

15/03

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

Projet de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en génie mécanique

Thème :

**ETUDE DES TRANSFERTS
DE CHALEUR
DES CABLES ELECTRIQUES
SOUTERRAINS**

Proposé Par :

Mr H.BELHANECHÉ
Mr S.LARBI

Etudié par :

Mr MOKDAD Abdelmoumene

Dirigé par :

Mr H.BELHANECHÉ
Mr S.LARBI

Promotion
- Septembre 2003 -



E.N.P 10, Avenue Hassen Badi – El Harrach – Alger



Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

*A ma Mère, A mon Père , A mes frères Mehdi , Sofiane
et Tarik*

Et à ceux que j'aime le plus !!

Moumene.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Dieu pour la volonté et le courage qu'il m'a donnés pour l'achèvement de ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes promoteurs Mr. H. BELHANECHÉ et Mr. S. LARBI pour leurs encouragements, leurs suivi, et pour leurs conseils qui ont aidé à l'achèvement de ce projet.

Je tiens également à remercier messieurs les membres de jury pour avoir accepté d'examiner ce travail, ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation, sans oublier tout le personnel de la bibliothèque.

Mes remerciements vont également à mes camarades et amis de la promotion.

ملخص :

إن العمل المقدم في هذه الأطروحة يخص دراسة مظاهر تفاعل بين انسياب هوائي خارجي ووسط مسامي مع مصدر حراري الذي هو الخيط الكهربائي. أخذنا بعين الاعتبار التفاعل بين الوسيطين بواسطة نموذج حسابي إن النتائج المحصل عليها تهم تحديد الحقول الحرارية ودرجة الحرارة السطحية.
كلمات مفتاحية : وسط مسامي - انسياب خارجي - خيط كهربائي مغموس في الأرض.

RESUME :

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude des effets d'interaction entre un écoulement d'air externe et un milieu poreux avec une source de chaleur qui est le câble électrique. Nous avons pris en compte l'effet d'interaction entre les deux milieux par le biais d'interaction d'un code de calcul. Les résultats obtenus sont relatifs à la détermination des champs thermiques, et les températures superficielles.

Mots clés : Milieu poreux – Ecoulement externe – câbles isolés souterrains

ABSTRACT :

The work presented in this report concerns the study of effects of interaction between a drainage of external air (sight) and a parous environment (middle) with a source of heat which is electric cable. We took into account the effect of interaction between the two circles by means of interaction of a code of calculation. Obtained results are relative to the determination of the thermic fields, and the superficial temperatures.

Keywords : parous environment (middle) – external Drainage – subterranean electric cables

SOMMAIRE



INTRODUCTION GENERALES	1
CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES CABLES ELECTRIQUES SOUTERRAINS	
I.1 Rôle d'une ligne électrique	3
I.2 Définition d'une ligne électrique	3
I.3 Différents types de câbles souterrains	3
I.3.1 Câble à isolation synthétique	3
I.3.2 Câble à isolation gazeuse	5
I.4 Condition de pose	5
I.5 Mise en place des câbles	7
I.6 Déroulage à l'aide à la main	7
I.6.1 Déroulage à l'aide de chenille	8
I.6.2 Pose à la charrue	8
I.7 Avantages des lignes souterraines	10
I.8 Inconvénients des lignes souterraines.....	10
CHAPITRE II : EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES	
II.1 ETABLISSEMENT DES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES	11
II.1.1 Equation de continuité	11
II.1.2 Equations de Navier et Stokes	12
II.1.3 Equation de conservation de l'énergie	15
II.1.4 Forme adimensionnelle des équations	20
II.2 EQUATIONS DES COUCHES LIMITES	21
II.2.1 Couche limite dynamique	21
II.2.2 Couche limite thermique	23
CHAPITRE III : MODELISATION MATHEMATIQUE ET CONDITIONS AUX FRONTIERES	
III.1 MODELISATION COTE ECOULEMENT EXTERNE	25
III.1.1 Couche limite dynamique	25

NOMENCLATURE

- C_p : Capacité calorifique à pression constante [kJ/kg K]
 e : Energie interne par unité de masse [kJ/kg]
 F : Force [N]
 g : Accélération de la présenter [m/s²]
 h_c : Coefficient d'échange convectif [W/m² K]
 h_{emp} : Coefficient d'échange convectif empirique [W/m² K]
 h_{moy} : Coefficient d'échange convectif moyen [W/m² K]
 h : Enthalpie par unité de masse [kJ/kg]
 I : intensité de courant du câble [A]
 L : Une longueur caractéristique de la plaque [cm]
 m : Débit massique [kg/s]
 m : Nombre de nœuds du milieu poreux suivant y
 n : Nombre de nœuds du milieu poreux suivant x
 N_x : Nombre de nœuds du milieu extérieur suivant x
 N_y : Nombre de nœuds du milieu extérieur suivant y
 P : puissance du câble [W]
 p : Pression [N/m²]
 q : Densité de flux de chaleur [W/m²]
 R : résistance du câble [Ω]
 T : Température [°C]
 T_{ex} : Température du fluide extérieur [°C]
 T_{MP} : Température du milieu poreux [°C]
 T_p : Température à la paroi [°C]
 T_u : Température unidimensionnelle du milieu poreux [°C]
 T_{∞} : Température du fluide loin de la plaque [°C]
 t : Temps [s]
 u, v, w : Composante du vecteur vitesse [m/s]
 U_{∞} : Vitesse de l'écoulement loin de la plaque [m/s]
 x, y, z : Dimension d'espace [cm]



Symbole grec

- α : Diffusivité thermique du milieu poreux [m^2/s]
 δ : Epaisseur de la couche limite dynamique [cm]
 δ_T : Epaisseur de la couche limite thermique [cm]
 μ : Viscosité dynamique [kg/m.s]
 ν : Viscosité cinématique [cm^2/s]
 λ : Conductivité thermique [W/m K]
 λ_{ex} : Conductivité thermique du fluide extérieur [W/m K]
 λ_{MP} : Conductivité thermique du milieu poreux, W/m K
 ρ : Masse volumique [kg/m^3]
 Δ : Pas de discrétisation
 ∇ : Opérateur de dérivation
 σ_{ij} : Tenseurs des contraintes
 δ_{ij} : Tenseur de Kronecker

Indice et exposant

- ex : Extérieur
 c : Convectif
 i, j, k : Des nœuds correspondants respectivement à x, y, t
 MP : Milieu poreux
 p : Paroi
 u : Unidimensionnelle
 0 : Valeur initiale
 * : Grandeur adimensionnelle
 ∞ : Grandeur loin de la plaque

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE



Aujourd'hui deux techniques permettent d'assurer le transport d'énergie entre les centrales de production d'électricité et les centres de consommation : les lignes aériennes et les câbles isolés souterrains [1].

Les **lignes aériennes**, en hautes et très hautes tensions, en raison de leur plus faible coût (rapport de 3 à 5 en haute tension HT et de 10 à 20 en très haute tension THT), sont utilisées d'une manière préférentielle [1].

Les **câbles isolés** souterrains sont principalement employés, au moins jusqu'à présent, pour le transport et la distribution de l'énergie électrique dans les zones fortement urbanisées aux abords de l'intérieur des grandes villes, parfois pour résoudre des problèmes locaux particuliers, techniques ou d'environnement, pour lesquels la mise en œuvre de ligne aérienne est difficile ou strictement impossible. Toutefois, les câbles souterrains sont de plus en plus utilisés en moyenne tension HT, même en zone rurale ou semi rurale. De plus, des projets récents en HT faciliteront la mise en souterrains dans un avenir proche [1].

Au cours de ces dernières années, l'importance de recourir à l'enfouissement des câbles électriques (c'est à dire le passage des lignes aériennes aux câbles isolés souterrains) a été justifié par l'influence des événements climatiques des dernières années (pluie, foudre, graine etc...) sur la régularité de la distribution d'électricité, la protection de l'environnement et l'esthétique, les effets nuisibles sur la santé des ondes électromagnétiques induites par les câbles électriques aériens.

Compte tenu de l'importance de tels phénomènes, la solution qui peut être envisagée est celle des câbles enterrés. Néanmoins, de nombreux problèmes peuvent être posés tels que : l'usure du revêtement isolant suite à des processus physico-chimiques et notamment l'élévation de la température du câble. Sur la base de ces considérations, nous avons mené une étude sur l'influence de la profondeur d'enterrement et la puissance dissipée par effet joule sur la température superficielle du câble électrique dans le but d'apporter une réponse à ce type de phénomènes.

Le but de notre travail est d'étudier l'évolution spatio-temporelle des paramètres d'écoulement et les champs de températures dans le milieu poreux constitué par le sol et l'écoulement externe pour différentes profondeurs et différentes puissances du câble électrique souterrain.

Le travail présenté dans ce mémoire est divisé en cinq chapitres :

- Le premier chapitre porte sur les différents types de câbles électriques souterrains existants, les différentes techniques de leurs mises en place, leurs avantages et leurs inconvénients ;

- Le deuxième chapitre est consacré à l'établissement des équations des couches limites dynamique et thermique à partir des équations fondamentales de la mécanique des fluides :
- Le troisième chapitre traite la modélisation mathématique du transfert de chaleur entre un milieu poreux et un écoulement d'air ;
- Le quatrième chapitre porte sur la résolution numérique des équations aux dérivées partielles données par la modélisation ;
- Le cinquième chapitre est relatif à la présentation des résultats ainsi qu'à leur interprétation

Enfin nous terminerons ce travail par une conclusion générale.

CHAPITRE I :

**GENERALITE SUR LES
CABLES ELECTRIQUES
SOUTERRAINS**

Dans ce chapitre , nous présentons les différents types de câbles souterrains existants , les techniques de mises en place , leurs avantages et leurs inconvénients.

I.1 Role des lignes électriques :

Le transport de l'énergie électrique du producteur (centrale électrique) au consommateur (ville, quartier, maison, ensemble industriel) se fait à l'aide des lignes électriques, qui constituent les artères d'un système d'énergie électrique [1].

I.2 Définition des lignes électriques :

Une ligne électrique est un ensemble de conducteurs, isolants et d'éléments d'accessoires destinés au transport de l'énergie électrique.

Les conducteurs sont en général en aluminium, en cuivre et en bronze. Les isolants ont une partie solide (porcelaine, verre, papier, matière plastique) combinées avec un gaz (air, sf₆) ou un liquide (huile) [1].

Types de lignes :

Les lignes électriques peuvent être classés suivant plusieurs critères [1]:

- Situation dans l'espace : lignes aériennes, lignes souterraines (câble) ;
- Classe de tension : lignes a basse tension (inférieur à 1 KV) et lignes à haute tension (supérieur à 1KV) ;
- Nature de la tension : continue, alternative monophasée ou triphasée.

I.3 Différents types de câbles souterrains :

Il s'agit des câbles à isolations synthétiques (LIS ou XPLE) , et des câbles à isolations gazeuses (LIG ou CIG) [1].

I.3.1.Cable à isolation synthétique :

Tous les câbles a isolations synthétiques comportent au moins [1] :

- Une âme : elle assure le transit du courant , elle est en cuivre ou en aluminium ;
- Un écran semi-conducteur interne (sur âme) : il permet de lisser le champ électrique , le matériau de base est le polyéthylène ;

- Une enveloppe isolante entre les semi-conducteurs : elle permet d'isoler l'âme , le matériau de base est le polyéthylène ;
- Un écran semi-conducteur externe ;
- Un écran métallique : il contribue au confinement du champ électrique , assure la circulation des courants de court circuit et empêche l'eau d'atteindre la couche isolante . Selon sa nature il joue également le rôle de protection mécanique du câble . Il peut être en alliage de plomb ou d'aluminium ;
- Une gaine extérieure : elle permet d'assurer la protection mécanique du câble et isole également l'écran de la terre (protection des tiers) . Elle comporte obligatoirement un marquage permettant d'identifier le câble . Elle peut être en polychlorure de vinyle (PVC) ou en polyéthylène (PE) ;

Le diamètre d'un câble est de l'ordre de 80 à 140 mm suivant la section de l'âme et de l'épaisseur d'isolant , qui dépend du niveau de tension . Les longueurs élémentaires sont de l'ordre de 500 à 1000 m [1] .

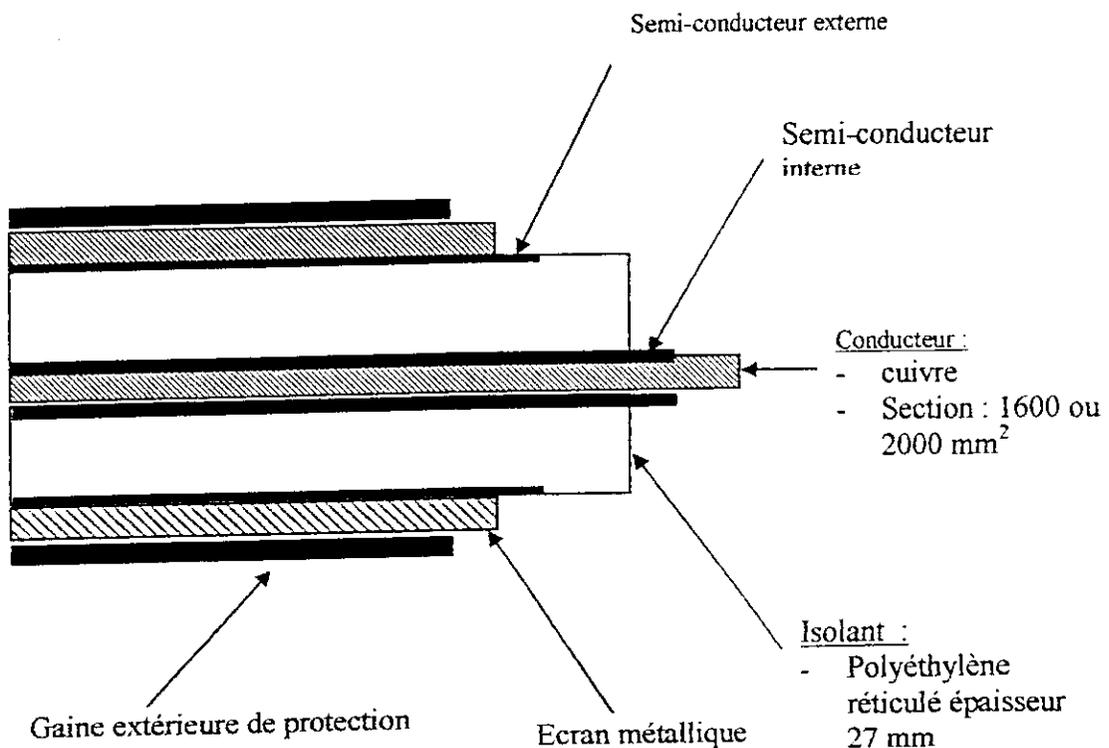


Figure I-1. coupe d'un câble à isolation synthétique

I.3.2. Câble à isolation gazeuse :

Les câbles à isolation gazeuse (LIG ou CIG) sont constitués de tubes métalliques contenant un ou plusieurs conducteurs . Ces câbles ont une isolation électrique assurée par un gaz sous pression de 8 à 15 bars . Le meilleur gaz isolant est un mélange de base d'azote ($N_2 - SF_6$) , qui permet d'éliminer l'inconvénient majeur de l'hexafluorure de soufre (SF_6) d'être un gaz à effet de serre [1] .

Les câbles a isolation gazeuses (LIG ou CIG) comportent :

- Un conducteur en aluminium supporté par des isolateurs ;
- Un gaz isolant sous pression ;
- Une enveloppe extérieure en aluminium ;
- Un revêtement anti-corrosion ;

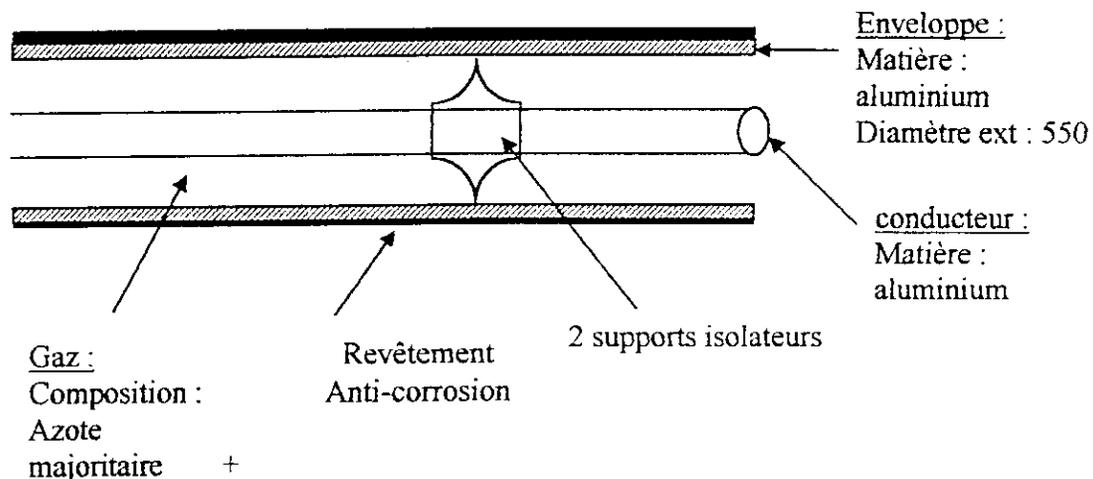


Figure I-2. câble à isolation gazeuse

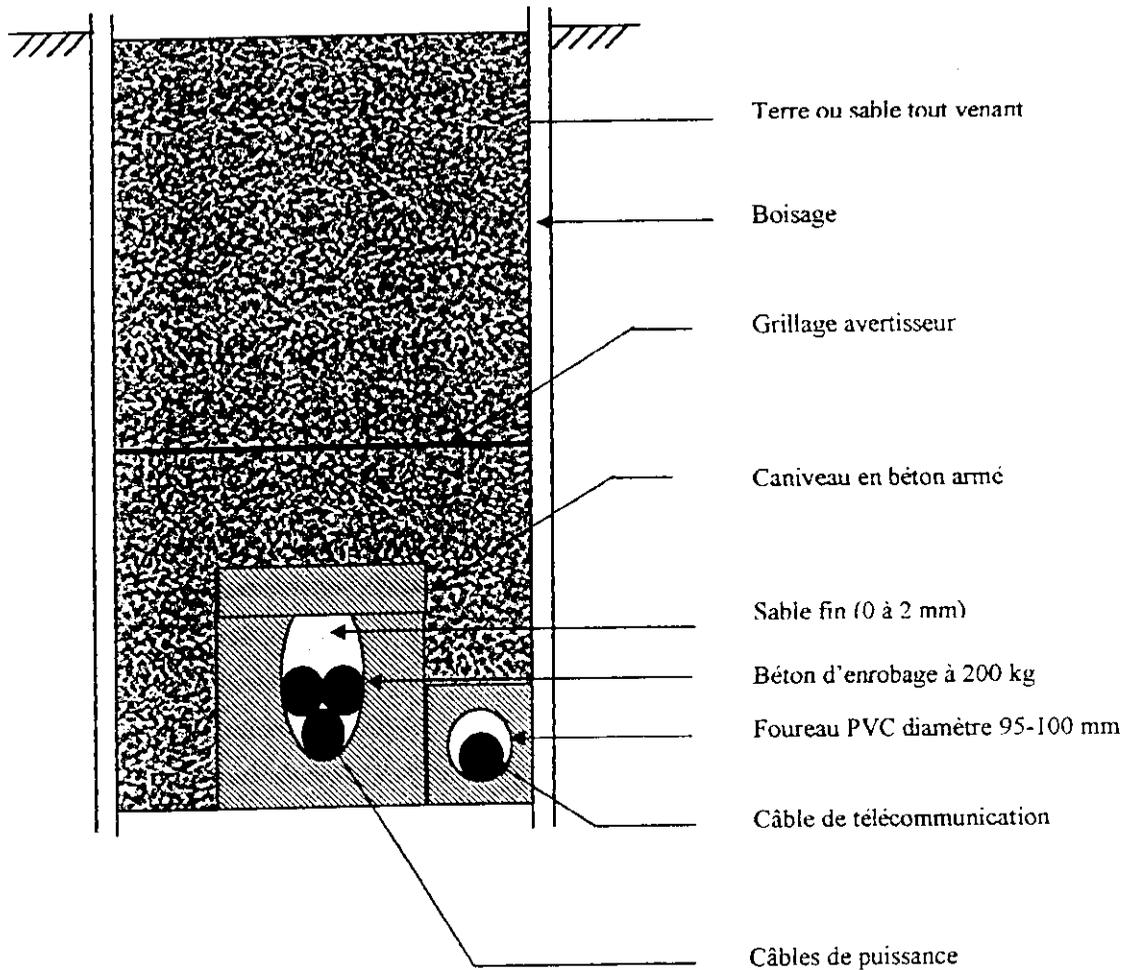
I.4. Condition de pose :

Les conditions de pose des câbles en pleine terre et les règles de voisinage avec les autres occupants du sous-sol doivent satisfaire aux règles d'arrêté interministériel , dit Arrêté technique . En outre , divers documents et règlements viennent compléter les dispositions générales de l'Arrêté technique.

Un câble ne peut être enterré directement que s'il est capable de supporter le tassement des terres , en pratique , le câble comporte alors soit une armure , soit une gaine extérieure renforcée. Dans le cas contraire , une protection mécanique doit lui être associée , par

exemple le câble peut être mis en caniveau ou en fourreau ou bien recouvert de dalles en béton.

Dans tous les cas ,la législation impose la présence au-dessus de tout câble d'un dispositif de signalisation , appelé communément grillage avertisseur , destiné à signaler la présence de câbles sous-jacents lors de travaux ultérieurs [1].



FigureI-3. Pose des câbles en caniveau

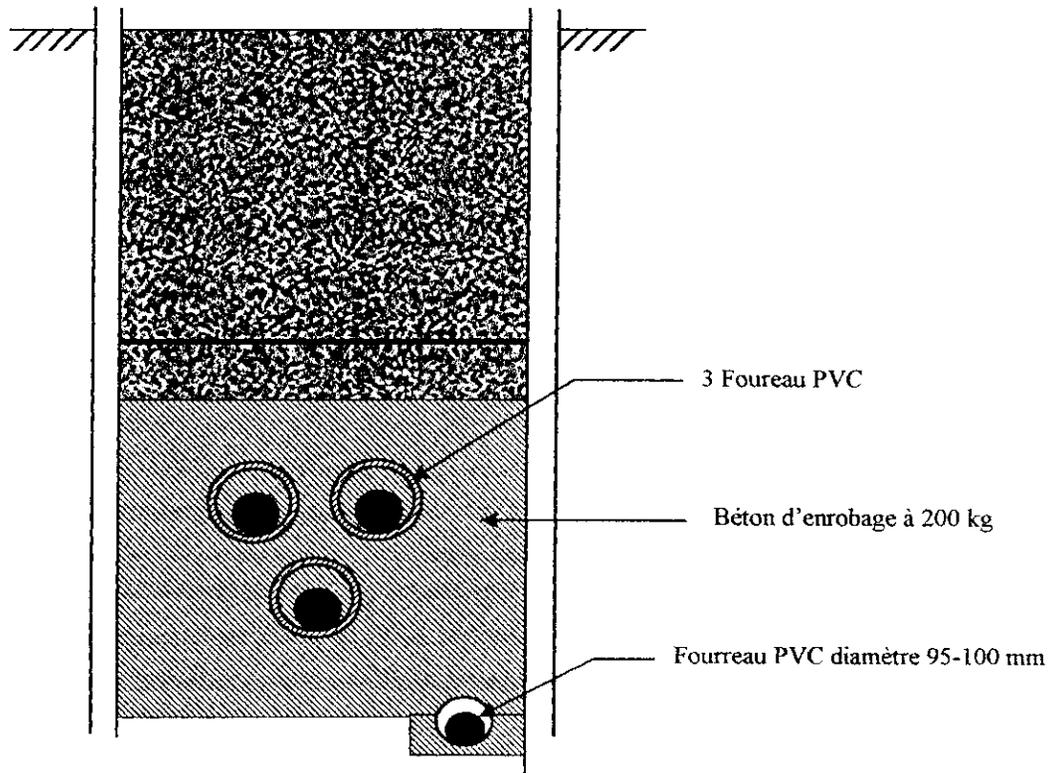


Figure I-4. Pose des câbles en fourreau

I.5. Mise en place des câbles :

Les méthodes de déroulage dépendent du type de câble , du tracé de la liaison , de l'encombremnt du sous-sol [1].

I.6.1. Déroulage à la main :

Cette méthode. Qui a eu droit de cité jusque vers 1965, n'est plus guère utilisée que pour les courtes longueurs et les passages difficiles. Le tirage s'effectue à vitesse régulière pour éviter les vibrations et les chocs du câble.

VI.1.2 Déroulage a l'aide de chenille de tirage :

le parcours du câble étant préalablement équipé de galets, on dispose a intervalles réguliers de petites machines munies de rouleaux ou de courroies de caoutchouc, pressés contre la gaine de câbles, et commandées mécaniquement ou électriquement de manière synchrone depuis un poste central. On utilise ce déroulage essentiellement pour la pose en caniveau [1].

VI.1.3 pose la trancheuse où a la charrue :

Depuis une dizaine d'année, on installe des câbles de distribution en milieu suburbain ou rural, C'est -à- dire en sous-sol peu encombré, voire vierge. Dans ce cas, on ne réalise plus de tranche, mais une saigne de faible largeur. Cela permet une diminution du volume des déblais, donc du coût du génie civil.

Cette méthode est habituellement utilisée pour la pose de grandes logeurs (au moins plusieurs kilomètres) et permet des vitesses de chantier élevées (pour la moyenne tension 200 a 300m/h) [1].

On distingue trois catégories principales d'engins :

- **Les trancheuses a chaîne :** la tranchée est ouverte par l'intermédiaire d'une chaîne sans fin munie de couteaux ou de pics en carbure de tungstène ,selon la durée des terrains ;la largeur de fouille peut varier de 15 a 60 cm , et la profondeur peut atteindre 2 m (Figure I-5);

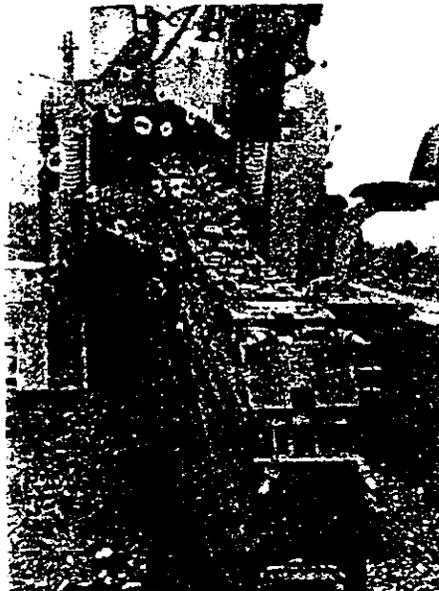


figure I-5. trancheuses à chaîne

- **Les tronçonneuses :** il s'agit de trancheuse a roue, fonctionnant a la manière d'une scie circulaire (Figure I-6) .la roue est équipée de pics et convient surtout pour les terrains dur ; la largeur de tranchée est comprise entre 6 et 30 cm ; lorsque la roue est munie d'un entraînement tangentiel, la profondeur peut atteindre 1.4m.



figure I-6. tronçonneuse

- **Les charrues fileuse :** ces machines permettent de placer le câble directement dans le sol , sans enlèvement de terre , a l'aide d'un soc muni d'une goulotte dans laquelle passe le câble (figure I-7) , le sol se referme derrière la goulotte , ne laissant qu'une légère saillie , ces machines ne sont utilisables que dans les terrains très meubles , la profondeur de pose peut atteindre 1m .



figure I-7. charrues fileuse

I.7 Avantages des lignes souterraines :

- Impact limité sur le paysage (postes d'extrémité) ;
- Champs électromagnétiques plus faibles;
- Protection par rapport aux perturbations atmosphériques ;

La solution GIL présente en outre les atouts suivants par rapport aux câbles:

- Capacité de transport importante et faible échauffement;
- Pertes électriques insignifiantes;
- Comportement en exploitation proche de celui d'une ligne aérienne ;

I.8 Inconvénients des lignes souterraines :

- Solution onéreuse (10-20 fois plus chère qu'une ligne aérienne);
- Réparations longues et délicates;
- Postes de transition aéro-souterrains aux deux extrémités;
- Pour la solution GIL, système de surveillance pointu, notamment de l'étanchéité, nécessitant un contrôle régulier;
- Pour les câbles à isolation synthétique: refroidissement nécessaire; faible résistance aux surtensions ;
- isolation des câbles ;
- échauffement ;
- l'enfouissement des lignes électriques présente des problèmes techniques spécifiques d'autant plus difficiles à résoudre que la tension est élevée , son coût évolue dans le même sens.

CHAPITRE II :

**EQUATIONS
FONDAMENTALES
DE LA MECANIQUE
DES FLUIDES**

Dans ce chapitre, nous présentons les équations fondamentales de la mécanique des fluides en insistant sur celles des couches limites dynamique et thermique .

En premier lieu, nous établirons ces équations pour le cas général que nous expliquerons par la suite pour le cas qui nous intéresse c'est à dire le cas d'un écoulement bidimensionnel.

II.1 ETABLISSEMENT DES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES :

Dans ce paragraphe, nous allons considérer le mouvement d'un fluide Newtonien dans le cas d'un écoulement tridimensionnel.

II.1.1 EQUATION DE CONTINUTE :

Considérons un élément fluide de dimensions infinitésimales dx, dy, dz (Figure II-1) : faisons un bilan de masse autour de cet élément (sans génération de masse).

On aura :

$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = \dot{m}_{acc}$$

avec : \dot{m}_e : débit massique entrant ;

\dot{m}_s : débit massique sortant ;

\dot{m}_{acc} : débit massique accumulé.

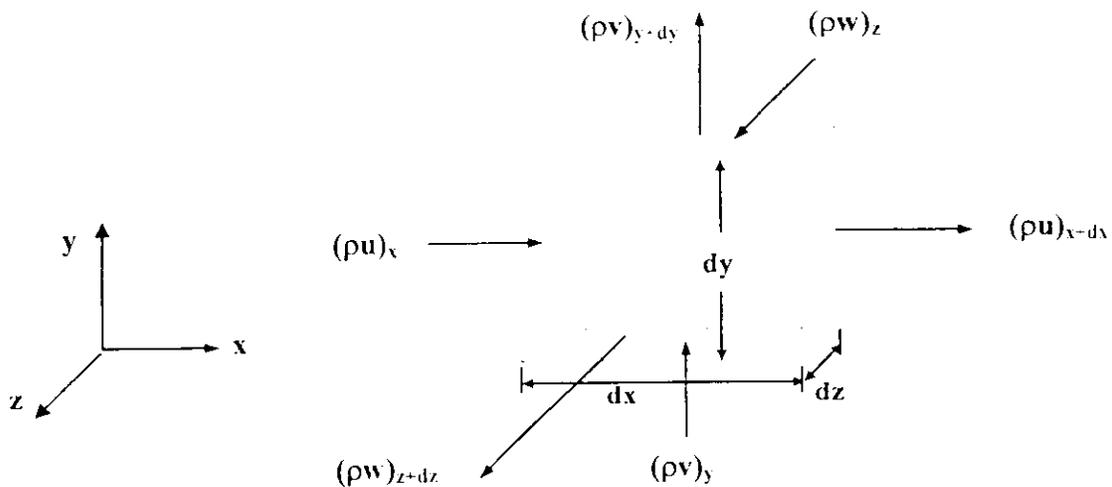


Figure II-1. Elément fluide de dimension dx, dy, dz

alors :

$$[(\rho u)_x - (\rho u)_{x+dx}] dydz + [(\rho v)_y - (\rho v)_{y+dy}] dx dz + [(\rho w)_z - (\rho w)_{z+dz}] dx dy = dx dy dz \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En faisant un développement limité d'ordre 1, on obtient :

$$\begin{cases} (\rho u)_{x+dx} = (\rho u)_x + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \\ (\rho v)_{y+dy} = (\rho v)_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \\ (\rho w)_{z+dz} = (\rho w)_z + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \end{cases}$$

Donc, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Sous forme vectorielle, elle s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Dans le cas d'un système en coordonnées cartésiennes, pour un fluide incompressible ($\rho = \text{cst}$),

l'équation de continuité se réduit à :

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.2})$$

II.1.2 EQUATIONS DE NAVIER ET STOKES :

Les équations de Naviers et Stokes expriment la conservation de la quantité de mouvement pour un fluide Newtonien, elles sont déduites de la seconde loi de Newton qui stipule que la somme des forces extérieures est égale à l'accélération multipliée par la masse.

Dans le cas du mouvement d'un fluide, on doit considérer les deux types de forces : les forces volumiques et les forces surfaciques.

Considérons un élément de fluide de dimensions infinitésimales dx, dy, dz ayant une accélération : $\vec{\gamma} = \frac{D\vec{V}}{Dt}$. Les forces agissant sur cet élément sont les forces volumiques (dus essentiellement à l'effet de la pesanteur) et les forces surfaciques (dus aux contraintes) [2].

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_s \quad \text{où : } \vec{F}_s = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \text{ : représente les forces surfaciques ;}$$

$$\vec{F}_v = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{g} \text{ : représente les forces volumiques.}$$

Appliquons la deuxième loi de Newton à cet élément de volume :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_s = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (\text{II.3})$$

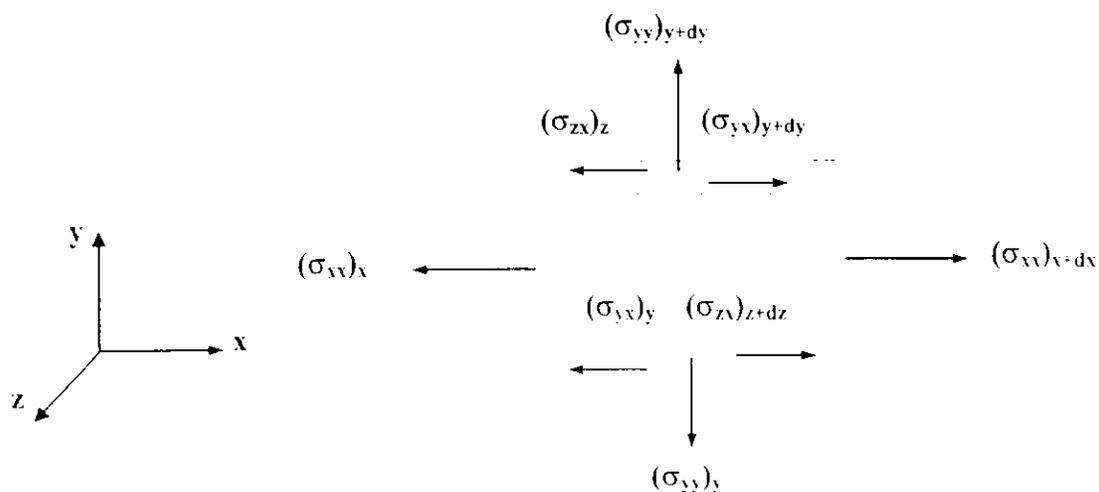


Figure II-2. Forces surfaciques agissant sur un élément fluide

Essayons maintenant de déterminer les forces surfaciques qui agissent sur un élément fluide de dimensions infinitésimales dx, dy, dz (Figure II-2).

Considérons les contraintes qui agissent dans chaque direction :

- Suivant Ox :

$$[(\sigma_{xx})_{x+dx} - (\sigma_{xx})_x] dy dz + [(\sigma_{yx})_{y+dy} - (\sigma_{yx})_y] dx dz + [(\sigma_{zx})_{z+dz} - (\sigma_{zx})_z] dx dy \quad (\text{II.3.a})$$

- Suivant Oy :

$$\left[(\sigma_{xx})_{x+dx} - (\sigma_{xx})_x \right] dydz + \left[(\sigma_{yy})_{y+dy} - (\sigma_{yy})_y \right] dx dz + \left[(\sigma_{zz})_{z+dz} - (\sigma_{zz})_z \right] dx dy \quad (II.3.b)$$

• **Suivant Oz :**

$$\left[(\sigma_{xz})_{x+dx} - (\sigma_{xz})_x \right] dydz + \left[(\sigma_{yz})_{y+dy} - (\sigma_{yz})_y \right] dx dz + \left[(\sigma_{zz})_{z+dz} - (\sigma_{zz})_z \right] dx dy \quad (II.3.c)$$

En faisant un développement limité d'ordre 1, on obtient :

$$\bullet \text{ Suivant Ox : } \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (II.4.a)$$

$$\bullet \text{ Suivant Oy : } \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (II.4.b)$$

$$\bullet \text{ Suivant Oz : } \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (II.4.c)$$

En injectant les équations (II.4.a), (II.4.b), (II.4.c) dans l'équation (II.3), on obtient les équations suivant chaque direction :

$$\triangleright \text{ Suivant Ox : } \rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) \quad (II.5.a)$$

$$\triangleright \text{ Suivant Oy : } \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) \quad (II.5.b)$$

$$\triangleright \text{ Suivant Oz : } \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (II.5.c)$$

On peut écrire les équations sous une forme vectorielle et on aura :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_y \quad (II.5)$$

Les observations expérimentales ont montré pour les fluides Newtoniens, il y'a une relation linéaire entre les contraintes (tangentiels et normales) et les déformations.

Ces relations sont données par :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.6})$$

δ_{ij} : symbole de Kronecker

En remplaçant ces expressions dans la deuxième loi de Newton, on aboutit à :

$$\begin{cases} \rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation de continuité nous donne :

$$\text{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Les équations de Navier et Stokes pour un écoulement laminaire s'écrivent alors :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.9.a})$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.9.b})$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.9.c})$$

II.1.3 EQUATION DE CONSERVATION DE L'ENERGIE :

L'équation de conservation de l'énergie se déduit à partir du premier principe de la thermodynamique selon lequel la variation de l'énergie totale d'un système quelconque est égale à la différence entre la chaleur échangée avec le milieu extérieure et le travail fourni au système. Ce premier principe de la thermodynamique peut être exprimer par [3] :

$$dE_T = dQ - dW \quad (\text{II.10})$$

avec : dE_T : Variation de l'énergie totale du système ;
 dQ : Variation de la quantité de chaleur ;
 dW : Variation du travail.

Dans ce qui suit, on va essayer d'évaluer chacun des termes précédents pour aboutir à l'équation de conservation de l'énergie :

❖ Evaluation de dE_T :

$$dE_T = dE_i + dE_c + dE_p = d \left[\rho dx dy dz \cdot e + \rho dx dy dz \cdot \frac{1}{2} V^2 - \rho dx dy dz \cdot \vec{g} \cdot \vec{r} \right] \quad (\text{II.11})$$

avec : dE_i : variation de l'énergie interne du système ;
 dE_c : variation de l'énergie cinétique ;
 dE_p : variation de l'énergie potentielle.

Donc, la variation de l'énergie totale du système s'écrit :

$$dE_T = \rho dx dy dz \cdot d \left[e + \frac{1}{2} V^2 - \vec{g} \cdot \vec{r} \right] \quad (\text{II.12})$$

❖ Evaluation de dQ :

En considérant un volume de contrôle de dimension dx, dy, dz (Figure II.3), la variation de la chaleur s'écrit :

$$dQ = [(q_x - q_{x+dx}) dx dy dz + (q_y - q_{y+dy}) dx dz + (q_z - q_{z+dz}) dx dy] dt$$

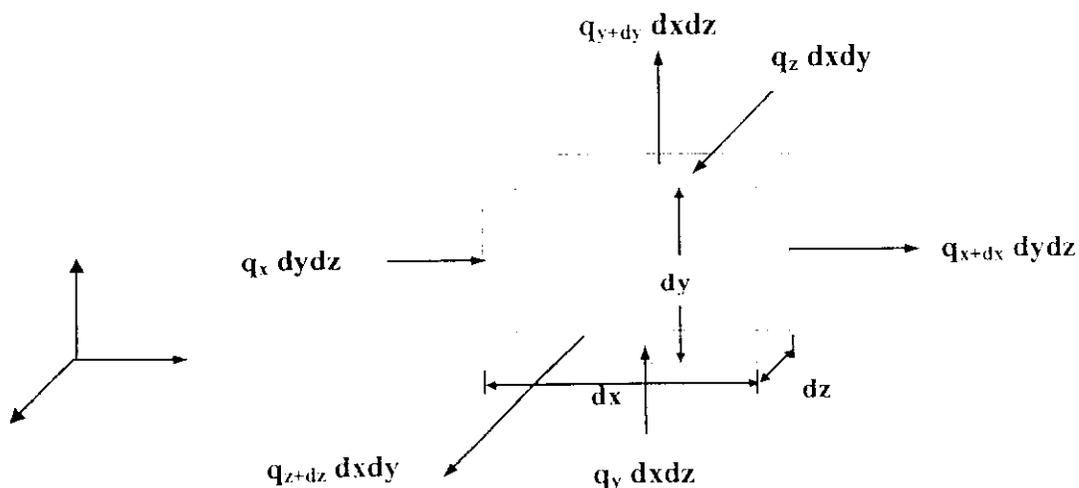


Figure II-3. Variation de chaleur dans un élément fluide

Par développement, on obtient :

$$dQ = -\text{div} \bar{q} \cdot dx dy dz \cdot dt \quad (\text{II.13})$$

❖ Evaluation de dW :

La variation du travail est égale au produit des forces surfaciques par le déplacement, on écrit :

$$dW = \bar{F} \cdot \bar{dl}$$

Considérons les forces surfaciques suivant chaque direction :

• Suivant Ox :

$$\begin{cases} W_x = (\sigma_{xx} u + \sigma_{xy} v + \sigma_{xz} w)_x dy dz dt \\ W_{x+dx} = (\sigma_{xx} u + \sigma_{xy} v + \sigma_{xz} w)_{x+dx} dy dz dt \end{cases}$$

$$dW_x = - \left(\frac{\partial(\sigma_{xx} u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xy} v)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{xz} w)}{\partial x} \right) dx dy dz dt \quad (\text{II.14})$$

• Suivant Oy :

$$\begin{cases} W_y = (\sigma_{xy} u + \sigma_{yy} v + \sigma_{yz} w)_y dx dz dt \\ W_{y+dy} = (\sigma_{xy} u + \sigma_{yy} v + \sigma_{yz} w)_{y+dy} dx dz dt \end{cases}$$

$$dW_y = - \left(\frac{\partial(\sigma_{xy} u)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yy} v)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{yz} w)}{\partial y} \right) dx dy dz dt \quad (\text{II.15})$$

• Suivant Oz :

$$\begin{cases} W_z = (\sigma_{xz} u + \sigma_{yz} v + \sigma_{zz} w)_z dx dy dt \\ W_{z+dz} = (\sigma_{xz} u + \sigma_{yz} v + \sigma_{zz} w)_{z+dz} dx dy dt \end{cases}$$

$$dW_z = - \left(\frac{\partial(\sigma_{xz} u)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{yz} v)}{\partial z} + \frac{\partial(\sigma_{zz} w)}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (\text{II.16})$$

La résultante est la somme des variations de travail suivant chaque direction, donc :

$$dW = dW_x + dW_y + dW_z = -\bar{\nabla}(\bar{V} \cdot \sigma_y) dx dy dz dt \quad (II.17)$$

En injectant les équations (II.12), (II.13) et (II.17) dans l'équation (II.10), on obtient :

$$\rho dx dy dz d \left[e + \frac{1}{2} V^2 - \bar{g} \cdot \bar{r} \right] = -div \bar{q} dx dy dz dt + \bar{\nabla}(\bar{V} \cdot \sigma_y) dx dy dz dt$$

La relation ci-dessus peut s'exprimer par :

$$\rho \frac{De}{Dt} + \rho V \frac{DV}{Dt} - \rho \bar{g} \cdot \bar{V} = -div \bar{q} + \bar{\nabla}(\bar{V} \cdot \sigma_y) \quad (II.18)$$

Avec :

$$\begin{cases} \bar{\nabla}(\bar{V} \cdot \sigma_y) = \bar{V}(\bar{\nabla} \sigma_y) + \sigma_y \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \\ \rho \frac{DV}{Dt} = \rho \bar{g} + \bar{\nabla} \sigma_y \end{cases} \quad (II.19)$$

La relation (I.18) devient alors :

$$\rho \frac{De}{Dt} = -div \bar{q} + \sigma_y \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -div \bar{q} - P div \bar{V} + \sigma_y \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (II.20)$$

$$\begin{cases} \bar{q} = -\lambda \bar{\nabla} T \\ \sigma_y = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (II.21)$$

On aura :

$$\rho \frac{De}{Dt} + P div \bar{V} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \mu \Phi \quad (II.22)$$

Sous forme vectorielle :

$$\rho \frac{De}{Dt} + P div \bar{V} = div(\lambda \bar{\nabla} T) + \mu \Phi \quad (II.23)$$

Avec :

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{2}{3} (\text{div} \vec{V})^2 \quad (\text{II.24})$$

D'autre part, l'équation de continuité donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) &= 0 \Rightarrow \text{div} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \\ \Rightarrow P \text{div} \vec{V} &= -\frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

En remplaçant l'équation (II.25) dans l'équation (II.23) on obtient :

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + \mu \Phi$$

L'expression d'enthalpie en fonction de l'énergie interne est :

$$h = e + \frac{P}{\rho} \Rightarrow \rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + \mu \Phi \quad (\text{II.26})$$

$$dh = C_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - T\beta) dP \quad \text{avec} \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad \text{facteur de dilatation volumique}$$

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = T\beta \frac{DP}{Dt} + \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) + \mu \Phi \quad (\text{II.27})$$

Dans le cas d'un fluide incompressible $\beta=0$, donc l'équation de conservation de l'énergie se simplifie en :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) + \mu \Phi \quad (\text{II.28})$$

Pour un solide avec conductivité thermique constante, l'équation (II.27) se simplifie en :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) \quad (\text{II.29})$$

II.1.4 FORME ADIMENSIONNELLE DES EQUATIONS :

Dans ce paragraphe nous allons considérer le cas d'un écoulement bidimensionnel en régime transitoire d'un fluide incompressible ($\rho = \text{const}$), on aura $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; en négligeant les effets de la gravité.

Dans ces conditions les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie se réduisent à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (II.30.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (II.30.b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (II.30.c)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi \quad (II.30.d)$$

En écriture adimensionnelle :

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}, \quad p^* = \frac{P}{\rho U_\infty^2}, \quad \theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}, \quad \theta = T - T_\infty, \quad \theta_p = T_p - T_\infty$$

$$t^* = \frac{t}{t_l}; \quad \text{avec: } t_l = \frac{L}{U_\infty}.$$

Où :

L : une longueur caractéristique de la terre ;

U_∞ : vitesse de l'écoulement loin de la terre ;

T_p : la température à la terre ;

T_∞ : température du fluide loin de la terre .

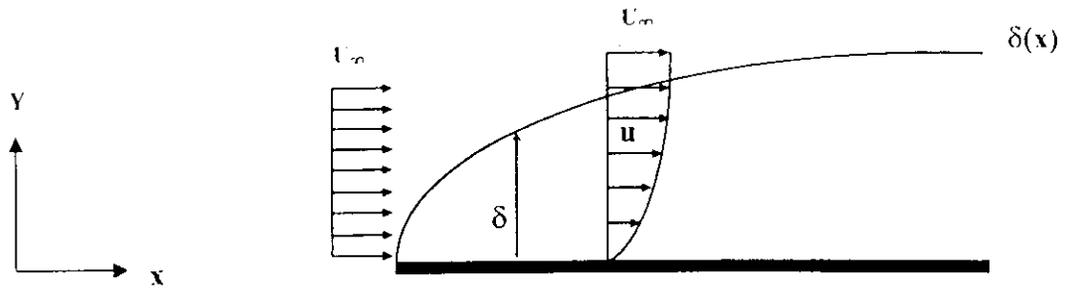


Figure II-4. Couche limite dynamique

Pour établir les équations de couche limite dynamique, utilisons les équations (II.31.a), (II.31.b) et (II.31.c) et essayons de déterminer les termes qui sont négligeables devant les autres.

Les équations sous forme adimensionnelles s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

En utilisant les méthodes d'approximation [2], on déduit que $\frac{\partial u^*}{\partial x^*}$ sera toujours inférieur à l'unité, et de même pour $\frac{\partial v^*}{\partial y^*}$ d'après l'équation de continuité.

D'autre part, dans la couche limite, $v^* \cdot \frac{\partial v^*}{\partial x^*}$ et $\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}$ sont d'ordre δ (épaisseur de la couche limite), alors que $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$ est d'ordre 1. Les termes $\frac{\partial u^*}{\partial y^*}$ et $\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$ sont d'ordre $\frac{1}{\delta}$ et $\frac{1}{\delta^2}$ respectivement car u^* varie de 0 au niveau de la plaque jusqu'à 1 à partir de δ [2]. On peut donc négliger les termes d'ordre δ , et écrire le système ci-dessus comme suit :

On note par δ_T l'épaisseur de la couche limite thermique qui est très petite devant la longueur de la plaque L ($\delta_T \ll L$) [3].

La Figure (II-5) montre la formation de la couche limite thermique sur une plaque plane où T_∞ est la température de l'écoulement loin de la plaque.

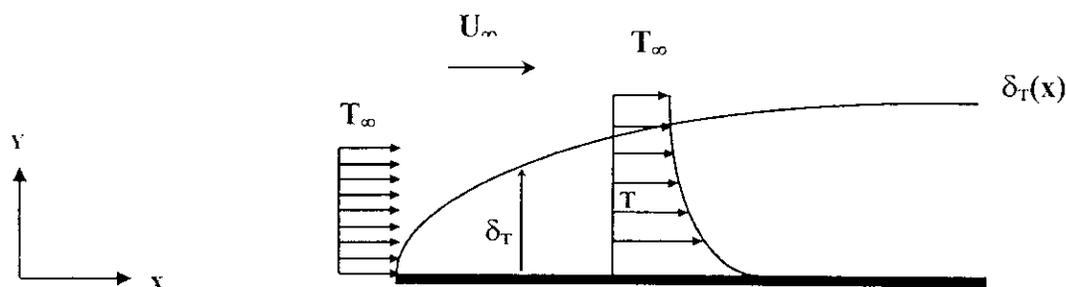


Figure II-5. Couche limite thermique

Pour établir l'équation de couche limite thermique, utilisons l'équation (II.31.d) de la conservation de l'énergie sous forme adimensionnelle.

$$\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) + \frac{Ec}{Re} \Phi^* \quad (II.36)$$

En faisant certaine simplification, on obtient l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (II.37)$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent alors :

- Pour $y^* = 0$; $\theta^*(x,t) = 1$
- Pour $y^* \rightarrow 1$; $\theta^*(x,t) = 0$

Les conditions initiales s'écrivent :

- $t^* \leq 0$; $\theta^*(x,y) = 0$

CHAPITRE III :

**MODELISATION
MATHEMATIQUE
ET CONDITION
AUX FRONTIERES**

Dans ce chapitre nous allons présenter la modélisation des transferts de chaleur entre un milieu poreux et un écoulement d'air externe..

III.1 MODELISATION COTE ECOULEMENT EXTERNE :

Hypothèse : on considère la terre comme une paroi

L'écoulement considéré est supposé laminaire. Loin de la paroi, sa vitesse est U_∞ et sa température est T_∞ .

III.1.1 Couche limite dynamique :

La figure (III-1) montre la formation de la couche limite dynamique sur une plaque plane.

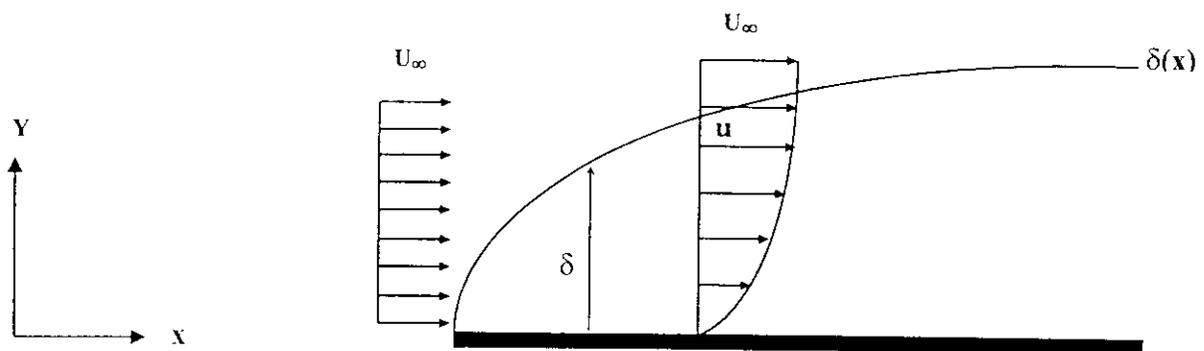


Figure III-1. Couche limite dynamique

Les équations de couche limite dynamique sous une forme adimensionnelle s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \end{cases} \quad (III.1)$$

Avec :

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}, \quad p^* = \frac{P}{\rho U_\infty^2}, \quad \theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}, \quad \theta = T - T_\infty, \quad \theta_0 = T_p - T_\infty$$

$$t^* = \frac{t}{t_l}; \quad \text{avec: } t_l = \frac{L}{U_\infty}.$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent alors :

- Pour $y^* = 0$; $u^*(x,t) = 0$; $v^*(x,t) = V_0$ (condition d'adhérence) ;
- Pour $y^* \rightarrow 1$; $u^*(x,t) = 1$;

La condition initiale s'écrit :

- $t^* \leq 0$; $u^*(x,y) = 0$.

III.1.2 Couche limite thermique :

La figure (III-2) montre la formation de la couche limite thermique sur une plaque plane.

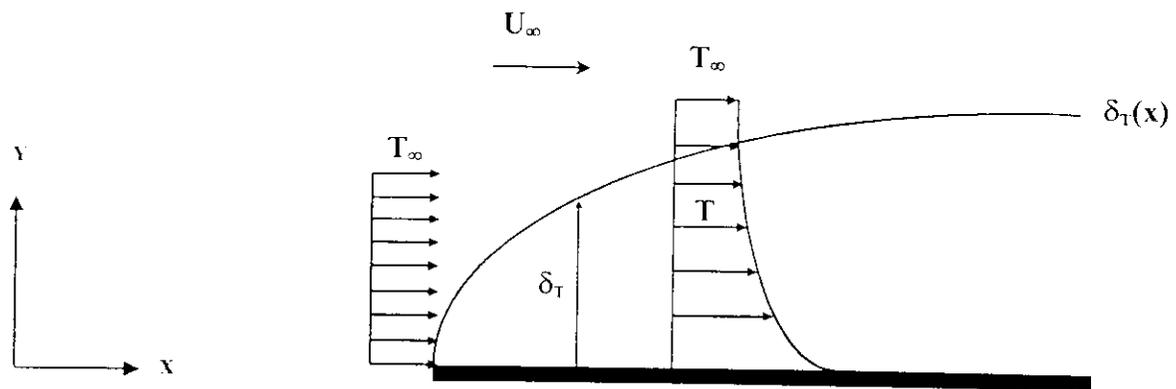


Figure III-2. Couche limite thermique

L'équation de couche limite thermique sous une forme adimensionnelle s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Re \cdot Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (III.2)$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent alors :

- Pour $y^* = 0$; $\theta^*(x,t) = 1$;
- Pour $y^* \rightarrow 1$; $\theta^*(x,t) = 0$;

La condition initiale s'écrit :

- $t^* \leq 0$; $\theta^*(x,y) = 0$.

III.2 MODELISATION COTE MILIEU POREUX :

Dans une large classe de problème les effets convectifs peuvent être négligés devant les effets de conductions au sein du milieu poreux [2].

La figure (III.3) donne un schéma d'un milieu poreux placé dans une enceinte ou, les conditions à la paroi verticales sont adiabatiques ($x = 0$ et $x = L_x$), la partie supérieure ($y = 0$) est en contact avec un écoulement d'air externe et la partie inférieure ($y = L_y$) est en contact avec une source de chaleur qui est le câble électrique.

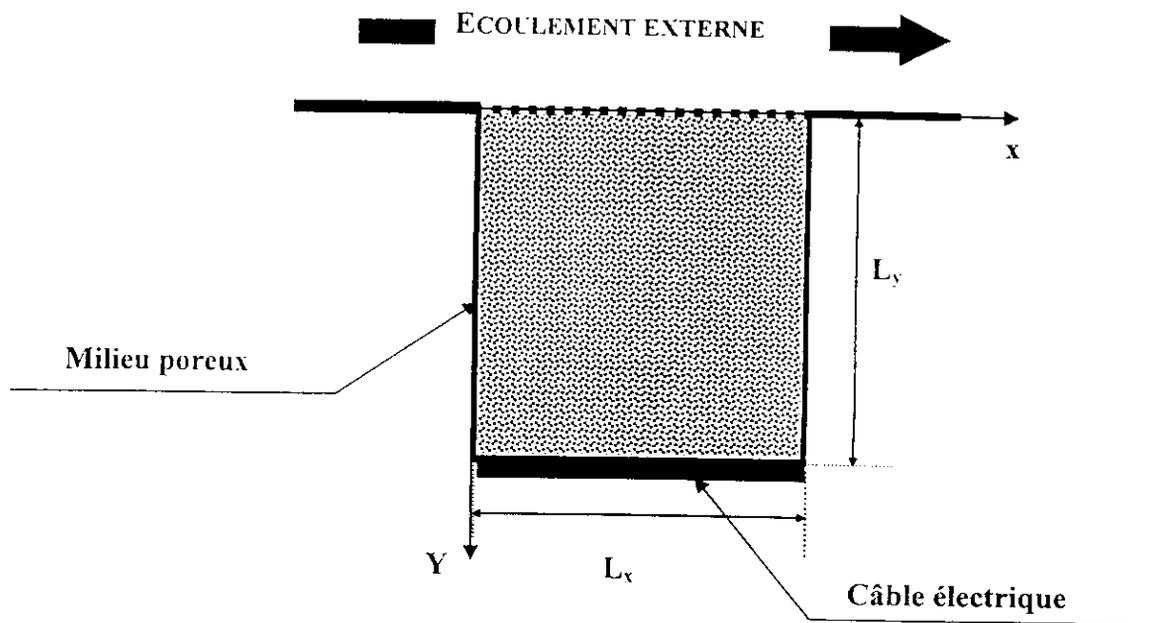


Figure III-3. Milieu poreux

En prenant en considération le fait que le transfert de chaleur par changement de phase est négligeable par rapport au transfert par conduction [5]. Afin de simplifier notre étude le transfert de masse n'est pas pris en compte dans notre modélisation, compte tenu que le problème est essentiellement d'ordre thermique ou il s'agit de déterminer la température superficielle d'un câble électrique enterré .

En réalité le problème est tridimensionnel, en coordonnées cylindriques.

Nous avons choisi une procédure consistant à déduire localement la température superficielle du câble enterré a une certaine profondeur du sol . Dans ces conditions (cas bidimensionnel), l'équation (II.29) devient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.3})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.4})$$

$$\text{Avec : } \alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

- T : température du milieu poreux ;
- λ : conductivité thermique du milieu poreux ;
- α : diffusivité thermique du milieu poreux ;
- ρ : masse volumique du milieu poreux ;
- C_p : capacité calorifique à pression constante du milieu poreux.

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent :

$$\begin{cases} x=0 : q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ x=L_x ; q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

$$\begin{cases} y = L_y ; q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = R * I^2 \\ y = 0 ; q = h_c (T_p - T_\infty) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \end{cases} \quad (III.6)$$

La condition initiale s'écrit :

$$t \leq 0 ; T(x,y,0) = T_0 \quad (III.7)$$

III.3 RACCORDEMENT ENTRE L'ÉCOULEMENT EXTERNE ET LE MILIEU POREUX :

La situation étudiée et schématisée sur la figure (III.4). On considère donc le chauffage ou le refroidissement par l'écoulement externe d'un milieu poreux initialement à la température T_0 . Les parois verticales sont adiabatiques (condition de flux nuls sur les parois). La température loin de la plaque est égale à T_∞ .

La solution du problème exige la résolution des équations de couche limite dynamique et thermique et l'équation de la chaleur du milieu poreux.

Il est effectivement possible de mettre en œuvre une procédure numérique permettant de résoudre à la fois les équations de l'écoulement externe et celle du milieu poreux.

Pour faire le Raccordement entre l'écoulement externe et le milieu poreux on utilise les conditions suivantes [9] :

❖ Egalité des températures :

$$T_{ex}(x,0,t) = T_{MP}(x,0,t) ; 0 \leq x \leq L_x \quad (III.8)$$

❖ Egalité des flux :

Pour $y=0$ nous avons $q_{ex} = q_{MP}$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} q_{ex} = h_c (T_p - T_\infty) \\ q_{MP} = -\lambda_{MP} \frac{\partial T_{MP}}{\partial y} \Big|_{y=0} \end{cases}$$

$$q_{ex} = q_{MP} \Rightarrow h_c (T_p - T_\infty) = -\lambda_{MP} \frac{\partial T_{MP}}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (\text{III.9})$$

$$\text{Et pour } y=L_y \text{ nous avons } q_{MP} = -\lambda_{MP} \frac{\partial T_{MP}}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \frac{R * I^2}{S} \quad (\text{III.10})$$

$$\Rightarrow h_c(x,t) = \frac{-\lambda_{MP} \frac{\partial T_{MP}}{\partial y} \Big|_{y=0}}{(T_p - T_\infty)} \quad (\text{III.11})$$

Avec :

- h_c : coefficient d'échange convectif ;
- q : densité de flux de chaleur à l'interface ;
- T_{ex} : température du fluide extérieur ;
- T_{MP} : température du milieu poreux ;
- T_p : température à la paroi ;
- T_∞ : température du fluide loin de la plaque ;
- λ_{ex} : conductivité thermique du fluide extérieur ;
- λ_{MP} : Conductivité thermique du milieu poreux ;
- R : Résistance du câble électrique ;
- I : intensité de courant du câble électrique .
- S : surface du câble électrique .

Pour calculer h_c à tout instant et à toute position on initialise la valeur de h_c par l'utilisation d'une relation sur le coefficient d'échange convectif autour d'une plaque plane [6].

$$Nu = 0.453 \cdot Re^{\frac{1}{2}} \cdot pr^{\frac{1}{4}} = \frac{h_{emp} \cdot L}{\lambda}$$

$$\Rightarrow h_{emp} = \frac{0.453 \cdot \lambda \cdot Re^{\frac{1}{2}} \cdot pr^{\frac{1}{4}}}{L} \quad (III.12)$$

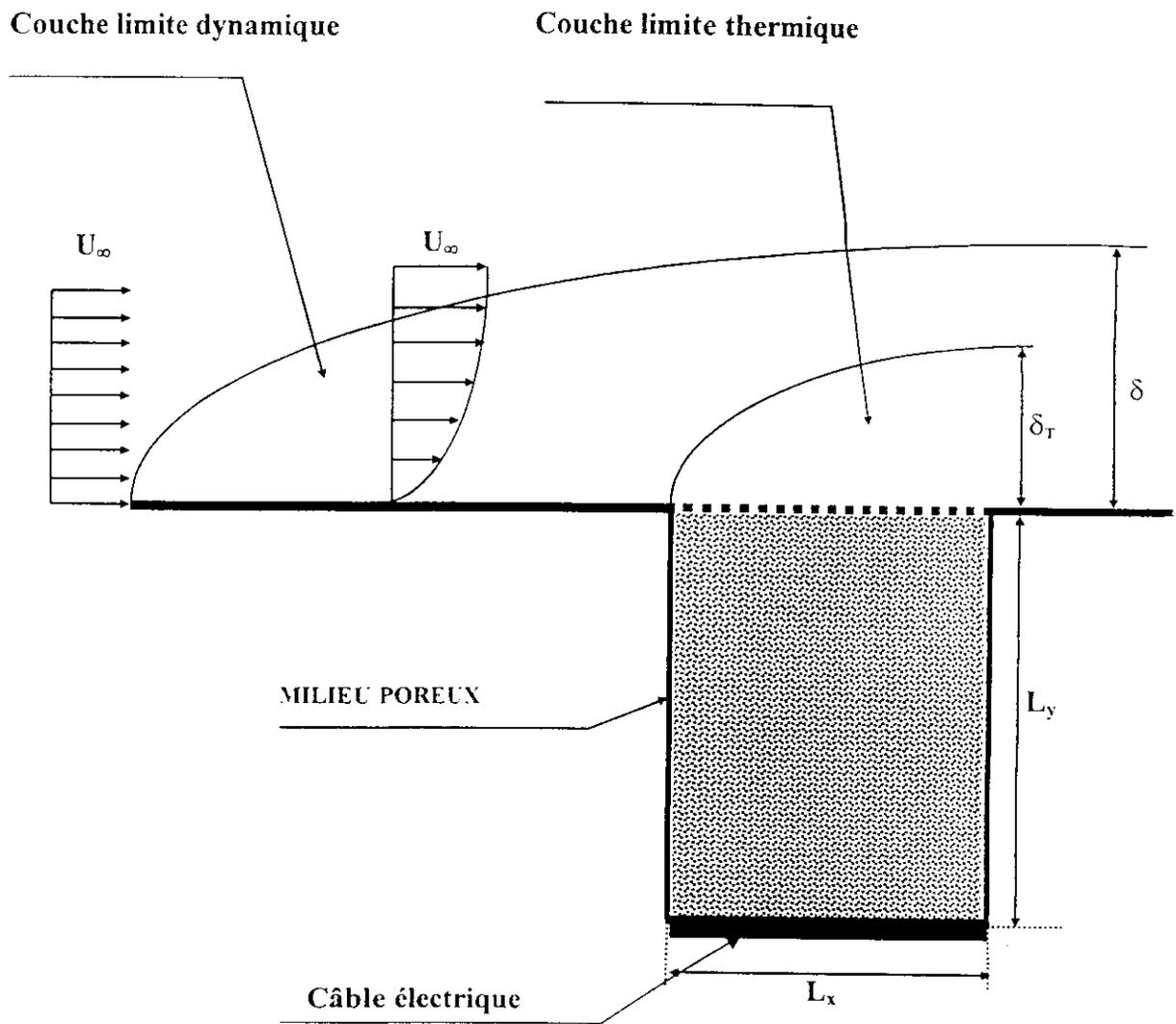


Figure III-4. Configuration étudiée

CHAPITRE IV:

**RESOLUTION
NUMERIQUE**

Dans le chapitre précédent, nous avons modélisé notre problème en utilisant les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie. Le caractère non linéaire des équations aux dérivées partielles exige la recherche de solution numérique à ces problèmes.

IV.1 DISCRETISATION (METHODE DES DIFFERENCES FINIS) :

La méthode des différences finies est utilisée pour résoudre les différents types de problèmes numériques. Cette méthode est puissante et joue un rôle dans la détermination des solutions [8].

La méthode des différences finies est dite d'approximation, car elle est basée sur la discretisation directe en remplaçant les équations aux dérivées partielles par des équations aux différences finies aboutissant à des équations algébriques.

Pour résoudre un problème par la méthode des différences finies, on doit suivre trois étapes :

- 1- discrétiser le domaine de la solution par une grille de nœuds ;
- 2- approximer l'équation différentielle ou à dérivées partielles par une équation aux différences finies équivalente ;
- 3- résoudre l'équation aux différences finies en respectant les conditions aux limites et les conditions initiales.

IV.1.1 Méthode des différences finis :

L'une des premières étapes à prendre en compte pour établir une procédure en différences finies est de remplacer le domaine continu en un domaine discret appelé «grille».

Soit une fonction f défini sur un domaine $[a,b]$, cet intervalle peut être discrétisé en considérant l'ensemble : $x_0 = a, x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1} = b$. La représentation discrète de $f(x)$ sera l'ensemble : $\{f(a), f(x_1), \dots, f(x_i), \dots, f(b)\}$.

En général $f(x_i)$ est notée f_i , la valeur de $f(x_i)$ calculée par une méthode numérique n'est pas exacte mais elle est approchée.

La dérivée d'ordre m de la fonction « f » au point x_i est approximée par [8] :

$$\frac{d^m f(x_i)}{dx_m} = \sum_{j=-J_1}^{J_2} \alpha_j f_{i+j}$$

Où : α_j sont déterminés par le développement en série de Taylor de f_{i+j} et J_1, J_2 sont des entiers qui dépendent de l'ordre m et aussi du degré de précision de l'approximation. Si $m=1$, on considère une approximation en utilisant trois valeurs de f_i c'est à dire $J_1+J_2 = 2$, et nous prendrons $J_1=J_2=1$.

On peut écrire l'expression générale :

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{(1-\alpha)f_{i+1} + 2\alpha f_i - (1+\alpha)f_{i-1}}{2\Delta x}$$

Où : α est une constante arbitraire.

L'erreur de telle approximation est [8] :

$$-\frac{\alpha\Delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} + O(\Delta x^3)$$

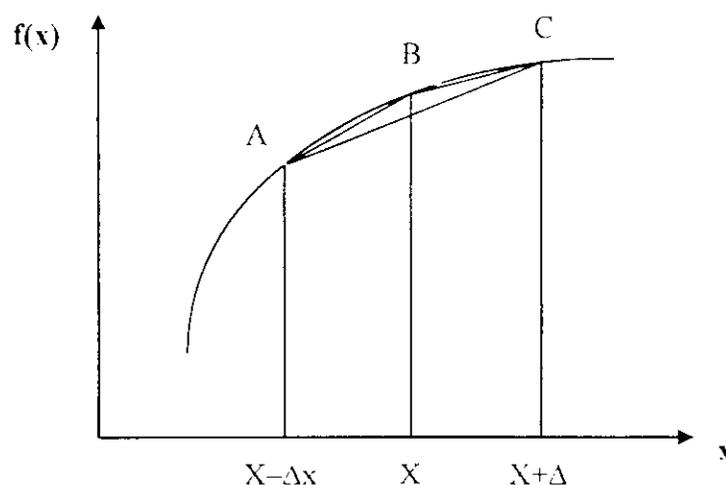


Figure IV.1. Représentation de $f(x)$

En spécifiant la valeur de α on obtient les différences standards [8] :

- Différences centrées : $\alpha=0$ {Selon la courbe AC}

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} = \Delta_x^0 f_i \quad \text{l'erreur} = O(\Delta x^2)$$

- Différences décentrées (arrière) : $\alpha=1$ {Selon la courbe AB}

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} = \Delta_x^- f_i \quad \text{l'erreur} = O(\Delta x)$$

- Différences décentrées (avant) : $\alpha=-1$ {Selon la courbe BC}

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = \Delta_x^+ f_i \quad \text{l'erreur} = O(\Delta x)$$

- Si nous prenons $J_1=2$ et $J_2=0$, on obtient une approximation du second ordre [8] :

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{3f_i - 4f_{i+1} + f_{i-2}}{2\Delta x}$$

- Si nous prenons $J_1=0$ et $J_2=2$, on obtient une approximation du second ordre [8] :

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2\Delta x}$$

Pour une approximation du quatrième ordre [8] : $J_1=J_2=2$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \cong \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x}$$

De la même façon, nous pouvons définir des approximations pour toutes les dérivées.

A titre d'exemple, la dérivée seconde de $f(x)$ est [8] :

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \cong \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \Delta_{xx} f_i \quad \text{la précision est de l'ordre de } O(\Delta x^2)$$

i) Consistance :

Une approximation est dite consistante si l'erreur de troncature tend vers zéro lorsque tous les pas de la discretisation tendent eux même vers zéro. La troncature est la différence entre l'EDP et son approximation en différences finis (EDF).

Dans ce cas la forme discretisée représentera convenablement l'équation à résoudre.

ii) Stabilité :

Un schéma aux différences finies est dit stable si les erreurs d'arrondis ne s'amplifient pas au fur et à mesure que les calculs progressent, cela signifie qu'il est indispensable qu'à une itération de calcul donnée, l'erreur d'arrondi du *calculateur* ne s'amplifie pas aux prochaines itérations de calcul.

iii) Convergence :

On dit qu'un schéma aux différences finies est convergent si la différence entre la solution approchée et la solution exacte tend vers zéro quand les pas de discretisation tendent vers zéro.

IV.1.2 Les différents schémas des différences finies :

Pour illustrer les différents schémas des équations aux dérivées partielles, on considère une équation aux dérivées partielles parabolique simple à une variable spatiale indépendante.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (\text{IV.1})$$

La discrétisation de l'équation (IV.1) peut se faire selon les différents schémas suivants [7] :

- **Schéma explicite :**

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t} = \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}, \text{ stable pour } 0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.5.$$

- **Schéma implicite :**

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t} = \frac{f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2}. \text{ Inconditionnellement stable.}$$

- **Schéma mixte (GRANK-NICOLSON) :**

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i+1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} \right], \text{ inconditionnellement stable.}$$

- **Schéma explicite de LEAPFROG :**

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2\Delta t} = \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}, \text{ conditionnellement stable.}$$

- **Schéma explicite de DUFORT-FRANKEL :**

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2\Delta t} = \frac{f_{i+1}^j - f_i^{j+1} - f_i^{j-1} + f_{i-1}^j}{(\Delta x)^2}, \text{ conditionnellement stable.}$$

IV.2 REPRESENTATION DE LA METHODE ADI :

On présentera la méthode ADI (ALTERNATING DIRECTION IMPLICITE) en détail, car c'est la méthode qu'on a choisie pour traiter notre problème à cause de sa stabilité, il est toutefois recommandé d'utiliser celles pour lesquelles nous aurons à résoudre un système d'équations algébriques tridiagonales.

La méthode ADI qui a été introduite par Peaceman et Rachford, nous permettra de construire des schémas implicites très efficaces [8].

IV.2.1 Stabilité de la méthode ADI :

La stabilité de cette méthode est étudiée par le critère de Von Neumann.

Le problème de stabilité ne se pose pas si Δt est très petit ($\Delta t \rightarrow 0$) pour plusieurs schémas des différences finies.

Pour illustrer le critère de Von Neumann, prenons un exemple d'équation aux dérivées partielles paraboliques [7] :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (\text{IV.2})$$

Pour le schéma explicite :

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

On remplaçant : $f(x,t) = \psi(t).e^{j\beta x}$, on aura :

$$\frac{\psi(t + \Delta t)e^{j\beta x} - \psi(t)e^{j\beta x}}{\Delta t} = \frac{\psi(t)}{(\Delta x)^2} [e^{j\beta(x-\Delta x)} - 2e^{j\beta x} + e^{j\beta(x+\Delta x)}]$$

$$\Rightarrow \psi(t + \Delta t) = \psi(t) \left(1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2} \right)$$

on pose $\psi(0) = 1$, on aura :

$$\psi(t) = \left(1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2} \right)^{t/\Delta t}$$

pour la stabilité de $\psi(t)$ il faut :

$$\left| 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2} \right| \leq 1$$

$$\xi = \frac{\psi(t + \Delta t)}{\psi(t)} = 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}$$

dans ce cas la condition de stabilité est $|\xi| \leq 1$.

Pour le schéma implicite :

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

On remplace : $f(x, t) = \psi(t).e^{j\beta x}$, on aura :

$$\xi = \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}}$$

$|\xi| \leq 1$ quelle que soit $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, donc la méthode implicite est inconditionnellement stable.

IV.3 APPLICATION DE LA METHODE ADI AU CAS TRAITE :

On se propose d'illustrer le schéma implicite, vu qu'il est inconditionnellement stable et présente une erreur de troncature relativement faible et par conséquent plus consistant pour résoudre les équations des couches limites ainsi que l'équation de la chaleur dans le milieu poreux.

IV.3.1 Discrétisation de l'équation de la chaleur :

Dans le milieu poreux, l'équation de la chaleur s'écrit [10] :

$$\rho C_p \frac{\partial T_{MP}}{\partial t} = \lambda_{MP} \left(\frac{\partial^2 T_{MP}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{MP}}{\partial y^2} \right) \quad (IV.3)$$

$$\frac{\partial T_{MP}}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T_{MP}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{MP}}{\partial y^2} \right) ; \quad \alpha = \frac{\lambda_{MP}}{\rho C_p}$$

Où :

- λ_{MP} : conductivité thermique du milieu poreux (constante)
- α : diffusivité thermique du milieu poreux (constante)

Les conditions initiales et aux limites sont données par les relations (III.5), (III.6) et (III.7).

Soient n et m les nombres des nœuds suivant x et y respectivement. En utilisant les différences finies, les dérivées partielles présentées ci-dessus s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{MP}}{\partial t} = \frac{T_{MP_{i,j}}^{k+1} - T_{MP_{i,j}}^k}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 T_{MP}}{\partial x^2} = \frac{T_{MP_{i+1,j}}^{k+1} - 2T_{MP_{i,j}}^{k+1} + T_{MP_{i-1,j}}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\partial^2 T_{MP}}{\partial y^2} = \frac{T_{MP_{i,j+1}}^{k+1} - 2T_{MP_{i,j}}^{k+1} + T_{MP_{i,j-1}}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \end{array} \right. \quad (IV.4)$$

Après réarrangement l'équation (III.4) s'écrit :

$$\frac{T_{MP_{i,j}}^{k+1} - T_{MP_{i,j}}^k}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{MP_{i+1,j}}^{k+1} - 2T_{MP_{i,j}}^{k+1} + T_{MP_{i-1,j}}^{k+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{MP_{i,j+1}}^{k+1} - 2T_{MP_{i,j}}^{k+1} + T_{MP_{i,j-1}}^{k+1}}{(\Delta y)^2} \right) \quad (IV.5)$$

L'organigramme correspondant à ce schéma est :

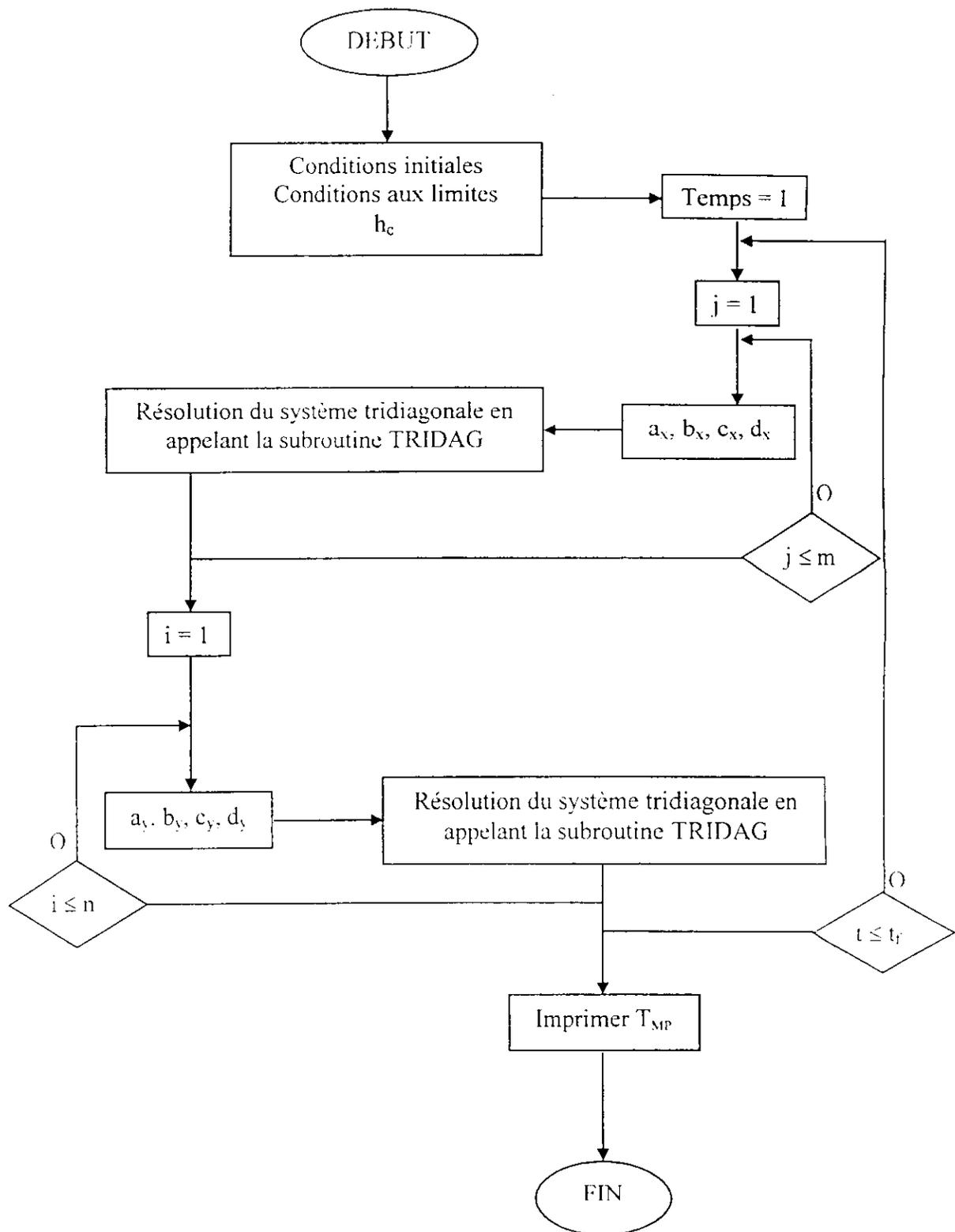


Figure IV.2. Organigramme de calcul du champ de température dans le milieu poreux

IV.3.2 Discrétisation des équations des couches limites dynamique et thermique :

Les équations de la couche limite dynamique sont donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{cx}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_{cx}^*}{\partial y^*} = 0 \\ \frac{\partial u_{cx}^*}{\partial t^*} + u_{cx}^* \frac{\partial u_{cx}^*}{\partial x^*} + v_{cx}^* \frac{\partial u_{cx}^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_{cx}^*}{\partial y^{*2}} \end{cases} \quad (IV.6)$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent alors :

- Pour $y^* = 0$; $u_{cx}^*(x,t) = 0$; $v_{cx}^*(x,t) = V_0$ (condition d'adhérence)
- Pour $y^* \rightarrow 1$; $u_{cx}^*(x,t) = 1$

La condition initiale s'écrit :

- $t^* \leq 0$; $u_{cx}^*(x,y) = 0$

L'équation de la couche limite thermique s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \theta_{cx}^*}{\partial t^*} + u_{cx}^* \frac{\partial \theta_{cx}^*}{\partial x^*} + v_{cx}^* \frac{\partial \theta_{cx}^*}{\partial y^*} \right) = \frac{1}{Re.Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta_{cx}^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (IV.7)$$

Les conditions aux limites correspondantes s'écrivent alors :

- Pour $y^* = 0$; $\theta_{cx}^*(x,t) = 1$
- Pour $y^* \rightarrow 1$; $\theta_{cx}^*(x,t) = 0$

La condition initiale s'écrit :

- $t^* \leq 0$; $\theta_{cx}^*(x,y) = 0$

Soient N_x et N_y les nombres des nœuds suivant x et y respectivement. En utilisant les différences finies les dérivées partielles présentées ci-dessus s'écrivent :

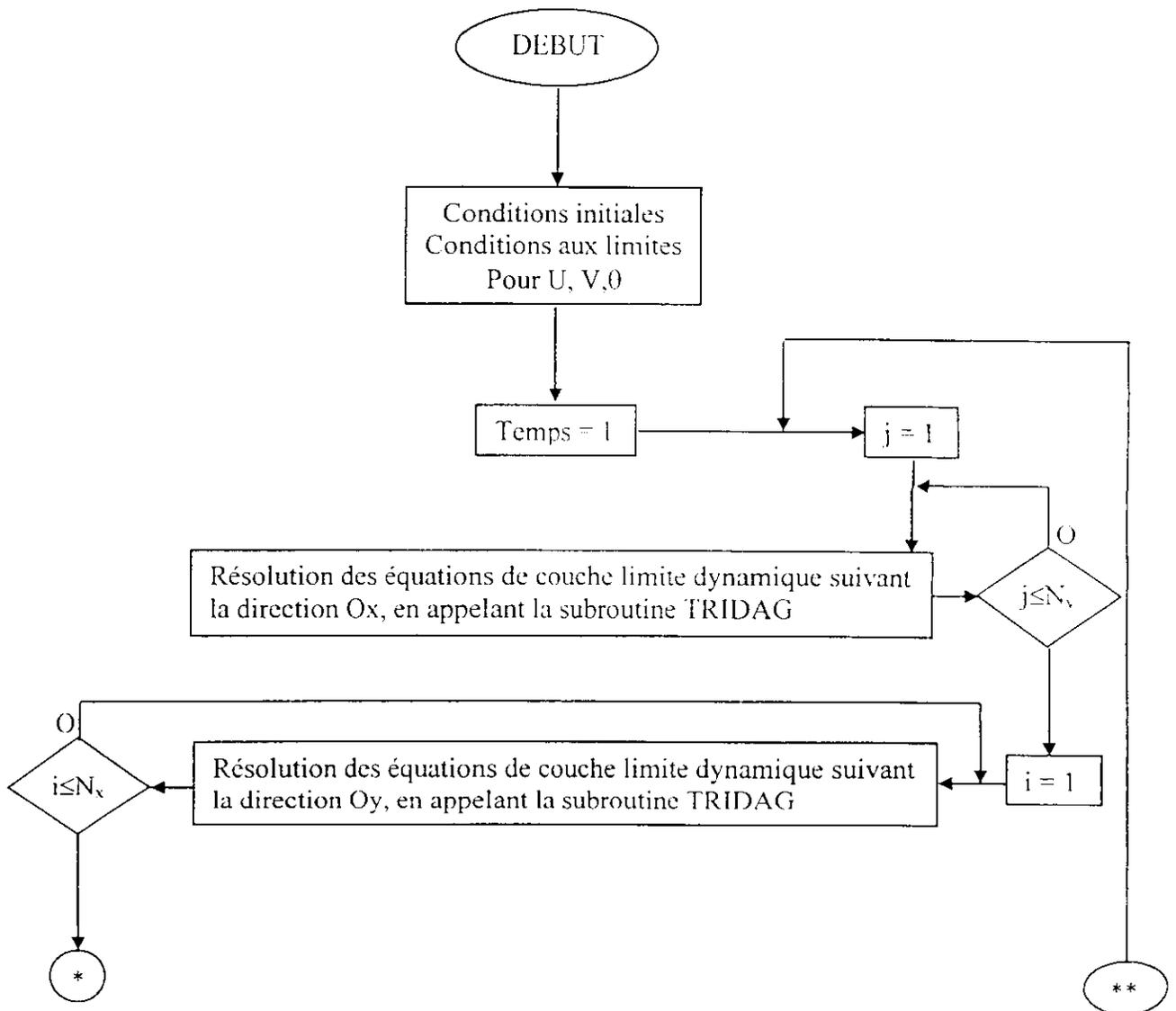
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_{ex}^{\bullet}}{\partial t^{\bullet}} = \frac{u_{ex(t,j)}^{\bullet, k+1} - u_{ex(t,j)}^{\bullet, k}}{\Delta t^{\bullet}} \\ \frac{\partial u_{ex}^{\bullet}}{\partial x^{\bullet}} = \frac{u_{ex(t+1,j)}^{\bullet, k+1} - u_{ex(t-1,j)}^{\bullet, k+1}}{2\Delta x^{\bullet}} \\ \frac{\partial u_{ex}^{\bullet}}{\partial y^{\bullet}} = \frac{u_{ex(t,j+1)}^{\bullet, k+1} - u_{ex(t,j-1)}^{\bullet, k+1}}{2\Delta y^{\bullet}} \\ \frac{\partial v_{ex}^{\bullet}}{\partial y^{\bullet}} = \frac{v_{ex(t,j+1)}^{\bullet, k+1} - v_{ex(t,j-1)}^{\bullet, k+1}}{2\Delta y^{\bullet}} \\ \frac{\partial^2 u_{ex}^{\bullet}}{\partial y^{\bullet 2}} = \frac{u_{ex(t,j+1)}^{\bullet, k+1} + u_{ex(t,j-1)}^{\bullet, k+1} - 2u_{ex(t,j)}^{\bullet, k+1}}{\Delta y^{\bullet 2}} \end{array} \right. \quad (IV.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_{ex}^{\bullet}}{\partial t^{\bullet}} = \frac{\theta_{ex(t,j)}^{\bullet, k+1} - \theta_{ex(t,j)}^{\bullet, k}}{\Delta t^{\bullet}} \\ \frac{\partial \theta_{ex}^{\bullet}}{\partial x^{\bullet}} = \frac{\theta_{ex(t+1,j)}^{\bullet, k+1} - \theta_{ex(t-1,j)}^{\bullet, k+1}}{2\Delta x^{\bullet}} \\ \frac{\partial \theta_{ex}^{\bullet}}{\partial y^{\bullet}} = \frac{\theta_{ex(t,j+1)}^{\bullet, k+1} - \theta_{ex(t,j-1)}^{\bullet, k+1}}{2\Delta y^{\bullet}} \\ \frac{\partial^2 \theta_{ex}^{\bullet}}{\partial x^{\bullet 2}} = \frac{\theta_{ex(t+1,j)}^{\bullet, k+1} + \theta_{ex(t-1,j)}^{\bullet, k+1} - 2\theta_{ex(t,j)}^{\bullet, k+1}}{\Delta x^{\bullet 2}} \\ \frac{\partial^2 \theta_{ex}^{\bullet}}{\partial y^{\bullet 2}} = \frac{\theta_{ex(t,j+1)}^{\bullet, k+1} + \theta_{ex(t,j-1)}^{\bullet, k+1} - 2\theta_{ex(t,j)}^{\bullet, k+1}}{\Delta y^{\bullet 2}} \end{array} \right. \quad (IV.9)$$

Dans ce cas, le système d'équation discrétisé nous permet de calculer les deux composantes de la vitesse ainsi que la température, telle que, les équations de Navier-Stokes et de continuité nous donnent les vitesses u et v et finalement, l'équation de la chaleur la température T . En d'autres termes :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u_{ex(t,j)}^{k+1} - u_{ex(t,j)}^k}{\Delta t^*} + u_{ex(t,j)}^k \frac{u_{ex(t+1,j)}^{k+1} - u_{ex(t,j)}^{k+1}}{2\Delta x^*} + v_{ex(t,j)}^k \frac{u_{ex(t,j+1)}^{k+1} - u_{ex(t,j-1)}^{k+1}}{2\Delta y^*} = \frac{1}{Re} \frac{u_{ex(t,j+1)}^{k+1} + u_{ex(t,j-1)}^{k+1} - 2u_{ex(t,j)}^{k+1}}{\Delta y^{*2}} \\ & \frac{v_{ex(t,j+1)}^{k+1} - v_{ex(t,j-1)}^{k+1}}{2\Delta y^*} + \frac{u_{ex(t+1,j)}^{k+1} - u_{ex(t-1,j)}^{k+1}}{2\Delta x^*} = 0 \\ & \frac{\theta_{ex(t,j)}^{k+1} - \theta_{ex(t,j)}^k}{\Delta t^*} + u_{ex(t,j)}^k \frac{\theta_{ex(t+1,j)}^{k+1} - \theta_{ex(t,j)}^{k+1}}{2\Delta x^*} + v_{ex(t,j)}^k \frac{\theta_{ex(t,j+1)}^{k+1} - \theta_{ex(t,j-1)}^{k+1}}{2\Delta y^*} = \frac{1}{Re.Pr} \frac{\theta_{ex(t,j+1)}^{k+1} + \theta_{ex(t,j-1)}^{k+1} - 2\theta_{ex(t,j)}^{k+1}}{\Delta y^{*2}} \end{aligned} \right.$$

L'organigramme correspondant à ce schéma est :



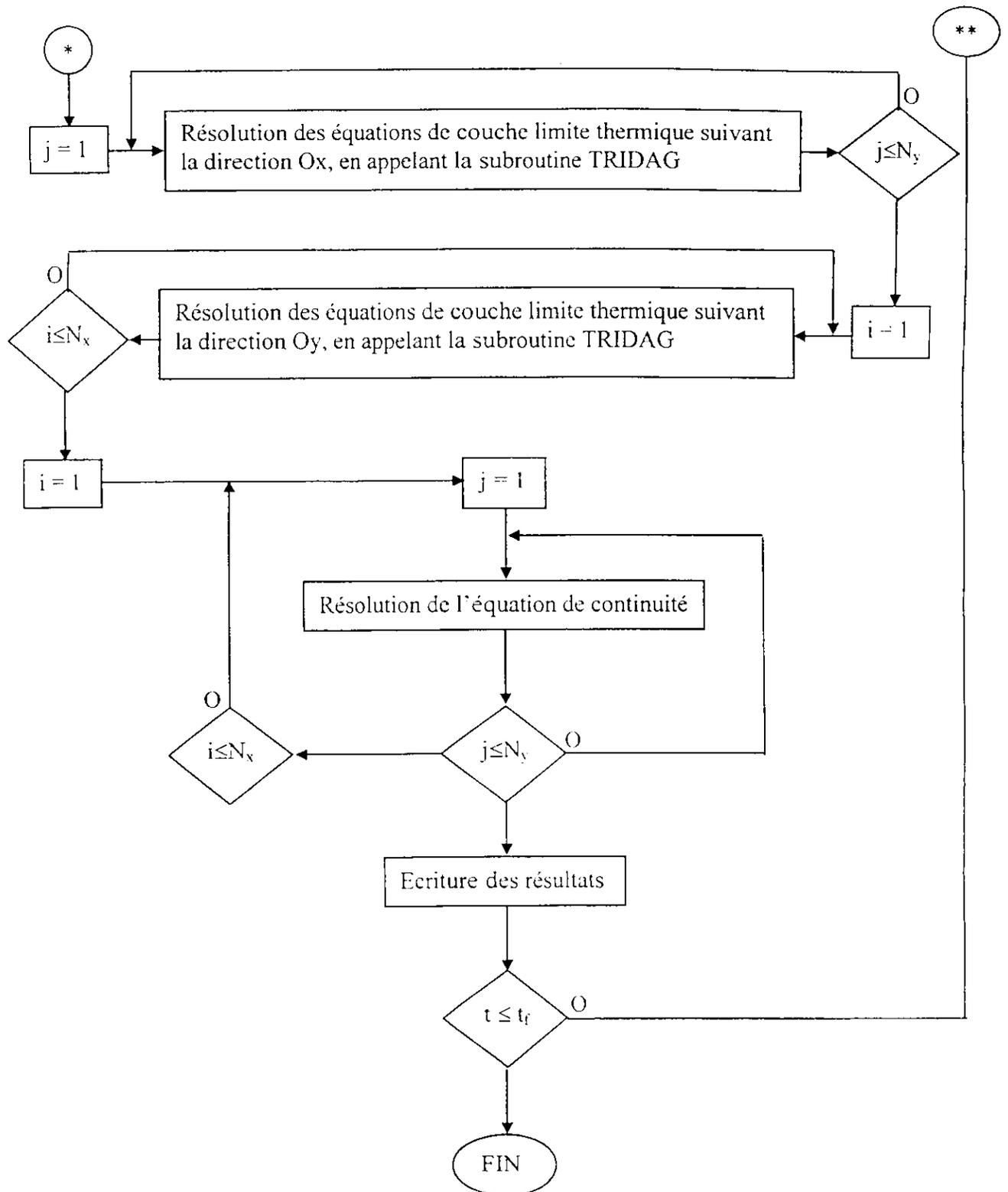


Figure IV.3. Organigramme de calcul des paramètres d'écoulement externe

IV.3.3 Raccordement entre l'écoulement externe et le milieu poreux :

La résolution du problème couplé exige la résolution des équations de la couche limite dynamique, thermique et l'équation de la chaleur du milieu poreux.

Pour faire le Raccordement entre l'écoulement externe et le milieu poreux on utilise les conditions suivantes [9] :

❖ **Egalité des températures :**

$$T_{ex}(x,0,t) = T_{MP}(x,0,t) ; 0 \leq x \leq L_x$$

❖ **Egalité des flux :**

$$q_{ex} = q_{MP}$$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} q_{ex} = h_c (T_p - T_\infty) \\ q_{MP} = -\lambda_{MP} \frac{\partial T_{MP}}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\lambda_{MP} \frac{T_{MP(x,n,k)} - T_{MP(x,n-1,k)}}{\Delta y} \end{cases}$$

$$q_{ex} = q_{MP} \Rightarrow h_c (T_p - T_\infty) = -\lambda_{MP} \frac{T_{MP(x,n,k)} - T_{MP(x,n-1,k)}}{\Delta y}$$

$$\Rightarrow h_c(x,t) = \frac{-\lambda_{MP} \frac{T_{MP(x,n,k)} - T_{MP(x,n-1,k)}}{\Delta y}}{(T_p - T_\infty)}$$

La résolution du problème couplé est effectuée suivant l'organigramme de la figure (VI.4).

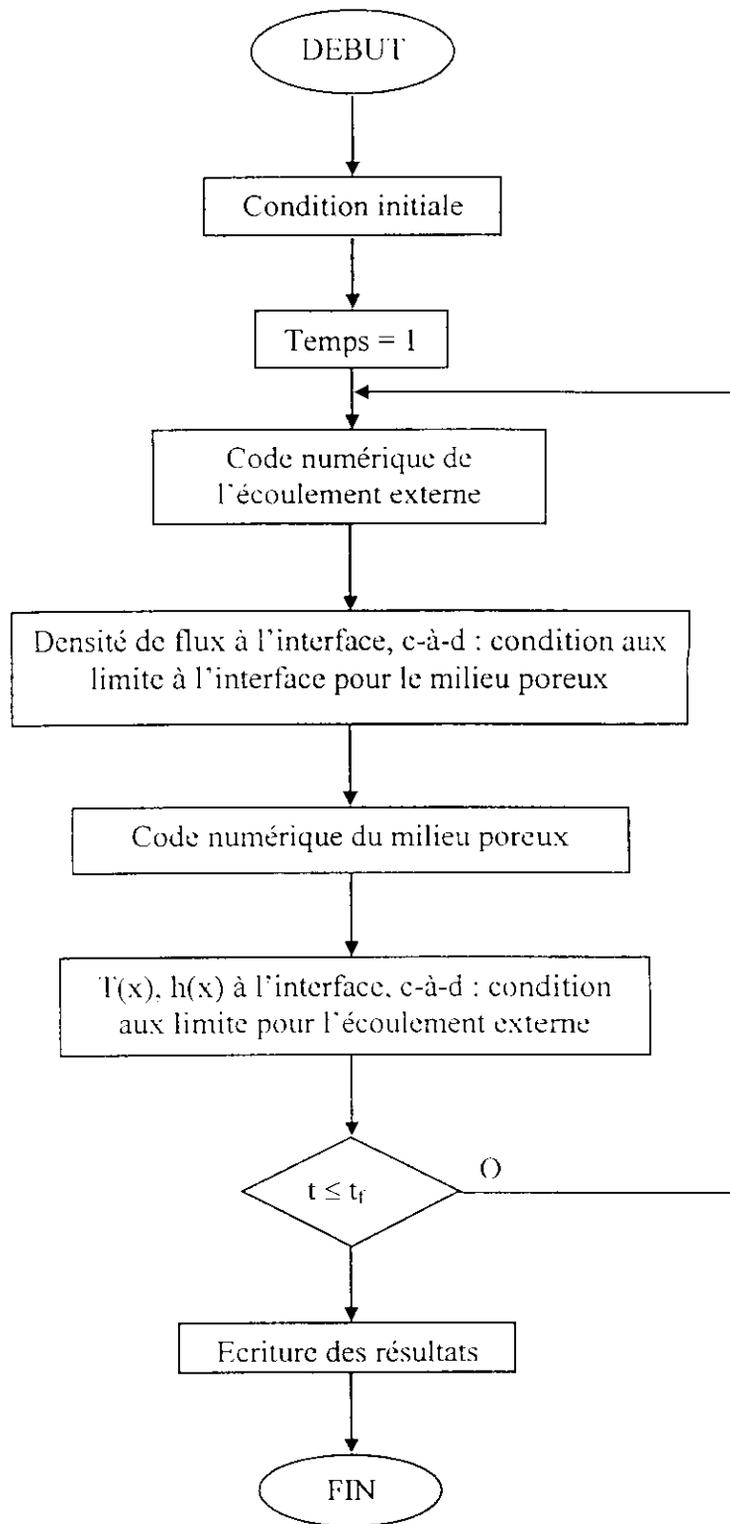


Figure IV.4. Organigramme de calcul des paramètres d'écoulement à l'intersection de l'écoulement externe et le milieu poreux

CHAPITRE V:

**RESULTATS ET
DISCUSSIONS**

Dans le quatrième chapitre nous avons modélisé le problème du transfert de chaleur entre le milieu poreux (la terre et le câble électrique) et un écoulement d'air externe. Nous avons aussi abordé la méthode de résolution (Méthode ADI) dans le quatrième chapitre.

Dans ce chapitre, nous allons présenter et interpréter les résultats obtenus après résolution.

Les résultats présentés ont été classés en deux catégories. La première traite le milieu poreux et la deuxième partie est relative aux températures superficielles (niveau du raccordement , et la température à différente profondeur du câble électrique) .

V.1 PRESENTATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS :

Nous présentons et commentons dans ce qui suit les résultats obtenus pour les conditions suivantes :

Les propriétés de l'air (fluide externe) sont :

$$\lambda_{ex} = 2.65 \times 10^{-2} \text{ W/m K.}$$

$$Re = 1000$$

$$Pr = 0.70734.$$

$$T_{\infty} = 30 \text{ }^{\circ}\text{C.}$$

Les propriétés thermiques du milieu poreux sont :

$$\lambda_{MP} = 5 \text{ W/m K.}$$

$$\alpha = 25 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s.}$$

$$T_0 = 10 \text{ }^{\circ}\text{C.}$$

V.1.1 Etude du milieu poreux :

On ne s'intéresse dans cette étude, qu'au régime de conduction avec conductivité thermique constante.

Les résultats sont classés en deux types : le premier est relatif aux isothermes dans le milieu poreux et le deuxième concerne la température unidimensionnelle du milieu poreux.

Ils sont obtenus par résolution de l'équation de la chaleur pour différentes puissances et pour différentes profondeurs du câble électrique .

La température unidimensionnelle est calculée comme suit :

$$T_u(y,t) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} T(x,y,t) dx = \frac{\sum_{i=1}^m T(i,j,n)}{m} \quad (V.1)$$

Le tracé de la température unidimensionnelle permet de déterminer le régime permanent.

Les figures (V.1), (V.2) et (V.3) représentent respectivement l'évolution des isothermes dans le milieu poreux pour une profondeur de 40 cm , et des puissance égales à : 15Kw, 20 kW et 31 kW .

Les figures (V.4),(V.5) et (V.6) représentent respectivement l'évolution des isothermes dans le milieu poreux pour une puissance de 15 kW , et des profondeurs égales : 40 cm , 60 cm , et 70 cm .

D'après ces isothermes, on peut noter l'effet du bord d'attaque, c'est-à-dire que la densité de flux de chaleur est particulièrement élevée dans la zone du bord d'attaque thermique.

Si on augmente la puissance du câble électrique , la température du milieu poreux augmente, elle est due à l'importance du flux de chaleur évacué par le câble électrique.

Si on augmente la profondeur du câble électrique , la température du milieu poreux augmente , elle est due à un faible échange thermique avec le milieu environnant.

Les figures (V.7), (V.8) et (V.9) représentent respectivement l'évolution de la température unidimensionnelle du milieu poreux pour une profondeur égale à 40 cm , et des puissance égales à : 15 kW ,20 kW et 31 kW .

Les figures (V.10), (V.11) et (V.12) représentent respectivement l'évolution de la température unidimensionnelle du milieu poreux pour une puissance de 15 kW ,et des profondeurs égales à : 40 cm ,60 cm et 70 cm

Le régime permanent pour une profondeur de 40 cm , et pour une puissance de 31 kW est atteint après 19 heures.

Le régime permanent pour une profondeur de 40 cm , et pour une puissance de 20 kW est atteint après 24 heures

Le régime permanent pour une profondeur de 40 cm , et pour une puissance de 15 kW est atteint après 26 heures.

Le régime permanent pour une profondeur 70 cm , et pour une puissance de 15 kW est atteint après 60 heures.

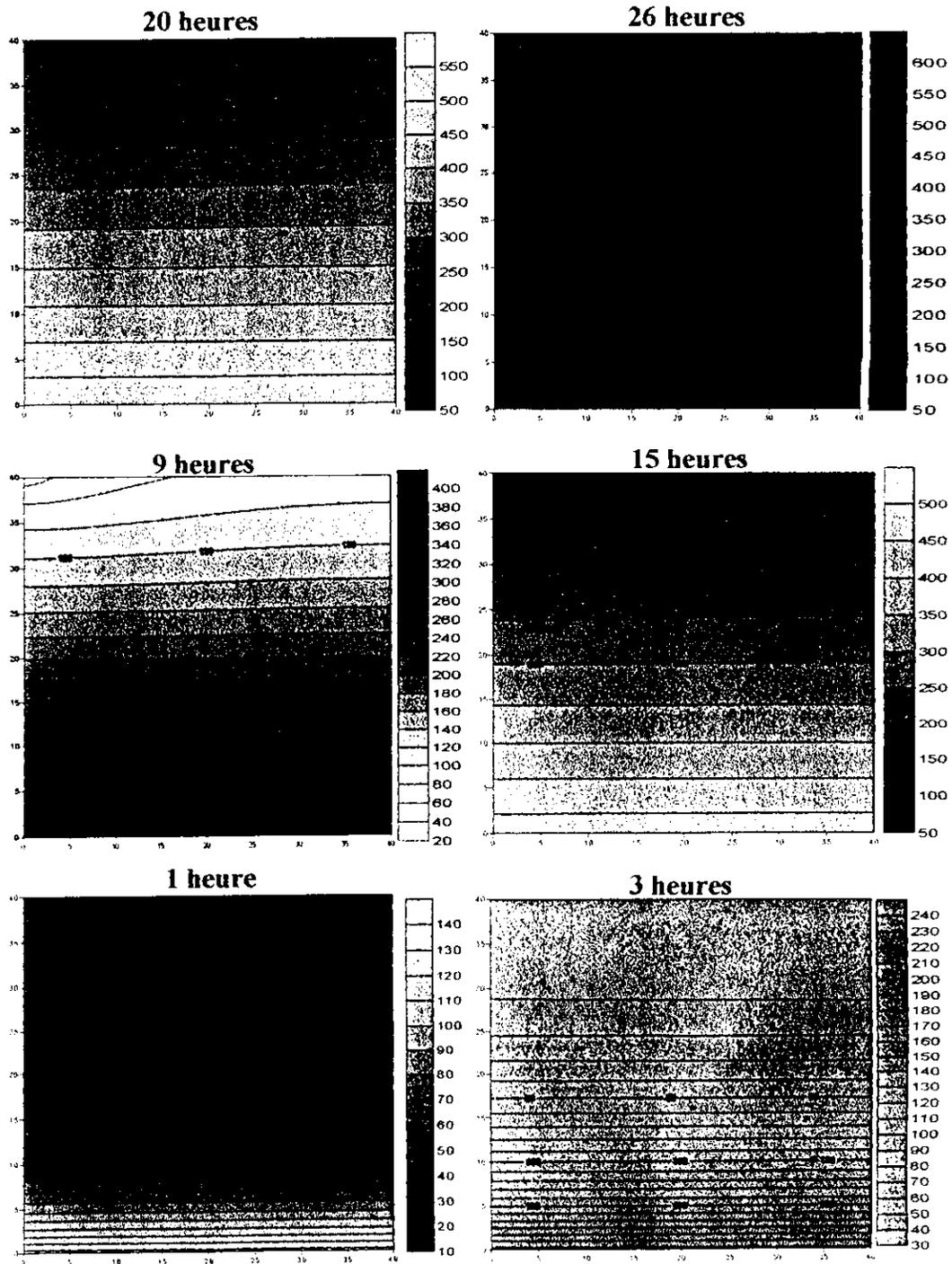
Le régime permanent pour une profondeur 60 cm , longueur 40 cm du câble est pour une puissance de 15 kW est atteint après 44 heures.

V.1.1.1 Isotherme du milieu poreux :

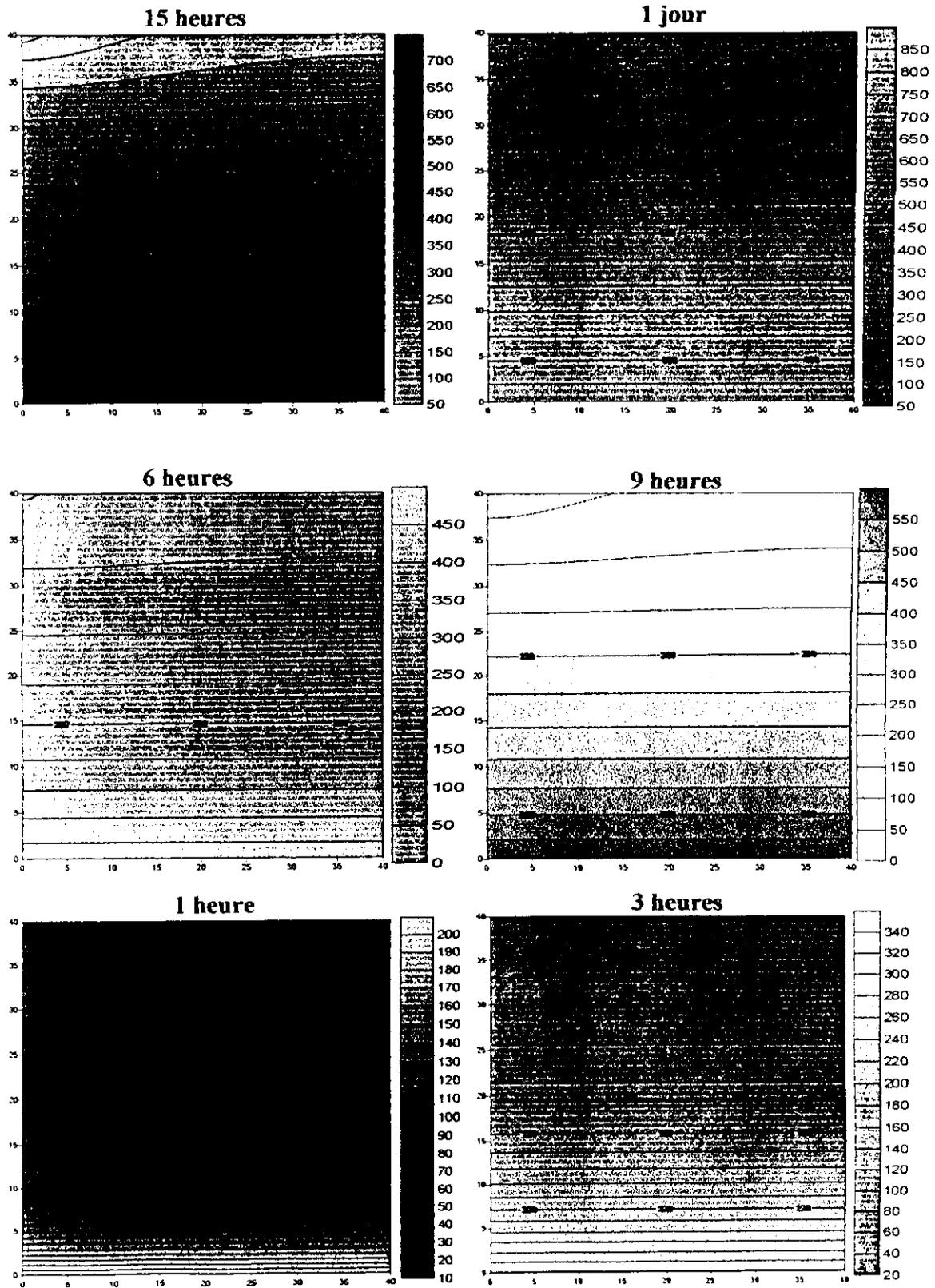
Température du milieu poreux



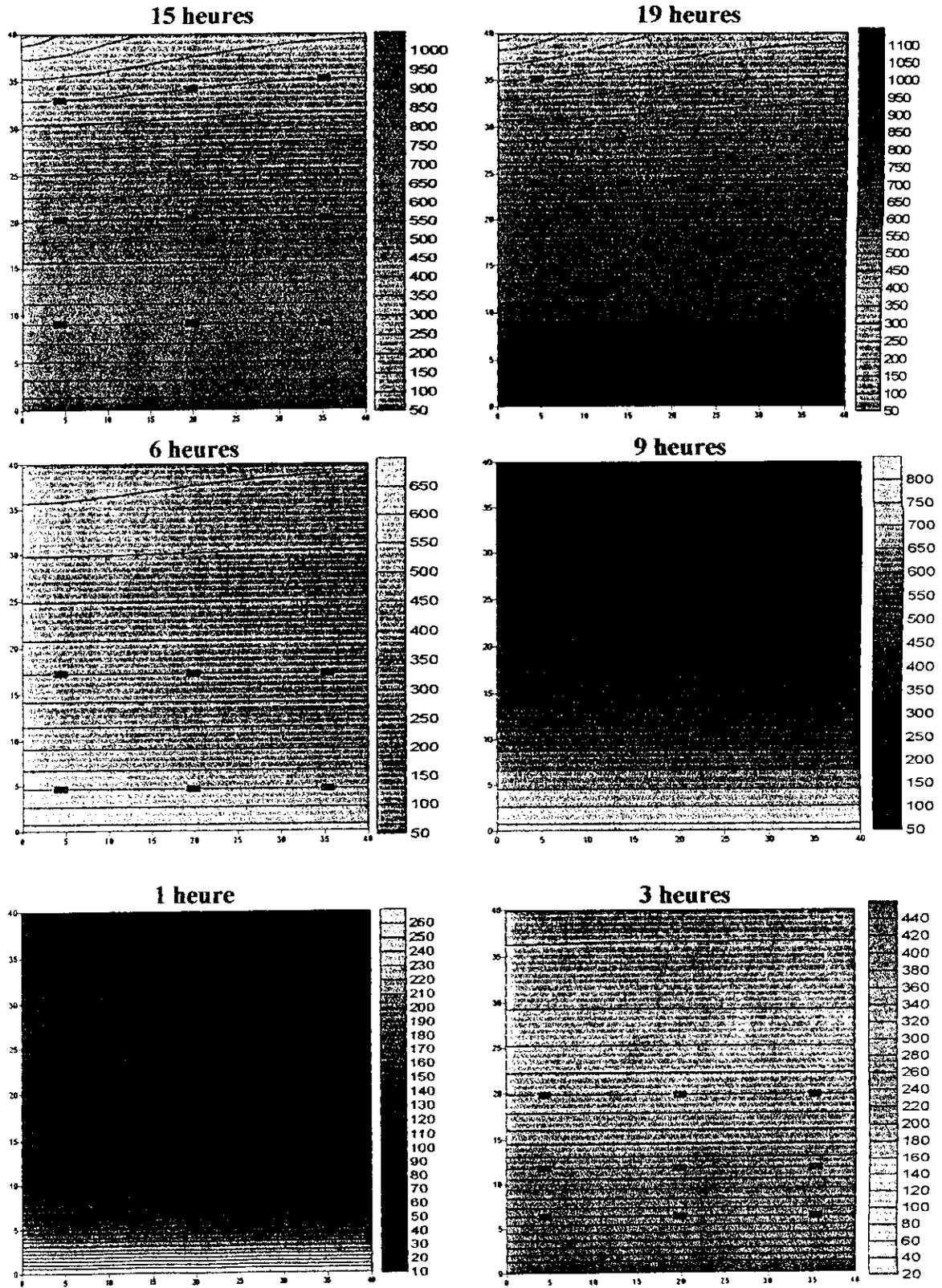
Longueur du câble électrique



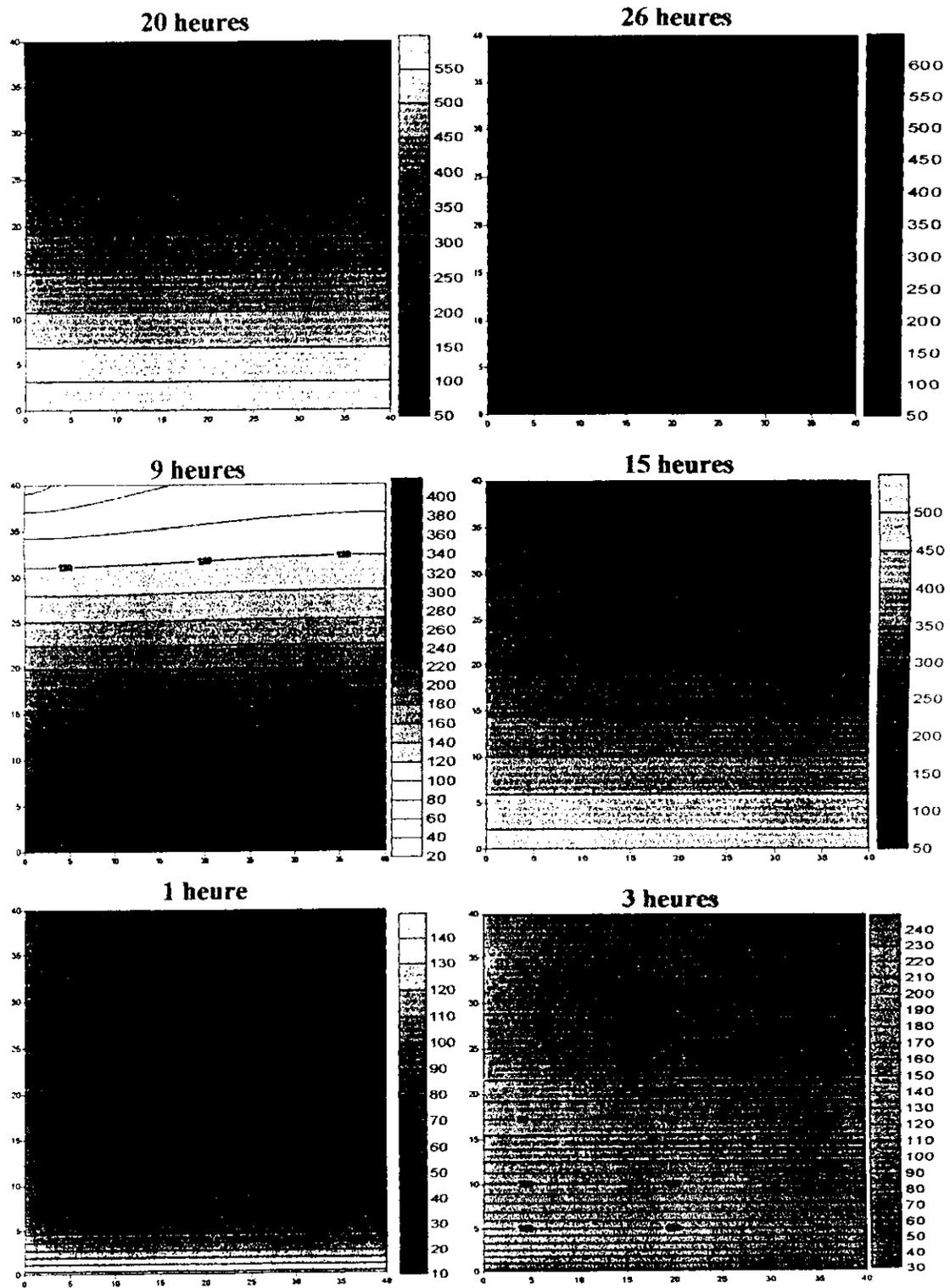
Figures V.1. Isotherme du milieu poreux pour une puissance de 15 Kw, 40 cm de profondeur à différents Instants .



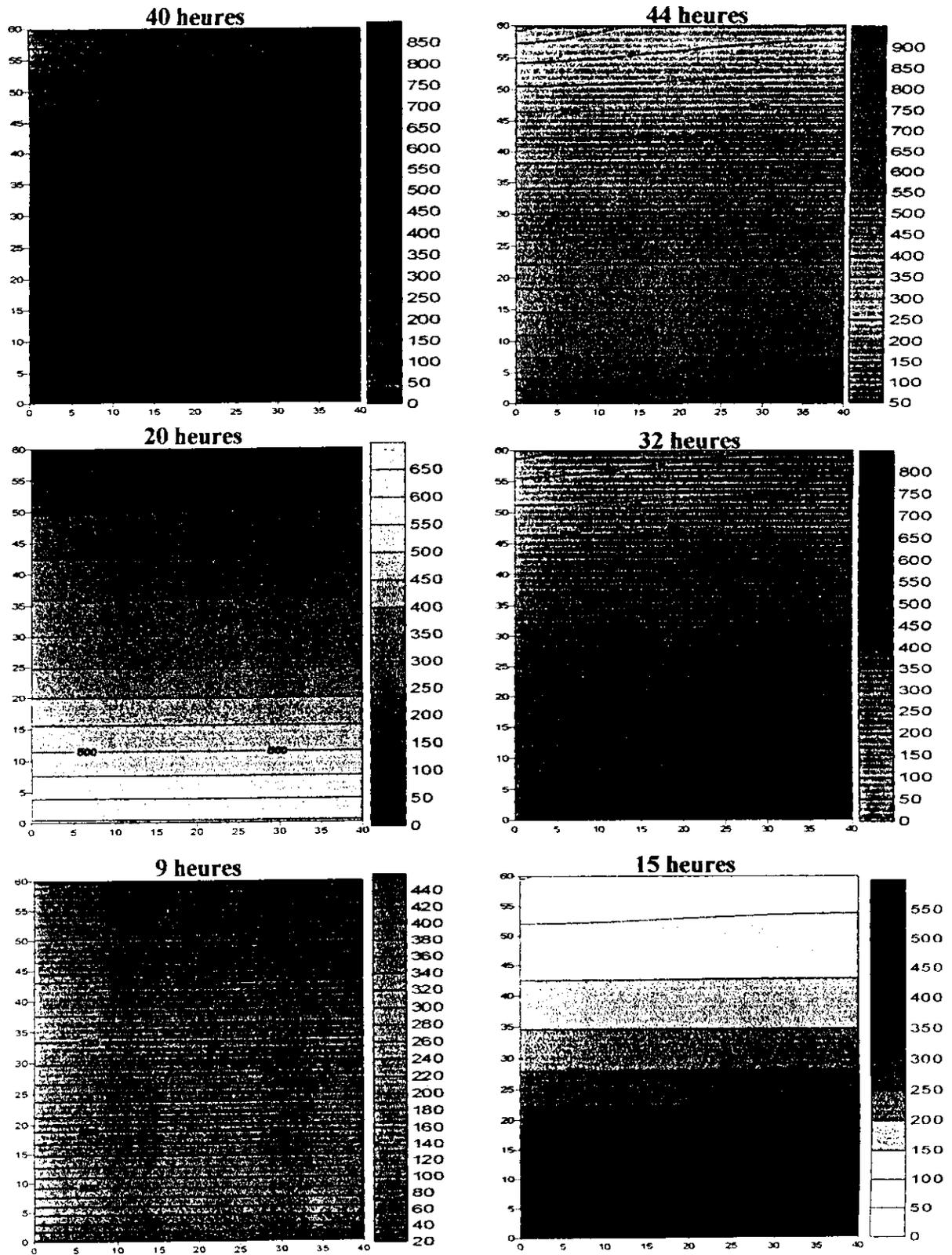
Figures V.2. Isotherme du milieu poreux pour une puissance de 20 Kw, 40 cm de profondeur à différents Instants .



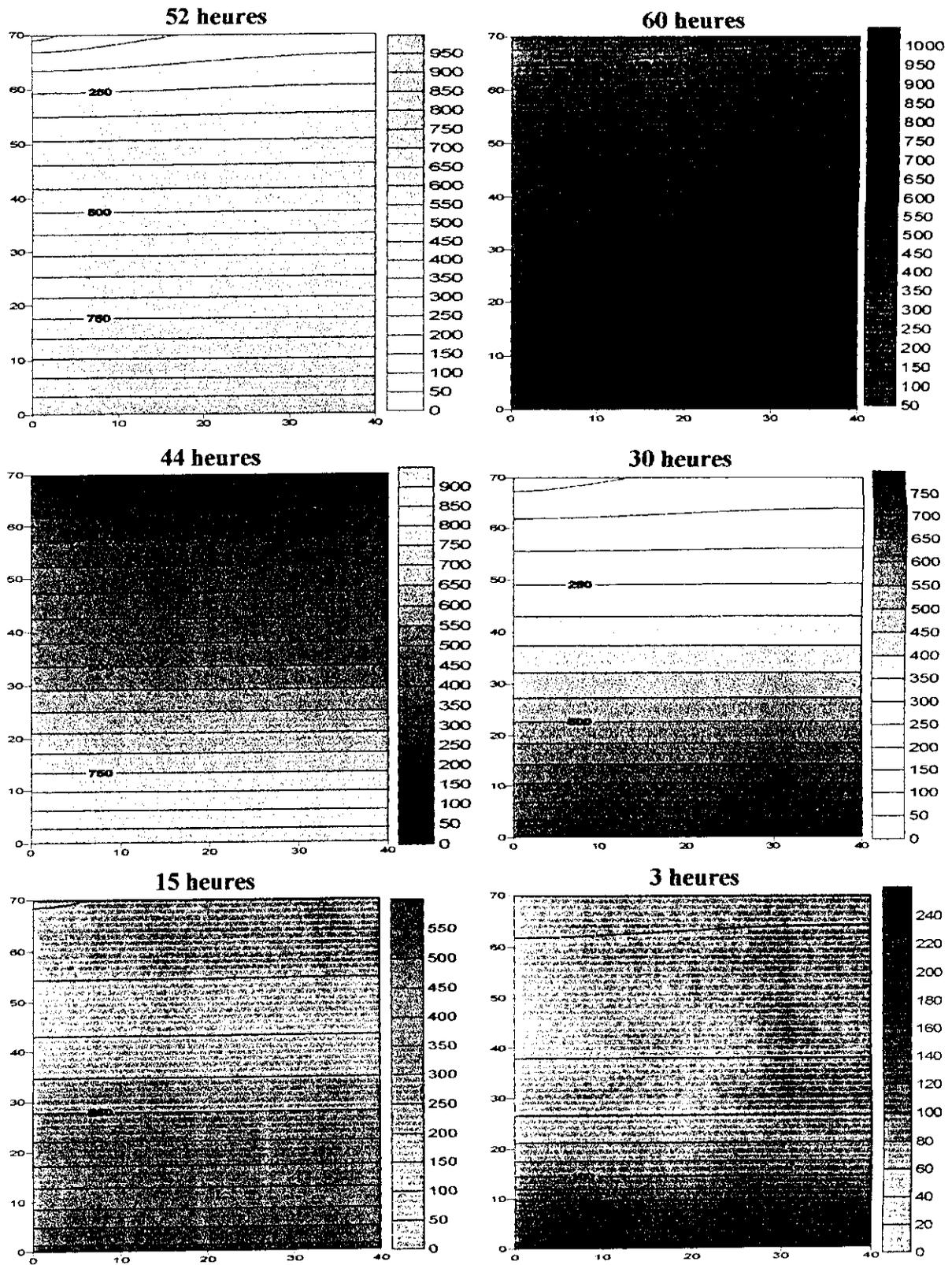
Figures V.3. Isotherme du milieu poreux pour une puissance de 31 Kw, 40 cm de profondeur à différents Instants .



Figures V.4. Isotherme du milieu poreux pour une puissance de 15 Kw, 40 cm de profondeur à différents Instants .

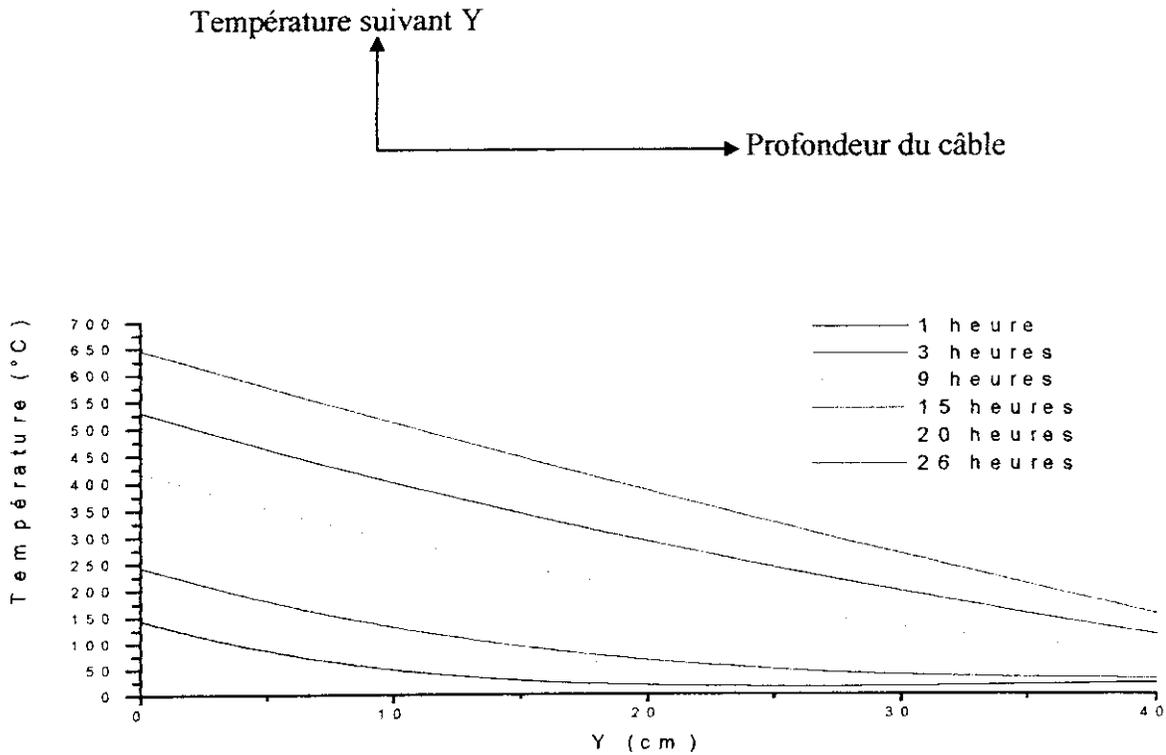


Figures V.5. Isotherme du milieu poreux pour une puissance de 15 Kw, 60 cm de profondeur à différents Instants .

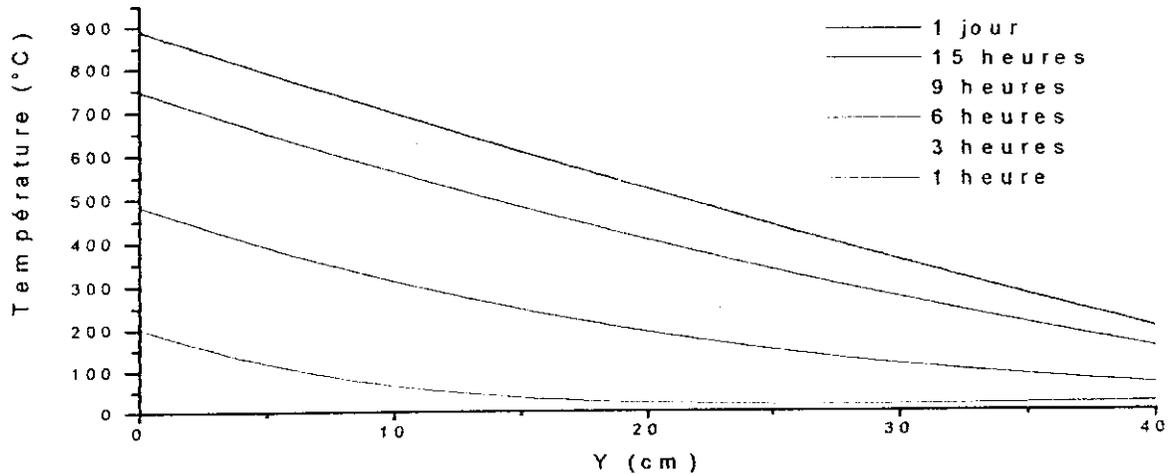


Figures V.6. Isotherme du milieu poreux pour une puissance de 15 Kw, 70 cm de profondeur à différents Instants .

V.1.1.2 Température unidimensionnelle du milieu poreux :



FigureV.7. Evolution spatiale de la temperature unidimensionnelle du milieu poreux pour differents temps et pour une puissance de 15 Kw ,40 cm de profondeur.



FigureV.8. Evolution spatiale de la temperature unidimensionnelle du milieu poreux pour differents temps et pour une puissance de 20 Kw ,40 cm de profondeur.

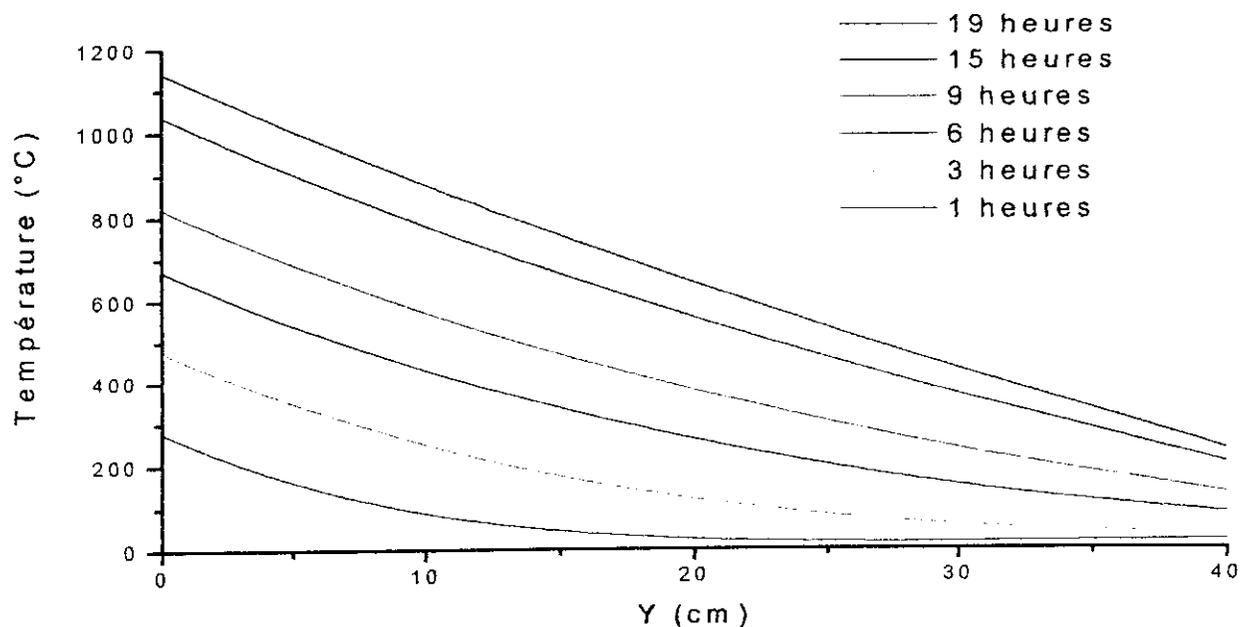
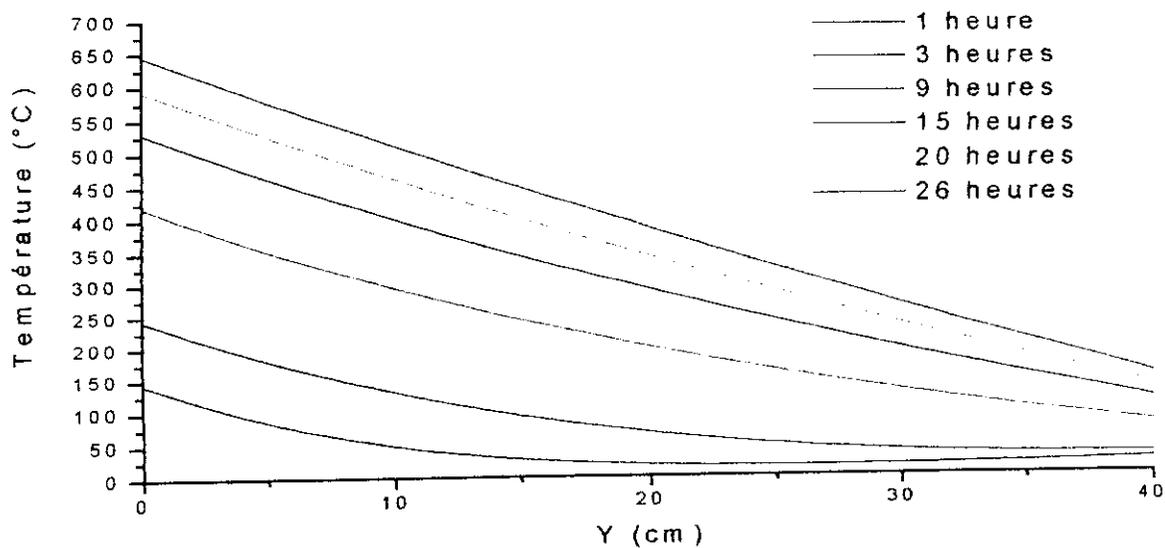
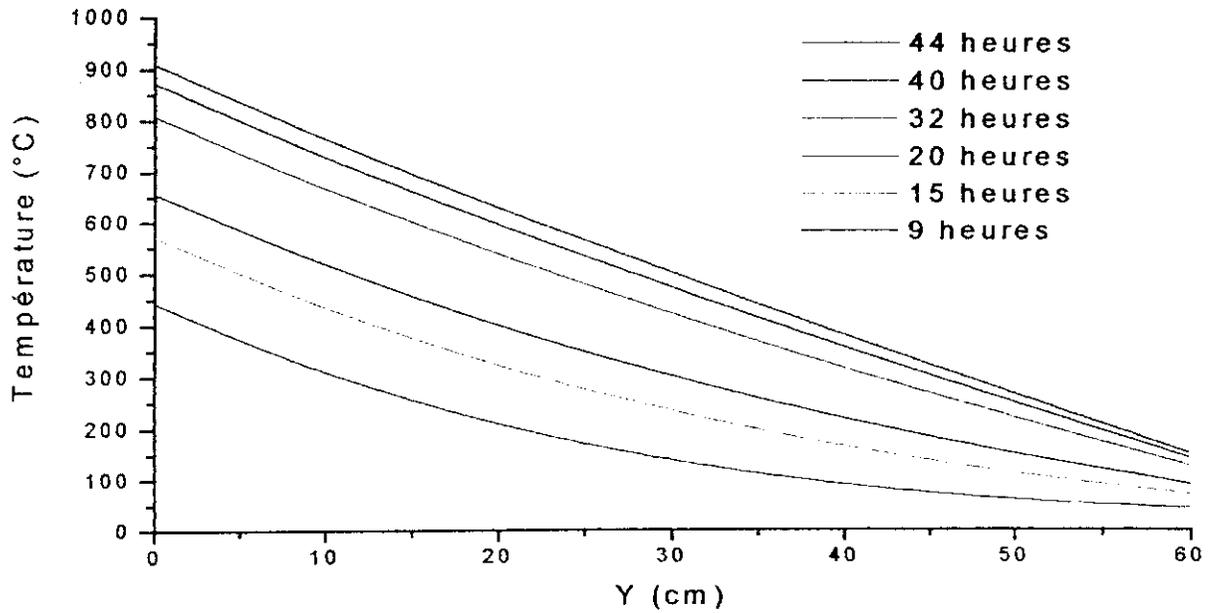


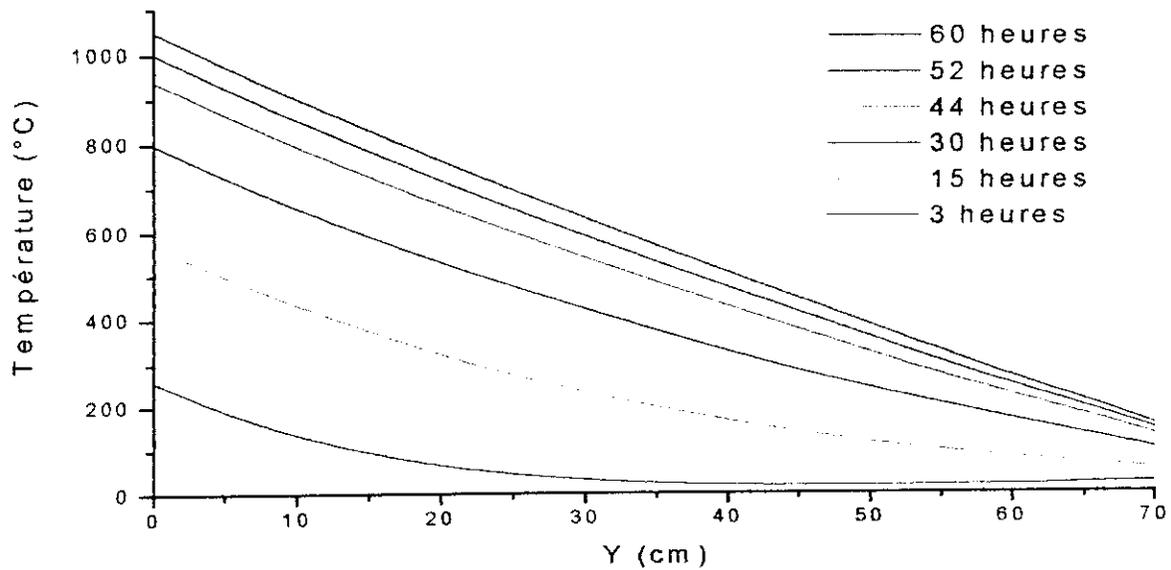
Figure V.9. Evolution spatiale de la temperature unidimensionnelle du milieu poreux pour differents temps et pour une puissance de 31 Kw ,40 cm de profondeur .



FigureV.10. Evolution spatiale de la temperature unidimensionnelle du milieu poreux pour differents temps et pour une puissance de 15 Kw ,40 cm de profondeur.



FigureV.11. Evolution spatiale de la temperature unidimensionnelle du milieu poreux pour differents temps et pour une puissance de 15 Kw ,60 cm de profondeur .



FigureV.12. Evolution spatiale de la temperature unidimensionnelle du milieu poreux

V.1.2 températures superficielles :

Les résultats présentés sont relatifs aux températures de surface à différentes profondeurs du câble électrique .

Les figures (V.13) ,(V.14) et (V.15) respésentent l'évolution de la température de surface pour une profondeur de 40 cm et pour des puissances du câble électrique égales à : 15 Kw ,20Kw et 31 Kw

Les figures (V.16), (V.17) et (V.18) respésentent l'évolution de la température de surface pour une puissance de 15 Kw et pour des profondeurs égales à :40cm, 60 cm et 70 cm

On remarque au début que la température de surface diminue , mais après un certain temps elle augmente , cela est du à l'effet du bord d'attaque ; car au début l'air rechauffe le milieu poreux , mais après un certain temps c'est le phénomène inverse qui se produit c'est à dire que c'est l'air qui refroidit le milieu poreux (i.e une grande valeur du coefficient d'échange au niveau du bord d'attaque) d'ou une valeur élevée de la densité de flux de chaleur en cette zone .

Les figures (V.19), (V.20) et (V.21) respésentent l'évolution de la température superficielle du câble électrique pour une profondeur de 40 cm et pour des puissances du câble électrique égales a : 15 Kw ,20Kw et 31 Kw

Les figures (V.22), (V.23) et (V.24) respésentent l'évolution de la température superficielle du câble électrique pour une puissance de 15 Kw et pour des profondeurs égales à : 40cm, 60 cm et 70 cm

On remarque que la température superficielle du câble augmente en augmentant la puissance du câble électrique , cela est du à l'importance du flux de chaleur évacué par le câble électrique .

On remarque que la température superficielle du cable augmente en augmentant la profondeur du cable lui meme , cela est du à un très faible échange de chaleur entre le milieu poreux et l'écoulement d'air .

V.1.2.1 température de surface au niveau du raccordement :

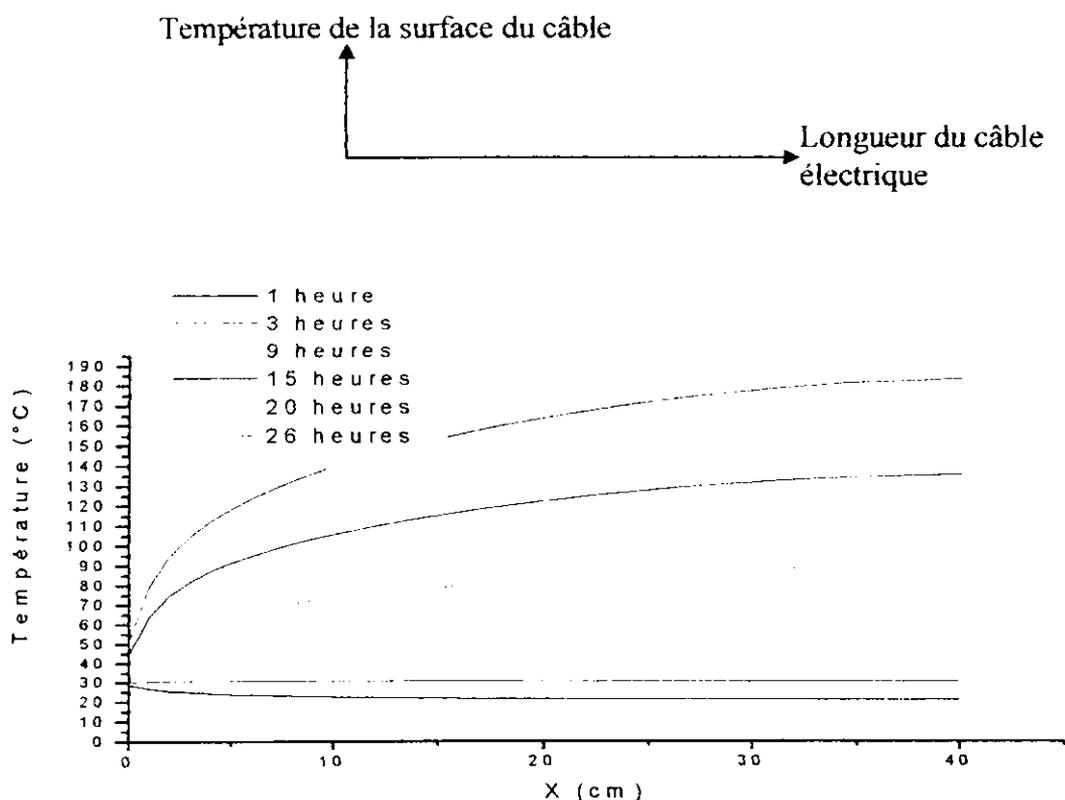


Figure V.13. Evolution de la température superficielle pour une puissance de 15 Kw et pour différents instants pour une profondeur de 40 cm

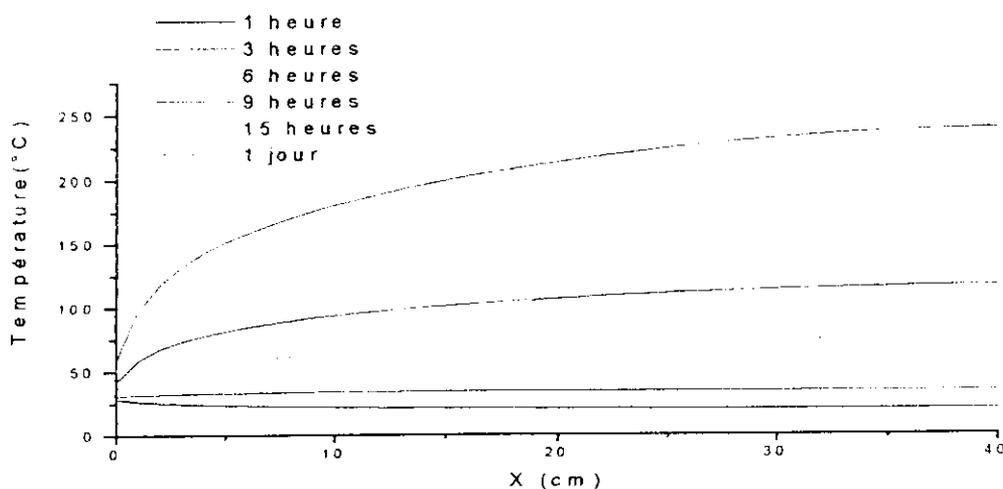


Figure V.14. Evolution de la température superficielle pour une puissance de 20 Kw et pour différents instants pour une profondeur de 40 cm

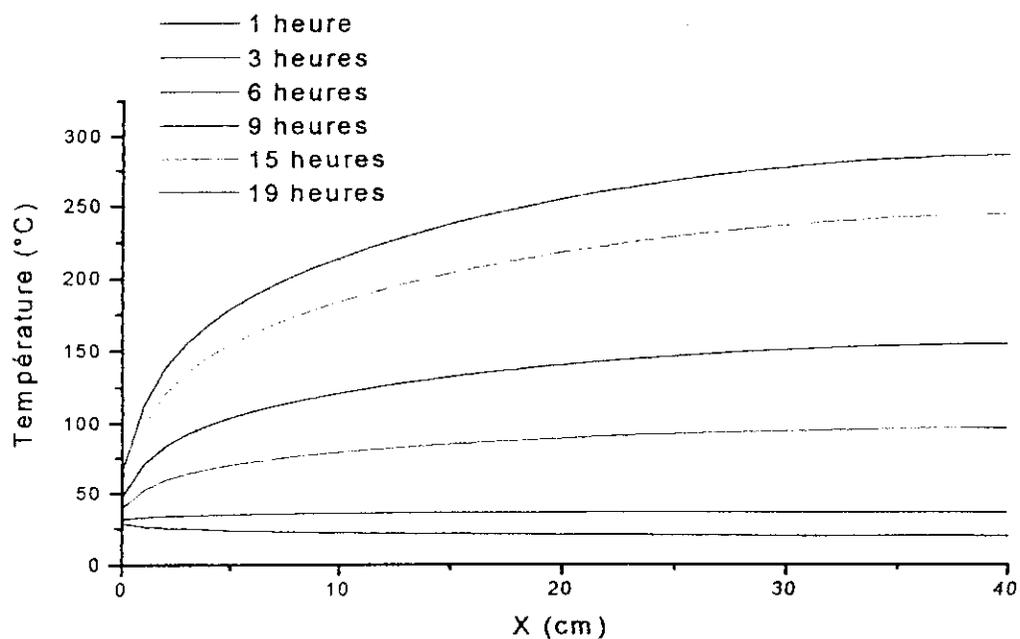


Figure V.15. Evolution de la température superficielle pour une puissance de 31 Kw et pour différents instants pour une profondeur de 40 cm

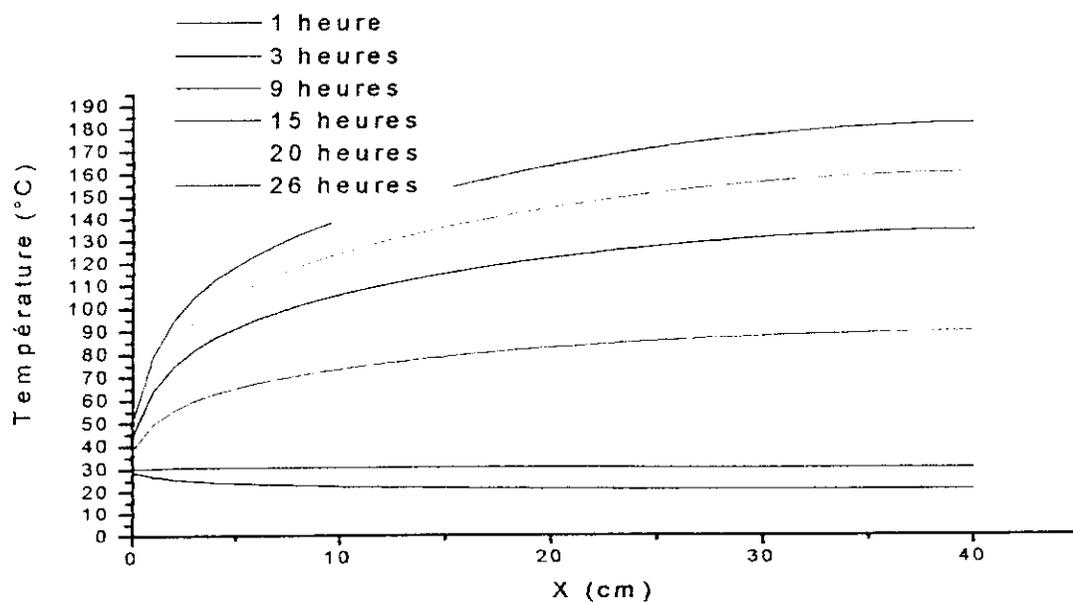


Figure V.16. Evolution de la température superficielle pour une puissance de 15 Kw et pour différents instants pour une profondeur de 40 cm

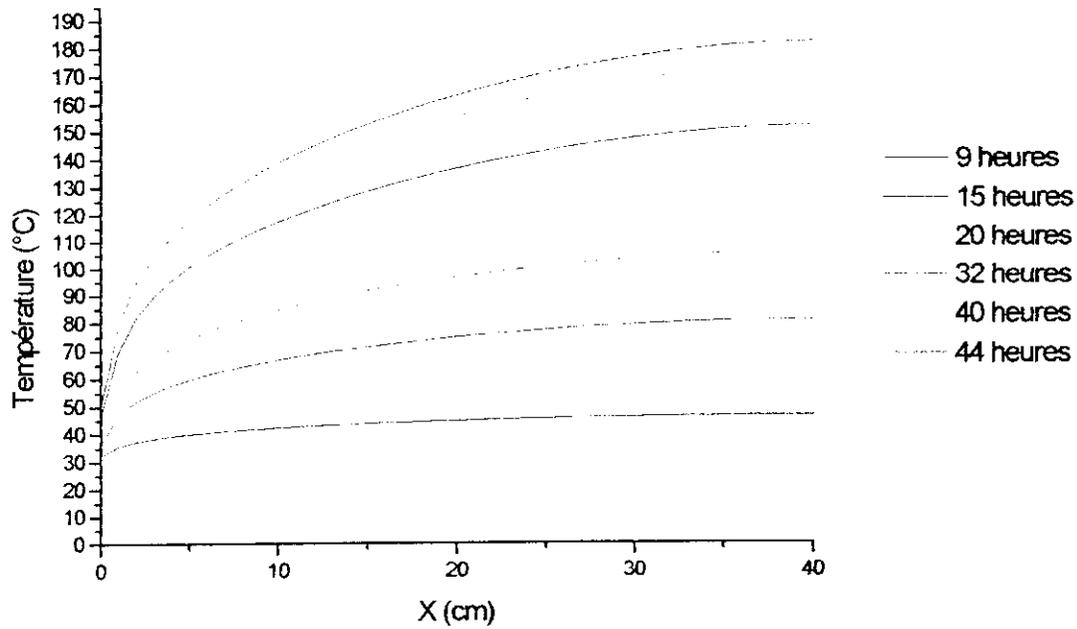


Figure V.17. Evolution de la temperature superficielle pour une puissance de 15 Kw et pour differents instants pour une profondeur de 60 cm

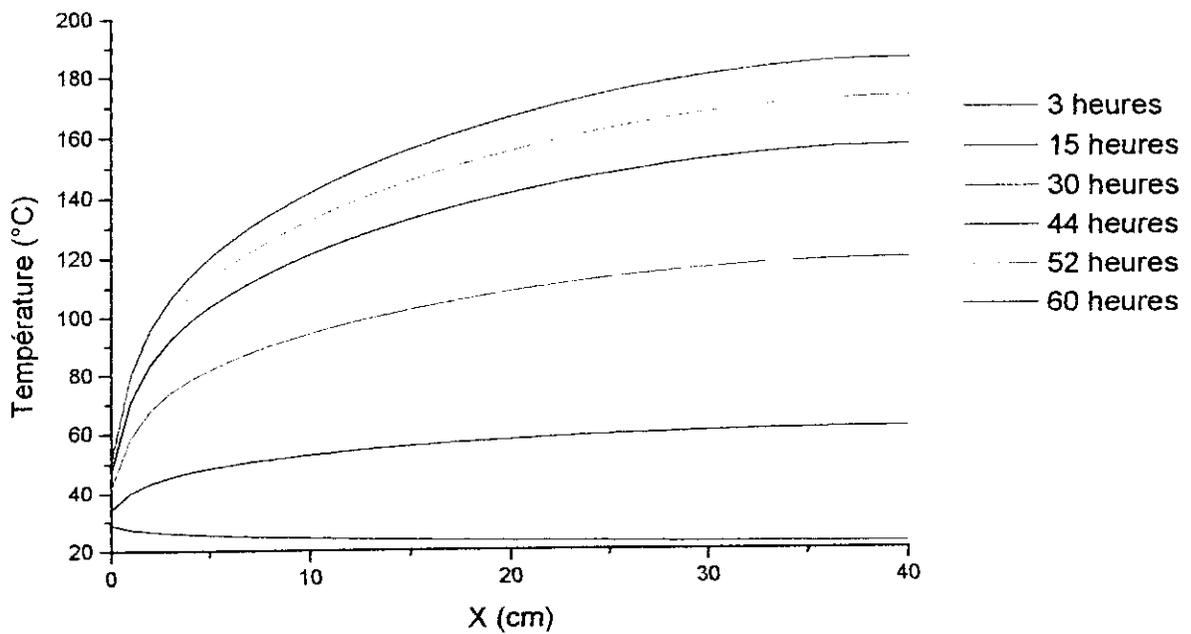


Figure V.18. Evolution de la temperature superficielle pour une puissance de 15 Kw et pour differents instants pour une profondeur de 70 cm

V.1.2.2 Température superficielle du câble électrique :

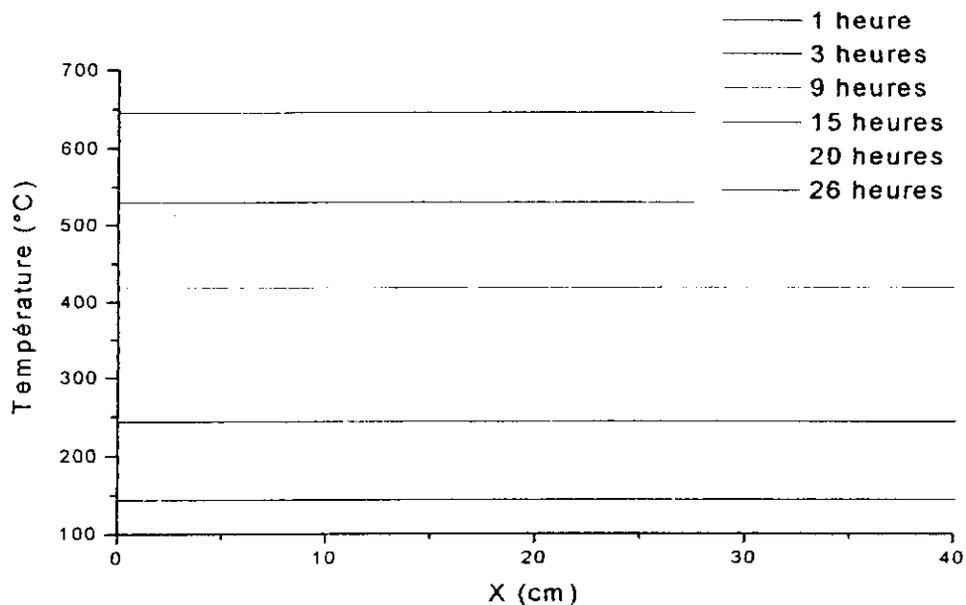


Figure V.19. Evolution de la temperature superficielle du cable pour une puissance de 15 Kw et pour une profondeur de 40 cm à differents instants.

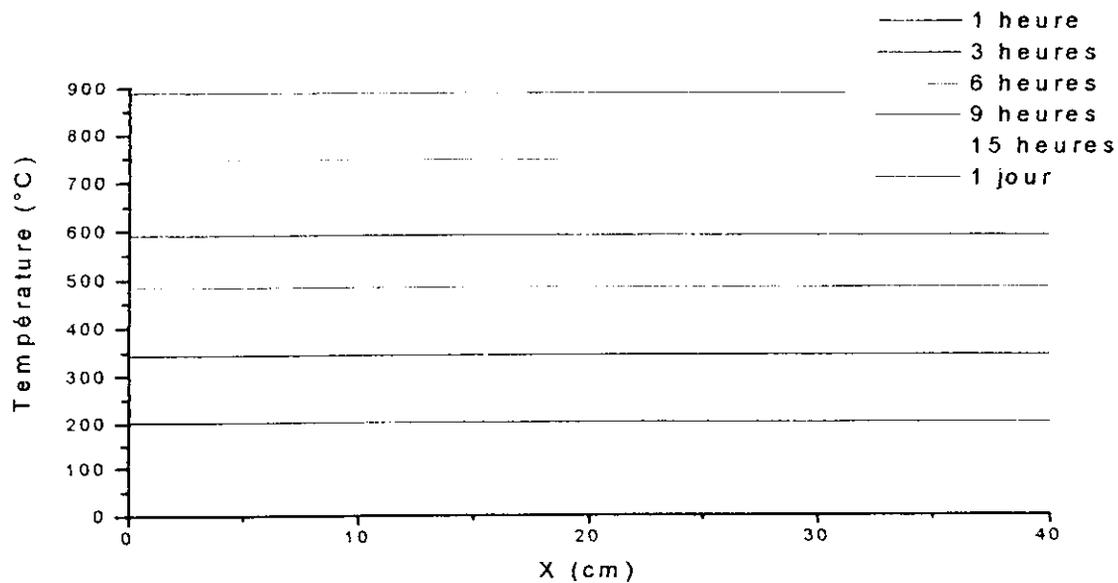


Figure V.20. Evolution de la temperature superficielle du cable pour une puissance de 20 Kw et pour une profondeur de 40 cm à differents instants.

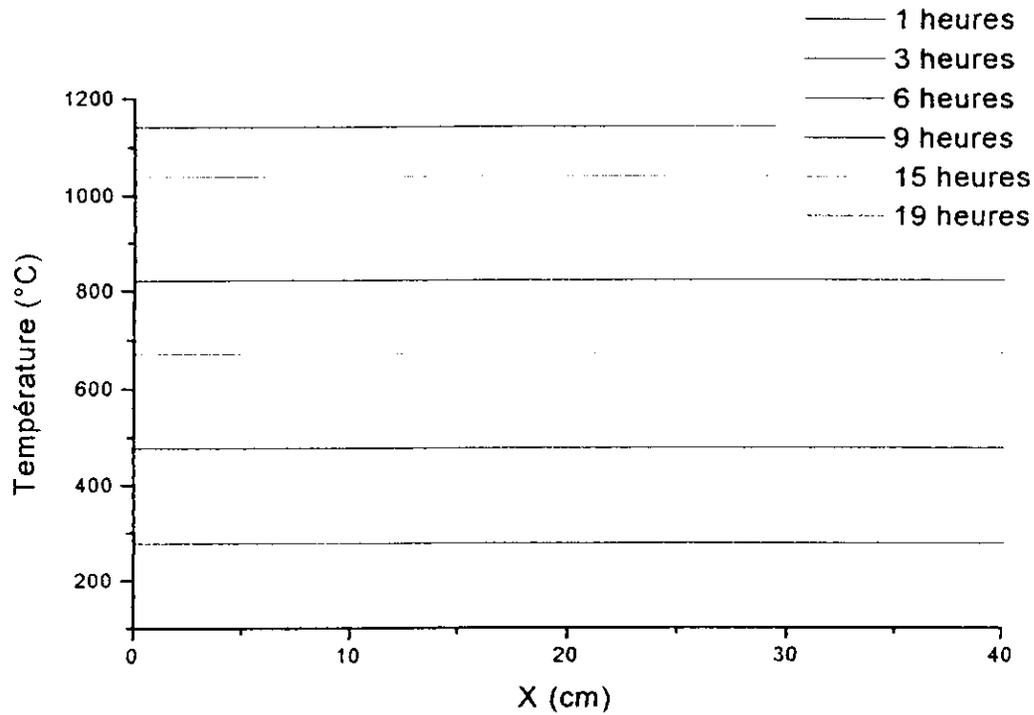


Figure V.21 Evolution de la temperature superficielle du cable pour une puissance de 31 Kw et pour une profondeur de 40 cm à différents instants.

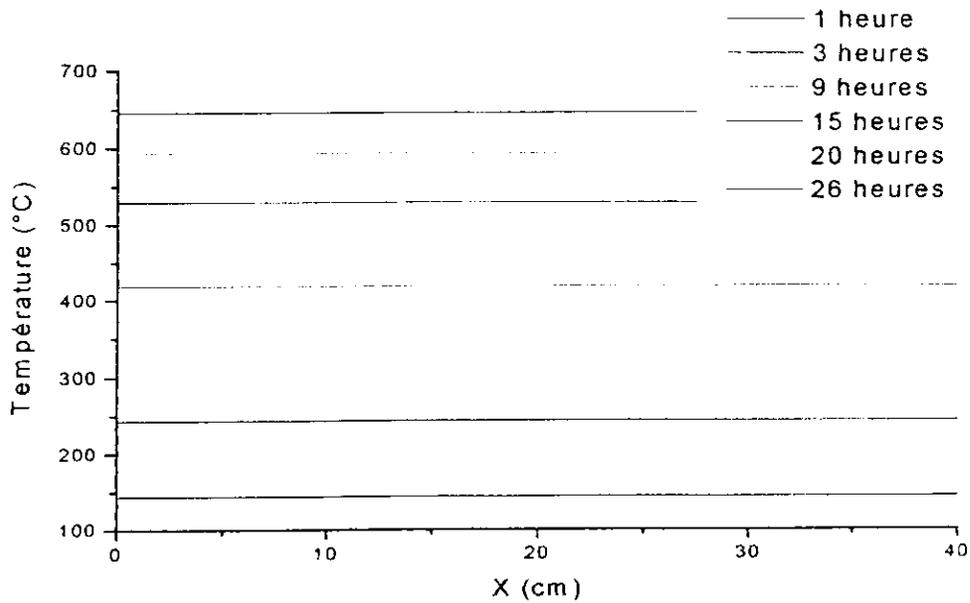


Figure V.22. Evolution de la temperature superficielle du cable pour une puissance de 15 Kw et pour une profondeur de 40 cm à différents instants.

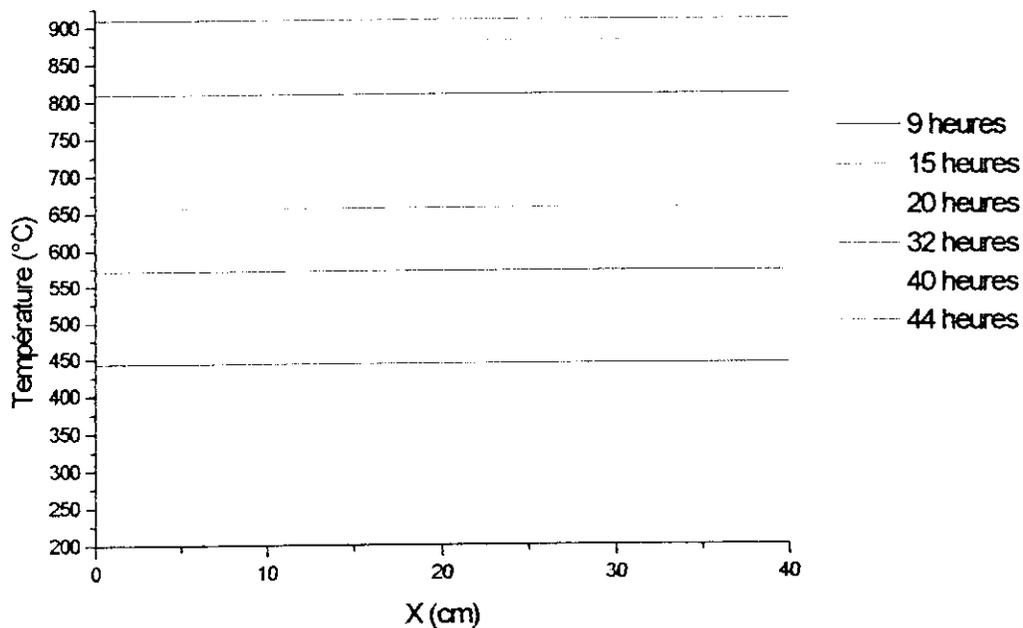


Figure V.23. Evolution de la température superficielle du câble pour une puissance de 15 Kw et pour une profondeur de 60 cm à différents instants.

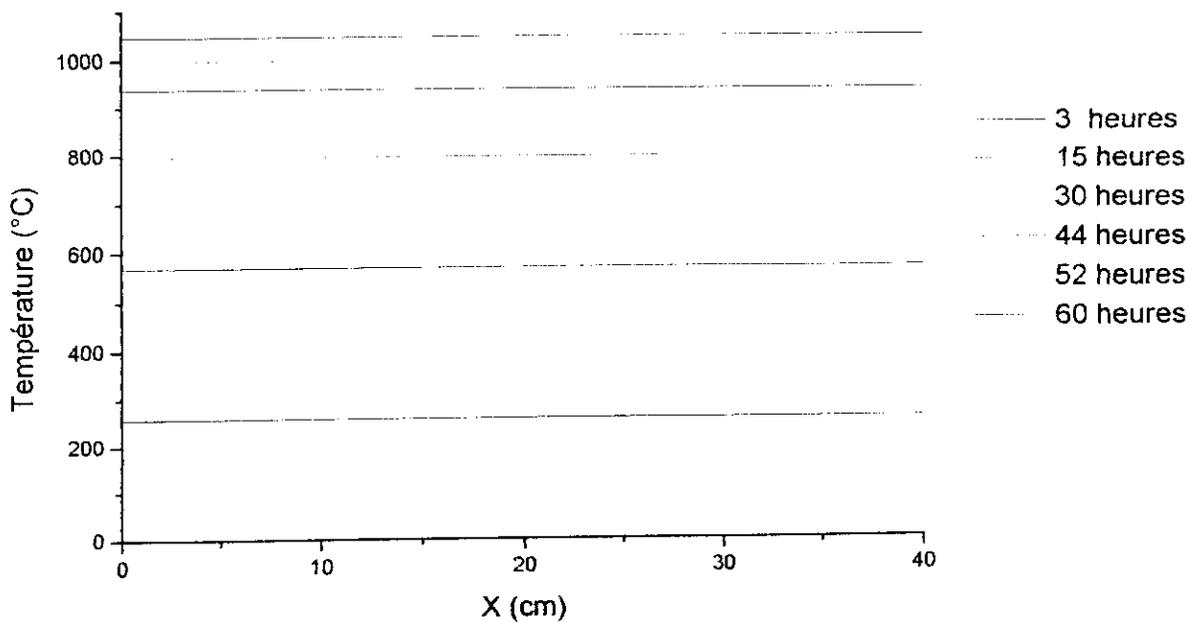


Figure V.24. Evolution de la température superficielle du câble pour une puissance de 15 Kw et pour une profondeur de 60 cm à différents instants.

CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION

Le travail présenté dans ce mémoire, concerne l'étude de l'interaction entre un milieu poreux (terre et câble électrique souterrains) et un écoulement d'air externe . La recherche de solution à ce problème a nécessité la résolution simultanée des équations des couches limites dynamique et thermique ainsi que l'équation de la chaleur du milieu poreux .

La résolution de l'équation de la chaleur dans le milieu poreux obtenu par couplage avec les équations de l'écoulement externe , nous a permis de noter :

- Que si on augmente la puissance du câble électrique , la température du milieu poreux augmente ;
- Que si on augmente la profondeur du milieu poreux tout en gardant la puissance du câble électrique constante, la température du milieu poreux augmente ;
- Que si on augmente la puissance du câble électrique , la température superficielle du câble augmente ;
- Que si on augmente la profondeur du milieu poreux , la température superficielle du câble augmente ;
- L'effet du bord d'attaque sur la température superficielle au niveau du raccordement.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M.Pays. Câble de transport d'énergie, Techniques de l'ingénieur (2002).
- [2] M.Prat . Modélisation des transferts en milieu poreux changement d'échelle et conditions aux limites , Thèse de doctorat ES – SCIENCES physique , Institut National Polytechnique de Toulouse (1989).
- [3] H.Schlichting, Bondary layer theory , McGraw-Hill (1979).
- [4] F.P.Incropera, D.P.De Witt, Fundamentals of heat and mass transfer. John Wiley and sons (1984).
- [5] L.Prandtl. Guide à travers la mécanique des fluides. Dunod (1952).
- [6] S.LARBI. OUKACHA, H.BELHANECHÉ, Aspect bidimensionnel de la condensation dans les parois internes des structures, Congrès Euro Méditerranéen de la matière condensée 4 au 6 juin 2001, Tlemcen, Algérie .
- [7] J.P.Holman, P.R.S.White, Heat transfer Mc GRAW-HILL BOOK COMPANY (1992).
- [8] B.Carnahan. Applied nuemrical methods. J.Wiley and Sons (1969).
- [9] R.Peyret. D.Taylor, Computational Methods for Fluid Flow. Springer-Verlag (1990).
- [10] M.Prat. Heat and mass transfers predetermination between a drying material and an external flow, Int. Drying Symposium Paris. P-2-3, (1986) .
- [11] André B. De Vriendt, La transmission de la chaleur . Volume1, Tome2, éditeur : Gaëtan Morin. (1984) .