2} - \frac{15x_2^2 x_3^2}{r^4} \right]$$

$$g_{132} = g_{312} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_2}{r^5} \left[\nu - \frac{5x_3^2}{r^2} \right]$$

$$f_{12} = \frac{-3}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_1 x_2 x_3}{r^5}$$

$$f_{22} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_3}{r^3} \left[(1-2\nu) + \frac{3x_2^2}{r^2} \right]$$

$$f_{32} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \frac{x_2}{r^3} \left[(1-2\nu) + \frac{3x_3^2}{r^2} \right]$$

- **Discontinuité normale dans la direction \bar{x}_3 (ouverture - fermeture).**

$$g_{113} = \frac{-G}{4\pi(1-\nu)r^3} \left[2(1-\nu) - 3(1-2\nu) \frac{\nu x_2^2}{r^2} - \frac{15x_1^2 x_3^2}{r^4} \right]$$

$$g_{223} = \frac{-G}{4\pi(1-\nu)r^3} \left[2(1-\nu) - 3(1-2\nu) \frac{\nu x_1^2}{r^2} - \frac{15x_2^2 x_3^2}{r^4} \right]$$

$$g_{333} = \frac{-G}{4\pi(1-\nu)r^3} \left[1 + \frac{6\nu x_3^2}{r^2} - \frac{15x_3^4}{r^4} \right]$$

$$g_{123} = g_{213} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)r^5} \frac{x_1 x_2}{r^5} \left[(1-2\nu) - \frac{5x_3^2}{r^2} \right]$$

$$g_{233} = g_{323} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)r^5} \frac{x_2 x_3}{r^5} \left[1 - \frac{5x_3^2}{r^2} \right]$$

$$g_{133} = g_{313} = \frac{-3G}{4\pi(1-\nu)r^5} \frac{x_1 x_3}{r^5} \left[1 - \frac{5x_3^2}{r^2} \right]$$

$$f_{13} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \frac{x_1}{r^3} \left[(1-2\nu) - \frac{3x_3^2}{r^2} \right]$$

$$f_{23} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} \frac{x_2}{r^3} \left[(1-2\nu) - \frac{3x_3^2}{r^2} \right]$$

$$f_{33} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^3} \frac{x_3}{r^3} \left[(1-2\nu) + \frac{3x_3^2}{r^2} \right]$$

avec : $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

RESUME

Ce travail porte sur la modélisation des milieux tridimensionnels, homogènes, isotropes et linéairement élastiques par la méthode des discontinuités de déplacement.

En premier lieu, la construction de la formulation mathématique de la méthode en 3-D, puis la mise en forme de la procédure numérique et enfin l'élaboration d'un code de calcul. Avec ce code, on peut déterminer le champ de contraintes et le champ de déplacements pour les milieux tridimensionnels, ainsi le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour les problèmes de fissuration en trois dimensions.

Mots clés :

Élasticité, rupture, contrainte, déplacement, discontinuité de déplacement, coefficient d'influence, fissure, facteur d'intensité de contrainte.