

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



Département de Génie Mécanique

Projet de fin d'étude

***En vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en génie
Mécanique***

THÈME

**Modélisation numérique de la lubrification
hydrodynamique de tête de bielle du moteur**

Proposé et dirigé par :

Mr. Hacène BELHANECHÉ

Etudié par :

Mr. Nacer LOUDAHI

Octobre 2007

Dédicaces

Chaleureusement je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents en témoignage pour leur amour et leur sacrifice sans limites.

A mes braves et affectueux frères et sœurs.

A tous mes amis et collègues de la promotion sans exception.

A toute personne qui me connaît de près ou de loin...

Nacer

Remerciements

Je remercie DIEU tout puissant qui m'a donné le courage, la force et la volonté pour achever ce modeste travail.

Mes sincères remerciements à mon promoteur Monsieur BELHANECHÉ Hacène, chargé du cours à l'ENP pour sa disponibilité, ses précieux conseils.

Mes remerciements également à tous les enseignants qui ont participé à ma formation, à tous les employés de l'école.

Mes remerciements aux membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens également à remercier tous mes amis et mes camarades de la promotion, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la bonne réalisation de ce travail.

Nacer

ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو إعطاء المفاهيم الأساسية على الحامل الأملس ومواد التشحيم والقوانين التي تتحكم التشحيم الهيدروديناميكي في الحامل الأملس، حل المعادلات بطريقة رقمية، وضع برنامج الإعلام الآلي باستعمال برنامج MATLAB الذي يسمح بحساب توزيع مجال الضغط في الحامل الأملس و معرفة الخصائص الساكنة في الحامل الأملس، زاوية الضبط، مزدوجة الاحتكاك. وأخيرا، القيام بدراسة وسيطية.

كلمات المفتاح : حامل الأملس - التشحيم الهيدروديناميكي – سائل التشحيم.

Résumé

L'objet de cette étude est de donner des notions sur les paliers et les lubrifiants et les lois qui régissent la lubrification hydrodynamique d'un palier lisse de tête de bielle, résoudre les équations par la méthode numérique, élaborer un programme informatique en MATLAB qui permet le calcul la distribution de champ de pression dans le paliers ainsi que les caractéristiques statique du palier à savoir l'angle de calage, la charge et le couple de frottement. Enfin, faire une étude paramétrique.

Mots clés : Palier lisse – lubrification hydrodynamique - lubrifiant.

Summary

The object of this study is to give concepts on the stages and the lubricants and the laws which govern the hydrodynamic lubrication of a smooth bearing of big end, to solve the equations by the numerical method, to work out a data-processing program in MATLAB which allows calculation the distribution of field of pressure in the stages as well as the characteristics statics of the stage knowing the angle of chock, the load and the couple of friction. Lastly, to make a parametric study.

Key words: Smooth bearing - hydrodynamic lubrication - lubricant.

NOMENCLATURE

C	Jeu radial [m]
Ca	Couple de frottement [m.N]
e	Excentricité absolue [m]
f	Force massique extérieurs [N/Kg]
h	Epaisseur du film [m]
L	Longueur du palier [m]
D	Diamètre du palier [m]
R	Rayon [m]
P	Pression [N/m ²]
t	Temps [s]
u, v, w,	Composant de la vitesse [m/s]
U	Vitesse linéaire de l'arbre [m/s]
x, y, z	Variable d'espace [m]
W	Charge [N]
T	Température [°C]
F, G, I, J, I ₂ , J ₂	Intégrales de la viscosité
U _e	Energie interne [j/Kg]
C _p	Chaleur massique à pression constante [J/Kg.K]
M _v	Parametre de Vogelpohl
err	Erreur relative
m	Distance entre l'axe incliné et non incliné [m]
d	Facteur de mésalignement
f	Coefficient de frottement
F	Force de frottent [N]

Symbole grecques :

μ	Viscosité dynamique [Pa.s]
δ_{ij}	Symbole de Kroneker
τ_{ij}	Tenseur des Contrainte de cisaillement
ε_{ij}	Tenseur des taux de déformations

σ_{ij}	Tenseur des contraintes
$\dot{\gamma}_{ij}$	Tenseur des taux de vitesses de déformations
λ_L	Second coefficient de viscosité
∇	Gradient
Δ	Laplacien
ϕ	Angle de calage [rd]
ε	Excentricité relative
θ	Coordonné angulaire [rd]
ρ	Masse volumique [kg/m ³]
λ	Coefficient de conduction thermique isotrope.
α_P	Coefficient de dilatation à pression constante
ω	Vitesse angulaire [rd/s]

Les nombres adimensionnels :

$\varepsilon_d = H/L$	Variable adimensionnelle
R_e	Nombre de Reynolds

Indices :

i	Coordonnées
a	Arbre
c	Coussinet
amb	Ambiance
0	Reference

SOMMAIRE

Introduction générale	02
Chapitre I : Généralités sur les paliers et les lubrifiants	04
I.1.Introduction	04
I.2. Définition d'un palier cylindrique	04
I.3. Type de palier cylindrique	05
I.3.1. Palier infiniment court	06
I.3.2. Palier infiniment long	06
I.3.3. Palier de longueur finie	06
I.4. Condition aux limites pour les paliers	06
I.4.1. Condition de Sommerfeld (film complet).....	07
I.4.2. Condition de Gümbel (demi Sommerfeld).....	07
I.4.3. Condition de Reynolds ou de Swift-Stieber.....	08
I.5. Fonctionnement du palier.....	09
I.5.1. Régime de fonctionnement (lubrification).....	09
I.5.1.1. Lubrification limite	09
I.5.1.2. Lubrification « mixte »	09
I.5.1.3. Lubrification hydrodynamique.....	10
I.5.1.4. Lubrification « pseudo-hydrodynamique ».....	10
I.5.1.5. Lubrification élastohydrodynamique.....	10
I.5.1.6. Lubrification hydrostatique.....	10
I.6. Les huiles lubrifiantes (liquides).....	10
I.6.1. Les additifs	11
I.6.2. La viscosité.....	11
I.6.3. Fluide newtonien.....	12
I.6.4. Fluide non-newtonien.....	12
Chapitre II : Equations fondamentales de films minces	14
II.1.Introduction.....	14
II.2. Approche théorique	14

II.2.1. Équation des films minces visqueux généralisée	14
II.2.2. Equation de la température	20
II.2.3. Équations de Reynolds	24
II.3. Approche physique.....	25
II.3.1. Débit suivant une direction donnée.....	25
II.3.2. Conservation de la matière	27
II.3.3. Signification physique	31
Chapitre III : Lubrification hydrodynamique des paliers lisses	34
III.1.Introduction	34
III.2. Equation de l'épaisseur du film	34
III.3. Equation de Reynolds	36
III.4. Alimentation des paliers lisses	37
III.5. Conditions aux limites.....	38
III.6. Influence de mésalignement	39
III.7. Charge et angle de calage	40
III.8. Force et coefficient de frottement	41
III.9. Couple de frottement.....	42
Chapitre IV : Méthodes de résolution numérique	44
IV.1.Introduction	44
IV.2. Equation de Reynolds	44
IV.3. Définition de paramètre de Vogelpohl.....	45
IV.4. Discrétisation numérique	46
IV.5. Définition du domaine d'étude et conditions aux limites	48
IV.6. Procédé de résolution numérique	49
Chapitre V : Résultats et interprétation.....	53
V.1.Introduction	53
V.2. Caractéristiques du palier et propriétés du lubrifiant	53
V.3. Répartition du champ de pression.....	53
V.4. Influence de mésalignement	58

V.5. Influence de maillage	58
V.6. Etude paramétrique	59
V.6.1. Influence sur la charge adimensionnelle	59
V.6.2. Influence sur l'angle de calage	60
V.6.3. Influence sur l'épaisseur minimale.	61
V.6.4. Influence sur de coefficient de frottement.....	61
V.6.5. Influence sur la contrainte de cisaillement.	62
Conclusion générale.....	66
Bibliographie.....	67

TABLE DES FIGURES

Figure I.1. Coussinets rainurés	04
Figure I.2. Géométrie d'un palier type	05
Figure I.3. Condition de Sommerfeld	07
Figure I.4. Condition de Gumbel.....	08
Figure I.5. Condition de Reynolds	08
Figure II.1. Vitesses des surfaces lubrifiées	18
Figure II.2. Contraintes appliquées à un élément de volume.....	26
Figure II.3. Débits dans une colonne élémentaire de fluide.	27
Figure II.4. Inclinaison de la paroi 2 par rapport à la paroi 1	29
Figure III.1. Section d'un palier lisse.....	35
Figure III.2. Palier lisse cylindrique développé.....	36
Figure III.3. Repère cartésien	37
Figure III.4. Représentation d'un axe incliné	40
Figure IV.1. Coefficients du système M_v obtenus par différences finies.....	47
Figure IV.2. Discrétisation du palier	48
Figure IV.3. Organigramme du programme élaboré	51
Figure V.1. Variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle (°)	54
Figure V.2. Variation de la pression en fonction de la coordonnée axiale	55
Figure V.3. Variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle pour différentes vitesses de rotation.	55
Figure V.4. Variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle pour différents jeux radiaux	56
Figure V.5. Variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle pour différentes excentricités relatives	57
Figure V.6. Evolution de profile de pression en fonction de la coordonnée axiale et circonférentielle	57
Figure V.7. Evolution de profile de pression en fonction de la coordonnée axiale et circonférentielle pour un palier non aligné	58
Figure V.8. Variation de la charge adimensionnelle en fonction de l'excentricité relative... ..	60
Figure V.9. Variation de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative.....	60
Figure V.10. Variation de l'épaisseur minimale en fonction de l'excentricité relative.....	61

Figure V.11. Variation du coefficient de frottement en fonction de l'excentricité relative....	62
Figure V.12. Variation de la contrainte de cisaillement en fonction de l'excentricité relative.....	62

TABLE DES TABLEAUX

Tableau V.1. Caractéristiques du palier et propriétés du lubrifiant..... 53

Tableau V.2. Variation de l'épaisseur minimale du film, la pression maximale et la charge pour trois maillages différents..... 59

INTRODUCTION

GENERALE

Introduction générale

Les importants progrès du savoir scientifique au cours des cinquante dernière années écoulées, notamment ce qui concerne les progrès réalisés dans la technologie de fabrication des moteurs, l'utilisation d'huiles et les méthodes modernes de calcul, ont permis d'augmenter la durée de vie moyenne des moteurs, l'accroissement de leurs des performances, réduction des coûts de production et de la consommation de carburant, et ce malgré l'accroissement continu des contraintes environnementales[5].

Mais si, des rares ruptures brutales d'organes provoquées par un défaut de résistance des matériaux, la durée de fonctionnement et la fiabilité des moteurs augmente avec le développement des techniques de contrôle des pièces qui éliminent de plus en plus les risques d'incidents graves.

En revanche, les moteurs sont limités en durée et en performances par des phénomènes d'usure qui est omniprésent dans tous les contacts ou de défaillance de lubrification tels que le grippage, le rayage adhésif (scuffing), l'abrasion, l'écaillage de fatigue, le gommage des segments, l'épaississement d'huile par oxydation, l'accumulation de dépôts à chaud (carbones, vernis...) ou à froid (boues), etc. L'une des fonctions essentielles de l'huile moteur est de lutter contre les phénomènes d'usure et de détériorations brutales [5].

Devant ce constat, nous nous sommes intéressé à l'étude du comportement des paliers hydrodynamiques du moteur ainsi que les paramètres dont ils dépendent à savoir : les paramètres géométriques (dimensions et formes du palier), cinématiques et dynamiques (vitesse de rotation et charge appliquée), les caractéristiques du lubrifiant (essentiellement sa viscosité) et la nature des matériaux formant le palier [1].

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES PALIERS ET LES LUBRIFIANTS

I.1. Introduction

C'est qu'à la fin de XIX^{ème} siècle que **Beuchamp Tower** a mis en évidence l'existence de pression hydrodynamique dans les paliers. En 1886, **Reynolds** a proposé l'équation qui régit le phénomène de la portance dans un palier hydrodynamique [3]. Entre les années 1900 et 1940, les études théoriques ont porté d'une part sur les méthodes de résolution et d'autre part sur les conditions aux limites à l'équation de Reynolds.

L'étude de la lubrification hydrodynamique des paliers lisses requière des connaissances sur le type du palier, son fonctionnement ainsi que les propriétés du lubrifiant utilisé. En effet, voila ci-dessous quelques notions de base sur les paliers et les lubrifiants.

I.2. Définition d'un palier cylindrique

Un palier cylindrique classique est souvent constitué par la combinaison de deux éléments de géométrie très simple mais d'un fonctionnement très complexe, qui sont l'arbre et le logement ou du coussinet. La nature, la rigidité et l'état de surface de ces deux derniers sont conditionnés par le choix du matériau antifriction pour assurer le bon fonctionnement du palier.

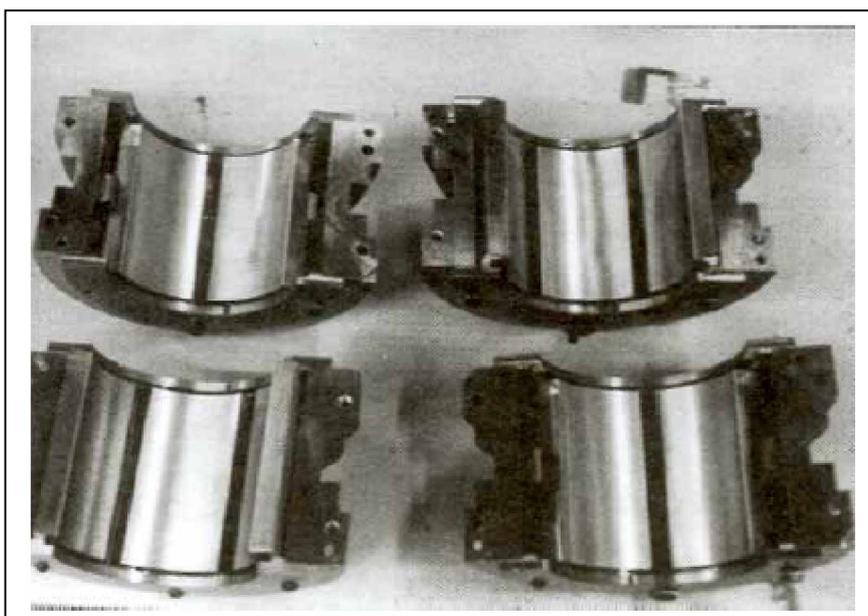


Figure I.1. Coussinets rainurés

- **L'arbre** : il est d'une géométrie cylindrique, tournant à l'intérieur d'un alésage (coussinet), généralement en acier [1].

Pour que l'arbre remplisse sa fonction dans le palier, à savoir supporter et transmettre les efforts et les couples, il doit posséder les propriétés suivantes.

- l'arbre ne doit pas se déformer sous l'effet de la pression existant dans l'interface arbre/matériau antifriction ;
- l'arbre ne doit pas fléchir ;
- la dureté superficielle de l'arbre doit être supérieure à celle du matériau antifriction.
- l'arbre doit présenter un bon état de surface.

- **Le coussinet** : il est d'une géométrie cylindrique creuse qui constitue un logement pour l'arbre, généralement en acier ou en bronze [1].

La principale caractéristique mécanique que l'on exige est une rigidité élevée.

I.3. Type de palier cylindrique

Selon leurs dimensions les paliers lisses cylindriques sont divisés en trois types, les paliers infiniment courts, infiniment longs et les paliers de longueur finie [4].

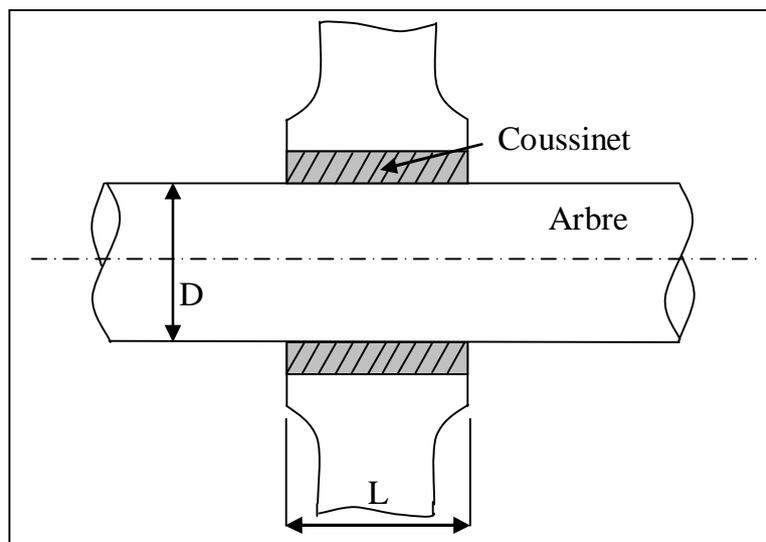


Figure I.12. Géométrie d'un palier type

I.3.1. Palier infiniment court

Un palier est dit infiniment court lorsque le rapport (L/D) de la longueur au diamètre du palier est faible, on peut négliger le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial. Les résultats obtenus sont applicables aux paliers dont le rapport $L/D < 0,125$.

Dans ce type de palier, on pose l'hypothèse d'un gradient de pression circonférentiel négligeable, ce qui simplifie considérablement les calculs.

I.3.2. Palier infiniment long

Lorsque le rapport (L/D) de la longueur au diamètre du palier est grand, on peut négliger le débit axial. L'écoulement est donc purement circonférentiel. En pratique, ce calcul s'applique aux paliers tels que $L/D > 4$.

Dans ce type de palier, on pose l'hypothèse d'un gradient de pression axiale est négligeable devant le gradient de pression circonférentiel.

I.3.3. Palier de longueur finie

Dans le cas où le rapport (L/D) est compris entre 0.125 et 4, le palier est considéré de longueur finie. Les deux types de palier précédent constituent les configurations extrêmes, l'infiniment long et l'infiniment court. Le palier de longueur finie donne une configuration réelle du palier. Les résultats obtenus par ce type de palier sont plus réels que ceux des deux types précédents, car dans ce type de palier ne tiennent pas compte des hypothèses simplificatrices précédentes.

I.4. Condition aux limites pour les paliers

La résolution de l'équation de Reynolds exige la définition des conditions aux limites en termes de pression. En fait, il existe trois types de conditions aux limites [2], ces conditions sont schématisées dans sur la figure I.3 - I.4 - I.5.

I.4.1. Condition de Sommerfeld (film complet)

Cela suppose qu'il n'y pas de rupture du film, et la pression reste toujours supérieur à la pression de vapeur de saturation de fluide. Cette hypothèse n'est acceptable que dans le cas où les paliers immergés et alimenté sous forte pression, ou dans le cas des paliers très faiblement chargés.

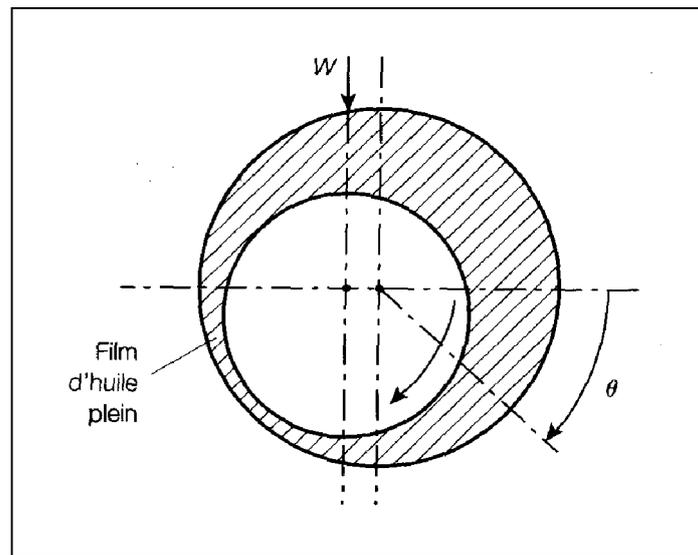


Figure I.3. Condition de Sommerfeld

I.4.2. Condition de Gümbel (demi-Sommerfeld)

Cela suppose qu'il y a rupture de film, c'est-à-dire que la pression peut s'annuler. La résolution numérique du champ de pression est effectuée comme pour la condition de Sommerfeld. Le partie de champ de pression qui est inférieur a zéro est négligée. Cette condition donne lieu à une discontinuité du débit sur la frontière de rupture du film.

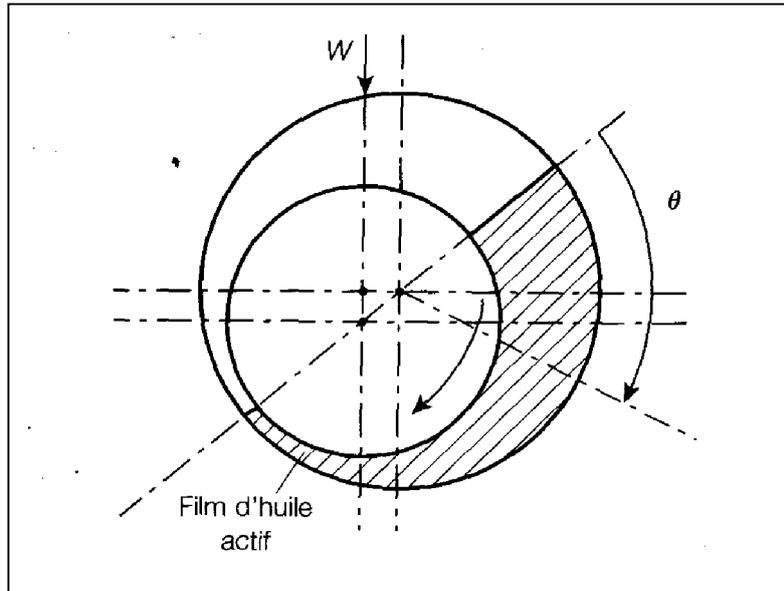


Figure I.4. Condition de Gumbel

I.4.3. Condition de Reynolds ou de Swift-Stieber

Elle permet de prendre en compte la conservation du débit à la rupture de film, cette solution est plus proche de la réalité et stipule qu'à la frontière de rupture du film lubrifiant, la pression ainsi que sa dérivée s'annulent. Elle se traduit par :

$$P(\theta_s, z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P(\theta_s, z)}{\partial \theta} = 0$$

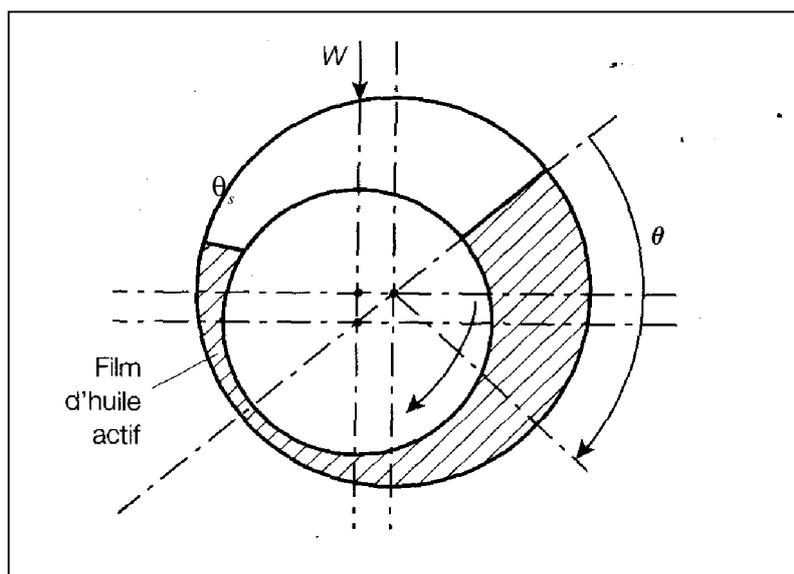


Figure I.5. Condition de Reynolds

I.5. Fonctionnement du palier

Le fonctionnement du palier repose sur le débit du film. L'adhérence du fluide lubrifiant en film mince aux parois en mouvement crée le débit. Dans le cas de la lubrification hydrodynamique, la génération de la pression se fait par conservation du débit dans le convergent-divergent. Deux mécanismes entrent en jeu dans le fonctionnement du film fluide: la portance et le frottement. Dans le cas dans un palier hydrodynamique, la portance est recherchée et le frottement une conséquence. Pour que le fluide soit une interface efficace, il faut que le champ de pression soit suffisant pour équilibrer la charge normale en fonction de l'aire du contact disponible, mais aussi que l'épaisseur minimale du film soit supérieure aux éventuels défauts géométriques des surfaces.

I.5.1. Régime de fonctionnement (lubrification)

Il caractérise les conditions dans lesquelles l'arbre et le coussinet sont séparés par le lubrifiant. Leur spécificité repose sur l'existence d'un lubrifiant visqueux, en film complet ou non, et sur le mécanisme de génération de portance au sein du film fluide [2].

Selon la nature et les propriétés du lubrifiant, diverses possibilités de lubrification se présentent, à savoir :

I.5.1.1. Lubrification limite

L'épaisseur du film lubrifiant est insuffisante pour isoler complètement les solides en contact ; si la charge devient trop forte, alors les solides sont séparés que d'une couche quasi monomoléculaire. C'est la solidité de cette dernière qui empêche les contacts métal sur métal. L'aptitude du lubrifiant à former une couche adhérente, appelée onctuosité, est ici une qualité primordiale.

I.5.1.2. Lubrification « mixte »

Le fluide supporte une partie importante des charges mais des contacts subsistent entre les aspérités. Le frottement est minimal mais ce régime est très instable et il vaut mieux l'éviter.

I.5.1.3. Lubrification hydrodynamique

Le lubrifiant liquide est entraîné et mis sous pression par le mouvement relatif des surfaces. Il sépare totalement ces dernières et supporte l'intégralité des charges, grâce à sa viscosité, qui correspond à sa résistance à l'écoulement. Dans ce cas, les vitesses relatives ne sont pas faibles mais les pressions restent modérées, de sorte que l'on peut négliger les déformations des pièces et la compressibilité du lubrifiant.

I.5.1.4. Lubrification « pseudo-hydrodynamique »

L'huile arrive dans le contact et forme un film lubrifiant par effet d'entraînement mais ce film ne peut pas véritablement être mis sous pression et supporter les charges. C'est ce qui se passe par exemple dans les coussinets autolubrifiants en bronze poreux.

I.5.1.5. Lubrification élastohydrodynamique

C'est un cas particulier du précédent, lorsque la pression dans le film liquide est suffisante pour déformer localement les solides en contact. Cette déformation change la géométrie du film et la répartition des pressions, mais aussi les caractéristiques des lubrifiants.

I.5.1.6. Lubrification hydrostatique

Elle consiste à envoyer, à l'aide d'une pompe ou d'un compresseur, un liquide lubrifiant sous pression pour séparer les surfaces (la vitesse relative entre les deux surfaces est trop faible pour générer une pression de séparation). Dans ce type le frottement est extrêmement faible et l'usure est quasiment nulle mais il faut une source d'énergie extérieure.

I.6. Les huiles lubrifiantes (liquides)

Il existe deux bases pour les huiles lubrifiantes qui sont soit d'origine minérale ou synthétique.

- les huiles à base minérale : on distingue deux types de structure, les structure paraffinique formée d'hydrocarbures saturés à chaîne droite (très stable à l'oxydation, bonne résistance à

haute température), et les structure naphténiqne formé de noyaux cyclique (grande aptitude à la gélification) ;

- les huiles à base synthétique : les familles sont très nombreuse citant à titre d'exemple : les esters phosphoriques, aliphatique, apprécié pour leur faible viscosité à basse température et leur bas point de congélation ; et les polyoléfines et les polypropylènes glycols.

Les principales caractéristiques d'huiles sont liées à :

- la réduction des frottements ;
- la réduction de l'usure ;
- l'amélioration de l'étanchéité ;
- l'évacuation des impuretés ;

I.6.1. Les additifs

Pour améliorer les performances des huiles moteurs, des aditifs sont créés. Ceux-ci peuvent agir sur les propriétés suivantes :

- la couleur, la fluorescence ;
- la viscosité et l'indice de viscosité ;
- la congélation ;
- le pouvoir dispersif ;
- La réduction du frottement et de l'usure ;
- L'aptitude au rodage ;
- Le pouvoir antirouille ;
- La résistance au moussage ;
- La résistance à l'oxydation et à la corrosion.

I.6.2. La viscosité

Selon la norme NFT 60-100 de novembre 1959 [3]: « la viscosité d'un liquide est la propriété de ce liquide, résultant de la résistance qu'oppose ses molécules à une force tendant à les déplacer par glissement dans son sein »

Ainsi, la viscosité d'un fluide est la résistance opposée par ce fluide à tout glissement interne de ses molécules les unes sur les autres.

I.6.3. Fluide newtonien

Le modèle de fluide newtonien décrit bien la très grande majorité des fluides composés de molécules simples. La définition d'un fluide newtonien est assez restrictive : les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au gradient de vitesse, ce qui implique que :

- Dans un écoulement de cisaillement simple, les seules contraintes créées par l'écoulement sont des contraintes de cisaillement.
- La viscosité est indépendante de la vitesse de cisaillement.
- La viscosité est indépendante du temps et les contraintes s'annulent immédiatement lorsque l'écoulement est arrêté.

I.6.4. Fluide non-newtonien

Toute déviation des règles du fluide newtonien est le signe d'un comportement non-newtonien. La description de ces comportements et leur interprétation en relation avec la structure microscopique du fluide constitue la discipline appelée rhéologie. Cette discipline est assez récente, mais elle a connu un développement considérable avec l'apparition des polymères synthétiques.

Le caractère non-newtonien le plus répandu est la variation de viscosité avec la vitesse de cisaillement. Très souvent, pour les solutions de polymère, la viscosité diminue au fur et à mesure que l'on augmente le taux de cisaillement (gradient de vitesse) auquel est soumis le fluide. C'est le comportement rhéofluidifiant.

CHAPITRE II

EQUATIONS FONDAMENTALES DE FILMS MINCES

II.1. Introduction

L'obtention des équations fondamentales au sein de films minces visqueux sera réalisée dans ce chapitre sous deux approches :

- Approche théorique : qui a l'avantage des hypothèses simplificatrices mais l'inconvénient d'être moins physique ;
- Approche physique : qui est plus proche du besoin industriel, à savoir : posséder une modélisation qui soit, facile à formuler, et simplifiable pour traiter des problèmes dans lesquels il s'agit d'obtenir un ordre de grandeur sur les variables importantes.

II.2. Approche théorique

Il existe différentes approches pour l'obtention des équations de films minces. La plus utilisée est celle de Booker qui est aussi l'auteur d'une méthode de résolution très réputée de ce type d'équation appliquée au cas des paliers circulaires chargés dynamiquement. Mais l'approche la plus claire est celle proposée par Frêne et al [2].

Suivant que l'aspect thermique est pris en compte ou non, les formulations sont plus ou moins compliquées. De ce fait, la présentation de la formulation des équations de films minces dans ce chapitre se fera en quatre étapes qui sont :

- l'équation des films minces généralisée ;
- l'équation prenant en compte les effets thermiques ;
- deux équations de Reynolds qui constituent des équations simplifiées l'équation des films minces généralisée.

II.2.1. Équation des films minces visqueux généralisée

On prend comme hypothèses simplificatrices à cette mise en équation :

- le milieu est continu ;

- le fluide est newtonien ;
- l'écoulement est laminaire ;
- les forces massiques et les forces d'inertie négligeables ;
- la courbure négligée ;
- l'épaisseur de film d'huile faible devant les autres dimensions du palier ($\epsilon d \ll 1$).

Les équations dont nous avons besoin sont :

- La conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho V_i) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Avec

ρ : la masse volumique,

V_i : le composant de la vitesse suivant l'axe i ,

x_i : la variable d'espace,

t : le temps.

- La loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.2})$$

Avec

σ_{ij} : le tenseur des contraintes internes dans le fluide,

f_i : la force massique extérieure.

- La loi de comportement rhéologique du fluide newtonien :

$$\sigma_{ij} = \left(-P + \lambda_L \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right) \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.3})$$

Avec : P : la pression,

δ_{ij} : le symbole de Kroneker,

λ_L : le second coefficient de viscosité,

μ : la viscosité dynamique.

L'équation de Navier-Stokes en fonction de ρ , λ_L , μ , f_i , est obtenu par la combinaison de des équations (II.2) et (II.3), elle s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) = \frac{-\partial P}{\partial x_i} + \lambda_L \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda_L}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (\text{II.4})$$

Si on suppose que le coefficient f_i est constant, comme le fluide est incompressible ($\lambda_L + 3f_i = 0$), on obtient alors sous forme symbolique une équation plus habituelle :

$$\rho \frac{D\ddot{\mathbf{V}}}{Dt} = -\nabla \ddot{P} + \rho \ddot{\mathbf{f}} + \mu \Delta \ddot{\mathbf{V}}$$

Où les variables \mathbf{V} , \mathbf{f} sont des vecteurs, D/Dt une dérivée particulière (soit aussi $D\ddot{\mathbf{V}}/Dt = \partial \ddot{\mathbf{V}}/\partial t + ((\ddot{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \ddot{\mathbf{V}})$),

∇ : gradient (opérateur vectoriel nabla),

Δ : laplacien.

En négligeant les termes de forces volumiques et en posant la variable adimensionnel $\epsilon_d = H/L$ (où H : la hauteur du film et L : la longueur du palier ou des surfaces lubrifiées) et sachant que pour la plupart des systèmes lubrifiés dans les moteurs ϵ_d est de l'ordre de 0,001.

Pour transformer l'équation en sa forme adimensionnelle, on fait les changements de variables suivants [2] :

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \bar{x}_2 = \frac{x_2}{H}, \bar{x}_3 = \frac{x_3}{L}, \bar{t} = \frac{tV}{L},$$

$$\bar{V}_1 = \frac{V_1}{V}, \bar{V}_2 = \frac{V_2L}{VH}, \bar{V}_3 = \frac{V_3}{V}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \bar{\lambda} = \frac{\lambda_L}{\lambda_0}.$$

Où L et V sont respectivement la dimension et la vitesse, caractéristiques du système lubrifié suivant les axes (O, x₁) et (O, x₃).

En négligeant les termes en $\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \rho \left(U_e + \frac{1}{2} V_i V_i \right) dV = \int_{A(t)} f_i V_i dV + \int_{A(t)} (T_i V_i + q) dS,$

l'équation (II.4) se réduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} = -\varepsilon_d R_e \left[\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{V}_i \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_j} \right] + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_2} = 0 \end{cases} \quad (II.5)$$

(i = 1 et 3, j = 1 à 3)

Avec Re nombre de Reynolds

$$R_e = \rho \frac{VH}{\mu_0}$$

$$\bar{P} = \frac{PH^2}{\mu_0 VL}$$

Le terme $\varepsilon_d \cdot R_e$ représente l'effet d'inertie. Ce terme est souvent négligé puisque dans le cas des paliers, on a : $\varepsilon_d \cdot R_e \ll 1$.

Si on suppose que les forces d'inertie sont négligeables, le système d'équation (II.5) en variables dimensionnées définit le comportement de la pression dans les films minces et s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_2} = 0 \end{cases} \quad (i = 1 \text{ et } 3) \quad (\text{II.6})$$

Pour finir de formuler le problème en terme d'épaisseur de film, il est nécessaire de connaître les vitesses des parois (voir figure.II.1) et d'utiliser l'équation de conservation de la matière (équation II.1). On intègre ensuite cette dernière et le système d'équation (II.6) suivant Ox_2 . Le fait de considérer que l'épaisseur est toujours dirigée selon Ox_2 , impose de négliger la courbure générale du film de lubrifiant.

Les termes de vitesse V_{ij} de la figure II.1 représentent lorsque $i = 1$, les composantes de la vitesse de la paroi située en $x_2 = H_1$ suivant les trois axes du repère. De même, lorsque $i = 2$ pour les composantes de la vitesse de la paroi située en $x_2 = H_2$.

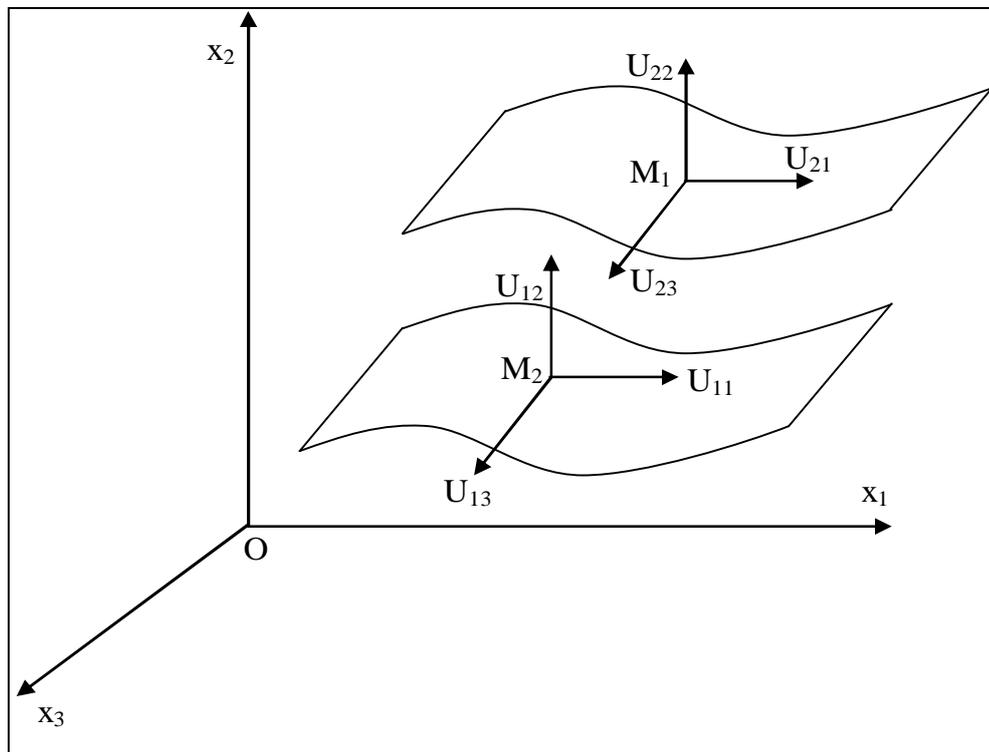


Figure II.1. Vitesses des surfaces lubrifiées

L'équation (II.1) de conservation de masse devient :

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho V_j}{\partial x_j} dx_2 + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 = 0 \quad (i = 1 \text{ et } 3)$$

Le système (II.6) compte tenu des remarques précédentes, prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} [V_{2i} (R_2 - F) + V_{1i} F] + L + \\ &+ \rho_1 U_{1i} \frac{\partial H_1}{\partial x_j} - \rho_2 U_{2i} \frac{\partial H_2}{\partial x_i} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

(i = 1 et 3)

Avec

$$G = \int_{H_1}^{H_2} \frac{R x_2}{\mu} dx_2 - I_2 F \quad R = \int_{H_1}^{x_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi$$

$$I = \int_{H_1}^{x_2} \frac{\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} d\xi \quad F = \frac{1}{J_2} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} dx_2$$

$$J = \int_{H_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)}$$

$$R_2 = \int_{H_1}^{H_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi$$

$$I_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{x_2}{\mu(x_i, t)} dx_2$$

$$J_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dx_2}{\mu(x_i, t)}$$

$$L = \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho V_2}{\partial x_2} dx_2$$

Soit aussi : $L = \rho_2 V_{22} - \rho_1 V_{12}$ avec $\rho_i = \rho(x_1, H_i, x_3, t)$.

Les composantes de la vitesse du fluide V_1, V_3 , à une position x_2 quelconque dans l'épaisseur du film s'écrivent :

$$V_1 = \frac{\partial P}{\partial x_1} \left(I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{V_{21} - V_{11}}{J_2} J + V_{11}$$

$$V_3 = \frac{\partial P}{\partial x_3} \left(I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{V_{21} - V_{13}}{J_2} J + V_{13}$$

Les critères d'écoulement de matières intégrées suivant l'épaisseur du film ont pour expression :

$$\int_{H_1}^{H_2} \rho V_i dx_2 = R_2 V_{2i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} G - (V_{2i} - V_{1i}) F \quad (i = 1 \text{ et } 3)$$

L'expression des contraintes de cisaillement s'écrit :

$$\sigma_{i2} = \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{V_{2i} - V_{1i}}{J_2} \quad (i = 1 \text{ et } 3)$$

II.2.2. Equation de la température

L'obtention de l'équation qui régit l'évolution de la température au sein d'un fluide nécessite une approche énergétique. Pour ce faire, on utilise la loi de la conservation de l'énergie qui s'écrit, pour un milieu continu $A(t)$ en fonction du temps :

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \rho \left(U_e + \frac{1}{2} V_i V_i \right) dV = \int_{A(t)} f_i V_i dV + \int_{A(t)} (T_i V_i + q) dS \quad (II.8)$$

Le théorème de l'énergie cinétique et de la loi de Fourier en conduction sont donnés respectivement par :

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \frac{1}{2} \rho V_i V_i dV = \int_{A(t)} [\sigma_{ij} \gamma_{ij}] dV + \int_{A(t)} f_i V_i dV + \int_{\partial A(t)} T_i V_i dS$$

$$q = -q_i n_i = \frac{\partial(\lambda T)}{\partial x_i} n_i$$

La combinaison de ces deux équations et l'utilisation de la formule de Green, permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \rho U_e dV = \int_{A(t)} \left[\sigma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{\partial^2 \lambda T}{\partial x_i^2} \right] dV \quad (\text{II.9})$$

Avec :

ρ : la masse volumique,

U_e : l'énergie interne,

V_j : la vitesse du fluide suivant l'axe x_i ,

f_i : la composante de force de volume,

T_i : la composante de force de surface,

q : le flux surfacique de chaleur,

σ_{ij} : le tenseur des contraintes,

n_i : la normale du contour dirigée suivant x_i ,

λ : le coefficient de conduction thermique isotrope.

γ_{ij} : le tenseur des taux de vitesses de déformations

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$$

Après l'utilisation de conditions de régularité sur la quantité $\rho V_i V_i$ et l'emploi de l'hypothèse de la continuité des intégrantes, l'équation (II.9) devient :

$$\rho \frac{dU_e}{dt} = \sigma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{\partial^2 \lambda T}{\partial x_i^2} \quad (\text{II.10})$$

L'énergie interne exprimée en fonction d'une enthalpie massique fonction de la température T et de la pression P, s'écrit :

$$U_e = H_e(T, P) - \frac{P}{\rho}$$

D'où :

$$\rho \frac{dU_e}{dt} = \rho \left(\frac{\partial H_e}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dt} + \rho \left(\frac{\partial H_e}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) \quad (\text{II.11})$$

Compte tenu du premier principe de la thermodynamique :

$$\left(\frac{dH_e}{dP} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - \alpha_p T)$$

avec

$$\alpha_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{ou coefficient de dilatation volumique pression constante})$$

$$\left(\frac{dH_e}{dP} \right)_P = C_p \quad (\text{Chaleur spécifique à pression constante}).$$

L'expression (II.11) prend une autre forme:

$$\rho \frac{dU_e}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \alpha_p T \frac{dP}{dt} - P \frac{dV_i}{dx_i} \quad (\text{II.12})$$

L'égalité des équations (II.10) et (II.12) permet d'écrire :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \alpha_p T \frac{dP}{dt} - P \frac{dV_i}{dx_i} + \sigma_{ij} \mathcal{V}_{ij} + \frac{\partial^2 \lambda T}{\partial x_i^2} \quad (\text{II.13})$$

Finalement l'utilisation de la loi de comportement du fluide ou loi rhéologie (II.14) permet d'éliminer le terme de contraintes σ_{ij} de l'équation (II.13).

Dans le cas d'un fluide newtonien, on a pour loi rhéologique:

$$\sigma_{ij} = \left(-P + \lambda_L \text{tr}(\bar{\gamma}_{ij}) \right) + 2\mu \bar{\gamma}_{ij} \quad (\text{II.14})$$

La combinaison de l'équation (II.14) et (II.13) nous conduit à l'équation :

$$\begin{aligned} \rho C_P \frac{dT}{dt} = \alpha_P T \frac{dP}{dt} + P \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \lambda_L \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right)^2 + \\ + \mu \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$(i, j = 1 \text{ à } 3)$

Avec

C_p : la chaleur massique à pression constante,

T : la température du fluide,

P : la pression,

α_P : le coefficient de dilatation à pression constante $e = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_P$

λ : la conductivité thermique,

λ, μ : le coefficient de viscosité, viscosité dynamique.

dans le cas d'un film d'huile l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions, celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho C_P \left(\frac{dT}{dt} + V_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \alpha_P T \left(\frac{dP}{dt} + V_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \mu \left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

$(i, j = 1 \text{ à } 3)$

II.2.3. Équations de Reynolds

On suppose maintenant que :

- la température ne varie pas suivant l'épaisseur du film ;
- la masse volumique et la viscosité ne varient pas suivant l'épaisseur du film et ne sont fonction que de la température et de la pression ;

- la vitesse du fluide est tangente en tout point aux parois ;

- en plaçant l'origine des systèmes d'axe sur l'une des parois tel que $H_1 = 0$ et $H_2 = h$.

L'équation (II.7) prend la forme [2] :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = 6\rho (V_{1i} - V_{2i}) \frac{\partial h}{\partial x_i} + 6h \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho (V_{1i} + V_{2i})) + 12\rho V_{22} + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II.17})$$

$(i, j = 1 \text{ à } 3)$

Les composantes des vitesses du fluide sont :

$$V_i = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_i} x_2 (x_2 - h) + \frac{h - x_2}{h} V_{1i} + \frac{x_2}{h} V_{2i} \quad (i = 1 \text{ ou } 3) \quad (\text{II.18})$$

Les composantes des contraintes sont :

$$\sigma_{i2} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_i} (2x_2 - h) + (V_{2i} - V_{1i}) \frac{\mu}{h} \quad (i = 1 \text{ ou } 3) \quad (\text{II.19})$$

Dans l'équation (II.16):

$$6\rho (V_{1i} - V_{2i}) \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (\text{II.20})$$

représente l'effet de l'inclinaison des parois suivant la direction x_i , cet effet se traduit par une variation de débit massique ;

$$6h \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho (V_{1i} + V_{2i})) \quad (\text{II.21})$$

représente la variation de débit massique suivant la direction x_i .

II.3. Approche physique

Pour effectuer cette formulation, on pose les hypothèses simplificatrices suivante [2] :

- le milieu continu ;
- le fluide newtonien ;
- l'écoulement laminaire ;
- les forces d'inertie et les forces de volumes sont négligeables ;
- la pression, la masse volumique, la température, la viscosité sont constantes suivant l'épaisseur du film ;
- la masse volumique et la viscosité ne sont fonction que de la pression et de la température ;
- l'épaisseur du film est négligeable devant les rayons de courbure des surfaces du palier (écoulement à rotationnel nul).

La formulation des équations de films minces consiste à calculer indépendamment le débit suivant une direction donnée en fonction du gradient de pression et l'écriture d'une équation de continuité d'écoulement de matière. (On considérera que l'épaisseur du film est orientée suivant Z). Le problème de cet écoulement tridimensionnel peut être traité comme la somme des trois problèmes élémentaires d'écoulement suivant les axes principaux (x, y, z). Il s'ensuit que nous traiterons que le cas d'écoulement suivant une direction et obtiendrons par permutation des variables d'espaces, l'écoulement suivant une des autres directions.

II.3.1. Débit suivant une direction donnée

On définit le débit à partir de l'équilibre d'un élément de volume élémentaire (figure II.2).

Donc on a :

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{II.22})$$

Dans ce cas, la relation de viscosité de Newton s'écrit :

$$\tau_y = \mu \frac{\partial V_y}{\partial z} \quad (\text{II.23})$$

La combinaison des équations (II.21) et (II.22) donne :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \quad (\text{II.24})$$

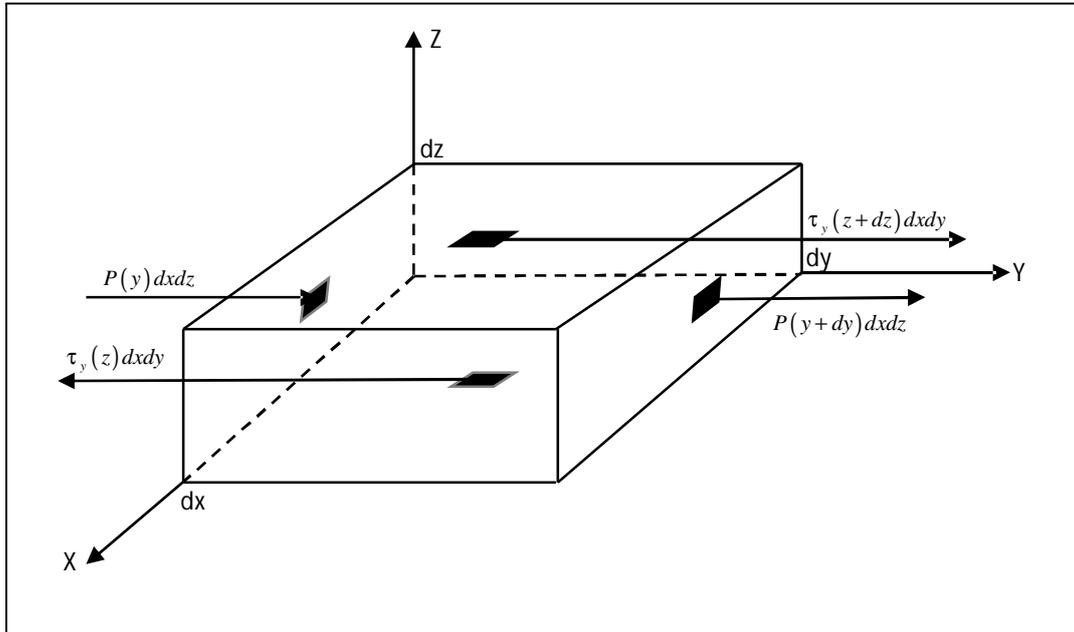


Figure II.2 Contraintes appliquées à un élément de volume

En supposant que la pression ne varie pas selon z. Après intégration (suivant l'axe des z), on obtient :

$$\mu V_y = \frac{\partial P}{\partial y} \frac{z^2}{2} + A_1 z + A_2 \quad (\text{II.25})$$

On pose les conditions limites suivantes :

pour $z = h$ *on a* $V_y = V_{2y}$

pour $z = 0$ *on a* $V_y = V_{1y}$

On obtient alors :

$$V_y = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial y} (z^2 - z) + (V_{2y} - V_{1y}) \frac{z}{h} + V_{1y} \quad (\text{II.26})$$

L'expression du débit par unité de largeur suivant l'axe y est donné par :

$$q_y = \int_0^h V_y dz \quad (\text{II.27})$$

Soit :

$$q_y = \frac{-h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} + (V_{2y} + V_{1y}) \frac{h}{2} \quad (\text{II.28})$$

Par un raisonnement similaire, on trouve le débit suivant Ox :

$$q_x = \frac{-h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + (V_{2x} + V_{1x}) \frac{h}{2} \quad (\text{II.29})$$

où V_{1x} et V_{2x} sont définis par :

$$\text{pour } z = h \text{ on a } V_x = V_{2x}$$

$$\text{pour } z = 0 \text{ on a } V_x = V_{1x}$$

II.3.2. Conservation de la matière

Soit une colonne de hauteur h (épaisseur de film) dirigée suivant Oz. À travers chacune de ses faces de normale perpendiculaire à Oz transitent des flux de matière. De même, la masse comprise dans cette colonne varie entre les instants t et $t + dt$.

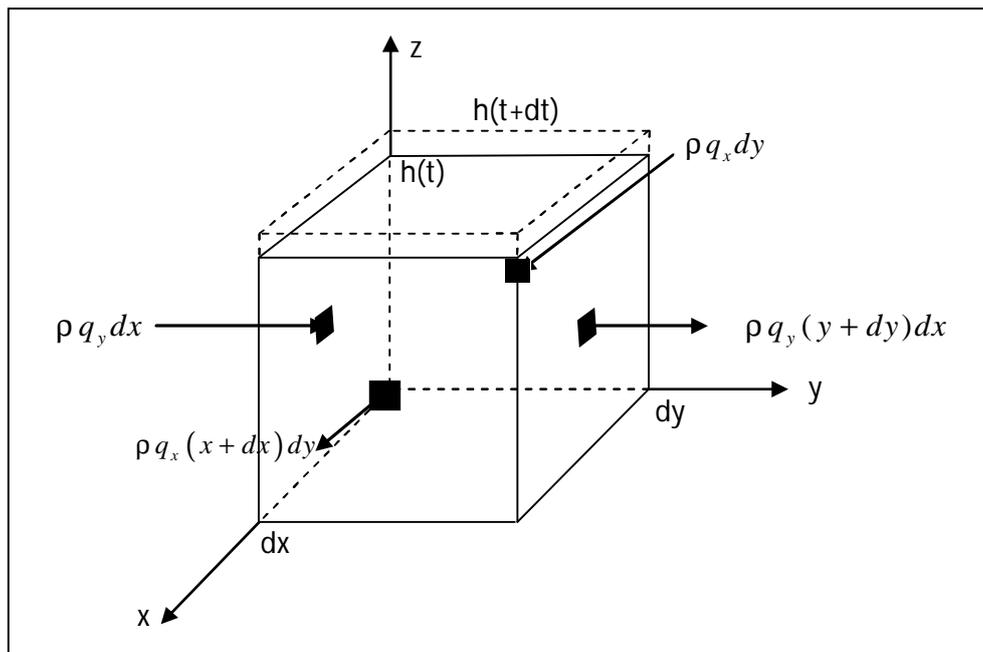


Figure II.3 Débits dans une colonne élémentaire de fluide

Avec q_x, q_y sont les densités de flux intégrées suivant Oz.

En faisant un bilan des quantités de matière, on obtient :

$$\frac{\partial \rho q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} dy dx \quad (\text{II.30})$$

Bilan de la variation de masse de la colonne :

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} dx dy$$

La conservation de la masse se traduit par l'égalité des deux bilans précédents soit :

$$\frac{\partial \rho q_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho q_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho h}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.31})$$

En remplaçant les quantités q_x, q_y par leurs expressions, on aura :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho (V_{1x} + V_{2x}) \frac{h}{2} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho (V_{1y} + V_{2y}) \frac{h}{2} \right) + \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Ou encore sous forme condensée, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = 6 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho (V_{1i} + V_{2i}) h) + 12 \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} \quad (\text{II.33})$$

Avec :

$$V_{ji} : V_{jx}, V_{jy} \quad (j = 1 \text{ ou } 2)$$

$$x_i : x, y$$

En tenant compte de l'inclinaison de la paroi d'altitude h suivant x ou y , on aura une variation de volume supplémentaire due à la translation de celle-ci.

Supposons que cette dernière est inclinée d'un angle α dans le plan (O, x, z) et se déplace à une vitesse V_{x2} (figure II.4) ;

La variation du volume par élément de surface est donné par :

$$-\rho V_{2x} \frac{\partial h}{\partial x} dx dy \quad (\text{II.34})$$

Par le même raisonnement appliqué dans le plan (O, y, z) on aura :

$$-\rho V_{2y} \frac{\partial h}{\partial y} dx dy \quad (\text{II.35})$$

Soit dans le cas général après simplification des termes dx dy :

$$\left(-V_{2x} \frac{\partial h}{\partial x} - V_{2y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \rho \quad (\text{II.36})$$

(Correction faite par Reynolds lui-même en 1886) [2].

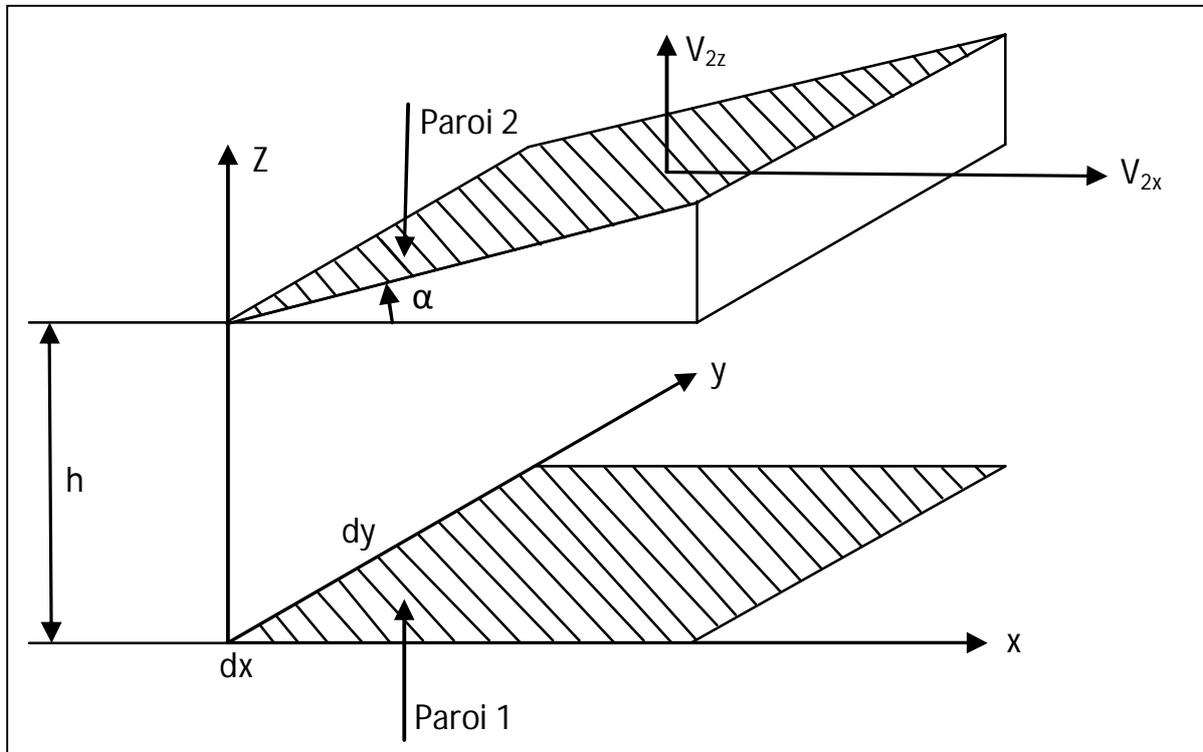


Figure II.4 Inclinaison de la paroi 2 par rapport à la paroi 1

L'expression de l'équation de Reynolds prend alors la forme:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = 6h \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho (V_{1i} + V_{2i})) + 6\rho (V_{1i} - V_{2i}) \frac{\partial h}{\partial x_i} + 12\rho V_{2z} + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II.36})$$

Avec :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = V_{2z}$$

Cette expression est semblable à celle de la formulation de l'approche classique (V_{2z} représente la vitesse suivant z de la paroi 2, c'est-à-dire que $V_{2z} = V_{22}$ dans la définition donnée précédemment).

En coordonnées cylindriques d'axe Oz où l'épaisseur de film est orientée suivant Oz, l'équation de Reynolds devient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho h^3}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) &= 6r\rho (V_{r1} - V_{r2}) \frac{\partial h}{\partial r} + \\ &+ 6\rho (V_{\theta 1} - V_{\theta 2}) \frac{\partial h}{\partial \theta} + 6rh \frac{\partial}{\partial r} \rho (V_{r1} + V_{r2}) + \\ &+ 6h \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho (V_{\theta 1} + V_{\theta 2})) + 6\rho h (V_{r1} + V_{r2}) + 12\rho r V_{2z} + 12\rho r \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Avec :

V_{ri} : la vitesse de la paroi suivant r pour $h = H_1$ ($i = 1$) et $h = H_2$ ($i = 2$),

$V_{\theta i}$: la vitesse suivant θ pour $h = H_1$ ($i = 1$) et $h = H_2$ ($i = 2$),

V_{2z} : la vitesse de la paroi n° 2 suivant z sachant que la paroi 1 est immobile suivant Z.

II.3.2. Signification physique

L'équation de Reynolds obtenue précédemment s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = 6h \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho (V_{1i} + V_{2i})) + \\ + 6\rho (V_{1i} - V_{2i}) \frac{\partial h}{\partial x_i} + 12\rho V_{22} + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Sous une forme moins condensée, en fonction des termes de flux élémentaires, s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) = 6h(V_{1i} + V_{2i}) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + 6h\rho \frac{\partial}{\partial x_i} (V_{1i} + V_{2i}) + \\ + 6\rho (V_{1i} + V_{2i}) \frac{\partial h}{\partial x_i} - 12\rho V_{22} - 12\rho V_{2i} \frac{\partial h}{\partial x_i} + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

Cette décomposition est intéressante car elle permet de prendre conscience des phénomènes et des termes associés, qui provoquent des débits de matière. De façon succincte, les débits élémentaires sont décrits par :

- Les termes d'écoulement de Poiseuille définis par $\partial/\partial x_i (\rho \cdot h^3/12\mu \cdot \partial P/\partial x_i)$.

Ces termes décrivent les flux de matière dus aux gradients de pression à l'intérieur de la zone lubrifiée hydrodynamiquement.

- Les termes de variations volumiques représentés par $6h(V_{1i} + V_{2i})\partial\rho/\partial x_i$.

Ceux-ci traduisent des variations volumiques et peuvent par exemple résulter d'effet thermique comme c'est le cas pour la portance entre deux disques parallèles où le fluide est échauffé.

- Les termes d'étirement décrit par $6h\rho \cdot \partial/\partial x_i (V_{1i} + V_{2i})$. Ces termes traduisent

l'écoulement généré par l'évolution des vitesses d'entraînement en fonction de l'espace.

- Les termes de coins convergents, $6\rho (V_{1i} + V_{2i})\partial h/\partial x_i$ qui traduisent l'effet le

plus important de génération de pression. Par cet effet de coin, ces termes imposent au fluide de s'écouler plus vite ou moins vite, ce qui n'est obtenu par la présence de termes d'écoulement de Poiseuille.

- Le terme d'écrasement de film $12\rho V_{22}$, qui évalue le débit généré lorsque l'on diminue l'épaisseur de la zone lubrifiée.
- Les termes d'écrasement par translation $-12\rho V_{2i} \cdot \partial h / \partial x_i$. Ceux-ci quantifient le débit que provoque la translation de surface inclinée.
- Le terme d'expansion thermique $12h \cdot \partial \rho / \partial x_i$. Cet effet local d'expansion est souvent sans incidence dans l'analyse de paliers car il ne représente qu'un débit de très faible valeur qui de plus n'est occasionné que lors de conditions de fonctionnement non stationnaire.

CHAPITRE III

LUBRIFICATION

HYDRODYNAMIQUE DES

PALIERIS LISSES

III.1. Introduction

Un palier lisse est constitué d'un arbre qui tourne à l'intérieur d'un coussinet, qui sont séparés par un film de fluide. Le rayon du coussinet légèrement supérieur à celui de l'arbre. Sous l'application d'une charge provoque une excentricité du coussinet et de l'arbre et par conséquence l'apparition d'un coin convergent-divergent dans le film. En fonctionnement, la rotation de l'arbre entraîne du fluide dans le coin convergent et crée un champ de pression qui s'oppose à la charge et qui l'équilibre.

On admet les hypothèses ci-dessous pour la modélisation théorique de la lubrification :

- l'épaisseur du film est faible devant les autres dimensions du palier,
- la courbure des surfaces est négligeable,
- le fluide est newtonien,
- les forces d'inertie et de pesanteur sont négligeables,
- l'écoulement est laminaire,
- le milieu est continu,
- le fluide adhère parfaitement aux parois.

III.2. Equation de l'épaisseur du film

La figure III.1 montre un schéma représentatif d'un palier lisse. Le coussinet, de centre O_c et de rayon R_c , est généralement en acier ou en bronze tandis que l'arbre de centre O_a et de rayon R_a , est généralement en acier.

On définit, l'excentricité e par la distance O_1O_c et l'angle de calage ϕ par l'angle que fait la ligne des centres O_aO_c avec la direction de la charge. Si le palier est aligné (les axes du coussinet et de l'arbre sont parallèles), ces deux paramètres sont suffisants pour repérer le positionnement de l'arbre à l'intérieur du coussinet. Les rayons R_a et R_c étant très voisins $\left[(R_c - R_a) / R_a \approx 10^{-3} \right]$, nous permet de négliger la courbure du film et développer le coussinet et l'assimiler à un plan (figure III.2).

En tenant compte de ces hypothèses, l'expression de l'épaisseur du film s'écrit :

$$h = C(1 + \varepsilon \cdot \cos\theta) \quad (\text{III.1})$$

Avec :

$C = R_c - R_a$, C est le jeu radial entre l'arbre et le coussinet ;

$\varepsilon = \frac{e}{C}$, ε est l'excentricité relative ;

$\theta = \frac{x}{R}$, θ est la coordonnée angulaire.

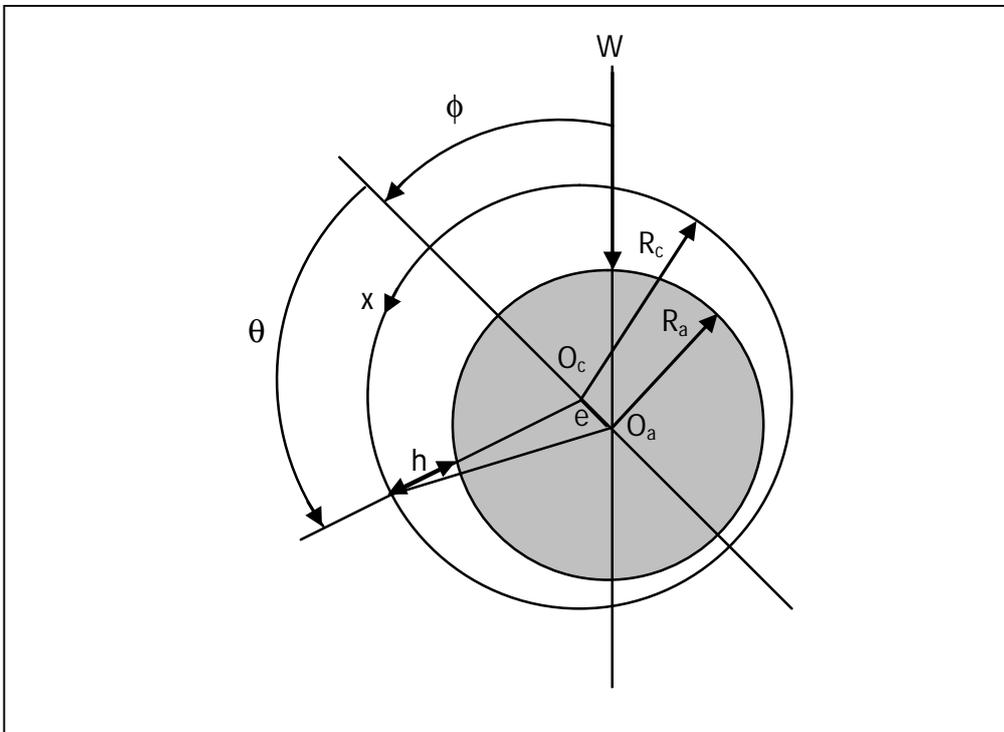


Figure III.1. Section droite d'un palier lisse

Dans le repère à coordonnées cartésiennes (OXYZ) présenté sur la figure III.2, le plan XOZ est confondu avec la surface développée du coussinet et en considérant qu'il n'y a pas de glissement entre le lubrifiant et les parois, les conditions aux limites sur les vitesses s'écrivent :

Sur le coussinet : $y = 0$

$$U_1 = V_1 = W_1 = 0 ;$$

Sur l'arbre : $y = h$

$$U_2 = U = \omega R_a ; V_2 = \omega \frac{dh}{d\theta} ; w_2 = 0 ;$$

La figure ci-dessous montre un schéma d'un palier lisse développé.

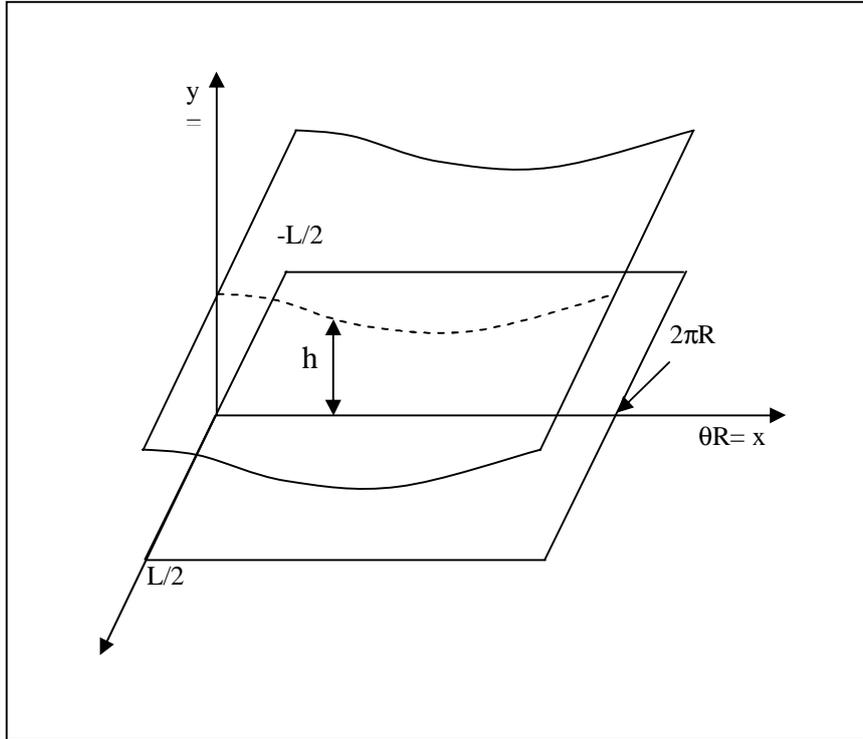


Figure III.2. Palier lisse cylindrique développé

III.3. Equation de Reynolds

Dans cette étude, nous nous limiterons au régime hydrodynamique établi et nous supposerons que l'écoulement du fluide à travers le palier est isotherme et laminaire.

En prenant pour hypothèses un régime isotherme, un lubrifiant incompressible et une viscosité ne variant pas selon l'épaisseur du film, l'équation de Reynolds dans un repère cartésien [4, 5, 6], s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} + 6h \frac{\partial}{\partial x} (U_1 + U_2) + 6h \frac{\partial}{\partial z} (W_1 + W_2) + 12V_2 \quad (\text{III.2})$$

Où U_1, U_2, V_2, W_1, W_2 sont les vitesses des surfaces (1) et (2) selon les axes x, y, z ; h est l'épaisseur du film ; p est la pression hydrodynamique et μ est la viscosité du lubrifiant.

Dans le cas d'un palier lisse lubrifié par un fluide incompressible et isovisqueux en régime permanent, l'équation de Reynolds devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III.3})$$

Avec p : pression,

h : épaisseur du film lubrifiant,

$U = \omega R_a$: vitesse linéaire de l'arbre,

μ : viscosité dynamique du fluide.

La figure ci-dessous présente le repère utilisé et les vitesses des surfaces du palier.

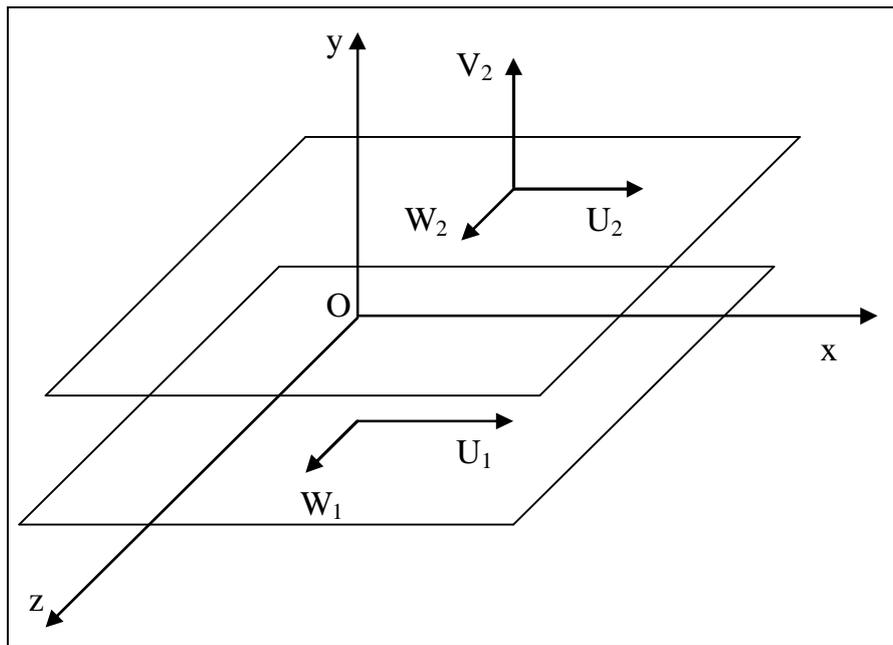


Figure III.3. Repère cartésien

III.4. Alimentation des paliers lisses

La position, la forme des rainures d'alimentation et la pression d'alimentation ont une influence sur les caractéristiques de fonctionnement d'un palier lisse.

On distingue deux types classiques de rainures : les rainures axiales et les rainures circonférentielles.

Les rainures axiales sont utilisées pour les charges fixes en direction ; la position la plus favorable pour la rainure axiale, au point de vue du remplissage en huile du palier, est la génératrice pour laquelle l'épaisseur du film est maximale.

Les rainures circonférentielles généralement placées dans la section médiane du palier, sont utilisées lorsque la charge est variable en direction (charge tournante par exemple). Ce type de rainure diminue considérablement la portance du palier, car elle substitue deux paliers de longueur $L' \approx L/2$ à un palier de longueur L

III.5. Conditions aux limites

Dans le cas d'une rainure d'alimentation parallèle à l'axe du palier (rainures axiale), les conditions aux limites sur la pression qui correspondent le plus à la réalité physique sont celles conditions de Reynolds, qui s'écrivent (figure III.2) [4]:

- Suivant l'axe OZ :

$$P\left(\theta, z = -\frac{L}{2}\right) = P\left(\theta, z = \frac{L}{2}\right) = 0$$

- Suivant l'axe θR :

$$P(\theta = 0, z) = P(\theta = \theta_s, z) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta = 0, z) = \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, z) = 0$$

$$P(\theta, z) = 0 \quad \text{si } \theta_s < \theta < 2\pi$$

Avec θ_s limite de la zone active du film.

- Dans la rainure d'alimentation :

$$P(\theta = \theta_a, z) = 0$$

Avec θ_a angle d'alimentation.

On distingue ainsi deux régions dans le palier : une région active où la pression est positive et le film complet pour des valeurs de θ comprises entre 0 et θ_s et une région inactive à pression nulle dans laquelle peut apparaître de la cavitation pour $\theta_s < \theta < 2\pi$. Cette dernière région est partiellement remplie de fluide et il faut en tenir compte lors du calcul du couple de frottement.

La cavitation : est un phénomène très complexe, qui se traduit par l'implosion de bulles de vapeur (de très basse pression) au sein du film lubrifiant (de très grande pression), et donne naissance à un film d'huile séparé à la sortie de la zone de convergence du palier (zone de film en filets).

III.6. Influence du mésalignement

Dans un palier, les axes du coussinet et de l'arbre ne sont pas toujours parallèles (figure III.4.). En pratique, il existe toujours un mésalignement dont les causes peuvent être d'origines diverses : déformations thermiques ou élastiques de l'arbre, couples extérieurs ou mauvais alignement des paliers.

Pour calculer l'effet du mésalignement, on applique l'équation de Reynolds (III.3) avec une épaisseur du film modifiée. L'effet principal de l'inclinaison d'axe doit décaler le point d'appui (centre de pression hydrodynamique) vers l'épaisseur de film minimum (h_0 sur la figure III.4), qui augmente la pression hydrodynamique maximum [6].

Dans ce cas l'épaisseur de film s'écrit sous la forme :

$$h = C(1 + \varepsilon \cdot \cos\theta) - m \quad (\text{III.4})$$

Avec m : la distance entre l'axe de l'arbre et l'axe incliné comme présenté dans la figure III.4 [6].

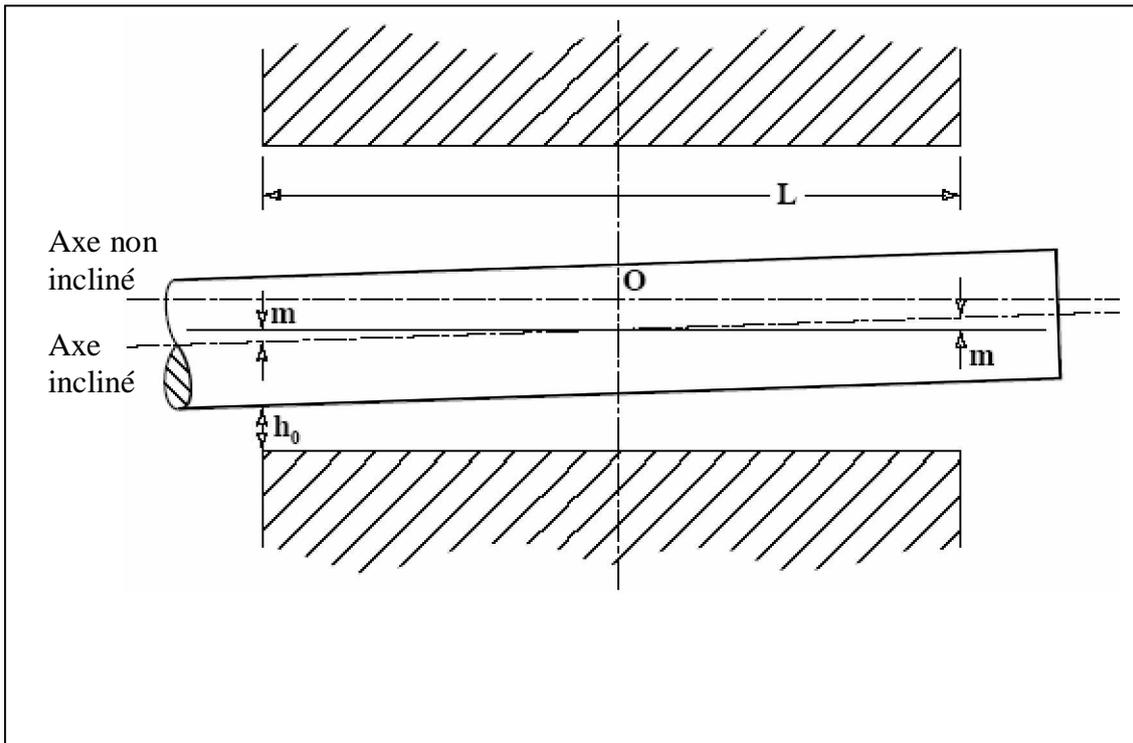


Figure III.4. Représentation d'un axe incliné

III.7. Charge et angle de calage

Par intégration du champ de pression, on obtient les composantes de la charge sur deux axes perpendiculaires, elles s'écrivent [6]:

$$\begin{cases} W_k = -\int_s P \cos\theta \cdot ds = W \cdot \cos\phi \\ W_l = -\int_s P \sin\theta \cdot ds = W \cdot \sin\phi \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Avec :
$$W = \sqrt{W_l^2 + W_k^2} \quad (\text{III.6})$$

L'angle de calage est défini par :

$$\phi = \arctg\left(-\frac{W_l}{W_k}\right) \quad (\text{III.7})$$

La charge peut s'écrire par :

$$W = \int_0^L \int_0^{2\pi R} P \cdot dx \cdot dz \quad (\text{III.8})$$

III.8. Force et coefficient de frottement

Une fois que le champ de pression a été trouvé, il est possible de calculer la force de frottement et le coefficient de frottement à partir d'épaisseur du film et de gradient de pression de film [6].

La force de frottement est donnée par l'intégration des contraintes de cisaillement. Elle s'écrit :

$$F = \int_0^L \int_0^{2\pi R} \tau_{xz} \cdot dx \cdot dz \quad (\text{III.9})$$

Où la contrainte de cisaillement est donnée par :

$$\tau_{xz} = \frac{\mu U}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{III.10})$$

Le coefficient de frottement est donné par :

$$f = \frac{F}{W} = \frac{\int_0^L \int_0^{2\pi R} \tau_{xz} \cdot dx \cdot dz}{\int_0^L \int_0^{2\pi R} P \cdot dx \cdot dz} \quad (\text{III.11})$$

Avec f : est le coefficient de frottement.

III.9. Couple de frottement

On s'intéresse plus particulièrement au couple de frottement de l'arbre, puisqu'il donne la puissance dissipée par le palier, il est donné par l'intégration des contraintes de cisaillement à la surface de l'arbre. Il s'écrit [6] :

$$C_a = R^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} \tau_{xz} \cdot d\theta \cdot dz \quad (\text{III.12})$$

CHAPITRE IV

RESOLUTION NUMERIQUE

IV.1. Introduction

La modélisation numérique de lubrification hydrodynamique repose sur la résolution numérique des équations de la théorie de Reynolds (celles vus dans le chapitre III).

Les étapes à suivre pour la résolution :

- écriture de l'équation de Reynolds sans dimensions
- définition du paramètre de vogelpohl
- discrétisation numérique
- définition du domaine d'étude
- résolution numérique

IV.2. Equation de Reynolds

L'équation de Reynolds pour un palier lisse lubrifié par un fluide incompressible et isovisqueux en régime permanent [6], s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{IV.1})$$

Toutefois, il est intéressant d'utiliser des variables adimensionnées, afin de simplifier et de généraliser les calculs.

Ainsi, on pose :

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h}{C} \\ \theta &= \frac{x}{R} & \bar{z} &\in [0, 2\pi] \\ \bar{z} &= \frac{z}{L} & \bar{z} &\in [0, 1] \\ \bar{P} &= \frac{PC^2}{6U\mu R_a} \end{aligned}$$

Avec

h : est l'épaisseur de film hydrodynamique ;

C : est le jeu radial ;

R : est le rayon d'arbre;

L : est la longueur axiale de l'arbre ;

P : est la pression ;

U : vitesse linéaire de l'arbre ;

μ : est la viscosité dynamique du fluide ;

x, z sont les coordonnées cartésiennes.

L'équation de Reynolds sous sa forme adimensionnelle, s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R_a}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \quad (\text{IV.2})$$

Avec θ : la coordonnée circonférentielle.

Il faut noter que n'importe quel autre arrangement adimensionnel puisse être employé, mais cet arrangement particulier est le plus utilisé et le plus commode.

IV.3. Définition de paramètre de Vogelpohl :

Le paramètre de Vogelpohl a été développé pour améliorer l'exactitude des solutions numériques de l'équation de Reynolds [6].

Le paramètre de Vogelpohl est défini comme suit :

$$M_v = \bar{P} \cdot \bar{h}^{1.5} \quad (\text{IV.3})$$

L'introduction du paramètre de Vogelpohl dans la forme adimensionnelle de l'équation de Reynolds (IV.2) donne :

$$\frac{\partial^2 M_v}{\partial \theta^2} + \left(\frac{R_a}{L} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 M_v}{\partial \bar{z}^2} = F \cdot M_v + G \quad (\text{IV.4})$$

Avec :

$$F = \frac{0.75 \left[\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{R_a}{L} \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right]}{\bar{h}^2} + \frac{1.5 \left[\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \theta^2} + \left(\frac{R_a}{L} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{z}^2} \right]}{\bar{h}} \quad (\text{IV.5})$$

$$G = \frac{\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right)}{\bar{h}^{1.5}} \quad (\text{IV.6})$$

Le fameux intérêt du paramètre de Vogelpohl est qu'il facilite les calculs en simplifiant les opérateurs différentiels de l'équation de Reynolds.

Différentes méthodes de résolution de l'équation de Reynolds peuvent être utilisées. La méthode que nous avons utilisée est la méthode des différences finies.

IV.4. Discrétisation numérique

L'équation de Reynolds est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admet pas, sauf dans quelques cas simples, de solutions analytiques. Les méthodes utilisées généralement sont la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. Cette dernière, est généralement employée pour les paliers à géométrie complexe. Dans cette présente étude, nous avons utilisé la méthode des différences finies du fait de sa simplicité de programmation.

La résolution de l'équation de Reynolds par la méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées exactes par des différences finies rapprochées en utilisant un pas de calculs.

Les approximations en des dérivées sur θ , s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial M_v}{\partial \theta} \right)_i &= \frac{M_{v,i+1} - M_{v,i-1}}{2\delta\theta} \\ \left(\frac{\partial^2 M_v}{\partial \theta^2} \right)_i &= \frac{M_{v,i+1} + M_{v,i-1} - 2M_{v,i}}{(\delta\theta)^2} \end{aligned} \right\} \quad (IV.7)$$

L'équation de Reynolds se transforme alors en :

$$M_{v,i,j} = \frac{C_2 (M_{v,i+1,j} + M_{v,i-1,j}) + \left(\frac{R_a}{L} \right)^2 C_2 (M_{v,i,j+1} + M_{v,i,j-1}) - G_{i,j}}{2C_1 + 2C_2 + F_{i,j}} \quad (IV.8)$$

Avec :

$$C_1 = \frac{1}{\delta\theta^2} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{1}{\delta\bar{z}^2}$$

La figure (IV.1) montre les coefficients du nouveau système M_v , obtenus par la méthode des différences finies et comment sont associés par rapport aux nœuds.

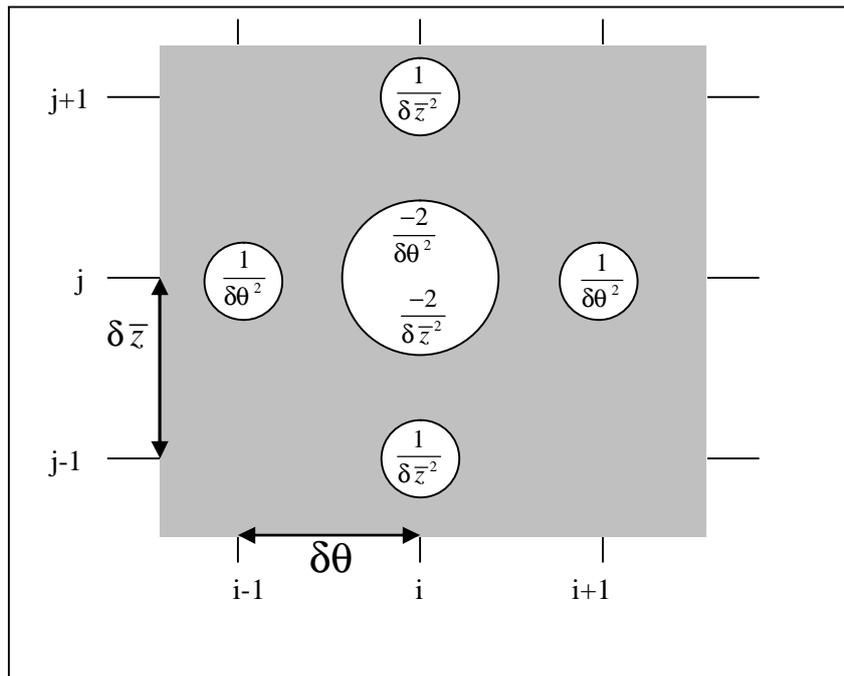


Figure IV.1. Coefficients du système M_v obtenus par différences finies.

Le calcul du champ de pression se fait par la résolution numérique de l'équation (IV.8) en utilisant la méthode itérative de Gauss-Seidel.

IV.5. Définition du domaine d'étude et conditions aux limites :

Après avoir définie l'équation de en fonction M_v , la prochaine étape dans la résolution numérique est de définir les conditions aux limites. Pour le cas d'un palier lisse on impose une pression nulle aux bords du palier et dans la zone où se produit la cavitation.

Si on suppose que $\bar{z} \in [-0.5, 0.5]$, pour la raison de symétrie, la symétrie peut être exploitée pour faire les calculs sur moitié de la section palier ou pour $\bar{z} \in [0, 0.5]$. Cette hypothèse réduit considérablement le temps de calcul et permet l'utilisation des maillages fins pour avoir de bonne précision.

En terme analytique, la symétrie est donné par :

$$M_{v,i,j+1} = M_{v,i,j-1} \quad (\text{IV.9})$$

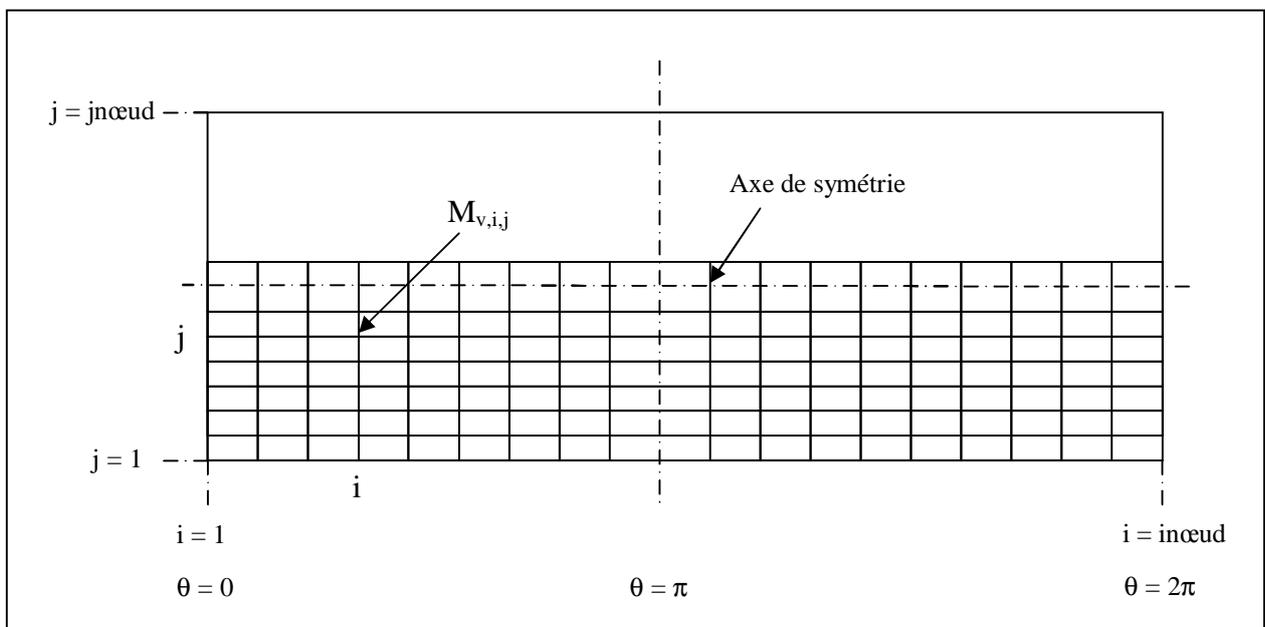


Figure IV.2 discrétisation du palier

IV.6. Procédé de résolution numérique

Les principes des méthodes itératives sont :

- l'imposition des conditions aux limites.
- L'assignation d'une valeur quelconque aux termes $M_v(i,j)$ respectant cependant une certaine valeur de l'angle de calage ϕ .
- L'aide de l'équation (Vogelpohl), les termes de $M_v^1(i,j)$ sont calculés à partir des termes $M_v^0(i,j)$.

L'itération est menée jusqu'à ce que l'erreur relative err entre n'importe quelle valeur $M_v(i,j)$ à l'itération n ($M_v^n(i,j)$), et la valeur $M_v(i,j)$ à l'itération $(n+1)$ ($M_v^{n+1}(i,j)$), soit inférieure à une valeur très faible. Soit en général :

$$err = \frac{\max |M_v^{n+1}(i,j) - M_v^n(i,j)|}{M_v^n(i,j)} < 0.0001$$

Organigramme dans la figure IV.3 résume les principales étapes du procédé de calcul, du programme élaboré au cours de cette étude, pour un palier lisse en utilisant la méthode des différences finies.

Les formes adimensionnelles, utilisées dans le programme informatique, des équations données dans le chapitre précédent sont données ci-dessous :

Force de frottement s'écrit :

$$F = \frac{RLU\mu}{C} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \bar{\tau} \cdot d\theta \cdot dz = \bar{F} \left(\frac{RLU\mu}{C} \right) \quad (IV.10)$$

Avec \bar{F} : la Force de frottement adimensionnelle.

La contrainte de cisaillement adimensionnelle s'écrit :

$$\bar{\tau} = \frac{1}{h} + 3\bar{h} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \quad (IV.11)$$

La charge s'écrit :

$$W = \left(\frac{6RU\mu}{C^2} \right) RL \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\cos(\theta) \cdot \bar{P} \cdot d\theta \cdot dz = \bar{W} \left(\frac{6R^2LU\mu}{C^2} \right) \quad (\text{IV.12})$$

Avec : \bar{W} : la charge adimensionnelle.

Le coefficient de frottement est donné par :

$$f = \frac{\bar{F} \left(\frac{RLU\mu}{C} \right)}{\bar{W} \left(\frac{6R^2LU\mu}{C^2} \right)} = \left(\frac{C}{6R} \right) \left(\frac{\bar{F}}{\bar{W}} \right) \quad (\text{IV.13})$$

Dans le cas de la présence de mésalignement, la forme adimensionnelle de l'épaisseur de film est donnée par :

$$\bar{h} = \bar{z} \cdot d \cdot \cos(\theta) + \varepsilon \cos(\theta - \phi) + 1 \quad (\text{IV.14})$$

Avec d : le facteur de mésalignement.

La présence de la cavitation dans le palier ajoute une certaine complication au calcul du coefficient de frottement. Dans la région cavité, la contrainte de cisaillement effective est donnée par :

$$\bar{f}_e = \frac{\bar{h}_{cav}}{\bar{h}^2} \quad (\text{IV.15})$$

Avec \bar{h}_{cav} : est l'épaisseur du film à la frontière de cavitation.

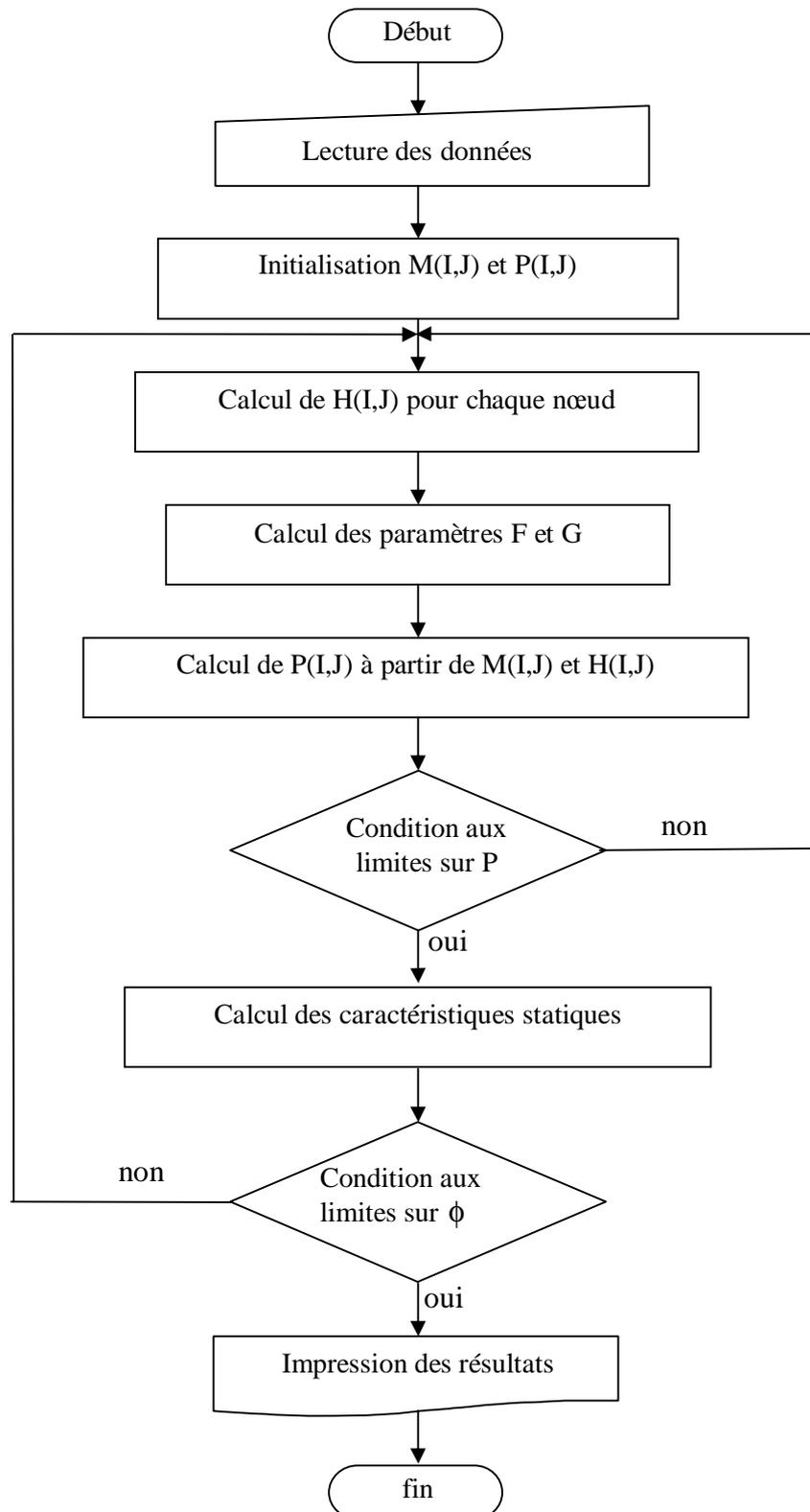


Figure IV.3 : Organigramme du programme élaboré

CHAPITRE V

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

V.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats numériques obtenus à l'aide de notre code de calcul réalisé en MATLAB, que nous avons élaboré au cours de cette étude, qui consiste à l'étude de la lubrification hydrodynamique d'un palier lisse tête de bille du moteur.

V.2. Caractéristiques du palier et propriétés du lubrifiant

Le palier que nous avons utilisé est celui de Sheau-Ming Ju et Cheng-I Weng [7]. L'exemple traité concerne un palier cylindrique comportant une rainure axiale d'alimentation. Le coussinet est en bronze et l'arbre en acier. Les caractéristiques du palier, du lubrifiant et les conditions de fonctionnement sont précisées dans le tableau 1.

Tableau V.1 : Caractéristiques du palier et propriétés du lubrifiant

La longueur du palier	$L = 0.1 \text{ m}$
Le rayon de l'arbre	$R_a = 0.05 \text{ m}$
Le rayon extérieur du coussinet	$R_c = 0.10 \text{ m}$
Le jeu radial	$C = 0.0001 \text{ m}$
La viscosité de référence	$\mu = 0.0323 \text{ Pa.s}$
La pression d'alimentation	$P_a = 70 \text{ KPa}$
La vitesse de rotation	$N = 2000 \text{ tr/mn}$

Considérons le cas de fonctionnement pour lequel l'excentricité relative $\varepsilon = 0.6$ et une vitesse de rotation $N = 2000 \text{ tr/mn}$.

V.3. Répartition du champ de pression

La figure V.1 représente la variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle, nous remarquons que la pression augmente avec l'augmentation de la

coordonnée circonférentielle jusqu'à atteindre son maximum pour $\theta = 198^\circ$, puis diminue rapidement et s'annule pour $\theta = 258^\circ$.

L'augmentation du champ de pression est justifié par le fait que dans l'intervalle $\theta \in [0, 198]$ (convergent), il y'a création de la pression hydrodynamique, puis elle diminue dans le divergent.

Les résultats obtenus dans ces conditions sont :

- L'épaisseur minimale = $4.0034e-005$ m.
- Pression maximale = 53.556 bar.
- Angle de calage = 52.065° .

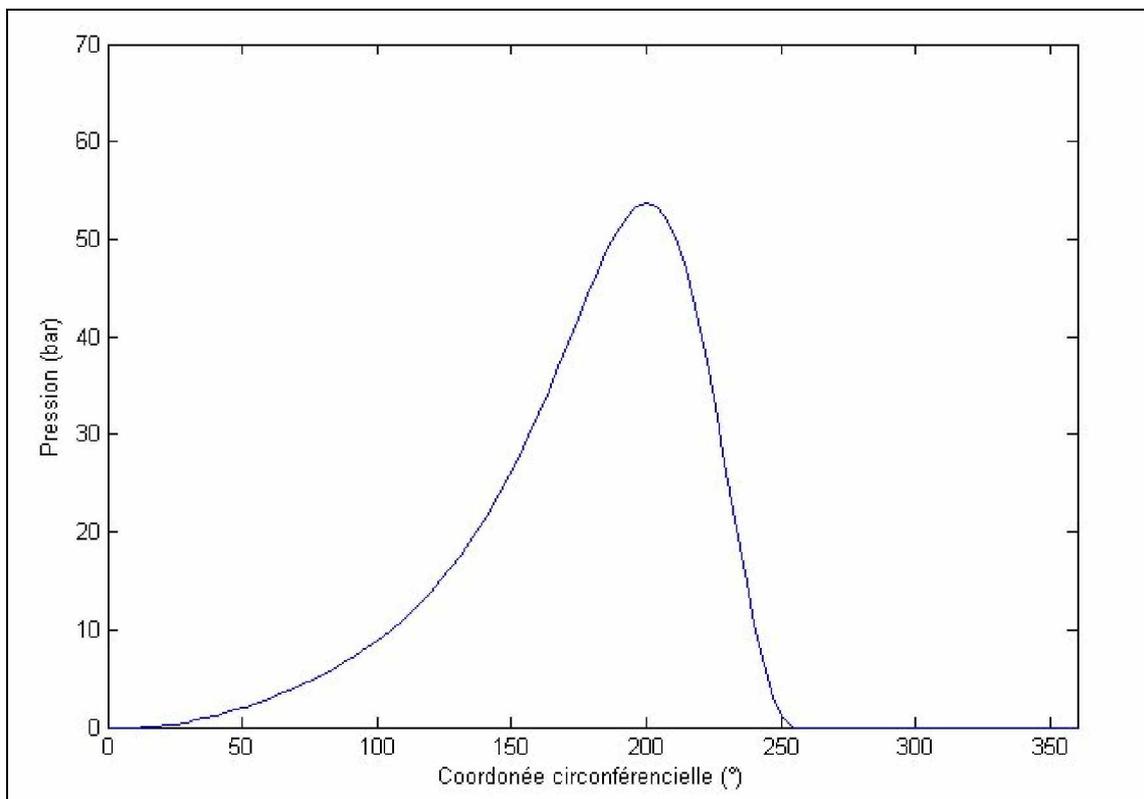


Figure V.1. Variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle (°)

La figure V.2 représente la variation de la pression en fonction de la coordonnée axiale. Nous remarquons qu le champ de pression est symétrique par rapport à l'axe de la coordonnée circonférentielle (pour un palier développé), la pression maximale est obtenue sur l'axe et nulle sur les bords.

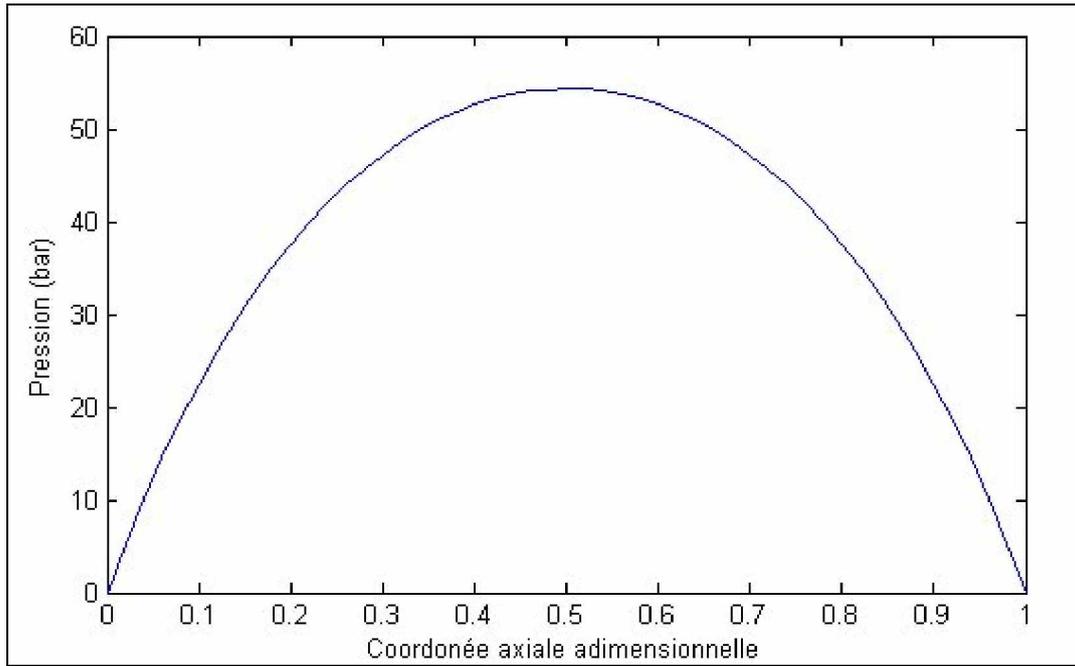


Figure V.2. Variation de la pression en fonction de la coordonnée axiale

La figure V.3 représente la variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle pour différentes vitesses de rotation. Nous remarquons que la pression augmente avec l'augmentation de la vitesse de rotation.

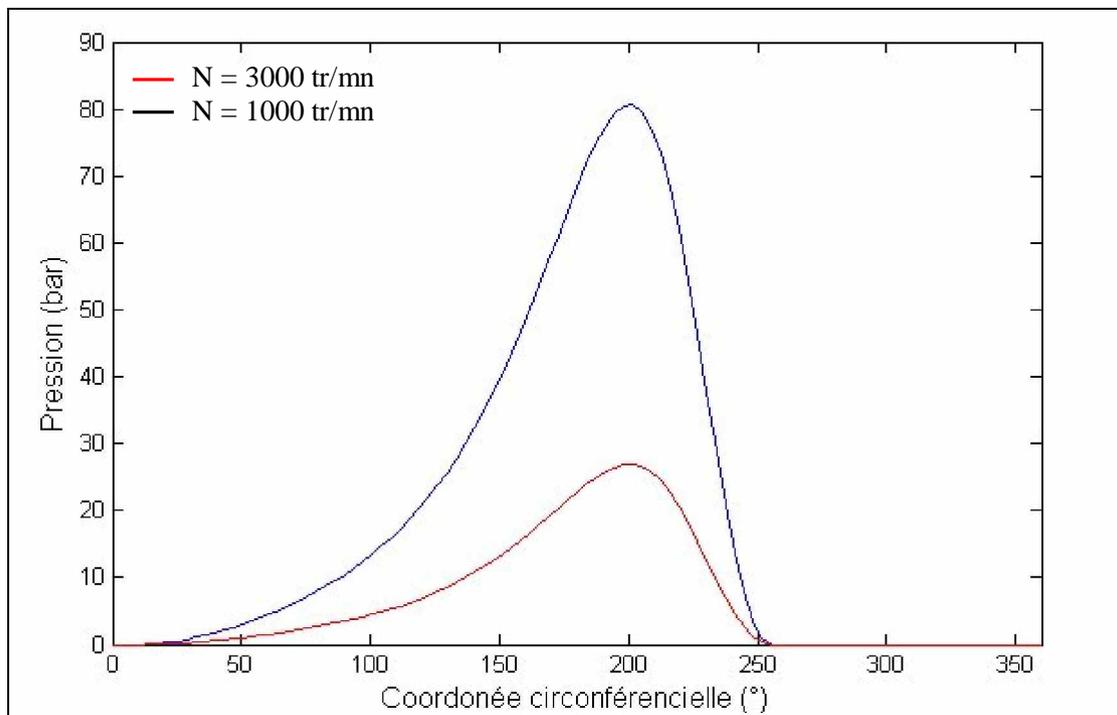


Figure V.3. Variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle pour différentes vitesses de rotation.

Figure V.4 représente la variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle pour différents jeux radiaux. Nous remarquons que la pression augmente avec la diminution du jeu radial.

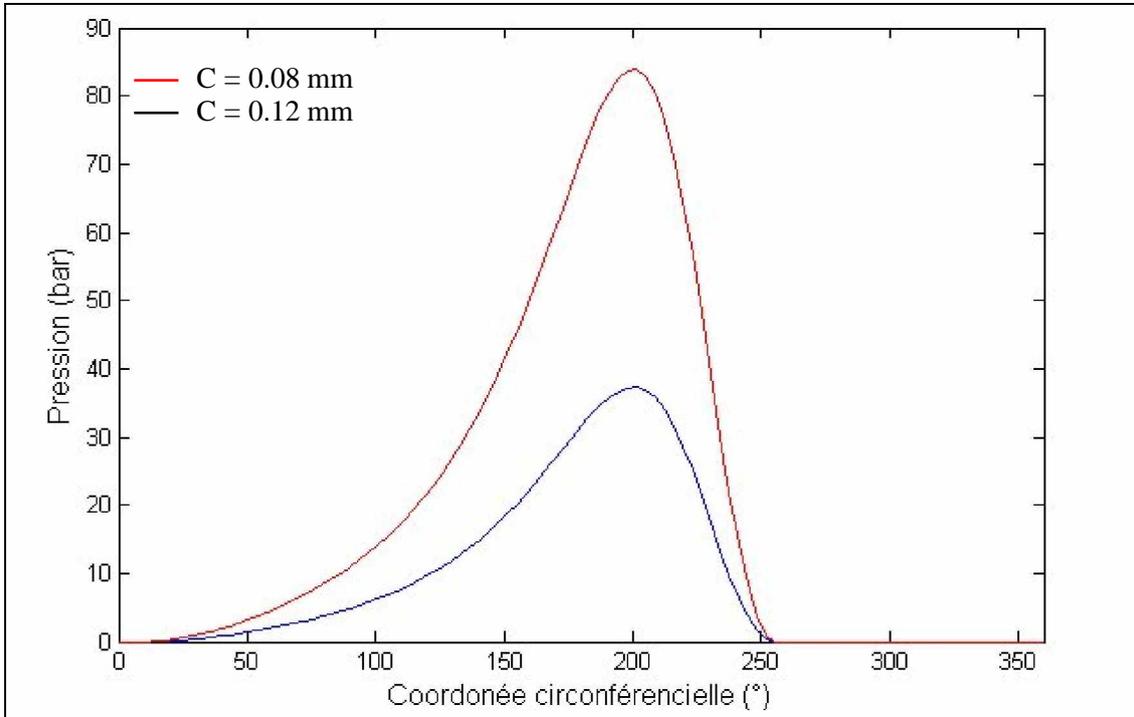


Figure V.4. Variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle pour différents jeux radiaux

La figure V.5 représente la variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle pour différentes excentricités relatives. Nous remarquons que la pression augmente avec l'augmentation de l'excentricité relative, ce qui est dû au fait qu'une grande excentricité relative fait diminuer l'épaisseur minimale et augmente la pression dans le film. Nous remarquons aussi que la position de la pression maximale se déplace à des valeurs inférieures de la coordonnée circonférentielle, ce qui est dû à la diminution de l'angle de calage.

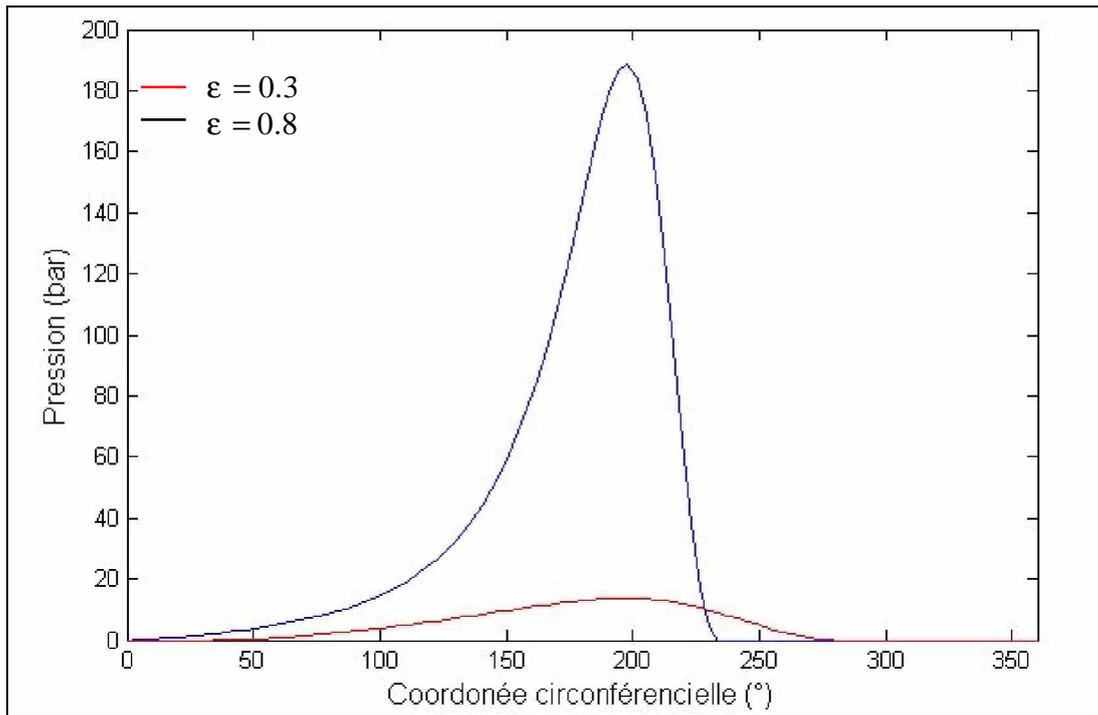


Figure V.5. Variation de la pression en fonction de la coordonnée circonférentielle pour différentes excentricités relatives

La figure V.6 représente le profil de pression en fonction de la coordonnée axiale et circonférentielle. Elle donne une allure bien détaillée sur l'évolution de pression dans le palier.

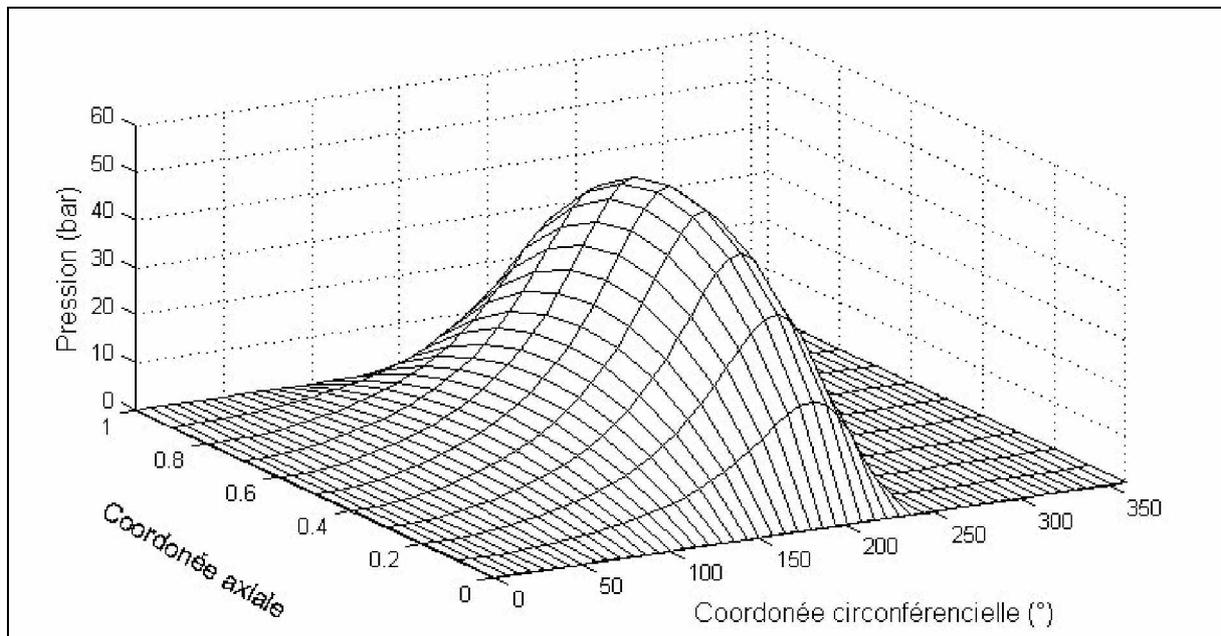


Figure V.6. Evolution de profil de pression en fonction de la coordonnée axiale et circonférentielle.

V.4. Influence de mésalignement

Nous avons considéré le palier précédent avec données par le tableau V.1 et un facteur de mésalignement $d = 0.5$.

La figure V.7 montre l'allure de la pression sous l'influence du mésalignement. Dans le cas du palier aligné la distribution de la pression est parfaitement uniforme, tandis que le maximum de la pression est donné près de l'épaisseur minimale avec une distribution non uniforme. Nous remarquons que la pression maximale dans le palier non aligné est supérieure (plus de 10%) à la pression maximale du palier aligné. La même remarque est faite pour la charge adimensionnelle (palier aligné 0.4305 et non aligné 0.45655).

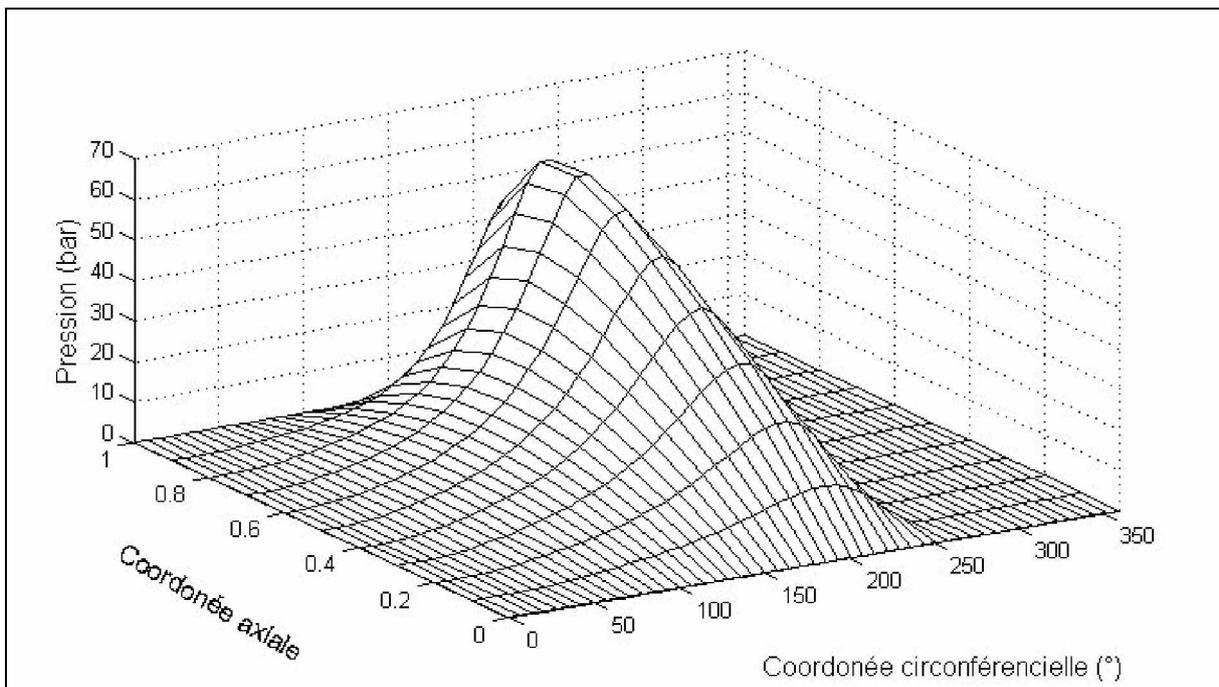


Figure V.7. Evolution de profile de pression en fonction de la coordonnée axiale et circonférentielle pour un palier non aligné.

V.5. Influence de maillage

Tableau V.2 : Etude des caractéristiques du palier en fonction de la variation du maillage dans les directions circonférentielle et axiale.

Le tableau V.2 montre l'épaisseur minimale du film, la pression maximale et la charge pour trois maillages différents. Du fait de la symétrie du palier, le domaine d'étude est un demi-palier. Nous remarquons de très faibles différences entre les principaux paramètres du palier (moins de 4%), ceci montre qu'un maillage quadratique avec 31 éléments dans la direction circonférentielle et 11 éléments dans la direction axiale est suffisant pour l'analyse du comportement du palier.

Le tableau V.2 : variation de l'épaisseur minimale du film, la pression maximale et la charge pour trois maillages différents.

Direction circonférentielle	31	61	81
Direction axiale	11	11	11
P_{\max} (bar)	53.518	53.556	53.651
H_{\min} (adimensionnelle)	0.4015	0.4003	0.4004
Charge (adimensionnelle)	0.4345	0.4305	0.4311

V.6. Etude paramétrique

Dans cette partie, nous allons prendre le palier Sheau-Ming Ju et Cheng-I Weng [7], et nous étudions l'influence de l'excentricité relative sur les différents paramètres du palier. Nous faisons varier l'excentricité entre 0.3 et 0.8 et en relevant les différents paramètres.

V.6.1. Influence sur la charge adimensionnelle

La figure V.8 monte la variation de la charge adimensionnelle en fonction de l'excentricité relative. Nous remarquons que la charge augmente avec l'excentricité relative. Ce fait peut être expliqué par la diminution de l'épaisseur minimale du film et l'augmentation de la pression dans le palier ce qui engendre l'augmentation de la charge.

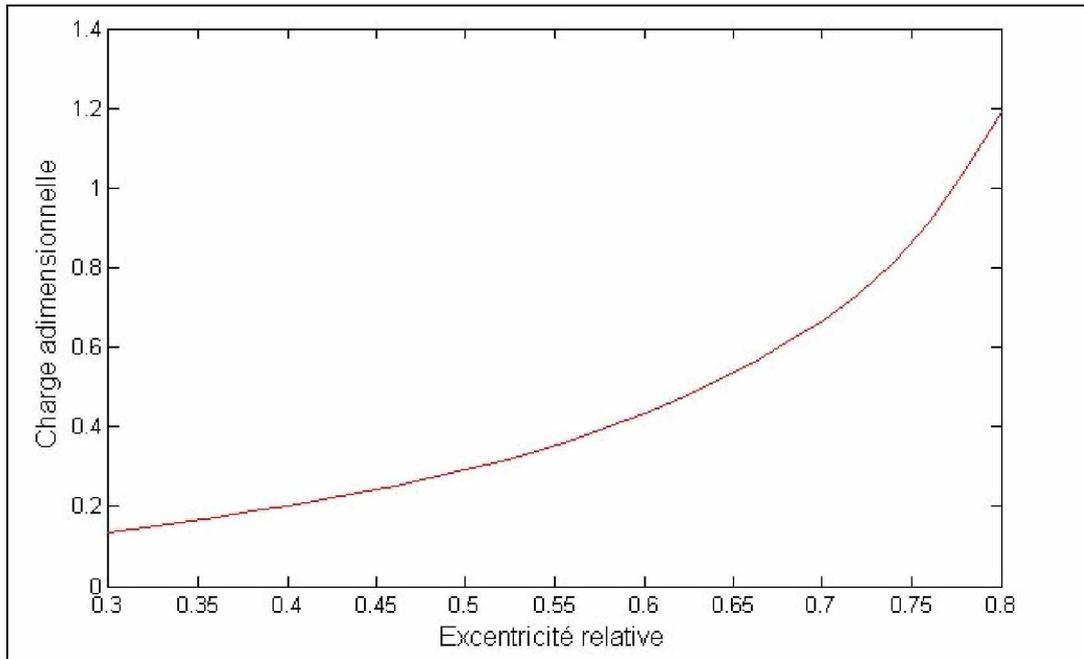


Figure V.8. Variation de la charge adimensionnelle en fonction de l'excentricité relative

V.6.2. Influence sur l'angle de calage

La figure V.9 montre la variation de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative. On remarque que l'angle de calage est inversement proportionnel à l'excentricité relative.

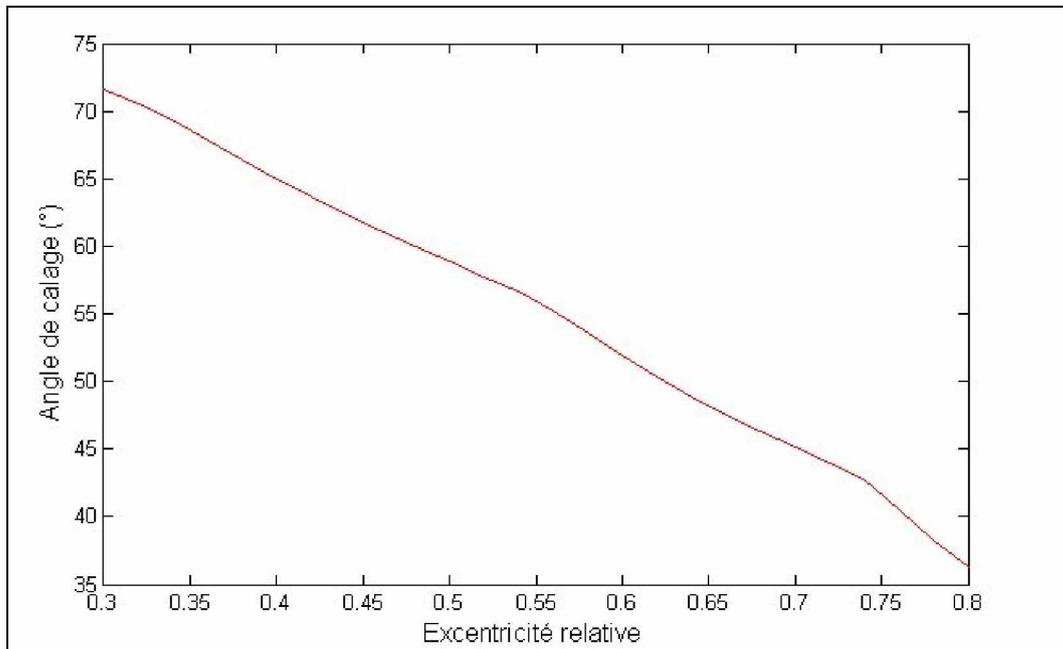


Figure V.9. Variation de l'angle de calage en fonction de l'excentricité relative

V.6.3. Influence sur l'épaisseur minimale

La figure V.10 montre la variation de l'épaisseur minimale du film en fonction de l'excentricité relative. On remarque que l'épaisseur minimale est proportionnelle à l'excentricité relative.

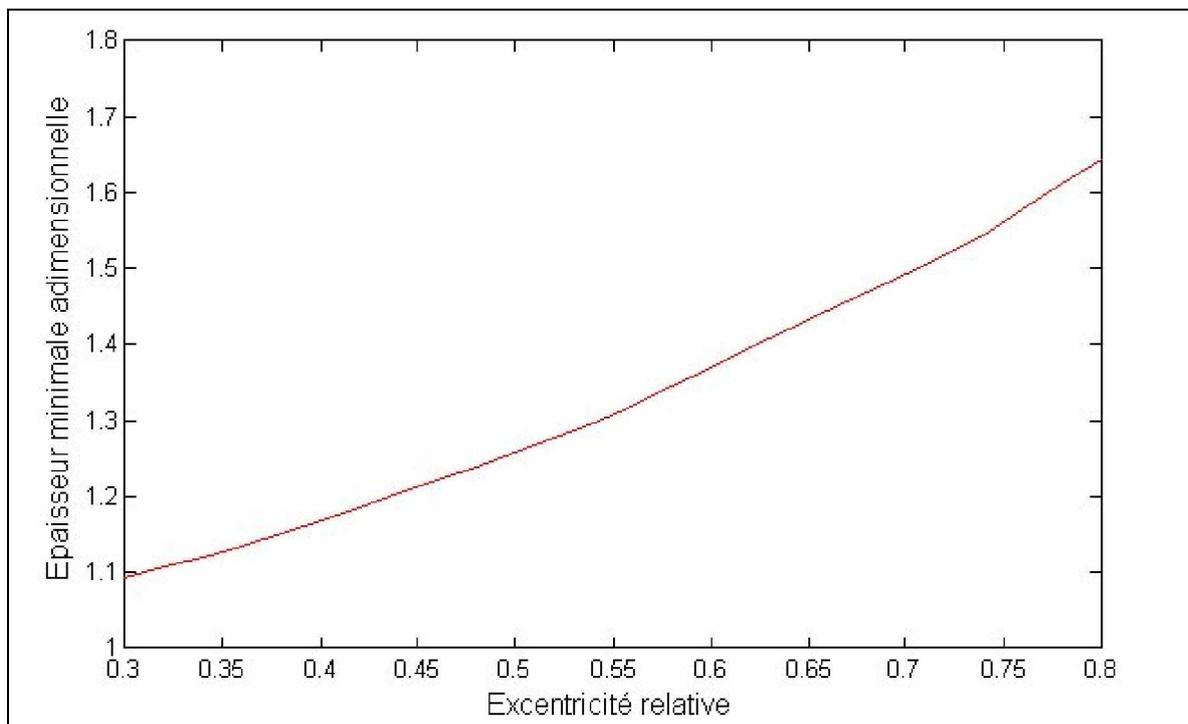


Figure V.10. Variation de l'épaisseur minimale en fonction de l'excentricité relative

V.6.4. Influence sur de coefficient de frottement

La figure V.11 montre la variation du coefficient de frottement en fonction de l'excentricité relative. On remarque que coefficient de frottement diminue avec l'augmentation de l'excentricité relative.

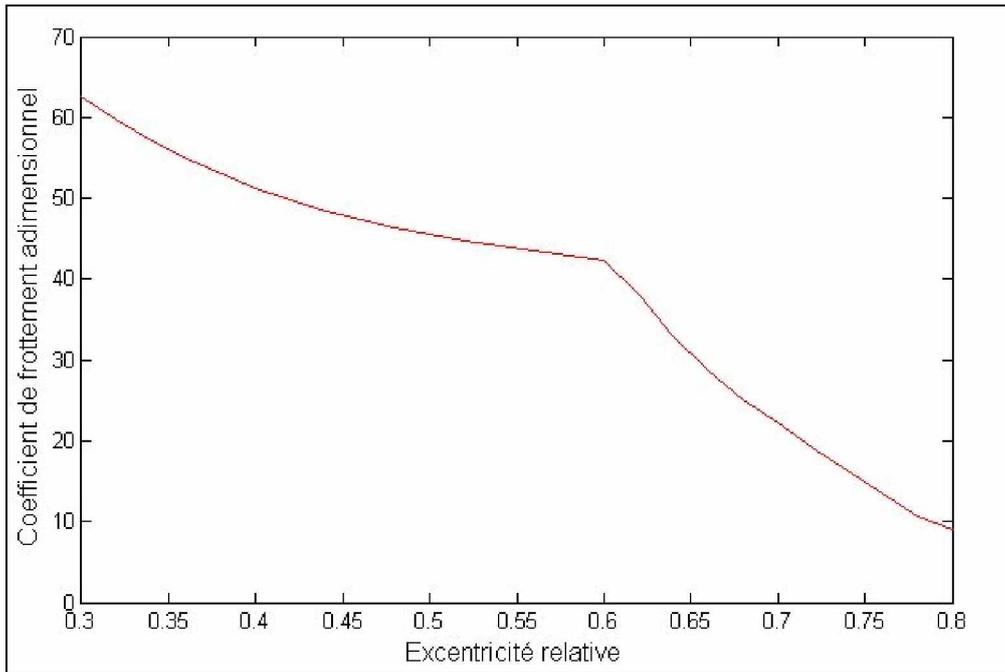


Figure V.11. Variation du coefficient de frottement en fonction de l'excentricité relative

V.6.5. Influence sur la contrainte de cisaillement

La figure V.12 montre la variation de la contrainte de cisaillement en fonction de l'excentricité relative, et elle augmente avec cette dernière.

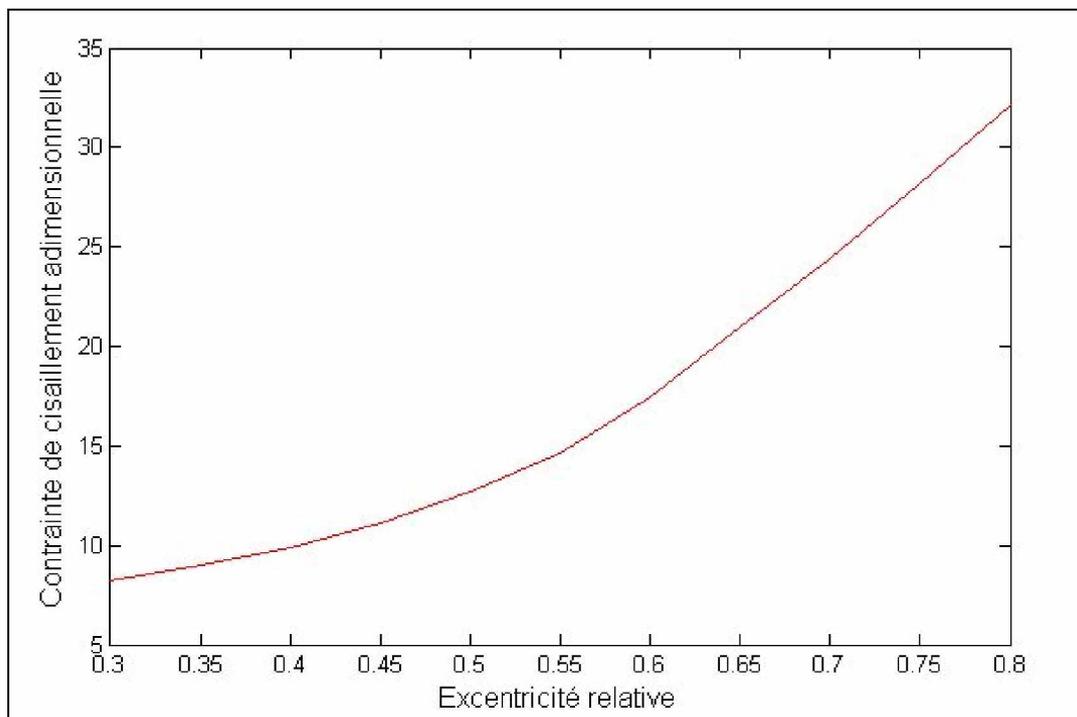


Figure V.12. Variation de la contrainte de cisaillement en fonction de l'excentricité relative

Puisque la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la force de frottement on peut conclure que le graphe aura la même allure, et sera proportionnel à l'excentricité relative. La même chose doit être conclue pour le couple de frottement puisque ce dernier est le produit de la force de frottement à la surface de l'arbre par le rayon de l'arbre $C_a = F \cdot R_a$.

CONCLUSION

GENERALE

Conclusion générale

A travers notre étude nous avons pu donner des notions de base sur les paliers et les lubrifiants, ainsi que les équations fondamentales des films minces et poser les hypothèses simplificatrices qui nous ont permis d'établir les équations qui régissent la lubrification hydrodynamique d'un palier lisse tête de bielle.

La résolution des équations est faite en utilisant une méthode numérique qui est celle des différences finies. En effet, nous avons pu élaboré un programme informatique en utilisant MATLAB qui nous a permis de calculer la distribution de la pression dans le film lubrifiant à travers la longueur de palier ainsi que sa circonférence, l'angle de calage, la charge adimensionnelle et le coefficient de frottement.

L'étude nous a permis de voir l'allure de la distribution de la pression à travers le film lubrifiant (graphe à deux et trois dimensions). Et d'étudier l'influence de certains paramètres sur ce dernier, à savoir que :

- La vitesse de rotation : le champ de pression augmente avec l'augmentation de la vitesse de rotation.
- Le jeu radial : le champ de pression augmente avec la diminution du jeu radial.
- L'excentricité relative : le champ de pression augmente avec l'augmentation de l'excentricité relative.

Enfin nous avons vu l'influence de maillage, d'après les trois maillages étudiés nous avons constaté une faible différence des résultats d'où nous avons déduit qu'un maillage que le maillage quadratique avec 31 éléments dans la direction circonférentielle et 11 éléments dans la direction axiale est suffisant pour l'analyse du comportement du palier, malgré qu'il est souvent recommandé, pour avoir de très bons résultats, d'utiliser des maillages fins.

Puis nous avons étudié l'influence de l'excentricité relative sur la charge adimensionnelle, l'épaisseur de film minimale, le coefficient de frottement, la contrainte de cisaillement et l'angle de calage :

- la charge : la charge augmente avec l'excentricité relative.
- l'angle de calage : l'angle de calage est inversement proportionnel à l'excentricité relative.
- L'épaisseur de film minimale de film ;
- Le coefficient de frottement ;
- La contrainte de cisaillement ;

Vu l'importance de ce sujet et le large domaine d'utilisation des paliers lisses, nous proposons :

- Elargir l'étude pour inclure les effets thermique et élastique (HydroDynamique, ThermoElastoHydroDynamique) ;
- Etudier le comportement des fluides non Newtoniens.
- Développer le programme en utilisant la méthode des éléments finis qui donne des résultats plus exact.

Bibliographie

- [1] **Jean-Louis LIGIER** - Matériaux pour paliers lisses, Techniques de l'Ingénieur, B5330, PP 14-27, 1996.
- [2] **Jean-Louis LIGIER** - Lubrification des paliers moteurs, Edition TECHNIP, PP 83-98, 134-136, 1997.
- [3] **J. Frêne, Daniel Nicolas, Bernard berthe et Maurice Godet** - lubrification hydrodynamique des paliers et butées. Edition RYROLLRS, PP 49-90, 1990.
- [4] **J. Frêne - Butés et paliers hydrodynamiques**. Technique de l'ingénieur, B5320, 1996.
- [5] **Virgil OPTASANU** - Modélisation expérimentale et numérique de la lubrification des paliers compliants sous chargement dynamique, thèse de doctorat, Université de Poitiers, PP 23-45, 2001.
- [6] **Gwidon W. Stachowiak et Andrew W. Batchelor** - Engineering tribology, University of Western Australia, PP 101-200.
- [7] **Surender Kumar, Umesh Chandra and T.V. Bal Subramanian** – An analysis of non-newtonien hydrodynamic lubrication plane strain forging process, PP 293-305, 1981.
- [8] **Notes du cours de mécanique des contacts** - Mr. BELHANECHÉ Hacène, ENP, 2006-2007.
- [9] **NESSIL Mohamed Abdelbasset** – Analyse de la lubrification thermohydrodynamique des paliers fluides utilisant des fluides non Newtoniens, thèse de magister, ENP, 2006.