

14/03

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

Projet de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en génie mécanique

Thème :

**LUBRIFICATION
DES ENGRENAGES
CONIQUES DROITS**

Proposé Par :

Mr M. BOUAZIZ

Etudié par :

Mr HADDAK NABIL

Dirigé par :

Mr M. BOUAZIZ

Promotion
- Septembre 2003 -



E.N.P 10, Avenue Hassen Badi – El Harrach – Alger

العمل المقدم في هذه المذكرة يتعلق بإنشاء منحنيات توزيعات الضغوط و سمك فيلم زيت التشحيم في اتصال إلاستوهيدروديناميك، لمسنتين مخروطيين صحيحين مع الإينفولتيز الكروي. أولاً، بدأنا بدراسة هندسية مفصلة، ثم عرض للنظرية المستعملة، متبوع بمثال يتناول هذا النوع من المسننات. تظهر النتائج تأثير مختلف المتغيرات على الظاهرة

مواجهة نتائجنا مع الموجودة في مختلف المراجع أظهرت اتفافية جيدة بين الاثنان.

الكلمات المفتاحية: إلاستوهيدروديناميك، الضغوط، سمك فيلم زيت التشحيم

RESUME :

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'établissement des courbes représentants les distributions de pressions et d'épaisseurs du film d'huile lubrifiant dans un contact élastohydrodynamique, pour un couple d'engrenages coniques droits à développante sphérique. Dans un premier temps, on c'est intéressés à l'étude géométrique détaillée. Puis, on a exposé la théorie à appliquer, suivie d'une application sur ce type d'engrenage. Les résultats retrouvés montrent les influences des différents paramètres définissons l'engrènement sur le phénomène. La confrontation de nos résultats à ceux de la littérature a montré un bon accord entre les deux.

Mots clés : élastohydrodynamique – pression – épaisseur du film.

ABSTRACT:

The work presented in this memory relates to the establishment of the curves representatives the distributions of pressures and thicknesses of lubricating oil film in an elasto-hydrodynamic contact, for a couple of right bevel gear with spherical involutes. Firstly, we started with a detailed geometrical study. Then, one exposed the theory to be applied, followed of an application to this type of gears. The found results show the influences of the various parameters define engaging on the phenomenon. The confrontation of our results in those of the literature showed a good agreement between the two.

Key words: elasto-hydrodynamic – pressure – thicknesses of lubricating oil film

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier dieu pour la volonté et le courage qu'il ma donnés pour l'achèvement de ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon promoteur Mr. M.BOUAZIZ pour ses encouragements, son suivi, et pour les conseils qu'il a apporté pour la réalisation de ce projet.

Je tiens à remercier particulièrement mes professeurs Mr. H. BELHANACHE et Mr. TAZI pour avoir accepter d'examiner ce travail, ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation, sans oublier tout le personnel de la bibliothèque.

Mes remerciements vont également à mes collègues et amis de la promotion.

INTRODUCTION GENERALE	2
<u>Chapitre I : GENERALITES SUR LES ENGRENAGES CONIQUES</u>	
I-1) DIFFERENTS TYPES D' ENGRENAGES CONIQUES	5
I-1-a) Les engrenages coniques droits	5
I-1-b) Les engrenages Zerol	6
I-1-c) Les engrenages Spiro-coniques	7
I-1-d) Les engrenages Hypoïdes	8
I-2) TAILLAGE ENGRENAGES CONIQUES	9
I-2-a) Procédure de taillage par non-génération	9
<u>Chapitre II : CALCUL DES ENGRENAGES CONIQUES DROITS A DEVELOPPENTES DE CERCLE SPHERIQUE</u>	
II-1) LA DEVELOPPANTE DE CERCLE SPHERIQUE	11
II-1-a) Engrenement de deux engrenages coniques	12
II-1-b) Arc de conduite	13
II-1-c) Interférence primaire	15
II-1-d) Rapport de conduite	15
II-2) CALCUL DES ENGRENAGES CONIQUES	15
II-3) RAYON DE COYURBURE DE LA SURFACE DE DENTURE	18
II-4) RELATIONS ANGULAIRE DANS LE PLAN D'ENGREMENT	18
II-4-a) Définition de la zone d'action	18

II-4-b) Détermination du secteur utile de la zone d'action	21
II-4-c) Détermination des conditions d'interférence primaire	22
II-5) ETUDE CINEMATIQUE	22
II-5-a) Calcul des vitesses de roulement et de glissement au point de contact	23
II-6) LA CHARGE	27
II-6-a) Déflexion des dentures	27
1- P_U est uniforme	29
2- P_U n'est pas uniforme	29
II-7) CALCUL DE LA PRESSION DE HERTZ AU POINT DE CONTACT	30
II-8) CALCUL DES ENGRENAGES CONIQUES DROITS EN FONCTION DES PARAMETRES FONDAMENTAUX	31
II-8-a) Vitesse de glissement et pression de HERTZ	33
II-9) GENERATION THEORIQUE DE LA DENTURE CONIQUE DROITE PRATIQUE	33
II-9-a) Equation du plan de génération	34
II-9-b) Relation entre θ_2 et θ_3	35
II-9-c) Calcul de θ_2 en fonction de θ_1	36
II-9-d) Calcul de X_0 et de Y_0	36
II-9-e) Calcul de Z_0	37
II-9-f) Coordonnées du point M exprimées dans le référentiel (S, X_1, Y_1, Z_1)	37
II-9-g) Composantes de la normale à la surface de la denture	38
II-10) REGIMES DE LUBRIFICATION DANS LES ENGRENAGES	40
II-10-a) Le régime de lubrification limite	40
II-10-b) Le régime de lubrification mixte	40
II-10-c) Le régime hydrodynamique	41

CONCLUSION	41
------------	----

Chapitre III : LA LUBRIFICATION ELASTOHYDRODINAMIQUE

III-1) INTRODUCTION	42
III-2) MODELE GEOMETRIQUE ET CINEMATIQUE	43
III-2-a) Géométrie générale d'un contact HERTZIEN	43
III-2-b) Modèle géométrique équivalent	43
III-2-c) Modèle cinématique	44
III-3) EQUATIONS DES CONTACTS HERTZIENS LUBRIFIES	44
III-3-a) Equations des fluides visqueux	44
III-3-b) Equations des films minces visqueux	45
III-3-c) Equation de REYNOLDS	47
III-3-c-1) Hypothèses d'études	47
III-3-c-2) Conditions aux limites des vitesses	51
III-3-c-3) Conditions aux limites des pressions	51
III-4) COMPORTEMENT DU LUBRIFIANT	52
III-4-a) Comportement piézovisqueux	52
III-4-b) Comportement piézo-densimétrique	53
III-5) PRESSION REDUITE ET COEFFICIENT DE PIEZOVISCOSITE	53
III-6) EQUATION DE L'ELASTICITE	54
III-7) EQUATION DE L'EQUILIBRE	55
III-8) FORMATION DU FILM D'HUILE	56
III-8-a) Film d'huile minimal H_0	56
III-8-b) La Hauteur Géométrique H_g	57
III-8-c) La Hauteur de la déformation élastique H_d	58
CONCLUSION	58

Chapitre IV : SCHEMA NUMERIQUE

IV-1) FILM D'HUILE	59
IV-1-a) Film d'huile minimal H_0	59
IV-1-b) La Hauteur Géométrique H_g	59
IV-1-c) La Hauteur de la déformation élastique H_d	60
IV-2) EQUATION DE REYNOLDS	60
IV-3) ORGANIGRAMME DE RESOLUTION	63

Chapitre V : RESULTATS ET INTERPRETATIONS

V-1) Programme de calcul des rayons de courbure	66
V-2) La distribution de pression et l'épaisseur du film d'huile	68
V-3) Comparaison entre la pression EHD et celle de HERTZ	70
V-4) Variation de la largeur des dents	71
V-5) Variation de la vitesse linéaire au point de contact	72
V-6) Variation de la charge	74

<u>CONCLUSION GENERALE</u>	75
-----------------------------------	----

Table des figures

Fig.1:	Denture d'un engrenage conique droit	05
Fig.2:	Denture d'un engrenage Zerol	06
Fig.3:	Denture d'un engrenage spiro-conique	07
Fig.4:	Denture d'un engrenage hypoïde	08
Fig.5:	Taillage d'engrenage par non-génération	10
Fig.6:	Profil d'un dent taillée par non-génération	10
Fig.7:	La développante de cercle sphérique	11
Fig.8:	Engrènement de deux engrenages conique	13
Fig.9:	Définition de l'arc de conduite	14
Fig.10:	Rayon de courbure de la surface de denture	16
Fig.11:	Définition de la zone d'action	20
Fig.12:	Vitesse d'un point M de la développante de cercle sphérique	24
Fig.13:	Projection du vecteur vitesse $\overline{V_M}$	25
Fig.14:	Relation entre les rayons de courbure d'un couple d'engrenage	27
Fig.15:	Génération d'une denture conique droite pratique	34
Fig.16:	Génération d'une denture octoïde 1 ^{ère} espèce	39
Fig.17:	Génération d'une denture octoïde 2 ^{ème} espèce	39
Fig.18:	Système des coordonnées et forces actives sur un élément du fluide	47
Fig.19:	Comparaison entre rayon de courbure théorique et rayon de courbure 1 ^{er} espèce et 2 ^{ème} espèce pour R=20mm	66
Fig.20:	Comparaison entre rayon de courbure théorique et rayon de courbure 1 ^{er} espèce et 2 ^{ème} espèce pour R =115mm	66
Fig.21:	Comparaison entre les rayons de courbures pour R=20mm et R=115mm	67
Fig.22:	Distribution de pression et épaisseur du filme d'huile en fonction du rayon de courbure pour R=20mm	68
Fig.23:	Distribution de pression et épaisseur du filme d'huile en fonction du rayon de courbure pour R = 115mm	68
Fig.24:	Comparaison entre pression de hertz et pression EHD pour R=20mm	69
Fig.25:	Comparaison entre pression de HERTZ ET EHD pour R=115mm	70

Fig.26: Variation de L sans changement de R pour le cône primitif	70
Fig.27: Distribution de pression pour différentes largeurs de la denture	71
Fig.28: Variation de la pression pour différentes valeurs de U	72
Fig.29: Variation de l'épaisseur du film d'huile pour différentes valeurs de U	72
Fig.30: Variation de la pression EHD pour différentes valeurs de W	73
Fig.31: Variation de l'épaisseur du film d'huile pour différentes valeurs de W	74

NOMENCLATURE

NOMENCLATURE

L	rayon de la sphère H [mm]
m_n	module normal [mm]
$k = \frac{Z_1}{Z_2}$	raison du train d'engrenage
S_1, S_2	demi-angles au sommet des cônes primitifs [°]
s_1, s_2	demi-angles au sommet des cônes de base [°]
C_1, C_2	demi-angles au sommet des cônes de tête [°]
r_1, r_2	rayon de base des cercles de base des cônes de base [mm]
R'_1, R'_2	rayons de tête des cercles de base des cônes de tête [mm]
R_1, R_2	rayons primitifs des cercles de base des cônes primitifs [mm]
Z_1, Z_2	nombre des dents des engrenages
R_C	rapport de conduite
A, B	points de tangence du plan d'engrènement et des surfaces de base
F, G	premier et dernier points de contact des dentures
I	point primitif
M	point courant décrivant l'engrènement
P	charge par unité de longueur $\left[\frac{N}{m} \right]$
S	sommet commun des différents cônes, centre de la sphère H
T	grand cercle de la sphère H, ou plan d'engrènement

ASB	angle limitant la zone d'action [°]
FSG	angle utile de la zone d'action [°]
P	la pression de HERTZ [Pa]
K	une constante dépendant des unités et de la forme du contact
P_U	la charge par unité de longueur [N/m]
E_i	module de YOUNG [Pa]
$U_i(x_i, t)$	les composants du vecteur vitesse dans les axes X_i [m/s]
U	la vitesse du fluide [m/s]
f_i	les composants des forces volumétriques [N]
t	le temps [s]
k	le coefficient de conductibilité thermique [W/m.K]
h_0	l'épaisseur du film d'huile au centre du contact [mm]
u_1, u_2	les vitesses de surfaces des deux cylindres suivant la direction x [m/s]

Symbole grec

ρ	la masse volumique [kg/m ³]
ρ_0	est la masse volumique à pression ambiante [kg/m ³]
ρ_1, ρ_2	rayon de courbures des surfaces de denture [mm]
α	angle de pression réel [°]
ω_1, ω_2	vitesse angulaire des deux pignons [rad/s]
μ	la viscosité dynamique [kg/m.s]
μ_0	la viscosité dynamique du fluide à pression ambiante [kg/m.s]
Σ	angle des axes des deux roues dentées [°]
θ	angle de rotation du cône de base du pignon [°]
γ	le taux de dilatation cubique
δ_{ij}	symbole de KRONECKER
ξ	l'énergie interne [J]
ν	coefficients de POISSON

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

Les engrenages sont des mécanismes qui transmettent un couple entre deux axes tournants avec un rapport de vitesses angulaires constant. Les axes peuvent avoir des dispositions quelconques dans l'espace et les rapports de vitesses varient dans un large domaine. Il a donc fallu trouver des solutions géométriques pour résoudre les problèmes cinématiques réels. Il existe plusieurs dispositions d'axes et formes de dentures capables de supporter les efforts mécaniques transmis. On peut classer alors les engrenages en diverses catégories en fonction de la situation de leurs axes de rotation :

a) Axes parallèles :

- engrenages cylindriques droits.
- engrenages hélicoïdaux droits.

b) Axes concourants :

- engrenages coniques droits.
- engrenages spiro-coniques.

c) Axes perpendiculaires non concourants :

- engrenages hypoïdes.
- Roues et vis tangentes.

d) Axes quelconques :

- engrenages hélicoïdaux gauches.

Pratiquement, dans tout système mécanique transmettant une puissance, on trouve un couple d'engrenages. Dans certains mécanismes, ces éléments s'imposent du fait de leurs qualités performantes (rigidité, longévité, sécurité de transmission, fiabilité, rendement élevé, rapport de transmission constant, etc). Ainsi, ils sont particulièrement utilisés dans les boîtes de vitesses, les réducteurs, les différentiels des ponts arrières de véhicules, les machines-outils, etc, à des puissances faibles ou élevées.

Ces engrenages transmettent la puissance demandée par contact entre surfaces de dentures. A la prise de contact, il y a un choc produisant des vibrations, et au cours du fonctionnement un frottement provoquant une usure. Le choc est d'autant plus important avec une géométrie de denture ayant des défauts de formes. Le contact à sec provoque une détérioration rapide réduisant sensiblement la durée de vie du mécanisme.

Pour assurer un fonctionnement doux et silencieux d'une part, et d'autre part, une longévité plus élevée du mécanisme, on cherche à améliorer la géométrie de denture pour réduire les vibrations et la lubrification pour réduire l'usure.

L'amélioration du premier facteur consiste à rechercher une géométrie des surfaces de dentures permettant de réduire les erreurs cinématiques et par conséquent le bruit de fonctionnement. On peut l'envisager par la possibilité de corriger les défauts géométriques en agissant sur les paramètres de réglage appropriés de la machine de taillage (la denture étant supposée tailler suivant le principe de génération). En effet, il est maintenant possible de chiffrer, à l'aide de méthode d'analyse mathématique, les corrections à apporter aux paramètres de réglage considérés en analysant les écarts relevés sur les surfaces de dentures. Mais cette méthode nécessite au préalable la connaissance d'une modélisation mathématique ou numérisation de la surface de denture, et la construction de vecteurs d'analyse de défauts de forme de dentures.

Quant à la lubrification, elle fait intervenir le film d'huile nécessaire devant s'interposer entre les surfaces pour éviter le contact direct entre elles. L'étude fait appel à des théories relativement complexes du fait des déformations locales et des conditions sévères de fonctionnement (variation de la pression de contact, des conditions cinématiques, des charges appliquées, des conditions rhéologiques du lubrifiant, etc). Pour les engrenages, leurs surfaces de dentures étant relativement complexes (courbures variables, zone de contact sous charge également variable), particulièrement celles des dentures coniques et spiro-coniques, leur lubrification optimale reste encore à développer.

Notre objectif dans tout ce qui suit, est de modéliser les équations régissant la lubrification élastohydrodynamique des engrenages coniques droits, afin de retrouver les distributions de pressions et d'épaisseurs du film d'huile lubrifiant, le long de la génératrice de contact.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, on va définir les différents types des engrenages coniques, ainsi que leurs domaines d'applications : vitesses de rotations, efforts exercés,etc.

Puis, on étudiera les engrenages coniques droits à développantes sphériques d'une manière plus détaillée : on calculera les différents paramètres géométriques (rayons de courbures), cinématiques (les vitesses de roulement et de glissement), dynamique (charges appliquées sur les dents). On exposera en suite, deux méthodes pratiques de génération de dentures (octoïdes 1^{ère} et 2^{ème} espèces).

Le chapitre trois sera consacré à la présentation de la théorie élastohydrodynamique et son application sur les engrenages coniques droits.

En suite, dans le chapitre quatre, on exposera la méthode numérique suivie pour la résolution des équations obtenues précédemment.

Le chapitre cinq sera consacré aux résultats obtenus après exécution des programmes, ainsi qu'à leur interprétation.

Enfin, on terminera avec une conclusion générale.

CHAPITRE I :
GENERALITES
SUR LES
ENGRENAGES
CONIOUES

GENERALITES SUR LES ENGRENAGES CONIQUES

I-1) DIFFERENTS TYPES D'ENGRENAGES CONIQUES :

Les surfaces primitives sont des cônes d'axes concourants. L'angle que font les deux axes de rotation permet une transmission du couple dans une direction différente. Les engrenages coniques, contrairement aux engrenages cylindriques, permettent une transmission du couple suivant un angle. Ils sont fréquemment rencontrés avec un angle entre les arbres de 90° , mais ne sont pas limités à celui-ci.

I-1-a) Les engrenages coniques droits :

Les engrenages coniques droits sont généralement utilisés pour des applications à basses vitesses, quand le bruit et les vibrations ne sont pas des facteurs importants de fonctionnement.

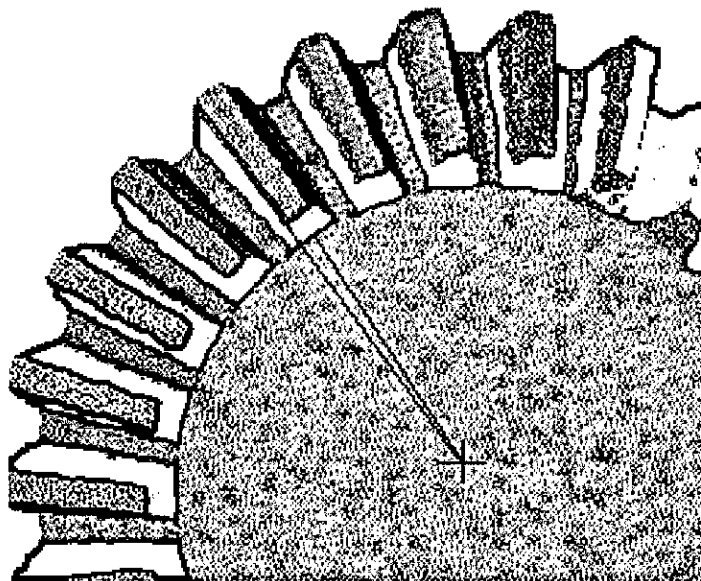


Fig.1 : Denture d'un engrenage conique droit

Les flancs des dents sont droits et pointent vers le centre géométrique de la roue. On utilise les engrenages coniques droits dans des applications où la vitesse de glissement se situe aux alentours de 5 m/s. Dans des situations où l'environnement de fonctionnement est très favorable, la vitesse de glissement peut s'approcher de 75 m/s.

I-1-b) Les engrenages Zerol :

Les applications pour lesquelles les engrenages zerol sont utilisés sont semblablement les mêmes que celles des engrenages spiro-coniques. La géométrie des dents est une courbe et la tangente à cette courbe pointe vers le centre géométrique de la roue. La courbure des dents augmente la conformité, ce qui améliore les conditions de contacts et de lubrification; la portée de contact ne couvre pas toute la surface, et il y a sensibilité aux erreurs de montage. Le minimum de dents suggérées, pour des applications standard, est de 14 dents.

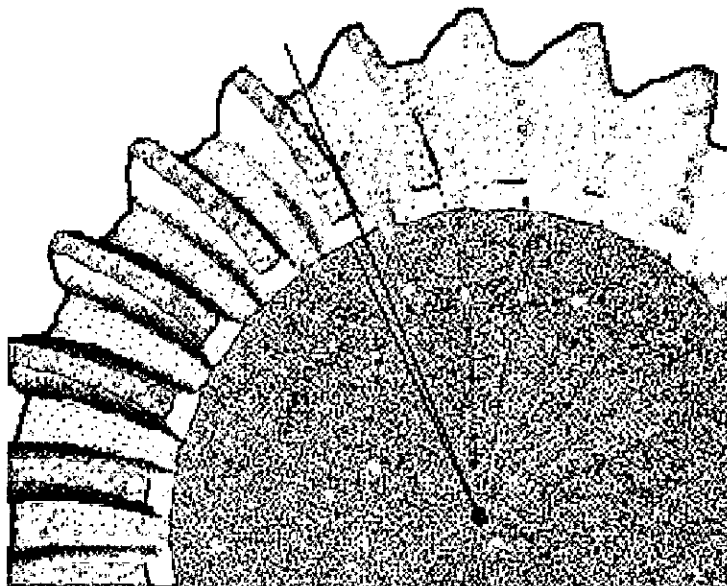


Fig.2 : Denture d'un engrenage Zerol

I-1-c) Les engrenages Spiro-coniques :

Les engrenages spiro-coniques sont généralement utilisés pour des applications à hautes vitesses. Etant plus rigide pour un même rapport de vitesse que les zérol, ils peuvent servir pour des applications à hauts rapports de vitesses. Ses dents ont une courbure et la tangente à cette courbe fait un angle avec le rayon de la roue. On utilise les spiro-coniques dans des applications où la vitesse de glissement se situe aux alentours de 60 m/s. Dans des situations où l'environnement de fonctionnement est très favorable, la vitesse de glissement peut s'approcher de 125 m/s. Les relations de comportement en fonctionnement entre les engrenages cylindriques à denture droite et hélicoïdale sont aussi valables pour les engrenages coniques droits et les spiro-coniques.

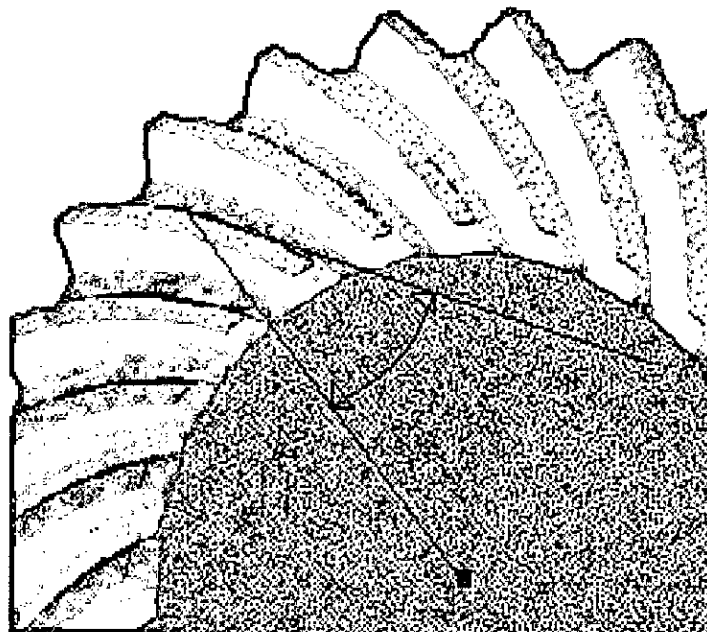


Fig.3 : Denture d'un engrenage spiro-conique

I-1-d) Les engrenages Hypoïdes :

Les engrenages hypoïdes sont très similaires aux engrenages spiro-coniques. Ils se différencient par un déport de ses axes de rotation. Les deux axes de rotation ne se coupe jamais. Ce déphasage permet aux dents du pignon de prendre une forme courbe dont la tangente fait un angle important avec le rayon du pignon. Pour un même rapport de vitesse, les engrenages hypoïdes sont plus solide que les spiro-conique. En opération, les hypoïdes sont plus doux et silencieux que les autres types d'engrenages coniques présentés précédemment. Ils sont généralement utilisés pour des applications où le rapport de vitesse se trouve entre 3:1 et 6:1. Dans des situations où l'environnement de fonctionnement est très favorable, le rapport de vitesse peut prendre une valeur de 20:1.

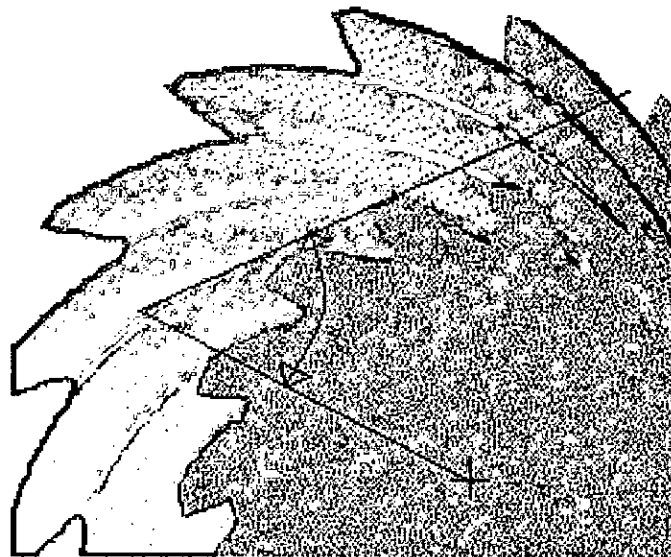


Fig.4 : Denture d'un engrenage hypoïde

Dans ce qui suit, vu la complexité de ces types d'engrenages, que ce soit en leur étude géométrique, ou encore l'application des théories régissant la lubrification, on va s'intéresser uniquement aux engrenages coniques droits à développante sphérique.

I-2) TAILLAGE ENGRENAGES CONIQUES :

Les types de procédures de fabrication servant à réaliser des engrenages sont pratiquement indénombrables. Par contre, il existe seulement trois méthodes de fabrication servant à réaliser tous les types de dents d'engrenage. Ces trois méthodes sont soit par taillage, soit par forage ou soit par moulage. Dans l'industrie, des procédures par taillage sont utilisées pour réaliser les engrenage coniques opérant sous des conditions normales. Selon le type de dent d'engrenage conique à produire, on utilise une procédure de taillage introduisant un mouvement relatif entre le support sur lequel est monté le couteau et la pièce en fabrication.

Les procédures de taillage des engrenages coniques les plus utilisées dans l'industrie sont

- Fraisage par indexation
- Fraisage frontal

Les procédures de taillage par génération et non-génération sont indépendantes du couteau utilisé lors du taillage. Les présentations ci-dessous des deux procédures utilisent la procédure de taillage par fraisage par indexation.

I-2-a) Procédure de taillage par non-génération

Le procédé de taillage par non-génération est utilisé lorsque le profil de la dent à générer se rapproche d'une droite. Pour les roues d'engrenage ayant un rapport de vitesse supérieur à 3,5 : 1 on taille sans génération et la différence dans la courbure du profil de la roue est reprise sur la dent du pignon. Ce procédé de taillage réduit la complexité de la procédure et diminue les coûts de production.

Le taillage par non-génération se fait sans mouvement du support et de la pièce à tailler, comme représenté sur la figure.5 . Seul le couteau possède un mouvement de rotation selon son axe C1, suivant la position angulaire α . Il existe deux principales procédures de taillage par non-génération, de marques de commerce Gleason Works: Formate et Helixform.

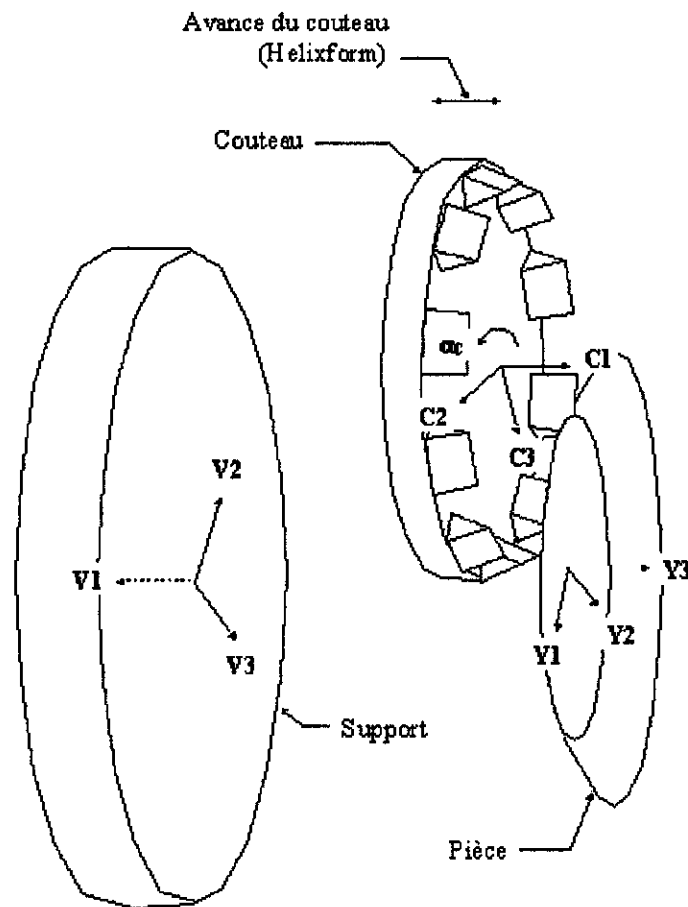


Fig.5 : Taillage d'engrenage par non-génération

La fig.6 représente une dent de roue non-générée. On peut noter le flanc de la dent très plat dû au procédé de taillage par non-congruence. Il est clair que la lame représentée sur la figure rentre en contact avec la dent sur tout son flanc.

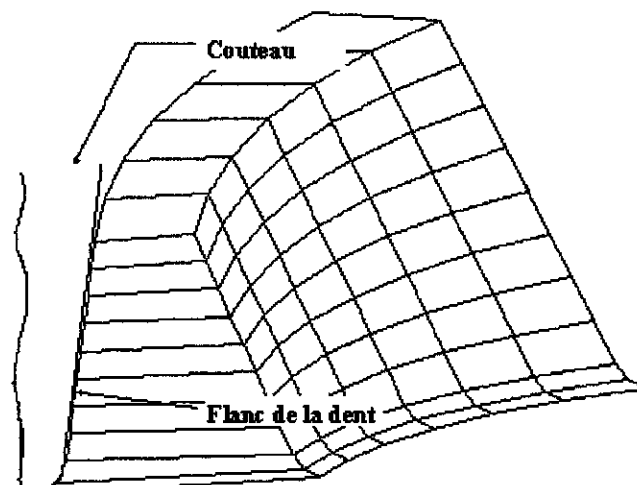


Fig.6 : profil d'une dent taillée par non-génération

CHAPITRE II :
CALCUL DES
ENGRENAGES
CONIQUES
DROITS A
DEVELOPPANTE
SPHERIQUE

CALCUL DES ENGRENAGES CONIQUES DROITS A DEVELOPPENTES SPHERIQUE

II-1) LA DEVELOPPANTE DE CERCLE SPHERIQUE :

Soit un cône de sommet S et d'axe SX , SA une génératrice contenue dans le plan P tangent au cône et une sphère H de sommet S et rayon SA dont on voit la trace dans le plan P . Faisons rouler sans glisser le plan P sur le cône. Le point A décrit l'arc OA du petit cercle c , de rayon r , de la sphère. Portons sur la trace T , et pour chaque position du plan P , un arc AM égal à AO . Pendant le mouvement du plan, le point M décrit une trajectoire OM , portée par le sphère H , qui est par définition la développante sphérique issue de o du cercle c sur la sphère H . Nous verrons que le plan N , tangent à OM en M contenant le point S , est perpendiculaire au plan P . La surface conique SOM est la denture de l'engrenage conique d'axe SX et de cône de base S,c (cône de sommet S et de cercle de base c) réf [14].

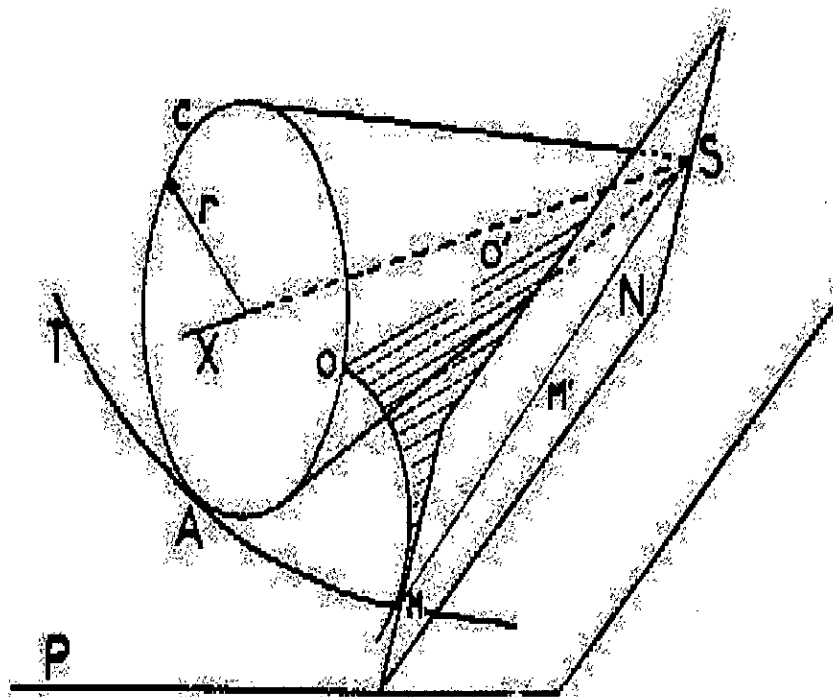


Fig.7 : la développante de cercle sphérique

II-1-a) Engrenement de deux engrenages coniques :

Considérons maintenant la fig-8-, à l'intérieur de la sphère H, deux engrenages notés 1 et 2, d'axes SX_1 et SX_2 comportant leurs cônes de base (S, c_1 et S, c_2) tangents suivant leur génératrice primitive SI. Ces cônes découpent respectivement sur la sphère les quatre petits cercles c_1, c_2, C_1, C_2 , de rayons r_1, r_2, R_1, R_2 avec ($r_1 < R_1$ et $r_1 < R_2$).

Les relations géométriques classiques donnent :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = k \quad (\text{II.1})$$

Soit T' le grand cercle de la sphère H contenu dans un plan P' perpendiculaire au plan des deux axes SX_1 et SX_2 , passant par SI. L'angle des deux plans P et P' est l'angle de pression du train d'engrenages coniques. Il détermine, comme dans le cas des engrenages cylindriques droits, le rapport entre les rayons r_i des cercles de base des cônes de base et les rayons R_i des cercles de base des cônes primitifs :

$$r_i = R_i \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{II.2})$$

Faisons tourner S, c_1 autour de son axe SX_1 ; le grand cercle T, qui roule sans glisser sur S, c_1 est entraîné en rotation autour de son centre S et entraîne à son tour, sans glissement, le cône S, c_2 d'axe SX_2 . Soit M un point du grand cercle T situé entre A et B. Le point M engendre pendant le mouvement des deux cônes et du grand cercle deux développantes de cercles sphériques D_1 et D_2 liées ; l'une au cône de base S, c_1 d'axe SX_1 et l'autre au cône de base S, c_2 d'axe SX_2 .

Les deux surfaces coniques issues de S et s'appliquant respectivement sur les développantes de cercles D_1 et D_2 sont les surfaces de denture. Elles sont toujours perpendiculaire au plan du grand cercle, et donc conjuguées. Le secteur SAB est la zone d'action du plan d'engrenement des engrenages. Le contact des deux surfaces conjuguées s'effectue le long du rayon SM.

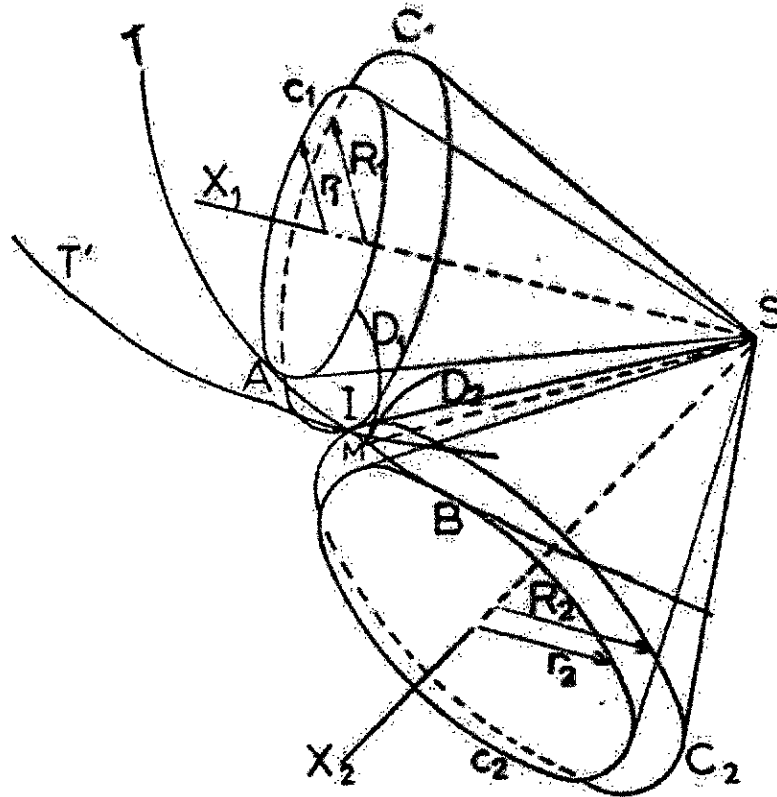


Fig.8 :Engrènement de deux engrenages conique

Notons que dans la pratique, la longueur du rayon SM de la sphère est calculée au gros bout à partir des valeurs de Z_1 , Z_2 et M_n .

II-1-b) Arc de conduite :

Considérons enfin Fig-9-, les deux cônes de tête des engrenages 1 et 2, qui coupent la sphère H suivant les petits cercles de tête C'_1 et C'_2 de rayons R'_1 et R'_2 . Par définition nous avons :

$$R'_{1,2} = R_{1,2} + m_n \cdot \cos(S_{1,2}) \quad (\text{II.3})$$

Les points G et F sont les intersection des cercles C'_1 et C'_2 avec l'arc AB du grand cercle T. Ils définissent respectivement les dernier et premier points de contact des deux développantes sphériques. Ainsi, seul l'angle FSG du secteur ASB est utilisé pendant l'engrènement des deux développantes des deux engrenages coniques.

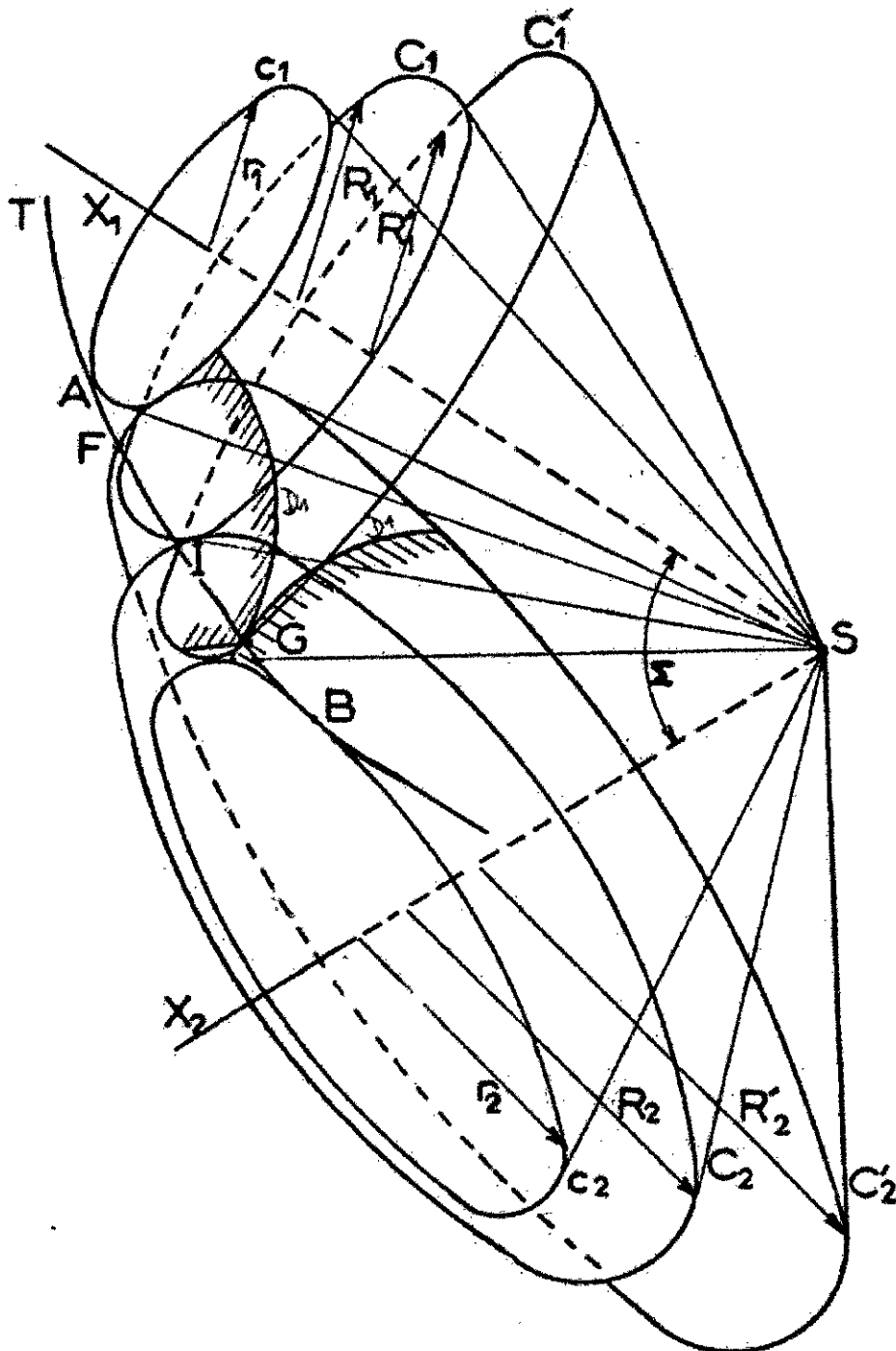


Fig.9 : Définition de l'arc de conduite

II-1-c) Interférence primaire :

Si l'un des points F ou G se trouvait à l'extérieur de l'arc AB, l'engrènement ne pourrait avoir lieu, les surfaces de contact n'étant pas conjuguées. Nous dirons, dans ce cas limite, qu'il y a interférence primaire réf[14].

II-1-d) Rapport de conduite :

Le rapport de conduite R_C est lié à l'arc FG par la relation :

$$R_C = \frac{FG}{\pi.m_n \cdot \cos(\alpha)} \quad (\text{II.4})$$

II-2) CALCUL DES ENGRENAGES CONIQUES :

II-2-a) Rayon de courbure de la surface de denture :

Le calcul des pressions et des vitesses dans les engrenages coniques droits exige la connaissance des rayons de courbure des surfaces de denture.

On peut calculer la valeur du rayon de courbure de la développante de cercle sphérique en faisant appel, soit aux théories des surfaces axoïdes et de la développée des courbes gauches, soit aux relations plus connues de SERRET-FRENET, et obtenir ensuite la valeur du rayons de courbure de la surface de denture par le théorème de MEUSNIER. La théorie des surfaces axoïdes n'étant pas couramment utilisée, nous présenterons la deuxième méthode.

Nous obtiendrons successivement :

- a) Les coordonnées cartésiennes d'un point M de la développante sphérique.
- b) Les cosinus directeurs du vecteur tangent et du vecteur normal à la développante au point M.
- c) La valeur du rayon de courbure de la développante porté par la normale en M.
- d) La valeur et la position du rayon de courbure de la surface de denture par le théorème de MEUSNIER.

$$\text{car : } \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{L^2 - r^2} \cdot \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right)} \quad (\text{II.7})$$

Soit \vec{N} le vecteur unitaire perpendiculaire à T dans le plan osculateur de la développante sphérique, k la courbe de la développante et $\rho = \frac{1}{k}$ son rayon de courbure. Les relations du triède de SERRET-FRENET donnent :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = k \cdot \vec{N} = 0 \cdot \vec{i} - \frac{\sin(\theta)}{L \cdot \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right)} \cdot \vec{j} + \frac{\cos(\theta)}{L \cdot \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right)} \cdot \vec{k} \quad (\text{II.8})$$

$$\text{On trouve d'autre part : } k = \frac{1}{L \cdot \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right)} \quad (\text{II.9})$$

Et l'on obtient pour le rayon de courbure ρ de développante sphérique :

$$\rho = \frac{1}{k} = L \cdot \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.10})$$

On remarque le rayon de courbure de la développante sphérique est égal en module et en direction au segment MQ . En effet :

$$MQ = L \cdot \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.11})$$

et les cosinus directeurs de MQ (0, $-\sin\theta$, $\cos\theta$) sont identiques à ceux de la normale \vec{N} à la développante sphérique qui porte le rayon de courbure réf[12].

II-3) RAYON DE COYURBURE DE LA SURFACE DE DENTURE :

Nous avons vu que la surface de denture est une surface conique de sommet S, le centre de la sphère, de génératrice SM et de directrice la développante de cercle sphérique.

Soit MT la normale en M à la surface de denture contenue dans le plan d'engrènement. Elle porte, par définition, les rayons de courbure de cette surface. La surface étant réglée, un des rayons de courbure principaux est infini ; l'autre, situé par définition dans un plan perpendiculaire, est minimal. On calcule sa valeur par le théorème de MEUSNIER.

Soit :

$$\rho = \frac{MQ}{\cos\left(\frac{r\theta}{L}\right)} \quad (\text{II.12})$$

en remplaçant :

$$\rho = L.\text{tg}\left(\frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.13})$$

MT est donc le rayon de courbure principal désiré.

Considérons le grand cercle T qui comprend la zone d'action ASB. Soit M un point de contact. Nous avons vu que MT_1 est le rayon de courbure de la surface d'engrènement liée à SA. Un raisonnement analogue montrerait que MT_2 est le rayon de courbure de la surface liée à SB.

Nous avons ainsi :

$$\rho_1 = MT_1 = L.\text{tg}\left(\frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.14})$$

$$\rho_2 = MT_2 = L.\text{tg}\left(\phi - \frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.15})$$

II-4) RELATIONS ANGULAIRE DANS LE PLAN D'ENGREMENT :

II-4-a) Définition de la zone d'action :

Soit la fig. 15 , S_1, S_2 les demi-angles au sommet des cônes primitifs.

Nous avons :

$$\Sigma = S_1 + S_2$$

où : Σ est l'angle des axes SX_1 et SX_2 qui, respectivement, coupent la sphère H de rayon SA en U_1 et U_2 .

on a aussi :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sin(S_1)}{\sin(S_2)} \quad (\text{II.16})$$

Les deux triangles rectangles sphériques AU_1I et BU_2I sont semblables.

Les relations à l'intérieur des triangles rectangles sphériques donnent :

$$\sin(s_1) = \sin(S_1) \cos(\alpha)$$

$$\text{d'autre part : } \sin(s_1) = \frac{r_1}{L} \quad \text{et} \quad \sin(S_1) = \frac{R_1}{L}$$

ou r_1 et R_1 sont respectivement les rayons des cercles de base c_1 du cône de base S, c_1 et du cercle de base C_1 du cône primitif S, C_1 et ou par définition :

$$R_1 = \frac{M_n Z_1}{2} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{M_n Z_2}{2}$$

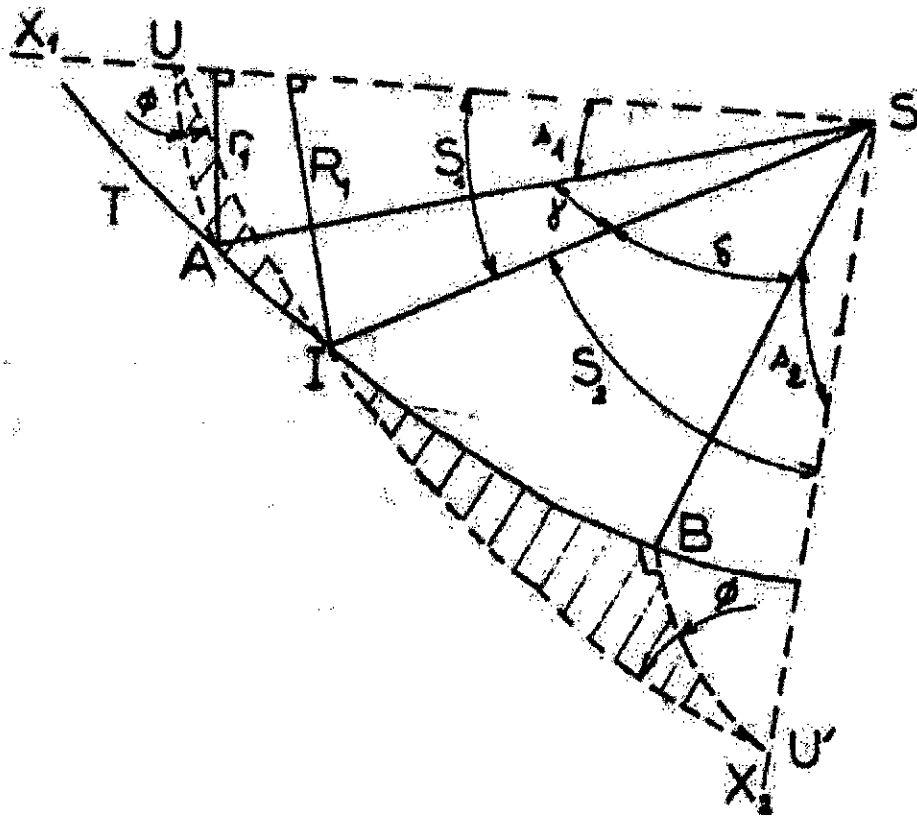


Fig.11 : définition de la zone d'action

On pourra écrire :

$$\text{tg}(\hat{A}\hat{S}\hat{I}) = \text{tg}(\hat{\gamma}) = \sin(\alpha)\text{tg}(S_1) \quad (\text{II.17})$$

$$\text{tg}(\hat{B}\hat{S}\hat{I}) = \text{tg}(\hat{\gamma}) = \sin(\alpha)\text{tg}(S_2) \quad (\text{II.18})$$

dont on tire :

$$\hat{A}\hat{S}\hat{B} = \hat{\gamma} + \hat{\delta} = \text{Arctg}(\sin(\alpha)\text{tg}(S_1)) + \text{Arctg}(\sin(\alpha)\text{tg}(S_2)) \quad (\text{II.19})$$

En substituant les valeurs de \hat{S}_1 et \hat{S}_2 , on calcule la valeur de l'angle ASB.

II-4-b) Détermination du secteur utile de la zone d'action :

Nous savons d'après la Fig.9, réf [12], que les points F et G délimitent le secteur utile FSG de la zone d'action.

C'est en ces points que se calculent les valeurs minimales et maximales des rayons de courbures des surfaces en contact. Nous avons vu précédemment que :

$$\rho_1 = L.tg\left(\frac{r\theta}{L}\right) \quad (II.20)$$

$$\rho_2 = L.tg\left(\phi - \frac{r\theta}{L}\right) \quad (II.21)$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbures des surfaces en un point M sur AB et :

$$A\hat{S}M = \frac{r\theta}{L} \quad (II.22)$$

et $B\hat{S}M = \phi - \frac{r\theta}{L} \quad (II.23)$

Pour connaître les rayons minimaux et maximaux, il faut donc connaître les angles :

$$A\hat{S}F, A\hat{S}G, B\hat{S}G, \text{ et } B\hat{S}F.$$

Les relations de trigonométrie sphérique dans les triangles rectangles nous donnent :

$$\cos(A\hat{S}G) = \frac{\cos(U_1\hat{S}G)}{\cos(U_1\hat{S}A)} = \frac{\cos(C_1)}{\cos(s_1)} \quad (II.24)$$

avec : $C_1 = S_1 + \frac{2}{Z_1} . \sin(S_1)$

et $\sin(s_1) = \sin(S_1) \cos(\alpha)$

$$\text{d'ou : } \quad \hat{A}\hat{S}\hat{G} = \text{Arctg} \sqrt{\frac{\sin^2(C_1) - \sin^2(S_1) \cdot \cos^2(\alpha)}{\cos^2(C_1)}} \quad (\text{II.25})$$

$$\text{aussi : } \quad \hat{B}\hat{S}\hat{F} = \text{Arctg} \sqrt{\frac{\sin^2(C_2) - \sin^2(S_2) \cdot \cos^2(\alpha)}{\cos^2(C_2)}} \quad (\text{II.26})$$

Nous avons finalement : $\hat{A}\hat{S}\hat{F} = \hat{A}\hat{S}\hat{B} - \hat{B}\hat{S}\hat{F}$ et $\hat{B}\hat{S}\hat{G} = \hat{A}\hat{S}\hat{B} - \hat{A}\hat{S}\hat{G}$

Les relations ci-dessus permettent donc de calculer les valeurs minimales et maximales des rayons de courbures.

II-4-c) Détermination des conditions d'interférence primaire:

Nous avons vu qu'il y a interférence primaire lorsque les points F ou G se trouve en dehors de l'arc AB. Cette condition est obtenue quand l'une des deux inégalités suivantes est satisfaites :

$$\hat{A}\hat{S}\hat{G} \geq \hat{A}\hat{S}\hat{B} \quad \quad \quad \hat{B}\hat{S}\hat{F} \geq \hat{A}\hat{S}\hat{B}$$

II-5) ETUDE CINEMATIQUE :

La détermination des vitesses de roulement et de glissement des surfaces conjuguées est liée :

- A la disposition des axes.
- Aux vitesses angulaires respectives des deux solides.
- A la nature des surfaces en contact.

Rappelons que lors du contact ponctuel de deux solides, il y a en général :

- Rotation relative $\vec{\Omega}_1^2$ des deux solides. Ce vecteur projeté :
 - Sur la normale au contact définit $\vec{\Omega}_{1P}^2$, vecteur rotation de pivotement.
 - Sur le plan tangent commun donne $\vec{\Omega}_{1R}^2$, vecteur rotation de roulement.

- Glissement dans le plan tangent, le vecteur vitesse de glissement \vec{V}_g est la différence géométriques des projections sur le plan tangent des vecteurs vitesses absolues $\vec{V}_1^0(M_1)$ et $\vec{V}_2^0(M_2)$ des points M_1 et M_2 des solides coïncidant à l'instant t en M. Notons que sur la normale \vec{n} les projections des vecteurs $\vec{V}_1^0(M_1)$ et $\vec{V}_2^0(M_2)$ sont égales. Sinon le contact ne serait plus mécaniquement possible.

Rappelons aussi la définition de l'axe instantané de rotation (A.I.R). C'est le lieu des points qui ont une vitesse nulle dans un mouvement relatif donné. Exemple, deux cylindres parallèles de rayons respectifs R_1 et R_2 en contact suivant la génératrice Π' roulent sans glisser l'un sur l'autre. Les vecteurs vitesses angulaires sont $\vec{\Omega}_1^0$ et $\vec{\Omega}_2^0$. L'A.I.R sera le support de $\vec{\Omega}_1^2$ ici Π' . On définirait la vitesse relative en un point M par la relation vectorielle :

$$\vec{V}_1^2(M) = \vec{\Omega}_1^2 \wedge \vec{M} \quad (\text{II.27})$$

II-5-a) Calcul des vitesses de roulement et de glissement au point de contact :

Vitesse d'un point M de la développante sphérique :

Soit l'axe SX, le petit cercle de rayon r définissant le cône de base (fig.12 :). La courbe OA est un grand cercle, ainsi que les courbes OM et AM (intersection de la sphère H avec le plan d'engrènement P). Le triangle OAM est rectangle sphérique en A. Nous pouvons alors écrire les relations :

$$\cos\left(\frac{r\theta}{L}\right) = \frac{\cos(c)}{\cos(s)} \quad (\text{II.28})$$

$$\sin(s) = \sin(M) \sin(c) \quad (\text{II.29})$$

$$\text{tg}(s) = \text{tg}(M) \sin\left(\frac{r\theta}{l}\right) \quad (\text{II.30})$$

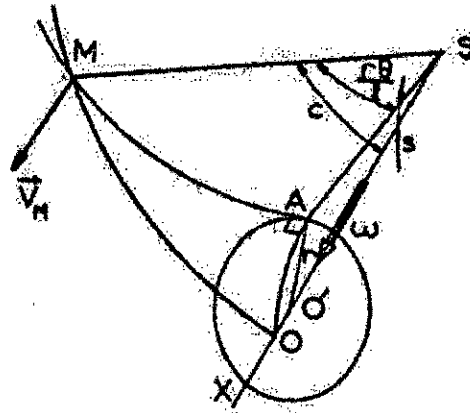


Fig.12 : Vitesse d'un point M de la développante de cercle sphérique

Le pignon tourne autour de SX avec la vitesse angulaire ω . Par définition, la vitesse du point M vaut :

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \overline{SM}$$

Le vecteur \vec{V}_M est perpendiculaire au plan SOM et au rayon de la sphère SM.

Il est tangent à la sphère H en M.

Il sera toujours possible de projeter \vec{V}_M sur les vecteur \vec{T}_1 et \vec{T}_2 (fig.13) réf[14], respectivement tangent au cercle contenu dans le plan d'engrènement et à la développante de cercle sphérique. Ces vecteurs appartiennent, ainsi que \vec{V}_M , au plan tangent en M à la sphère H.

Considérons le vecteur \vec{V}_M , sa projection donne : $\sin(M)$ sur \vec{T}_1 et $\cos(M)$ sur \vec{T}_2 .

Ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{V}_M &= \vec{\omega} \wedge \overline{SM} \\ \Rightarrow |\vec{V}_M| &= \omega.l.\sin(c) \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

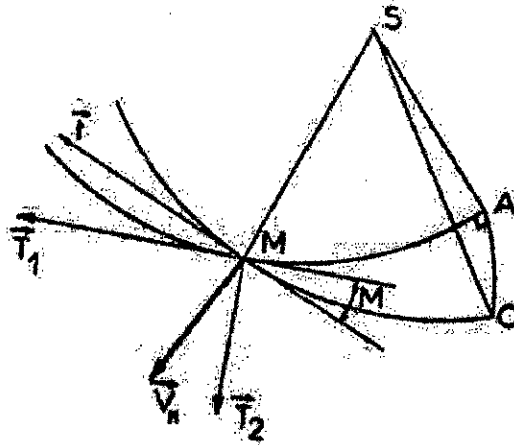


Fig.13 : projection du vecteur vitesse \vec{V}_M

La projection sur \vec{T}_1 donne :

$$|\vec{V}_{MT_1}| = \omega.L. \sin(c). \sin(M) = \omega.r \quad (\text{II.32})$$

La projection sur \vec{T}_2 donne :

$$|\vec{V}_{MT_2}| = \omega.L. \sin(c). \cos(M) = \omega.L. \frac{\sin(s)}{\text{tg}(M)} \quad (\text{II.33})$$

On aura : .

$$|\vec{V}_{MT_2}| = \omega.L. \cos(s). \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.34})$$

La première valeur correspond à la vitesse de déplacement du point M le long du grand cercle du plan d'action. La dernière valeur est la vitesse de roulement au point M du pignon considéré.

Par définition, la vitesse de glissement \vec{V}_g au point M est égale à la valeur absolue de la différence des deux vitesses de roulement \vec{V}_{1MT_2} et \vec{V}_{2MT_2} .

Nous avons d'après ce qui précède, pour la roue 1 :

$$|\vec{V}_{1MT_2}| = \omega_1 \cdot L \cdot \cos(s_1) \cdot \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.35})$$

Et pour la roue 2 :

$$|\vec{V}_{2MT_2}| = \omega_2 \cdot L \cdot \cos(s_2) \cdot \sin\left(\phi - \frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.36})$$

Ainsi, la vitesse de glissement est donnée par l'expression :

$$|\vec{V}_g| = \left| \omega_1 \cdot L \cdot \cos(s_1) \cdot \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right) - \omega_2 \cdot L \cdot \cos(s_2) \cdot \sin\left(\phi - \frac{r\theta}{L}\right) \right| \quad (\text{II.37})$$

Enfin, on se contentera de rappeler les relations déjà établies, soit :

- Relation de conjugaison :

$$\bar{\omega}_1^0 \cdot R_1 = \bar{\omega}_2^0 \cdot R_2 \quad (\text{II.38})$$

- Axe instantané de rotation : SI génératrice commune des deux cônes primitifs.
- Vitesse angulaire relative portée par SI :

$$\omega_1^2 = \left[(\omega_1^0)^2 + (\omega_2^0)^2 - 2 \cdot \omega_1^0 \cdot \omega_2^0 \cdot \cos(\Sigma) \right]^{1/2} \quad (\text{II.39})$$

- Vitesse de roulement (en module) :

$$V_{1R} = \omega_1^0 \cdot L \cdot \cos(s_1) \cdot \sin\left(\frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.40})$$

$$V_{2R} = \omega_2^0 \cdot L \cdot \cos(s_2) \cdot \sin\left(\phi - \frac{r\theta}{L}\right) \quad (\text{II.41})$$

- Vitesse de glissement :

$$\text{En module : } V_g = |V_{1R} - V_{2R}|$$

$$\text{Vectoriellement : } \vec{V}_g = \bar{\Omega}_1^2 \wedge \overline{SM}$$

Reprenons la fig. 14 et examinons les rotations de pivotement et de roulement.

$\bar{\Omega}_{1R}^2$ et $\bar{\Omega}_{1P}^2$ existent. Nous remarquons que :

- Le long d'une génératrice de contact, $\bar{\Omega}_{1R}^2$ et $\bar{\Omega}_{1P}^2$ sont constant.
- Quand SM décrit l'angle $\hat{A}\hat{S}\hat{B}$, les intensités des rotations varient.

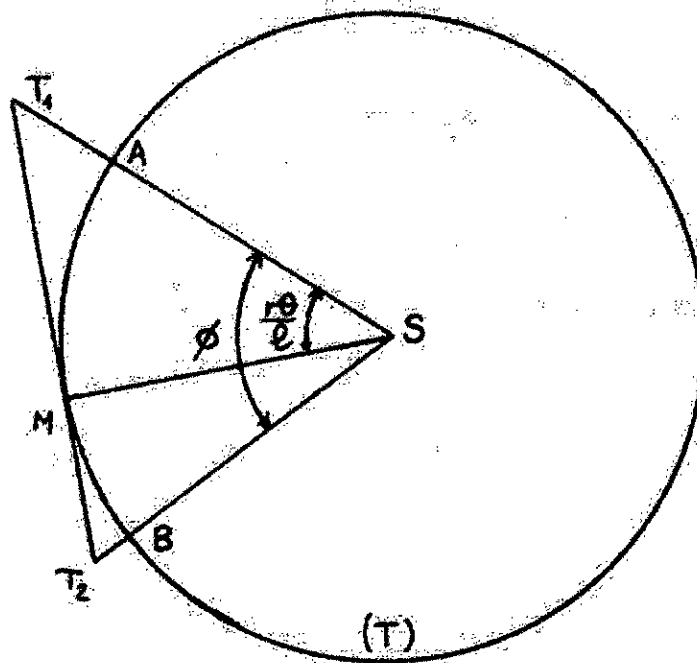


Fig.14 : relation entre les rayons de courbure d'un couple d'engrenage

II-6) LA CHARGE :

Les engrenages transmettent des couples donc des efforts mécaniques se développent dans les contacts entre les dentures. Pour résoudre ce problème, il faut tenir compte :

- a)- De l'élasticité des matériaux ; il y a flexion et déformation des dents sous la charge.
- b)- Du nombre de paires de dents en prise. Pour assurer la continuité de l'engrènement il faut qu'avant qu'un contact de dentures ne cesse, un autre se forme. Cette aptitude de l'engrenage est caractérisé par le rapport de conduite R_C qui doit être supérieur à 1.

II-6-a) Déflexion des dentures :

Malgré différentes tentatives, aucune ne donne pleinement satisfaction, d'autant plus que souvent les auteurs effectuent des calculs de statique alors qu'en fonctionnement c'est de dynamique qu'il s'agit. Ce problème n'étant pas résolu, nous le tiendrons à l'écart, en toute connaissance, dans les paragraphes suivants.

Répartition de l'effort sur les dentures :

Nous trouvons devant un double problème. Le premier est de dénombrer les contacts des dentures, le second d'évaluer la répartition, uniforme ou non, le long d'un contact linéaire.

Nombre de contact :

Dans l'hypothèse simplificatrice, où les déflexion des dentures sont négligées, on détermine géométriquement, en fonction des dimensions des roues dentées qui engrenent les régions où le contact est unique et celle où le contact est double. On remarque qu'au voisinage du point primitif I le contact est toujours simple.

Répartition de la charge :

Du point de vue théorique, la répartition de la charge unitaire P_U est importante puisque ce facteur intervient :

- Dans la définition de la température éclair.
- Dans le calcul des contraintes mécaniques et hydrauliques sur les dentures.
- Sa connaissance permet la détermination de la pression de HERTZ dont l'expression est sous la forme :

$$p = K \cdot \sqrt{P_U \cdot \frac{E}{\rho}} \quad (\text{II.42})$$

Où : p : la pression de HERTZ exprimée en Pascals.

K : une constante dépendant des unités et de la forme du contact.

P_U : la charge par unité de longueur.

$$E \text{ tel que : } \frac{1}{E} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (\text{II.43})$$

Avec : ν_i coefficients de POISSON des matériaux en présence.

E_i module de YOUNG de ces mêmes substances.

$$\rho \text{ tel que : } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \quad (\text{II.44})$$

ρ_i rayons de courbures des surfaces en contact.

Engrenages coniques :

La géométrie de ces engrenages étant connue, donnons l'expression de la courbure relative :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{L} [\cot g(a\theta) + \cot g(\phi - a\theta)] \quad (\text{II.45})$$

dans laquelle L , a , et ϕ sont des caractéristiques des engrenages considérés, θ est le paramètre angulaire décrivant l'engrènement, il varie de 0 à ϕ . On remarque que la courbure est représentée par une famille de fonction de deux paramètres :

$$F(\phi, a\theta) = \frac{1}{\rho} \quad (\text{II.46})$$

Pour la répartition de la charge unitaire P_U , nous ferons deux hypothèses :

1- P_U est uniforme :

La valeur de la pression de HERTZ dépend alors uniquement de la variation de $\frac{1}{\rho}$. Pour une position donnée (ϕ et $a\theta$ fixés) p sera inversement proportionnelle à \sqrt{L}

$$p = K \cdot \sqrt{\frac{1}{L}} \quad (\text{II.47})$$

donc p diminue rapidement quand on s'éloigne de S .

2- P_U n'est pas uniforme :

On peut imaginer de nombreuses lois de variations. Nous choisissons celle où la charge est fonction linéaire de la distance l . Posons $P_U = k.L$.

Alors :

$$k = \frac{2.P}{L(l_1 + l_2)} \quad \text{et} \quad P_U = \frac{2.P.L}{(l_1 - l_2)(l_1 + l_2)}$$

avec : P, l_1, l_2 constantes données.

Or : $\frac{1}{\rho} = \frac{C_1}{L} = \frac{1}{\lambda.L}$ pour une position donnée.

Ainsi :

$$P = K \cdot \sqrt{\frac{k.L}{\lambda.L}} = K \cdot \sqrt{\frac{k}{\lambda}} = \text{constante.} \quad (\text{II.48})$$

La pression de HERTZ est constante le long de la ligne de contact SM lorsque la charge varie linéairement.

Ainsi, en négligeant les déflexions de denture, il est possible d'avoir une indication sur la répartition de la charge unitaire P_U dans les contacts d'engrenages.

II-7) CALCUL DE LA PRESSION DE HERTZ AU POINT DE CONTACT :

Les rayons de courbure obtenue sont calculés pour une sphère de rayon 1 correspondant au gros bout de l'engrenage. Sur ce profil, la pression est sonné par l'expression :

$$p = 198224 \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad (\text{II.49})$$

ρ est le rayon de courbure relatif défini par :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{r\theta}{L}\right)} + \frac{1}{\text{tg}\left(\phi - \frac{r\theta}{L}\right)} \right] \quad (\text{II.50})$$

et P , la charge par unité de longueur, constante le long d'une génératrice de contact.

Pour déterminer la valeur de la pression de HERTZ en un point N d'une génératrice SM de contact à la distance L_N du point S, il suffit d'effectuer la correction suivante :

$$p_N = p \sqrt{\frac{L}{L_N}} \quad (\text{II.51})$$

II-8) CALCUL DES ENGRENAGES CONIQUES DROITS EN FONCTION DES PARAMETRES FONDAMENTAUX :

Les relations déduites dans les paragraphes précédents peuvent être exprimées en fonction de sept paramètres : les cinq paramètres géométriques fondamentaux $(Z_1, Z_2, \alpha, M_n, \Sigma)$ qui caractérisent un train d'engrenages coniques droits, la vitesse angulaires de la roue 1, et la charge par unité de longueur P.

Pour faciliter l'écriture, nous utiliserons également la raison $k = \frac{Z_1}{Z_2}$

$$\text{tg}(S_1) = \frac{k \cdot \sin(\Sigma)}{1 + k \cdot \cos(\Sigma)} \quad (\text{II.52})$$

$$\text{tg}(S_2) = \frac{\sin(\Sigma)}{k + \cos(\Sigma)} \quad (\text{II.53})$$

$$\text{tg}(\hat{A}\hat{S}\hat{I}) = \frac{k \cdot \sin(\Sigma) \cdot \sin(\alpha)}{1 + k \cdot \cos(\Sigma)} \quad (\text{II.54})$$

$$\text{tg}(\hat{B}\hat{S}\hat{I}) = \frac{\sin(\Sigma) \cdot \sin(\alpha)}{k + \cos(\Sigma)} \quad (\text{II.55})$$

$$\hat{A}\hat{S}\hat{B} = \text{Arctg}\left(\frac{k \cdot \sin(\Sigma) \cdot \sin(\alpha)}{1 + k \cdot \cos(\Sigma)}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{\sin(\Sigma) \cdot \sin(\alpha)}{k + \cos(\Sigma)}\right) \quad (\text{II.56})$$

$$\sin(s_1) = \frac{k \cdot \sin(\Sigma) \cdot \cos(\alpha)}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}} \quad (\text{II.57})$$

$$\sin(s_2) = \frac{\sin(\Sigma) \cdot \cos(\alpha)}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}} \quad (\text{II.58})$$

$$C_1 = \text{Arctg} \left(\frac{k \cdot \sin(\Sigma)}{1 + k \cdot \cos(\Sigma)} \right) + \frac{2}{Z_1} \cdot \frac{k \cdot \sin(\Sigma)}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}} \quad (\text{II.59})$$

$$C_2 = \text{Arctg} \left(\frac{\sin(\Sigma)}{k + \cos(\Sigma)} \right) + \frac{2}{Z_2} \cdot \frac{k \cdot \sin(\Sigma)}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}} \quad (\text{II.60})$$

$$\cos(\hat{A}\hat{S}\hat{G}) = \frac{\cos \left[\text{Arctg} \left(\frac{k \cdot \sin(\Sigma)}{1 + k \cdot \cos(\Sigma)} \right) + \frac{2}{Z_1} \cdot \frac{k \cdot \sin(\Sigma)}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}} \right]}{\sqrt{\frac{k^2 \cdot (1 - \sin^2(\Sigma) \cdot \cos^2(\alpha)) + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}}} \quad (\text{II.61})$$

$$\cos(\hat{B}\hat{S}\hat{F}) = \frac{\cos \left[\text{Arctg} \left(\frac{\sin(\Sigma)}{k + \cos(\Sigma)} \right) + \frac{2}{Z_2} \cdot \frac{k \cdot \sin(\Sigma)}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}} \right]}{\sqrt{\frac{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1 - \sin^2(\Sigma) \cdot \cos^2(\alpha)}{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}}} \quad (\text{II.62})$$

$$L = \frac{m_n \cdot Z_1}{2 \cdot k \cdot \sin(\Sigma)} \cdot \sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1} = \frac{m_n \cdot Z_2}{2 \cdot \sin(\Sigma)} \cdot \sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1} \quad (\text{II.63})$$

$$R_c = \frac{Z_1 \cdot \sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot \sin(\Sigma) \cdot \cos(\alpha)} \cdot (\hat{A}\hat{S}\hat{G} + \hat{B}\hat{S}\hat{F} - \hat{A}\hat{S}\hat{B}) \quad (\text{II.64})$$

II-8-a) Vitesse de glissement et pression de HERTZ :

La vitesse de glissement et la pression de HERTZ sont définies dans le secteur utile FSG de la zone d'action ASB.

Ecrivons :

$$\beta = \frac{r\theta}{L} = \frac{k \cdot \sin(\Sigma) \cdot \cos(\alpha)}{\sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}} \quad (II.65)$$

Avec : $A\hat{S}F \leq \beta \leq A\hat{S}G$

La vitesse de glissement est donnée par l'expression :

$$|\vec{V}_g| = \frac{m_n \cdot \omega \cdot Z_1}{2 \cdot k \cdot \sin(\Sigma)} \cdot \left[\frac{k^2 (1 - \sin^2(\Sigma) \cos^2(\alpha))}{+ 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1} \right]^{1/2} \cdot \sin(\beta) - k \cdot \left[\frac{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1}{-\sin^2(\Sigma) \cos^2(\alpha)} \right]^{1/2} \cdot \sin(A\hat{S}B - \beta) \quad (II.66)$$

La pression au gros bout est donnée par l'expression :

$$P_{GB} = 198224 \sqrt{P} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot \sin(\Sigma) \sin(A\hat{S}B)}{m_n \cdot Z_1 \cdot \sqrt{k^2 + 2 \cdot k \cdot \cos(\Sigma) + 1} \cdot \sin(\beta) (A\hat{S}B - \beta)}} \quad (II.67)$$

II-9) GENERATION THEORIQUE DE LA DENTURE CONIQUE DROITE PRATIQUE :

On définit la denture en utilisant le concept de la roue génératrice. La fig.15 correspond à la génération d'une denture conique droite par une roue conique génératrice (génération d'une denture octoïde de 2ème espèce).

Soit S le sommet des cônes primitifs de la roue conique génératrice et de la roue à tailler, I le centre instantané de rotation, SI l'axe instantané de rotation, (N) le plan de génération incliné de l'angle de pression α par rapport à la normale au plan primitif (P) de la roue plate génératrice, θ_3 l'angle de rotation de ce plan autour de l'axe SX_0 normal à (P), M'

un point intersection du cercle de base de la roue conique génératrice avec le plan de génération (N) et M un point du profil de la denture et qui appartient également au plan (N).

II-9-a) Equation du plan de génération :

Soient U un vecteur unitaire porté par la droite SN, V le vecteur qu'on obtient en dérivant U. Exprimés dans le référentiel (S, X₀, Y₀, Z₀), ces deux vecteurs ont pour composantes :

$$\vec{U} \begin{cases} 0 \\ \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 \end{cases} \quad \vec{V} \begin{cases} 0 \\ \cos \theta_3 \\ -\sin \theta_3 \end{cases}$$

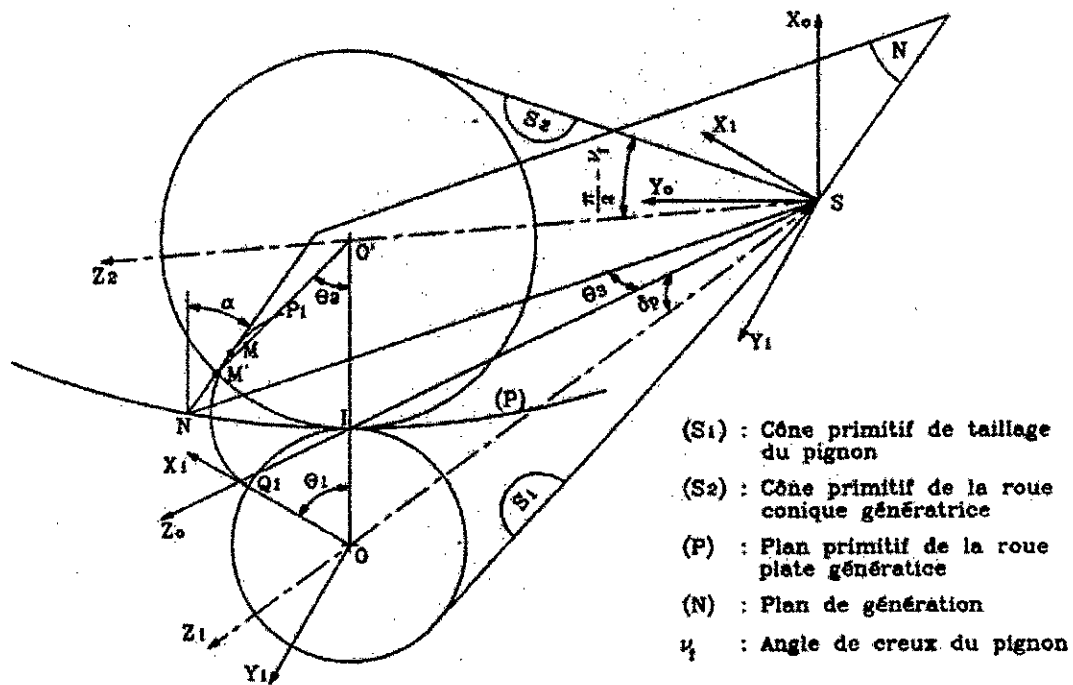


Fig.15 : Génération d'une denture conique droite pratique.

Soit $N(N_{x_0}, N_{y_0}, N_{z_0})$ la normale unitaire au plan de génération (N). Elle fait un angle α avec le vecteur V. Le produit vectoriel NAV est un vecteur colinéaire avec U. On a alors :

$$\vec{N} \wedge \vec{V} = \lambda \cdot \vec{U} \quad (\text{II.68})$$

Cette relation permet d'écrire $|\lambda| = \sin \alpha$. En prenant $\lambda = \sin \alpha$ et en développant les produits vectoriel $\vec{N} \wedge \vec{V}$ et scalaire $\vec{N} \cdot \vec{V}$, tous calculs faits, on obtient :

$$\vec{N} \begin{cases} N_{x_0} = \sin \alpha \\ N_{y_0} = \cos \alpha \cdot \cos \theta_3 \\ N_{z_0} = -\cos \alpha \cdot \sin \theta_3 \end{cases}$$

L'équation du plan de génération (N) s'écrit donc sous la forme :

$$X_0 \cdot \sin \alpha + Y_0 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta_3 - Z_0 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \theta_3 = 0 \quad (\text{II.69})$$

ou encore :

$$X_0 \cdot \text{tg} \alpha + Y_0 \cdot \cos \theta_3 - Z_0 \cdot \sin \theta_3 = 0 \quad (\text{II.70})$$

II-9-b) Relation entre θ_2 et θ_3 :

Soit O' la projection du point S sur le cercle de base de la roue conique génératrice. Dans le repère (S, X_2, Y_2, Z_2) , le point M' a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{SM'} \begin{cases} -R \cdot \cos v_f \cdot \cos \theta_2 \\ R \cdot \cos v_f \cdot \sin \theta_2 \\ R \cdot \sin v_f \end{cases}$$

v_f : étant l'angle de creux du pignon. Il peut être exprimé par la relation :

$$\text{tg}(v_f) = \frac{h_f \cdot \sin \delta_p}{R_p} \quad (\text{II.71})$$

h_f : la hauteur de creux.

δ_p : le demi-angle au sommet du cône primitif.

R_p : le rayon du cercle de base du cône.

Dans le référentiel (S, X_0, Y_0, Z_0) , les coordonnées du point M' deviennent :

$$\overrightarrow{SM'} \begin{cases} R \cdot \sin v_f \cdot \cos v_f \cdot (1 - \cos \theta_2) \\ R \cdot \cos v_f \cdot \sin \theta_2 \\ R \cdot (\sin^2 v_f + \cos^2 v_f \cdot \cos \theta_2) \end{cases}$$

Puisque le point M' appartient au plan (N), il vérifie donc son équation. On a alors :

$$\begin{aligned} & \sin v_f \cdot \cos v_f \cdot (1 - \cos \theta_2) \cdot \text{tg} \alpha + \cos v_f \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos \theta_3 \\ & - (\sin^2 v_f + \cos^2 v_f \cdot \cos \theta_2) \cdot \sin \theta_3 = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

II-9-c) Calcul de θ_2 en fonction de θ_1 :

Le roulement sans glissement du cône primitif de la roue conique génératrice sur celui de la roue taillée permet d'écrire :

$$\left[R \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - v_f \right) \right] \cdot \theta_2 = (R \cdot \sin \delta_p) \theta_1 \quad (\text{II.73})$$

D'où :

$$\theta_2 = \frac{\sin \delta_p}{\cos v_f} \cdot \theta_1 \quad (\text{II.74})$$

II-9-d) Calcul de X_0 et de Y_0 :

Soit M(X_0, Y_0, Z_0) le point générateur du profil de denture. Il appartient donc au plan (N). Le plan (SI, SM) est perpendiculaire à (N), donc, le produit vectoriel $\overrightarrow{SI} \wedge \overrightarrow{SM}$ est perpendiculaire à la normale N. On peut alors écrire :

$$\vec{N} \cdot (\overrightarrow{SM} \wedge \overrightarrow{SI}) = 0 \quad (\text{II.75})$$

Sachant que SI s'exprime par ses composantes (0, 0, R) et en développant ce produit mixte, on obtient :

$$X_0 \cdot \cos \theta_3 - Y_0 \cdot \text{tg} \alpha = 0 \quad (\text{II.76})$$

Les équations (II.69) et (II.76) résolues par rapport à Z_0 donnent :

$$X_0 = \frac{Z_0 \cdot \sin \theta_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \theta_3} \quad (\text{II.77})$$

$$Y_0 = \frac{Z_0 \cdot \sin \theta_3 \cdot \cos \theta_3}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \theta_3} \quad (\text{II.78})$$

II-9-e) Calcul de Z_0 :

$$\text{Soient :} \quad X = \frac{X_0}{R} \quad Y = \frac{Y_0}{R} \quad Z = \frac{Z_0}{R}$$

$$\text{Avec : } X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = R^2 \Rightarrow X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

On aura alors :

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot Z^2 - (\operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \theta_3) = 0 \quad (\text{II.79})$$

D'où :

$$Z = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_3} \quad (\text{II.80})$$

II-9-f) Coordonnées du point M exprimées dans le référentiel (S, X_1, Y_1, Z_1) :

Rotation de (S, X_0, Y_0, Z_0) d'angle δ_p autour de l'axe SY_0 :

$$Z_1 = Z_0 \cdot \cos \delta_p - X_0 \cdot \sin \delta_p \quad (\text{II.81})$$

$$X_1' = Z_0 \cdot \sin \delta_p + X_0 \cdot \cos \delta_p \quad (\text{II.82})$$

Rotation de (S, X_1', Y_0, Z_1) d'angle θ_1 autour de l'axe SZ_1 :

$$Y_1 = Y_0 \cdot \cos \theta_1 - X_1' \cdot \sin \theta_1 \quad (\text{II.83})$$

$$X_1 = Y_0 \cdot \sin \theta_1 + X_1' \cdot \cos \theta_1 \quad (\text{II.84})$$

Finalement en exprimant dans le référentiel (S, X_1, Y_1, Z_1) , les coordonnées du point M s'écrivent :

$$\vec{SM} \begin{cases} X_1 = Y_0 \cdot \sin \theta_1 + (Z_0 \cdot \sin \delta_p + X_0 \cdot \cos \delta_p) \cdot \cos \theta_1 \\ Y_1 = Y_0 \cdot \cos \theta_1 - (Z_0 \cdot \sin \delta_p + X_0 \cdot \cos \delta_p) \cdot \sin \theta_1 \\ Z_1 = Z_0 \cdot \cos \delta_p - X_0 \cdot \sin \delta_p \end{cases}$$

II-9-g) Composantes de la normale à la surface de la denture :

Comme pour les coordonnées du point M, on détermine la normale unitaire à la surface de denture par changement de repères. Tous calculs faits, on obtient :

$$\vec{N} \begin{cases} N_{x1} = N_{y0} \cdot \sin \theta_1 + (N_{z0} \cdot \sin \delta_p + N_{x0} \cdot \cos \delta_p) \cdot \cos \theta_1 \\ N_{y1} = N_{y0} \cdot \cos \theta_1 - (N_{z0} \cdot \sin \delta_p + N_{x0} \cdot \cos \delta_p) \cdot \sin \theta_1 \\ N_{z1} = N_{z0} \cdot \cos \delta_p - N_{x0} \cdot \sin \delta_p \end{cases}$$

La procédure de calcul ainsi décrite pour la denture octoïde de 2^{ème} espèce reste valable pour la denture octoïde de 1^{ère} espèce : il suffit de considérer le roulement sans glissement du plan (P) sur le cône primitif du pignon. Dans ce cas, la roue conique génératrice devient une roue plate dont l'axe est perpendiculaire à ce plan, ce qui revient à supposer $v_f = 0$.

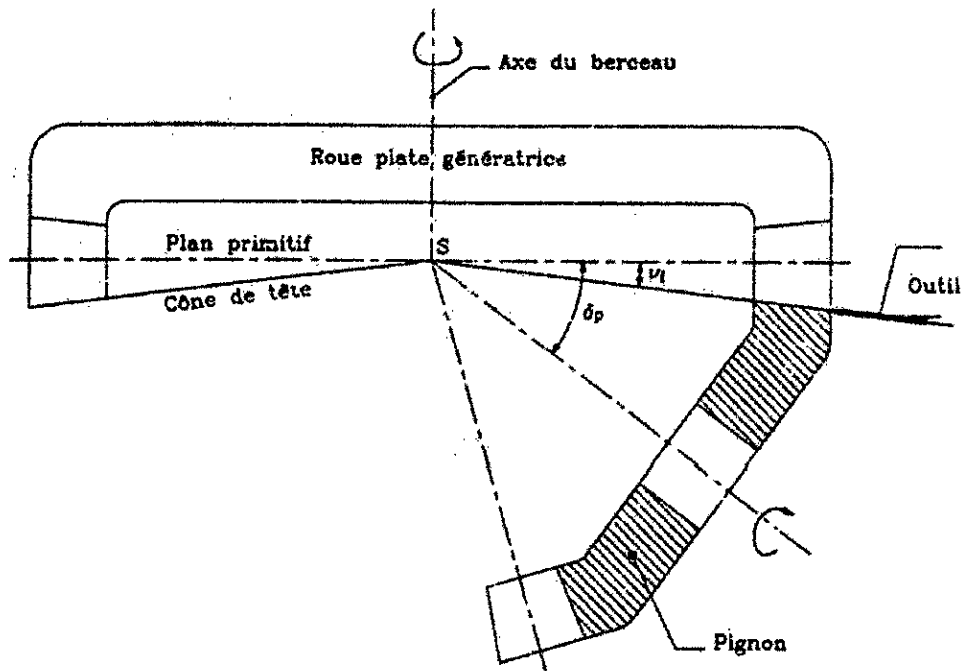


Fig.16 : génération d'une denture octoïde 1^{ère} espèce

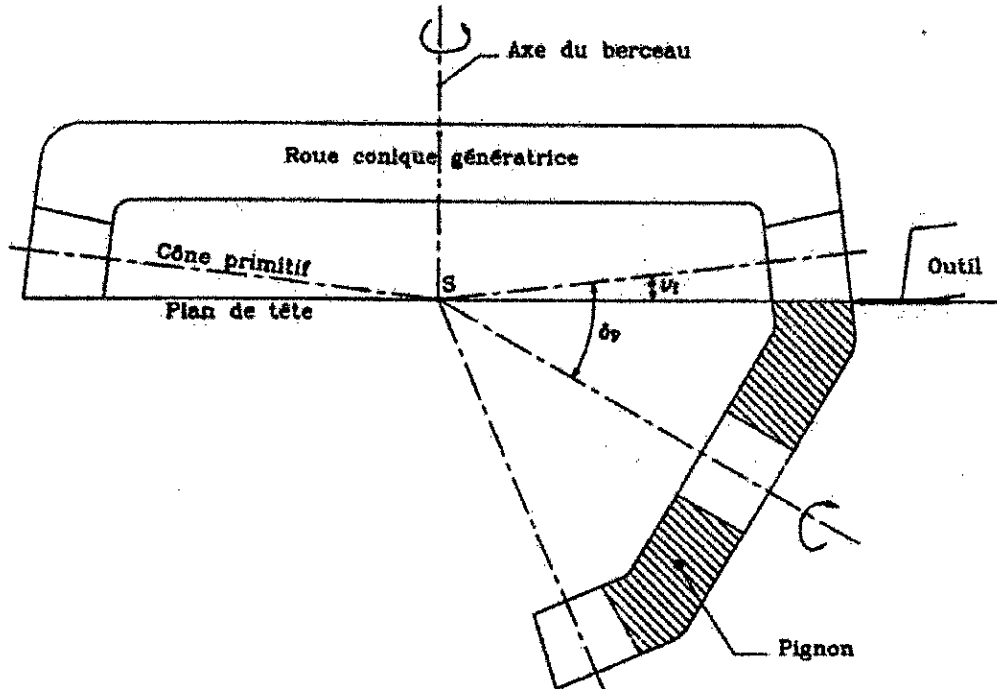


Fig.17 : génération d'une denture octoïde 2^{ème} espèce

II-10) REGIMES DE LUBRIFICATION DANS LES ENGRENAGES :

Comme nous venons de le montrer, le contact dans les engrenages est essentiellement évolutif. La géométrie, les vitesses et les charges varient constamment.

Il est donc naturel de rencontrer plusieurs régimes de lubrification, soit au cours d'un engrenement, soit dans les différents domaines d'application. On distingue trois régimes de fonctionnement :

- La lubrification limite.
- La lubrification mixte.
- La lubrification hydrodynamique.

Un contact lubrifié transmet une charge P d'une surface à l'autre. On peut dire que cet effort résulte de deux actions :

- Celle des aspérités qui portent la charge P_M .
- Celle du film qui porte la charge P_H .

Nous avons toujours : $P_U = P_M + P_H$. Suivant la régime de fonctionnement, les proportions relatives P_M et P_H varient.

II-10-a) Le régime de lubrification limite :

Ce régime est caractérisé par le fait que la part de la charge totale portée par le film d'huile est soit négligeable, soit nulle. Le matériau agissant en surface se présente sous la forme d'un film engendré, soit par physisorbition si les températures sont faibles, soit par chimisorbition si les températures sont élevées. Ces films protègent suffisamment les surfaces pour éviter des avaries graves.

II-10-b) Le régime de lubrification mixte :

Le film d'huile contribue d'avantage à supporter la charge. Cette proportion varie de $0,1.P < P_H < P$. La charge $P_M = P - P_H$ est transmise directement par les aspérités du métal, ce

qui est rare, ou transmise à une surface métallique recouverte suivant les circonstances d'un film soit physi, soit chimisorbé.

II-10-c) Le régime hydrodynamique :

C'est le régime souhaitable pour le bon fonctionnement ($P_H = P$). On distingue principalement deux cas :

- Celui de charges faibles.
- Celui des charges élevées.

a) Premier cas :

Les charges sont faibles, les pressions petites et les surfaces en regard ne sont pas déformées. L'épaisseur $h(x)$ du film d'huile est pratiquement constante.

b) Second cas :

Sous l'effet des charges élevées, les surfaces sont largement déformées. Les effets de piézo-viscosité interviennent, ce qui augmente considérablement la capacité de la charge du film d'huile. Pour les engrenages, ce phénomène se rencontre au voisinage du cercle primitif. Il y a film complet, comme l'a démontré BORSOFF en utilisant un oignon radio-actif et une roue non activée.

Ce régime de fonctionnement élasto-hydrodynamique comporte une courbe de pression caractérisée par un pic de pression et une zone de cavitation à la sortie du contact.

CONCLUSION :

Cette étude analytique nous permet de calculer les rayons de courbure, les pressions de HERTZ et les vitesses en tous points de l'engrènement d'un train d'engrenages coniques droits à développantes de cercle sphérique. Les conditions d'interférence primaire sont données ainsi que la valeur du rapport de conduite.

CHAPITRE III :

**LA
LUNRIFICATION
ELASTO-
HYDRO-
DYNAMIQUE**

LA LUBRIFICATION ELASTOHYDRODYNAMIQUE

III-1) INTRODUCTION :

Le fonctionnement d'un contact HERTZIEN lubrifié ou « élastohydrodynamique », dont les surfaces des massifs peuvent être rugueuses est un problème très large sur le plan scientifique et très utile d'un point de vue industriel. Sa modélisation est à la frontière de plusieurs divisions traditionnelle de la mécanique : l'élasticité, la mécanique des fluides, la mécanique rationnelle, la rhéologie, la thermique. Elle fait appel aussi à d'autres disciplines telles que la physique des matériaux, la chimie des lubrifiants. A ce titre, il s'agit d'une démarche pluridisciplinaire.

Sur le plan industriel, de nombreux mécanismes comportent ce type de contact, notamment les roulements à billes ou à rouleaux, les systèmes came/poussoir, et bien sur la quasi totalité des engrenages. Ces contacts constituent des liaisons et il y a interaction entre leur comportement et celui des mécanismes y compris en dynamique.

Ce domaine de mécanique des contact est relativement récent. Il repose sur la prise en considération simultanée des trois concepts :

- L'hydrodynamique des fluides minces visqueux.
- Le comportement du lubrifiant.
- La déformation élastiques des solides.

La théorie de la lubrification élastohydrodynamique « E.H.D » dû essentiellement à DOWSON et HIGGINSON, présente quelques différences par rapport à la théorie hydrodynamique. Les déformations élastiques des surfaces des solides en contact sont prises en compte pour la définition de l'épaisseur du film lubrifiant, et la viscosité du fluide est en fonction de la pression.

L'étude du fonctionnement d'un mécanisme lubrifié peut se ramener dans la zone de contact à l'étude du contact de deux solides soumis à une force normale et séparés par un film fluide qui est bordé par l'air ambiant. Les deux surfaces des solides sont définies dans le voisinage du contact par leurs formes géométriques et leurs cinématique, les matériaux sont élastiques et le fluide visqueux réf [2].

III-2) MODELE GEOMETRIQUE ET CINEMATIQUE :

III-2-a) Géométrie générale d'un contact HERTZIEN :

Les surfaces des deux solides 1 et 2 en contact en un seul point. Les rayons de courbures sont positifs si le centre de courbure est à l'intérieur du solide correspondant et négatifs dans le cas contraire. Les courbures A et B sont de même signe, tous les points correspondant à une distance constante « y_1+y_2 » se trouvent sur une ellipse.

III-2-b) Modèle géométrique équivalent :

Lorsque les plans principaux de chacune des surfaces du contact sont confondus, la forme géométrique des surfaces dans la zone de contact, est définie par les rayons de courbures principaux R_{1X} , R_{1Z} , R_{2X} et R_{2Z} situés dans les plans principaux XOY et YOZ. La géométrie tonneau circulaire plan est représentative de ce type de contact.

L'épaisseur du film $h(x, z)$ s'écrit dans le voisinage du contact au quatrième ordre près :

$$h \approx h_0 + y_1 + y_2 \quad (\text{III.1})$$

$$h \approx h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{z^2}{2R_z} \quad (\text{III.2})$$

où : h_0 est l'épaisseur du film d'huile au centre du contact, R_x et R_z sont les rayons de courbures équivalents du modèle défini par :

$$R_x = \frac{R_{1X} \cdot R_{2X}}{R_{1X} + R_{2X}} \quad (\text{III.3})$$

$$R_z = \frac{R_{1Z} \cdot R_{2Z}}{R_{1Z} + R_{2Z}} \quad (\text{III.4})$$

III-2-c) Modèle cinématique :

Dans le système d'axe OXYZ, les rayons de courbures principaux qui définissent la géométrie du contact sont constant, par contre, l'épaisseur du film peut être fonction du temps. Du point de vue cinématique, nous définissons les vecteurs vitesses des points M_1 et M_2 appartenant aux surfaces 1 et 2 par rapport au système d'axe OXYZ par leurs composantes (U_1, V_1, W_1) et (U_2, V_2, W_2) respectivement suivant OX, OY, OZ.

Ce modèle géométrique et cinématique est représentatif pour les études hydrodynamiques et élastohydrodynamique du fonctionnement d'un contact HERTZIEN tel qu'il existe entre les dents d'un engrenages réf [17].

III-3) EQUATIONS DES CONTACTS HERTZIENS LUBRIFIES :

III-3-a) Equations des fluides visqueux :

L'écoulement d'un fluide visqueux est décrit par les équations aux dérivées partielles qui correspondent respectivement à réf [5]:

- La loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \cdot U_i) = 0 \quad (\text{III.5})$$

- La loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho \cdot f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \cdot \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \cdot \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (\text{III.6})$$

- La loi de conservation de l'énergie :

$$\rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_i \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) + \lambda \cdot \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)^2 - P \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \mu \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III.7})$$

Où :

$U_i(x_i, t)$: représentent les composants du vecteur vitesse dans les axes X_i

f_i : les composants des forces volumétriques

t : le temps

ρ : la masse volumique

ξ : l'énergie interne

k : le coefficient de conductibilité thermique

θ : la température

λ et μ : les deux coefficients de NAVIER caractéristiques de la viscosité du fluide.

L'équations d'état thermodynamique donne une première relation supplémentaire $f(\rho, P, \theta) = 0$ et l'hypothèse de STOKES la deuxième relation $3\lambda + 2\mu = 0$

III-3-b) Equations des films minces visqueux :

Les deux hypothèses fondamentales qui conduisent aux équations des films minces visqueux sont :

- L'écoulement est laminaire.
- L'écoulement possède une dimension privilégiée.

Suivant l'épaisseur du film OY (ou OX) de longueur caractéristique h qui est très faible devant les autres dimensions de longueur caractéristique l .

Le nombre de REYNOLDS qui permet de comparer les forces d'inertie aux forces de viscosité s'écrit dans ce cas :

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot U \cdot h}{\mu} \cdot \frac{h}{l} \quad (\text{III.8})$$

Où :

ρ : la masse volumique

μ : la viscosité dynamique

U : la vitesse du fluide

Les équations de NAVIER STOKES appliquées aux films minces lorsque les forces massiques sont négligeables et le nombre de REYNOLDS tel que $Re \ll 1$ se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{III.10})$$

et l'équation de l'énergie appliquée aux films minces se réduit à :

$$\rho \cdot C \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + U_j \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_2} \right)^2 + a \cdot \theta \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U_i \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III.11})$$

avec $i=1$ et 3 et $j=1,2,3$ et ou C est la chaleur spécifique à pression constante et a le coefficient de dilatation cubique.

- La loi de comportement rhéologique qui pour un fluide NEWTONIEN s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-P + \lambda \cdot \gamma) \delta_{ij} + 2 \cdot \mu \cdot \epsilon_{ij} \quad (\text{III.12})$$

Où : P est la pression

γ le taux de dilatation cubique

μ et λ coefficients de NAVIER

δ_{ij} symbole de KRONECKER.

III-3-c) Equation de REYNOLDS :

L'équation qui gouverne la génération de la pression dans le film lubrifiant est connue par *l'équation de Reynolds*. Reynolds (1886) est le premier qui a dérivé l'équation et construit l'analyse de la lubrification hydrodynamique.

Le rayon de courbure est généralement très large par rapport au film d'huile. Cette remarque permet l'analyse de considérer un rayon de courbure équivalent d'une surface devant un plan. Tout effet due au courbure de film d'huile sera négligé. Une représentation de la géométrie du film lubrifiant est donnée sur la figure.I-1. Où les contraintes correspondant à la direction suivant x réf [17].

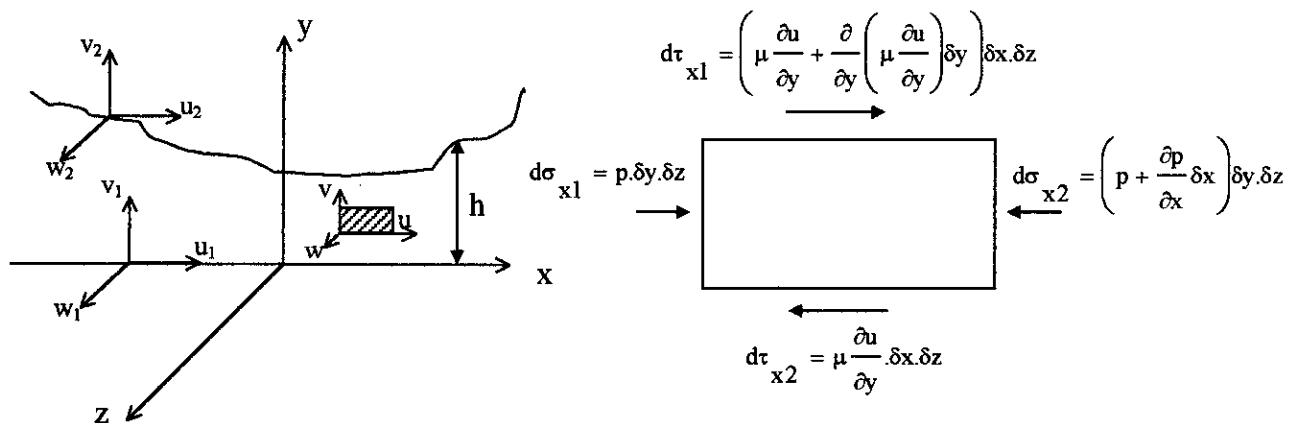


Fig.18: Système des coordonnées et forces actives sur un élément du fluide.

III-3-c-1) Hypothèses d'études :

Dans notre étude, nous supposons que :

- 1- Le régime d'équilibre est atteint (la dérivé par rapport au temps est nul)
- 2- Le milieu est continu.
- 3- Le Lubrifiant est un fluide Newtonien.
- 4- L'écoulement est laminaire.
- 5- Les forces massiques extérieures sont négligeables.

- 6- La viscosité de la contrainte de cisaillement tout le temps et proportionnelle à la valeur de cisaillement.
- 7- L'épaisseur du film d'huile est toujours négligeable devant les autres dimensions.
- 8- Le régime isotherme.

L'équation de Reynolds est dérivée en appliquant les équations de base de la dynamique et de la continuité de lubrifiant.

Toutes les équations de la dynamique pour un fluide Newtonien dans les coordonnées cartésien sont dérivées, par exemple par PAI (1956). Les équations peuvent s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{du}{dt} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 \rho \frac{dv}{dt} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 \rho \frac{dw}{dt} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \quad (III.13)$$

Les termes du côté gauche représentent l'effet d'inertie et du côté droite sont les forces du corps, pression et la viscosité respectivement.

L'équation de continuité représente la conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (III.14)$$

Pour un film lubrifiant, l'inertie et les forces sont négligeables devant la viscosité et les forces de pression, donc la première équation de la dynamique sera :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (III.15)$$

Les mêmes formes d'expression seront obtenues pour les directions y et z.

Aussi, puisque le film lubrifiant est très mince par rapport aux autres dimensions dans un contact lubrifié, les dérivées des composantes des vitesses u et w par rapport à y sont grandes devant les autres gradients de vitesse. En plus si "l" est la longueur de contact, le gradient de la pression le long du film d'huile (dans la direction y) est de l'ordre de (h/l) fois les gradients de pression le long du film. Et comme $h \ll l$ la variation de pression dans le film est évidemment négligeable.

Ces remarques permettent de négliger la deuxième équation de la dynamique, d'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Avec les conditions utilisées en avant, l'équilibre des équations (III-3) peut être obtenu directement de l'équilibre des forces de surfaces actives sur un élément de fluide (Fig.18).

Il faut noter que cette analyse n'est pas limitée d'un fluide isovisqueux. En plus une équation d'état n'est pas encore introduit. L'équation est appliquée pour un fluide compressible et incompressible.

L'équation (III.16) peut être intégrée en respectant y du gradient de vitesse produit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{A(x,z)}{\mu} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{y}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B(x,z)}{\mu} \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

Les expressions générales pour les composantes de vitesse sont obtenues après intégration deuxième fois par rapport à y :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial p}{\partial x} \int \frac{y}{\mu} dy + A(x,z) \int \frac{dy}{\mu} + C(x,z) \\ w &= \frac{\partial p}{\partial z} \int \frac{y}{\mu} dy + B(x,z) \int \frac{dy}{\mu} + D(x,z) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Dans ce stade, on va supposer que la viscosité est dépend de x et z seulement, si non il faut considérer dans l'intégral.

Les valeurs limites pour la viscosité :

$$y = 0, u = u_1, w = w_1.$$

$$y = h, u = u_2, w = w_2.$$

Avec ces valeurs et supposant que la viscosité ne dépend pas de y on obtient :

$$\begin{cases} u = \left(1 - \frac{y}{h}\right)u_1 + \frac{y}{h}u_2 - \frac{y(h-y)}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ w = \left(1 - \frac{y}{h}\right)w_1 + \frac{y}{h}w_2 - \frac{y(h-y)}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

L'équation de Reynolds est obtenue on introduisant ces expressions dans l'équation de continuité (III.14) et on intègre par rapport à y, avec les limites $y = 0, h$, l'intégral de l'équation (III.14) devient :

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dy + \int_0^h \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dy + [\rho v]_0^h = 0 \quad (\text{III.20})$$

Cette expression est évaluée en utilisant le résultat général.

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} f(x, y, z) dy - f(x, y, z) \frac{\partial h_2}{\partial x} + f(x, y, z) \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (\text{III.21})$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u) dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (\rho w) dy - (\rho u)_2 \frac{\partial h}{\partial x} - (\rho w)_2 \frac{\partial h}{\partial z} + [\rho v]_0^h = 0 \quad (\text{III.22})$$

La densité normalement ne varie pas dans le film d'huile. En combinant les équations (III.14) et (III.19) on obtient l'équation de Reynolds généralisée réf [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h(u_1 + u_2)}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h(w_1 + w_2)}{2} \right) + \\ &- \rho u_2 \frac{\partial h}{\partial x} - \rho w_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \rho(v_2 - v_1) \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

III-3-c-2) Conditions aux limites des vitesses :

Pour deux cylindres parallèles en rotation, les conditions aux limites des vitesses les suivantes :

$$u_1 = u_1, v_2 = 0, w_1 = 0$$

$$u_2 = u_2, v_2 \approx u_2 \frac{\partial h}{\partial x}, w_2 = 0$$

Où, u_1, u_2 sont les vitesses de surfaces des deux cylindres suivant la direction x .

Ces conditions permettent décrire l'équation de Reynolds dans la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho h u) \quad (III.24)$$

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

Si maintenant on considère que les deux cylindres sont infiniment long, on peut éliminer la variation suivant z , donc l'équation de Reynolds prend la forme suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho h u) \quad \text{avec} \quad u = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (III.25)$$

III-3-c-3) Conditions aux limites des pressions :

$p(A) = 0$ A : Point d'entrer du contact

$p(B) = 0$ B : Point de sortir du contact

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=B} = 0$$

ii) La compressibilité :

La masse volumique ρ augmente légèrement avec la pression suivant la loi réf [2]:

$$\rho(P) = \rho_0 \cdot \frac{1 + A.P}{1 + B.P} \quad (III.26)$$

Où : ρ_0 est la masse volumique à pression ambiante

A et B des constantes

On choisit en général soit $A=B$ (pour un fluide incompressible), soit $A = 2.3\text{GPa}^{-1}$ et $B = 1.7\text{GPa}^{-1}$ (pour les lubrifiants conventionnels).

III-4) COMPORTEMENT DU LUBRIFIANT :

La viscosité et la densité du lubrifiant varient en particulier avec la température et la pression. Examinons ici l'effet de la pression, car celle-ci intervient directement dans l'équation de REYNOLDS. L'écoulement est supposé isotherme et le régime permanent.

III-4-a) Comportement piézovisqueux :

La viscosité dynamique est souvent mesurée à la pression atmosphérique, alors que dans les contacts, le lubrifiant est sollicité à des niveaux de pression de l'ordre de Gpa. A ces pressions, la viscosité peut être par exemple 100000 fois plus élevée qu'à la pression de référence. Soit μ_0 la viscosité dynamique du fluide à pression ambiante, plusieurs lois de piézoviscosité sont couramment utilisées réf[5].

- Lois de BARUS :

$$\mu(P) = \mu_0 \cdot \exp(\alpha \cdot P) \quad (\text{III.27})$$

Où α est le coefficient de piézoviscosité caractéristique de chaque produit de l'ordre de 1 à $2 \cdot 10^{-8} \text{Pa}^{-1}$.

- Loi puissance :

$$\mu(P) = \mu_0 \cdot (1 + C \cdot P)^m \quad (\text{III.28})$$

Ou C et m sont des constantes caractéristiques de chaque produit.

- Loi de REYNOLDS :

$$\mu(P) = \mu_0 \cdot \exp\left[(\ln \mu_0 + 9,67) \left(-1 + (1 + 5,1 \cdot P)^2\right)\right] \quad (\text{III.29})$$

Avec : P exprimé en GPa et μ_0 en Poiseuille, Z est une constante.

Un fluide dont la viscosité ne varie pas avec la pression est dit isovisqueux.

III-4-b) Comportement piézo-densimétrique :

Contrairement à l'hypothèse traditionnelle, le lubrifiant n'est plus incompressible aux pressions très élevées auxquelles il est soumis. DOWSON et HIGGINSON en 1959 ont proposé une loi de variation réf [2]:

$$\rho(P) = \rho(P_0) \left[1 + \frac{0,6.(P - P_0)}{1 + 1,7.(P - P_0)} \right] \quad (\text{III.30})$$

Cet effet est faible devant l'effet de piezoviscosité, par exemple en passant de la pression atmosphérique à 1GPa, ρ augmente de 35%, selon les auteurs, l'effet est important sur le pic de pression à la sortie du contact, mais très faible sur la forme générale du film et en particulier sur son épaisseur.

III-5) PRESSION REDUITE ET COEFFICIENT DE PIEZOVISCOSITE :

Pour un fluide piezovisqueux, l'équation de REYNOLDS est fortement non linéaire en P. Afin de la linéariser dans le cas d'un fluide incompressible, on introduit la pression réduite q, telle que :

$$\frac{dq}{dP} = \frac{\mu_0}{\mu} \quad (\text{III.31})$$

En effet, l'équation devrait alors, si μ_0 est indépendant de x et de z, ce qui est vrai en régime isotherme :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \cdot \frac{\partial q}{\partial z} \right) = 6 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} ((U_1 + U_2)h) + 6 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial z} ((W_1 + W_2)h) + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{III.32})$$

en posant :

$$q = \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha.P)] \quad (\text{III.33})$$

Les conditions aux frontières sont les mêmes en pression réelle et réduite, c'est à dire :

$$q = 0 \quad \text{à l'entrée du contact.}$$

$$q = 0 = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial z} \quad \text{à la sortie du contact.}$$

q représente la pression hydrodynamique générée dans le contact dans sa configuration actuelle avec le fluide incompressible isovisqueux, de viscosité μ_0 .

On a évidemment $q < P$ dès que $P > 0$. On appelle coefficient de piezoviscosité :

$$\alpha = \frac{1}{\lim q} \quad \text{pour } P \rightarrow \infty.$$

Considérons la loi de BARUS :

$$\mu(P) = \mu_0 \cdot \exp(\alpha.P) \quad (\text{III.34})$$

On en déduit :

$$q = \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha.P)] \quad (\text{III.35})$$

III-6) EQUATION DE L'ELASTICITE :

Lorsque les pressions dans le contact sont suffisamment élevées pour considérer la déformation entre les deux solides en contact, on procède comme suit :

Sous l'effet d'une distribution de pression, l'épaisseur H du film lubrifiant ou séparateur peut être écrite sous la forme :

$$H(x, z) = h_0 + H^0(x, z) + [U_n(x, z) - PEN] \quad (\text{III.36})$$

ou :

- h_0 est la séparation des deux surfaces en $x=z=0$.
- $H^0(x, z)$ est la distance entre les deux surfaces avant déformation.

- $U_n(x, z)$ est la différence de déplacement élastique normal entre deux points homologue de chaque solides.
- $PEN = U(0,0)$ est la pénétration en $x=z=0$.

$$U_n(x, z) = \frac{1-\nu}{\pi.E} \int_{-z_c}^{+z_c} \int_{x_e}^{x_s} \frac{P(x', z') dx' dz'}{[(x-x')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \quad (III.37)$$

Où :

- z_c est la demi longueur du contact en Z.
- x_e, x_s respectivement les abscisses d'entrée et de sortie du film.

Cette expression concerne les contacts linéaires et ponctuels. Notons qu'on peut écrire aussi :

$$[U_n(x, z) - PEN] = [H(x, z) - h_0] - H^0(x, z) \quad (III.38)$$

ou le second membre représente la différence des déplacements normaux des deux surfaces pour passer de l'état non déformé $H^0(x, z)$ à l'état déformé $[H(x, z) - h_0]$. Ainsi, le calcul de la distribution de pression induite par ce champ de déplacement, c'est à dire correspondant à une distribution de l'épaisseur du film lubrifiant, s'écrit alors :

$$\frac{1-\nu}{\pi.E} \int_{-z_c}^{+z_c} \int_{x_e}^{x_s} \frac{P(x', z') dx' dz'}{[(x-x')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} - PEN = [H(x, z) - h_0] - H^0(x, z) \quad (III.39)$$

Cette procédure prend tout son intérêt dans la solution inverse de l'équation de REYNOLDS.

III-7) EQUATION DE L'EQUILIBRE :

La charge appliquée au contact est l'intégrale des pression dans le film, quelque soit le type de contact, d'ou pour le plan x, z :

$$W = \int_{-z_c}^{+z_c} \int_{x_e}^{x_s} P(x, z) dx dz \quad (III.40)$$

III-8) FORMATION DU FILM D'HUILE :

La complexité du phénomène de formation du film d'huile entre les dentures conjuguées d'un engrenages est mise en évidence par le nombre des facteurs qui interviennent, certains de ces facteurs étant de plus généralement variables au cours du fonctionnement :

- Géométrie de l'engrenage : rayons de courbures ;
- Charge sur la denture ;
- Matériaux des dentures ;
- Cinématique de l'engrenage ;
 - Vitesse de roulement et de glissement.
 - Glissements spécifiques.
- Huile utilisée : Viscosité,
 - Influence de la pression.
 - Influence de la température.
- Etats de surface.

Dans notre étude nous allons étudier le cas isotherme avec des surfaces lisses.

Le film d'huile h à chaque distance x du centre du contact est la somme du film d'huile au centre du contact h_0 et la hauteur de la forme géométrique h_g et la déformation élastique h_d .

$$h(x) = h_0 + h_g + h_d \quad \text{(III.41)}$$

III-8-a) Film d'huile minimal H_0 :

Il est intéressant de connaître la valeur de l'épaisseur minimum du film d'huile H_0 , car il assure que les dentures seraient suffisamment écartées pour éviter le contact métal sur métal.

Nous pouvons déjà dire qualitativement que le film d'huile sera d'autant plus épais :

- que le rayon de courbure relatif sera grand.
- que la charge sera faible.
- que les vitesses de roulement seront importantes (une plus grande quantité d'huile étant amenée dans la zone du contact).

Pour un contact cylindrique infiniment long, la valeur adimensionnée de l'épaisseur du film de séparation H_0 au centre du contact est donnée par réf [17]:

$$H_0 = 1.131 U_*^{0.74} G_*^{0.74} W_*^{-0.11} \quad \text{Cheng} \quad (\text{III.42})$$

Et celle adimensionnée de l'épaisseur minimale H_m par

$$H_m = 0.985 U_*^{0.7} G_*^{0.6} W_*^{-0.13} \quad \text{Dowson-Higginson} \quad (\text{III.43})$$

Avec $U_* = \mu_0(u_1 + u_2)/(E'R)$, $W_* = w/(E'RL)$, $G_* = \alpha E'$

$$E' = \frac{1}{2} \left/ \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \right., R = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$$

R_1 : Rayon de courbure du solide 1.

R_2 : Rayon de courbure du solide 2.

E_1 : Module d'élasticité du solide 1.

E_2 : Module d'élasticité du solide 2.

ν_1 : coefficient du Poisson du solide 1.

ν_2 : coefficient du Poisson du solide 2.

III-8-b) La Hauteur Géométrique H_g :

La hauteur géométrique (séparation géométrique entre la surface du pignon et celle de la roue en engrènement en dehors de contrainte) au niveau d'un point $M(x,y,z)$ arbitrairement choisi sur le plan tangent au point du contact entre les dents, est défini par l'intersection de la normale au plan tangent commun passant par ce point et les surfaces respectivement de la roue et du pignon.

Pour deux cylindres en contact nous avons : $h_g = x^2/(2R)$ tel que R est le rayon de courbure équivalent (relatif).

III-8-c) La Hauteur de la déformation élastique Hd :

Dans un contact linéaire l'expression de la déformation élastique est donnée par l'intégral suivant :

$$hd = -\frac{2}{E} \int_A^B p(x') \ln \left| \frac{x - x'}{x_0 - x'} \right| dx' \quad (\text{III.44})$$

avec :

$$E = \frac{1}{\pi} \left/ \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \right.$$

CONCLUSION :

La modélisation du problème qui consiste à l'établissement des équations régissant ce dernier maintenant terminé, on passe à la partie numérique

CHAPITRE IV :
SCHEMA
NUMERIQUE

SCHEMA NUMERIQUE

IV-1 FILM D'HUILE :

Réécrivant l'équation (III.41) sous une forme adimensionnelle, multipliant par R/a^2 .

D'où :

$$H(x) = H_0 + H_g + H_d \quad (IV.1)$$

$$H(x) = \frac{h(x)R}{a^2}, \quad H_0 = \frac{h_0 R}{a^2}, \quad H_g = \frac{hg \cdot R}{a^2}, \quad H_d = \frac{hd \cdot R}{a^2}$$

IV-1-a) Film d'huile minimal H_0 :

L'expression du film d'huile minimal ou au centre du contact devient :

$$H_0 = 1.131 U_*^{0.74} G_*^{0.74} W_*^{-0.11} (R/a)^2 \quad \text{Cheng} \quad (IV.2)$$

Et celle adimensionnée de l'épaisseur minimale H_m par

$$H_m = 0.985 U_*^{0.7} G_*^{0.6} W_*^{-0.13} (R/a)^2 \quad \text{Dowson-Higginson} \quad (IV.3)$$

Avec $U_* = \mu_0(u_1 + u_2)/(E'R)$, $W_* = w/(E'RL)$, $G_* = \alpha E'$

$$E' = 2 \left/ \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \right., \quad R = 1 \left/ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right.$$

IV-1-b) La Hauteur Géométrique H_g :

La hauteur géométrique (séparation géométrique entre la surface du pignon et celle de la roue en engrenement en dehors de contrainte) au niveau d'un point $M(x,y,z)$ arbitrairement choisi sur le plan tangent au point du contact entre les dents, est défini par l'intersection de la normale au plan tangent commun passant par ce point et les surfaces respectivement de la roue et du pignon.

Chapitre IV : SCHEMA NUMERIQUE

Pour deux cylindres en contact on a $Hg = X^2/(2)$ tel que R est le rayon de courbure équivalent.

IV-1-c) La Hauteur de la déformation élastique Hd :

Dans les références, on trouve l'expression analytique de l'équation (IV.1) tel que:

$$Hd_i = \sum_{j=1}^{N-2} (D_{ij} - D0_{ij}) P_j \quad (IV.4)$$

avec :

$$D_{ij} = -\frac{1}{\pi} \left\{ (X_{j+1/2} - X_i) (\ln|X_{j+1/2} - X_i| - 1) - (X_{j-1/2} - X_i) (\ln|X_{j-1/2} - X_i| - 1) \right\}$$

$$D0_{ij} = -\frac{1}{\pi} \left\{ (X_{j+1/2} - X_0) (\ln|X_{j+1/2} - X_0| - 1) - (X_{j-1/2} - X_0) (\ln|X_{j-1/2} - X_0| - 1) \right\}$$

X_0 : l'abscisse au centre du contact

IV-2) EQUATION DE REYNOLDS :

Réécrivant l'équation de Reynolds utilisant la méthode des différences finies, pour cela on utilise la forme adimensionnelle de cette équation. L'équation (I-8) devient :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial X} (\bar{\rho} H) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{12uR^2 \mu_0}{a^3 P_0} \quad (IV.5)$$

Avec :

$$H = \frac{hR}{a^2}, \quad P = \frac{P}{P_0}, \quad X = \frac{x}{a}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\mu}} \right) \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = \lambda \frac{\partial}{\partial X} (\bar{\rho} H) \quad (IV.6)$$

1) appliquant la différence finie, avec :

$$\Delta X = X_{i+1} - X_i$$

On obtient :

Chapitre IV : SCHEMA NUMERIQUE

$$G_i = \frac{\bar{\rho}_{i+1/2} H_{i+1/2}^3}{\Delta^2 \bar{\eta}_{i+1/2}} (P_{i+1} - P_i) + \frac{\bar{\rho}_{i-1/2} H_{i-1/2}^3}{\Delta^2 \bar{\eta}_{i-1/2}} (P_{i-1} - P_i) - \frac{\lambda}{\Delta} (\rho_i H_i - \rho_{i-1} H_{i-1}) = 0 \quad (IV.7)$$

Appliquant la méthode de Newton-Ramphson qui sert à :

$$\sum_1^{N-2} \frac{\partial G_i}{\partial P_j} (\Delta P_j) + G_i = 0 \quad (IV.8)$$

On aura le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial P_1} & \frac{\partial G_1}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial P_{N-2}} \\ \frac{\partial G_2}{\partial P_1} & \frac{\partial G_2}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial G_2}{\partial P_{N-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_{N-2}}{\partial P_1} & \frac{\partial G_{N-2}}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial G_{N-2}}{\partial P_{N-2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \dots \\ \Delta P_{N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1 \\ -G_2 \\ \dots \\ -G_{N-2} \end{bmatrix} \quad (IV.9)$$

avec :

$$\Delta P_i = (\Delta P_i^N - \Delta P_i^0)$$

N : la nouvelle valeur

0 : l'ancienne valeur

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial P_j} = & \left[\frac{\left(\frac{\partial \bar{\rho}_{i+1/2}}{\partial P_j} H_{i+1/2}^3 + 3H_{i+1/2}^2 \bar{\rho}_{i+1/2} \frac{\partial H_{i+1/2}}{\partial P_j} \right) \bar{\mu}_{i+1/2} - \bar{\rho}_{i+1/2} H_{i+1/2}^3 \frac{\partial \bar{\mu}_{i+1/2}}{\partial P_j}}{\Delta^2 \bar{\mu}_{i+1/2}^2} (P_{i+1} - P_i) + \right. \\ & \left. + \frac{\left(\frac{\partial \bar{\rho}_{i-1/2}}{\partial P_j} H_{i-1/2}^3 + 3H_{i-1/2}^2 \bar{\rho}_{i-1/2} \frac{\partial H_{i-1/2}}{\partial P_j} \right) \bar{\mu}_{i-1/2} - \bar{\rho}_{i-1/2} H_{i-1/2}^3 \frac{\partial \bar{\mu}_{i-1/2}}{\partial P_j}}{\Delta^2 \bar{\mu}_{i-1/2}^2} (P_{i-1} - P_i) + \right. \\ & \frac{\bar{\rho}_{i-1/2} H_{i-1/2}^3}{\Delta^2 \bar{\mu}_{i-1/2}} (\delta_{i-1,j} - \delta_{ij}) + \frac{\bar{\rho}_{i+1/2} H_{i+1/2}^3}{\Delta^2 \bar{\mu}_{i+1/2}} (\delta_{i+1,j} - \delta_{ij}) + \\ & \left. - \frac{\lambda}{\Delta} \left(\frac{\partial \bar{\rho}_i}{\partial P_j} H_i + \bar{\rho}_i \frac{\partial H_i}{\partial P_j} - \frac{\partial \bar{\rho}_{i-1}}{\partial P_j} H_{i-1} - \bar{\rho}_{i-1} \frac{\partial H_{i-1}}{\partial P_j} \right) = 0 \end{aligned}$$

Chapitre IV : SCHEMA NUMERIQUE

avec :

$$H_{i\pm 1/2} = \frac{H_{i\pm 1} + H_i}{2} \Rightarrow \frac{\partial H_{i\pm 1/2}}{\partial P_j} = (D_{i\pm 1j} - D0_{i\pm 1j} + D_{ij} - D0_{ij})/2$$

$$\bar{\rho}_{i\pm 1/2} = \frac{\bar{\rho}_{i\pm 1} + \bar{\rho}_i}{2} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\rho}_{i\pm 1/2}}{\partial P_j} = (\delta_{i\pm 1j} + \delta_{ij}) \frac{\partial \bar{\rho}_j}{\partial P_j} / 2$$

$$\bar{\mu}_{i\pm 1/2} = \frac{\bar{\mu}_{i\pm 1} + \bar{\mu}_i}{2} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\mu}_{i\pm 1/2}}{\partial P_j} = (\delta_{i\pm 1j} + \delta_{ij}) \frac{\partial \bar{\mu}_j}{\partial P_j} / 2$$

et :

$$\bar{\rho}_j = 1 + \frac{C_a P_0 P_j}{1 + C_b P_0 P_j} \Rightarrow \frac{\partial \bar{\rho}_j}{\partial P_j} = \frac{C_a P_0}{(1 + C_b P_0 P_j)^2}$$

$$\bar{\mu}_j = \exp(\alpha_b P_j) \Rightarrow \frac{\partial \bar{\mu}_j}{\partial P_j} = \alpha_b \exp(\alpha_b P_j) \quad \text{avec} \quad \alpha_b = \alpha P_0$$

2) appliquant la différence finie, avec :

$$\Delta X = X_{i+1} - X_i$$

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta X} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \frac{F_{i+1} + F_{i-1} - 2F_i}{\Delta X^2}$$

F est une fonction de X, tel que $H = H(X)$, $P = P(X)$

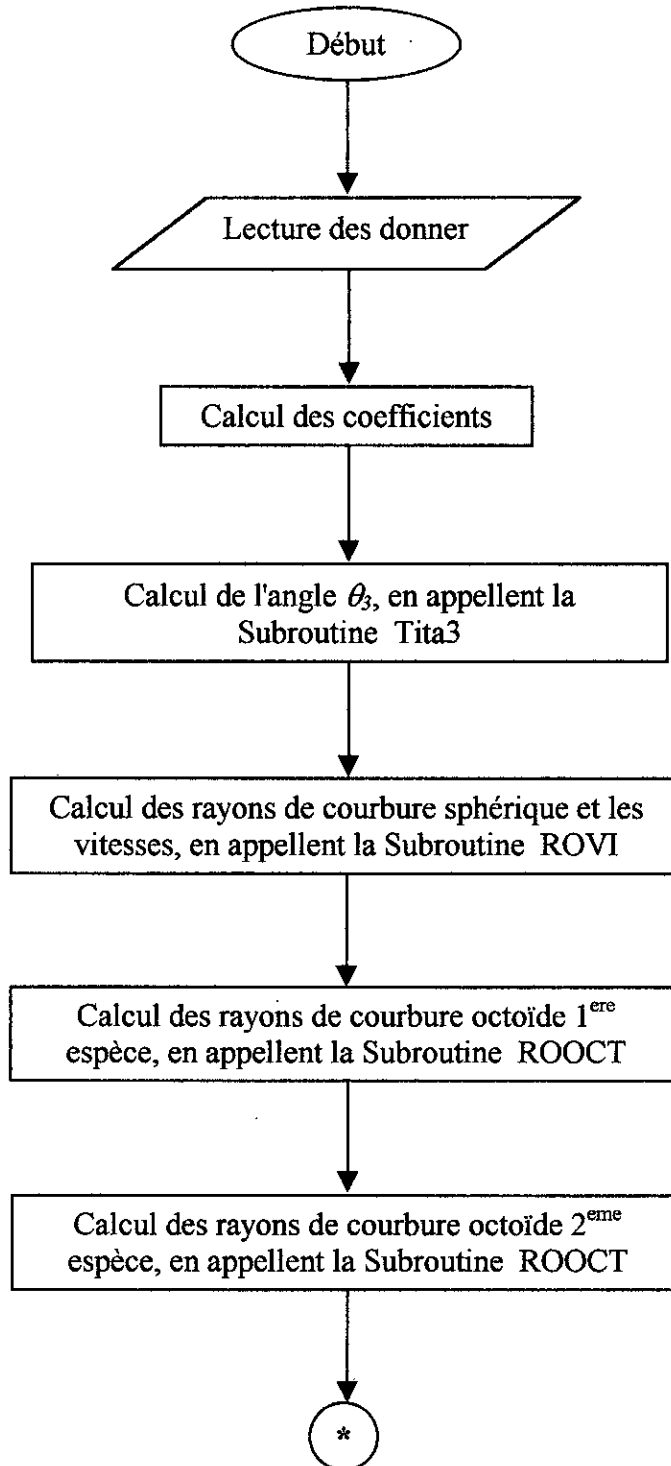
$$\bar{\mu} = \bar{\mu}(x) \quad \text{et} \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}(x)$$

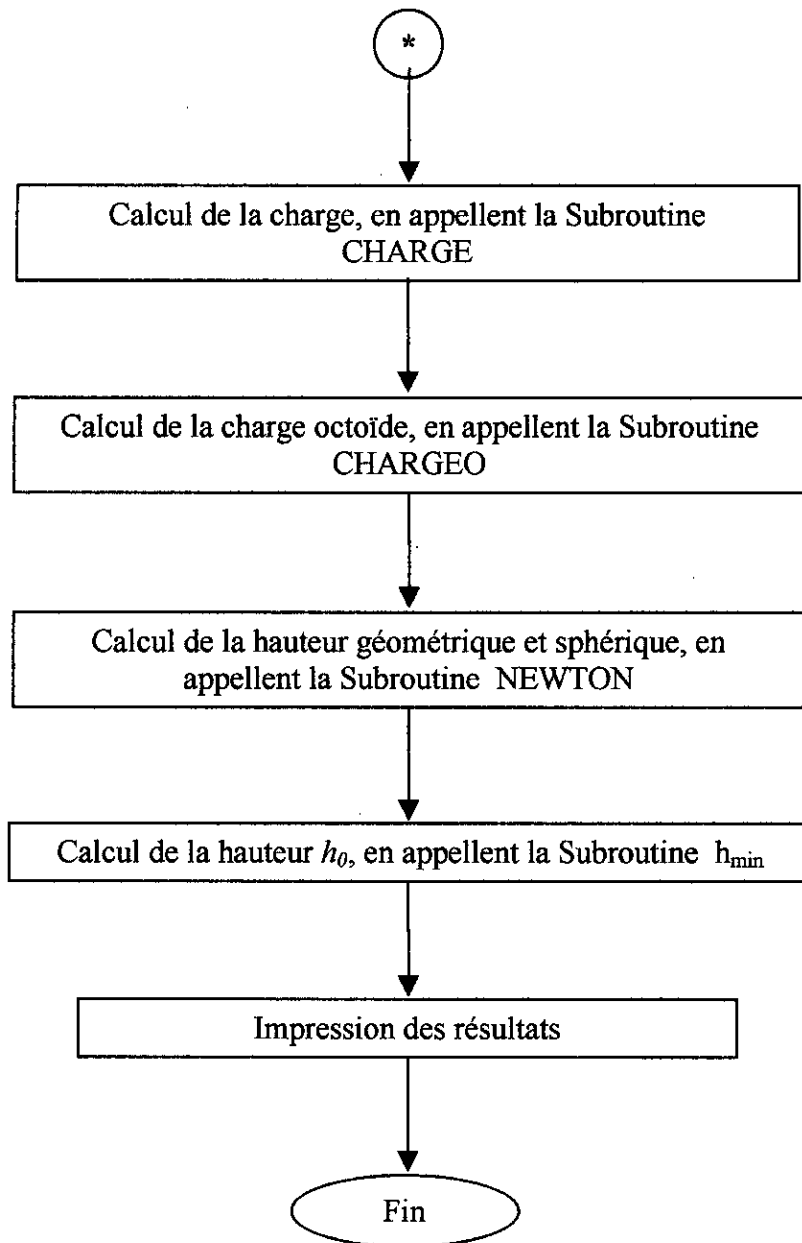
On obtient :

$$\left(\frac{\left(3H_i^2 \left(\frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\Delta X} \right) \bar{\rho} + \left(\frac{\bar{\rho}_{i+1} - \bar{\rho}_{i-1}}{2\Delta X} \right) H_i^3 \right) \bar{\mu}_i - \bar{\rho}_i H_i^3 \left(\frac{\bar{\mu}_{i+1} - \bar{\mu}_{i-1}}{2\Delta X} \right)}{\bar{\mu}_i^2} \right) \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2\Delta X} + \left(\frac{\bar{\rho}_i H_i^3}{\bar{\mu}_i} \left(\frac{P_{i+1} + P_{i-1} - 2P_i}{\Delta X^2} \right) - \lambda \left(\bar{\rho}_i \left(\frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2\Delta X} \right) + H_i \left(\frac{\bar{\rho}_{i+1} - \bar{\rho}_{i-1}}{2\Delta X} \right) \right) \right) = 0 \quad (\text{IV.10})$$

IV-3) ORGANIGRAMME DE RESOLUTION :

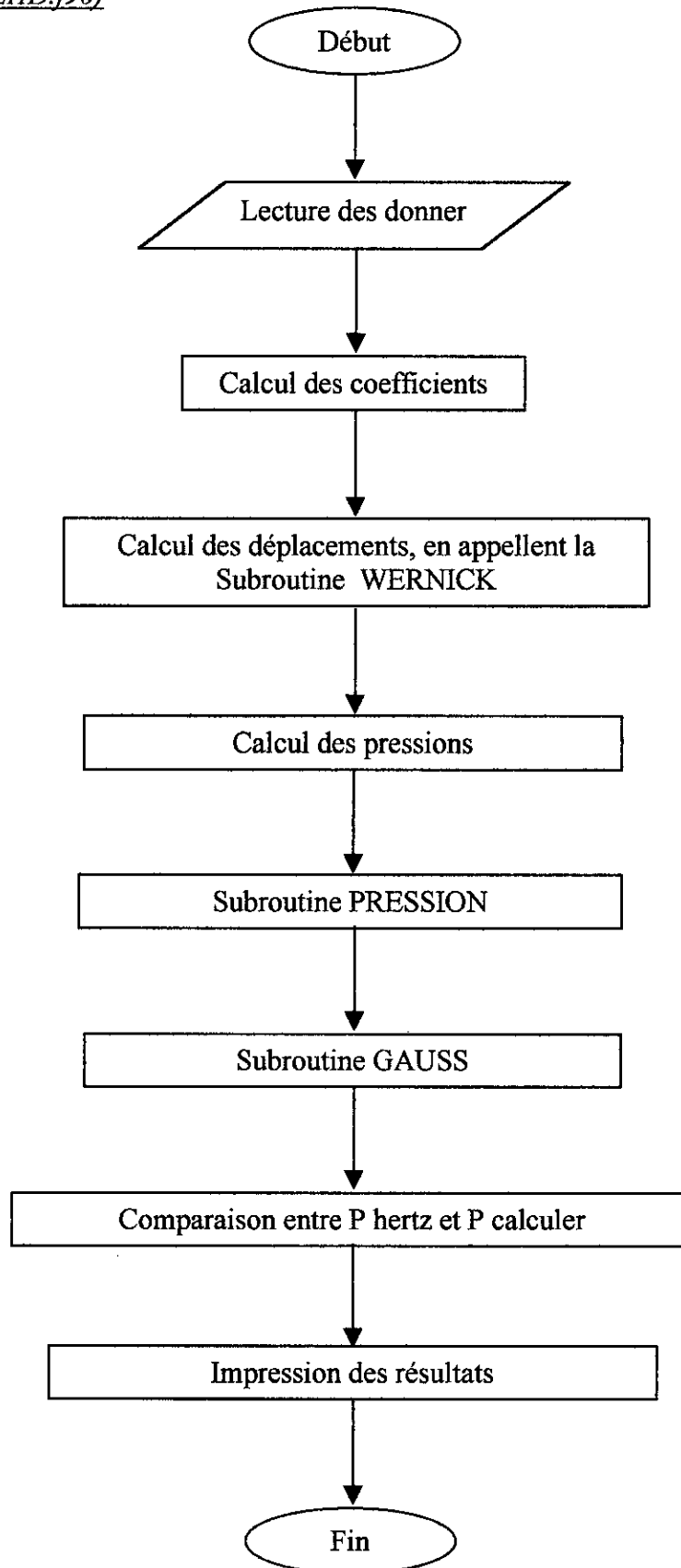
Organigramme : (Rayon de courbure.f90)





Chapitre IV : SCHEMA NUMERIQUE

Organigramme : (EHD.f90)



CHAPITRE V :

RESULTATS

ET

INTERPRETATIONS

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

Dans ce chapitre, on va présenter les résultats obtenus après l'exécution des programmes, ainsi que leurs interprétations :

V-1) Programme de calcul des rayons de courbure :

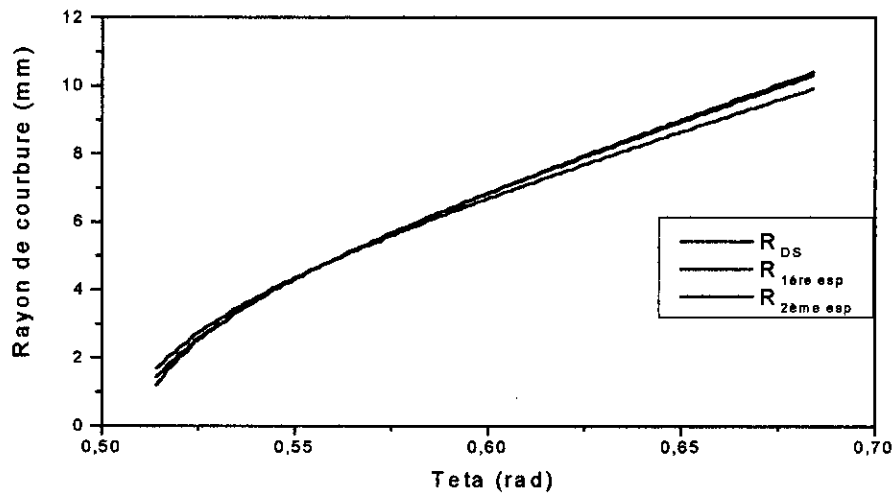


Fig.19 : Comparaison entre rayon de courbure théorique et rayon de courbure 1^{er} espèce et 2^{ème} espèce pour $R=20\text{mm}$

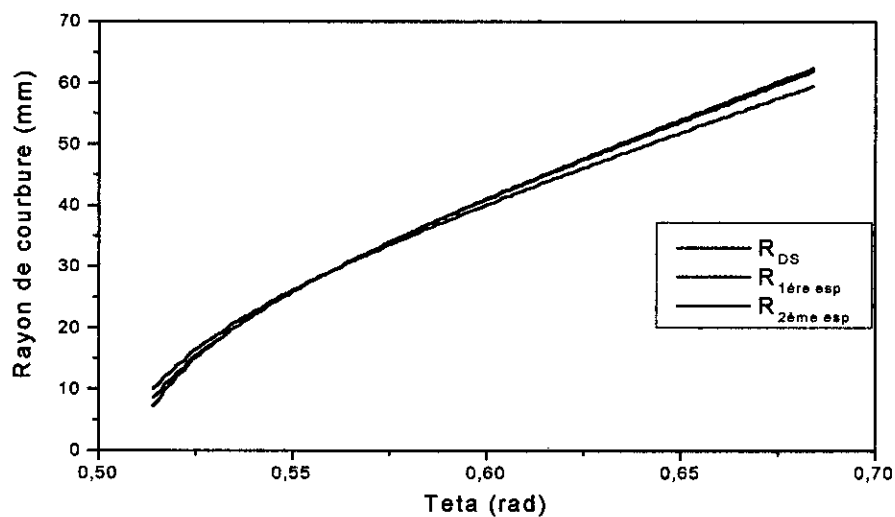


Fig.20 : Comparaison entre rayon de courbure théorique et rayon de courbure 1^{er} espèce et 2^{ème} espèce pour $R=115\text{mm}$

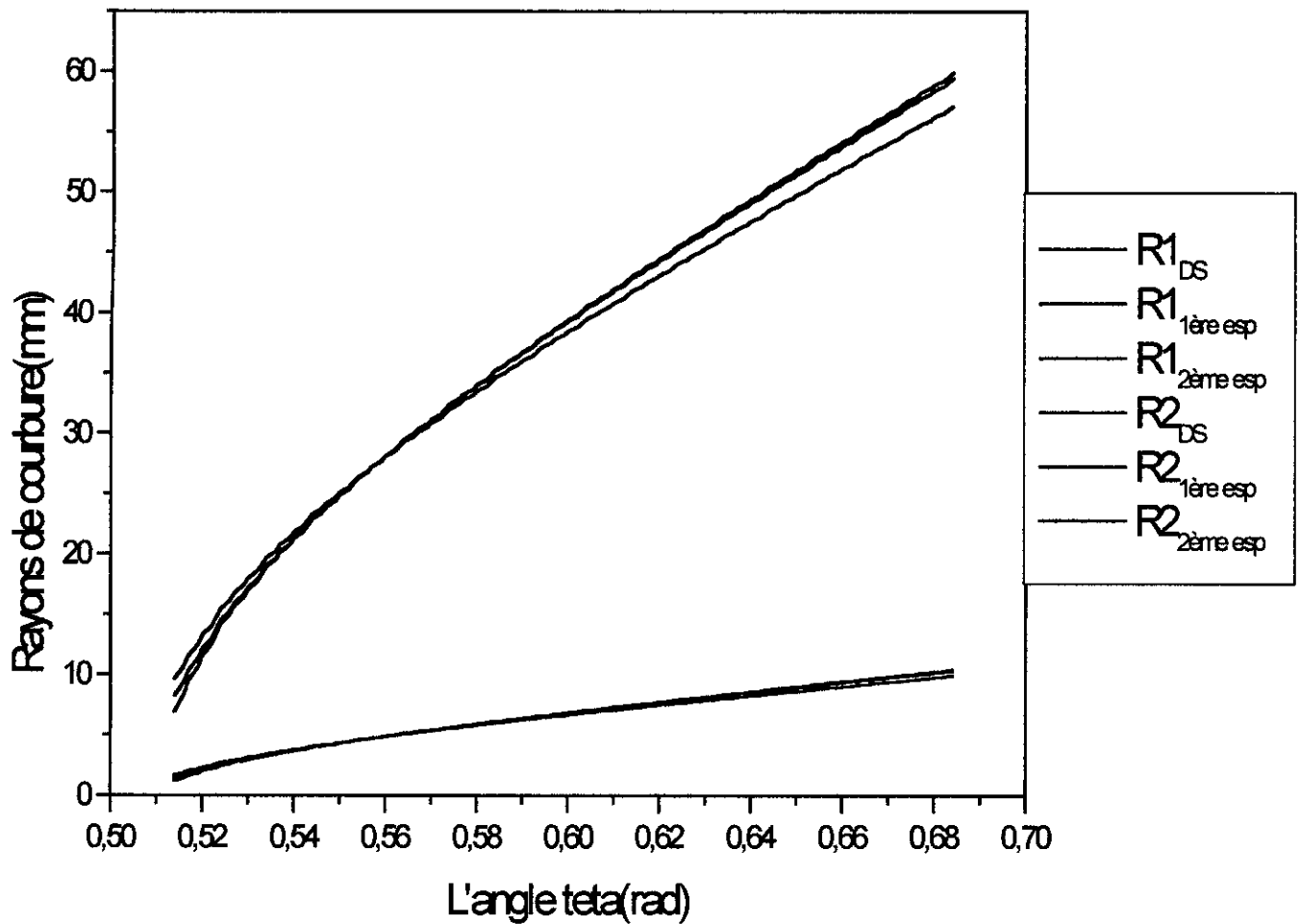


Fig.21 : Comparaison entre les rayons de courbures pour R=20mm et R=115mm

INTERPRETATION :

Les graphes ci-dessus représentent les variations des rayons de courbures : de la développante sphérique, octoïde 1^{ère} espèce et 2^{ème} espèce.

Dans les deux premiers, On remarque que le trait en rouge et entre le vert et le bleu, ce qui signifie que les valeurs du rayon de courbure de la développante sphérique sont toujours situées entre les deux autres.

Dans le troisième graphe, on constate l'augmentation de la courbure des rayons pour un changement positif des valeurs du rayon du cercle de base du cône primitif.

V-2) La distribution de pression et l'épaisseur du film d'huile le long du profil :

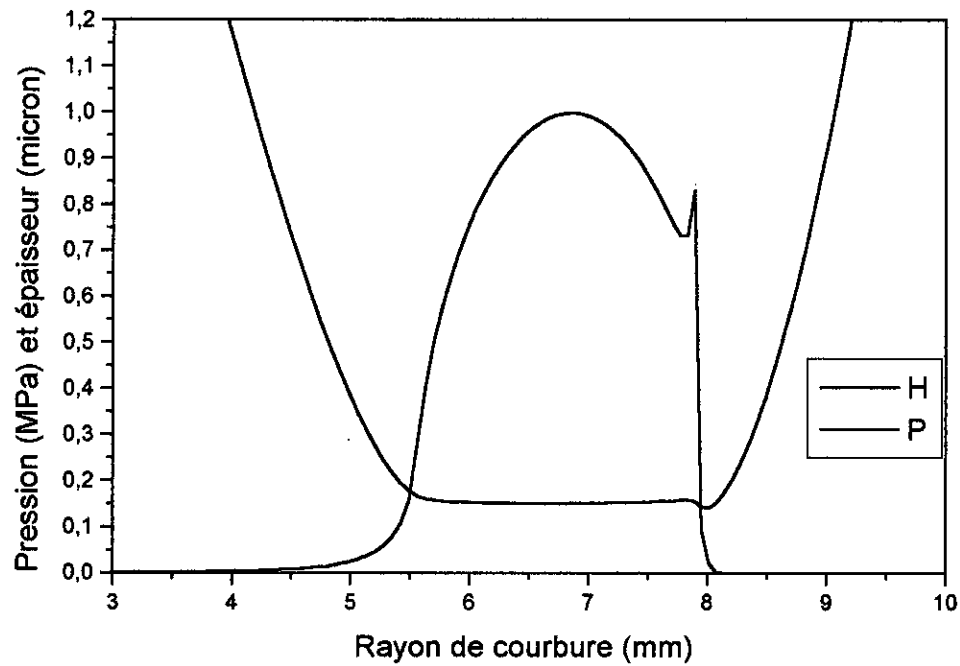


Fig.22 : Distribution de pression et épaisseur du filme d'huile en fonction du rayon de courbure pour R=20mm

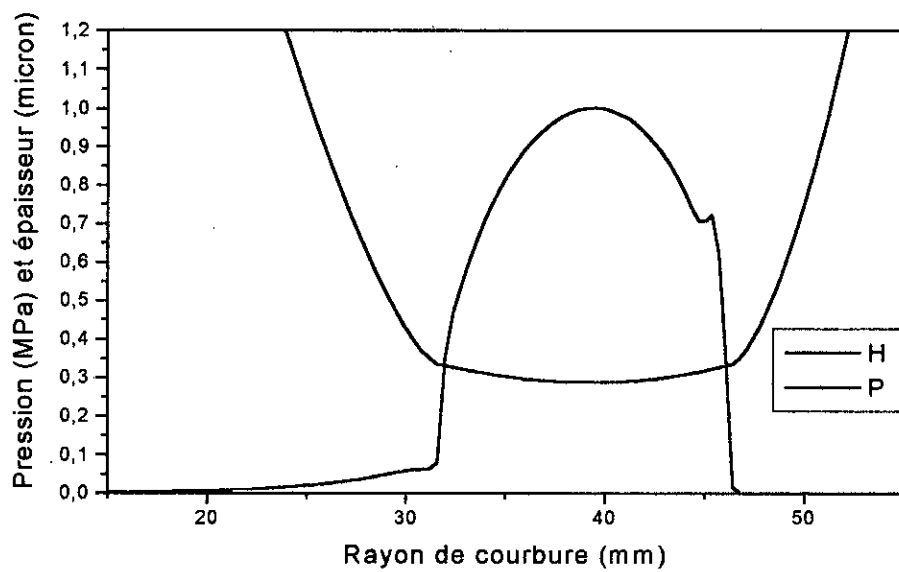


Fig.23 : Distribution de pression et épaisseur du filme d'huile en fonction du rayon de courbure pour R = 115mm

INTERPRETATION :

Les deux graphes ci-dessus représentent les variations : de la pression élastohydrodynamique calculée pour les valeurs de $R=20\text{mm}$ et $R=115\text{mm}$ du rayon du cercle de base du cône primitif, ainsi que l'épaisseur du film d'huile interposé entre les surfaces des dentures.

On constate, en premier lieu, l'allure de la distribution de pression qui est caractérisée par un pic à environ 80% de la valeur du rayon de courbure de la développante sphérique.

En dépit de la comparaison entre les deux graphes, on peut conclure qu'une augmentation du rayon du cercle de base du cône primitif qui engendre automatiquement une augmentation du rayon de courbure de la surface de denture, fait augmenter l'épaisseur du film d'huile ce qui diminue légèrement les valeurs de la pression. Cette diminution est constatée surtout au niveau de la sortie, ce qui explique la baisse du pic pour $R=115\text{mm}$ par rapport au premier cas. Ainsi que la disparition de la chute de l'épaisseur du film d'huile dans le deuxième graphe.

V-3) Comparaison entre la pression EHD et celle de HERTZ :

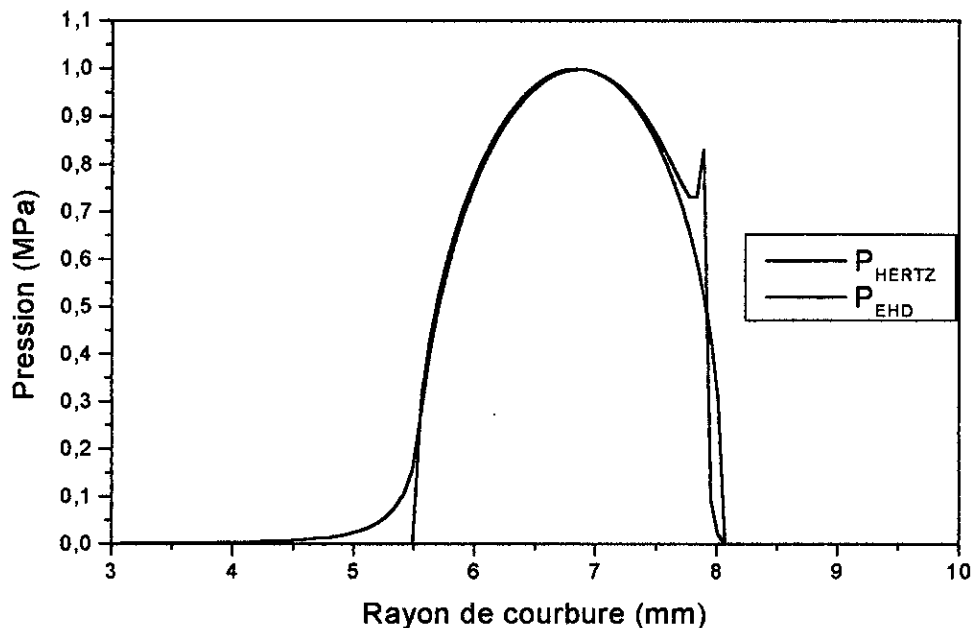


Fig.24 : Comparaison entre pression de hertz et pression EHD pour $R=20\text{mm}$

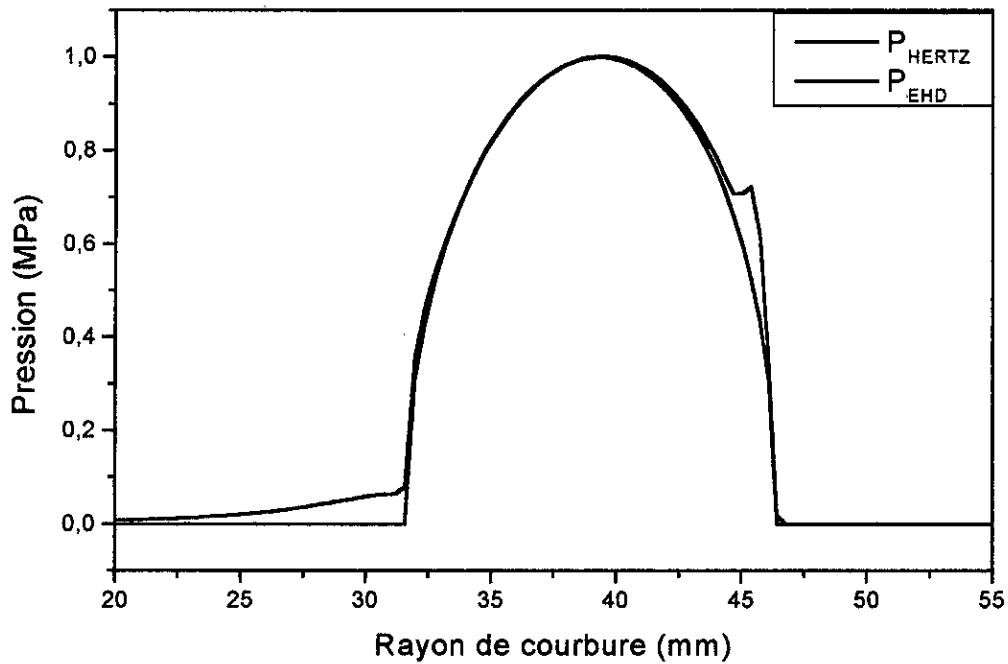


Fig.25 : Comparaison entre pression de HERTZ ET EHD pour R=115mm

INTERPRETATION :

Dans cette partie, on a représenté les variations des pressions EHD, et celles issues de la théorie de HERTZ en fonction du rayon de courbure, pour deux valeurs du rayon du cercle de base du cône primitif.

La différence essentielle remarquée est le pic de pression à la sortie, qui caractérise la pression EHD. Il est dû à l'étranglement dans l'épaisseur du film d'huile dû, à son tour, au effets de la prise en compte des déformations élastiques des surfaces en contacts.

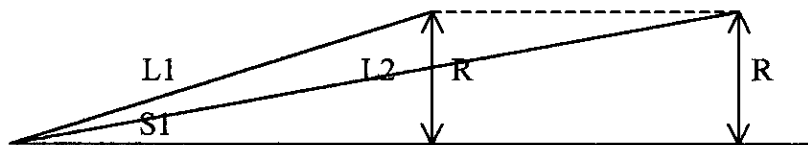


Fig.26 : Variation de L sans changement de R pour le cône primitif

V-4) Variation de la largeur des dents :

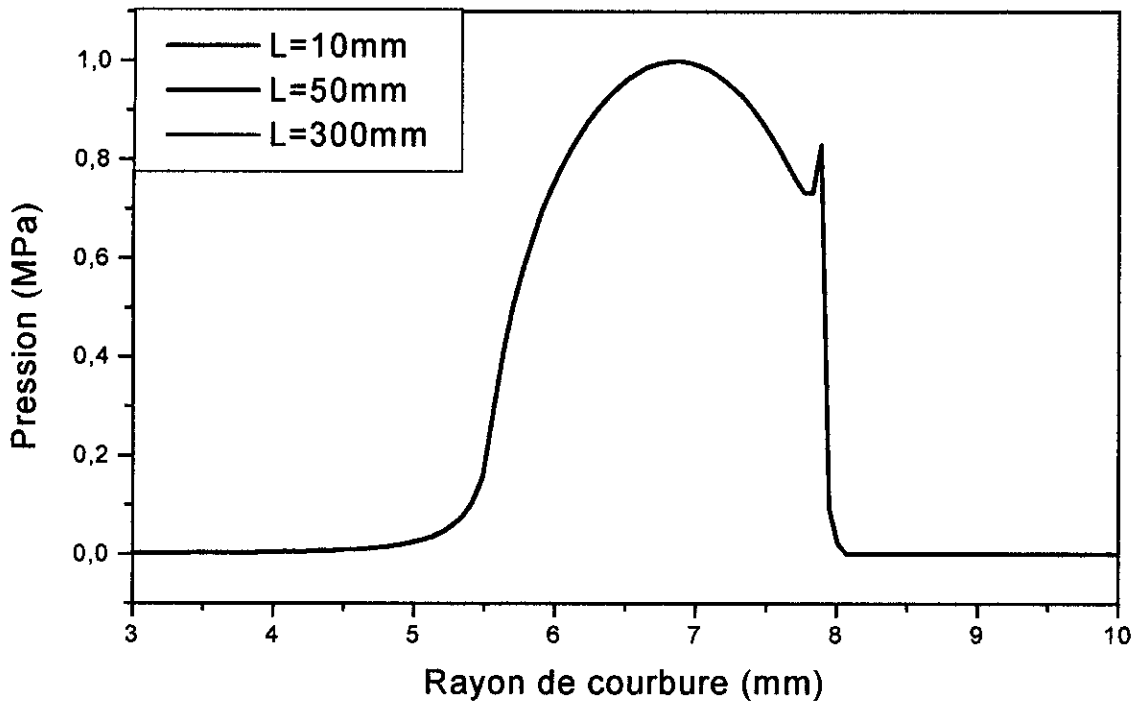


Fig.27 : Distribution de pression pour différentes largeurs de la denture

INTERPRETATION :

Le graphe représente les variations de la pression EHD en fonction du rayon de courbure pour les valeurs de : $L=10, 50$ et 300 mm de la longueur de la génératrice du cône primitif, ce qui représente la largeur de la denture à un rapport fixe de $1/3$.

On constate que les trois distributions sont quasiment confondues, ce qui signifie qu'un changement de la largeur de la denture, en gardant tous les autres paramètres constants ne fait pas varier les pressions.

Par ailleurs, on attire l'attention des lecteurs, qu'en pratique, un changement de la largeur de la denture est toujours accompagné d'une variation d'autres paramètres.

V-5) Variation de la vitesse linéaire au point de contact :

On a $U=R \cdot \omega$, pour $R=115\text{mm}$ on aura :

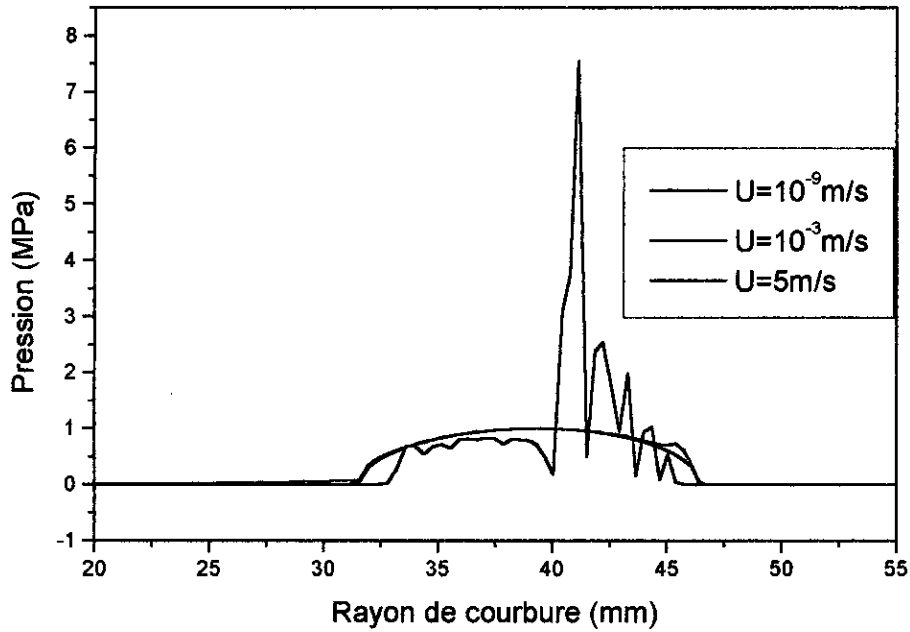


Fig.28 : Variation de la pression pour différentes valeurs de U

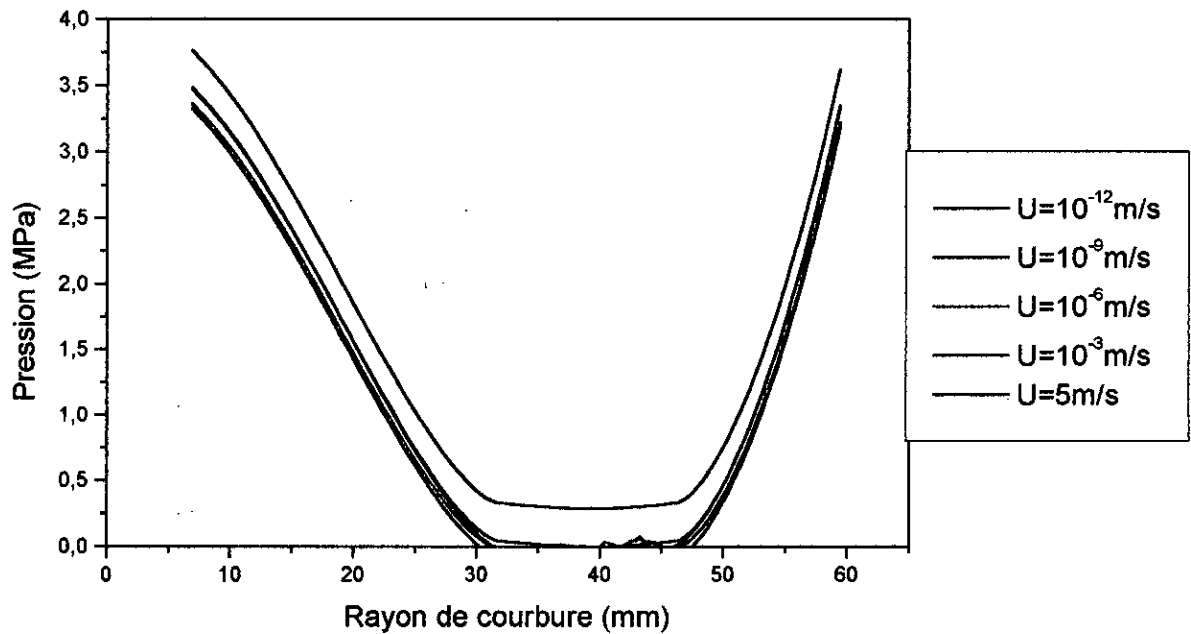


Fig.29 : Variation de l'épaisseur du film d'huile pour différentes valeurs de U

INTERPRETATION :

Pour les basses vitesses, la distribution de pression EHD présente un grand pic et plusieurs perturbations, surtout à l'approche de la sortie. Ces avaries disparaissent au fur et à mesure que les vitesses augmentent.

Les avaries sont dues essentiellement à la chute de l'épaisseur du film d'huile pour ces vitesses ($U=10^{-12}$ jusqu'à $U=10^{-6}$ m/s), qui avoisine le zéro.

V-6) Variation de la charge:

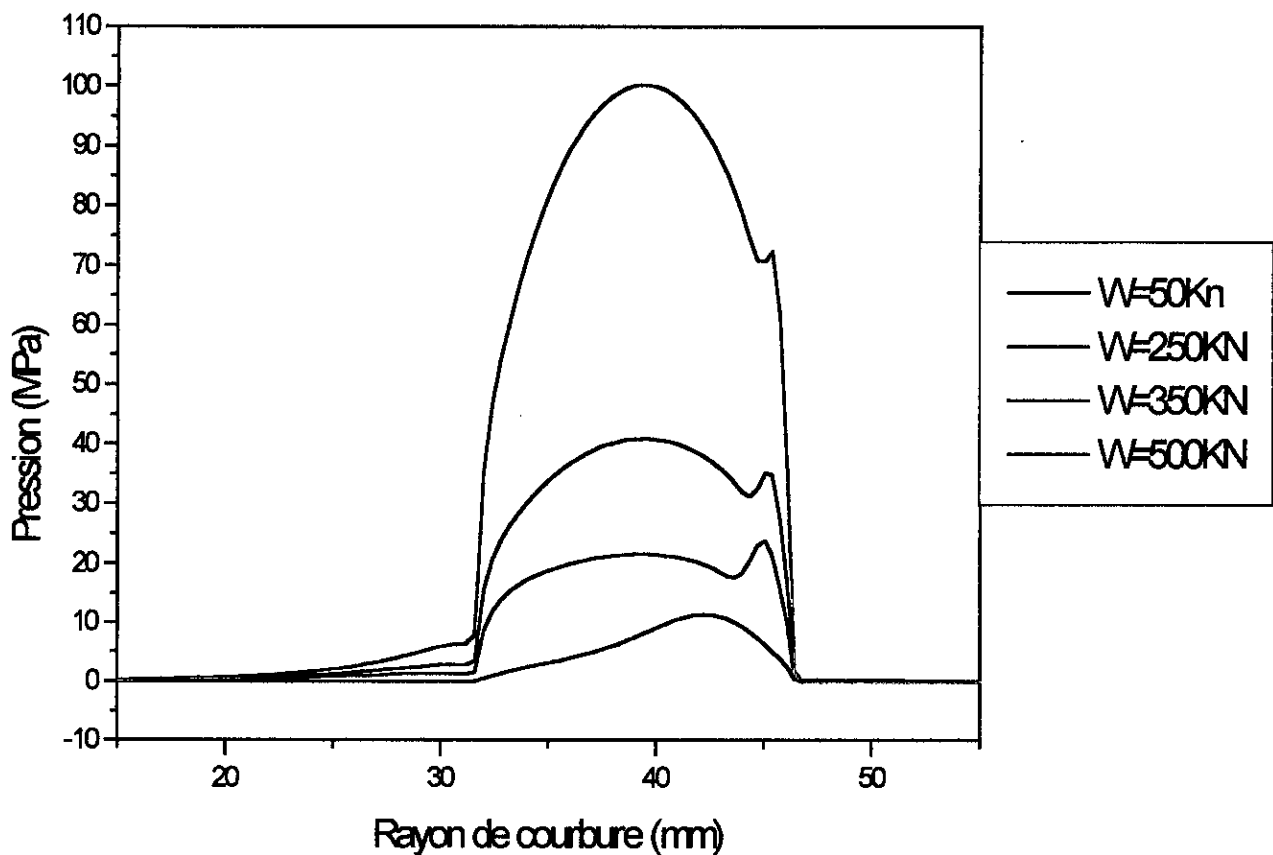


Fig.30 : Variation de la pression EHD pour différentes valeurs de W

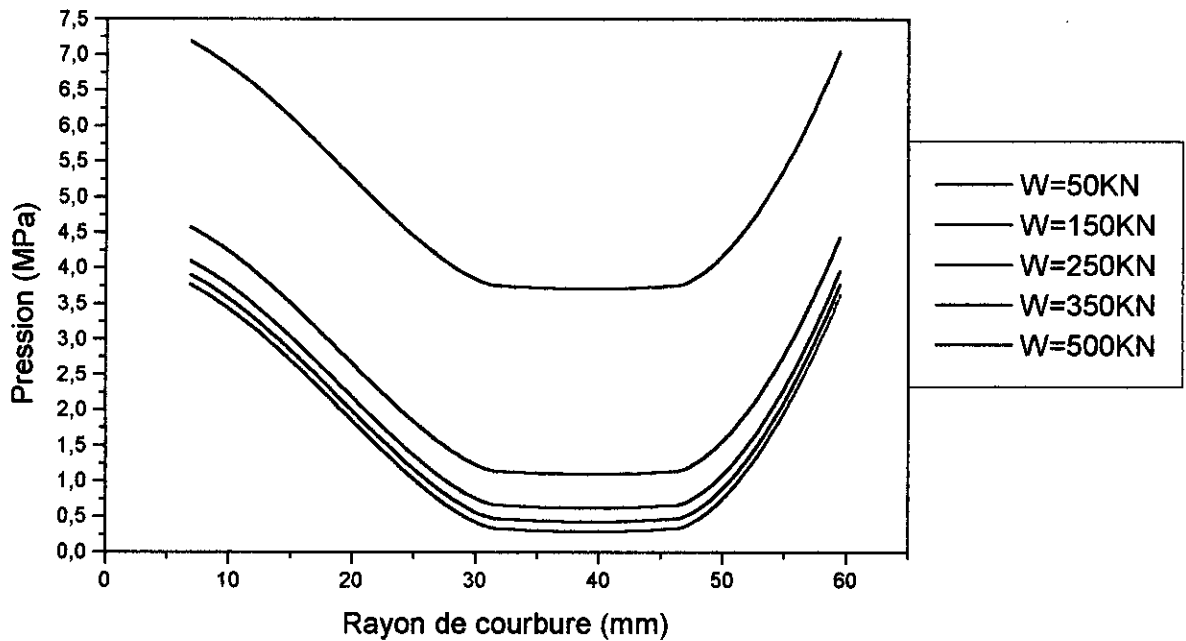


Fig.31 : Variation de l'épaisseur du film d'huile pour différentes valeurs de W

INTERPRETATION :

Dans les deux derniers graphes, on a représenté les distributions de la pression EHD et de l'épaisseur du film lubrifiant, pour différentes valeurs de la charge appliquée.

On constate que les allures des courbes sont restées les mêmes, avec une augmentation des valeurs maximales des distributions de pressions engendrée par la diminution des valeurs minimales de l'épaisseur du film d'huile, engendrée à son tour, par l'augmentation de la charge appliquée sur le point de contact des surfaces des dentures.

REMARQUES:

L'absence des résultats de l'application de la théorie EHD sur la lubrification des engrenages coniques droits dans les ouvrages consultés, nous a amené à faire une comparaison qualitative avec les références bibliographiques (réf [1] et [5]), ce qui révèle une conformité totale.

CONCLUSION

GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, on a commencé par une introduction sur les engrenages coniques droits à développantes sphériques, puis on a étudié d'une manière assez détaillée leur géométrie, ainsi que leur cinématique, ce qui nous a permis d'aborder l'étude dynamique de la manière la plus simple.

En suite on a exposé la théorie élastohydrodynamique, toute en posant au fur et à mesure, des conditions qui nous ont permis d'approcher notre cas d'étude.

L'absence de solutions analytiques pour ce genre de problème, nous a poussé à élaborer, à la suite d'une discretisation des équations retrouvées au par avant :

- Dans un premier lieu, un programme qui calcul les rayons de courbures des surfaces de denture.
- Puis, dans une seconde étape, un autre programme qui calcul la pression et l'épaisseur du film d'huile dans un contact EHD.

Les résultats retrouvés se résument comme suit:

- Le taillage des roues coniques droites par la méthode de génération donne des résultats conformes, du fait que les valeurs du rayon de courbure de la développante sphérique sont assez proches des valeurs des rayons de courbures octoïdes 1^{ère} et 2^{ème} espèce.
- La différence essentielle entre la théorie classique de HERTZ et la théorie élastohydrodynamique et la prise en compte des effets de l'élasticité des surfaces en contacts, ce qui engendre un pic de pression à environ 20% des valeur du rayon de courbure de la sortie, dû au rétrécissement de la hauteur géométrique entre les surfaces des dentures, donc une diminution instantanée de l'épaisseur du film d'huile.
- La variation des paramètres d'engrènement influence à des degrés plus au moins important les distribution de pression et d'épaisseur du film d'huile à travers un contact EHD.

La majorité des résultats retrouvés sont en accord avec ceux déjà existants dans les références bibliographiques.

Par contre, l'hypothèse que l'écoulement du lubrifiant est isotherme, reste à débattre, du faite de l'influence des changements de températures sur les différents paramètres régissant la lubrification élastohydrodynamique.

Ce qui nous amène à proposer que le même problème soit repris avec la prise en compte des effets de changement de température sur la viscosité du lubrifiant, la dilatation des surfaces en contacts, ainsi que le régime d'écoulement.



REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T.ALMQVIST et R.LARSSON : The NAVIER-STOKES approach for thermal EHL line contact solutions. University of technology 2001, Sweden.
- [2] H.BELHANACHE : Cours de mécanique des contacts 5^{ème} année. ENP.
- [3] M.BOUAZIZ : Contribution au contrôle des engrenages sur machine à mesurer tridimensionnelle, Thèse de doctorat d'état, ENP Janv 1996.
- [4] A.L.DEFRETIN : Taillage des toues coniques. Cours, ENSAM de Lille, 1987.
- [5] D.DOWSON et G.R.HIGGINSON : Elastohydrodynamic lubrication. SI édition 1977.
- [6] G.FAJDIGA, J.FLASKER et S.GLODEZ : The influence of different parameters on surface pitting of contacting mechanical elements. University of MARIBOR, 2000.
- [7] G.HENRIOT : Manuel pratique de engrenages. Dunod 1965, France.
- [8] G.HENRIOT : Traité théorique et pratique des engrenages. Tome 1 et 2, 5^{ème} édition, Dunod 1983, France.
- [9] R. LEBORZEC : Etude Générale de l'engrenage. Cours, ENSAM de Lille, 1989.
- [10] J.MARZOUKI : Déports de denture en engrenages coniques. ENSAM de Paris, Bull N° : 77- Octobre 1981.
- [11] J.MATHIEN : Cours de mathématiques. Dunod 1973, Paris.
- [12] J-C.RAFFY : Contribution à l'étude et à la simulation du contact lubrifié des engrenages. Thèse de doctorat. Université de CLAUDE-BERNARD. LYON 1973.
- [13] J-C.RAFFY et M.GODET : La validité de l'approximation de Tredgold pour les engrenages coniques droits. S.E.I.E, Bull N° : 54, Paris, Janv 1968.
- [14] J-C RAFFY et M.GODET : Le calcul des engrenages coniques droits à développante de cercle sphérique. Revue S.E.I.E N° : 53 Septembre 1967, Paris.
- [15] M.R.SPIGEL : Analyse vectorielle, cours et problèmes, série schaum, Mc Graw-Hill, Paris, 1983.
- [16] Y.C.TSAI et PC.CHIN : Surface geometry of straight and spiral bevel gears. Journal of mechanisms, transmissions and automation in design, vol 109, Décembre 1987, USA.
- [17] O.ZEBDI : Travaux de magistère, ENP.