

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Ecole nationale Polytechnique



وزارة التعليم العالي
و البحث العلمي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département de génie mécanique

PROJET DE FIN DE D'ETUDE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Validation d'un panneau filtre dans une installation de compression de gaz - Hassi R'Mel

Encadré par : M^r M. BOUDJEMAA

Présenter par : M^r RECHOUM Mahfoud

M^r B. BEN KOUSSAS

Promotion : Septembre 2004

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Ecole nationale Polytechnique



وزارة التعليم العالي
و البحث العلمي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département de génie mécanique

PROJET DE FIN DE D'ETUDE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Validation d'un panneau filtre dans une
installation de compression de gaz - Hassi R'Mel

Encadré par : M^r M. BOUDJEMAA

M^r B. BEN KOUSSAS

Présenter par : M^r RECHOUM Mahfoud

Promotion : Septembre 2004

يهدف هذا البحث لدراسة تغيرات مجرى الهواء الرطب في قناة لنظام التصفية الذاتية لمعنفة غازية، و هذا للنظر في مدى قدرته على الحفاظ على الهواء خالي من قطرات الماء، لقد قمنا بتفصيل الحل الرقمي بواسطة الحجوم المحدودة، استعمل هذا الأخير لحل معادلات Navier-Stokes و عرضنا النتائج بواسطة برنامج ميكانيك السوائل و التبادل الحراري FLUENT.

كلمات مفتاحيه : هواء رطب، حجوم محدودة، نظام تصفية ذاتية، برنامج ميكانيك السوائل و التبادل الحراري FLUENT.

Résumé :

Ce mémoire porte sur l'étude de l'évolution de l'écoulement laminaire d'air humide dans une conduite de système de filtration autonettoyant d'une turbine à gaz, afin de trouver la nature de l'air humide à la sortie de la conduite, nous avons étudié la méthode des volumes finis pour résoudre les équations de Navier-stokes. Les résultats sont exprimés à par le logiciel de mécanique des fluides et de transfert de chaleur Fluent.

Mots clés : filtre auto-nettoyant, laminaire, air humide, volumes finis, enthalpie, FLUENT.

Summary:

The objectif of the present report is the steady of the laminar flow evolution of humid air in a pipe of self-cleaning system filtration of a gas turbine, in order to find the nature of the humid air at the exit of control, we studied the finite volume method to solve the equations of Navier-stokes. The results are expressed with by the software of mechanics of the fluids and heat transfer FLUENT.

Key words: humid air, self-cleaning filtration, laminar, the finite volume method, enthalpy, FLUENT.

Dédicaces

A ma très chère grande mère

A mes parents qui m'ont toujours soutenu

A toute ma famille

A mes enseignants

A mes amis

Votre fidèle :

ROUCHOUM Mahfoud

Remerciements



Avant tout, grâce sera rendu à dieu.

Le mérite revient à ma famille de m'avoir éduqué, encouragé et soutenu.

Je remercie également tous mes enseignants pour leurs conseils, chaleureux encouragements et leurs soutient moral.

Mes promoteurs, monsieur B.BENKOUSSAS, monsieur M.BOUDJEMAA, et monsieur D.BEYAZ, pour le suivi de mon travail.

Les membres de jury, qui ont accepté de discuter et d'examiner ce modeste travail.

Toutes les personnes, que je n'ai pas nommées, qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Enfin, je remercie tout le personnel de la bibliothèque de l'ENP.

Sommaire

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Description générale du système de filtration auto-nettoyant GDX	
GDX	
I.1. Introduction.....	3
I.2. Description générale du système de filtration auto-nettoyant GDX.....	5
I.3. Performance et critères de conception.....	7
I.3.1. Filtration.....	7
I.3.2. Débit d'air.....	7
I.3.3. Nettoyage.....	8
I.3.4. Perte de charge.....	8
I.3.5. Electricité.....	9
I.3.6. Air comprimé.....	9
I.4. Panneau d'admission.....	10
Chapitre II : Modélisation mathématique	
II .1. Equations de base.....	12
II .2. Hypothèses simplificatrices.....	14
II.3. Equations simplifiées.....	15
II.4. Présentation du logiciel FLUENT.....	17
Chapitre III : Présentation de la méthode des volumes finis	
III.1. Introduction.....	19
III.2. La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion.....	20
III.2.1. diffusion unidimensionnelle.....	21
III.2.2. diffusion bidimensionnelle.....	24

III.3. La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection

diffusion.....	26
III.3.1. Convection-diffusion unidimensionnel en régime stationnaire.....	27
III.3.2. Le schéma « différence centré ».....	29
III.3.3. Le schéma « upwind ».....	30
III.3.4. Le schéma « hybrid ».....	33
III.3.5. Le schéma « power-law ».....	34
III.3.6. Schéma d'ordre supérieur pour les problèmes de convection diffusion.....	35
III.3.6.1 Le schéma « quadratic upwind » (le schéma « Quick »).....	36

Chapitre IV : Résolution numérique

IV.1. Introduction.....	39
IV.2. La grille décalée.....	41
IV.3. Les équations du moment.....	45
IV.4. L'algorithme SIMPLE.....	50
IV.5. Critères de convergence.....	55

Chapitre V : Conditions initiales et conditions aux limites.

V.1. Domaine de l'écoulement.....	57
V.1.1. Géométrie	57
V.1.2. Maillage	58
V.2. Conditions initiales	59
V.3. Conditions aux limites	59
V.3.1. Les différentes conditions aux limites	59
V.3.2. Conditions d'entrée et de sortie.....	61
V.4. Présentation de différents paramètres.....	61
V.4.1. Paramètres métallurgiques.....	62
V.4.2. Paramètres géométriques.....	62
V.5. air humide.....	64

V.5.1. Généralités	64
V.5.2. Grandeurs Relatives à L'air Humide.....	65

Chapitre VI : Résultats et interprétation.

VI. Exploitation des résultats.....	71
VI.1. Résultats de 1 ^{er} cas.....	71
VI.2. Résultats de 2 ^{eme} cas.....	73
VI.3. Interprétation.....	74
conclusion générale.....	75

Bibliographie

Annexe

Nomenclature

U, V, u, v	Composantes de la vitesse.....	m/s
A	l'aire de la section de passage du volume de contrôle.....	[m ²]
b, t	faces des cellules	
C_p	Chaleur spécifique de l'air.....	[J/kg.K]
e	Energie interne.....	[kJ/kg]
E, W	Des nœuds	
e, w	la face latérale ouest/est du volume de contrôle	
F	flux de masse convectif par unité de surface.....	[kg/m ² .s]
g_i	Composante de vecteur gravité	[m/s ²]
H	L'enthalpie total.....	[kJ/Kg]
HA	l'humidité d'air	
HR	l'humidité relative	
M	la masse molaire.....	[kg/mole]
P	La pression	[Pa]
Pe	le nombre de pecllet	
P^*	Champ de pression	
K	conductivité thermique moléculaire.....	[W/m.K]
R	constante des gaz.....	[J/kg.k]
S	Terme source	[W]
T	La température	[K]
T_0	Température (pour que l'énergie interne =0)	[K]
T_p	température de la paroi.....	[K]

Listes des figures

1. Description générale du système de filtration auto-nettoyant GDx

- Figure.I.1. Filtre auto-nettoyant GDx.
- Figure.I.2. Un élément filtrant cylindrique et conique.
- Figure.I.3. Vue de face de panneau d'admission.
- Figure.I.4. Vue de gauche de panneau d'admission.

II. Modélisation mathématique

- Figure.II.1. Exemple de géométrie avec son maillage.

III. Présentation de la méthode des volumes finis

- Figure III.1. Etat d'équilibre de la diffusion de la propriété Φ dans le domaine unidimensionnel.
- Figure III.2. La largeur de volume de contrôle.
- Figure III.3. Une partie de la grille bidimensionnelle.
- Figure III.4. volume de contrôle autour du nœud P.
- Figure III.5. L'utilisation des valeurs nodales pour le calcul des valeurs nominales des cellules (le flux dans la direction positive).
- Figure III.6. L'utilisation des valeurs nodales pour le calcul des valeurs nominales des cellules (le flux dans la direction négative).
- Figure III.7. profils quadratiques utilisés dans le schéma « Quick ».

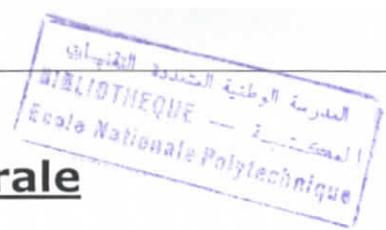
IV. Résolution numérique.

- Figure IV.1. Champ de vérification du maillage de la pression.
- Figure IV.2. L'arrangement des variables.
- Figure IV.3. Volume de contrôle de u.
- Figure IV.4. Volume de contrôle de v.
- Figure IV.5. Volume de contrôle du scalaire pour l'équation discrétisée continuité.

Figure V.5 courbe de saturation de l'eau.

VI. Exploitation des résultats.

- Figure VI.1 Présentation de la distribution de la pression dans la conduite pour le 1^{er} cas.
- Figure VI.2 Présentation de la distribution de la vitesse dans la conduite pour le 1^{er} cas.
- Figure VI.3 Présentation de la distribution de l'enthalpie dans la conduite pour le 1^{er} cas.
- Figure VI.4 Présentation de la distribution de la pression dans la conduite pour le 2^{eme} cas.
- Figure VI.5 Présentation de la distribution de la vitesse dans la conduite pour le 2^{eme} cas.
- Figure VI.6 Présentation de la distribution de l'enthalpie dans la conduite pour le 2^{eme} cas.



Introduction générale

Les centrales thermiques ont un rôle très important dans le secteur énergétique, parmi les éléments les plus importants on cite la turbine à gaz, elle a le rôle moteur dans la production du travail mécanique.

La turbine à gaz fonctionne dans un turboréacteur selon un cycle ouvert, elle utilise un écoulement gazeux pour produire de l'énergie mécanique à partir d'énergie calorifique. La turbine est alimentée en gaz par combustion de carburants. Des tuyères fixes dirigent les jets de gaz sur les aubes d'un rotor. La force ainsi exercée sur ces dernières met en rotation l'arbre de la machine. Une turbine à gaz à simple cycle contient un compresseur : l'air est comprimé dans une chambre de combustion. Le carburant est pulvérisé sous forme gazeuse ou liquide dans la chambre, où se produit la combustion. Les produits de combustion passent par des tuyères de la chambre au rotor, qui actionne le compresseur. Dans une turbine ou dans un compresseur, la rangée d'aubes fixes et la rangée correspondante d'aubes mobiles solidaires d'un rotor forment un étage.

Et pour conserver et augmenter la durée de vie des composants de l'appareil et surtout la teneur en eau à l'entrée du turboréacteur, pour éviter la corrosion des aubes, donc éviter une humidité excessive dans les étages du compresseur, le constructeur des filtres au niveau de l'admission d'air DONALDSON a proposé un système de filtration d'air pour éliminer la poussière et les polluants et de défavoriser la condensation en cas d'humidité excessive, notre étude consiste à vérifier si le système de filtre DONALDSON peut empêcher, sinon diminuer le phénomène de condensation .

Pour cette étude, nous avons le design du modèle de DONALDSON, et on essayera de vérifier s'il permet de diminuer la teneur de la vapeur d'eau dans l'air, donc vérifier s'il y a diminution du taux d'humidité.

Nous avons simplifiés au mieux la géométrie et on a posé nos équations, de nouvelles méthodes de calcul accessibles à travers les réseaux du net, nous ont permis de faire une approche qualitative que nous avons fait à l'aide d'un code de calcul appelé « Fluent » basé sur une discrétisation en volume finis.

1.1. Introduction :

Le filtre auto-nettoyant GDX, issu des programmes de recherches et de développement permanent au sein de la société Donaldson ; est un système de filtration à haute performance pour turbine à gaz ainsi que pour l'industrie. [1]

Ce système de filtration offre de nombreux avantages par rapport aux filtres auto-nettoyants traditionnels, notamment :

- Dimensions réduites.
- L'encombrement au sol est plus faible, ce qui permet une plus grande flexibilité d'installation tout en réduisant les coûts d'installation. Le poids total de ce type de filtre est également réduit.
- Plusieurs filtres peuvent être installés côte à côte sans aucun risque de recyclage des poussières évacuées.
- Plus grande flexibilité de conception et d'installation.
- La perte de charge initiale est en général plus faible que pour les autres systèmes de filtration classique puisque les différents caissons de liaison sont éliminés et que la géométrie de circulation du flux d'air est considérablement améliorée.
- La perte de charge opérationnelle se stabilise à des valeurs plus basses que pour les autres systèmes de filtration puisque le recyclage de la poussière est éliminé, réduisant significativement la consommation d'énergie et améliorant les performances de la turbine.
- les temps de montage sont significativement réduits : un maximum de pièces sont assemblées en atelier et le caisson du filtre est en général composé de peu de pièces afin de réduire les problèmes d'assemblage sur chantier.

- les coûts de transport et d'assemblage sont également réduits grâce à la diminution des dimensions du système de filtration.
- les éléments filtrants sont nettement mieux protégés qu'avec tout autre système de filtration.
- La poussière éliminée par le système de nettoyage peut être facilement récoltée et transportée. Ceci peut aider dans la lutte contre la pollution des zones de travail. Toute fois, la méthode utilisée pour l'évacuation de la poussière n'influence en aucune manière les performances du système de filtration.
- Le système de filtration GDX, a été conçu de façon à pouvoir intégrer d'autres systèmes sur l'admission d'air tel que par exemple les refroidisseurs d'air. Ce système complémentaire installé dans le flux d'air offre un débit d'air uniforme et un rendement maximum.

I.2. Description générale du système de filtration auto-nettoyant GDX :

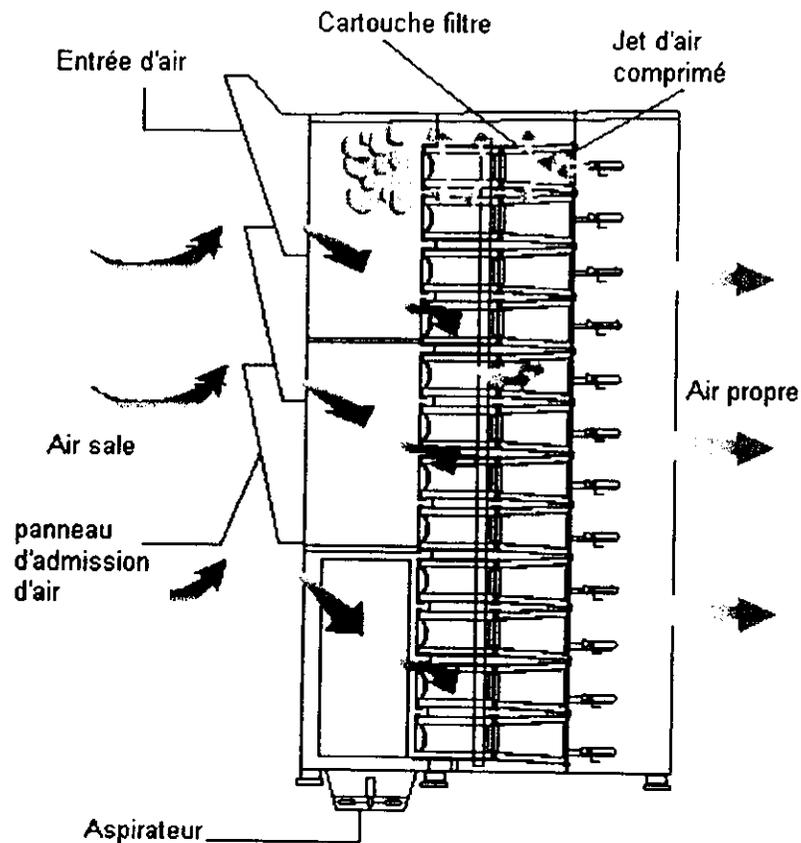


Figure (I.1) : Filtre auto-nettoyant GDX.

Le système GDX est un système de filtration auto-nettoyant à simple étage Figure (I.1) Il utilise uniquement des éléments filtrants cylindriques et coniques Figure (I.2) fabriqués par la société Donaldson. Ces éléments sont installés par paires de deux, dans le but d'atteindre des pertes de charge opérationnelles très faibles, un degré de filtration optimal et réduire les dimensions de la fibre. Ils sont nettoyés séquentiellement par des jets d'air comprimé dirigés à contre-courant.

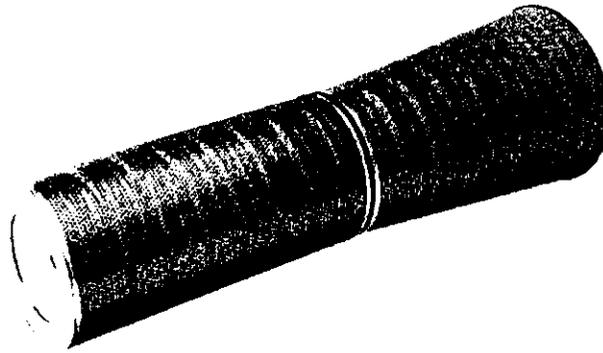


Figure (1.2): Un élément filtrant cylindrique et conique.

Le système de filtration se compose d'un ou plusieurs modules boulonnés ensemble en fonction du débit d'air à traiter.

Le fonctionnement du système peut être décrit comme suit :

- L'air de combustion est aspiré par la turbine à travers les éléments filtrants. La prise d'air s'effectue à la partie supérieure du filtre à travers une sortie de persienne, laquelle protège les éléments filtrants des conditions climatiques telles que pluie, soleil....
- De part, la position de la prise d'air et la direction du flux d'air dans le caisson contenant les éléments filtrants sont dirigées vers le bas.
- Les éléments filtrants sont fixés horizontalement sur une paroi verticale, les poussières en suspension dans l'air sont arrêtées par le média sur les éléments pour former un gâteau de poussière, la perte de charge augmente doucement, d'une manière exponentielle jusqu'à atteindre une valeur pré réglée.
- Le cycle de nettoyage est alors mis automatiquement en service et ne s'arrêtera que lorsque la perte de charge sera descendue jusqu'à une autre valeur pré réglée.

- Le cycle de nettoyage envoie un jet d'air comprimé dirigé à contre-courant à travers chaque paire d'éléments filtrants suivant une séquence prédéterminée. Ce jet d'air comprimé décolle le gâteau de poussières qui, par gravité et aidées par l'aspirateur, tombent en dehors de la turbine et éjectées dans l'atmosphère de manière à ne pas être réaspirées par la prise d'air.
- Afin de réduire le phénomène de recyclage des poussières, les rangées d'élément filtrant sont nettoyées séquentiellement du haut vers le bas.

I.3. Performance et critères de conception :

I.3.1. Filtration :

L'étage unique de filtration du filtre GDX est composé d'éléments filtrants cylindriques et coniques produits par DONALDSON.

Les séparateurs inertiels et pré-filtres généralement employé comme premier et second étage de filtration dans les filtres traditionnels à trois étages ne sont pas nécessaires dans le cas du filtre GDX de Donaldson, car les éléments filtrants de haute efficacité sont nettoyés automatiquement durant le fonctionnement de la turbine.

Le média filtrant utilisé dans les éléments pour filtres GDX a été étudié, conçu et développé par la société Donaldson. Ce média garanti non seulement une efficacité de filtration très élevée, mais résiste également à des utilisations et nettoyages prolongés dans tous les milieux.

I.3.2. Débit d'air :

Le débit d'air à traiter par élément filtrant est déterminé en fonction de la perte de charge stabilisée souhaitée ainsi que des pertes de charge du circuit.

La prise d'air du filtre GDX assure une protection optimale contre les conditions climatiques et élimine la possibilité de recycler la poussière. Le débit d'air à travers d'un élément filtrant est momentanément interrompu pendant le nettoyage de l'élément en

question (pendant une période de temps de l'ordre de 100 msec). Le nombre d'éléments filtrants nettoyés en même temps est tel que le débit principal de la turbine n'en sera pas perturbé.

I.3.3. Nettoyage :

De nombreux tests en laboratoire ainsi que des expériences réalisées sur site ont permis d'optimiser les paramètres pression, débit et temps de l'air comprimé nécessaire au nettoyage des éléments filtrants.

Le système de nettoyage du filtre auto-nettoyant GDX fournit une excellente distribution énergétique du jet d'air comprimé et de plus garantit un excellent nettoyage afin de limiter la perte de charge stabilisée et la consommation d'air comprimé.

I.3.4. Perte de charge :

La perte de charge du filtre auto-nettoyant GDX commence à une valeur très basse, de l'ordre de 150Pa. L'accumulation progressive des poussières sur les éléments filtrants fait en sorte que la perte de charge augmente doucement. Lorsque le niveau de perte de charge atteint une valeur pré-réglée (niveau haut - en général 640 Pa), le système de nettoyage est mis en fonctionnement.

Il ne s'arrêtera que lorsque le niveau de perte de charge sera ramené à une seconde valeur pré-réglée (niveau bas - en général 460Pa).

Cette seconde valeur de consigne est plus élevée que la perte de charge initiale du filtre équipé d'éléments filtrants neufs parce que :

- une faible quantité d'éléments filtrants sont nettoyés à la fois,
- des poussières de masse négligeable ne peuvent être éliminées par les jets d'air comprimé, ce qui pourrait avoir comme conséquence que le niveau bas de perte de charge ne soit plus atteint et partant, le système de nettoyage fonctionnerait en permanence, à moins qu'on aie augmenté la consigne du niveau bas.

Dans des conditions normales de fonctionnement, la perte de charge du système de filtration se stabilise autour d'une faible gamme de valeur, dépendant du type de poussières retenues.

Si l'environnement est fortement pollué par des particules colloïdales grasses, tel que vapeur d'huile, gaz d'échappement de turbine à gaz, les éléments filtrants peuvent être lavés à l'eau additionnée du détergent, spécialement prévu à cet effet.

Dans le but de réduire la consommation d'énergie de la turbine, il est recommandé de procéder à l'arrêt. Il est également possible de programmer des cycles de nettoyage du filtre, lorsque la turbine est à l'arrêt. Il est également possible de programmer des cycles de nettoyage du système de filtration à intervalles plus ou moins régulier au moyen d'une horloge en option.

I.3.5. Electricité :

Le système de filtration GDX de Donaldson garantit une protection complète de la turbine même en cas de coupure d'alimentation électrique.

Ce type de filtre ne requière qu'une faible alimentation électrique pour faire fonctionner le système de nettoyage qui sera raccordé au boîtier de contrôle situé à un endroit accessible du filtre. Tous les équipements électriques sont raccordés à une borne commune de terre qui doit également être raccorder (mise à la terre).

I.3.6. Air comprimé :

L'air comprimé sous pression de 7 bar effectif est fourni aux collecteurs au moyen de tuyauterie en acier galvanisé.

Cet air comprimé peut être fourni :

- soit par piquage sur le compresseur de la turbine. Dans ce cas un échangeur de chaleur air/air est prévu en sortie de filtre car la température de l'air comprimé à la

sortie du compresseur de la turbine étant très élevée, il y a lieu de la ramener vers une valeur de 80°C afin de ne pas endommager les composants installés sur le réseau d'air comprimé.

- soit par un compresseur d'air comprimé indépendant. Comme le cas de notre turbine à gaz.

I.4. Panneau d'admission :

Le filtre auto-nettoyant possède trois paires de panneau d'admission (entrée d'air figure (1.1)), ces panneaux ont la forme d'une persienne comme la montre la figure (1.3), on a présenté également la vue de gauche, montre le passage d'air à travers le panneau.

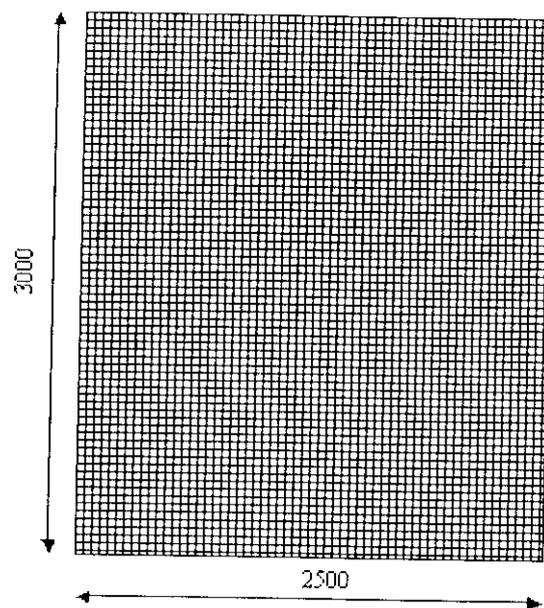


Figure (1.3) : Vue de face de panneau d'admission.

Modélisation mathématique

II.1. Equations de base :

Les relations nécessaires pour prédire l'évolution d'un écoulement au sein d'une géométrie donnée sont les équations de Navier-Stokes, ces équations sont déduites des principes fondamentaux de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les variables qui en découlent dans le cas le plus général sont la masse volumique ρ , les deux composantes de la vitesse $u, v, (U_i)$, la pression P et la température T du fluide, Ces variables sont toutes fonctions des coordonnées de l'espace et de temps[2].

Toutes les équations qui vont suivre sont présentées avec la convention de sommation sur les indices répétés, précisons que nous présentons tous les équations de base en écoulement laminaire.

Nous choisissons d'exprimer les équations une fois les principes de conservation appliqués.

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Où ρ est la masse volumique.

- Equation de conservation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + S \quad (\text{II.2})$$

Où :

- S est un terme source qui comprend l'ensemble des forces de volume (gravité, force centrifuge,....).

- τ_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses dont les éléments dépendent du taux de déformation du fluide soumises aux champs de vitesse, avec :

$$\tau_{ij} = 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{II.3})$$

Où μ est la viscosité dynamique moléculaire.

Nous plaçons, dans le cadre d'un fluide isotrope et newtonien, sachant que l'air vérifie cette hypothèse.

Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité (II.1) se réduit à :

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0$$

Par ailleurs, nous ne prenons pas en compte les forces centrifuges qui sont négligeables devant la force de la gravité, dans les petits domaines, le terme source se réduit à $S = \rho g_i$,

Où les g_i sont les composantes des vecteurs de la gravité.

En introduisant les deux hypothèses précédentes dans l'équation (II.2), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho g_i \quad (\text{II.4})$$

➤ Equation de conservation de l'énergie :

Nous estimons que l'apport dû à la dissipation d'énergie par rapport aux autres termes de l'équation. Ainsi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho e U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - P \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \quad (\text{II.5})$$

Où :

- e est l'énergie interne.
- K est la conductivité thermique moléculaire.

II .2. Hypothèses simplificatrices :

En premier lieu nous considérons des écoulements de fluides incompressibles, nous supposons que la masse volumique de l'air est indépendante de la pression tant que la vitesse de l'air n'atteint pas 100 m/s, la masse volumique de l'air peut être considérée comme dépendante de la pression[3].

Nous considérons que les variations de la masse volumique avec la température sont négligeables au niveau de tous les termes des équations sauf au niveau du terme de gravité.

En troisième lieu, dans le cas incompressible l'énergie interne est reliée à la température par la relation :

$$de = C_p dT \quad (\text{II.7})$$

$$e = C_p (T - T_0) \quad (\text{II.8})$$

Où :

- C_p : est la chaleur spécifique de l'air.
- T_0 : est la température pour laquelle l'énergie interne est nulle.

En dernier lieu, puisque nous sommes dans le cas d'un écoulement laminaire où le transport moléculaire est négligeable (cas contraire pour l'écoulement turbulent), nous considérons la viscosité dynamique moléculaire μ et la conductivité thermique moléculaire K constantes. Quant à la chaleur spécifique C , elle est également choisie constante.

II.3. Equations simplifiées :

En se plaçant dans le cadre de ces hypothèses certaines simplifications peuvent être apportées aux équations précédentes :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho U_j) = 0 \quad (\text{II.9})$$

- Equation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho g_i \quad (\text{II.10})$$

- Equation de l'énergie :

L'équation de l'énergie est transformée en une équation de température grâce à la relation (.8) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p T) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho C_p U_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II.11})$$

Le code de calcul FLUENT résout l'équation de conservation de l'énergie sur l'enthalpie totale H qui par définition :

$$H(T, P) = h(T, P) + \frac{1}{2} U_j U_j$$

Dans laquelle h est l'enthalpie et $\frac{1}{2} U_j U_j$ l'énergie cinétique.

Dans le cas incompressible, l'énergie cinétique peut être négligée devant l'enthalpie, ainsi :

$$H(T, P) = e(T) + \frac{p}{\rho}$$

Par ailleurs, comme le fluide est supposé parfait, l'enthalpie H devient indépendante de la seule variable T .

Finalement, $H(T) = e(T)$ et en utilisant la relation (.8) nous obtenons :

$$H = C_p (T - T_0)$$

Où : T_0 est la température pour laquelle l'énergie interne et l'enthalpie sont nulles.

Donc toutes les équations peuvent être mises sous la forme d'une équation générale de convection-diffusion pour la variable Φ :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\phi U_j)}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)}_2 + \underbrace{S_\phi}_3 \quad (\text{II.12})$$

Avec :

- Le terme -1- représente le transport de ϕ par convection de l'écoulement.
- Le terme -2- représente le transport de ϕ par diffusion moléculaire (transport des fluctuations de vitesse).
- Le terme -3- représente la variation de ϕ due aux sources.

Elles seront résolues grâce à des conditions initiales et aux limites par la méthode des volumes finis utilisés par le logiciel de mécanique des fluides FLUENT.

II.4. Présentation du logiciel FLUENT [4] :

A l'heure actuelle, il existe un certain nombre de codes tridimensionnels industriels conviviaux, aux meilleurs performants, permettant la prédiction d'écoulement fluides par la résolution des équations de Navier-Stokes grâce aux méthodes des volumes finis, des différences finies ou éléments finis tels que FLUENT, CFX-F3D, PHOENICS...

Le logiciel FLUENT est le leader mondial en calcul numérique de mécanique des fluides CFD (Computational Fluid dynamics).

Le logiciel FLUENT modélise par la méthode des volumes finis, des écoulements très variés dans des configurations plus ou moins complexes. Dans ce qui suit nous nous attardons essentiellement sur les options qu'il propose pour des problèmes tels que le notre.

Le logiciel propose de nombreux modèles physiques et schémas numériques avec lesquels l'utilisateur est normalement en mesure de modéliser la quasi-totalité des problèmes de base de la mécanique des fluides.

Sur le plan physique, il permet par exemple de spécifier les conditions initiales et aux limites, d'ajouter des termes sources à certaines équations, et de modifier des lois de comportement au niveau des parois. Sur le plan numérique, elles rendent également possible la spécification d'une grille variant avec le temps, la modification des schémas de résolution, le contrôle et l'optimisation de la convergence au cours des itérations.

Par ailleurs, comme il apparaît difficile de décrire précisément des géométries très complexes, la grande particularité de FLUENT est de se reposer sur une structure multi blocs et une grille suivant les frontières du domaine ("body-fitted grid"). L'utilisation doit en effet subdiviser son domaine global en autant de blocs nécessaire à la bonne représentation de sa géométrie. Chaque bloc pouvant prendre des formes irrégulières, il possède ensuite son propre maillage, cohérent avec celui des blocs voisins par un système de contraintes entre blocs (les points d'intersection des lignes de la grille devant coïncider d'un bloc à l'autre figure (1))

de contraintes entre blocs (les points d'intersection des lignes de la grille devant coïncider d'un bloc à l'autre figure (1))

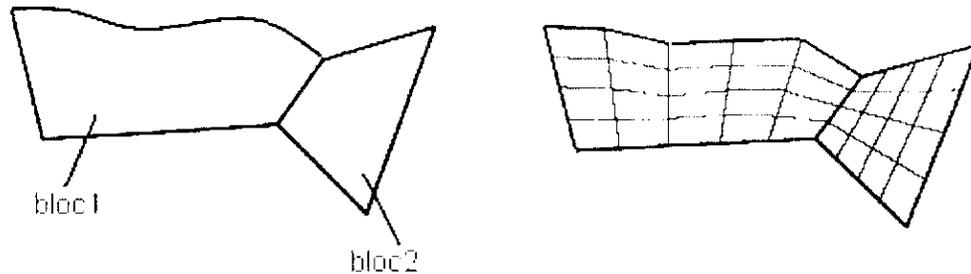


Figure (II.1) : Exemple de géométrie avec son maillage.

Dans ces conditions, pour simuler les écoulements dans des domaines potentiellement complexes et pour en interpréter les résultats, le logiciel intègre trois modules principaux :

- Le pré-processeur maillleur (GAMBIT). Qui permet de préparer la configuration géométrique et de générer le maillage de manière assez claire malgré sa complexité.
- Le solveur FLUENT qui résout les équations modélisant le problème physique.
- Le post-calcul qui permet de visualiser les différents résultats à l'écran.

Présentation de la méthode des volumes finis

III.1. Introduction :

Les trois grandes méthodes numériques utilisées dans les codes tridimensionnels sont les volumes finis, les différences finies et les éléments finis.

La méthode des différences finis consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide de séries de Taylor tronquées pour obtenir des équations linéaires reliant la valeur des inconnus en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnus aux nœuds voisins.

La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (triangle ou quadrangles en général). Comme elle permet de modéliser des géométries très complexes, elle est parfois préférée à la méthode des volumes finis.

La méthode des volumes finis, choisie par le logiciel FLUENT et décrite par deux chercheurs américains Patankar S.V [5], consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en multitude de volumes de contrôle (i.e. cellules) puis effectuer des bilans (de masse, de quantité de mouvement...) sur ces petites volumes, pour cette raison, la formulation fait apparaître des intégrales triples de volume.

L'avantage déterminant des volumes finis par rapport aux autres méthodes est qu'ils sont conservatifs (tout ce qui sort d'un volume de contrôle entre dans le volume adjacent).

III.2. La méthode des volumes finis pour les problèmes de diffusion :

III.2.1. diffusion unidimensionnelle :

Considérons la diffusion en régime permanent de la propriété physique ϕ dans le domaine unidimensionnel définie sur la figure suivante. Le processus est gouverné par :

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (\text{III.1})$$

Où Γ est le coefficient de diffusion et S est le terme de source. Les valeurs de ϕ aux frontières A et B sont connues.

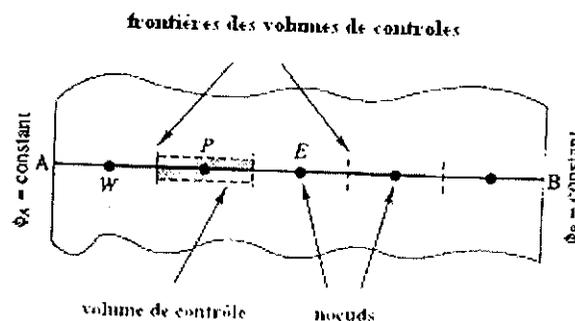


Figure (III.1) état d'équilibre de la diffusion de la propriété Φ dans le domaine unidimensionnel.

➤ Etape 1 : Génération du maillage.

La première étape dans la méthode des volumes finis est de diviser le domaine en volumes discrets de contrôle. Mettant un certain nombre de points nodaux dans l'espace entre A et B. Les frontières (ou les faces) des volumes de contrôle sont placées à mi-chemin entre les nœuds adjacents. Ainsi chaque nœud est entouré par un volume ou une cellule de contrôle. Il est dans les habitudes courantes d'installer des volumes de contrôle près du bord du domaine de telle manière que les frontières physiques coïncident avec les frontières de volume de contrôle.

A ce niveau, il est approprié d'établir un système de notation. La convention habituelle des méthodes de CFD (computational fluid dynamics) est montrée sur la figure (III.1)

Les points nodaux généraux sont identifiés par P et ses voisins les plus proches dans une géométrie unidimensionnelle, les noeuds à l'*ouest* et à l'*est*, sont identifiés par W et E respectivement.

La face latérale *ouest* du volume de contrôle est mentionnée par ' w ' et la face latérale *est* du volume de contrôle par ' e '. Les distances entre les noeuds W et P , et entre les noeuds P et E , sont identifiées par δx_{WP} et δx_{PE} respectivement. De même, les distances entre la face ' w ' et le point P et entre P et la face ' e ' sont dénotées par δx_{wP} et δx_{Pe} respectivement.

La figure (III.2) montre que la largeur de volume de contrôle est $\Delta x = \delta x_{we}$.

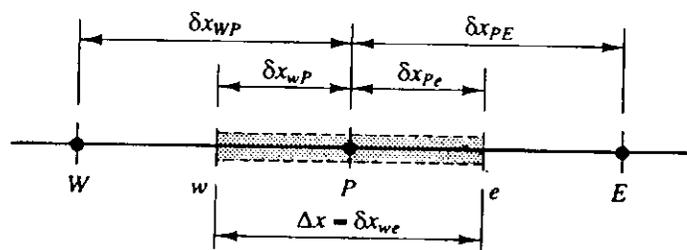


Figure III.2 : la largeur de volume de contrôle.

➤ **Etape 2 : discrétisation.**

L'étape clé de la méthode des volumes finis est l'intégration de l'équation (III.1) sur le volume de contrôle qui donne l'équation discrétisée pour les noeuds internes P . Pour le volume de contrôle défini précédemment ceci donne :

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.2})$$

Ici A est l'aire de la section de passage du volume de contrôle au niveau des faces, ΔV est le volume et \bar{S} est la valeur moyenne de la source S à travers le volume de contrôle. C'est un dispositif très attrayant de la méthode des volumes finis en sachant que l'équation (III.2) indique que le flux diffusif de ϕ partant de la face *est* sans le flux diffusif de ϕ entrant dans la face *ouest* est égal à la génération de ϕ , c.-à-d. qu'elle constitue l'équation d'équilibre pour ϕ à travers le volume de contrôle.

Afin de dériver les formes utiles des équations, les coefficients de diffusion d'interface Γ et le gradient $\frac{d\phi}{dx}$ à l'est et à l'ouest sont exigés.

Après qu'ils soient bien établis, les valeurs de la propriété ϕ et le coefficient de diffusion sont définis et évalués aux points nodaux. Pour calculer les gradients (et par conséquent les flux) aux faces du volume de contrôle, une distribution des propriétés approximative entre les points nodaux est employée. Les approximations linéaires semblent être la manière évidente et la plus simple à calculer des valeurs d'interface et des gradients. Cette pratique est du type différence centrée.

Dans une grille uniforme, les valeurs linéairement interpolées pour Γ_e et Γ_w sont indiquées comme ceci :

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_w + \Gamma_p}{2} \quad (\text{III.3})$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_p + \Gamma_E}{2} \quad (\text{III.4})$$

Et les termes du flux diffusif :

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) \quad (\text{III.5})$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) \quad (\text{III.6})$$

Dans des situations pratiques, comme on le verra plus tard, le terme source S peut être une fonction de la variable dépendante ϕ . Dans ces cas-ci, la méthode des volumes finis approxime le terme de source au moyen d'une loi linéaire de la forme :

$$\bar{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_p \quad (\text{III.7})$$

En remplaçant les équations (III.5), (III.6) et (III.7) dans l'équation (III.2) on aura :

$$\Gamma_c A_c \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_{PE}} \right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_p\phi_p) = 0 \quad (\text{III.8})$$

Après quelques réarrangements on a :

$$\left(\frac{\Gamma_c}{\Delta x_{PE}} A_c + \frac{\Gamma_w}{\Delta x_{WP}} A_w - S_p \right) \phi_P = \left(-\frac{\Gamma_w}{\Delta x_{WP}} A_w \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_c}{\Delta x_{PE}} A_c \right) \phi_E + S_u \quad (\text{III.9})$$

En identifiant les coefficients de ϕ_W et de ϕ_E dans l'équation (III.9) comme a_w et a_e , et le coefficient de ϕ_P comme a_p , l'équation ci-dessus peut être re-écrite :

$$\boxed{a_p\phi_P = a_w\phi_W + a_e\phi_E + S_u} \quad (\text{III.10})$$

Où

a_w	a_e	a_p
$\frac{\Gamma_w}{\Delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_c}{\Delta x_{PE}} A_c$	$a_w + a_e - S_p$

Les valeurs de S_u et S_p peuvent être obtenues à partir du modèle de source (III.7) : $\bar{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_p$. Les équations (III.7) et (III.10) représentent la forme discrétisée de l'équation (III.1). Ce type d'équation est central à tous les développements ultérieurs.

➤ Etape 3 : Solution des équations.

La discrétisation des équations sous la forme (III.10) doit être faite pour chacun des nœuds. Pour les volumes de contrôles adjacents aux limites physiques du système, une

modification appropriée est nécessaire. Une fois les équations écrites, on obtient un système d'équations linéaires qui doit être résolu.

III.2.2. diffusion bidimensionnelle :

La méthodologie utilisée en dérivant les équations discrétisées dans le cas unidimensionnel peut être facilement étendue aux problèmes bidimensionnels. Pour illustrer la technique, considérons l'équation bidimensionnelle de diffusion stationnaire donnée ci après :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S = 0 \quad (\text{III.11})$$

Une portion de la grille bidimensionnelle utilisée pour la discrétisation est montrée à la figure suivante :

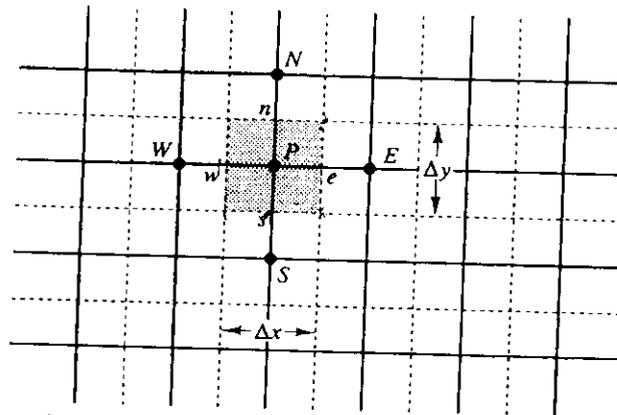


Figure (III.3) une partie de la grille bidimensionnelle.

En plus des nœuds voisins *est* (E) et *ouest* (W), le nœud général P a maintenant également les nœuds voisins *nord* (N) et *sud* (S). La même notation que dans l'analyse unidimensionnelle est employée pour les faces et les dimensions de cellules. Quand l'équation ci-dessus est formellement intégrée sur le volume de contrôle, nous obtenons.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \int_V \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \int_V S_\phi dV = 0 \quad (\text{III.12})$$

Ainsi, notons que $A_c = A_w = \Delta y \times 1$ et $A_n = A_s = \Delta x \times 1$, nous obtenons :

$$\left[\Gamma_c A_c \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_c - \Gamma_w A_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] + \left[\Gamma_n A_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \Gamma_s A_s \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.13})$$

Comme avant, cette équation représente l'équilibre de génération de ϕ dans le volume de contrôle et le flux à travers ses faces de cellules.

En utilisant les approximations présentés dans la section précédente nous pouvons écrire des expressions pour le flux à travers les faces du volume de contrôle.

$$\text{Le flux à travers la face } \textit{ouest} = \Gamma_w A_w \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w = \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x_{WP}} \quad (\text{III.14})$$

$$\text{Le flux à travers la face } \textit{est} = \Gamma_c A_c \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_c = \Gamma_c A_c \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta x_{PE}} \quad (\text{III.15})$$

$$\text{Le flux à travers la face } \textit{sud} = \Gamma_s A_s \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s = \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\Delta y_{SP}} \quad (\text{III.16})$$

$$\text{Le flux à travers la face } \textit{nord} = \Gamma_n A_n \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n = \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\Delta y_{PN}} \quad (\text{III.17})$$

En substituant les expressions ci-dessus dans l'équation, nous obtenons :

$$\Gamma_c A_c \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x_{WP}} + \Gamma_n A_n \frac{(\phi_N - \phi_P)}{\Delta y_{PN}} - \Gamma_s A_s \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\Delta y_{SP}} + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (\text{III.18})$$

Quand le terme source est représentée dans la forme linéaire $\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P$, cette équation peut être réarrangée comme suit :

$$\left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} + \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) \phi_p = \left(\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \right) \phi_w + \left(\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} \right) \phi_e + \left(\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) \phi_s + \left(\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}} \right) \phi_n + S_u \quad (\text{III.19})$$

L'équation (III.19) est maintenant moulée dans l'équation générale des noeuds intérieurs

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + a_s \phi_s + a_n \phi_n + S_u \quad (\text{III.20})$$

Où

a_w	a_e	a_s	a_n	a_p
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{SP}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{PN}}$	$a_w + a_e + a_s + a_n - S_p$

III.3. La méthode des volumes finis pour les problèmes de convection-diffusion :

Dans les problèmes où le flux de fluide joue un rôle significatif nous devons expliquer les effets de la convection. L'équation de la convection-diffusion en régime stationnaire :

$$\text{div}(\rho \mathbf{u} \phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi \quad (\text{III.21})$$

L'intégration formelle sur le volume de contrôle donne :

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV \quad (\text{III.22})$$

Cette équation représente le bilan de flux sur le volume de contrôle. Le membre gauche donne le flux convectif net et le membre droit contient le flux diffusif net et la génération ou la destruction de la propriété ϕ dans le volume de contrôle.

Le problème principal dans la discrétisation des termes convectifs est le calcul de la valeur de la propriété transporté ϕ aux faces du volume de contrôle et de son flux convectif à travers ces frontières. Dans le paragraphe précédent nous avons introduit la méthode de la différence centré afin d'obtenir les équations discrétisées pour la diffusion et

les termes sources du membre droit de l'équation (III.22). Il semblerait évident d'écarter cette pratique, qui a tellement bien fonctionné pour des problèmes de diffusion, pour les termes convectifs. Cependant, le procédé de diffusion affecte la distribution de la quantité transportée le long de ses gradients dans toutes les directions, tandis que les propagations de convection influencent seulement dans le sens d'écoulement. Cette différence cruciale se manifeste dans une limite supérieure à la taille de grille, qui dépend de la force relative de la convection et de la diffusion, pour le calcul de la convection-diffusion stable avec le schéma différence centrale.

Naturellement, nous présentons également un certain nombre de pratique de discrétisation des effets convectifs qui permettent la stabilité dans le calcul sous certaines restrictions.

Dans l'analyse courante, aucune référence ne sera faite à l'évaluation des vitesses de faces. On suppose qu'elles sont connues 'de façon ou d'autre'.

II.3.1. Convection-diffusion unidimensionnel en régime stationnaire :

En l'absence des sources, la convection-diffusion stationnaire de la propriété ϕ dans un domaine unidimensionnel donné, le champ d'écoulement u est régi par :

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (\text{III.23})$$

L'écoulement doit encore satisfaire à l'équation de continuité, alors :

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \quad (\text{II.24})$$

Nous considérons un volume de control unidimensionnel figure (III.4). Notre attention est focalisée sur le nœud général P , les nœuds voisins sont identifiés par W et E et les faces du volume de control par w et e .

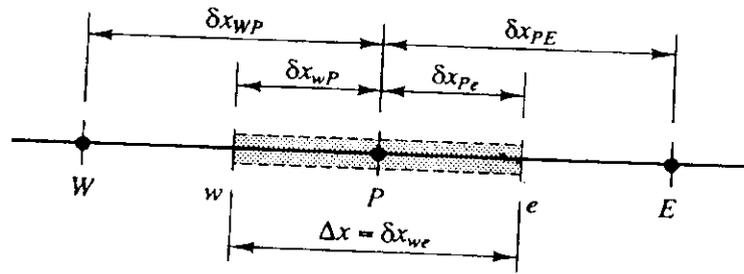


Figure (III.4) volume de contrôle autour du nœud P.

L'intégration de l'équation de transport (III.23) sur le volume de control de la figure (II.4) donne :

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \quad (\text{III.25})$$

Et l'intégration de l'équation de continuité donne aussi :

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (\text{III.26})$$

Pour obtenir une équation discrétisée du problème de convection-diffusion nous devons approximer les termes de l'équation (III.25). Il est commode de définir deux variables F et D pour représenter le flux de masse convectif par unité de surface et la conductance de diffusion aux faces de cellules :

$$F = \rho u \quad \text{et} \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x_{PE}} \quad (\text{III.27})$$

Les valeurs aux faces des cellules des variables F et D peuvent être écrit comme :

$$F_w = (\rho u)_w, \quad F_e = (\rho u)_e \quad (\text{III.28})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}, \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} \quad (\text{III.29})$$

Nous développons cette technique en assumant que $A_w = A_e = A$ et en employant l'approche différence centrée pour représenter la contribution du terme diffusif du membre droit.

La convection-diffusion intégrée de l'équation (III.25) peut être réécrite maintenant comme :

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (\text{III.30})$$

et l'intégration de l'équation de continuité devient :

$$F_e - F_w = 0 \quad (\text{III.31})$$

Nous supposons également que le champ de vitesse est connu d'une façon ou d'une autre, qui prend soin des valeurs de F_e et de F_w . Afin de résoudre l'équation (III.30), nous devons calculer la propriété transportée ϕ à la face e et w, différents schémas seront proposés pour répondre à cette fin dans les prochaines sections.

III.3.2. Le schéma « différence centré » :

L'approximation différence centrée a été employée pour représenter les termes de diffusion qui apparaissent dans le membre droit de l'équation (III.30) et il semble logique d'essayer une interpolation linéaire pour calculer les valeurs aux faces des cellules pour les termes convectifs dans le membre gauche de cette équation.

Pour une grille uniforme nous pouvons écrire les valeurs aux faces des cellules de la propriété ϕ comme

$$\phi_e = \frac{(\phi_P - \phi_E)}{2} \quad (\text{III.32})$$

$$\phi_w = \frac{(\phi_W - \phi_P)}{2} \quad (\text{III.33})$$

La substitution de ces expressions dans les termes de convection de (III.30) rapporte :

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (\text{III.34})$$

Ceci peut être réarrangé pour donner

$$\left[\left(D_w - \frac{F_e}{2} \right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E$$

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (\text{III.35})$$

Identifiant les coefficients de ϕ_W et de ϕ_E comme a_W et a_E , les expressions du schéma différence centré pour l'équation de convection-diffusion sont :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (\text{III.36})$$

Où

a_W	a_E	a_P
$D_w + \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$	$a_W + a_E + (F_e - F_w)$

On peut facilement remarquer que l'équation (III.36) pour les problèmes de convection-diffusion stationnaire, prend la même forme générale que l'équation (III.10) pour les problèmes de diffusion pure. La différence est que les coefficients de l'équation (III.36) contiennent des termes supplémentaire pour expliquer la convection. Pour résoudre un problème de convection-diffusion unidimensionnel, nous écrivons les équations de la forme (III.36) pour tous les noeuds de grille. Ceci rapporte un ensemble d'équations algébriques qui est résolu pour obtenir la distribution de la propriété transportée ϕ .

II.3.3. Le schéma « upwind » :

Une des insuffisances principales du schéma « différence centré » est son incapacité à identifier le sens de l'écoulement. La valeur de la propriété ϕ à la face *ouest* de la cellule

est toujours influencée par ϕ_p et ϕ_w dans le schéma « différence centré ». Dans un écoulement fortement convectif de l'ouest à l'est, le traitement ci-dessus est peu convenable parce que la face *ouest* de la cellule devrait recevoir beaucoup d'influence du nœud *W* que du nœud *P*.

Le schéma upwind tient compte du sens de l'écoulement en déterminant la valeur à la face de la cellule: la valeur convectif de ϕ à la face de la cellule est prise pour être égal à la valeur au nœud amont. Sur la figure (II.5), nous montrons les valeurs nodales employées pour calculer les valeurs aux faces des cellules quand l'écoulement est dans la direction positive (*ouest* à l'*est*) et sur la figure(II.6) ceux pour la direction négative.

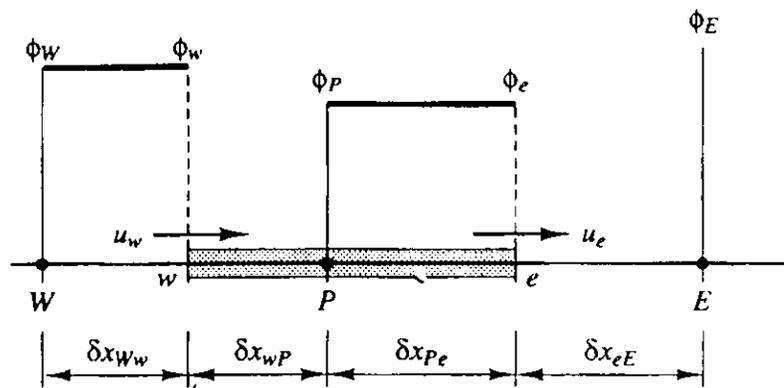


Figure (III.5) l'utilisation des valeurs nodales pour le calcul des valeurs nominales des cellules (le flux dans la direction positive).

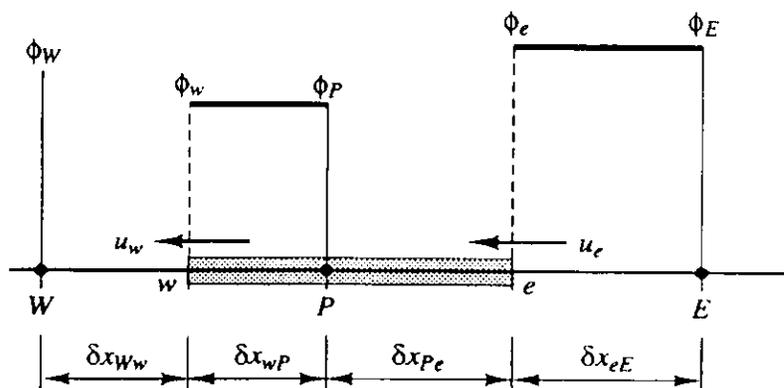


Figure (III.6) l'utilisation des valeurs nodales pour le calcul des valeurs nominales des cellules (le flux dans la direction négative).

Quand l'écoulement est dans la direction positive, $u_w > 0, u_e > 0 (F_w > 0, F_e > 0)$ le schéma upwind donne :

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_P \quad (\text{III.37})$$

et l'équation discrétisée (II.30) devient :

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_c (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (\text{III.38})$$

ce qui peut être réarrangé comme :

$$(D_w + D_c + F_e) \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_c \phi_E \quad (\text{III.39})$$

pour donner :

$$[(D_w + F_w) + D_c + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_c \phi_E \quad (\text{III.40})$$

Quand l'écoulement est dans la direction négative, $u_w < 0, u_e < 0 (F_w < 0, F_e < 0)$ le schéma donne :

$$\phi_w = \phi_P \quad \text{et} \quad \phi_e = \phi_E \quad (\text{III.41})$$

Maintenant l'équation est :

$$F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_c (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (\text{III.42})$$

où :

$$[D_w + (D_c - F_e) + (F_e - F_w)] \phi_P = D_w \phi_W + (D_c - F_e) \phi_E \quad (\text{III.43})$$

Identifiant les coefficients de ϕ_W et de ϕ_E comme a_w et a_e , les expressions du schéma upwind pour l'équation de convection-diffusion sont :

$$a_P \phi_P = a_w \phi_W + a_e \phi_E \quad (\text{III.44})$$

avec le coefficient central :

$$a_P = a_w + a_e + (F_e - F_w) \quad (\text{III.45})$$

et les coefficients voisins :

	a_w	a_e
$F_w > 0, F_e > 0$	$D_w + F_w$	D_e
$F_w < 0, F_e < 0$	D_w	$D_e - F_e$

Une forme de notation plus appropriée pour les coefficients voisins du schéma upwind qui couvre les deux sens d'écoulement est donnée ci-dessous :

a_w	a_e
$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$

III.3.4. Le schéma « hybrid » :

Le schéma hybrid de Spalding (1972) est basé sur une combinaison des deux derniers schémas « différence centré » et « upwind ». Le schéma « différence centré », qui est précis au second ordre, est utilisé pour les petits nombres de Peclet ($Pe < 2$) (III.46) et le schéma « upwind », qui est précis au premier ordre mais qui ne tient pas compte du transportivisme est utilisé pour les grands nombres de Peclet ($Pe > 2$). Comme avant, nous allons développer la discrétisation de l'équation de convection-diffusion unidimensionnelle sans termes de source. Cette équation peut être interprétée comme équation d'équilibre des flux. Le schéma « hybrid » emploie par morceaux des formules basées sur le nombre local de Peclet pour évaluer le flux net par chaque face du volume de contrôle. Le nombre de Peclet est évalué à la face du volume de contrôle. Par exemple, pour une face *ouest*

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_w} \quad (\text{III.46})$$

La formule du schéma « hybrid » pour le flux net par unité de surface à travers la face *ouest* est comme suit :

$$\begin{aligned}
 q_w &= F_w \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_w + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_p \right] & \text{pour } -2 < Pe_w < 2 \\
 q_w &= F_w A_w \phi_w & \text{pour } Pe_w \geq 2 \\
 q_w &= F_w A_w \phi_p & \text{pour } Pe_w \leq -2
 \end{aligned}
 \tag{III.47}$$

On peut facilement voir que pour les faibles nombres de Peclet, c'est équivalent d'utiliser le schéma « différence centré » pour les termes de convection et de diffusion, mais quand $|Pe| > 2$ il est équivalent au schéma « upwind » pour la convection et régler la diffusion à zéro. La forme générale de l'équation est :

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e \tag{III.48}$$

Le coefficient central est donné ci-après

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w)$$

Après certains re-arrangements, il est facile d'établir que les coefficients voisins pour le schéma « hybrid » pour la convection-diffusion unidimensionnelle stationnaire peuvent être écrits comme suit:

a_w	a_e
$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$

III.3.5. Le schéma « power-law » :

Le schéma « power-law » de Patankar (1980) est une approximation plus précise de la solution exacte unidimensionnelle et produite de meilleurs résultats que le schéma « hybrid ». Dans ce schéma la diffusion est placée égale à zéro quand le nombre de Pe des

cellules excède 10. Si $0 < Pe < 10$, le flux est évalué en employant une expression polynomiale, par exemple, le flux net par unité de surface à la face *ouest* du volume de contrôle est évalué en utilisant :

$$q_w = F_w [\phi_{ii} - \beta_w (\phi_p - \phi_{ii})] \quad \text{pour} \quad 0 < Pe < 10 \quad (\text{III.49})$$

là où $\beta_w = (1 - 0.1Pe_w)^5 / Pe_w$

$$\text{et} \quad q_w = F_w \phi_w \quad \text{pour} \quad Pe > 10 \quad (\text{III.50})$$

Les coefficients de l'équation discrétisée unidimensionnelle employant le schéma « power-law » pour la convection-diffusion stationnaire sont donnés par :

Coefficient central:

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w)$$

et

a_w	a_e
$D_w \max[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5] + \max[F_w, 0]$	$D_e \max[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5] + \max[-F_e, 0]$

Les propriétés du schéma « power-law » sont semblables à ceux du schéma « hybrid ». Le schéma « power-law » est plus précis pour les problèmes unidimensionnels puisqu'il essaye de représenter la solution exacte plus étroitement. Ce schéma s'est avéré utile dans les calculs pratiques d'écoulement et peut être employé comme alternative pour couvrir de tuiles le schéma « hybrid ». Quelques codes commerciaux de CFD, par exemple la version FLUENT, emploie ce schéma comme le schéma par défaut pour les calculs d'écoulement.

III.3.6. Schéma d'ordre supérieur pour les problèmes de convection-diffusion :

L'exactitude des schémas « hybrid » et « upwind » est seulement de premier ordre en termes d'erreur de troncature des séries de Taylor (Taylor Séries Truncation Error : TSTE). L'utilisation des quantités du schéma « upwind » s'assure que les schémas sont très stables et obéissent à la condition de transportivisme mais l'exactitude du premier ordre les rend enclin aux erreurs numériques de diffusion. De telles erreurs peuvent être minimisées en utilisant la discrétisation d'ordre supérieur. Les schémas d'ordre supérieur concernent des points éloignés et réduisent les erreurs de la discrétisation en apportant une influence plus large. Le schéma « différence centré » qui a l'exactitude du second ordre s'est avéré instable et ne possède pas la propriété de transportivisme.

III.3.6.1 Le schéma « quadratic upwind » (le schéma « Quick »):

Le schéma « Quick » de Leonard (1979) emploie une interpolation quadratique en trois points pour les valeurs aux faces des cellules. La valeur à la face du volume de contrôle de ϕ est obtenue à partir d'une fonction quadratique encadrée par deux nœuds (de chaque côté de la face) et du nœud sur l'ascendant.

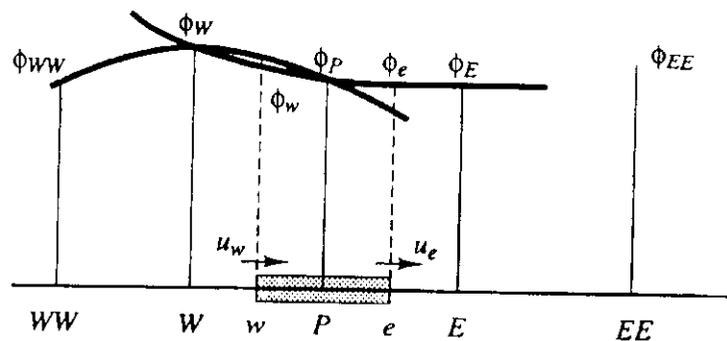


Figure (III.7) : profils quadratiques utilisés dans le schéma « Quick ».

Par exemple, quand $u_w > 0$ et $u_e > 0$ un ajustement quadratique par W et P est utilisé pour évaluer ϕ_w , et une autre équation quadratique ajustée par W , P et E pour calculer ϕ_e .

Pour $u_w < 0$ et $u_e < 0$ les valeurs de ϕ sur W , P et E sont utilisées pour ϕ_w et les valeurs sur P , E et EE pour ϕ_e . On peut montrer que pour une grille uniforme, la valeur de ϕ à la face de la cellule entre deux noeuds encadrants i et $i-1$, et le noeud ascendant $i-2$ est donné par formule suivante :

$$\phi_{face} = \frac{6}{8}\phi_{i-1} + \frac{3}{8}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i-2} \quad (III.51)$$

Quand $u_w > 0$, les noeuds encadrants pour la face *ouest* « w » sont W et P , le noeud ascendant, est WW (figure II.7), et :

$$\phi_w = \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \quad (III.52)$$

Quand $u_e > 0$, les noeuds encadrants pour la face *est* ' e ' sont P et E , le noeud ascendant est W , ainsi

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \quad (III.51)$$

Les termes de diffusion peuvent être évalués en utilisant le gradient de la parabole appropriée. Il est intéressant de noter, que sur une grille uniforme, cette pratique donne la même expression comme le schéma « différence centré » pour la diffusion. Si $F_w > 0$ et $F_e > 0$ et si nous employons les équations (III.50-III.51) pour les termes convectifs et le schéma « différence centré » pour les termes de diffusion, l'équation de transport discrétisée de convection-diffusion unidimensionnel (III.30) peut être écrite comme :

$$\left[F_e \left(\frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \right) - F_w \left(\frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \right) \right] = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

Qui peut être réarrangé pour donner :

$$\left[D_w - \frac{3}{8} F_w + D_c + \frac{6}{8} F_c \right] \phi_p = \left[D_w + \frac{6}{8} F_w + \frac{1}{8} F_c \right] \phi_w + \left[D_c - \frac{3}{8} F_c \right] \phi_E - \frac{1}{8} F_w \phi_{ww} \quad (\text{III.52})$$

Ceci est maintenant écrit sous le format standard pour des équations discrétisées :

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_E \phi_E + a_{ww} \phi_{ww} \quad (\text{III.53})$$

où

a_w	a_E	a_{ww}	a_p
$D_w + \frac{6}{8} F_w + \frac{1}{8} F_c$	$D_c - \frac{3}{8} F_c$	$-\frac{1}{8} F_w$	$a_w + a_E + a_{ww} + (F_c - F_w)$

Pour $F_w < 0$ et $F_c < 0$, le flux à travers les frontières *ouest* et *est*, est donné par les expressions :

$$\begin{aligned} \phi_w &= \frac{6}{8} \phi_p + \frac{3}{8} \phi_w - \frac{1}{8} \phi_E \\ \phi_E &= \frac{6}{8} \phi_E + \frac{3}{8} \phi_p - \frac{1}{8} \phi_{EE} \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

La substitution de ces deux formules pour les termes convectifs dans l'équation discrétisée de convection-diffusion (III.30) ensemble dans le schéma « différence centré » pour les termes de diffusion, et après remise en ordre comme ci-dessus, les coefficients seront:

a_w	a_E	a_{EE}	a_p
$D_w + \frac{3}{8} F_w$	$D_c - \frac{6}{8} F_c - \frac{1}{8} F_w$	$\frac{1}{8} F_c$	$a_w + a_E + a_{EE} + (F_c - F_w)$

IV.1. Introduction :

Une fois les équations discrétisées, l'étape suivante consiste à résoudre le système d'équation, la méthode la plus couramment utilisée par les codes de calculs est itérative, en partant des valeurs de champs estimés, le processus itératif permet petit à petit d'améliorer ces valeurs jusqu'à obtenir des champs solution du problème à certaines valeurs de résidus prés, définies antérieurement (critères de convergence), le traitement de la pression est par contre légèrement différent de celui des autres variables car il s'agit d'une variable qui n'obit à aucune équation de transport il en résulte l'introduction d'un algorithme de couplage vitesse pression.

L'algorithme couramment utilisé se nomme SIMPLE de Patankar S.V. et Spalding D.B. (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) [6]. L'idée générale de cet algorithme est de corriger petit à petit la pression ainsi que les composantes de la vitesse afin que ces variables qui vérifient les équations de la quantité de mouvement vérifient également l'équation de continuité. Il en résulte un processus itératif qui est intégré au sein de la résolution générale définie précédemment.

La convection d'une variable scalaire ϕ dépend de la magnitude et de la direction du champ local de vitesse. En général le champ de vitesse n'est pas cependant connu et n'émerge pas en tant qu'élément du processus global de solution avec toutes autres variables d'écoulement. Dans ce paragraphe nous regardons les stratégies les plus populaires pour calculer le champ entier d'écoulement.

Les équations de transport pour chaque composant de vitesse (équations du moment) peuvent être dérivées de l'équation générale de transport en remplaçant la variable ϕ par u et v respectivement. Le champ de vitesse doit, naturellement, satisfaire l'équation de continuité. Considérons les équations régissant un écoulement stationnaire laminaire bidimensionnel:

➤ Equation du moment (x) :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \quad (IV.1)$$

➤ Equation du moment (y)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v \quad (IV.2)$$

➤ Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (IV.3)$$

Le terme du gradient de pression, qui forme le principal terme de source de l'équation du moment dans la plupart des écoulements importants, a été écrit séparément pour faciliter la discussion qui suit.

La solution de l'ensemble des équations (VI.1-VI.3) nous présente deux nouveaux problèmes:

- les termes convectifs des équations du moment contiennent des quantités non linéaires, par exemple le premier terme de l'équation (VI.3) est la dérivée par rapport à x de ρu^2 .
- chacune des trois équations est couplée d'une façon complexe, parce que chaque composant de vitesse apparaît dans chaque équation du moment et aussi dans l'équation de continuité. La grande complexité de résolution est due au rôle joué par la pression. Elle apparaît dans les deux équations du moment, mais il est évident qu'il n'y a pas d'équation (transport ou autre) pour la pression.

Si le gradient de pression est connu, le processus d'obtenir les équations discrétisées des vitesses à partir des équations du moment est semblable à celui pour n'importe quel autre scalaire, et les schémas basés sur ceux expliqués en chapitre II, sont applicables. Dans les calculs d'écoulements de tout usage, nous souhaitons également calculer le champ de pression en tant qu'élément de la solution, ainsi son gradient n'est pas connu à l'avance.

Si l'écoulement est compressible, l'équation de continuité peut être employée comme équation de transport pour la densité. La pression peut alors être obtenue à partir de la densité et de la température en employant l'équation d'état $p = p(\rho, T)$. Cependant, si l'écoulement est incompressible la densité est constante et par définition non liée à la pression. Dans ce cas-ci, couplant entre pression et vitesse introduit une contrainte sur la solution du champ d'écoulement: si le champ de la pression correct est appliqué dans les équations du moment le champ de vitesse résultant devrait satisfaire la continuité.

Le lien pression-vitesse peut être résolu en adoptant une stratégie de solution itérative telle que l'algorithme SIMPLE de Patankar et de Spalding (1972). Dans cet algorithme les flux convectifs par unité de masse F à travers les faces des cellules sont évalués à partir des composants suggérés de vitesse. En outre, un champ suggéré de pression est employé pour résoudre une équation de moment et une autre de correction de pression, déduite de l'équation de continuité, est résolue pour obtenir un champ de correction de pression qui est employé alternativement pour mettre à jour les champs de vitesse et de pression. Pour commencer le procédé itératif nous employons les champs initiaux suggérés pour les champs de vitesse et de pression. Comme l'algorithme procède, notre but doit être d'améliorer graduellement ces derniers champs devinés suggérés. Le processus est réitéré jusqu'à la convergence des champs de vitesse et de pression.

IV.2. La grille décalée :

Le procédé de solution pour le transport d'une propriété générale ϕ développé en chapitre II sera naturellement incorporé pour résoudre les équations du moment. Le développement n'est pas complètement clarifié puisqu'il y a des problèmes liés aux termes sources de pression des équations du moment qui ont besoin d'un traitement spécial. La méthode des volumes finis commence, comme d'habitude, par la discrétisation sur le domaine d'écoulement des équations appropriées de transport (IV.1-IV.3). D'abord nous devons décider où stocker les vitesses. Il semble logique de définir ces derniers aux mêmes emplacements que les variables scalaires telles que la pression, l'énergie cinétique turbulente et l'énergie de dissipation turbulente. Cependant, si les vitesses et les pressions, toutes les deux, sont définies aux noeuds d'un volume de contrôle ordinaire, un champ de pression fortement non-uniforme peut agir comme un champ uniforme dans les équations

discrétisées de moment. Ceci peut être démontré avec la situation bidimensionnelle simple représentée sur la figure (IV.1), où une grille uniforme est employée pour la simplicité. Supposons que nous avons obtenu, d'une façon ou d'une autre, un champ fortement irrégulier de pression avec des valeurs comme représenté sur la figure (IV.5), où un maillage uniforme est adopté pour simplifier l'étude :

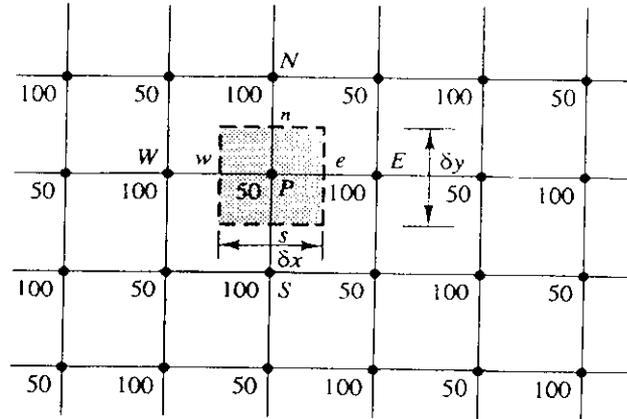


Figure (IV.1): champ de vérification du maillage de la pression.

Si les pressions sur e et à w sont obtenues par interpolation linéaire le gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ dans l'équation du moment de u est donnée par :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{\delta x} = \frac{\left(\frac{p_E + p_P}{2} \right) - \left(\frac{p_P + p_W}{2} \right)}{\delta x} = \frac{p_E - p_W}{2\delta x} \quad (\text{IV.4})$$

De même, le gradient $\frac{\partial p}{\partial y}$ de pression pour l'équation du moment de v est évalué comme :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_N - p_S}{2\delta y} \quad (\text{IV.5})$$

La pression au noeud central P n'apparaît pas dans (IV.4) et (IV.5).

Substituant les valeurs appropriées du champ de pression sur la figure (IV.1) dans Les formules (IV.4-IV.5), nous constatons que tous les gradients sont nuls à tous les points

nodaux, quoique le champ de pression montre des oscillations spatiales dans les deux directions. En conséquence, ce champ de pression donnerait la même source du moment (zéro) dans les équations discrétisées comme champ uniforme de pression. Ce comportement est évidemment non-physique.

Il est clair que, si les vitesses sont définies aux noeuds scalaires de grille, l'influence de la pression ne soit pas correctement représentée dans les équations du moment. Un remède pour ce problème consiste à employer une grille décalée pour les composants de vitesse (Harlow et Welch, 1965). L'idée est d'évaluer des variables scalaires, telles que la pression, la densité, la température etc., aux points nodaux ordinaires mais de calculer les composants de la vitesse sur des grilles décalées centrées sur les faces des cellules. L'arrangement pour un calcul bidimensionnel d'écoulement est montré sur la figure (IV.2). Les variables scalaires, y compris la pression, sont stockées aux noeuds marqués par (●). Les vitesses sont définies aux faces des cellules (scalaires) entre les noeuds et sont indiquées par des flèches. Les flèches horizontales (→) indiquent les emplacements pour les vitesses de u et les flèches verticales (↑) dénotent ceux pour les vitesses de v . En plus de la notation de E , W , N et S , La figure (IV.6) introduit également un nouveau système de notation basé sur une numérotation des lignes de grille et des faces des cellules. Il sera expliqué et employé plus tard dans ce paragraphe.

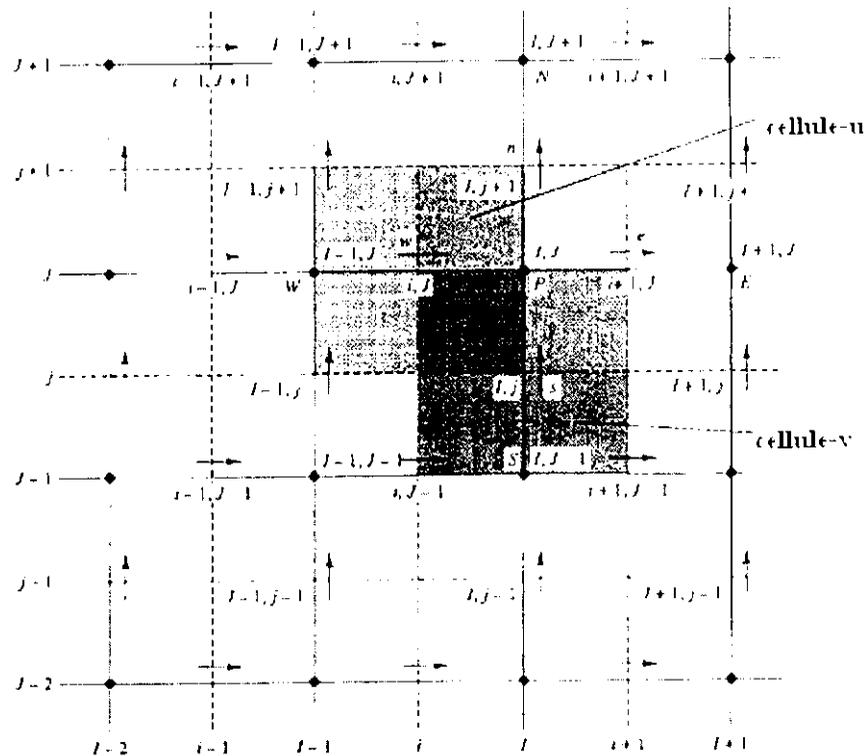


Figure (IV.2) L'arrangement des variables.

Pour le moment, nous continuons à employer la notation originale de E, W, N et de S ; les vitesses u sont stockées aux faces scalaires e et w des cellules et les vitesses v aux faces n et s . Dans un écoulement tridimensionnel, le composant w est évalué aux faces t et b des cellules.

Nous observons que les volumes de contrôle pour u et v sont différents des volumes de contrôle des scalaires. Les volumes de contrôles des scalaires désignés parfois sous le nom des volumes de contrôle de pression parce que, comme nous verrons plus tard, l'équation de continuité est transformée en équation de correction de pression, qui est évaluée sur les volumes de contrôle des scalaires.

Dans l'arrangement de grille décalé, les noeuds de pression coïncident avec les faces des cellules du volume de contrôle de u . Le terme du gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x}$ est donné par :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P_e - P_w}{\delta x_u} \tag{IV.6}$$

où δx_u , est la largeur du volume de contrôle de u . De même $\frac{\partial p}{\partial y}$ pour le volume de contrôle de v est indiqué par :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{P_P - P_S}{\delta y_v} \quad (\text{IV.7})$$

Où δy_v est la largeur du volume de contrôle de v .

Si nous considérons le champ de vérification de la pression encore, la substitution des valeurs nodales appropriées de pression dans les équations (IV.6) et (IV.7) rapporte maintenant très significativement un gradient de pression non nul. L'échelonnage de la vitesse évite le comportement peu réaliste de l'équation du moment pour les oscillations spatiales des pressions. Un autre avantage de l'arrangement décalé de grille est qu'il produit des vitesses exactement aux emplacements où elles sont exigées pour le calcul des scalaires transport convection-diffusion. Par conséquent, aucune interpolation n'est nécessaire pour calculer les vitesses aux faces des cellules des scalaires.

IV.3. Les équations du moment :

Comme ça a été affiché précédemment, si le champ de pression est connu, la discrétisation des équations de vitesse et le procédé de solution suivant est semblable à celle d'une équation scalaire. Puisque la grille de vitesse est décalée, la nouvelle notation basée sur la ligne de grille et la numérotation des faces de cellules sera employée. Sur la figure (IV.2) les lignes de grille continues sont numérotées par des majuscules. Dans la direction de x la numérotation est ..., $I-1$, I , $I+1$... Etc. et dans la direction de y ..., $J-1$, J , $J+1$... etc. Les lignes discontinues qui construisent les faces scalaires des cellules sont dénotées par les lettres minuscules ..., $i-1$, i , $i+1$... et.... $j-1$, j , $j+1$ de j dans la direction x et y respectivement.

Un système souscrit basé sur cette numérotation nous permet de définir les emplacements des faces des noeuds et des cellules de grille avec précision. Les noeuds de scalaires, situés à l'intersection des deux lignes de grille, sont identifiés par deux

majuscules: par exemple le point P dans Figure (IV.2) est dénoté I, J . Les vitesses u sont stockées aux faces e et w d'un volume contrôle d'un scalaire. Celles-ci sont situées à l'intersection d'une ligne définissant une frontière de cellules et d'une ligne de grille, et sont donc définies par une combinaison d'une lettre minuscule et une lettre capitale: par exemple la face w de la cellule autour du point P est identifiée près i, J .

Pour les mêmes raisons les emplacements de stockage pour les vitesses v sont une combinaison d'une lettre capitale et d'une autre minuscule: par exemple la face s est donnée près I, j .

Nous pouvons employer des grilles décalées en avant ou en arrière de vitesse. Les grilles uniformes sur la figure (III.2) sont décalées vers l'arrière depuis la location i pour la vitesse $u_{i,j}$ est à une distance de $-\frac{1}{2\delta x_u}$ du noeud scalaire I, J . De même, la location j pour la vitesse v , $v_{i,j}$ est de $-\frac{1}{2}\delta y_v$ du noeud I, J . Exprimé dans un nouveau système de coordonnées, l'équation du moment pour la vitesse u à l'emplacement I, J est donné par :

$$a_{i,j}u_{i,j} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{p_{I,j} - p_{I-1,j}}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u$$

où

$$a_{i,j}u_{i,j} = \sum a_{nb}u_{nb} + (p_{I-1,j} - p_{I,j})A_{i,j} + b_{i,j} \quad (IV.8)$$

Où ΔV_u est le volume de la cellule de u , le $b_{i,j} = \bar{S} \Delta V_u$ est le terme de source du moment, $A_{i,j}$ est la face (*est* ou *ouest*) de la cellule du volume de contrôle de u . le terme de source du gradient de pression dans (IV.8) a été discrétisé au moyen d'une interpolation linéaire entre les noeuds de pression situés aux frontières du volume de contrôle de u . Dans le nouveau système de numération les voisins de E, de W, de N et de S concernés dans la sommation $\sum a_{nb}u_{nb}$, sont $(I-1, J)$, $(i+1, J)$, $(I, J+1)$ et $(I, J-1)$. Leurs emplacements et les vitesses régnautes sont montrés en plus détail sur la figure (IV.3), les valeurs des coefficients $a_{i,j}$ et a_{nb} peuvent être calculés avec n'importe quels schémas (upwind, hybride, Quick. Voir. Paragraphe (III.3)) appropriées aux problèmes de convection-

diffusion. Les coefficients contiennent des combinaisons du flux convectif par unité de masse F et de la conductivité diffusive D aux faces des cellules du volume de contrôle de u . l'Application du nouveau système de notation nous donne les valeurs de F et de D pour chaque faces e , w , s et n du volume de contrôle de u

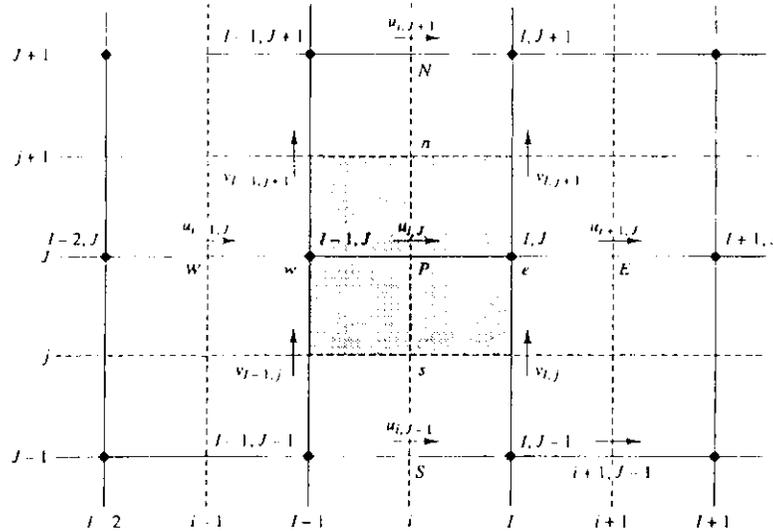


Figure (IV.3) : volume de contrôle de u

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i-1,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-2,j}}{2} \right) u_{i-1,j} \right] \quad (IV.9.a)$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) u_{i,j} \right] \quad (IV.9.b)$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i-1,j} + \rho_{i-2,j}}{2} \right) v_{i-1,j} \right] \quad (IV.9.c)$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{i,j+1} + F_{i-1,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} \right) v_{i,j+1} + \left(\frac{\rho_{i-1,j+1} + \rho_{i-1,j}}{2} \right) v_{i-1,j+1} \right] \quad (IV.9.d)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{i-1,j}}{x_i - x_{i-1}} \quad (IV.9.e)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} \quad (IV.9.f)$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{i-1,j} + \Gamma_{i,j} + \Gamma_{i-1,j-1} + \Gamma_{i,j-1}}{4(y_j - y_{j-1})} \quad (IV.9.g)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{I-1,J+1} + \Gamma_{I,J+1} + \Gamma_{I+1,J} + \Gamma_{I,J}}{4(y_{J+1} - y_J)} \quad (IV.9.h)$$

Les formules (IV.9) montrent que là où les variables scalaires ou les composants de vitesse ne sont pas disponibles à une face du volume de contrôle de u , alors on procède par interpolation. Pendant chaque itération les composants de u et de v employés pour évaluer les expressions ci-dessus sont ceux obtenus comme résultats de l'itération précédente (ou du champ proposé dans la première itération). Il convient de noter que les valeurs connus de u et de v contribuent aux coefficients a dans l'équation (IV.8).

Par analogie l'équation du moment de v devient :

$$a_{i,j} v_{i,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{I,J-1} - p_{I,J}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (IV.10)$$

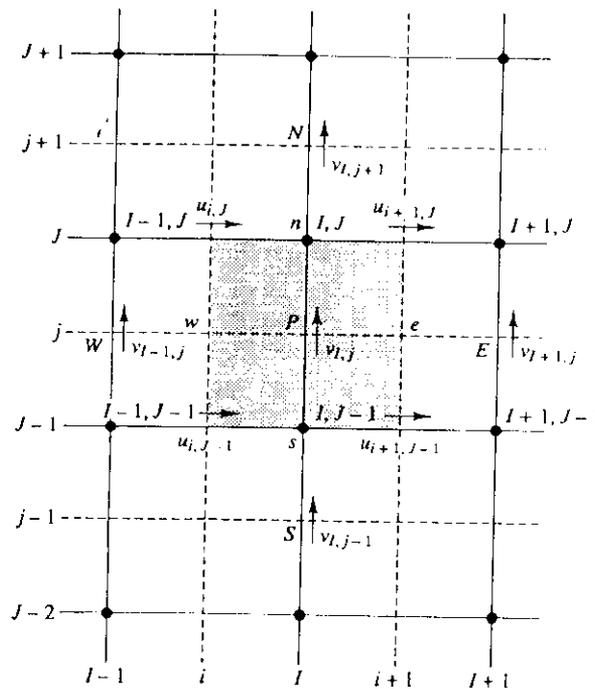


Figure (IV.4): volume de contrôle de v

Les coefficients $a_{i,j}$ et a_{nb} contiennent encore des combinaisons du flux convectif par unité de masse F et la conductibilité diffusive D aux faces des cellules du

volume de contrôle. Leurs valeurs sont obtenues par le même procédé faisant la moyenne adoptée pour le volume de contrôle de u et sont indiqués ci-dessous:

$$F_w = (\rho u)_w = \frac{F_{i,j} + F_{i,j-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) u_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i,j-1} + \rho_{i,j-2}}{2} \right) u_{i,j-1} \right] \quad (\text{IV.11.a})$$

$$F_e = (\rho u)_e = \frac{F_{i+1,j} + F_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i+1,j} + \rho_{i,j}}{2} \right) u_{i+1,j} + \left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) u_{i,j} \right] \quad (\text{IV.11.b})$$

$$F_s = (\rho v)_s = \frac{F_{i,j+1} + F_{i,j}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} \right) v_{i,j+1} + \left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j-1}}{2} \right) v_{i,j} \right] \quad (\text{IV.11.c})$$

$$F_n = (\rho v)_n = \frac{F_{i,j} + F_{i,j+1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho_{i,j} + \rho_{i,j+1}}{2} \right) v_{i,j} + \left(\frac{\rho_{i,j+1} + \rho_{i,j}}{2} \right) v_{i,j+1} \right] \quad (\text{IV.11.d})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{i+1,j-1} + \Gamma_{i,j-1} + \Gamma_{i-1,j} + \Gamma_{i,j}}{4(x_i - x_{i-1})} \quad (\text{IV.11.e})$$

$$D_e = \frac{\Gamma_{i,j-1} + \Gamma_{i+1,j-1} + \Gamma_{i,j} + \Gamma_{i+1,j}}{4(x_{i+1} - x_i)} \quad (\text{IV.11.f})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{i,j+1}}{y_j - y_{j-1}} \quad (\text{IV.11.g})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} \quad (\text{IV.11.h})$$

Encore à chaque itération les valeurs de F sont calculées en utilisant les composants de u et de v résultant de l'itération précédente.

En donnant un champ de pression p , les équations discrétisées du moment (IV.8) et (IV.10) peuvent être écrites pour chaque volume de contrôle de u et de v et résolues pour obtenir les champs de vitesse.

Si le champ de pression est correct, le champ de vitesse résultant satisfera la continuité. Comme le champ de pression est inconnu, nous avons besoin d'une méthode pour calculer la pression

IV.4. L'algorithme SIMPLE :

SIMPLE « **Semi-Implicit for Pressure-Linked Équations** » proposé par Patankar et Spalding (1972), est essentiellement un procédé de « proposer-et-corriger » pour le calcul de la pression sur l'arrangement décalé de grille introduit ci-dessus.

Pour initier le calcul SIMPLE, un champ de pression p^* est suggéré. Les équations du moment discrétisées (IV.14) et (IV.16) sont résolues en utilisant le champ de pression suggéré p^* , pour rapporter les composants de la vitesse u^* et v^* comme suit:

$$a_{i,j} u^*_{i,j} = \sum a_{nb} u^*_{nb} + (p^*_{i-1,j} - p^*_{i,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (\text{IV.12})$$

$$a_{i,j} v^*_{i,j} = \sum a_{nb} v^*_{nb} + (p^*_{i,j-1} - p^*_{i,j}) A_{i,j} + b_{i,j} \quad (\text{IV.13})$$

Maintenant nous définissons la correction p' comme la différence entre le champs de pression correct et le champs de pression suggéré, de sorte que

$$p = p^* + p' \quad (\text{IV.14})$$

De même, nous définissons les corrections de vitesse u' et v' pour rapporter les vitesses correctes u et v aux vitesses devinées u^* et v^*

$$u = u^* + u' \quad (\text{IV.15})$$

$$v = v^* + v' \quad (\text{IV.16})$$

La substitution du champ de pression correct p dans les équations du moment rapporte le champ correct de vitesse (u, v). Les équations discrétisées du moment (IV.8) et (IV.10) lient les champs corrects de vitesse avec le champ correct de pression.

La soustraction des équations (IV.12) et (IV.13) de (IV.8) et (IV.10) respectivement, donne :

$$a_{i,j} (u_{i,j} - u^*_{i,j}) = \sum a_{nb} (u_{nb} - u^*_{nb}) + [(p_{i-1,j} - p^*_{i-1,j}) - (p_{i,j} - p^*_{i,j})] A_{i,j} \quad (\text{IV.17})$$

$$a_{i,j} (v_{i,j} - v^*_{i,j}) = \sum a_{nb} (v_{nb} - v^*_{nb}) + [(p_{i,j-1} - p^*_{i,j-1}) - (p_{i,j} - p^*_{i,j})] A_{i,j} \quad (\text{IV.18})$$

En utilisant les formules de correction (IV.14- III.17), les équations (IV.17- IV.18) peuvent être réécrites comme suit:

$$a_{i,j}u'_{i,j} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (p'_{i,j+1} - p'_{i,j})A_{i,j} \quad (IV.19)$$

$$a_{i,j}v'_{i,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (p'_{i,j+1} - p'_{i,j})A_{i,j} \quad (IV.20)$$

En ce point, une approximation est introduite: $\sum a_{nb}u'_{nb}$ et $\sum a_{nb}v'_{nb}$ sont négligés pour simplifier les équations (IV.19) et (IV.20) pour la corrections des vitesses. Omission de ces derniers termes est l'approximation principale de l'algorithme SIMPLE. Nous obtenons :

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i,j+1} - p'_{i,j}) \quad (IV.21)$$

$$v'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i,j+1} - p'_{i,j}) \quad (IV.22)$$

où :

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (IV.23)$$

Les équations (IV.21) et (IV.22) décrivent les corrections à appliquer aux vitesses par les formules (IV.15) et (IV.16), ce qui donne :

$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + d_{i,j}(p'_{i,j+1} - p'_{i,j}) \quad (IV.24)$$

$$v_{i,j} = v^*_{i,j} + d_{i,j}(p'_{i,j+1} - p'_{i,j}) \quad (IV.25)$$

Des expressions similaires existent pour $u_{i+1,j}$ et $v_{i+1,j}$:

$$u_{i+1,j} = u^*_{i+1,j} + d_{i+1,j}(p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \quad (IV.26)$$

$$v_{i+1,j} = v^*_{i+1,j} + d_{i+1,j}(p'_{i,j} - p'_{i+1,j}) \quad (IV.27)$$

où

$$d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}}{a_{i+1,j}} \quad \text{et} \quad d_{i+1,j} = \frac{A_{i,j+1}}{a_{i,j+1}} \quad (IV.28)$$

Jusqu'ici nous avons seulement considéré les équations du moment, comme mentionné avant, le champ de vitesse est sujet également à la contrainte qu'il devrait

satisfaire l'équation de continuité (IV.3). La continuité est satisfaite dans la forme discrétisée pour le volume de contrôle du scalaire comme représenté sur la figure (IV.5):

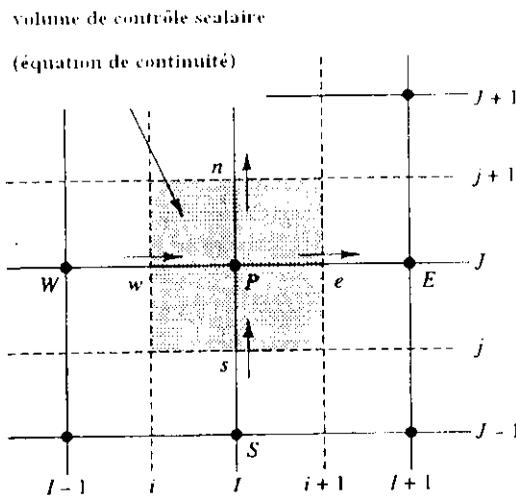


Figure (IV.5) : volume de contrôle du scalaire pour l'équation discrétisée de continuité

$$[(\rho u A)_{i+1,j} - (\rho u A)_{i,j}] + [(\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,j}] = 0 \quad (IV.29)$$

La substitution des vitesses corrigées des équations (III.24- III.27) dans l'équation de continuité (III.29) donne :

$$\begin{aligned} & \left[\rho_{i+1,j} A_{i+1,j} (u^*_{i+1,j} + d_{i+1,j} (p'_{I,j} - p'_{i+1,j})) - \rho_{i,j} A_{i,j} (u^*_{i,j} + d_{i,j} (p'_{I-1,j} - p'_{i,j})) \right] + \\ & \left[\rho_{I,j+1} A_{I,j+1} (v^*_{I,j+1} + d_{I,j+1} (p'_{I,j} - p'_{I,j+1})) - \rho_{I,j} A_{I,j} (v^*_{I,j} + d_{I,j} (p'_{I,j-1} - p'_{I,j})) \right] = 0 \end{aligned} \quad (IV.30)$$

Ceci peut être arrangé comme suit :

$$\begin{aligned} & [(\rho d A)_{i+1,j} + (\rho \alpha A)_{i,j} + (\rho \alpha A)_{I,j+1} + (\rho \alpha A)_{I,j}] p'_{I,j} = (\rho \alpha A)_{i+1,j} p'_{i+1,j} + (\rho \alpha A)_{I,j} p'_{I-1,j} \\ & + (\rho \alpha A)_{I,j+1} p'_{I,j+1} + (\rho \alpha A)_{I,j} p'_{I,j-1} + [(\rho \alpha A)_{i,j} - (\rho \alpha A)_{i+1,j} + (\rho \alpha A)_{I,j} - (\rho \alpha A)_{I,j+1}] \end{aligned} \quad (IV.31)$$

En identifiant les coefficients de p' , cette dernière équation peut s'écrire comme suis :

$$a_{i,j} p'_{i,j} = a_{i+1,j} p'_{i+1,j} + a_{i-1,j} p'_{i-1,j} + a_{i,j+1} p'_{i,j+1} + a_{i,j-1} p'_{i,j-1} + b'_{i,j} \quad (IV.32)$$

Où :

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}$$

Et ils sont récapitulé comme suit :

$a_{i+1,j}$	$a_{i-1,j}$	$a_{i,j+1}$	$a_{i,j-1}$	$b'_{i,j}$
$(\rho \Delta A)_{i+1,j}$	$(\rho \Delta A)_{i-1,j}$	$(\rho \Delta A)_{i,j+1}$	$(\rho \Delta A)_{i,j-1}$	$(\rho \Delta A)_{i,j} - (\rho \Delta A)_{i+1,j} + (\rho \Delta A)_{i-1,j} - (\rho \Delta A)_{i,j+1}$

L'équation (IV.32) représente l'équation de continuité comme équation pour la correction du champ de pression p' . Le terme source b' représente la continuité du déséquilibre résultant du champ incorrect de vitesse u^* , v^* . En résolvant l'équation (IV.32), le champ de correction de la pression peut être obtenu à tous les points (nœuds). Une fois que le champ de correction de pression est connu, le champ correct de pression peut être obtenu en utilisant des composants de formule (IV.14) et de la vitesse par les formules de correction (IV.24- IV.27).

L'omission des termes telles que $\sum a_{mb} u'_{mb}$ dans la dérivation n'affecte pas la solution finale parce que les corrections de pression et des vitesses seront pratiquement toutes nulles dans une solution convergée donnant : $p^* = p$, $u^* = u$ et $v^* = v$.

L'équation de correction de pression est susceptible à la divergence à moins qu'une certaine sous-relaxation soit employée pendant le processus itératif, et la nouvelle pression est obtenue comme suit :

$$p^{nw} = p^* + \alpha_p p' \quad (IV.33)$$

Où α_p est le facteur de sous-relaxation de la pression. Si nous choisissons α_p égal à 1, le champ de pression suggéré est corrigé par p' . Cependant, la correction p' est souvent trop grande pour des calculs stables, en particulier quand le champ suggéré p^* est très loin de la solution finale. Une valeur de α_p égale à zéro n'appliquerait aucune correction, ce qui est également indésirable. La prise de α_p entre 0 et 1 nous permet d'ajouter au champ

suggéré p^* une fraction du champ de correction qui est assez grand pour faire avancer le procédé itératif d'amélioration, mais assez petit pour assurer le calcul stable.

Les vitesses sont également sous-relaxées. Les nouveaux composants u et v de la vitesse itérativement améliorée sont obtenus à partir :

$$u^{ncw} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \quad (IV.34)$$

$$v^{ncw} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)} \quad (IV.35)$$

Où α_u et α_v sont les facteurs de sous-relaxation de u et de v avec des valeurs entre 0 et 1, u et v sont les composants corrigés de vitesse sans relaxation et $u^{(n-1)}$ et $v^{(n-1)}$ représentent leurs valeurs obtenues dans la précédente itération. Après quelque simple développement, il peut être montré qu'avec la sous-relaxation l'équation du moment prend la forme :

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_u} u_{i,j} = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_{i-1,j} - p_{i,j}) A_{i,j} + b_{i,j} + \left[(1 - \alpha_u) \frac{a_{i,j}}{\alpha_u} \right] u_{i,j}^{(n-1)} \quad (IV.36)$$

Et l'équation discrétisée du moment de v :

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_v} v_{i,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{i,j-1} - p_{i,j}) A_{i,j} + b_{i,j} + \left[(1 - \alpha_v) \frac{a_{i,j}}{\alpha_v} \right] v_{i,j}^{(n-1)} \quad (IV.37)$$

L'équation de correction de pression est également affectée par sous-relaxation de la vitesse et peut être montré que les termes de d de l'équation de correction de pression deviennent :

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j} \alpha_u}{a_{i,j}} \quad d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j} \alpha_u}{a_{i+1,j}} \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j} \alpha_v}{a_{i,j}} \quad \text{et} \quad d_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1} \alpha_v}{a_{i,j+1}}$$

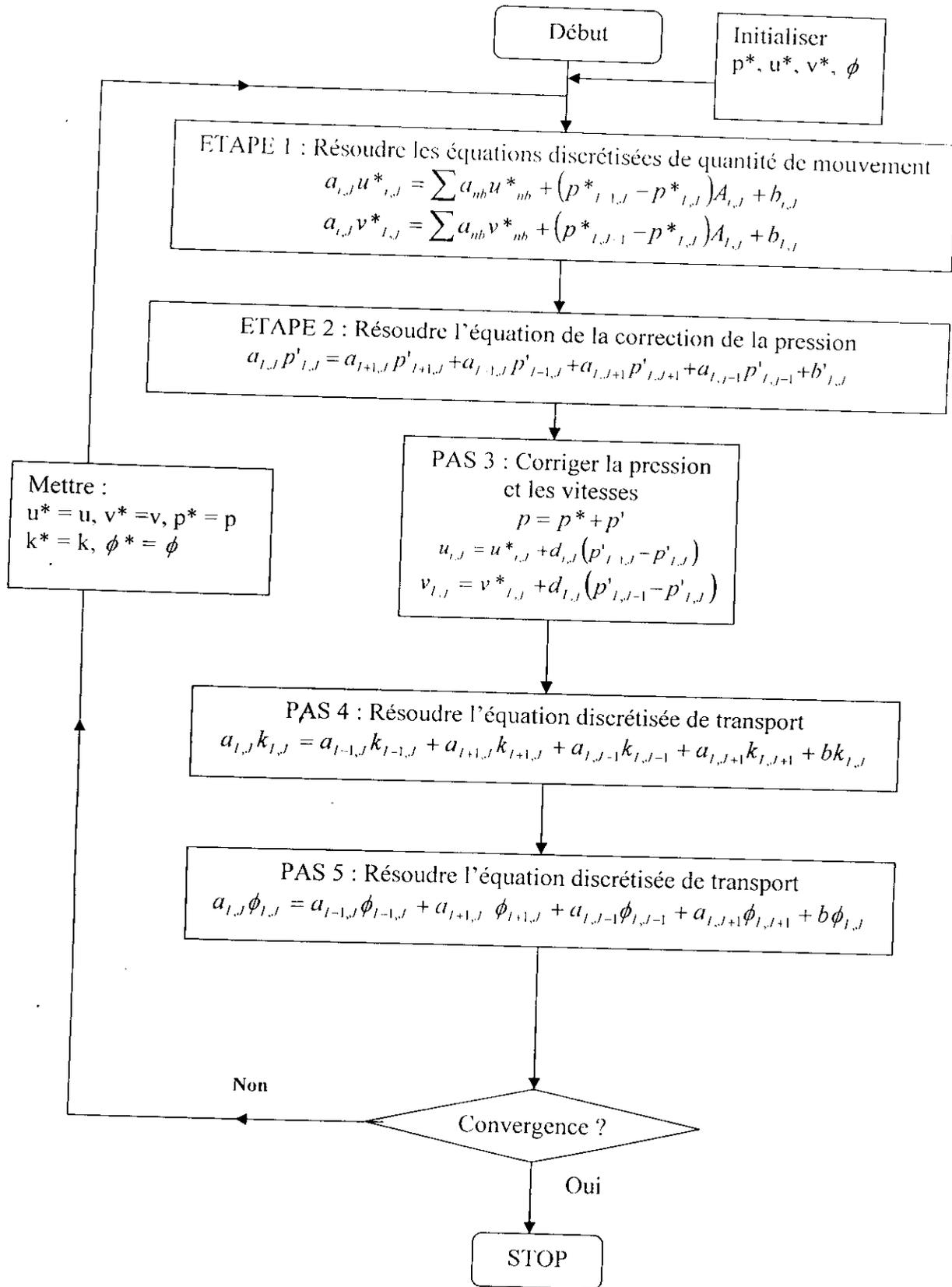
Notons que dans ces formules $a_{i,j}$, $a_{i+1,j}$, $a_{i,j}$ et $a_{i,j+1}$ sont les coefficients centraux des équations discrétisées de la vitesse aux positions (i,j) , $(i+1,j)$, (i,j) et $(i,j+1)$ d'une cellule d'un scalaire concentré sur P .

Un choix correct des facteurs de sous-relaxation est essentiel pour rentabiliser les simulations. Une valeur trop grande de α peut mener aux solutions itératives oscillantes ou même divergentes et une valeur qui est trop petite peut causer une convergence extrêmement lente.

IV.5.Critères de convergence :

Les erreurs sont testées sur les équations de continuité afin de vérifier le bilan de masse à chaque itération. Dans notre cas c'est la valeur du résidu limite constituant le critère de convergence, elle devra être choisie de telle sorte qu'elle permette d'obtenir à la fois une précision relativement bonne et un nombre peu élevé d'itérations à chaque pas de temps.

L'application de l'algorithme **SIMPLE** à notre modèle est le suivant :



Propriétés physiques de fluide :

Après la modélisation de l'écoulement, on doit donner au code de calcul les valeurs caractérisant l'état du fluide.

V.1 : Domaine de l'écoulement :

V.1.1 : Géométrie :

Dans un premier temps, on a choisi un système de coordonnées cartésiennes afin de caractériser sa géométrie. Il suffit de donner les dimensions de la géométrie. (Figure V.1)

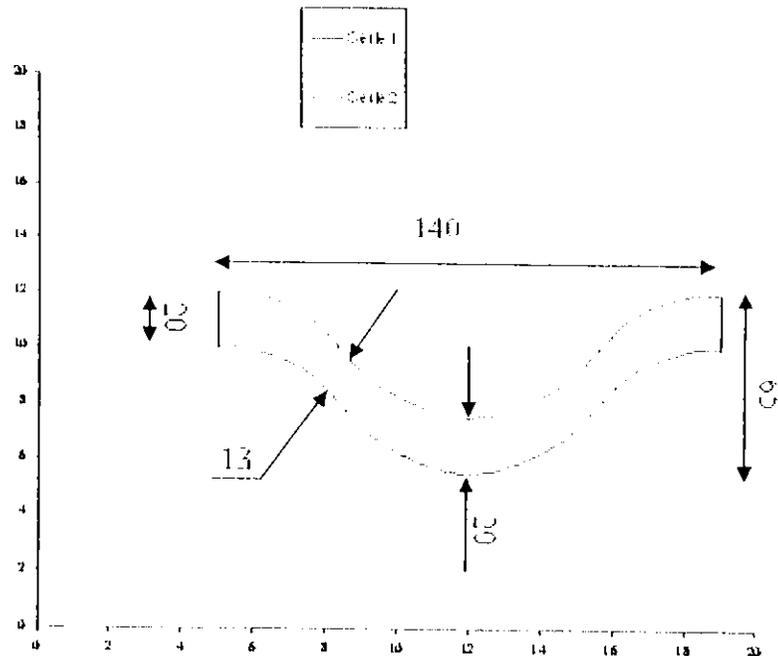


Figure (V.1) : Section du conduit à étudier.

On voit que la géométrie présente trois régions, un divergent, convergent, et divergent au niveau de l'axe de symétrie. La figure (V.2) représente ces régions.

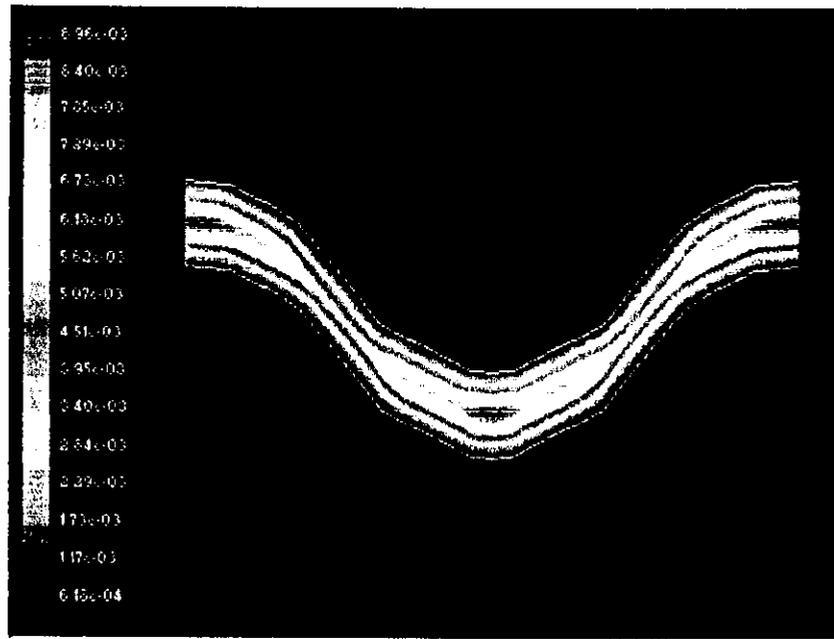


Figure (V.2) : Présentation de la géométrie de la conduite.

V.1.2.Maillage :

La spécification du maillage est dépend de la géométrie :

- Si la géométrie est rectangulaire, on choisi une grille rectangulaire et imposer la taille des pas d'espace dans les directions du domaine.
- Si la géométrie n'est pas rectangulaire on choisi d'utiliser une grille suivant les frontières du domaine comme le cas de notre géométrie (Figure V.3)

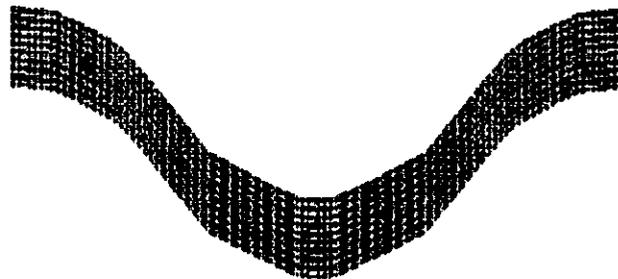


Figure (V.3) : section de la conduite représentant le maillage du domaine de fluide.

V.2. Conditions initiales :

Pour le modèle numérique il faut fournir des conditions initiales qui représentent l'état de base du modèle à l'instant où commence la simulation. Les variables possèdent des valeurs initiales constantes, il est possible les données de manière directe au logiciel.

V.3. Conditions aux limites :

La résolution, par une méthode analytique ou numérique, de l'équation de transport convecto-diffusif nécessite la détermination de ses conditions aux limites. Il existe fondamentalement trois types de conditions aux limites, qui portent sur la détermination de la densité de flux d'extensité à la frontière du système étudié. Par ailleurs, la nature de l'équation, elliptique ou parabolique, par rapport aux différentes variables d'espace et de temps, impose le nombre de conditions limites nécessaires.

En début on exprime les différentes catégories de conditions aux limites, précisant qu'une densité de flux peut être de types convectif et diffusif.

V.3.1. Les différentes conditions aux limites :

A la frontière du système étudié, la densité de flux d'extensité normale $\varphi = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ est donnée par l'une des trois conditions aux limites suivantes :

➤ Condition de Neumann :

La condition de Neumann exprime la connaissance de la valeur de φ en un point de la frontière et s'écrit par conséquent en ce point :

$$\varphi = \text{Cte}$$

La condition de Neumann est fréquemment utilisée :

- Lorsque des mesures expérimentales de flux ont été réalisées,
- Sous la forme $\varphi = 0$, pour représenter les conditions de symétrie,
- Egalement sous la forme $\varphi = 0$, pour simuler :
 1. l'adiabaticisme (transport de chaleur)
 2. l'imperméabilité (transport de matière),
 3. le frottement nul (ou glissement parfait) à la surface libre d'un écoulement (transport de quantité de mouvement).

➤ **Condition de Fourier :**

La condition de Fourier exprime l'existence d'une relation entre la densité de flux normale et extensité spécifique en un point de la surface, et s'écrit de la manière générale :

$$\varphi = f(\phi)$$

➤ **Condition de Dirichlet :**

La condition aux limites de Dirichlet peut être considérée comme une forme asymptotique de la condition aux limites de Fourier linéarisée, avec une valeur infinie du coefficient de transfert. Elle exprime en fait la connaissance de la valeur de l'extensité en un point de frontière :

$$\phi = \text{cte}$$

- en transport de matière, pour exprimer l'équilibre thermodynamique avec une phase de composition connue,
- en transport de chaleur, lorsque des mesures de température sont disponibles ou pour exprimer un contact parfait avec un milieu dont la température est connue,

- en mécanique des fluides, pour simuler une vitesse imposée, ou une vitesse nulle en un point au contact d'une paroi solide immobile.

V.3.2. Conditions d'entrée et de sortie :

➤ "Inlet" :

Cette condition aux limites est généralement employée pour modéliser une entrée, en effet, les valeurs des variables de l'écoulement doivent être imposées sous forme de conditions de Dirichlet à l'exception de la pression pour les écoulements incompressibles qui est extrapolées au cours de l'écoulement pour être plus précis.

➤ " condition de pression" :

Nous sommes dans le cas d'un écoulement incompressible, la condition de pression est utilisée pour modéliser la sortie de l'écoulement, on doit fixer la valeur de la pression par l'intermédiaire d'une condition de Dirichlet, on a retenue pour caractériser l'entrée de l'écoulement, la valeur de la pression doit également être imposée grâce à une condition de dirichlet.

➤ "condition de paroi"

Pour les écoulement laminaires, il est possible de prescrire soit la valeur de la vitesse tangentielle, soit celle de la contrainte tangentielle soit une relation combinant la vitesse tangentielle et la contrainte tangentielle. La condition par défaut du logiciel est la condition de non-glissement (vitesse tangentielle nulle). La condition de glissement (contrainte tangentielle nulle) est également directement disponible dans ce logiciel.

V.4. Présentation des différents paramètres :

Nous présentons dans ce qui va suivre les caractéristiques métallurgiques qui sont utilisé dans le calcul.

V.4.1.Paramètres métallurgiques :

La conduite est fait en alliage de plastic composé essentiellement de polyamide, et possède les caractéristiques suivantes :

- ❖ Masse volumique : $\rho = 1442 \text{ kg/m}^3$.
- ❖ Conductivité thermique : $K = 0.671 \text{ W/m.k.}$
- ❖ Chaleur spécifique : $C_p = 1272 \text{ J/kg.k.}$

V.4.2.Paramètres géométriques :

V.4.2.1.La géométrie :

Les paramètres géométriques sont présentés dans la figure (V. 1) et notamment le maillage de la conduite d'écoulement dans la figure (V.2). Le maillage utilisé est structuré dans une géométrie irrégulière.

V.4.2.2.conditions initiales :

Pour le fluide considéré on prend de l'air humide (mélange air sec et vapeur d'eau) avec une humidité relative $HR = 60\%$.

Pour la détermination de l'états du fluide (air humide) c-à-d ces caractéristique on a le reporté au section prochaine (§V.1 étude de l'air humide).

V.4.2.2.conditions aux limites :

On a choisi deux cas extrêmes pour la température d'entrée, soit 2°C en hiver et 48°C en été.

➤ conditions aux limites à l'entrée de la conduite :

À l'entrée de la conduite on a une pression atmosphérique $P_1 = 101325$ Pa, et une vitesse de l'air due au mouvement de compresseur de 1.2 m/s.

➤ condition aux limites à la sortie de la conduite :

À la sortie de la conduite on a une augmentation de pression de 25 mm de H₂O pression, donc on a :

$$P_2 = P_1 + (25 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 9,80665).$$

d'où :

$$P_2 = 101570,16625 \text{ Pa.}$$

La température à la sortie est prise entre 57°C et 65°C, elle est due à l'effet d'échauffement du compresseur. On va prendre température moyenne soit $T_2 = 61^\circ\text{C}$.

➤ condition de la paroi :

On impose les conditions d'adhérence (ou de non glissement) et d'imperméabilité, et on a choisi la variation de la température au niveau de la paroi suivre une loi linéaire

$$T_p = \frac{T_2 - T_1}{0.14} \cdot x + T_1 .$$

Avec :

$$0 \leq x \leq 0.14.$$

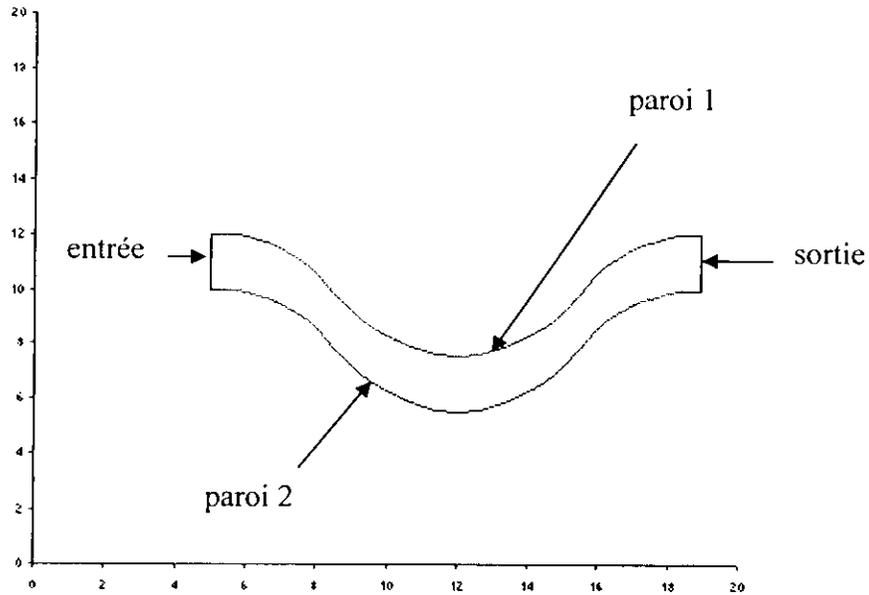
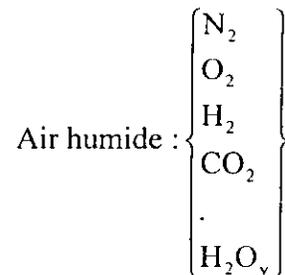


Figure (V.4) : représentation du domaine à étudier.

V.5. air humide

V.5.1. Généralités :

Les principaux constituants de l'air sont l'oxygène et l'azote, et un certain nombre d'autres gaz dont la vapeur d'eau :



L'air humide est un mélange gazeux comprenant de l'air sec (pression partielle P_{as}) et de la vapeur d'eau (pression partielle P_v).

A des températures très basse (pas inférieur à -50°C) l'air ne se trouve que à l'état gazeuse dans des pressions voisines de la pression atmosphérique, alors que l'eau peut exister, selon la température du mélange, sous forme de vapeur d'eau, de liquide et le solide. Cela signifie que l'air humide est un mélange gazeux dont l'un des constituants, à savoir la vapeur d'eau peut passer, lorsque la température du mélange diminue, à une autre phase (liquide ou solide) et quitter donc le mélange gazeux.

Si la pression totale et la température du mélange sont données. La quantité de vapeur d'eau continue dans l'air humide ne peut excéder une certaine valeur, l'air sous des pressions relativement peu élevées (voisines de la pression atmosphérique) peut être considérés, avec une approximation pour les calculs comme des gaz parfaits.

V.5.2. Grandeurs Relatives à L'air Humide :

Soit le diagramme (P,T), le point 1 représentatif de la vapeur d'eau de pression partielle P_v contenue dans de l'air de température T et de pression totale P :

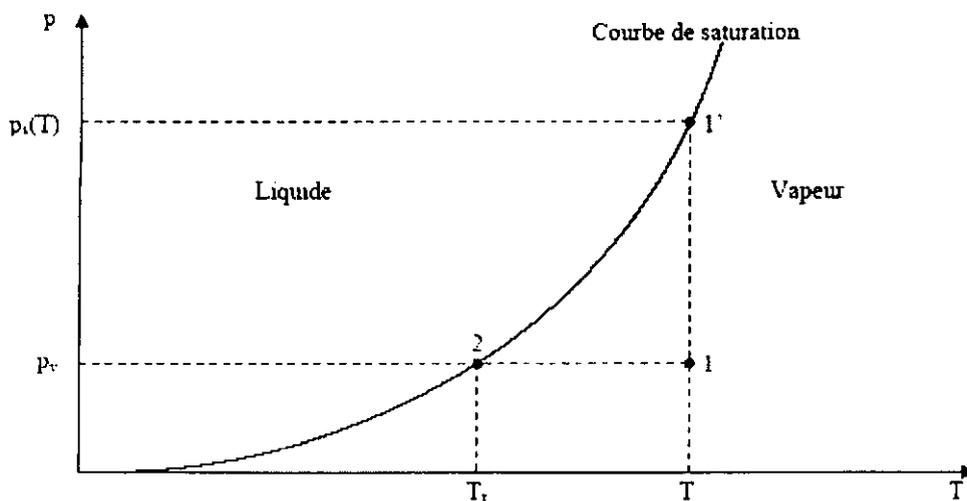


Figure (V.5) : courbe de saturation de l'eau.

$P_s(T)$ est la pression de saturation (d'équilibre liquide-vapeur) de la vapeur d'eau à la température T . On trouvera en annexe (A) un tableau donnant les propriétés de l'eau. On peut également utiliser la *formule de Dupré* qui est valable entre -50°C et $+200^\circ\text{C}$ pour calculer $P_s(T)$:

$$P_s(T) = \exp\left[46.784 - \frac{6435}{T + 273.1} - 3.868(T + 273.16)\right] \times 10^{-3} \times 13540 \times 9.80665 \quad (\text{V.1})$$

Où :

- T : Température en $^\circ\text{C}$.
- $P_s(T)$ Pression de saturation en Pa .

La vapeur d'eau se présente dans l'air sous forme de vapeur si $P_v \leq P_s(T)$, on définit alors l'*humidité relative* :

$$\text{HR de l'air par la relation : } \quad \text{HR} = \frac{P_v}{P_s(T)} \times 100 \quad (\text{V.2})$$

Avec :

$$0 \leq \text{HR} \leq 100\%$$

Si l'on refroidit l'air à pression constante, son humidité relative va augmenter jusqu'à atteindre la valeur 100% (au point 2 sur la courbe de saturation). Il se produit alors un équilibre vapeur-liquide et les premières gouttes d'eau condensée vont apparaître, la température du point 2 est appelée la *température de rosée* T_r de l'air. Elle est définie par :

$$P_v = P_s(T_r) \quad (\text{V.3})$$

On définit une autre grandeur caractéristique de l'air humide : c'est l'*humidité absolue* HA , définie comme étant la masse de vapeur d'eau contenue dans l'air par kg d'air sec :

$$HA = \frac{m_v}{m_{as}} \quad (V.4)$$

Où m_v et m_{as} sont les masses de vapeur d'eau et d'air sec contenues dans un même volume V d'air humide, $(1+x)$ kg d'air humide contient donc 1 kg d'air sec, et x kg de vapeur d'eau.

Considérons $(1+x)$ kg d'air humide d'humidité absolue HA , de température T et de pression partielle de vapeur d'eau P_v , la pression totale étant P et le volume occupé V . à partir des équations précédents et avec la loi des gaz parfait, et des hypothèse [7] on peut définir les relations suivantes :

$$, \quad \begin{cases} P_{as} = 1 \frac{R}{M_{as}} T \\ P_v = x \frac{R}{M_v} T \end{cases}$$

Avec :

- R : constante des gaz (J/kg.k).
- M : masse molaire.

Donc :

$$\begin{cases} \frac{M_v P_v}{x} = \frac{RT}{V} \\ M_{as} P_{as} = \frac{RT}{M_{as}} \end{cases}$$

Et

$$P_{as} = P - P_v \text{ (loi de DALTON[8]).}$$

Après substitution on obtient :

$$HA = \delta \frac{P_v}{P - P_v} \quad (V.5)$$

Avec :

$$\delta = \frac{M_v}{M_{as}} = 0.662.$$

Donc :

$$HA = 0.662 \frac{P_v}{P - P_v}$$

Et on obtient :

$$P_v = \frac{HA \times P}{0.622 + HA} \quad (V.6)$$

Passons maintenant au calcul de la densité de l'air humide, on a pour un mélange de gaz parfait la constante du mélange de l'air sec et de la vapeur d'eau, a pour expression :

$$R_{mél} = \frac{8314}{28.96 - 10.94 \frac{P_{vap}}{P}} \quad (V.7)$$

Connaissant $R_{mél}$, on peut écrire l'équation d'état de l'air humide :

$$\frac{P}{\rho} = \frac{8314T}{28.96 - 10.94 \frac{P_{vap}}{P}} \quad (V.8)$$

d'où

$$\rho = \frac{28.96P - 10.94P_v}{8314T} \quad (V.9)$$

Cette relation montre que la densité de l'air humide est d'autant plus petite que l'humidité est plus grande. L'air humide est donc plus léger que l'air sec.

On peut se référer au diagramme de Carrier (On trouvera en annexe (B)), qui construit à partir des relations précédentes, et sans effectuer aucun calcul, de déterminer la valeur de toutes les grandeurs caractérisant l'air humide.

Donc à partir de l'équation (V.9) on détermine la masse volumique de l'air humide, on a les données suivantes : HR= 60%, $P_1 = 101325 \text{ Pa}$,

➤ Cas où $T_1 = 2 \text{ °C} = 275.16 \text{ k}$.

de l'équation (V.2), on peut écrire

$$P_v = \text{HR} \times P_s(275.16)/100 .$$

et d'après annexe (A), $P_s(275.16) = \frac{(872.1 - 611.3) \times (2 - 0.01)}{5 - 0.01} + 611.3$

d'où : $P_s(275.16) = 715.306 \text{ Pa}$.

et de (V.2), on a :

$$P_v = 715,306 \times 0,6 = 429.18 \text{ Pa}.$$

finalement de (V.9) :

$$\rho = \frac{(28.96 \times 101325) - (10.94 \times 429.18)}{8314 \times 275.16}$$

d'où : $\rho = 1.2806 \text{ kg/m}^3$.

➤ Cas où $T_1 = 48 \text{ °C} = 321.16 \text{ k}$.

de l'équation (V.2), on peut écrire :

$$P_v = \text{HR} \times P_s(321.16)/100 .$$

et d'après annexe (A) :

$$P_s(321.16) = \frac{(12349 - 9593) \times (48 - 45)}{50 - 45} + 9593$$

d'où :

$$P_s(275.16) = 10144.2 \text{ Pa.}$$

et de (V.2), on a :

$$P_v = 10144.2 \times 0,6 = 6086.52 \text{ Pa.}$$

finalemt de (V.9) :

$$\rho = \frac{(28.96 \times 101325) - (10.94 \times 6086.52)}{8314 \times 321.16}$$

d'où :

$$\rho = 1.074 \text{ kg/m}^3.$$

donc finalemt pour les deux cas on a :

	T (k)	P (Pa)	ρ (kg/m ³)	C_p (kJ/kg.k)	K (w/m.k)	μ (N.s/m ²)
1 ^{er} cas	275.16	101325	1.2806	1.007	28.10^{-3}	$1.460.10^{-5}$
2 ^{eme} cas	321.16	101325	1.074	1.008	$24.3.10^{-3}$	$1.956.10^{-5}$

Exploitation des résultats :

Nous présentons dans ce qui va suivre, les résultats obtenus après exécution du code de calcul, le programme donne un ensemble de schémas de simulation, nous ne donnerons que quelques résultats pour les deux cas de calcul :

VI.1. Résultats de 1^{er} cas :

	T (k)	P (Pa)	ρ (kg/m ³)	C_p (kJ/kg.k)	K (w/m.k)	μ (N.s/m ²)
1 ^{er} cas	275.16	101325	1.2806	1.007	28.10^{-3}	$1.460.10^{-5}$

➤ distribution de la pression :

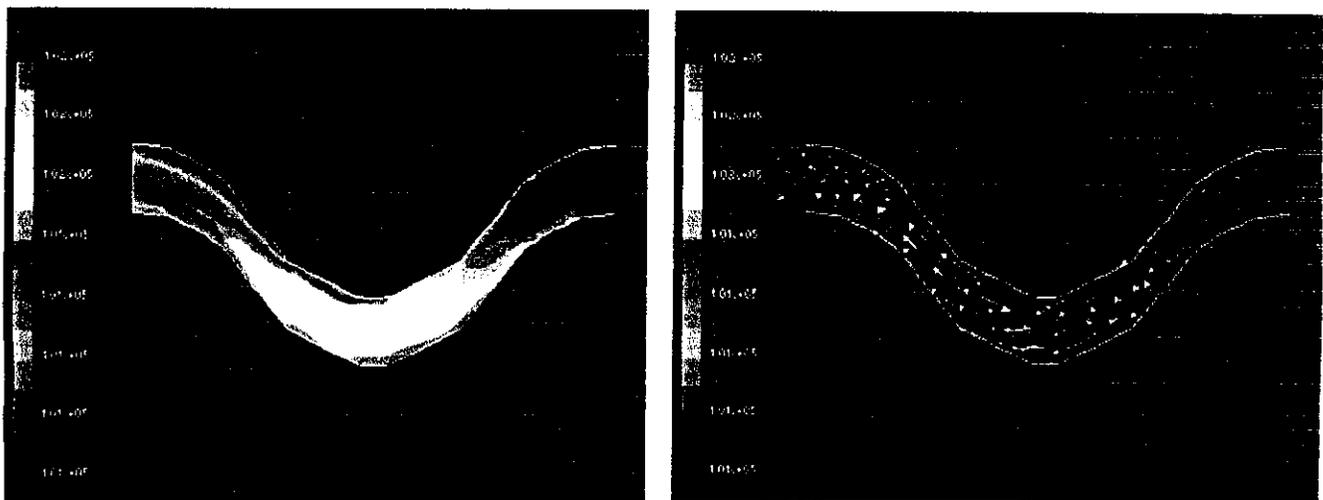


Figure (VI.1) : présente la distribution de la pression dans la conduite pour le 1^{er} cas.

La figure (VI.1) nous montre, à gauche la distribution de la pression, et à droite le champ de vecteur de vitesse de la pression. On voit bien que la pression a augmentée entre l'entrée et la sortie de la conduite.

➤ **distribution de la vitesse dans la conduite:**

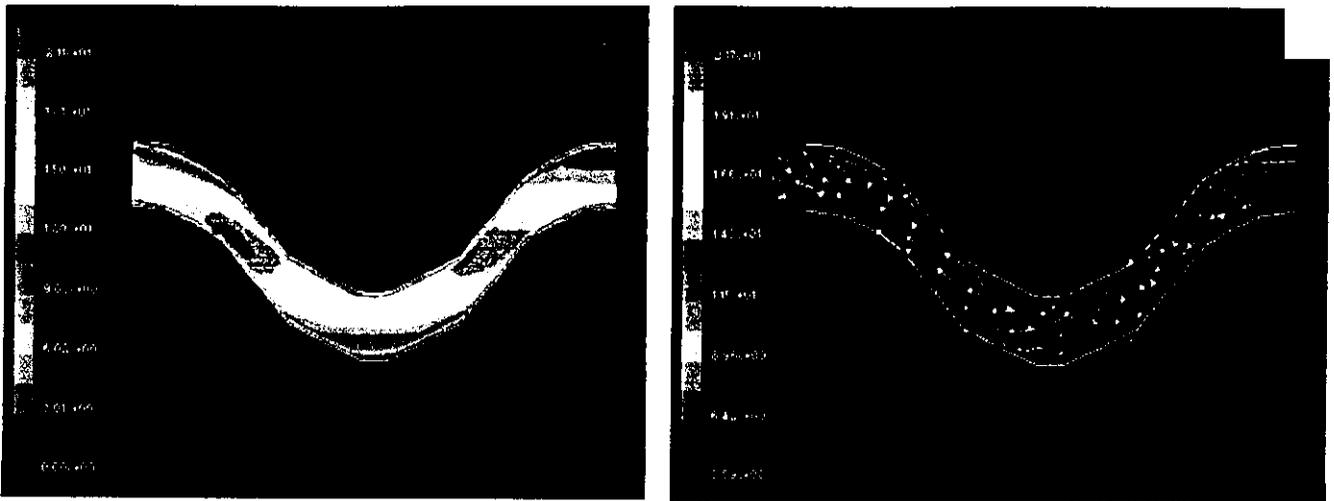


Figure (VI.2) : présente la distribution de la vitesse dans la conduite pour 1^{er} cas.

La distribution de la vitesse est donnée par la figure(VI.2) à gauche, et à droite le champ de vecteur de vitesse, on remarque que la vitesse est maximale au niveau du convergent, minimale au niveau du divergent, et nulle au contact de la paroi.

➤ **L'évolution de l'enthalpie dans la conduite:**

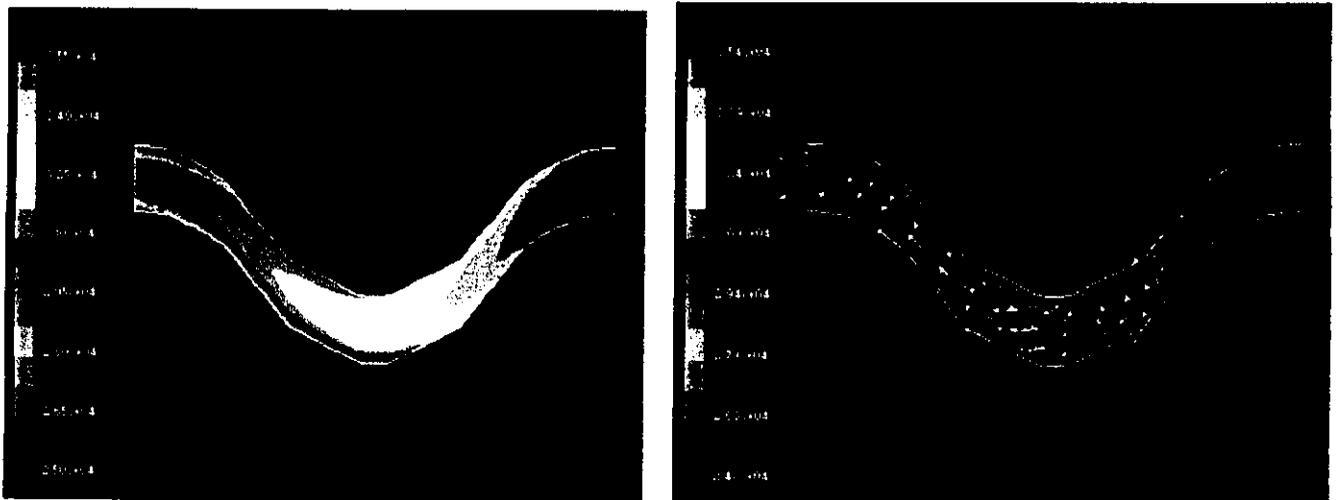


Figure (VI.3) : présente la distribution de l'enthalpie dans la conduite pour le 1^{er} cas.

L'évolution de l'enthalpie est présentée par la figure (VI.3) à gauche, et à droite le champ de vecteur de vitesse de l'enthalpie. La figure montre la distribution de l'enthalpie dans la conduite, on voit que les valeurs de l'enthalpie croient, en se dirigeant vers la sortie de la conduite.

VI.1. Résultats de 2^{ème} cas :

	T (k)	P (Pa)	ρ (kg/m ³)	C_p (kJ/kg.k)	K (w/m.k)	μ (N.s/m ²)
2 ^{ème} cas	321.16	101325	1.074	1.008	$24.3.10^{-3}$	$1.956.10^{-5}$

Dans ce cas, on constate que on a obtenu les mêmes distributions des différents paramètres.

➤ distribution de la pression :

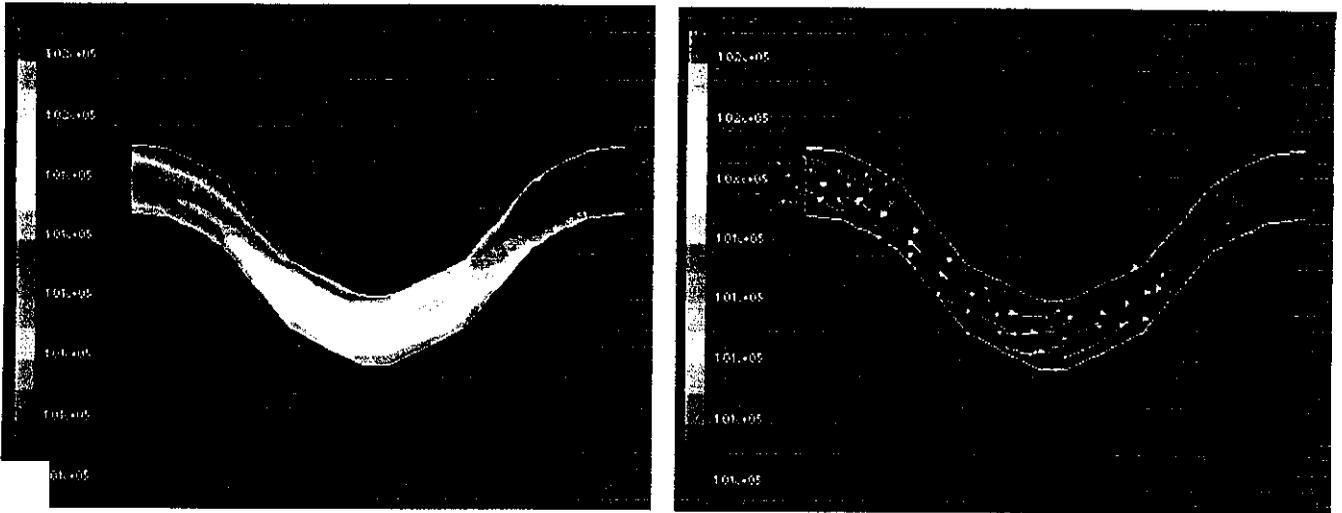


Figure (VI.4) : présente la distribution de la pression dans la conduite pour le 2^{ème} cas.

➤ distribution de la vitesse dans la conduite:

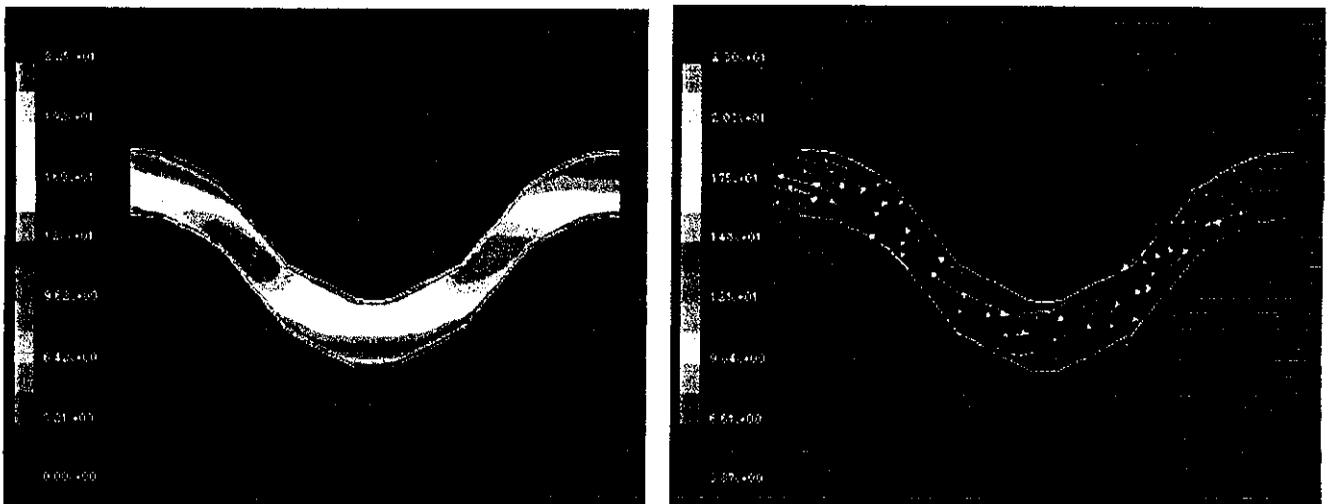


Figure (VI.5) : présente la distribution de la vitesse dans la conduite pour le 2^{ème} cas.

➤ L'évolution de l'enthalpie dans la conduite:

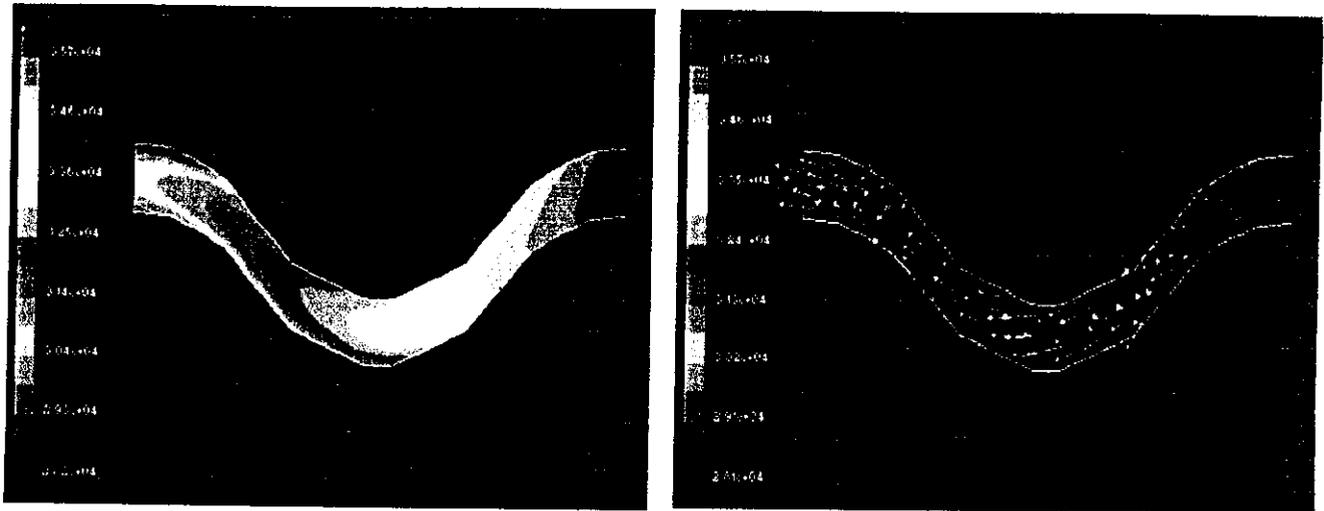


Figure (VI.6) : présente la distribution de l'enthalpie dans la conduite pour le 2^{ème} cas.

VI.3. Interprétation :

Les résultats des figures : (VI.1), (VI.2), (VI.3), (VI.4), (VI.5), (VI.6), montrent que les profils de vitesse sont parallèles au profil de la géométrie de la conduite à cause de la faible valeur du nombre de Reynolds (écoulement laminaire).

Nous constatons grâce aux figures (VI.3) et (VI.6), que l'évolution de l'enthalpie a augmenté, d'où une augmentation du gradient de température, ce qui implique le réchauffement de la vapeur d'eau dans l'air, et par conséquent la diminution de l'humidité relative, ce diminue sensiblement l'apparition de la condensation.

Conclusion Générale

Un écoulement de fluide décrit par les équations de Navier-Stokes, dans un cas général est très difficile, voir impossible, à résoudre directement analytiquement.

L'approche expérimentale en dimension réelle, en milieu industriel nécessite des moyens importants, et ne peuvent ne pas être faisable en raison de l'encombrement

La simulation numérique directe est une approche déterministe, qui consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes sur tout le domaine considéré. La limitation de ce type d'approche est due à la grande disparité dans les échelles de temps. La capacité des ordinateurs ne permet pas l'utilisation de la simulation numérique directe pour les calculs d'écoulements : les équations de Navier-Stokes nécessitent un temps de calcul et une taille de mémoire excessif, et n'est pas possible que dans des cas simples, c'est pour cette raison qu'on a simplifié le modèle du problème étudié.

Nous avons pu présenter les évolutions de l'enthalpie sur une géométrie approchée de la géométrie réelle. Il est vrai que les valeurs de l'enthalpie obtenues sont relativement élevées.

Les résultats obtenus dans notre étude montrent la bonne performance du panneau de système de filtration auto-nettoyant, ce qui va permettre d'augmenter la durée de vie des pièces mécaniques du système considérée à travers les meilleurs performances du groupe turbo-réacteur.

Bibliographie

- [1] **Rapport de stage**, « mise en situation professionnelle»,
SONATRACH.D.R.HASSI RMEL, Mahfoud Rechoum, juin 2004.
 - [2] **Nathalie Buil**, «Modélisation tridimensionnelle du transport de polluants dans les écoulements à surface libre», Université de Claude Bernard-Lyon1, 1992.
 - [3] **Schlichting H**,«Boundary-layer theory»,-7th ed- McGraw-hill -New York-
1992.
 - [4] **Pierre Antoine Rainville**, «Introduction à la simulation numérique d'un milieu fluide », cour de l'école des mines de nancy. France, 2001.
- [5] **Patankar S.V**, «Numerical heat transfer and fluid flow», Hemisphere Publishing Corporation, Taylor and Francis Group, New York, 1980.
- [6] **H.K. Versteeg & W. Malalasekera**, « an introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method», British Library Cataloguing in publication data, Malaysia, 1995.
 - [7] **V.Kirilin, V.Sytchev, A. Sheindlin** «Thermodynamique Technique», Edition Mir, Moscow, 1976.
 - [8] **Gordon J.Van Wylen, Richard E.Sonntag**, «thermodynamique appliquée», Edition du Renouveau Pédagogique Inc, Ottawa, Canada, 1981.
 - [9] **Jacques P.PADET**, « Fluides en écoulement », Edition MASSON, Paris, 1991.
 - [10] **INGE L.Ryhming**, « Dynamique des fluides », presses polytechniques Romandes, Lausanne 1985.

ANNEXE (A)

Variables thermodynamique de la vapeur d'eau :

	Absolute	Gauge	Specific	Heat	Heat	Latent
	Pressure	Pressure	Volume	Content	Content	Heat of
Temp	Pressure	Pressure	of Vapor	of Vapor	of Liquid	Vaporization
(C)	(MPa)	(MPa)	(m ³ /kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)	(kJ/kg)
17.495	0.002	-0.099	66.987	2532.9	73.428	2459.47
24.079	0.003	-0.098	45.653	2544.8	100.98	2443.82
28.960	0.004	-0.097	34.791	2553.7	121.39	2432.31
32.874	0.005	-0.096	28.185	2560.7	137.75	2422.95
36.159	0.006	-0.095	23.733	2566.6	151.48	2415.12
39.000	0.007	-0.094	20.524	2571.7	163.35	2408.35
41.509	0.008	-0.093	18.099	2576.2	173.84	2402.36
43.761	0.009	-0.092	16.199	2580.2	183.25	2396.95
45.806	0.01	-0.09	14.67	2583.9	191.81	2392.09
60.058	0.02	-0.08	7.648	2608.9	251.42	2357.48
69.095	0.03	-0.07	5.2284	2624.5	289.27	2335.23
75.857	0.04	-0.06	3.993	2636.1	317.62	2318.48
81.317	0.05	-0.05	3.24	2645.2	340.54	2304.66
85.926	0.06	-0.04	2.7317	2652.9	359.91	2292.99
89.932	0.07	-0.03	2.3648	2659.4	376.75	2282.65
93.486	0.08	-0.02	2.0871	2665.2	391.71	2273.49
96.687	0.09	-0.01	1.8694	2670.3	405.2	2265.10
99.606	0.1	0.00	1.6939	2674.9	417.5	2257.40
120.21	0.2	0.1	0.88568	2706.2	504.70	2201.50
143.61	0.4	0.3	0.46238	2738.1	604.65	2133.45
158.83	0.6	0.5	0.31558	2756.1	670.38	2085.72
170.41	0.8	0.7	0.24034	2768.3	720.86	2047.44

Diagramme de l'air humide :

