

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat
en Génie Mécanique

Thème :

**Conception d'un Code de Calcul avec
Programmation Orientée Objet pour la Simulation
par la MDD en Mécanique de la Rupture Utilisant
des Eléments Paraboliques**

Proposé et dirigé par :

Dr. BELKACEMI Y.

Etudié et présenté par :

TERBAK Nouredine

Promotion : juin 2009

ملخص

يتمثل الهدف من العمل المقدم في هذا المشروع في تصميم برنامج حسابي بلغة برمجة متطورة (C++ POO) لمحاكاة طريقة عدم استمرارية الانتقالات في ميكانيك التشققات. هذه الطريقة العددية تعطي نتائج جيدة في دراسة التشققات خاصة بعد إدماج عنصر القطع المكافئ عند طرف الشق لأن العنصر الثابت لا يعطي قيمة معدومة مما يؤدي إلى نتائج غير جيدة في هذه المنطقة. لقد قمنا بعرض خصائص البرنامج وتناولنا عددا من الأمثلة.

كلمات مفتاحيه : طريقة عدم استمرار الانتقالات، ميكانيك التشققات، معامل شدة الضغط، الشق، عنصر طرف شق.

RÉSUMÉ

Le but du travail représenté dans ce projet est la conception d'un code de calcul en un langage informatique évalué (C++ POO) pour simuler la méthode de discontinuité de déplacement en mécanique de la rupture. Cette méthode numérique donne de bons résultats dans l'étude des structures fissurées notamment après avoir intégré l'élément parabolique au bout de fissure là où la discontinuité de déplacement constante n'est pas nulle ce qui conduit à la divergence des résultats dans cette zone. Une représentation de l'application est faite, et un nombre d'exemples est traité.

Mots clés : Méthode de discontinuité de déplacement, mécanique de la rupture, coefficient d'intensité de contraintes, fissure, élément bout de fissure.

ABSTRACT

The aim of the work represented in this project is the conception of a computing code to simulate the displacement discontinuity method using an evaluated data-processing language (C++ OOP). This numerical method gives good results in the study of the fractured structures in particular after having integrated the parabolic element on the crack tip where the constant discontinuity of displacement is not null what leads to the divergence of the results in this zone. A representation of the application is made, and a number of examples is treated.

Key words: Displacement Discontinuity Method, fracture mechanics, Stress intensity coefficient, crack, crack tip element.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

*A ma mère, mon père, et mon
frère SALAH*

A mes chères sœurs

A Sarah, Zineb et Zahra

*A toute ma famille et mes
amis.*

Remerciements

Je remercie avant tout ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la volonté et le courage de réaliser ce travail.

Quelques phrases de remerciement me semblent bien pauvres pour exprimer ma gratitude au Dr. Belkacemi qui m'a accordé son soutien et son aide pour arriver à finir ce travail. Merci pour votre aide et votre large patience.

Je remercie également l'ensemble des membres du jury qui ont accepté d'examiner mon travail.

Et enfin, mes remerciements vont en particulier à tous les enseignants et à ceux qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

Sommaire

Introduction Générale.....	1
Chapitre 1 Concepts Fondamentaux Sur La Mécanique De La Rupture.....	4
I.1 Introduction.....	5
I.2 Notions de bases sur la mécanique de la rupture.....	6
I.3 Approche locale – Facteur d’intensité de contraintes.....	6
I.3.1 Champ de contraintes et de déplacements au bout de fissure	6
I.3.2 Les facteurs d’intensité de contraintes.....	9
I.4 Approche globale – théorie énergétique de Griffith.....	10
I.5 Mode mixte de rupture :.....	11
I.5.1 Principe de superposition :.....	11
I.5.1 Champ de contraintes et de déplacements :.....	12
I.5.3 Propagation d’une fissure.....	13
I.6 Conclusion	15
Chapitre 2 : Méthode de Discontinuité de Déplacement.....	16
II.1 Introduction :.....	17
II.2 La discontinuité de déplacement dans un solide infini :.....	17
II.3 Procédure numérique.....	21
II.4 Transformations de coordonnées	24
II.5 Coefficients d’influence.....	26
II.6 Problèmes intérieur et extérieur.....	29
II.1.7 Conditions de symétrie	30
Chapitre 3 : Elément Bout De Fissure D’Ordre Supérieur.....	32
III.1 Introduction.....	33
III.2 Elément parabolique.....	33
III.3 Calcul numérique des facteurs d’intensité de contraintes.....	34
III.4 Effet de la longueur de l’élément bout de fissure.....	35
Chapitre 4 : Structure Du Programme Et Notions Sur La POO.....	36
IV.1 Algorithme de traitement des données.....	37
IV.2 Structure du programme	39
IV.3 La POO dans notre programme	40
Chapitre 5 : Exemples, Résultats Et Interprétations.....	42
IV.1 Introduction.....	43

IV.2 Exemples et interprétations	43
IV.2.1 Domaine infini : Fissure inclinée dans un plan infini sous une traction.....	43
IV.2.2 domaine semi-fini : Fissure dans un domaine semi-infini.....	45
IV.2.3 domaine fini : Fissure dans une plaque circulaire sous une traction radiale.....	46
IV.3 Conclusion	48
Conclusion générale	49
Bibliographie	51
ANNEXE A	

LISTE DES FIGURES

Fig. 1.1 Modes fondamentaux de rupture.....	6
Fig. 1.2 Champ de contraintes au voisinage de bout de fissure.....	7
Fig. 1.3 Propagations de la fissure sur une longueur Δa	11
Fig. 1.4 Détermination de K_I pour une fissure dont les lèvres sont soumises à une traction σ_0	12
Fig. 1.5 Fissure inclinée dans une plaque en traction.....	13
Fig. 2.1 Fissure linéaire dans un corps infini.....	18
Fig. 2.2 Discontinuités de déplacement.....	18
Fig. 2.3 Contraintes appliquées aux surfaces de la fissure.....	21
Fig. 2.4 Discrétisation d'une fissure en N discontinuités de déplacement élémentaires.....	22
Fig. 2.5 Discontinuité de déplacement sur un segment orienté arbitrairement.....	25
Fig. 2.6 Position et orientation des éléments de frontière.....	31
Fig. 2.7 Convention de rotation (a) cavité (b) disque (c) tube.....	27
Fig. 2.8 Conditions de symétrie pour les axes $x = x^*$ et $y = y^*$	29
Fig. 3.1 Élément bout de fissure.....	34
Fig. 4.3 Organigramme générale de programme.....	38
Fig. 4.1 Interface d'acquisition de l'application.....	39
Fig. 4.2 Interface d'affichage des résultats sous des graphes.....	40
Fig. 5.1 Fissure inclinée dans un plan infini sous une traction.....	43
Fig. 5.2 K_{I}^* en fonction de l'angle de l'inclinaison de la fissure.....	44
Fig. 5.3 K_{II}^* en fonction de l'angle de l'inclinaison de la fissure.....	44
Fig. 5.4 Fissure Débouchant dans un domaine semi-infini sous une traction.....	45
Fig. 5.5 Facteurs d'intensité de contraintes normalisés en fonction du W/a	46

Introduction Générale

En mécanique de la rupture, se pose le problème de la détermination du facteur d'intensité de contrainte. Plusieurs solutions analytiques existent pour son calcul. Mais lorsque cette solution n'est pas disponible, nous avons recours aux méthodes numériques.

Les principales méthodes numériques qui sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de mécanique de la rupture sont la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière (BEM).

La méthode des éléments de frontière a été développée suivant deux approches. L'une d'elles est d'origine mathématique basée sur des théorèmes classiques de la théorie du potentiel. L'existence de solution à une équation intégrale, expression d'un problème aux limites dans le cadre de la théorie des potentiels a été montrée par Fredholm (1903). La discrétisation de la frontière pour résoudre l'équation intégrale, pour des problèmes de potentiels avec l'avènement des ordinateurs est due en premier à Jawsonek [8] et Symm [14]. La formulation de la méthode directe sous sa forme actuelle a été présentée par Rizzo [10] et appliquée en thermo-élasticité par Rizzo et al. [11]. La méthode a été étendue en 3-D par Cruse et al. [5] et par Lachat et al. [9].

A partir du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, l'identité de Somigliana est obtenue comme une représentation intégrale directe donnant les déplacements dans le domaine en fonction des déplacements ou contraintes sur la frontière. En écrivant cette identité sur deux domaines complémentaires, deux méthodes intégrales dites indirectes ont été proposées par Crouch [3] et [4]. La première représentation est connue sous le nom de potentiel de simple couche de densité de la discontinuité de contrainte et proposée par Crouch [4] sous l'appellation de contraintes fictives ou discontinuité de contraintes. La deuxième représentation est connue sous l'appellation de potentiel double couche de densité de la discontinuité de déplacement et est proposée par Crouch [3] comme étant la méthode de discontinuité de déplacement (MDD).

Un des problèmes posés par la MDD est d'assurer la continuité du champ de déplacement en bout de fissure. Malgré des éléments d'ordre supérieurs proposés par Crouch [4], le problème de la compatibilité est resté posé. Le premier élément spécial

proposé pour respecter la condition de continuité du champ de déplacement est du à Crouch [4] puis repris par Shou [13]. La formulation présentée ne concernait que le mode d'ouverture.

La MDD offre des avantages certains pour la simulation de la propagation des fissures Cornet [2]. Alors que méthode des éléments finis (FEM) nécessite un remaillage après chaque changement de configuration durant la propagation de fissure, dans la méthode de discontinuité de déplacement (MDD), la propagation de fissure se fait par addition d'éléments Cornet [2].

Daux [6], avec la méthode des éléments finis étendus (extended finite element method XFEM) prend en compte les problèmes de mécanique de la rupture avec la prise en charge des problèmes de singularité.

Les travaux de Xiao [15] et Yan [16] ont permis de traiter les cas du mode I et II en utilisant cet élément.

Ce travail entre dans ce cadre pour exploiter la performance de cet élément dans les problèmes de milieux fissurés.

La programmation orientée objet est maintenant très appréciée pour mettre au point des codes de calcul « friendly » qui permettent de faciliter le traitement pré et post calcul. Nous avons opté pour cette option. C'est la première tentative concernant notre département, venue après un peu de retard malgré l'expérience acquise avec les travaux antérieurs dus à Boukhalkhal [1], Hachi [7] et Sahnoun [11].

Concepts Fondamentaux Sur La Mécanique De La Rupture

- 1- Introduction
- 2- Notions élémentaires de mécanique de la rupture
- 3- Approche locale – Facteur d'intensité de contraintes
- 4- Approche globale – Théorie énergétique de Griffith
- 5- Mode mixte de rupture
- 6- Conclusion

I.1 Introduction

Si les ruptures n'existaient pas, les ingénieurs seraient pratiquement inutiles et chacun pourrait construire un pont, un avion ou une maison sans le moindre risque de destruction de la structure. La théorie de la mécanique de la rupture est un moyen pour estimer la stabilité des fissures qui peuvent survenir à cause des défauts. Elle permet de prévoir l'évolution de la fissure jusqu'à la ruine de la structure.

A ce jour, basé sur les expériences, la théorie de la mécanique de la rupture n'est nullement une science de base exhaustive et exacte, cependant, deux approches ont été proposées :

- 1- L'approche locale : qui consiste à l'étude de la distribution des contraintes au voisinage de la fissure par l'introduction du facteur d'intensité de contrainte.
- 2- L'approche globale : dite aussi approche énergétique, elle procède par le calcul de l'énergie disponible pour la propagation de fissures dans la structure considérée (Griffith 1920).

La rupture est aussi de deux types :

- La rupture fragile qui est caractérisée par l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture).
- La rupture ductile qui est caractérisée par une zone de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture).

Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter quelques éléments de théorie de la mécanique de la rupture en commençant par citer les hypothèses et les notions de base nécessaires pour l'étude de milieux fissurés. Ensuite, nous allons détailler les deux approches précédentes et présenter le mode mixte de rupture.

I.2 Notions de bases sur la mécanique de la rupture

I.2.1 Hypothèses :

- ✓ Le matériau est supposé homogène et isotrope.
- ✓ Le chargement est supposé quasi-statique.
- ✓ On se restreint aux problèmes plans (bidimensionnels).

I.2.1 Les modes de sollicitations :

Le mouvement des lèvres d'une fissure peut être obtenu selon trois modes [17] :

- ▶ Mode I : ou mode d'ouverture, le plus dangereux, correspond à une traction normale au plan de la fissure.
- ▶ Mode II : ou mode de glissement plan, correspond à un cisaillement dans le plan de la fissure dont l'action est perpendiculaire au front de la fissure.
- ▶ Mode III : ou mode de glissement anti-plan, correspond à un cisaillement dans le plan de la fissure dont l'action est parallèle au front de la fissure.

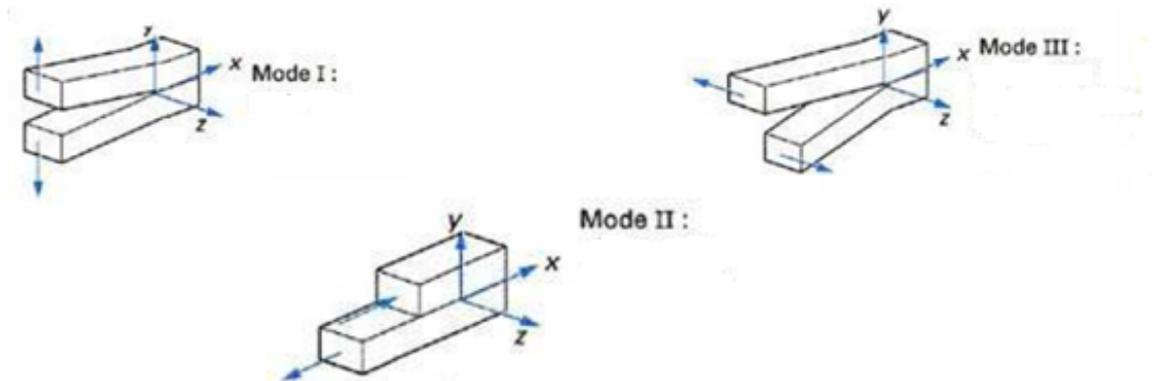


Fig 1.1 Modes fondamentaux de rupture

I.3 Approche locale – Facteur d'intensité de contraintes

Par l'introduction de la notion du facteur d'intensité de contraintes, cette approche consiste à déterminer les paramètres de mécanique de la rupture à l'aide des champs de contraintes et de déplacements locaux au bout de fissure.

I.3.1 Champ de contraintes et de déplacements au bout de fissure

Les champs de contrainte et de déplacement proche du front de la fissure sont des paramètres nécessaires à connaître. Ces champs gouvernent le processus de la rupture

qui a lieu à la pointe de la fissure. Pour cela nous allons faire une étude des contraintes et déplacements au voisinage de la pointe de fissure dans le cas des trois modes de rupture.

Ces contraintes ont été calculées par Westergaard à l'aide de la fonction d'Airy [18] et par Irwin à l'aide de la théorie de l'élasticité [19]. Elles sont exprimées par les relations (1.1) et (1.2), avec les notations de la figure 1.2.

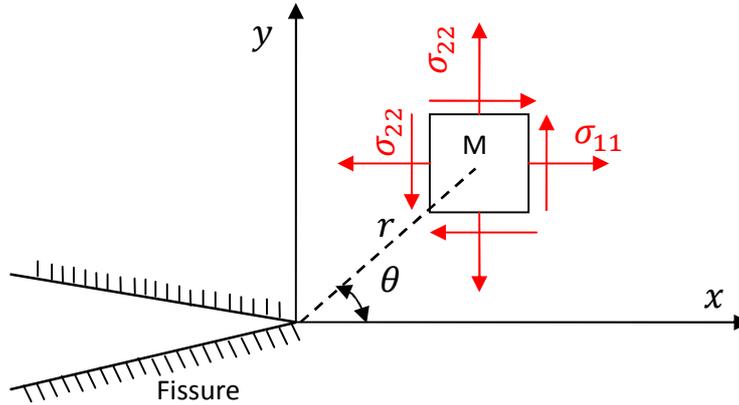


Fig.1.2 Champ de contraintes au voisinage du bout de fissure

La figure 1.2 schématise les contraintes sur un élément de volume centré sur un point M repéré par les coordonnées polaires r, θ par rapport à l'extrémité d'une fissure sollicitée en mode d'ouverture ou (mode I).

Les contraintes et déplacements au voisinage du front de fissure s'écrivent :

► **Mode I :**

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (1.1)$$

Et

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1 - 2\nu) + \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_y &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2(1 - \nu) + \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (1.2)$$

La discontinuité ou saut de déplacement $[u_y]$ selon l'axe (oy) est:

$$[u_y] = u_y(r, \pi) - u_y(r, -\pi) = \frac{4K_I}{\mu} (1 - \nu) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (1.3)$$

► **Mode II :**

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Et

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2(1 - \nu) + \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_y &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-(1 - 2\nu) + \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

La discontinuité ou saut de déplacement $[u_x]$ selon l'axe (ox) est:

$$[u_x] = u_x(r, \pi) - u_x(r, -\pi) = \frac{4K_{II}}{\mu} (1 - \nu) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (1.6)$$

► **Mode III :**

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Et

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\ u_x &= u_y = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

La discontinuité ou saut de déplacement $[u_z]$ selon l'axe (oz) est:

$$[u_z] = u_z(r, \pi) - u_z(r, -\pi) = \frac{4K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (1.8)$$

Avec :

ν : coefficient de Poisson

$$\mu : \text{module de cisaillement, tel que : } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.9)$$

Remarque : On remarque qu'à la pointe de la fissure (i.e. $r \rightarrow 0$), les contraintes sont singulières en $\sqrt{1/r}$ et que les déplacements d'ouverture tendent vers 0 comme \sqrt{r} .

Les facteurs K_I , K_{II} et K_{III} sont appelées les facteurs d'intensité de contraintes et sont exprimées en $MPa\sqrt{m}$. Ces paramètres dépendent uniquement des conditions de chargement et de géométrie.

I.3.2 Les facteurs d'intensité de contraintes

Intuitivement, il apparaît naturel qu'une perturbation géométrique (fissure) crée, dans son environnement immédiat, une zone où les contraintes induites par les sollicitations extérieures seront modifiées, généralement augmentées. Le facteur multiplicatif local des contraintes que le défaut induit est appelé facteur de concentration de contraintes, noté K_σ , tel que [17] :

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{local}}{\sigma_{global}} \quad (1.10)$$

Où σ_{global} représente le niveau de contraintes en l'absence du défaut au point où il est localisé, ou, ce qui revient au même, hors des perturbations induites par celui-ci, et σ_{local} les contraintes maximales induites localement par la fissure.

Lorsque le rayon de la pointe de fissure tend vers zéro, les contraintes en tête de celle-ci deviennent singulières. La description de cette singularité de contraintes demande de résoudre les équations de l'élasticité en imposant des conditions aux limites correspondant à une coupure dans le plan, la surface de fissure.

Donc, ils peuvent être déterminés si l'on connaît les expressions des composantes non nulles des contraintes et des déplacements. Ces calculs peuvent être menés dans le cas analytique en utilisant la méthode de Westergaard [20]. Dans les modèles numériques, il est plus judicieux d'utiliser les discontinuités de déplacement $[u_i]$. Dans notre cas, nous optons pour le calcul utilisant les sauts de déplacement.

$$\begin{aligned}
K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_y] \right) \\
K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{xy} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_x] \right) \\
K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yz} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_z] \right)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

I.4 Approche globale – théorie énergétique de Griffith

Griffith (1924) , sur ses travaux sur le verre, a émis l'hypothèse que la propagation d'une fissure absorbe de l'énergie. Cette énergie est appelée énergie de surface. Soit un matériau contenant une fissure de longueur a . (Fig. 1.3) Pour une extension Δa de la fissure la conservation de l'énergie totale peut W_{tot} s'écrit [21] :

$$\Delta W_{tot} = 0 = \Delta W_{elast} + \Delta W_{ext} + \Delta W_{cin} + \Delta W_{surf} \tag{1.12}$$

Avec

ΔW_{ext} Variation du travail des forces extérieures.

ΔW_{elast} Variation de l'énergie de déformation élastique.

ΔW_{cin} Variation de l'énergie cinétique (négligée dans le processus quasi statique)

ΔW_{surf} Energie dissipée lors de la propagation sur surface de la fissure = $G\Delta A$

Soit $\Delta W_{surf} = -(\Delta W_{elast} + \Delta W_{ext}) = -\Delta U$

Dans la théorie initiale de Griffith qui s'applique à une rupture fragile, l'énergie ΔU correspond à l'énergie nécessaire pour créer de nouvelles surfaces dans le matériau (Δ). L'énergie de Griffith G est rapportée à l'unité de surface ; elle est définie à partir de ΔU par :

$$G = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta U}{\Delta A} \right) = -\frac{\partial U}{\partial A} \tag{1.13}$$

$\Delta A = e\Delta a$ est la surface fissurée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa dans une éprouvette d'épaisseur e .

Généralement, on considère une épaisseur unité ($e = 1$) et G rapportée à l'unité d'épaisseur est alors donnée par :

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta U}{\Delta a} \right) = -\frac{\partial U}{\partial a} \quad (1.14)$$

Cette quantité d'énergie G est appelée le taux de restitution d'énergie.

Si on considère γ_s l'énergie spécifique de création de surface, on a :

$$2\gamma_s = G_c \quad (1.15)$$

Si G dépasse ce seuil critique, la fissure se propage. Ceci constitue le critère de Griffith.

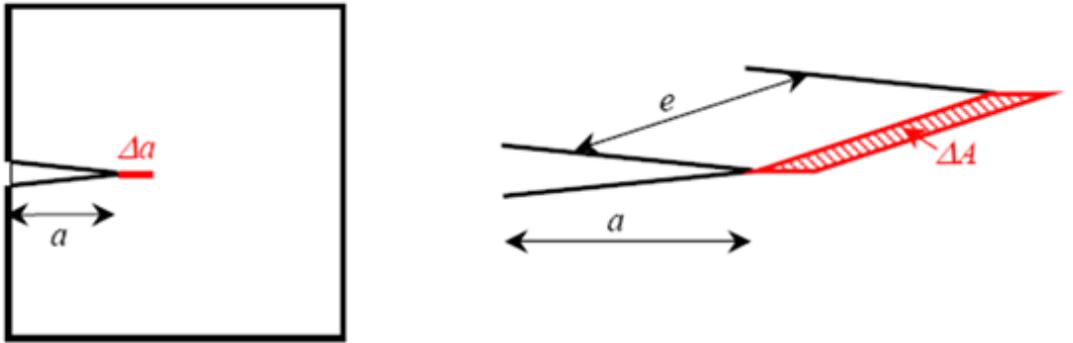


Fig. 1.3 Propagations d'une la fissure sur une longueur Δa .

I.5 Mode mixte de rupture :

I.5.1 Principe de superposition :

Dans les matériaux élastiques linéaires, les composantes des contraintes, des déformations et des déplacements sont additives : c'est l'application du principe de superposition. Cependant, il faut respecter certaines règles : ainsi par exemple deux contraintes normales selon la direction x peuvent s'ajouter entre elles, mais une contrainte normale ne peut en aucun cas s'ajouter avec une contrainte de cisaillement. Il en est de même pour les facteurs d'intensité des contraintes \mathbf{K} : on ne peut additionner des facteurs d'intensité des contraintes que s'ils concernent le même mode de sollicitation (mode I, II ou III). On a ainsi :

$$K_I^{(total)} = K_I^{(A)} + K_I^{(B)} + K_I^{(C)} + \dots \quad (1.16)$$

Mais

$$K_{(total)} \neq K_I + K_{II} + K_{III} \quad (1.17)$$

Dans beaucoup de cas, le principe de superposition, convenablement appliqué, permet de déterminer la solution pour le coefficient d'intensité de contraintes dans des configurations de chargement relativement complexes en les décomposant en somme de chargements simples dont les solutions sont connues.

Par exemple,

$$K_I^{(a)} = K_I^{(b)} + K_I^{(c)} \text{ avec } K_I^{(c)} = 0 \Rightarrow K_I^{(a)} = K_I^{(b)} \quad (1.18)$$

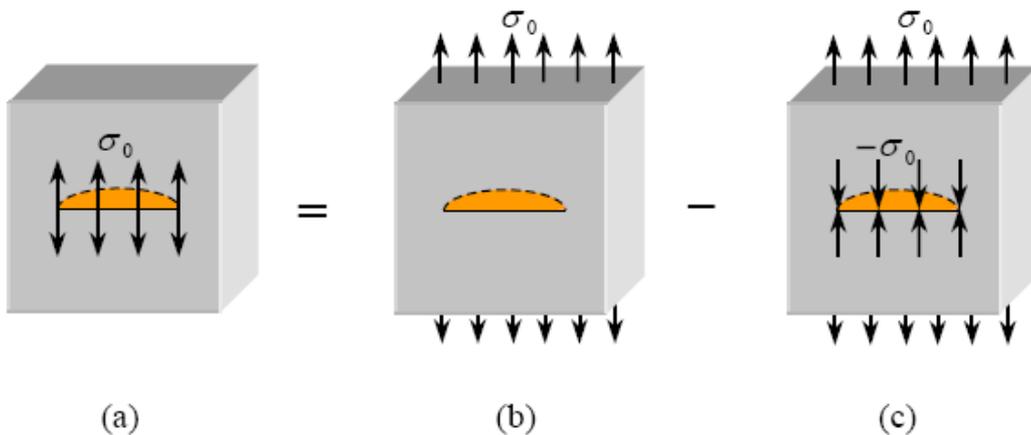


Fig. 1.4 Détermination du K_I pour une fissure dont les lèvres sont soumises à une traction σ_0 .

I.5.2 Champ de contraintes et déplacements

La figure 1.5a représente une fissure inclinée traversant une plaque soumise à une traction simple. Si la fissure n'était pas inclinée ($\beta = 0^\circ$), le chargement appliqué conduirait à du mode I pur. Pour montrer comment l'inclinaison de la fissure entraîne du mode II, on calcule le vecteur contrainte dans le plan de la fissure. Ce vecteur s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{T}(m, \vec{n}) &= \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = (\sigma^\infty \cos \beta) \vec{y} \\ \vec{T}(m, \vec{n}) &= \begin{pmatrix} N \\ T \end{pmatrix} = \sigma^\infty \cos \beta \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\infty \cos^2 \beta \\ \sigma^\infty \cos \beta \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.19)$$

On remarque que le vecteur contrainte dans le plan de fissure se décompose en une contrainte normale N (traction) et une contrainte tangentielle T (cisaillement), Dans le cas présent, nous sommes en mode mixte I – II.

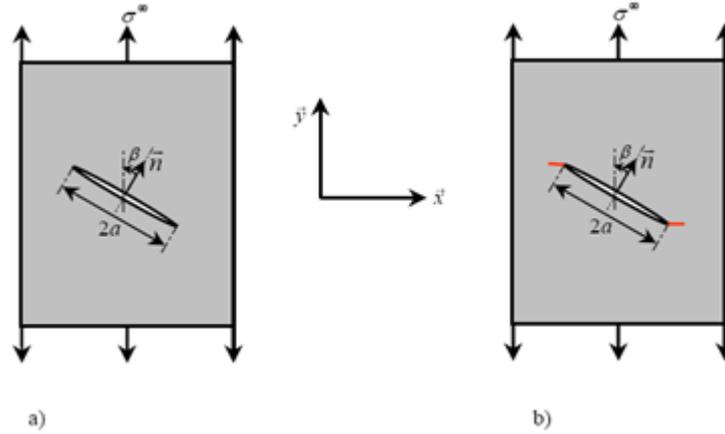


Fig. 1.5 Fissure inclinée dans une plaque en traction.

En utilisant le principe de superposition, l'état de contrainte à la pointe de la fissure est obtenu facilement. Pour un mode mixte I - II, la contrainte est la somme des contraintes de chaque mode de chargement [18].

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Et les déplacements sont obtenus à partir des équations (1.2) et (1.5)

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[(1 - 2\nu) + \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2(1 - \nu) + \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\
 u_y &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2(1 - \nu) + \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-(1 - 2\nu) + \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right]
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

1.5.3 Propagation d'une fissure

Lorsqu'une fissure est sollicitée en mode mixte, on observe généralement un branchement ou une bifurcation qui se caractérise par un changement de direction de propagation (Fig. 1.6). Les facteurs d'intensité de contraintes locaux à l'extrémité de la déviation d'angle α noté $K_I(\alpha)$ et $K_{II}(\alpha)$, diffère des facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} de la fissure initiale [16].

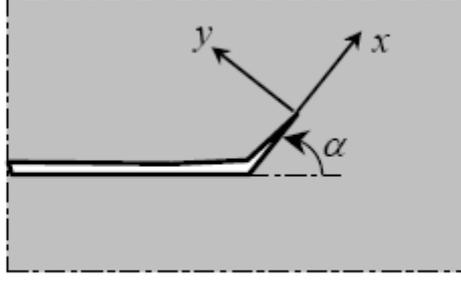


Fig 1.6 Fissure inclinée : Propagation selon un angle α par rapport au plan de la fissure.

Les facteurs d'intensité de contraintes en mode I et II à l'extrémité de la déviation, sont donnés par :

$$\begin{aligned} K_I(\alpha) &= K_I \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\alpha}{2} \right) + K_{II} \left(-\frac{3}{4} \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\alpha}{2} \right) \\ K_{II}(\alpha) &= K_I \left(\frac{1}{4} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\alpha}{2} \right) + K_{II} \left(\frac{1}{4} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\alpha}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

On présentera dans ce qui suit, les deux principaux critères utilisés dans le cas de matériaux élastiques isotropes.

I.5.3.1 Critère en contrainte tangentielle maximale

Le critère le plus simple à utiliser est celui d'Erdogan et Sih [22], qui stipule que la direction de propagation est celle dans laquelle la contrainte normale est maximale (i.e. $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta max}$ et $\sigma_{r\theta} = 0$).

Au voisinage de la pointe de fissure, les champs de contraintes sont donnés en coordonnées polaires par :

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(M) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \\ \sigma_{r\theta}(M) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)] \end{aligned} \quad (1.23)$$

Alors en dérivant $\sigma_{\theta\theta}$ par rapport à θ , on aura :

$$\sqrt{2\pi r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = -\frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)] \quad (1.24)$$

Donc, la direction de propagation α sera donnée par :

$$K_I \sin \alpha + K_{II} (3 \cos \alpha - 1) = 0 \quad (1.25)$$

Le critère de propagation sera :

$$\cos \frac{\alpha}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \alpha \right] = K_{IC} \quad (1.26)$$

Où K_{IC} est le facteur d'intensité de contraintes **critique**.

1.5.3.2 Critère de Griffith

La fissure se propage lorsque G_{max} atteint la valeur critique G_C . C'est le critère de Griffith en énergie.

L'énergie de Griffith $G(\alpha)$ à l'extrémité de la déviation, s'exprime par :

$$G(\alpha) = \frac{1 - \nu^2}{E} [K_I^2(\alpha) + K_{II}^2(\alpha)] \quad (1.27)$$

Les maximums de $G(\alpha)$, à β fixé, correspondent aux points où K_I est maximum et $K_{II} = 0$. Ainsi, le maximum de l'énergie de Griffith est donné par :

$$G_{max} = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2(\alpha^*) \quad (1.28)$$

où α^* est l'angle pour lequel les valeurs de l'énergie G et de K_I sont maximales et $K_{II} = 0$.

Dans un matériau homogène, une fissure initialement inclinée d'un angle β se propagera en suivant une direction faisant l'angle α^* avec le plan initial de la fissure.

1.6 Conclusion

Nous avons mis le point sur la totalité des notions et des lois nécessaires pour le traitement des problèmes de fissures dans les solides notamment les coefficients d'intensité de contraintes en fonction des discontinuités de déplacement ; car la méthode qui sera utilisée pour la résolution de ce type de problème est la méthode de discontinuité de déplacement.

Méthode de Discontinuité de Déplacement

- 1- Introduction
- 2- La discontinuité de déplacement dans un solide infini
- 3- Procédure numérique
- 4- Transformations de coordonnées
- 5- Coefficients d'influence
- 6- Problèmes intérieur et extérieur
- 7- Conditions de symétrie

II.1 Introduction :

Beaucoup de problèmes pratiques en mécanique des solides concernent des corps contenant des fissures. Une fissure est constituée de deux surfaces. Parmi les méthodes d'éléments de frontière permettant l'étude de tels problèmes, la méthode de discontinuité de déplacement est la plus adéquate. Elle est basée sur la solution analytique du problème d'une discontinuité de déplacement constante le long d'un segment de droite dans un plan (x,y) infini.

Physiquement, on peut imaginer une discontinuité de déplacement comme une fissure dont les surfaces opposées se sont déplacées relativement l'une par rapport l'autre. Dans le cas présent, les surfaces se sont déplacées relativement par une distance constante le long de la fissure considérée. En général, bien sûr, on peut considérer une distribution non constante des déplacements relatifs.

La méthode de discontinuité de déplacement est basée sur une notion qu'on peut faire une approximation discrète à une distribution continue de discontinuité de déplacement sur la fissure. C'est-à-dire, on divise la fissure à une série de N éléments (éléments de frontière) et on considère que la discontinuité de déplacement soit constante sur chaque élément. En connaissant la solution analytique pour une seule discontinuité de déplacement élémentaire constante, on peut trouver une solution numérique du problème par sommation des effets de tous les éléments.

II.2 La discontinuité de déplacement dans un solide infini :

Le problème de la discontinuité de déplacement constante, dans un segment droit dans un plan (x,y) d'un solide élastique infini, est spécifié par la condition que les déplacements soient continus partout dans le solide sauf sur le segment droit en question. Le segment droit peut être choisi de façon à occuper une certaine portion de l'axe x , soit $|x| \leq a, y = 0$.

Si nous considérons que ce segment est une fissure droite, nous pouvons distinguer ses deux surfaces en disant qu'une surface est du côté positif de $y=0$, noté $y=0_+$, et l'autre est du côté négatif, noté $y=0_-$ (Fig. 2.1). En traversant d'un côté du segment à un autre, les déplacements subissent une variation spécifique constante en valeur $D_i = (D_x, D_y)$.

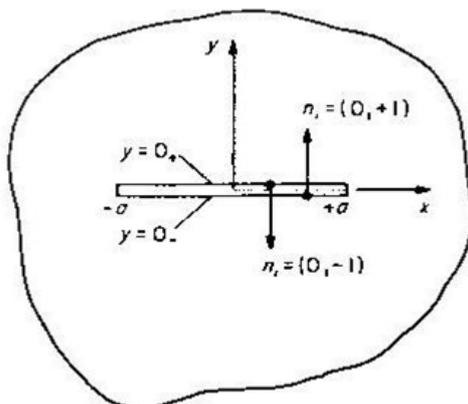


Fig. 2.1 Fissure linéaire dans un corps infini

Nous définissons la discontinuité de déplacement D_i comme la différence dans le déplacement entre les deux côtés du segment comme suit :

$$\begin{aligned} D_x(x) &= u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \\ D_y(x) &= u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Comme u_x et u_y sont positifs dans les directions positives des coordonnées x et y , il s'ensuit que D_x et D_y sont positifs comme illustré dans la figure 2.2. Nous devons noter qu'une valeur positive de D_y suggère que les deux côtés de la fissure se chevauchent. Il n'y a aucune objection mathématique à l'occurrence d'un chevauchement, bien qu'il soit physiquement impossible. Nous pouvons éviter cette difficulté conceptuelle en disant que la fissure a une épaisseur finie, petite par rapport à sa longueur, et que la valeur de la discontinuité de déplacement D_y est toujours moins que celle-ci.

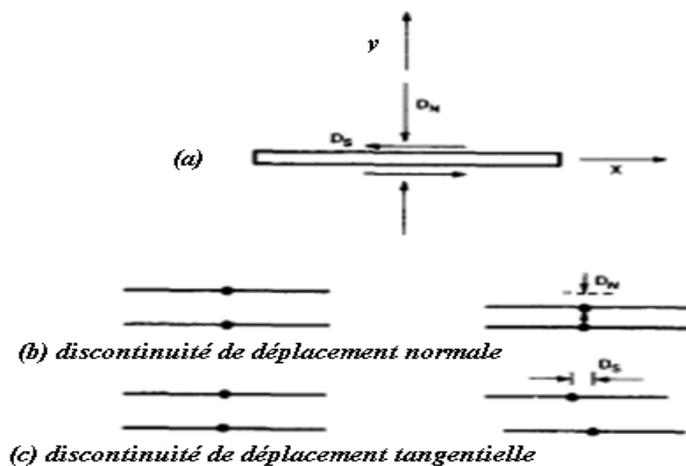


Fig. 2.2 Discontinuités de déplacement

La solution du problème traité est donnée par Crouch (1976) [3]. Les déplacements et les contraintes peuvent être écrits comme suit :

$$\begin{aligned} u_x &= D_x [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \\ u_y &= D_x [(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] + D_y [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,yy}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Et

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu D_x [2f_{,xy} + yf_{,xyy}] + 2\mu D_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2\mu D_x [-yf_{,xyy}] + 2\mu D_y [f_{,yy} - yf_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2\mu D_x [f_{,yy} + yf_{,yyy}] + 2\mu D_y [-yf_{,xyy}] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Telle que la fonction f est définie comme suit :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right. \\ &\quad \left. - (x-a) \ln \sqrt{[(x-a)^2 + y^2]} + (x+a) \ln \sqrt{[(x+a)^2 + y^2]} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les dérivées de cette fonction sont :

$$\begin{aligned} F_2(x, y) = f_x &= \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} [\ln \sqrt{[(x-a)^2 + y^2]} - \ln \sqrt{[(x+a)^2 + y^2]}] \\ F_3(x, y) = f_y &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right] \\ F_4(x, y) = f_{xy} &= \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ F_5(x, y) = f_{xx} = -f_{yy} &= \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ F_6(x, y) = f_{xyy} = -f_{xxx} &= \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)^2 - y^2}{\{(x-a)^2 + y^2\}^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{\{(x+a)^2 + y^2\}^2} \right] \\ F_7(x, y) = f_{yyy} = -f_{xxy} &= \frac{+2y}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{\{(x-a)^2 + y^2\}^2} - \frac{x+a}{\{(x+a)^2 + y^2\}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Il est facile de vérifier que les déplacements (2.2) sont continus partout dans le corps infini, excepté à travers le segment droit $|x| \leq a, y = 0$, où les déplacements sont discontinus en accord avec les définitions (2.1). Les déplacements sur la ligne $y=0$, par exemple, sont [4] :

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Les valeurs limites des termes \arctan sont définies comme suit :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) = \begin{cases} 0 & |x| > a ; y = 0_{\mp} \\ +\pi & |x| < a ; y = 0_{+} \\ -\pi & |x| < a ; y = 0_{-} \end{cases} \quad (2.7)$$

En utilisant ces résultats, nous constatons que trois cas séparés doivent être pris en considération pour évaluer les composants de déplacement suivant la ligne $y=0$:

(1) $|x| > a, y = 0_{\pm}$

$$\begin{aligned} u_x(x, 0) &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x, 0) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2) $|x| < a, y = 0_{+}$

$$\begin{aligned} u_x(x, 0_{+}) &= -\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x, 0_{+}) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2} D_y \end{aligned} \quad (2.9)$$

(3) $|x| < a, y = 0_{-}$

$$\begin{aligned} u_x(x, 0_{-}) &= +\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ u_y(x, 0_{-}) &= +\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2} D_y \end{aligned} \quad (2.10)$$

Les déplacements u_x et u_y sont donc continus pour $|x| > a$ sur $y = 0$, mais ont des discontinuités $+D_x$ et $+D_y$ pour $|x| < a$, comme c'est affirmé.

Les contraintes sur la ligne $y = 0$ peuvent être évaluées de façon similaire à partir de l'équation (2.3).

Elles sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, 0) &= \frac{-\mu}{2\pi(1-\nu)} D_y \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{-a\mu}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= \frac{-a\mu}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= \frac{-a\mu}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2 - a^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les contraintes normales σ_{xx} et σ_{yy} sur $y = 0$ dépendent ainsi seulement de la composante normale de la discontinuité D_y , alors que la contrainte tangentielle $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ dépend seulement de la composante tangentielle D_x .

A partir de ces équations, nous remarquons que les contraintes sont singulières et discontinues pour $x = \pm a$, mais sont finies et continues partout sur $y = 0$.

Les directions des composantes du vecteur de traction sur les deux surfaces de la fissure sont illustrées dans la figure 2.3, en supposant que $D_x > 0$ et $D_y > 0$. En tenant compte de :

$t_x(x, 0_+) = -\sigma_{xy}(x, 0_+)$, $t_y(x, 0_+) = -\sigma_{yy}(x, 0_+)$, $t_x(x, 0_-) = +\sigma_{xy}(x, 0_-)$, $t_y(x, 0_-) = +\sigma_{yy}(x, 0_-)$ et de (2.2.11), il s'ensuit que $t_i(x, 0_+) = -t_i(x, 0_-)$, donc les contraintes résultantes $t_i(x, 0) = t_i(x, 0_+) + t_i(x, 0_-)$ appliquées à la fissure sont égales à zéro.

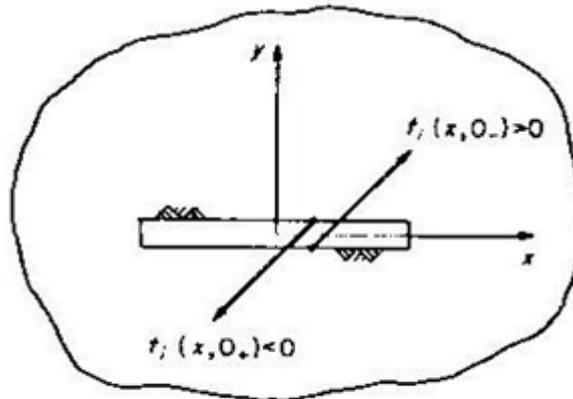


Fig. 2.3 Contraintes appliquées aux surfaces de la fissure

II.3 Procédure numérique

Une généralisation de la procédure numérique décrite ci-dessus est schématisée dans la figure 2.4. Dans ce cas la fissure est courbée, mais nous allons supposer qu'elle puisse être représentée avec une exactitude suffisante par N segments droits, liés entre eux. Les positions et les orientations de ces segments sont référencées au système de coordonnées x, y montré sur la figure 2.4. Si les surfaces de la fissure sont soumises à une contrainte (par exemple, pression uniforme d'un fluide $-p$), elles se déplaceront relativement l'une vers l'autre. La méthode de discontinuité de

déplacement est un moyen pour trouver une approximation discrète pour la distribution lisse du déplacement relatif (i.e. discontinuité de déplacement) qui existe en réalité.

Cette approximation discrète est trouvée en référence aux N subdivisions de la fissure représentée dans la figure 2.4a. Chacune de ces subdivisions est un élément de frontière et représente une discontinuité de déplacement élémentaire.

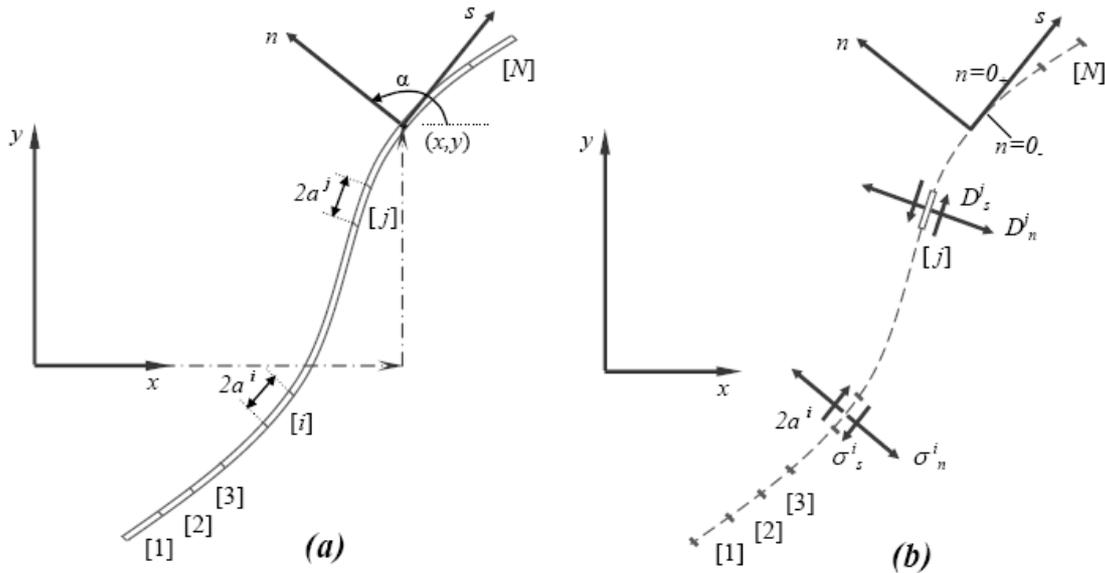


Fig. 2.4 Discretisation d'une fissure en N discontinuités de déplacement élémentaires.

Les discontinuités de déplacement élémentaires sont définies en respectant les coordonnées locales s et n indiquées dans la figure 2.4. La figure 2.4b représente une simple discontinuité de déplacement élémentaire au $j^{\text{ème}}$ segment de la fissure. Les composantes de la discontinuité dans les directions s et n dans ce segment sont notées

D_s^j et D_n^j . Ces quantités sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} D_s^j &= u_s^- - u_s^+ \\ D_n^j &= u_n^- - u_n^+ \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dans ces définitions, u_s^j et u_n^j se rapportent aux déplacements tangentiel (s) et normal (n) du $j^{\text{ème}}$ segment de la fissure. Les indices supérieurs '+' et '-' dénotent la surface positive de la fissure et la surface négative par référence à la coordonnée local n .

Les déplacements locaux u_s^j et u_n^j forment les deux composantes du vecteur. Elles sont positives dans les directions positives de s et n , indépendamment du choix de la surface positive ou négative de la fissure. Par conséquent, il suit de (2.12) que la composante normale de la discontinuité de déplacement D_n^j est positive si les deux surfaces de la fissure se déplacent l'une vers l'autre. De même, la composante tangentielle D_s^j est positive si la surface positive de la fissure se déplace vers la gauche par rapport à la surface positive.

Les effets d'une seule discontinuité de déplacement élémentaire sur les déplacements et les contraintes dans un point arbitraire dans le solide infini peuvent être calculés à partir des résultats de la section II.2, si nous transformons convenablement les équations pour expliquer la position et l'orientation du segment en question. En particulier, les contraintes normale et tangentielle au point médian de l' $i^{\text{ème}}$ élément dans la figure 2.4b peuvent être exprimées en termes des composantes de la discontinuité de déplacement dans le $j^{\text{ème}}$ élément comme suit [4] :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1 \text{ à } N \quad (2.13)$$

Où A_{ss}^{ij} , etc., sont les coefficients d'influence de frontière pour les contraintes.

Le coefficient A_{ns}^{ij} , par exemple, donne la contrainte normale dans le point médian de l' $i^{\text{ème}}$ élément (i.e. σ_n^i) due à une discontinuité de déplacement unitaire constante sur le $j^{\text{ème}}$ élément (i.e. D_s^j).

Revenons maintenant à notre problème de la fissure décrit dans la figure 2.4a, nous plaçons une discontinuité de déplacement élémentaire à chacun des N segments le long de la fissure et nous écrivons, à partir de (2.13),

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^n A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^n A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^n A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^n A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1 \text{ à } N \quad (2.14)$$

Si on spécifie les valeurs des contraintes σ_s^i et σ_n^i pour chaque élément de la fissure, alors les équations (2.14) sont un système de $2N$ équations linéaires de $2N$ inconnues, nommées les composantes de la discontinuité de déplacement élémentaire D_s^j et D_n^j pour $i = 1$ à N .

Après avoir résolu les équations ci-dessus pour D_s^j et D_n^j , nous pouvons trouver les déplacements et les contraintes dans des points indiqués dans le solide en utilisant le principe de la superposition. En particulier, les déplacements le long de la fissure de la figure 2.4a sont donnés par des expressions de la forme :

$$\left. \begin{aligned} u_s^i &= \sum_{j=1}^n B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^n B_{sn}^{ij} D_n^j \\ u_n^i &= \sum_{j=1}^n B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^n B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} i = 1 \text{ à } N \quad (2.15)$$

Où B_{ss}^{ij} , etc., sont les coefficients d'influence de frontière pour les déplacements. Les déplacements sont discontinus quand on passe d'un côté à l'autre de l' $i^{\text{ème}}$ élément, donc, nous devons distinguer entre les deux côtés lors du calcul des coefficients d'influence dans (2.15). Nous allons voir dans la section II.5 que les termes diagonaux des coefficients d'influence dans ces équations ont les valeurs :

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0$$

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{pour } n \rightarrow 0_- \\ +\frac{1}{2} & \text{pour } n \rightarrow 0_+ \end{cases} \quad (2.16)$$

Les coefficients restants (i.e. ceux pour lesquels $i \neq j$) sont continus.

II.4 Transformations de coordonnées

Les coefficients d'influence dans (2.14) et (2.15) sont développés à partir de la solution analytique du problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment droit arbitrairement orienté dans un solide infini. Cette solution peut être obtenue à partir des résultats de la section II.2 au moyen de simples transformations de coordonnées. Nous allons donner cette solution ci-dessous pour la géométrie indiquée sur la figure 5.6. Les composantes $D_{\bar{x}}$ et $D_{\bar{y}}$ de la discontinuité de déplacement sont constantes sur le segment droit $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$.

Les coordonnées \bar{x} et \bar{y} sont reliées aux coordonnées globales x, y par les formules de transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - c_x) \cos \beta + (y - c_y) \sin \beta \\ \bar{y} &= -(x - c_x) \sin \beta + (y - c_y) \cos \beta\end{aligned}\quad (2.17)$$

Les déplacements et les contraintes dus aux composantes $D_{\bar{x}}$ et $D_{\bar{y}}$ de la discontinuité de déplacement sur le segment droit $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$ peuvent être notés immédiatement en introduisant les changements d'écriture appropriés des résultats de la section II.2. En utilisant les définitions (2.5) des fonctions $F_2(\bar{x}, \bar{y})$ à $F_7(\bar{x}, \bar{y})$, on représente la solution comme suit :

$$\begin{aligned}u_{\bar{x}} &= D_{\bar{x}} [2(1 - \nu)\bar{F}_3 - \bar{y}\bar{F}_5] + D_{\bar{y}} [-(1 - 2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}\bar{F}_4] \\ u_{\bar{y}} &= D_{\bar{x}} [(1 - 2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}\bar{F}_4] + D_{\bar{y}} [2(1 - \nu)\bar{F}_3 + \bar{y}\bar{F}_5]\end{aligned}\quad (2.18)$$

Et

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= 2\mu D_{\bar{x}} [2\bar{F}_4 + \bar{y}\bar{F}_6] + 2\mu D_{\bar{y}} [-\bar{F}_5 + \bar{y}\bar{F}_7] \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= 2\mu D_{\bar{x}} [-\bar{y}\bar{F}_6] + 2\mu D_{\bar{y}} [-\bar{F}_5 - \bar{y}\bar{F}_7] \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} &= 2\mu D_{\bar{x}} [-\bar{F}_5 + \bar{y}\bar{F}_7] + 2\mu D_{\bar{y}} [-\bar{y}\bar{F}_6]\end{aligned}\quad (2.19)$$

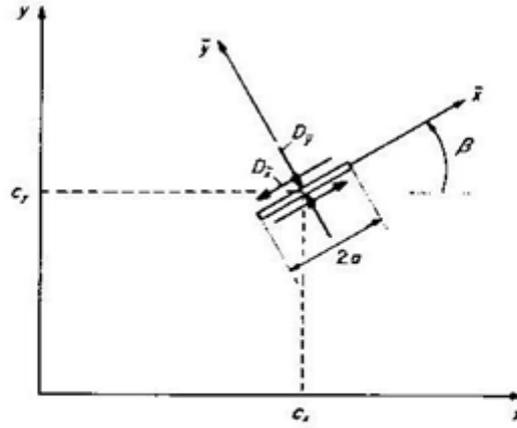


Fig. 2.5 Discontinuité de déplacement sur un segment orienté arbitrairement

Donc, les déplacements et les contraintes dans le système global de coordonnées x, y , seront :

$$u_x = D_{\bar{x}} [-(1 - 2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \cos \beta \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5)] \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
& +D_{\bar{y}} [-(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5)] \\
u_y = D_{\bar{x}} [& +(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5)] \\
& +D_{\bar{y}} [-(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5)]
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2 \mu D_{\bar{x}} [2 \cos^2 \beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7)] \\
& + 2 \mu D_{\bar{y}} [-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7)] \\
\sigma_{yy} &= 2 \mu D_{\bar{x}} [2 \sin^2 \beta \bar{F}_4 - \sin 2\beta \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7)] \\
& + 2 \mu D_{\bar{y}} [-\bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7)] \\
\sigma_{xy} &= 2 \mu D_{\bar{x}} [\sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7)] \\
& + 2 \mu D_{\bar{y}} [-\bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7)]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ces équations peuvent maintenant être utilisées pour calculer les coefficients d'influence généraux pour la méthode de discontinuité de déplacement.

II.5 Coefficients d'influence

Les coefficients d'influence pour la méthode de discontinuité de déplacement sont obtenus à partir des résultats précédents en considérant un corps infini contenant N segments droits, orientés arbitrairement dans le système global de coordonnées x, y . Chacun de ces segments droits a son propre système de coordonnées local, et chacun représente une discontinuité de déplacement élémentaire. Les influences des composantes tangentielle et normale de la discontinuité de déplacement au $j^{\text{ème}}$ élément (i.e. D_s^j et D_n^j) sur les déplacements et les contraintes dans un point arbitraire (x, y) dans le corps peuvent être calculées directement de (2.20) et (2.21). Les influences de ces quantités sur les déplacements et les contraintes tangentiels et normaux au point médian de l' $i^{\text{ème}}$ élément spécifient les coefficients d'influence de frontière B_{SS}^{ij} , etc., dans (2.15) et A_{SS}^{ij} , etc., dans (2.16).

Pour calculer ces coefficients, considérons un domaine infini contenant N segments droits orientés dans des directions arbitraires dans le repère global (x, y) . Considérons deux éléments distincts i (\bar{x}^i, \bar{y}^i) et j (\bar{x}^j, \bar{y}^j) reliés chacun à un repère local (\bar{x}^i, \bar{y}^i) et (\bar{x}^j, \bar{y}^j) respectivement, et orientés de β^i et β^j (voir Fig. 2.7).

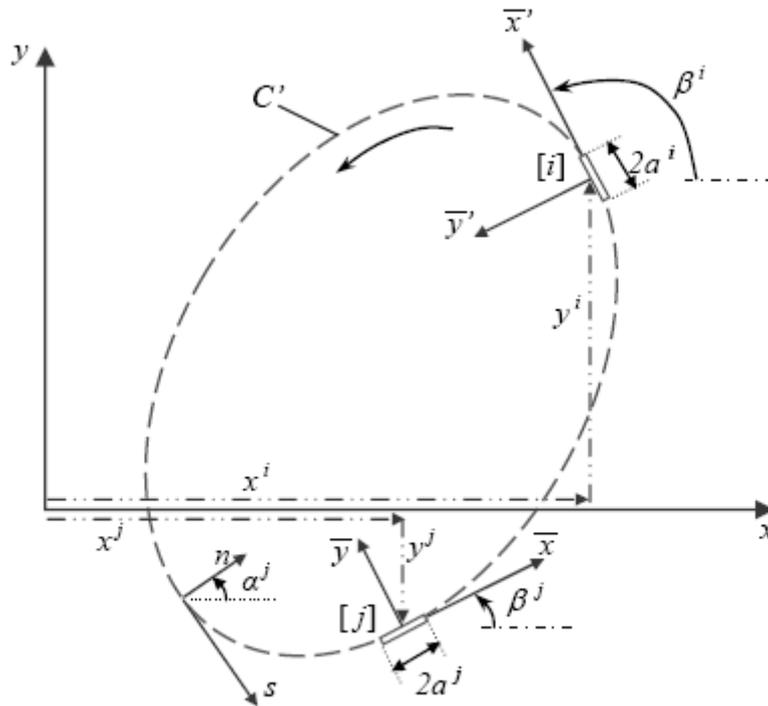


Fig. 2.6 Position et orientation des éléments de frontière.

Les coordonnées locales (\bar{x}, \bar{y}) dans les équations (2.20) et (2.21) représentent celle du point (x, y) par rapport au milieu du $j^{\text{ème}}$ élément :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - x^j) \cos \beta^j + (y - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x - x^j) \sin \beta^j + (y - y^j) \cos \beta^j\end{aligned}\quad (2.22)$$

Les déplacements et les contraintes en ce point dus aux discontinuités de déplacement sur les N éléments sont obtenus par la sommation des contributions de chaque élément.

En choisissant le point (x, y) comme étant le milieu de l' $i^{\text{ème}}$ élément, (i.e. $x = x^i$ et $y = y^i$), l'équation (2.22) devient :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x^i - x^j) \cos \beta^j + (y^i - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x^i - x^j) \sin \beta^j + (y^i - y^j) \cos \beta^j\end{aligned}\quad (2.23)$$

Les déplacements et les contraintes relativement en repère local au point « i » sont (\bar{x}', \bar{y}') . Les deux repères locaux de l' $i^{\text{ème}}$ élément et le $j^{\text{ème}}$ élément sont reliés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= \bar{x} \cos \gamma + \bar{y} \sin \gamma \\ \bar{y}' &= -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma\end{aligned}\quad (2.24)$$

Où $\gamma = \beta^i - \beta^j$, donne l'inclinaison de l' $i^{\text{ème}}$ élément par rapport au $j^{\text{ème}}$ élément.

Les déplacements et les contraintes seront :

$$\begin{aligned}u_{\bar{x}'}^i &= u_{\bar{x}}^i \cos \gamma + u_{\bar{y}}^i \sin \gamma \\ u_{\bar{y}'}^i &= -u_{\bar{x}}^i \sin \gamma + u_{\bar{y}}^i \cos \gamma\end{aligned}\quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}'\bar{x}'}^i &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i \cos^2 \gamma + 2 \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i \sin^2 \gamma \\ \sigma_{\bar{y}'\bar{y}'}^i &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i \sin^2 \gamma - 2 \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i \cos^2 \gamma \\ \sigma_{\bar{x}'\bar{y}'}^i &= -(\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i) \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)\end{aligned}\quad (2.26)$$

Les coefficients d'influence pour les déplacements et les contraintes sont obtenus à partir des équations (2.20), (2.21), (2.25) et (2.26) après avoir posé :

$$D_s^j = D_{\bar{x}}^j, D_n^j = D_{\bar{y}}^j, u_s^i = u_{\bar{x}'}^i, u_n^i = u_{\bar{y}'}^i, \sigma_s^i = \sigma_{\bar{x}'\bar{y}'}^i \text{ et } \sigma_n^i = \sigma_{\bar{y}'\bar{y}'}^i.$$

Donc :

$$\begin{aligned}u_s^i &= D_s^j [(1 - 2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5)] \\ &\quad + D_n^j [-(1 - 2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 - 2(1 - \nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 + \sin \gamma \bar{F}_5)] \\ u_n^i &= D_s^j [(1 - 2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 - 2(1 - \nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5)] \\ &\quad + D_n^j [(1 - 2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5)]\end{aligned}\quad (2.27)$$

Et

$$\begin{aligned}\sigma_s^i &= 2 \mu D_s^j [-\sin 2\gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7)] \\ &\quad + 2 \mu D_n^j [-\bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7)] \\ \sigma_n^i &= 2 \mu D_s^j [2 \sin^2 \gamma \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7)] \\ &\quad + 2 \mu D_n^j [-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_6 + \cos 2\gamma \bar{F}_7)]\end{aligned}\quad (2.28)$$

Il est facile de montrer que les termes diagonaux des coefficients d'influence de frontière (l'élément auto-influence) pour le problème présent sont :

$${}^{ii}B_{sn} = {}^{ii}B_{ns} = 0; \quad {}^{ii}B_{ss} = {}^{ii}B_{nn} = \mp \frac{1}{2} \quad \text{pour } \bar{y} = 0_{\pm} \quad (2.29)$$

$${}^{ii}A_{sn} = {}^{ii}A_{ns} = 0; \quad {}^{ii}A_{ss} = {}^{ii}A_{nn} = + \frac{\mu}{\pi(1-\nu)a^i} \quad (2.30)$$

On constate de (2.29) que les coefficients de déplacement ${}^{ii}B_{ss}$ et ${}^{ii}B_{nn}$ ont des valeurs différentes sur les deux côtés de la ligne $\bar{y} = 0$, i.e. ces coefficients sont discontinus à travers la ligne. Par contre, les coefficients de contrainte ${}^{ii}A_{ss}$ et ${}^{ii}A_{nn}$ sont continus.

On adopte pour la méthode de discontinuité de déplacement la convention de rotation suivante : la normale extérieure à n'importe quel contour fermé doit se diriger vers l'extérieur du solide (Fig. 2.8)

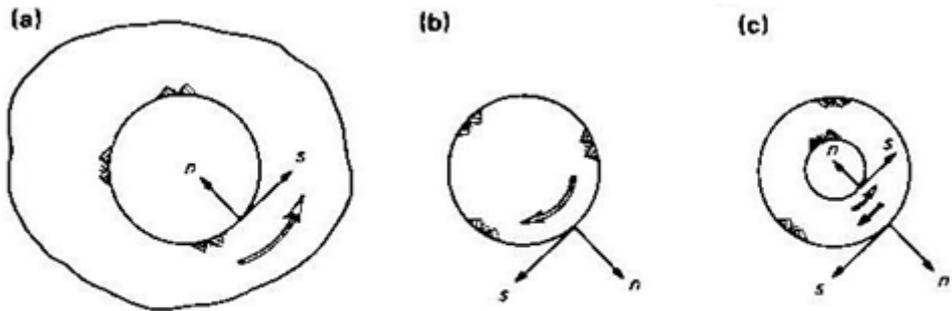


Fig. 2.7 Convention de rotation : (a) cavité (b) disque (c) tube

Dans ce cas, les coefficients ${}^{ii}B_{ss}$ et ${}^{ii}B_{nn}$ auront la valeur unique $+\frac{1}{2}$ pour les problèmes intérieurs et extérieurs. Cependant, généralement il sera nécessaire de calculer les déplacements des deux côtés d'un élément de frontière, parce que n'importe quel élément particulier physiquement peut présenter une partie d'une fissure plutôt qu'une partie d'un contour fermé. Après avoir calculé les valeurs de ${}^j u_s^-$ et ${}^j u_n^-$, on peut utiliser les définitions (2.12) pour trouver ${}^j u_s^+$ et ${}^j u_n^+$.

II.6 Problèmes intérieur et extérieur

Un problème est dit intérieur (Fig. 2.7b) quand le domaine à étudier est fini et est limité par un contour C , c'est l'exemple d'un disque. Dans le cas d'un domaine infini,

exemple d'une cavité à l'intérieur d'un domaine infini, on a affaire à un problème extérieur (Fig. 2.7a). C'est particulièrement à ce dernier type de problèmes que la méthode des éléments de frontière est la plus avantageuse. L'étude se limite seulement à une discrétisation de la frontière puis étendre la résolution au reste du domaine.

Le contour d'un domaine fini est traversé suivant le sens horaire, tandis que celui d'un domaine infini est traversé suivant le sens trigonométrique [4].

II.1.7 Conditions de symétrie

Une ligne de symétrie existe dans certains problèmes lorsque les propriétés élastiques du matériau, la géométrie de frontière et les conditions de chargement sont tous symétriques par rapport à la ligne en question. Comme les propriétés d'un matériau homogène et isotrope sont indépendantes de la position et des directions, on ne considère que la symétrie géométrique.

On peut noter aussi deux conséquences physiques pour une ligne de symétrie. La première est qu'aucun déplacement normal ne se produit à travers la ligne, et pour la deuxième, aucune contrainte tangentielle n'agit le long de cette ligne.

L'utilisation de la symétrie pour la résolution des problèmes d'élasticité par la méthode de discontinuité de déplacement est d'une extrême importance, quand on sait que le système se réduit de moitié (une seule ligne de symétrie), ou du quart (deux ligne de symétrie). (voir Fig. 2.8)

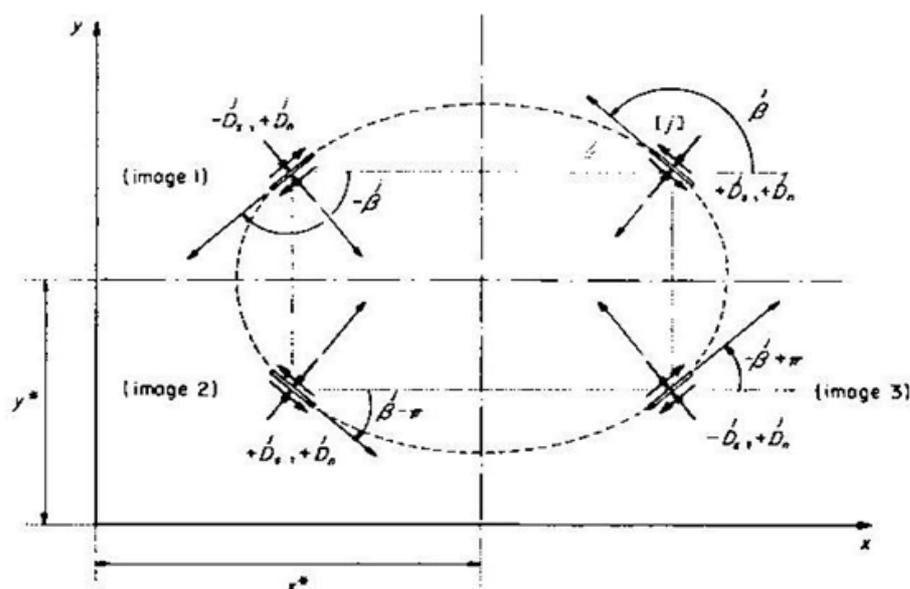


Fig. 2.8 Conditions de symétrie pour les axes $x=x^*$ et $y=y^*$

Les composantes normales des discontinuités de déplacement pour un élément et son image sont égales en valeur et en signe, mais pour les composantes tangentielles changent de signe chaque fois qu'une ligne de symétrie est traversée. C'est-à-dire :

$$D_s^* = -D_s \quad \text{et} \quad D_n^* = D_n \quad (2.31)$$

Elément Bout De Fissure D'Ordre Supérieur

- 1- Introduction
- 2- Elément parabolique
- 3- Calcul numérique des facteurs d'intensité de contraintes
- 4- Effet de la longueur de l'élément bout de fissure

III.1 Introduction

Un élément constant de la discontinuité de déplacement donne des résultats satisfaisants entre les lèvres de la fissure. Au bout de fissure, les résultats deviennent moins fiables (ils divergent), parce que le déplacement dans ce point est continu. Dans la mécanique de la rupture, une solution fiable près des lèvres de la fissure est importante d'où le besoin d'une approche sophistiqué qui prend en considération la formulation d'un élément non constant (un élément d'ordre supérieur) et continu à la pointe de fissure.

III.2 Élément parabolique

Dans la solution représentée par Crouch dans les équations (2.2) et (2.3), la formule exacte de la fonction f est :

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a D_i(\xi) \ln((x-\xi)^2 + y^2)^{0.5} d\xi \quad , i = x \text{ ou } y \quad (3.1)$$

Les solutions analytiques pour les problèmes de fissures montrent que le déplacement relatif entre les surfaces de la fissure est proportionnel à $\xi^{0.5}$, où ξ est mesuré à partir du bout le long de la fissure (voir Fig. 3.1). Pour représenter la variation de $\xi^{0.5}$, la variable de discontinuités de déplacement $D_i(\xi)$ ($i = x$ ou y) peut être définie, le long de l'élément bout de fissure, comme suit (Fig. 3.1) :

$$D_i(\xi) = D_i (\xi/a)^{0.5} \quad i = x, y \quad (3.2)$$

Où D_i sont les valeurs des discontinuités de déplacement au centre de l'élément bout de fissure.

En substituant l'équation (3.2) dans l'équation (3.1), nous obtenons :

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)a^{0.5}} D_i \int_0^{2a} \xi^{0.5} \ln((x-\xi)^2 + y^2)^{0.5} d\xi \quad (3.3)$$

Ce qui nous permet de mettre la fonction f sous la forme :

$$f(x, y) = A_0 D_i I_c \quad (3.4)$$

Où :

$$A_0 = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)a^{0.5}} \quad (3.5)$$

Et

$$I_c = \int_0^{2a} \xi^{0.5} \ln((x - \xi)^2 + y^2)^{0.5} d\xi \quad (3.6)$$

Donc, les déplacements et les contraintes peuvent être exprimées en terme de D_i . Les dérivées de l'intégrale I_c sont données dans l'annexe B.

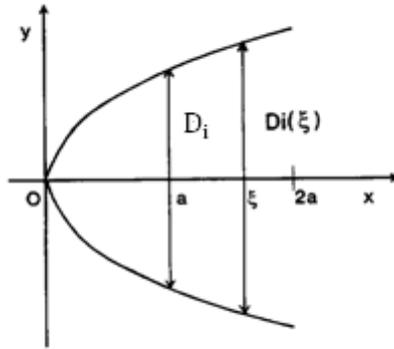


Fig. 3.1 Élément bout de fissure

III.3 Calcul numérique des facteurs d'intensité de contraintes

L'objectif de beaucoup d'analyses des problèmes de fissures (dans la mécanique de rupture linéaire et élastique) est d'obtenir des valeurs des facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} aux bouts de fissure. Une manière simple d'accomplir ceci est d'utiliser les relations suivantes :

$$K_I = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{r}} D_n(r) \right\} \quad (3.7)$$

$$K_{II} = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{r}} D_s(r) \right\}$$

Où D_n et D_s sont les composantes de la discontinuité de déplacement normale et tangentielle à une distance r du bout de fissure.

Pour des buts pratiques, les limites dans les équations (3.7) peuvent être rapprochées en évaluant simplement les expressions pour une valeur fixe de r , petite par rapport à la taille de la fissure. Ce qui nous donne :

$$K_I = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{a^j}} D_n$$

$$K_{II} = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{a^j}} D_s$$
(3.8)

Avec $j = 1$ pour K_I et K_{II} gauches et $j = N$ pour K_I et K_{II} droites.

III.4 Effet de la longueur de l'élément bout de fissure

La précision sur les facteurs d'intensité de contraintes obtenus en utilisant l'élément bout de fissure parabolique varie avec le rapport entre la longueur de l'élément bout de fissure et la longueur des autres éléments qui discrétisent la fissure. Pour montrer cet effet, nous définissons un rapport r_a entre la longueur du bout de fissure et celle des autres éléments constants.

Alors
$$r_a = \frac{a_{\text{bout de fissure}}}{a_{\text{constant}}} \quad (3.9)$$

L'erreur relative sur les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes en fonction des différentes valeurs de r_a est définie comme suit :

$$\varepsilon(\%) = 100 \frac{|K_I^{\text{numérique}} - K_I^{\text{analytique}}|}{K_I^{\text{analytique}}} \quad (3.10)$$

Les résultats représentés dans le tableau ci-dessous (Tab. 3.1) sont obtenus pour le cas d'une fissure dans un plan infini sous une traction normale.

Tab. 3.1 Erreurs sur les facteurs d'intensité de contraintes en fonction de r_a

r_a	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\varepsilon(\%)$	13,69	10,67	8,35	6,53	5,05	3,83	2,8	1,93	1,19	0,53

Dans le chapitre qui suivra, nous allons représenter l'algorithme de l'application, sa structure et quelques notions de la programmation objet orienté en C++.

Structure Du Programme Et Utilisation De La POO

- 1- Structure du programme
- 2- Algorithme de traitement de données
- 3- La POO dans notre programme

IV.1 Algorithme de traitement des données

L'algorithme est composé de trois parties principales :

Comme pour tout programme, la première partie concerne toujours la lecture de données, en plus, on a intégré ici la partie de discrétisation du contour.

Dans la deuxième partie, le système d'équations linéaires ($2N \times 2N$) est construit après avoir calculé les coefficients d'influence pour chaque couple d'éléments de frontière et intégré les éléments bout de fissure en cas d'existence.

Bien sur qu'après avoir construit le système d'équations, la prochaine étape concerne la résolution du ce dernier par la méthode de Gauss, avec pivot total, et obtenir les composantes des discontinuités de déplacement qui seront utilisées pour le calcul des champs de contraintes et déplacements aux frontières, le calcul des facteurs d'intensité de contraintes et enfin le calcul des champs de contraintes et de déplacements dans le corps.

Les parties décrites ci-dessus, seront schématisées par l'organigramme suivant :

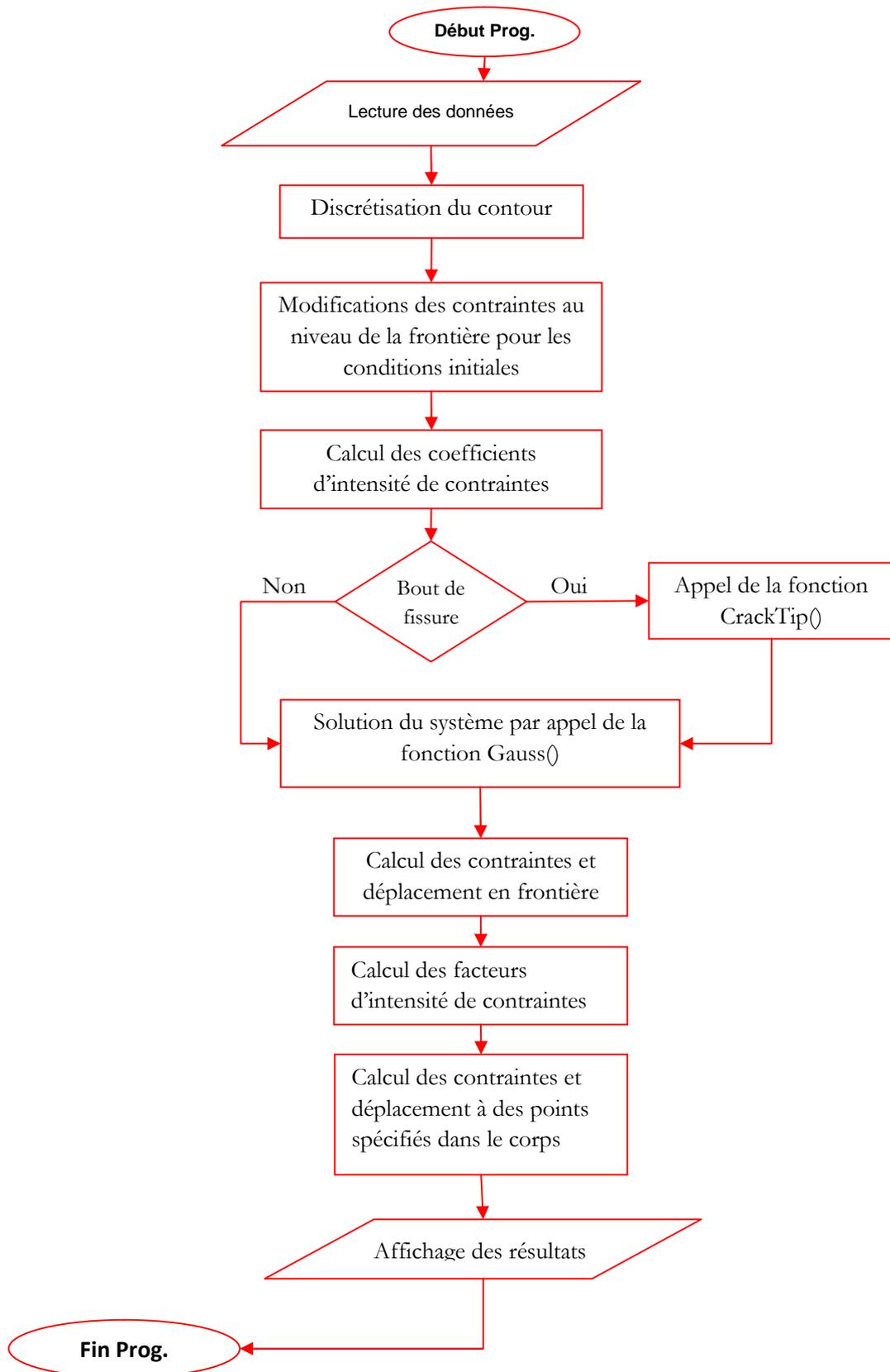


Fig. 4.3 Organigramme général du Programme

IV.2 Structure du programme

Le programme est en sorte une application visuelle réalisée avec le langage C++ sous l'environnement **CodeGear C++Builder 2009**. Son interface est constituée de deux parties essentielles :

1- Partie d'acquisition de données :

Comme le montre la figure 5.1, cette partie est ordonnée en plusieurs parties facilitant l'acquisition des données du problème traité en fournissant la clarté et la facilité de répétition des opérations de traitement sans redonner la moitié des informations nécessaires ; par exemple, la modification du nombre de segments de la fissure sans retaper les autres données.

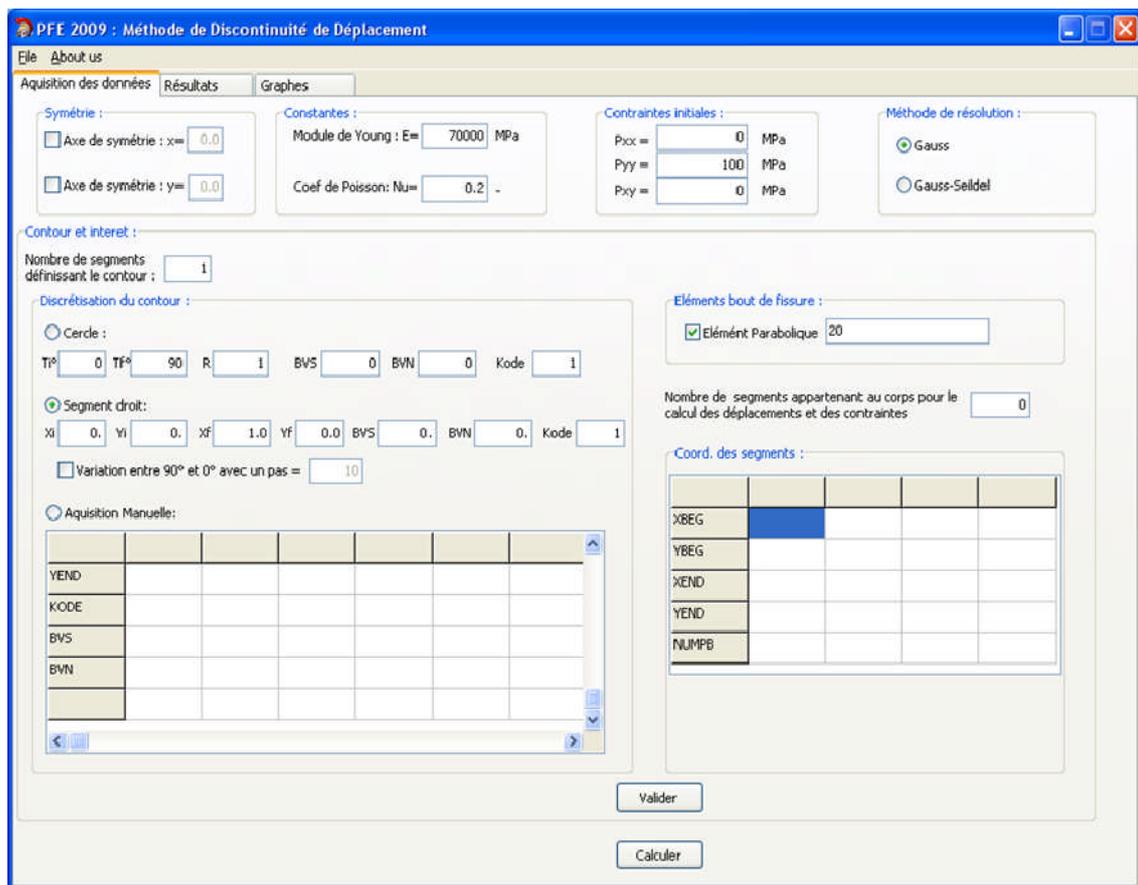


Fig. 4.1 Interface d'acquisition de l'application.

Pour les symboles non clairs sur l'interface, des info-boules apparaissent lors du passage du curseur au-dessus d'eux.

2- Partie d'affichage des résultats :

En cliquant sur le bouton « Valider » après avoir fourni les données nécessaires pour le traitement du problème, le bouton « Calculer » sera activé. En cliquant sur ce dernier, les données seront traitées et affichés dans des tableaux (anglet Résultats), ou stockées en mémoire pour le traçage des graphes (anglet Graphes) selon le problème traité (Fig. 4.2).

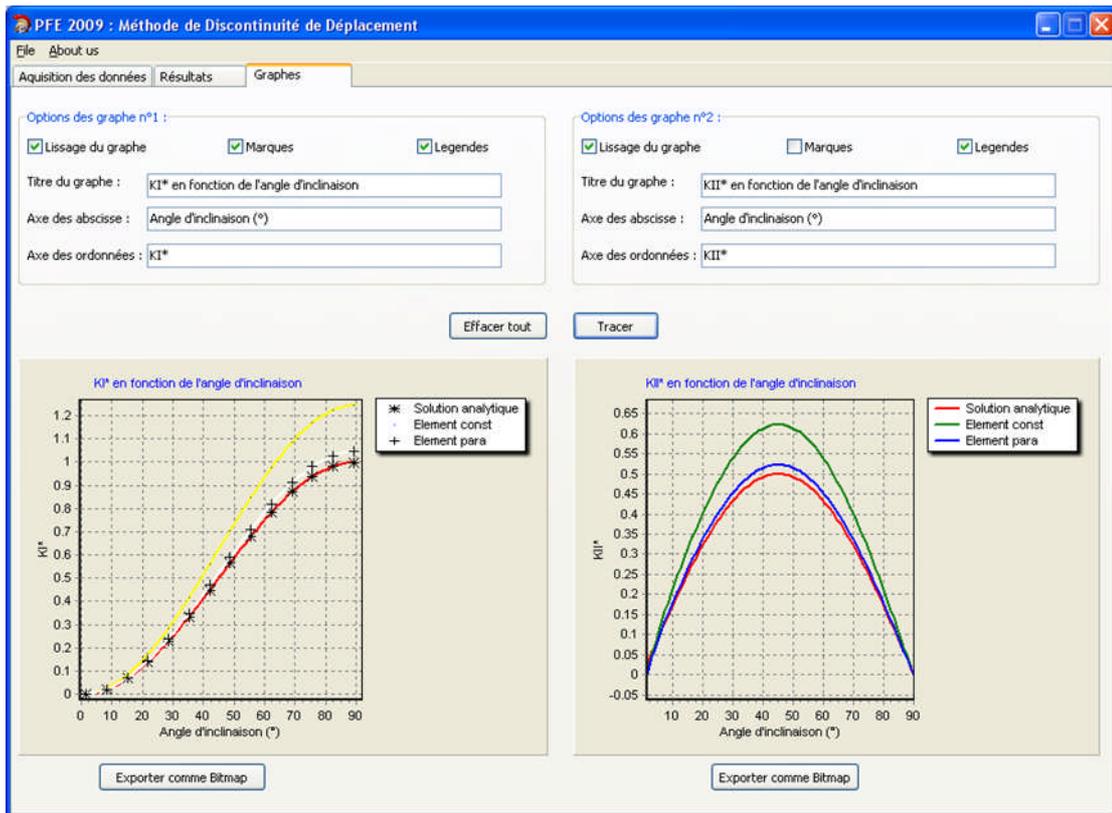


Fig. 4.2 Interface d'affichage des résultats sous des graphes.

Quelques soit le type des résultats (tableaux ou graphes), des éléments d'exportation des résultats au-delà de l'application sont fournis ; soit en format image *Bitmap* pour le cas des graphes ou en un fichier *Excel* pour les tableaux, dans le but de faciliter leur exploitation.

IV.3 La POO dans notre programme

Les possibilités de POO de C++ reposent sur le concept de classe. En C++, on définit d'abord une classe puis on déclare des objets instances de la classe.

Dans notre programme la POO apparaît au niveau des classes suivantes :

- **La classe *TMatrix* :**

Parmi les difficultés de programmation en C++, on cite la manipulation des tableaux, notamment leur envoi comme argument d'une fonction ou leur réception comme valeur de renvoi. Un autre problème est celui de la gestion de la mémoire par la déclaration statique des tailles des tableaux qui génère des erreurs de débordement ou juste occupe largement d'espace mémoire sans aucune utilité.

La classe *TMatrix* prend tout cela en considération. Par exemple, sa méthode *Extend(int ,int)* nous permet d'augmenter la taille de notre matrice ou tableau sans avoir écrasé ces valeurs initiales.

D'autres méthodes très intéressantes existent dans cette classe.

- **La classe *sChart* :**

Cette classe est responsable de la représentation graphique des résultats. Elle est envoyée comme argument de la fonction du traçage :

PlotXY2(int k,TMatrix X,TMatrix Y,TChart Chart1,sChart Plot1)

Où k : dimension des vecteurs X et Y

Chart1 : nom du composant TChart sous C++Builder où le graphe sera tracé.

Plot1 : est un objet de la classe sChart.

La fonction *PlotXY2()* fait elle aussi appel à d'autres fonctions comme la fonction de lissage du graphe par interpolation *PlotXY_Interp2()*.

En résumé, nous pouvons dire : bien que la création de ces classes et fonctions ne fût pas facile et pris beaucoup de temps, leur utilisation finale nous a facilités le contrôle du programme et la gestion de ces résultats. De plus, elle nous a fourni une bibliothèque intéressante qui peut être exploitée dans d'autres travaux.

Exemples, Résultats Et Interprétations

- 1- Introduction
- 2- Exemples et interprétations
- 3- Conclusion

V.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons mettre la théorie en pratique en traitant quelques exemples en mécanique de la rupture qui peuvent être simulés numériquement par la méthode des discontinuités de déplacements (MDD) en bidimensionnel en utilisant l'application réalisée pour ce but.

Nous avons pris un exemple pour chaque type de domaine traité (infini, semi-infini et fini).

V.2 Exemples et interprétations

V.2.1 Domaine infini : Fissure inclinée dans un plan infini sous une traction

Nous allons exécuter le programme en variant l'angle d'inclinaison β de la fissure, par rapport à la traction, entre 90° et 0° . Les données sont inscrites sur la figure 5.1.

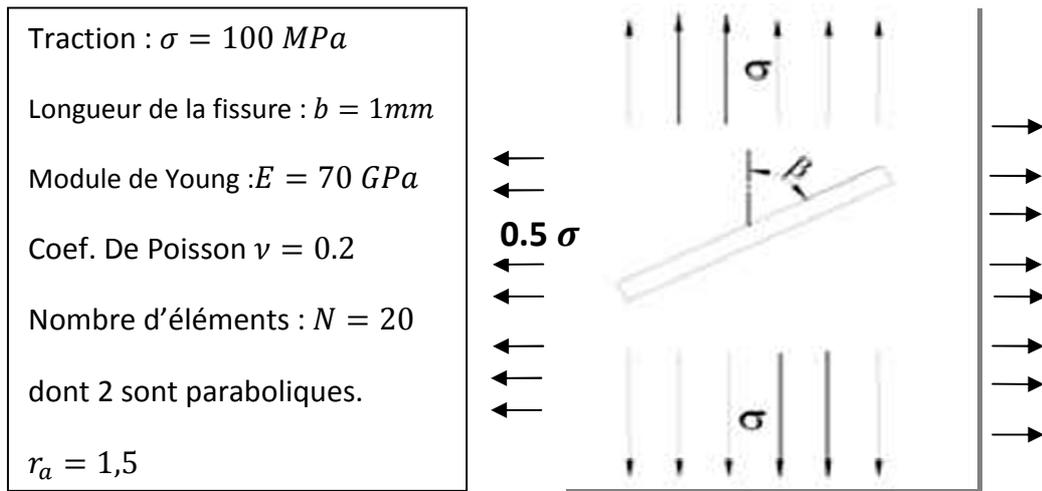


Fig. 5.1 Fissure inclinée dans un plan infini sous une traction.

Les facteurs d'intensité de contraintes sont donnés analytiquement par [19] :

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = \sin \beta \sqrt{\pi b} \begin{bmatrix} \sigma \sin \beta \\ \sigma \cos \beta \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

On définit les facteurs d'intensité de contraintes normalisés K_I^* et K_{II}^* comme suit :

$$K_I^* = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi b}} \text{ et } K_{II}^* = \frac{K_{II}}{\sigma \sqrt{\pi b}} \quad (5.2)$$

Les résultats d'exécution sont donnés sous forme de graphe (Fig. 5.2) et (Fig. 5.3).

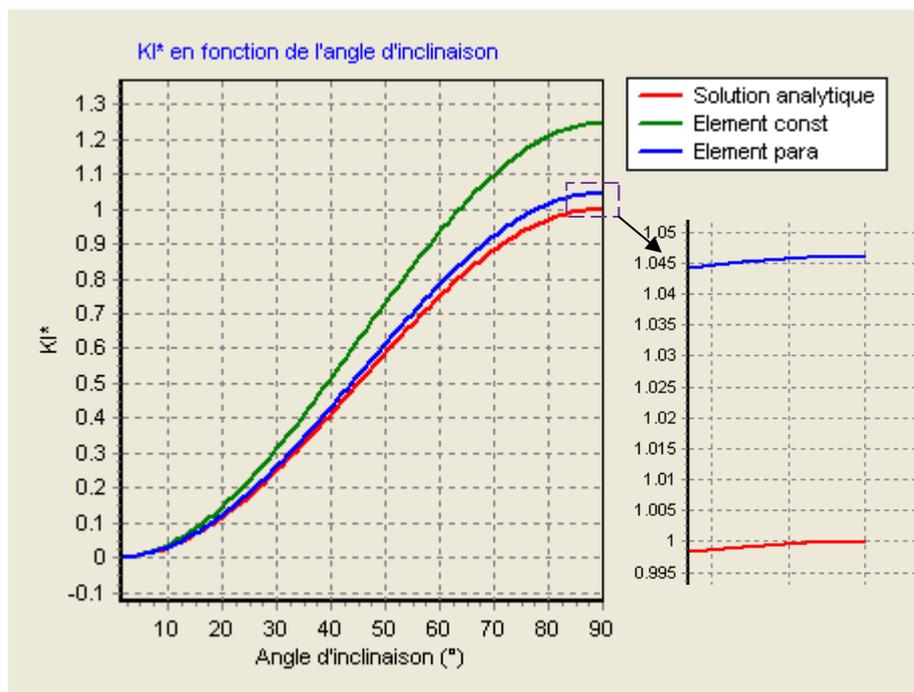


Fig. 5.2 K_{I}^ en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure.*

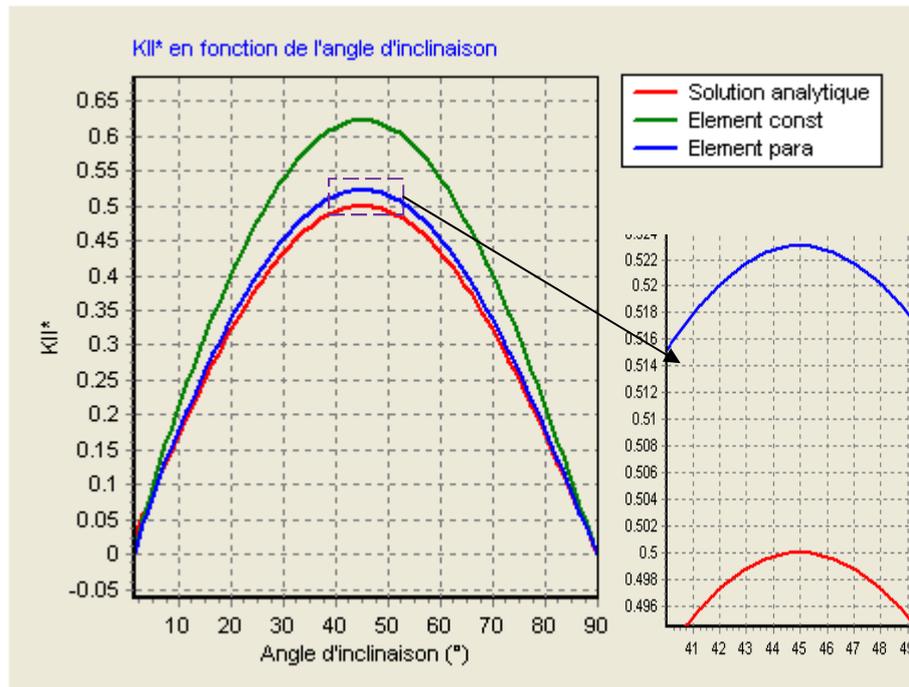


Fig. 5.3 K_{II}^ en fonction de l'angle d'inclinaison de la fissure.*

D'après les graphes, on constate que les résultats numériques sont comparables aux résultats analytiques notamment pour le cas du couplage entre l'élément constant et l'élément bout de fissure parabolique où l'erreur relative ε est de l'environ de **4,5%**.

V.2.2 Domaine semi-fini : Fissure dans un domaine semi-infini

Le programme réalisé ne prend en charge que les problèmes des domaines infinis ou finis, mais nous pouvons ajuster le problème d'un domaine semi-infini en un domaine fini avec des dimensions suffisamment grandes par rapport à celles de la fissure. Pour un exemple, nous allons exécuter le programme pour le cas d'une fissure débouchant dans une plaque semi-infinie, sous une traction à l'infini et un cisaillement τ (voir Fig. 5.2).

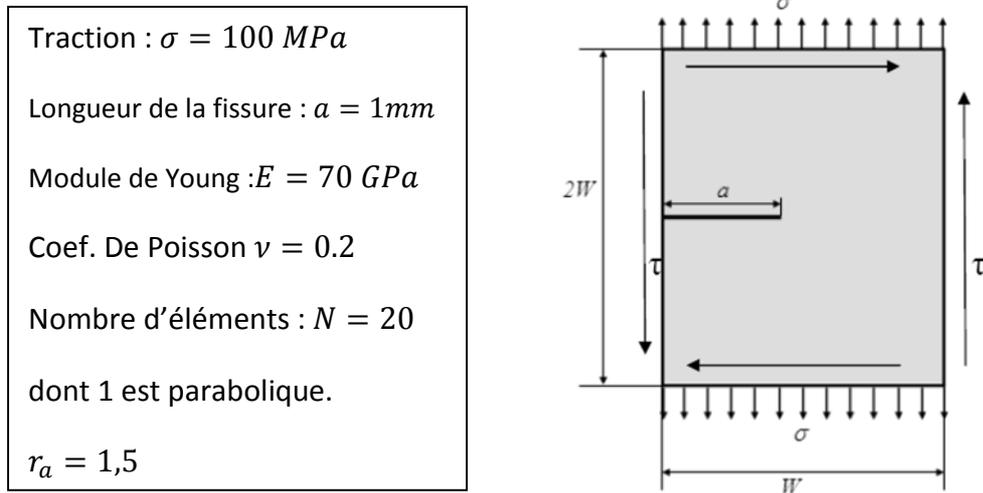


Fig. 5.4 Fissure débouchant dans un domaine semi-infini sous une traction

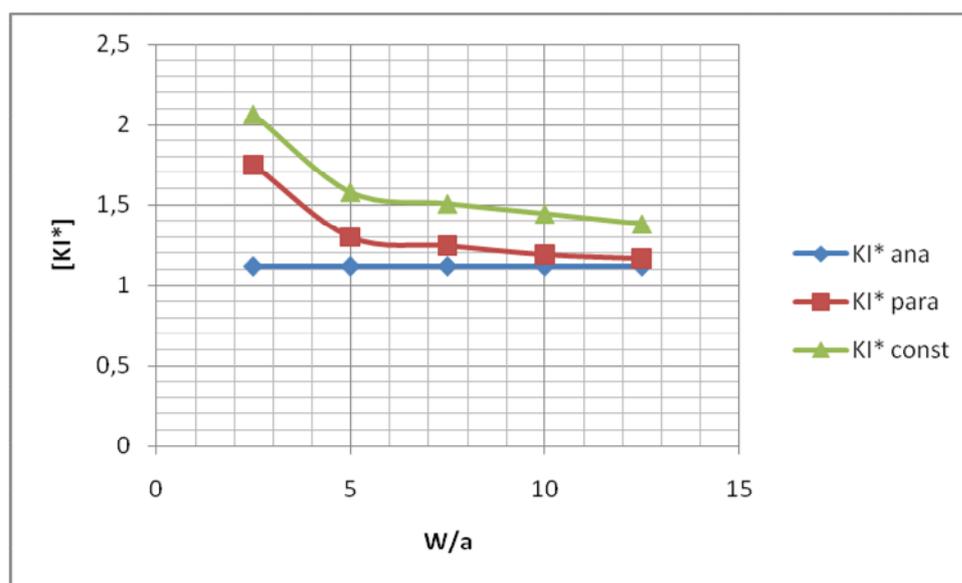
Les facteurs d'intensité de contraintes sont donnés analytiquement par [19] :

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} = 1.1215 \sqrt{\pi a} \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Nous avons exécuté le programme pour différentes valeurs du rapport W/a et pour une discrétisation de 20 éléments pour la fissure. Et nous avons calculé les erreurs relatives par rapport à la solution analytique. Les résultats obtenus sont représentés par le tableau 5.1 et le graphe de la figure 5.5.

Tab. 5.1 Facteurs d'intensité de contraintes normalisés en fonction du W/a

W/a	$[K_I^*]^{ana}$	$[K_I^*]^{para}$	$[K_I^*]^{const}$	$\varepsilon^{para}(\%)$	$\varepsilon^{const}(\%)$
2,5	1,1215	1,7469	2,0689	55,76	84,47
5	1,1215	1,3014	1,5812	16,04	40,98
7,5	1,1215	1,2488	1,5095	11,35	34,59
10	1,1215	1,1941	1,4483	6,47	29,13
12,5	1,1215	1,1698	1,3845	4,30	23,45

**Fig. 5.5 Facteurs d'intensité de contraintes normalisés en fonction du W/a**

D'après les résultats obtenus, nous constatons que les valeurs des coefficients d'intensité de contraintes normalisés calculés numériquement convergent vers la solution analytique lorsqu'on augmente les dimensions de la plaque par rapport à la taille de la fissure notamment pour l'élément parabolique où l'erreur relative ε^{para} est de l'ordre de **4,3 %**, mais cela nécessite un grand nombre d'éléments de frontière.

V.2.3 Domaine fini : Fissure dans une plaque circulaire sous une traction radiale

Dans cet exemple, on applique la méthode de discontinuité de déplacement à une fissure dans une plaque finie soumise à une traction radiale (Fig. 5.6).

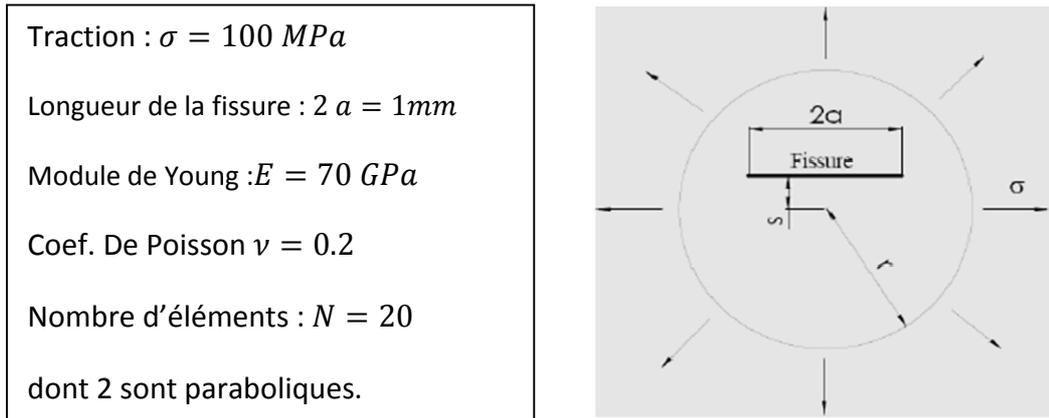


Fig. 5.6 Fissure dans une plaque circulaire soumise à une traction radiale.

Nous allons étudier les influences des dimensions de la plaque (i.e. r) et la taille et la position de la fissure dans cette plaque circulaire (i.e. s et a).

La fissure sera divisé à 20 éléments incluant 2 éléments paraboliques avec $r_a = 1.5$, et la plaque circulaire sera discrétisée uniformément (les bons résultats sont obtenus pour de grands nombres de divisions).

Le tableau ci-dessous (Tab. 5.2), représente les influences des rapports a/r et s/r sur les coefficients d'intensité de contraintes normalisées K_I^* et K_{II}^* calculés numériquement pour un couplage entre l'élément constant et l'élément parabolique.

Tab. 5.2 Facteurs d'intensité de contraintes normalisés en fonction de a/s et a/s

a/s	s/r	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,1	K_I^*	1,0024	1,0101	1,0594	1,1284	1,2098	1,3901
	K_{II}^*	-0,0000	-0,0000	-0,0009	-0,0022	-0,0089	-0,0124
0,2	K_I^*	1,0031	1,0153	1,0649	1,1449	1,2113	1,4237
	K_{II}^*	-0,0000	-0,0001	-0,0013	-0,0098	-0,0174	-0,0329
0,6	K_I^*	1,0041	1,0485	1,1132	1,3245	1,4899	1,8988
	K_{II}^*	-0,0000	-0,0011	-0,0109	-0,0789	-0,1584	0,0000
0,7	K_I^*	1,0053	1,0701	1,2487	1,5463	1,9015	2,3129
	K_{II}^*	-0,0000	-0,0113	-0,0489	-0,1123	-0,3177	-0,6115

Nous remarquons, d'après les résultats obtenus, que le coefficient d'intensité de contraintes normalisé K_I^* augmente en augmentant le rapport s/r c'est-à-dire en se rapprochant des frontière de la plaque circulaire.

V.3 Conclusion

D'après les résultats obtenus dans ce chapitre, nous pouvons dire que l'application de la méthode de discontinuité de déplacement pour l'étude des structures fissurées quelque soit son type (infinies, semi-finies et finies) est bien convenable notamment quand on a intégré l'élément parabolique qui a apporté une bon amélioration aux résultats.

Conclusion Générale

Les résultats de l'étude que nous avons abordée dans ce travail nous a permis de conclure que la méthode de discontinuité de déplacement est un bon atout pour l'étude des problèmes de l'élasticité en mécanique de la rupture notamment après avoir couplé l'élément parabolique avec l'élément constant ; ce qui a conduit à la convergence de résultats numériques aux bouts de fissure.

L'étude est faite en modes I, II et en mode mixte I-II dans les trois types de domaines : infini, semi-fini et fini. La méthode de discontinuité de déplacement, une des méthodes des éléments de frontière, est favorisée dans les problèmes des domaines infinis là où les méthodes de maillage trouvent une difficulté de discrétisation de toute la surface.

Le code de calcul établi en langage C++ en utilisant la programmation orientée objet, nous a permis de fournir une bonne bibliothèque, dans le domaine du calcul numérique, qui peut être dorénavant exploitée pour bien faciliter les tâches de programmation numérique. Ce code est représenté sous forme graphique ce qui permet de faciliter énormément l'acquisition des données et la consultation de résultats sous forme de graphes ou tableaux selon le cas étudié.

Nous espérons que les prochains projets incorporant des parties numériques soient faits par la programmation orientée objet pour permettre la continuité de ce genre de travaux.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. A. L. Boukhalkhal (2006) «Extension de la Méthode de discontinuité de Déplacement pour la Simulation de la Rupture dans les Multicouches». Thèse de Magister, E.N.P., Alger.
- [2]. Cornet F.H. (1977) «Comparative analysis by displacement discontinuity method of two energy criteria of fracture»- J. of Appli. Mech., N°79, APM-25, pp. 1-6.
- [3]. Crouch S.L. (1976) «Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method ». Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 10, pp. 301-343.
- [4]. Crouch S.L., Starfield A.M. (1983) « Boundary Element Method in Solid Mechanics with Application in Rock Mechanics and Geological Mechanics ». Allen et Unwin, London-Boston.
- [5]. Cruse T.A., VanBuren W. (1971) « Three dimensional elastic stress analysis of fracture specimen with edge crack»- Int. J. of Fracture, Vol. 7, N°1.
- [6]. Daux C., Moes N., Dolbow J., Sukumar N. Belytschko T. (2000) « Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method ». Int. J. Num. Meth. Eng., 48, pp. 1741-1760.
- [7]. B.K. Hachi (2000) «Contribution à l'application de la méthode de discontinuité de déplacement (MDD) en tri-dimensionnel », Thèse de Magister, E.N.P., Alger
- [8]. Jawson M.A. (1963) « Integral equation in potential theory I »- Proceeding of the Royal Society, 275, pp. 23-32.
- [9]. Lachat J.C., Watson J.O. (1976) «Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three dimensional elasto-statics»- Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 991-105.
- [10]. Rizzo F.J. (1967) « An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics »- Quarterly of applied mathematics, 25, pp. 83-95.

- [11]. Rizzo F.J., Shippy D.J. (1977) «An advanced boundary integral equation method for three dimensional thermo-elasticity»- Int. J. for NUM. Meth. In Eng., Vol. 11, pp. 1753-1768.
- [12]. M. Sahnoun (1994) «Description de chemins de propagation droits et curvilignes de fissure par la méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe» Thèse de Magister, E.N.P., Alger
- [13]. Shou K.J., Crouch S.L. (1995) «A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems». Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 32, No. 1, pp 49-55.
- [14]. Sym G.T. (1963) «Integral equation methods in potential theory II»- Proceeding of the Royal Society, 275, pp. 33-46.
- [15]. Xiao Q.Z., Karihaloo B.L, Liu X.Y. (2004) « Direct determination of SIF and higher order terms of mixed mode cracks by a hybrid crack element ». Int. J. of Fracture, 125, pp. 207-225.
- [16]. Yan X. (2006) « *Multiple crack fatigue growth modeling by displacement discontinuity method with crack-tip elements* ». Applied Mathematical Modelling 30, pp. 489–508.
- [17]. Clément LEMAIGNAN (2003) « *La rupture des matériaux* ». EDP Sciences.
- [18]. Perez N. (2004) « Fracture mechanics ». Kluwer Academic Publishers.
- [19]. Barthélémy B. (1980) « Notions pratiques de mécanique de la rupture ». Edition Eyrolles.
- [20]. Leblond J.B (2003) « Mécanique de la rupture fragile et ductile ». Hermès science publications.
- [21]. A. ZEGHLOUL (2003) « concept fondamentaux de la mécanique de la rupture ». Université de Medz.
- [22]. Erdogan F, Sih G.C, (1963) « on the crack extension in plates under plane loading and transverse shear». Journal of basic engineering, transition of ASME 85,519-527.

Annexe A

ANNEXE A.

Les dérivées de l'intégral I_c de l'élément bout de fissure

$$I_c = \int \xi^{0.5} \ln ((x - \xi)^2 + y^2)^{0.5} d\xi$$

$$I_{c,x} = \int \frac{\xi^{0.5}(x - \xi)}{((x - \xi)^2 + y^2)} d\xi = xA_1 - A_2$$

$$I_{c,y} = \int \frac{\xi^{0.5} y}{((x - \xi)^2 + y^2)} d\xi = yA_1$$

$$I_{c,xy} = \int \frac{-2 \xi^{0.5} y(x - \xi)}{((x - \xi)^2 + y^2)} d\xi = -2yA_{22}$$

$$I_{c,xx} = \int \frac{-\xi^{0.5} y}{((x - \xi)^2 + y^2)} d\xi + \frac{2 \xi^{0.5} y^2}{((x - \xi)^2 + y^2)^2} d\xi = -A_1 + 2y^2 A_{21}$$

$$I_{c,xyy} = \int \frac{-2 \xi^{0.5}(x - \xi)}{((x - \xi)^2 + y^2)^2} + \frac{8 \xi^{0.5} y^2 (x - \xi)}{((x - \xi)^2 + y^2)^3} d\xi = -2A_{22} + 8y^2 A_{32}$$

$$I_{c,yyy} = \int \frac{-6 \xi^{0.5} y}{((x - \xi)^2 + y^2)^2} + \frac{8 \xi^{0.5} y^3}{((x - \xi)^2 + y^2)^3} d\xi = -6A_{21} + 8y^3 A_{31}$$

Où

$$A_1 = \rho^{-1} \left[\frac{0.5 \left(\cos\varphi - \left(\frac{x}{y}\right) \sin\varphi \right) \ln (\xi - 2\xi^{0.5} \rho \cos\varphi + \rho^2)}{(\xi + 2\xi^{0.5} \rho \cos\varphi + \rho^2) + \left(\sin\varphi + \left(\frac{x}{y}\right) \cos\varphi \right) \cdot \arctang \left(\frac{2\xi^{0.5} \rho \sin\varphi}{\rho^2 - \xi} \right)} \right]$$

$$A_2 = \rho \left[\frac{0.5 \left(\cos\varphi + \left(\frac{x}{y}\right) \sin\varphi \right) \ln (\xi - 2\xi^{0.5} \rho \cos\varphi + \rho^2)}{(\xi + 2\xi^{0.5} \rho \cos\varphi + \rho^2) + \left(-\sin\varphi + \left(\frac{x}{y}\right) \cos\varphi \right) \cdot \arctang \left(\frac{2\xi^{0.5} \rho \sin\varphi}{\rho^2 - \xi} \right)} \right]$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/4} \text{ and } \varphi = 0.5 \arctang \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$A_{21} = \frac{0.5 \rho^{\frac{3}{2}} (x\xi - x^2 + y^2)}{(y^2(x^2 + y^2))((x - \xi)^2 + y^2)} + \frac{0.25(-xA_2 + (3x^2 + y^2)A_1)}{y^2(x^2 + y^2)}$$

$$A_{22} = \frac{0.5 \rho^{\frac{3}{2}} (2x - \xi)}{(y^2(x^2 + y^2))((x - \xi)^2 + y^2)} + \frac{0.25(A_2 - 2xA_1)}{(x^2 + y^2)}$$

$$A_{22} = \frac{0.5 \rho^{\frac{3}{2}}(2x - \xi)}{(y^2(x^2 + y^2))((x - \xi)^2 + y^2)} + \frac{0.25(A_2 - 2xA_1)}{(x^2 + y^2)}$$

$$A_{31} = \frac{0.25 \rho^{\frac{3}{2}}(x\xi - x^2 + y^2)}{(y^2(x^2 + y^2))((x - \xi)^2 + y^2)^2} + \frac{0.125(-3xA_{22} + (6x^2 + 5y^2)A_{21})}{(y^2(x^2 + y^2))}$$

$$A_{32} = \frac{0.25 \rho^{\frac{3}{2}}(2x - \xi)}{(x^2 + y^2)((x - \xi)^2 + y^2)^2} + \frac{0.125(3A_{22} - xA_{21})}{(x^2 + y^2)}$$