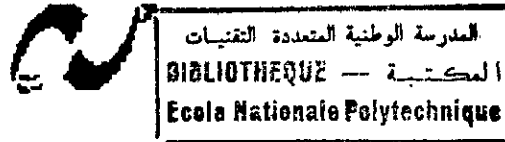


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE



THESE POUR L'OBTENTION DU GRADE DE : MAGISTER

En : ELECTRONIQUE

Option : IMAGE & PAROLE

THEME

**SEGMENTATION DES IMAGES BIOMEDICALES PAR DES
APPROCHES FRACTALES**

Présentée par

LASSOUAOU NADIA

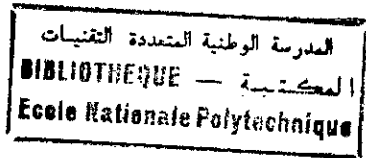
Ingénieur d'Etat en Electronique (ENP)

Devant le jury composé de :

Mr. D. Berkani
Mme. L. Hamami
Mr. L. Mahiddine
Mr. Y. Smara
Mr. A. Zerguerras
Mlle. S. Ait Daoud

(Professeur ENP)
(Chargée de cours ENP)
(Chargé de recherche CDTA)
(Maître de conférence USTHB)
(Professeur ENP)
(Maître Assistant e INI)

Président
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Invitée



A mes deux très chers hommes : mon père et mon époux,

A ma mère et ma belle-mère,

A ma famille et ma belle-famille,

A la mémoire de ma grand-mère,

A tous mes amis.

Remerciements

J'exprime ma profonde gratitude à Mme. Hamami, enseignante à l'ENP, pour la confiance qu'elle m'a toujours témoignée. Son expérience de la recherche, ses conseils, ses encouragements et son amitié m'ont été très précieux et m'ont permis de bien mener mon travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Mr. Mahiddine, chargé de recherche au CDTA, pour son accueil et son aide précieuse qu'il m'a prodiguée.

J'exprime ma profonde gratitude à Mr. Berkani, professeur à l'ENP, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements à Mr. Zerguerras, Mr. Smara et Mlle. Ait Daoud qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury de soutenance.

Je dois des remerciements chaleureux à Mehdi et Salmi. Enfin, je tiens à ce que tous mes collègues et amis trouvent ici mes remerciements les plus sincères.

ملخص: السرطان إحدى الأمراض الخطيرة و الشائعة في العالم. الطريقة الوحيدة التي يمكن بها معالجة هذا المرض هو التحري. الباحثون اقترحوا بتحقيق أنظمة يمكن بها تحري مبكر لهذا المرض. هذه الأنظمة تتكوّن من عدّة مراحل و هي: اكتساب الصّورة، تصحيح، تجزئ الصّور الى عدّة قطع، تصفيف، تعرف و قرار. تعتبر المراحل الثلاثة التالية تصحيح، تجزئ و التصفيف، المراحل الأساسية في هذه الأطروحة. الطرق المتبعة هي فراكتال و متعدّدة فراكتال.

مفاتيح: فراكتال، متعدّدة فراكتال، تصفيف، تحليل صورة، استخراج نطاق، تجزئ الصّور، صور خاليات طبية.

Abstract: Cancer is one of the most dangerous illnesses and of rife in the world. The only middle that permits to attack is him the tracking, that is very trying. Researchers thought about to achieve a system that permits the precocious tracking of this illness. This system includes several modules, that are : acquirement of the image, treatment, segmentation, classification, recognition and decision . In our work, we developed the three modules, which are: treatment, segmentation and classification. The used approaches are fractal and multifractal.

Keywords: *Fractal, multifractal, filtering, image analysis, segmentation, edge detection, classification, algorithm of region growth, biomedical cells image.*

Résumé : Le cancer est l'une des maladies les plus dangereuses et des plus répandues dans le monde. Le seul moyen qui permet de l'attaquer est le dépistage, qui est très fastidieux. Les chercheurs ont pensé à réaliser un système qui permet le dépistage précoce de cette maladie. Ce système comporte plusieurs modules, qui sont : acquisition de l'image, prétraitement, segmentation, classification, reconnaissance et décision. Dans notre travail, nous avons développé les trois modules suivants : prétraitement, segmentation et classification. Les approches utilisées sont fractales et multifractales.

Mots Clés : *Fractal, multifractal, filtrage, analyse d'image, segmentation, détection de contour, classification, algorithme de croissance de région, image de cellules biomédicales.*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

Introduction	2
Problématique	5
Chapitre 1 : Cytologie du col utérin.	
I.1. Introduction	
I.2. Définitions	8
I.2.1. Le Col Utérin	8
I.2.2. Frottis Cervico-Vaginal	8
I.3. Morphologie des cellules normales : Cytologie de l'épithélium	8
I.3.1. La couche basale	9
I.3.2. La couche para-basale	9
I.3.3. La couche intermédiaire	9
I.3.4. La couche superficielle	10
I.4. Modifications des frottis vaginaux	10
I.4.1. Modifications d'ordre hormonal	10
I.4.2. Modifications dues à des phénomènes inflammatoires ou parasitaires	11
I.4.3. Modifications tumorales	11
I.5. Cancers et tumeurs	11
I.6. Critères cellulaires d'apparition de la malignité	11
I.6.1. Classification de Papanicolaou	12
I.6.2. Critères de malignité	13
I.7. Conclusion	13
Chapitre 2 : Fractales et Multifractales	
Partie A : La théorie des Fractales et Multifractales	
1. Introduction	16
2. Objets fractals	16
2.1. Définition d'un objet fractal	16
2.2. Construction d'un objet fractal	16
2.3. Classification des objets fractals	17
2.4. Les fractales IFS «Iterated Function System »	19
3. Dimension fractale	21
3.1. Introduction	21
3.2. Notion de Dimension	21
3.3. La dimension topologique	22
3.4. La dimension d'homothétie ou dimension de Kolmogorov-Mandelbrot	22
3.5. Dimension d'homothétie généralisée	22
3.6. Dimension de Hausdorff-Besicovitch	22
3.7. La dimension de Bouligand-Minkowski	23
4. Formalisme Multifractal	24
4.1. Mesure fractale binomiale	24
4.2. Mesure fractale Multinomiale	25
4.3. Le Formalisme Multifractal	26
4.3.1. Définition du spectre des singularités	26
4.3.2. Définition du spectre $\tau(q)$	27
4.3.3. L'approche multifractale	28
5. Conclusion	29

Partie B : Les Approches Fractales et Multifractales en Analyse d'Images

1. Introduction	31
2. Analyse fractale	31
2.1. Calcul de la dimension fractale	31
2.1.1. La méthode de Boîtes	31
2.1.2. La méthode de Voss	33
2.1.3. La méthode d'interpolation	34
2.1.4. La méthode RDBC (Relative Differential Box-counting Approach)	34
2.1.5. La méthode de Blanket	35
2.2. Calcul de la dimension fractale locale	36
2.2.1. Méthode de Blanket	36
2.2.2. Méthode Basée sur le modèle FBM	37
2.2.3. Méthode Spectrale	38
2.3. Lacunarité	40
3. Analyse multifractale	41
3.1. Approche Multinomiale en Analyse d'image	41
3.2. Calcul du spectre multifractal $f(\alpha)$	44
3.3. Calcul du spectre $\tau(q)$ et les dimensions fractales généralisées	45
4. Conclusion	46

Partie C : Extraction des primitives

1. Introduction	48
2. Détection de contours	48
2.1. La méthode G-Spectrale	48
2.2. La méthode Vario-Spectrale	52
2.2.1. Définition générale du variogramme	52
2.2.2. Calcul du variogramme	52
2.2.3. Algorithme Vario-Spectral	54
2.2.4. Application	54
2.3. Algorithme basé sur le modèle fbm de l'image	56
2.4. Algorithme multifractal de détection de contour	58
3. Segmentation par une approche multifractale	62
4. Conclusion	66

Chapitre III : Comparaison avec d'autres méthodes de segmentation.

III.1. Détection De Contours	68
III.1.1. Introduction	68
III.1.2. Généralités	68
III.1.2.1. Principes généraux d'utilisation des méthodes dérivatives	69
III.1.3. Approches dérivatives appliquées aux images Numériques	70
III.1.3.1. Opérateurs dérivatifs du premier ordre	70
III.1.3.1.1. Opérateur de Roberts	70
III.1.3.1.2. Opérateurs de Prewitt et de Sobel	71
III.1.3.2. Opérateurs dérivatifs du deuxième ordre	71
III.1.3.2.1. Opérateur Laplacien sur un voisinage réduit	71
III.1.3.2.2. Opérateur de Marr et Hildreth	71
III.1.3.2.3. Opérateur de Huertas-Médioni	72
III.1.3.3. Approches par filtrage optimal	73
III.1.3.3.1. Approche de Canny	73

III.1.3.3.2. Approche de Deriche	74
III.1.4. Amincissement des lignes de contour	75
III.1.5. Application	75
III.1.6. Conclusion	78
III.2. Segmentation en régions homogènes	79
III.2.1. Méthode de Classification	79
III.2.2. Méthode basée sur la Morphologie Mathématique	80
III.3. Conclusion	82
Chapitre IV : Classification des cellules Biologiques	
IV.1. Introduction	84
IV.2. Prétraitement	84
IV.3. Calcul du rapport nucléo-cytoplasmique de chaque cellule	85
IV.3.1. Calcul des surfaces noyaux et cytoplasmes	85
IV.3.2. Calcul du rapport nucléo-cytoplasmique	86
IV.4. Classification des cellules en fonction du rapport nucléo-cytoplasmique	88
IV.4.1. Classification par coloriage	89
IV.4.2. Classification par création d'image contenant un même type de cellules	90
IV.5. Application	92
IV.6. Conclusion	93
Conclusion	95
Annexes	97
Bibliographie	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

Le cancer est l'une des maladies les plus dangereuses et des plus répandues dans le monde. Celui-ci est cause de nombreux décès et aucun moyen de prévention, tel que le vaccin, n'est encore mis au point. En attendant, le seul moyen qui permette d'attaquer à temps cette maladie, et par conséquent de diminuer considérablement le taux de mortalité, est le dépistage. Ce dernier étant très fastidieux, des chercheurs ont pensé à automatiser ce travail. Cet automatisme consiste à mettre au point un système d'aide aux médecins en éliminant tous les cas normaux (par scanning) et en ne présentant aux médecins que les cas anormaux par visualisation sur écran. Grâce à ce système, on pourra réaliser un dépistage précoce de la maladie, ce qui permettra un traitement plus efficace et augmentera, par conséquent, les chances de survie du patient. (pour certains cancers dépistés à temps, tel que le cancer du sein, la rémission peut atteindre jusqu'à 80%).

On se rend compte, toutefois, que l'examen des cellules prélevées pour le dépistage est particulièrement complexe et consommateur de temps, car il consiste à rechercher quelques cellules anormales parmi un amas de cellules normales. Le résultat de cet examen, ne repose que sur l'avis du médecin, ce qui augmente le risque d'erreurs.

Dans le but de palier à cette difficulté, on désire réaliser un système de dépistage du cancer qui permettra aux médecins de visualiser les cellules et d'avoir un outil d'aide à la décision en ce qui concerne la malignité ou non de ces cellules. Le travail que nous allons présenter consiste en un module très important de ce système, qui est la segmentation et la classification des cellules biomédicales. La segmentation consiste en la séparation de la cellule en deux parties très significatives : noyau et cytoplasme. La classification exploite les résultats de la segmentation et son but est la séparation du tissu cellulaire composé de quatre couches de cellules (cas des frottis cervicaux), le résultat devra nous donner autant de couches séparées qu'il existe dans l'image.

La segmentation des images fait référence aux notions de différence et de similarité comme les perçoit le système visuel humain et ceci donne naissance à deux approches :

- L'approche **frontière** qui est associée à une variation d'intensité ou à une discontinuité entre les propriétés de deux ensembles connexes de points. Cette approche regroupe toutes les techniques d'extraction de contours. Les contours obtenus sont rarement connexes ; les algorithmes de fermeture de contours ne parviennent pas à combler les lacunes de façon satisfaisante, car ils opèrent de façon aveugle sans connaissance de haut niveau, ce qui crée parfois des contours indésirables.
- L'approche **région** qui fait référence à des groupements de points ayant des propriétés communes. Les méthodes de l'approche région aboutissent directement à une partition de l'image en régions connexes et séparées, chaque pixel étant affecté à une région unique. Ces méthodes souffrent en général de leur manque de précision sur les frontières des régions extraites.

Il faut également noter que, pour toutes les techniques, se pose le problème de trouver les seuils qui donnent les meilleurs résultats, ce qui n'est pas toujours une tâche facile. Toutes ces insuffisances ont poussé les traiteurs d'images à chercher les coopératives où plusieurs approches sont utilisées afin d'améliorer le résultat de la segmentation. Dans cette optique, nous avons étudié un algorithme de segmentation basé sur une analyse multifractale qui permet une discrimination efficace des textures dans une image et permet l'extraction des contours comme étant les frontières des zones de textures différentes.

Nous avons réalisé un logiciel que nous avons appelé 'FRIMASEG' (FRactal IMAGE SEGmentation), développé sous environnement Delphi3. Frimaseg est un logiciel de traitement d'images, d'analyse, de segmentation et de classification. Il englobe tous les aspects pratiques liés à notre travail.

Afin de mener à bien notre travail, nous l'avons partagé en quatre chapitres comme suit :

Chapitre I : Nous présentons la cytologie du col utérin, le but est de mieux nous familiariser avec les images de frottis utilisées dans la suite.

Chapitre2 : Ce chapitre est partagé en trois parties :

1. La 1^{ière} présente une étude théorique des formalismes fractals et multifractals.
2. L'utilisation des modèles fractals et multifractals en analyse d'image est traitée dans la 2^{ième} partie ; pour cela plusieurs méthodes de calcul des paramètres fractals et multifractals sont étudiées, des résultats d'application y sont donnés.
3. Cette dernière partie est consacrée à l'extraction des primitives. Dans ce cadre, nous avons étudié différents algorithmes :
 - Un algorithme de détection de contours fractal basé sur le filtrage de Gabor. Nous avons apporté une amélioration à cet algorithme en faisant l'estimation d'un des paramètres du filtre en fonction de l'image, par un outil mathématique dit 'variogramme', le but est d'améliorer la qualité de la détection.
 - Nous avons exploité un algorithme d'estimation de la dimension fractale pour la détection de contours. Cet algorithme est basé sur le modèle fbm de l'image.
 - Un algorithme de détection de contours multifractal
 - Un algorithme de segmentation, en régions connexes, multifractal. Vu les très bons résultats obtenus par cette méthode, tout en étant très rapide et sans paramètres à varier, il sera utilisé dans l'étape de classification des cellules biomédicales.

Chapitre3 : Nous rappelons les principes des méthodes de détection de contours et plus en détails les méthodes frontières ou dérivatives. Le but de ce chapitre est de faire une comparaison avec les résultats obtenus avec les approches fractales et multifractales.

Chapitre4 : Il est consacré à la classification des cellules biologiques qui est réalisée par l'algorithme de croissance de région et un critère cellulaire.

La plupart des algorithmes sont appliqués sur des images autres que les cellules biomédicales, tel que l'image de dés. Le but est de montrer une (des) caractéristique(s) particulière(s) d'un algorithme sur une image plus simple constituée de formes rectilignes.

Une conclusion est enfin donnée, elle fera la synthèse du travail effectué et permettra, entre autres, de développer des perspectives.

Une présentation générale du logiciel réalisé Frimaseg est donnée en Annexe5.

Plusieurs annexes sont aussi données, leur but est de compléter quelques notions présentes dans les différents chapitres.

PROBLEMATIQUE

Ces dernières années le rôle clinique du traitement d'image a été beaucoup développé, les ressources de cette nouvelle technologie ont été exploitées pour satisfaire les besoins des médecins dans leur pratique. Dans ce travail, nous nous sommes intéressées au dépistage du cancer du col utérin.

Le dépistage de cellules malignes peut être facilité grâce à l'utilisation d'un système de traitement d'images qui corrigera les dégradations que l'image aurait subies, qui améliorera sa lisibilité et qui permettra de détecter les cellules malignes. Ce système informatique est composé des modules suivants (voir fig.1) :

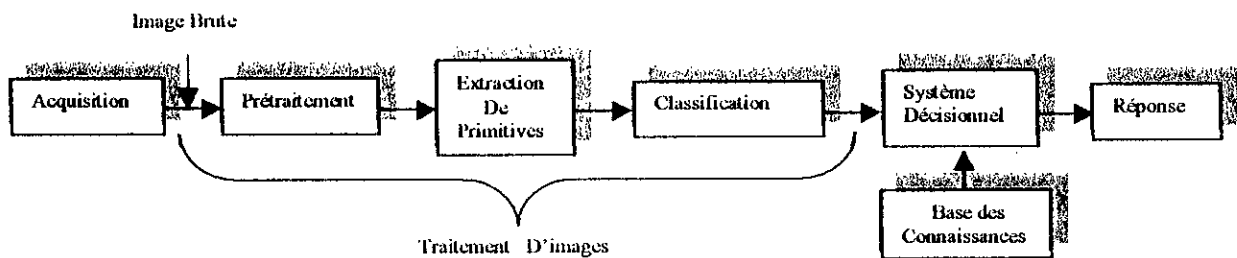


Figure 1 : Système d'aide au diagnostic assisté par ordinateur

- **Acquisition :** son but est d'obtenir une image, aussi fidèle que possible, des cellules biologiques récoltées sur lamelle grâce à un frottis cervical. Pour cela, nous aurons besoin d'un microscope, d'une caméra numérique, d'une carte d'acquisition et d'un PC pour visualiser l'image. Il faut noter qu'il y a plusieurs types d'images biomédicales, tel que : image angiographie crânienne, image IRM (image par résonance magnétique) d'une coupe du cœur, image de muscles, image des os ou de cellules biologiques, etc., mais dans notre étude, nous travaillons avec des images de cellules biologiques.
- **Filtrage et prétraitement :** Le filtrage consiste à améliorer la qualité de l'image en éliminant le bruit, qui s'est superposé sur celle-ci, lors de l'étape d'acquisition. Par contre, le but du prétraitement est d'éliminer les informations inutiles qui peuvent, lors des étapes suivantes, présenter un risque d'erreurs.
- **Segmentation et classification :** Dans le cas des cellules biologiques, la segmentation consiste à séparer chaque cellule en son noyau et son cytoplasme. Les cellules sont regroupées en quatre couches différentes qu'il faudra séparer et classifier. Une bonne segmentation et une bonne classification sont à la base d'une bonne réalisation de systèmes d'apprentissage, de reconnaissance et d'aide à la décision.
- **Apprentissage, reconnaissance et décision :** A partir de la segmentation, nous pouvons réaliser :
 1. L'apprentissage qui est basé sur les listes de données établies lors de la segmentation. Il se charge d'acquérir des connaissances et de les organiser en classes ou modèles de références. Le but est l'élaboration d'un dictionnaire qui répertorie ces données.
 2. La reconnaissance, quant à elle, consiste à comparer les données prototypes existant dans le dictionnaire, établies lors de l'étape d'apprentissage avec celles inconnues et que l'on veut reconnaître. La décision est l'ultime étape de la reconnaissance. A partir de la

décomposition en paramètres, elle recherche parmi les modèles d'apprentissage ceux qui sont les plus proches. Elle peut conduire à :

Un succès : si la réponse est unique.

Une confusion : si la réponse est multiple.

Un rejet : si aucun des modèles ne correspond à la description de la forme.

Dans notre travail, nous nous sommes intéressées aux modules de prétraitement, de segmentation et de classification, nous avons contribué à :

- La création d'une base de données pour le système de reconnaissance. Cette base est constituée d'images de noyaux et de cytoplasmes des cellules biologiques.
- La classification des cellules biologiques, celle-ci est une étape très importante du système de reconnaissance.

Chapitre I:

CYTOLOGIE DU COL UTERIN

I.1. INTRODUCTION

Le cancer du col utérin est l'un des cancers les plus fréquents chez la femme. On dénombre 500 000 nouveaux cas par an dans le monde. Sur 5 000 femmes atteintes, 2 000 en meurent. Il s'agit là d'une situation choquante, car 1800 décès pourraient être évités si les contrôles et les dépistages se faisaient de façon plus fréquente grâce au frottis cervico-vaginal.

Le cancer du col utérin ne devient invasif qu'après une longue période d'état précancéreux (dysplasie ; lésion intra-épithéliale ; lésion de bas grade et de haut grade).

En Algérie, le pic du cancer du col a été estimé au Congrès maghrébin à 90 pour 100 000. Par contre, en Finlande, où les frottis se font régulièrement, le risque de cancer du col est estimé à 5.5 pour 100 000.

Dans ce qui suit, nous verrons la cytologie du col utérin, les critères de malignités et les frottis cervico-vaginaux.

Remarque : La définition de certains termes médicaux utilisés se trouvent dans l'annexe 1.

I.2. DEFINITIONS

I.2.1. LE COL UTERIN

Le col utérin est l'extrémité de l'utérus, de forme cylindrique. Il mesure environ 3 cm de long. Il s'insère à la partie supérieure du vagin et il est séparé du corps par l'isthme.

Le col est creusé d'un canal cervical qui prolonge la cavité utérine. Il est constitué d'une musculature mince, tapissée d'une muqueuse. On distingue deux portions : Une portion interne endocervicale ou endocol qui entoure le canal, et une portion externe ou exocol. La zone de jonction entre ces deux portions est de localisation variable pendant la vie génitale. Elle siège à l'orifice externe du col chez la multipare, plus haut dans le canal cervical chez la nullipare et après la ménopause. Cette zone de jonction est très importante car c'est à ce niveau que prennent naissance la plupart des cancers utérins.

I.2.2. FROTTIS CERVICO-VAGINAL

Les frottis vaginaux sont obtenus par étalement sur lame du produit de raclage de l'épithélium vaginal au niveau des culs-de-sac. Cet étalement est fixé puis coloré par une technique différentielle de Papanicolaou, Schorr, etc.

Les frottis vaginaux permettent avant tout :

- Une exploration de l'activité hormonale ovarienne.
- Une identification de germes, mycose, trichomoniasse, etc.
- Un dépistage des cancers de l'utérus.

I.3. MORPHOLOGIE DES CELLULES NORMALES : Cytologie de l'épithélium

Afin de pouvoir réaliser un diagnostic de malignité ou non de la cellule, il est indispensable de connaître la cytologie des cellules normales.

L'épithélium comprend quatre couches de cellules de types différents, qui sont :

1. La couche basale.
2. La couche para-basale.
3. La couche intermédiaire.
4. La couche superficielle.

I.3.1. LA COUCHE BASALE

Elle est formée d'une seule rangée de cellules cylindriques, disposées perpendiculairement à la membrane basale, ce sont les cellules mères. Leurs noyaux sont gros, réticulés et possèdent un nucléole volumineux, ils sont plus souvent situés au centre. Leur cytoplasme prend la teinte la plus foncée des frottis, (en utilisant la technique de Papanicolaou). Leur rapport noyau/cytoplasme est compris entre 0.25 et 0.37. Ces cellules se retrouvent rarement dans les frottis à moins qu'on ait pratiqué un grattage très énergique d'une muqueuse atrophique.

Ces cellules n'apparaissent pas normalement chez les femmes en activité génitale dans les frottis. On les rencontre quelques jours après la naissance, jusqu'à la période pré-pubertaire, à la ménopause et chez les femmes en activité génitale en cas d'érosion épithéliale, inflammatoire, traumatique, etc.

I.3.2. LA COUCHE PARA-BASALE

On les retrouve dans les frottis atrophiques et subatrophiques sous forme de cellules groupées et isolées. Elles contiennent la majorité des cellules exfoliées chez la femme ménopausée.

Ce type de cellules est arrondi et a un noyau volumineux avec une chromatine finement répartie et un nucléole bien apparent. Le cytoplasme est cyanophile, il contient souvent des vacuoles plus ou moins grandes. Les contours cellulaires sont nets. Le rapport noyau/cytoplasme est compris entre 0.15 et 0.25. Ces cellules ressemblent fortement aux cellules basales, mais sont généralement plus volumineuses.

I.3.3. LA COUCHE INTERMEDIAIRE

Elle possède des cellules de noyaux relativement plus petits que celui des cellules basales et le volume du cytoplasme augmente. On assiste ainsi à une diminution progressive du rapport entre les volumes du noyau et du cytoplasme.

La taille des cellules intermédiaires peut varier considérablement. Nous les appelons petites ou grandes intermédiaires, ces diverses tailles et formes correspondent à des degrés de maturation différents.

Les petites cellules intermédiaires : Elles sont légèrement polyédriques, et ont tendance à s'allonger. En règle générale, elles deviennent plus grandes que les para-basales, mais il arrive aussi qu'elles n'en atteignent pas la taille. Le corps cellulaire apparaît plus petit que pour les para-basales qui eux sont arrondis. Comparées aux grandes intermédiaires et aux superficielles, les petites intermédiaires sont plus épaisses et présentent souvent en surface de fines rainures irrégulières. On constate parfois aussi, une légère vacuolisation du cytoplasme. Quant aux noyaux, ils sont généralement assez grands.

Les grandes cellules intermédiaires : Elles ont une forme polygonale. Elles ne diffèrent des cellules superficielles que par le noyau, qui présente, généralement, les mêmes structures fixes que les noyaux des petites intermédiaires. Le cytoplasme est transparent et cyanophile.

On rencontre des cellules intermédiaires à la période pré-pubertaire, à la ménopause et chez les femmes en activité génitale, surtout dans la deuxième partie du cycle. Pendant la gestation, leur nombre augmente, elles prennent un aspect allongé et leurs bords s'épaississent. Leur rapport nucléo-cytoplasmique est compris entre 0.04 et 0.15.

I.3.4. LA COUCHE SUPERFICIELLE

Elle est constituée par des éléments de grande taille, aplatis, tassés les uns contre les autres. Les ponts intercellulaires vont disparaître dans les assises les plus superficielles de sorte que ces cellules sont desquamées isolément. Le volume des noyaux diminue jusqu'à ne plus représenter qu'un amas pycnotique de 5 à 6 μ de diamètre. Le cytoplasme est clair et transparent. Leur contour est bien limité. Leur rapport noyau/cytoplasme est compris entre 0.01 et 0.04. On les rencontre chez les femmes en activité génitale.

La figure I.1. montre les différents types de cellules décrites précédemment.

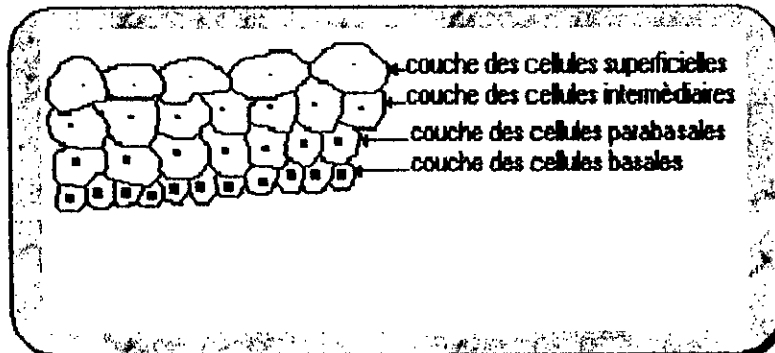


Figure I.1 : Différentes couches cellulaires d'une coupe de muqueuse vaginale.

I.4. MODIFICATIONS DES FROTTIS VAGINAUX

De nombreux facteurs peuvent modifier l'aspect des frottis vaginaux, parmi ces facteurs :

- Modifications d'ordre hormonal.
- Modifications dues à des phénomènes inflammatoires ou parasitaires.
- Modifications tumorales.

I.4.1. MODIFICATIONS D'ORDRE HORMONAL

Grossesse : Pendant cette période, les frottis obtenus contiennent de nombreuses cellules intermédiaires avec des bords épais, on les appelle «cellules naviculaires».

Post-partum : Après l'accouchement, si la mère nourrit son enfant, on note, dans les frottis, l'apparition de cellules basales à gros noyaux, que l'on appelle les «cellules d'allaitement».

Traitements hormonaux : Lors des traitements hormonaux, on observe une augmentation du nombre de cellules intermédiaires qui prend un aspect androgénique.

Chez les fillettes : A mesure que l'on s'approche de la puberté, il y a apparition de cellules intermédiaires, puis superficielles, avec disparition des cellules basales.

Ménopause : Après la période d'activité génitale, quand les menstruations ont disparu, on obtient un frottis constitué uniquement de cellules intermédiaires, on parlera alors d'une «ménopause de type dense ». A un stade plus avancé, on ne retrouve que des placards faits de cellules basales profondes, il s'agit alors d'une «atrophie vaginale profonde ».

I.4.2. MODIFICATIONS DUES A DES PHENOMENES INFLAMMATOIRES OU PARASITAIRES

De nombreux germes, parasites ou champignons peuvent modifier l'aspect des frottis vaginaux. Ceci se traduit, entre autre, par des altérations cellulaires telles que les halos périnucléaires.

Les différentes causes d'inflammations peuvent provoquer des lésions épithéliales, tel que des cellules basales profondes, avec de nombreuses mitoses, provenant d'une érosion inflammatoire cervicale.

I.4.3. MODIFICATIONS TUMORALES

Les frottis vaginaux permettent un dépistage systématique des cancers utérins, le cancer du col étant le plus fréquent. Les modifications se traduisent par :

- L'hyperchromatophilie nucléaire.
- Plusieurs nucléoles dans le même noyau.
- Chromatine granuleuse ou en motte.

I.5. CANCERS ET TUMEURS

La détection précoce du cancer du col utérin est possible grâce à des examens gynécologiques réguliers. Un simple frottis permet de mettre en évidence des anomalies éventuelles de certaines cellules. En premier lieu, on effectue un prélèvement de quelques cellules du col qui seront observées et examinées au microscope afin de dépister d'éventuelles anomalies. Dans le cas où des cellules suspectes sont détectées, on réalise un prélèvement plus important. Si le cancer est dépisté suffisamment tôt, la guérison peut être de 100% avec un traitement non mutilant.

I.6. CRITERES CELLULAIRES D'APPARITION DE LA MALIGNITE

Il existe certaines modifications structurelles, présentes dans tous les types de cancers humains, qui permettent leur reconnaissance cytologique.

Dans les noyaux, ces modifications sont :

- Les modifications de taille et de forme.
- Les irrégularités de la membrane nucléaire.
- La répartition anormale de la chromatine.
- Les modifications du nombre, de la taille et de la forme des nucléoles.
- La présence de mitose atypique.
- La multinucléation.

Dans le cytoplasme, ces modifications sont :

- Les variations de la forme, de la taille, avec modification du rapport nucléocytoplasmique.
- Les altérations des affinités tinctoriales.
- La présence d'inclusions ou de vacuoles.

Toutes les anomalies cellulaires, que nous venons d'énumérer, ne sont pas toujours évidentes :

- L'augmentation du volume nucléaire n'est pas toujours d'origine néoplasique, les phénomènes de régénération tissulaire provoquent, parfois, l'apparition de noyaux hyperplasés spectaculaires à observer.
- La présence précoce de kératine et sa répartition irrégulière dans le cytoplasme de certaines cellules épidermoïde para-basales ne signent pas nécessairement le caractère malin de cet élément, ces modifications se voient dans les lésions inflammatoires chroniques.

La figure I.2, montre les modifications structurelles les plus fréquentes dans des cellules :

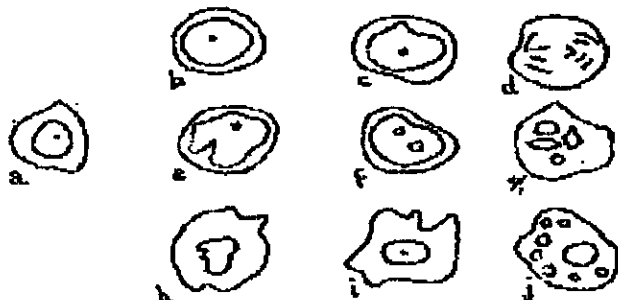


Figure I.2. Schéma représentant les modifications structurelles subites par des cellules malignes.

- | | |
|--|---|
| a. Cellule normale. | b. Augmentation de la taille nucléaire. |
| c. Hyperchromatisme nucléaire | d. Mitose atypique. |
| e. Modification de la forme nucléaire | f. Augmentation du volume nucléaire |
| g. Multinucléation | h. Augmentation de la taille cellulaire |
| i. Modification de la forme cellulaire | j. Modification des affinités tinctoriales du cytoplasme. |

I.6.1. CLASSIFICATION DE PAPANICOLAOU

Frottis Négatif :

Classe I : Cellules normales.

Classe II : Frottis inflammatoire anormal avec cellules atypiques.

Classe III : Frottis suspect (présence de cellules anormales ne pouvant être considérées ni comme bénignes ni comme malignes).

Frottis Positif :

Classe IV Présence de cellules malignes isolées.

Classe V : Présence de cellules en placards.

I.6.2. CRITERES DE MALIGNITE

Le diagnostic de la malignité se fonde sur l'ensemble des particularités morphologiques atypiques de toutes les cellules du frottis.

Perturbation du rapport nucléo-cytoplasmique en faveur du noyau : Les noyaux des cellules tumorales sont habituellement plus gros que ceux des cellules normales, mais sans que le cytoplasme présente une variation comparable. Les modifications du rapport nucléo-cytoplasmique constituent un des signes les plus valables de la malignité.

Anisonucléose (Anisocariose) : La taille des noyaux dans les cellules tumorales isolées peut être très variable de l'un à l'autre. A cela s'oppose l'uniformité des noyaux des cellules normales parvenues au même degré de différenciation.

La constatation de noyaux de forte taille, aux cotés d'autres petits ou moyens, est souvent un indice de la provenance des cellules d'un tissu malin. Cette anisonucléose apparaît clairement si les cellules malignes se présentent en groupe ou en amas.

Difformité nucléaire (Polymorphisme nucléaire) : Indépendamment des variations de la taille, il existe une diversité marquée de la forme des noyaux des cellules tumorales. Ils sont plus ou moins elliptiques, encochés, bizarrement déformés, et souvent en position excentrée. L'aspect fusiforme ou étiré est relativement fréquent. Le polymorphisme nucléaire apparaît mieux lorsque les cellules malignes sont groupées.

Hyperchromatisme nucléaire : Les modifications de la structure nucléaire normale appartiennent toujours à l'image des cellules tumorales. Les noyaux hyperchromatiques apparaissent déjà par leur coloration sombre et massive. Du fait de la disparition de leur texture, ils se montrent entièrement bruns, sombres et noirs ou bien avec des amas irréguliers de chromatine. Le contour nucléaire est souvent nettement tranché et épais.

I.7. CONCLUSION

Nous avons exposé les caractéristiques des cellules dites normales et celles des cellules anormales, ainsi que les différentes raisons qui entraînent la modification des frottis vaginaux, ce qui nous permettra de savoir si l'apparition de certaines anomalies dans les frottis est simplement due à l'état hormonal de la patiente ou à une éventuelle infection, ou bien à une raison plus grave tel que le cancer.

Comme nous le verrons au chapitre IV, nous utilisons le rapport nucléo-cytoplasmique comme un critère pour réaliser la classification des cellules biologiques.

Chapitre II:

FRACTALES
ET
MULTIFRACTALES

Partie A:

***LA THEORIE DES FRACTALES ET
MULTIFRACTALES***

1. INTRODUCTION

Depuis la fin des années 70, à la suite des travaux du mathématicien français Mandelbrot, on assiste à une véritable explosion de l'intérêt manifesté par la communauté scientifique pour les objets fractals. Mandelbrot a introduit le terme *fractal* pour désigner les objets qui manifestent un aspect extrêmement irrégulier et qui ne possèdent aucune échelle de longueur caractéristique. Historiquement, c'est dans les travaux des mathématiciens Cantor et Peano, à la fin du XIX^{ème} siècle, que l'on trouve les premières références à des ensembles « bizarres », souvent considérés comme pathologiques, dont la géométrie est particulièrement complexe et structurée. Très vite la communauté des mathématiciens de l'époque réalise qu'une description de tels ensembles ne peut reposer sur une définition de la dimension correspondant au nombre de coordonnées nécessaires pour caractériser la position d'un point dans cet ensemble. En 1919, Hausdorff propose une nouvelle définition de la dimension d'un ensemble qui peut prendre des valeurs non entières et qui permet de rendre compte du degré d'irrégularité de ces objets. Un des plus grands mérites de Mandelbrot est d'avoir su reconnaître que « l'exception est souvent la règle » et d'avoir montré que ces structures fracturées (singulières) sont en fait très présentes dans la nature. Les profils de nos montagnes ou les découpages côtiers, les diverses géométries ramifiées que constituent les arbres, les rivières ou les imbrications des bronches dans les poumons sont autant d'exemples que l'on peut appréhender au sein du cadre fédérateur défini par Mandelbrot.

Il est nécessaire d'introduire une formalisation précise qui permette de rendre compte du caractère fractal d'un objet. Ainsi, les idées et le formalisme développés depuis les premiers travaux de Mandelbrot, ont essentiellement consisté en l'élaboration d'un cadre théorique à vocation principalement descriptive. Dans cette première partie, nous rappelons les lignes directrices de cette récente théorie. Nous donnons les définitions élémentaires et les notions de base qui caractérisent les ensembles et les mesures multifractales.

2. OBJETS FRACTALS

2.1. DEFINITION D'UN OBJET FRACTAL

Une fractale est une figure géométrique ou un objet naturel qui combine les caractéristiques suivantes :

- 1- Ses parties ont la même forme ou structure que le tout, à ceci près qu'elles sont à une échelle différente et peuvent être légèrement déformées.
- 2- Sa forme est, soit extrêmement irrégulière, soit extrêmement interrompue ou fragmentée avec le reste, quelque soit l'échelle d'examen.
- 3- Il contient des "éléments distinctifs" dont les échelles sont très variées et couvrent une très large gamme.

2.2. CONSTRUCTION D'UN OBJET FRACTAL

Fractale, figure géométrique de structure complexe dont la création ou la forme met en jeu des règles utilisant le fractionnement. Cette construction est liée à l'invariance d'échelle où on répète la même transformation à des échelles de plus en plus petites. "Ainsi ; observe les naturalistes ; une puce est la proie de puces plus petites, qui se font mordre par des puces plus petites, et ainsi de suite jusqu'à l'infinie." De Jonathan Swift.

Exemple : Le tapis de Sierpinski

On commence l'itération avec un triangle équilatéral rempli ; on effectue ensuite un processus d'extraction en enlevant le triangle central dont les sommets sont les milieux des trois cotés du triangle initial. On répète le processus pour les trois triangles restants et ensuite pour les neuf suivants et ainsi de suite. (Figure II.1).



Figure II.1 : Le tapis de Sierpinski

2.3. CLASSIFICATION DES OBJETS FRACTALS

Les objets fractals peuvent être classés en deux catégories : géométriques et naturelles ou stochastiques.

LES FRACTALES GEOMETRIQUES

De telles fractales sont intéressantes pour leur aspect esthétique et non comme modèle de la nature. Il existe d'innombrables façons de produire des fractales géométriques. L'idée générale reste toutefois la même. On utilise un processus récurrent composé d'un initiateur (l'état initial) et d'un générateur (l'opération de récurrence). Et la figure obtenue en fin de compte (à l'ordre infini), si elle existe, est une fractale. Cette méthode itérative est valable théoriquement mais impossible à mettre en œuvre pratiquement. En effet, il n'est jamais possible de poursuivre une telle construction à l'infini, il faut s'arrêter à un moment donné. On obtient alors non pas la fractale elle-même mais l'un de ses ordres finis qui n'est au mieux qu'une approximation de la fractale, c'est une *pré-fractale* selon la dénomination de Mandelbrot. En général nous distinguons 3 types de fractales géométriques, en fonction de la manière dont elles sont construites :

Les fractales «particulaires» : Les fractales 'particulaires' sont constituées entièrement de points. De telles fractales géométriques sont généralement obtenues à partir de suites du type :

$$x_{n+1} = \sigma((r_n + (x_n - \alpha))/2)^{1/2} ; y_{n+1} = \pm \sigma((r_n - (x_n - \alpha))/2)^{1/2} \quad (\text{II.1})$$

avec $r_n = ((x_n - \alpha)^2 + (y_n - \beta)^2)^{1/2}$, où α et β sont deux constantes fixes, \pm désigne le signe de $(y_n - \beta)$, et σ est aléatoirement égal à $+1$ ou -1 . Les valeurs initiales sont $x_0 = y_0 = 0$. On obtient alors une suite qui, au bout de quelques itérations, donne des points situés à la frontière d'un certain ensemble, appelé **ensemble de Julia**. Cette frontière est appelée **courbe de Julia**. Ces courbes sont donc obtenues en traçant une suite de points qui finit par les recouvrir entièrement ; la courbe obtenue est une fractale dont la forme peut être très variée.



Figure II.2 : Courbe de Julia avec $\alpha=-1$ et $\beta=0$.

Les fractales «en cascade» : Les fractales 'en cascade' déduites d'une forme géométrique simple, dessinée un nombre de plus en plus important de fois entre deux ordres successifs, mais de plus en plus petits. Donnons un exemple basé sur des triangles équilatéraux. Partant d'un tel triangle on dessine, centré sur chacune de ses pointes, un triangle semblable, deux fois plus petit, et tourné vers le centre du triangle initial ; puis on recommence pour chacun des trois triangles ainsi obtenus. Le nombre de triangles tracés au total est : $T_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$. Ainsi à l'ordre 10, la figure contient 29524 triangles.



Figure II.3 : Cascade de triangles

Les fractales «linéaires» : Les fractales 'linéaires' sont composées, à tout ordre fini, de segments de droites ; chaque ordre se déduisant du précédent en remplaçant tout ou partie de ces segments de droites par une ligne polygonale semblable à une ligne fixée au départ. Un exemple est celui de la très connue île de Von Koch ou courbe de flocon de neige, généré en choisissant un triangle équilatéral comme initiateur.

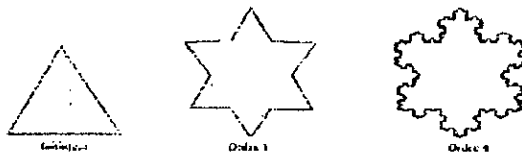


Figure II.4 : Courbe de flocon de neige.

LES FRACTALES NATURELLES

Nous avons donné jusqu'à présent des exemples de fractales déterministes mais on peut aisément définir des structures stochastiques. Dans ces structures la récurrence définissant la hiérarchie est régie par une ou plusieurs lois probabilistes précisant le choix de l'application de tel ou tel générateur à chaque itération. Ces fractales se distinguent des fractales géométriques par leur forme qui rappelle certains éléments de la nature. De telles formes font intervenir le hasard qui est le grand facteur de variété dans la nature.

Une fractale stochastique est homogène quand le volume ou la masse de structure, qui est une grandeur scalaire attachée au support de la fractale, est répartie uniformément à chaque niveau de hiérarchie ; c'est à dire que les divers générateurs servant à construire la fractale conservent le rapport de masse d'un niveau au suivant. Le rapport de masse peut lui-même varier : la fractale ainsi engendrée est dite hétérogène.

Cette notion de fractales stochastiques hétérogènes est importante lors de l'étude des mesures multifractales. Les fractales stochastiques sont, à quelques exceptions remarquables près, les seules rencontrées dans la nature. La génération d'une montagne est un exemple typique et particulièrement simple de fractales naturelles (Figure II.5). [MAH98]

L'introduction de probabilités permet de reproduire aisément la nature. Cela est tout à fait normal car chaque objet subit des influences externes qui pour lui sont aléatoires.



Figure II.5 : Un modèle de relief terrestre

2.4. LES FRACTALES IFS «Iterated Function System »

M.F.Barnsley appelle système de fonctions itérées la méthode de construction d'objets fractals auto-similaires. Cette méthode utilise des transformations affines pour exprimer les relations entre les différentes parties de l'image. Pour définir un IFS, il faut d'abord définir la transformation contractive.

La transformation contractive

Etant donné n'importe quels deux points : x_1, x_2 . Leur distance chacun de l'autre est de : $d(x_1, x_2)$. Transformons les par un mappage (plaçage ou dessin) contractif appelé w tel que :

$$x'_1=W(x_1), x'_2=W(x_2) ; \quad (II.2)$$

mesurons la distance entre les points transformés $d(x'_1, x'_2)$, et soit S le facteur de contractivité de W , alors la transformation W est dite contractive si :

$$d(x'_1, x'_2) < S. d(x_1, x_2) ; \quad 0 < S < 1 \quad (II.3)$$

Cela veut dire que l'application d'une transformation contractive donne toujours des points plus rapprochés.

Définition d'un IFS

Un IFS de facteur de contractivité S est un ensemble de n transformations contractives linéaires w_1, w_2, \dots, w_n définies dans un espace métrique (F, d) avec :

$$S = \max(S_i, i=1, \dots, n) \quad (II.4)$$

Où :

- F : l'espace des images
- d : une mesure de distance

Les transformations w_i composant un IFS sont des transformations affines.

Soit A un sous-ensemble d'un plan, considérons A comme une image I , le collage obtenu par l'application de N contractions à A est l'assemblage du résultat qui peut être exprimé comme cela :

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A) \dots \cup w_n(A) \quad (II.5)$$

Les w_i peuvent être décrites comme une combinaison de rotation de réduction d'échelle et d'une translation des coordonnées des axes dans un espace métrique à n dimension(s).

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \quad i=1,2,\dots,n. \quad (\text{II.6})$$

où a, b, c, d, e et f représentent des nombres réels (paramètres de transformations).

On peut associer des probabilités à ces transformations comme suit :

$$P_i = \frac{\text{Domaine de } w_i}{\text{Domaine de } I} = \frac{|a_i d_i - c_i b_i|}{\sum_{k=1,n} |a_k d_k - c_k b_k|} \quad (\text{II.7})$$

Si jamais un des nombres P_i est nul, il faudra le remplacer par une petite valeur (exemple 0.001) et ajuster les autres probabilités de façon à ce que leur somme soit égale à 1.

Exemple

Avec l'ensemble des w_i suivants :

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 & 0.00 \\ -0.04 & 0.85 & 1.6 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.26 & 0.00 \\ 0.23 & 0.22 & 1.6 \end{bmatrix},$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 & 0.00 \\ 0.26 & 0.24 & 0.44 \end{bmatrix}, \quad w_4 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 & 0.00 \end{bmatrix}.$$

On obtient la fameuse fractale qui est connue sous le nom de la *fougère de Barnsley*.



Figure II.6 : La fougère de Barnsley.

3. DIMENSION FRACTALE

3.1. INTRODUCTION

Une des caractéristiques principales de tout objet fractal est sa dimension fractale, qui mesure son degré d'irrégularité et de brisure. Fait très important, contrairement aux nombres de dimension habituels, la dimension fractale peut très bien être une fonction simple et même un nombre irrationnel.

Plusieurs définitions de dimensions fractales ont été proposées depuis le début de ce siècle, certaines ont un intérêt purement théorique, d'autres sont plus faciles à calculer numériquement. Il existe deux types de dimension fractale :

- Celles dont la définition dépend seulement des propriétés métriques de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble (attracteur ou non) ; la dimension d'homothétie, la dimension de Hausdorff et la dimension de Bouligand-Minkowski, toutes ces dimensions sont des définitions ensemblistes et feront l'objet des sections suivantes.
- Celles dont la définition, en plus des propriétés métriques, tient compte de la dynamique du système, i.e. d'une mesure de la répartition du temps de séjour d'une trajectoire précise ; la dimension de Corrélation, la dimension d'information et la dimension ponctuelle. (voir Annexe 2)

3.2. NOTION DE DIMENSION

Une méthode usuelle pour mesurer une longueur, une surface ou un volume, consiste à recouvrir ces ensembles de pavés (appartenant à l'espace dans lequel l'ensemble est plongé) dont la longueur, la surface ou le volume est pris comme unité de mesure. C'est précisément ce que l'on fait lorsqu'on calcule ces grandeurs au moyen d'intégrales multiples.

Si ϵ est le côté d'un pavé, la mesure obtenue est : $M = N \cdot \epsilon^d = N\mu$, où μ est l'unité de mesure (longueur, surface ou volume dans le cas présent, masse dans d'autres cas). L'exposant d détermine la dimension de l'ensemble considéré. Cantor, Peano, ... ont montré qu'il existait des objets pathologiques pour lesquels cette méthode était mise en défaut. Supposons en effet que l'on veuille appliquer la méthode précédente à la mesure de la longueur, entre deux points fixés, d'une côte très découpée. On constate rapidement que la longueur mesurée L dépend de l'unité de mesure choisie ϵ et croît indéfiniment lorsque ϵ décroît. Pour un étalon de mesure ϵ_1 , on trouve une longueur $N_1\epsilon_1$ mais un étalon de mesure plus petit ϵ_2 donne une nouvelle valeur plus grande. Et ceci sur une échelle allant de plusieurs dizaines de kilomètres à quelques mètres.

Lewis Fry Richardson étudia en 1961, les variations de la longueur approchée $L(\epsilon)$ de diverses côtes et constata que dans un large domaine de valeurs de ϵ , la longueur variait pratiquement suivant la loi :

$$L(\epsilon) = n(\epsilon)\epsilon \propto \epsilon^{-\rho} \quad (11.8)$$

La valeur de l'exposant ρ dépend de la côte choisie, et divers morceaux d'une même côte, considérés séparément, donnent souvent des ρ différents. Mandelbrot interpréta l'exposant $(1+\rho)$ de $1/N(\epsilon)$ comme une dimension fractale, à dénoter par D . Diverses définitions de la dimension fractale ont été proposées. Pour une structure fractale donnée, elles fournissent la plus part du temps la même valeur, mais ce n'est pas toujours le cas.

3.3. LA DIMENSION TOPOLOGIQUE

Cette dimension est l'entier n qui décrit l'espace euclidien de dimension n , \mathbb{R}^n . D'un point de vue géométrique, cette définition est très pauvre car elle ne donne aucune information sur la mesure (longueur, surface, volume) d'un ensemble et il est facile de construire des ensembles bornés de dimension topologique 1 dont la longueur est infinie.

3.4. LA DIMENSION D'HOMOTHETIE OU DIMENSION DE KOLMOGOROV-MANDELBROT

On est amené à croire qu'un objet géométrique à l'échelle près, peut engendrer les petits aussi bien que les gros détails. Un tel objet sera dit posséder une *homothétie interne*, ou être *self-similaire*. On sait que si on transforme une droite par une homothétie de rapport arbitraire, dont le centre lui appartient, on retrouve cette même droite, et il en est de même pour tout plan et pour l'espace euclidien tout entier. On peut généraliser même pour des dimensions non entières, comme l'indique cette définition :

Si un objet fractal S est partagé en N objet semblables à S dans une homothétie $1/r$, la dimension d'homothétie est le rapport :

$$D = \log N / \log 1/r. \quad (\text{II.9})$$

Il faut vérifier que les courbes ne possèdent pas de points doubles. Il n'en est pas de même avec d'autres courbes qui possèdent une infinité de points doubles. Il s'ensuit que pour elles, le concept de pavage change de signification et que la définition de la dimension d'homothétie devient discutable.

3.5. DIMENSION D'HOMOTHETIE GENERALISEE

Pour une figure découpable en N parties qui n'ont, deux à deux, aucun point commun et dont chacune se déduit du tout par une homothétie de rapport r_n , suivie éventuellement de rotation ou de symétrie et dans le cas où tous les r_n sont identiques, nous avons $D = \log N / \log(1/r)$. Afin de généraliser, considérons :

$$G(d) = \sum_{n=1}^N r_n^d \quad (\text{II.10})$$

Comme fonction de d , lorsque d varie de 0 à ∞ , cette fonction décroît de N à 0 de façon continue et passe une fois et une seule par la valeur 1. Donc l'équation $G(d)=1$ a une racine positive et une seule, qui sera désignée par D . Elle généralise la dimension d'homothétie.

3.6. DIMENSION DE HAUSDORFF-BESICOVITCH

Une première approche pour mesurer la dimension d'un objet E consiste à suivre la méthode usuelle de pavage de l'objet par des pavés de mesure $\mu = \varepsilon^d$ où d est la dimension de l'objet. Mais lorsque d est *a priori* inconnu, une solution consiste à faire des essais en prenant des unités de mesure $\mu = \varepsilon^\alpha$ avec un exposant α indéterminé.

Considérons par exemple un carré ($d=2$) de coté L et recouvrons-le de pavés de coté ε . La mesure est donnée par $M = N\mu$, où N est le nombre de pavés, c'est à dire $N = (L/\varepsilon)^d$. Ainsi $M = N\varepsilon^\alpha = (L/\varepsilon)^d \cdot \varepsilon^\alpha = L^2 \cdot \varepsilon^{\alpha-2}$.

Si on essaie $\alpha=1$, on trouve que $M \rightarrow \infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$: la longueur d'un carré est infinie.
 Si on essaie $\alpha=3$, on trouve que $M \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$: le volume d'un carré est nul.

La surface du carré n'est obtenue que lorsque $\alpha=2$ et sa dimension est celle d'une surface $d=\alpha=2$.

Le fait que cette méthode puisse s'appliquer pour α réel quelconque est très intéressant car il permet sa généralisation aux dimensions non entières. Tout d'abord l'objet étant de forme quelconque, il n'est pas en général possible de le recouvrir avec des pavés identiques de coté ε . Mais on peut faire le recouvrement de l'objet E avec des boules V_i dont le diamètre est inférieur ou égal à ε . Nous introduisons la quantité suivante :

$$\alpha(d, \varepsilon) = \inf \sum_i \varepsilon_i^d \quad \text{et} \quad \alpha(d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(d, \varepsilon) \tag{II.11}$$

Hausdorff montra qu'il existe une unique valeur critique D pour laquelle la mesure fait un saut de zéro à l'infini, tel que :

$$\begin{aligned} d < D &\Rightarrow \alpha(d) = +\infty \\ d > D &\Rightarrow \alpha(d) = 0 \end{aligned} \tag{II.12}$$

Cette valeur D est par définition la dimension de Hausdorff, et elle peut être quelconque entre zéro et l'infini. La dimension de Hausdorff est la valeur de α pour laquelle la mesure fait un saut de zéro à l'infini. Pour la valeur $\alpha=D_h$, cette mesure peut être quelconque entre zéro et l'infini. Le calcul numérique de (II.11) est délicat, car il est difficile de trouver le recouvrement minimal.

3.7. LA DIMENSION DE BOULIGAND-MINKOWSKI

Elle fut originalement définie par Kolmogorov dans le cas de dimensions entières, elle est donnée par :

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \tag{II.13}$$

Cette dimension permet de caractériser l'aspect auto-similaire (ou fractal) de l'ensemble. Les premières tentatives pour l'évaluer ont été basées sur cette définition.

Greenside et Al ont effectué une partition de la zone occupée par l'ensemble en cube de coté ε et ont compté le nombre de cubes $N(\varepsilon)$ occupés par au moins un point de l'ensemble. la variation de $N(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ doit donner la dimension recherchée.



Figure II.7 : Recouvrement d'un ensemble par des cubes.

Cette méthode s'est révélée impraticable car elle requiert un nombre très élevé ($\approx 10^6$) d'échantillons (si $\epsilon=0.01$ et $D_c=3$, $N(\epsilon)=\epsilon^{-D_c}=10^6$) et la convergence est très lente, de plus elle nécessite des calculateurs avec d'énormes capacités mémoires

4. FORMALISME MULTIFRACTAL

Le concept de mesure fractale est apparu dans les travaux de Mandelbrot avec l'élaboration des premiers modèles hiérarchiques de répartition du taux de transfert d'énergie dans les flots turbulents 3 D.

Une mesure permet d'associer des poids relatifs aux différentes parties d'un ensemble. On peut penser par exemple à des niveaux de gris d'une image, des répartitions de charges, de masses, d'énergie. Quand une mesure est distribuée sur un ensemble fractal ou qu'elle possède elle-même des propriétés d'auto-similarité et d'irrégularité, on dit que la mesure est fractale.

Le terme multifractal et la notion de spectre des singularités ont été introduits pour la première fois par Frisch et Parisi. A l'instar de la dimension fractale pour les ensembles irréguliers, le spectre $f(\alpha)$ des singularités peut être introduit comme une quantité qui donne une caractérisation relativement précise du degré de régularité et d'homogénéité d'une mesure fractale.

4.1. MESURE FRACTALE BINOMIALE

Cette mesure se construit de la manière suivante : un segment de longueur L sur lequel est répartie une mesure uniforme de densité 1/L est divisé en deux parties égales de longueur $l_0=l_1=L/2$, pour lesquelles on attribue les poids respectifs p_0 et p_1 . Ce processus est itéré à l'infini. La mesure totale est conservée si on prend soin de choisir : $p_0+p_1=1$. Chaque segment est libellé par la succession de choix (0 à gauche, 1 à droite) à chaque itération. A l'itération n, chaque segment est donc indicé par une suite $[\eta]=[\eta_0,\eta_1,\dots,\eta_k,\dots,\eta_n]$ où $\eta_k=0$ ou 1 et a pour longueur, $dl = \epsilon L = 2^{-n} L$. Son abscisse est sur le segment $E=[0,1]$ et est simplement décrite par le nombre en base deux : $x=0,\eta_0\eta_1\dots\eta_n$.

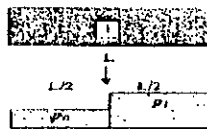


Figure II.8 : Première itération de la mesure binomiale.

Les poids $\mu(\epsilon, x_i)$ successifs des segments sont les $p_{[\eta]}$ où la normalisation à 1 se conserve pour chaque n : $\sum_i \mu(\epsilon, x_i) = \sum_{[\eta]} p_{[\eta]} = 1$.

On vérifie aisément que le poids associé à une suite $[\eta]$ a la forme générale, $\mu(\epsilon, x)=p_{[\eta]}=p_0^{n\varphi_0} p_1^{n\varphi_1}$, ($n\varphi_0$ et $n\varphi_1$) étant les nombres respectifs de 0 et 1 dans $[\eta]$: $\varphi_0=k/n$ et $\varphi_1=(n-k)/n$, $k=0,\dots,n-1$. A chaque valeur de x est associé un $\varphi_0(x)=1-\varphi_1(x)$. Ce poids se retrouve avec la fréquence :

$$N(\epsilon, x) = C_n^k = \frac{n!}{(n\varphi_0)!(n\varphi_1)!} \tag{II.14}$$

Le logarithme des poids sur un intervalle ε , divisé par le logarithme de cet intervalle, s'appelle *exposant de Hölder* et se note :

$$\alpha = \frac{\log \mu(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = -\varphi_0 \log_2 p_0 - \varphi_1 \log_2 p_1 \quad (\text{II.15})$$

Il mesure la singularité de la mesure au voisinage d'un point (via $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$), (ou il caractérise l'invariance d'échelle locale de la mesure), soit :

$$\mu(\varepsilon, x) = \varepsilon^{\alpha(x)} \quad (\text{II.16})$$

Ce comportement permet d'autre part de partitionner l'ensemble E en sous-ensembles de même α :

$$E = \cup E_\alpha \quad (\text{II.17})$$

Le nombre des sous-ensembles E_α est déterminé par le calcul de $N(\varepsilon)$. L'analogie de la dimension de Hausdorff pour le support des intervalles possédant le même α , s'écrit alors :

$$\delta(\alpha) = -\frac{\log N(\varepsilon, \alpha)}{\log \varepsilon} \quad (\text{II.18})$$

qui à la limite des n grands (ε petit) s'écrit :

$$\delta \cong -\varphi_0 \log_2 \varphi_0 - \varphi_1 \log_2 \varphi_1 \quad (\text{II.19})$$

Dans le cas binomiale, cette dimension fractale est parfaitement définie pour chaque ensemble E_α , puisque tous les paramètres sont déterminés (via $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$). E_α peut alors s'interpréter comme le sous-ensemble des points ayant le même comportement d'échelle, décrit par α .

4.2. MESURE FRACTALE MULTINOMIALE

Les résultats montrés dans le cas d'une mesure binomiale se généralisent aisément aux mesures multinomiales. En effet, si on considère b poids p_β ($0 \leq \beta \leq b-1$) on peut construire un processus analogue à celui de la mesure binomiale. Chaque segment de taille b^{-n} à l'itération n est indicé par une suite $[\eta]$ ou encore par une abscisse x , écrites en base b . Les intervalles b -adiques sont alors caractérisés par les fréquences φ_β de leurs digits β dans cette base b , de sorte que les expressions de α et δ se généralisent en :

$$\alpha = -\sum_{\beta} \varphi_{\beta} \log_b p_{\beta} \quad \text{et} \quad \delta = -\sum_{\beta} \varphi_{\beta} \log_b \varphi_{\beta} \quad (\text{II.20})$$

avec les contraintes

$$\sum_{\beta} \varphi_{\beta} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{\beta} p_{\beta} = 1. \quad (\text{II.21})$$

Dans le cas d'une mesure binomiale ($b=2$), δ est une fonction univoque de α , puisqu'on dispose de deux paramètres φ_0 et φ_1 dont la somme est normalisée à un. Pour $b>2$, cette relation n'est plus univoque (il existe $(b-2)$ paramètres supplémentaires) et les couples (α, δ) couvrent un certain domaine.

L'ensemble des $[\eta]$ (ou des x exprimés en base b) correspondant au même α est dominé par le terme de plus grande dimension $f=\max \delta$ (i.e. par le sous ensemble $N(\epsilon, \alpha)$ dont l'exposant δ est le plus grand) :

$$N(\epsilon, \alpha)_{\text{dominant}} \propto \epsilon^{-f(\alpha)} \tag{II.22}$$

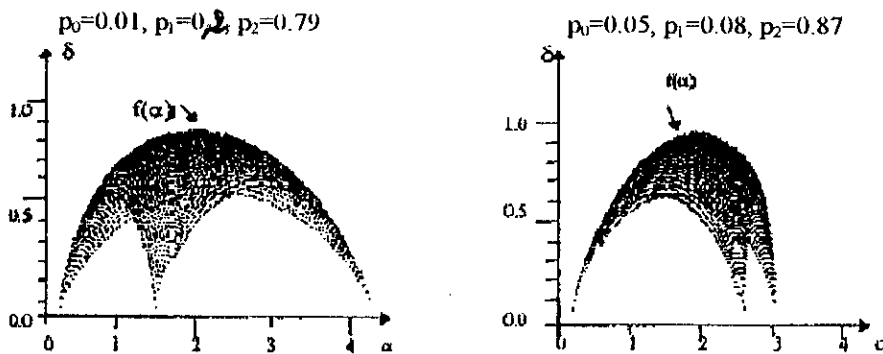


Figure II.9 : Distribution des dimensions de Hausdorff des sous-ensembles E_α .

4.3. LE FORMALISME MULTIFRACTAL

4.3.1. DEFINITION DU SPECTRE DES SINGULARITES

- Soit μ une mesure quelconque et $\text{supp}\mu$ son support. On appelle exposant de singularité au point $x_0 \in \text{supp}\mu$, la limite :

$$\alpha(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \mu(B_{x_0}(\epsilon))}{\ln \epsilon} \tag{II.23}$$

où $B_{x_0}(\epsilon)$ désigne une boule centrée en x_0 et de taille ϵ .

- Le spectre $f(\alpha)$ des singularités associées à la mesure μ est la fonction qui, à tout α , associe la dimension fractale de l'ensemble des points x_0 tel que $\alpha(x_0) = \alpha$:

$$f(\alpha) = d_F(\{x_0 \in \text{Supp}\mu / \alpha(x_0) = \alpha\}) \tag{II.24}$$

L'exposant de singularité en un point rend compte du degré local de régularité de la mesure considérée. La définition (II.23) de $\alpha(x_0)$ indique simplement que de manière générale, on pourra écrire :

$$\mu(B_{x_0}(\epsilon)) \approx C \epsilon^{\alpha(x_0)} \tag{II.25}$$

avec $\alpha \geq 0$, quelconque.

Le spectre $f(\alpha)$ des singularités décrit la répartition statique des exposants α sur le support de la mesure. Ainsi, si l'on pave le support de la mesure de "boîtes" de taille ε , alors le nombre de ces boîtes dont la mesure varie comme ε^α pour un α donné, se comporte de la façon suivante :

$$N_\alpha(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)} \quad (\text{II.26})$$

Le spectre $f(\alpha)$ décrit donc le comportement de l'histogramme $N_\alpha(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Remarquons que le spectre $f(\alpha)$, ainsi défini, pourrait être considéré comme la capacité d'un ensemble; il convient cependant d'être prudent quant à cette interprétation car $N_\alpha(\varepsilon)$ dans l'équation (II.26) réfère au recouvrement d'un ensemble qui évolue avec ε .

Une mesure sera qualifiée d'homogène, si son spectre des singularités est concentré en un seul point : un seul "type" de singularité permet de caractériser la mesure. Par contre, si le support de $f(\alpha)$ est large, la mesure considérée n'est pas homogène, l'exposant $\alpha(x)$ fluctue d'un point à l'autre du support de μ ; on parle dans ce cas de mesures multifractales.

Pour obtenir une description multifractale de μ , on calcule d'abord l'ensemble des exposants α possibles, puis on évalue la « taille » du sous-ensemble E_α de $[0,1[$ associée à α , en calculant sa dimension de Hausdorff $f(\alpha)$. Cette description en terme de $(\alpha, f(\alpha))$ est ainsi à la suite locale (via α) et globale (via $f(\alpha)$). Elle est désignée sous le nom de *spectre multifractal* de μ .

4.3.2. DEFINITION DU SPECTRE $\tau(Q)$

Considérons une mesure μ et un recouvrement de son support par des boules $B_i(\varepsilon)$ de rayon ε . Soit $N(\varepsilon)$ le nombre de boules nécessaires. On considère, pour tout $q \in \mathbb{R}$, la fonction de partition Z [ARN95] :

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q(\varepsilon) \quad (\text{II.27})$$

où l'on a posé $\mu_i(\varepsilon) = \mu(B_i(\varepsilon))$. On définit alors le spectre $\tau(q)$ à partir du comportement en loi de puissance de $Z(q, \varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$Z(q, \varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)} \quad (\text{II.28})$$

et le spectre des dimensions fractales généralisées comme le rapport :

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (\text{II.29})$$

$\tau(q)$ caractérise le comportement global de la mesure quand la taille des intervalles tend vers zéro et est relié à une notion de dimension généralisée. En effet : D_0 est la dimension fractale du support μ , $D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q$ est la dimension d'information, D_2 la dimension de corrélation.

Contrairement aux exposants de singularités $\alpha(x)$, les exposants $\tau(q)$ (ou les dimensions fractales généralisées) décrivent le comportement de quantités globales, $Z(q,\varepsilon)$, qui peuvent être considérées comme des valeurs moyennes sur le support de la mesure. De ce fait, on peut s'attendre à ce que le spectre $\tau(q)$ se prête mieux à une détermination numérique stable que le spectre $f(\alpha)$.

4.3.3. L'APPROCHE MULTIFRACTALE

Un des résultats fondamentaux qui justifie le calcul du spectre $\tau(q)$ est que celui-ci peut être relié au spectre $f(\alpha)$ des singularités. Si l'on considère α comme une variable continue de densité (à l'échelle ε) $\rho(\alpha)\varepsilon^{-f(\alpha)}$ et que l'on substitue dans l'équation (II.27) le comportement $\mu_i^q(\varepsilon) \sim \varepsilon^{q\alpha_i}$, alors $Z(q,\varepsilon)$ se réécrit sous la forme intégrale :

$$Z(q,\varepsilon) \cong \int \rho(\alpha)\varepsilon^{-f(\alpha)}\varepsilon^{q\alpha} d\alpha \tag{II.30}$$

A la limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, l'intégrale ci-dessus est dominée par le terme $\varepsilon^{\min_\alpha(q\alpha - f(\alpha))}$. En identifiant ce comportement et celui qui définit $\tau(q)$ (Eq.II.28), on en déduit :

$$\tau(q) = \min_\alpha(q\alpha - f(\alpha)) \tag{II.31}$$

$\tau(q)$ est donc relié au spectre $f(\alpha)$ des singularités par une transformation de Legendre. Remarquons que si $f(\alpha)$ est continûment dérivable, cette relation peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} q = \frac{df}{d\alpha} \\ \tau(q) = q\alpha - f(\alpha) \end{cases} \tag{II.32}$$

Nous appelons *formalisme multifractal* l'approche qui consiste à considérer le spectre $f(\alpha)$ des singularités comme la transformée de Legendre (inverse) du spectre $\tau(q)$:

$$f(\alpha) = \min_q(q\alpha - \tau(q)) \tag{II.33}$$

que l'on peut réécrire lorsque $\tau(q)$ est continûment dérivable, sous la forme :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{d\tau}{dq} \\ f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \end{cases} \tag{II.34}$$

Remarquons que si $f(\alpha)$ est C^2 , la condition (II.31) implique que $d^2f/d\alpha^2 < 0$ quelque soit α ; f convexe.

5. CONCLUSION

Il est important de mentionner que toutes les dimensions fractales, révèlent quelques aspects différents de la structure d'un élément donné. Mais ensemble, elles constituent l'outil fondamental pour classer les ensembles fractals. En fait les fractales sont définies en termes de dimension. Mais la connaissance de la dimension fractale d'un ensemble est insuffisante pour caractériser sa géométrie. Il s'avère nécessaire de caractériser la distribution singulière des mesures associées à chaque point de cet ensemble, et les mesures multifractales $f(x)$ et $\tau(q)$ sont des réponses à la définition des hétérogénéités des mesures.

Le problème central de la théorie multifractale est de relier les deux descriptions $(\alpha, f(\alpha))$ et $(q, \tau(q))$. Ceci a d'importantes applications. En effet $\tau(q)$, est généralement beaucoup plus facile à calculer sur des données expérimentales que $(\alpha, f(\alpha))$: $\tau(q)$ est obtenu par un moyennage sur un grand nombre d'intervalles suivi par un passage à la limite. α est plus sensible au bruit, puisqu'il est calculé indépendamment en chaque point. En ce qui concerne $f(\alpha)$, son calcul implique l'évaluation d'une dimension de Hausdorff, tâche généralement difficile. Sous des hypothèses assez générales, il a été prouvé que :

$$f(\alpha) \leq \inf_q \{ q\alpha - \tau(q) \}$$

Et comme, nous l'avions déjà vu pour les mesures multinomiales, on a une égalité, et la dimension de Hausdorff est obtenue par la transformée de Legendre de $\tau(q)$, et $D(\alpha)$ a une forme de cloche. Cette forme est aussi observée pour un grand nombre de phénomènes naturels. Cependant, elle n'est en aucun cas une propriété générale des spectres multifractals, puisqu'il a été prouvé que toute fonction réglée peut être le spectre d'une mesure multifractale.

Partie B:

***LES APPROCHES FRACTALE ET
MULTIFRACTALE EN ANALYSE
D'IMAGE***

1. INTRODUCTION

La géométrie fractale est sujette à une attention et un intérêt croissant quant à l'utilisation des modèles fractals en analyse d'images. Il a été montré que la plupart des surfaces naturelles sont des fractales et que les images d'intensité de ces surfaces sont aussi fractales. L'image est considérée dans un espace tridimensionnel, constitué de la position du pixel et de son intensité $(i, j, I(i, j))$.

Pentland a montré que pour des textures homogènes, la surface d'un objet 3-D est fractale si et seulement si son image est fractale, et que la dimension fractale reste la même. La dimension fractale d'une image est comprise entre 2 et 3. Elle mesure le degré d'irrégularité et de rugosité de la surface des niveaux de gris dans un espace 3D ; plus la texture est lisse (respectivement rugueuse), plus la dimension fractale est proche de 2 (respectivement 3). La dimension fractale ne suffit en général pas à caractériser une texture. Il faut souvent lui ajouter le paramètre de lacunarité, qui est un paramètre fractal du second ordre mesurant la géométrie d'un ensemble de pixels par rapport au reste de l'image.

L'analyse multifractale est aussi adaptée à l'imagerie, elle considère l'intensité lumineuse associée à chaque pixel comme une mesure, et la description multifractale se fait par le calcul des paramètres multifractals, i.e. par le calcul des spectres $f(\alpha)$ et $\tau(q)$.

Cette seconde partie de ce chapitre est consacrée au calcul des paramètres fractals et multifractals dans le cas des images. Des algorithmes de calcul de la dimension fractale globale, dimension fractale locale, la lacunarité, les dimensions fractales généralisées, le spectre $f(\alpha)$ et le spectre $\tau(q)$ sont étudiés et appliqués sur des images.

2. ANALYSE FRACTALE

2.1. CALCUL DE LA DIMENSION FRACTALE

Nous avons vu dans la première partie que la dimension fractale ou d'homothétie d'un ensemble A est donnée par la relation :

$$1 = N \cdot r^D \text{ ou } D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (\text{II.35})$$

Les surfaces naturelles, en général, ne possèdent pas une auto-similarité déterministe. Cependant, elles montrent une auto-similarité statistique et la définition précédente reste applicable. Si la définition de la dimension fractale par l'auto-similarité est directe, il est souvent difficile de l'estimer à partir des données d'une image directement. Cependant, une mesure ayant rapport avec la dimension fractale, la dimension de boîte, peut être plus simplement calculée.

2.1.1. LA METHODE DE BOITES

Soit X un espace métrique et $Y \subset X$. Soit $N_Y(\epsilon)$ le nombre minimal de boules de rayon inférieur ou égal à ϵ qui est nécessaire pour recouvrir Y. La dimension fractale de $D_1(Y)$ de Y est :

$$D_f(Y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup \frac{\log N_f(\epsilon)}{\log 1/\epsilon} \tag{II.36}$$

La dimension de boîte $D_b(Y)$ est définie de la même manière sauf que l'on ne considère pas des boules de rayon inférieur ou égal à ϵ mais des boîtes de rayon ϵ . Les dimensions D_f et D_b sont égales si l'on fait tendre ϵ vers zéro. Sur une image, la résolution étant fixée et aucun modèle ne nous permettant de prévoir le comportement infinitésimal, on ne peut calculer explicitement la limite mais nous calculons la pente du nuage de points $(\log N_f(\epsilon), \log \epsilon)$. Pour une image, il suffit de diviser l'espace tridimensionnel constitué par les coordonnées des pixels et du niveau d'intensité en une grille de boîtes de côté L et de compter le nombre N de boîtes non vides [KEL89].

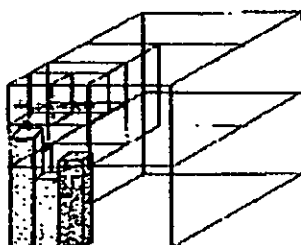


Figure II.10 : Grille tridimensionnelle.

Si $N(L)$ est compté pour plusieurs valeurs de L , la dimension est alors estimée comme étant la pente de l'approximation linéaire au sens des moindres carrés des coordonnées $\{\log(L), -\log(N(L))\}$.

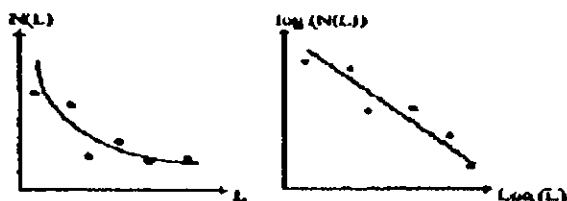


Figure II.11 : Exemple de régression linéaire du nuage de points $(\log L, \log N(L))$.

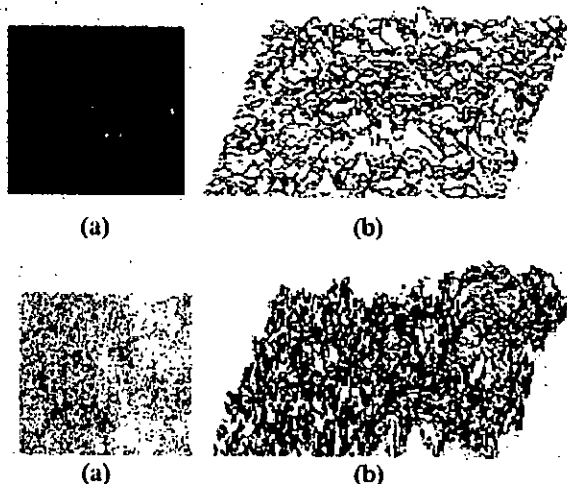


Figure II.12 : Représentation en surface d'intensité d'images (a) image d'une texture en niveaux de gris, (b) représentation graphique de la surface d'intensité.

2.1.2. LA METHODE DE VOSS

La méthode de Voss a pour but d'estimer le nombre moyen, noté $N(r)$, de boîtes cubiques de côté r fixé, nécessaire pour recouvrir l'image considérée comme une surface dans l'espace R^3 . Pour cela, on estime $P(m, r)$ qui est la probabilité qu'une boîte de taille r , centrée sur un point arbitraire de la surface et contenant m points de l'ensemble, par l'expression :

$$\forall r, \sum_{m=1}^{N_p} P(m, r) = 1 \quad (II.37)$$

où N_p est le nombre de points possibles dans le cube.

Si $N(r, m)$ est le nombre moyen de boîtes contenant m points et K le nombre de points sur lesquels se fait le calcul (taille de la région), alors :

$$m \cdot N(r, m) = K \cdot P(m, r) \quad (II.38)$$

L'estimation du nombre moyen de boîtes disjointes nécessaires pour recouvrir la surface est :

$$N(r) = \sum_{m=1}^N N(m, r) = K \sum_{m=1}^{N_p} \frac{P(m, r)}{m} \quad (II.39)$$

L'estimation aux moindres carrés de la pente du nuage de points $(\ln(r), -\ln N(r))$, obtenue avec des boîtes de tailles r croissantes, donne l'estimation de la dimension fractale. L'algorithme II.1. [BOL95] présente ce calcul.

Initialisation :

POUR $r=1$ à r_{max} et $m=1$ à r^3 **FAIRE**

$P(m, r)=0$

Pour tout pixel de l'image FAIRE

DEBUT

POUR tout $r=1$ à r_{max} **FAIRE**

DEBUT

Centre un cube de côté r sur le pixel $(x, y, f(x, y))$

Compter le nombre m de pixels de l'image qui appartiennent à ce cube

Incrémenter $P(m, r)$ de 1

FIN

FIN

POUR tout $r=1$ à r_{max} **FAIRE**

$$N(r) = \sum_{m=1}^{N_p} \frac{P(m, r)}{m}$$

Estimer par la méthode des moindres carrés la pente D de la courbe $(\ln(r), -\ln N(r))$

Algorithme II.1. Estimation de la dimension fractale par la méthode de VOSS

Une amélioration peut être apportée à cet algorithme en prenant en considération l'effet de quantification. En effet, quand la dimension fractale de la surface approche 3.0, la surface devient très irrégulière, et après quantification, les points sur la surface en niveaux de gris sont largement espacés. Ceci revient à avoir un grand nombre de boîtes de petit L avec

seulement le point central à l'intérieur d'elles, diminuant effectivement la dimension estimée. Pour diminuer cet artefact introduit par le processus de quantification, une nouvelle version de l'algorithme d'estimation de la probabilité a été étudié. Il s'agit de la méthode d'interpolation.

2.1.3. LA METHODE D'INTERPOLATION [KEL89]

Le but consiste à approximer la surface fractale entre le centre du cube et chacun de ses voisins par une interpolation linéaire. Pour chaque y , chaque point $(x,y,I(x,y))$ sur la surface est connecté aux points $(x-1,y,I(x-1,y))$ et $(x+1,y,I(x+1,y))$ avec des lignes tridimensionnelles digitales. Après que ces lignes soient générées pour tous les y , le processus est répété en maintenant x fixé. Ce nouvel ensemble de points de surface est utilisé pour l'algorithme de comptage de boîtes. La dimension estimée à partir de cet algorithme approxime mieux la dimension fractale de la surface d'intensité de l'image que les méthodes précédentes.

2.1.4. LA METHODE RDBC (Relative Differential Box-counting Approach) [YUX97]

Soit G le niveau de gris maximum de l'image de taille $M \times M$. A l'intérieur de la $k^{\text{ième}}$ grille de taille $s \times s$, soient $u_s(i,j)$ et $b_s(i,j)$ les niveaux de gris maximum et minimum (respectivement). Nous définissons :

$$d_s(i,j) = u_s(i,j) - b_s(i,j) \quad (\text{II.40})$$

En prenant la contribution de toutes les grilles, nous avons :

$$N(s) = \sum_{i,j} \text{ceil} \left[k d_s(i,j) / s \right] \quad (\text{II.41})$$

où : k est le coefficient de modification de coordonnées d'expression $k=M/G$.

$\text{ceil}[x]$ est le plus petit entier plus grand à x .

La dimension fractale est ainsi obtenue en calculant la régression linéaire du nuage de points $(\log N(s), \log 1/s)$.

L'avantage de la méthode RDBC est que les limites supérieure et inférieure de la longueur du côté de la grille peuvent être déterminées en fonction de la taille de l'image. En réalité, il est inexact de supposer que la rugosité est une constante arbitraire pour les grandes ou petites échelles, ainsi la considération des limites de l'échelle est nécessaire.

La limite supérieure s_{\max} satisfait la condition suivante:

$$\text{ceil} \left[M / s_{\max} \right] + 1 \leq \text{ceil} \left[M / (s_{\max} - 1) \right] \quad (\text{II.42})$$

Par contre la limite inférieure s_{\min} est déterminée par :

$$s_{\min} = \frac{M}{N(s_{\min})^{1/D}} \quad (\text{II.43})$$

Le dénominateur de cette équation atteindra sa valeur extrême de $M^{2/3}$ si $N(s)$ est M^2 et D est égale à 3, ainsi pour l'analyse des images 2D, nous avons :

$$s_{\min} = \frac{M}{M^{2/3}} = M^{1/3} \quad (\text{II.44})$$

Pour le cas d'une image de taille 256x256 : $s_{\max}=16$ et $s_{\min}=6$.

2.1.5. LA METHODE DE BLANKET [MAE96]

Dans cette méthode, nous considérons l'image comme un relief surface dans laquelle les hauteurs sont proportionnelles aux niveaux de gris de l'image. Tous les points de distance ε des deux cotés de la surface image constituent une couverture (blanket) d'épaisseur 2ε . Le recouvrement blanket est défini par sa surface supérieure u_ε et sa surface inférieure b_ε . Les surfaces des recouvrements pour les différentes valeurs de ε peuvent être calculées.

En premier, pour chaque pixel (i,j) de niveau de gris $I(i,j)$ nous faisons les initialisations suivantes :

$$u_0(i,j) = b_0(i,j) = I(i,j). \quad (\text{II.45})$$

Puis les surfaces de blanket sont définies comme suit :

$$u_\varepsilon(i,j) = \max\left\{u_{\varepsilon-1}(i,j) + 1, \max_{d(i,j,m,n) \leq 1} u_{\varepsilon-1}(m,n)\right\} \quad (\text{II.46})$$

et

$$b_\varepsilon(i,j) = \min\left\{b_{\varepsilon-1}(i,j) - 1, \min_{d(i,j,m,n) \leq 1} b_{\varepsilon-1}(m,n)\right\} \quad (\text{II.47})$$

où $d(i,j,m,n)$ est la distance entre le pixel (i,j) et le pixel (m,n) . Le volume de blanket est calculé d'après les équations précédentes comme suit :

$$v_\varepsilon = \sum_{i,j} (u_\varepsilon(i,j) - b_\varepsilon(i,j)) \quad (\text{II.48})$$

la surface de la région peut être mesurée comme suit :

$$A(\varepsilon) = \frac{(v_\varepsilon - v_{\varepsilon-1})}{2} \quad (\text{II.49})$$

Sachant que la région d'une surface fractale se comporte tel que :

$$A(\varepsilon) = F\varepsilon^{2-D} \quad (\text{II.50})$$

où F est une constante et D est la dimension fractale de l'image.

Ainsi, la dimension fractale de l'image D peut être obtenue par le calcul de la régression linéaire du nuage de points $(\log A(\varepsilon), \log \varepsilon)$.

APPLICATION

Les résultats de calcul des dimensions fractales de l'image «00069031.bmp», sont résumés dans le tableau 1.



Figure II.13 : Image 00069031.bmp.

Sachant que la taille de l'image est de 256 X 256. Pour les trois premières méthodes le calcul est fait pour des cotés de boites allant de $L_{min}=1$ à $L_{max}=65$, donnant 33 valeurs sur lesquelles on effectue l'approximation au sens des moindres carrés. Pour la méthode RDBC, nous avons travaillé avec des cotés de boites allant de $L_{min}=6$ à $L_{max}=16$ avec un pas de 2. Pour la méthode de Blanket, nous avons pris 2ϵ égale à 65.

Méthode	Résultat de calcul
Boite	2.063
Voss	2.157
Interpolation	2.432
RDBC	2.465
Blanket	2.290

Tableau 1 : Les résultats de calcul de la dimension fractale globale sur l'image 00069031.bmp.

2.2. CALCUL DE LA DIMENSION FRACTALE LOCALE

Dans ce cas, nous nous sommes intéressés au calcul de la dimension fractale localement, i.e., en chaque pixel de l'image. Pour cela plusieurs méthodes sont étudiées, tel que : La méthode de Blanket, la méthode selon le modèle fbm et la méthode Spectrale.

2.2.1. METHODE DE BLANKET

Il s'agit du même algorithme vu dans le cas de la dimension globale, mais dans ce cas le volume de blanket est calculé en tout point de l'image comme suit :

$$v_{\epsilon}(i, j) = \sum_{i, j} (u_{\epsilon}(i, j) - b_{\epsilon}(i, j)) \quad (\text{II.51})$$

La somme \sum se fait sur le voisinage du pixel. La surface de la région autour du pixel (i, j) peut être mesurée comme suit :

$$A(i, j, \varepsilon) = \frac{(v_\varepsilon(i, j) - v_{\varepsilon-1}(i, j))}{2} = F\varepsilon^{2-D(i, j)} \quad (\text{II.52})$$

où F est une constante et $D(i, j)$ est la dimension fractale locale de l'image. $D(i, j)$ est obtenue par le calcul de la régression linéaire du nuage de points $(\log A(i, j, \varepsilon), \log \varepsilon)$.

2.2.2. METHODE BASEE SUR LE MODELE FBM

Pour décrire les phénomènes fractals naturels, le modèle fractal le plus utilisé est le modèle du mouvement Brownien fractionnaire (fbm) de Mandelbrot et Van Ness. Dans ce cas, la structure de dimension n est supposée être générée par un mouvement Brownien n -dimensionnel.

Un processus fbm peut être décrit par un seul paramètre : la dimension fractale D . fbm est une extension du concept du mouvement Brownien qui a joué un rôle important en mathématique et en physique. Ce type de mouvement est apparenté à une marche aléatoire (une séquence d'étapes dont la taille et la direction sont déterminées par le hasard).

Une image digitalisée d'une surface peut être modélisée comme étant une généralisation de traces fbm. Considérons l'intensité d'un pixel de l'image comme étant une hauteur au-dessus d'un certain plan. Alors, les variations d'altitude d'un marcheur suivant un chemin en ligne droite à vitesse constante dans le plan x - y est un mouvement Brownien fractionnaire. Le modèle fbm considère les surfaces rugueuses comme étant le résultat final de marches aléatoires. Une surface d'intensité d'une image de scène réelle, peut être vue comme étant le résultat final d'une marche aléatoire. C'est à partir de ce principe que Pentland et Kube ont montré que la mesure de la dimension fractale d'image de surfaces fractales peut être utilisée pour trouver la dimension fractale de ces surfaces. Dans ce qui suit, nous proposons une méthode d'estimation de la dimension fractale basée sur le modèle fbm.

Si une image est supposée être générée par un mouvement brownien bi-dimensionnel alors, pour chaque distance $\|x_1 - x_2\|$ entre deux points de l'image, l'approximation suivante est vérifiée :

$$E\left(\|I(x_1) - I(x_2)\|\right) \propto \|x_1 - x_2\|^H \quad (\text{II.53})$$

avec $I(x)$ l'intensité au point x , E l'espérance mathématique et H est appelé le coefficient de Hurst. Pour un fbm bidirectionnel, la dimension fractale est reliée au coefficient de Hurst par :

$$D=3-H. \quad (\text{II.54})$$

Pour chaque pixel, il existe un nombre fixe de distances avec les autres pixels. L'espérance pour les différences d'intensité à différentes échelles dans l'image peut être estimée à partir de la moyenne des différences entre tous les pixels qui sont séparés par la même distance. Alors, la dimension D est calculée à partir de la pente de la régression linéaire du nuage de points $(\log \|x_1 - x_2\|, \log E)$.

2.2.3. METHODE SPECTRALE

Le spectre de puissance d'une surface fractale $P(k_x, k_y)$ est donnée par la relation suivante :

$$P(k_x, k_y) = \frac{1}{((k_x^2 + k_y^2)^{1/2})^\beta} = \frac{1}{\rho^\beta} \quad (\text{II.55})$$

où

$\beta > 0$,

k_x, k_y : les deux coordonnées spatiales fréquentielles dans les directions x et y respectivement,

ρ : la fréquence radiale, égale à : $(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$,

θ : la fréquence angulaire $\theta = \arctan(k_y / k_x)$,

Puisqu'il est admis que les images approximent les surfaces fractales, (En effet, une image est considérée comme une fractale aléatoire [BUR93]), on peut utiliser l'équation précédente pour calculer la dimension fractale de l'image. En effet l'exposant β est en relation avec la dimension fractale D :

$$\beta = 8 - 2D \quad (\text{II.56})$$

Ainsi, la dimension fractale D peut être calculée à partir de l'exposant $-\beta$ de l'équation du spectre de puissance. Il suffit simplement de représenter le spectre de puissance suivant une échelle logarithmique ; alors la courbe en loi de puissance devient une ligne droite avec une pente équivalente à $-\beta$. Pour une image la procédure donne une valeur globale de la dimension fractale. Mais dans notre cas, on s'intéresse à l'estimation de la dimension locale, c'est à dire une valeur de la dimension fractale en chaque pixel de l'image.

Pour cela, on présente une méthode basée sur la convolution de l'image par le filtre rectangulaire $w(x,y)$. La relation de ce filtre convolutif est :

$$h_{k_x, k_y}(x, y) = w(x, y) \exp[2\pi j(k_x x + k_y y)] \quad (\text{II.57})$$

où x, y : les coordonnées spatiales.

k_x, k_y : les coordonnées du plan des fréquences.

Ce filtre échantillonne le spectre de puissance à différentes fréquences pour chaque point de l'image. La procédure est identique à l'approche décrite pour le calcul de la dimension globale à partir du spectre de puissance global, excepté que dans ce cas, l'exposant $-\beta$ est calculé à partir de la courbe en loi de puissance qui approxime le spectre de puissance local au point (x, y) . L'algorithme est décrit comme suit :

1. Choisir N filtres $h_{p1,0}, h_{p2,0}, \dots, h_{pN,0}$ avec θ fixé.
2. Convoluer l'image avec les N filtres, pour échantillonner le spectre de puissance à N fréquences pour chaque point de l'image.
3. Prendre le carré de l'amplitude des sorties des filtres. Ceci donnera N points pour chaque point de l'image.
4. Trouver la courbe en loi de puissance qui approxime le mieux les N points, pour chaque point de l'image. Exprimer l'exposant de la courbe de la meilleure approximation linéaire par $-\beta(x,y)$.

5. Calculer $D(x,y)$ pour chaque point de l'image à partir de (II.56).

Pour avoir la dimension fractale globale, on calcule la moyenne des dimensions fractales locales.

Le filtre rectangulaire réalise une bonne localisation spatiale, il souffre néanmoins d'une mauvaise localisation dans le domaine fréquentiel, ce qui affecte défavorablement la mesure de la dimension fractale. Pour remédier à ça, nous utilisons le même algorithme mais nous utilisons un ensemble de filtres de Gabor. La procédure est identique, mais la relation du filtre est la suivante :

$$h_{k_x, k_y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \exp\left[-(x^2 + y^2) / 2\sigma^2\right] \exp\left[2\pi j(k_x x + k_y y)\right] \quad (\text{II.58})$$

La fenêtre rectangulaire est remplacée par la fenêtre de Gauss. L'algorithme spectral utilisant le filtre de Gabor est appelé dans la suite de ce travail algorithme G-spectral.

Application :

Les résultats de calcul de la dimension fractale locale par ces différents algorithmes, appliqués à l'image 00069031.bmp sont les suivants :

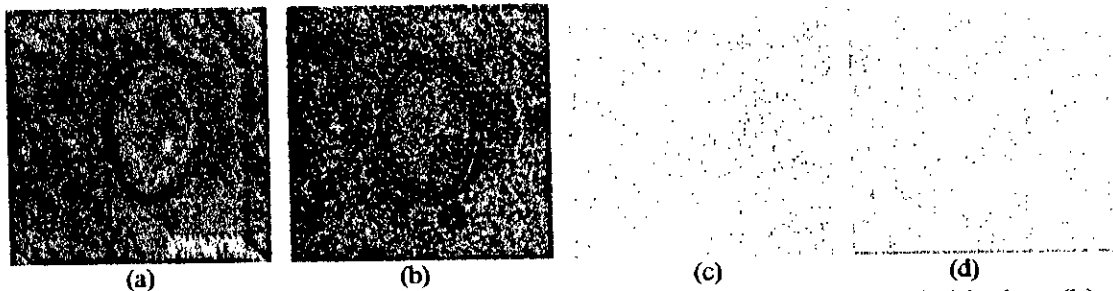


Figure II.14 : Les images de dimensions fractales locales, (a) Méthode de blanket, (b) Méthode selon le modèle fbm, (c) Méthode spectrale, (d) Méthode G-spectrale.

Les images de dimensions ont été quantifiées en niveaux de gris entre 0 et 255.

Pour les différentes méthodes, nous avons utilisé ces différents paramètres :

La méthode de Blanket : l'épaisseur de Blanket 2ϵ est de 65.

La méthode utilisant le modèle fbm : la distance maximale entre chaque deux points de l'image est de $r_{\max}=5$.

La méthode spectrale : cinq fréquences radiales sont utilisées : $\rho_1=19$, $\rho_2=19.3$, $\rho_3=19.5$, $\rho_4=19.7$, $\rho_5=20$ avec $\theta=90^\circ$.

Pour la méthode G-spectrale, nous avons utilisé les mêmes paramètres que la méthode spectrale avec $\sigma=2$.

Pour $\theta=90^\circ$ et les quatre valeurs des fréquences radiales suivantes : 19, 19.4, 19.7 et 20, la dimension globale estimée par la méthode spectrale est de : **2.416**. Pour les mêmes paramètres avec $\sigma=2$, la dimension estimée en utilisant le filtrage de Gabor est de **2.367**. Avec la méthode fbm, et pour $r_{\max}=5$, la dimension estimée est de : **2.236**.

Dans la partie C de ce chapitre, nous verrons une autre application des algorithmes d'estimation de la dimension fractale locale dans le cadre de la détection de contours.

2.3. LACUNARITE

La lacunarité est un paramètre fractal du second ordre qui permet de mesurer la géométrie d'une région R relativement au reste d'une image S :

$$\Lambda = \int_S \left(\frac{\iint_{B(s,r)} I_R(r,\theta) dr d\theta}{m} - 1 \right)^2 ds \quad (\text{II.59})$$

où :

- $B(s,r)$ est le disque de centre s et de rayon r ,
- m est le nombre moyen de points de R dans un disque de rayon r ,
- I_R est la fonction indicatrice sur R .

La lacunarité est faible quand la texture est fine et forte pour une texture grossière, et elle peut se calculer de deux manières :

1. Soit en appliquant la formule (II.60), en faisant une binarisation préalable de l'image par seuillage.

$$\Lambda(r) = \sum_{s \in S} \left(\frac{\sum_{i \in R \cap B(s,r)} I(i,j)}{m} - 1 \right)^2 \quad (\text{II.60})$$

où m est la moyenne des niveaux de gris de l'image.

2. Soit à partir des probabilités $P(m,r)$, obtenues par la méthode de Voss, alors :

$$\Lambda(r) = \frac{M^2(r) - (M(r))^2}{(M(r))^2} \quad (\text{II.61})$$

avec

$$M(r) = \sum_{m=1}^{N_p} m \cdot P(m,r) \quad \text{et} \quad M^2(r) = \sum_{m=1}^{N_p} m^2 \cdot P(m,r) \quad (\text{II.62})$$

Il faut noter que $M(r)$ et $M^2(r)$ sont des paramètres statistiques. $M(r)$ n'est autre que la moyenne statistique des pixels appartenant à la boîte, $M^2(r)$ est le moment d'ordre 2 ; la lacunarité est le rapport entre la variance et la moyenne élevée au carré, elle est toujours positive et inférieure ou égale à 1 et dépend de la longueur du côté de la boîte r .

APPLICATION

Le calcul de la lacunarité pour différentes longueurs de boîtes, par utilisation de la formule (II.61) appliquée sur la même image 00069031.bmp, donne la courbe suivante :

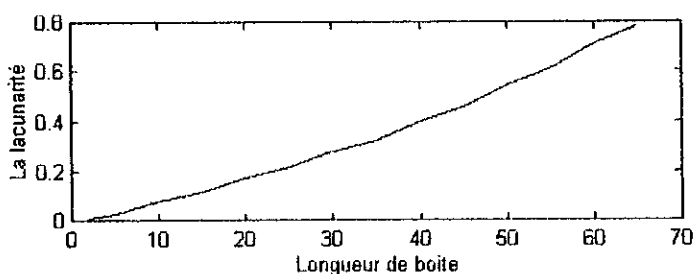


Figure II.15: Estimation de la lacunarité pour différentes valeurs de la taille de boîtes pour l'image 00069031.bmp.

La lacunarité montre un comportement différent de celui de la dimension fractale. Mandelbrot et Voss ont montré que différents ensembles fractals peuvent avoir la même dimension et avoir d'une manière frappante différentes apparences ou textures. Des simulations de surfaces fractales présentent mêmes dimensions fractales constantes, pour des textures visuellement différentes. Donc, la dimension fractale seule n'est pas une information suffisante pour décrire des textures. En fait, la dimension fractale est suffisante pour caractériser des surfaces fractales seulement si elles présentent la même lacunarité.

3. ANALYSE MULTIFRACTALE

Avant de donner les algorithmes d'estimation des paramètres multifractals dans le cas des images, nous donnons d'abord un exemple des mesures multinomiales appliquées sur des images de synthèse.

3.1. APPROCHE MULTINOMIALE EN ANALYSE D'IMAGE [MAH98]

Rappel

En une dimension sur le segment $[0,1]$, cette mesure dépend d'un simple paramètre m_0 sur le segment $[0,1/2]$ avec $m_1=1-m_0$. On répartit la mesure sur chaque demi-segment jusqu'à la précision voulue. Si l'on considère un segment de taille 2^{-n} , il porte la mesure $m_0^{n_0} m_1^{n_1}$ avec $n_0+n_1=n$. Le segment $[0,1]$ est divisé en 2^n intervalles de taille 2^{-n} , dont la mesure est déterminée par le facteur n_0 , nombre de fois où le coefficient m_0 a été appliqué pour arriver à ce segment élémentaire. Il existe $C_n^{n_0}$ segments portant la même mesure. Ces segments correspondent à une singularité :

$$\alpha = -\phi_0 \log_2 m_0 - \phi_1 \log_2 m_1 \quad (\text{II.63})$$

où ϕ_i est le rapport n_i/n . Connaissant le nombre d'intervalles possédant la même singularité, il nous est facile de déterminer $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = -\phi_0 \log_2 \phi_0 - \phi_1 \log_2 \phi_1 \quad (\text{II.64})$$

En deux dimensions, nous ne pouvons plus faire dépendre la mesure d'un seul paramètre, mais de 3, qui déterminent 4 coefficients, d'où le nom de la mesure quadrimomiale.

Un pavé de taille $2^{-n} \times 2^{-n}$ porte une mesure, il existe $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}$ pavés de même mesure, où comme précédemment les quatre entiers n_i sont compris entre 0 et n et ayant pour somme 1.

A partir de ce nombre on peut évaluer $f(\alpha)$, par :

$$f(\alpha) = - \sum_{i=1}^4 \phi_i \log_2 \phi_i \tag{II.65}$$

avec α donné par :

$$\alpha = - \sum_{i=1}^4 \phi_i \log_2 m_i \tag{II.66}$$

Pour le cas mono-dimensionnel, α et $f(\alpha)$ ne dépendent que d'un paramètre n_0 , ce qui permet de tracer de manière paramétrique $f(\alpha)$. Ici, ce n'est pas le cas, la même valeur de α peut être obtenue par plusieurs quadruplés $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$, soient plusieurs valeurs différentes pour f . On obtient alors pour f une région du plan, et non une courbe. Cette indétermination est levée en calculant D_q . En effet, sachant que :

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum p_i^q(l)}{\log l} \tag{II.67}$$

où $p_i(l)$ est la mesure du sous-ensemble d'indice i et de rayon l .

Et en regroupant cette somme par valeurs de p_i égales nous donne :

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{n_i} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! n_4!} \prod_{i=1}^4 m_i^{n_i}}{\log 2^{-n}} \tag{II.68}$$

soit

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\sum_{i=1}^4 m_i^q \right)^n}{-n \log 2} = - \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_{i=1}^4 m_i^q \tag{II.69}$$

La transformée de Legendre de $(q-1)D_q$ nous donne la limite supérieure du nuage obtenu précédemment pour f . En effet, si on considère chaque quadruplé $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ défini par un ensemble et que l'on rappelle que la dimension fractale de la réunion de deux ensembles est la plus grande des dimensions fractales des deux ensembles. En conséquence, le spectre est la borne supérieure de nuage de points. Le processus de génération d'une image de mesure quadrimomiale consiste à appliquer le facteur m_i au coin supérieur gauche, etc., comme l'indique la figure suivante.

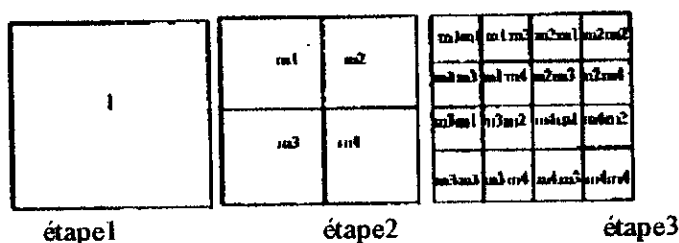


Figure II.16 : Premières itérations de la génération des mesures quadrimomiales.

Les figures II.17 et II.18 montrent les courbes D_q de deux images 128x128 dont les mesures sont données par les coefficients (0.27,0.26,0.24,0.23) et (0.36,0.31,0.25,0.08).

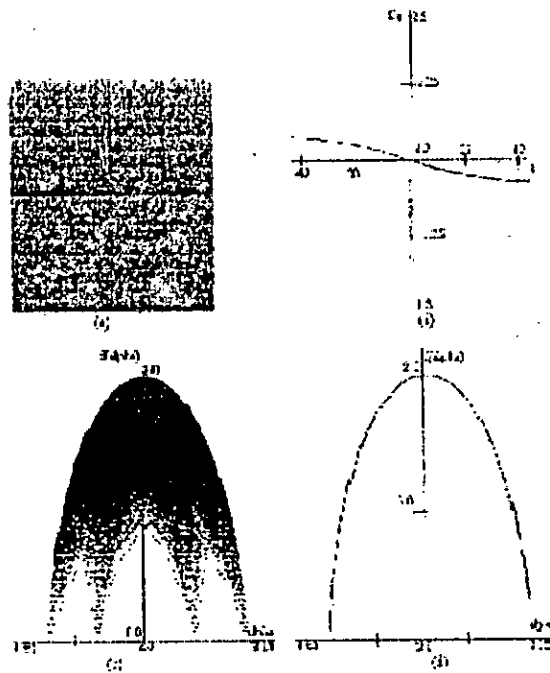


Figure II.17 : (a) Image de mesure quadrimodale avec (0.27,0.26,0.24,0.23), (b) courbe D_q théorique, (c) région de $f(\alpha)$, (d) limite supérieure du nuage

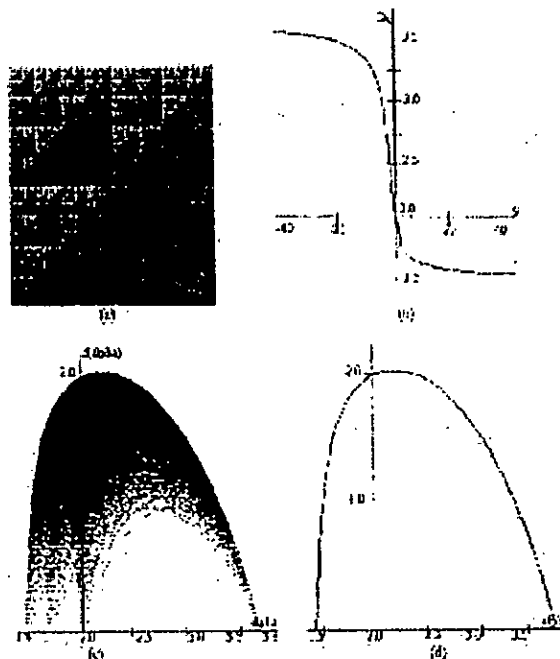


Figure II.18 : (a) Image de mesure quadrimodale avec (0.36,0.31,0.25,0.08), (b) courbe D_q théorique, (c) région de $f(\alpha)$, (d) limite supérieure du nuage

Pour les coefficients (0.27,0.26,0.24,0.23) la mesure obtenue est douce, car les coefficients sont proches, par contre, pour les coefficients (0.36,0.31,0.25,0.08) la mesure obtenue est dure puisque les coefficients sont très différents.

3.2. CALCUL DU SPECTRE MULTIFRACTAL $f(\alpha)$

Une mesure pour un ensemble Y est définie par :

$$m(Y) = \int_Y N(dt)dt \quad (\text{II.70})$$

où dt représente la mesure de Lebesgue, $N(dt)$ le nombre de points sur dt .

On a l'hypothèse suivante :

Localement, la mesure n'est pas proportionnelle à la mesure de Lebesgue dt de l'objet, mais est équivalente à dt^α quand $dt \rightarrow 0$. Si α existe en un point (x,y) d'une image alors nous avons :

$$m(I(x,y)) \approx (1/r)^{-\alpha(x,y)} \text{ quand } r \rightarrow 0, \quad (\text{II.71})$$

Sachant que :

- $m(x,y)$: est la mesure associée au point (x,y) de niveau de gris $I(x,y)$.
- r : est la largeur de boîte entourant le point (x,y) .
- α : est l'*exposant de Hölder* au point (x,y) .

Le calcul du spectre se fait en deux étapes :

1. Pour chaque point, on calcule $\alpha(x,y)$ dans un voisinage de taille r autour de ce point. On obtient ainsi un nuage de points, où $V_r(i,j)$ est le voisinage de taille r autour de (i,j) , avec r variant de 1 à r_{\max} . Il est important de garder r_{\max} petit (pas plus de 7) afin de conserver l'aspect local de α . L'estimation aux moindres carrés de la pente du nuage de points donne l'estimation de $\alpha(i,j)$.
2. On discrétise l'ensemble des valeurs de α en intervalles $I_\alpha = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$. On groupe tous les points ayant un exposant de Hölder α le plus proche, i.e. appartenant à un même intervalle I_α , donnant ainsi des ensembles de points E_α qui ont un α le plus proche. $E_\alpha = \{(i,j) \in \text{Image}, \alpha \in I_\alpha\}$.

On obtient le spectre $f(\alpha)$ en calculant la dimension fractale de E_α , par la méthode de boîte.

Le spectre $(\alpha, f(\alpha))$ contient un grand nombre d'informations. Les α donnent une mesure locale des singularités, $f(\alpha)$ mesure le comportement fractal des points de même α . (Il a généralement la forme d'une cloche).

3.3. CALCUL DU SPECTRE $\tau(Q)$ ET LES DIMENSIONS FRACTALES GENERALISEES

Sachant que :

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum p_i^q(l)}{\log l} \tag{II.72}$$

où $p_i(l)$ est la mesure du sous-ensemble d'indice i et de rayon l .

D_q et $\tau(q)$ sont reliés par la simple relation : $\tau(q) = (q-1)D_q$.

Alors l'algorithme de calcul se fait comme suit :

En recouvrant l'image de taille L par un quadrillage de boites distinctes de taille r , on obtient une distribution de mesures normalisées p_i définies par $p_i = m_i/m$, où m_i est la mesure de la $i^{\text{ème}}$ boite et m la mesure totale de l'image. Il faut estimer $\sum p_i^q$. L'estimation de D_q et $\tau(q)$ suppose de calculer la limite quand $r \rightarrow 0$ de $\frac{\log \sum p_i^q}{\log r/L}$ de la mesure, nous estimons cette limite par la pente de régression linéaire du nuage de points de coordonnées $(\log \sum p_i^q, \log r/L)$.

APPLICATION

En utilisant les algorithmes décrits précédemment, le calcul des paramètres multifractals sur l'image 00069031.bmp donne les courbes suivantes :

Le spectre $(\alpha, f(\alpha))$

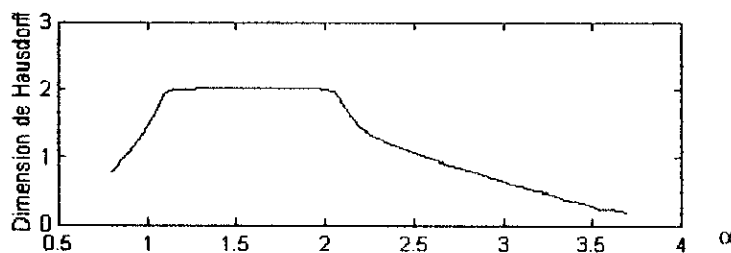


Figure II.19 : Le spectre multifractal $(\alpha, f(\alpha))$, le calcul donne $\alpha \in [0.884, 3.662]$.

Les dimensions fractales généralisées (q, D_q)

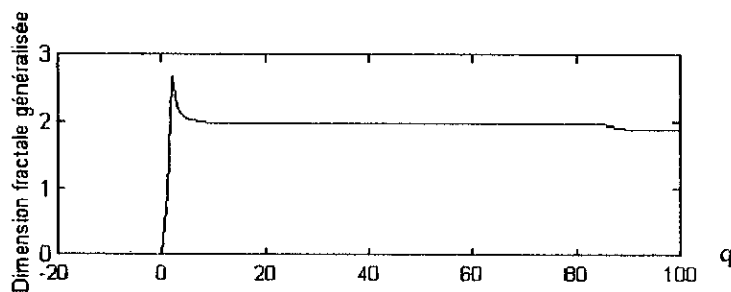


Figure II.20 : La courbe multifractale des dimensions fractales généralisées (q, D_q) .

Les moments d'ordre q

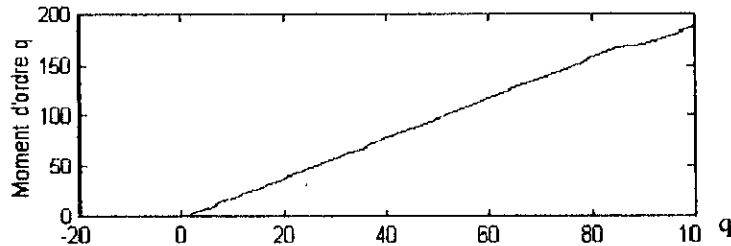


Figure II.21 : Les moments d'ordre q .

La dimension d'information D_1 et la dimension de corrélation D_2 estimées sont égales respectivement à : 0.932 et 2.702 . Les moments d'ordre 1 et 2 sont respectivement égaux à : 1.122 et 2.702.

4. CONCLUSION

Plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer la dimension fractale globale, elles donnent des résultats sensiblement différents sur les mêmes textures. La dimension de boîte est celle qui est la plus utilisée dans toutes les sciences. La raison pour sa dominance se trouve dans son calcul facile et automatique par machine. Son application est utilisée même pour un objet enfoncé dans les plus hauts espaces dimensionnels. Par exemple, quand nous considérons des objets dans l'espace à 3 dimensions, les boîtes ne sont pas plates mais à 3-D avec hauteur, largeur, et profondeur.

Le calcul de la dimension fractale et de la lacunarité d'une image est utilisé à diverses fins. Il peut servir pour :

- Décrire une région,
- effectuer une mesure de la géométrie d'une région, etc.

Le concept de fractal a inspiré les scientifiques et a ouvert un nouveau travail intéressant et des spéculations fascinantes. En effet, il a paru pendant quelques temps, comme si les dimensions fractales nous permettaient de découvrir un nouvel ordre dans le monde des phénomènes et structures complexes. Cet espoir, cependant, a été humidifié par quelques limitations sévères. D'une part, il y a plusieurs méthodes d'estimation des dimensions qui donnent différentes réponses. Nous pouvons alors imaginer qu'une structure est un mélange de fractales différentes, chacune avec une valeur différente de dimension. Dans un tel cas, le conglomerat aura tout simplement la dimension du composant ayant la plus grande dimension. Ce qui veut dire que le nombre résultant ne peut pas être caractéristique pour le mélange. Ce que nous voudrions réellement avoir est quelque chose comme un spectre de nombres qui donnent de l'information au sujet de la distribution des dimensions fractales dans une structure. En fait, ceci a été porté dans le domaine multifractal.

Les paramètres fractals et multifractals sont utilisés dans une approche de l'analyse d'images qui exploite une certaine «homogénéité» de groupements connexes de pixels. Cette approche est duale à la recherche des contours qui s'intéresse aux «hétérogénéité» dans l'image ; et comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre, le calcul de la dimension fractale et des spectres de singularités est une des étapes dans la détection de contours et de segmentation.

Partie C:

EXTRACTION DES PRIMITIVES

1. INTRODUCTION

La segmentation peut être définie comme étant la séparation des divers éléments d'une image en régions connexes ayant mêmes propriétés. Ces régions peuvent être caractérisées par leurs frontières, c'est dans ce cas la segmentation par *extraction de contours*, ou bien être directement caractérisées par les pixels qui les composent, il s'agit alors de la segmentation en *régions homogènes*. Les propriétés constituant le critère de segmentation peuvent être choisies de manière à effectuer une segmentation en régions ayant même niveau de gris, même texture, même couleur, etc.

Il est évident que ces deux approches de segmentation sont duales. Cependant l'information qu'elles mettent en évidence est différente. Les contours possèdent l'essentiel des caractéristiques de forme de la région, la segmentation en régions homogènes privilégie les caractéristiques non géométriques liées au critère de segmentation, donc au contenu de la région plus qu'à sa forme.

Cette troisième partie de ce chapitre est consacrée à la segmentation des images à plusieurs niveaux de gris par des approches fractale et multifractale. Dans ce qui suit, nous présentons une méthode de détection de contours fractale, nous donnons notre contribution à l'amélioration de cet algorithme. Nous avons exploité des résultats d'estimation de la dimension fractale locale par la méthode basée sur le modèle fbm de l'image dans la détection de contours. Nous étudions aussi une méthode de détection de contour multifractal et une méthode de segmentation multifractale. Ces algorithmes sont testés sur différents types d'images biomédicales, et même sur une image plus simple constituée de segments de droite (2des1.bmp), le but est de faire ressortir une (des) propriété(s) liée(s) à l'algorithme.

2. DETECTION DE CONTOURS

2.1. LA METHODE G-SPECTRALE

Cet algorithme a été étudié dans la partie précédente dans le cadre de l'estimation de la dimension fractale locale, dans ce qui suit, nous le verrons plus en détails avec son application dans la détection de contours.

Les résultats du filtrage de Gabor sur une image numérique donnent les résultats suivants :

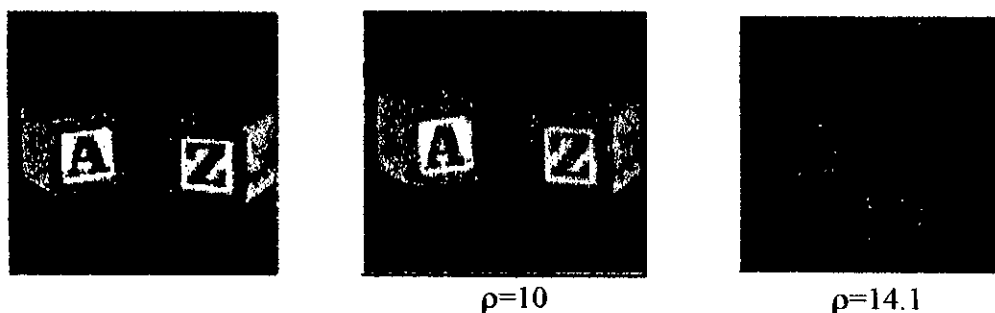


Figure II.22 : Image originale et les résultats du filtrage de Gabor avec $\theta=90^\circ$ et $\sigma=2$.

Les sorties du filtre de Gabor ont été quantifiées en niveaux de gris entre 0 et 255. Nous pouvons voir que les images obtenues par le filtrage de Gabor apparaissent beaucoup mieux. Donc, nous pouvons envisager une autre application du filtrage de Gabor dans le rehaussement des images.

La figure II.23, montre le résultat de l'application de l'algorithme Spectral (en utilisant le filtrage de Gabor) sur la même image numérique. L'algorithme est appliqué pour 5 filtres utilisés avec chacun une largeur de bande unité et avec $\theta=90$, $\sigma=2$. Les fréquences radiales utilisées sont :

pour la figure II.23.a : $\rho_1=18$, $\rho_2=18.8$, $\rho_3=19$, $\rho_4=19.5$, $\rho_5=20$.

pour la figure II.23.b : $\rho_1=17$, $\rho_2=17.3$, $\rho_3=17.5$, $\rho_4=17.7$, $\rho_5=18$.

Les $D(x,y)$ sont quantifiés en niveaux de gris entre 0 et 255.

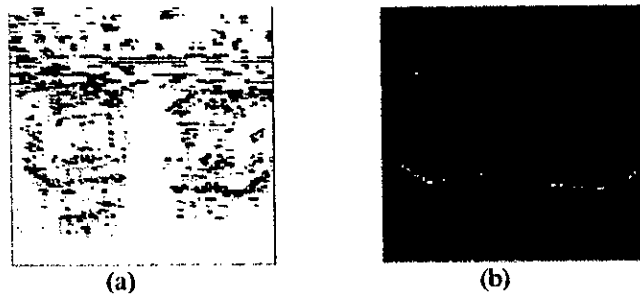


Figure II.23 : Dimensions locales.

D'après ces images des dimensions, on constate que les contours sont rehaussés. Ceci est dû au fait que les limites entre les régions homogènes sont une configuration physique qui ne correspond pas bien dans le modèle fractal. Ainsi quand les points qui appartiennent à ces limites entre deux régions de l'image sont examinés, l'approximation entre le modèle fractal et les données de l'image est faible. Ce fait, que les limites soient plus élevées que les surfaces d'intensités non fractales, fournit le moyen de détecter les points de l'image qui peuvent bien être des contours. Il découle que quand la dimension fractale d'une région couvrant la limite entre deux régions homogènes est calculée, la valeur obtenue est inférieure à la dimension topologique, c'est à dire 2. Donc, quand les valeurs des dimensions fractales sont quantifiées en niveaux de gris, les contours seront vus en noir et le reste des régions aura une nuance de gris particulière.

CHOIX DES PARAMETRES DU FILTRE

Le choix de σ : En utilisant un σ fixe, tous les filtres h_{k_x, k_y} auront la même largeur. L'échange entre la localisation fréquentielle et la localisation spatiale est déterminé par le choix de σ .

Si $|\phi(x, y, k_x, k_y)|$ représente la transformée de Fourier localisée résultant de la convolution de l'image $I(x, y)$ avec le filtre h_{k_x, k_y} , alors :

- si x et y sont considérés comme des variables et (k_x, k_y) comme paramètres, $|\phi(x, y, k_x, k_y)|^2$ est l'énergie au voisinage de la fréquence (k_x, k_y) en chaque point de l'image.
- si au contraire k_x et k_y sont considérées comme des variables et (x, y) comme paramètres, alors $|\phi(x, y, k_x, k_y)|^2$ est le spectre de puissance au voisinage du (x, y) .

- Une grande valeur de σ a pour résultat des mesures de $|\phi(x,y,k_x,k_y)|^2$ qui ne sont pas très bien localisées dans le plan (x,y) mais sont de bonnes estimations du spectre de puissance.
- Une petite valeur de σ a pour résultats des mesures de $|\phi(x,y,k_x,k_y)|^2$ qui sont très bien localisées dans le plan (x,y) mais de faibles appréciations du spectre de puissance.

Ceci est illustré par les figures suivantes :



Figure II.24 : Localisation des contours pour différentes valeurs de σ , avec $\theta=90^\circ$, $\rho_1=20$, $\rho_2=20.2$, $\rho_3=20.5$, $\rho_4=20.7$, $\rho_5=21$.

Il est à noter que quand σ décroît, la localisation dans le plan (x,y) croît comme déjà discuté.

Le choix des fréquences radiales: Il faut ajuster les fréquences radiales pour couvrir l'image dans le plan des fréquences. Une solution possible est de calculer le spectre des fréquences par la transformée de Fourier rapide de l'image et de représenter les composantes fréquentielles k_x , k_y dans le plan radial (ρ,θ) . Pour un θ donné, on détermine ρ_{\min} et ρ_{\max} et on échantillonne cet intervalle en N valeurs pour générer les N filtres de Gabor. Le résultat est alors une juxtaposition d'images de contours de différentes directions.

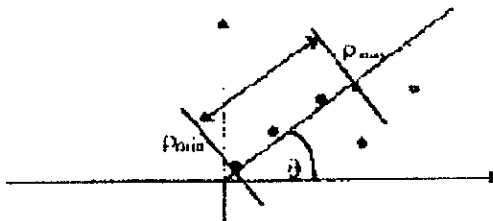


Figure II.25: Localisation des fréquences radiales.

Le choix de θ : On applique l'algorithme spectral sur une image, pour trois valeurs différentes des fréquences angulaires θ :

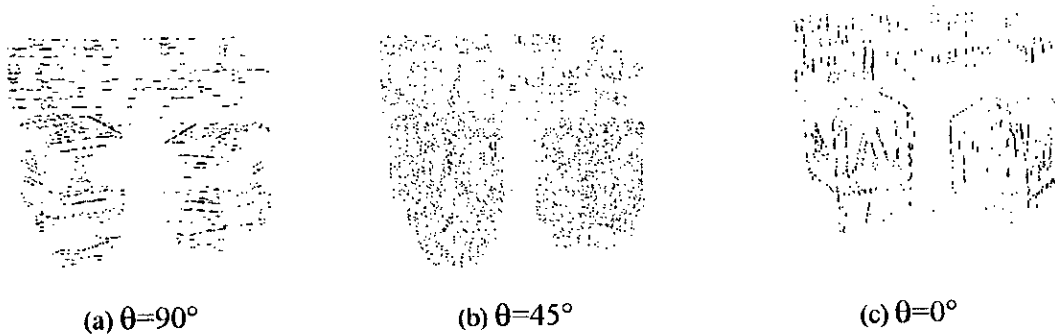


Figure II.26: Détection de contours pour des fréquences angulaires différentes, avec $\sigma=2$, $\rho_1=20$, $\rho_2=20.2$, $\rho_3=20.5$, $\rho_4=20.7$, $\rho_5=21$.

Les résultats illustrés par la figure II.26 reflètent une caractéristique importante de cet algorithme à savoir son caractère isotropique. En effet, si le spectre de puissance est considéré comme étant isotropique il ne dépend seulement que de ρ et non de θ . Si ce dernier est anisotropique, les mesures de la dimension fractale dans différentes directions seront différentes, reflétant le caractère anisotropique du spectre. Pour un point de contour donné, la fréquence spatiale qui lui correspond a une direction perpendiculaire à celle du contour (dans la direction du gradient); c'est ce qui explique le fait que les contours obtenus pour $\theta=0^\circ$ et $\theta=45^\circ$ et $\theta=90^\circ$ soient les contours perpendiculaires à ces trois directions. Une seconde application de cet algorithme consisterait donc à l'utiliser comme extracteur sélectif de contours dans une direction donnée.

Pour obtenir un algorithme global d'extraction de contours nous proposons le schéma suivant:

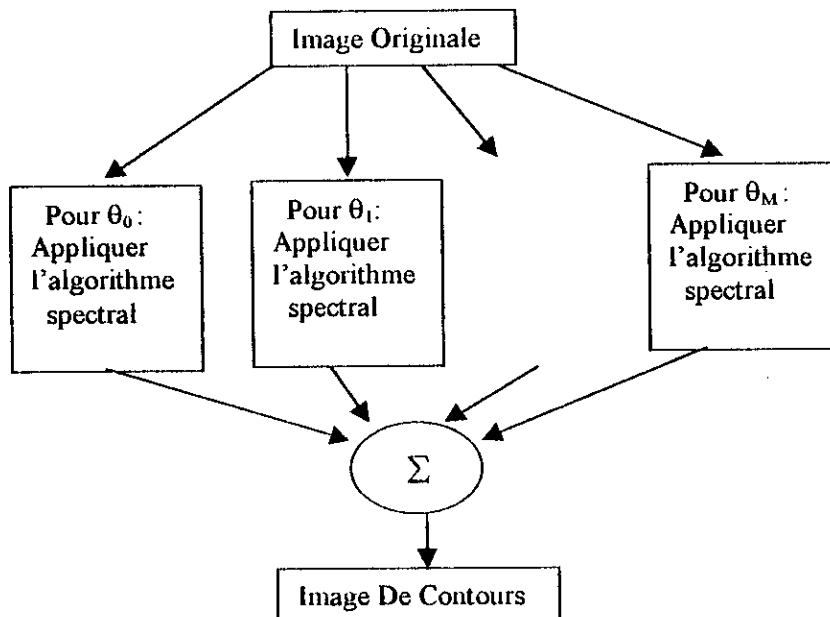


Figure II.27: Algorithme global de la détection de contours par l'approche spectrale.

Le choix du paramètre θ est très important, et pour une meilleure détection de contours, il faut appliquer l'algorithme sur un grand nombre de fréquences angulaires θ , mais le coût de calcul devient très important. Nous avons cherché à utiliser d'autres moyens qui vont guider le choix de la bonne fréquence angulaire pour une meilleure extraction de

contours. Pour cela, nous avons développé une méthode basée sur l'exploitation d'indices locaux permettant d'affirmer l'existence de tels contours dans l'image par l'analyse des variogrammes, nous avons appelé cette méthode "vario-spectrale". La théorie et l'application de cette méthode sont données dans la section suivante.

Remarque : Si le spectre de puissance est isotrope alors la dimension fractale ne dépendra que des fréquences radiales ρ et non de θ , mais si le spectre de puissance est anisotrope alors la dimension fractale dépendra de ρ et de θ et les dimensions fractales mesurées seront différentes dans des directions différentes.

2. 2. LA METHODE VARIO-SPECTRALE

Le variogramme est introduit comme étant une fonction répondant à priori aux qualités requises pour être un bon indice de texture ; les propriétés théoriques et expérimentales du variogramme seront exploitées.

2.2.1. DEFINITION GENERALE DU VARIOGRAMME

Par définition, un variogramme estime un écart entre deux positions d'une même fonction : $F(x)$, mesurée en x et la même fonction $F(x+h)$ mesurée en $x+h$. On suppose que la distance séparant ces deux positions est faible et qu'il existe une dépendance structurelle entre elles [SOL99]. Cette estimation s'opère généralement en calculant une fonction quadratique (II.73) du type :

$$(F(x) - F(x+h))^2 \quad \forall x \quad (\text{II.73})$$

Lorsque h varie, cette espérance mathématique n'est autre que le variogramme ponctuel, qu'on note $2\gamma(h)$. Ainsi, si $F(x)$ est la fonction aléatoire, alors on appelle demi-variogramme ou fonction intrinsèque de $F(x)$, la fonction suivante :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left[(F(x+h) - F(x))^2 \right] \quad (\text{II.74})$$

Le comportement du variogramme à l'origine a une signification analogue à celle de la chute plus ou moins rapide de la fonction d'autocorrélation autour de son maximum. Il indique la rapidité relative avec laquelle le phénomène se décorrèle avec lui-même. Le variogramme présente des propriétés intéressantes, telles que :

- Une texture périodique entraîne un variogramme qui aura des oscillations de même période.
- Des paliers dans le variogramme expliquent un emboîtement de plusieurs textures de niveaux différents.
- De plus l'allure du variogramme, permet la mise en évidence des directivités présentes dans l'image, c'est cette propriété que nous exploitons dans notre algorithme.

2.2. 2. CALCUL DU VARIOGRAMME

L'expression du variogramme d'un domaine d'image D_Ω de taille $N \times N$ dans la direction θ selon une distance h est la suivante :

$$\gamma^\theta(h) = \frac{1}{(D_\Omega)} \sum_{x=n_1+1}^N \sum_{y=n_2+1}^N (I(x,y) - I(x-n_1, y-n_2))^2 \quad (II.75)$$

où I représente l'image en niveau de gris et $N \times N$ la taille de l'imagette.

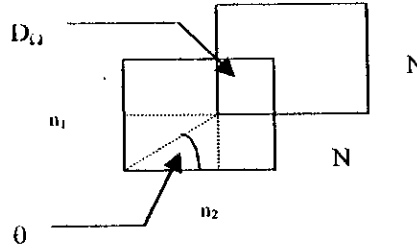


Figure II.28 : Schéma d'un champ de mesure du variogramme

A partir de cette formulation du variogramme, on peut calculer les variogrammes directionnels, dans les quatre directions principales (γ^{0° , γ^{45° , γ^{90° , γ^{135°).

Ainsi le variogramme dans la direction horizontale notée $\gamma^H(h)$ pour $\theta=0^\circ$ est donné par l'expression suivante :

$$\gamma^H(h) = \frac{1}{(N-h)N} \sum_{x=h+1}^N \sum_{y=1}^N (I(x,y) - I(x-h,y))^2 \quad (II.76)$$

Le variogramme dans la direction de la diagonale 45° notée $\gamma^{DP}(h)$ pour $\theta=45^\circ$ est :

$$\gamma^{DP}(h) = \frac{1}{(N-h)^2} \sum_{x=h+1}^N \sum_{y=h+1}^N (I(x,y) - I(x-h,y-h))^2 \quad (II.77)$$

Le variogramme dans la direction verticale notée $\gamma^V(h)$ pour $\theta=90^\circ$ est :

$$\gamma^V(h) = \frac{1}{(N-h)N} \sum_{x=1}^N \sum_{y=h+1}^N (I(x,y) - I(x,y-h))^2 \quad (II.78)$$

Le variogramme dans la direction diagonale 135° notée $\gamma^{DS}(h)$ pour $\theta=135^\circ$ est :

$$\gamma^{DS}(h) = \frac{1}{(N-h)^2} \sum_{x=N-h+1}^N \sum_{y=h+1}^N (I(x,y) - I(N-x-h,y-h))^2 \quad (II.79)$$

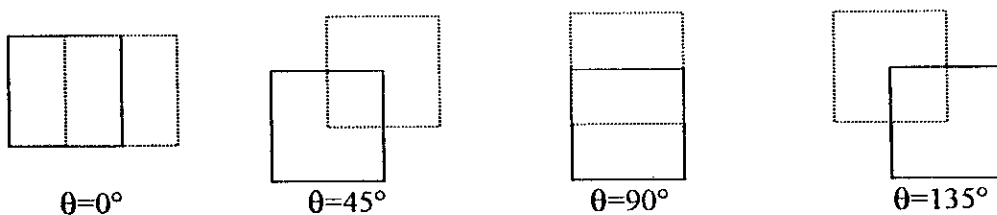


Figure II.29 : Schéma de champ de mesure du variogramme pour une direction θ .

En comparant les courbes des variogrammes (l'axe des abscisses représente la valeur de la distance h et l'axe des ordonnées représente l'amplitude du variogramme) qui

correspondent aux quatre directions, on peut détecter l'orientation des objets présents dans la scène, par simple comparaison des amplitudes des variogrammes [SOL99]. Du fait, que la direction privilégiée d'un motif ou d'un objet dans une image est celle dont l'amplitude du variogramme autour de l'origine est la plus faible. (Voir [SOL99]).

2.2.3. ALGORITHME VARIO-SPECTRAL

Notre algorithme de détection peut être schématisé comme suit :

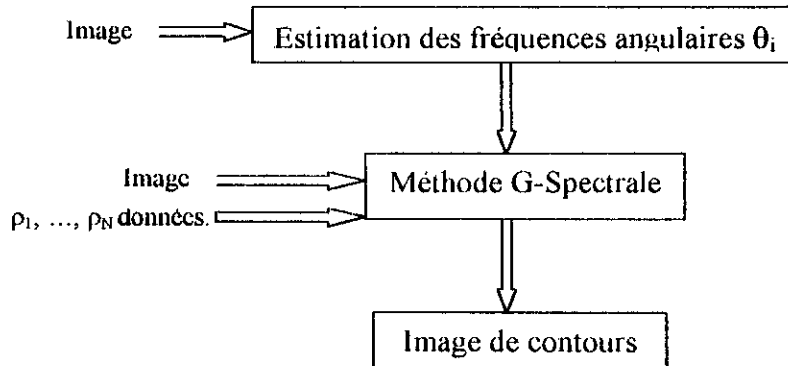


Figure II.30 : Algorithme Vario-Spectral

L'algorithme de détection est le même que celui de la méthode spectrale vue dans les paragraphes précédents, mais les fréquences angulaires θ sont estimées par le calcul des variogrammes, puis appliquées aux filtres de Gabor.

La procédure d'estimation des fréquences angulaires est la suivante :

- Nous divisons l'image originale en plusieurs sous images de taille $N \times N$.
- Sur chaque sous image, nous calculons les variogrammes correspondant aux quatre directions.
- Nous cherchons la direction privilégiée correspondante dans chaque sous image. Ce qui nous donne une matrice de directions.
- Nous calculons l'historgramme des directions pour toute l'image (i.e., La fonction qui donne la fréquence d'apparition de chaque direction dans toute l'image).
- La direction privilégiée de l'image est celle ayant la plus grande fréquence.

Si on veut appliquer deux valeurs de θ , alors la deuxième direction privilégiée est celle ayant un histogramme le plus proche de la plus grande fréquence.

Remarque très importante :

Nous avons vu dans les résultats des sections précédentes, que les contours obtenus par l'approche spectrale sont ceux dans la direction perpendiculaire. Donc, quand on trouve une direction privilégiée θ , on applique $\theta + \pi/2$ à l'algorithme de détection

2.2.4. APPLICATION

L'application de l'algorithme précédent sur différentes images donne les résultats suivants :

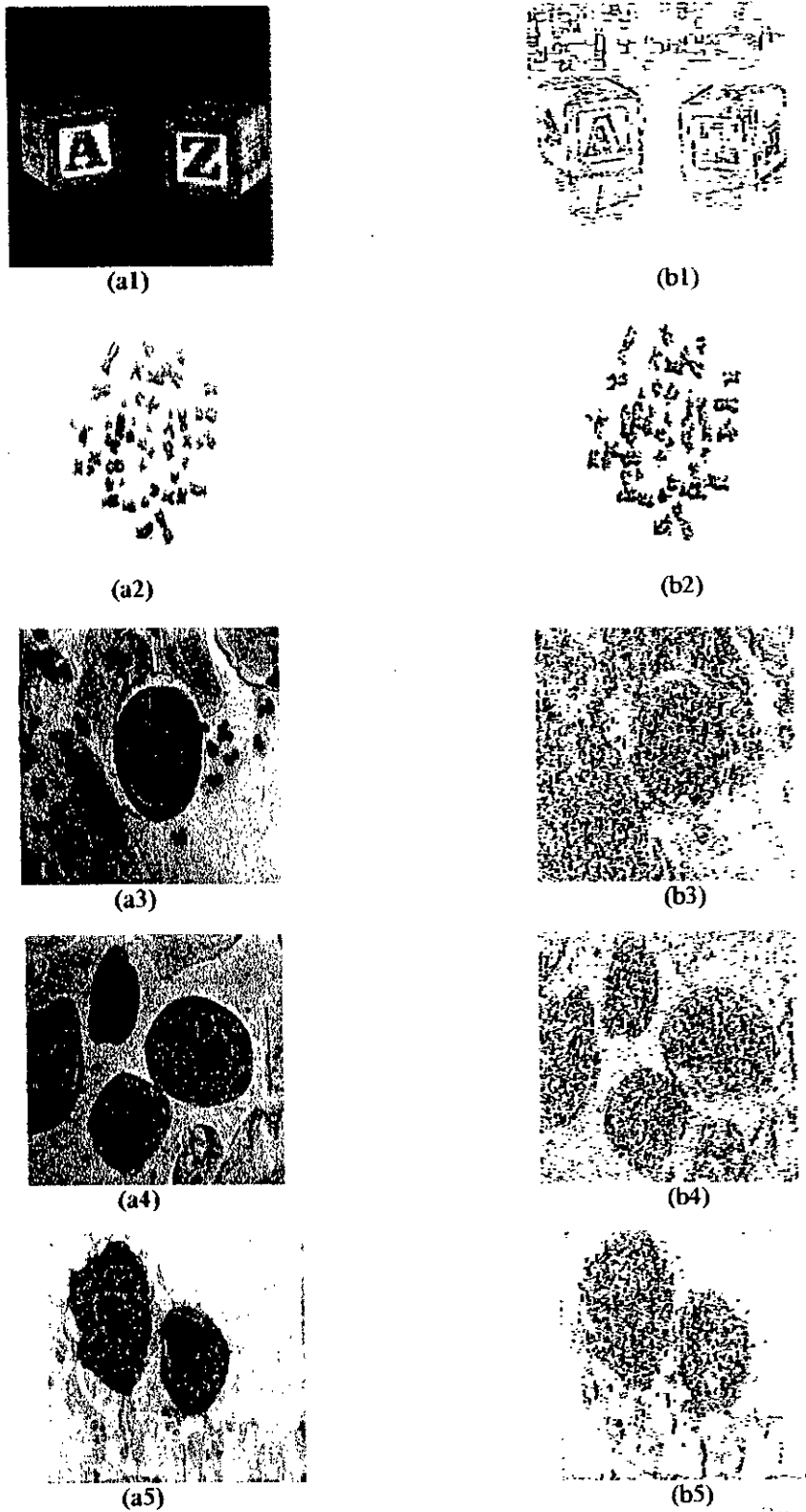


Figure II.31. Détection de contours par la méthode vario-spectrale. La 1^{ière} colonne présente l'image originale, la 2^{ième} l' image contours.

Les deux directions privilégiées estimées pour chaque image sont:

Image	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$
a1	90	0
a2	90	0
a3	0	45
a4	45	0

Tableau 2: θ_1 et θ_2 sont la 1^{ière} et 2^{ème} directions privilégiées respectivement.

Le calcul des variogrammes permet la mise en évidence des directivités présentes dans l'image, ceci nous permet de détecter les directions privilégiées, i.e., les directions où les contours sont les plus présents. L'application de ces directions à l'algorithme spectral donne de meilleurs résultats, puisqu'il y a extraction de contours dans les directions privilégiées de l'image. Sans oublier l'intérêt apporté au temps de calcul.

2.3. ALGORITHME BASE SUR LE MODELE FBM DE L'IMAGE

L'algorithme d'estimation de la dimension fractale locale par le modèle fbm de l'image a été vu dans la 2^{ème} partie de ce chapitre, dans ce qui suit, nous verrons son application dans la détection de contours.

L'application de cet algorithme sur l'image 00069031.bmp, nous donne le résultat de la figure II.32.

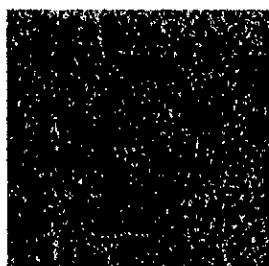


Figure II.32 : Dimensions fractales locales estimées par la méthode fbm.

D'après cette image des dimensions, on constate que les contours sont rehaussés. Ceci est dû au fait que les limites entre les régions homogènes sont une configuration physique qui ne correspond pas bien dans le modèle fractal. Ainsi, l'approximation entre le modèle fractal et les données de l'image est faible.

Pour extraire les contours, on procède par une binarisation selon la valeur de la dimension fractale de chaque pixel. La binarisation se fait comme suit : pour chaque point de l'image, si sa dimension fractale est inférieure à 2 ou supérieure à 3 le point est un point contour, sinon c'est un point non-contour.

Des résultats d'application sont donnés par la figure II.33.

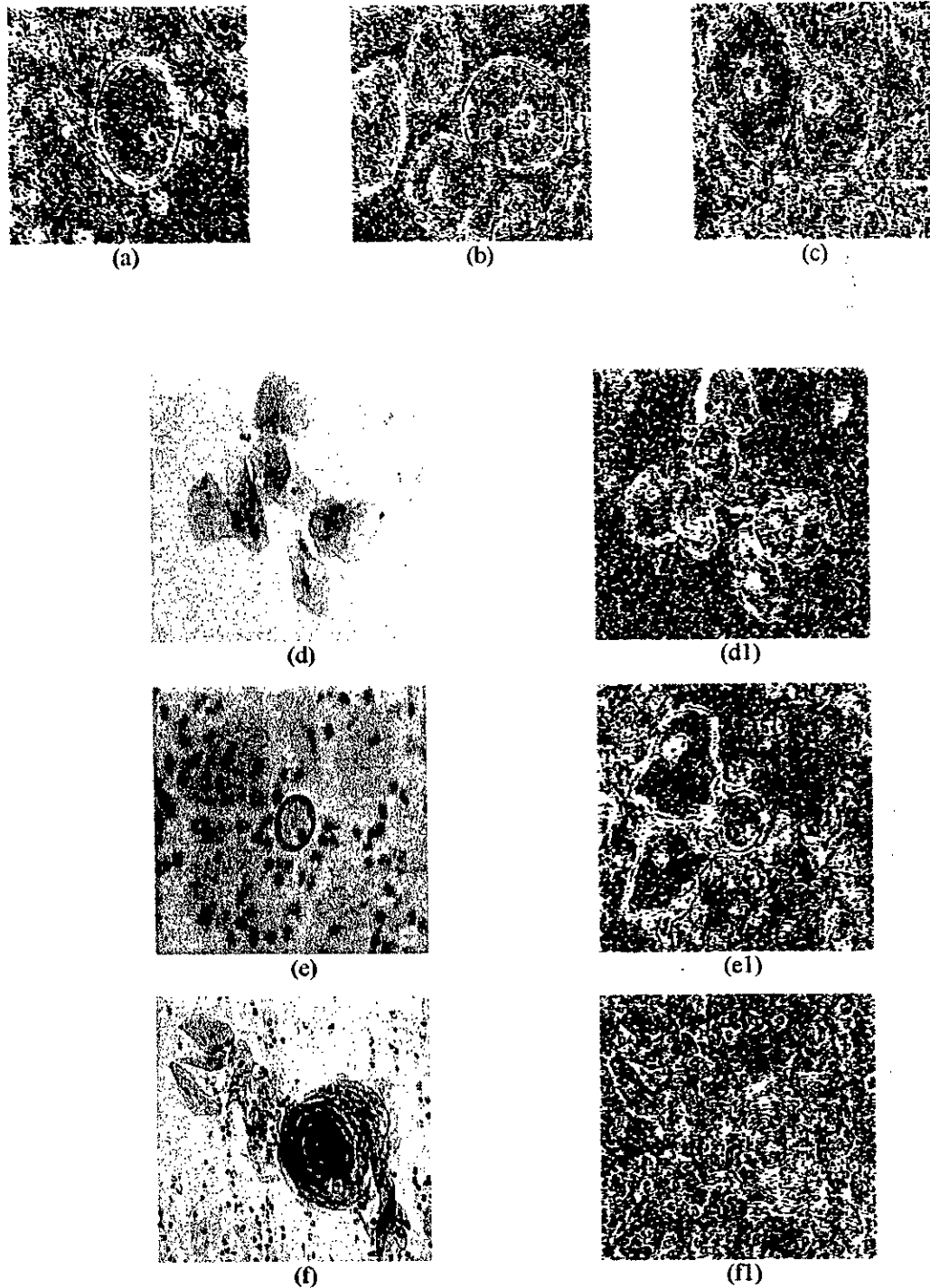


Figure II.33 : Détection de contours par l'algorithme du modèle fbm de l'image. Les images a, b et c correspondent respectivement aux contours des images a3, a4 et a5 de la figure II.31. (d), (e) et (f) sont les images originales. (d1), (e1) et f(1) sont les contours des images (d), (e) et (f) respectivement.

Ces résultats, nous montrent que l'algorithme d'estimation de la dimension fractale locale par la méthode du modèle fbm de l'image trouve une application dans la détection de contours.

2.4. ALGORITHME MULTIFRACTAL DE DETECTION DE CONTOUR

Cette approche procède par le calcul direct du spectre des singularités $f(\alpha)$. Elle est particulièrement délicate, dans la mesure où elle nécessite un bon algorithme d'estimation de la dimension fractale d'un ensemble, et ce même sur une image comportant peu de points. L'algorithme de détection est le suivant :

- Calculer en chaque point de l'image l'exposant de singularité α , et ceci par l'estimation de la limite du rapport $\frac{\log p_i}{\log \frac{1}{r}}$ par une régression linéaire. Ce qui nous permet d'obtenir une image de l'exposant. (p_i est la mesure d'un sous-ensemble). α est donc calculé comme étant l'estimation de la pente du nuage de points, avec $\mu(V(r))$ la mesure du voisinage de taille r autour du pixel concerné.
- Diviser l'intervalle $[\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}}]$ en M parties.
- Extraire séparément les pixels correspondant à chaque intervalle.
- Affecter à chaque pixel appartenant à l'intervalle, la valeur 255, 0 pour les autres. Nous obtenons ainsi M images binaires.
- Calculer la dimension fractale de chaque sous image par la méthode de boîtes. Affecter cette valeur à chaque pixel significatif comme étant $f(\alpha(x,y))$. Nous obtenons alors une image de $f(\alpha)$.
- Opérer une segmentation selon les valeurs de $f(\alpha)$.

La dernière étape s'effectue par l'extraction des pixels dont le $f(\alpha)$ est supérieur à 1 et proche de 2, c'est à dire : $1.4 \leq f(\alpha) \leq 1.8$. On peut extraire les pixels dont le $f(\alpha)$ est proche de 1, ce qui donne une image de contours réguliers. On peut aussi extraire tous les points dont le $f(\alpha)$ est proche de 2 ($1.8 \leq f(\alpha) \leq 2$), ces points correspondent aux régions homogènes. Mais dans notre cas, on s'intéresse aux points dont $1.4 \leq f(\alpha) \leq 1.8$.

Remarques :

- Pour obtenir une meilleure localisation possible, nous utilisons un voisinage pas plus grand que 7 afin de conserver l'aspect local de α . Nous utilisons un voisinage $V(3)$ c'est à dire 3×3 . Le calcul de α portera seulement sur deux valeurs de r à savoir 1 et 3 ce qui nous évite le calcul de la régression ; il en découle un gain en temps de calcul considérable. α est obtenue par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{\log \mu(V(3)) - \log \mu(V(1))}{\log 3 - \log 1} \quad (\text{II.80})$$

- $f(\alpha)$ est obtenue par la méthode de boîtes. Puisqu'il y a une équivalence entre la dimension de boîte et la dimension de Hausdorff (voir Annexe2).
- Le choix de la mesure μ : Un choix naturel consisterait à définir cette mesure comme la somme des intensités des pixels de la région mesurée. Cette définition respecte l'axiome de la théorie des mesures (voir Annexe2). Mais on peut généraliser la notion d'exposant de Hölder en introduisant des définitions pour μ qui ne respectent pas nécessairement cet axiome. Des exemples de ces mesures pour une région Ω peuvent être donnés par les définitions suivantes :

- $\mu_{sum}(\Omega) = \sum_{i \in \Omega} p(i)$,
- $\mu_{max}(\Omega) = \max_{i \in \Omega} p(i)$,
- $\mu_{min}(\Omega) = \min_{i \in \Omega} p(i)$,

où Ω^* est l'ensemble de Ω où l'intensité est non nulle, $p(i)$ est l'intensité au point i .

Les exposants calculés avec ces mesures donneront des informations différentes quant à la singularité rencontrée.

La mesure min n'est pas utilisée, puisqu'elle donne des résultats médiocres, on peut aisément le voir après l'avoir testée sur plusieurs images, un exemple est donné par la figure II.34, qui est le résultat obtenu avec l'image 2des1.bmp. Dans la suite de ce travail cette mesure ne sera pas utilisée.

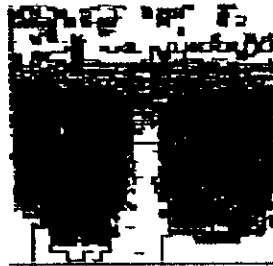
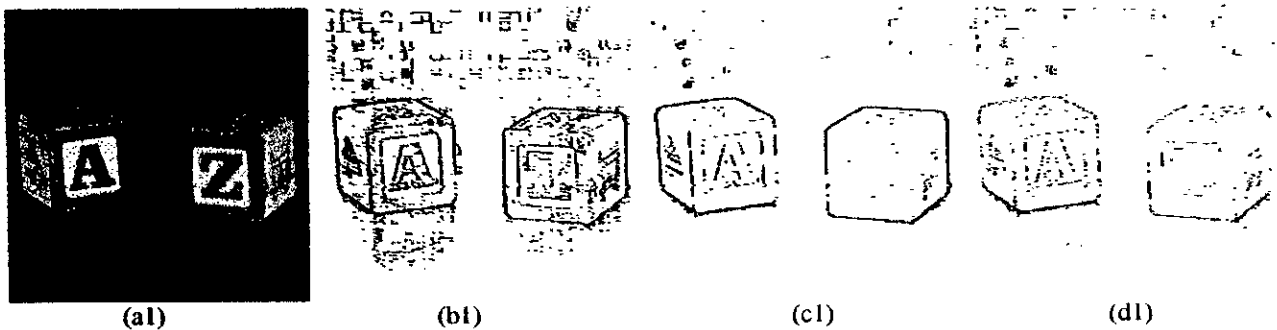


Figure II.34: Détection de contour par l'approche multifractale, avec la mesure min.

Il a été défini une autre mesure appelée la *mesure max quantifiée* ou *qmax* [MAH98]. Elle est calculée à partir de la mesure max en quantifiant cette dernière en N niveaux. La mesure qmax est alors la valeur maximum de l'intervalle contenant la mesure max.

Les résultats d'application de cet algorithme multifractal sur plusieurs images et pour les différentes mesures sont donnés par la figure II.35.

La première colonne présente l'image originale, la deuxième donne le résultat de détection obtenu avec la mesure sum, la troisième avec la mesure max, et la dernière avec la mesure qmax.

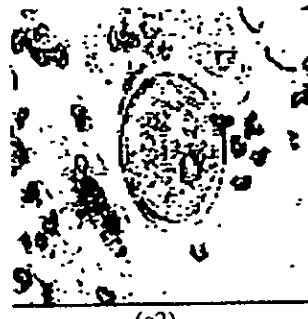




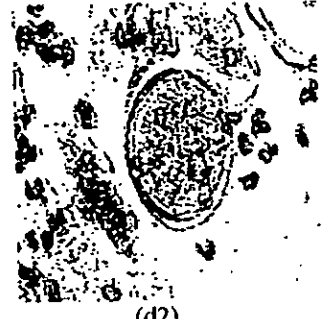
(a2)



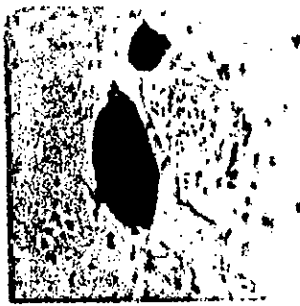
(b2)



(c2)



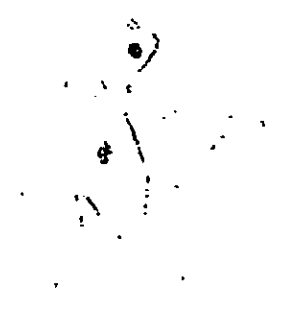
(d2)



(a3)



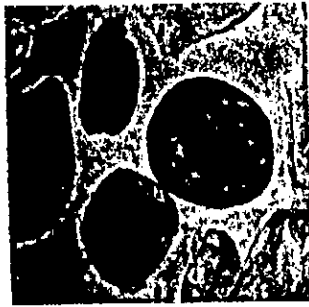
(b3)



(c3)



(d3)



(a4)



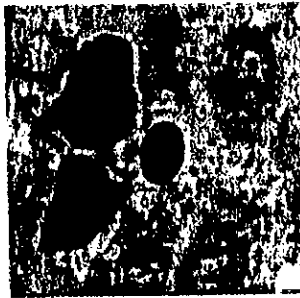
(b4)



(c4)



(d4)



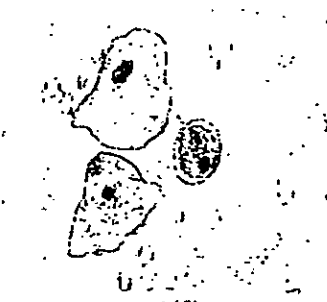
(a5)



(b5)



(c5)



(d5)



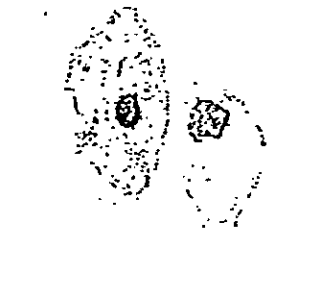
(a6)



(b6)



(c6)



(d6)

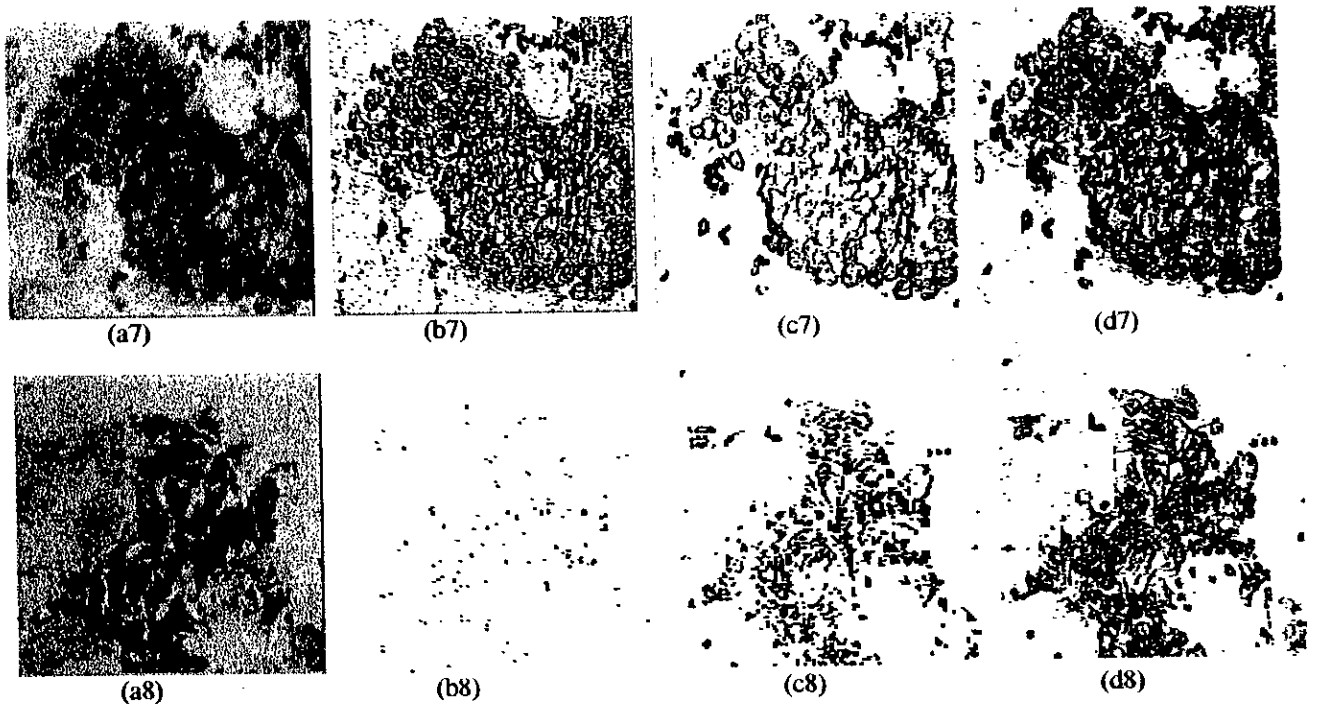


Figure II.35 : Résultats de détection de contours pour les différentes mesures. La 1^{ière} colonne image originale, la 2^{ième} détection avec la mesure Sum, la 3^{ième} avec la mesure max et la 4^{ième} avec la mesure qmax.

D'après les résultats obtenus, nous constatons que les images de contours obtenues sont différentes selon le type de la mesure. Ceci est dû au fait que les exposants de singularités calculés avec les différentes mesures donneront des informations différentes quant à la singularité rencontrée.

La mesure Sum présente une bonne détection de contours, mais elle présente souvent des points isolés qui ne sont pas considérés comme des contours. Nous pouvons améliorer la détection en suivant les résultats obtenus par un filtrage des points isolés. Par contre, avec l'image (a8) la détection de contours obtenue est mauvaise, nous pouvons même dire qu'il n'y a pas eu de détection de contours.

La mesure max présente de meilleures images de contours, sans points isolés. Mais pour l'image (a3) les contours ne sont pas complètement détectés.

La mesure qmax présente aussi de meilleurs résultats, mais elle n'a pas pu détecter les contours de l'image (a3).

En conclusion, la mesure qmax présente, en général, de meilleurs résultats, mais l'utilisation de l'algorithme multifractal avec les trois mesures, permet d'avoir une variété d'images de contours d'une même image originale, et l'appréciation des résultats est subjective, et surtout dépend de ce que nous cherchons.

3. SEGMENTATION PAR UNE APPROCHE MULTIFRACTALE

Dans cette méthode, nous adaptons le paramètre multifractal α à la segmentation des images. Pour cela, nous étudions le comportement des exposants de singularité locaux, c'est à dire calculés en chaque point de l'image, nous obtenons alors une image des exposants de singularité.

L'algorithme de segmentation est le suivant :

- calculer les exposants de singularité en chaque point de l'image, et trouver la singularité minimale α_{\min} et la singularité maximale α_{\max} .
- diviser le spectre de singularité en plusieurs parties égales, c'est à dire diviser l'intervalle $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ en N sous intervalles.
- pour chaque sous intervalle, trouver l'ensemble des points de l'image ayant l'exposant de singularité appartenant à l'intervalle, ce qui nous permet d'avoir N sous images, chacune correspondant à un intervalle iso-alpha. Sachant que pour un intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ donné, les pixels retenus seront ceux dont le niveau de gris sera compris dans l'intervalle $\left[p\left(\frac{1}{L}\right)^{\alpha_2}, p\left(\frac{1}{L}\right)^{\alpha_1} \right]$.
- pour chaque image d'un intervalle iso-alpha, les points en noir sont ceux dont la valeur α est dans l'intervalle souhaité.

Dans cet algorithme, le calcul de l'exposant de singularité s'effectue comme suit :

$$m(I(x,y)) \approx (1/r)^{-\alpha(x,y)} \text{ quand } r \rightarrow 0, \quad (\text{II.81})$$

avec :

- $m(x,y)$: est la mesure associée au point (x,y) de niveau de gris $I(x,y)$.
- r : est la largeur de boîte entourant le point (x,y) .
- α : est l'exposant de Hölder au point (x,y) .

Ce qui nous permet d'écrire l'équation suivante :

$$\frac{p(x,y)}{p} = \left(\frac{r}{L}\right)^{\alpha(x,y)} \quad (\text{II.82})$$

soit à l'échelle du pixel

$$p(x,y) = p\left(\frac{1}{L}\right)^{\alpha} \quad (\text{II.83})$$

avec p est la somme des niveaux de gris de toute l'image et L la taille de l'image.

L'application de cet algorithme sur plusieurs images, permet d'avoir les résultats suivants :

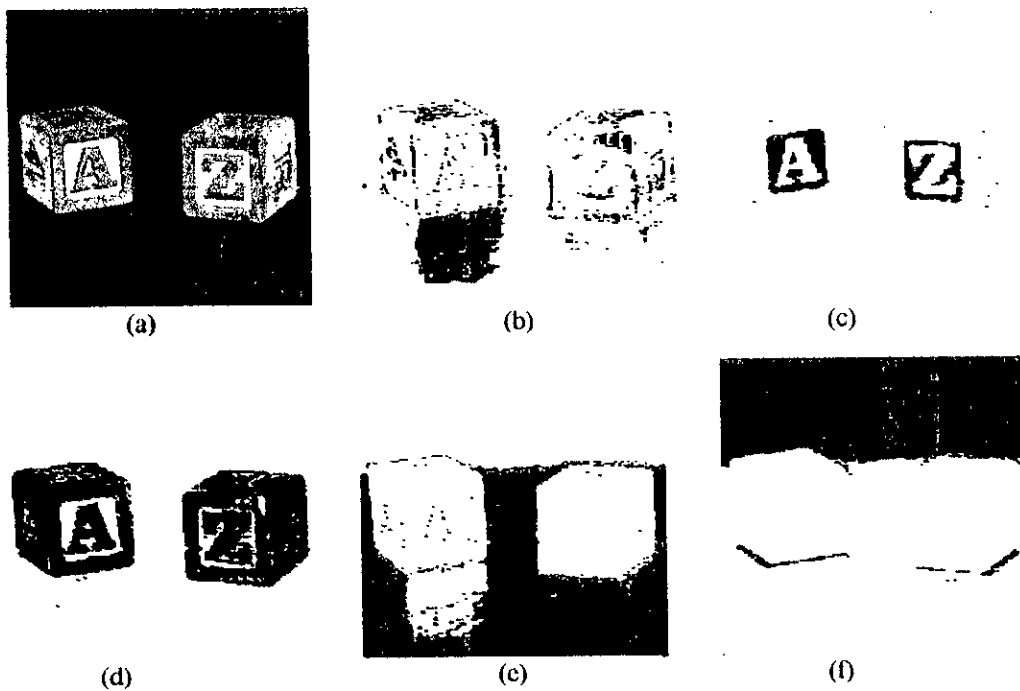


Figure II.36 : Les images iso- α avec $\alpha_{\min}=1.7772$ et $\alpha_{\max}=2.772$, (a) image originale, (b) $\alpha \in [1.9, 2]$, (c) $\alpha \in [1.7772, 1.8]$, (d) $\alpha \in [1.8, 1.9]$, (e) $\alpha \in [2, 2.1]$ et (f) $\alpha \in [2.1, 2.7]$.

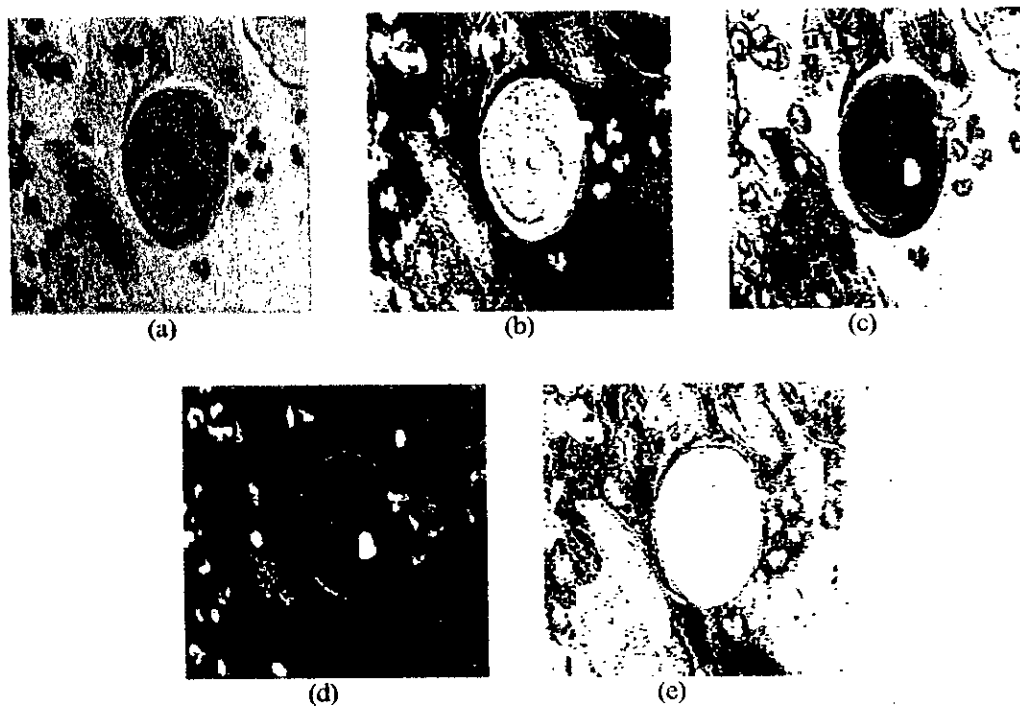


Figure II.37 : Les images iso- α , avec $\alpha_{\min}=1.899$ et $\alpha_{\max}=2.699$, (a) image originale, (b) $\alpha \in [1.92, 2.015]$, (c) $\alpha \in [2.015, 2.23]$, (d) $\alpha \in [1.899, 2.23]$, (e) $\alpha \in [1.95, 1.98]$.

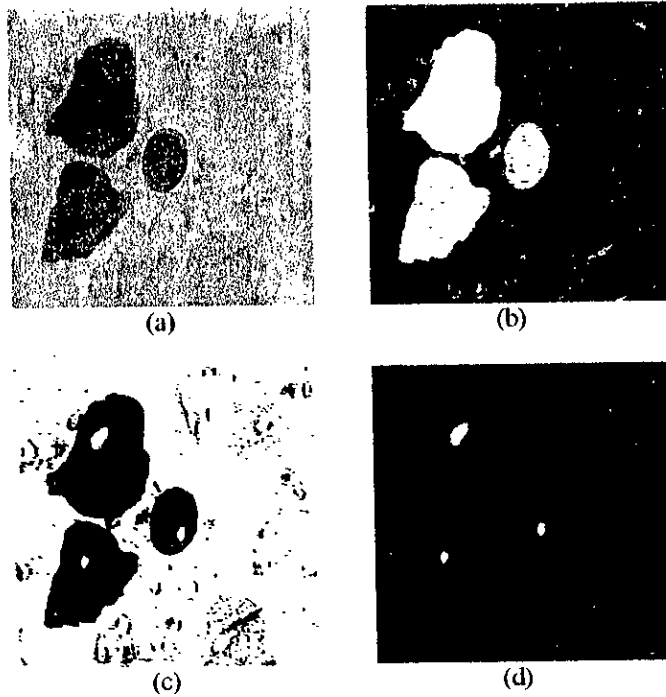


Figure II.38 : Les images iso- α , avec $\alpha_{\min}=1.928$ et $\alpha_{\max}=2.729$, (a) image originale, (b) $\alpha \in [1.928, 2.02]$, (c) $\alpha \in [2.02, 2.25]$, (d) $\alpha \in [1.928, 2.25]$.

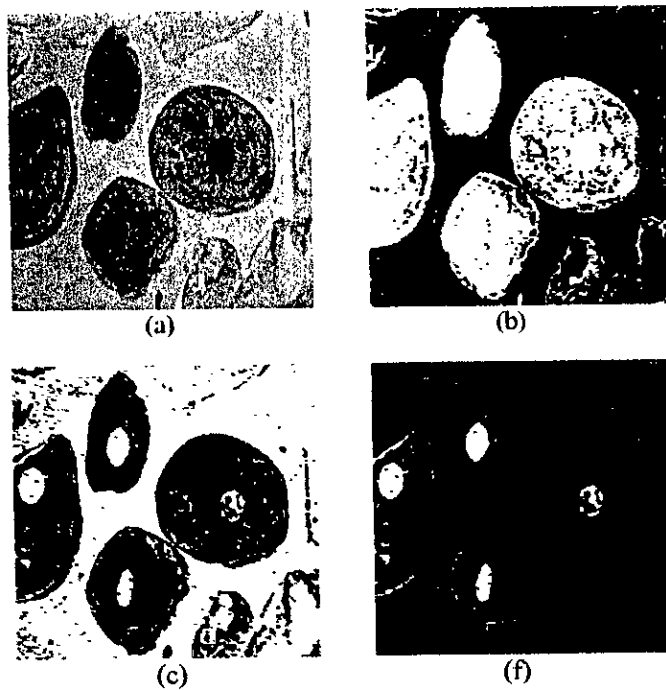


Figure II.39 : Les images iso- α , avec $\alpha_{\min}=1.897$ et $\alpha_{\max}=2.896$, (a) image originale, (b) $\alpha \in [1.897, 2]$, (c) $\alpha \in [2, 2.2]$, (d) $\alpha \in [1.9, 2.2]$.

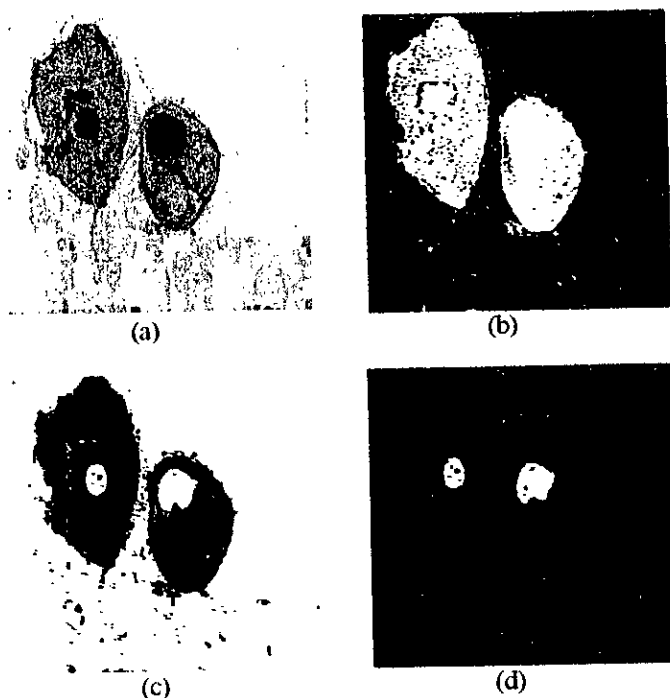


Figure II.40 : Les images iso- α , avec $\alpha_{\min}=1.954$ et $\alpha_{\max}=2.954$, (a) image originale, (b) $\alpha \in [1.954, 2.03]$, (c) $\alpha \in [2.03, 2.2]$, (d) $\alpha \in [1.952, 2.2]$.

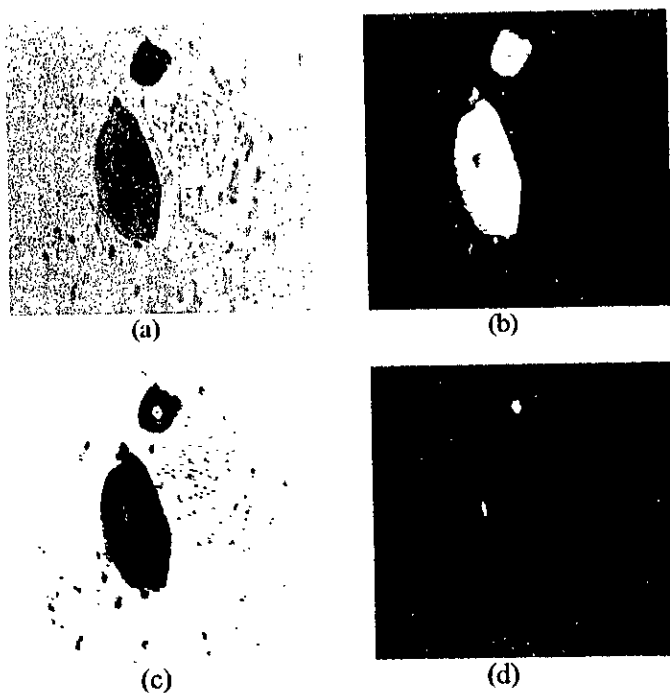


Figure II.41 : Les images iso- α , avec $\alpha_{\min}=1.954$ et $\alpha_{\max}=2.953$, (a) image originale, (b) $\alpha \in [1.954, 2.05]$, (c) $\alpha \in [2.05, 2.3]$, (d) $\alpha \in [1.95, 2.3]$.

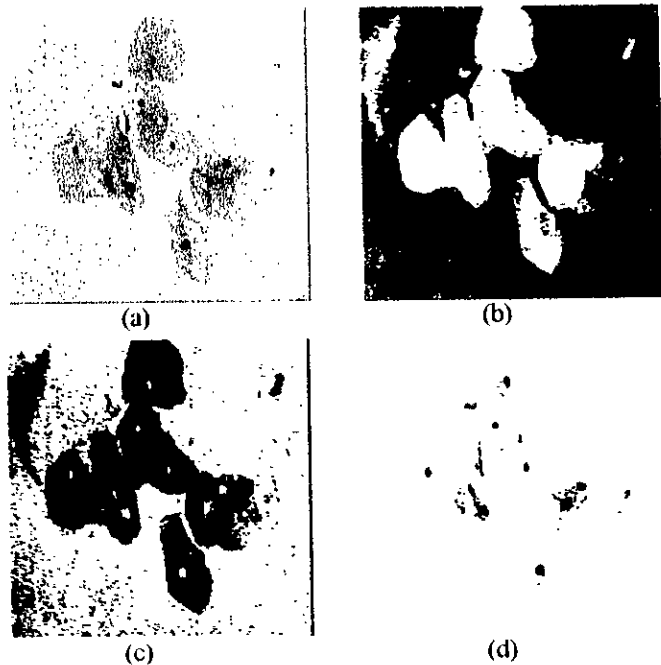


Figure II.42 : Les images iso- α , avec $\alpha_{\min}=1.971$ et $\alpha_{\max}=2.420$, (a) image originale, (b) $\alpha \in [1.971, 2]$, (c) $\alpha \in [2, 2.1]$, (d) $\alpha \in [2.1, 2.420]$.

D'après ces résultats, nous remarquons que :

- Nous avons une segmentation en texture de l'image de la figure II.36.a., puisque les images (c), (d), (e) et (f) représentent les quatre textures existantes dans l'image originale. Par contre, la figure II.36.b présente les contours de l'image II.36.a. Donc, le paramètre α a un rôle important à jouer en segmentation des images.
- Les résultats de segmentation des cellules biologiques obtenus sont très significatifs, puisque, pour la figure II.37, (b) présente l'image des cellules contenues dans l'image (a), (c) est une image de cytoplasmes et (d) l'image des noyaux. Et c'est de même pour les images II.38 à II.42.
- Notons que la texture des noyaux correspond aux exposants de singularités les plus forts, par contre, la texture des cytoplasmes ou des cellules correspond aux exposants les plus faibles, en plus, si l'intervalle $[a1, a2]$ correspond à une image des cellules et si l'intervalle $[b1, b2]$ correspond à une image des noyaux, alors, $[a2, b2]$ correspond à l'intervalle de l'image des cytoplasmes ; donc, il suffit d'avoir l'image des noyaux et l'image des cellules pour obtenir l'image des cytoplasmes.

4. CONCLUSION

Dans cette 3^{ème} partie de ce chapitre, nous avons exploité les paramètres fractals et multifractals d'une image dans la détection de contours et la segmentation en régions homogènes. Divers algorithmes sont étudiés et appliqués sur différentes images. Nous avons eu de bons résultats, même sur des images très complexes et manufacturées, telles que les images biomédicales.

En utilisant les exposants de singularités d'une image, nous avons séparé l'image originale en plusieurs sous images. Nous avons effectué la séparation des cellules biologiques en ses deux parties très significatives cytoplasmes et noyaux par simple variation des intervalles d'appartenance des exposants de singularités. Comme nous le savons, les textures des noyaux et des cytoplasmes sont très différentes, ce qui nous permet de dire que la segmentation effectuée est texturale. Donc, les exposants de Hölder caractérisent et décrivent les textures.

Chapitre III:

COMPARAISON AVEC D'AUTRES METHODES DE SEGMENTATION

Ce chapitre présente quelques méthodes de détection de contours et de segmentation en régions homogènes et leurs applications sur des images biomédicales constituées de cellules biologiques, le but est de faire une étude comparative avec les résultats obtenus avec les approches multifractales de détection de contours et de segmentation en régions homogènes. Pour la détection de contours, nous étudions les approches dérivatives et pour la segmentation en régions homogènes, nous étudions une méthode de classification et une méthode basée sur la morphologie mathématique.

III.1. DETECTION DE CONTOURS

III.1.1. INTRODUCTION

Nous abordons les méthodes dérivatives détectant les variations locales d'intensité : Ces approches sont les plus immédiates pour détecter et localiser les variations du signal. Les contours sont assimilés aux points de fort gradient ou de dérivée seconde nulle.

Nous fournissons d'abord une présentation des principes généraux d'utilisation de ces méthodes, puis nous étudions les trois axes de ces approches, qui dépendent du type des opérateurs utilisés et qui sont :

1. Opérateurs dérivatifs du premier ordre : opérateur de Prewitt, de Sobel et de Roberts.
2. Opérateurs dérivatifs du second ordre : opérateur Laplacien au voisinage réduit, de Marr-Hildreth et de Huertas-Médioni .
3. Approches par filtrage optimal, deux approches sont étudiées : Approche de Canny, correspondant à un filtre à réponse impulsionnelle finie et l'approche de Deriche qui elle correspond à un filtre à réponse impulsionnelle infinie.

Enfin, nous terminons par le but essentiel de ce chapitre qui est la comparaison des méthodes dérivatives avec les méthodes fractales et multifractales dans le cadre de la segmentation par détection de contours. Cette comparaison est basée sur des résultats d'application de ces méthodes sur différentes images.

III.1 .2. GENERALITES

Le principe général des méthodes dérivatives est illustré sur un signal continu monodimensionnel $A(x)$ présentant une transition avec un saut d'amplitude en x_0 . Les allures de la dérivée première et de la dérivée seconde sont données par la figure III.1 (où $x_0=0$). Si on considère que la transition du signal est repérée par son point d'inflexion, sa localisation peut se faire par recherche du maximum local de la valeur absolue de la dérivée première ou par recherche du passage par zéro de la dérivée seconde.

Dans le cas bidimensionnel, l'image est représentée par une fonction scalaire continue $A(x,y)$. Le vecteur gradient est défini au point M de coordonnées (x,y) par :

$$\nabla A(x,y) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \quad \frac{\partial A}{\partial y} \right)^t \quad (III.1)$$

Le vecteur gradient en un point M est normal à la courbe de niveau donné par $A(x,y)=\text{Constante}$ qui passe par M. La plus grande variation de $A(x,y)$ a lieu quand on se déplace le long de la normale à la courbe de niveau. La maximum de cette variation est défini en grandeur et en direction par $\nabla A(x,y)$.

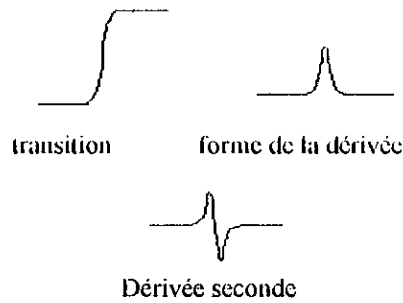


Figure III.1 : Allure des dérivées première et seconde d'une transition de type « saut d'amplitude ».

Au point $M(x,y)$, l'orientation ϕ du gradient est donnée par :

$$\phi = \arctan\left(\frac{\partial A}{\partial y} / \frac{\partial A}{\partial x}\right) \quad (\text{III.2})$$

et le vecteur unitaire n normal au contour a pour expression :

$$n = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

L'orientation du contour vaut alors : $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$ (Figure III.2).

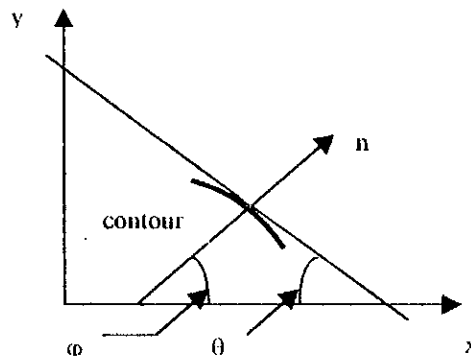


Figure III.2 : Orientation d'un contour.

III.1.2.1. PRINCIPES GÉNÉRAUX D'UTILISATION DES MÉTHODES DÉRIVATIVES

La présentation du paragraphe précédent permet de définir trois techniques générales utilisant l'approche dérivative. Elles comportent toutes un seuillage en dernière étape pour éliminer les transitions de faible gradient pouvant correspondre à du bruit.

1. Utilisation du gradient

- Calcul du gradient en chaque point de l'image.
- Création de l'image de la norme du gradient.

- Pour chaque point de l'image de la norme, extraction des maximums locaux (obtention de contours fins), dans la direction exacte du gradient.
- Seuillage de l'image des maximums locaux.

2. *Utilisation de la dérivée seconde*

- Calcul de la dérivée seconde dans la direction du gradient.
- Recherche des passages par zéro de la dérivée seconde dans la direction du gradient.
- Création de l'image des passages par zéro affectés de la norme du gradient.
- Seuillage (élimination des passages par zéro non significatifs).

3. *Utilisation du laplacien*

- Calcul du laplacien.
- Recherche des passages par zéro du laplacien.
- Création de l'image des passages par zéro affectés de la norme du laplacien.
- Seuillage (élimination des passages par zéro non significatifs).

III.1.3. APPROCHES DERIVATIVES APPLIQUEES AUX IMAGES NUMERIQUES

III.1.3.1. OPERATEURS DERIVATIFS DU PREMIER ORDRE

III.1.3.1.1. OPERATEUR DE ROBERTS

Les dérivées directionnelles suivant les directions horizontale et verticale au point (i,j) sont données par de simples différences finies :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\Delta A}{\Delta i} = A_i[i, j] = A[i+1, j] - A[i, j] \quad (\text{III.4})$$

et

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\Delta A}{\Delta j} = A_j[i, j] = A[i, j+1] - A[i, j] \quad (\text{III.5})$$

La norme du gradient est alors donnée par :

$$|\nabla A[i, j]| = \sqrt{A_j^2[i, j] + A_i^2[i, j]} \quad (\text{III.6})$$

ou encore :

$$|\nabla A[i, j]| = \max\{|A_j[i, j]|, |A_i[i, j]|\} \quad (\text{III.7})$$

ou encore :

$$|\nabla A[i, j]| = \frac{\{|A_j[i, j]| + |A_i[i, j]|\}}{2} \quad (\text{III.8})$$

Notons que :

- Ces opérateurs sont très sensibles au bruit.

- Les formules (III.7) et (III.8) seront utilisées dans la suite, puisqu'elles nécessitent moins d'opérations de calcul que la formule (III.6) donc un temps d'exécution plus faible.

III.1.3.1.2. OPERATEURS DE PREWITT ET DE SOBEL

Pour ces opérateurs, les dérivées directionnelles horizontale et verticale s'expriment sous la forme :

$$A_j[i,j] = h_j * A[i,j] \quad \text{et} \quad A_i[i,j] = h_i * A[i,j] \quad (\text{III.9})$$

* : désigne l'opération de convolution,

$$h_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ c & 0 & -c \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h_i = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -c & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Les matrices h_j et h_i , appelées aussi masques, sont les noyaux de convolution de filtres à réponse impulsionnelle finie.

Les masques de Prewitt sont définis par $c=1$ et les masques de Sobel par $c=2$.

La norme du gradient est calculée par la formule (III.7), et son orientation est donnée par : $\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan(A_i / A_j)$.

III.1.3.2. OPERATEURS DERIVATIFS DU DEUXIEME ORDRE

Les contours peuvent être localisés par les passages par zéro du laplacien :

$$\Delta A(x,y) = \frac{\partial^2 A}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial^2 y^2} \quad (\text{III.11})$$

III.1.3.2.1. OPERATEUR LAPLACIEN SUR UN VOISINAGE REDUIT

Une des approximations discrètes du laplacien, calculée sur un voisinage 3×3 , correspond au masque suivant :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.12})$$

III.1.3.2.2. OPERATEUR DE MARR ET HILDRETH

L'image $A(x, y)$ peut être prétraitée en effectuant un lissage par un filtre gaussien $g(x,y)$. Ensuite, on calcule la dérivée seconde dans la direction \mathbf{n} du gradient et on cherche les passages par zéro dans l'image B définie par :

$$B(x,y) = \frac{\partial^2(A * g(x,y))}{\partial^2 n} \quad (III.13)$$

Pour simplifier, on suppose que les passages par zéro de la dérivée seconde directionnelle coïncident avec ceux du laplacien. On peut alors utiliser le laplacien et l'expression devient :

$$B(x,y) = \Delta(A * g(x,y)) \quad (III.14)$$

Cela revient à appliquer directement sur l'image l'opérateur *laplacien d'une gaussienne* $\Delta g(x,y)$ qui peut être approché valablement par la différence de deux gaussiennes (opérateur DOG). En effet, en monodimensionnel, l'opérateur DOG s'écrit :

$$DOG(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}} \quad (III.15)$$

En posant $\sigma_i = \sigma + \delta\sigma$, il vient :

$$\sqrt{2\pi}DOG(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{1}{\sigma + \delta\sigma} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma + \delta\sigma)^2}} \quad (III.16)$$

Il apparaît que :

$$\sqrt{2\pi}DOG(x) = \delta\sigma \frac{\partial}{\partial\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) = - \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{x^2}{\sigma^4} \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (III.17)$$

Or :

$$\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{x^2}{\sigma^4} \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{\partial^2 g(x)}{\partial^2 x^2} \quad (III.18)$$

DOG(x) approche donc la dérivée seconde de $g(x)$ si σ et σ_i sont voisins.

L'objectif est de réaliser un opérateur différentiel à bande étroite. En étudiant le filtre DOG, on observe que la bande passante est pratiquement constante pour un rapport $\sigma/\sigma_i < 1,6$. Sachant que le gain croît quant σ/σ_i augmente, on choisit pratiquement σ/σ_i voisin de 1.6.

III.1.3.2.3. OPERATEUR DE HUERTAS-MEDIONI

Huertas et Médioni proposent un filtre qui est une décomposition en filtres séparables de l'opérateur laplacien d'une gaussienne :

$$\frac{1}{G_0} \left(2 - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}} \quad (III.19)$$

où G_0 est un coefficient de normalisation.

$$\Delta g(x,y) = g_1(x) g_2(y) + g_2(x) g_1(y) \quad (\text{III.20})$$

avec :

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2G_0}} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{dérivée seconde d'une gaussienne}) \quad (\text{III.21})$$

$$\text{et : } g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2G_0}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{lissage}) \quad (\text{III.22})$$

L'implantation de ces filtres est faite sous forme de filtres numériques à réponse impulsionnelle finie à coefficients entiers.

III.1.3.3. APPROCHES PAR FILTRAGE OPTIMAL

Dans les approches suivantes, le contour est modélisé par un échelon d'amplitude U_0 noyé dans un bruit blanc. Deux méthodes de calcul du filtre optimal pour détecter et localiser la transition sont proposées.

III.1.3.3.1. APPROCHE DE CANNY

L'approche de Canny consiste à trouver le filtre optimal de réponse impulsionnelle $h(x)$ (en monodimensionnel) satisfaisant les trois contraintes [BOL95] suivantes pour un signal d'entrée en échelon :

- une bonne détection,
- une bonne localisation,
- une faible multiplicité des maximums dus au bruit.

Canny trouve la solution suivante, qui est la dérivation de la convolution d'une image avec une gaussienne.

Les dérivées partielles de la courbe de Gauss sont :

$$\begin{aligned} G_x(x,y) &= -\frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) \\ G_y(x,y) &= -\frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Les filtres étant séparables, nous pouvons réaliser séparément les convolutions suivant x et y , d'où :

$$\begin{aligned} A_x &= G_x(x) * G(y) * A \\ A_y &= G_y(y) * G(x) * A \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

avec :

$$\begin{aligned} G(x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \\ G_x(x) &= -\frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

III.1.3.3.2. APPROCHE DE DERICHE

Deriche, utilisant la même démarche que Canny a cherché une réalisation de l'opérateur sous la forme d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII), il aboutit à l'opérateur suivant (en monodimensionnel), c : est une constante de normalisation.

LISSAGE : Pour améliorer l'immunité au bruit un lissage préalable est effectué. Le filtre utilisé est la combinaison de deux filtres monodimensionnels dans les directions x et y . Le filtre de lissage monodimensionnel retenu par Deriche est l'intégrale $f(x)$ du filtre optimal. Nous avons :

$$f(x) = b (\alpha|x| + 1) e^{-\alpha|x|} \quad (\text{III.26})$$

b est calculé pour donner une réponse constante de valeur 1 pour un signal d'entrée constant de niveau 1.

L'expression du filtre bidimensionnel séparable de lissage est donc de la forme :

$$f(x,y) = b^2 (\alpha|x| + 1) e^{-\alpha|x|} (\alpha|y| + 1) e^{-\alpha|y|} \quad (\text{III.27})$$

Si l'image originale est notée $A(x,y)$, l'image lissée aura pour expression :

$$B(x,y) = A * f(x,y) \quad (\text{III.28})$$

CALCUL DU GRADIENT : Le calcul du gradient se fait à partir des dérivées selon x et y du produit de convolution de l'image par le filtre de lissage $f(x,y)$. Compte tenu des règles de dérivation de l'opération de convolution et de la séparabilité du filtre $f(x,y)$, nous aurons les opérateurs de dérivation suivant x et y sous la forme :

$$f_x(x,y) = cxe^{-\alpha|x|} b(\alpha|y| + 1)e^{-\alpha|y|} \quad (\text{III.29})$$

$$f_y(x,y) = cye^{-\alpha|y|} b(\alpha|x| + 1)e^{-\alpha|x|} \quad (\text{III.30})$$

On en conclut que : $f_x(x,y) = h(x) * f(y)$, et par conséquent, l'image de la dérivée directionnelle en x s'écrit :

$$B_x(x,y) = (A * h(x)) * f(y) \quad (\text{III.31})$$

C'est à dire que la dérivée directionnelle selon x est le résultat d'un lissage suivant la direction y , suivi par une dérivation suivant x .

De même que : $B_y(x,y) = (A * h(y)) * f(x)$.

Dans le cas discret, on a :

$$\begin{aligned} X(m,n) &= (cne^{-\alpha|n|}) [b(\alpha|m| + 1)e^{-\alpha|m|}] \\ Y(m,n) &= (cme^{-\alpha|m|}) [b(\alpha|n| + 1)e^{-\alpha|n|}] \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

avec :

$$b = \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{1 + 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}} \quad \text{et} \quad c = \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}} \quad (\text{III.33})$$

Une note très importante est que l'implémentation récursive des filtres monodimensionnels h et f est aisée [BOL95]. Donc, cette approche permet de déterminer la sortie du détecteur de contours optimal sans appliquer une convolution directe de l'image. L'implémentation récursive est donnée en Annexe 3.

III.1.4. AMINCISSEMENT DES LIGNES DE CONTOUR

Lorsque l'on effectue le gradient d'une image, il est nécessaire d'isoler les maximums locaux de l'image dérivée pour déterminer les points exacts de contour afin de réduire ceux-ci à une courbe d'un seul pixel d'épaisseur. Soit la méthode suivante dite « suppression des points non maximum », dont le principe est le suivant :

Soit $A(x,y)$ l'image composée des amplitudes des gradients, et $Dir(x,y)$ l'image des directions. Pour chaque point $A(x,y)$, on détermine les points adjacents qui se trouvent dans la direction du gradient, comme illustré dans la figure III.3. Soient $A(x_1,y_1)$ et $A(x_2,y_2)$ ces points.

L'algorithme est très simple : si $A(x,y)$ est supérieur à la fois à $A(x_1,y_1)$ et à $A(x_2,y_2)$, alors $A(x,y)$ est conservé, sinon $A(x,y)$ est mis à zéro.

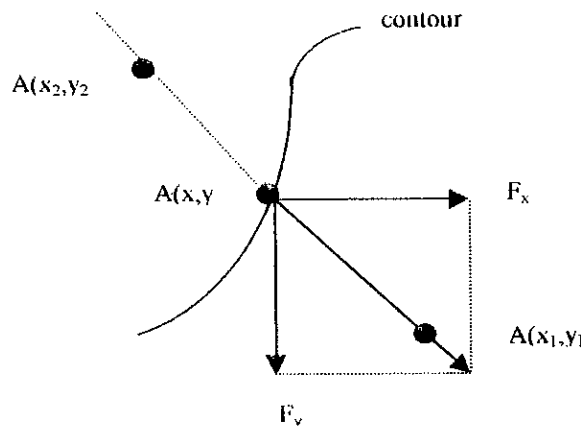


Figure III.3 : Exemple d'amincissement.

III.1.5. APPLICATION

Dans ce qui suit, nous donnons les résultats d'application de toutes les méthodes discutées plus haut sur quelques images biomédicales :



(a1)



(a2)



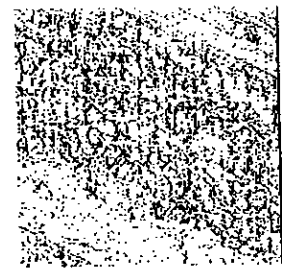
(a3)



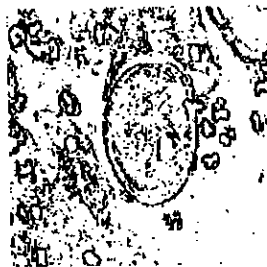
(b1) S=30



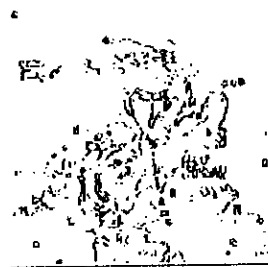
(b2) S=20



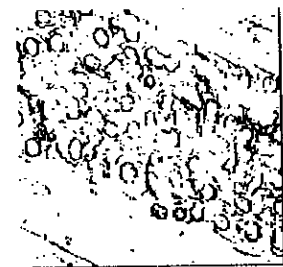
(b3) S=15



(c1) S=50



(c2) S=65



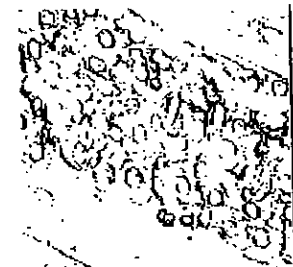
(c3) S=35



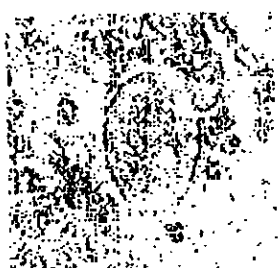
(d1) S=70



(d2) S=55



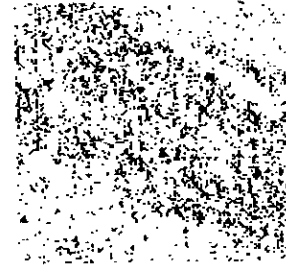
(d3) S=34



(e1) S=40



(e2) S=25



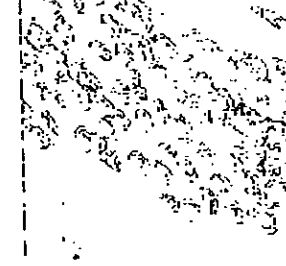
(e3) S=15



(f1) $\sigma=3.2, \sigma'=2, S=25$



(f2) $\sigma=3.2, \sigma'=2, S=25$



(f3) $\sigma=3.2, \sigma'=2, S=20$

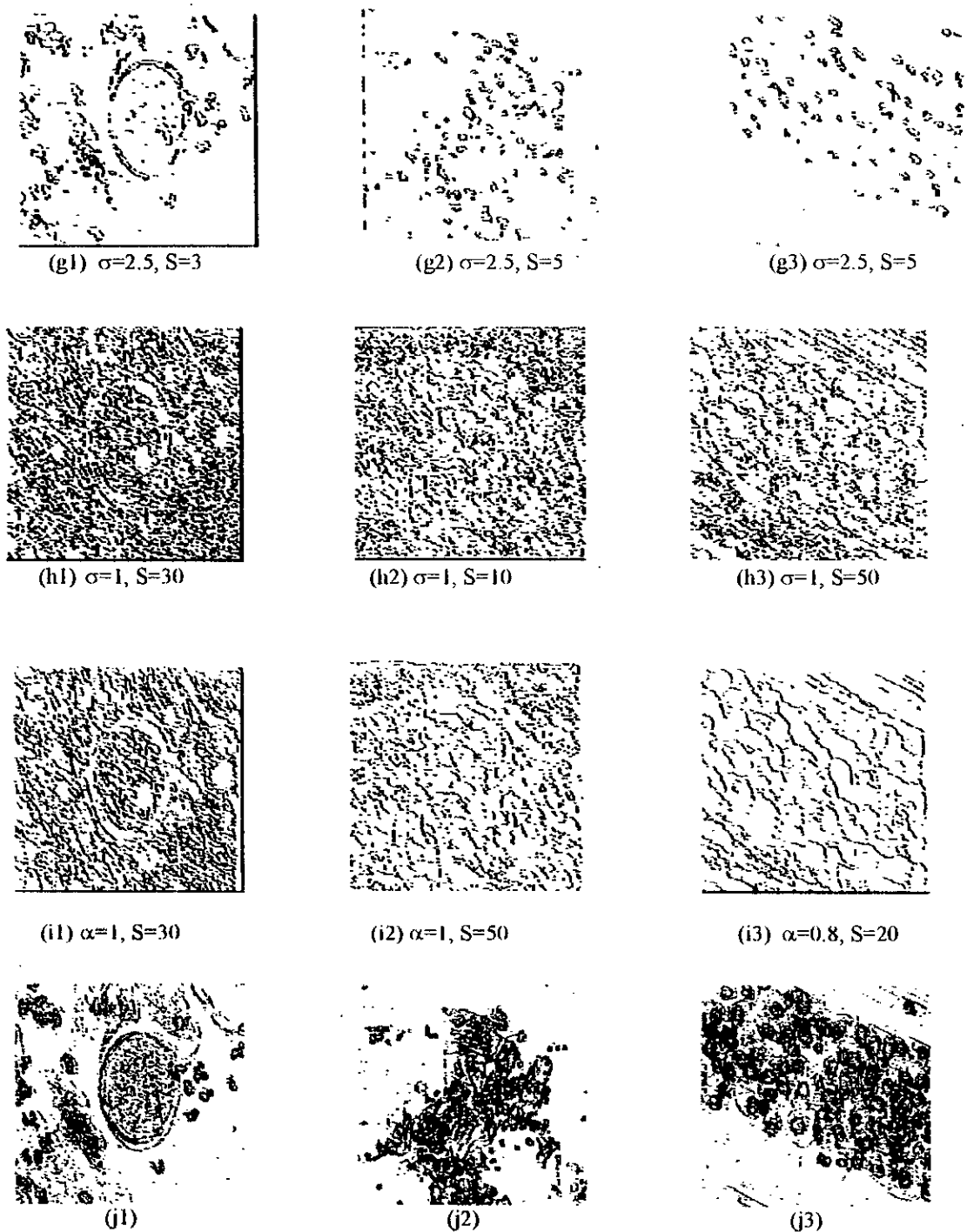


Figure III.4 : (a) images originales, Résultats de détection de contours par : (b) Roberts, (c) Prewitt, (d) Sobel, (e) laplacien au voisinage réduit, (f) Marr-Hildreth, (g) Huertas-Médioni, (h) Canny, (i) Deriche, (j) Approche multifractale de détection de contours.

Nous remarquons que :

- Les contours obtenus par l'application des opérateurs Prewitt et Sobel sur les différentes images sont épais.

- Contrairement à l'opérateur de Roberts, les opérateurs de Prewitt et Sobel présentent l'avantage d'être moins sensibles au bruit. En effet, tout processus de dérivation d'un signal tend à accentuer le bruit présent dans ce signal. Cette sensibilité a été diminuée en effectuant une moyenne locale sur le domaine couvert par le masque.
- Les masques des opérateurs du premier ordre constituent une approximation discrète de la dérivée réelle et de ce fait la norme appliquée pour le calcul de l'amplitude est dépendante des valeurs des composantes des deux dérivées directionnelles suivant les directions horizontale et verticale. Donc, les normes utilisées introduisent des distorsions dans le calcul de l'amplitude du gradient car elles dépendent de la direction du gradient et non de sa seule amplitude.
- Le laplacien possède un inconvénient majeur qui est sa grande sensibilité au bruit. Cet opérateur réalise une dérivée seconde de l'image et est donc très instable. On peut noter que les contours obtenus ont un pixel d'épaisseur.
- Le choix des paramètres des filtres des opérateurs de Marr-Hildreth et Huertas-Médioni est empirique. L'opérateur de Marr-Hildreth détecte mieux les contours que l'opérateur de Huertas-Médioni. Mais ce dernier, présente des contours fermés. Ces opérateurs atténuent l'effet du bruit.
- L'opérateur de Canny diminue l'influence du bruit introduit par l'opération de dérivation de l'image. Nous pouvons jouer sur la sensibilité de l'opérateur au bruit en faisant varier la variable σ de la courbe de Gauss. Notons que plus ce paramètre est grand, plus les contours s'adoucissent et donc perdent en finesse dans les détails.
- La délocalisation des contours est d'autant plus perceptible que le paramètre α de l'opérateur de Deriche est petit. Il faut noter que cet opérateur atténue l'effet du bruit.
- Les seuils de binarisation utilisés sont déterminés empiriquement.
- Les résultats obtenus par l'approche multifractale de détection de contours sont meilleurs, et comme nous le remarquons, il n'y a pas de paramètres ou seuils à varier, ce qui nous épargne tous les problèmes de détermination des paramètres optimaux qui nous donnent de meilleurs résultats.

III.1.6. CONCLUSION

Nous avons vu que l'approche classique de détection de contours consiste à utiliser en cascade un filtre passe-bas pour diminuer le bruit, suivi d'un opérateur différentiel pour détecter le contour.

Le problème sous-jacent à ces approches est que le but recherché (extraction de contours) ne peut pas être défini avec précision. Ainsi, il n'existe pas d'algorithme unique qui donne satisfaction dans le cas général. Cette considération fait dire à plusieurs auteurs que le problème de l'extraction de contours est mal conditionné. En pratique, il existe autant d'algorithmes que de modèles de contours. La frontière échelon ou le contour saut n'est pas le seul modèle disponible pour caractériser un contour.

Un problème souvent rencontré est la détection de contours contenant des coins ou jonctions. Dans ce cas, le gradient n'est pas significatif, car nous ne pouvons approximer le signal par une fonction différentiable.

III.2. SEGMENTATION EN REGIONS HOMOGENES

Dans le but de faire une étude comparative avec les résultats obtenus avec l'approche multifractale de segmentation, nous étudions une méthode de classification et une méthode basée sur la morphologie mathématique.

III.2.1. METHODE DE CLASSIFICATION

Le but recherché dans ce type de segmentation des images est de classifier les pixels ou les sous-images en fonction d'un ou de plusieurs attributs. Par exemple, le niveau de gris est un attribut ponctuel.

Les classes sont construites à partir des attributs des pixels. Chaque pixel est affecté à une classe unique, mais il est classifié indépendamment de ses voisins. Les critères de proximité employés sont en effet, des distances entre vecteurs d'attributs et ne tiennent pas compte, en principe de la proximité entre pixels dans l'image. La classification est une opération préalable à la segmentation qui est ensuite obtenue par extraction des composantes connexes des pixels appartenant à une même classe. Une région sera constituée de pixels d'une même classe mais il peut y avoir dans l'image plusieurs régions correspondant à une même classe.

La plupart des méthodes ne prenant en compte qu'un seul attribut extraient automatiquement des seuils puis affectent les pixels à une classe par comparaison de leur niveau de gris à ces seuils. Ces méthodes reposent sur l'exploitation de l'histogramme, qui est supposé normalisé et qui caractérise la distribution des seuils ; elles déterminent des seuils qui constitueront les limites des différentes classes. Ces seuils peuvent être les mêmes pour toute l'image (seuils globaux). Dans ce cas, ils sont déterminés à partir de l'histogramme de l'image complète, par exemple, en recherchant des minimums locaux.

Il y a plusieurs méthodes de classification mais d'une manière précise la segmentation se réalise en trois étapes :

1. identification des seuils interclasses.
2. affectation des points aux différentes classes.
3. extraction des composantes connexes de chaque classe.

Un exemple d'application d'une méthode de classification par relaxation est donné par la figure III.5.b. Les résultats obtenus nous montrent que ce type de segmentation ne différencie pas le noyau et le cytoplasme de la même cellule et elle arrive même à confondre la cellule avec le fond de l'image. Le fait que cette méthode ne permet pas de faire la séparation des images de cellules en images de cytoplasmes et de noyaux elle est inutilisable dans le cadre du problème de dépistage du cancer.

III.2.2. METHODE BASEE SUR LA MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE

Avant de donner l'algorithme de segmentation nous donnerons des définitions élémentaires sur la morphologie mathématique dans le cas des images à plusieurs niveaux de gris.

L'érosion \ominus d'une fonction par un élément structurant S plan consiste à effectuer le minimum sur le voisinage défini par S .

La dilatation \oplus d'une fonction par un élément structurant S plan consiste à effectuer le maximum sur le voisinage défini par S .

Soit $g \in \phi$ (l'espace des fonctions continues définies de R^n à R), on appelle **ouverture morphologique** par l'élément structurant g , l'application de ϕ dans ϕ noté O_g , définie par :

$$\forall f \in \phi, O_g(f) = (f \ominus g) \oplus g$$

Soit $g \in \phi$, on appelle **fermeture morphologique** par l'élément structurant g , l'application de ϕ dans ϕ noté F_g , définie par :

$$\forall f \in \phi, F_g(f) = (f \oplus g) \ominus g$$

En utilisant l'ouverture et la fermeture morphologiques, nous pouvons décrire l'algorithme de segmentation. Pour extraire les noyaux nous procédons par :

- Fermeture de l'image en utilisant un élément structurant carré de taille inférieure à la taille du plus petit noyau de l'image,
- Seuillage,
- Ouverture de l'image par un élément structurant de petite taille.
- Elimination des filaments et des tâches qui sont passés à travers le filtrage morphologique en utilisant le PSP.

Pour l'extraction des surfaces de cellules l'algorithme est le même, mais dans la fermeture de l'image nous utilisons un élément structurant carré de taille inférieure à la taille de la plus petite cellule de l'image. L'image des cytoplasmes est obtenue en effectuant la différence de l'image des cellules et de l'image des noyaux.

Des résultats d'application de cet algorithme sur plusieurs images biomédicales sont donnés par la figure III.5. L'algorithme nous permet effectivement d'effectuer la séparation de l'image des cellules en image de noyaux et en image de cytoplasmes, mais nous constatons qu'il y a un manque de précision sur les frontières extraites, puisque dans certains cas, une partie de la cellule est tronquée (ou cytoplasme) (FigIII.5.c1) ou une partie lui est ajoutée et ne lui appartient pas (FigIII.5.c2). Ceci est expliqué par le fait que l'algorithme présente l'inconvénient de dépendre d'un niveau de seuillage et de la taille des éléments structurants qui sont déterminés expérimentalement. Le manque de précision sur les frontières déforme la morphologie de la cellule et présente une source d'erreurs dans les étapes suivantes du module de dépistage de cancer.

Nous constatons que les résultats obtenus par l'algorithme de segmentation multifractale sont beaucoup plus précis même sur les frontières, ceci est dû au fait que l'algorithme traite l'image point par point en caractérisant chaque pixel par son attribut multifractal (exposant de Hölder) estimé à l'échelle du pixel, par contre dans la morphologie mathématique, le pixel est traité dans un voisinage de taille de l'élément structurant qui est d'une taille beaucoup plus grande que celle du point. L'algorithme multifractal est beaucoup plus rapide et ne présente pas les problèmes liés au choix des seuils de binarisation.

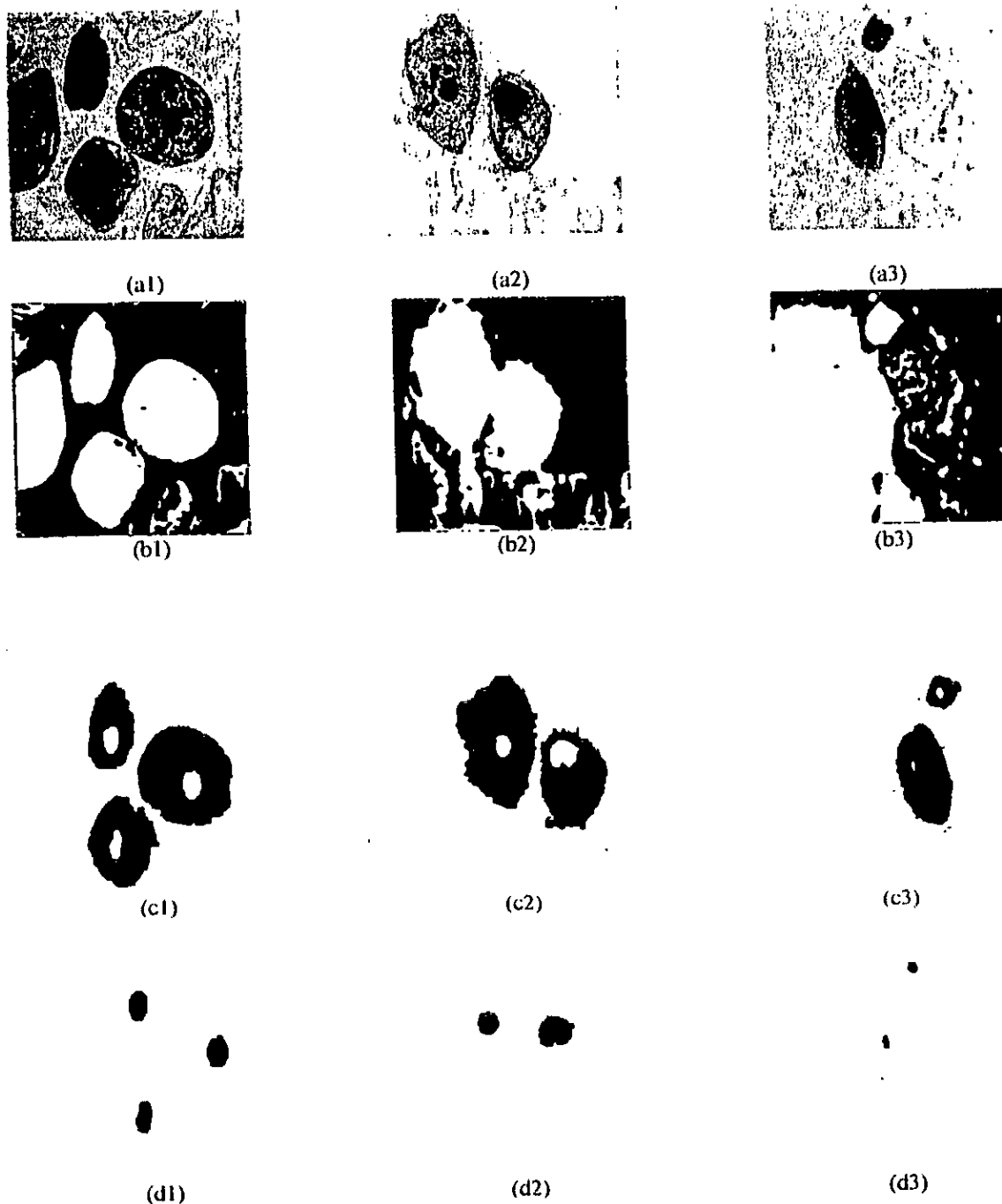


Figure III.5 : La 1^{ière} ligne présente les images originales, la 2^{ème} ligne présente les résultats obtenus par la méthode de classification par relaxation. 3^{ème} et 4^{ème} ligne présentent les résultats de segmentation en utilisant la morphologie mathématique : 3^{ème} ligne présente les images de cytoplasmes, la dernière ligne les images de noyaux.

III.3. CONCLUSION

Un autre argument venant confirmer la nature mal conditionnée du problème de détection de contours et de segmentation en régions homogènes est le fait que la perception des contours et des objets intègre de manière inconsciente les notions d'éclairage, de forme de l'objet ainsi que la propriété de sa surface (réflectance, texture). Or, dans le traitement d'images numériques, toutes ces grandeurs sont condensées en une seule variable bidimensionnelle qui est, dans le cas monochrome, l'intensité lumineuse. C'est à l'aide de cette seule information que les méthodes classiques opèrent la segmentation.

La nouvelle tendance dans l'analyse d'image, qui prend de plus en plus d'ampleur, est la caractérisation fractale ou multifractale de l'image, en étudiant l'aspect topologique de la surface de niveaux de gris de l'image.

Nous avons fourni des approches fractale et multifractale au problème de segmentation dans une image (voir chapitre II). La description d'image fondée sur les caractérisations fractale ou multifractale sont utilisées.

L'extraction des contours et la segmentation en régions homogènes par l'utilisation des paramètres fractals et multifractals sont possibles même sur des images très complexes et manufacturées, telles que les images biomédicales. On voit l'intérêt des algorithmes fractals et multifractals qui s'adaptent à tous types d'images et ceci sans paramètres et seuils à adapter, donc tous les problèmes de seuillage ou de binarisation que l'on trouve dans les autres méthodes de segmentation, ne figurent pas dans ces algorithmes.

Chapitre IV:

***CLASSIFICATION DES CELLULES
BIOLOGIQUES***

IV.1. INTRODUCTION

Dans le chapitre II, nous avons étudié un algorithme de segmentation multifractal basé sur le calcul des exposants de singularités. Nous l'avons appliqué sur des images biologiques, et comme nous l'avons déjà vu, nous avons réussi à avoir des images noyaux et cytoplasmes des différentes cellules.

Dans la suite de ce travail, nous étudions la phase de prétraitement qui est bien nécessaire, pour ne pas dire obligatoire afin d'éviter tout risque d'erreur. Après cette étape, et avec un algorithme dit '**croissance de région**' et l'utilisation du critère cellulaire '**rapport nucléo-cytoplasmique**' appliqué aux images résultantes de la segmentation multifractale, nous pouvons séparer les différents types de cellules se trouvant dans l'image originale et placer chacun des types dans une nouvelle image, nous obtenons ainsi la classification des cellules biologiques.

IV.2. PRETRAITEMENT

Le but du prétraitement, comme le montre la figure IV.1., est d'éliminer, à partir de l'image, les informations indésirables ou inexploitables.

Le terme informations inexploitables est utilisé pour définir les parties de l'image dont on ne peut se servir et qui, par conséquent, doivent être éliminées. Ces parties sont :

- Cytoplasme sans noyau.
- Noyau sans cytoplasme.
- Cellules tronquées (c'est à dire qu'une partie du cytoplasme ou du noyau a été tronquée lors de l'étape d'acquisition).
- Cellules dont le cytoplasme est rabattu sur lui-même. Ceci se produit lorsque les tissus (les cellules) prélevés ont été mal fixés sur la lame.

Pour réaliser cette partie de prétraitement, on se servira d'un logiciel de traitement d'images (PSP), grâce auquel, en sélectionnant les différentes parties à éliminer, on arrive à éclaircir ces zones et donc à les confondre avec le fond de l'image.

Pour les images originales de cellules, l'éclaircissement se fait au moyen d'un outil présent dans ce logiciel nommé correction **Gamma**. Pour les images de cytoplasmes et de noyaux nous procédons par l'inversion du niveau de gris de la partie inexploitée (les images de noyaux et de cytoplasmes sont à deux niveaux de gris).

Quant au terme informations indésirables, il s'applique aux tâches isolées qu'on trouve dans l'image et qui risquent, plus tard, de fausser les opérations de classification. Pour les corriger, nous procédons de la même façon que précédemment.

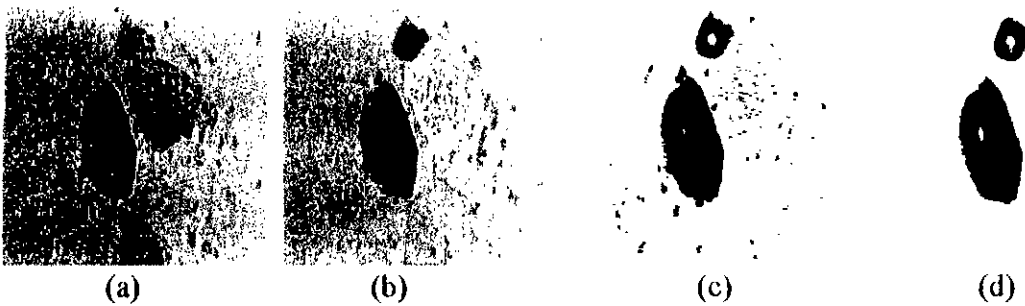


Figure IV.1: (a) image originale de cellules (b) image prétraitée, (c) image obtenue par l'algorithme de segmentation multifractale avec $\alpha \in [2.05, 2.3]$, (d) image (c) prétraitée.

IV.3. CALCUL DU RAPPORT NUCLEO-CYTOPLASMIQUE DE CHAQUE CELLULE

IV.3.1. CALCUL DES SURFACES NOYAUX ET CYTOPLASMES

Pour réaliser une segmentation en fonction du rapport de surface noyau/cytoplasme, il faut calculer :

- Les surfaces des différents noyaux.
- Les surfaces des différents cytoplasmes.
- Le rapport noyau/cytoplasme correspondant à chaque cellule.

L'algorithme qu'on a mis au point est celui de 'croissance de région', itératif et récursif, il est basé sur le principe suivant :

Pour chaque point de l'image $I(x,y)$ rencontré de niveau de gris zéro, on fait appel à une fonction **CalSurface** qui permet de calculer la surface d'une région connexe de points qui peut être noyau ou cytoplasme. La fonction **CalSurface** renvoie la valeur de la surface qu'on emmagasinera dans un vecteur préalablement déclaré. **CalSurface** est exécutée sous conditions de rencontrer un pixel de l'image dont le niveau de gris est égal à zéro, et qui n'a pas été préalablement exploré. Une fois que le pixel est exploré, nous le mettons à un niveau de gris 256, pour qu'il ne soit pas traité plus d'une fois, la fonction **CalSurface** peut être résumée comme suit :

Début

Pour chaque pixel $I(x,y)$ Faire

Si $I(x,y)=0$ alors

$NbrSurf := NbrSurf + 1$; /Nous donne le nombre de cellules/
/dans l'image/

$S := CalSurface(x,y)$; /La surface du noyau ou du/
/cytoplasme/

Sauvegarder le point de départ (x,y) dans
une variable $AdrSurface$; / $AdrSurface$ est utilisé dans l'étape
/de segmentation/

$Surface := S$; /vecteur contenant la surface de chaque/
/noyau ou cytoplasme/

Fsi

Fp

Fin

CalSurface(x,y)

Début

Compteur = 1 ;

On met $I(x,y)$ à 255 afin de ne pas le réexaminer ;

Pour tout pixel adjacent à $I(x,y)$ Faire

Si $I(x,y) = 0$ alors

Compteur := Compteur + 1 ;

$I(x,y) = 255$;

CalSurface(x,y) ;

Fsi

Fp

Renvoyer Compteur ;

Fin

Cet algorithme, nous permet d'avoir :

1. Le nombre de cellules, qui n'est autre que le nombre de surfaces estimé (variable **NbrSurf**)
2. La surface de chaque cellule, ceci est emmagasiné dans le vecteur **Surface** de taille **NbrSurf**.
3. **AdrSurf** qui contient l'adresse du premier point noir de chaque surface, il a un rôle très important à jouer dans l'étape de segmentation en classes cellulaires.

EXEMPLE

L'application de cet algorithme sur l'image précédente de cytoplasmes, donne les résultats suivants :

Nombre de cellules est 2, la surface de la 1^{ère} cellule (en gris) est de 972, et la 2^{ème} est de 4973.



Figure IV.2 : Image des cytoplasmes après estimation de leurs surfaces.

IV.3.2. CALCUL DU RAPPORT NUCLEO-CYTOPLASMIQUE

Après avoir déterminé les surfaces des noyaux et des cytoplasmes, on utilisera la procédure suivante pour estimer les rapports nucléo-cytoplasmiques de chaque cellule :

1. Stocker la surface de chaque noyau dans un vecteur **SurNoyau** (de même taille que **NbrSurf**).
2. Stocker la surface de chaque cytoplasme dans un vecteur **SurCytoplasme** (de même taille que **NbrSurf**).

3. Le rapport nucléo-cytoplasmique **RNC** de chaque cellule **cel** est obtenue comme suit :

$$\text{RNC}(\text{cel}) = \frac{\text{SurNoyau}(\text{cel})}{\text{SurCytoplasme}(\text{cel})} \quad (\text{IV.1})$$

APPLICATION

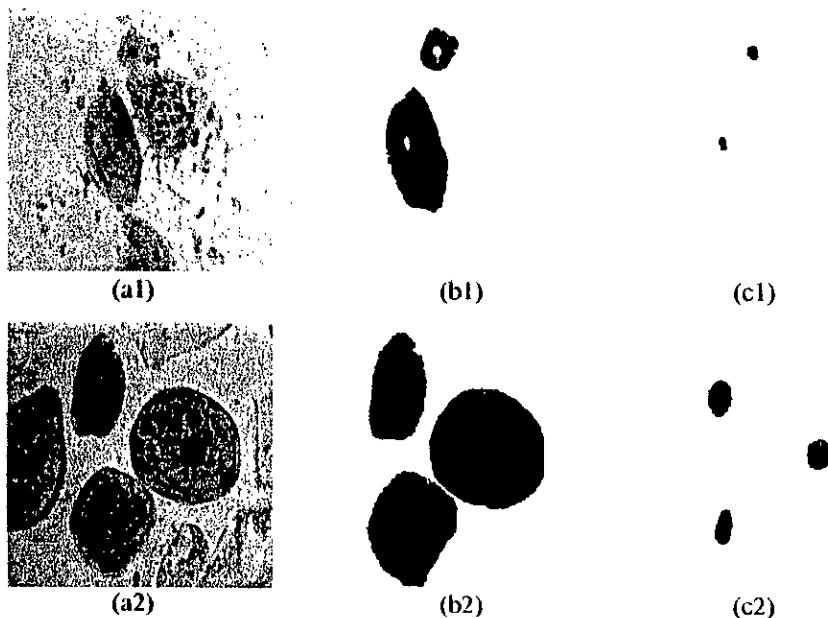


Figure IV.3 : (a1) et (a2) correspondent aux images originales, (b1) image de cytoplasmes de (a1), (b2) image de cellules de (a2), (c1) et (c2) images des noyaux.

L'application de l'algorithme précédent permet d'avoir les résultats suivants :

Image (a1) :

Surfaces de cytoplasmes :

Cellule 1 : 4807.

Cellule2 : 907.

Surfaces des noyaux :

Cellule1 : 65.

Cellule2 : 91.

Rapports nucléo-cytoplasmiques :

Cellule1 : 0.014.

Cellule2 : 0.1.

Image (a2) :

Surfaces de cellules :

Cellule 1 : 6583.

Cellule2 : 10058.

Cellule3 : 4316.

Surfaces des noyaux :

Cellule1 : 388.

Cellule2 : 523.

Cellule3 : 570.

Rapports nucléo-cytoplasmiques :

Cellule1 : 0.063.

Cellule2 : 0.055.

Cellule3 : 0.152.

Remarques :

1. La numérotation des cellules se fait de bas en haut de l'image, en la balayant ligne par ligne, de gauche à droite.
2. L'image (a2) présente des cellules ; le calcul a donné les surfaces de cellules au lieu de celles de cytoplasmes. Pour avoir la surface de cytoplasme d'une cellule, il suffit de soustraire de sa surface cellulaire la surface de son noyau.
3. La cellule de gauche de l'image (a2) est éliminée dans la phase de prétraitement puisqu'elle présente une image de cellule tronquée.
4. Lorsque nous travaillons avec une image de cytoplasme, l'algorithme de 'croissance de région' peut partager la même cellule en deux. Ceci est possible lorsque nous prenons la taille du voisinage pour l'estimation des surfaces plus petite que la taille du noyau. Nous pouvons résoudre ce problème, en prenant des fenêtres plus grandes que la taille des noyaux ; mais, il s'avère dans certaines images que les cellules soient séparées entre elles d'une distance d'un pixel, alors si nous prenons un voisinage plus grand que la distance qui sépare les deux cellules, telle que la taille du noyau, l'algorithme de 'croissance de région' considérera deux cellules comme étant une seule.

Pour éviter tous ces problèmes, nous préférons travailler avec les images des surfaces cellulaires qu'avec celles de leurs cytoplasmes ; la surface du cytoplasme n'est autre que la différence entre la surface de la cellule entière et celle du cytoplasme.

Dans la suite de ce travail, nous procéderons par le calcul des surfaces des cellules au lieu de celles des cytoplasmes.

IV.4. CLASSIFICATION DES CELLULES EN FONCTION DU RAPPORT NUCLEO-CYTOPLASMIQUE

Précédemment, nous avons montré que ce qui permettait de différencier les types de cellules est le rapport noyau/cytoplasme. Rappelons que plus la cellule est jeune et se trouve dans une couche profonde, plus le rapport est élevé, inversement, plus la cellule est vieille et se trouve dans une couche superficielle, plus le rapport est faible.

Les intervalles du rapport nucléo-cytoplasmique, correspondant à chaque type de cellule, sont les suivants :

- Cellules basales : $0.25 \leq \text{RNC} < 0.37$
- Cellules para-basales : $0.15 \leq \text{RNC} < 0.25$
- Cellules intermédiaires : $0.04 \leq \text{RNC} < 0.15$.
- Cellules superficielles : $0.01 \leq \text{RNC} < 0.04$

Nous pouvons effectuer la classification de deux façons différentes, soit par coloriage en affectant la même couleur aux cellules de même couche, soit par création des images de cellules pour chaque couche.

IV.4.1. CLASSIFICATION PAR COLORIAGE

La classification est réalisée selon le principe suivant : Pour chaque rapport nucléo-cytoplasmique qui appartient à un intervalle définissant le type ou la classe de la cellule, nous affectons un niveau de gris à la cellule correspondant à ce rapport. Ce niveau de gris nous permettra de différencier les types de cellules ; le résultat sera que toutes les cellules de même type auront un même niveau de gris.

Pour mettre ceci en œuvre, on exécutera les étapes suivantes :

1. Comparer le rapport nucléo-cytoplasmique de la première cellule aux différents intervalles.
2. Après avoir déterminé l'intervalle, faire appel à la fonction qui correspond à cet intervalle et qui affectera à la cellule le niveau de gris adéquat. Il est important de signaler qu'on a quatre fonctions, chacune correspondant à une catégorie de cellules, elles sont basées sur le même principe, la seule différence réside dans le niveau de gris qu'elles affectent à chaque classe de cellules.

Les principes sur lesquels sont basées ces fonctions se rapprochent fortement de la procédure utilisée pour calculer les surfaces des cellules. Il suffit dans ce cas, de se positionner sur le point emmagasiné dans le vecteur **AdrSurf** et lire le rapport correspondant **RNC**, puis faire appel à une fonction **Rapport(RNC)** qui permet de renvoyer la couleur correspondante à chaque type de cellules. Nous envoyons par la suite, l'adresse du point et la couleur correspondante à l'algorithme de croissance de régions.

Nous pouvons résumer cet algorithme comme suit :

Début

Pour chaque pixel de AdrSurf Faire

Couleur ← rapport(RNC) ;

CalSurface(AdrSurf, couleur) ;

Fp

Fin

Rapport(RNC)

Début

si $0.25 \leq RNC < 0.37$ alors Renvoyer couleur pour la basale ;

si $0.15 \leq RNC < 0.25$ alors Renvoyer couleur pour la para-basale ;

si $0.04 \leq RNC < 0.15$ alors Renvoyer couleur pour l'intermédiaire ;

si $0.01 \leq RNC < 0.04$ alors Renvoyer couleur pour la superficielle ;

Fin

CalSurface(x,y,couleur)

Début

On met I(x,y) à couleur afin de ne pas le réexaminer ;

Pour tout pixel adjacent à I(x,y) Faire

Si $I(x,y) = 0$ alors

I(x,y) = couleur ;

CalSurface(x,y,couleur) ;

Fsi

Fin *Fp*

Dans notre travail, nous avons choisi ces 4 intensités, chacune correspondant à un type de cellule :



Application :

L'application de cet algorithme sur les deux images précédentes donne les résultats suivants :

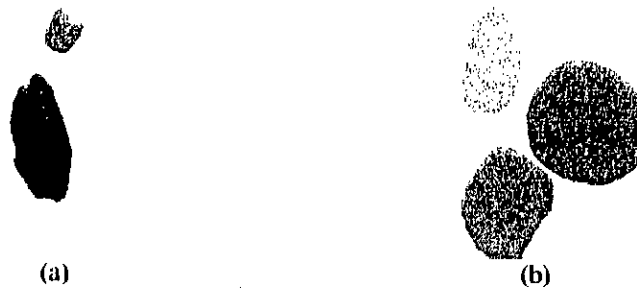


Figure IV.4 : Résultats d'application de l'algorithme de classification par coloriage sur les images de la figure (a1) et (a2).

Pour l'image de la figure (a), nous avons une cellule superficielle et une autre intermédiaire. Par contre, pour l'image (b), nous avons deux cellules intermédiaires et une autre basale.

IV.4.2. CLASSIFICATION PAR CREATION D'IMAGE CONTENANT UN MEME TYPE DE CELLULES

Le principe de cet algorithme reste le même que le précédent, mais dans ce cas, au lieu d'affecter une couleur à un type de cellule, nous récupérons son image originale. Et le résultat de chaque traitement se trouve dans une image correspondant à la classe de la cellule.

Début

Pour chaque pixel de AdrSurf Faire

Rapport(RNC) ;

CalSurface(AdrSurf) ;

Fp

Fin

Rapport(RNC)

Début

si $0.25 \leq RNC < 0.37$ alors IRes = imagbasale ;

si $0.15 \leq RNC < 0.25$ alors IRes = imagparabasale ;

si $0.04 \leq RNC < 0.15$ alors IRes = imagintermediare ;

si $0.01 \leq RNC < 0.04$ alors IRes = imagsuperficielle ;

Fin

CalSurface(x,y)

Début

On met $IRes(x,y)$ à $I(x,y)$ afin de ne pas le réexaminer ;

Pour tout pixel adjacent à $I(x,y)$ Faire

Si $I(x,y) = 0$ alors

$IRes(x,y) = I(x,y)$;

$Calsurface(x,y)$;

Fsi

Fp

Fin

Dans cet algorithme, nous avons utilisé les variables suivantes :

I : est l'image originale.

$IRes$: est une variable d'affectation, qui peut être égale aux différentes images de cellules des couches.

$Imagbasale$: image des cellules basales.

$Imagparabasale$: image des cellules para-basales.

$Imagintermediaire$: image des cellules intermédiaires.

$Imagsuperficielle$: image des cellules superficielles.

APPLICATION

L'application de cet algorithme sur différentes images, nous donne les résultats suivants :

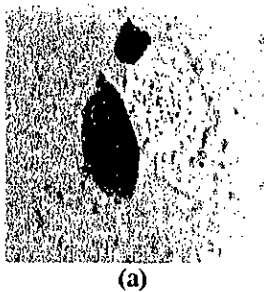


Figure IV.5: (a) image de cellules, (b) image de cellule intermédiaire, (c) image de cellule superficielle.



Figure IV.6: (a) image de cellules, (b) image de cellule para-basale, (c) image de cellules intermédiaires.

IV.5. APPLICATION

L'application des algorithmes précédents, sur plusieurs autres images donne les résultats suivants :

Rappel

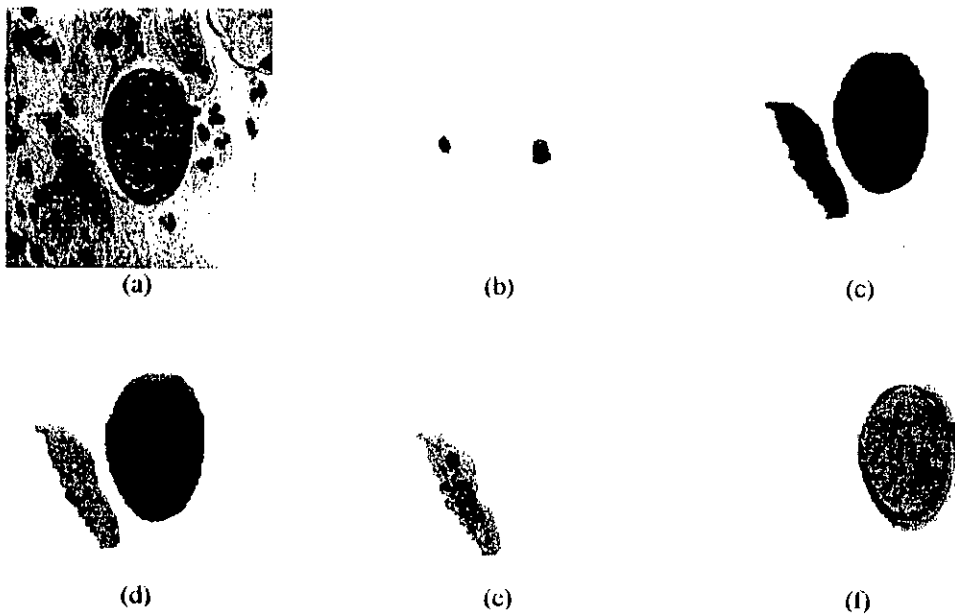


Figure IV.7 : (a) image originale, (b) image des noyaux, (c) image des cellules, (d) classification par coloriage des cellules, (e) cellule intermédiaire et (f) cellule superficielle.

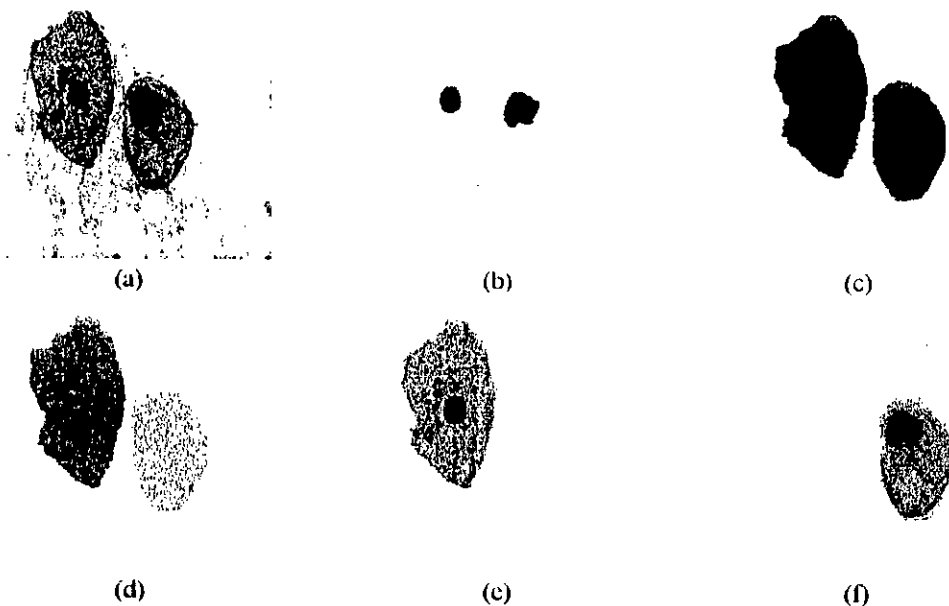


Figure IV.8 : (a) image originale, (b) image des noyaux, (c) image des cellules, (d) classification par coloriage des cellules, (e) cellule intermédiaire et (f) cellule para-basale.

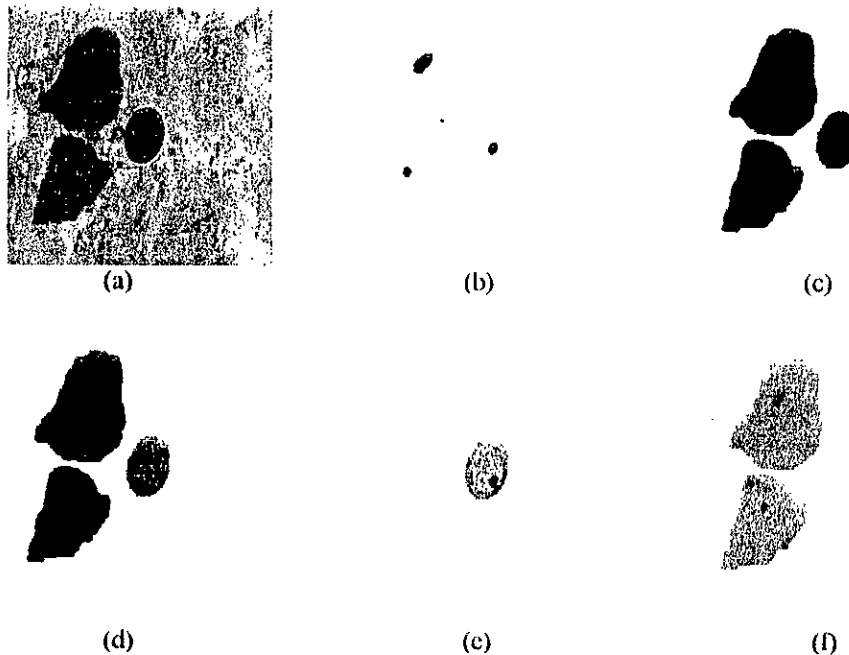


Figure IV.9 : (a) image originale, (b) image des noyaux, (c) image des cellules, (d) classification par coloriage des cellules, (e) cellule intermédiaire et (f) cellules superficielles.

Les rapports nucléo-cytoplasmiques de chaque cellule sont :

- Pour l'image de la figure IV.7 : $RNC_1=0.100$.
 $RNC_2=0.014$.
- Pour l'image de la figure IV.8 : $RNC_1=0.155$.
 $RNC_2=0.043$
- Pour l'image de la figure IV.9 : $RNC_1=0.014$.
 $RNC_2=0.045$.
 $RNC_3=0.038$.

Remarque :

- RNC_i signifie le rapport nucléo-cytoplasmique de la $i^{ième}$ cellule.
- La numérotation des cellules se fait du bas vers le haut en balayant les lignes de Gauche à droite.

IV.6.CONCLUSION

Nous avons exposé dans ce chapitre les différents algorithmes qui nous ont permis de classer les images de cellules biologiques, de reconstituer chaque cellule et de les placer dans des images qui correspondent à chaque type.

La classification des cellules biologiques par création d'images contenant un même type de cellules est plus intéressante que la classification par coloriage. L'intérêt est que lorsque nous avons des images de cellules tout en ayant leurs rapports nucléo-cytoplasmique et donc leurs classes, le cytologiste peut avoir d'autres informations, tel que l'anisonucléose, la difformité nucléaire et l'hyperchromatisme nucléaire. Ce qui est obligatoire dans le dépistage du cancer et donc dans l'étape de reconnaissance.

Les résultats que nous avons obtenu sont satisfaisants et nous montrent bien la validité du critère de segmentation que nous avons choisi.

CONCLUSION

Notre travail a essentiellement concerné plusieurs axes, que nous pouvons résumer en cinq comme suit :

1. Une étude théorique qui s'efforce d'étudier toutes les lignes directrices de la théorie fractale et multifractale. Des définitions élémentaires et des notions de base qui caractérisent les ensembles et, plus généralement, les mesures fractales et multifractales sont données.

Décrire les bases théoriques des approches fractale et multifractale dans le cadre de l'analyse des images, et pour cela, nous avons étudié et appliqué sur des images plusieurs algorithmes d'estimation des paramètres fractals et multifractals.

2. Fournir des approches fractale et multifractale au problème de détection de contours et de segmentation des images. L'extraction des primitives de l'image est fondée sur des caractérisations fractale ou multifractale. Plusieurs algorithmes sont proposés et appliqués.
3. Une étude comparative avec d'autres méthodes de détection de contours et de segmentation en régions homogènes. Cette étude nous a montré l'intérêt des algorithmes multifractals qui s'adaptent à tous types d'images et ceci sans paramètres et seuils à adapter, donc tous les problèmes de seuillage ou de binarisation que l'on trouve dans les autres méthodes, ne figurent pas dans ces algorithmes multifractals.
4. Avec l'algorithme de croissance de région et avec le critère cellulaire nucléocytoplasmique, nous avons réussi à faire la classification des cellules biologiques. Nous avons procédé de deux manières : soit par coloriage, i.e., nous affectons à toutes les cellules de même couche le même niveau de gris. Soit en créant des images, chacune correspondant à un type de cellules. La deuxième technique est meilleure, puisqu'elle nous permet d'avoir d'autres informations sur les autres critères de malignité, et ceci d'une façon subjective par observation directe de la cellule tout en connaissant son rapport nucléocytoplasmique
5. Nous avons concrétisé notre travail à travers le logiciel Frimaseg. Le but est d'avoir un logiciel d'analyse et de segmentation des images par des approches fractales et multifractales. Nous souhaiterions que Frimaseg soit utile pour les futurs chercheurs dans ce domaine.

En perspective, ce travail reste ouvert sur les aspects suivants :

- Utilisation d'autres techniques avec les approches fractales et multifractales, tel que : les ondelettes ou les algorithmes génétiques, etc. Le but est d'obtenir de meilleurs performances.
- Apporter des améliorations à Frimaseg.
- Etudier d'autres techniques pour la classification, tel que les techniques d'étiquetage.
- Etudier les autres modules du système de dépistage du cancer, tel que le module de reconnaissance.

ANNEXES

ANNEXE 1

Dans ce qui suit, nous donnons un ensemble de définitions des mots médicaux utilisés dans le chapitre I.

- **Bénigne** : Sans conséquences graves.
- **Canal cervical** : Nom donné à divers organes en forme de tubes.
- **Cancer** : Tumeur ayant tendance à s'accroître, à détruire les tissus voisins et à donner d'autres tumeurs à distance de son lieu d'origine. (Métastase).
- **Carcinome** : Tumeur cancéreuse épithéliale ou glandulaire.
- **Cellule** : Unité fondamentale morphologique et fonctionnelle de tout organe vivant qui comporte généralement une membrane périphérique limitant le cytoplasme, au sein duquel se trouve le noyau.
- **Chromatine** : Substance présente sous forme de granules dans le noyau cellulaire, fixant les colorants basiques.
- **Cyanophile (cyanophycée)** : Algue bleue possédant, en général, de la chlorophylle associée à un pigment bleu.
- **Cytologie** : Partie de la biologie générale qui étudie la cellule vivante sous tous ses aspects.
- **Desquamer** : Détachement de tissus par squame, écaille.
- **Epithélium** : Tissu constitué de cellules juxtaposées, disposées de façon continue en une ou plusieurs couches.
- **Germe** : Tout micro-organisme capable de provoquer une maladie.
- **Histologie** : Science qui traite de la structure des tissus et des cellules qui contiennent des êtres vivants.
- **Inflammation** : Ensemble de réactions locales provoquées par des germes pathologiques.
- **Isthme** : Partie rétrécie d'un organe.
- **Kératine** : Substance protéique soufrée qui constitue la majeure partie des productions épidermiques chez l'homme ; on la trouve également dans les cellules superficielles.
- **Lésion** : Modification de la structure normale d'une partie de l'organisme.
- **Mitose** : Filament.
- **Multipare** : Ce dit d'une femme qui a déjà enfanté plusieurs fois.
- **Muqueuse** : Membrane qui tapisse les cavités de l'organisme, qui se raccorde avec la peau au niveau des orifices naturels et qui est lubrifiée par la sécrétion de mucus.
- **Mycose** : Affection parasitaire provoquée par des champignons.
- **Néoplasique** : Qui concerne un néoplasme.
- **Néoplasme** : Prolifération pathologique des cellules, de tissus se présentant généralement sous la forme d'une tumeur.
- **Nullipare** : Ce dit d'une femme qui n'a pas d'enfant.
- **Réticulé** : Tissu conjonctif constitué de cellules et de fibres réunies en réseau.
- **Vacuole** : Espace circonscrit, parfois limité par une membrane au sein du cytoplasme d'une cellule ou d'un organe unicellulaire à contenu variable.

ANNEXE 2

MESURES ET DIMENSIONS FRACTALES TENANT COMPTE DE LA DYNAMIQUE DU SYSTEME

Avant de donner les définitions des dimensions fractales qui tiennent compte de la dynamique du système, il est nécessaire de définir les mesures.

2.1. Les mesures

Si nous étudions les mathématiques des fractales, nous rencontrons très tôt les mesures sous une forme ou une autre. Typiquement, une mesure est juste un moyen pour attribuer une grandeur numérique pour des ensembles, de façon à ce que si un ensemble est décomposé en un nombre fini d'éléments, alors la taille de l'ensemble est la somme des tailles des différents éléments.

Nous appelons μ une mesure sur \mathfrak{R}^n si μ assigne un nombre positif (même infini) à chaque sous-ensemble de \mathfrak{R}^n tel que :

1. $\mu(\emptyset)=0$,
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$,
- 3: si A_1, A_2, \dots est une séquence dénombrable (ou infinie) d'ensembles, alors

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (2.1)$$

Si les A_i sont des ensembles de Borel disjoints alors on a l'égalité :

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (2.2)$$

La classe des ensembles de Borel est la plus petite collection de sous ensembles de \mathfrak{R}^n possédant les propriétés suivantes :

- Chaque ensemble ouvert et chaque ensemble fermé est un ensemble de Borel.
- L'union de toute collection finie d'ensembles de Borel est un ensemble de Borel.

Nous appelons $\mu(A)$ la *mesure* de l'ensemble A , et le considérons comme étant la taille de A mesurée d'une certaine manière. Si $A \supset B$ alors A peut s'exprimer par l'union disjointe $A=B \cup (A \setminus B)$. Si A et B sont des ensembles de Borel il vient : $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

Nous considérons le support d'une mesure comme étant l'ensemble sur lequel la mesure est concentrée. Formellement, le support de μ est le plus petit ensemble fermé X tel que $\mu(\mathfrak{R}^n \setminus X) = 0$.

Nous disons que μ est une mesure sur un ensemble A si A contient le support de μ . Une mesure sur un sous-ensemble borné de \mathfrak{R}^n pour lequel $0 < \mu(\mathfrak{R}^n) < \infty$ sera appelée *une distribution de masse*, et nous considérons $\mu(A)$ comme étant la masse de A .

2.1.1. La mesure de Lebesgue

La mesure de Lebesgue sur \mathfrak{R} : La mesure de Lebesgue dt^1 étend l'idée de longueur à une large collection de sous-ensembles de \mathfrak{R} qui inclut les ensembles de Borel. Pour des intervalles ouverts et fermés, nous prenons $dt^1(a,b)=dt^1[a,b]=a-b$. Si $A=\bigcup_{i=1}^n [a_i,b_i]$ est l'union finie d'intervalles disjoints, alors $dt^1(A)=\sum(b_i-a_i)$ est la longueur de A considérée comme étant la somme des longueurs des intervalles. Ceci nous conduit à la définition de la mesure de Lebesgue d'un ensemble A arbitraire. Nous définissons :

$$dt^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\}.$$

La mesure de Lebesgue sur \mathfrak{R}^n : Si $A = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \}$ est un parallélépipède dans \mathfrak{R}^n , le volume n -dimensionnel de A est donné par : $vol^n(A)=(b_1-a_1)(b_2-a_2) \dots (b_n-a_n)$. La mesure n -dimensionnelle de Lebesgue dt^n peut être considérée comme l'extension du volume n -dimensionnel à une large classe d'ensembles. Nous obtenons une

mesure sur \mathfrak{R}^n en définissant : $dt^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} vol^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$

2.2. Les dimensions fractales tenant compte de la dynamique d'un système

Nous introduisons des définitions qui ne s'appliquent qu'à des ensembles définis par un système dynamique. On supposera que tout attracteur a une mesure naturelle μ_x , et que celle-ci a la même valeur pour presque toute trajectoire qui débute dans le bain d'attraction. Ainsi, on notera $\mu_x=\mu$.

2.2.1. La dimension d'information

La dimension d'information est une généralisation de la dimension de Bouligand-Minkowski ; elle prend en compte la mesure ou la probabilité sur les cubes utilisés pour recouvrir l'ensemble E . Cette mesure probabiliste (appelée aussi entropie) H_ε est définie par :

$$H_\varepsilon(\mu) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i \ln P_i \quad (2.3)$$

avec $P_i = \mu(\text{cub}_i(x))$ est la probabilité de mesurer le cube i .

Farmer, Ott et Yorke utilisent la mesure naturelle qui fournit une notion d'une relative fréquence avec laquelle une trajectoire visite les différentes parties de l'attracteur (c'est ce qu'ils appellent la répartition de temps de séjour d'une trajectoire).

La dimension d'information est alors définie par :

$$D_{\text{inf}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_\varepsilon}{|\ln \varepsilon|} \quad (2.4)$$

Le qualificatif information vient du fait que pour un système dynamique chaotique, on perd très vite la donnée d'une condition initiale et que le système agit comme un générateur d'information.

Notons que si toutes les boîtes ont une mesure égale, alors $H\varepsilon(\mu) = \ln N(\varepsilon)$ et donc la dimension de Bouligand-Minkowski est égale à la dimension d'information. Cependant, pour des mesures inégales des boîtes, on a :

$$H\varepsilon(\mu) \leq \ln N(\varepsilon) \quad \text{et donc} \quad D_c \geq D_{\text{inf}}(\mu) \quad (2.5)$$

2.2.2. La dimension de corrélation

Elle est définie par rapport à une mesure topologique μ :

$$D_{\text{corr}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(C(\varepsilon, \mu))}{|\ln \varepsilon|} \quad (2.6)$$

avec
$$C(\varepsilon, \mu) = \int_B \mu(B(\mu, \varepsilon)) d\mu(\varepsilon) \quad (2.7)$$

$C(\varepsilon, \mu)$ est l'intégrale de corrélation par rapport à la mesure naturelle, au rayon ε , elle mesure la corrélation entre deux points quelconques d'un attracteur. Autrement dit, elle mesure la répartition des distances entre tout couple de points sur l'attracteur.

Cette dimension est utilisée comme une mesure du degré du chaos d'un attracteur étrange. Elle nous renseigne aussi sur l'origine du chaos. En effet, si on a un chaos déterministe (i.e., dû à la nature même de l'équation) cette dimension est inférieure à la dimension de l'espace des phases. Par contre, le chaos aléatoire (i.e., dû aux erreurs d'approximations) donne une dimension de corrélation égale à la dimension de l'espace des phases.

2.2.3. La dimension Ponctuelle

La dimension ponctuelle D_p est la puissance avec laquelle la mesure naturelle d'une boule diminue quand son rayon décroît. Plus précisément, soit μ la mesure naturelle sur l'attracteur, et soit $B(\mu, \varepsilon)$ une boule de rayon ε centré au point Y appartenant à l'attracteur.

$$\text{Approximativement, on a } \mu(B(Y, \varepsilon)) \approx \varepsilon^{D_p}.$$

Cette dimension est intéressante, par exemple dans l'étude des ensembles complexes fractales en thermodynamique où on s'intéresse au voisinage de certains points critiques. On appelle alors la dimension ponctuelle, exposant critique.

Définition

Soit Y un point sur l'attracteur. Soit μ la mesure naturelle sur l'attracteur :

$$D_p(Y, \mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(\mu(B(Y, \varepsilon)))}{\ln \varepsilon} \quad (2.8)$$

est la dimension ponctuelle du point y , si cette limite existe, cette dimension est invariante par rapport aux normes équivalentes.

DIMENSION DE HAUSDORFF - DIMENSION DE BOITE

La difficulté centrale dans l'évaluation de la dimension de Hausdorff est donnée par le terme $\sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(V_i)^d$. La dimension de boite simplifie ce problème, en remplaçant le terme $\text{diam}(V_i)^d$ par le terme r^d . Nous rappelons la définition de la dimension de boite D_b . La dimension de boite d'un sous-ensemble borné A de \mathbb{R}^n procède comme suit. Soit $N_r(A)$ le plus petit nombre des ensembles de diamètre au plus r qui couvre A . Alors :

$$D_b = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(A)}{\log \frac{1}{r}} \quad (2.9)$$

à condition que la limite existe.

Ils existent plusieurs définitions de $D_b(A)$. Par exemple, considérons la subdivision de \mathbb{R}^n dans un treillis de grille de taille r . Qui est un empilement de \mathbb{R}^n par des cubes de côté de longueur r . Maintenant, soit $N_r(A)$ le nombre de cubes qui couvrent A . C'est un fait que :

$$D_b(A) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(A)}{\log \frac{1}{r}} \quad (2.10)$$

conditionne l'existence de la limite. Rudement parlé la définition dit que $N_r(A) \propto r^{-d}$ pour de faible r , où $d = D_b(A)$. Plus précisément c'est que :

$$N_r(A)r^d \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{pour } d < D_b(A) \\ 0 & \text{pour } d > D_b(A) \end{cases} \quad (2.11)$$

mais :

$$N_r(A)r^d = \inf \left\{ \sum_i r^d / \{U_1, U_2, \dots\} \text{ une couverture finie de } A \text{ avec } \text{diam}(U_i) < r \right\}$$

Ceci nous permet de comparer avec la définition de Hausdorff. Voir que la seule différence est dans les termes de $\text{diam}(U_i)^d$ contre le terme r^d .

DEPENDANCE FONCTIONNELLE OBTENUE PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES

Supposons que l'on doive utiliser les résultats de l'expérience pour établir la dépendance fonctionnelle de la grandeur y de la grandeur x . une méthode largement répandue de résolution de ce problème est la méthode des moindres carrés. Elle consiste en ce qui suit :

Considérons la somme des carrés des différences entre les valeurs expérimentales y_i et celles de la fonction $\varphi(x, a, b, c, \dots)$ aux points correspondants :

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i, a, b, c, \dots)]^2 \quad (2.12)$$

Choisissons les paramètres a, b, c, \dots de manière que cette somme ait la plus petite valeur possible. Le problème se ramène ainsi à trouver les valeurs des paramètres a, b, c, \dots pour lesquelles la fonction $S(a, b, c, \dots)$ admet un minimum. Il découle que ces valeurs a, b, c, \dots vérifient le système d'équations :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \quad \dots \quad (2.13)$$

Soit $y = ax + b$. La fonction $S(a, b)$ s'écrit alors : $S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$
C'est une fonction des deux variables a et b . Par conséquent on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Autrement dit, le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - bn = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Nous avons obtenu un système de deux équations linéaires à deux inconnues, a et b . Il est évident, que ce système possède une solution déterminée et que pour les valeurs trouvées de a et b la fonction $S(a, b)$ admet un minimum.

ANNEXE 3

IMPLEMENTATION RECURSIVE DES OPERATEURS DE DERICHE

Les filtres de Deriche possèdent une réponse impulsionnelle infinie dont l'expression analytique permet une implémentation récursive exacte de type « parallèle ».

3.1. Implémentation des opérateurs monodimensionnels

3.1.1. Dérivation

Une mise en œuvre récursive du filtre optimal de dérivation :

$$h(x) = c.x.e^{-\alpha|x|} \quad (3.1)$$

peut être obtenue en employant la transformée en Z. Soit $h[i]$ la séquence discrète résultant de l'échantillonnage de $h(x)$ et $h(z)$ sa transformée en Z :

$$h(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h[i]z^{-i} \quad (3.2)$$

La séquence $h[i]$ est mise sous la forme d'une séquence causale $h_+[i]$ et d'une séquence $h_-[i]$:

$$h[i] = h_+[i] + h_-[i] \quad (3.3)$$

avec :

$$h_-[i] = \begin{cases} c.i.e^{-\alpha i} & \text{pour } i \geq 0 \\ 0 & \text{pour } i < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$h_+[i] = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \leq 0 \\ c.i.e^{\alpha i} & \text{pour } i > 0 \end{cases}$$

La transformée $h(z)$ a pour expression :

$$h(z) = h_-(z^{-1}) + h_+(z) \quad (3.5)$$

$$\text{avec } h_-(z^{-1}) = \frac{ce^{-\alpha}z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha}z^{-1} + e^{-2\alpha}z^{-2}} \quad (3.6)$$

$$\text{et } h_+(z) = \frac{-ce^{-\alpha}z}{1 - 2e^{-\alpha}z + e^{-2\alpha}z^2} \quad (3.7)$$

$h_-(z^{-1})$ (resp. $h_+(z)$) converge pour $|e^{-\alpha}z^{-1}| < 1$ (resp. $|e^{-\alpha}z| < 1$). Comme toutes les singularités de $h_+(z)$ (resp. $h_-(z^{-1})$) sont à l'intérieur (resp. extérieur) du cercle unité pour α réel positif, ces 2 transformées en Z correspondent à 2 fonctions de transfert de filtres

récurifs stables et du second ordre. Le premier $h_-(z^{-1})$ opérant de gauche à droite et le second $h_+(z)$ de droite à gauche.

Le coefficient c est choisi pour obtenir un maximum d'amplitude de 1 en réponse à un échelon unitaire, ce qui donne :

$$B[i] = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} U[i-m]h[m] = 1 \text{ pour } i = 1$$

$$B[0] = -c \sum_{m=0}^{+\infty} m e^{-\alpha m} = 1 \Rightarrow c = \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}}$$
(3.8)

On obtient alors les équations aux différences suivantes :

$$B_1[i] = ce^{-\alpha} A[i-1] + 2e^{-\alpha} B_1[i-1] - e^{-2\alpha} B_1[i-2]$$

pour $i = 1, \dots, M$

$$B_2[i] = -ce^{-\alpha} A[i+1] + 2e^{-\alpha} B_2[i+1] - e^{-2\alpha} B_2[i+2]$$

pour $i = M, \dots, 1$

(3.9)

où M est la longueur de la séquence d'entrée $A[i]$. La séquence de sortie est alors donnée par :

$$B[i] = B_1[i] + B_2[i]$$
(3.10)

L'intérêt de cette mise en œuvre récursive est le faible nombre d'opérations : 5 multiplications et 5 additions pour l'opérateur dérivée première. Le nombre d'opérations est indépendant de la valeur de la résolution α utilisée pour détecter les contours. En effet, la forme du filtre est liée à α peut varier mais le nombre d'opérations par point reste identique.

3.1.2. Lissage

En adoptant la même démarche que dans le paragraphe précédent, le filtre de lissage :

$$f(x) = b(\alpha|x| + 1)e^{-\alpha|x|}$$
(3.11)

peut être implanté de manière récursive.

La transformée en Z du filtre numérique correspondant décomposé en partie causale et anti-causale s'écrit :

$$f(Z) = f_-(z^{-1}) + f_+(z)$$
(3.12)

$$\text{avec } f_-(z^{-1}) = b \frac{1 + e^{-\alpha}(\alpha - 1)z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha}z^{-1} + e^{-2\alpha}z^{-2}}$$
(3.13)

$$\text{et } f_+(z) = b \frac{e^{-\alpha}(\alpha + 1)z - e^{-2\alpha}z^2}{1 - 2e^{-\alpha}z + e^{-2\alpha}z^2}$$
(3.14)

Les domaines de convergences sont les mêmes que précédemment.

Les équations aux différences suivantes correspondantes ont pour expression :

$$B_1[i] = bA[i] + be^{-\alpha}(\alpha - 1)A[i - 1] + 2e^{-\alpha}B_1[i - 1] - e^{-2\alpha}B_1[i - 2]$$

pour $i = 1, \dots, M$ (3.15)

$$B_2[i] = be^{-\alpha}(\alpha + 1)A[i + 1] - be^{-2\alpha}A[i + 2] + 2e^{-\alpha}B_2[i + 1] - e^{-2\alpha}B_2[i + 2]$$

pour $i = M, \dots, 1$ (3.16)

$$B[i] = B_1[i] + B_2[i]$$

Pour réaliser un lissage il faut donc 8 multiplications et 7 additions, indépendamment du facteur α .

La constante b est calculée pour obtenir une réponse d'amplitude 1 à une entrée constante unitaire :

$$b = \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{1 + 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}}$$

(3.17)

3.2. Implémentation de l'opérateur gradient bidimensionnel

Les images $B_i[i,j]$ et $B_j[i,j]$ des dérivées directionnelles suivant les directions i et j sont calculées en appliquant les relations suivantes :

$$B_i[i,j] = [A * f[j]] * h[i]$$

(3.18)

De même :

$$B_j[i,j] = [A * f[i]] * h[j]$$

(3.19)

Le calcul se fait donc en appliquant les filtres monodimensionnels précédents.

ANNEXE 5

Frimaseg est un outil de travail dont l'objectif est de regrouper tous les aspects pratiques de l'analyse et de la segmentation des images ainsi que la classification des cellules biologiques. Il s'adresse aux étudiants et chercheurs dans les domaines fractal et multifractal et traitement d'images. Il constitue aussi un module très important d'un système d'aide aux cytologistes et médecins dans le cadre de dépistage du cancer.

Il est une application Windows et est développé sous environnement Borland Delphi 3. Ce chapitre sert d'une présentation générale à ce produit.

5.1. ORGANISATION GENERALE : Les différents articles liés au menu

Le logiciel s'est voulu un environnement convivial pour l'utilisateur avec qui il doit interagir en temps réel. Ainsi il a utilisé pas mal de fonctionnalités offertes par la POO (Programmation Orientée Objet). Il utilise des fenêtres, menus, boîtes de dialogues, boîtes d'édition, etc.

Le menu comporte huit sous-menus surgissants dans lesquels un séparateur délimite les articles permettant ainsi un regroupement selon l'orientation ou le domaine d'intérêt.

Les huit «pop-up» (menus surgissants) sont :

- **FICHIER** : Fonctions globales liées au logiciel (Ouvrir, Quitter, etc.).
- **PARAMETRES FRACTALS** : Englobe l'estimation de tous les paramètres fractals et multifractals.
- **FILTRAGE** : Filtrage de Gabor.
- **DETECTION DE CONTOURS** : Cet article englobe tous les algorithmes de détection de contours étudiés dans ce travail.
- **SEGMENTATION** : Segmentation multifractale.
- **CLASSIFICATION** : Calcul des surfaces et classifications des cellules biologiques.
- **FENETRE** : L'état de l'affichage des fenêtres.
- **HELP** : A Propos.

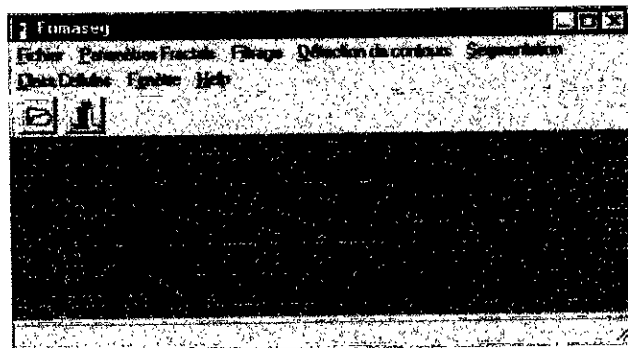


Figure V.1 :

Ce logiciel peut être résumé en quatre axes essentiels :

1. Fonctions Globales liées au logiciel qui se trouvent dans ces trois différents articles :

- FICHER : dans ce « pop-up » on trouve les quatre articles qui sont :
 - Open : utilisé pour sélectionner et afficher une image de type '*.bmp'.
 - Close : fonction permettant à l'utilisateur de fermer la fenêtre déjà ouverte.
 - Save as : elle permet à l'utilisateur d'enregistrer les résultats de son traitement. L'utilisateur peut enregistrer son image résultat sous les types suivants : bmp, ico, emf, wmf.
 - Exit : Fermeture de l'application.
-
- FENETRE : Cette option s'occupe des modes d'affichage des fenêtres du logiciel sur l'écran, il y a quatre modes : « Cascade, Tile, Arrange Icons, Minimise All », en plus, elle liste les fenêtres ouvertes.
-
- HELP : Ce menu comporte l'option *About*, l'exécution de cette dernière renvoie une boîte de type A propos, son rôle est de donner des informations générales à propos du logiciel.
2. Fonctions liées à l'analyse des images par les fractales et multifractales, elles sont résumées dans l'article *Paramètres Fractals* qui comportent :
- Les différentes méthodes d'estimation de la dimension fractale globale, tel que : Méthode de Boite, Méthode de Voss, Méthode d'interpolation, Méthode spectrale, Méthode G-spectrale, Méthode RDBC, Méthode de Blanket et Méthode FBM.
 - Les différentes méthodes d'estimation de la dimension fractale locale : Méthode spectrale, Méthode G-spectrale, Méthode de Blanket et la Méthode FBM.
 - Calcul de la singularité et spectre de singularité.
 - Moment et Dimension Fractale Généralisée.
3. Extraction des primitives qui est résumée dans les deux articles '*Détection de Contours*' et de '*Segmentation*'.
- Détection de Contours : nous avons ces trois approches : Frontières, Fractales et Multifractales.
 - Approches frontières : Nous trouvons les méthodes du PREMIER ORDRE (Roberts, Prewitt et Sobel), du DEUXIEME ORDRE (Laplacien, Marr-Hildreth et Huertas-Médioni) et les méthodes du FILTRAGE OPTIMAL (Approches de Canny et de Deriche).
 - Approches fractales : Ces différentes méthodes se trouvent : G-spectrales (suivant une direction et deux directions), Vario-spectrales (suivant une direction et deux directions) et Approche FBM.
 - Approches multifractales : nous trouvons l'algorithme de détection multifractal pour les trois mesures suivantes : Sum, Max et qmax.

- Segmentation : nous trouvons l'algorithme multifractal de segmentation.

4. Classification des cellules biologiques :

Les trois fonctions suivantes existent :

- Calcul des Surfaces des régions homogènes connexes.
- Classification par coloriage.
- Classification par création d'images contenant le même type de cellules

Remarques:

- Nous avons un article 'Filtrage' pour le filtrage de Gabor.
- Chaque fonction du logiciel comporte une touche de raccourci ou une combinaison de touches de raccourci.
- Pour faciliter l'utilisation de ce logiciel nous avons ajouté des commentaires qui se trouvent dans la partie inférieure de la fenêtre principale du Frimaseg. Ces commentaires apparaissent dès que l'on sélectionne un article du logiciel.
- Nous utilisons un 'speed button' pour la commande Open et un autre pour la commande Close.
- L'icône du logiciel Frimaseg (FigV.2), **FI** est l'abréviation 'Fractal Image'.



Figure V.2 :

V.2 CONCLUSION

Ce logiciel nous a permis de donner à notre travail son aspect pratique. De ce fait, il épouse le plan de notre travail. Il englobe ainsi les outils qui nous ont permis de faire l'analyse et la segmentation des images ainsi que la classification des images biologiques ; mais la conception de Frimaseg reste ouverte à des améliorations pour de meilleures performances.

BIBLIOGRAPHIE

- [ARN95] A. Arneodo, F.Argoul, E.Bacry, J. Elezgaray, J-F. Muzy. « Ondelettes, multifractales et turbulences de l'ADN aux croissances cristallines », Arts et Sciences, 1995.
- [BER91] J.P. Berroir. « Application des mesures multifractales à l'analyse et la segmentation d'images médicales », Rapport de recherche INRIA, 1991.
- [BLA92] J.M. Blackledge and E. Fowler. « Fractal Dimension Segmentation of Synthetic Aperture Radar Images », Image Processing and its Applications, pp :445-449, 1992.
- [BOL95] Ph. Bolon, J-M. Chassery, J-P. Cocquerez, D. Demigny, C. Graffigne, A. Montanvert, S. Philipp, R. Zéboudj, J. Zérubia. « Analyse d'images : filtrage et segmentation », Masson, 1995.
- [BUR93] C.J. Burdett et M. Desai. « Localised fractal dimension measurement in digital mammographic images », SPIE Vol. 2094, 1993.
- [CAS94] S.D. Casey et N.F. Reingold. « Self-Similar Fractal Sets : Theory and Procedure », IEEE Computer Graphics and Applications, Vol 14, N°3, pp :73-82, 1994.
- [DEE92] W. Deering et B. West « Fractal Physiology », IEEE Engineering in Medecine And Biology, Vol11, N°2, pp : 40-46, juin 1992.
- [DEK96] S. Dekkar, R. Tifour « Compression des images fixes par la méthode des fractales », Mémoire de fin d'études, INI, 1996.
- [HOR95] R. Horaud, O. Monga « Vision par ordinateur », 2^{ième} Edition, Ed. Hermès, 1995.
- [GOL92] Ary L. Goldberger « Fractal Mechanisms in the Electrophysiology of the Heart », IEEE Engineering in Medecine And Biology, Vol11, N°2, pp : 47-52, juin1992.
- [GOM82] C. Gompel « Atlas de la cytologie », Ecole de Médecine de Paris, 1982.
- [GUJ93] U.G. Gujar, V. C. Bhavsar, S.Y.M. Chol, et P.K. Kalra « Traversed Geometric Fractals », IEEE Computer Graphics and Applications, Vol 13, N°5, pp :61-67, 1993.
- [FRA98] « Fractales 98 : Séminaire sur les fractales dans la compression d'image », p : 1-7 et 19-38, CDTA, 1998.
- [GON87] R.C. Gonzalez. « Digital Image Processing », 2^{ième} Edition, Addison-Wesley, 1987.
- [KEL89] J.M.K. Keller et S. Chen. « Texture Description and Segmentation through Fractal Geometry », Computer Vision, Graphic, and Image Processing, Vol 45, N°2, pp : 150-166, 1989.
- [KUN93] M. Kunt « Traitement numérique des images », Presses Polytechnique et Université Romande, 1993.
- [LEV93] J. Levy-Vehel, J.P. Berroir, « Image analysis through multifractal description », Rapport de Recherche INRIA, n°1942, Juin 1993.

- [LIE92] L. S. Liebovitch et J. P. Koniarek « Ion Channel Kinetics », IEEE Engineering in Medicine And Biology, Vol11, N°2, pp : 53-56, juin 1992.
- [LIU92] S.H.Liu. « Formation and Anomalous Properties of Fractals », IEEE Engineering in Medicine And Biology, Vol11, N°2, pp : 28-39, juin 1992.
- [LOU99] L. Lourdiane. « Segmentation du col utérin, dans le but de réaliser un système de dépistage du cancer », Projet de Fin d'Etude, ENP, juin 1999.
- [MAE96] J. Maeda, V. Anh, T. Ishizaka, Y. Suzuki. « Integration of Local Dimension and Boundary Edge Segmenting Natural Images », IEEE Image Processing, Vol1, pp : 845-848, 1996.
- [MAH98] L.Mahiddines. « Contribution à l'utilisation des fractales en stéréovision », Thèse de Magister, Institut d'électronique, USTHB, 1998.
- [MAN77] B. Mandelbrot. « Fractals Form, Chance, And Dimension », W.H. Freeman And Company, 1977.
- [MAN95] B. Mandelbrot. « Les objets fractals », Flammarion, 1995.
- [MON95] D.M. Monro et F. Dudbridge. « Rendering Algorithms for Deterministic Fractals », IEEE Computer Graphics And Applications, Vol 15, N°1, pp :32-41, 1995.
- [PEI92] H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe. « Chaos and Fractals New Frontiers of Science », Springer-Verlay, 1992.
- [ROG89] R.T. Stevens. « Fractal programming in C », M&T Books, 1989.
- [SCH92] H. E. Schepers, J. H. G. M. van Beek et J. B. Bassingthwaighte. « Four Methods to Estimate The fractal Dimension from Self-Affine Signals », IEEE Engineering in Medicine And Biology, Vol11, N°2, pp : 57-64, juin 1992.
- [SHO92] C. Shouchard. « Les formats de fichiers image PC », PC EXPERT, PP : 241-244, juillet 1992.
- [SOL99] S. Soltane, J. Claude Angue. « Sélection d'opérateurs directionnels basée sur les variogrammes », Revue Internationale des Technologies Avancées,N°11, pp : 14-22, juillet 1999.
- [TOU87] J.J. Toumazet. « Traitement de l'image sur micro-ordinateur », SYBEX, 1987.
- [YUX97] Yuxin Liu, Yandan Li. « Image Feature Extraction and Segmentation using Fractal Dimension», IEEE, Conference on Information Communications and Signal Processing, pp :975-979, septembre 1997.