



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

Département Génie Mécanique

LABORATOIRE DE GÉNIE MÉCANIQUE ET DÉVELOPPEMENT

MÉMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Construction Mécanique

Etudié par :

Ahmed Lamine BOUKHALKHAL

Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique – ENP.

Thème

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT POUR LA SIMULATION DE LA RUPTURE DANS LES MULTICOUCHES

Soutenu le : 02/05/2006

Devant le jury :

Président :	Pr. Saïd RECHAK	Professeur	E.N.P
Directeur de recherche :	Dr. Yacine BELKACEMI	Chargé de cours	E.N.P
Examineurs :	Dr. Med Amine BELOUHRANI	Maître de Conférence	E.M.P
	Dr. Krimo AZOUAOUI	Maître de Conférence	USTHB
	M. Youcef BENHALIMA	Chargé de cours	E.N.P

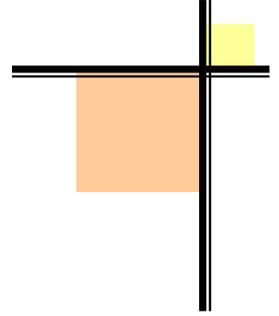
DÉDICACES

*Je dédie ce travail à mes parents qui j'espère
trouveront ici le fruit de leurs amours et leurs
souffrances pour moi ;*

A mes frère et mes sœurs ;

*A tous ce qui ont vécu avec moi les pires et
heureux moments de ma vie.*

Remerciements



ON REMERCIE DIEU, TOUT PUISSANT DE NOUS AVOIR DONNÉ LE COURAGE ET LA CAPACITÉ D'ARRIVER À CE STADE DU SAVOIR ET DE PRÉSENTER CE MODESTE TRAVAIL.

JE TIENS PARTICULIÈREMENT À EXPRIMER, À TRAVERS CES QUELQUE LIGNES, TOUTE MA GRATITUDE ET MON PROFOND RESPECT À MON PROMOTEUR : DR Y. BELKACEMI, POUR LEUR SUIVI PERMANENT ET SURTOUT L'IMMENSE PATIENCE.

JE REMERCIE ÉGALEMENT L'ENSEMBLE DES MEMBRES DU JURY QUI M'ONT FAIT L'HONNEUR DE BIEN VOULOIR ACCEPTER D'EXAMINER ET ÉVALUER MON TRAVAIL.

MES MEILLEURS SENTIMENTS VONT AUSSI AUX MEMBRES DE MA FAMILLE, DONT LA PRÉSENCE À MES COTÉS, ET LE SOUTIEN CONSTANT, SURTOUT PENDANT LES MOMENTS DIFFICILES, M'A PERMIS D'ACHEVER CE TRAVAIL.

Enfin, JE REMERCIE TOUX CEUX QUI ONT CONTRIBUÉS À LA FINALISATION DE CETTE THÈSE, TOUT EN PARTICULIÈREMENT : A. MOURAD, B. JAMEL, R. ATIA, B. FATEH, B. MOHAMED, L. KAMEL, ...

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة الأوساط متعددة الطبقات و المشققة بواسطة طريقة الانتقالات غير المستمرة في الأوساط ثنائية الأبعاد. في بداية الأمر قمنا بتحويل الصيغة الرياضية لهذه الطريقة إلى الصيغة العددية، ثم قمنا بإنجاز برنامجا حسابيا يمكننا من حساب مجال الاجهادات والانتقالات و كذا معامل شدة الاجهادات بالنسبة لهذه الأوساط و معامل ارجاع الطاقة و انتقال التشققات.

كلمات مفتاحية : ميكانيك التشققات، الشق، طريقة الانتقالات غير المستمرة، معامل شدة الاجهادات، معامل ارجاع الطاقة، انتقال الشق.

ABSTRACT

This work consists to study the crack bimaterial problems with the displacement discontinuity method for two-dimensional.

First, we change the mathematical formulation of the method in the numerical procedure, and construction of the computer program. With this program we determine the stress intensity factors and the crack propagation in this problems.

Key word : fractures mechanics, crack, Displacement Discontinuity Method, Stress intensity factor, energy restoration ration, crack propagation.

RESUME

Ce travail porte sur la modélisation des problèmes des multi-couches fissurés par la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel.

On fait la mise en forme de la procédure numérique a partir de la formulation mathématique, ensuite l'élaboration d'un code de calcul. Avec ce code, on peut déterminer le facteur d'intensité de contrainte et le trajectoire de propagation d'une fissure pour ces problèmes.

Mots clés : Mécanique de la rupture, fissure, Méthode de discontinuité de déplacement, Facteur d'intensité de contrainte, taux de restitution d'énergie, propagation d'une fissure.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
-----------------------------	---

CHAPITRE I	NOTIONS SUR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE
I.1. Introduction.....	5
I.2. Notions préliminaires sur la mécanique de la rupture.....	6
I.2.1. Notions & hypothèses.....	6
I.2.2. Modes fondamentaux de rupture.....	6
I.2.3. Champ de contraintes et champ de déplacement.....	7
I.3. Facteur d'intensité de contrainte (approche locale).....	9
I.4. Théorie énergétique de Griffith (approche globale).....	9
I.5. Relation entre G et K	11
I.6. Propagation d'une fissure	11
I.6.1. Critère de la contrainte tangentielle maximale	11
I.6.2. Critère du taux de restitution d'énergie maximum	12
I.7. Problème de fissuration dans les multicouche	12
I.7.1. Calcul de facteur d'intensité de contrainte FIC	13

CHAPITRE II	MÉTHODE DE DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT
II.1. Introduction.....	17
II.2. Principe de la méthode de discontinuité de déplacement.....	18
II.3. Procédure de le MDD dans un solide infini.....	18
II.4. Procédure numérique.....	20
II.5. Transformation de coordonnées.....	22
II.6. Coefficients d'influence.....	23
II.7. Application de la MDD au bi-matériaux	26
II.7. Calcul numérique de facteur d'intensité de contrainte	30
II.7. Calcul numérique de G	31

CHAPITRE III	EXEMPLES, RÉSULTATS & INTERPRÉTATIONS
III.1. Introduction.....	33
III.2. Structure de programme.....	33
III.3. Exemples traites	36
Première catégorie d'exemples (matériaux monocouche).....	36
Deuxième catégorie d'exemples (matériaux multicouche)	44

CONCLUSION GÉNÉRALE.....	56
--------------------------	----

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE.

Automobiles, tracteurs, camions, trains, avions, ponts, centrales nucléaires, ... notre quotidien est peuplé de machines et de structures diverses qui ont des cycles de vie variables. La mise hors services prématurée de certaines d'entre elles peut mettre en jeu des vies humaines, impliquer des coûts économiques élevés, et avoir des répercussions importantes sur l'environnement.

Depuis plus d'un demi siècle, les ingénieurs sont de plus en plus conscients du besoin d'évaluation plus précise des contraintes locales dues aux irrégularités géométriques (défauts, fissures, inclusions, ...). Pour atteindre la fiabilité et pour éviter des ruptures aux conséquences graves, l'ingénieur doit être persuadé de l'importance des concentrations de contraintes provoquées par de telles irrégularités.

Dans le domaine aéronautique par exemple, la rupture des matériaux a toujours représenté une menace sérieuse pour la sécurité des avions. En effet, même si à ce jour, le problème de rupture par fatigue semble être bien maîtrisé, l'accident du Boeing 737 de la compagnie Aloha Airlines en 1988 (Fig.A) nous rappelle que cette menace est toujours d'actualité. L'enquête a révélé que la jonction soudaine d'un grand nombre de fissures initiées dans une rangée de fixations (phénomène de la multi-fissuration) était à l'origine de cet accident [1].

Le calcul consiste à trouver les paramètres mécaniques influents sur la fissure. Dans ces calculs, nous considérons des structures bidimensionnelles et nous supposons le comportement linéaire de ces dernières, vu que dans la plupart des cas pratiques, elles travaillent dans le domaine élastique. Dans le cas de multi-matériaux fissurés, nous nous intéresserons particulièrement au calcul du facteur d'intensité de contrainte. Le traitement des propagations des fissures sera gouverné par le calcul du taux de restitution d'énergie G .



Fig.A. Accident du Boeing 737 d'Aloha Airlines (avril 1988)

Deux principales méthodes numériques sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de structures en mécanique : la méthode des éléments finis [2] et la méthode des équations intégrales de frontière [3]. Fréquemment, nous relevons des études comparatives de l'efficacité de la méthode des éléments finis par rapport à la méthode des équations intégrales et nous relevons que l'on oppose l'une par rapport à l'autre.

Chacune des deux méthodes numériques a ses avantages. Cependant, la méthode des équations intégrales offre des avantages certains dans des configurations de problèmes dont :

- La résolution en domaines infinis.
- La résolution de problèmes de corps fissurés.

Le dernier domaine d'application en tridimensionnel reste un champ d'étude en cours de développement.

Historiquement, la méthode des éléments de frontières appelée aussi méthode des équations intégrales a été développée de deux manières distinctes. L'une des deux est une approche plus mathématique. Elle est basée sur certains théorèmes fondamentaux qui relient directement les inconnues du contour aux conditions limites. Cette approche est appelée la Méthode des Equations Intégrales Directes. L'autre approche est une approche

physique intuitive, qu'on appelle la méthode des discontinuités de déplacements [3-5]. Cette approche consiste à chercher en premier lieu les valeurs des perturbations fictives dont les effets sur le contour sont les conditions aux limites spécifiées, ensuite à calculer le reste des inconnues du contour comme étant les effets de ces perturbations "fictives" en ces points. Puisque les inconnues du contour sont obtenues indirectement, cette approche est appelée la Méthode des Equations Intégrales Indirectes (la Méthode des discontinuités de déplacements). C'est celle la qui est adoptée pour notre étude.

La formulation de la méthode des discontinuités de déplacements (MDD) est due à « Crouch (1976 & 1983) » [3,6]. Bien que la méthode de discontinuité de déplacement puisse être appliquée aux problèmes aux limites. Elle est particulièrement approprié aux problèmes de fissuration, parce qu'elle calcule directement les discontinuités de déplacements normales et tangentielles qui résultent des conditions de frontière donnés[7]. Cette contribution a permis d'assurer une plus grande popularité de la méthode et a pu être utilisée dans la modélisation de problème de contact de failles [8], ruptures autour de cavités [9], pour les champ complexes [10], calcul des facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte [11], modélisation de tête de la fissure (crack tip) [12], l'analyse des fissures soumises aux contraintes de compression normaux [13] et l'analyse de contraintes dans les multicouches [14].

L'objectif du présent travail de recherche est la mise au point d'un code de calcul basé sur la méthode des discontinuités de déplacements pour l'étude de fissuration dans les plaques monocouches et multicouches, autour de défaut et d'inclusion, et la simulation de la propagation des fissures.

Nous avons décomposé notre document en 3 parties :

La première partie est une introduction à la mécanique de la rupture.

La deuxième partie, on présente la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel et l'extension de la méthode pour les multicouches.

Enfin, la troisième partie est consacrée à l'organisation du programme qui traite ces problèmes et comporte les exemples traités, leurs résultats et interprétations.

NOTIONS SUR
LA MÉCANIQUE
de LA RUPTURE

CHAPITRE I

NOTIONS SUR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE

I.1. INTRODUCTION.

Une pièce de machine de construction ou un organe soumis à des sollicitations mécaniques, thermiques ou chimiques..., peut conduire à sa détérioration.

Le calcul de ces pièces a le plus souvent pour objet de prévenir les déformations importantes et est en général fondées sur la théorie de l'élasticité et la résistance des matériaux.

Ces calculs supposent tous que les matériaux sont parfaitement continus, sans lacune ou fissure.

Néanmoins, on a aussi observé des ruptures soudaines en domaine élastique. On a constaté qu'on trouvait toujours à l'origine d'une rupture un défaut, lacune ou fissure, à différentes échelles.

La mécanique de la rupture est une philosophie de conception visant à développer un critère de ruine et une science de l'étude du comportement de structures fissurées [15].

On constate deux approches d'analyse utilisées en mécanique de la rupture :

1. L'analyse du champ des contraintes en tête de fissure, c'est l'approche par les facteurs d'intensité de contraintes dite «approche locale».

2. L'analyse énergétique proposée par « GRIFFITH 1920 » qui procède par le calcul de l'énergie disponible pour la propagation de fissure dans la structure, cette énergie dépend du potentiel total du système « *le taux de restitution d'énergie* ».

Dans ce chapitre on va définir des notions et des hypothèses sur la mécanique de la rupture. On définit les modes régissant les cinétiques des fissures en trois dimensions et sur les équations concernant le champ de déformations et de contraintes au voisinage du front de fissure. On met en évidence la notion des facteurs d'intensité de contraintes K , taux de restitution d'énergie G et les conditions de propagation des fissures.

I.2. NOTIONS PRELIMINAIRES SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE.

I.2.1. NOTIONS & HYPOTHESES.

On considère une fissure plane ayant un front rectiligne (Fig.I.1). Celle-ci correspond à une discontinuité de déplacement. Nous formulons trois hypothèses importantes :

- 1- Le matériau est supposé homogène et isotrope, avec un comportement élastique linéaire.
- 2- On néglige les forces de volume et les accélérations (la rupture est supposée statique).
- 3- On se restreint aux problèmes plans (bidimensionnels).

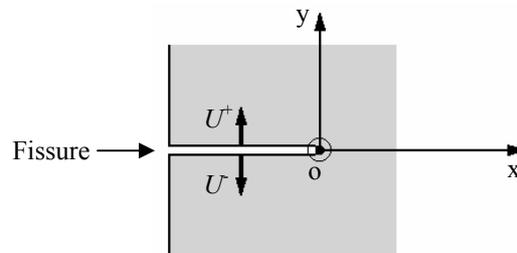


Fig. I.1. Notations pour une fissure plane.

I.2.2. MODES FONDAMENTAUX DE RUPTURE.

On définit trois modes de déplacement des bords d'une fissure (Fig.I.2) :

Pour les problèmes plans :

- **Mode I (ouverture) :** La sollicitation est perpendiculaire au plan de la fissure (Fig.I.2a). Ce mode est souvent le plus dangereux.
- **Mode II (glissement plan) :** La sollicitation est un cisaillement dans le plan de la fissure dont l'action est perpendiculaire au front de la fissure (Fig.I.2b).

Pour les problèmes anti-plan :

- **Mode III (glissement anti-plan) :** La sollicitation est un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle au front de la fissure (Fig.I.2c)

Ce dernier mode est résolu par une représentation 3D anti-plan tandis que les deux précédents sont résolus par une analyse 2D en contrainte ou en déformation plane.

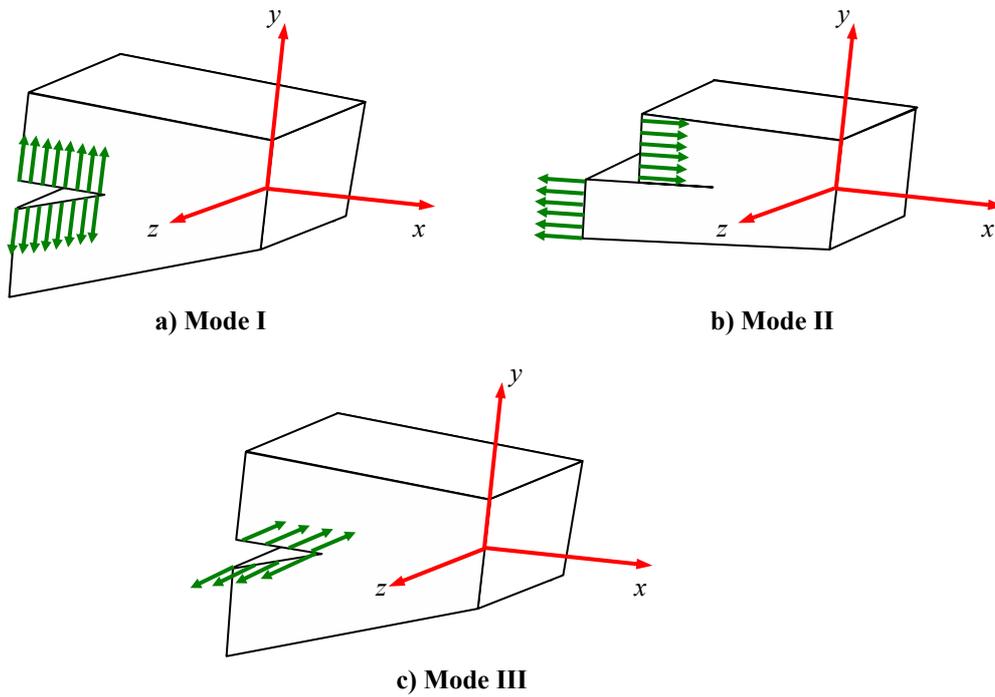


Fig. I.2. Modes fondamentaux de rupture.

I.2.3. CHAMP DE CONTRAINTES ET DE DEPLACEMENTS AU BOUT DE LA FISSURE.

Ces contraintes au voisinage du front de fissure ont été calculées par Irwin [15,16] à l'aide de la théorie de l'élasticité.

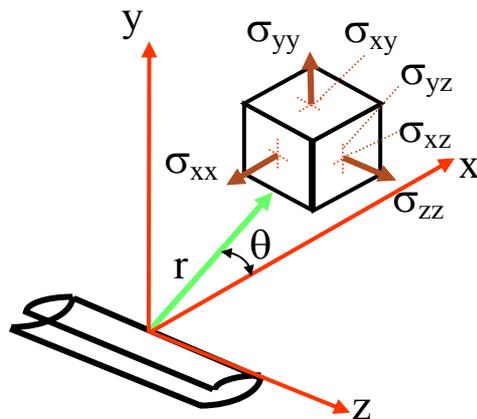


Fig. I.3. Champ de contraintes et de déplacements au voisinage de la tête de fissure.

- Mode I :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad , \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \\
 U_x &= \frac{K_I}{G'} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\
 U_y &= \frac{K_I}{G'} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu - \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\
 U_z &= 0 \quad (\text{déformation plane}).
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

- Mode II :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_x - \sigma_y) \quad , \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \\
 U_x &= \frac{K_{II}}{G'} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 U_y &= \frac{K_{II}}{G'} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 U_z &= 0 \quad (\text{déformation plane}).
 \end{aligned} \tag{I.2}$$

- Mode III :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad , \quad \sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\
 \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \\
 U_z &= \frac{K_{III}}{G'} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\
 U_x &= U_y = 0
 \end{aligned} \tag{I.3}$$

ν est le coefficient de Poisson et G' est le module d'élasticité de cisaillement.

avec $G' = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Les facteurs K_I , K_{II} et K_{III} sont exprimés en $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$. Ils sont appelés facteurs d'intensité de contraintes. Ces paramètres dépendant uniquement des conditions de chargement et de géométrie.

I.3. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE (APPROCHE LOCALE).

Le facteur d'intensité de contrainte est un paramètre couramment utilisé pour caractériser la singularité du champ de contrainte au voisinage de la tête de la fissure. Ces facteurs sont proportionnels à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure [17].

Les facteurs d'intensité de contraintes de fissure sont définis en utilisant la méthode de Westergaard [17] :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_y] \right) \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yx} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_x] \right) \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yz} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_z] \right)
 \end{aligned}
 \tag{I.4}$$

D'autres méthodes en déterminent le facteur d'intensité de contrainte comme la technique utilisant la fonction de Green [18].

I.4. THEORIE ENERGETIQUE DE GRIFFITH (APPROCHE GLOBALE).

Vers 1920, Griffith fut le premier à proposer une théorie fondée sur la compétition entre l'énergie élastique restituée lors de l'avancée de la fissure et l'énergie dissipée sous forme de création de nouvelles surfaces [19,20].

Considérons le système de la figure (Fig.I.4). Il s'agit d'un système fermé n'échangeant ni chaleur; ni travail avec l'extérieur constitué par la pièce fissurée et les forces qui lui sont appliquées. On suppose toujours que le matériau a un comportement élastique linéaire.

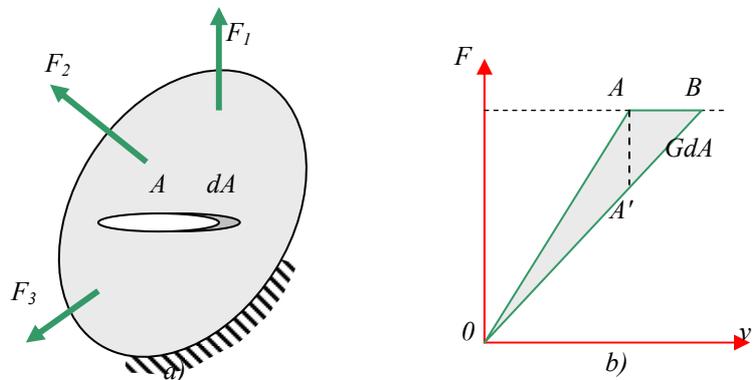


Fig. I.4. Taux de libération d'énergie.

L'énergie constante de ce système comprend l'énergie potentielle des forces appliquées, U , l'énergie élastique emmagasinée, E , l'énergie de surface $2A\gamma_s$ où A est la surface de la fissure qui comporte deux lèvres et enfin, éventuellement l'énergie cinétique W_C . Le premier principe indique que :

$$dU + dE + d(2A)\gamma_s + dW_C = 0 \quad (I.5)$$

Nous posons $dP = dU + dE$, P désignant l'énergie potentielle totale $U + E$. la relation précédente devient :

$$dP + 2\gamma_s dA + dW_C = 0 \quad (I.6)$$

G est défini par : $G = -\frac{\partial P}{\partial A}$, soit encore :

$$G = 2\gamma_s + \frac{dW_C}{dA} \quad (I.7)$$

$$\text{A l'équilibre, au repos, } dW_C = 0 \text{ donc : } G = G_C = 2\gamma_s \quad (I.8)$$

Si G dépasse ce seuil critique, la fissure se propage.

On va maintenant calculer G en fonction de champs de déplacements et de contraintes sur les frontières du domaine fissuré.

Considérons le problème plan en élasticité linéaire. On impose sur la frontière Ω_T du domaine fissuré, des forces surfaciques T_i , et sur la partie complémentaire Ω_U , les déplacements u_i .

G s'écrit sous la forme [17] :

$$G = -\frac{\partial W_C}{\partial A} + \int_{\Omega_T} T_i \frac{du_i}{dA} d\Gamma \quad (I.9)$$

Appliquons le principe des travaux virtuels (ici à des déplacement réels) à W_C en négligeant les effets dynamiques :

$$\frac{\partial W_C}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega_U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(T_i \frac{du_i}{dA} + u_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (I.10)$$

d'où :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(T_i \frac{du_i}{dA} - u_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (I.11)$$

I.5. RELATION ENTRE G ET K.

Le facteur d'intensité des contraintes décrit la distribution des contraintes et des déformations près d'une fissure. Il est intuitif de penser que le taux de libération d'énergie, G , sera une grandeur très sensible à la singularité des contraintes. Nous allons montrer qu'en fait les deux quantités K et G sont liés [19].

Quand la fissure se propage dans sa propre direction, le taux de restitution d'énergie est donné par [20] sa forme générale :

$$* \text{ En déformation plane : } G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (\text{I.12})$$

$$* \text{ En contrainte plane : } G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (\text{I.13})$$

I.6. PROPAGATION D'UNE FISSURE.

Lorsqu'une fissure est sollicitée en mode mixte, on observe généralement une bifurcation qui se caractérise par un changement de la direction de propagation. Si l'on se contente de la prédiction de l'angle de bifurcation, le seul élément théorique requis est le critère de propagation fournissant cet angle. On présentera dans ce qui suit les deux principaux critères utilisés dans le cas de matériaux élastiques isotropes :

I.6.1. CRITERE DE LA CONTRAINTE TANGENTIELLE MAXIMALE.

Le critère le plus simple à utiliser est celui d'Erdogan et Sih [21], qui stipule que la direction de propagation est celle dans laquelle la contrainte normale est maximale $\sigma_{\theta\theta\max}$ (le cisaillement $\sigma_{r\theta}$ est nul).

Au voisinage du fond de fissure (Fig.I.5), les champs de contraintes sont donnés en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \\ \sigma_{r\theta}(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \theta \left[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

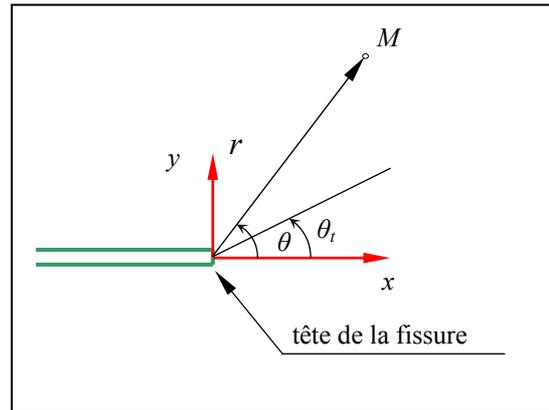


Fig.I.5. Repère cartésien et polaire en tête de la fissure

L'angle de bifurcation θ_i correspond alors à ce que l'on ait :

$$K_I \sin \theta_i + K_{II} (3 \cos \theta_i - 1) = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$\text{où} \quad \tan \frac{\theta_i}{2} = \frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (\text{I.16})$$

$$\text{avec la condition} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2}$$

I.6.2. CRITERE DU TAUX RESTITUTION D'ENERGIE MAXIMUM.

Hussain, Pu & Underwood [22] présentent en 1974 le critère du taux de restitution d'énergie maximum G_{\max} en utilisant les invariants intégraux.

On peut réaliser une série de calculs sur des fissures branchées d'un angle θ , la branche ayant une longueur constante Δa , suffisamment petite. Dans chaque cas, $G(\theta)$ est calculé. Notons qu'il est nécessaire de résoudre indépendamment chaque cas de fissure branchée. La direction de bifurcation est celle qui rend $G(\theta)$ maximum.

I.7. PROBLEMES DE FISSURATION DANS LES MULTICOUCHES.

Avec l'augmentation exigée sur les nécessités multifonctionnelles (usure, corrosion, résistance thermique et dureté...) dans les domaines mécaniques, aérospatial et les applications biomédicales..., le développement des systèmes matériels multicouches est venu au premier rang [23].

Des travaux importants ont été consacrés pour le développement de mécanique de la rupture dans les multicouches. L'analyse des problèmes d'une fissure perpendiculaire à l'interface d'un bi-matériau a été analysée la première fois par Zak et Williams [24].

Un certain nombre d'études ont été établies pour les problèmes de fissuration aux interfaces entre deux milieux élastiques linéaires et isotropes [25-27], la fissuration de l'interface due à un chargement en mode I et II [28], et deux matériaux anisotropes [29-32].

Toutes les études citées ci-dessus sont presque toutes au sujet des problèmes de fissuration à l'interface traitées dans les corps infini. Des solutions analytiques pour les solides finis sont disponibles. Dans des applications de technologie, on doit traiter de petits corps, particulièrement où l'interaction d'une fissure et une interface dans un solide bi-matériau.

I.7.1. CALCUL DE FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE DANS UN MATERIAU MULTICOUCHES.

On considère trois couches symétriques de largeur finie avec une fissure située dans la couche intermédiaire, comme représenté sur la figure (Fig.I.6). Les contraintes au bout de la fissure sont exprimées, d'après Westergaard [33] comme suit:

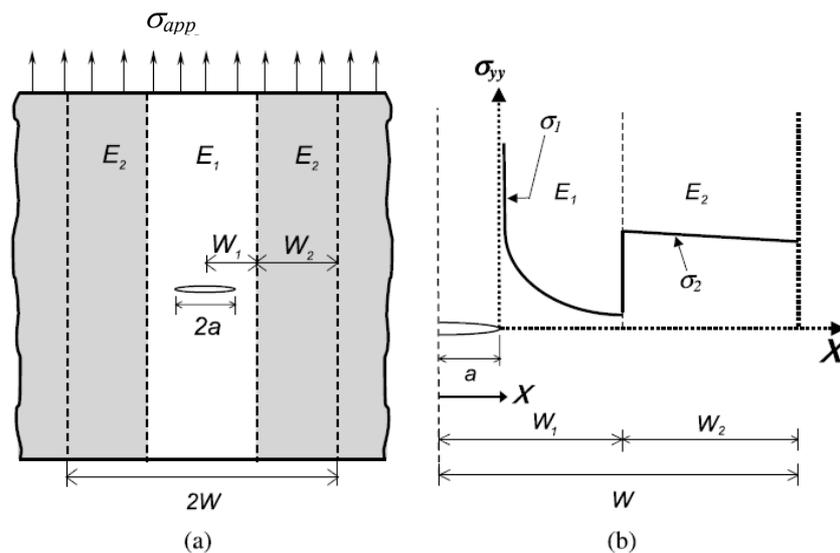


Fig. I.6. Une fissure dans un matériau multicouche perpendiculaire à l'interface.

$$\sigma_{yy,1} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \quad \text{pour } a \leq x \leq W_1 \quad (\text{I.17})$$

$$\text{et : } \sigma_1 = \sigma_{app} \frac{E_1}{E_c} \quad (\text{I.18})$$

avec E_1 et E_c sont les modules de Young pour la première couches et du stratifié, respectivement. Le module du stratifié, E_c est donné par :

$$E_c = E_1 \left(\frac{W_1}{W} \right) + E_2 \left(\frac{W_2}{W} \right) \quad (\text{I.19})$$

Si les couches sont déformées suivant la direction de la charge appliquée, alors :

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{E_2}{E_1} \quad (\text{I.20})$$

Si on suppose que la distribution des contraintes normales au bout de la fissure dans la couche intermédiaire est amplifiée par l'augmentation du module Young de la deuxième couche, alors $\sigma_{yy,2}$ peut être écrite :

$$\sigma_{yy,2} = \left(\frac{E_2}{E_1} \right) \frac{\sigma_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \quad \text{pour } W_1 \leq x \leq W_2 \quad (\text{I.21})$$

Dans l'équation (I.21), σ_1 est utilisée comme une contrainte appliquée équivalente à la distribution des contraintes de Westergaard, puisque sous le chargement uniforme, la distribution de σ_{yy} dans la deuxième couche sera élevée par un facteur de E_2/E_1 , relativement à celui dans la couche intermédiaire.

La condition d'équilibre [33] s'exprime par :

$$\sigma_{app} W = \int_a^{W_1} \frac{\sigma_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} dx + \int_{W_1}^W \left(\frac{E_2}{E_1} \right) \frac{\sigma_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} dx \quad (\text{I.22})$$

Selon la définition du facteur d'intensité de contrainte [16], le facteur K_I en tête de la fissure dans la première couche est :

$$K_I = \sigma_1 \sqrt{\pi a} \quad (\text{I.23})$$

A l'aide des équations (I.22) et (I.23), nous pouvons déduire :

$$K_I = \frac{\sigma_{app} \sqrt{\pi a W}}{\left[\int_a^{W_1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} dx + \int_{W_1}^W \left(\frac{E_2}{E_1}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} dx \right]} \quad (I.24)$$

$$\text{où : } K_I = \frac{\sigma_{app} \sqrt{\pi a}}{\left[\left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \sqrt{\left(\frac{W_1}{W}\right)^2 - \left(\frac{a}{W}\right)^2} + \left(\frac{E_2}{E_1}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a}{W}\right)^2} \right]} \quad (I.25)$$

L'équation (I.25) est la solution approximative de facteur d'intensité de contrainte pour la fissure dans la couche moyenne du stratifié de trois couches, et est applicable à toutes les longueurs de la fissure.

MÉTHODE
de DISCONTINUITÉ
de DÉPLACEMENT

CHAPITRE II

MÉTHODE DE DISCONTINUITÉ DE DÉPLACEMENT

II.1. INTRODUCTION.

Pour approcher les solutions analytiques aux problèmes de mécanique des fluides, mécanique des solides, celle de la rupture, l'élastostatique et autres, souvent difficiles à déterminer par une résolution directe des équations différentielles, plusieurs méthodes numériques ont été mises en place où l'on peut noter la méthode des éléments finis et la méthode des différences finis.

Néanmoins, l'apparition d'une nouvelle technique, la Méthode des Eléments de Frontières (BEM), généralement connue sous le nom de la Méthode des Equations Intégrales de Frontières, ne cesse elle aussi de s'illustrer par sa simplicité et sa variété d'application.

Au contraire de la méthode des éléments finis qui nécessite une discrétisation totale du domaine en éléments, qui devient très compliqué lorsqu'il s'agit d'un domaine infini, la BEM se limite seulement à une subdivision de la frontière en éléments joints les uns aux autres (Fig.II.1).

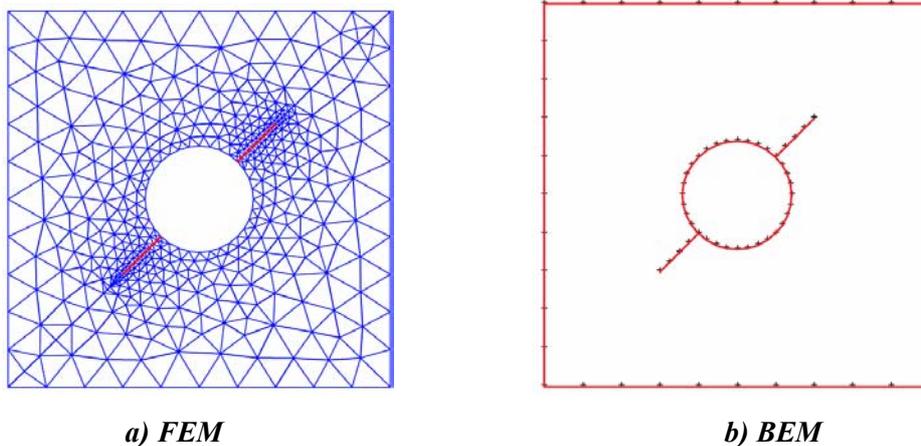


Fig.II.1. Méthode de discrétisation

Cette méthode (BEM) a été développée suivant deux approches l'une d'elles est d'origine mathématique basée sur des théorèmes classiques de la théorie du potentiel d'où le nom de Méthode Directe. L'autre approche est physique et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités, placées tout au long du contour discrétisé en segments de droites, et de là, calculer les paramètres aux limites désirés, cette méthode est connue sous le nom de Méthode Indirecte.

Deux formulations indirectes existent, soient la Méthode des Contraintes Fictives (MCF) et la Méthode de Discontinuité de Déplacement (MDD), ont été développées par Crouch et Starfeild en 1983 pour étudier les solides continus ou fissurés dans des problèmes géomécaniques [3].

II.2. PRINCIPE DE LA METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT (MDD).

Une discontinuité de déplacement peut être visualiser comme étant une fissure droite (rectiligne) composée de deux surfaces (lèvres) disjointes, se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre.

La méthode de discontinuité de déplacement se base sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité de déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini. Elle consiste à diviser (discrétiser) le segment de droite en une série de N éléments reliés les uns aux autres. Ainsi et connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donné, en sommant les effets de tous les éléments [3].

II.3. PROCEDURE DE LA MDD DANS UN SOLIDE INFINI.

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite dans le plan x, y d'un solide infini est spécifié par la condition que le déplacement soit continu partout sauf sur le segment en question (soit la partie $-a < x < a$, pour $y=0$) (voir Fig.II.2).

Si on considère ce segment comme une fissure droite on peut distinguer ses deux surfaces en disant que l'une des surfaces est sur le côté positif de $y = 0$, noté $y = 0^+$ et que l'autre est sur le côté négatif de $y = 0$, noté $y = 0^-$.

En passant d'un côté à l'autre du segment le déplacement subit un élément constant désigné par $D_i = (D_x, D_y)$, on définit la discontinuité de déplacement D_i comme la différence de déplacement entre les deux côtés du segment :

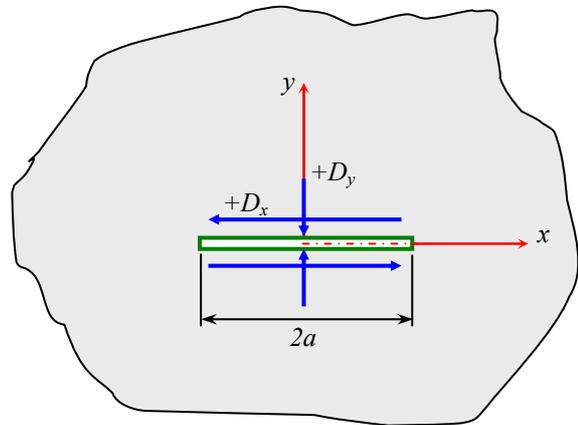


Fig.II.2. Discontinuité de déplacement

$$D_i = U_i(x,0^-) - U_i(x,0^+) \quad (II.1)$$

$$\text{ou } \begin{cases} D_x = U_x(x,0^-) - U_x(x,0^+) \\ D_y = U_y(x,0^-) - U_y(x,0^+) \end{cases} \quad (II.2)$$

La solution du problème posé en contraintes et en déplacements est donnée par Crouch (1976a,b) [6] :

$$\begin{aligned} U_x &= D_x [2(1-\nu)f_{,y} - \nu f_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - \nu f_{,xy}] \\ U_y &= D_x [(1-2\nu)f_{,x} - \nu f_{,xy}] + D_y [2(1-\nu)f_{,y} - \nu f_{,yy}] \end{aligned} \quad (II.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G'D_x [2f_{,xy} + \nu f_{,xyy}] + 2G'D_y [f_{,yy} + \nu f_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2G'D_x [-\nu f_{,xyy}] + 2G'D_y [f_{,yy} - \nu f_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2G'D_x [f_{,yy} + \nu f_{,yyy}] + 2G'D_y [-\nu f_{,xyy}] \end{aligned} \quad (II.4)$$

$$\text{avec : } G' = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right. \\ \left. - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \end{aligned} \quad (II.5)$$

Ces équations forment la base de la méthode de discontinuité de déplacement.

Les dérivées de fonction $f(x,y)$ dans les équations (II.3) et (II.4) sont obtenues directement à partir de l'équation (II.5).

Les déplacements le long de la droite $y = 0$ sont :

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{-1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \end{aligned} \quad (II.6)$$

Les valeurs des limites des termes en arctangent sont les suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, \quad y = 0 \\ +\pi & |x| < a, \quad y = 0^+ \\ -\pi & |x| < a, \quad y = 0^- \end{cases} \quad (II.7)$$

On peut considérer trois cas pour évaluer les déplacements le long de la ligne $y = 0$:

1) $|x| > a$ et $y = 0$

$$\begin{aligned} U_x(x,0) &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x,0) &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

2) $|x| < a$ et $y = 0^+$

$$\begin{aligned} U_x(x,0^+) &= -\frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x,0^+) &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2} D_y \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

3) $|x| < a$ et $y = 0^-$

$$\begin{aligned} U_x(x,0^-) &= \frac{1}{2} D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x,0^-) &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2} D_y \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Les déplacements U_x et U_y sont continus pour $|x| > a$ et $y = 0$, mais ont une discontinuité constante $+D_x$ et $+D_y$ pour $|x| < a$, les contraintes le long de la ligne $y = 0$, d'après l'équation (II.4) peuvent être évaluées comme suite :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x,0) &= -\frac{G'}{2\pi(1-\nu)} D_y \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = -\frac{aG'}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2-a^2} \\ \sigma_{yy}(x,0) &= -\frac{aG'}{\pi(1-\nu)} D_y \frac{1}{x^2-a^2} \\ \sigma_{xy}(x,0) &= -\frac{aG'}{\pi(1-\nu)} D_x \frac{1}{x^2-a^2} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Il est facile de vérifier que les contraintes sont continues partout sur $y = 0$ sauf pour $x = \pm a$ où on note une discontinuité et une singularité due à la présence du terme $1/(x^2-a^2)$.

II.4. PROCEDURE NUMERIQUE.

La MDD est un moyen de trouver une approximation de la distribution régulière du déplacement et de contraintes.

Pour une généralisation de cette procédure numérique, on considérera un ensemble de N segments de droites, parfaitement reliés les uns aux autres et formant une

courbe quelconque comme représenté dans la figure (FigII.3). La longueur de chacun de ces segments est notée par $2a^i$

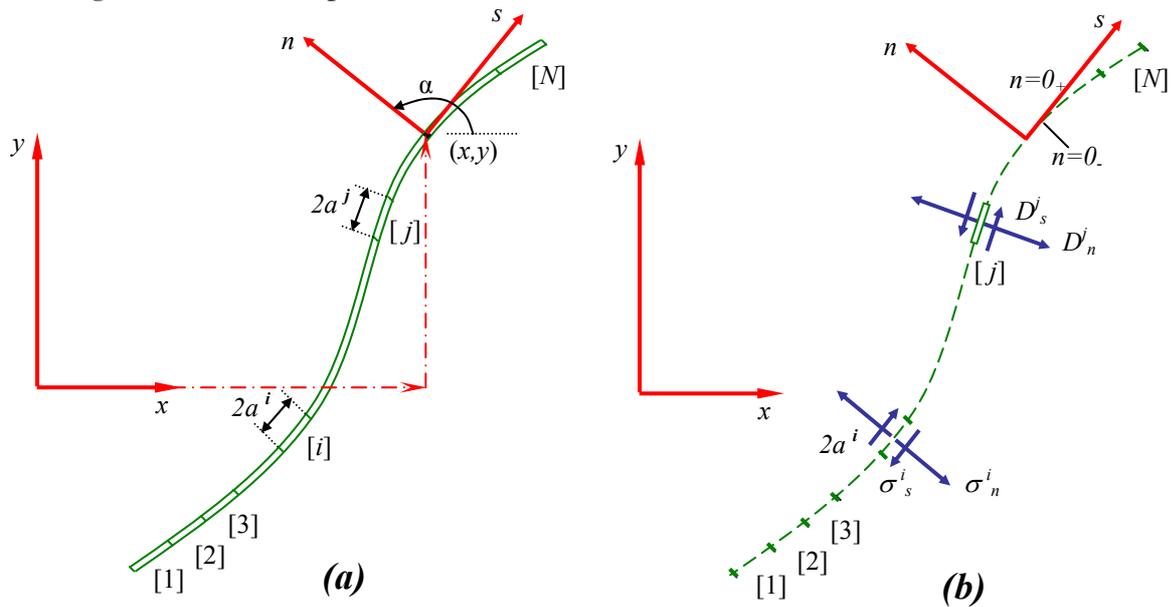


Fig.II.3 Représentation d'une fissure quelconque en N segments

Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local s, n comme le montre la figure (Fig.II.3.b) de l'élément j et dont les composantes D_s^j et D_n^j sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} D_s^j &= U_s^- - U_s^+ \\ D_n^j &= U_n^- - U_n^+ \end{aligned} \tag{II.12}$$

Où : U_s^j et U_n^j sont les déplacements normaux et tangentiels de l'élément j .

Les contraintes normales et tangentielles au milieu de l'élément i peuvent être exprimées en fonction des composantes de discontinuité de déplacement de l'élément j comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i = 1, N \tag{II.13}$$

Remarque : Les effets d'une discontinuité de déplacement élémentaire sur les contraintes et les déplacements d'un point arbitraire du corps peuvent être calculés d'après les résultats fournis par la section (II.3).

En utilisant le principe de superposition, et ainsi tenant compte de l'effet de N éléments (discontinuités) on obtient le champ de contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i = 1, N \quad (II.14)$$

de la même manière, on établit le champ de déplacements :

$$\begin{aligned} U_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ U_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i = 1, N \quad (II.15)$$

ou : $A_{ss} \dots$ sont les coefficients d'influences relatifs aux contraintes sur la frontière et $B_{ss} \dots$ sont les coefficients d'influences relatifs aux déplacements sur la frontière.

En spécifiant les valeurs des contraintes σ_s^i et σ_n^i pour chaque élément, on aura alors un système de $2N$ équations linéaires à $2N$ inconnues, à savoir les composantes D_s^i et D_n^i des discontinuités de déplacements élémentaires. Une fois ces équations résolues, on peut exprimer les contraintes et les déplacements en chaque point du domaine par d'autres combinaisons linéaires des discontinuités de déplacements en utilisant la même procédure que précédemment.

(*) Il faut noter que la même procédure peut être suivi dans le cas où les éléments joints les uns aux autres forment un contour fermé (par exemple cas d'une cavité).

(*) Les conditions aux limites peuvent être en contraintes comme elles peuvent en déplacements ou les deux cas à la fois.

II.5. TRANSFORMATION DE COORDONNEES.

Les coefficients d'influences dans l'équation (II.14) et (II.15) sont développées pour le problème pour une discontinuité de déplacement constante avec une orientation arbitraire d'un segment dans un solide infini.

La méthode de discontinuité de déplacement est basée essentiellement sur la connaissance des coordonnées des points à

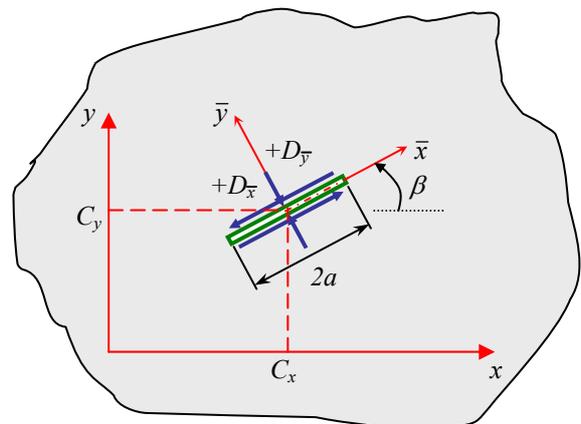


Fig.II.4. Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire.

étudier par rapport au repère local de chaque segment et l'orientation de ce repère par rapport au repère global.

Les coordonnées locales (\bar{x}, \bar{y}) sont obtenues par une translation et une rotation par rapport au repère global (x,y) de système. Les composantes de translation sont C_x et C_y suivant x,y respectivement, tandis que la rotation est définie par l'angle β positif dans le sens trigonométrique.

Les expressions de transformation de coordonnées sont :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - C_x) \cos \beta + (y - C_y) \sin \beta \\ \bar{y} &= -(x - C_x) \sin \beta + (y - C_y) \cos \beta\end{aligned}\tag{II.16}$$

Les déplacements et les contraintes dans les systèmes de coordonnée locale sont retrouvés en remplaçant (x,y) par (\bar{x}, \bar{y}) dans les équations (II.3) et (II.4), avec :

$$\begin{aligned}f(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{F}_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{x}} = \bar{F}_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{y}} = \bar{F}_3(\bar{x}, \bar{y}) \\ f_{,\bar{xy}} &= \bar{F}_4(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{xx}} = -f_{,\bar{yy}} = \bar{F}_5(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{yyy}} = \bar{F}_6(\bar{x}, \bar{y}) \\ f_{,\bar{yyy}} &= \bar{F}_7(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}$$

Les coordonnées des déplacements et de contraintes dans le repère globale (x,y) de système, sont :

$$\begin{aligned}U_x &= D_{\bar{x}} \left[-(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_{\bar{y}} \left[-(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right] \\ U_y &= D_{\bar{x}} \left[(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_{\bar{y}} \left[-(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right]\end{aligned}\tag{II.17}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2G' D_{\bar{x}} \left[2 \cos^2 \beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ &\quad + 2G' D_{\bar{y}} \left[-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ \sigma_{yy} &= 2G' D_{\bar{x}} \left[2 \sin^2 \beta \bar{F}_4 - \sin 2\beta \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ &\quad + 2G' D_{\bar{y}} \left[-\bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ \sigma_{xy} &= 2G' D_{\bar{x}} \left[\sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ &\quad + 2G' D_{\bar{y}} \left[-\bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right]\end{aligned}\tag{II.18}$$

On peut utiliser ces équations pour calculer les coefficients d'influence de la MDD.

II.6. COEFFICIENTS D'INFLUENCE.

On considère un domaine infini contenant N segments de droites orientés dans des directions arbitraires par rapport au repère global (x,y) . On considère deux élément

distincts « i » et « j » reliés chacun à un repère local $\begin{pmatrix} x^i & y^i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x^j & y^j \end{pmatrix}$ respectivement, et orientés de β^i et β^j (Voir Fig.II.5).

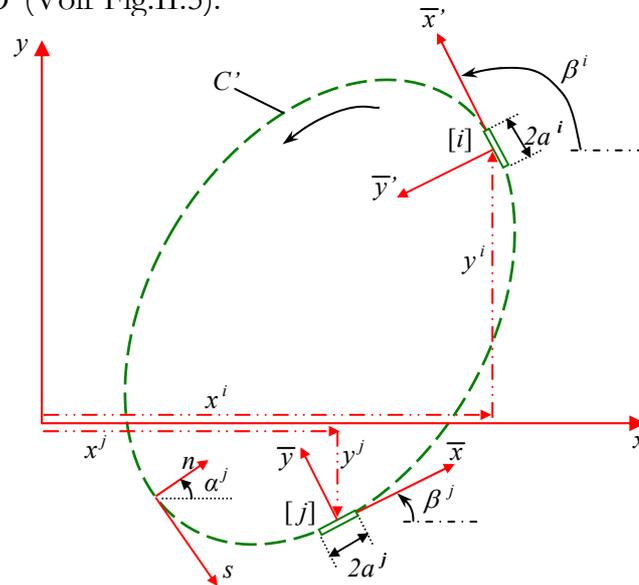


Fig.II.5. Position et orientation des éléments limites

Les coordonnées locales (\bar{x}, \bar{y}) dans les équations (II.17) et (II.18) représentent celles du point (x, y) par rapport au milieu de l'élément i :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x - x^j) \cos \beta^j + (y - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x - x^j) \sin \beta^j + (y - y^j) \cos \beta^j \end{aligned} \tag{II.19}$$

Les déplacements et les contraintes en ce point dus aux discontinuités de déplacements sur les N éléments sont obtenus par la sommation des contributions de chaque élément.

En choisissant le point (x, y) comme étant le milieu de l'élément i , c'est-à-dire $x = x^i$ et $y = y^i$, l'équation (II.19) devient :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x^i - x^j) \cos \beta^j + (y^i - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x^i - x^j) \sin \beta^j + (y^i - y^j) \cos \beta^j \end{aligned} \tag{II.20}$$

Les composantes de déplacements et de contraintes relativement en repère local au point « i » sont x' , y' . Les deux repères locaux de l'élément i et l'élément j sont reliés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x} \cos \gamma + \bar{y} \sin \gamma \\ \bar{y}' &= -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma \end{aligned} \tag{II.21}$$

ou $\gamma = \beta^j - \beta^i$ (orientation de l'élément j par rapport au l'élément i).

Les déplacements et les contraintes seront :

$$\begin{aligned} \overset{i}{U}_{\bar{x}'} &= \overset{i}{U}_{\bar{x}} \cos \gamma + \overset{i}{U}_{\bar{y}} \sin \gamma \\ \overset{i}{U}_{\bar{y}'} &= -\overset{i}{U}_{\bar{x}} \sin \gamma + \overset{i}{U}_{\bar{y}} \cos \gamma \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

$$\begin{aligned} \overset{i}{\sigma}_{\bar{x}'\bar{x}'} &= \overset{i}{\sigma}_{\bar{x}\bar{x}} \cos^2 \gamma + 2 \overset{i}{\sigma}_{\bar{x}\bar{y}} \sin \gamma \cos \gamma + \overset{i}{\sigma}_{\bar{y}\bar{y}} \sin^2 \gamma \\ \overset{i}{\sigma}_{\bar{y}'\bar{y}'} &= \overset{i}{\sigma}_{\bar{x}\bar{x}} \sin^2 \gamma - 2 \overset{i}{\sigma}_{\bar{x}\bar{y}} \sin \gamma \cos \gamma + \overset{i}{\sigma}_{\bar{y}\bar{y}} \cos^2 \gamma \\ \overset{i}{\sigma}_{\bar{x}'\bar{y}'} &= -\left(\overset{i}{\sigma}_{\bar{x}\bar{x}} - \overset{i}{\sigma}_{\bar{y}\bar{y}} \right) \sin \gamma \cos \gamma + \overset{i}{\sigma}_{\bar{x}\bar{y}} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Les coefficients d'influence pour les déplacements et les contraintes sont obtenues des systèmes des équations (II.17), (II.18), (II.22) et (II.23) après avoir posé :

$$\overset{j}{D}_s = \overset{j}{D}_{\bar{x}} \quad , \quad \overset{j}{D}_n = \overset{j}{D}_{\bar{y}} \quad , \quad \overset{i}{U}_s = \overset{i}{U}_{\bar{x}'} \quad , \quad \overset{i}{U}_n = \overset{i}{U}_{\bar{y}'} \quad , \quad \overset{i}{\sigma}_s = \overset{i}{\sigma}_{\bar{x}'\bar{y}'} \quad \text{et} \quad \overset{i}{\sigma}_n = \overset{i}{\sigma}_{\bar{y}'\bar{y}'}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \overset{i}{U}_s &= \overset{j}{D}_s \left[(1-2\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_3 - \bar{y} (\sin \gamma \cdot \bar{F}_4 + \cos \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + \overset{j}{D}_n \left[-(1-2\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \gamma \cdot \bar{F}_4 - \sin \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\ \overset{i}{U}_n &= \overset{j}{D}_s \left[(1-2\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \gamma \cdot \bar{F}_4 - \sin \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + \overset{j}{D}_n \left[(1-2\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_3 + \bar{y} (\sin \gamma \cdot \bar{F}_4 + \cos \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

$$\begin{aligned} \overset{i}{\sigma}_s &= 2G' \overset{j}{D}_s \left[-\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \cdot \bar{F}_5 - \bar{y} (\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \\ &\quad + 2G' \overset{j}{D}_n \left[-\bar{y} (\cos 2\gamma \cdot \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \\ \overset{i}{\sigma}_n &= 2G' \overset{j}{D}_s \left[2 \sin^2 \gamma \cdot \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \cdot \bar{F}_5 - \bar{y} (\cos 2\gamma \cdot \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \\ &\quad + 2G' \overset{j}{D}_n \left[-\bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

On peut écrire les équations (II.23) et (II.24) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \overset{i}{U}_s &= \sum_{j=1}^N \overset{ij}{B}_{ss} \overset{j}{D}_s + \sum_{j=1}^N \overset{ij}{B}_{sn} \overset{j}{D}_n \\ \overset{i}{U}_n &= \sum_{j=1}^N \overset{ij}{B}_{ns} \overset{j}{D}_s + \sum_{j=1}^N \overset{ij}{B}_{nn} \overset{j}{D}_n \end{aligned} \quad i = 1, N \quad (\text{II.25})$$

$$\begin{aligned} \overset{i}{\sigma}_s &= \sum_{j=1}^N \overset{ij}{A}_{ss} \overset{j}{D}_s + \sum_{j=1}^N \overset{ij}{A}_{sn} \overset{j}{D}_n \\ \overset{i}{\sigma}_n &= \sum_{j=1}^N \overset{ij}{A}_{ns} \overset{j}{D}_s + \sum_{j=1}^N \overset{ij}{A}_{nn} \overset{j}{D}_n \end{aligned} \quad i = 1, N \quad (\text{II.26})$$

*** Element « auto-influence » :**

Ce sont les termes diagonaux de la matrice des coefficients d'influences, sont données par :

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0 \quad , \quad B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \pm \frac{1}{2} \quad \text{pour } \bar{y} = 0^\pm$$

$$A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0 \quad , \quad A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = + \frac{G'}{\pi(1-\nu)^i a}$$

*** Conditions de symétrie :**

On parlera de symétrie pour un solide par rapport à un axe, quand les propriétés élastiques, la configuration géométrique et les conditions aux limites de ce solide sont toutes symétriques par rapport à cet axe.

L'utilisation de la symétrie pour la résolution des problèmes par la MDD est d'une extrême importance, quand on sait que le système d'équations est réduit de moitié (cas de la simple symétrie), ou de quart (cas de la double symétrie)

II.7. APPLICATION DE LA METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT

AUX BI-MATERIAUX .

Nous allons présenter un exemple simple de multi couches. On suppose que le corps à étudier est composé de deux milieux R_1 et R_2 présentes sur la figure (Fig.II.6). Chaque domaine est supposé isotrope, homogène et linéairement élastique avec des constantes élastiques ν_1, E_1 et ν_2, E_2 .

Les systèmes locaux des coordonnées sont associés aux deux contours, et sont directement opposés le long de l'interface, c'est-à-dire: $s_1 = -s_2$ et $n_1 = -n_2$. Pour la résolution de ce problème, on définit les conditions aux limites du problème dans le corps de la figure (Fig.II.6) par des conditions en déplacements et en contraintes pour la partie d'interface.

Ces conditions de continuités sont définies pour un point Q de l'interface par :

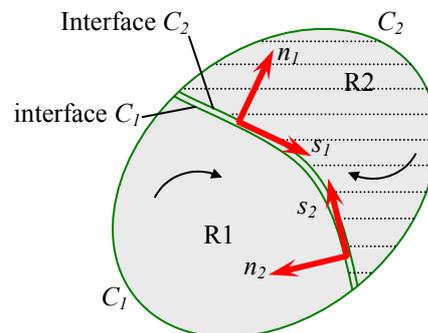


Fig.II.6. Corps non homogène comprenant 2 milieux

$$\begin{aligned} \sigma_s^{[1]}(Q) &= \sigma_s^{[2]}(Q) \\ \sigma_n^{[1]}(Q) &= \sigma_n^{[2]}(Q) \end{aligned} \tag{II.27}$$

et

$$\begin{aligned} u_s^{[1]}(Q) &= -u_s^{[2]}(Q) \\ u_n^{[1]}(Q) &= -u_n^{[2]}(Q) \end{aligned} \tag{II.28}$$

Les signes moins qui apparaissent dans l'équation (II.28) sont dûs à l'opposition des sens des systèmes s_1, n_1 et s_2, n_2 le long de l'interface.

On va utiliser la procédure numérique de la méthode des discontinuités de déplacements pour traiter le problème de la figure (Fig.II.6). Avec les deux milieux R_1 et R_2 , on aura deux problèmes qui sont liés entre eux par les conditions de continuités à l'interface. Comme on a déjà vu dans le cas monocouche, on va associer des discontinuités de déplacement D_s et D_n à chaque élément de C_1 et C_2 . Les déplacements et les contraintes dans le milieu R_1 sont donnés en fonction $D_s^{[1]}$ et $D_n^{[1]}$ des N_1 éléments du contour C_1 et les déplacements et les contraintes dans le milieu R_2 sont donnés en fonction $D_s^{[2]}$ et $D_n^{[2]}$ des N_2 éléments du contour C_2 .

Notre problème est de trouver les discontinuités de déplacements D_s et D_n dans chaque élément de frontière parmi les $N=N_1+N_2$ éléments, si les conditions aux limites et les conditions de continuités sont prêtes pour la construction du système algébrique d'équations pour ce problème composé. Il est préférable de numéroter les éléments de frontières de deux milieux consécutivement par le milieu R_1 de l'élément 1 jusqu'à l'élément N_1 le long de C_1 et pour le milieu R_2 de l'élément N_1+1 jusqu'à l'élément $N_1+N_2=N$ le long de C_2 . En se référant aux équations (II.14), les contraintes sur la frontière de R_1 peuvent être :

$$\begin{aligned} \sigma_s^{[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} A_{ss}^{ij(1)} D_s^{j(1)} + \sum_{j=1}^{N_1} A_{sn}^{ij(1)} D_n^{j(1)} \\ \sigma_n^{[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} A_{ns}^{ij(1)} D_s^{j(1)} + \sum_{j=1}^{N_1} A_{nn}^{ij(1)} D_n^{j(1)} \end{aligned} \quad i = 1, N_1 \tag{II.29}$$

et les contraintes dans la frontière du milieu R_2 peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_s^{[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N A_{ss}^{ij(2)} D_s^{j(2)} + \sum_{j=N_1+1}^N A_{sn}^{ij(2)} D_n^{j(2)} \\ \sigma_n^{[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N A_{ns}^{ij(2)} D_s^{j(2)} + \sum_{j=N_1+1}^N A_{nn}^{ij(2)} D_n^{j(2)} \end{aligned} \quad i = N_1+1, N \tag{II.30}$$

Et les déplacements sont :

$$\begin{aligned}
 u_s^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} B_{ss}^{ij(1)} D_s + \sum_{j=1}^{N_1} B_{sn}^{ij(1)} D_n \\
 u_n^{i[1]} &= \sum_{j=1}^{N_1} B_{ns}^{ij(1)} D_s + \sum_{j=1}^{N_1} B_{nn}^{ij(1)} D_n
 \end{aligned} \quad i = 1, N_1 \quad (II.31)$$

et les déplacements dans la frontière du milieu R_2 peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 u_s^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N B_{ss}^{ij(2)} D_s + \sum_{j=N_1+1}^N B_{sn}^{ij(2)} D_n \\
 u_n^{i[2]} &= \sum_{j=N_1+1}^N B_{ns}^{ij(2)} D_s + \sum_{j=N_1+1}^N B_{nn}^{ij(2)} D_n
 \end{aligned} \quad i = N_1+1, N \quad (II.32)$$

Les coefficients d'influences dans les équations (II.29) à (II.32) sont calculés exactement de la même manière que le cas du milieu monocouche. Mais il est nécessaire d'utiliser les propriétés d'élasticité de chaque milieu.

Les équations (II.29) à (II.32) peuvent se mettre sous la forme d'un système algébrique de $2N$ équations à $2N$ inconnus (les D_s et D_n) :

$$\begin{cases} b_s^i = \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n \\ b_n^i = \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n \end{cases} \quad \text{avec } i = 1, N \quad (N=N_1+N_2) \quad (II.33)$$

En conservant les conditions aux limites et les conditions de continuités comme suit:

a) l'élément i appartient à la partie libre de C_1 et posons qu'on a des contraintes appliquées à cet élément $\sigma_s^i = (\sigma_s^i)_0$ et $\sigma_n^i = (\sigma_n^i)_0$ donc :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij} & j = 1, N_1 \\ 0 & j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = (\sigma_s^i)_0 \quad ; \quad b_n^i = (\sigma_n^i)_0 \end{cases} \quad (II.34)$$

même chose pour C_{ns} , C_{sn} et C_{nn}

b) l'élément i appartient à la partie libre de C_2 et si les conditions imposées sont en déplacement $u_s^i = (u_s^i)_0$ et $u_n^i = (\sigma_n^i)_0$ donc :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} 0 & j = 1, N_1 \\ B_{ss}^{ij(2)} & j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = (u_s^i)_0 \quad ; \quad b_n^i = (\sigma_n^i)_0 \end{cases} \quad (II.35)$$

même chose pour C_{ns}^{ij} , C_{sn}^{ij} et C_{mn}^{ij}

Avec des relations similaires on peut exprimer les autres coefficients d'influence en combinant les deux conditions aux limites des deux milieux et en faisant un simple arrangement des équations (II.34) et (II.35) on obtient un seul système.

En deuxième temps, considérons que l'élément i est situé sur la portion d'interface et posons qu'il appartient à C_1 . on aura un élément i^* opposé directement à i et appartient à l'autre contour C_2 . on aura donc quatre conditions à vérifier concernant les deux éléments face à face i et i^* , deux conditions de continuité de contraintes et deux de déplacements.

1) Les conditions de continuité en contraintes sont :

$$\begin{aligned} \sigma_s^{i[1]} - \sigma_s^{i^*[2]} &= 0 \\ \sigma_n^{i[1]} - \sigma_n^{i^*[2]} &= 0 \end{aligned} \tag{II.36}$$

d'après (II.29) et (II.30), les quantités b_s^i, b_n^i et C_{ss}^{ij} ...etc, dans de l'équation (II.33) seront :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij(1)} & j = 1, N_1 \\ -A_{ss}^{i^*j(2)} & j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = \sigma_s^{i(1)} - \sigma_s^{i^*(2)} = 0 \quad ; \quad b_n^i = \sigma_n^{i(1)} - \sigma_n^{i^*(2)} = 0 \end{cases} \tag{II.37}$$

et identiquement pour les autres coefficients d'influence.

2) Les conditions de continuité en déplacements sont :

$$\begin{aligned} u_s^{i[1]} + u_s^{i^*[2]} &= 0 \\ u_n^{i[1]} + u_n^{i^*[2]} &= 0 \end{aligned} \tag{II.38}$$

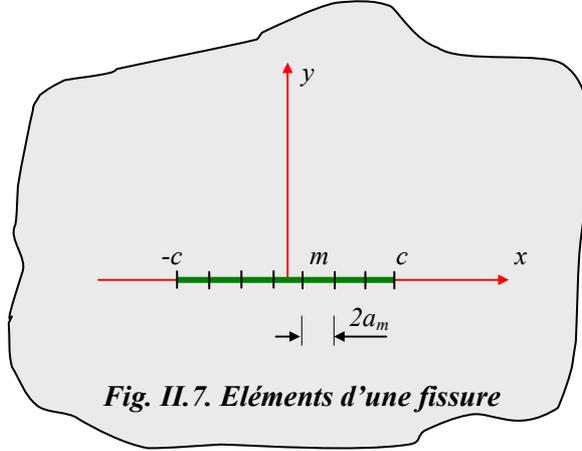
d'après (II.31) et (II.32), les quantités b_s^i, b_n^i et C_{ss}^{ij} ...etc, dans de l'équation (II.33) seront :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} B_{ss}^{i^*j(1)} & j = 1, N_1 \\ B_{ss}^{ij(2)} & j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = u_s^{i(1)} + u_s^{i^*(2)} = 0 \quad ; \quad b_n^i = u_n^{i(1)} + u_n^{i^*(2)} = 0 \end{cases} \tag{II.39}$$

et identiquement pour les autres coefficients d'influence.

II.8. CALCUL NUMERIQUE DE FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE.

Les discontinuités de déplacements D_i sont les déplacements relatifs entre la surface supérieure et la surface inférieure de la fissure. Les facteurs d'intensité de contraintes sont déterminés à l'aide de ces discontinuités [18].



Pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes, une formulation par la méthode de discontinuités de déplacements nous donne la combinaison liant les contraintes en chaque élément i et les discontinuités de déplacements en chaque élément de la fissure.

À l'élément i , en utilisant les équations (II.3) et (II.4), nous avons :

$$\sigma_n^i = \sum_{m=1}^M \frac{Ga_m D_n^m}{\pi(1-\nu)[(x_m - x_i)^2 - a_m^2]} = \sum_{m=1}^M \alpha_{im} D_n^m$$

(II.40)

et

$$\sigma_s^i = \sum_{m=1}^M \frac{Ga_m D_s^m}{\pi(1-\nu)[(x_m - x_i)^2 - a_m^2]} = \sum_{m=1}^M \alpha_{im} D_s^m$$

Où a est la moitié de la longueur d'élément i et :

$$\alpha_{im} = \frac{Ga_m}{\pi(1-\nu)[(x_m - x_i)^2 - a_m^2]}$$

(II.41)

et x^i est la coordonnée de milieu de l'élément i dans le repère lié à la fissure.

D'après [18], le facteur d'intensité de contrainte peut être donnée par, (en basant sur la noyau de Green) :

$$K_I^\pm = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^c \sigma_n(x) \sqrt{\frac{c \pm x}{c \mp x}} dx = \sum_{i=1}^M \sigma_n^i F_i \sqrt{\pi c} = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^M \alpha_{im} F_i D_n^m \sqrt{\pi c}$$

(II.42)

$$K_{II}^\pm = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \int_{-c}^c \sigma_s(x) \sqrt{\frac{c \pm x}{c \mp x}} dx = \sum_{i=1}^M \sigma_s^i F_i \sqrt{\pi c} = \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^M \alpha_{im} F_i D_s^m \sqrt{\pi c}$$

(II.43)

$$\text{où : } F_i = \frac{1}{\pi c} \int_{x^i - a^i}^{x^i + a^i} \sqrt{\frac{c \pm x}{c \mu x}} dx = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{x}{c}\right) \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \right]_{x^i - a^i}^{x^i + a^i} \quad (\text{II.44})$$

c : est la moitié de la longueur de la fissure.

Le signe positif est attribué à la tête droite de la fissure et le signe négatif à la tête gauche de la fissure.

Des équations (II.42) et (II.43), on peut prévoir qu'elle donne une meilleure approche de facteur d'intensité de contrainte car elle se base sur les discontinuités de déplacements de tous les éléments de la fissure. Cependant, plus on se rapproche de la tête du fissure, plus l'influence de sa discontinuité de déplacement d'élément est plus grande.

II.9. CALCUL NUMERIQUE DE G

La méthode de discontinuité de déplacements telle qu'elle vient d'être présentée permet de déterminer les champs de contraintes et de déplacement sur la frontière et en tout point de la structure.

On rappelle que pour une fissure plane d'épaisseur unité, le paramètre A est la longueur de la fissure, et dans le cadre de nos applications, Ω_U n'existera pas en générale. Donc l'équation (I.16) devient [35] :

$$G = \frac{1}{2} \int T_i \frac{du_i}{dA} d\Gamma \quad (\text{II.45})$$

Ecrivons cette expression sous forme incrémentale, désignons par u_i^1 et u_i^2 , les champs de déplacements avant et après progression de la fissure de dl . Le terme sous le signe intégral s'écrit :

$$T_i du_i = T_i (u_i^2 - u_i^1) \quad (\text{II.46})$$

$$\text{d'où : } G dl = \int_{\Omega} T_i (u_i^2 - u_i^1) d\Gamma + \int_{\Gamma} T_i (D_i^2 - D_i^1) d\Gamma \quad (\text{II.47})$$

Ainsi, le calcul numérique de G se fera, en discrétisant l'expression (II.47). On obtiendra une somme des produits $T_i (u_i^2 - u_i^1)$ sur le contour Ω et des produits $T_i (D_i^2 - D_i^1)$ sur la fissure.

EXEMPLES,
RÉSULTATS &
INTERPRÉTATIONS

CHPITRE III

EXEMPLES, RESULTATS & INTERPRETATIONS

III.1. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, nous traitons un nombre d'exemples pratiques en mécanique des solides, et qui peuvent être simulés numériquement par la méthode de discontinuité de déplacement (MDD) en bidimensionnel. Ces exemples peuvent être divisés en deux catégories :

- * La première catégorie d'exemple concerne l'utilisation de la méthode de discontinuité de déplacement (MDD) en monocouche.

- * La deuxième catégorie concerne les matériaux multicouches fissurés.

III.2. STRUCTURE DE PROGRAMME.

Notre programme est fait à l'aide de langage de programmation **FORTRAN90**, en utilisant le compilateur F32 sous windows. Le programme est constitué de cinq parties : Localisation et les définitions, Calcul des discontinuités des déplacements sur les frontières ainsi que les contraintes et les déplacements aux frontières, Introduction à la fissuration, Introduction à la propagation et la dernière partie est calcul les contraintes et les déplacements aux points spécifiques.

La 1^{ère} Partie du programme qui comporte la lecture des principales données : les caractéristiques mécaniques, le chargement, le raffinement des segments, et le positionnement du problème. Il discrétise le corps à étudier et il affecte à chaque élément sa position, son orientation et ses conditions aux limites.

La 2^{ème} Partie est la partie principal de la méthode MDD. Il récupère les données à partir de la localisation et il calcule les coefficients d'influences entre chaque couple d'éléments de la frontière du corps en appelant à la subroutine *COEFF*. En suite, il construit le système algébrique d'équations pour le résoudre par la subroutine *SOLVE* pour obtenir les composantes de discontinuité de déplacement de chaque élément. Ces résultats vont être chargés dans un fichier qui va être utilisé comme une base de données pour les autres parties. Finalement cette partie calcule le champ de contraintes et de déplacements pour chaque élément de frontière.

La 3^{ème} partie du programme traite les problèmes de la mécanique de la rupture. En présence de fissure, il récupère les données à partir de la deuxième partie, ajoutée les nouveaux éléments (voir Fig.III.1), et ensuite il calcule les nouveaux coefficients d'influences entre chaque couple d'éléments, en appelant toujours la subroutine *COEFF*, et ensuite, il construit le système algébrique d'équations pour le résoudre par la subroutine *SOLVE* pour obtenir les composantes de discontinuité de déplacement de chaque élément. Enfin, le facteur d'intensité de contrainte peut être calculé.

La mise en œuvre numérique de la propagation se fait en ajoutant un élément en tête de la fissure. (voir Fig.III.1)

Avant propagation, un premier calcul élastique nous fournit un système d'équations de la forme : $[A]\{x\} = \{B\}$. A chaque pas de propagation, l'incrément de la fissure se fait en ajoutant un élément singulier en fond de fissure. D'un point de vue numérique, on ne calcule que les coefficients liés au nouvel élément singulier. L'élément singulier d'un pas i ne sera plus singulier au pas $i + 1$, puisqu'il ne sera plus en fond de fissure.

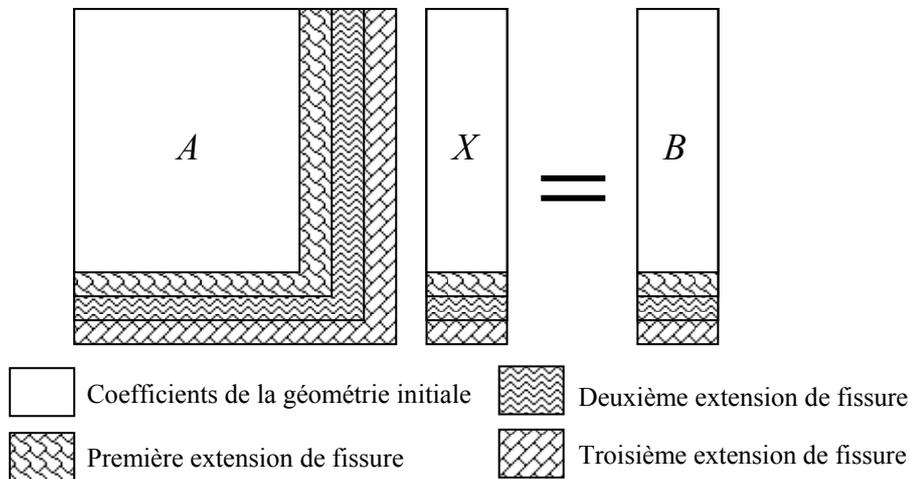


Fig.III.1. Schéma représentant la constitution du système d'équations

On a construit la structure du code de calcul comme il est mentionné sur la figure suivante :

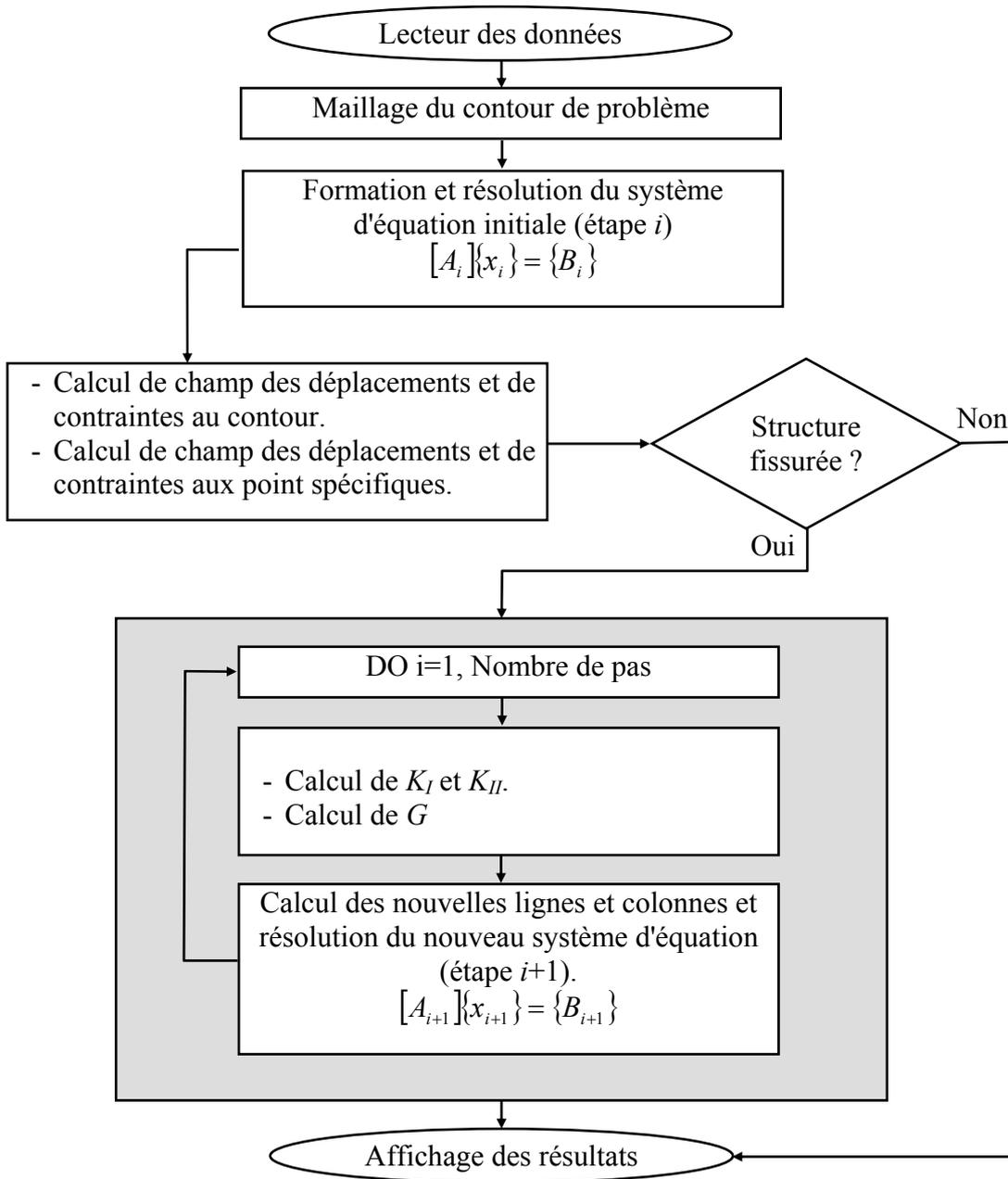


Fig. III.2. Organigramme et chronologique des calculs du programme réalisé

III.3. EXEMPLES TRAITES.

PREMIERE CATEGORIE : LES MATERIAUX MONOCOUCHE.

EXEMPLE 01 : PLAQUE PERCEE.

On considère dans cet exemple une plaque carrée percée soumise à un effort de traction en contraintes planes comme l'indique la figure (Fig.III.3.a). Une solution analytique d'un problème proche de celui-ci est celle d'une plaque trouée de dimension infinie soumise à un effort de traction, pour laquelle la solution en contrainte est :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(0, y) &= \frac{\sigma R^2}{2y^2} \left(1 - \frac{3R^2}{y^2} \right) \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= \frac{\sigma}{2} \left(2 + \frac{R^2}{x^2} + \frac{3R^4}{x^4} \right)\end{aligned}\quad (\text{III.1})$$

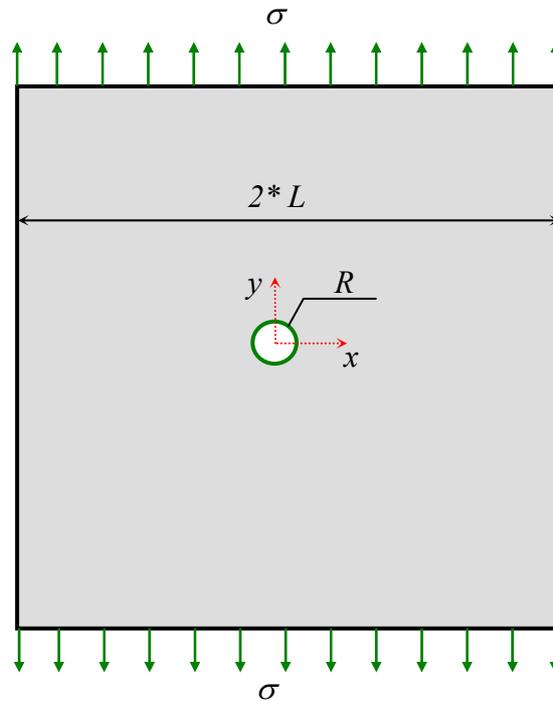


Fig. III.3.a. Plaque trouée

Pour le calcul numérique on prend $L=0.1m$, $R=L/10$, $\sigma=100MPa$, $E=210000 MPa$ et $\nu=0.3$.

Les figures (Fig.III.4) et (Fig.III.5) représentent respectivement l'évolution de la contrainte σ_{xx} le long de la droite ($x=0$) et l'évolution de la contrainte σ_{yy} le long de la droite ($y=0$). On constate que la solution numérique est très proche de la solution

analytique. Les résultats obtenus sont très satisfaisants, ce qui va nous permettre d'approcher l'étude des structures fissurées en gardant la même procédure de traitement numérique.

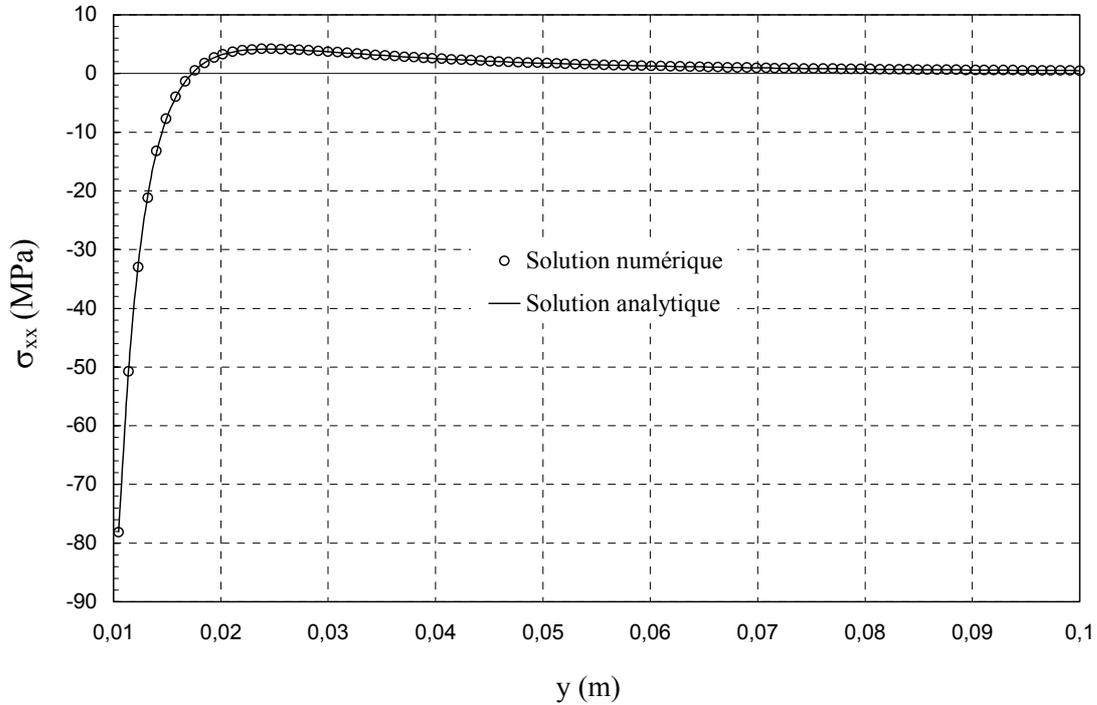


Fig.III.4. Contrainte $\sigma_{xx}(0,y)$ en MPa

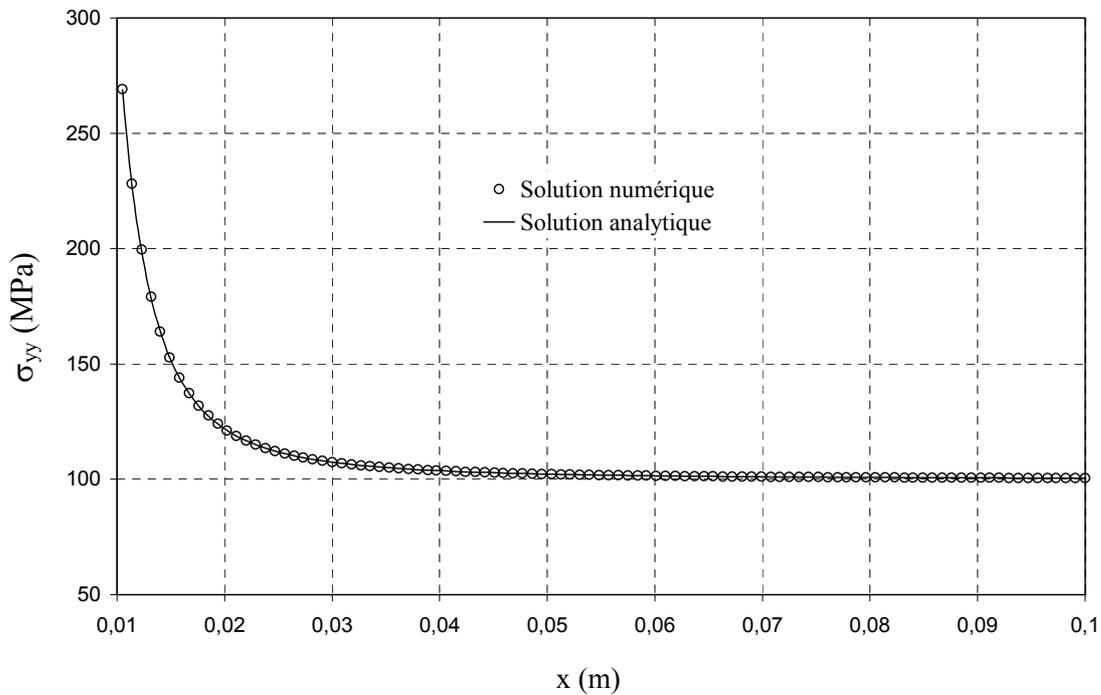


Fig.III.5. Contrainte $\sigma_{yy}(x,0)$ en MPa

EXEMPLE 02 : FISSURE DEBOUCHANTE DANS UNE PLAQUE RECTANGULAIRE.

Considérons une plaque rectangulaire, contenant une fissure horizontale débouchante, représentée par la figure (Fig.III.6). On note par a la longueur de la fissure, w la largeur de la plaque et $2h$ sa hauteur. La plaque est soumise à un effort de traction uniforme $\sigma = 100$ MPa symétriquement appliqué sur ses deux côtés.

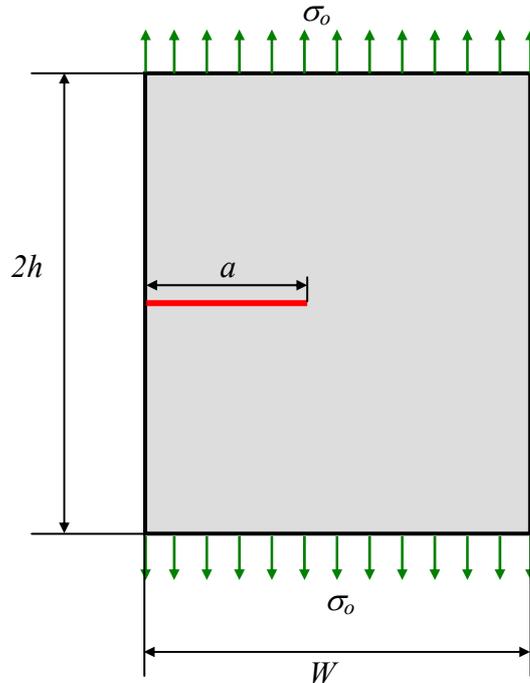


Fig.III.6. Plaque rectangulaire contenant une fissure

Les nombres d'éléments ont été choisis comme $N_w = 16$, $N_h = 16$ ($N=2*N_w+2*N_h$) et $M = 8$. Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée sont $E = 210000$ MPa et $\nu=0.3$. On varie a/w entre 0,1 et 0,4. Les résultats analytiques sont donnés par la formule suivante [15] :

$$K_I = \sigma_o \sqrt{\pi c} f\left(\frac{a}{w}\right) \tag{III.2}$$

$$\text{avec : } f\left(\frac{a}{w}\right) = \left(\frac{2w}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2w}\right)^{1/2} \frac{0,752 + 0,370\left(1 - \sin \frac{\pi a}{2w}\right)^3 - 2,02 \frac{a}{w}}{\cos \frac{\pi a}{2w}} \tag{III.3}$$

La précision atteinte par cette formule est 0,5 % quel que soit le rapport (a/w).

Les résultats analytiques et numériques peuvent être représentés dans le tableau suivant :

Tableau III.1. Facteur d'intensité de contraintes (K_I) pour différentes valeurs de c/w

a/w	K_I (Num)	K_I [15]	Erreur
0,1	133	134	0.8 %
0,2	214	217	1.4 %
0,3	312	321	2.8 %
0,4	440	473	7.5 %

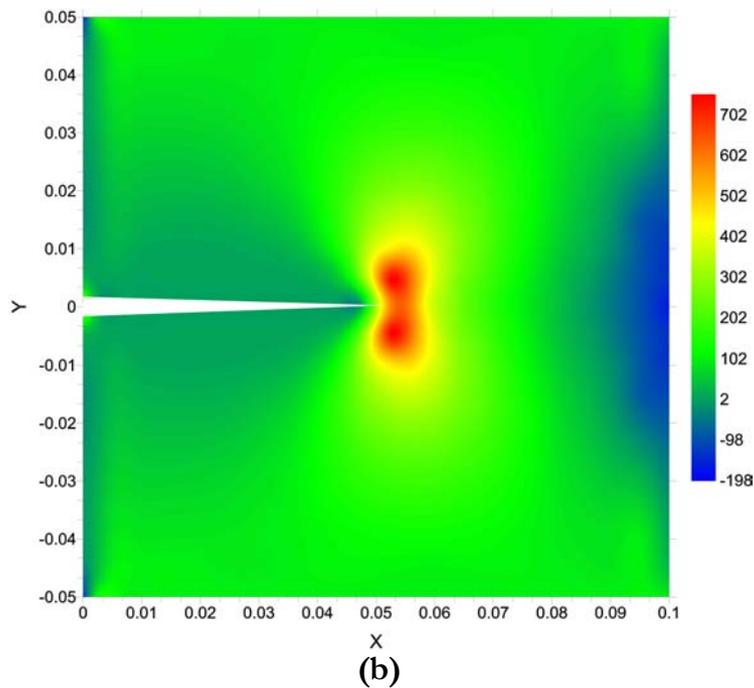
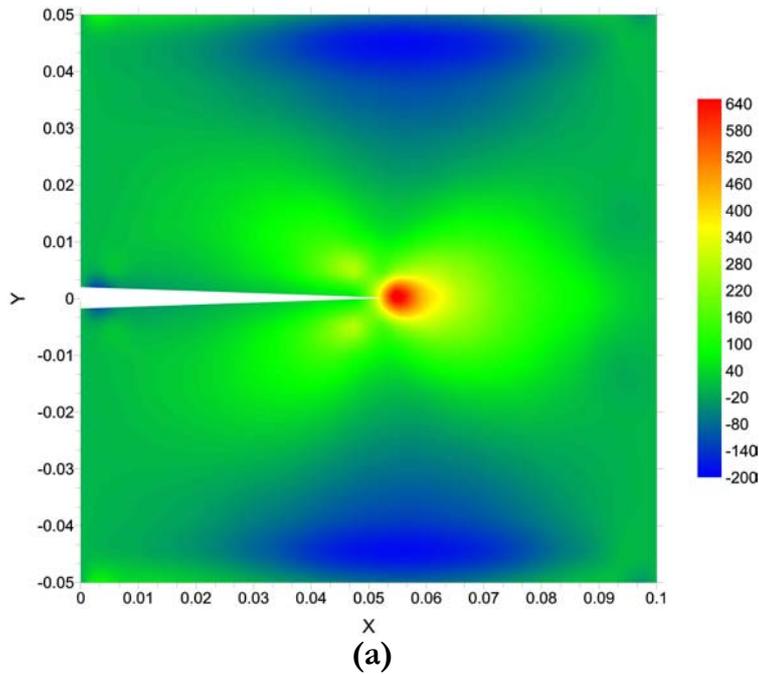


Fig.III.7. (a) Contrainte σ_{xx} en (MPa), (b) Contrainte σ_{yy} en (MPa)
 x et y en (m)

On remarque que les résultats numériques convergent vers la solution analytique. L'erreur est très grande pour $a/w=0.4$, à cause d'influence de frontière, ceci qui donne une risque d'une rupture brutale.

EXEMPLE 03 : PLAQUE FINIE PERCEE SOLICITEE EN COMPRESSION

Dans cet exemple une plaque rectangulaire de largeur $2w$ et de hauteur $2h$, percée au centre de la plaque de rayon $R=h/10$ (voir Fig.III.8). La plaque est sollicitée en compression avec un chargement constant $\sigma_o=100 \text{ MPa}$. Les caractéristiques mécaniques sont $E=100000 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.3$. Pour résoudre ce problème on a considéré une simple symétrie par rapport à $y = 0$.

La longueur de la fissure est varié de $l = 0.2 R$ jusqu'à $l = 1.2 R$.

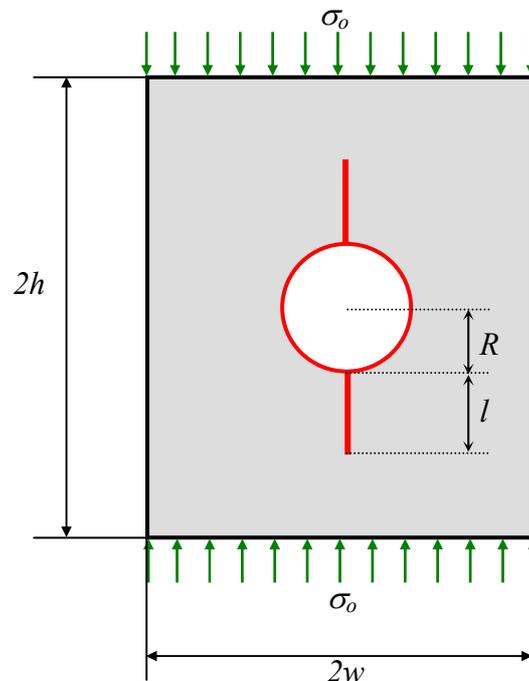


Fig.III.8. Plaque rectangulaire percée.

Les résultats sont représentés dans la figure (Fig.III.9) en terme de :

$$G_r = \frac{GE}{\pi\sigma^2 R} \quad (\text{III.4})$$

en fonction de $\frac{l}{R}$. G_r est un paramètre sans dimension, rapporté à la dimension de l'inclusion, au matériau et au chargement appliqué.

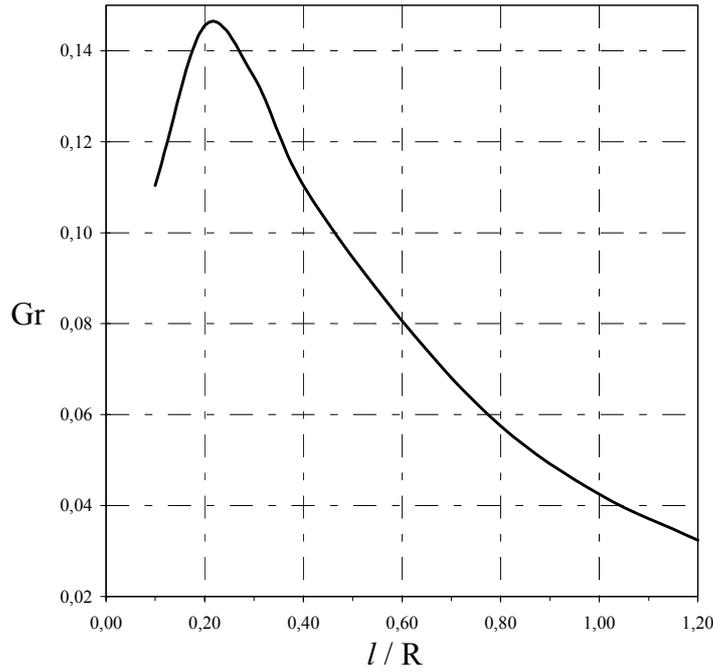


Fig.III.9. Variation de G_r en fonction de la longueur de la fissure

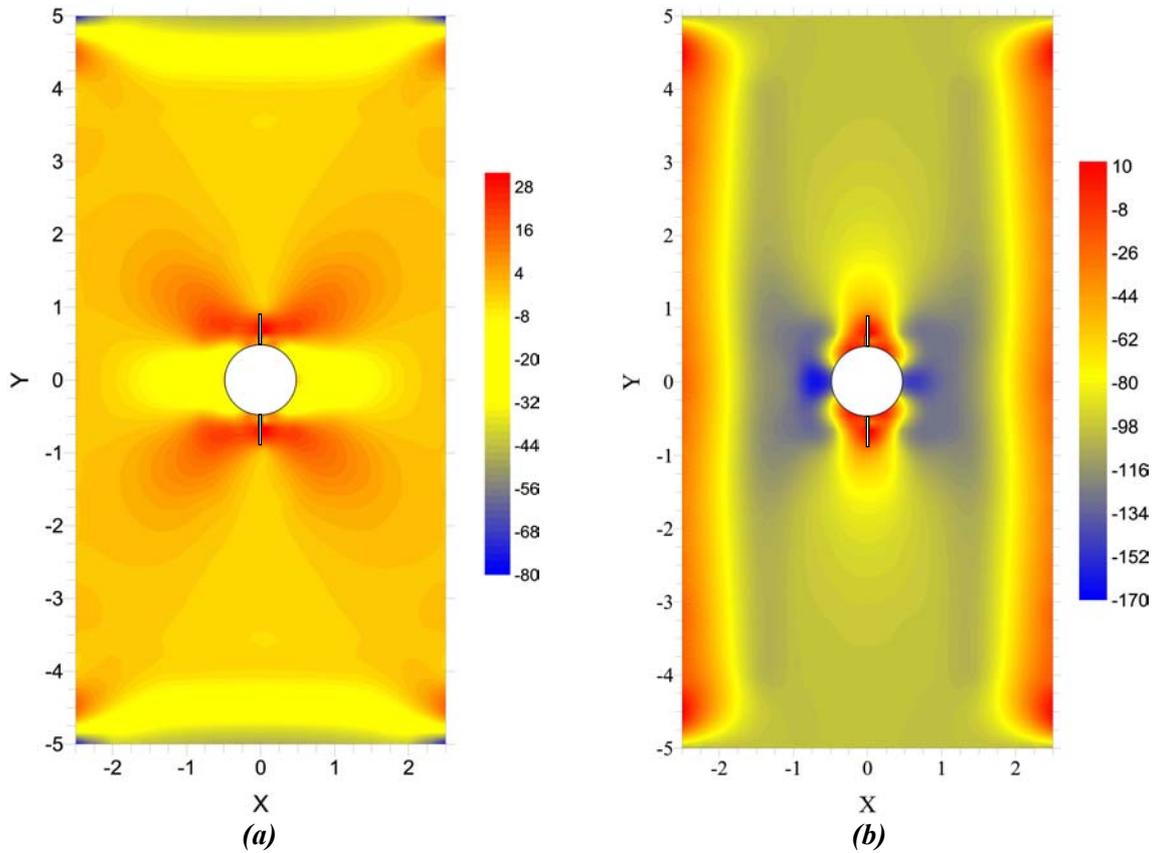


Fig.III.10. (a) Contrainte σ_{xx} en MPa. (b) Contrainte σ_{yy} en MPa (pour $l/R=01$)

Après une légère phase d'instabilité, on note une très nette stabilité de la propagation, sous chargement imposé, à partir d'une longueur de la fissure de l'ordre de

20% de rayon R, l'énergie s'annulant rapidement. La conséquence immédiate de cette constatation est qu'il faudra considérablement augmenter le chargement pour propager la fissure.

EXEMPLE 04 : ECAILLAGE DES MATERIAUX FRAGILES.

L'écaillage des matériaux fragiles est un exemple intéressant de propagation de fissure. En effet, quand une plaque fragile est sollicitée le long de son bord supérieur. Une fissure s'amorce, se propage parallèlement au bord latéral de la plaque, et éventuellement le bout de la plaque se détache (Fig.III.11).

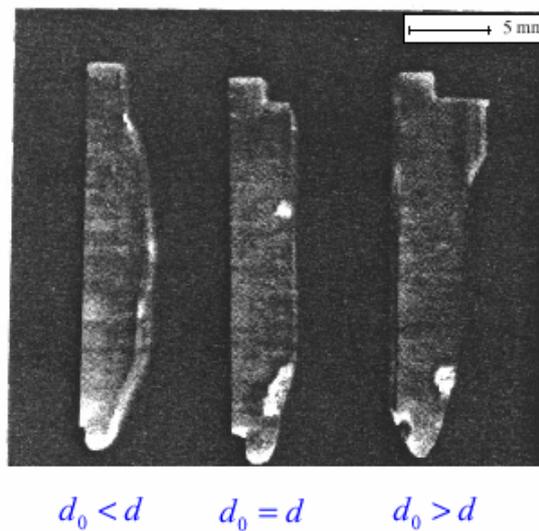


Fig.III.11. Configuration d'écaillage d'éprouvettes de PMMA [1]

Les mécanismes de fissuration et d'écaillage qui accompagnent la mise en charge des plaques fragiles sur la tranche ont été étudiés expérimentalement par M.D. Thouless et al [d'après Kebir [1]. Les expériences ont été réalisées sur du polyméthylmétacrylate (PMMA).

La modélisation numérique de la propagation a été effectuée en discrétisant le contour de la plaque en 40 éléments et la fissure initiale en 5 éléments. La propagation est effectuée par un pas $\Delta a = 2 \text{ mm}$ sur une plaque rectangulaire de dimension $100\text{mm} \times 50\text{mm}$. Plusieurs calculs ont été effectués en faisant varier la position du chargement P localisée par la distance h (Fig.III.12).

Les calculs de propagation de fissures ont permis de comparer les trajectoires des fissures avec les mesures expérimentales. La tendance générale à la fissuration est

compatible avec le comportement prédit. La fissure se propage parallèlement au bord latéral à une distance d , de telle manière que le rapport d/h soit constant.

Tableau III.2. Valeurs numériques et expérimentales de d/h

	<i>Essais</i> Valeur moyenne	<i>Calcul</i> $h = 2mm$	<i>Calcul</i> $h = 4mm$
d/h	4,8	4,81	4,56

La figure (Fig.III.13) montre les différents chemins de propagation en fonction de h , le tableau III.2 donne les valeurs numériques et expérimentales du rapport d/h . La valeur numérique de d/h est en bon accord avec celle issue des expériences.

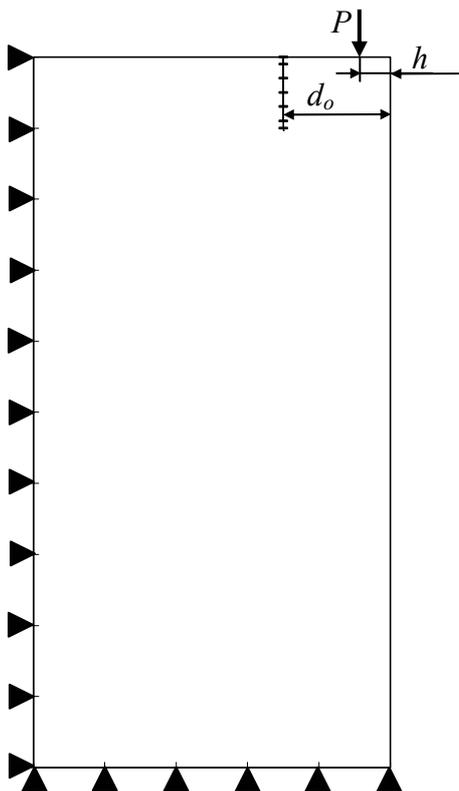


Fig.III.12. Maillage de la plaque

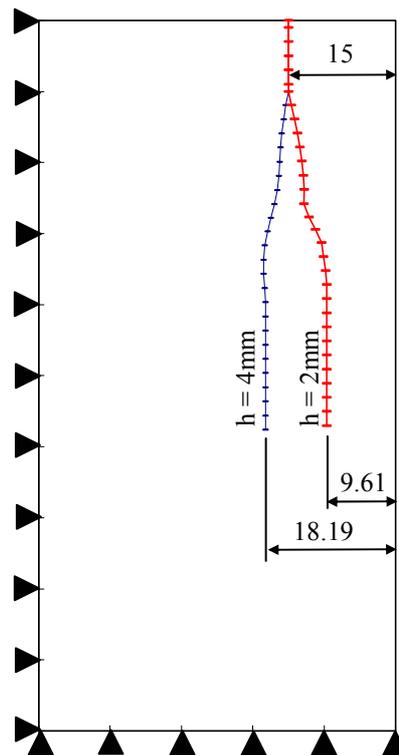


Fig.III.13. Trajectoire de propagation en fonction de h ($d_0=15mm$)

DEUXIEME CATEGORIE : LES MATERIAUX MULTICOUCHES.

EXEMPLE 05 : ANNEAU FRETTE DANS UN AUTRE ANNEAU.

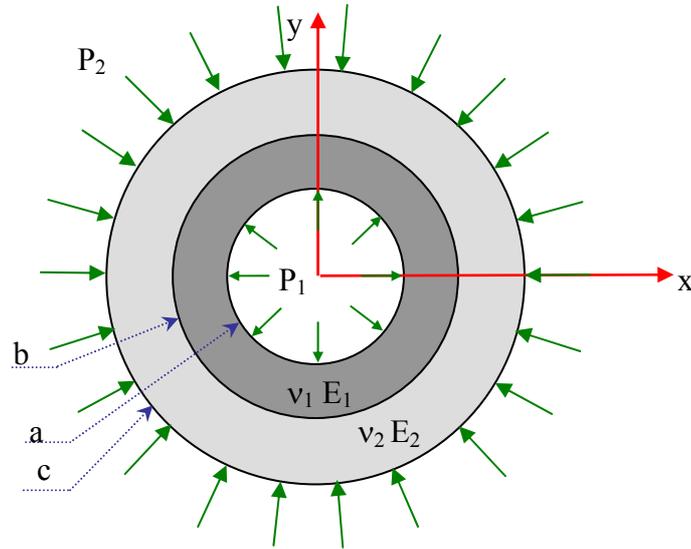


Fig.III.14. Anneau fretté dans un autre anneau.

La solution analytique de ce problème est définie par [34]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{a^2 P_1 - b^2 P}{b^2 - a^2} - \frac{P_1 - P}{(b^2 - a^2) r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{a^2 P_1 - b^2 P}{b^2 - a^2} + \frac{P_1 - P}{(b^2 - a^2) r^2} \end{aligned} \right\} \quad a \leq r \leq b \quad \text{(III.5)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{b^2 P - c^2 P_2}{c^2 - b^2} - \frac{P - P_2}{(c^2 - b^2) r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{b^2 P - c^2 P_2}{c^2 - b^2} + \frac{P - P_2}{(c^2 - b^2) r^2} \end{aligned} \right\} \quad b \leq r \leq c \quad \text{(III.6)}$$

$$\text{Où : } P = \frac{P_1 \left(\frac{(1-\nu_1)a^2}{E_1(b^2-a^2)} + \frac{a^2}{2G_1(b^2-a^2)} \right) - P_2 \left(\frac{(1-\nu_2)c^2}{E_2(c^2-b^2)} + \frac{c}{2G_2(c^2-b^2)} \right)}{\frac{(1-\nu_2)b^2}{E_2(c^2-b^2)} + \frac{c}{2G_2(c^2-b^2)} + \frac{(1-\nu_1)b^2}{E_1(b^2-a^2)} + \frac{a^2}{2G_1(b^2-a^2)}} \quad \text{(III.7)}$$

Les caractéristiques mécaniques sont : $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$; $E_1/E_2 = 2$, $E_1 = 200000MPa$
 $P_1/G_1=10^{-3}$ et $P_2 = 2 P_1$. Pour l'anneau 1 ($1 \leq r \leq 2$) et l'anneau 2 ($2 \leq r \leq 3$).

Les résultats numériques sont présentés dans la figure Fig.III.15. On remarque que les contraintes normales σ_{rr} sont continues, par contre pour les contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ il y a une discontinuité au niveau de l'interface. Ceci est dû à la discontinuité de la matière et la

différence de rigidité des matériaux. Toute fois on note que les contraintes convergent vers les valeurs de conditions aux limites imposées à l'extérieur.

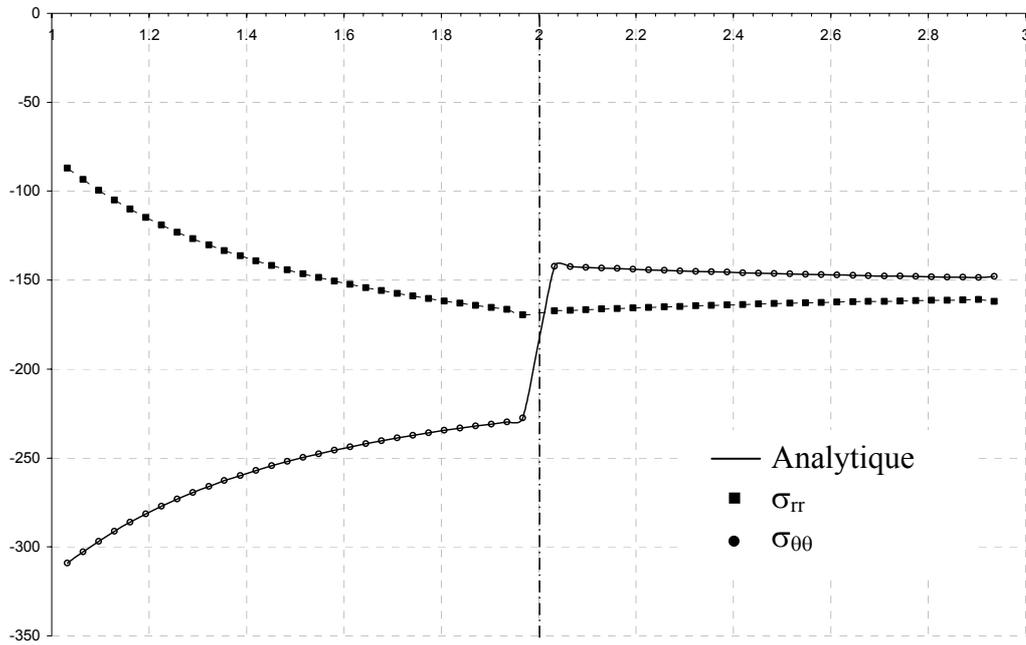


Fig.III.15. Variation des contraintes σ_{rr} (MPa) et $\sigma_{\theta\theta}$ (MPa) en fonction du rayon (cm).

EXEMPLE 06 : PLAQUE FINIE CONTENANT UNE INCLUSION.

On prend les mêmes dimensions de l'exemple 03.

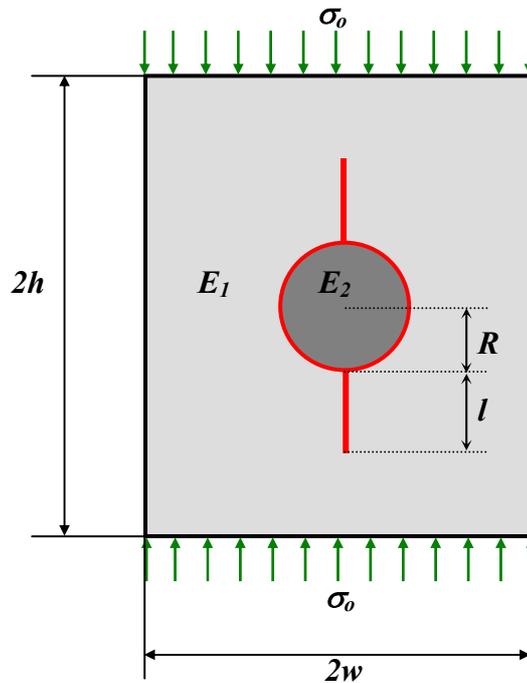


Fig.III.16. Plaque rectangulaire contenant inclusion.

Les caractéristiques mécaniques sont $E_1=50000$ MPa et $\nu = 0.25$ pour la plaque, et on varie $E_2=25000, 50000$ et 100000 MPa $\nu = 0.25$

Pour résoudre ce problème on a considéré une simple symétrie par rapport l'axe $y=0$. La discrétisation des divers contours, y compris les fissures joue un rôle important dans la précision des calculs. Les zones de jonction entre le contour circulaire et les éléments de fissure, ainsi que les éléments de l'interface sont fortement discrétisés.

Les résultats sont reportés sur la figure (Fig.III.17).

On observe que l'allure de la courbe reste pratiquement la même (exemple 03). Bien que la présence d'un deuxième matériau de l'inclusion n'influe pas de manière significative sur le caractère stable de cette propagation, mais elle influe sur la valeur de l'énergie. On constate que la valeur de G_r maximale de la plaque percée ($E_2=0$) est plus grande que celle de la plaque contenant une inclusion. Donc, cela veut dire que pour propager la fissure pour une longueur donnée dans une plaque percée, la contrainte nécessaire est plus faible que pour le cas de la plaque contenant une inclusion. Cela est dû à l'effet du matériaux qui constitue l'inclusion.

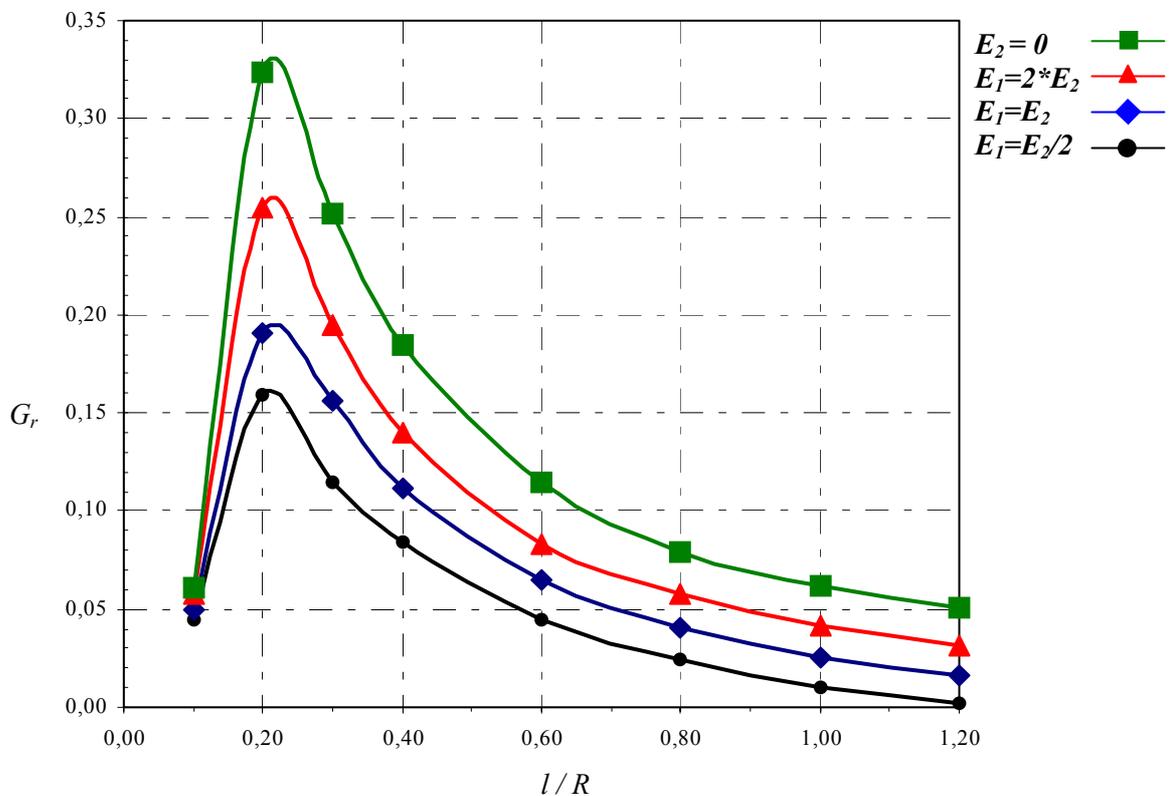


Fig.III.17. Variation de G_r en fonction de la longueur de la fissure

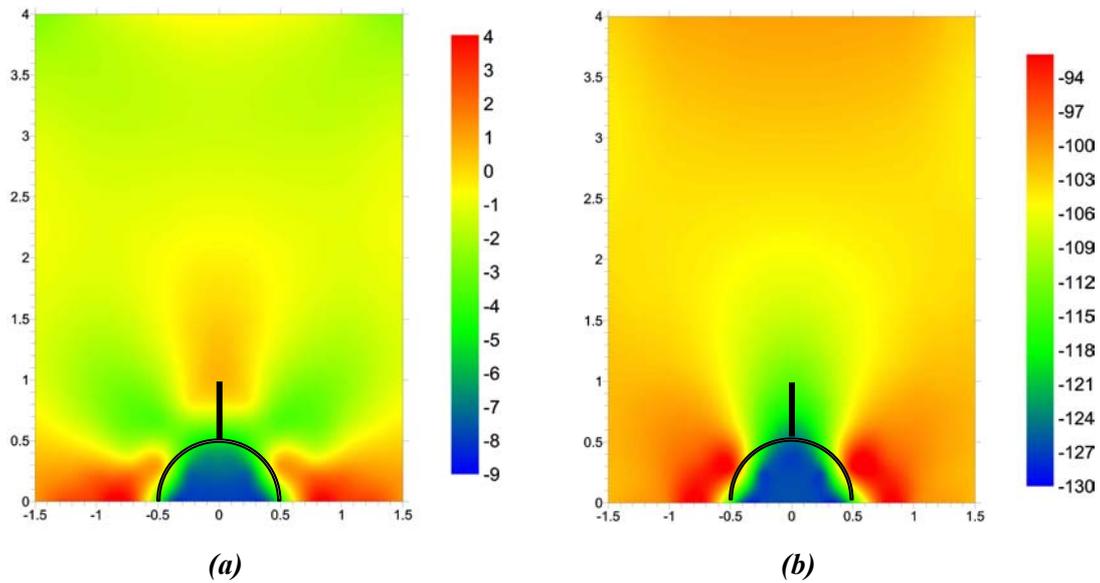


Fig.III.18. (a) Contrainte σ_{xx} en MPa. (b) Contrainte σ_{yy} en MPa pour $E_2=2 \cdot E_1=100000 \text{ MPa}$ Pour $l/R = 01$

EXEMPLE 07 : PLAQUE MULTICOUCHE.

La modélisation numérique d'une fissure dans une plaque multicouche (3 couches) a été exécutée pour vérifier les résultats des valeurs de K données par l'équation (II.42).

On considère Trois configurations géométriques différentes (Fig.III.19), avec les rapports $W_1/W_2 = 0.2, 1$ et 5 . On varie les rapports $R(E_2/E_1)$ de $0.2, 0.25, 0.333, 0.5, 2, 3, 4$ et 5 , pour calculer le facteur d'intensité de contrainte par l'équation analytique (I.25) et la comparer avec les résultats obtenus numériquement par la MDD.

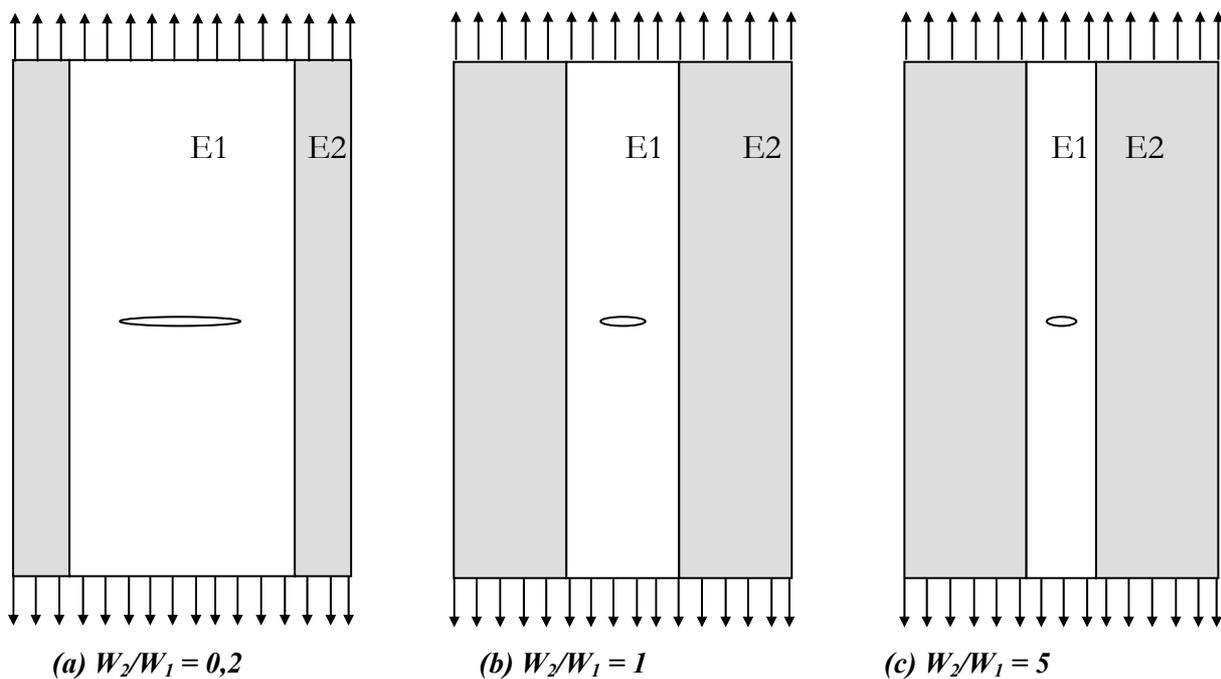


Fig.III.19. Les trois configurations géométriques considérées

Les caractéristiques mécaniques sont $E_1 = 100000 \text{ MPa}$, et $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

Les tableaux 3-5 présentent les valeurs de facteurs d'intensité de contrainte obtenus par l'équation (I.25) et par la modélisation numérique pour les différentes géométries de la figure (Fig.III.19). Les résultats sont présentés dans les tableaux III.3 , III.4 et III.5 et respectivement sur les figures III.21, III.22 et III.23).

Il est intéressant de voir que dans tous les cas, les erreurs sont inférieures à 11 %. L'erreur augmente avec une augmentation de rapport R , et de a/w .

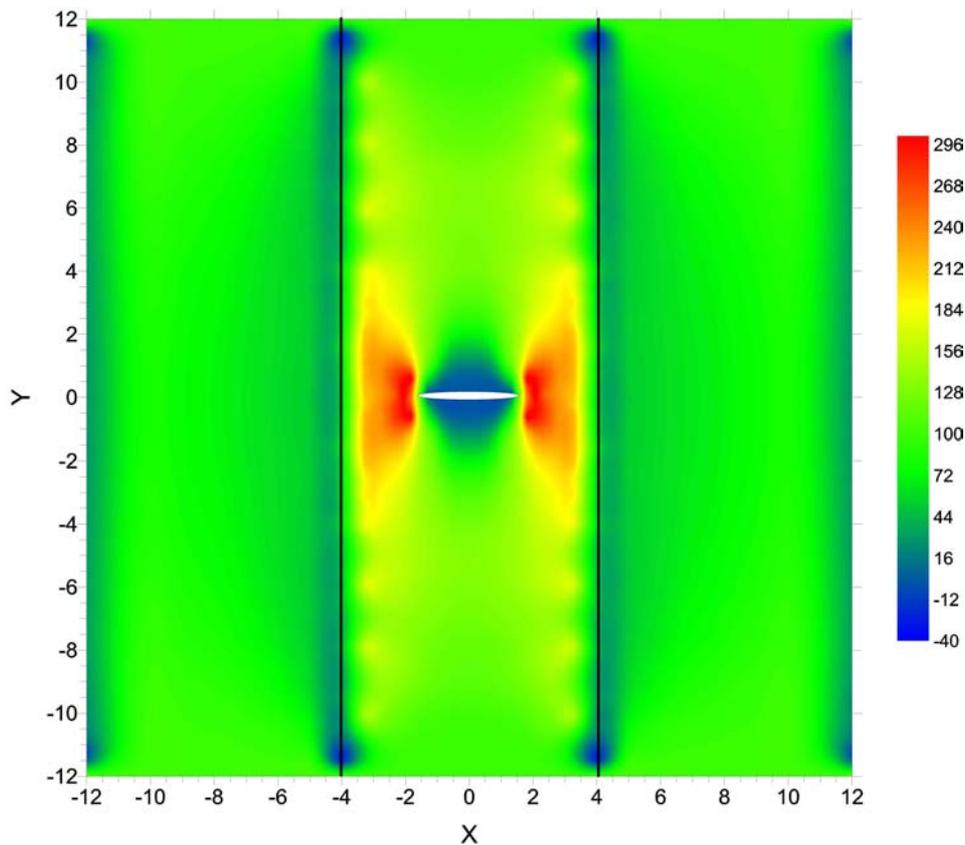


Fig.III.20. Contrainte σ_{yy} en MPa (pour $W_2/W_1 = 0,2$, $R=0,2$ et $a/W_1 = 0,55$)

Tableau III.3. Les valeurs de facteur d'intensité de contrainte pour le conguration géométrique $W_2/W_1 = 0,2$.

a/w1	Réf	E2/E1=0,2		E2/E1=0,25		E2/E1=0,333		E2/E1=0,5		E2/E1=2		E2/E1=3		E2/E1=4		E2/E1=5	
		K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.
0,09	Anal.	1,1582	3,1%	1,1471	2,5%	1,1290	0,8%	1,0946	-1,2%	0,8588	-3,6%	0,7509	-3,6%	0,6671	-4,2%	0,6002	-2,9%
	MDD	1,1942		1,1754		1,1378		1,0814		0,8275		0,7240		0,6394		0,5830	
0,18	Anal.	1,1761	2,9%	1,1601	2,6%	1,1415	1,4%	1,1059	-0,8%	0,8638	-3,0%	0,7538	-3,0%	0,6686	-4,5%	0,6007	-3,7%
	MDD	1,2101		1,1902		1,1569		1,0971		0,8378		0,7314		0,6383		0,5785	
0,36	Anal.	1,2303	2,4%	1,2171	2,4%	1,1957	1,4%	1,1551	-0,3%	0,8846	-3,3%	0,7652	-2,9%	0,6742	-5,2%	0,6024	-4,8%
	MDD	1,2600		1,2459		1,2130		1,1519		0,8557		0,7428		0,6394		0,5736	
0,54	Anal.	1,3518	2,2%	1,3346	1,2%	1,3067	0,5%	1,2543	-0,3%	0,9219	-2,1%	0,7785	-4,8%	0,6812	-6,5%	0,6025	-5,7%
	MDD	1,3820		1,3513		1,3129		1,2503		0,9021		0,7409		0,6372		0,5681	
0,63	Anal.	1,4536	0,7%	1,4323	-0,5%	1,3983	-0,6%	1,3349	-1,0%	0,9478	-5,1%	0,7943	-6,9%	0,6835	-7,4%	0,5999	-7,0%
	MDD	1,4637		1,4252		1,3896		1,3221		0,8992		0,7392		0,6326		0,5580	
0,78	Anal.	1,7569	-2,6%	1,7209	-2,7%	1,6640	-2,9%	1,5607	-1,8%	1,0016	-7,8%	0,8085	-8,3%	0,6778	-9,5%	0,5835	-9,1%
	MDD	1,7113		1,6737		1,6162		1,5332		0,9231		0,7410		0,6133		0,5302	

Tableau III.4. Les valeurs de facteur d'intensité de contrainte pour le congiguration géométrique $W_2/W_1 = 1$.

a/w1	Réf	E2/E1=0,2		E2/E1=0,25		E2/E1=0,333		E2/E1=0,5		E2/E1=2		E2/E1=3		E2/E1=4		E2/E1=5	
		K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.
0,15	Anal	1,6809	-2,1%	1,6127	-2,4%	1,5106	-2,1%	1,3409	-1,7%	0,6666	8,2%	0,4992	9,1%	0,3990	9,5%	0,3323	9,8%
	MDD	1,6461		1,5733		1,4786		1,3183		0,7211		0,5448		0,4370		0,3649	
0,25	Anal	1,7072	-1,5%	1,6363	-1,7%	1,5303	-1,6%	1,3547	-1,3%	0,6665	7,5%	0,4979	8,8%	0,3974	9,3%	0,3306	9,4%
	MDD	1,6813		1,6079		1,5064		1,3371		0,7165		0,5416		0,4344		0,3616	
0,4	Anal	1,7775	-0,4%	1,6988	-0,2%	1,5820	-0,5%	1,3907	-0,6%	0,6660	7,2%	0,4943	7,4%	0,3930	8,7%	0,3261	9,1%
	MDD	1,7707		1,6949		1,5745		1,3827		0,7136		0,5308		0,4273		0,3559	
0,55	Anal	1,8998	1,7%	1,8065	1,5%	1,6698	1,1%	1,4502	0,7%	0,6643	6,5%	0,4880	7,4%	0,3856	8,0%	0,3187	8,6%
	MDD	1,9323		1,8334		1,6889		1,4606		0,7075		0,5242		0,4165		0,3461	
0,75	Anal	2,2223	5,7%	2,0842	5,5%	1,8886	4,5%	1,5901	3,2%	0,6564	5,2%	0,4717	7,0%	0,3681	7,1%	0,3019	7,4%
	MDD	2,3485		2,1987		1,9740		1,6417		0,6906		0,5049		0,3941		0,3241	
0,8	Anal	2,3623	6,5%	2,2020	6,0%	1,9782	4,9%	1,6440	3,4%	0,6523	4,4%	0,4652	4,7%	0,3615	5,1%	0,2956	6,7%
	MDD	2,5168		2,3339		2,0753		1,7000		0,6812		0,4873		0,3800		0,3154	
0,85	Anal	2,5526	6,3%	2,3593	5,7%	2,0950	4,6%	1,7114	3,0%	0,6464	2,7%	0,4568	3,0%	0,3532	3,1%	0,2879	5,2%
	MDD	2,7140		2,4937		2,1908		1,7624		0,6640		0,4706		0,3641		0,3029	
0,9	Anal	2,8331	4,4%	2,5858	3,7%	2,2574	2,9%	1,8002	1,6%	0,6377	1,2%	0,4467	1,5%	0,3426	2,4%	0,2782	3,7%
	MDD	2,9587		2,6821		2,3223		1,8287		0,6453		0,4535		0,3509		0,2884	

Tableau III.5. Les valeurs de facteur d'intensité de contrainte pour le congiguration géométrique $W_2/W_1 = 5$.

a/w1	Réf	E2/E1=0,2		E2/E1=0,25		E2/E1=0,333		E2/E1=0,5		E2/E1=2		E2/E1=3		E2/E1=4		E2/E1=5	
		K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.	K	% Er.
0,15	Anal	3,0143	-4,9%	2,6774	-3,9%	2,2570	-4,7%	1,7174	-1,4%	0,5450	7,6%	0,3746	7,0%	0,2853	4,7%	0,2304	2,1%
	MDD	2,8665		2,5733		2,1499		1,6938		0,5863		0,4007		0,2987		0,2352	
0,3	Anal	3,0587	-2,5%	2,7106	-1,0%	2,2784	-3,5%	1,7275	0,7%	0,5439	5,9%	0,3733	1,8%	0,2842	2,0%	0,2294	0,4%
	MDD	2,9828		2,6833		2,1996		1,7390		0,5758		0,3800		0,2898		0,2303	
0,45	Anal	3,1397	-0,6%	2,7707	0,8%	2,3169	1,5%	1,7451	3,5%	0,5418	4,1%	0,3712	1,0%	0,2823	-0,1%	0,2277	-4,0%
	MDD	3,1218		2,7927		2,3508		1,8054		0,5642		0,3750		0,2821		0,2186	
0,6	Anal	3,2717	3,5%	2,8675	3,7%	2,3779	5,5%	1,7725	5,7%	0,5386	1,3%	0,3678	-1,4%	0,2793	-3,8%	0,2251	-5,9%
	MDD	3,3876		2,9723		2,5082		1,8730		0,5456		0,3628		0,2687		0,2117	
0,75	Anal	3,4891	7,1%	3,0238	7,7%	2,4740	8,0%	1,8142	8,8%	0,5335	-1,7%	0,3628	-3,6%	0,2748	-7,2%	0,2212	-8,5%
	MDD	3,7365		3,2558		2,6731		1,9739		0,5244		0,3496		0,2549		0,2025	

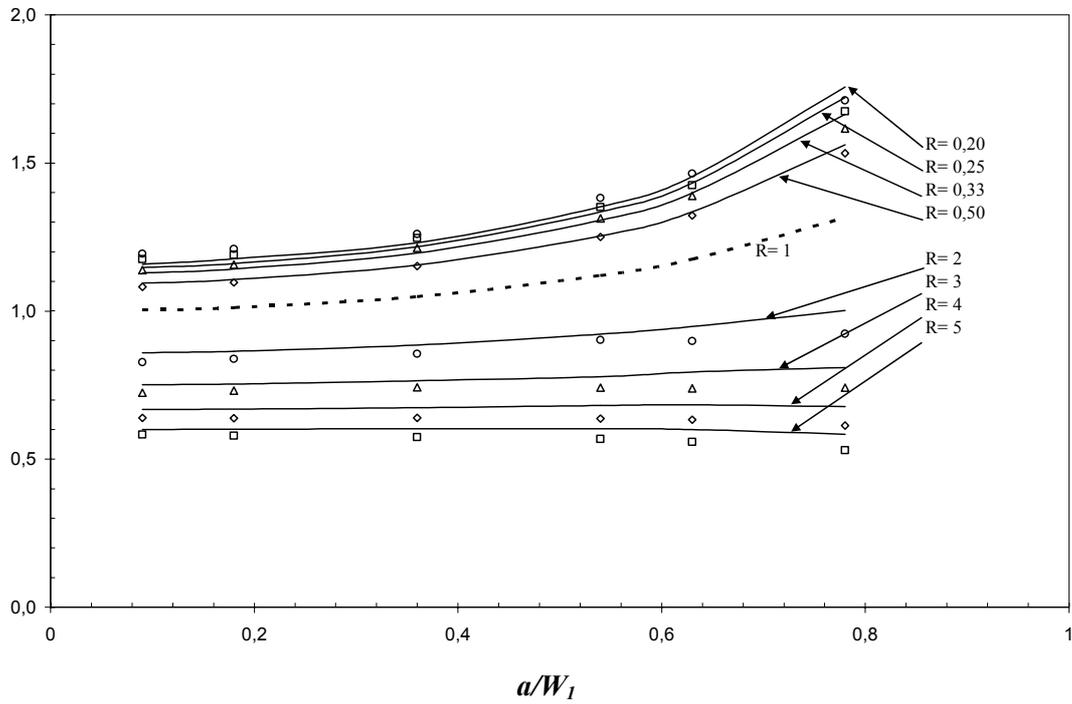


Fig.III.21. Les valeurs de K/K_0 pour $W_2/W_1=0,2$

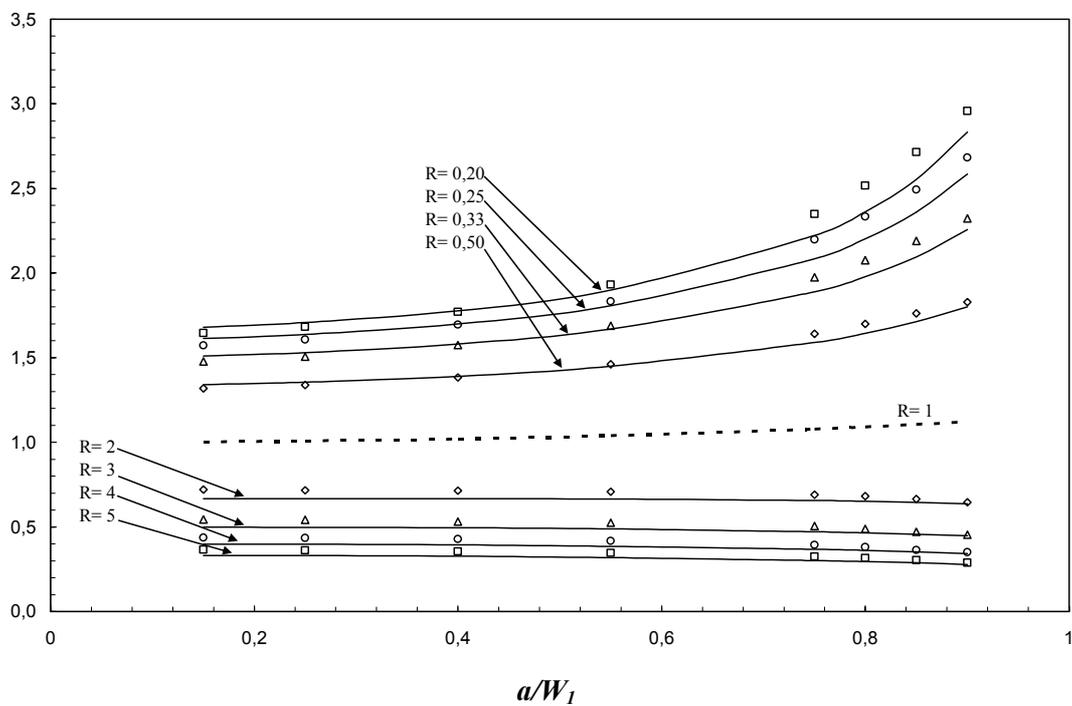


Fig.III.22. Les valeurs de K/K_0 pour $W_2/W_1=1$

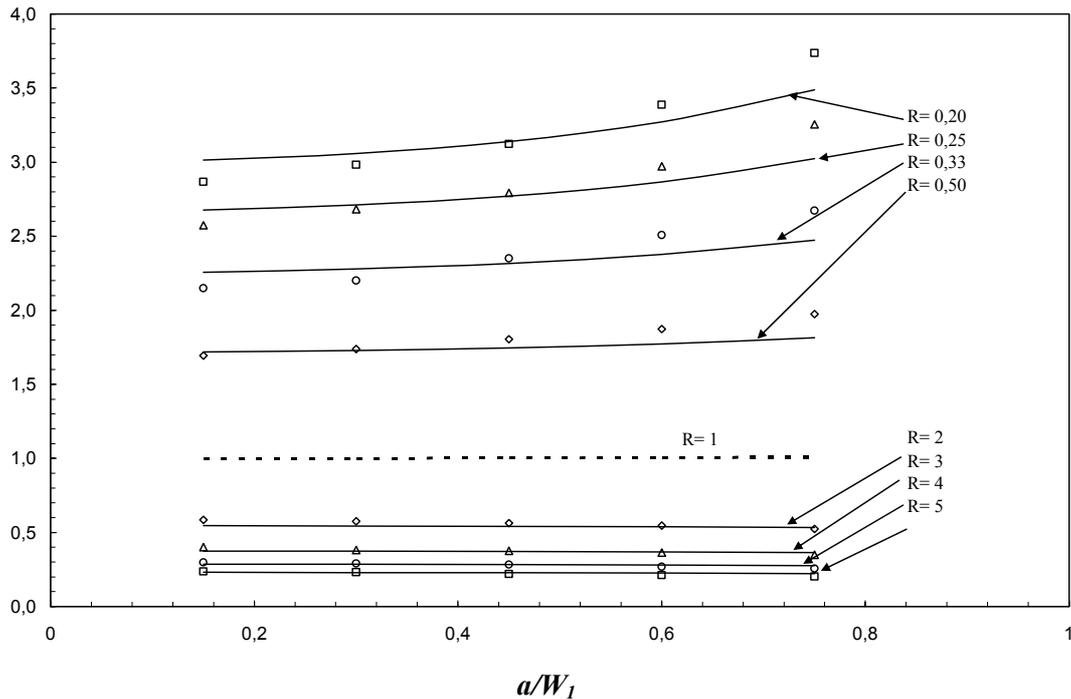


Fig.III.23. Les valeurs de K_1/K_0 pour $W_2/W_1=5$

EXEMPLE 08 : PROPAGATION D'UNE FISSURE DANS UN BI-MATERIAUX.

Une plaque rectangulaire de dimension $100\text{mm} \times 50\text{mm}$ composée de deux matériaux (Fig.III.24), contenant une fissure débouchant dans la deuxième couche, et chargée par $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$ suivant x.

La modélisation numérique de la propagation a été effectuée en discrétisant le contour de la plaque en 60 éléments pour chaque couche et la fissure initiale en 5 éléments. La propagation est effectuée par un pas $\Delta a = 2 \text{ mm}$. Plusieurs calculs ont été effectués en faisant varier la position de la fissure localisée par la distance d (Fig.III.24).

Les caractéristiques mécaniques sont $E_1 = 100000 \text{ MPa}$, $\nu_1 = 0,25$ et $\nu_2 = 0,20$

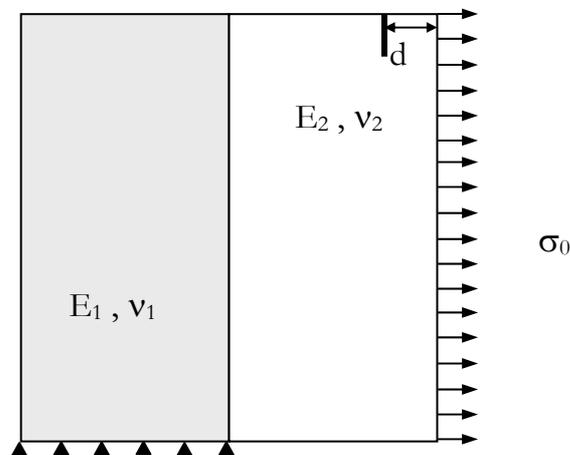


Fig.III.24. Plaque bi-matériaux fissurés.

On varie la distance d de 15mm , 40mm et 43mm , et on trace le trajectoire de propagation pour chaque cas. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure (Fig.III.25) et (Fig.III.26). Dans le cas étudié, les résultats expérimentaux ne sont pas disponibles. La simulation de la propagation présente une tentative dans le cas de ce type de problème. L'interface et la différence des caractéristiques montrent une influence non négligeable sur le chemin de propagation.

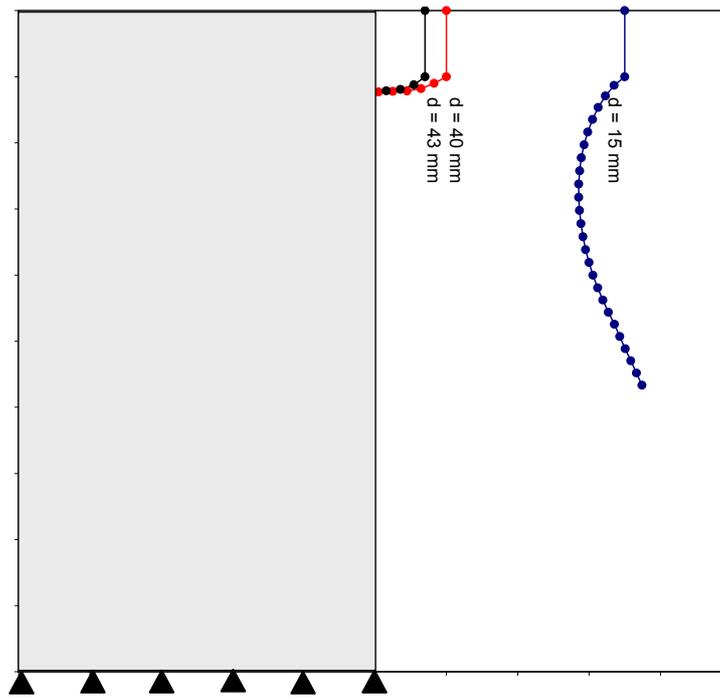


Fig.III.25. Trajectoire de propagation pour $E_2/E_1 = 2$

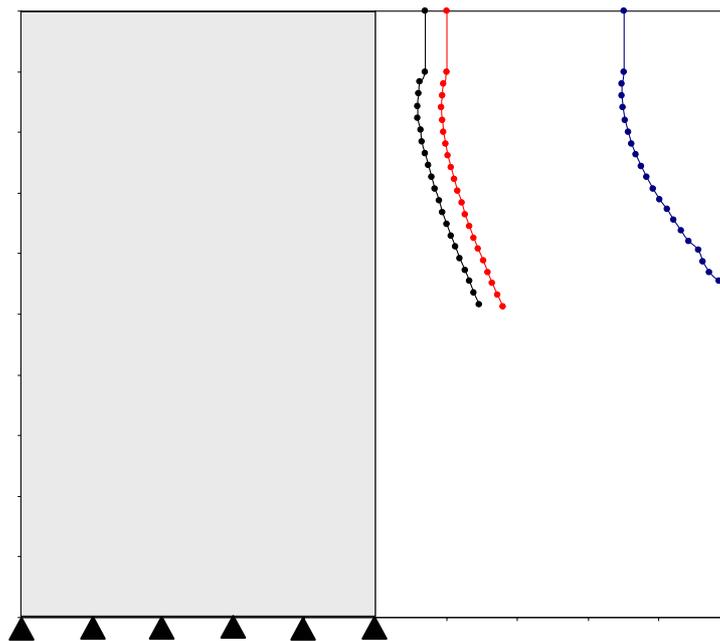


Fig.III.26. Trajectoire de propagation pour $E_2/E_1 = 0,5$

Conclusion GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE.

Ce travail montre les grandes possibilités qu'offre la méthode de discontinuité de déplacements pour la résolution des problèmes de l'élasticité et de mécanique de la rupture en bidimensionnel pour les matériaux monocouche et multicouches.

Nous avons montré premièrement la connaissance des relations fondamentales de la mécanique de la rupture, et les différents techniques pour calculer le facteur d'intensité de contraintes K , taux de restitution d'énergie G , et le trajectoire de propagation d'une fissure.

La deuxième discipline porte sur l'utilisation de la simplicité de la méthode de discontinuité de déplacement pour la modélisation des problèmes de l'élasticité et de la mécanique de la rupture, pour les matériaux monocouche et bi-matériaux, et qu'elle fournit des résultats exploitables.

Nous avons pu grâce à ces acquis, construire un code du calcul sous forme d'un programme pour la modélisation des milieux continus ou fissurés, en utilisant la méthode de discontinuité de déplacement pour résoudre les problèmes plans et multicouches.

Pour tester la validité de notre programme, nous avons lancé une série d'exemples, par soucis de donner un caractère pratique à notre travail. Les exemples traités ont particulièrement montré la puissance de cette méthode en mécanique de la rupture.

Dans la première catégorie d'exemples, nous nous sommes intéressés au déterminer le champ de déplacements et de contraintes, calcul du facteur d'intensité de contrainte et taux de restitution d'énergie. Ces paramètres sont évidemment des éléments d'appréciations fondamentales en mécanique de la rupture. La comparaison des résultats donnés par nos calculs et les résultats analytiques et quelques autres études, montre que ces tests de validation présentent une bonne corrélation.

Dans la deuxième catégorie d'exemples, nous nous sommes toujours intéressés au calcul du facteur d'intensité de contrainte, taux de restitution d'énergie mais cette fois en utilisant la méthode pour les matériaux multicouches.

L'utilisation de la méthode de discontinuité de déplacements pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte dans les multi-matériaux donne d'excellents résultats comparés aux travaux de la littérature. Ceci concerne particulièrement le facteur d'intensité de contrainte, paramètre important en mécanique de la rupture.

Pour la simulation de chemins de propagation dans les multi-matériaux, des résultats sont présentés. Il a été montré l'influence prépondérante de l'interface et des rapports des caractéristiques mécaniques des couches constituant le bi-matériaux. Ces résultats représentent les premiers éléments de réponse de simulation de propagation en multicouches.

Bibliographie

RÉFÉRENCES bibliographiques

- [1] **Kebir H**, *Approches déterministe et probabiliste de la prevision de la durée de vie de structure aéronautique à l'aide de la méthode des équations intégrales duales*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1998.
- [2] **Yang T.Y**, *Finite element structural analysis*. Prentice hall, Inc. 1986.
- [3] **Crouch S.L, Starfield A.M**, *Boundary Element Method in Solid Mechanics with Application in Rock Mechanics and Geological Mechanics*. London, Allen & Unwin, Boston, 1983.
- [4] **Brebbia C.A, Dominguez J**, *Boundary elements: an introductory course*. Mc Graw-Hill, Ind Edition, 1989.
- [5] **Bonnet M**, *Equations intégrales et éléments de frontière*. CNRS Edition Eyrolles, 1995.
- [6] **Crouch S.L**, *Solution of plane elasticity problems by displacement discontinuity method*. Int. J. Num. Methods Eng. 10, pp 301–343, 1976.
- [7] **Shou K.J, Crouch S.L**, *A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 32, No. 1, pp 49-55. 1995
- [8] **Crawford A.M, Curran J,H**, *A displacement discontinuity approach to modeling the creep behavior of rock and discontinuities*. Int. J. of Num. and anal. Meth. In geomech., vol 7, pp 245-267, 1983.
- [9] **Kondo d**, *Modélisation du comportement des roches par la mécanique linéaire de la rupture : Application à l'étude de la stabilité des ouvrages souterrains*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, France, 1989.
- [10] **Belkacemi Y**, *Méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe – développements analytiques et numériques – applications aux milieux fissurés*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, France, 1990.
- [11] **Schultz R. A**, *Stress intensity factors for curved cracks obtained with the displacement discontinuity method*. Int. J. Fracture 37, R31-R34, 1988.

- [12] **Guo H. Aziz N.I, Schmidt L.C**, *linear elastic crack tip modeling by the displacement discontinuity method*. Engng Fracture Mech. 36, pp. 933-942, 1990.
- [13] **Scavia C.A**, *Numerical technique for the analysis of cracks subjected to normal compressive stresses*. Int. J. Numer. Meth. Engng 33, pp.929-942, 1992.
- [14] **Shou K.J., Napier J.A.L**, *A two-dimensional linear variation displacement discontinuity method for three-layered elastic media*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Vol. 36, pp. 719-729, 1999.
- [15] **Barthélémy B**, *Notions pratiques de mécanique de la rupture*. Edition Eyrolles, 1980.
- [16] **Irwin G.R**, *Analysis of stresses and strains near the end of a crack transversing a plate*. J. Appl. Mech, 24, 361–364, 1957.
- [17] **Lemaitre J, Chaboche J.L**, *Mécanique des matériaux solides*. Edition Dunod Paris 1986.
- [18] **PH. Wen**, *Dynamic fracture mechanics: Displacement discontinuity method*. Computational mechanics publication, Southampton, UK and Boston, USA, 1996.
- [19] **François D**, *Comportement mécanique des matériaux*. Edition Masson, 1978.
- [20] **Broek D**, *Elementary engineering fracture mechanics*. Marinus Nijhoff Publishers, 1982.
- [21] **Erdogan F, Sih G.C**, *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*. Journal of basic engineering, transition of ASME, 85, 519-527, 1963.
- [22] **Hussain M.A, Pu S.L, Underwood J**, *Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II, astm stp 560*. American Society for Testing and materials, pp. 2-28, 1974.
- [23] **Sukumar N, Huang Z.Y, Prévost J.H, Suo Z**, *Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks*. Int. J. Numer. Meth. Engng 59, pp.1075-1102, 2004
- [24] **Williams M.L, A. R. Zak**, *Crack point stress singularities at a bi-material interface*. J. appl. Mech. 30, 142, 1963.
- [25] **Sih G.F, Rice J.R**, *The bending of plates of dissimilar materials with cracks*. J. appl. Mech., 31, 477-482, 1964

- [26] **Shih C.F, Asaro R.J**, *Elastic-plastic analysis of cracks on biomaterial interfaces- Part I. Small scale yielding*. ASME, L. appl. Mech 55, 299-316, 1988.
- [27] **Rice J.R**, *Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks*. ASME. J. appl.Mech., 55, 98-103, 1988.
- [28] **Wang C.H**, *Fracture of interface cracks under combined loading*. Engng. Fracture Mech. 56, No1, pp. 77-86, 1997.
- [29] **Bassani J.L, Qu J**, *Finite crack on bimaterial and bicrystal interfaces*. J. Mech. Phys. Solids 37, 435-454, 1989.
- [30] **Bassani J.L, Qu J.**, *Interfacial fracture mechanics for anisotropic bimaterials*. J. Appl. Mech. 60, 422-431, 1993.
- [31] **Suo, Z**, *Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media*. Proc. R. Soc. London 427 (A), 331-358, 1990.
- [32] **Cho S.B, Lee K.R, Choy Y.S, Yuuki R**, *Determination of stress intensity factors and boundary element analysis for interface cracks in dissimilar anisotropic materials*. Engng. Fracture Mech. Vol. 43, No. 4, pp. 603-614, 1992.
- [33] **Barsoum I. Ravi Chandran K.S**, *Stress intensity factor solutions for cracks in finite-width three layer laminates with and without residual stress effects*. Engineering Fracture Mechanics 70, pp. 2015–2031, 2003.
- [34] **Timoshenko S.P, Goodier J.N**, *Theory of elasticity*. McGRAW-HILL, 1970.
- [35] **Tayebi N, Tayebi A.K, Belkacemi Y**, *Numerical tools for fracture of MEMS Devices*. IEEE 0-7695-0104-4, 1999.