

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



Département de Génie Mécanique

Projet de fin d'étude

***En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en génie
Mécanique***

THÈME

**Analyse statique des plaques stratifiées
par la méthode des éléments finis**

Proposé et dirigé par :

**Mr. Said RECHAK
AMMAR
Mr. Mourad BACHENE**

Etudié par :

Mr. Mohamed

Promotion 2007

Dédicaces

Chaleureusement je dédie ce modeste travail :

A la lumière de ma vie, mes chers parents en témoignage pour leur amour et leur sacrifice sans limites et je leurs souhaite la bonne santé et que Dieu me les garde.

A ma grand-mère, à mes braves et affectueux frères et sœurs.

A toutes les familles AMMAR, OUNAR, RAHMANI, AKKOUCHE, et MAAKNI.

A tous mes amis et collègues de la promotion.

A toute personne qui me connaît de près ou de loin...

Mohamed

Remerciements

Je remercie DIEU tout puissant qui m'a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Mes sincères remerciements à mon promoteur Monsieur RECHAK Saïd, pour ses conseils et orientations.

Un très grand merci à mon co-promoteur Monsieur BACHENE Mourad pour sa collaboration, son soutien et ses conseils.

Mes remerciements également à tous les enseignants qui ont participé à ma formation, à tous les employés du département génie mécanique, et ceux de la bibliothèque de l'école.

Je tiens également à remercier tous mes amis et mes camarades de la promotion, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la bonne réalisation de ce travail.

Mohamed

ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو إعطاء فكرة مجملة عن التصرف الميكانيكي للصفائح المترابكة وعن القوانين التي تسيّرهُ، استعمال منهجية الأجزاء المتناهية لحساب تجاوبها في حالة السكون، بناء برنامج في الإعلام الآلي بلغة *FORTRAN* الذي يسمح بحساب التنقلات، التشوهات و الضغوطات في نقاط *GAUSS* وفي الأخير إجراء تحليل للضغوطات لمعرفة العوامل التي تؤثر عليها.

كلمات المفتاح : الصفائح المترابكة - المواد المترابكة - المواد المركبة - الأجزاء المتناهية .

Résumé

L'objet de cette étude est de donner des notions sur le comportement mécanique des plaques stratifiées et les lois qui le régissent, d'utiliser la méthode des éléments finis pour calculer les réponses statiques, d'élaborer un programme informatique en langage FORTRAN qui permet le calcul des déplacements, des déformations et des contraintes aux points de GAUSS et enfin faire une analyse sur les contraintes afin de voir l'influence de quelques paramètres sur ces dernières.

Mots clés : Matériaux composites - Matériaux stratifiés - plaques stratifiées - analyse statique des plaques stratifiées - Eléments finis.

Summary

The object of this study is to give notions on the mechanical behaviour of the laminated plates and the laws which govern it, to use the finite element method to calculate the static responses, to work out a data-processing program in FORTRAN language which allows the calculation of the displacements, the strains and the stresses at the Gaussian points; and finally to show an analysis on the stresses in order to see the influence of some parameters on them.

Key words: Composite materials - laminated materials - laminated plates - static analysis of laminated plates - finite elements.

SOMMAIRE

Introduction générale.....	02
Chapitre I : Généralités sur les stratifiés	04
I.1.Introduction.....	04
I.2.Définition	04
I.3.Les différents types des constituants d'un composite	04
I.3.1.Les renforts (fibres).....	04
I.3.2.Les matrices	05
I.4.Les matériaux composites structuraux	06
I.4.1.Les Monocouches	06
I.4.2.Les Stratifiés	06
I.4.3.Notation des stratifiés	07
Chapitre II : Comportement mécanique des stratifiés.....	10
II.1.Introduction	10
II.2.Champ des déplacements.....	10
II.3.Champ des déformations	11
II.4.Relation contraintes -déformations.....	12
II.5. Résultantes et moments	15
II.6.Equations constitutives	16
II.7.Equations fondamentales des plaques stratifiées.....	17
II.8.Calcul des contraintes interplis.....	19
Chapitre III : Formulation par éléments finis.....	21
III.1.Introduction	21
III.2.Discrétisation.....	22
III.3.Energie potentielle du système.....	25
III.4.Matrice de rigidité	25
Chapitre IV : Présentation du programme informatique.....	29
IV.1.Introduction.....	29

IV.2.Description du programme.....	29
IV.2.1.Introduction des données	30
IV.2.1.1.Données mécaniques.....	31
IV.2.1.2.Données géométriques	31
IV.2.2.Construction de la matrice de rigidité	34
IV.2.3.Résolution	36
IV.2.4.impression des résultats	36
IV.2.5.Schematisation du programme.....	37
Chapitre V : Validation des résultats et analyse des contraintes.....	41
V.1.Introduction	41
V.2.Validation des résultats du programme	41
V.2.1. Cas d'un matériau isotrope	41
V.2.2. Cas d'un matériau composite	45
V.3.Analyse des contraintes	46
V.3.1.Effet du rapport a/h sur les contraintes de cisaillement transverse	47
V.3.2.Effet de l'anisotropie sur la déflexion maximale	48
V.3.3.Effet de l'anisotropie sur la contrainte de Von Mises.....	49
V.3.4.Effet de l'anisotropie sur les contraintes de cisaillement transverse.....	50
V.3.5.Effet des dimensions de la plaque sur les contraintes de cisaillement et de Von Mises	53
V.3.6.Effet de l'empilement des couches dans la plaque sur les contraintes.....	55
Conclusion générale	59
Bibliographie	62
Annexe 1	64
Annexe 2	67
Annexe 3	69
Annexe 4	73
Annexe 5	79

TABLE DES FIGURES

Figure 1.1. Nappe unidirectionnelle	06
Figure 1.2. Tissu / mat	06
Figure 1.3. Types de tissus	06
Figure 1.4. Schéma représentatif d'un stratifié multicouches	07
Figure 1.5. Exemple de représentation d'un stratifié	08
Figure 2.1. Schéma représentatif d'une plaque stratifiée	10
Figure 2.2. Directions principales dans un pli	12
Figure 2.3. Changement du repère dans un pli	14
Figure 3.1. Elément de référence	17
Figure 4.1. Enchaînement des opérations pour le calcul statique des stratifiés	30
Figure 4.2. Système de numérotation pour un même nombre d'éléments	32
Figure 4.3. Exemple d'une plaque discrétisée en six éléments et encastrée sur ses deux cotés	33
Figure 4.4. Répartition des degrés de liberté actifs dans la plaque	34
Figure 4.5. Structure de la matrice de rigidité globale après élimination des degrés de liberté bloqués	36
Figure 4.6. Schéma représentatif du programme élaboré	39
Figure 5.1. Variation de la contrainte de cisaillement transverse normalisée $\bar{\sigma}_{xz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée stratifiée ($a/h = 10$)	46
Figure 5.2. Variation de la contrainte de cisaillement transverse normalisée $\bar{\sigma}_{yz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque stratifiée carrée ($a/h = 10$)	47
Figure 5.3. Effet du rapport a/h sur la contrainte de cisaillement transverse normalisée $\bar{\sigma}_{xz}$ pour une plaque stratifiée (0/90/0/90)	47
Figure 5.4. Effet du rapport a/h sur la contrainte de cisaillement transverse normalisée $\bar{\sigma}_{yz}$ pour une plaque stratifiée (0/90/0/90)	48
Figure 5.5. Effet de l'anisotropie du matériau sur la déflexion normalisée \bar{w}_0 pour les stratifiés (0/90) ₃ ,(-45/45) ₃ ,(-30/30) ₃	48
Figure 5.6. Effet de l'anisotropie du matériau sur la contrainte de Von Mises maximale $\bar{\sigma}_{Von-MisesMAX}$ pour les stratifiés croisés (0/90) ₃ ,(-45/45) ₃ et (-30/30) ₃	49
Figure 5.7. Effet de l'anisotropie du matériau sur la contrainte de Von Mises $\bar{\sigma}_{Von-Mises}$ pour une plaque carré d'un stratifié symétrique (25/30/45) _s	50

Figure 5.8. Effet de l'anisotropie du matériau sur la contrainte de Von Mises $\bar{\sigma}_{Von-Mises}$ pour une plaque carré d'un stratifié croisé (-45/45) ₃	50
Figure 5.9. Effet de l'anisotropie du matériau sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$ pour une plaque carré d'un stratifié symétrique (0/90/0) _s	51
Figure 5.10. Effet de l'anisotropie du matériau sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$ pour une plaque carré d'un stratifié croisé (0/90) ₃	51
Figure 5.11. Effet de l'anisotropie du matériau sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{yz}$ pour une plaque carré d'un stratifié symétrique (25/30/45) _s	52
Figure 5.12. Effet de l'anisotropie du matériau sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{yz}$ pour une plaque carré d'un stratifié croisé (-45/45) ₃	52
Figure 5.13. Effet de l'anisotropie du matériau sur la contrainte de cisaillement transverse maximale $\bar{\sigma}_{xzMAX}$ pour les stratifiés croisés (0/90) ₃ et (-45/45) ₃	53
Figure 5.14. Effet des dimensions de la plaque sur la contrainte de Von Mises $\bar{\sigma}_{Von-Mises}$ pour un stratifié croisé (-30/30) ₃	53
Figure 5.15. Effet des dimensions de la plaque sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$ pour un stratifié croisé (-30/30) ₃	54
Figure 5.16. Effet des dimensions de la plaque sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{yz}$ pour un stratifié croisé (-30/30) ₃	54
Figure 5.17. Effet des dimensions de la plaque sur la contrainte de cisaillement $\bar{\sigma}_{xy}$ pour un stratifié croisé (-30/30) ₃	55
Figure 5.18. Effet de l'empilement des couches sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$, empilements (90/45/30) _s et (90/30/45) _s	56
Figure 5.19. Effet de l'empilement des couches sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$, empilements (30/45/90) _s et (45/30/90) _s	56
Figure 5.20. Effet de l'empilement des couches sur la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\sigma}_{xz}$, empilements (45/90/30) _s et (30/90/45) _s	57
Figure A1.1. Les principaux matériaux des renforts	64
Figure A1.2. Les différentes familles des matrices	64
Figure A3.1. Schéma d'un changement de base	69
Figure A4.1. Domaine d'un milieu continu	73

TABLE DES TABLEAUX

Tableau 5.1. Déplacement au centre de la plaque ($\times q_0.a^4 / D$) : exemple 1.	42
Tableau 5.2. Moments de flexion au centre de la plaque ($\times q_0.a^2$) exemple 1.....	42
Tableau 5.3. Forces de cisaillement aux mi-bords de la plaque ($\times q_0.a$) exemple 1	42
Tableau 5.4. Moment de torsion au sommet de la plaque ($\times q_0.a^2$) exemple 1.	43
Tableau 5.5. Résultats de l'exemple 2.	43
Tableau 5.6. Résultats de l'exemple 3.	44
Tableau 5.7. Résultats de l'exemple 4.	44
Tableau 5.8. Les déflexions maximales normalisées dans une plaque stratifiée pour différentes valeurs de a/h.	45
Tableau 5.9. Déflexions maximales normalisée pour différents empilements du stratifié.....	55
Tableau A1.1. Les caractéristiques mécaniques des fibres	65
Tableau A1.2. Les critères des matrices TD et TP	65
Tableau A1.3. Tableau A1.3.Les caractéristiques mécaniques des résines	66

NOMENCLATURE

[A] : matrice d'extension.	(N/m)
A_{ij} : éléments de la matrice [A].	(N/m)
{a} : vecteur des déplacement en un point M de la surface de la plaque.	(m)
{ a_e } : vecteur des déplacement pour un élément du maillage de la plaque.	(m)
a : cote suivant la direction x de la plaque	(m)
[B] : matrice de couplage.	(N)
[B_i] : matrice d'interpolation des déformations.	
B_{ij} : éléments de la matrice [B]	(N)
b : cote suivant la direction y de la plaque	(m)
[C] : matrice constitutive.	
C_{ij} : éléments de la matrice [C]	
C (0) : continuité d'ordre 0.	
C : cosinus de l'angle θ .	
[D] : matrice de flexion.	(N.m)
D_{ij} : élément de la matrice [D].	(N.m)
{ d_i } : vecteur des déplacements aux nœuds.	(m)
E_1 : module d'élasticité longitudinale.	(N/m ²)
E_2 : module d'élasticité transversale.	(N/m ²)
[F] : matrice de cisaillement transverse.	(N/m)
F_{ij} : éléments de la matrice [F].	(N/m)
{F} : vecteur des forces extérieures.	(N)
f_x, f_y, f_z : forces volumiques suivant les directions x,y et z.	(N/m ³)
G12 : module de cisaillement longitudinal.	(N/m ²)
G23 , G13 : modules de cisaillement transversal.	(N/m ²)
g : nombre de points de Gauss.	
h : épaisseur totale de la plaque stratifiée.	(m)
H_i : hauteur de la colonne i dans la matrice de rigidité [K].	
[ID] : matrice d'identification.	
[J] : matrice jacobéenne.	
J : déterminant de la matrice [J].	
[K] : matrice de rigidité globale.	(N/m)
k : numéro du pli.	

$[K_e]$: matrice de rigidité d'un élément.	(N/m)
$[K^{\alpha\beta}]$: sous matrices de la matrice $[K]$.	(N/m)
L : largeur de la bande dans la matrice $[K]$.	
LM : vecteur des connectivités des éléments.	
L_i : position du premier élément non nul de la colonne i dans la matrice $[K]$.	
M : point considéré sur la surface de la plaque.	
M_x, M_y : moments de flexion.	(N)
M_{xy} : moment de torsion.	(N)
m : différence maximale entre deux noeuds adjacents.	
$NDDL$: nombre de degrés de liberté par noeud.	
NE : nombre d'éléments du maillage.	
$NEVAB$: nombre de variables par élément.	
N_i : fonction d'interpolation des noeuds.	
NN : nombre de noeuds par élément.	
$NPOIN$: nombre total de points.	
N_x, N_y : efforts en membrane suivant x et y respectivement.	(N/m)
N_{xy} : effort de cisaillement dans le plan (x,y) de la plaque.	(N/m)
$[Q]$: matrice de rigidité réduite dans le repère du pli.	(N/m ²)
$[\bar{Q}]$: matrice de rigidité réduite dans le repère du stratifié.	(N/m ²)
Q_{ij} : éléments de la matrice $[Q]$.	(N/m ²)
\bar{Q}_{ij} : éléments de la matrice $[\bar{Q}]$.	(N/m ²)
Q_x, Q_y : efforts de cisaillement dans les plans (x,z) et (y,z) respectivement.	(N/m)
q : charge variable par unité de surface.	(N/m ²)
q_0 : charge constante par unité de surface.	(N/m ²)
S : sinus de l'angle θ .	
$[T]$: matrice de changement de base des contraintes.	
$[T']$: matrice de changement de base des déformations.	
T : température.	
u, v, w : déplacements du point M suivant les directions x,y,z respectivement.	(m)
u_0, v_0, w_0 : déplacements du point M sur le plan moyen suivant les directions x,y,z respectivement.	(m)
u_{0i}, v_{0i}, w_{0i} : déplacements du noeud i suivant les directions x,y,z respectivement.	(m)

- \bar{w}_0 : flexion normalisée au centre de la plaque.
- x, y, z : coordonnées du point M dans le repere (x,y,z) de la plaque. (m)
- x_i, y_i, z_i : coordonnées du nœud i dans le repere (x,y,z) de la plaque. (m)
- α_{ij} : coefficients de correction en cisaillement transverse.
- $\{\mathcal{E}\}$: vecteur des déformations.
- $\{\mathcal{E}\}_{123}^k$: vecteur des déformations pour le pli k exprimé dans le repère (1,2,3) du pli.
- $\{\mathcal{E}\}_{xyz}^k$: vecteur des déformations pour le pli k exprimé dans le repère (x,y,z).
- $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z$: déformations en membrane au point M du stratifié.
- $\mathcal{E}_{x0}, \mathcal{E}_{y0}, \mathcal{E}_{z0}$: déformations en membrane au point M sur le plan moyen.
- ϕ : diamètre de la fibre. (m)
- $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$: déformations en cisaillement dans les plans (x,y),(x,z) et (y,z) respectivement en un point M de la plaque.
- $\gamma_{xy0}, \gamma_{xz0}, \gamma_{yz0}$: déformations en cisaillement dans les plans (x,y),(x,z) et (y,z) respectivement en un point M sur le plan moyen de la plaque.
- η, ξ : coordonnées naturelles.
- η_i, ξ_i : coordonnées naturelles du noeud i.
- $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$: déformations en courbure. (m⁻¹)
- ν : coefficient de Poisson.
- ν_{12} : coefficient de Poisson longitudinal.
- ν_{13} : coefficient de Poisson transversal.
- π : énergie potentielle de la plaque. (N.m)
- π_e : énergie potentielle d'un élément de la plaque. (N.m)
- θ : angle d'orientation des fibres par rapport au repère de la plaque. (°)
- θ_x, θ_y : rotations du point M autour des axes ox et oy respectivement. (rad)
- θ_{xi}, θ_{yi} : rotations du noeud i autour des axes ox et oy respectivement. (rad)
- $\{\sigma\}$: vecteur des contraintes. (N/m²)
- $\{\sigma\}_{123}^k$: vecteur des contraintes pour le pli k exprimé dans le repère (1,2,3) du pli. (N/m²)
- $\{\sigma\}_{xyz}^k$: vecteur des contraintes pour le pli k exprimé dans le repere (x,y,z). (N/m²)
-

σ_x, σ_y : contraintes en membrane au point M du stratifié. (N/m²)

$\bar{\sigma}_{zy}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\sigma}_{yz}$: contraintes de cisaillement normalisées.

$\sigma_{Von-Mises}$: contrainte de Von Mises. (N/m²)

σ_1, σ_2 : contraintes de traction/compression dans le repère local. (N/m²)

$\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$: contraintes de cisaillement dans les plans (1,2),(2,3),(1,3) respectivement. (N/m²)

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$: contraintes de cisaillement dans les plans (x,y),(x,z),(y,z) respectivement. (N/m²)

$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$: contraintes de cisaillement dans les plans (1,2),(2,3),(1,3) respectivement (N/m²)

Ω : volume de la plaque (m³)

Ω_e : volume surface d'un élément de la plaque. (m³)

INTRODUCTION GENERALE

Parmi les différents matériaux (les métaux, les plastiques,...) on trouve les composites qui sont formés en combinant deux ou plusieurs matériaux à l'échelle macroscopique dans le but d'améliorer les propriétés technologiques des matériaux conventionnels telles que la rigidité, le poids, les propriétés thermiques, la durée de vie, la résistance à la corrosion et à l'usure.

Vu leurs propriétés attractives ces matériaux trouvent des applications dans des domaines très variés à savoir l'aviation ,les structures sous-marines, les structures spatiales, l'automobile, les équipements de sport, les dispositifs médicaux

L'utilisation très variée et progressive des composites suscite une attention considérable sur l'étude du comportement des structures qu'ils constituent. En effet la condition fonctionnelle et les considérations économiques de la conception forcent les ingénieurs à chercher fiablement dans des méthodes économiques permettant de déterminer les caractéristiques statiques et dynamiques des structures composites. Les méthodes numériques se sont imposées vu leur fiabilité en matière de temps de calcul et parmi ces méthodes la méthode des éléments finis s'avère un outil usuel pour l'analyse des structures.

Globalement les matériaux composites sont divisés, suivant l'architecture de leur conception, en deux catégories : les matériaux sandwichs et les matériaux stratifiés ; mais dans le présent travail notre étude se limite à la dernière catégorie.

L'analyse du comportement des plaques stratifiées est faite en utilisant la théorie de Mindlin qui tient compte du cisaillement transverse contrairement à la théorie classique des plaques minces qui le néglige.

L'étude est faite en trois grandes parties. La première sur les stratifiés comporte deux chapitres dont le premier porte sur des généralités sur les plaques stratifiées et le second sur leur comportement mécanique et les lois qui le régissent. La deuxième sur la méthode des éléments finis et la programmation et elle est divisée en deux chapitres dont l'un sur la méthode des éléments finis et l'autre sur le programme élaboré en langage Fortran qui permet de développer les calculs. Enfin la troisième et dernière partie contient un chapitre qui porte sur l'analyse des contraintes dans les stratifiés.

CHAPITRE - I -
GENERALITES SUR LES
STRATIFIES

I.1.Introduction

L'étude du comportement des matériaux composites requiert des connaissances sur leur constitution et leur mise en œuvre ; en effet voila ci-dessous quelques notions de base sur les composites :

I.2.Définition

Un matériau composite est un matériau hétérogène résultant de l'association d'au moins deux matériaux non miscibles. Il est constitué, essentiellement, d'un renfort et d'une matrice.

❖ **Le renfort** : appelé aussi armature ou squelette, il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité), il est souvent de nature filamentaire (des fibres organiques ou inorganiques).

❖ **La matrice** : elle assure la liaison entre les fibres, la répartition des efforts (résistance à la compression ou à la flexion), ainsi que la protection chimique, elle est un polymère ou une résine organique.

En plus de ces deux constituants de base, on trouve d'autres produits chimiques telle que l'interface qui assure la compatibilité renfort-matrice et transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif. Ces produits peuvent jouer sur le comportement mécanique du composite, mais n'interviennent pratiquement jamais dans le calcul de sa structure.

I.3.Les différents types des constituants d'un composite

I.3.1.Les renforts (fibres)

❖ La fibre de verre

Les filaments sont obtenus par filage de verre (silice plus carbonates de sodium et de calcium en fusion à $T > 1000$ °C), à travers des filières en alliage de platine. Les étapes de fabrication sont :

- Composition du mélange des oxydes.
- Fusion 1500°C
- Fibrage 1200°C : four filière de diamètre de 1 à 2 mm
- Etirage : diamètre de 3 à 20 mm
- Ensimage (protection, amélioration de l'adhésion fibre-matrice)
- Bobinage
- Tissage

❖ **Le Kevlar** : Fibre d'aramide, de couleur jaune paille : polyamides aromatisés obtenus par synthèse à -10°C , puis filés et étirés pour obtenir un module d'élasticité élevé.

❖ **Le Carbone** : Des filaments acryliques de Tergal ou de rayonne obtenus à partir de distillation de l'houille ou de pétrole, ils sont oxydés à chaud (300°C) puis chauffés à 1500°C dans une atmosphère d'azote. On obtient des filaments noirs et brillants. Le module d'élasticité élevé est obtenu par filage à chaud.

❖ **Le Bore** : Dépôt chimique en phase vapeur de chlorure de bore et d'hydrogène. Un filament de tungstène ($\varnothing = 12\ \mu\text{m}$) sert de catalyseur à la réaction à 1200°C . Les fibres de bore obtenues ont un diamètre d'environ $100\ \mu\text{m}$

❖ **Le Carbure de Silicium** : Dépôt chimique en phase vapeur (1200°C) du méthyle trichlorosilane mélangé à l'hydrogène.

Les principaux matériaux du renfort ainsi que quelques caractéristiques mécaniques des fibres sont donnés dans l'annexe [1]

I.3.2. Les matrices

❖ **Résine thermodurcissable** : Polymère transformé en un produit essentiellement infusible et insoluble après traitement thermique (chaleur, radiation) ou physico-chimique (catalyse, durcisseur).

❖ **Résine thermoplastique** : Polymère pouvant être alternativement ramollie par chauffage et durci par refroidissement dans un intervalle de température spécifique du polymère étudié. Les résines thermoplastiques présentent l'aptitude à l'état ramolli, de se mouler aisément par plasticité.

❖ **Résine thermostable** : Polymère présentant des caractéristiques mécaniques stables sous des pressions et des températures élevées ($>200^{\circ}\text{C}$) appliquées de façon continue.

❖ **Elastomère thermoplastique** : Polymère fortement élastique.

Dans l'annexe [1] sont citées les différentes familles de matrices et quelques caractéristiques mécaniques des résines.

I.4. Les matériaux composites structuraux

I.4.1. Les Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort :

- Monocouches à fibres unidirectionnelles UD (figure 1.1).
- Monocouches à fibres bidirectionnelles non tissées appelés mats (figure 1.2).
- Monocouches à fibres bidirectionnelles tissées, appelés tissus et dont les catégories les plus connues sont : les toiles ou taffetas, les satins et les sergés (figure 1.3).

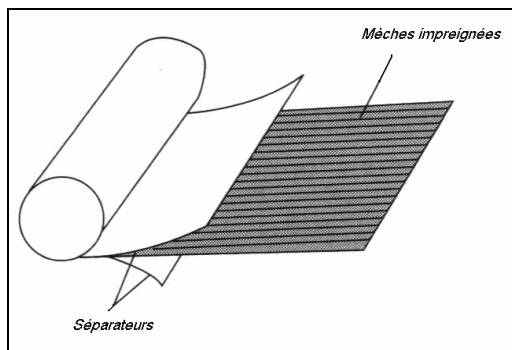


Figure 1.1: nappe unidirectionnelle

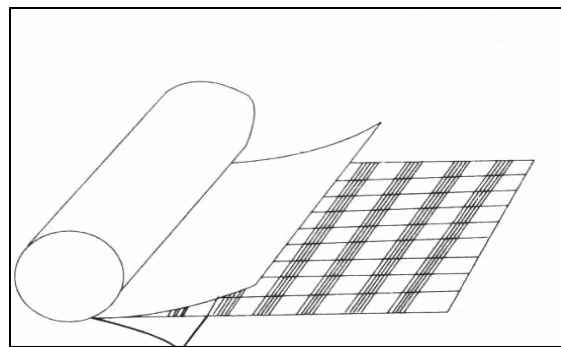
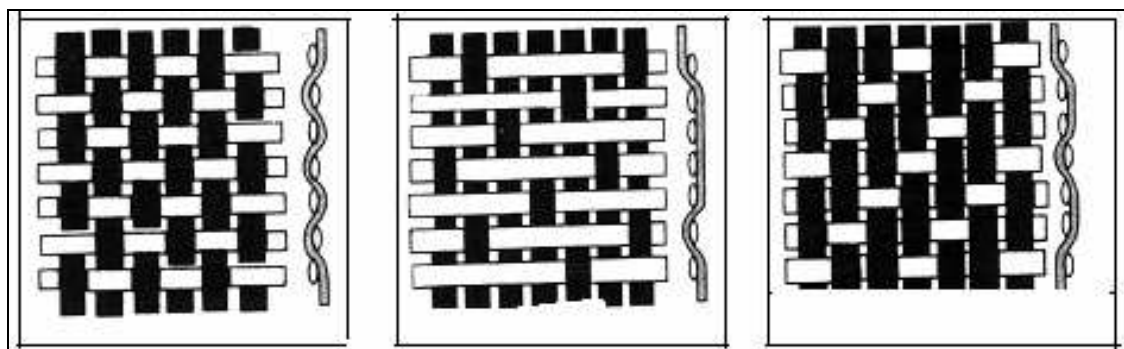


Figure 1.2 : tissu / mat.



a. Toile ou taffetas

b. Satin

c. Sergé

Figure 1.3 : types de tissus.

I.4.2. Les Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié (Figure 1.4).

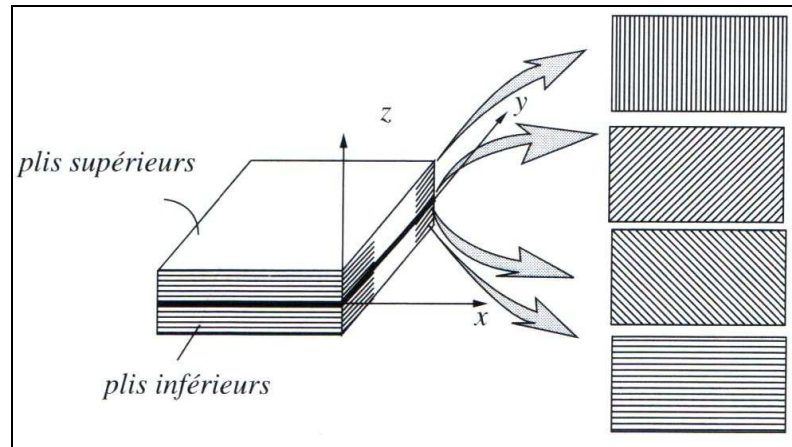


Figure 1.4 : schéma représentatif d'un stratifié multicouches.

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques.

I.4.3. Notation des stratifiés

La description se fait depuis le pli extrême inférieur ($z < 0$) jusqu'au pli extrême supérieur ($z > 0$), tel que :

- Chaque pli est présenté par l'angle d'orientation de ses fibres.
- Les plis successifs sont séparés par une barre (/).
- On met un 'S' pour indiquer l'existence d'une symétrie par rapport au plan moyen.

Exemple

Un stratifié possédant l'empilement $(0, +45, +90, -45)_s$ est un stratifié avec 4 couches dans les directions 0° , -45° , 90° et $+45^\circ$, l'orientation 0° coïncidant avec l'axe des abscisses du repère principal du composite. Ces plans seront répartis symétriquement par rapport au plan moyen du stratifié (Figure 1.5).

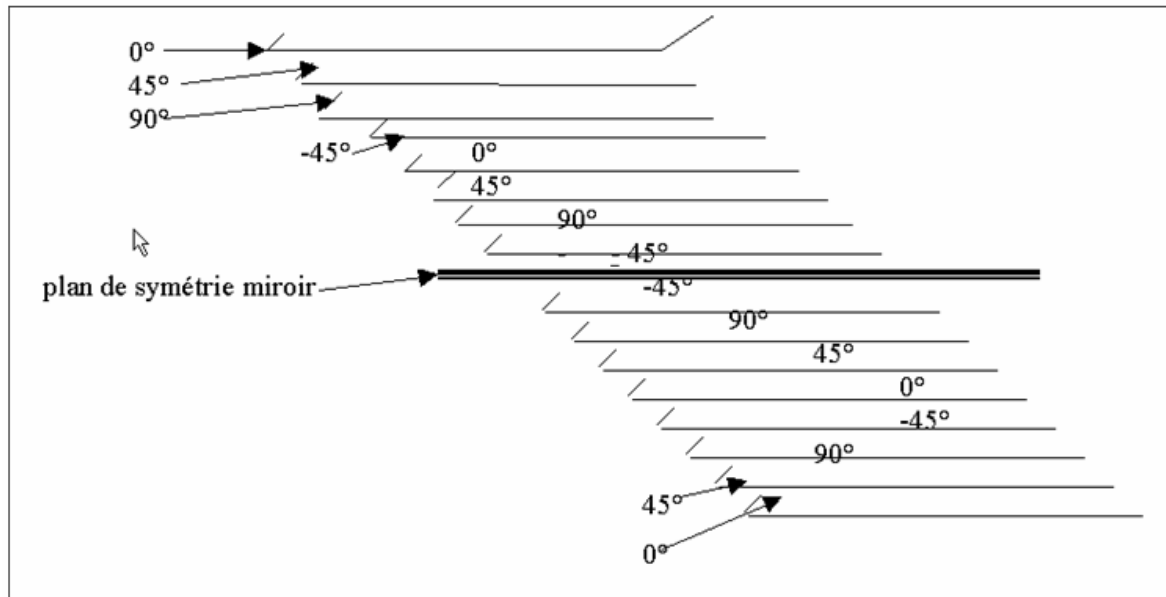


Figure 1.5 : Exemple de représentation d'un stratifié

Selon l'empilement des couches on peut avoir des stratifiés de type :

1. **Equilibré** : il comporte autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientée suivant la direction $-\theta$.
2. **Symétrique** : il comporte des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
3. **Orthogonal** : il comporte autant de couches à 0° que de couches à 90° .

CHAPITRE - II -
COMPORTEMENT MECANIQUE
DES STRATIFIES

II.1.Introduction

L'objet de ce chapitre consiste à développer les équations fondamentales des plaques stratifiées, la théorie utilisée est celle de Yang, Norris et Stavsky [4]. La relation contraintes–déformations diffère de celle des plaques homogènes du fait de l'existence de couplage entre les déformations planes et en courbures. Par contre, les hypothèses rapportées aux plaques homogènes restent valables aux plaques stratifiées, et sont les suivantes :

1. Les contraintes normales à la surface moyenne sont négligeables par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes. $\sigma_z \approx 0$
2. La normale à la surface moyenne avant déformation reste droite mais pas nécessairement normale à la surface moyenne après déformation. Ceci revient à la prise en compte de cisaillement transverse.
3. Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur de la plaque.
4. Les différentes couches du stratifié restent parfaitement collées.

II.2.Champ des déplacements

Considérons une plaque stratifiée rectangulaire constituée de n couches de même matériau et d'orientations des fibres différentes. On définit un système de référence (x, y, z) situé sur la surface moyenne de la plaque dont l'axe z correspond à la direction suivant l'épaisseur. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont indiquées sur la figure 2.1.

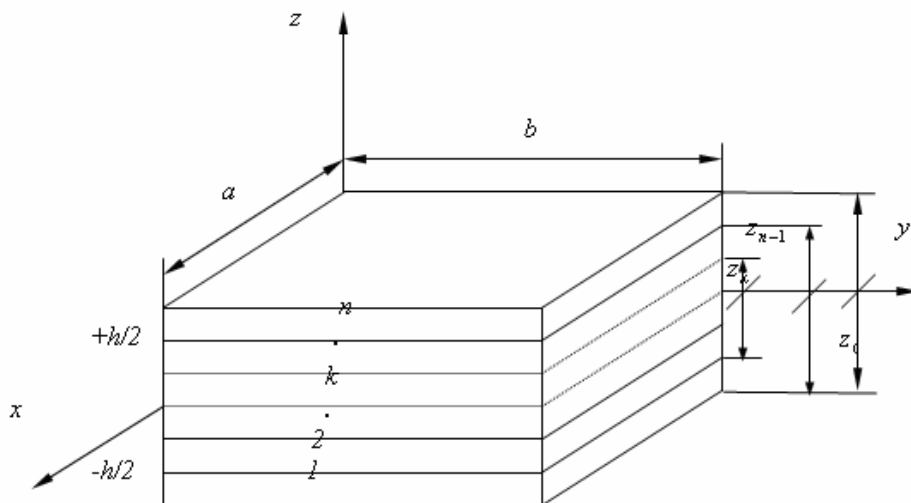


Figure 2.1.Scéma représentatif d'une plaque stratifiée.

Le champ des déplacements d'un point quelconque $M(x, y, z)$ de la plaque en présence du cisaillement transverse est approché par un polynôme linéaire en z à coefficients en (x, y) de la forme suivante [4] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

où :

u, v, w : sont respectivement, les déplacements suivant les directions x, y, z .

u_0, v_0, w_0 : sont respectivement, les déplacements suivant les directions x, y, z d'un point situé sur la surface moyenne de la plaque.

θ_x, θ_y : sont respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes x, y .

Cette forme répond aux conditions de compatibilité des déformations [voir Annexe 2] et permet de prendre en compte le couplage entre les déformations planes et de courbures.

II.3.Champ des déformations

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements (2.1) et s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z\kappa_x \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{y0} + z\kappa_y \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy0} + z\kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \varepsilon_{y0} &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & \gamma_{xy0} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \kappa_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, & \kappa_y &= \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, & \kappa_{xy} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{aligned}$$

II.4.Relation contraintes - déformations

La loi de Hooke généralisée permet, pour une plaque composite stratifiée, d'écrire la relation entre les contraintes et les déformations. Il est nécessaire d'exprimer cette relation pour chaque pli k à cause de la discontinuité des contraintes interlaminaires. Par souci de simplification, on définit un système d'axes principal (local) (1, 2,3) dont l'axe (1) correspond à la direction longitudinale des fibres (*Figure 2.2*).

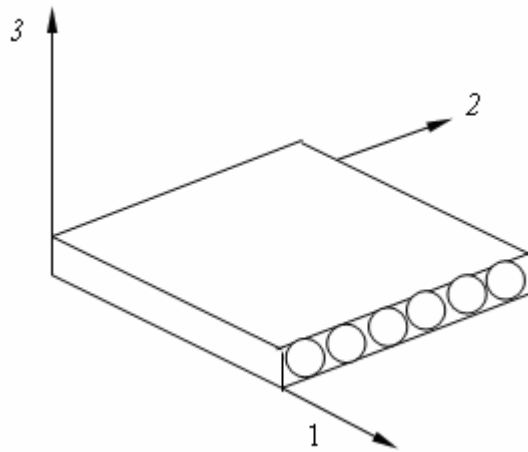


Figure 2.2 : Directions principales dans un pli

La relation contraintes-déformations par rapport à ce système d'axe s'écrit [4] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{33} & 0 & 0 \\ & sym & & Q_{44} & 0 \\ & & & & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^k \quad (2.3)$$

où :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{33} &= G_{12}, & Q_{44} &= G_{23}, & Q_{55} &= G_{13} \end{aligned}$$

avec :

E_1 : Module d'Young longitudinal.

E_2 : Module d'Young transversal.

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal.

G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement transversal.

ν_{12}, ν_{21} : Coefficients de Poisson.

La relation (2.3) peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\{\sigma\}_{123}^k = [Q]\{\epsilon\}_{123}^k \quad (2.4)$$

Généralement, dans un stratifié, la direction des fibres est décalée d'un pli à un autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de l'ensemble du stratifié, il est nécessaire d'exprimer la relation (2.3) par rapport au système d'axes global (x, y, z) , cette opération est effectuée en faisant intervenir les matrices de changement de base des contraintes et des déformations [voir Annexe 3].

Soit donc pour le champ des contraintes :

$$\{\sigma\}_{xyz}^k = [T]\{\sigma\}_{123}^k \quad (2.5)$$

où $[T]$ est la matrice de changement de base des contraintes, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cos \theta \sin \theta & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

θ est l'angle que font les axes $1, 2$ avec x, y respectivement..

L'expression du champ des déformations par rapport au repère (x, y, z) s'écrit :

$$\{\epsilon\}_{xyz}^k = [T']\{\epsilon\}_{123}^k \quad (2.7)$$

où $[T']$ est la matrice de changement de base des déformations, elle est donnée par :

$$[T'] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Il est à noter que le changement de base est effectué en faisant une rotation $-\theta$ autour de la direction 3 (Figure 2.3).

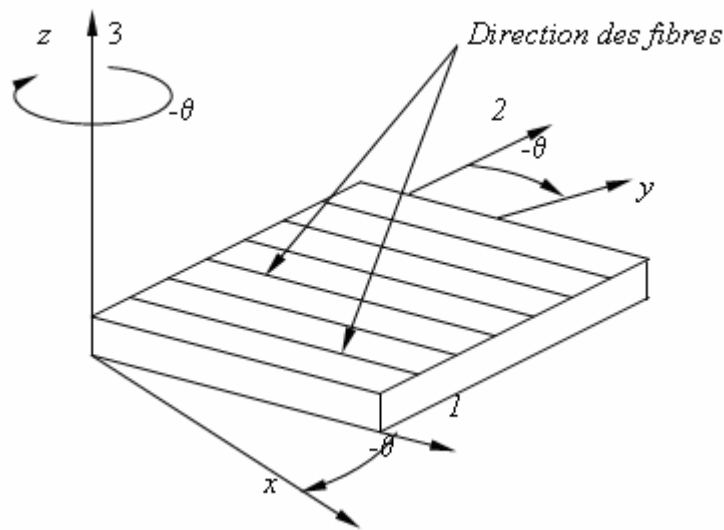


Figure : 2.3 Changement du repère dans un pli.

Par substitution de (2.5) et (2.7) dans (2.4), la relation contraintes-déformations devient :

$$\{\sigma\}_{xyz}^k = [\bar{Q}] \{\varepsilon\}_{xyz}^k \quad (2.9)$$

où $[\bar{Q}]$ est la matrice de rigidité du pli k exprimée dans le repère du stratifié (x, y, z) :

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T'] \quad (2.10)$$

La relation (2.9) s'écrit sous la forme développée suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ & & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ & sym & & \bar{Q}_{44} & 0 \\ & & & & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (2.11)$$

Les éléments de la matrice de rigidité $[\bar{Q}]$ s'écrivent en fonction des coefficients de la matrice dans les axes principaux $[Q]$ et de l'angle θ :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4 \\ \bar{Q}_{12} &= Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + (2Q_{11} + 4Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})c^3s \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(c^4 + s^4) \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})cs \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{44}s^2 + Q_{55}c^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Avec :

$$c = \cos(\theta)$$

$$s = \sin(\theta)$$

II.5. Résultantes et moments

La discontinuité des contraintes à travers l'épaisseur du stratifié conduit à exprimer la relation contrainte-déformation en termes des résultantes et moments :

Les résultantes en membrane sont définies par [4] :

$$\vec{N}(x, y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.13)$$

de même, les résultantes en cisaillement sont définies par [4] :

$$\vec{Q}(x, y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{zy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.14)$$

Les moments de flexion et de torsion sont donnés par [4] :

$$\vec{M}(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \quad (2.15)$$

où n représente le nombre de couches constituant le stratifié.

Il faut bien noter que les relations (2.13), (2.14) et (2.15) sont définies par unité de longueur du stratifié.

II.6. Equation constitutive

La combinaison des relations (2.11) à (2.15) conduit à formuler l'équation constitutive du stratifié qui est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \epsilon_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

ou sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [F] \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Les coefficients de la matrice d'extension $[A]$, la matrice de couplage $[B]$ et la matrice de flexion $[D]$ sont définis comme suit :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2.19)$$

Et ceux de la matrice de cisaillement transverse $[F]$ sont définis par :

$$F_{ij} = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{Q}_{ij})_k dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (1.20)$$

où α_{ij} sont les facteurs de correction en cisaillement, permettant d'améliorer la théorie des plaques stratifiées avec cisaillement transverse.

La détermination de ces facteurs a fait l'objet de plusieurs recherches [4]. On note que Timoshenko, Reissner et Mindlin ont pris ces facteurs respectivement égaux à $2/3$, $5/6$ et $\pi^2/12$. Il a été remarqué que les résultats obtenus avec des valeurs de $5/6$ sont les plus satisfaisants.

II.7. Equations fondamentales des plaques stratifiées

Il est nécessaire, pour développer les équations fondamentales des plaques stratifiées, de passer par les relations d'équilibre statique. Ces relations peuvent être obtenues directement en écrivant les conditions d'équilibre d'un élément infinitésimal [voir Annexe 4].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

où :

f_x, f_y, f_z sont les composantes des forces volumiques exercées au point M du matériau.

L'intégration des équations (2.21) suivant l'épaisseur du stratifié, en négligeant les forces volumiques et les contraintes interlaminaires, conduit aux relations suivantes [voir Annexe 4] :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\
\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

La substitution de l'équation (2.16) dans les équations (2.22) conduit aux équations fondamentales des plaques stratifiées dont leurs expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \\
B_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (B_{11} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \\
B_{16} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$F_{55} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + F_{44} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\
+ D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + \\
D_{26} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - F_{55} \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left(\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{16} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \\
& D_{16} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - \\
& F_{45} \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left(\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0
\end{aligned} \quad (2.27)$$

Les équations (2.23 à 2.27) permettent, en principe, de déterminer les cinq fonctions solutions : $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$, $\theta_x(x, y)$ et $\theta_y(x, y)$

II.8. Calcul des contraintes interplis :

Après avoir calculé le champ des déplacements, les relations (2.16) permettent la détermination des déformations au plan moyen du stratifié puis les relations (2.2) permettent de les calculer travers l'épaisseur de la plaque.

La relation (2.11) permet enfin la déduction des contraintes interplis qui sont données par:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^k &= Q_{11}^k \cdot \epsilon_{xx}^0 + Q_{12}^k \cdot \epsilon_{yy}^0 + Q_{16}^k \cdot \gamma_{xy}^0 + z \cdot (Q_{11}^k \cdot \kappa_x + Q_{12}^k \cdot \kappa_y + Q_{16}^k \cdot \kappa_{xy}) \\
\sigma_y^k &= Q_{12}^k \cdot \epsilon_{xx}^0 + Q_{22}^k \cdot \epsilon_{yy}^0 + Q_{26}^k \cdot \gamma_{xy}^0 + z \cdot (Q_{12}^k \cdot \kappa_x + Q_{22}^k \cdot \kappa_y + Q_{26}^k \cdot \kappa_{xy}) \\
\tau_{xy}^k &= Q_{16}^k \cdot \epsilon_{xx}^0 + Q_{26}^k \cdot \epsilon_{yy}^0 + Q_{66}^k \cdot \gamma_{xy}^0 + z \cdot (Q_{16}^k \cdot \kappa_x + Q_{26}^k \cdot \kappa_y + Q_{66}^k \cdot \kappa_{xy})
\end{aligned} \quad (2.28)$$

La variation des contraintes de cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque est donnée par [4] :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz} &= \frac{3}{2h} \left(1 - 4 \times \frac{z^2}{h^2} \right) \times Q_x \\
\sigma_{yz} &= \frac{3}{2h} \left(1 - 4 \times \frac{z^2}{h^2} \right) \times Q_y
\end{aligned} \quad (2.29)$$

h est l'épaisseur totale de la plaque.

CHAPITRE - III -
FORMULATION PAR ELEMENTS
FINIS

III.1.Introduction

La méthode des éléments finis (M.E.F.) est couramment utilisée et elle est appliquée dans divers domaines scientifiques : en analyse des structures, en constructions aéronautiques et navales, en génie mécanique, en génie civil, etc. Elle permet de ramener les problèmes des milieux continus à des problèmes discrets ayant un nombre fini de paramètres inconnus (forces, déplacements) qui sont déterminés par application de critères énergétiques.

Le principe consiste à discrétiser une structure en un nombre fini d'éléments interconnectés entre eux par des nœuds, chaque nœud est repéré par ses coordonnées par rapport à un système d'axe.

L'analyse du comportement statique des plaques stratifiées par la M.E.F. consiste à développer les équations d'équilibre à partir des formulations énergétiques et de déterminer par la suite les déplacements aux nœuds suivant les différents degrés de liberté, cette analyse nécessite l'utilisation des éléments bidimensionnels pour la discrétisation.

Le choix des éléments de discrétisation requiert une comparaison entre plusieurs éléments afin de faire un choix meilleur. Plusieurs tests ont été effectués sur des éléments types concernant la convergence des solutions, les remarques suivantes ont été tirées [7] :

- Les éléments quadrilatères donnent de meilleurs résultats que les éléments triangulaires.
- Pour un même nombre de degrés de liberté, les éléments à champ quadratique ont une précision meilleure que les éléments à champ linéaire.
- Les éléments basés sur la théorie de MINDLIN avec prise en compte du cisaillement transverse sont les mieux adaptés dans le cas des plaques épaisses, ainsi, la condition de compatibilité inter-éléments ne nécessite qu'une continuité $C(0)$.
- Les éléments quadratiques de la famille de SERENDIP présentent un comportement de verrouillage quelque soit l'ordre d'intégration utilisé ; un comportement sans verrouillage permet d'utiliser l'élément à la fois pour les plaques épaisses et pour les plaques minces.
- Les éléments avec intégration réduite de la famille de LAGRANGE se comportent convenablement dans les situations des plaques minces.

Donc, finalement un élément de la famille de LAGRANGE à champ quadratique peut répondre aux exigences imposées par le présent travail.

III.2. Discrétisation

On considère une plaque dont la surface moyenne est discrétisée en un nombre fini d'éléments quadrilatères isoparamétriques à 9 nœuds, chaque nœud possède 5 degrés de liberté indépendants (trois déplacements et deux rotations).

Dans la M.E.F. il est intéressant d'utiliser à la place du système de coordonnées physiques un système de coordonnées naturelles ou intrinsèques. Ceci permet de définir une transformation du domaine physique de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimension. Ce système est défini par des axes parallèles aux côtés de l'élément, les coordonnées des nœuds des sommets prennent des valeurs unitaires (± 1), les nœuds d'interfaces prennent les valeurs 0 et ± 1 (Figure 3.1).

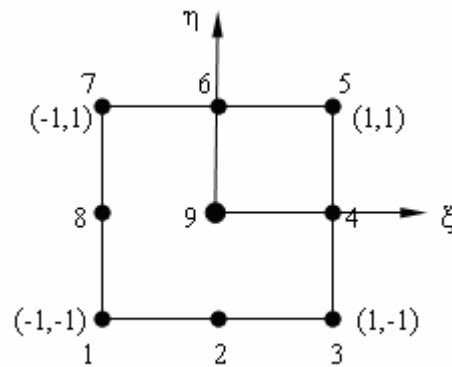


Figure 3.1 : Élément de référence

Les déplacements élémentaires peuvent être définis par l'approximation suivante :

$$\{a\} = \sum_{i=1}^{NN} [N_i(\xi, \eta)] \{d_i\} \quad (3.1)$$

avec :

- $\{a\}^T = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_x \quad \theta_y\}$
- $\{d_i\}$: le vecteur des déplacements nodaux.
- $\{d_i\}^T = \{u_{0i} \quad v_{0i} \quad w_{0i} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}$
- NN : le nombre de nœuds par élément.

- $[N_i]$: les fonctions d'interpolations des déplacements exprimées en terme de coordonnées naturelles.

Les fonctions d'interpolations N_i doivent être choisies de telle manière à vérifier la complétude et la continuité interélément.

Pour un élément à 9 nœuds, ces fonctions sont définies comme suit [7] :

Pour les nœuds des sommets : $\xi_i = \pm 1$; $\eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)\xi\eta$$

Pour les nœuds des interfaces :

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)\eta\eta_i \quad \text{à} \quad \xi_i = 0 \quad ; \quad \eta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)\xi\xi_i \quad \text{à} \quad \xi_i = \pm 1 \quad ; \quad \eta_i = 0$$

Pour le nœud du centre :

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

La relation déformations–déplacements élémentaires est obtenue de (3.1) comme suit :

$$\{\epsilon\} = \sum_{i=1}^{NN} [B_i] \{d_i\} \quad (3.2)$$

où $[B_i]$ est la matrice d'interpolation des déformations, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Les éléments de la matrice $[B_i]$ sont définis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$[J]$ est la matrice Jacobienne, elle permet le passage du système de coordonnées cartésiennes au système de coordonnées naturelles.

La matrice Jacobienne est définie comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les relations (3.1) et (3.2) peuvent être écrites sous les formes matricielles contractées suivantes :

$$\begin{aligned} \{a\} &= [N]\{a_e\} \\ \{\varepsilon\} &= [B]\{a_e\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} [N] &= [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_{NN}] \\ [B] &= [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_{NN}] \\ \{a_e\} &= \{\{d_1\} \quad \{d_2\} \quad \dots \quad \{d_{NN}\}\}^T \end{aligned}$$

III.3. L'énergie potentielle du système

Elle est donnée par [7] :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} d\Omega \quad (3.8)$$

Ω représente le volume de la plaque.

Dans le cas d'une plaque discrétisée, l'énergie potentielle totale est la somme de toutes les énergies potentielles élémentaires :

$$\pi = \sum_{e=1}^{NE} \pi_e \quad (3.9)$$

NE : est le nombre des éléments.

L'énergie potentielle élémentaire peut être obtenue en utilisant la relation (3.8) :

$$\pi_e = \frac{1}{2} \{a_e\}^T [K_e] \{a_e\} \quad (3.10)$$

où $[K_e]$ est la matrice de rigidité élémentaire, elle est donnée par la relation suivante :

$$[K_e] = \int_{\Omega_e} [B]^T [C] [B] d\Omega_e \quad (3.11)$$

où Ω_e est le volume d'un élément.

III.4. La matrice de rigidité

Les matrices de rigidité élémentaires sont définies par la relation (3.11). Elles sont symétriques d'ordre 45×45 , leur forme est donnée comme suit :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & 0 & [K^{14}] & [K^{15}] \\ & [K^{22}] & 0 & [K^{24}] & [K^{25}] \\ & & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] \\ & Sym & & [K^{44}] & [K^{45}] \\ & & & & [K^{55}] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Les éléments des matrices $[K^{\alpha\beta}]$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 5$) sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= A_{11}S_{ij}^{\xi} + A_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{12} &= A_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + A_{16}S_{ij}^{\xi} + A_{26}S_{ij}^{\eta} + A_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{14} &= B_{11}S_{ij}^{\xi} + B_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{15} &= B_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{26}S_{ij}^{\eta} + B_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{22} &= A_{22}S_{ij}^{\eta} + A_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{24} &= B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{12}S_{ji}^{\xi\eta} + B_{26}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{25} &= B_{66}S_{ij}^{\xi} + B_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{22}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{33} &= F_{44}S_{ij}^{\xi} + F_{45}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + F_{55}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{34} &= F_{44}S_{ij}^{\xi 0} + F_{45}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{35} &= F_{45}S_{ij}^{\xi 0} + F_{55}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{35} &= F_{45}S_{ij}^{\xi 0} + F_{55}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{44} &= D_{11}S_{ij}^{\xi} + D_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{66}S_{ij}^{\eta} + F_{44}S_{ij}^0 \\
K_{ij}^{45} &= D_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + D_{16}S_{ij}^{\xi} + D_{26}S_{ij}^{\eta} + D_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + F_{45}S_{ij}^0 \\
K_{ij}^{55} &= D_{66}S_{ij}^{\xi} + D_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{22}S_{ij}^{\eta} + F_{55}S_{ij}^0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où :

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{\xi\eta} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} |J| d\xi d\eta \\
S_{ij}^{00} &= S_{ij} \\
S_{ij}^{\xi\xi} &= S_{ij}^{\xi}
\end{aligned} \quad (i, j = 1, 9) \tag{3.14}$$

$|J|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne.

Les quantités S_{ij} peuvent être évaluées en utilisant l'intégration numérique dans le domaine (ξ, η) . La technique de l'intégration sélective avec 3×3 points de Gauss pour les termes de membrane, flexion et 2×2 points de Gauss pour les termes de cisaillement, donne avec un temps de calcul réduit et meilleurs résultats [7].

L'intégrale (3.14) peut s'écrire :

$$S_{ij} = \sum_{a=1}^g \sum_{b=1}^g W_a W_b |J| \tag{3.15}$$

où :

W_a, W_b : sont les coefficients de pondération aux points d'intégration ξ_a, η_b

g : est le nombre de points d'intégration.

La matrice de rigidité globale $[K]$ est obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires, l'assemblage s'effectue en additionnant terme à terme les éléments des matrices élémentaires communs en nœud et en degré de liberté.

CHAPITRE - IV -
PRESENTATION DU PROGRAMME
INFORMATIQUE

IV.1.Introduction

L'analyse des structures par éléments finis nécessite l'exécution de plusieurs opérations de calcul avant d'arriver aux résultats requis. Pour un problème de grande taille, le temps de calcul nécessaire pour effectuer ces opérations devient très important, il est donc indispensable de développer un programme au moyen d'un ordinateur qui permet de faciliter la tâche.

IV.2.Déscription du programme

Un programme d'éléments finis est constitué généralement de quatre blocs principaux :

1. Introduction des données.
2. Construction de la matrice de rigidité globale ainsi que le vecteur global des sollicitations.
3. Résolution du système d'équations avec prise en compte des conditions aux limites.
4. Impression des résultats.

Le but de ce chapitre est de présenter les différentes démarches suivies au cours de l'élaboration d'un programme de calcul des solutions (champ des déplacements, les déformées et les contraintes) des plaques stratifiées. Il est écrit en langage Fortran. Les relations programmées ont été développées aux chapitres 2 et 3. L'enchaînement des opérations de calcul est illustré sur la figure 4.1, chaque étape sera décrite en détails avec des exemples d'illustration.

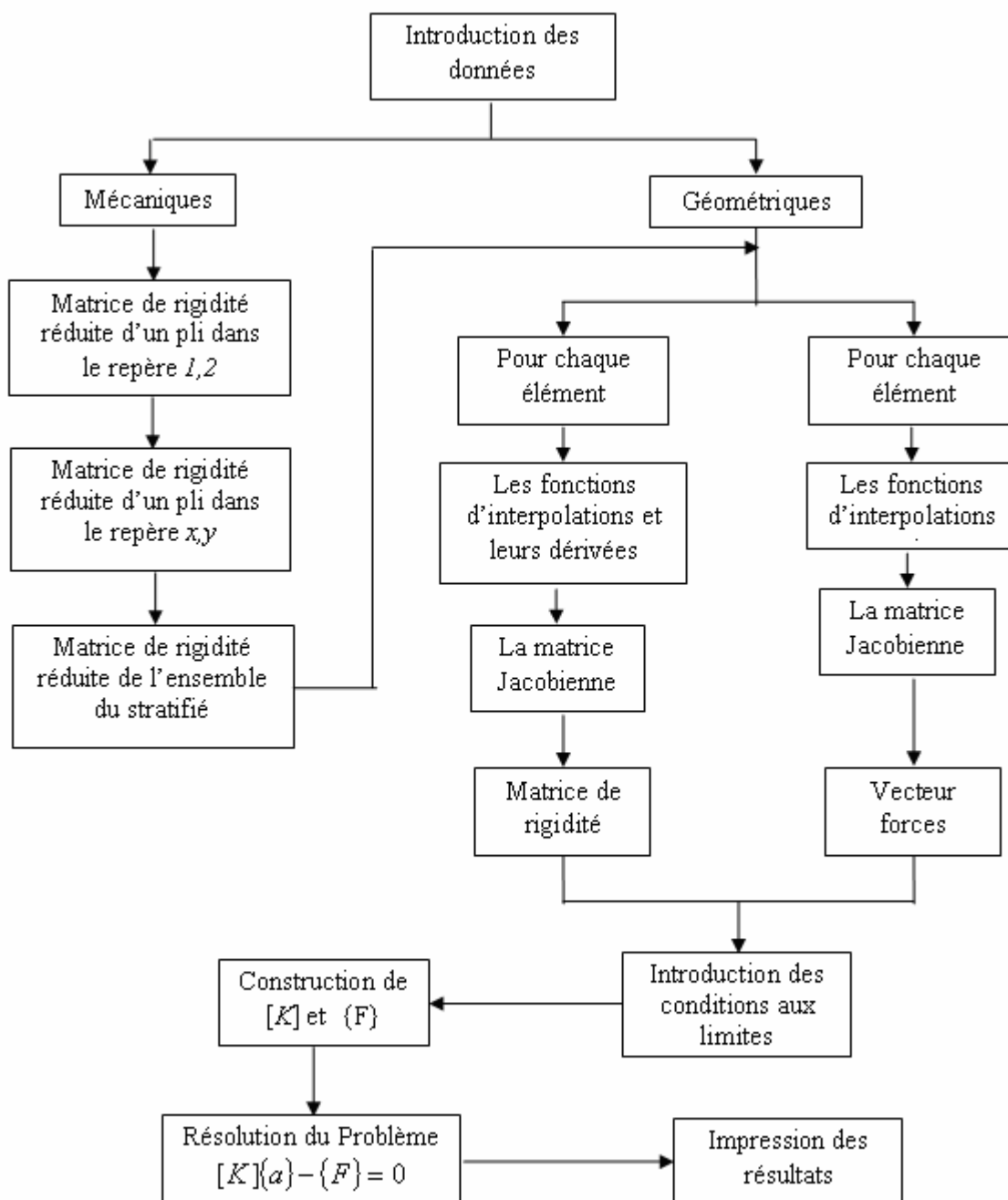


Figure : 4.1. Enchaînement des opérations pour le calcul statique des stratifiés.

IV.1.1. Introduction des données

Les données peuvent être classées en deux catégories principales :

- ❖ les données nécessaires pour le calcul de la matrice de rigidité réduite du stratifié.
- ❖ les données décrivant la géométrie de la plaque et la façon dont elle est fixée dans l'espace.

IV.1.1.1. Données mécaniques

Le calcul de la matrice de rigidité réduite du stratifié nécessite l'introduction des données suivantes :

- Module d'élasticité (de Young) longitudinal E_1 .
- Module d'élasticité (de Young) transversal E_2 .
- Module de cisaillement longitudinal G_{12} .
- Coefficient de Poisson ν_{12} .
- Epaisseur du pli.
- Nombre de plis.
- L'orientation des fibres dans chaque pli.

La détermination des coefficients de cette matrice s'effectue en trois étapes :

1. Calcul des coefficients de rigidité d'un pli dans ses axes propres 1,2.
2. Calcul des coefficients de rigidité d'un pli dans les axes du stratifié x,y .
3. Calcul des coefficients de rigidité de l'ensemble du stratifié.

IV.1.1.2. Données géométriques

La géométrie de la plaque peut être complètement définie en précisant les données suivantes :

- ◆ *Nombre d'éléments et de nœuds* ainsi que *le nombre de degrés de liberté bloqués*
- ◆ *Connections des nœuds* : La géométrie de chaque élément doit être spécifiée en donnant une liste systématique des points nodaux qui le définissent.

L'ordre de numérotation des nœuds influe directement sur la structure de la matrice de rigidité globale et par conséquent sur le temps du calcul requis pour la résolution. Généralement, la matrice de rigidité est une matrice symétrique bandée, la largeur de cette bande L est donnée par la relation suivante [5]:

$$L = 2[mn + (n - 1)] + 1$$

où :

n est le nombre de degrés de liberté par nœud.

m est la différence maximale entre les numéros de deux nœuds adjacents.

Donc, pour une matrice de rigidité peu dispersée, il est nécessaire de minimiser la largeur de la bande au maximum possible tout en jouant sur l'ordre de numérotation. La figure 4.2 montre, pour un même nombre d'élément, deux types de numérotation :

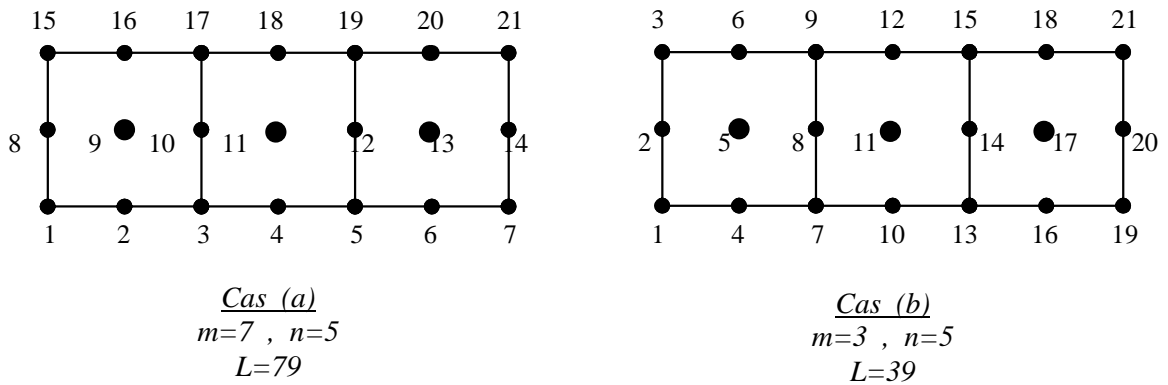


Figure 4.2 Système de numérotation pour un même nombre d'éléments.

Il est clair que la matrice de rigidité dans le cas (a) est plus dispersée que dans le cas (b) et utilisera donc plus de places dans la mémoire et aussi davantage de calcul. De ce fait, on remarque la grande importance de la numérotation des nœuds composant la structure, pour assurer une bonne gestion de la mémoire et de coût de calculs.

- ◆ *Coordonnées des nœuds* : Chaque nœud est défini par ses coordonnées par rapport au système d'axes (x,y) . Ces coordonnées sont stockées dans une matrice d'une taille de $NPOIN \times 2$ où $NPOIN$ représente le nombre total de nœuds constituant la plaque.
- ◆ *Conditions aux limites* : Chaque nœud possède 5 degrés de liberté ; trois déplacements et deux rotations. Un degré de liberté est identifié par une valeur égale à zéro (**0**) lorsqu'il est actif (libre), et d'une valeur égale à un (**1**) lorsqu'il est non actif (bloqué), ces valeurs sont stockées dans une matrice d'identification ID de dimension $NDDL \times NPOIN$ où $NDDL$ représente le nombre de degrés de liberté par nœud. Cette matrice sera modifiée par la suite afin de déduire le nombre total des équations à résoudre.

Pour illustrer la procédure d'introduction des conditions aux limites, on considère un exemple d'une plaque encadrée sur ses deux côtés.

Pour faciliter la compréhension, la plaque est discrétisée en six éléments, chaque élément possède 4 nœuds dont le nombre de degrés de liberté par nœud est égal à trois ; un déplacement w et deux rotations θ_x et θ_y , (les déplacements u et v sont considérés nuls) (Figure 4.3).

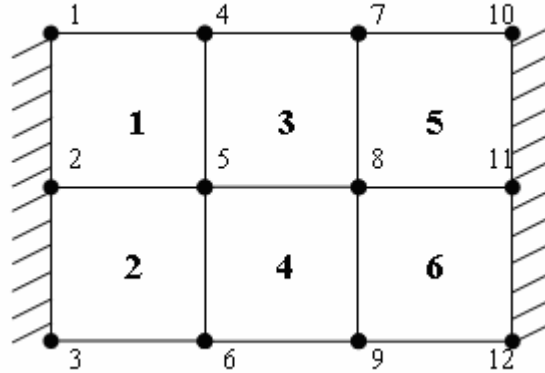


Figure 4.3 : Exemple d'une plaque discrétisée en six éléments et encastrée sur ses deux cotés

Les nœuds 1, 2, 3, 10, 11 et 12 sont bloqués dans toutes les directions, tandis que les nœuds restants sont libres. La matrice d'identification s'écrit dans ce cas :

$$ID = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Le nombre total des zéros dans la matrice ID représente le nombre total des équations à résoudre. La matrice d'identification modifiée s'obtient en remplaçant chaque zéro dans (4.1) par le numéro de l'équation qui lui correspond, les valeurs (1) prennent la valeur (0), cette opération est effectuée colonne par colonne. La matrice d'identification modifiée s'écrit donc :

$$ID = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

d'où on tire le nombre total des équations qui est égal à 18.

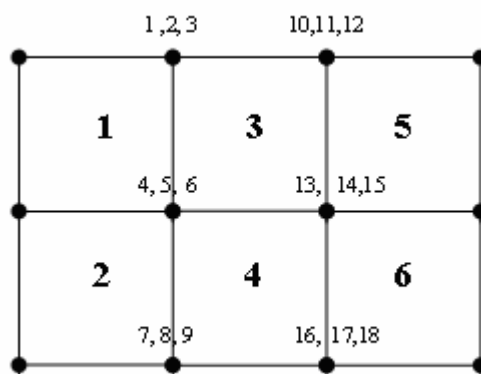


Figure 4.4 : Répartition des degrés de liberté actifs dans la plaque

IV.1.2. Construction de la matrice de rigidité

Les matrices de rigidité élémentaires $[K_e]$ peuvent être calculées à partir des relations (3.11) développées dans le chapitre 3. Pour chaque élément nous avons besoin d'effectuer les opérations suivantes :

1. Initialiser $[K_e]$ à zéro.
2. Pour chaque point d'intégration (ξ_i, η_i)
 - Calculer les fonctions d'interpolations ainsi que leurs dérivées.
 - Calculer la matrice Jacobienne, son inverse et son déterminant.
 - Calculer les éléments k_{ij} de la matrice de rigidité élémentaire.

A cause de la symétrie des matrices de rigidité élémentaires, on ne mémorise que les éléments de la triangulaire supérieure, ces éléments sont stockés dans un vecteur de dimension $NEVAB \times NEVAB/2$ où $NEVAB$ représente le nombre de variables par élément.

D'autre part, on définit un vecteur de connectivité des éléments LM qui permet de mémoriser les degrés de liberté élémentaires.

Pour l'exemple illustré sur la figure 4.3, le vecteur LM de chaque élément est défini comme suit :

$$\begin{aligned}
 LM_1 &= [0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 5 \ 6 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 LM_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 8 \ 9 \ 4 \ 5 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\
 LM_3 &= [4 \ 5 \ 6 \ 13 \ 14 \ 15 \ 10 \ 11 \ 12 \ 1 \ 2 \ 3]^T \\
 LM_4 &= [7 \ 8 \ 9 \ 16 \ 17 \ 18 \ 13 \ 14 \ 15 \ 4 \ 5 \ 6]^T \\
 LM_5 &= [13 \ 14 \ 15 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 11 \ 12]^T \\
 LM_6 &= [16 \ 17 \ 18 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 13 \ 14 \ 15]^T
 \end{aligned}$$

La matrice de rigidité globale $[K]$ s'obtient par assemblage des matrices de rigidité élémentaires, elle est symétrique et bandée, la méthode de stockage la plus efficace pour $[K]$ est celle de la ligne de ciel (sky line) [5], elle consiste à mémoriser les termes de la matrice par des colonnes à hauteurs variables, ces hauteurs sont déterminées à partir des vecteurs de connectivité des éléments LM , elles sont données par la formule suivante :

$$H_i = i - L_i$$

où L_i représente la position du premier élément non nul de la colonne i et H_i représente la hauteur de la même colonne.

Les adresses des termes situés sur la diagonal de $[K]$ doivent être aussi mémorisées dans un vecteur afin de déterminer le début des colonnes.

Considérons le cas de la plaque en figure 4.3, on veut déterminer la hauteur de la colonne 12, ce numéro représente aussi le numéro du degré de liberté actif dans $[K]$, il est commun entre les éléments 3 et 5. Ainsi, la plus petite valeur dans les vecteurs LM de ces éléments est égale à 1, cette valeur correspond à la ligne du premier élément non nul dans la colonne 12, c'est à dire $L_{12}=1$, d'où, on tire la hauteur de cette colonne qui est égale à 11.

La figure 4.5 montre la structure de la matrice de rigidité globale de la plaque, l'assemblage est limité aux degrés de liberté actifs.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	x	x	x	x	x	x				x	x	x	x	x	x			
2		x	x	x	x	x				x	x	x	x	x	x			
3			x	x	x	x				x	x	x	x	x	x			
4				x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
5					x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
6						x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
7							x	x	x				x	x	x	x	x	x
8								x	x				x	x	x	x	x	x
9									x				x	x	x	x	x	x
9										x	x	x	x	x	x	x	x	x
11											x	x	x	x	x	x	x	x
12												x	x	x	x	x	x	x
13													x	x	x	x	x	x
14														x	x	x	x	x
15															x	x	x	x
16																x	x	x
17																	x	x
18																		x

Figure 4.5 Structure de la matrice de rigidité globale après élimination des degrés de liberté bloqués

Finalement, il ne reste que le stockage des éléments de la matrice de rigidité dans une matrice unicolonne (vecteur). On rappelle que le stockage ne contient que les termes au-dessous de la ligne de ciel.

IV.1.3.Résolution

La recherche des solutions constitue la phase de calcul la plus difficile et nécessite plus de temps de calcul. Dans la pratique, il existe plusieurs méthodes conçues pour la résolution de ce genre de problème. La méthode d'itération de GAUSS est utilisée pour le calcul des solutions [5].

IV.1.4.Impression des résultats

L'exécution du programme permet d'obtenir les déplacements aux noeuds. Ces résultats doivent être organisés de manière que le lecteur puisse les interpréter. Pour cette raison un sous programme supplémentaire est développé pour effectuer cette tâche. Les résultats ainsi que les données du problème sont groupés dans un seul fichier.

IV.1.5.Schematisation du programme

La figure 4.6 montre un schéma représentatif de la structure du programme.

Le programme principal fait appel à plusieurs sous programmes (subroutines) dont le rôle de chaqu'un est donnée ci-dessous :

CONTROL : elle permet de lire les données géométriques et de déduire le nombre de variables par nœud et le nombre total des degrés de liberté.

IMPUT: elle permet de lire et d'écrire les données mécaniques, les connectivités des éléments et les coordonnées des noeuds, elle calcule les matrices de rigidité réduites locales et globales. Elle fait appel à la subroutine CONSTIT.

CONSTIT : elle permet la lecture et l'impression des données mécaniques, elle calcule les sous matrices [A], [B], [D] et [F]. Elle fait appel aux subroutines QLOCAL, QBARE, DMATRICE et INVER.

QLOCAL : elle calcule les matrices de rigidités réduites locales [Q].

QBARE : elle calcule les matrices de rigidités réduites globales $[\bar{Q}]$.

DMATRICE : elle calcule la matrice [C] en assemblant les matrices [A], [B], [D] et [F].

INVER : elle calcule la matrice inverse.

BERKEL : elle calcule la matrice d'identification ID, le nombre d'inconnues, les vecteurs de connectivité des éléments LM, elle fait appel à la subroutine COLMHT pour le calcul de la hauteur de la colonne à stocker et à la subroutine ADDRES pour le calcul des adresses des éléments diagonaux de la matrice [K].

ADRESS : elle permet le calcul des adresses des éléments diagonaux de la matrice de rigidité [K].

COLMHT : elle permet le calcul de la hauteur de la colonne à stocker dans la matrice [K].

DISTRLOAD : elle permet la lecture du chargement (charge concentrée et/ou charge répartie), le calcul des forces équivalentes aux nœuds et le vecteur charge global {F}. Elle fait appel aux subroutines INTGSS, FORM, DJACOB.

INTGSS : elle calcule les points de gauss et leurs coordonnées.

FORM : elle calcule les fonctions de forme aux nœuds et leurs dérivées.

DJACOB : elle calcule la matrice jacobienne, son inverse et son déterminant.

STIFFNESS : elle calcule la matrice de rigidité globale du stratifié en faisant appel aux sous-routines INTGSS, FORM, DJACOB, ESTIFF, ESCHEAR.

ESTIFF : elle calcule les matrices de rigidité élémentaires sans prendre en compte les termes de cisaillement transverse.

ESCHEAR : elle calcule les matrices de rigidité élémentaires en prenant en compte les termes de cisaillement transverse.

ASSEMB : elle permet de stocker les éléments de la matrice [K] dans un vecteur après avoir été stockés en ligne de ciel. Elle fait appel à la sous-routine ADDBAN.

ADDBAN : elle permet de réduire la dimension du vecteur de rigidité en éliminant les éléments nuls (calcul de la matrice compactée).

STATIQ : elle calcule les réponses statiques à savoir les déplacements aux nœuds les déformations et les contraintes. Elle fait appel aux sous-routines COLSOL et STRESS.

COLSOL : elle permet la résolution du système $Ax=b$ et le calcul des déplacements aux nœuds.

STRESS : elle permet de déduire le champ des contraintes et les déformations. Elle fait appel aux sous-routines : INTGSS, FORM, DJACOB, ESTRESS et DEFORM.

ESTRESS : elle calcule les efforts internes.

DEFORM : elle calcule et affiche les déformations et les contraintes.

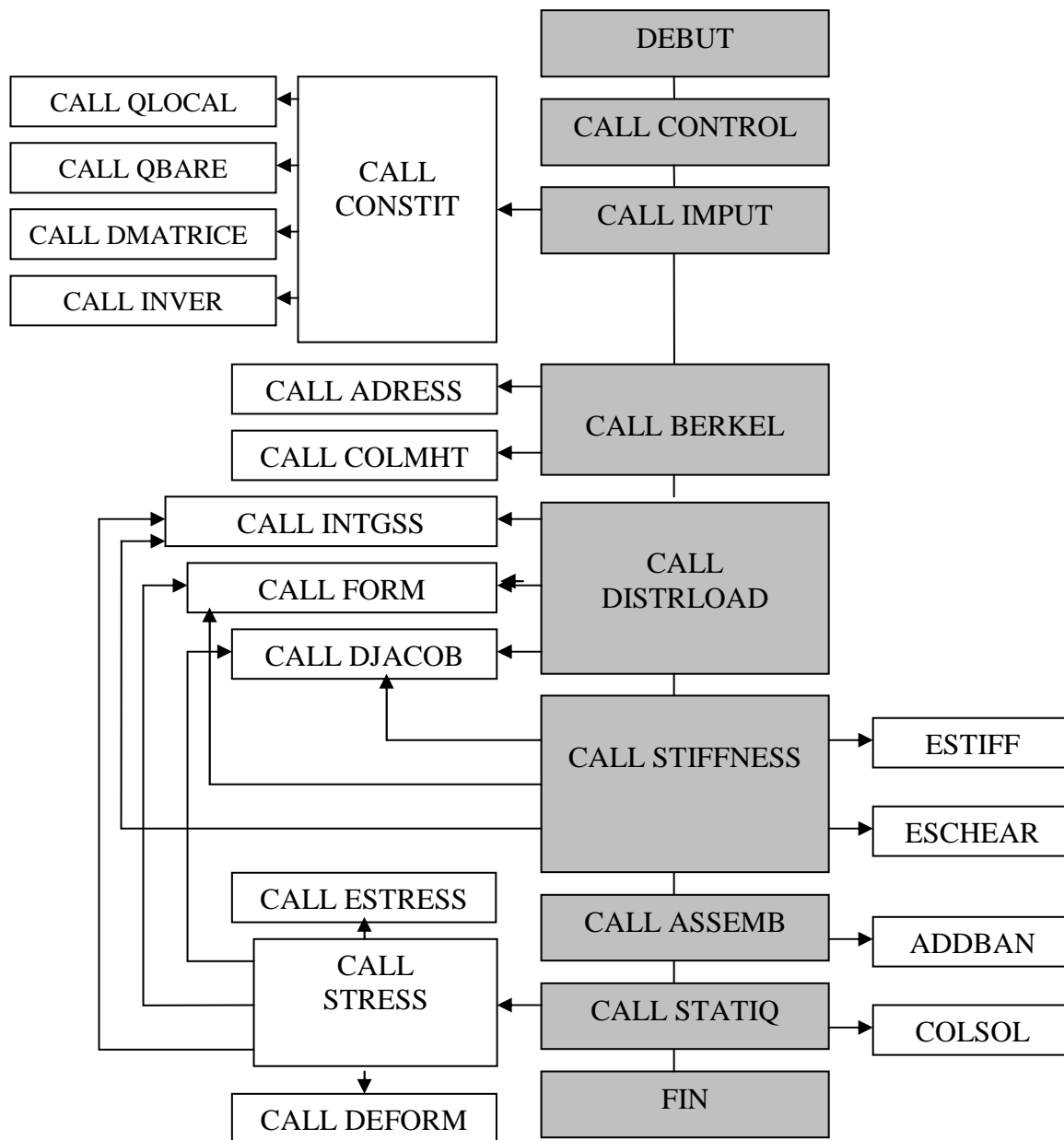


Figure 4.6 Schéma représentatif du programme élaboré

CHAPITRE - V -
VALIDATION DES RESULTATS ET
ANALYSE DES CONTRAINTES ET
DES DEPLACEMENTS

V.1.Introduction

Le programme étant élaboré, il est temps de vérifier la validité des résultats afin de pouvoir l'utiliser pour étudier l'influence de certains paramètres sur le comportement mécanique des stratifiées.

V.2.Validation des résultats du programme

V.2.1.Cas d'un matériau isotrope

On considère une plaque carrée de côté 'a' et d'épaisseur 'h' ayant $\nu = 0.3$ et étant soumise à une charge transversale uniformément distribuée 'q₀'.

Les deux cotés $y=0$ et $y=a$ sont supposés être simplement appuyés ie :

$$y=0, y=a \quad w = \theta_x = M_y = 0$$

Pour les cotés $x=0$ et $x=a$; on considère les quatre cas de conditions aux limites suivants :

- 1- Bords simplement appuyés : $w = \theta_y = M_x = 0$ en $x=0$ et $x=a$;
- 2- Bords doublement appuyés : $w = M_x = M_{xy} = 0$ en $x=0$ et $x=a$;
- 3- Bords encastres : $w = \theta_x = \theta_y = 0$ en $x=0$ et $x=a$;
- 4- Bords libres : $Q_x = M_x = M_{xy} = 0$ en $x=0$ et $x=a$.

On considère un maillage de 5 x 5 éléments avec 9 nœuds chaque un.

Les résultats trouvés sont présentés dans les tableaux 5.1 à 5.7 pour des rapports ($a/h = 5, 10, 50, 100$) impliquant ainsi des plaques épaisses et des plaques minces. Les résultats du programme sont comparés à ceux trouvés dans la référence [10].

Exemple 1 : Bords simplement appuyés

Le premier exemple est une plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge transverse uniformément distribuée. Les conditions aux bords utilisées sont les suivantes :

$$\text{Appuis simples en } y=0, y=a \quad w = \theta_x = M_y = 0.$$

$$\text{Appuis simples en } x=0, x=a \quad w = \theta_y = M_x = 0.$$

Le tableau 5.1 donne les déflexions adimensionnelles $w_{0\max} \times q_0 \cdot a^4 / D$.

Avec $w_{0\max}$ le déplacement suivant la direction z du centre de la plaque.

Tableau 5.1 : Déplacements au centre de la plaque ($\times q_0 \cdot a^4 / D$) : exemple 1.

$\frac{a}{h}$	5	10	50	100
Présente étude	0.00490	0.00427	0.00407	0.00406
Théorie de Mindlin [10]	0.00490	0.00427	0.00407	0.00406
Théorie classique [10]		0.00406		

Les valeurs sont en très bon accord avec celles données par la formulation de Mindlin avec une erreur de 0% pour tous les rapports a/h.

Les erreurs sur la déflexion par rapport à la théorie classique des plaques minces sont de 21%, 5.17%, 0.25% et 0% pour les rapports a/h de 5, 10, 50 et 100 respectivement. Ces erreurs sont dues au fait que dans la théorie classique le cisaillement transverse n'est pas pris en compte.

Tableau 5.2 : Moments de flexion au centre de la plaque ($\times q_0 \cdot a^2$) exemple 1.

$\frac{a}{h}$	5		10		50		100	
Moments	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
Présente étude	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475
Théorie de Mindlin [10]	0.0478	0.0479	0.0478	0.0479	0.0478	0.0479	0.0478	0.0479
Théorie classique [10]				0.0479				

Les moments de flexion au centre de la plaque sont donnés au tableau 5.2. On remarque que les résultats ne sont pas très loin de ceux trouvés dans la littérature [10].

Sur M_x on constate une erreur de 0.83% par rapport à la théorie classique et de 0.63% par rapport à celle de Mindlin. Pour M_y l'erreur est de 0.83 pour chacune des deux théories.

Tableau 5.3 : Forces de cisaillement au aux mi-bords de la plaque ($\times q_0 \cdot a$) exemple 1.

$\frac{a}{h}$	5 \rightarrow 100	
	Q_x	Q_y
Présente étude	0.331	0.331
Théorie de Mindlin [10]	0.337	0.332
Théorie classique [10]	0.338	

Les valeurs des efforts de cisaillement pris aux mi-bords de la plaque sont données dans le tableau 5.3. Pour la théorie classique on a 2.07% d'erreur sur Q_x , et Q_y or que pour celle de Mindlin on a 1.78 sur Q_x et 0.3 sur Q_y .

Tableau 5.4 : Moments de torsion au sommet de la plaque ($\times q_0 \cdot a^2$) exemple 1.

$\frac{a}{h}$	5	10	50	100
Présente étude	-0.0321	-0.0321	-0.0322	-0.0322
Théorie de Mindlin [10]	-0.0324	-0.0324	-0.0324	-0.0324
Erreur %	0.92	0.92	0.62	0.62
Théorie classique [10]			-0.0325	
Erreur %	1.23	1.23	0.92	0.92

Le tableau 5.4 donne les valeurs des moments de torsion et les erreurs correspondantes.

Exemple 2 : Bords doublement appuyés

$$w = \theta_x = M_y = 0 \quad y=0, y=a$$

$$w = M_x = M_{xy} = 0 \quad x=0, x=a$$

Les conditions aux frontières sur les bords $x=0, a$ sont prises de telle manière à annuler la déflexion, les moment de flexion et les moments de torsion.

Les résultats du programme sont comparés avec ceux de la formulation de Mindlin donnée par la référence [10], et sont donnés dans le tableau 5.5.

Tableau 5.5 : Résultats de l'exemple 2.

$\frac{a}{h}$		$w_{0\max} \times q_0 \cdot a^4 / D$	$\times q_0 \cdot a^2$		$\times q_0 \cdot a$	
			M_x	M_y	Q_x	Q_y
	Théorie de Mindlin [10]	0.00526	0.0507	0.0515	0.403	0.348
5	Présente étude	0.00527	0.0505	0.0511	0.371	0.346
	Erreur %	0.19	0.39	0.78	7.94	0.57
	Théorie de Mindlin [10]	0.00445	0.0491	0.0498	0.413	0.341
10	Présente étude	0.00445	0.0488	0.0494	0.414	0.395
	Erreur %	0.00	0.41	0.80	0.24	15.84

Exemple 3: Bords encastres

$$w = \theta_x = M_y = 0 \quad y=0, y=a$$

$$w = \theta_x = \theta_y = 0 \quad x=0, x=a$$

Dans cet exemple, les conditions aux frontières sur les bords $x=0,a$ sont prises de telle manière à annuler les déflexions, les rotations normales et tangentielles.

Les résultats obtenus, ceux de la référence [10] ainsi que les erreurs sont présentés sur le tableau 5.6.

Tableau 5.6 : Résultats de l'exemple 3.

$\frac{a}{h}$		$w_{0\max} \times q_0 \cdot a^4 / D$	$\times q_0 \cdot a^2$		$\times q_0 \cdot a$	
			M_x	M_y	Q_x	Q_y
5	Théorie de Mindlin [10]	0.00302	0.0330	0.0292	0.475	0.251
	Présente étude	0.00302	0.0322	0.0289	0.487	0.243
	Erreur %	0.00	2.42	1.03	2.53	3.19
10	Théorie de Mindlin [10]	0.00221	0.0332	0.0258	0.500	0.243
	Présente étude	0.00221	0.0324	0.0255	0.634	0.261
	Erreur %	0.00	2.40	1.16	26.80	7.41

Exemple 4: Bords libres

$$w = \theta_x = M_y = 0 \quad y=0, y=a$$

$$Q_x = M_x = M_{xy} = 0 \quad x=0, x=a$$

Dans le dernier exemple, on considère les bords libres impliquant ainsi l'annulation du cisaillement transverse, des moments de flexion et des moments de torsion le long de $x=0, a$. Les résultats appropriés sont représentés dans le tableau 5.7.

Tableau 5.7 : Résultats de l'exemple 4.

$\frac{a}{h}$		$w_{0\max} \times q_0 \cdot a^4 / D$	$\times q_0 \cdot a^2$		$\times q_0 \cdot a$	
			M_x	M_y	Q_x	Q_y
5	Théorie de Mindlin [10]	0.0145	0.0237	0.123	0.456	0.456
	Présente étude	0.0145	0.0228	0.121	0.487	0.487
	Erreur %	0.00	3.80	1.63	6.80	6.80
10	Théorie de Mindlin [10]	0.0134	0.0256	0.122	0.460	0.460
	Présente étude	0.0134	0.0248	0.121	0.628	0.628
	Erreur %	0.00	0.78	0.82	36.52	36.52

V.2.2. Cas d'un matériau composite

On considère une plaque carrée d'un matériau stratifié (0/90/90/0) ayant les propriétés mécaniques suivantes :

$$E_1=175 \text{ GPa}, E_2=7 \text{ GPa}, G_{12}=G_{13}=3.5 \text{ GPa}, G_{23}=1.4 \text{ GPa} \text{ et } \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25$$

Les conditions aux frontières sont celles utilisées dans l'exemple 1 de la section précédente. ie :

$$\text{Appuis simples en } y=0, y=a \quad w = \theta_x = M_y = 0$$

$$\text{Appuis simples en } x=0, x=a \quad w = \theta_y = M_x = 0$$

On applique une charge sinusoïdale de la forme $q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_0 \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$ et

on calcule les déflexions normalisées au centre de la plaque données par :

$$\bar{w}_0 = w_0 \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) \times \left(\frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} \right)$$

Les calculs sont fait pour les valeurs de $a/h=4, 10, 20$ et 100 et les résultats obtenus sont inscrits sur le tableau 5.8.

Tableau 5.8. Les déflexions maximales normalisées dans une plaque stratifiée pour différentes valeurs de a/h .

$\frac{a}{h}$		4	10	20	100
	3D élasticity [12]	1.954	0.743	0.517	0.438
$\bar{w} \times 10^2$	Présente étude	2.140	0.735	0.511	0.436
	Erreur %	9.52	1.08	1.16	0.46

Comme on peut le constater sur le tableau, les résultats obtenus s'accordent bien avec ceux trouvés dans la littérature [12].

A partir des résultats présentés sur les tableaux ci-dessus, on peut dire que le présent programme peut être utilisé pour l'analyse statique des plaques stratifiées, la précision des résultats peut être améliorée par un maillage raffiné.

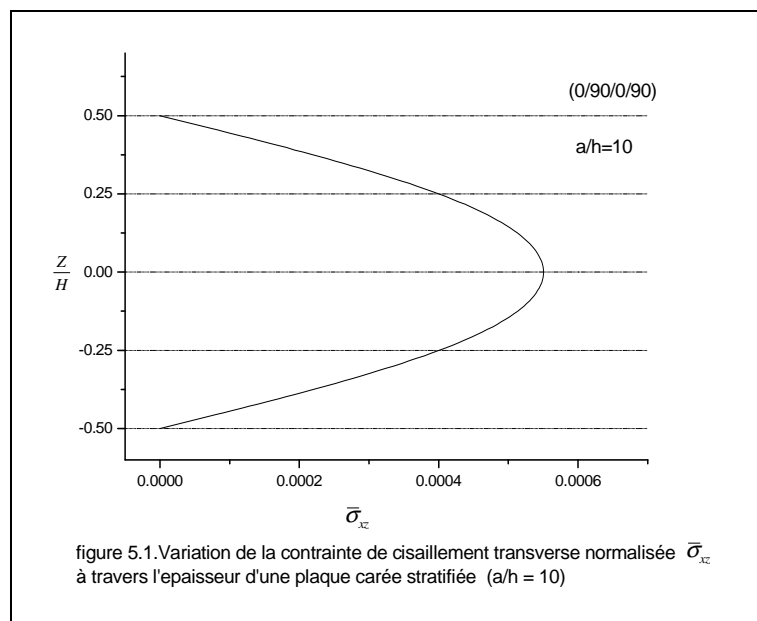
V.3. Analyse des contraintes et des déplacements

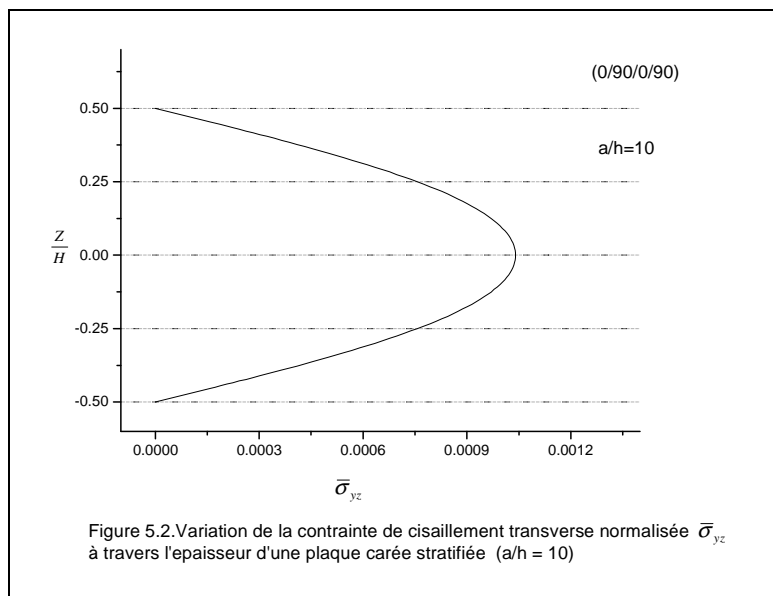
Dans cette section, la variation des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié est examinée, les contraintes calculées sont normalisées et données par :

$$\bar{\sigma}_{xz} = \sigma_{xz} \left(0, \frac{b}{2}, z \right) \times \left(\frac{h}{b \cdot q_0} \right) ; \quad \bar{\sigma}_{yz} = \sigma_{yz} \left(\frac{a}{2}, 0, z \right) \times \left(\frac{h}{b \cdot q_0} \right) ; \quad \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} (0, 0, z) \times \left(\frac{h^2}{b^2 \cdot q_0} \right)$$

Les figures 5.1 et 5.2 donnent la variation des contraintes de cisaillement transverse normalisées $\bar{\sigma}_{xz}$ et $\bar{\sigma}_{yz}$ à travers l'épaisseur d'une plaque carrée stratifié (0/90/0/90) dont le rapport $a/h=10$.

Il est bien évident que ces contraintes sont nulles aux extrémités de la plaque et maximales au niveau de son plan médian.

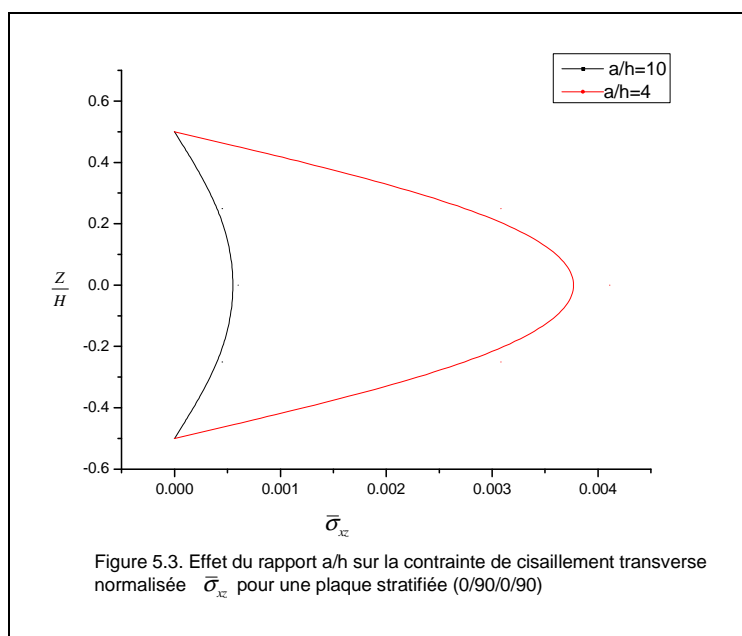


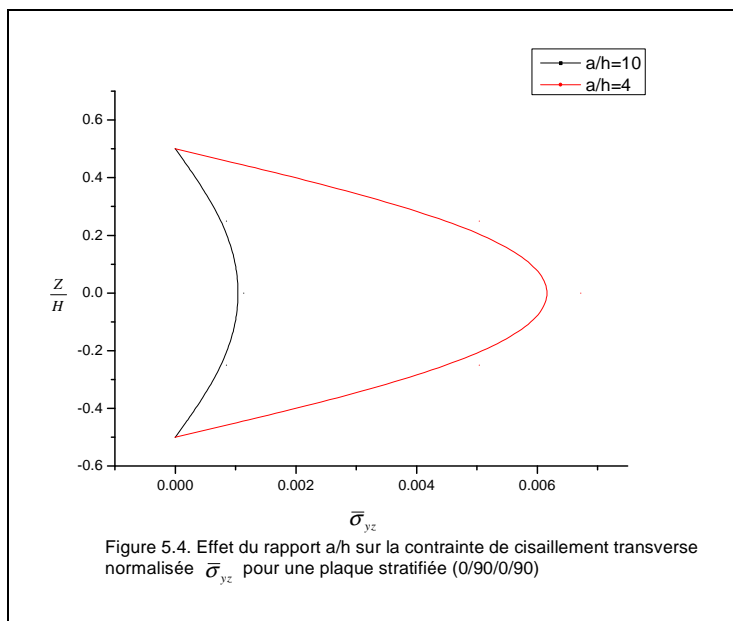


V.3.1. Effet du rapport a/h sur les contraintes de cisaillement transverse

Afin de voir l'influence du rapport a/h sur ces contraintes on retrace les graphes pour un rapport $a/h = 4$. Les résultats sont représentés sur les figures 5.3 et 5.4.

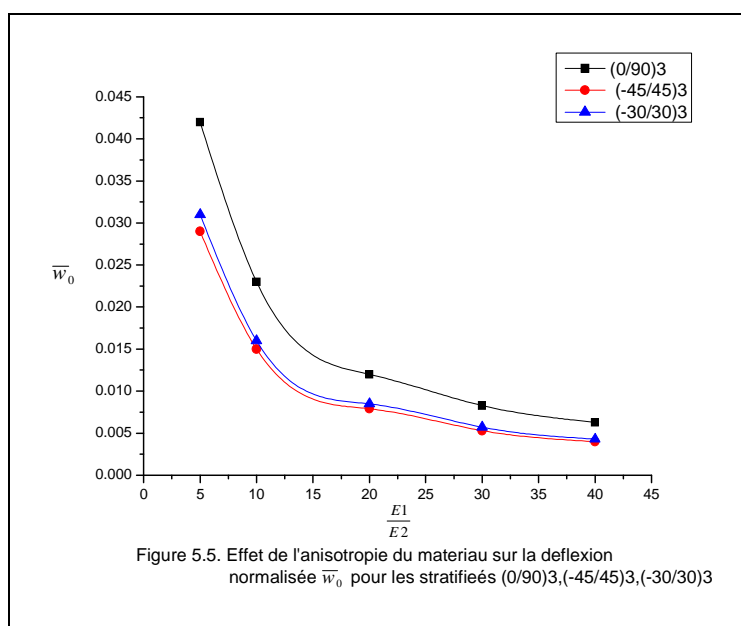
On remarque que la réduction du rapport a/h de la valeur 10 à 4 provoque une augmentation des contraintes de 6 à 7 fois. En effet les plaques épaisses sont plus sollicitées en cisaillement transverse que les plaques minces ayant les mêmes dimensions et étant soumises à la même charge sous les mêmes conditions aux limites.





V.3.2. Effet de l'anisotropie sur la déflexion maximale

Pour étudier l'effet de l'anisotropie du matériau sur la déflexion maximale et les contraintes, on considère les stratifiés : (0/90)₃, (-45/45)₃, (-30/30)₃, (0/90/90)_s et (25/30/45)_s. La figure 5.5 montre l'effet de l'anisotropie du matériau sur la déflexion maximale normalisée qui diminue avec l'augmentation du paramètre de l'anisotropie $E1/E2$. La déflexion dans le stratifié (0/90)₃ est plus importante que celles des stratifiés (-45/45)₃ et (-30/30)₃ qui sont très voisines. La variation de la déflexion normalisée devient négligeable pour un paramètre d'anisotropie supérieur à 30.

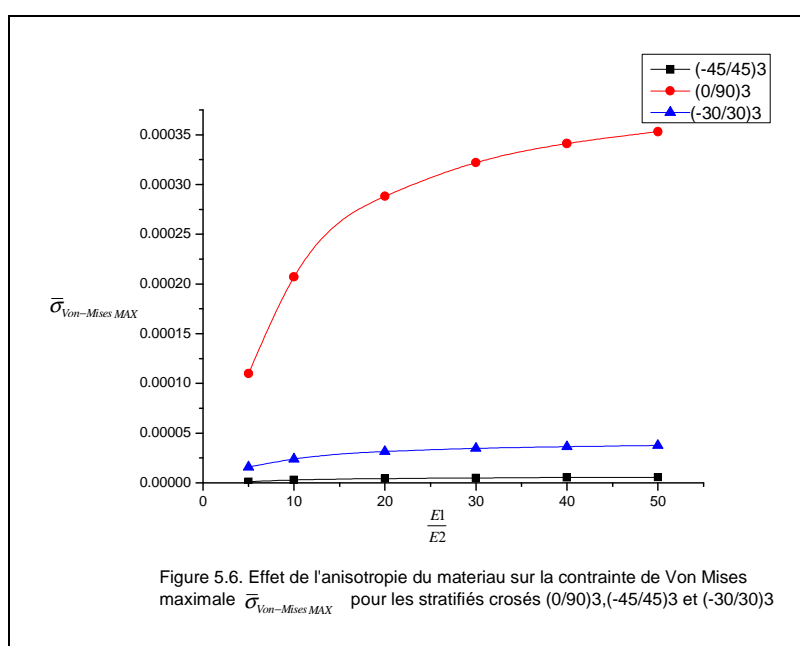


V.3.3.Effet de l'anisotropie sur la contrainte de Von Mises

La contrainte de Von Mises est calculée à partir des contraintes principales en utilisant la formule suivante:

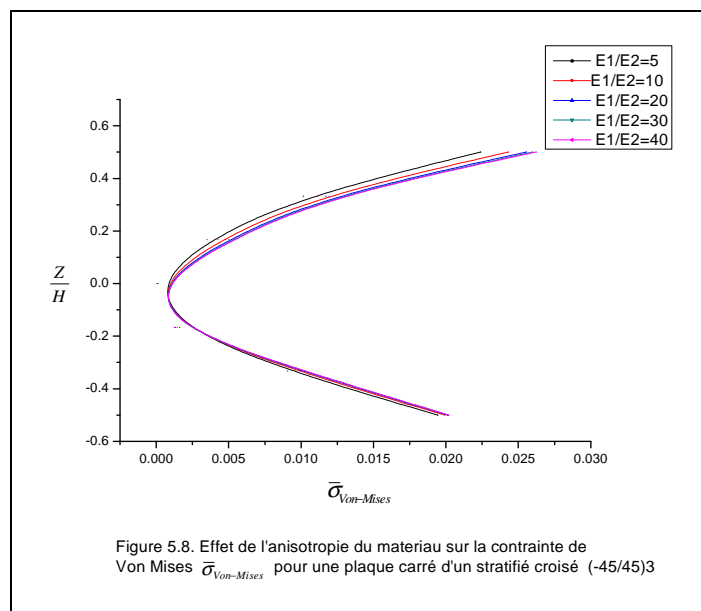
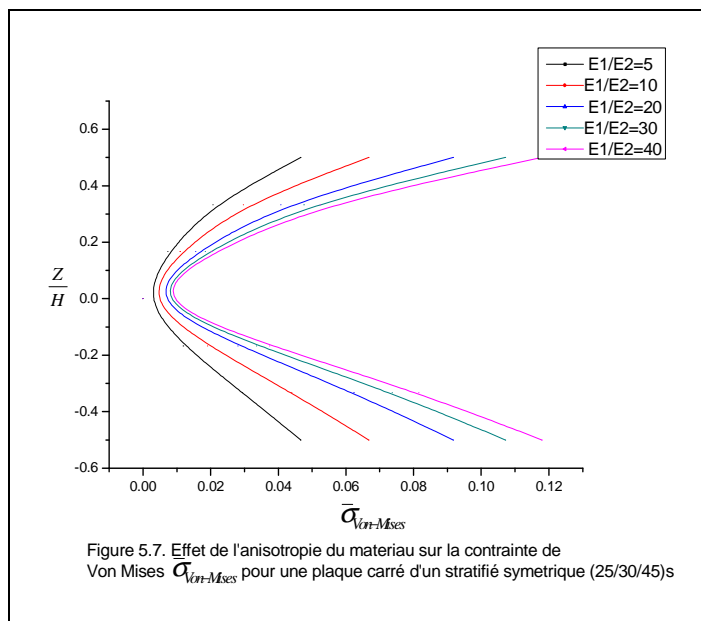
$$\sigma_{\text{Von-Mises}} = \frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right)$$

La contrainte de Von Mises maximale augmente avec l'augmentation de $E1/E2$ comme on peut le constater sur la figure 5.6. Encore la contrainte de Von Mises maximale atteint sa valeur asymptotique pour $E1/E2 > 30$.



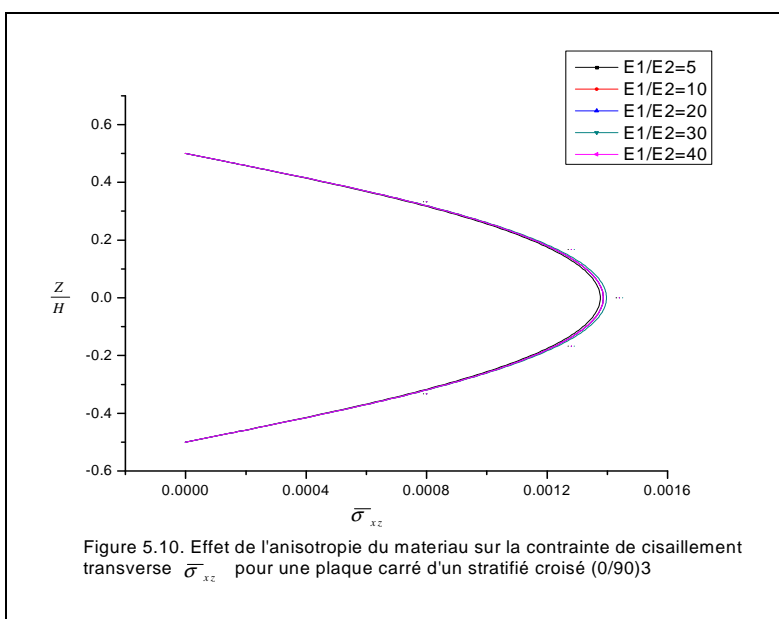
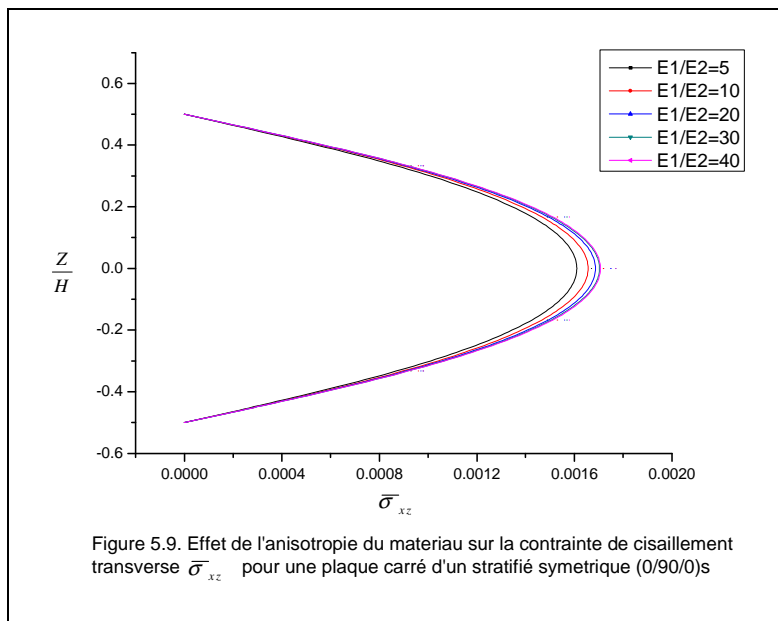
Les figures 5.7 et 5.8 montrent l'effet de l'anisotropie du matériau sur les contraintes de Von Mises dans les stratifié symétrique (25/30/45)^s et antisymétrique (-45/45)³.

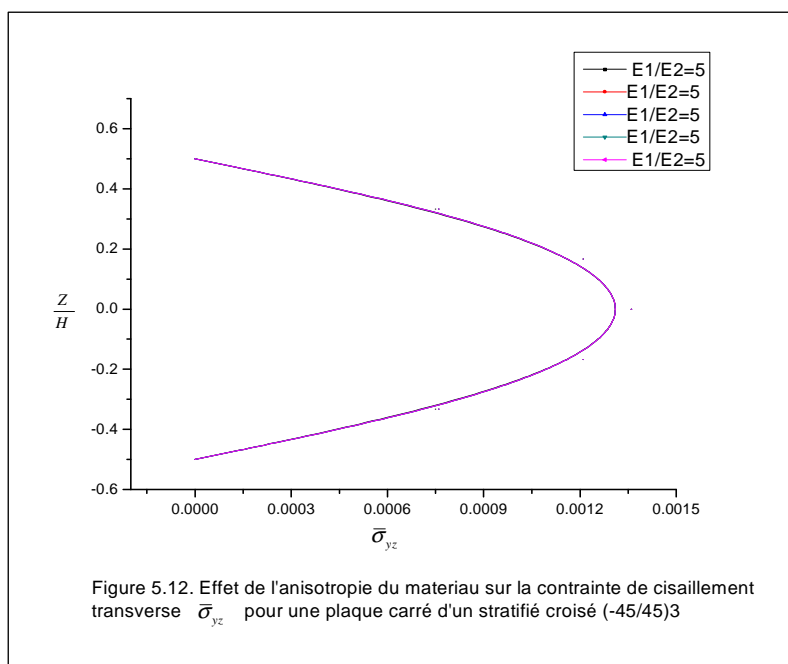
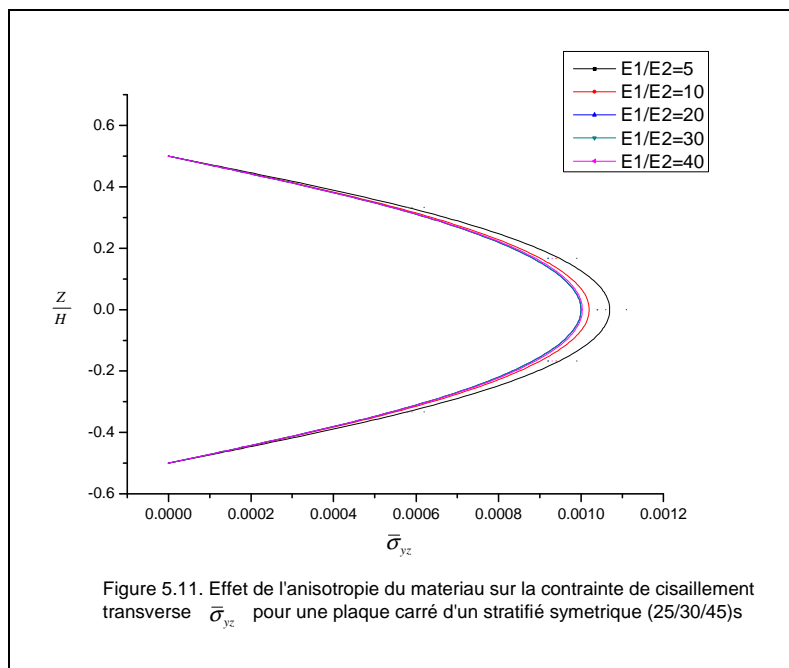
Pour la plaque symétrique, une augmentation dans l'anisotropie conduit à une augmentation dans la contrainte de Von Mises tandis que pour le cas antisymétrique l'effet est négligeable.



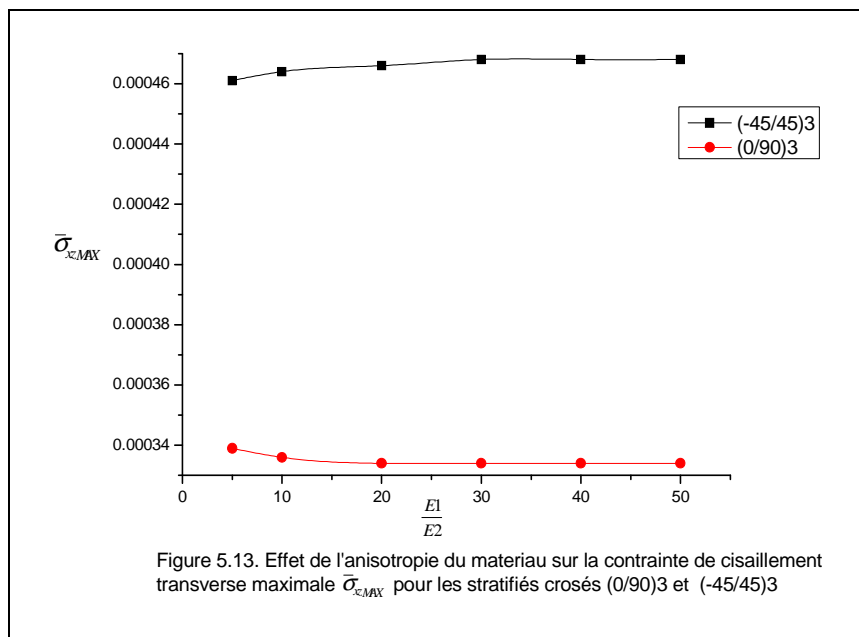
V.3.4. Effet de l'anisotropie sur les contraintes de cisaillement transverse

Il a été trouvé que la variation des contraintes de cisaillement transverse (σ_{xz} et σ_{yz}) ne dépendent pas du degré d'anisotropie pour les stratifiés antisymétriques tandis qu'il y a une dépendance dans le cas des stratifiés symétriques comme le montrent les figures 5.9, 5.10, 5.11 et 5.12.





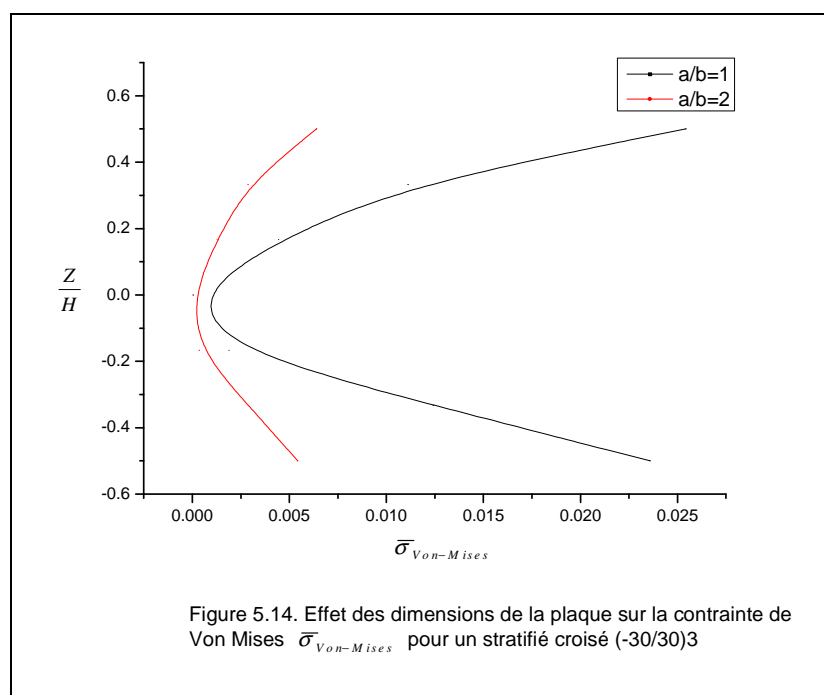
La figure 5.13 montre que les contraintes de cisaillement transverse maximales varient avec la variation de l'anisotropie jusqu'à atteindre des valeurs asymptotiques pour $E1/E2 > 30$; se comportant ainsi comme les contraintes de Von Mises.



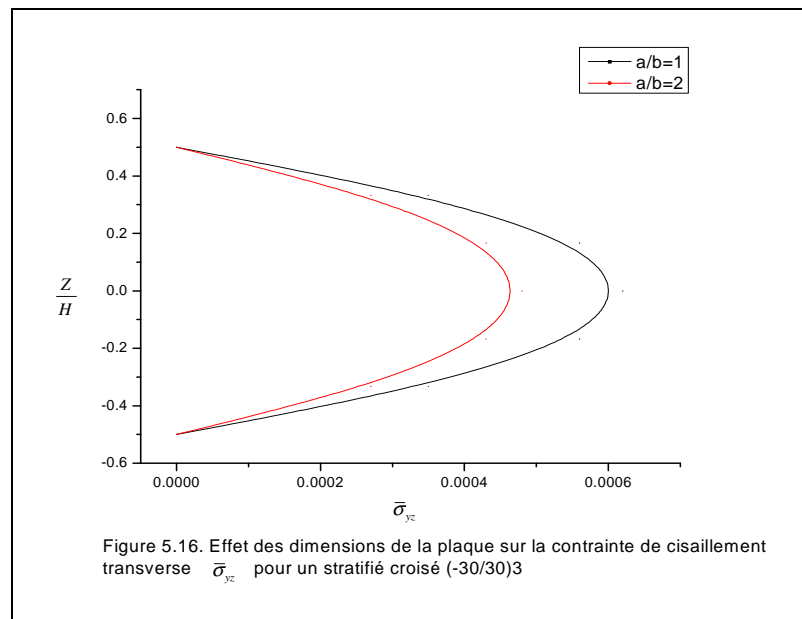
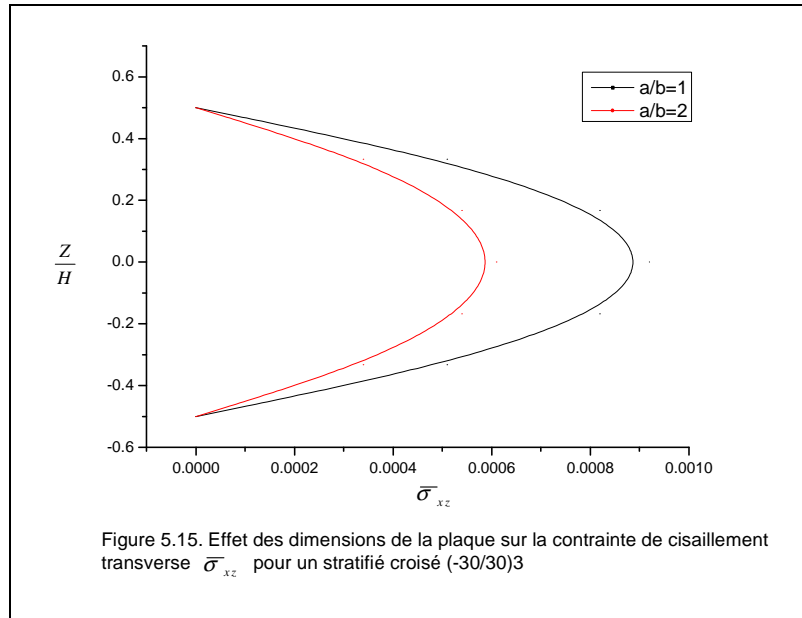
V.3.5. Effet des dimensions de la plaque sur les contraintes de cisaillement et de Von Mises

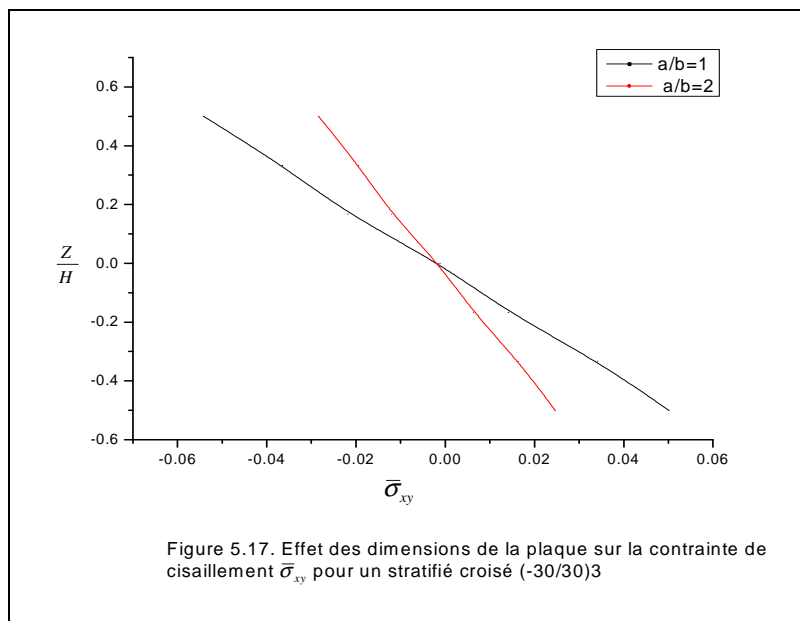
Pour étudier l'effet des dimensions de la plaque (a , b), deux plaques du stratifié (-30/30)3, carré ($a/b=1$) et rectangulaire ($a/b=2$) sont utilisées. On utilise un rapport $a/h=20$.

Les contraintes de Von Mises sont plus petites en magnitudes pour la plaque rectangulaire comparée à la plaque carrée comme le montre la figure 5.14.



Des observations similaires peuvent être faites à partir des figures 5.15, 5.16 et 5.17 pour les contraintes de cisaillement.





Ce comportement peut être expliqué par le fait que quand la plaque carrée est coupée horizontalement, les deux sections rectangulaires résultantes auront une rigidité élevée par rapport à celle de la section carré elle-même à cause de la réduction de la largeur quand on maintient la même longueur et les mêmes conditions aux frontières.

V.3.6. Effet de l'empilement des couches dans la plaque sur les contraintes

Pour étudier l'effet de l'empilement des couches dans le stratifié sur la déflexion et les contraintes, on considère les six empilements suivants : (90/45/30)s , (30/45/90)s,(90/30/45)s, (45/90/30)s, (45/30/90)s et (30/90/45)s . Les plaques ont les mêmes épaisseurs et les mêmes rapports a/h.

La déflexion maximale normalisée pour chaque empilement est donnée sur la table ci-dessous.

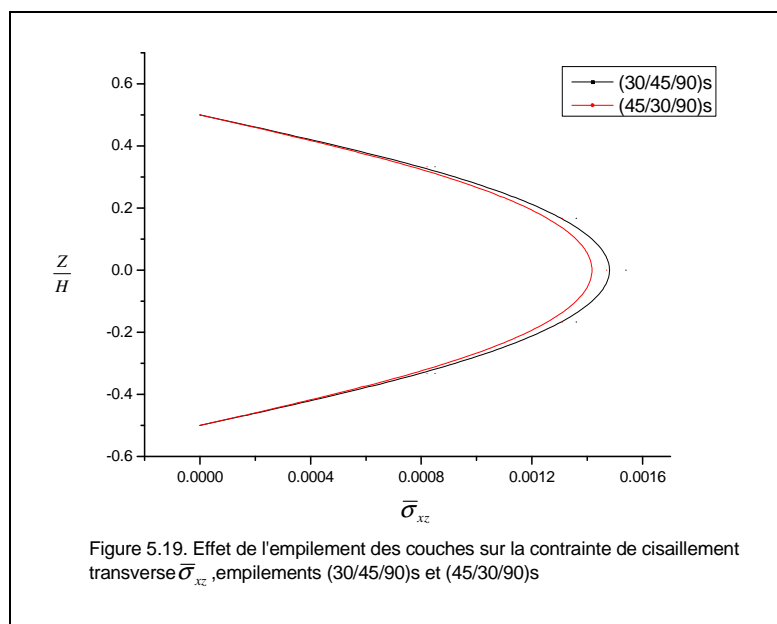
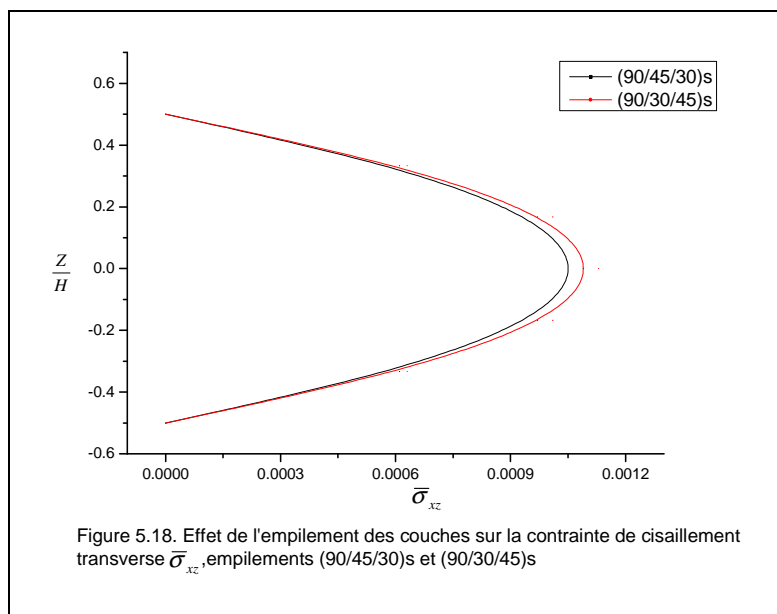
Tableau 5.9 : Déflexions maximales normalisée pour différents empilements du stratifié.

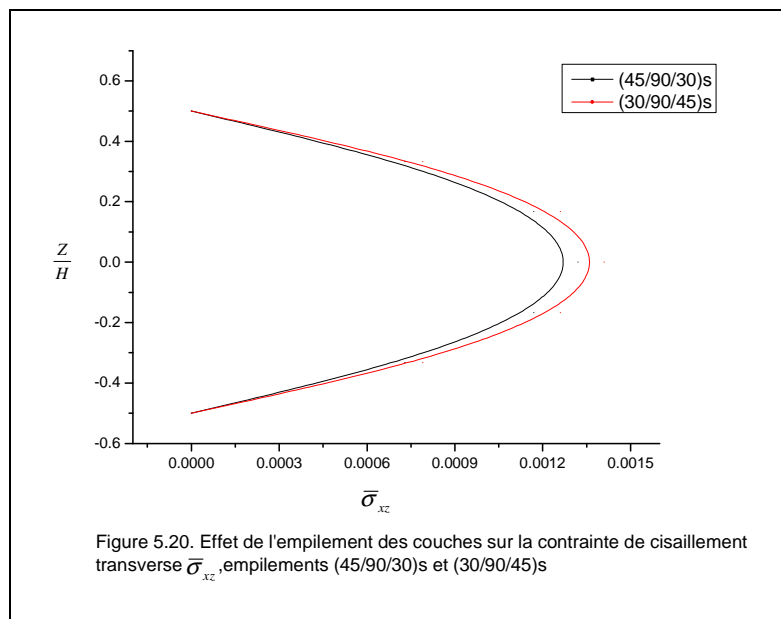
Empilement	1 (90/45/30)s	2 (30/45/90)s	3 (90/30/45)s	4 (45/90/30)s	5 (45/30/90)s	6 (30/90/45)s
\bar{w}_0	0.418	0.472	0.429	0.409	0.462	0.430

La différence maximale entre ces déflexions est 13%, qui est entre l'empilement 2 et l'empilement 4.

Les résultats montrent l'importance de l'empilement dans la conception des structures composites où la déflexion sous chargement est à minimiser. Ils indiquent aussi qu'il existe un empilement optimum qui doit être recherché.

Comme on peut le constater sur les figures 5.18, 5.19 et 5.20 l'empilement a aussi un effet considérable sur les contraintes de cisaillement transverse.





Les figures donnent la variation des contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} à travers l'épaisseur de la plaque. Les résultats pour σ_{yz} ne sont pas montrés ici car ils sont similaires à ceux de σ_{xz} avec la seule différence dans les magnitudes.

Les figures 5.18, 5.19 et 5.20 montrent les résultats pour les empilements 1 et 2, 4 et 6, 2 et 5 où les plis à 90° sont placés au sommet et la base, au milieu et dans les plis intermédiaires de la plaque, respectivement.

Il peut être remarqué par les figures que les contraintes de cisaillement transverse maximales ont des valeurs minimales quand les plis à 90° sont mis à la base de la plaque stratifiée et atteignent leurs valeurs maximales lorsque les plis à 90° sont au sommet.

Il est aussi intéressant de noter que quand le pli à 45° est placé devant le pli à 30° , la distribution des contraintes à travers l'épaisseur est plus petite en magnitude comparée au cas où le pli à 30° est devant celui à 45° . Ceci peut être observé sur les figures 5.18, 5.19 et 5.20.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Une analyse par éléments finis du comportement statique des plaques composites stratifiées a été effectuée, l'analyse a été basée sur la théorie des plaques épaisses (Mindlin) où les déformations en cisaillement transverse sont prises en considération. Un programme informatique en Fortran a été développé et validé par des résultats analytiques. Une analyse des déflexions maximales et des contraintes sur des cas de plaques stratifiées sous l'effet d'un chargement repartit a été ensuite effectuée.

Au cours de ces études, il a été constaté que :

- Lors du développement des équations fondamentales des stratifiées, les hypothèses rapportées aux plaques homogènes restent valables aux plaques stratifiées, par contre la relation contraintes-déformations en diffère du fait de l'existence de couplage entre les déformations planes et en courbures.
- Les éléments basés sur la théorie de MINDLIN avec prise en compte du cisaillement transverse sont les mieux adaptés dans le cas des plaques épaisses.
- Les éléments de discrétisation qui répondent le plus aux exigences de cette étude sont les éléments quadrilatères de la famille de LAGRANGE à champ quadratique.
- Dans le maillage, l'ordre de numérotation des nœuds influence directement sur la structure de la matrice de rigidité globale et par conséquent sur le temps du calcul requis pour la résolution.
- La déflexion centrale diminue en augmentant l'anisotropie $E1/E2$. Pour les plaques symétriques l'augmentation de l'anisotropie conduit à une augmentation de la contrainte de Von Mises tandis que pour les plaques anti-symétriques l'effet est presque négligeable.
- La variation des contraintes de cisaillement transverse (σ_{xz}, σ_{yz}) à travers l'épaisseur de la plaque ne dépend pas du degré de l'anisotropie du matériau pour le cas des plaques antisymétriques ce qui n'est pas le cas pour les plaques symétriques.
- La contrainte de Von Mises maximale augmente avec l'augmentation du degré de l'anisotropie puis elle se stabilise pour des valeurs de l'anisotropie $E1/E2$ supérieures à 30.

- Les plaques épaisses sont plus sollicitées en cisaillement transverse par rapport aux plaques minces; de même pour les plaques carrées par rapport aux plaques rectangulaires.
- Les contraintes de Von Mises développées dans les plaques carrées sont supérieures à celles développées dans les plaques rectangulaires.
- L'empilement des couches à un effet significatif sur la déflexion et les contraintes de cisaillement transverse et sur leur variation à travers l'épaisseur de la plaque.

Perspectives

Le sujet reste d'une importance très grande vue qu'il est d'actualité et des efforts considérables doivent être fournis afin de comprendre le comportement statique et dynamique des matériaux composites d'une manière générale. En effet en perspectives nous proposons ce qui suit :

- Elargir l'étude pour inclure les matériaux composites sandwichs.
- Traiter le problème de cisaillement des plaques en utilisant des théories d'ordres plus élevés telle que la TSDT (third order shear deformation theory) qui donne des résultats plus exacts et qui n'utilise pas de coefficient de correction.
- Développer le programme afin de permettre le calcul des structures en 3D et a maillage plus fins.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Jacques Renard. – Elaboration, microstructure et comportement des matériaux composites à matrice polymère. Lavoisier 2005.
- [2] Daniel Gay. – Les matériaux composites. Lavoisier 2005.
- [3] Robert M. Jones –Mechanics of composite materials .Second edition .TAYLOR & FRANCIS 1998.
- [4] J.M. Berthelot –Matériaux composites .Comportement mécanique et analyse des structures. Masson, Paris 1992.
- [5] K.J. Bathe. –Finite element procedures. Prentice Hall, inc, Upper Saddle River New Jersey 1996.
- [6] T.Y. Yang –Finite element structural analysis. Prentice Hall, inc, Englewood New Jersey 1986.
- [7] E .Hinton and D.R.J .Owen. –Finite element programming. ACADEMIC PRESS 1977.
- [8] Pierre SPITERI. – Méthode des éléments finis. Techniques de l'ingénieur, traité sciences fondamentales.
- AF 503 – Approche variationnelle pour la méthode des éléments finis.
AF 504 – Introduction à la méthode des éléments finis.
AF 505 – Présentation générale de la méthode des éléments finis.
- [9] O.O.Ochoa and J.N. Reddy. – Finite element analysis of composite laminates. KLUWER ACADEMIC PUBLISHER 1992.
- [10] Tarun KANT. –Numerical analysis of thick plates. Computer methods in applied mechanics and engineering 31 (1982) 1-8. North Holland publishing company.
- [11] M. Rastgaar Aagaah; M. Mahinfalah and G. Nakhaie Jazar. –Linear static analysis and finite element modelling for laminated composite plates using third order shear deformation theory. Composite structures 62(2003) 27-39. ELSEVIER.
- [12] T. Pervez; A.C. Seibi and F.K.S Al-Jahwari. –Analysis of thick orthotropic laminated composite plates based on higher order shear deformation theory. Composite structures 71(2005) 414-422. ELSEVIER.

ANNEXES

A1.1. Les principaux matériaux des renforts

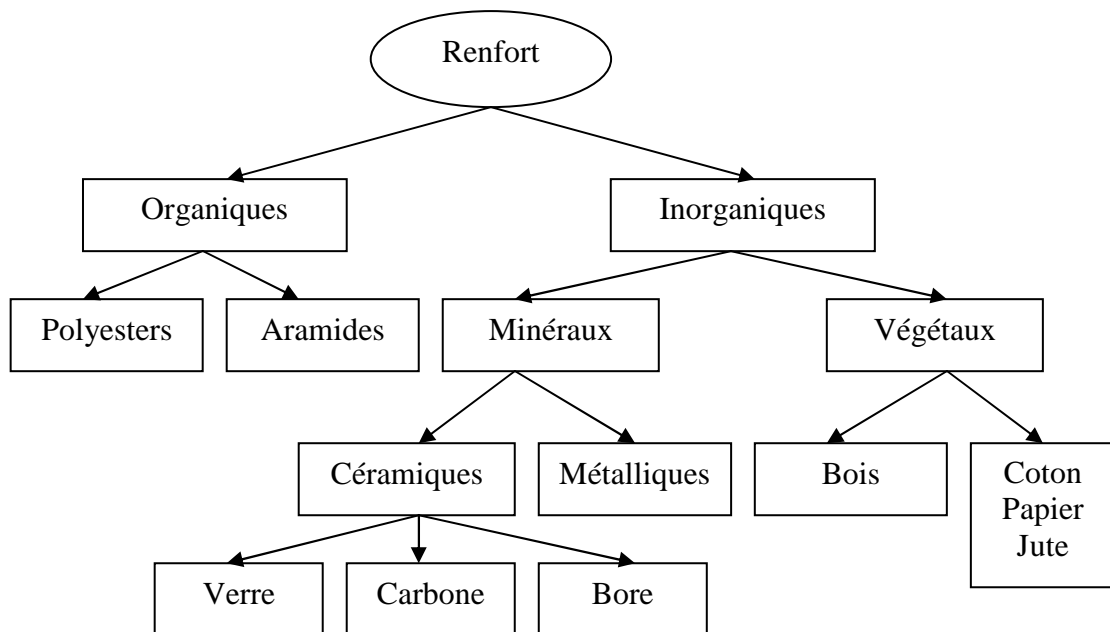


Figure A1.1 : Les principaux matériaux des renforts.

A1.2. Les différentes familles des matrices

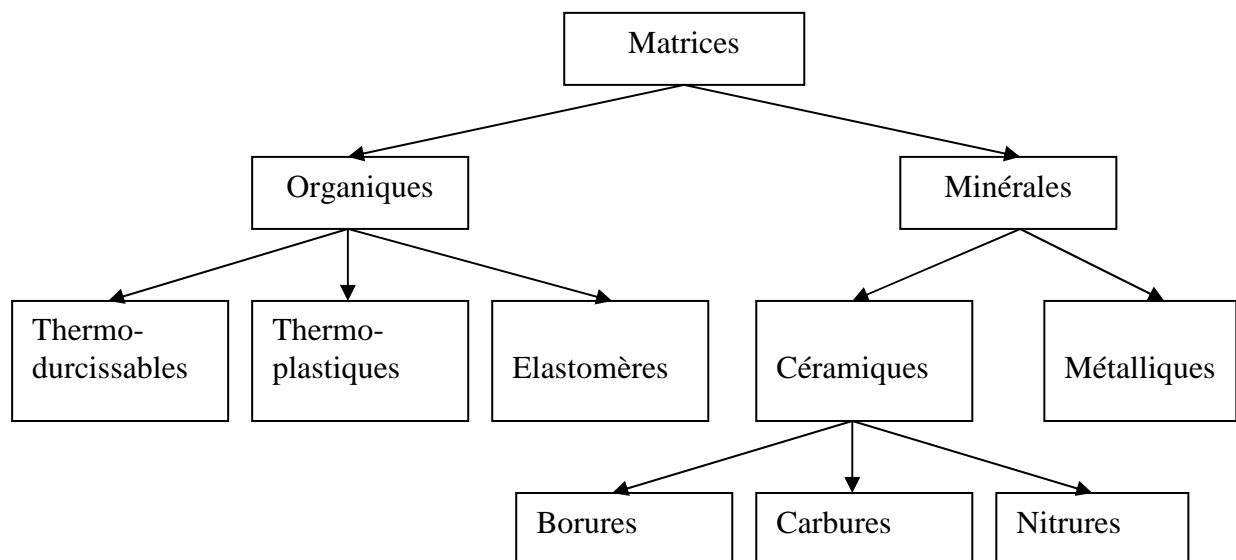


Figure A1.2 : Les différentes familles des matrices.

A1.3. Les Principales caractéristiques mécaniques des fibres

Tableau A1.1. Les caractéristiques mécaniques des fibres.

Fibre	densité	Charge de rupture en traction (MPa)	Charge de rupture en compression (MPa)	de en (%)	Allongement à la rupture (%)	Module d'élasticité longitudinale (MPa)	Diamètre du filament élémentaire (mm)	Prix (F/K)
Verre E	2.54	3400	1200		4.8	93000	3-30	12
Verre R	2.48	4400	1300		5.4	86000	3-30	50
Aramide bas module	1.45	3100	500		2	70000	12	150
Aramide haut module	1.45	3100	500		1	130000	12	200
Carbone haute ténacité	1.78	2800	1800		0.5	200000	8	300/1000
Carbone Haut module	1.8	2200	1300		--	400000	8	300/1000
Bore	2.63	3500	3500		0.8	400000	100-200	3000
Acier XC10	7.85	1000	--		--	210000	--	--

A1.4. Les critères essentiels des matrices TD et TP

Tableau A1.2. Les critères des matrices TD et TP

	TP : Thermoplastiques	TD : Thermodurcissables
Etat de base	Solide Prêt à l'emploi : polymérisé	Liquide visqueux à polymériser
Stockage matière de base	Illimité	Temps réduit (précautions à prendre)
Mouillabilité des renforts	Difficile	Aisé
Moulage	Chauffage (fusion/ramollissement+ refroidissement de fixation)	Chauffage continu
Cycle	Court	Plus long (polymérisation)
Caractéristiques spécifiques		
Tenue au choc	Assez bonne	Limitée
Tenue thermique	Réduite sauf nouveaux TP thermostable	Meilleure
Chutes et déchets	Recyclables	Perdue
Conditions de mise en oeuvre	Bonnes + propreté	Emanations pour méthode humide (allergie possible)

A1.5. Les principales caractéristiques mécaniques des résines

Tableau A1.3. Les caractéristiques mécaniques des résines

Résines	Nom	$\rho(kg / m^3)$	E (MPa)	ν	R(MPa)	$\alpha(\mu m / m^0 C)$	Prix(F/kg)
TD	Polyester	1300	3800	0.37	88	100	15
	Vinylester	1200	3500	0.35	81	65	18
	Epoxyde	1220	5200	0.38	121	40	40
	Silicone	1550	1000	0.45	3	30	200
	Polyimide	1217	3450	0.35	80	36	150
	Phénolique	1350	3000	0.36	70	80	10
	Polyamide	1130	1900	0.33	70	85	25
TP	Polycarbonate	1100	2300	0.33	60	70	30
	Polyester saturé	1310	2800	0.33	55	90	--
Metaux	Aluminium	2630	69000	0.33	358	23	13
	Acier XC10	7850	210000	0.29	1000	1000	10
	Cuivre	8940	119000	0.30	350	17	11
	Magnésium	1660	42000	0.30	280	25	27

A2.1. Les conditions de compatibilité

Etant donné le tenseur des déformations suivant :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{A2.1})$$

Les éléments de la matrice $[\varepsilon]$ sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

où u, v, w sont respectivement les composantes des déplacements suivant x, y, z .

Le champ des déplacements est obtenu par intégration des équations (A2.2). Soit au total six équations pour déterminer les trois composantes (u, v, w) du déplacement.

Pour que la solution soit unique, les composantes du tenseur des déformations doivent vérifier les six relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{A2.3}$$

Ces expressions constituent les six relations de compatibilité.

A3.1.Changement de base

Considérons deux systèmes de références orthonormés (x,y,z) et $(1,2,3)$ dont leurs bases sont respectivement $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (Figure A3.1).

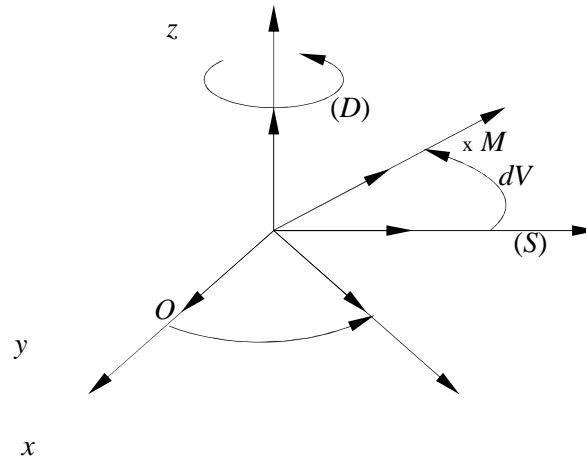


Figure A3.1.Scema d'un changement de base.

Dans le cas d'une rotation θ autour de la direction \vec{e}_z , la relation entre les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_x \cos \theta + \vec{e}_y \sin \theta \\ \vec{e}_2 &= -\vec{e}_x \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z\end{aligned}\quad (\text{A3.1})$$

ou sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix}\quad (\text{A3.2})$$

avec:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (\text{A3.3})$$

La matrice $[A]$ s'appelle *la matrice de changement de base*.

Le passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vers la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ s'effectue par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \vec{e}_1 \cos \theta - \vec{e}_2 \sin \theta \\ \vec{e}_y &= \vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_3\end{aligned}\quad (\text{A3.4})$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} = [A^T] \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix}\quad (\text{A3.5})$$

avec :

$$[A^T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (\text{A3.6})$$

La matrice $[A^T]$ est la matrice transposée de la matrice $[A]$, elle est égale à son inverse.

A3.2. La matrice de changement de base des contraintes

En tout point M d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté $[\sigma(M)]_{xyz}$. Ce tenseur est symétrique, il est représenté par la matrice :

$$[\sigma(M)]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}\quad (\text{A3.7})$$

Le tenseur $[\sigma(M)]_{xyz}$ défini dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ peut être défini dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la relation matricielle suivante [4] :

$$[\sigma]_{123} = [A][\sigma]_{xyz}[A^T]\quad (\text{A3.8})$$

La relation inverse s'écrit :

$$[\sigma]_{xyz} = [A^T][\sigma]_{123}[A]\quad (\text{A3.9})$$

où :

$$[\sigma]_{123} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix}\quad (\text{A3.10})$$

La relation (A3.8) conduit à écrire :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_x \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_y \sin^2 \theta \\
 \sigma_2 &= \sigma_x \sin^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_y \cos^2 \theta \\
 \sigma_3 &= \sigma_z \\
 \tau_{12} &= -\sigma_x \cos \theta \sin \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sigma_y \cos \theta \sin \theta \\
 \tau_{23} &= -\tau_{xz} \sin \theta + \tau_{yz} \cos \theta \\
 \tau_{13} &= \tau_{xy} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta
 \end{aligned} \tag{A3.11}$$

La relation (A3.11) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \tag{A3.12}$$

ou sous forme contractée :

$$\{\sigma\}_{123} = [T] \{\sigma\}_{xyz} \tag{A3.13}$$

[T] : est la matrice de changement de base des contraintes :

A3.3. La matrice de changement de base des déformations

Le tenseur des déformations ayant un tableau des composantes semblable à celui des contraintes :

$$[\epsilon]_{xyz} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \tag{A3.14}$$

Les relations de changement de base s'expriment sous la même forme que celles du tenseur des contraintes.

Tenons compte de la relation :

$$\epsilon_{ij} = 2\gamma_{ij} \quad i, j = x, y, z \quad \text{et} \quad i \neq j \tag{A3.15}$$

L'expression (A3.8) rapportée au champ des déformations conduit à écrire :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & -\cos \theta \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.16})$$

ou sous forme contractée :

$$\{\varepsilon\}_{123} = [T'] \{\varepsilon\}_{xyz} \quad (\text{A3.17})$$

$[T']$: est la matrice de changement de base des déformations

A4.1 Relations d'équilibre statique

Soit (D) un domaine d'un milieu continu, de frontière (S) (Figure A4.1). Les forces exercées sur le domaine (D) sont de deux sortes :

1. les forces volumiques (forces de pesanteur, d'inertie, etc.), qui s'exercent dans tout le volume, caractérisées par la densité de force $\vec{f}(M)$ par unité de volume. La force qui s'exerce sur l'élément de volume dV entourant le point M est :

$$d\vec{f}(M) = \vec{f}(M)dV \quad (\text{A4.1})$$

2. les forces surfaciques qui ne s'exercent que sur la frontière (S) du domaine (D). Elles sont caractérisées par la densité de force (vecteur des contraintes) $\vec{t}(M)$ par unité de surface. La force qui s'exerce sur l'élément de surface dS entourant le point M s'écrit :

$$d\vec{t}(M) = \vec{t}(M)dS \quad (\text{A4.2})$$

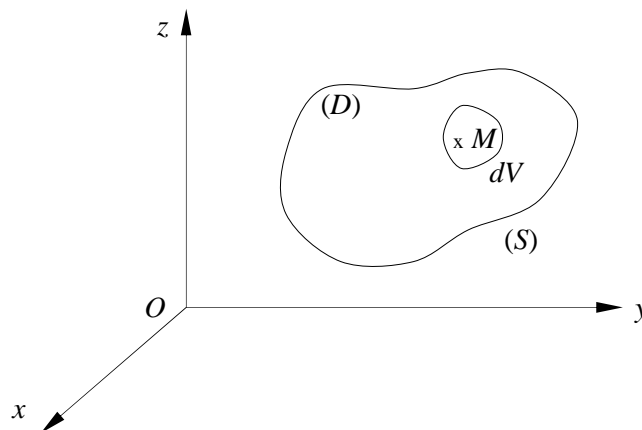


Figure A4.1 Domaine d'un milieu continu

L'orientation du vecteur des contraintes est prise positive de l'intérieur vers l'extérieur de l'élément et correspond dans ce cas à une tension ou une traction au point M . Dans le cas contraire, s'exerce en M une compression.

Dans le cas où le repère de référence (x, y, z) est un repère galiléen, la relation fondamentale de la statique appliquée à l'élément entourant un point M s'écrit :

$$\vec{f}(M)dV + \vec{t}(M)dS = 0 \quad (\text{A4.3})$$

Etendue à l'ensemble du domaine (D), la relation fondamentale conduit à une équation de résultante :

$$\int_V \vec{f} \cdot dV + \int_S \vec{t} \cdot dS = \vec{0} \quad (\text{A4.4})$$

et une équation de moment en un point de référence, par exemple le point O :

$$\int_V \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} dV + \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \vec{t} dS = \vec{0} \quad (\text{A4.5})$$

où les intégrales sont étendues au volume V du domaine et à la surface S de la frontière. Chaque équation conduit dans une base donnée à trois équations scalaires. Par exemple, en introduisant les composantes des différents vecteurs, l'équation de la résultante s'écrit pour la direction i :

$$\int_V f_i \cdot dV + \int_S t_i \cdot dS = 0 \quad (\text{A4.6})$$

ou bien :

$$\int_V f_i \cdot dV + \int_S \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot dS = 0 \quad (\text{A4.7})$$

L'intégral de surface peut être transformée en une intégrale de volume en utilisant la formule générale de Gauss qui permet de transformer une intégrale de surface en intégrale de volume et conduit ici à :

$$\int_S \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \cdot dV \quad (\text{A4.8})$$

La relation (A4.7) s'écrit donc :

$$\int_V (f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}) dV = 0 \quad (\text{A4.9})$$

Cette relation devant être vérifiée pour toute partie du domaine (D) se réduit à :

$$f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \quad (\text{A4.10})$$

L'exploitation de l'équation du moment conduit à la même relation, appelée relation fondamentale. Cette relation sous la forme (A4.10) est applicable aux cas de petites déformations.

et la relation fondamentale conduit aux trois équations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0\end{aligned}\quad (\text{A4.11})$$

A4.2 Relations fondamentales relatives aux résultantes de membrane

L'intégration des deux premières relations (A4.11) suivant l'épaisseur du stratifié conduit aux relations relatives aux résultantes de membrane :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = 0 \quad (\text{A4.12})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (\text{A4.13})$$

De même :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (\text{A4.14})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (\text{A4.15})$$

où $\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right)$ et $\sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right)$ sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles.

Dans le cas où il sera nécessaire d'en tenir compte, nous les noterons :

$$\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) = \tau_{1x} \quad \text{et} \quad \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) = \tau_{2x} \quad (\text{A4.16})$$

D'où

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \tau_{1x} - \tau_{2x} \quad (\text{A4.17})$$

En fin, nous posons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad (\text{A4.18})$$

L'intégration de la première équation (A4.11) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = 0 \quad (\text{A4.19})$$

De même, l'intégration de la deuxième équation (A4.11) conduit à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = 0 \quad (\text{A4.20})$$

où τ_{1x} et τ_{2x} tiennent compte des contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces :

$$\sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) = \tau_{1y} \quad \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) = \tau_{2y} \quad (\text{A4.21})$$

et

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_y dz = F_y \quad (\text{A4.22})$$

A4.3 Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement

L'intégration suivant l'épaisseur de la troisième équation (A4.11) s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = 0 \quad (\text{A4.23})$$

nous avons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz = \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (\text{A4.24})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dz = \frac{\partial Q_x}{\partial x} \quad (\text{A4.25})$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz = \sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (\text{A4.26})$$

Les contraintes $\sigma_{zz}\left(\frac{h}{2}\right)$ et $\sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right)$ apparaissent comme des forces de pression exercées sur chaque face de la plaque. Nous notons leur différence :

$$q(x, y) = q = \sigma_z\left(\frac{h}{2}\right) - \sigma_z\left(-\frac{h}{2}\right) \quad (\text{A4.27})$$

D'où

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = q \quad (\text{A4.28})$$

La combinaison des équations (A4.23) à (A4.28) conduit finalement à :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z = 0 \quad (\text{A4.29})$$

en posant :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = F_z \quad (\text{A4.30})$$

A4.4 Relations fondamentales relatives aux moments

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par z les deux premières équations (A4.11), puis en intégrant suivant l'épaisseur. Soit pour la première équation :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = 0 \quad (\text{A4.31})$$

En intégrant par parties, nous avons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{h}{2} \sigma_{xz}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz}\left(-\frac{h}{2}\right) - Q_x \quad (\text{A4.32})$$

soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) - Q_x \quad (\text{A4.33})$$

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = 0 \quad (\text{A4.34})$$

en posant :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz \quad (\text{A4.35})$$

De même, la deuxième équation (A4.11) conduit à :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = 0 \quad (\text{A4.36})$$

avec :

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz \quad (\text{A4.37})$$

A4.5 Résumé des relations fondamentales

Les relations fondamentales des plaques sont donc constituées des expressions (A4.20), (A4.20), (A4.29), (A3.34) et (A3.36). Soit en les regroupant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + F_z &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A4.38})$$

=====

ANALYSE STATIQUE DES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIEES

PROGRAMME EXECUTE LE :

14/09/2007

A

06:14:41:95 PM

=====

PROPRIETES MECANIQUES DU MATERIAU

=====

MODULE DE YOUNG LONGITUDINAL	E1 (N/m2)=	.17500E+12
MODULE DE YOUNG TRANSVERSAL	E2 (N/m2)=	.35000E+11
MODULE DE CISAILLEMENT LONGITUDINAL	G12 (N/m2)=	.35000E+10
MODULE DE CISAILLEMENT TRANSVERSAL	G23 (N/m2)=	.14000E+10
COEFFICIENT DE POISSON LONGITUDINAL	nu12=	.250
COEFFICIENT DE POISSON TRANSVERSAL	nu21=	.050
NOMBRE DE COUCHES	=	2
EPAISSEUR DE COUCHES	=	.6250E-01
EPAISSEUR DU STRATIFIE	=	.1250E+00
DIRECTION DE LA COUCHE N°:	01=	30.
DIRECTION DE LA COUCHE N°:	02=	45.

MATRICE DE RIGIDITE EN MEMBRANE A (Pa.m):

.1056E+11	.6055E+10	.5358E+10
.6055E+10	.6128E+10	.2909E+10
.5358E+10	.2909E+10	.5385E+10

MATRICE DE COUPLAGE MEMBRANE-FLEXION B (Pa.m2):

-.9131E+08	.2209E+08	-.2898E+08
.2209E+08	.4714E+08	.4753E+08
-.2898E+08	.4753E+08	.2209E+08

MATRICE DE RIGIDITE EN FLEXION D (Pa.m3):

.1375E+08	.7884E+07	.6976E+07
.7884E+07	.7980E+07	.3788E+07
.6976E+07	.3788E+07	.7012E+07

MATRICE DE RIGIDITE EN CISAILLEMENT F (Pa.m):

.2279E+09	.1020E+09
.1020E+09	.2826E+09

=====

A N A L Y S E P A R E L E M E N T S F I N I S

=====

NOMBRE D'ELEMENTS =	4
NOMBRE DE NOEUDS =	25
NOMBRE DE NOEUDS RESTRAINTS =	16

CONNECTIVITE DES NOEUDS :

ELEM.	NUMEROTATION								
1	1	6	9	10	11	7	3	2	22
2	3	7	11	12	13	8	5	4	23
3	9	14	17	18	19	15	11	10	24
4	11	15	19	20	21	16	13	12	25

COORDONNEES DES NOEUDS :

NOEUD	X	Y
1	.0000	.0000
2	.0000	.5000
3	.0000	1.0000
4	.0000	1.5000
5	.0000	2.0000
6	.5000	.0000
7	.5000	1.0000
8	.5000	2.0000
9	1.0000	.0000
10	1.0000	.5000
11	1.0000	1.0000
12	1.0000	1.5000
13	1.0000	2.0000
14	1.5000	.0000
15	1.5000	1.0000
16	1.5000	2.0000
17	2.0000	.0000
18	2.0000	.5000
19	2.0000	1.0000
20	2.0000	1.5000
21	2.0000	2.0000
22	.5000	.5000
23	.5000	1.5000
24	1.5000	.5000
25	1.5000	1.5000

NOEUDS RESTRAINTS :

NOEUD	CODE
1	11111
2	01101
3	01101
4	01101
5	11111
6	10110
8	10110
9	10110
13	10110
14	10110
16	10110
17	11111
18	01101
19	01101
20	01101
21	11111

=====

R E P O N S E S S T A T I Q U E S
=====

=====
 DEPLACEMENTS
 =====

NOEUD	U	V	W	TETAX	TETAY
1	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
2	-.1141E-09	.0000E+00	.0000E+00	-.1316E-07	.0000E+00
3	-.1319E-09	.0000E+00	.0000E+00	.4225E-08	.0000E+00
4	.6404E-10	.0000E+00	.0000E+00	.6781E-08	.0000E+00
5	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
6	.0000E+00	.1985E-09	.0000E+00	.0000E+00	-.1037E-07
7	-.8500E-11	-.2229E-09	.2517E-08	-.7818E-08	.1047E-07
8	.0000E+00	.1332E-09	.0000E+00	.0000E+00	-.6685E-08
9	.0000E+00	.1093E-09	.0000E+00	.0000E+00	.2885E-08
10	.2253E-09	-.6894E-10	.2358E-08	.1015E-07	-.6356E-08
11	-.2931E-22	.6286E-22	.7410E-08	-.2128E-20	-.2570E-20
12	-.2253E-09	.6894E-10	.2358E-08	-.1015E-07	.6356E-08
13	.0000E+00	-.1093E-09	.0000E+00	.0000E+00	-.2885E-08
14	.0000E+00	-.1332E-09	.0000E+00	.0000E+00	.6685E-08
15	.8500E-11	.2229E-09	.2517E-08	.7818E-08	-.1047E-07
16	.0000E+00	-.1985E-09	.0000E+00	.0000E+00	.1037E-07
17	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
18	-.6404E-10	.0000E+00	.0000E+00	-.6781E-08	.0000E+00
19	.1319E-09	.0000E+00	.0000E+00	-.4225E-08	.0000E+00
20	.1141E-09	.0000E+00	.0000E+00	.1316E-07	.0000E+00
21	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
22	.5438E-11	.1804E-10	.7213E-08	-.2950E-08	-.3314E-08
23	-.7903E-10	-.4671E-10	-.3734E-08	-.2785E-08	.3524E-08
24	.7903E-10	.4671E-10	-.3734E-08	.2785E-08	-.3524E-08
25	-.5438E-11	-.1804E-10	.7213E-08	.2950E-08	.3314E-08

=====
 EFFORTS INTERNES
 =====

EL.	G.P.	X Coord	Y Coord	Nx Ny Nxy	Mx My Mxy	Qy Qx
1	1	.2113	.2113	.6896E+00 -.1012E+01 -.8895E-02	.2505E-01 .7251E-01 -.1257E+00	.1652E+01 .1820E+01
1	2	.2113	.7887	-.8384E+00 .8126E+00 .5591E+00	.2882E+00 .2138E+00 .2088E+00	-.7439E+00 .9359E+00
1	3	.7887	.2113	-.1493E+01 .6716E+00 .3692E+00	.3332E+00 .1907E+00 .2401E+00	.8142E+00 -.9185E+00
1	4	.7887	.7887	.4182E+00 -.1694E+00 -.1737E+00	.2510E+00 .2488E+00 -.2826E-01	-.8025E+00 -.1037E+01
2	1	.2113	1.2113	.6635E+00 .6709E+00 .5004E-01	-.2044E+00 -.1718E+00 .3185E-02	-.1143E+01 -.1393E+01
2	2	.2113	1.7887	.9523E+00 -.5385E+00 -.2591E+00	-.2776E+00 -.1957E+00 -.1666E+00	.6471E+00 -.7793E+00
2	3	.7887	1.2113	.6564E+00 .2189E+00 -.9447E-01	-.9854E-01 -.5987E-01 -.8386E-01	-.9033E+00 .1083E+01
2	4	.7887	1.7887	-.6260E+00 -.2084E+00	-.1488E+00 -.1693E+00	.1307E+01 .1468E+01

3	1	1.2113	.2113	.2392E+00	.3028E-01	-.6260E+00	-.1488E+00	-.1307E+01
				-.2084E+00	-.1693E+00	-.1468E+01		
3	2	1.2113	.7887	.2392E+00	.3028E-01	.6564E+00	-.9854E-01	.9033E+00
				.2189E+00	-.5987E-01	-.1083E+01		
3	3	1.7887	.2113	-.9447E-01	-.8386E-01	.9523E+00	-.2776E+00	-.6471E+00
				-.5385E+00	-.1957E+00	.7793E+00		
3	4	1.7887	.7887	-.2591E+00	-.1666E+00	.6635E+00	-.2044E+00	.1143E+01
				.6709E+00	-.1718E+00	.1393E+01		
4	1	1.2113	1.2113	.5004E-01	.3185E-02	.4182E+00	.2510E+00	.8025E+00
				-.1694E+00	.2488E+00	.1037E+01		
4	2	1.2113	1.7887	-.1737E+00	-.2826E-01	-.1493E+01	.3332E+00	-.8142E+00
				.6716E+00	.1907E+00	.9185E+00		
4	3	1.7887	1.2113	.3692E+00	.2401E+00	-.8384E+00	.2882E+00	.7439E+00
				.8126E+00	.2138E+00	-.9359E+00		
4	4	1.7887	1.7887	.5591E+00	.2088E+00	.6896E+00	.2505E-01	-.1652E+01
				-.1012E+01	.7251E-01	-.1820E+01		
				-.8895E-02	-.1257E+00			

=====
 DEFORMATIONS
 =====

LES DEFORMATIONS DANS LE PLAN MOYEN DU STRATIFIE:

EL.	G.P.	EPSIX	EPSIY	EPSIXY	KAPAX	KAPAX	KAPAY	EPSIYZ	EPSIXZ
1	1	.12E-09	-.19E-09	.13E-09	.17E-07	.11E-07	-.39E-07	.52E-08	.46E-08
1	2	.27E-09	-.35E-09	-.22E-09	.95E-09	.17E-07	.24E-07	-.57E-08	.54E-08
1	3	.30E-09	-.41E-09	-.15E-10	.15E-07	-.80E-09	.23E-07	.60E-08	-.54E-08
1	4	.30E-09	-.25E-09	-.12E-09	.26E-07	.26E-07	-.41E-07	-.22E-08	-.29E-08
2	1	-.70E-10	.21E-09	-.20E-09	-.25E-07	-.11E-07	.30E-07	-.34E-08	-.37E-08
2	2	-.22E-09	.29E-09	.11E-09	-.97E-08	-.11E-07	-.11E-07	.49E-08	-.45E-08
2	3	-.20E-09	.31E-09	.73E-10	-.11E-08	-.20E-08	-.13E-07	-.68E-08	.63E-08
2	4	-.20E-09	.61E-10	.24E-09	-.12E-07	-.23E-07	.27E-07	.41E-08	.37E-08
3	1	-.20E-09	.61E-10	.24E-09	-.12E-07	-.23E-07	.27E-07	-.41E-08	-.37E-08
3	2	-.20E-09	.31E-09	.73E-10	-.11E-08	-.20E-08	-.13E-07	.68E-08	-.63E-08
3	3	-.22E-09	.29E-09	.11E-09	-.97E-08	-.11E-07	-.11E-07	-.49E-08	.45E-08
3	4	-.70E-10	.21E-09	-.20E-09	-.25E-07	-.11E-07	.30E-07	.34E-08	.37E-08
4	1	.30E-09	-.25E-09	-.12E-09	.26E-07	.26E-07	-.41E-07	.22E-08	.29E-08
4	2	.30E-09	-.41E-09	-.15E-10	.15E-07	-.80E-09	.23E-07	-.60E-08	.54E-08
4	3	.27E-09	-.35E-09	-.22E-09	.95E-09	.17E-07	.24E-07	.57E-08	-.54E-08
4	4	.12E-09	-.19E-09	.13E-09	.17E-07	.11E-07	-.39E-07	-.52E-08	-.46E-08

LES DEFORMATIONS EN HAUT ET AU BAS DE CHAQUE PLI EXPRIMEES DANS (X,Y,Z):

PLI	EL.	G.P.	EPSIX-SUP	EPSIY-SUP	EPSIXY-SUP	EPSIYZ-SUP	EPSIXZ-SUP
			EPSIX-INF	EPSIY-INF	EPSIXY-INF	EPSIYZ-INF	EPSIXZ-INF
1	1	1	.1168E-09	-.1862E-09	.1338E-09	.5205E-08	.4562E-08
			-.9225E-09	-.8902E-09	.2586E-08	.5205E-08	.4562E-08
1	1	2	.1156E-08	.5177E-09	-.2318E-08	.5205E-08	.4562E-08
			.1168E-09	-.1862E-09	.1338E-09	.5205E-08	.4562E-08
1	1	3	.2695E-09	-.3490E-09	-.2199E-09	-.5664E-08	.5358E-08
			.2102E-09	-.1426E-08	-.1701E-08	-.5664E-08	.5358E-08
1	1	4	.3288E-09	.7277E-09	.1261E-08	-.5664E-08	.5358E-08
			.2695E-09	-.3490E-09	-.2199E-09	-.5664E-08	.5358E-08
1	2	1	.3036E-09	-.4141E-09	-.1528E-10	.5999E-08	-.5418E-08
			-.6640E-09	-.3641E-09	-.1477E-08	.5999E-08	-.5418E-08
1	2	2	.1271E-08	-.4641E-09	.1446E-08	.5999E-08	-.5418E-08
			.3036E-09	-.4141E-09	-.1528E-10	.5999E-08	-.5418E-08

1	2	3	.3031E-09	-.2473E-09	-.1202E-09	-.2240E-08	-.2862E-08
			-.1340E-08	-.1870E-08	.2436E-08	-.2240E-08	-.2862E-08
1	2	4	.1946E-08	.1375E-08	-.2676E-08	-.2240E-08	-.2862E-08
			.3031E-09	-.2473E-09	-.1202E-09	-.2240E-08	-.2862E-08
1	3	1	-.6996E-10	.2130E-09	-.2022E-09	-.3353E-08	-.3718E-08
			.1514E-08	.8862E-09	-.2102E-08	-.3353E-08	-.3718E-08
1	3	2	-.1654E-08	-.4601E-09	.1698E-08	-.3353E-08	-.3718E-08
			-.6996E-10	.2130E-09	-.2022E-09	-.3353E-08	-.3718E-08
1	3	3	-.2227E-09	.2884E-09	.1122E-09	.4862E-08	-.4514E-08
			.3815E-09	.1001E-08	.8134E-09	.4862E-08	-.4514E-08
1	3	4	-.8270E-09	-.4240E-09	-.5889E-09	.4862E-08	-.4514E-08
			-.2227E-09	.2884E-09	.1122E-09	.4862E-08	-.4514E-08
1	4	1	-.1957E-09	.3147E-09	.7250E-10	-.6777E-08	.6281E-08
			-.1286E-09	.4421E-09	.8826E-09	-.6777E-08	.6281E-08
1	4	2	-.2628E-09	.1874E-09	-.7376E-09	-.6777E-08	.6281E-08
			-.1957E-09	.3147E-09	.7250E-10	-.6777E-08	.6281E-08
1	4	3	-.1953E-09	.6053E-10	.2391E-09	.4067E-08	.3726E-08
			.5470E-09	.1527E-08	-.1438E-08	.4067E-08	.3726E-08
1	4	4	-.9375E-09	-.1406E-08	.1917E-08	.4067E-08	.3726E-08
			-.1953E-09	.6053E-10	.2391E-09	.4067E-08	.3726E-08
2	1	1	-.1953E-09	.6053E-10	.2391E-09	-.4067E-08	-.3726E-08
			.5470E-09	.1527E-08	-.1438E-08	-.4067E-08	-.3726E-08
2	1	2	-.9375E-09	-.1406E-08	.1917E-08	-.4067E-08	-.3726E-08
			-.1953E-09	.6053E-10	.2391E-09	-.4067E-08	-.3726E-08
2	1	3	-.1957E-09	.3147E-09	.7250E-10	.6777E-08	-.6281E-08
			-.1286E-09	.4421E-09	.8826E-09	.6777E-08	-.6281E-08
2	1	4	-.2628E-09	.1874E-09	-.7376E-09	.6777E-08	-.6281E-08
			-.1957E-09	.3147E-09	.7250E-10	.6777E-08	-.6281E-08
2	2	1	-.2227E-09	.2884E-09	.1122E-09	-.4862E-08	.4514E-08
			.3815E-09	.1001E-08	.8134E-09	-.4862E-08	.4514E-08
2	2	2	-.8270E-09	-.4240E-09	-.5889E-09	-.4862E-08	.4514E-08
			-.2227E-09	.2884E-09	.1122E-09	-.4862E-08	.4514E-08
2	2	3	-.6996E-10	.2130E-09	-.2022E-09	.3353E-08	.3718E-08
			.1514E-08	.8862E-09	-.2102E-08	.3353E-08	.3718E-08
2	2	4	-.1654E-08	-.4601E-09	.1698E-08	.3353E-08	.3718E-08
			-.6996E-10	.2130E-09	-.2022E-09	.3353E-08	.3718E-08
2	3	1	.3031E-09	-.2473E-09	-.1202E-09	.2240E-08	.2862E-08
			-.1340E-08	-.1870E-08	.2436E-08	.2240E-08	.2862E-08
2	3	2	.1946E-08	.1375E-08	-.2676E-08	.2240E-08	.2862E-08
			.3031E-09	-.2473E-09	-.1202E-09	.2240E-08	.2862E-08
2	3	3	.3036E-09	-.4141E-09	-.1528E-10	-.5999E-08	.5418E-08
			-.6640E-09	-.3641E-09	-.1477E-08	-.5999E-08	.5418E-08
2	3	4	.1271E-08	-.4641E-09	.1446E-08	-.5999E-08	.5418E-08
			.3036E-09	-.4141E-09	-.1528E-10	-.5999E-08	.5418E-08
2	4	1	.2695E-09	-.3490E-09	-.2199E-09	.5664E-08	-.5358E-08
			.2102E-09	-.1426E-08	-.1701E-08	.5664E-08	-.5358E-08
2	4	2	.3288E-09	.7277E-09	.1261E-08	.5664E-08	-.5358E-08
			.2695E-09	-.3490E-09	-.2199E-09	.5664E-08	-.5358E-08
2	4	3	.1168E-09	-.1862E-09	.1338E-09	-.5205E-08	-.4562E-08
			-.9225E-09	-.8902E-09	.2586E-08	-.5205E-08	-.4562E-08
2	4	4	.1156E-08	.5177E-09	-.2318E-08	-.5205E-08	-.4562E-08
			.1168E-09	-.1862E-09	.1338E-09	-.5205E-08	-.4562E-08

LES DEFORMATIONS EN HAUT ET AU BAS DE CHAQUE PLI EXPRIMEES DANS (1,2,3):

PLI	EL.	G.P.	EPSIX-SUP	EPSIY-SUP	EPSIXY-SUP	EPSIYZ-SUP	EPSIXZ-SUP
			EPSIX-INF	EPSIY-INF	EPSIXY-INF	EPSIYZ-INF	EPSIXZ-INF
1	1	1	.1168E-09	-.1862E-09	.1338E-09	.5205E-08	.4562E-08
			-.9225E-09	-.8902E-09	.2586E-08	.5205E-08	.4562E-08
1	1	2	.1156E-08	.5177E-09	-.2318E-08	.5205E-08	.4562E-08
			.1168E-09	-.1862E-09	.1338E-09	.5205E-08	.4562E-08
1	1	3	.2695E-09	-.3490E-09	-.2199E-09	-.5664E-08	.5358E-08
			.2102E-09	-.1426E-08	-.1701E-08	-.5664E-08	.5358E-08
1	1	4	.3288E-09	.7277E-09	.1261E-08	-.5664E-08	.5358E-08
			.2695E-09	-.3490E-09	-.2199E-09	-.5664E-08	.5358E-08
1	2	1	.3036E-09	-.4141E-09	-.1528E-10	.5999E-08	-.5418E-08

			-.6640E-09	-.3641E-09	-.1477E-08	.5999E-08	-.5418E-08
1	2	2	.1271E-08	-.4641E-09	.1446E-08	.5999E-08	-.5418E-08
			.3036E-09	-.4141E-09	-.1528E-10	.5999E-08	-.5418E-08
1	2	3	-.3031E-09	-.2473E-09	-.1202E-09	-.2240E-08	-.2862E-08
			-.1340E-08	-.1870E-08	.2436E-08	-.2240E-08	-.2862E-08
1	2	4	.1946E-08	.1375E-08	-.2676E-08	-.2240E-08	-.2862E-08
			.3031E-09	-.2473E-09	-.1202E-09	-.2240E-08	-.2862E-08
1	3	1	-.6996E-10	.2130E-09	-.2022E-09	-.3353E-08	-.3718E-08
			.1514E-08	.8862E-09	-.2102E-08	-.3353E-08	-.3718E-08
1	3	2	-.1654E-08	-.4601E-09	.1698E-08	-.3353E-08	-.3718E-08
			-.6996E-10	.2130E-09	-.2022E-09	-.3353E-08	-.3718E-08
1	3	3	-.2227E-09	.2884E-09	.1122E-09	.4862E-08	-.4514E-08
			.3815E-09	.1001E-08	.8134E-09	.4862E-08	-.4514E-08
1	3	4	-.8270E-09	-.4240E-09	-.5889E-09	.4862E-08	-.4514E-08
			-.2227E-09	.2884E-09	.1122E-09	.4862E-08	-.4514E-08
1	4	1	-.1957E-09	.3147E-09	.7250E-10	-.6777E-08	.6281E-08
			-.1286E-09	.4421E-09	.8826E-09	-.6777E-08	.6281E-08
1	4	2	-.2628E-09	.1874E-09	-.7376E-09	-.6777E-08	.6281E-08
			-.1957E-09	.3147E-09	.7250E-10	-.6777E-08	.6281E-08
1	4	3	-.1953E-09	.6053E-10	.2391E-09	.4067E-08	.3726E-08
			.5470E-09	.1527E-08	-.1438E-08	.4067E-08	.3726E-08
1	4	4	-.9375E-09	-.1406E-08	.1917E-08	.4067E-08	.3726E-08
			-.1953E-09	.6053E-10	.2391E-09	.4067E-08	.3726E-08
2	1	1	-.1953E-09	.6053E-10	.2391E-09	-.4067E-08	-.3726E-08
			.5470E-09	.1527E-08	-.1438E-08	-.4067E-08	-.3726E-08
2	1	2	-.9375E-09	-.1406E-08	.1917E-08	-.4067E-08	-.3726E-08
			-.1953E-09	.6053E-10	.2391E-09	-.4067E-08	-.3726E-08
2	1	3	-.1957E-09	.3147E-09	.7250E-10	.6777E-08	-.6281E-08
			-.1286E-09	.4421E-09	.8826E-09	.6777E-08	-.6281E-08
2	1	4	-.2628E-09	.1874E-09	-.7376E-09	.6777E-08	-.6281E-08
			-.1957E-09	.3147E-09	.7250E-10	.6777E-08	-.6281E-08
2	2	1	-.2227E-09	.2884E-09	.1122E-09	-.4862E-08	.4514E-08
			.3815E-09	.1001E-08	.8134E-09	-.4862E-08	.4514E-08
2	2	2	-.8270E-09	-.4240E-09	-.5889E-09	-.4862E-08	.4514E-08
			-.2227E-09	.2884E-09	.1122E-09	-.4862E-08	.4514E-08
2	2	3	-.6996E-10	.2130E-09	-.2022E-09	.3353E-08	.3718E-08
			.1514E-08	.8862E-09	-.2102E-08	.3353E-08	.3718E-08
2	2	4	-.1654E-08	-.4601E-09	.1698E-08	.3353E-08	.3718E-08
			-.6996E-10	.2130E-09	-.2022E-09	.3353E-08	.3718E-08
2	3	1	.3031E-09	-.2473E-09	-.1202E-09	.2240E-08	.2862E-08
			-.1340E-08	-.1870E-08	.2436E-08	.2240E-08	.2862E-08
2	3	2	.1946E-08	.1375E-08	-.2676E-08	.2240E-08	.2862E-08
			.3031E-09	-.2473E-09	-.1202E-09	.2240E-08	.2862E-08
2	3	3	.3036E-09	-.4141E-09	-.1528E-10	-.5999E-08	.5418E-08
			-.6640E-09	-.3641E-09	-.1477E-08	-.5999E-08	.5418E-08
2	3	4	.1271E-08	-.4641E-09	.1446E-08	-.5999E-08	.5418E-08
			.3036E-09	-.4141E-09	-.1528E-10	-.5999E-08	.5418E-08
2	4	1	.2695E-09	-.3490E-09	-.2199E-09	.5664E-08	-.5358E-08
			.2102E-09	-.1426E-08	-.1701E-08	.5664E-08	-.5358E-08
2	4	2	.3288E-09	.7277E-09	.1261E-08	.5664E-08	-.5358E-08
			.2695E-09	-.3490E-09	-.2199E-09	.5664E-08	-.5358E-08
2	4	3	.1168E-09	-.1862E-09	.1338E-09	-.5205E-08	-.4562E-08
			-.9225E-09	-.8902E-09	.2586E-08	-.5205E-08	-.4562E-08
2	4	4	.1156E-08	.5177E-09	-.2318E-08	-.5205E-08	-.4562E-08
			.1168E-09	-.1862E-09	.1338E-09	-.5205E-08	-.4562E-08

=====
 CONTRAINTES
 =====

LES CONTRAINTES EN HAUT ET AU BAS DE CHAQUE PLI EXPRIMEES DANS (X,Y,Z) :

PLI	EL.	G.P.	SIGMAX-SUP	SIGMAY-SUP	SIGMAXY-SUP	SIGMAYZ-SUP	SIGMAXZ-SUP
			SIGMAX-INF	SIGMAY-INF	SIGMAXY-INF	SIGMAYZ-INF	SIGMAXZ-INF
1	1	1	.1135E+02	-.4008E+00	.8810E+01	.1002E+02	.1357E+02
			-.7549E+01	-.4365E+02	.4051E+02	.1002E+02	.1357E+02
1	1	2	.1646E+02	.1199E+02	-.5366E+02	.1275E+02	.1118E+02

1	1	3	.1802E+01	-.3186E+00	.4059E+01	.1275E+02	.1118E+02
			.3077E+01	-.3810E+01	.1445E+01	-.1090E+02	.1594E+02
			-.1239E+03	-.6259E+02	-.6892E+02	-.1090E+02	.1594E+02
1	1	4	.1041E+03	.1069E+03	.9890E+02	-.1388E+02	.1313E+02
			-.1021E+02	-.1454E+02	-.1353E+02	-.1388E+02	.1313E+02
1	2	1	.1425E+02	-.2486E+01	.1009E+02	.1155E+02	-.1612E+02
			-.1614E+03	-.5827E+02	-.9270E+02	.1155E+02	-.1612E+02
1	2	2	.1038E+03	.9167E+02	.9908E+02	.1470E+02	-.1327E+02
			-.4395E+01	-.9419E+01	-.4662E+01	.1470E+02	-.1327E+02
1	2	3	.1607E+02	.2495E+01	.7998E+01	-.4312E+01	-.8515E+01
			-.1020E+03	-.9937E+02	.3044E+01	-.4312E+01	-.8515E+01
1	2	4	.9841E+02	.9442E+02	-.1272E+02	-.5488E+01	-.7012E+01
			.8832E+00	-.2970E+01	-.3878E+01	-.5488E+01	-.7012E+01
1	3	1	-.8598E+01	.2635E+01	-.8720E+01	-.6454E+01	-.1106E+02
			.9553E+02	.7420E+02	.7314E+01	-.6454E+01	-.1106E+02
1	3	2	-.6579E+02	-.5743E+02	.7792E+01	-.8214E+01	-.9110E+01
			.8265E-01	.2064E+01	-.4785E+01	-.8214E+01	-.9110E+01
1	3	3	-.6035E+01	.2378E+01	-.3794E+01	.9359E+01	-.1343E+02
			.1249E+03	.6235E+02	.6074E+02	.9359E+01	-.1343E+02
1	3	4	-.9433E+02	-.9151E+02	-.7304E+02	.1191E+02	-.1106E+02
			.5974E+01	.9551E+01	.7799E+01	.1191E+02	-.1106E+02
1	4	1	-.3995E+01	.4064E+01	-.3631E+01	-.1305E+02	.1869E+02
			.4943E+02	.2064E+02	.3148E+02	-.1305E+02	.1869E+02
1	4	2	-.3207E+02	-.2891E+02	-.3862E+02	-.1660E+02	.1539E+02
			.7638E+01	.1121E+02	.7752E+01	-.1660E+02	.1539E+02
1	4	3	-.6447E+01	-.3462E+01	-.1979E+00	.7830E+01	.1108E+02
			.5200E+02	.6386E+02	-.9370E+01	.7830E+01	.1108E+02
1	4	4	-.6540E+02	-.6868E+02	.1035E+02	.9965E+01	.9128E+01
			-.1812E+00	.1609E+01	.6876E+01	.9965E+01	.9128E+01
2	1	1	-.6447E+01	-.3462E+01	-.1979E+00	-.7830E+01	-.1108E+02
			.5200E+02	.6386E+02	-.9370E+01	-.7830E+01	-.1108E+02
2	1	2	-.6540E+02	-.6868E+02	.1035E+02	-.9965E+01	-.9128E+01
			-.1812E+00	.1609E+01	.6876E+01	-.9965E+01	-.9128E+01
2	1	3	-.3995E+01	.4064E+01	-.3631E+01	.1305E+02	-.1869E+02
			.4943E+02	.2064E+02	.3148E+02	.1305E+02	-.1869E+02
2	1	4	-.3207E+02	-.2891E+02	-.3862E+02	-.1660E+02	-.1539E+02
			.7638E+01	.1121E+02	.7752E+01	.1660E+02	-.1539E+02
2	2	1	-.6035E+01	.2378E+01	-.3794E+01	-.9359E+01	.1343E+02
			.1249E+03	.6235E+02	.6074E+02	-.9359E+01	.1343E+02
2	2	2	-.9433E+02	-.9151E+02	-.7304E+02	-.1191E+02	.1106E+02
			.5974E+01	.9551E+01	.7799E+01	-.1191E+02	.1106E+02
2	2	3	-.8598E+01	.2635E+01	-.8720E+01	.6454E+01	.1106E+02
			.9553E+02	.7420E+02	.7314E+01	.6454E+01	.1106E+02
2	2	4	-.6579E+02	-.5743E+02	.7792E+01	.8214E+01	.9110E+01
			.8265E-01	.2064E+01	-.4785E+01	.8214E+01	.9110E+01
2	3	1	.1607E+02	.2495E+01	.7998E+01	.4312E+01	.8515E+01
			-.1020E+03	-.9937E+02	.3044E+01	.4312E+01	.8515E+01
2	3	2	.9841E+02	.9442E+02	-.1272E+02	.5488E+01	.7012E+01
			.8832E+00	-.2970E+01	-.3878E+01	.5488E+01	.7012E+01
2	3	3	.1425E+02	-.2486E+01	.1009E+02	-.1155E+02	.1612E+02
			-.1614E+03	-.5827E+02	-.9270E+02	-.1155E+02	.1612E+02
2	3	4	.1038E+03	.9167E+02	.9908E+02	-.1470E+02	.1327E+02
			-.4395E+01	-.9419E+01	-.4662E+01	-.1470E+02	.1327E+02
2	4	1	.3077E+01	-.3810E+01	.1445E+01	.1090E+02	-.1594E+02
			-.1239E+03	-.6259E+02	-.6892E+02	.1090E+02	-.1594E+02
2	4	2	.1041E+03	.1069E+03	.9890E+02	.1388E+02	-.1313E+02
			-.1021E+02	-.1454E+02	-.1353E+02	.1388E+02	-.1313E+02
2	4	3	.1135E+02	-.4008E+00	.8810E+01	-.1002E+02	-.1357E+02
			-.7549E+01	-.4365E+02	.4051E+02	-.1002E+02	-.1357E+02
2	4	4	.1646E+02	.1199E+02	-.5366E+02	-.1275E+02	-.1118E+02
			.1802E+01	-.3186E+00	.4059E+01	-.1275E+02	-.1118E+02

LES CONTRAINTES EN HAUT ET AU BAS DE CHAQUE PLI EXPRIMEES DANS (1,2,3):

PLI	EL.	G.P.	SIGMAX-SUP	SIGMAY-SUP	SIGMAXY-SUP	SIGMAYZ-SUP	SIGMAXZ-SUP
			SIGMAX-INF	SIGMAY-INF	SIGMAXY-INF	SIGMAYZ-INF	SIGMAXZ-INF
1	1	1	.1904E+02	-.5566E+01	.4683E+00	.7287E+01	.1597E+02

			-.1714E+03	-.3973E+02	.9051E+01	.7287E+01	.1597E+02
1	1	2	.2095E+03	.2859E+02	-.8115E+01	.7287E+01	.1597E+02
			.1904E+02	-.5566E+01	.4683E+00	.7287E+01	.1597E+02
1	1	3	.4467E+02	-.9981E+01	-.7697E+00	-.7930E+01	.1875E+02
			.2462E+02	-.4867E+02	-.5953E+01	-.7930E+01	.1875E+02
1	1	4	.6472E+02	.2871E+02	.4414E+01	-.7930E+01	.1875E+02
			.4467E+02	-.9981E+01	-.7697E+00	-.7930E+01	.1875E+02
1	2	1	.5013E+02	-.1199E+02	-.5349E-01	.8399E+01	-.1896E+02
			-.1209E+03	-.1879E+02	-.5169E+01	.8399E+01	-.1896E+02
1	2	2	.2212E+03	-.5186E+01	.5062E+01	.8399E+01	-.1896E+02
			.5013E+02	-.1199E+02	-.5349E-01	.8399E+01	-.1896E+02
1	2	3	.5153E+02	-.6079E+01	-.4207E+00	-.3136E+01	-.1002E+02
			-.2540E+03	-.7814E+02	.8526E+01	-.3136E+01	-.1002E+02
1	2	4	.3570E+03	.6598E+02	-.9367E+01	-.3136E+01	-.1002E+02
			.5153E+02	-.6079E+01	-.4207E+00	-.3136E+01	-.1002E+02
1	3	1	-.1051E+02	.6931E+01	-.7079E+00	-.4694E+01	-.1301E+02
			.2762E+03	.4483E+02	-.7357E+01	-.4694E+01	-.1301E+02
1	3	2	-.2972E+03	-.3096E+02	.5941E+01	-.4694E+01	-.1301E+02
			-.1051E+02	.6931E+01	-.7079E+00	-.4694E+01	-.1301E+02
1	3	3	-.3691E+02	.8249E+01	.3928E+00	.6806E+01	-.1580E+02
			.7648E+02	.3885E+02	.2847E+01	.6806E+01	-.1580E+02
1	3	4	-.1503E+03	-.2236E+02	-.2061E+01	.6806E+01	-.1580E+02
			-.3691E+02	.8249E+01	.3928E+00	.6806E+01	-.1580E+02
1	4	1	-.3189E+02	.9421E+01	.2538E+00	-.9488E+01	.2198E+02
			-.1887E+02	.1453E+02	.3089E+01	-.9488E+01	.2198E+02
1	4	2	-.4492E+02	.4312E+01	-.2582E+01	-.9488E+01	.2198E+02
			-.3189E+02	.9421E+01	.2538E+00	-.9488E+01	.2198E+02
1	4	3	-.3407E+02	.4153E+00	.8368E+00	.5694E+01	.1304E+02
			.1105E+03	.5897E+02	-.5034E+01	.5694E+01	.1304E+02
1	4	4	-.1786E+03	-.5814E+02	.6708E+01	.5694E+01	.1304E+02
			-.3407E+02	.4153E+00	.8368E+00	.5694E+01	.1304E+02
2	1	1	-.3407E+02	.4153E+00	.8368E+00	-.5694E+01	-.1304E+02
			.1105E+03	.5897E+02	-.5034E+01	-.5694E+01	-.1304E+02
2	1	2	-.1786E+03	-.5814E+02	.6708E+01	-.5694E+01	-.1304E+02
			-.3407E+02	.4153E+00	.8368E+00	-.5694E+01	-.1304E+02
2	1	3	-.3189E+02	.9421E+01	.2538E+00	.9488E+01	-.2198E+02
			-.1887E+02	.1453E+02	.3089E+01	.9488E+01	-.2198E+02
2	1	4	-.4492E+02	.4312E+01	-.2582E+01	.9488E+01	-.2198E+02
			-.3189E+02	.9421E+01	.2538E+00	.9488E+01	-.2198E+02
2	2	1	-.3691E+02	.8249E+01	.3928E+00	-.6806E+01	.1580E+02
			.7648E+02	.3885E+02	.2847E+01	-.6806E+01	.1580E+02
2	2	2	-.1503E+03	-.2236E+02	-.2061E+01	-.6806E+01	.1580E+02
			-.3691E+02	.8249E+01	.3928E+00	-.6806E+01	.1580E+02
2	2	3	-.1051E+02	.6931E+01	-.7079E+00	.4694E+01	.1301E+02
			.2762E+03	.4483E+02	-.7357E+01	.4694E+01	.1301E+02
2	2	4	-.2972E+03	-.3096E+02	.5941E+01	.4694E+01	.1301E+02
			-.1051E+02	.6931E+01	-.7079E+00	.4694E+01	.1301E+02
2	3	1	.5153E+02	-.6079E+01	-.4207E+00	.3136E+01	.1002E+02
			-.2540E+03	-.7814E+02	.8526E+01	.3136E+01	.1002E+02
2	3	2	.3570E+03	.6598E+02	-.9367E+01	.3136E+01	.1002E+02
			.5153E+02	-.6079E+01	-.4207E+00	.3136E+01	.1002E+02
2	3	3	.5013E+02	-.1199E+02	-.5349E-01	-.8399E+01	.1896E+02
			-.1209E+03	-.1879E+02	-.5169E+01	-.8399E+01	.1896E+02
2	3	4	.2212E+03	-.5186E+01	.5062E+01	-.8399E+01	.1896E+02
			.5013E+02	-.1199E+02	-.5349E-01	-.8399E+01	.1896E+02
2	4	1	.4467E+02	-.9981E+01	-.7697E+00	.7930E+01	-.1875E+02
			.2462E+02	-.4867E+02	-.5953E+01	.7930E+01	-.1875E+02
2	4	2	.6472E+02	.2871E+02	.4414E+01	.7930E+01	-.1875E+02
			.4467E+02	-.9981E+01	-.7697E+00	.7930E+01	-.1875E+02
2	4	3	.1904E+02	-.5566E+01	.4683E+00	-.7287E+01	-.1597E+02
			-.1714E+03	-.3973E+02	.9051E+01	-.7287E+01	-.1597E+02
2	4	4	.2095E+03	.2859E+02	-.8115E+01	-.7287E+01	-.1597E+02
			.1904E+02	-.5566E+01	.4683E+00	-.7287E+01	-.1597E+02