



المدارس الوطنية المتعددة الفنون
Ecole Nationale Polytechnique

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

Département Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDE
Ingéniorat d'état en Génie Mécanique

Thème

**Simulation Numérique de Milieux
multifissurés par la Méthode de
Discontinuité de Déplacement**

PROPOSE PAR
Mr Y.BELKACEMI

ETUDIE PAR
Mr H.LARIBI

DIRIGE PAR
Mr Y.BELKACEMI

PROMOTION
JUIN 2007

ENP 10 Avenue Hassen Badi – EL HARRACH - ALGER

Dédicaces

Je dédie se travail à

Ma mère et à mon père

Mes sœurs et mes frères

Ainsi qu'à tous mes amis

Remerciements

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à M BELKACEMI qui a proposé et dirigé ce travail. Pour son suivi permanent et leurs conseils qui m'ont beaucoup aidé

Je dis un grand merci à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة الأوساط المتعددة التشققات بواسطة طريقة الانتقالات غير المستمرة في الأوساط ثنائية الأبعاد. في بداية الأمر قمنا بتحويل الصيغة الرياضية لهذه الطريقة إلى الصيغة العددية، ثم قمنا بإنجاز برنامجا حسابيا يمكننا من حساب مجال الاجهادات والانتقالات و كذا معامل شدة الاجهادات بالنسبة لهذه الأوساط.

كلمات مفتاحية : ميكانيك التشققات، الشق، طريقة الانتقالات غير المستمرة، معامل شدة الاجهادات

ABSTRACT

This work consists to study the cracks problems with the displacement discontinuity method for two-dimensional.

First, we change the mathematical formulation of the method in the numerical procedure, and construction of the computer program. With this program we determine the stress intensity factors.

Key word: fractures mechanics, crack, Displacement Discontinuity Method, Stress intensity factor.

RESUME

Ce travail porte sur la modélisation des problèmes de milieux multifissurés par la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel.

On fait la mise en forme de la procédure numérique a partir de la formulation mathématique, ensuite l'élaboration d'un code de calcul. Avec ce code, on peut déterminer le facteur d'intensité de contrainte

Mots clés : Mécanique de la rupture, fissure, Méthode de discontinuité de déplacement, Facteur d'intensité de contrainte

Nomenclature :

σ_{ij} : champ de contrainte	(N/mm ²)
U_i : champ de déplacement	(mm)
r : rayon au voisinage de la pointe de fissure	(mm)
T_i : force extérieure	(N)
E : module d'élasticité	(MPa)
ν : Coefficient de Poisson	
G' : module de cisaillement	(MPa)
K_I : facteur d'intensité de contrainte	(MPa \sqrt{m})
γ_s : l'énergie de surface	(KJ/mm ²)
P : l'énergie potentiel totale	(KJ)
G : taux de restitution d'énergie	(KJ/mm ²)
W_C : l'énergie cinétique	(KJ)
U : l'énergie potentielle des forces appliquées	(KJ)
D_i : discontinuité de déplacement	(mm)

Sommaire

Introduction Générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I	Notion sur la Mécanique de la Rupture
------------	---------------------------------------

I.1. Introduction.....	4
I.2. Notions préliminaires sur la mécanique de la rupture.....	5
I.2.1. Notions & hypothèses.....	5
I.2.2. Modes fondamentaux de rupture.....	5
I.2.3. Etude d'un milieu élastique fissuré.....	6
I.2.4. Champ de contraintes et champ de déplacement.....	6
I.3. Facteur d'intensité de contrainte (approche locale).....	8
I.4. Théorie énergétique de Griffith (approche globale).....	9
I.5. Relation entre G et K.....	10

Chapitre II	La Méthode de discontinuité de déplacement
-------------	--

II.1. Introduction.....	13
II.2. Principe de la méthode de discontinuité de déplacement.....	14
II.3. Procédure de le MDD dans un solide infini.....	14
II.4. Procédure numérique.....	17
II.5. Transformation de coordonnées.....	19
II.6. Coefficients d'influence.....	21

Chapitre III	Exemples d'illustrations
--------------	--------------------------

III.1. Introduction.....	26
III.2. Structure de programme.....	26
III.3. Exemples traités.....	27

Conclusion Générale.....	41
Référence bibliographique.	

Sommaire des Figures :

Fig. A : Accident du Boeing 737 d'Aloha Airlines (avril1988)	2
Fig. I.1 : Modes fondamentaux de rupture.....	5
Figure I. 2: Les zones de champs mécaniques.....	6
Fig. I.3 : Champ de contraintes et de déplacements au voisinage de la tête de fissure....	7
Figure I. 4 : Notations pour une fissure en bidimensionnel	9
Fig. I.5 : Taux de libération d'énergie	9
Fig. II.1 : Méthode de discrétisation	13
Fig. II.2 : Discontinuité de déplacement	14
Fig. II.3 : Représentation d'une fissure quelconque en N segments	18
Fig. II.4 : Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire	20
Fig. II.5 : Position et orientation des éléments.	21
Fig.III.1 : Exemple de deux fissures.....	28
Fig.III.2 : Variation de K_{Ig} en fonction de H.....	29
Fig.III. 3 : Variation de K_{Id} en fonction de H	29
Fig.III. 4 : Exemple de 25 fissures	30
Fig.III. 5 : Variation de K_{Ig} selon la répartition des fissures.....	31
Fig.III. 6 : Variation de K_{Id} selon la répartition des fissures.....	32
Fig.III.7 : Exemple de 2 fissures.....	32
Fig.III. 8 : Variation de K_{Ig} en fonction de H.....	33
Fig.III. 9 : Variation de K_{Id} en fonction de H.....	34
Fig.III.10 : Exemple de 100 fissures dans un domaine infini.....	34

Fig.III.11 : Variation de K_{Ig} selon la répartition des fissures	36
Fig.III.12 : Variation de K_{Id} selon la répartition des fissures.....	36
Fig.III.13 : Exemple de 25 fissures dans un domaine circulaire.....	37
Fig.III.14 : Variation de K_{Ig} selon la répartition des fissures.....	38
Fig.III.15 : Variation de K_{Id} selon la répartition des fissures.....	39

Sommaire des tableaux :

Tableau.III.1 : Variation de K en fonction de H.....	25
Tableau .III.2 : Variation de K selon la répartition des fissures.....	31
Tableau .III.3 : Variation de K en fonction de H.....	33
Tableau .III.4 : Variation de K selon la répartition des fissures.....	35
Tableau .III.5 : Variation de K selon la répartition des fissures	38

Introduction Générale

Introduction Générale

La rupture est un problème auquel l'homme aura à faire face aussi longtemps qu'il construira des édifices ou fabriquera des structures. Ce problème est actuellement plus crucial avec le développement de structures complexes lié au progrès technologique. Les avancées dans la connaissance de la mécanique de la rupture permettent aujourd'hui et plus précisément depuis le milieu du 20^e siècle, de mieux prévenir le risque de rupture.

Cependant, beaucoup de mécanismes de rupture sont encore mal connus notamment lorsqu'on utilise de nouveaux matériaux ou de nouveaux procédés.

On distingue deux catégories de rupture des structures :

Soit une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure

Soit l'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue.

Un exemple de rupture par fatigue, l'accident du Boeing 737 de la compagnie Aloha Airlines en 1988 (Fig. A). L'enquête a révélé que la rupture soudaine d'un grand nombre de fissures initiées dans une rangée de fixations (phénomène de la multifissuration) était à l'origine de cet accident.

Le présent travail consiste à trouver les paramètres mécaniques influents sur la fissure. Dans ces calculs, nous considérons des structures bidimensionnelles et nous supposerons le comportement linéaire de ces dernières, vu que dans la plupart des cas pratiques, elles travaillent dans le domaine élastique. Nous nous intéresserons particulièrement au calcul du facteur d'intensité de contrainte.

Deux principales méthodes numériques sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de structures en mécanique : la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales de frontière (la Méthode des discontinuités de déplacements). C'est celle la qui est adoptée pour notre étude.



Fig. A. Accident du Boeing 737 d'Aloha Airlines (avril 1988)

L'objectif du présent travail est la mise au point d'un code de calcul basé sur la méthode des discontinuités de déplacements pour l'étude de milieux multi-fissurés.

Nous avons décomposé notre document en 3 parties :

La première partie est une introduction à la mécanique de la rupture.

La deuxième partie, on présente la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel.

Enfin, la troisième partie est consacrée à l'organisation du programme qui traite ces problèmes et comporte les exemples traités.

Chapitre I

Notion sur la Mécanique de la Rupture

CHAPITRE I

Notions sur la Mécanique de la Rupture

I.1. INTRODUCTION.

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d'une fissure. Il est également possible d'aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré[5,7].

On constate deux approches d'analyse utilisées en mécanique de la rupture :

1. L'analyse du champ des contraintes en tête de fissure, c'est l'approche par les facteurs d'intensité de contraintes dite «approche locale».
2. L'analyse énergétique proposée par « GRIFFITH 1920 » [7] qui procède par le calcul de l'énergie disponible pour la propagation de fissure dans la structure, cette énergie dépend du potentiel total du système « le taux de restitution d'énergie ».

Les premiers travaux réalisés en mécanique de la rupture visaient à établir, de façon précise, les champs mécaniques au voisinage d'une fissure statique. La difficulté d'une telle étude réside dans la prise en compte de la singularité introduite par la pointe d'une fissure. Le calcul précis de paramètres mécaniques tels que les facteurs d'intensité des contraintes, ou le taux de restitution d'énergie réside en grande partie dans la bonne prise en compte de cette singularité.

Dans ce chapitre on va définir des notions et des hypothèses sur la mécanique linéaire de la rupture. On définit les modes régissant les cinétiques des fissures en trois dimensions et sur les équations concernant le champ de déformations et de contraintes au voisinage du front de fissure. On met en évidence la notion des facteurs d'intensité de contraintes K et le taux de restitution d'énergie G . Dans le présent mémoire, le facteur d'intensité de contrainte sera le paramètre pris dans la simulation.

I.2. NOTIONS PRELIMINAIRES SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE.

I.2.1. NOTIONS & HYPOTHESES.

Considérant une fissure plane ayant un front rectiligne. Celle-ci correspond à une discontinuité de déplacement. Nous formulons trois hypothèses importantes :

- 1- Le matériau est supposé homogène et isotrope, avec un comportement élastique linéaire.
- 2- On néglige les forces de volume et les accélérations (la rupture est supposée statique).
- 3- On se restreint aux problèmes plans (bidimensionnels).

I.2.2. MODES DE RUPTURE.

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants :

- Mode I ouverture : La sollicitation est perpendiculaire au plan de la fissure (Fig. I.1a). Ce mode est souvent le plus dangereux.
- Mode II cisaillement plan : La sollicitation est un cisaillement dans le plan de la fissure dont l'action est perpendiculaire au front de la fissure (Fig. I.1b).
- Mode III cisaillement anti-plan : La sollicitation est un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle au front de la fissure (Fig. I.1c)

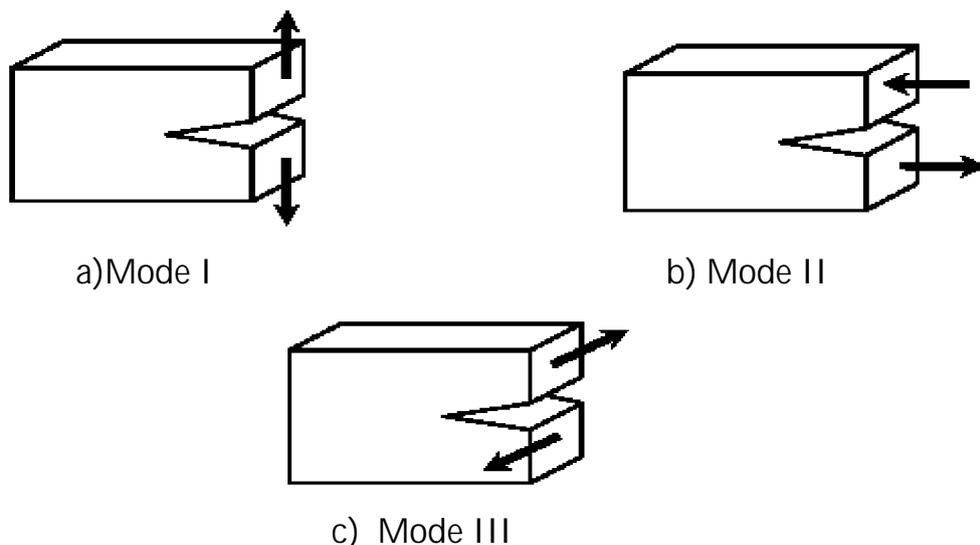


Fig. I.1. Modes fondamentaux de rupture.

I.2.3. Etude d'un milieu élastique fissuré

Dans un milieu élastique fissuré, la région proche de la pointe de fissure peut être décomposée en trois zones [7] :

1. La zone d'élaboration : au voisinage direct de la pointe de fissure, l'étude de cette zone (considérée comme ponctuelle d'un point de vue mécanique) est très complexe dans la mesure où les contraintes tendent vers l'infini (d'un point de vue théorique) à la pointe de fissure ;

2. La zone singulière : dans cette zone, le champ de contrainte présente une singularité en $\frac{1}{\sqrt{r}}$

3. La zone des champs lointains : extérieure aux deux précédentes, elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites de chargement et déplacement.

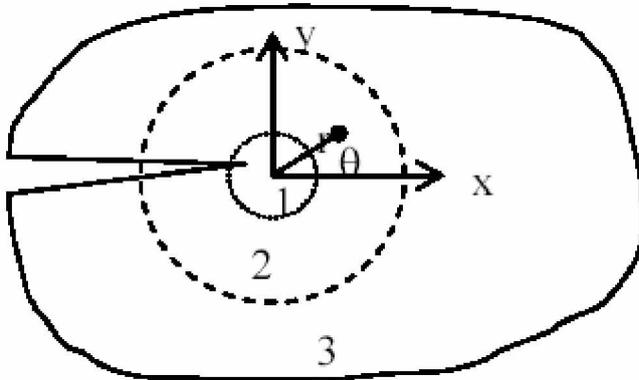


Figure I. 2 Les zones de champs mécaniques

I.2.4. CHAMP DE CONTRAINTES ET DE DEPLACEMENTS AU BOUT DE LA FISSURE.

Ces contraintes au voisinage du front de fissure ont été données par Barthélémy [8] à l'aide de la théorie de l'élasticité.

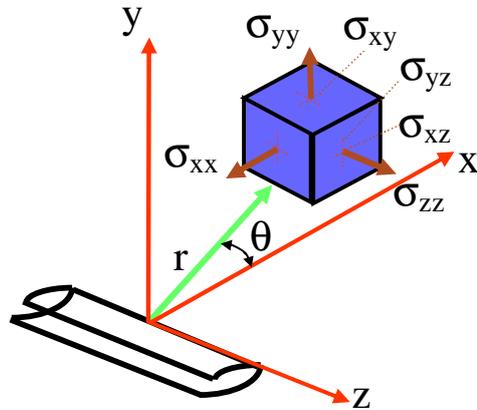


Fig. I.3. Champ de contraintes et de déplacements au voisinage de la tête de fissure.

- Mode I :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad , \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \\
 U_x &= \frac{K_I}{G'} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\
 U_y &= \frac{K_I}{G'} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu - \cos^2 \frac{3\theta}{2} \right] \\
 U_z &= 0 \quad (\text{déformation plane}).
 \end{aligned} \tag{I.1}$$

- Mode II :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_{zz} &= \nu (\sigma_x - \sigma_y) \quad , \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \\
 U_x &= \frac{K_{II}}{G'} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 U_y &= \frac{K_{II}}{G'} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 U_z &= 0 \quad (\text{déformation plane}).
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

- Mode III :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad , \quad \sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\
 \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \\
 U_z &= \frac{K_{III}}{G'} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\
 U_x &= U_y = 0
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

ν est le coefficient de Poisson et G' est le module de cisaillement.

$$\text{Avec } G' = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Les facteurs K_I , K_{II} et K_{III} sont exprimés en $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$. Ils sont appelés facteurs d'intensité de contraintes. Ces paramètres dépendent uniquement des conditions de chargement et de géométrie.

I.3. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE (APPROCHE LOCALE).

Les facteurs d'intensité de contrainte caractérisent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure. Ils sont proportionnels aux discontinuités des déplacements des lèvres de la fissure, et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs et de la géométrie de la fissure.

Les facteurs d'intensité de contrainte de fissure sont donnés par [5] :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_y] \right) \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yx} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_x] \right) \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yz} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_z] \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Où $[U_i] = U^+ - U^-$ est la discontinuité du champ de déplacement représentée sur la figure ci-dessous

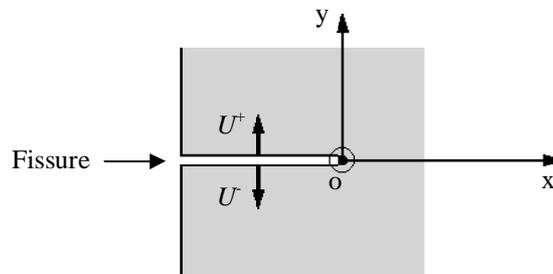


Figure I. 4 Notations pour une fissure en bidimensionnel

I.4. THEORIE ENERGETIQUE DE GRIFFITH (APPROCHE GLOBALE).

La propagation de fissure est un phénomène dissipateur d'énergie. Dans la théorie de Griffith, l'énergie consommée est la différence entre l'état énergétique du système avant et après fissuration. Cette énergie peut s'assimiler à une énergie de surface.

On considère un système fermé n'échange ni chaleur ni travail avec l'extérieur constitué par la pièce fissurée et les forces qui lui sont appliquées. On suppose toujours que le matériau a un comportement élastique linéaire. L'énergie constante de ce système comprend l'énergie potentielle des forces appliquées, U , l'énergie élastique emmagasinée, E , l'énergie de surface $2A\gamma_S$ où A est

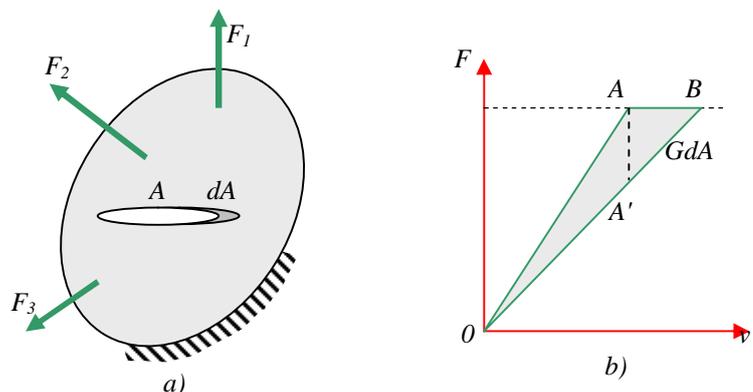


Fig. I.5. Taux de libération d'énergie.

la surface de la fissure qui comporte deux lèvres, γ_s est un paramètre intrinsèque au matériaux et enfin, éventuellement l'énergie cinétique W_C . Le premier principe indique que :

$$dU + dE + d(2A)\gamma_s + dW_C = 0 \quad (1.5)$$

Nous posons $dP = dU + dE$, P désignant l'énergie potentielle totale $U + E$. la relation précédente devient :

$$dP + 2\gamma_s dA + dW_C = 0 \quad (1.6)$$

G est défini par : $G = -\frac{\partial P}{\partial A}$, soit encore :

$$G = 2\gamma_s + \frac{dW_C}{dA} \quad (1.7)$$

$$\text{A l'équilibre, au repos, } dW_C = 0 \quad \text{donc : } G = G_C = 2\gamma_s \quad (1.8)$$

Si G dépasse le seuil critique G_C , la fissure se propage. C'est le critère de propagation de Griffith.

On va maintenant calculer G en fonction de champs de déplacements et de contraintes sur les frontières du domaine fissuré.

Considérons le problème plan en élasticité linéaire. On impose sur la frontière Ω_T du domaine fissuré, des forces surfaciques T_i , et sur la partie complémentaire Ω_U , les déplacements u_i .

G s'écrit sous la forme[5] :

$$G = -\frac{\partial W_C}{\partial A} + \int_{\Omega_T} T_i \frac{du_i}{dA} d\Gamma \quad (1.9)$$

Appliquons le principe des travaux virtuels (ici à des déplacements réels) à W_C en négligeant les effets dynamiques :

$$\frac{\partial W_C}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega_U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(T_i \frac{du_i}{dA} + u_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (1.10)$$

$$\text{D'où : } G = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(T_i \frac{du_i}{dA} - u_i \frac{dT_i}{dA} \right) d\Gamma \quad (1.11)$$

I.5. RELATION ENTRE G ET K.

Le facteur d'intensité des contraintes décrit la distribution des contraintes et des déformations près d'une fissure. Il est intuitif de penser que le taux de libération d'énergie,

G_I sera une grandeur très sensible à la singularité des contraintes. Nous allons montrer qu'en fait les deux quantités K et G sont liés [7].

Quand la fissure se propage dans sa propre direction, le taux de restitution d'énergie est donné par sa forme générale [7]:

$$* \text{ En déformation plane : } G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (I.12)$$

$$* \text{ En contrainte plane : } G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (I.13)$$

Ces deux relations ne sont valables que dans le cas où la fissure se propage dans son propre plan.

Dans la suite du travail, malgré l'intérêt que présente la formulation énergétique, le code de calcul que nous développons est basé sur le facteur d'intensité de contrainte. Ceci est justifié par le caractère de l'étude qui concerne les milieux multi-fissurés.

Chapitre II

La Méthode de discontinuité de Déplacement

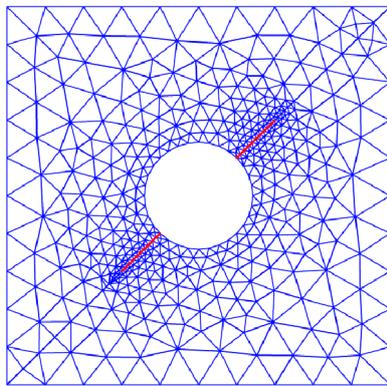
CHAPITRE II

Méthode de Discontinuité de Déplacement

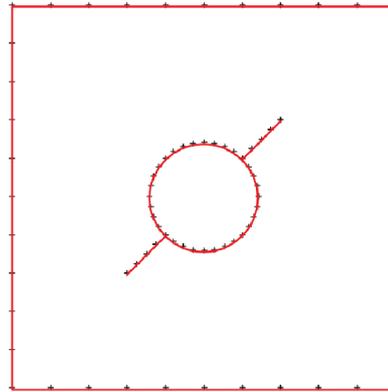
II.1. INTRODUCTION.

Pour approcher les solutions analytiques aux problèmes de mécanique des solides, mécanique des fluides, celle de la rupture, l'élastostatique et autres, souvent difficiles à déterminer par une résolution directe des équations différentielles, plusieurs méthodes numériques ont été mises en place l'une de ces méthodes est la Méthode des Equations Intégrales de Frontières (BEM).

Contrairement de la méthode des éléments finis (MEF) qui nécessite une discrétisation totale du domaine en éléments, qui devient très compliqué lorsqu'il s'agit d'un domaine infini, la BEM se limite seulement à une discrétisation de la frontière (Fig. II.1).



a) MEF



b) BEM

Fig. II.1. Méthode de discrétisation

Historiquement, la méthode des éléments de frontières appelée aussi méthode des équations intégrales a été développée de deux manières distinctes. L'une des deux est une approche plus mathématique. Elle est basée sur certains théorèmes fondamentaux qui relient directement les inconnues du contour aux conditions limites. Cette approche est appelée la Méthode des Equations Intégrales Directes. L'autre approche est une approche

physique et consiste à chercher d'abord la valeur des singularités, placées tout au long du contour discrétisé en segments de droites, et de là, calculer les paramètres aux limites désirés, cette approche est appelée la Méthode des Equations Intégrales Indirectes (la Méthode des discontinuités de déplacements).

Cette méthode (MDD) a été développée par « Crouch (1976 & 1983) » [2, 9].

II.2. PRINCIPE DE LA METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT (MDD).

Une discontinuité de déplacement peut être assimilée comme étant une fissure droite (rectiligne) composée de deux surfaces (lèvres) disjointes, se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre

La méthode de discontinuité de déplacement est basée sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité de déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini. Elle consiste à diviser le segment de droite en une série de N éléments reliés les uns aux autres. Ainsi, connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donné, en sommant les effets de tous les éléments.

II.3. PROCEDURE DE LA MDD DANS UN SOLIDE INFINI.

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite dans le plan x, y d'un solide infini est spécifié par la condition que le déplacement soit continu partout sauf sur le segment en question (soit la partie $-a < x < a$, pour $y=0$) (voir Fig. II.2).

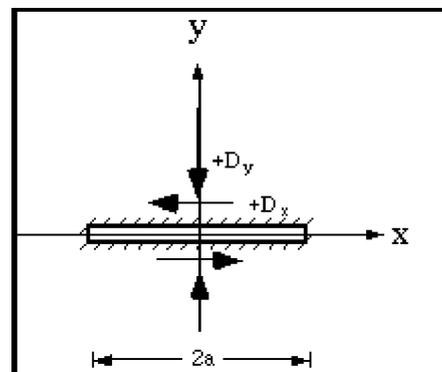


Fig. II.2. Discontinuité de déplacement

Si on considère ce segment comme une fissure droite on peut distinguer ses deux surfaces en disant que l'une des surfaces est sur le côté positif de $y = 0$, noté $y = 0^+$ et que l'autre est sur le côté négatif de $y = 0$, noté $y = 0^-$.

On définit la discontinuité de déplacement $D_i = (D_x, D_y)$ comme la différence de déplacement entre les deux côtés du segment :

$$D_i = U_i(x, 0^-) - U_i(x, 0^+) \quad (11.1)$$

$$\text{Ou} \quad \begin{cases} D_x = U_x(x, 0^-) - U_x(x, 0^+) \\ D_y = U_y(x, 0^-) - U_y(x, 0^+) \end{cases} \quad (11.2)$$

La solution du problème posé en contraintes et en déplacements est donnée par Crouch (1976) [9] :

$$\begin{aligned} U_x &= D_x [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,xx}] + D_y [-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] \\ U_y &= D_x [(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy}] + D_y [2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,yy}] \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G' D_x [2f_{,xy} + yf_{,xyy}] + 2G' D_y [f_{,yy} + yf_{,yyy}] \\ \sigma_{yy} &= 2G' D_x [-yf_{,xyy}] + 2G' D_y [f_{,yy} - yf_{,yyy}] \\ \sigma_{xy} &= 2G' D_x [f_{,yy} + yf_{,yyy}] + 2G' D_y [-yf_{,xyy}] \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\text{Avec : } G' = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)}$$

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (11.5)$$

Ces équations forment la base de la méthode de discontinuité de déplacement.

Les dérivées de fonction $f(x, y)$ dans les équations (11.3) et (11.4) sont obtenues directement à partir de l'équation (11.5).

Les dérivées de f définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 f_{,x} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \sqrt{[(x-a)^2 + (y)^2]} - \ln \sqrt{[(x+a)^2 + (y)^2]} \right] \\
 f_{,y} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\arctan \frac{y}{(x-a)} - \arctan \frac{y}{(x+a)} \right] \\
 f_{,xy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\
 f_{,xx} = f_{,yy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{-y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{-y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right] \\
 f_{,yyy} &= \frac{2y}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right] \\
 f_{,xyy} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-a)^2 - y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right]
 \end{aligned} \tag{11.6}$$

Les déplacements le long de la droite $y = 0$ sont :

$$\begin{aligned}
 U_x &= \frac{-1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 U_y &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right]
 \end{aligned} \tag{11.7}$$

Les valeurs des limites des termes en arctangent sont les suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, \quad y = 0 \\ +\pi & |x| < a, \quad y = 0^+ \\ -\pi & |x| < a, \quad y = 0^- \end{cases} \tag{11.8}$$

On peut considérer trois cas pour évaluer les déplacements le long de la ligne $y = 0$:

1) $|x| > a$ et $y = 0$

$$\begin{aligned}
 U_x(x,0) &= -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\
 U_y(x,0) &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|
 \end{aligned} \tag{11.9}$$

2) $|x| < a$ et $y = 0^+$

$$\begin{aligned} U_x(x, 0^+) &= -\frac{1}{2}D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x, 0^+) &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2}D_y \end{aligned} \quad (II.10)$$

3) $|x| < a$ et $y = 0^-$

$$\begin{aligned} U_x(x, 0^-) &= \frac{1}{2}D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x, 0^-) &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2}D_y \end{aligned} \quad (II.11)$$

Les déplacements U_x et U_y sont continus pour $|x| > a$ et $y = 0$, mais ont une discontinuité constante $+D_x$ et $+D_y$ pour $|x| < a$, les contraintes le long de la ligne $y = 0$, d'après l'équation (II.4) peuvent être évaluées comme suite :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, 0) &= -\frac{G'}{2\pi(1-\nu)}D_y \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = -\frac{aG'}{\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{yy}(x, 0) &= -\frac{aG'}{\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= -\frac{aG'}{\pi(1-\nu)}D_x \frac{1}{x^2 - a^2} \end{aligned} \quad (II.12)$$

Les contraintes sont continues partout sur $y = 0$ sauf pour $x = \pm a$ où on note une discontinuité et une singularité due à la présence du terme $1/(x^2 - a^2)$.

II.4. PROCEDURE NUMERIQUE.

Comme nous l'avons dit précédemment, la M.D.D est construite à partir d'une solution analytique qui exprime les déplacements et les contraintes d'une discontinuité constante dans un milieu élastique infini.

Le principe de la procédure et de discrétiser une ligne de courbure quelconque en N éléments, parfaitement reliés les uns aux autres ; comme schématisé sur la figure (Fig. II.3). La longueur de chacun de ces segments est notée par $2a'$

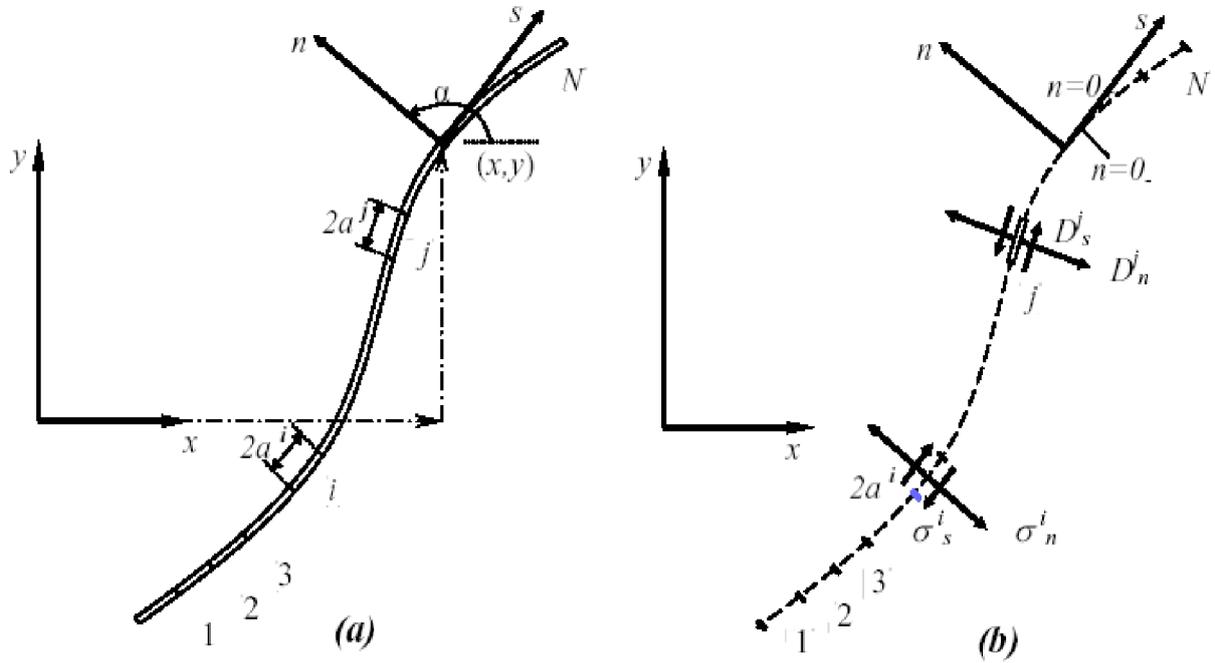


Fig. II.3 Représentation d'une fissure quelconque en N segments

Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local s, n comme le montre la figure (Fig. II.3.b) de l'élément j et dont les composantes D_s^j et D_n^j sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} D_s^j &= U_s^- - U_s^+ \\ D_n^j &= U_n^- - U_n^+ \end{aligned} \tag{II.13}$$

Où : U_s^j et U_n^j sont les déplacements normaux et tangentiels de l'élément j .

Les contraintes normales et tangentielles au milieu de l'élément i peuvent être exprimées en fonction des composantes de discontinuité de déplacement de l'élément j comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i = 1, N \tag{II.14}$$

En utilisant le principe de superposition, et ainsi tenant compte de l'effet de N éléments (discontinuités) on obtient le champ de contraintes :

$$\begin{aligned}\sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j\end{aligned}\quad i = 1, N \quad (11.15)$$

de la même manière, on établit le champ de déplacements :

$$\begin{aligned}U_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ U_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j\end{aligned}\quad i = 1, N \quad (11.16)$$

ou : $A_{ss} \dots$ sont les coefficients d'influences relatifs aux contraintes sur la frontière et $B_{ss} \dots$ sont les coefficients d'influences relatifs aux déplacements sur la frontière.

En spécifiant les valeurs des contraintes σ_s^i et σ_n^i pour chaque élément, on aura alors un système de $2N$ équations linéaires à $2N$ inconnues, à savoir les composantes D_s^i et D_n^i des discontinuités de déplacements élémentaires. Une fois ces équations résolues, on peut exprimer les contraintes et les déplacements en chaque point du domaine par d'autres combinaisons linéaires des discontinuités de déplacements en utilisant la même procédure que précédemment.

(*) Il faut noter que la même procédure peut être suivie dans le cas où les éléments joints les uns aux autres forment un contour fermé (par exemple cas d'une cavité).

(*) Les conditions aux limites peuvent être en contraintes comme elles peuvent en déplacements ou les deux cas à la fois.

II.5. TRANSFORMATION DE COORDONNEES.

La méthode de discontinuité de déplacement est basée essentiellement sur la connaissance des coordonnées des points à étudier par rapport au repère local de chaque segment et l'orientation de ce repère par rapport au repère global.

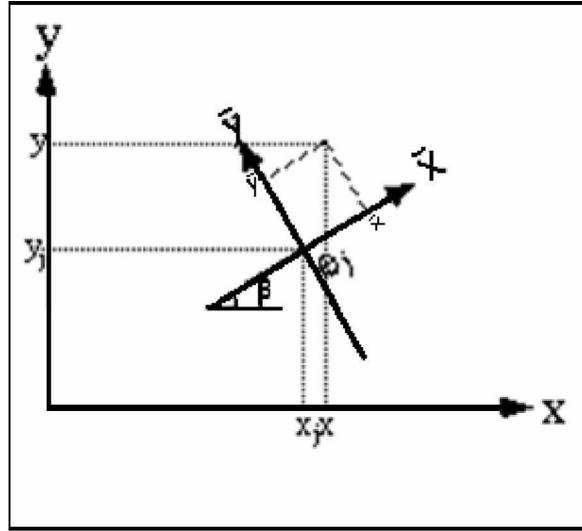


Fig. II.4. Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire.

Les expressions de transformation de coordonnées sont :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - x_j) \cos \beta + (y - y_j) \sin \beta \\ \bar{y} &= -(x - x_j) \sin \beta + (y - y_j) \cos \beta\end{aligned}\quad (11.17)$$

Les déplacements et les contraintes dans les systèmes de coordonnées locale sont retrouvés en remplaçant (x, y) par (\bar{x}, \bar{y}) dans les équations (11.3) et (11.4), avec :

$$\begin{aligned}f(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{F}_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{x}} = \bar{F}_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{y}} = \bar{F}_3(\bar{x}, \bar{y}) \\ f_{,\bar{x}\bar{y}} &= \bar{F}_4(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{x}\bar{x}} = -f_{,\bar{y}\bar{y}} = \bar{F}_5(\bar{x}, \bar{y}) \quad , \quad f_{,\bar{x}\bar{y}\bar{y}} = \bar{F}_6(\bar{x}, \bar{y}) \\ f_{,\bar{y}\bar{y}\bar{y}} &= \bar{F}_7(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}$$

Les coordonnées des déplacements et de contraintes dans le repère globale (x, y) de système, sont :

$$\begin{aligned}U_x &= D_{\bar{x}} \left[-(1-2\nu) \sin \beta \cdot \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \cdot \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \beta \cdot \bar{F}_4 - \cos \beta \cdot \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_{\bar{y}} \left[-(1-2\nu) \cos \beta \cdot \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \beta \cdot \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \cdot \bar{F}_4 + \sin \beta \cdot \bar{F}_5) \right] \\ U_y &= D_{\bar{x}} \left[(1-2\nu) \cos \beta \cdot \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \beta \cdot \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \beta \cdot \bar{F}_4 + \sin \beta \cdot \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_{\bar{y}} \left[-(1-2\nu) \sin \beta \cdot \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \cdot \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \beta \cdot \bar{F}_4 - \cos \beta \cdot \bar{F}_5) \right]\end{aligned}\quad (11.18)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= 2G' D_{\bar{x}} \left[2 \cos^2 \beta \cdot \bar{F}_4 + \sin 2\beta \cdot \bar{F}_5 + \bar{y} (\cos 2\beta \cdot \bar{F}_6 - \sin 2\beta \cdot \bar{F}_7) \right] \\
&\quad + 2G' D_{\bar{y}} \left[-\bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\beta \cdot \bar{F}_6 + \cos 2\beta \cdot \bar{F}_7) \right] \\
\sigma_{yy} &= 2G' D_{\bar{x}} \left[2 \sin^2 \beta \cdot \bar{F}_4 - \sin 2\beta \cdot \bar{F}_5 - \bar{y} (\cos 2\beta \cdot \bar{F}_6 - \sin 2\beta \cdot \bar{F}_7) \right] \\
&\quad + 2G' D_{\bar{y}} \left[-\bar{F}_5 - \bar{y} (\sin 2\beta \cdot \bar{F}_6 + \cos 2\beta \cdot \bar{F}_7) \right] \\
\sigma_{xy} &= 2G' D_{\bar{x}} \left[\sin 2\beta \cdot \bar{F}_4 - \cos 2\beta \cdot \bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\beta \cdot \bar{F}_6 + \cos 2\beta \cdot \bar{F}_7) \right] \\
&\quad + 2G' D_{\bar{y}} \left[-\bar{y} (\cos 2\beta \cdot \bar{F}_6 - \sin 2\beta \cdot \bar{F}_7) \right]
\end{aligned} \tag{II.19}$$

On peut utiliser ces équations pour calculer les coefficients d'influence de la MDD.

II.6. COEFFICIENTS D'INFLUENCE.

On considère un domaine infini contenant N segments de droites orientés dans des directions arbitraires par rapport au repère global (x,y) . On considère deux éléments distincts « i » et « j » reliés chacun à un repère local $\begin{pmatrix} x^i \\ y^i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x^j \\ y^j \end{pmatrix}$ respectivement, et orientés de β^i et β^j (Voir Fig. II.5).

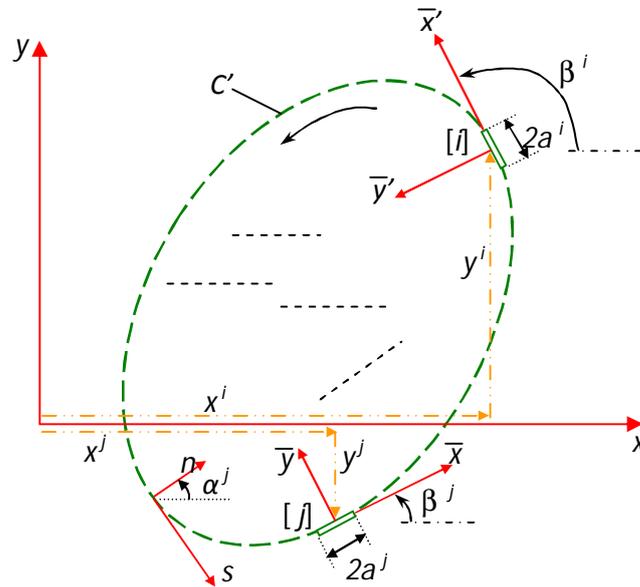


Fig. II.5. Position et orientation des éléments

En choisissant le point (x,y) comme étant le milieu de l'élément i , c'est-à-dire $x = x^i$ et $y = y^i$, on aura :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x^i - x^j) \cos \beta^j + (y^i - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x^i - x^j) \sin \beta^j + (y^i - y^j) \cos \beta^j\end{aligned}\quad (11.20)$$

Les deux repères locaux de l'élément i et l'élément j sont reliés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= \bar{x} \cos \gamma + \bar{y} \sin \gamma \\ \bar{y}' &= -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma\end{aligned}\quad (11.21)$$

Où $\gamma = \beta^i - \beta^j$ (orientation de l'élément j par rapport au l'élément i).

Les déplacements et les contraintes seront :

$$\begin{aligned}U_{\bar{x}'}^i &= U_{\bar{x}}^i \cos \gamma + U_{\bar{y}}^i \sin \gamma \\ U_{\bar{y}'}^i &= -U_{\bar{x}}^i \sin \gamma + U_{\bar{y}}^i \cos \gamma\end{aligned}\quad (11.22)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}'\bar{x}'}^i &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i \cos^2 \gamma + 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i \sin^2 \gamma \\ \sigma_{\bar{y}'\bar{y}'}^i &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i \sin^2 \gamma - 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i \cos^2 \gamma \\ \sigma_{\bar{x}'\bar{y}'}^i &= -\left(\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i\right) \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)\end{aligned}\quad (11.23)$$

On pose : $D_s^j = D_{\bar{x}}^j$, $D_n^j = D_{\bar{y}}^j$, $U_s^i = U_{\bar{x}'}^i$, $U_n^i = U_{\bar{y}'}^i$, $\sigma_s^i = \sigma_{\bar{x}'\bar{y}'}^i$ et $\sigma_n^i = \sigma_{\bar{y}'\bar{y}'}^i$

Donc :

$$\begin{aligned}U_s^i &= D_s^j \left[(1 - 2\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_3 - \bar{y} (\sin \gamma \cdot \bar{F}_4 + \cos \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_n^j \left[-(1 - 2\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \gamma \cdot \bar{F}_4 - \sin \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\ U_n^i &= D_s^j \left[(1 - 2\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_2 - 2(1 - \nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \gamma \cdot \bar{F}_4 - \sin \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_n^j \left[(1 - 2\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_2 + 2(1 - \nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_3 + \bar{y} (\sin \gamma \cdot \bar{F}_4 + \cos \gamma \cdot \bar{F}_5) \right]\end{aligned}\quad (11.24)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_s^i &= 2G' D_s^j \left[-\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \cdot \bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \\
&\quad + 2G' D_n^j \left[-\bar{y}(\cos 2\gamma \cdot \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \\
\sigma_n^i &= 2G' D_s^j \left[2\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \cdot \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\gamma \cdot \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \\
&\quad + 2G' D_n^j \left[-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right]
\end{aligned} \tag{II.25}$$

On peut écrire les équations (II.23) et (II.24) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
U_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\
U_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j
\end{aligned} \quad i = 1, N \tag{II.26}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\
\sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j
\end{aligned} \quad i = 1, N \tag{II.27}$$

Les coefficients d'influences sont donnés par :

$$\begin{aligned}
B_{ss}^{ij} &= \left[(1-2\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_3 - \bar{y}(\sin \gamma \cdot \bar{F}_4 + \cos \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\
B_{sn}^{ij} &= \left[-(1-2\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \cdot \bar{F}_4 - \sin \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\
B_{ns}^{ij} &= \left[(1-2\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_3 - \bar{y}(\cos \gamma \cdot \bar{F}_4 - \sin \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\
B_{nn}^{ij} &= \left[(1-2\nu) \sin \gamma \cdot \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \cdot \bar{F}_3 + \bar{y}(\sin \gamma \cdot \bar{F}_4 + \cos \gamma \cdot \bar{F}_5) \right] \\
A_{ss}^{ij} &= 2G' \left[-\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \cdot \bar{F}_5 - \bar{y}(\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \\
A_{sn}^{ij} &= 2G' \left[-\bar{y}(\cos 2\gamma \cdot \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \\
A_{ns}^{ij} &= 2G' \left[2\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \cdot \bar{F}_5 - \bar{y}(\cos 2\gamma \cdot \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right] \\
A_{nn}^{ij} &= 2G' \left[-\bar{F}_5 + \bar{y}(\sin 2\gamma \cdot \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \cdot \bar{F}_7) \right]
\end{aligned}$$

* Élément « auto-influence » :

Ils représentent l'influence d'une discontinuité de déplacement se trouvant sur l'élément i , sur les contraintes et les déplacements au milieu de ce même élément

Ces éléments sont obtenus en posant : $x'=0$, $y'=0$ et $\gamma = 0$.

Ce sont les termes diagonaux de la matrice des coefficients d'influences, sont données par :

$${}^{ii}B_{sn} = {}^{ii}B_{ns} = 0 \quad , \quad {}^{ii}B_{ss} = {}^{ii}B_{nn} = \pm \frac{1}{2} \quad \text{pour } \bar{y} = 0^{\pm}$$

$${}^{ii}A_{sn} = {}^{ii}A_{ns} = 0 \quad , \quad {}^{ii}A_{ss} = {}^{ii}A_{nn} = + \frac{G'}{\pi(1-\nu)a}$$

* Conditions de symétrie :

La symétrie pour un solide par rapport à un axe, n'est satisfaite que lorsque les propriétés élastiques, la configuration géométrique et les conditions aux limites de ce solide sont tous symétriques par rapport à cet axe.

L'utilisation de la symétrie pour la résolution des problèmes par la méthode des discontinuités de déplacement est d'une grande importance, quand on sait que le système d'équations est réduit de moitié dans le cas de la simple symétrie, et d'un quart dans le cas de la double symétrie.

Chapitre III
Exemples d'Illustrations

CHAPITRE III

EXEMPLES D'ILLUSTRATIONS

III.1. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre, on traite un nombre d'exemples en mécanique des solides qui peuvent être simulés numériquement par la méthode de discontinuité de déplacement (MDD) en bidimensionnel.

III.2. STRUCTURE DE PROGRAMME.

Notre programme est fait à l'aide du langage de programmation FORTRAN90. Le programme est constitué de deux parties :

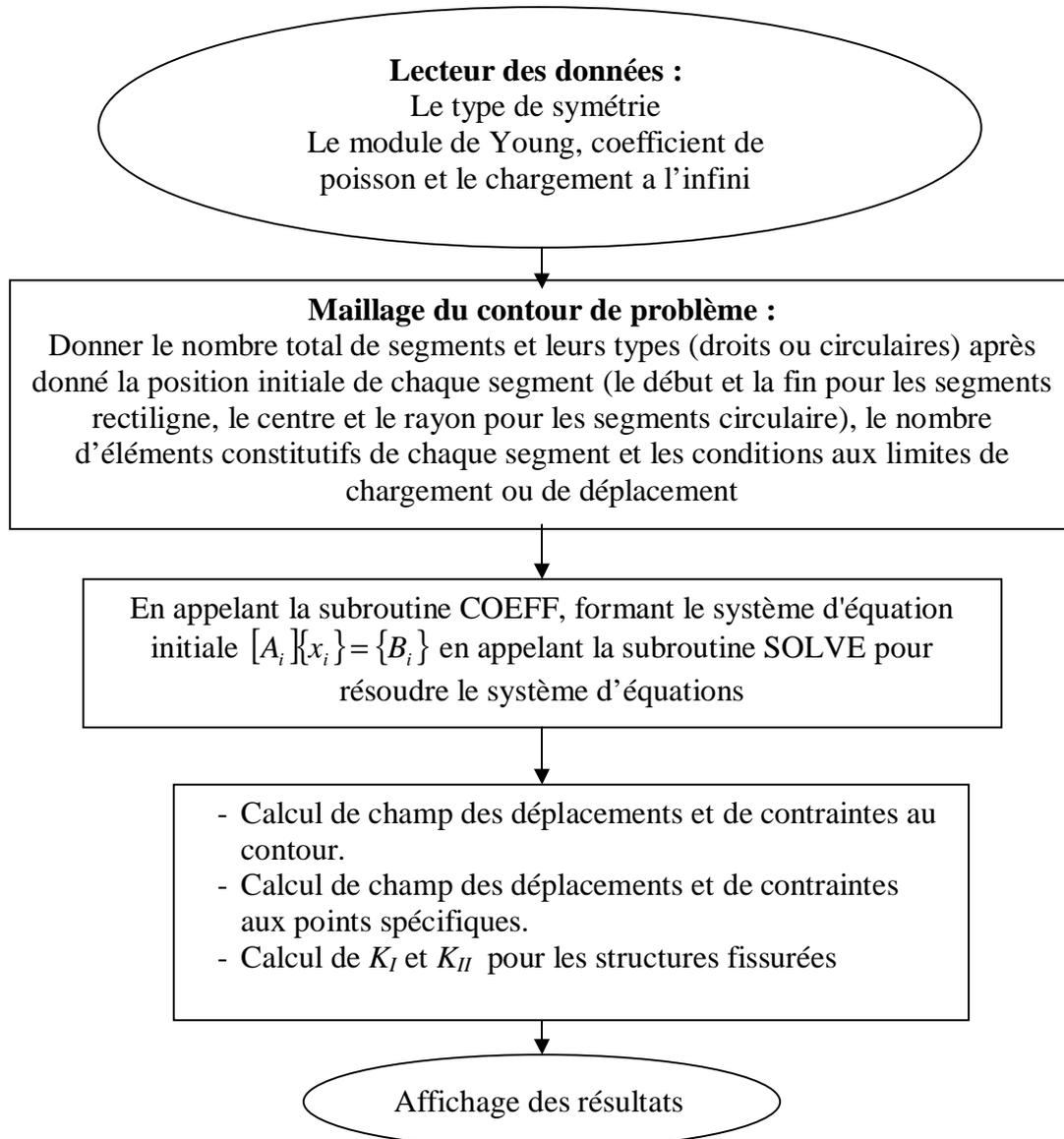
La 1^{ère} Partie du programme qui comporte la lecture des principales données : les caractéristiques mécaniques, le chargement, le raffinement des segments, et le positionnement du problème. Il discrétise le corps à étudier et il affecte à chaque élément sa position, son orientation et ses conditions aux limites.

La 2^{ème} Partie est la partie principale de la méthode MDD. Il récupère les données à partir de la localisation et il calcule les coefficients d'influences entre chaque couple d'éléments de la frontière du corps en appelant à la sous-routine *COEFF*. Il construit le système algébrique d'équations pour le résoudre par la sous-routine *SOLVE* pour obtenir les composantes de discontinuité de déplacement de chaque élément. Finalement cette partie calcule le champ de contraintes et de déplacements pour chaque élément de frontière. Enfin, le facteur d'intensité de contrainte peut être calculé. Il est basé sur les relations obtenues au chapitre I, soit

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_y] \right) = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r_o}} D_n \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yx} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_x] \right) = \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r_o}} D_s
 \end{aligned}
 \tag{III.1}$$

r_o est obtenue à partir du centre du dernier élément de la pointe de la fissure

On a construit la structure du code de calcul comme il est mentionné sur la figure suivante :



III.3. EXEMPLES TRAITES.

Pour pouvoir faire une comparaison des résultats obtenus par notre code de calcul, on traite des exemples étudié par Y.Z.Chen. 2003, in (Multiple Crack Problems in Elasticity) [6], par la méthode (Fredholm integral equation)

Notation :

K_{Ig} , K_{IIg} : les facteurs d'intensité de contraintes à gauche de la fissure

K_{Id} , K_{IId} : les facteurs d'intensité de contrainte à droite de la fissure

K_{I^*g} , K_{II^*g} , K_{I^*d} , K_{II^*d} : les facteurs d'intensité de contraintes obtenue

Par (Y.Z.Chen)

EXEMPLE 01 :

On considère dans cet exemple un problème de deux fissures dans un domaine infini comme l'indique la figure (Fig.III.1).

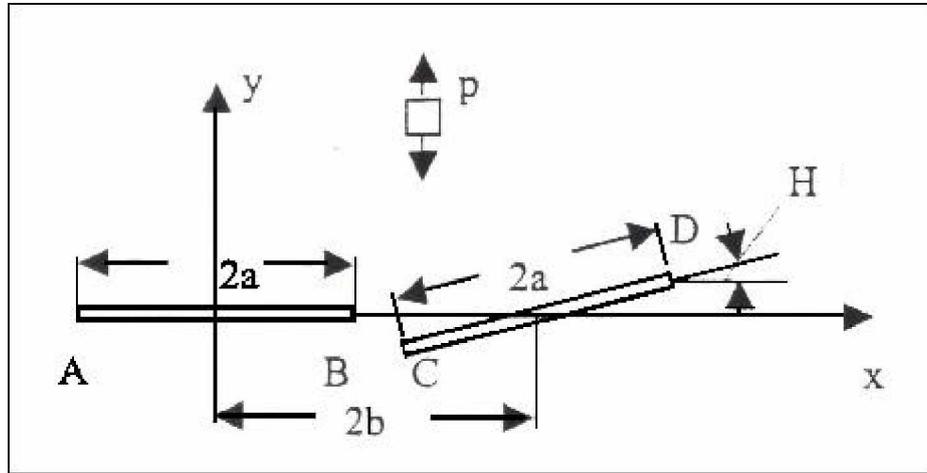


Fig.III.1 Exemple de deux fissures

On note par $2a$ la longueur de la fissure, $2b$ la distance entre les centres des deux fissures et H l'angle qui fait la deuxième fissure avec le plan horizontal.

Pour le calcul numérique on prend $a=0.9mm$, $b=1mm$, $P=\sigma =100MPa$, $E=70000MPa$ et $\nu=0.3$.

On fait varier l'angle H de 0 à 90° . Le (tableau.III.1) donne les facteurs d'intensité de contraintes de la deuxième fissure.

Tableau.III.1 Variation de K en fonction de H

H	KI*g	KIg	dif	KI*d	KId	dif	KII*g	KIIg	dif	KII*d	KIIId	dif
0	1,4513	1,2992	10,49	1,1171	0,9971	10,75	0	0	0	0	0	0
10	1,4896	1,3464	9,62	1,0925	0,9792	10,38	0,1074	0,0965	10,2	0,1649	0,1469	10,95
20	1,3007	1,1728	9,84	1,0032	0,8978	10,51	0,3918	0,3465	11,57	0,3254	0,2888	11,26
30	1,0238	0,9219	9,96	0,8567	0,7644	10,79	0,5589	0,4936	11,7	0,4481	0,3962	11,59
40	0,7556	0,6781	10,27	0,6768	0,603	10,92	0,6201	0,5511	11,14	0,5136	0,4549	11,44
50	0,5143	0,4628	10,03	0,4867	0,4353	10,58	0,6006	0,534	11,11	0,5147	0,4559	11,44
60	0,3105	0,2793	10,07	0,3087	0,2758	10,68	0,515	0,4568	11,31	0,4523	0,3999	11,6
70	0,1559	0,142	8,98	0,163	0,1474	9,61	0,3771	0,3359	10,95	0,3338	0,2962	11,29
80	0,0604	0,0577	4,52	0,0604	0,0625	-3,4	0,2034	0,1843	9,43	0,1727	0,1555	10
90	0,0303	0,03	1,15	0,0303	0,03	1,15	0,0132	0,0126	4,64	-0,0132	-0,0126	4,64

Les figures (Fig.III. 2) et (Fig.III. 3) représentent la variation de K en fonction de l'angle H

Dans la suite des exemples, nous utilisons les termes adimensionnels définis par l'équation III.2

$$K = \frac{K_i}{p\sqrt{\pi a}}$$

III.2

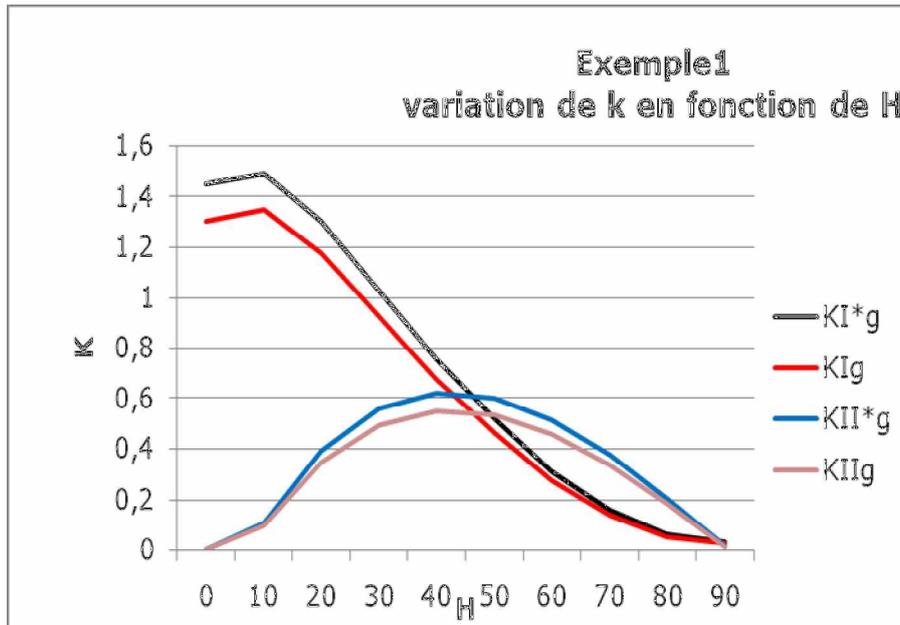


Fig.III.2 Variation de KIg en fonction de H

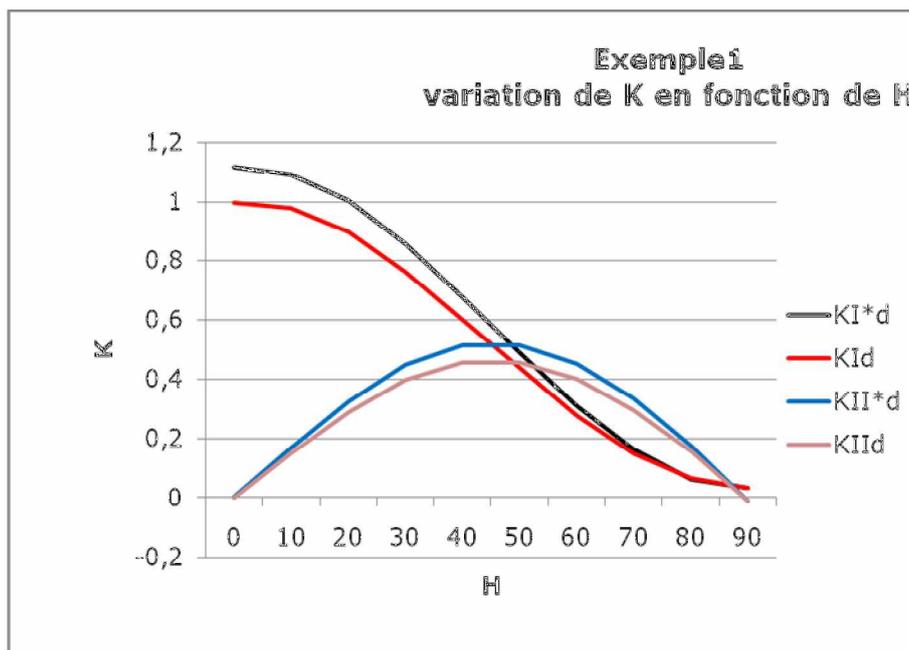


Fig.III. 3 Variation de KIId en fonction de H

On constate que les résultats obtenus par notre code de calcul est très proche des résultats de notre source [6]. Les résultats obtenus sont très satisfaisants.

EXEMPLE 02 :

Considérons un domaine infini contenant 25 fissures comme l'indique la figure(Fig.III.4) soumis à un effort de traction uniforme

On a 5 fissures horizontales de longueur $2a$

5 fissures orientées d'un angle 15° de longueur $3.2a$

5 fissures orientées d'un angle -15° de longueur $3.2a$

5 fissures orientées d'un angle 30° de longueur $2a$

5 fissures orientées d'un angle -30° de longueur $2a$

L'axe des abscisses $X=0$ est un axe symétrie de structure

On prend $a=1\text{mm}$, $P=\sigma =100\text{MPa}$, $E=70000\text{MPa}$ et $\nu=0.3$.

Le (tableau.III.2) donne les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes.

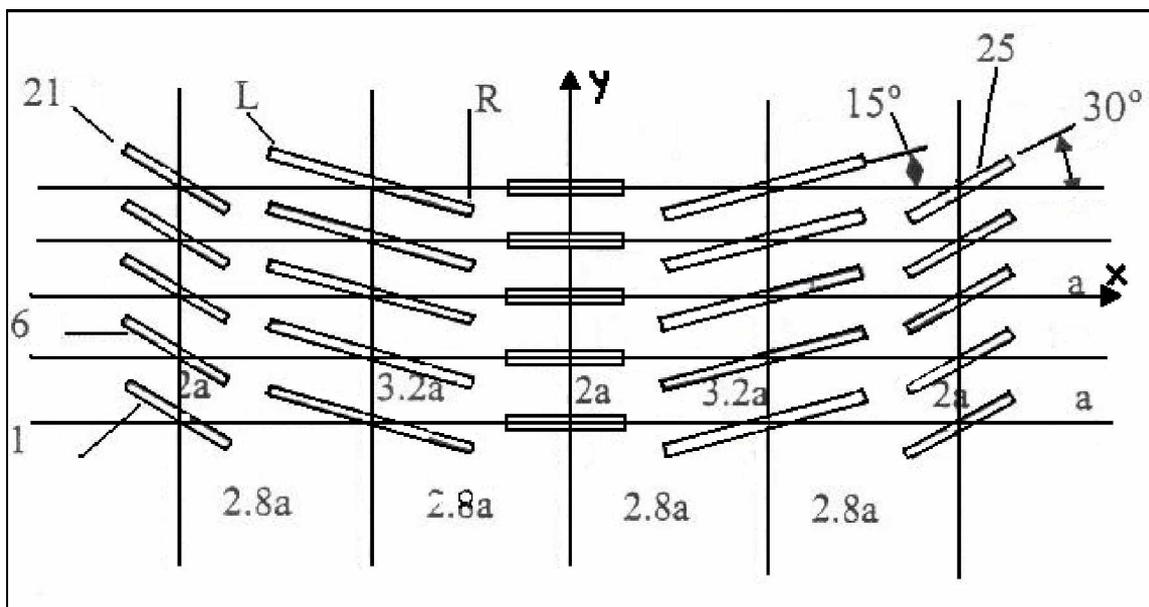


Fig.III. 4 Exemple de 25 fissures

Tableau .III.2 Variation de K selon la répartition des fissures

J	KI*g	KIg	dif	KI*d	KId	dif	KII*g	KIIg	dif	KII*d	KIIId	dif
1	0,5767	0,507	12,09	0,7412	0,6412	13,51	-	-0,457	12,2	-0,502	-0,439	12,59
2	0,9135	0,8048	11,91	0,9684	0,8468	12,56	-0,483	-0,43	11,04	-0,195	-0,173	11,5
3	1,4784	1,2966	12,31	1,4784	1,2966	12,31	-0,062	-0,055	11,24	0,062	0,0551	11,52
4	0,9684	0,8468	12,56	0,9135	0,8048	11,91	0,195	0,1726	11,5	0,483	0,4297	11,06
5	0,7412	0,6412	13,51	0,5767	0,507	12,09	0,5016	0,4385	12,59	0,52	0,4568	12,2
6	0,4934	0,4181	15,28	0,6141	0,5203	15,28	-0,44	-0,383	12,99	-0,57	-0,497	12,84
7	0,7448	0,6441	13,53	0,9611	0,8446	12,13	-0,342	-0,303	11,4	-0,357	-0,311	12,83
8	1,2931	1,1132	13,92	1,2931	1,1132	13,92	0,0463	0,0429	7,53	-0,046	-0,043	7,53
9	0,9611	0,8446	12,13	0,7448	0,6441	13,53	0,3568	0,3111	12,83	0,343	0,3031	11,58
10	0,6141	0,5203	15,28	0,4934	0,4181	15,28	0,5701	0,497	12,84	0,441	0,3829	13,09
11	0,5447	0,4667	14,34	0,728	0,6277	13,79	-0,439	-0,382	13,1	-0,575	-0,5	13,06
12	0,7531	0,6562	12,88	0,967	0,8482	12,3	-0,308	-0,271	12,06	-0,311	-0,269	13,55
13	1,2866	1,1085	13,85	1,2866	1,1085	13,85	0,0456	0,0403	11,79	-0,046	-0,04	11,79
14	0,967	0,8482	12,3	0,7531	0,6562	12,88	0,3112	0,2691	13,55	0,309	0,2709	12,29
15	0,728	0,6277	13,79	0,5447	0,4667	14,34	0,5747	0,4997	13,06	0,44	0,3816	13,22
16	0,5865	0,4995	14,85	0,742	0,6392	13,87	-0,409	-0,351	14,21	-0,526	-0,452	14,06
17	0,6853	0,5907	13,81	0,949	0,8309	12,46	-0,29	-0,252	13,03	-0,268	-0,227	15,36
18	1,3167	1,1417	13,3	1,3167	1,1417	13,3	0,0235	0,0217	8,02	-0,024	-0,022	8,02
19	0,949	0,8309	12,46	0,6853	0,5907	13,81	0,2678	0,2267	15,36	0,291	0,2523	13,27
20	0,742	0,6392	13,87	0,5865	0,4995	14,85	0,5256	0,4518	14,06	0,41	0,351	14,35
21	1,0081	0,8887	11,86	0,8846	0,7874	11	-0,315	-0,274	13,03	-0,612	-0,534	12,73
22	0,8419	0,7405	12,06	1,0693	0,9512	11,05	-0,149	-0,131	12,42	-0,369	-0,317	14,06
23	1,189	1,0237	13,91	1,189	1,0237	13,91	0,1394	0,1257	9,87	-0,139	-0,126	9,87
24	1,0693	0,9512	11,05	0,8419	0,7405	12,06	0,3689	0,3171	14,06	0,15	0,1306	12,88
25	0,8846	0,7874	11	1,0081	0,8887	11,86	0,6121	0,5342	12,73	0,316	0,274	13,19

Les figures (Fig.III. 5) et (Fig.III. 6) représentent la variation de K selon la répartition des fissures

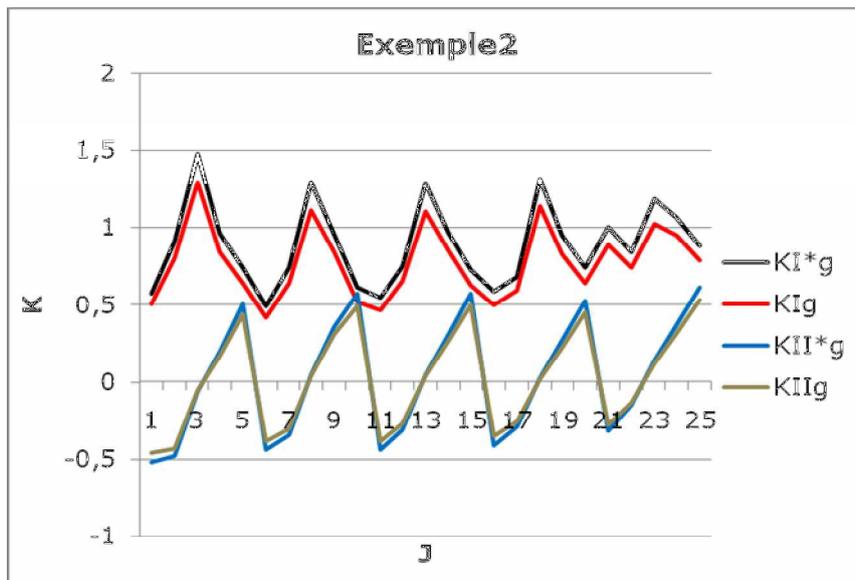


Fig.III. 5 Variation de KIg selon la répartition des fissures

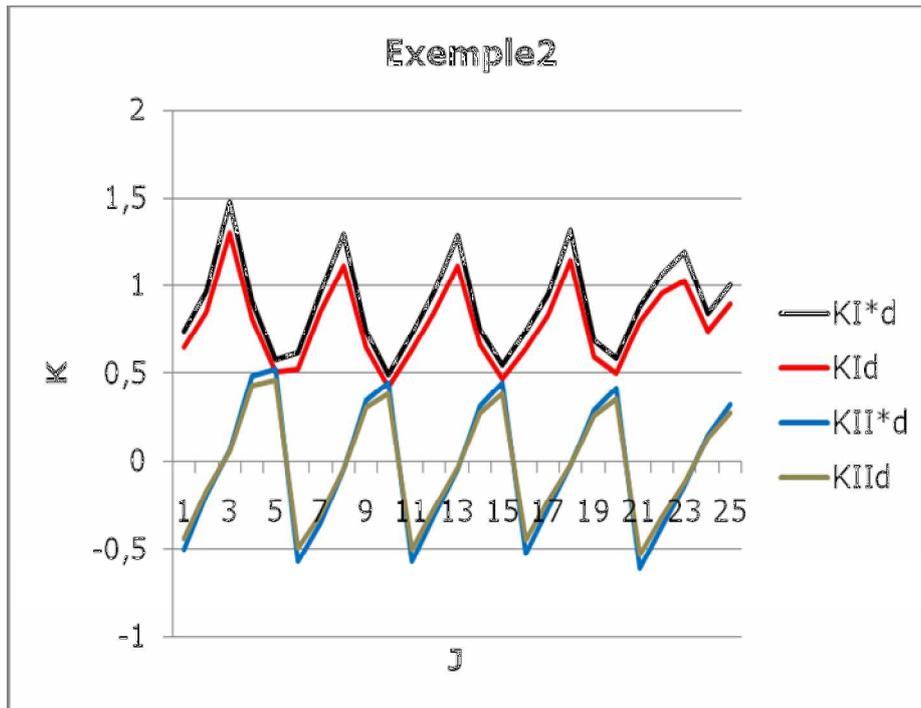


Fig.III. 6 Variation de KIId selon la répartition des fissures

Les deux résultats sont très proche se qui montre la performance de notre code de calcule

EXEMPLE 03 :

L'exemple suivant concerne un problème de deux fissures dans un domaine infini comme l'indique la figure (Fig.III.7). La première fissure horizontale est de longueur $2a$ et la deuxième fissure est orientée d'un angle H

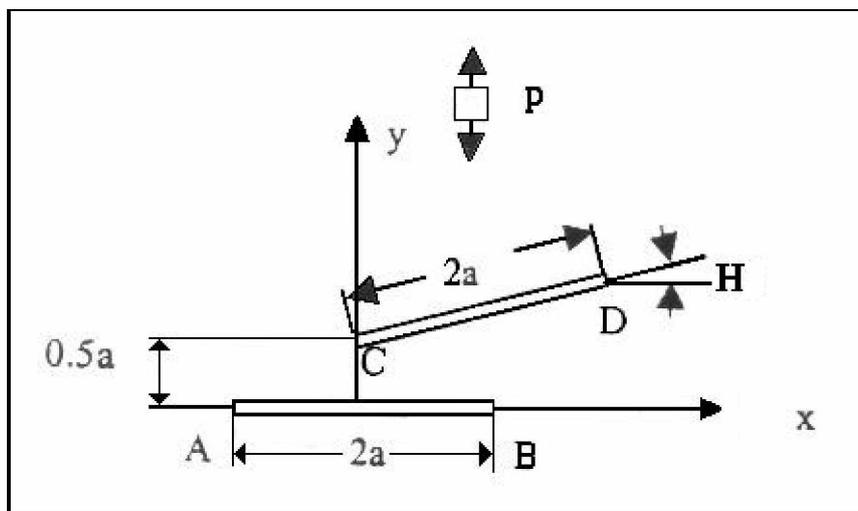


Fig.III.7 Exemple de 2 fissures

Pour le calcul numérique on prend $a=1mm$, $P=\sigma =100MPa$, $E=70000MPa$ et $\nu=0.3$.

On fait varier l'angle H de 0 à 90° le (tableau .III.3) nous donne les facteurs d'intensité de contraintes de la deuxième fissures sous forme adimensionnels

Tableau .III.3 Variation de K en fonction de H

H	KI*g	KIg	dif	KI*d	KId	dif	KII*g	KIIg	dif	KII*d	KIIId	dif
0	0,4486	0,4215	6,06	1,1805	1,043	11,66	-0,2335	-0,213	8,62	-0,044	-0,042	5,22
10	0,5504	0,5156	6,34	1,1339	1,0014	11,7	-0,1212	-0,109	10,37	0,1354	0,1159	14,43
20	0,5728	0,5332	6,92	1,025	0,9047	11,75	0,0129	0,0149	-14,9	0,2882	0,2502	13,21
30	0,5242	0,4849	7,52	0,8697	0,7672	11,8	0,1354	0,1261	6,89	0,4001	0,3487	12,87
40	0,4248	0,391	7,98	0,6874	0,6062	11,82	0,222	0,2034	8,43	0,46	0,4016	12,71
50	0,3004	0,2759	8,19	0,4992	0,4402	11,84	0,2598	0,2359	9,23	0,4623	0,4039	12,65
60	0,1758	0,1622	7,77	0,3258	0,2874	11,79	0,2473	0,2231	9,8	0,4075	0,3562	12,61
70	0,072	0,0684	5,06	0,1865	0,1648	11,67	0,1911	0,1718	10,15	0,3028	0,2647	12,6
80	0,004	0,0072	-79,5	0,0962	0,0854	11,33	0,1036	0,093	10,3	0,1612	0,141	12,59
90	-0,02	-0,014	28,96	0,065	0,0579	11	0	0	0	0	0	0

Les figures (Fig.III. 8) et (Fig.III. 9) représentent la variation de K en fonction de l'angle H

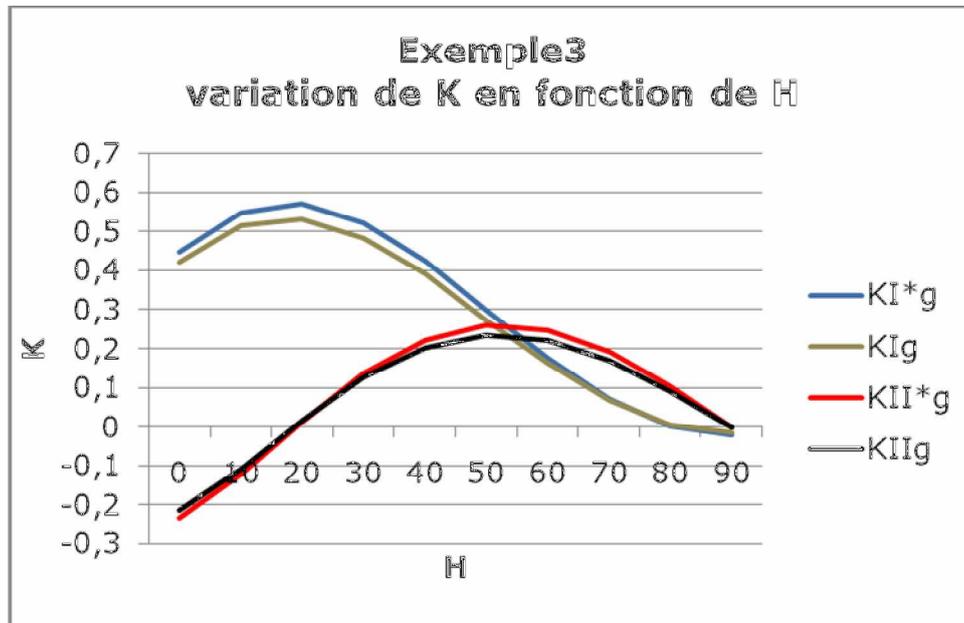


Fig.III. 8 Variation de KIg en fonction de H

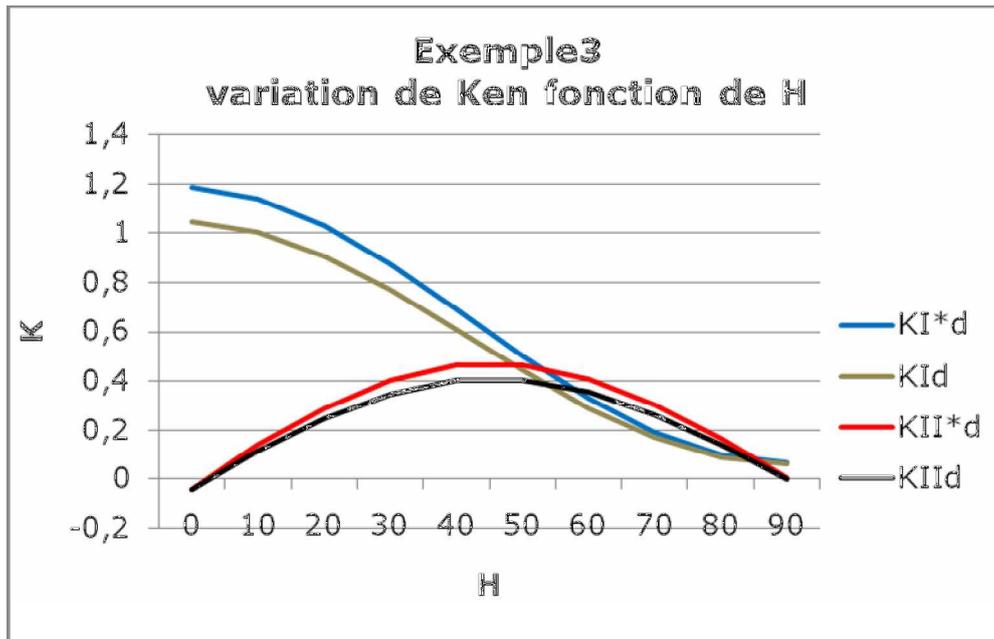


Fig.III. 9 Variation de KIId en fonction de H

EXEMPLE 04 :

Considérons un domaine infini contenant 100 fissures comme l'indique la figure(Fig.III.10). Chaque fissure a une longueur $2a$. On a une double symétrie suivant les axes $X=0$ et $Y=0$. Le calcul se fait donc sur 25 fissures

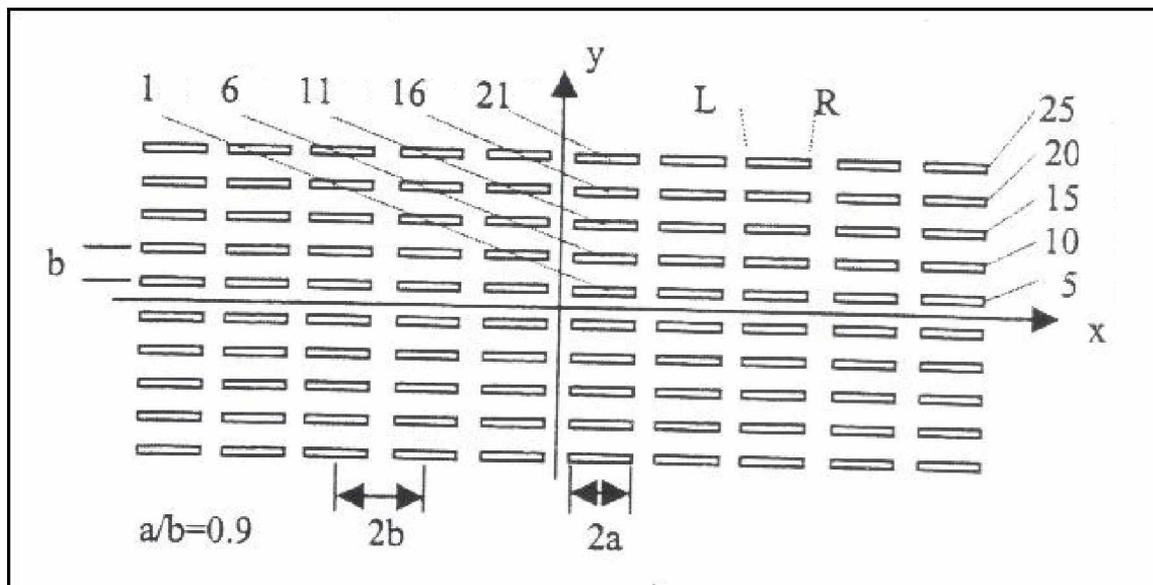


Fig.III.10 Exemple de 100 fissures dans un domaine infini

Pour le calcul numérique on prend $a=0.9mm$, $b=1mm$, $P=\sigma =100MPa$, $E=70000MPa$ et $\nu=0.3$.

Le (tableau.III.4) donne les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte

Tableau .III.4 Variation de K selon la répartition des fissures

J	KI*g	KIg	dif	KI*d	KId	dif	KII*g	KIIg	dif	KII*d	KIIId	dif
1	1,1526	1,0031	12,98	1,1427	0,9904	13,33	-0,0008	-0,0009	-6,01	-0,0028	-0,003	-4,5
2	1,139	0,9904	13,05	1,1066	0,9616	13,11	-0,0047	-0,0048	-0,22	-0,0075	-0,0073	3,24
3	1,0984	0,953	13,24	1,0346	0,896	13,4	-0,0103	-0,0102	1,33	-0,0146	-0,0142	2,94
4	1,0197	0,8804	13,67	0,9066	0,7795	14,03	-0,0193	-0,019	1,92	-0,0252	-0,0242	4,06
5	0,8829	0,7548	14,53	0,7238	0,617	14,77	-0,0308	-0,0295	4,23	-0,0263	-0,0249	5,63
6	1,1559	1,0063	12,95	1,1464	0,9978	12,97	-0,0024	-0,0026	-4,97	-0,0084	-0,0082	3,05
7	1,143	0,9943	13,02	1,1122	0,9669	13,07	-0,0139	-0,014	-0,02	-0,0219	-0,0214	2,34
8	1,1044	0,9589	13,19	1,0442	0,9051	13,33	-0,0302	-0,03	1	-0,0431	-0,0419	3,01
9	1,0299	0,8902	13,57	0,9204	0,7925	13,91	-0,0572	-0,0561	2	-0,0755	-0,0725	4,08
10	0,8963	0,7673	14,4	0,7295	0,6224	14,69	-0,0934	-0,0896	4,12	-0,0804	-0,0758	5,73
11	1,1625	1,0127	12,89	1,1537	1,0049	12,9	-0,0039	-0,0042	-6,26	-0,0136	-0,0133	2,24
12	1,1506	1,0018	12,95	1,1229	0,9771	13	-0,0225	-0,0227	-0,55	-0,0352	-0,0345	2,09
13	1,1162	0,9702	13,09	1,0633	0,9233	13,18	-0,0482	-0,0479	0,75	-0,0692	-0,0674	2,66
14	1,0501	0,9096	13,39	0,9506	0,8208	13,67	-0,0924	-0,0909	1,67	-0,1249	-0,1201	3,91
15	0,9262	0,7954	14,13	0,7439	0,636	14,51	-0,1589	-0,1529	3,83	-0,1389	-0,1313	5,51
16	1,1721	1,0222	12,79	1,1644	1,0153	12,81	-0,0056	-0,0059	-4,16	-0,0183	-0,0182	0,75
17	1,1616	1,0125	12,84	1,1375	0,9911	12,88	-0,0308	-0,0312	-1,05	-0,0469	-0,0466	0,84
18	1,1319	0,9855	12,94	1,0895	0,948	13	-0,0643	-0,0643	0,11	-0,0904	-0,0887	1,93
19	1,0812	0,94	13,07	1,0054	0,8729	13,19	-0,1205	-0,1191	1,23	-0,1726	-0,1664	3,61
20	0,9761	0,8425	13,7	0,7777	0,6668	14,27	-0,2309	-0,2233	3,32	-0,2048	-0,1938	5,38
21	1,1944	1,0474	12,32	1,1899	1,0436	12,3	0,0373	0,0319	14,73	-0,0664	-0,0613	7,8
22	1,1835	1,0372	12,37	1,1704	1,0262	12,33	0,0064	0,0055	14,26	-0,1013	-0,0961	5,15
23	1,157	1,0128	12,47	1,1369	0,9965	12,36	-0,0348	-0,0406	-16,5	-0,1534	-0,1471	4,18
24	1,1156	0,9757	12,55	1,1002	0,9666	12,16	-0,1008	-0,1051	-4,27	-0,2503	-0,2392	4,46
25	1,0797	0,9486	12,15	1,0024	0,8864	11,58	-0,2293	-0,2272	0,94	-0,3698	-0,344	7,01

Les figures (Fig.III. 11) et (Fig.III. 12) représentent la variation de K selon la répartition des fissures

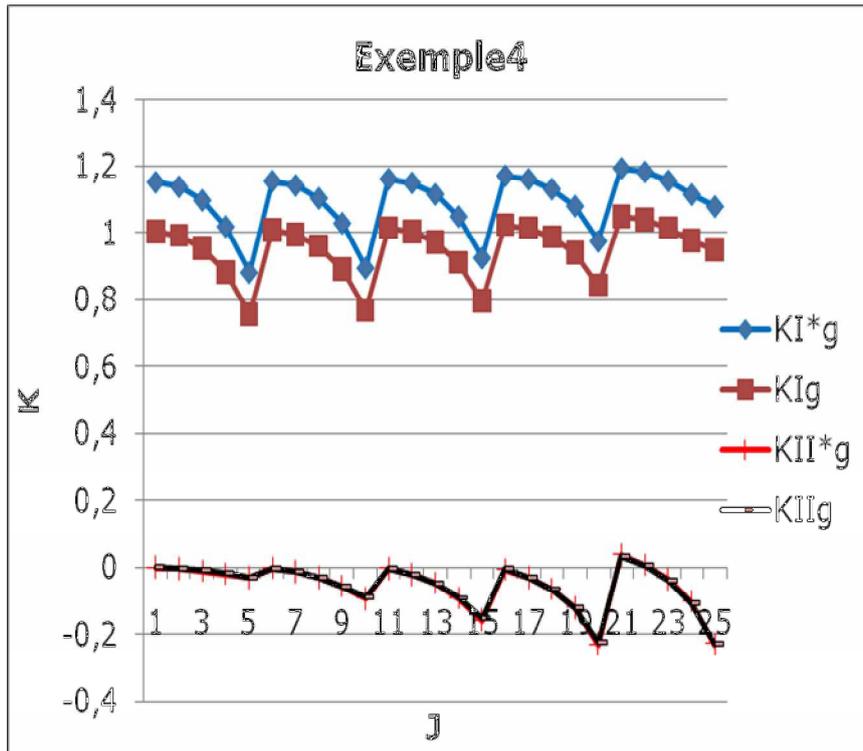


Fig.III.11 Variation de KI_g selon la répartition des fissures

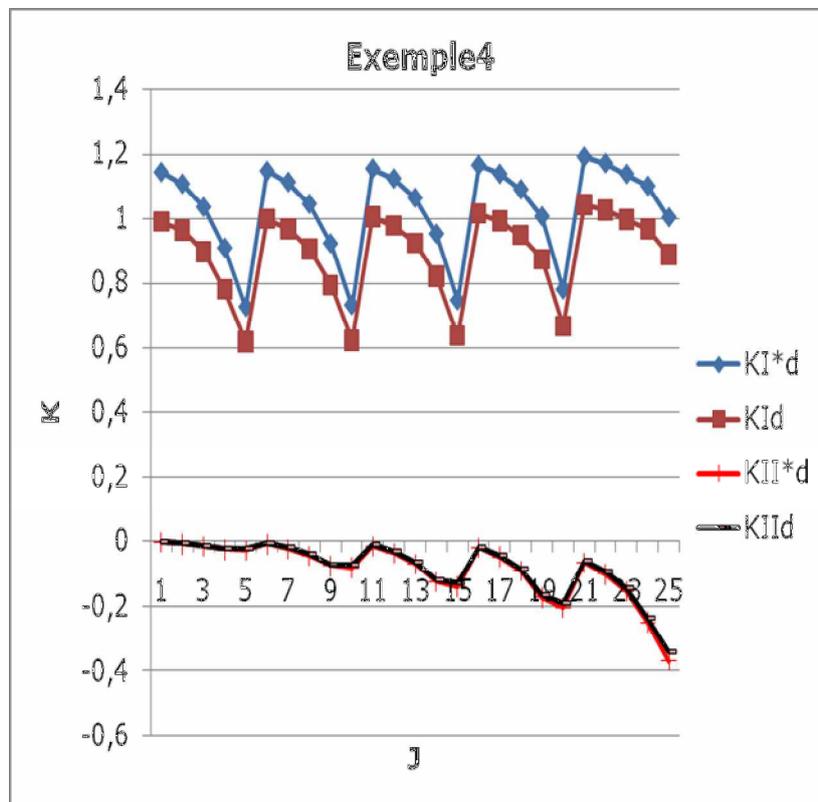


Fig.III.12 Variation de KI_d selon la répartition des fissures

Tableau .III.5 Variation de K selon la répartition des fissures

J	KI*g	KIlg	dif	KI*d	KId	dif	KII*g	KIIlg	dif	KII*d	KIIld	Dif
1	4,3739	4,2085	3,79	2,2579	2,1287	5,73	0	0	0	0	0	0
2	1,7735	1,6303	8,08	1,6764	1,4641	12,7	0	0	0	0	0	0
3	1,7765	1,4346	19,3	1,7765	1,4346	19,3	0	0	0	0	0	0
4	1,6764	1,4641	12,7	1,7735	1,6303	8,08	0	0	0	0	0	0
5	2,2579	2,1287	5,73	4,3739	4,2085	3,79	0	0	0	0	0	0
6	1,6997	1,5528	8,65	1,7936	1,645	8,29	-0,2352	-0,2271	3,45	-0,17	-0,1707	-0,66
7	1,6531	1,4952	9,56	1,4879	1,4333	3,68	-0,0556	-0,0751	-12	0,0446	0,0411	8,06
8	1,4879	1,4333	3,68	1,6531	1,4952	9,56	-0,0446	-0,0411	8,06	0,0556	0,0751	-12,3
9	1,7936	1,645	8,29	1,6997	1,5528	8,65	0,1695	0,1707	-0,7	0,2352	0,2271	3,45
10	1,5042	1,3654	9,24	1,5763	1,4546	7,73	-0,1874	-0,1846	1,5	-0,127	0,1379	-8,82
11	1,4913	1,4016	6,02	1,4913	1,4016	6,02	-0,0536	-0,0705	-7,8	0,0536	0,0705	-7,83
12	1,5763	1,4546	7,73	1,5042	1,3654	9,24	0,1267	0,1379	-8,8	0,1874	0,1846	1,5
13	1,3662	1,2536	8,25	1,4657	1,3498	7,92	-0,1082	-0,1104	-2	-0,055	-0,054	1,99
14	1,4657	1,3498	7,92	1,3662	1,2536	8,25	0,055	0,054	1,99	0,1082	0,1104	-1,99
15	1,3926	1,2689	8,89	1,3926	1,2689	8,89	0,032	0,0348	-8,5	-0,032	-0,0348	-8,53
16	1,6997	1,5528	8,65	1,7936	1,645	8,29	0,2352	0,2271	3,45	0,1695	0,1707	-0,66
17	1,6531	1,4952	9,56	1,4879	1,4333	3,68	0,0556	0,0751	-12	-0,045	-0,0411	8,06
18	1,4879	1,4333	3,68	1,6531	1,4952	9,56	0,0446	0,0411	8,06	-0,056	-0,0751	-12,3
19	1,7936	1,645	8,29	1,6997	1,5528	8,65	-0,1695	-0,1707	-0,7	-0,235	-0,2271	3,45
20	1,5042	1,3654	9,24	1,5763	1,4546	7,73	0,1874	0,1846	1,5	0,1267	0,1379	
21	1,4913	1,4016	6,02	1,4913	1,4016	6,02	0,0536	0,0705	-7,8	-0,054	-0,0705	-7,83
22	1,5763	1,4546	7,73	1,5042	1,3654	9,24	-0,1267	-0,1379	-8,8	-0,187	-0,1846	1,5
23	1,3662	1,2536	8,25	1,4657	1,3498	7,92	0,1082	0,1104	-2	0,055	0,054	1,99
24	1,4657	1,3498	7,92	1,3662	1,2536	8,25	-0,055	-0,054	1,99	-0,108	-0,1104	-1,99
25	1,3926	1,2689	8,89	1,3926	1,2689	8,89	-0,032	-0,0264	-8,5	0,032	0,0264	-8,53

Les figures (Fig.III. 14) et (Fig.III. 15) représentent la variation de K selon la répartition des fissures

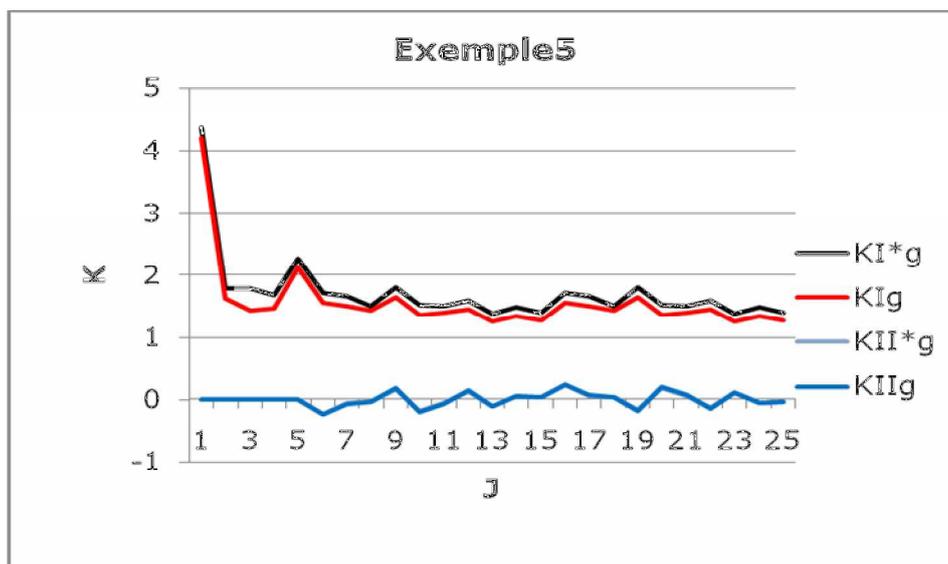


Fig.III.14 Variation de KIlg selon la répartition des fissures

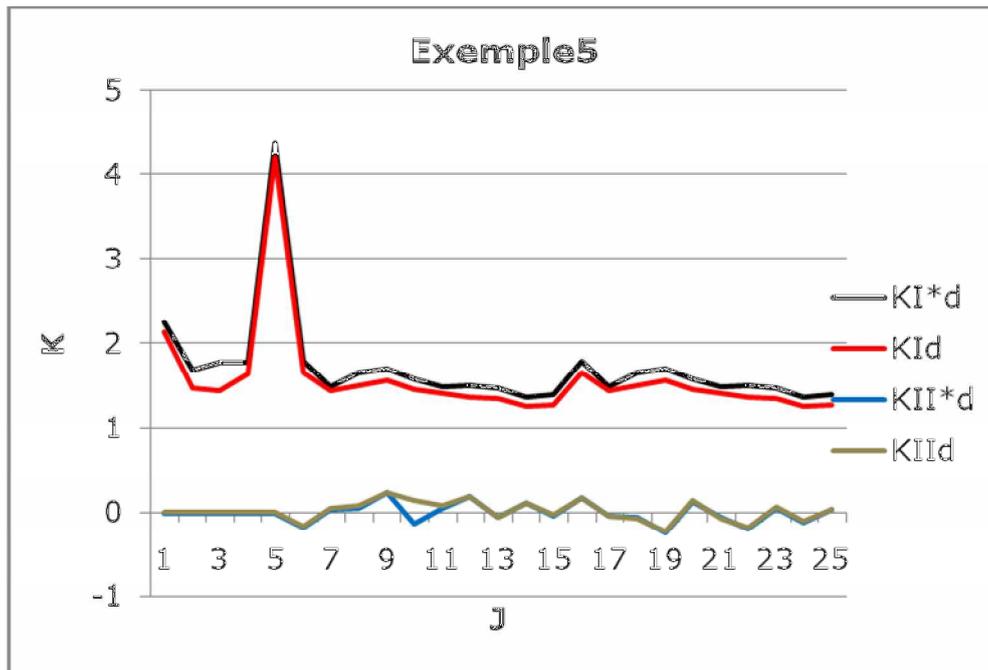


Fig.III.15 Variation de KI d selon la répartition des fissures

Conclusion Générale des exemples traités :

Nous pouvons, à partir des exemples traités, conclure que la méthode est performante et très facile à mettre en oeuvre. Les résultats pris comme référence sont des résultats numériques. Ce type de problèmes n'ont pas de solutions analytiques, d'où l'intérêt de la simulation numérique.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Ce travail montre les grandes possibilités qu'offre la méthode de discontinuité de déplacements pour la résolution des problèmes de mécanique de la rupture et de l'élasticité pour les matériaux en bidimensionnel.

La simplicité de la méthode de discontinuité de déplacement nous a permis de construire un code du calcul sous forme d'un programme pour la modélisation des milieux continus ou fissurés, pour résoudre les problèmes d'élasticité et de mécanique de la rupture des matériaux afin de calculer le facteur d'intensité de contrainte, paramètre important en mécanique de la rupture.

Pour tester la validité de notre programme, nous avons lancé une série d'exemples, par souci de donner un caractère pratique à notre travail. Les exemples traités ont montré la performance et la simplicité de notre méthode de calcul. Ce type de problèmes n'ont pas de solutions analytiques, d'où l'intérêt de la simulation numérique.

Références bibliographiques

- [1] Shou K.J, Crouch S.L, *A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 32, No. 1, pp 49-55. 1995
- [2] S.L.Crouch – A.M.Starfield, *Boundary element methode in solid mechanics* (George Allen & Anwin 1983)
- [3] J. Wang, S. G. Mogilevskaya, S. L. Crouch, A numerical procedure for multiple circular holes and elastic inclusions in a finite domain with a circular boundary, *Computational Mechanics*, (2003). pp 250-258
- V. Renaud, D. Kondo, J.P. Henry ,Computations of effective moduli for microcracked materials :a boundary element approach, *University of Lille, 1995*, *Computational Materials Science* 5 (1996) 227 – 237
- [4] Lemaitre J, Chaboche J.L, *Mécanique des matériaux solides*. Edition Dunod Paris 2004.
- [5] Y.Z.Chen, N.Hasebe et K.Y.Lee , *Multiple Crack Problems in Elasticity* .Edition WITE press, 2003.
- [6] Naman Recho, *rupture par fissuration des structures*. Hermès science publications (Paris), 1995.
- [7] Barthélémy B, *Notions pratiques de mécanique de la rupture*. Edition Eyrolles, 1980.
- [8] S.L.Crouch, *Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method*. Int.J.Num.Methods. Methods Eng. 10, pp 301–343, 1976.