

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département d'Electronique



Projet de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'État en Électronique Thème :

**Estimation des paramètres cinétiques du réacteur NUR
avec le filtre de KALMAN étendu.**

Réalisé par :

LENOUAR

Ali Zinelabidine

Encadré par :

Mr C.Larbes

Mme F.Adda

Promotion : Juin 2015

Dédicace

A mes parents, mon frère, mes petites sœurs et à feu ma grand-mère.

Repose en paix grand-mère

Remerciements

Mes sincères remerciements vont à mes encadreurs, Monsieur Chérif LARBES et Madame Fatema ADDA d'être les porteurs de ce projet. Je les remercie pour leur implication dans ce projet, leur disponibilité, les différents échanges et leur engagement pour mener à bien cette étude.

Je remercie vivement les membres de jury d'avoir accepté d'examiner ce travail : Monsieur D.BERKANI de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury, Monsieur C.LARBES et Madame F.ADDA d'avoir accepté de rapporter sur mon travail et Monsieur MAAMRI pour être mon examinateur . Merci à tous du temps pris pour la lecture de mon document. Merci de vos remarques et questionnements le jour de la soutenance.

C'est parce que chaque histoire a un point de départ, que je tiens à remercier très sincèrement Monsieur B.DERRAS et Monsieur A.BELOUACHRANI de m'avoir encouragé à aller dans le parcours de traitement de signal. Merci aux chercheurs et aux enseignants-chercheurs du département pour les conseils et discussions partagés.

Je remercie chaleureusement ceux qui ont accepté de m'aider à ce travail parmi eux, mes amis Reda, Ramzi, Farhat, Hocine, Adel et Housseem. Thanks Ramzi !!

A celui avec lequel l'amitié trouve tous son sens, avec lequel j'ai partagé mes délires, mes questionnements et toutes les discussions. J'adresse des remerciements particuliers à Madani Mouhammed Achraf que je félicite au passage.

J'adresse mes chaleureux remerciements à mes parents, à mes grands parents et à mon frère et mes adorables sœurs qui m'ont soutenu pendant toutes ces années d'étude,... merci

ملخص: حساب المعلمات الحركية من المفاعلات النووية، مثل التدفق النيوتروني كثافة تأخر النيوترونات تم القيام به من قبل بطرق نووية مبنية على حسابات رياضية شاقة. طرق جديدة أخرى قد وضعت لتقدير هذه المعلومات وقد شهدت هذه الطرق اليوم تقدم بفضل التطورات الأخيرة في التصنيفية التنبؤية المتكاملة مثل التصنيفية الخطية لكالمان والتقنيات الغير الخطية الأخرى مثل تصنيفية كالمان الممتدة. كأسلوب جديد تصنيفية كالمان قد وجدت طريقها إلى العديد من التطبيقات العملية وخاصة في تقدير المعلمات الحركية. هذه الوثيقة تحظى وصفا مفصلا حول هذه المناهج الجديدة في نمط العمل. نتائج المحاكاة مع التقدير ماتلاب حساب هذه المعلمات باستخدام فلتز كالمان يتم عرضه بعد ذلك. النتائج تتماشى مع المعلمات التي تحسب في مفاعل نور.

كلمات البحث: مفاعل نور، جريان النيوترونات، كثافة تأخر النيوتروني، التفاعل ممثل المؤسسة تصنيفية كالمان، الضوضاء الإلكترونية التقدير.

RÉSUMÉ :

Le calcul des paramètres cinétiques des réacteurs nucléaires, comme le flux neutronique, la réactivité et la densité des neutrons retardés, a été fait auparavant par des approches de la physique nucléaire basées sur des calculs mathématiques fastidieux. D'autres nouvelles méthodes plus faciles ont été développées afin d'estimer ces paramètres, ces méthodes ont vues le jour grâce aux développements récents dans les techniques des filtrages optimales, comme le filtrage linéaire de Kalman et d'autres techniques non linéaires comme le filtrage de Kalman étendu. Comme une nouvelle méthode, le filtrage de Kalman a trouvé sa place dans des nombreuse applications pratiques et surtout dans l'estimation des paramètres cinétiques en ligne.

Dans ce document, une description détaillée est donnée à propos de ces nouvelles approches dans le régime de travail sous-critique. Les résultats de la simulation avec MATLAB de l'estimation de ces derniers paramètres en utilisant le filtre de Kalman sont présentés par la suite. Les résultats sont en adéquation avec les paramètres calculés au niveau du réacteur NUR.

Mots clés : réacteur NUR, chaine de mesure nucléaire, Modèle cinétique, estimation des paramètres, filtre Kalman, algorithm PCA.

Abstract :

The calculation of nuclear kinetics parameters of reactors, as the neutron flux, the reactivity and the density of delayed neutrons, has been done previously by the physical approaches based on tedious mathematical calculations. Other new methods easier have developed to estimate these parameters, these methods have seen the day thanks to the recent developments in techniques of optimum filtering, such as the linear Kalman filtering and other non-linear techniques such as extended Kalman filtering. As a new method, Kalman filtering has found its way into numerous practical applications and especially in the online estimation of kinetic parameters. In this document, a detailed description is given about these new approaches in the sub-critical

work pattern. The results of the simulation with MATLAB of the estimation of these parameters using the Kalman filter are presented thereafter. The results are in line with the parameters calculated at the NUR reactor.

Keywords : NUR reactor, Neutron Flux, delayed neutron density, external source, Reactivity, β_{eff} , Kalman Filter, Electronic Noise, Instrumentation, Estimation.

NOMENCLATURE

t	le temps	(s)
$n(t)$	flux neutronique	($n/cm^2.s$)
$c(t)$	densité des neutrons retardés	($n/cm.s$)
$s(t)$	terme source externe	($Watt/s$)
$\rho(t)$	réactivité	(pcm)
K	rapport entre le nombre de neutron avant et après la fission	(pcm)
β_{eff}	fraction des neutrons retardés effective	(sansunité)
Λ	temps de vie moyen des neutrons prompts	(s)
P	puissance du réacteur	($Watt$)
A	facteur d'échelle	(n/s)
λ	constante de vie des neutrons retardés	(s^{-1})
λ_c	intensité du capteur	(cm^2/s)
λ_f	intensité de la détection des neutrons	(s^2/cm)
λ_d	intensité de la fission	($cm.s^2$)
ν	vitesse des neutrons	(cm/s)
Σ_c	cross section du détecteur	(cm^2)
E	champ électrique	(V/cm)
N	nombre de paire de charge	($paires$)
W_1	énergie moyenne nécessaire à la création d'un paires de charges	(eV)
W	énergie perdue par les charges dans le volume du détecteur	(eV)
p	pression de la chambre d'ionisation	(atm)
α	coefficient de Townsend	(cm^{-1})
q	charge d'un électron	(C)
v	volume utile de chambre d'ionisation	(cm^3)
D	débit de dose	($roentgen/h$)
I	intensité de courant	(A)
V	tension	(V)
R	résistance	(Ω)
C	capacité d'un condensateur	(F)
T	la période	(s)
f	la fréquence	(Hz)
τ	temps de mort	(s)

Table des matières

NOMENCLATURE	5
INTRODUCTION	12
1 Physique du réacteur	14
1.1 Introduction	14
1.2 Présentation du réacteur NUR	15
1.3 Physique des réacteurs	15
1.3.1 Constitution d'un réacteur nucléaire	16
1.3.2 Contrôle des réacteurs	17
1.3.3 Sécurité	18
1.3.4 Types de réacteurs	18
1.3.5 fission nucléaire	19
1.3.6 Les émetteurs de neutrons :	20
1.3.7 Risques nucléaires	21
1.3.8 Déchets radioactifs	22
1.3.9 Gestion des déchets	23
1.4 Équation cinétique de réacteur point	23
1.4.1 Définition des paramètres de réacteur :	24
1.4.2 équation cinétique de réacteur	25
1.5 Réacteur à Zéro Puissance (ZPR)	28
1.5.1 Théorie de Zéro Puissance	28
1.5.2 Le bruit dans les réacteurs à zéro puissance	29

2	Instrumentation et Chaîne de Mesure	33
2.1	Introduction	33
2.2	Études théoriques	33
2.2.1	Différents types de détecteurs	34
2.2.2	Détecteurs basés sur l'ionisation gazeuse	34
2.2.3	Performance d'un détecteur	40
2.2.4	Mesures quantitatives	41
2.2.5	Amplifications et traitement analogique du signal	41
2.3	Études pratiques	46
2.3.1	Amplificateur logarithmique utilisé au réacteur	46
2.3.2	Amplificateur Anti-logarithmique utilisé au réacteur	48
2.3.3	Dérivateur utilisé au réacteur	49
2.3.4	Remarques et conclusion	50
2.4	Application du traitement de signal dans l'instrumentation	50
2.4.1	Théorie de l'algorithme PCA	51
2.4.2	Simulation et commentaires	54
2.4.3	Conclusion sur PCA	58
2.5	Conclusion	58
3	Théorie de Filtrage de Kalman	59
3.1	Introduction	59
3.1.1	Filtre de Kalman discret	60
3.1.2	Filtre de Kalman continu	69
3.2	Commentaires sur le filtre de Kalman	74
3.2.1	Cas où certaines sorties sont non bruitées	74
3.2.2	Modèle à bruits colorés	76
3.2.3	Filtre stationnaire	77
3.2.4	Phénomène de divergence (Square-Root-Filtring)	78
3.3	Filtre de Kalman Étendu (EKF)	79
4	Simulation et Estimation des Paramètres Cinétiques du Réacteur Nucléaire NUR	82
4.1	Position du problème	82

4.2	Préambule et solutions proposées	83
4.3	Estimation des paramètres cinétiques du réacteur NUR	84
4.3.1	Premier modèle	85
4.3.2	Deuxième modèle	92
4.3.3	Estimation du paramètre Bêta effectif	96
4.4	Conclusion	98
CONCLUSION GÉNÉRALE		99
A Démonstration des équations du filtre de Kalman		101
A.1	Équations de filtre de Kalman et positionnement de problème	101
A.1.1	Filtre de Kalman estimateur	102
B Discrétisation des Équations différentielles stochastiques		107
B.1	discrétisation d'un modèle d'espace d'état linéaire	107
B.1.1	Discrétisation du bruit de système	108
B.1.2	Dérivation	109
B.1.3	Approximation	110
BIBLIOGRAPHIE		111

Table des figures

2.1	Détecteurs basés sur l'ionisation gazeuse	35
2.2	Chambre à ionisation. Charges en fonction de la tension appliquée. [5]	36
2.3	Géométrie du capteur	40
2.4	Schéma synoptique de la chaîne de mesure dans le réacteur NUR	42
2.5	Amplificateur logarithmique	42
2.6	schéma basique de l'amplificateur logarithmique utilisé à NUR. [4]	43
2.7	Amplificateur Anti-logarithmique	44
2.8	Amplificateur Dérivateur	45
2.9	Amplificateur logarithmique utilisé au sein de NUR. [4]	47
2.10	Amplificateur Anti-logarithmique utilisé au NUR	49
2.11	Représentation des deux signaux bruités	55
2.12	Algorithme PCA	56
2.13	Représentation des deux signaux bruités dans le cas de panne	57
2.14	Algorithme PCA dans le cas de panne	57
3.1	Schéma représentant d'un modèle dynamique linéaire discret. [15]	61
3.2	Illustration de la covariance de l'erreur pour le filtrage directe (KALMAN), et le filtrage inverse (Filtre Information). [18]	69
4.1	Estimation du flux neutronique avec EKF	86
4.2	Estimation du flux neutronique avec EKF, intervalle étroit	87
4.3	Estimation de la densité des neutrons retardés avec EKF	88
4.4	Estimation de la source avec EKF	89
4.5	Gains de Kalman pour les trois paramètres estimés	90
4.6	Erreur entre prédiction et estimation pour les trois paramètres	91

4.7	Estimation du flux neutronique avec EKF, deuxième modèle	93
4.8	Estimation de la densité des neutrons retardés avec EKF, deuxième modèle . . .	93
4.9	Estimation de la réactivité en <i>pcm</i> avec EKF, deuxième modèle	94
4.10	Gains de Kalman pour les trois paramètres, deuxième modèle	95
4.11	Erreur entre la prédiction et l'estimation, deuxième modèle	95
4.12	Estimation du paramètre β_{eff} , deuxième modèle	96
4.13	Estimation du paramètre β_{eff} , premier modèle	97
4.14	Estimation du paramètre β_{eff} avec une intervalle étroite, premier modèle	98

Liste des tableaux

2.1	Principes fondamentaux de la détection et principaux instruments	34
-----	----------------------------------------------------------------------------	----

INTRODUCTION

Ce mémoire concerne l'estimation des paramètres cinétiques du réacteur nucléaire NUR. Ces paramètres ont une importance majeure dans les études nucléaires et dans le pilotage du réacteur lui-même. Ils sont en générale non observables et non mesurables. Des calculs fastidieux ont été développés auparavant pour les calculer, mais ces approches nous obligent de connaître l'état général du réacteur et même son environnement et ses constitutions avec exactitude. Malheureusement c'est impossible, et donc on est dans l'obligation qui se manifeste sous des approximations et des hypothèses affectant le calcul de ces paramètres en les rendant encore plus difficile. Des méthodes basées sur des principes de traitement de signal ont été développées récemment aboutissant à une approche plus facile d'estimation des paramètres cinétiques.

Ce travail a été inscrit dans le cadre du projet d'instrumentation et de contrôle **Développement d'un système de surveillance et de simulation pour le contrôle des paramètres dynamiques du réacteur NUR, basé sur les techniques d'intelligence artificielle implémentées sur FPGA.**

Ce rapport présente une nouvelle méthode d'estimation des paramètres cinétiques caractérisant le réacteur NUR. Au cours de travail, Un protocole de manipulations expérimentales a été établies avec le personnels d'opérations.

Ces approches ont vus le jour exactement avec l'apparition des estimateurs nommés estimateurs optimaux, qui sont en fait des estimateurs récursifs et adaptatifs en même temps. Le filtre de Kalman étudié dans ce mémoire est un de ces estimateurs. En principe c'est un estimateur à maximum de vraisemblance. Comme on a intérêt de maitre des hypothèses Gaussiennes sur les données, cet estimateur devient dans le cas idéal un estimateur avec minimum de variance. Dans le cas où notre estimateur est non biaisé on atteint la Borne Inférieure de Cramer-Rao et notre

estimateur basé sur le filtrage de Kalman devient un estimateur optimal. Ce qui justifier le choix de travailler avec ce genre d'estimateur. D'autres estimateurs optimaux ont prouvés leur efficacité dans ce genre de travail comme l'approche fréquentielle de Wiener et comme le filtrage Particulaire, mais avec plus de difficultés concernant l'implémentation. L'approche du filtre de Kalman sera présentée et implémentée dans ce mémoire, car elle suffira pour atteindre le but d'estimer les paramètres cinétiques du réacteur nucléaire NUR avec une exactitude appréciable.

Comme cité auparavant, dans ce travail, on va discuter et traiter le filtre de Kalman. Une étude théorique profonde sera détaillée sur ce filtre. Avant d'appliquer cette méthode sur les modèles obtenus à partir des équations cinétiques du réacteur NUR, on va effectuer une étude expérimentale sur la chaîne de mesure de ce dernier afin d'extraire le signal représentant le flux neutronique, qui va être utilisé comme observation.

L'application du filtre de Kalman sur ces derniers modèles a donné des résultats satisfaisants. En jouant sur les paramètres du filtre on va discuter les propriétés de ce dernier. Les signaux obtenus ont été comparés avec les signaux résultants des mesures expérimentales et des calculs physiques. Une incertitude minimale est apparue, cette incertitude dépend du choix d'initialisation et des paramètres de cet estimateur. Les résultats obtenus nous assurent la possibilité d'appliquer ces méthodes optimales dans l'estimation en ligne des paramètres cinétiques du réacteur nucléaire NUR.

Chapitre 1

Physique du réacteur

1.1 Introduction

La différence flagrante entre l'énergie libérée par une réaction nucléaire et celle produite par une réaction chimique a révolutionné la physique moderne qui a commencé à s'orienter vers les recherches liées à l'amélioration du rendement et de la rentabilité des réactions nucléaires ainsi qu'au développement des centrales nucléaires, là où on peut initier, contrôler les réactions en chaîne à travers plusieurs processus de modération et d'évacuation de l'énergie, cela a permis l'exploitation de cette énergie dans plusieurs domaines notamment dans la production d'énergie électrique, les armes nucléaires, la production de la chaleur et la production d'eau douce par dessalement.

Des réacteurs expérimentaux tels que notre réacteur NUR ont été conçus pour générer des flux neutroniques à partir des réactions de fission en chaîne, l'énergie libérée ne peut être récupérée et l'utilisation de ces réacteurs ne dépasse pas la production des spectres neutroniques thermiques et rapides, cette quantité de neutrons produite est utilisée en premier lieu, les expérimentations relatives au développement des réacteurs électronucléaires de puissance, pour comprendre les phénomènes mis en jeu comme l'étude du comportement sous irradiation des matériaux des structures et combustibles ou pour valider les calculs neutroniques des réacteurs de puissance comme dans le cas des maquettes critiques.

Plusieurs découvertes et projets ont ouvert la voie au développement de l'industrie nucléaire, on peut citer :

1932 : découverte de neutron par J. Chadwick

1938 : réalisation de la première réaction de fission par F. Strassmann, O. Hahn et L. Meitner

1942 : réalisation de la première réaction en chaîne par Fermi à partir d'une pile constituée d'Uranium, graphite et des barres de Cadmium

1945 : réalisation de deux essais nucléaires à Hiroshima (Uranium) et Nagasaki (plutonium)

1954 : première exploitation d'énergie nucléaire dans un réseau électrique (Obninsk ,URSS)

1.2 Présentation du réacteur NUR

Situé au niveau du centre de recherche nucléaire de Draria, le réacteur NUR est un réacteur de recherche et d'enseignement dont la puissance est limitée à 1MW. Il fut construit en coopération avec l'Argentine. Il est en service depuis les années 90 ,et est dédié à l'analyse par activation neutronique, à l'exploration de la matière et à la formation. Ce réacteur à eau lourde fonctionne avec de l'uranium naturel. Légère à un rayon extérieur de 65 cm, l'eau joue aussi le rôle de modérateur.

Le pilotage en puissance du réacteur se fait par deux barres d'Aluminium cylindrique contenant du carbure de bore ou par variation de la hauteur du modérateur. La sécurité est assurée par deux barres cruciformes, disposées au centre du cœur, contenant du cadmium et par la possibilité d'évacuer la totalité du modérateur dans des vases d'expansion situés autour du cœur.

Finalement, le réacteur est placé au centre d'une épaisse enceinte en béton blindé. Cette enceinte protège l'environnement extérieur et les personnes des rayonnements ionisants et protège, également, l'installation de détériorations.

A partir des années 70 plusieurs réacteurs d'une puissance qui dépasse les 1 Gigawatts ont été construits, le chiffre commence à diminuer après la catastrophe de Tchernobyl,et depuis le taux de construction des réacteurs nucléaires ne dépasse pas 4 par ans [4].

1.3 Physique des réacteurs

L'étude de la physique du réacteur est primordiale avant toute estimation de ses paramètres elle nous permet de comprendre bien l'aspect physique de ses derniers ainsi que la modélisation mathématique du réacteur, elle s'appuie sur l'étude de la densité neutronique et la concentration du précurseur.

Le fonctionnement des réacteurs nucléaires et donc leur sûreté sont avant tout une affaire neu-

tronique, au sens étroit du terme. Se basant sous le principe de la fission, l'absorption d'un neutron par un noyau fissile permet la libération de plusieurs neutrons qui causent la fission des autres atomes, ce qui engendre une réaction en chaîne.

Le U^{238} et le U^{235} et le Pu^{239} sont les éléments chimiques les plus couramment utilisés dans les fissions nucléaires à cause de leur lourdeur et leur énergie par nucléon qui est très faible.

1.3.1 Constitution d'un réacteur nucléaire

Composé à l'intérieur d'un cœur cylindrique qui contient le combustible. Ce dernier qui est gainé afin d'éviter tout contact avec le fluide calo-porteur, en s'éloignant du cœur on trouve le réflecteur qui diminue les fuites neutroniques, un autre élément qui est le caisson est mis en place afin d'assurer une protection thermique du milieu extérieur des rayonnements provenant du cœur.

La 3^{ème} barrière représentée par un mur de béton dont la principale fonctionnalité est d'atténuer toutes les radiations au point qu'elles ne présentent aucun danger sur les personnes se trouvant à proximité.

Une 4^{ème} barrière est ajoutée au réacteur ; elle est appelée enceinte de confinement. Elle est utilisée pour assurer une sécurité totale en cas de relâchement accidentel de radioactivité ou contre des dangers extérieurs : ouragans, tremblements [4].

1.3.1.1 *Combustible :*

Il se trouve dans le cas général, en état solide sous forme de barres cylindriques qui sont enrichies généralement d'Uranium 235 et de plutonium 239. Le ralentissement des éléments de fission cause l'échauffement de ces derniers ; elles seront refroidies grâce au fluide calo-porteur

1.3.1.2 *Calo-porteur :*

C'est un fluide qui circule autour des barreaux d'Uranium afin de transporter la chaleur produite par le combustible hors du cœur, et assurer une température compatible avec la tenue des matériaux. Le gainage de réacteur assure l'isolation entre le fluide calo-porteur et le combustible, le moindre contact entre les deux, pourrait engendrer des réactions chimiques ainsi que des fuites de produits de fission qui sont radioactifs.

1.3.1.3 *Modérateur :*

Les modérateurs sont des éléments qui ralentissent les neutrons qui se déplacent avec une vitesse de 200000km/s jusqu'à une vitesse qui ne dépasse pas les 2 km/s , cela assure l'augmentation de nombre des réactions de fission et permet une réaction en chaîne efficace. Le choc avec ces neutrons appelés rapides transfère l'énergie cinétique de ces derniers aux noyaux qui doivent avoir une section efficace très faible pour éviter la capture neutronique des éléments d'une masse voisine de celle de neutron comme l'Hydrogène, le Deutérium, et le Carbone

1.3.1.4 *Les échangeurs de vapeur :*

La température très élevée de calo-porteur est utilisée pour l'échauffement de l'eau à travers un générateur de vapeur qui porte l'eau à ébullition afin de produire de la vapeur qui fait tourner les turbines des génératrices électriques. Cette vapeur est ensuite condensée pour reproduire de l'eau et assurer le cycle d'évaporation

1.3.2 Contrôle des réacteurs

Afin d'éviter l'étouffement de la réaction en chaîne, on essaie toujours de garder un nombre de neutron générés supérieur au nombre de neutrons qui causent la fission. Un paramètre K a été défini, il représente la fraction entre le nombre des neutrons créés par la fission sur le nombre des neutrons avant fission. Selon sa valeur, on peut citer 3 états de notre réacteur :

$k < 1$ *état sous critique* : le nombre de fissions induites diminue en fonction du temps réacteur qui s'étouffe et toute réaction en chaîne finit par s'éteindre

$k = 1$ *état critique* : chaque fission engendre une autre fission, ce qui conduit à un niveau de puissance constant

$k > 1$ *état sur critique* : le nombre de fission augmente à l'infini, la puissance libérée croît d'une manière exponentielle. Ce régime de fonctionnement n'est utilisé que dans les armes nucléaires

a travers cette grandeur, on peut calculer la réactivité qui représente l'écart entre le cœur et la criticité, elle dépend de la nature des matériaux ainsi que de la géométrie du système nucléaire.

Elle est calculée en ρ (suite a ses faibles valeurs) à travers la relation suivante :

$$\rho = \frac{K_{eff} - 1}{K_{eff}} \quad (1.1)$$

Le contrôle du réacteur assure le fonctionnement du réacteur à l'aide de barres. La forme des tubes en acier inoxydable remplis de pastilles ou de poudre d'absorbants neutroniques comme le bore ou le hafnium, sont insérés dans le cœur, elles absorbent les neutrons, ce qui entraîne une diminution du flux neutronique, cela influe sur la puissance thermique du cœur, en jouant sur la position de la barre, on peut ajuster avec une grande précision la réactivité dans le réacteur, ce qui permet l'approche fine vers un état critique

Pour changer la puissance de réacteur, on déplace la barre de contrôle pour avoir une réactivité positive $\rho > 0$ puis on la ramène à 0 afin de travailler dans le régime critique.

1.3.3 Sécurité

Contrairement aux barres de contrôle, les barres de sécurité sont placées en dehors du cœur et elles chutent rapidement en cas d'accident par gravité afin de faire chuter le flux neutronique pour arrêter la réaction en chaîne. Elles sont constituées d'éléments plus absorbants que celle utilisée dans les barres de contrôle (le carbure de bore et le carbure de cadmium) qui sont utilisés afin de faire chuter rapidement la réactivité

1.3.4 Types de réacteurs

Bien que le principe de fonctionnement soit identique pour tous les réacteurs, il existe plusieurs familles des réacteurs. Leur différence réside au niveau des 4 constituants d'un réacteur (combustible, modérateur, calo-porteur, barres de contrôles), les différentes combinaisons entre ces composants donne naissance aux réacteurs suivants :

1.3.4.1 *les réacteurs à eau pressurisée (REP) :*

C'est le type de réacteur le plus répandu dans le monde, il utilise l'oxyde d'uranium faiblement enrichi (3% à 5%) ainsi que l'eau légère à haute pression (environ 150 bar) comme calo-porteur. La vaporisation de l'eau ne se fait pas au niveau de circuit primaire mais au niveau de générateur de vaporisation. Suite à son bon rendement (environ 33%) ce réacteur est très utilisé dans la production d'énergie électrique dans le monde .

1.3.4.2 *les réacteurs à neutrons rapides(RNR)*

Sont des réacteurs sans modérateur, les neutrons émis lors de fissions acquièrent une vitesse très élevée. Cela leur permet de fissionner tous les atomes et non seulement les atomes fissiles et annule les captures stériles, ce qui rend le réacteur plus efficace. L'utilisation de calo-porteur sodium représente un grand danger vu sa rapidité d'inflammation en présence de l'air, c'est ce qui s'est déjà produit lors d'accident survenu au réacteur Monju en 1995

1.3.4.3 *les réacteurs à eau bouillante (REB)*

Ce réacteur se caractérise par son utilisation de l'eau bouillante comme modérateur et calo-porteur en même temps. Le fluide circule sous pression (inférieur à celle de caloporteur des réacteurs à eau pressurée) avant de se vaporiser pour entraîner une turbine

1.3.4.4 *réacteurs avancés refroidis au gaz (AGR)*

Ces réacteurs sont à calo-porteur de CO_2 un modérateur de graphite et un combustible constitué de dioxyde d'Uranium faiblement enrichi enserré dans une gaine inoxydable, le caloporteur s'échauffe, il transfère la chaleur au générateur de vapeur, les hautes températures que puisse le CO_2 atteindre (jusqu'à 640 C) lui permette d'atteindre un rendement de 41%.

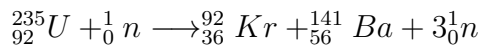
1.3.4.5 *Réacteur à eau lourde (HWR)*

Ce réacteur utilise l'oxyde de deutérium D_2O comme caloporteur et modérateur. La composition de deutérium en deux nuclides rend l'oxyde de deutérium plus lourd que le H_2O . Cette caractéristique lui permet de ralentir les neutrons rapides afin de stimuler les réactions de fission, dans ce type de réacteurs, l'uranium non enrichi est l'élément utilisé comme combustible.

1.3.5 fission nucléaire

Les protons et les neutrons sont liés entre eux par des forces électrostatiques et des forces nucléaires, ces forces définissent ce qu'on appelle l'énergie de liaison par nucléon les atomes lourds comme U^{238} ont une énergie de liaison par nucléon très faible, ce qui les rendent des excellents éléments pour la fission. En les bombardant, ils se divisent en plusieurs nucléides plus légers nommés fragments de fission (2 à 3 atomes), et émet un certain nombre de neutrons tout en dégageant une énergie très importante (environ 200 MeV par atome fissionné). [3]

La fission induite de l'Uranium 235 par absorption d'un neutron est la réaction de ce type la plus connue elle est donnée par la réaction



Une importante quantité d'énergie est libérée lors de cette fission, de l'ordre de 202,8 MeV pour un noyau d'uranium 235. La part principale de cette énergie est constituée par l'énergie cinétique des deux atomes créés. Elle s'accompagne en général de l'émission d'un ou de plusieurs neutrons rapides (généralement 2 ou 3) qui ont une énergie cinétique moyenne de 2 MeV.

1.3.6 Les émetteurs de neutrons :

Dans une réaction de fission, plusieurs nucléides provenant d'une désintégration (nommés les précurseurs) comme le Krypton 87 émettent un nombre important de neutrons pour qu'elles se stabilisent. Ces neutrons-là sont appelés les neutrons retardés.

1.3.6.1 neutrons prompts et neutrons retardés

La majorité des neutrons de fission sont émis instantanément (plus de 93 %) pour les 7% qui restent, ils représentent les neutrons émis lors d'une désintégration β ces neutrons-là sont appelés les neutrons retardés tandis que les neutrons qui proviennent directement de la fission sont nommés les neutrons prompts ou des précurseurs. Tous ce qui émettent les neutrons retardés sont appelés des précurseurs. [8]

Les neutrons retardés dans le réacteur suivent une exponentielle comme loi. une approximation de 6 précurseurs d'une durée de vie homogène au lieu de 60 a été faite pour simplifier le modèle.

La fraction entre le nombre de neutrons retardés sur le nombre de neutrons total est appelée β . Cette fraction est inférieure à 1%, elle est égal à 0.7% pour l' uranium, elle est plus petite pour des atomes plus légers. La présence de ces neutrons retardés facilite le contrôle de réacteur, le changement dans le taux de réaction devient trop rapide pour être calculé. selon la valeur de β , on peut définir deux types de situation super-critique :

1.3.6.2 *supercriticité retardée*

Elle est comprise entre $K=1$ et $K=\frac{1}{1-\beta}$, c'est dans cette région qu'opère tous les réacteurs nucléaires.

1.3.6.3 *supercriticité immédiate*

$k > \frac{1}{1-\beta}$ C'est dans cette zone qu'opère les armes nucléaires.

1.3.6.4 *Section efficace*

La section efficace représente la surface liée à la probabilité d'interaction d'un neutron avec un atome fissile se fasse heurter par un neutron, on peut représenter ce modèle comme des points répartis uniformément sur ce plan. Le centre de noyau qui heurte le plan à une probabilité bien définie de passer à une certaine distance r d'un de ces centres. Si on a n atomes fissiles dans une surface S la densité de probabilité est de

$$\frac{n\pi r^2}{S} \quad (1.2)$$

Cette surface représente donc la surface fictive totale de ces atomes pour reproduire la même probabilité. Elle est dépendante mais non identique à la surface réelle des particules. Elle dépend aussi de la vitesse des neutrons et peut atteindre jusqu'à 1000 barn ($10^{-28}m^2$) pour les neutrons thermiques et quelques barns pour les neutrons rapides d'où l'intérêt de modérer les flux neutroniques.

1.3.7 Risques nucléaires

Pour des réacteur de taille réel on définit un facteur effective K_{eff} qui représente le facteur de multiplication maximal qui puisse être atteint dans un milieu réactif bien défini.

1.3.7.1 Risques du fusion de cœur

Représente l'un des risques majeurs d'un réacteur nucléaire, la fusion du cœur se produit lors d'un problème de refroidissement, cela engendre une augmentation de la température et une réaction de fusion aura lieu. Une telle réaction provoque l'évaporation de l'eau de refroidissement, ce qui va augmenter la pression à l'intérieur du cœur et endommager l'installation. Une telle explosion peut faire une fissure dans l'enceinte de confinement[6], ce que facilite

l'émission des isotopes radioactifs très dangereux à l'extérieur. Plusieurs accidents de fusion se sont déjà produits, comme Tchernobyl et Fukushima font le bon exemple de la gravité d'un tel phénomène.

1.3.7.2 Accidents de criticité

Cet accident se produit quand la masse critique de fissile dépasse la masse critique, ce qui augmente la réactivité et provoque une réaction en chaîne incontrôlée, cette réaction est suivie d'une émission intense de neutrons et des rayons gamma [6] les conséquences d'un tel accident sont très graves, elles peuvent causer de nombreux dégâts aux personnes à proximité du siège de l'accident comme syndrome d'irradiation aiguë ou la personne meurt au bout de quelques jours.

1.3.7.3 Accidents industriels

Les accidents industriels (incendie, tremblement de terre) peuvent endommager tous les dispositifs du réacteur. Un problème de fonctionnement des protections cause des fuites d'éléments radioactifs à l'extérieur et conduit à une contamination de l'environnement.

1.3.8 Déchets radioactifs

Les déchets radioactifs représentent toutes les substances qui contiennent des radionucléides d'une concentration qui dépasse le seuil que (AIEA) considère comme admissible. Ces déchets ne peuvent ni être retraités ni utilisés, ils sont classés selon deux critères.

1.3.8.1 niveau de radioactivité :

TFA très faible activité (c'est les éléments avec une activité inférieure à une activité de 100 becquerels par gramme)

FA faible activité si l'activité est comprise entre 100 *becquerels* et 100000 *becquerels*

HA si le niveau est d'ordre de quelque milliard de becquerels

1.3.8.2 durée de vie

Ils se classent selon leur période radioactive en 3 catégories :

TVC : une vie très courte si la période est inférieure à 100 jours

VC : quand la période ne dépasse pas 31 ans

VL : quand les déchets comportent des éléments d'une durée de vie supérieur à 31 ans

1.3.9 Gestion des déchets

Afin d'assurer la protection de l'environnement une gestion durable des déchets nucléaires est mise en place. la méthode de traitement dépend dU type d'éléments radioactifs.

1.3.9.1 *Déchets de faible et moyenne activité (FMA)*

Ils sont destinés à être stockés en surface après avoir été solidifiés pour éviter la dispersion de la radioactivité, puis enrobés de béton, de résine ou de bitume pour éviter toute possibilité de réaction chimique et bloquer le déchet dans son conteneur. Ils sont finalement placés dans des conteneurs métalliques ou en béton, de bonne résistance mécanique et manipulables sans dispositions particulières de radioprotection[7].

1.3.9.2 *Déchets de très faible activité*

Les déchets TFA, principalement issus du démantèlement, sont compactés et conditionnés en big-bags ou en caissons métalliques. Ils sont rangés dans des alvéoles creusés dans l'argile, dont le fond est aménagé pour recueillir d'éventuelles eaux infiltrées pendant toute la durée du stockage.

1.3.9.3 *Déchets faiblement radioactifs et à vie longue*

Ce sont notamment les déchets de graphites, ou encore des effluents bitumés, des substances contenant du radium, de l'uranium et du thorium de faible activité massique, ainsi que certaines sources radioactives scellées et usagées, à vie longue de faible activité

1.4 Équation cinétique de réacteur point

Avant de définir l'équation c qui modélise notre réacteur on commence pa la définition des différents paramètres cinétiques qui le caractérisent.

1.4.1 Définition des paramètres de réacteur :

1.4.1.1 Fraction de neutrons retardés :

Lors d'une fission nucléaire le noyau lourd se divise en 2 noyaux plus légers en émettant 3 neutrons, ces neutrons appelés neutrons prompts, les autres neutrons se forment suite à la désintégration par radiation $-\beta$ des produits de fission, ces derniers sont appelés les neutrons retardés, leur pourcentage par rapport à tous les neutrons de tout le cœur est nommé β_{eff} .

1.4.1.2 Facteur de multiplication des neutrons :

Le facteur de multiplication des neutrons (noté K) c'est le nombre moyen émis de neutrons dans une seule fission qui causent d'autres fissions. Les neutrons qui ne contribuent dans aucune nouvelle fission ne sont pas pris en compte.

1.4.1.3 Réactivité :

La réactivité calculée en pcm (pour cent mille) est une grandeur qui nous permet de mesurer l'écart d'un cœur par rapport à sa criticité, elle est calculée en fonction de k_{eff} par les relations suivantes :

$$\rho = \frac{K_{eff} - 1}{K_{eff}} \quad (1.3)$$

$$\rho = \log K_{eff} \quad (1.4)$$

$$K_{eff} = e^\rho \quad (1.5)$$

1.4.1.4 Durée de vie des neutrons directs

C'est le temps moyen qui sépare l'émission d'un neutron (naissance) et son absorption par le système mort) il est nommé Λ , ce temps-là il est moins important que le temps entre générations λ qui représente le temps entre l'émission d'un neutron et sa capture par un noyau fissile, donc il ne prend en compte que les noyaux qui engendrent une nouvelle fission la relation entre les deux est donnée par :

$$\lambda = \frac{\Lambda}{K} \quad (1.6)$$

1.4.1.5 précurseurs et estimation en réacteur point

La densité neutronique est approximativement proportionnelle au flux neutronique et ce dernier est proportionnel à la puissance neutronique. La densité varie à la fois dans le temps et dans l'espace du coeur. Supposons que le coeur soit assez petit pour que la variation spatiale de la densité soit négligeable. Le coeur est alors assimilé à un point. Les neutrons retardés peuvent être classés en plusieurs groupes, caractérisés par leur constante de temps et leur proportion relative β_j . Ces facteurs dépendent du combustible. On distingue 6 groupes de neutrons retardés.

1.4.2 équation cinétique de réacteur

dans le cadre d'une théorie simplifiée de ce réacteur point, on s'intéresse à la variation temporelle de flux, cette hypothèse s'applique pas juste parce que notre réacteur est de dimensions réduites mais il suffit en fait que les flux soient factorisables, c'est-à-dire que leurs distributions spatiales conservent la même forme au cours du temps, ce qui est vrai dans un état proche de l'état critique.[8]

1.4.2.1 établissement des équations du modèle cinétique

afin de trouver l'équation différentielle du réacteur, on penche vers l'intégral qui définit la population neutronique elle s'écrit :

$$n(t) = \int n(\vec{r}, t) dV$$

où $n(\vec{r}, t)$ représente le flux neutronique au point r à l'instant t si on tient compte des sources neutrons prompts et retardés, les neutrons absorbés et les neutrons qui quittent le réacteur.

-la densité neutronique devient

$$\frac{dn(t)}{dt} = S_p(t) + S_d(t) - [A(t) + F(t)] \quad (1.7)$$

où S_p peut s'écrire sous la forme :

$$S_p(t) = (1 - \beta) \bar{\nu} S_f(t) \quad (1.8)$$

Tels que β est la fraction de neutrons retardés et $\bar{\nu} S_f(t)$ c'est la source de neutron de fission. La source S_d est attachée au c_i des précurseurs avec leur taux de désintégrations λ . On

peut l'écrire sous la forme :

$$S_d = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i(t) \quad (1.9)$$

En introduisant tous les paramètres cinétiques de notre réacteur, on a les équations suivantes :

1.4.2.2 Facteur multiplicatif :

$$K_e(t) = \frac{S_f(t)\bar{v}}{A(t) + F(t)} \quad (1.10)$$

1.4.2.3 Le temps de vie des neutrons prompts

$$A(t) + F(t) = \frac{n(t)}{L(t)} \quad (1.11)$$

1.4.2.4 la réactivité

$$\rho = \frac{k_e(t) - 1}{k_e(t)} \quad (1.12)$$

En combinant les équations 1.7 jusque 1.10 on trouve une nouvelle équation cinétique

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(1 - \beta)k_e(t) - 1}{L(t)}n(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i(t) \quad (1.13)$$

En ajoutant l'équation de bilan pour le précurseur on a : Sur les $\bar{v}S_f$ neutrons émis, on a $\beta\bar{v}s_f$ de noyaux de précurseurs de type i, puisque chaque précurseur émet un seul neutron. Comme le taux de disparition par désintégration s'élève à $\lambda_i c_i(t)$, l'équation de bilan pour le précurseur i s'écrit :

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = \beta\bar{v}s_f - \lambda_i c_i(t) \quad (1.14)$$

En introduisant les équations de 1.11 jusque 1.14 on aboutit à

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\lambda(t)}n(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i(t) \quad (1.15)$$

$$\frac{dc_i(t)}{dt} + \lambda_i c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) \quad (1.16)$$

les deux équations représentent le modèle dynamique d'un réacteur point. La suite de notre travail se basera sur ce modèle dans un régime stationnaire : $n(t) = n(0)$ et $c_i(t) = c_i(0)$ dans ce cas, les deux dernières équation de systèmes s'écrivent sous la forme :

$$0 = \frac{\rho(t) - \beta}{\lambda(t)} n(0) + \sum_1^n \lambda_i c_i(0) \quad (1.17)$$

$$\lambda_i c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(0) \quad (1.18)$$

en utilisant la 2 ème équation et en la rapportant par rapport à la 1 ère en sachant que $\sum_{i=1}^n \beta_i = \beta$ on trouve :

$$\frac{\rho}{\lambda} n(0) = 0 \quad (1.19)$$

ce qui donne la solution du système :

$$\rho = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\rho}{\Lambda} n(0) = \lambda_i c_i(0) \quad (1.21)$$

les régimes stationnaires correspondent bien aux réactivités nulles ; de plus, les neutrons retardés n'ont aucune influence sur les résultats précédents Quand le réacteur travail dans un régime sous critique la contribution des neutrons retardés est négligé est on peut approximer notre modèle en $n(t) = \frac{-S}{\rho} \lambda$

dans le cas simplifié Où un groupe de neutrons retardés est pris en considération, les équation 3.9 et 3.10 deviennent :

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \lambda c(t) \quad (1.22)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n(t) - \lambda c(t) \quad (1.23)$$

Avec

$$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i \text{ et } \lambda = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\lambda_i}{\beta_i}$$

Le comportement d'un réacteur est défini par 3 paramètres essentiels la réactivité ρ le temps de génération λ et la fraction des neutrons retardés β ces paramètres peuvent être estimés à l'aide de méthodes stochastiques tels que le maximum de vraisemblance et le filtre de Kalman comme celle qu'on va utiliser le long de ce projet pour les estimer[3]. Dans le travail qui suit, on ajoute un bruit d'état $W(t)$ à notre modèle, l'estimation à l'aide des méthodes bayésiennes revient à déterminer les paramètres cinétiques de réacteur tout en filtrant les bruits.

1.5 Réacteur à Zéro Puissance (ZPR)

1.5.1 Théorie de Zéro Puissance

Dans cette partie on va parler des fluctuations neutroniques dans les systèmes nucléaires. Les fluctuations neutroniques ou bruit neutronique tombent sous deux catégories, bruit neutronique pour le "zero power systems" et bruit neutronique pour le "power reactor". Le concept, la théorie, et la méthodologie pour ces fluctuations dans plusieurs domaines d'applications, pour l'extraction des informations ayant une importance majeure. Un nombre d'applications spécifiques est décrit, où la détection et l'analyse du ZPR et du PR bruit nous donne la possibilité de tirer des informations et des diagnostics sur le système par détermination et calculer les paramètres de ce dernier, dans la durée d'opération ordinaire, ou par la détection, identification, et quantification des anomalies afin de déterminer au finale leur sévérité.

Dans les ZPR systèmes, le matériel(l'excitation) du corps est supposé constant dans le temps. Pour un tel système, la distribution non triviale de la population neutronique est guidée par l'effet du branching, c'est la génération de plusieurs neutrons au même temps pendant le processus de la fission. Le processus de la fission génère d'autres chaînes de fission, les neutrons résultants de la même chaîne de fission sont corrélés en temps[10].

Cette chaîne de fission contient des événements dans un laps de temps fixe et avec une fréquence qui peut être déterminée mais ces événements (fissions) dépendent toujours du temps d'écoulement depuis la première désintégration est donc la distribution probabiliste de ce phénomène stochastique a une non-poisson distribution. cette définition de non-poisson distribution peut être utilisée dans différentes applications. La théorie de bruit ZPR est basée sur l'équation

de la balance "master equations" (Chapman-Kolmogorov)[14]. Les applications majeures sont par exemple la mesure de la réactivité sous-critique du corps, la détection et la quantification du fissile nucléaire pour la sécurité nucléaire.

1.5.2 Le bruit dans les réacteurs à zéro puissance

Historiquement, les fluctuations neutroniques dans une chaîne de réaction ont été étudiées pour la première fois dans "start-up with a weak source"(Harris 1964). Dans les systèmes multiples super-critiques, c-à-d une chaîne de réaction avec une source externe, au début le nombre total des neutrons représente une minorité, et donc les fluctuations relatives dans ce genre de processus est large. A ce moment, le temps nécessaire pour l'avalanche du comportement super-critique s'est établi, et à ce moment le système a un caractère déterministe, qui peut varier de cas à un autre significativement. Cela pose la question : c'est quoi la probabilité pour que les fluctuations dans une chaîne de neutron, pourra atteindre son état critique dans un système pendant le démarrage sans se référer à un indicateur expérimental.

Un autre aspect pour la procédure de démarrage, connu dans les travaux de Watson et Galton (1873), cet aspect a un rapport avec le mécanisme des explosives nucléaires. D'un autre part, la principale utilisation des méthodes de bruit de "Zero Power Reactor" est l'utilisation de ces fluctuations dans les systèmes stationnaires à basse puissance, comme les sous-critiques corps avec une source externe pour mesurer toujours la réactivité sous-critique. Un "Power Reactor" corps pendant son démarrage et son rapprochement vers la criticité est un exemple réel sur les systèmes stationnaires.

1.5.2.1 *Méthodologie de bruit neutronique dans les réacteurs à zéro puissance*

Le bruit dans les réacteurs à zéro puissance concerne la détermination des statistiques de la population neutronique dans les systèmes multiples. L'importance est dans l'évaluation temporelle des distributions, où généralement sauf les moments d'ordre inférieur sont connus explicitement. Dans la description conventionnelle, l'effet espace-énergie externe sont négligés (la variation spatiale de la densité neutronique est négligeable)[10], et donc on peut assumer l'homogénéité du système, dans lequel on a une source homogène et un détecteur embarqués. Cet approximation fait appelle au "modèle de réacteur point".

La théorie des fluctuations neutroniques peut absolument être formulée dans le cas général par

la dépendance espace-énergie-angle d'ouverture dans un système matériel fini. Le traitement général a un désavantage pragmatique, dont ce genre d'équation ne peut pas être résolue dans sa forme globale, le concept de cet désavantage dans le cas concret est clair dans l'application de la mesure de la réactivité où le matériel et la géométrie de la composition d'un tel système n'est pas connue avec exactitude[10]. Si la composition du système est connue avec suffisamment de détails, la réactivité peut être déterminée avec un calcul fastidieux.

Les résultats de la correction espace-énergie du modèle point est toujours faisable et donne de très bons résultats que les purs calculs. Quand la composition du système est partiellement connue, cette connaissance approximative peut être utilisée pour prouver les résultats de la théorie de l'indépendance spatiale. La méthode de correction introduit une erreur d'imprécision des connaissances sur la composition du système, cette erreur doit être représentée par un terme de second ordre avec un effet négligeable. L'efficacité et l'exactitude de telles méthodes est une subtile question qu'on va discuter à l'occasion de ce chapitre.

La méthodologie est basée sur la probabilité de balance, nommée aussi Kolmogorov ou Chapman-Kolmogorov équations ou appelée équations Master[14]. Pour calculer les probabilités de transition du système, la nécessité principale est de définir les paramètres d'intensité neutronique et d'intensité de réaction.

Tel que, λ_c , λ_d et λ_f sont l'intensité du capteur, de fission et de la détection d'un seul neutron, respectivement. qui sont données comme $\lambda_c = \nu \Sigma_c$ et $\lambda_d = \Sigma_c \lambda_f$, avec Σ_c est la cross section macroscopique du capteur (appelée Superficie Active du capteur 168 cm^2 pour le réacteur NUR), ν la vitesse du neutron et ε est l'efficacité du capteur. En plus, on a λ comme constante de désintégration. La génération des neutrons prompts et retardés est caractérisée par la probabilité $p_f(n, m)$ de l'émission de n neutrons avec m neutrons en retard dans un événement de fission. cette probabilité et comme toutes probabilités a la propriété de $\sum_{n,m} p_f(n, m) = 1$.

La prochaine description correspond à une proposition d'une autre simplification où on suppose avoir un seul groupe de neutrons retardés. L'utilisation des six groupes de neutrons retardés à la place d'un seul groupe reste toujours correcte et donne des résultats pour chaque groupe, mais cette approche introduit beaucoup d'équations et de calculs, en plus l'utilisation des six groupes va gêner la transparence de cette illustration. Lecteur qui cherche l'étude généraliste des six groupes de neutrons retardés peut faire référence à [11].

Similaire à la théorie traditionnelle (déterministe), ce problème peut être formulé par plusieurs

équivalentes approches, nommées respectivement la méthode directe(forward) ou la méthode adjointe (backward)de l'équation du Master[14] ou par l'approche expliquée auparavant. La différence structurelle dans l'approche directe et adjointe se manifeste largement pour le cas d'un traitement stochastique que dans un traitement déterministe. Généralement, pour calculer les moments d'ordres supérieurs, la méthode adjointe est considérée plus efficace. Et pour raison d'illustration, l'approche direct est plus appropriée. On a préféré la méthode expliquée auparavant pour des raisons de simplicité, pour plus d'information sur les deux autres approches directe et adjointe vous pouvez faire référence à [10].

1.5.2.2 Hypothèse de stationnarité dans les réacteurs points

Le retour aux équations (1.24), (1.25) avec la méthode directe, nous permet de voir l'utilisation de l'équation Master pour obtenir les moments d'ordres supérieurs, la dérivation de ce type d'équations (moments) avec des conditions au préalable nous donne la possibilité de retomber sur le couple d'équations cinétiques suivantes.

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t) + \lambda c(t) + S \quad (1.24)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda}n(t) - \lambda c(t) \quad (1.25)$$

telle que

$$\rho = \frac{\langle \nu \rangle \lambda_f - (\lambda_f + \lambda_c + \lambda_d)}{\langle \nu \rangle \lambda_f} \quad (1.26)$$

et

$$\Lambda = \frac{1}{\langle \nu \rangle \lambda_f} \quad (1.27)$$

Où, ρ est la réactivité et Λ est le temps de génération des neutrons prompts, dans ces équations on assume une source stationnaire avec une intensité constante[10]. Vue cette stationnarité du système, le nombres de neutrons générés est donc constant, donc les dérivés du flux neutronique et de la densité des neutrons retardés sont nulles. Cela nous donne la solution de l'équation cinétique 1.24, 1.25 dans le cas stationnaire.

$$n = \frac{\Lambda s}{-\rho} \quad (1.28)$$

et

$$c = \frac{\beta n}{\lambda \Lambda} = \frac{\beta s}{\lambda(-\rho)} \quad (1.29)$$

L'équation 1.29, sera utilisée après, pour déterminer le paramètre β_{eff} qui est une constante importante dans les travaux de génie nucléaire, et donc un des paramètres qu'on va estimer dans ce travail.

Chapitre 2

Instrumentation et Chaîne de Mesure

2.1 Introduction

Cette partie du travail est la partie Master, elle est réservée pour l'étude de l'ensemble des instruments utilisés au sein du réacteur nucléaire NUR. Ces instruments de mesure sont constitués, d'un détecteur (réseau de capteurs en effet) situé au centre du cœur du réacteur appelé Détecteur à Chambre d'Ionisation et une chaîne de mesure a la tâche d'amplifier et de filtrer le signal obtenu par cette chambre.

Donc, ce chapitre va être divisé en trois parties. la partie théorique, dont le travail va être sur la théorie des détecteurs utilisés aux réacteurs nucléaires et sur la chaîne d'amplification des signaux obtenus par ces derniers. La deuxième partie sera sur l'étude de la chaîne de mesure utilisée pratiquement dans le réacteur NUR.

Alors, les deux premières parties sont situées dans le domaine de l'instrumentation, la troisième est par contre une partie sur le traitement de signal et sur l'amélioration de cette chaîne de mesure. Donc on va proposer dans ce sous chapitre des solutions pour avoir plus d'exactitude et de précision pour l'instrumentation du réacteur NUR.

2.2 Études théoriques

Un rayonnement pénétrant dans la matière produit des ionisations sous la forme de charges négatives (électrons) et positives (ions associés). Cette charge est détectable sous forme de courant ou de tension électrique, le signal obtenu par le détecteur est de l'ordre de 10^{-15} à 10^{-7} Amp. Donc, ce courant va être acheminé dans une chaîne d'amplification afin d'avoir un courant détectable ou mesurable à la sortie de cette dernière. Comme on a dit au paravent cette

première étude va être juste sur la théorie de l'instrumentation, donc on va parler sur les principales types de détecteurs utilisés pour mesurer le flux neutronique (notre objectif), et sur les types d'amplificateurs utilisés dans l'instrumentation nucléaire.

2.2.1 Différents types de détecteurs

La détection des rayonnements est une opération très complexe en soit. De plus, il existe de nombreux principes physiques qui peuvent être utilisés à cet égard. Ceci fait qu'il existe un très grand nombre de détecteurs disponibles sur le marché. Les principes à la base de la détection des rayonnements ainsi que quelques types d'instruments sont donnés dans le tableau suivant (Table 2.1) [5] :

TABLE 2.1 – Principes fondamentaux de la détection et principaux instruments

Principe physique	Matière	Exemple de détecteur
Ionisation	Gaz	Chambre à ionisation Compteur proportionnel Compteur Geiger-Müller
	Solide	Détecteur semi-conducteur Spectromètre HPGe
Luminescence	Solide	TLD Scintillateur NaI
	Liquide	Scintillation liquide
Oxydoréduction	Liquide	Dosimètre de Fricke
	Solide	Film photographique
Chaleur	Liquide/Solide	Calorimètre

2.2.2 Détecteurs basés sur l'ionisation gazeuse

2.2.2.1 Mécanisme

Pour ce type de détecteur, le flux neutronique provoque une ionisation des particules du gaz dans un volume qui représente l'enceinte du détecteur. Lorsque ces ionisations ont lieu dans un gaz délimité par deux électrodes entre lesquelles une différence de potentiel est appliquée, on observe une migration des charges positives (ions positives) vers la cathode et des charges négatives (électrons) vers l'anode (figure 2.1). En circuit fermé, un ampèremètre indique le courant électrique passant dans le volume de gaz. [5]

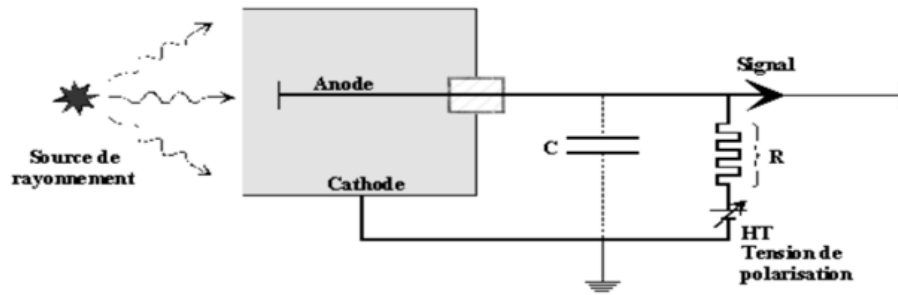


FIGURE 2.1 – Détecteurs basés sur l’ionisation gazeuse

Les électrodes sont généralement cylindriques tel que l’enveloppe de détecteur constitue la cathode, fréquemment reliée à la masse, l’anode étant un fil fin coaxial auquel est alors appliquée une tension.

L’énergie moyenne W_1 nécessaire à la création d’une paire d’ion dépend, d’une part de la nature du gaz et d’autre part, à un degré moindre, de l’énergie de la particule incidente et de sa nature. Ainsi par exemple, la formation d’une paire d’ions par une particule α du Polonium exige en moyenne $35,6eV$ dans l’air, $29,7eV$ dans le néon, $23,6eV$ dans le Xénon.

Si la particule perd une énergie W dans sa traversée du volume utile du détecteur, il en résulte la création de N_0 paires d’ions : $N_0 = W/W_1$, chaque paire étant formée d’un électron et d’un ion positif. Ces porteurs de charge se déplacent dans le champ électrique appliqué avec une vitesse fonction du champ, et de la pression du gaz. La vitesse des électrons étant très supérieur à celle des ions positifs, ils atteignent l’anode avant que les ions se notablement déplacés.

Si le champ appliqué est suffisamment intense, les électrons acquièrent assez d’énergie pour créer de nouvelles paires d’ions par chocs avec les molécules de gaz : sur un parcours dx , N électrons provoquent ainsi la formation de dN nouvelles paires d’ions :

$$dN = \alpha.N.dx \tag{2.1}$$

α Étant le coefficient de Townsend. α dépend de la pression p , du champ électrique E , et de la nature du gaz selon une expression de la forme :

$$\frac{\alpha}{p} = A \exp\left(-\frac{Bp}{E}\right) \tag{2.2}$$

A et B étant des constantes, cette ionisation secondaire se produit dans l’air dès lors que le rapport E/p est supérieur à $22,5mV/cm.Pa$ soit $2300V/cm$ à la pression atmosphérique nor-

male. Pour N_0 paires d'ions créées par la particule incidente dans le volume utile du détecteur, le nombre N de charge collectées par les électrodes, et par suite l'amplitude du signal de sortie, dépend de la tension V appliquée aux électrodes. En fonction de la tension V on distingue divers régimes de fonctionnement du détecteur. [10]

2.2.2.2 Les régions opérationnelles des détecteurs à ionisation

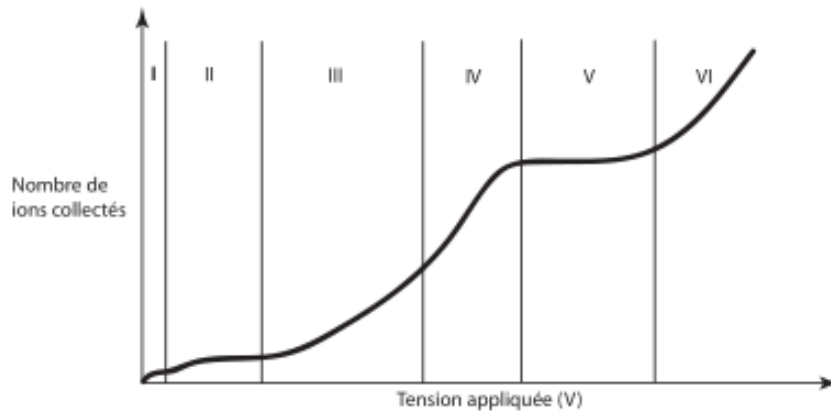


FIGURE 2.2 – Chambre à ionisation. Charges en fonction de la tension appliquée. [5]

La région de re-combinaison : I

Lorsque le champ électrique entre les électrodes est faible, les électrons et les ions peuvent se recombiner en atomes aussitôt après leur création : $N < N_0$. Seule une petite fraction des charges d'ionisation est détectée par l'amplificateur.

La région d'ionisation : II

Une fois que le champ électrique est assez intense pour limiter les recombinaisons, les charges d'ionisation migrent presque intégralement vers les électrodes. On obtient un signal qui reflète la charge totale d'ionisation ($N = N_0$). Les détecteurs opérant dans cette région, par exemple les chambres à argon (Ar) liquide et les détecteurs à semi-conducteurs (Si, Ge), ont une excellente résolution en énergie et le signal mesuré est proportionnel à la charge déposée avec une bonne linéarité. Les signaux sont assez faibles parce qu'il n'y a pas d'amplification de charges dans le détecteur, et des amplificateurs spéciaux à bas bruit sont nécessaires.

La région proportionnelle : III, IV

Si le champ électrique est suffisamment intense ($E \sim 10^4 V/cm$), les électrons sont accélérés par le champ électrique et gagnent assez d'énergie pour produire des ionisations secondaires.

Puisque la probabilité d'une ionisation secondaire par unité de longueur a est constante pour un champ électrique donné, le nombre total d'ionisations est proportionnel au nombre d'ionisations initiales :

$$N = N_0 \exp(\alpha d) \quad (2.3)$$

Le facteur de multiplication est donné par :

$$M = \exp(\alpha d) = 10^4 \sim 10^8 \quad (2.4)$$

Les détecteurs opérant dans la région proportionnelle sont généralement des détecteurs à gaz, parce que les gaz permettent d'obtenir un grand facteur de multiplication lors de l'avalanche. L'avantage des chambres proportionnelles est qu'elles n'exigent pas d'électronique à bas bruit. Elles peuvent être utilisées pour les mesures d'énergie, mais la précision est moins bonne à cause de la fluctuation du processus d'amplification et le facteur de multiplication dépend également de plusieurs facteurs tels que tension, température, etc. Les chambres à dérive sont idéales comme traceur devant un calorimètre parce que les particules perdent peu d'énergie dans les gaz.

Les avantages des chambres à gaz incluent un nombre relativement faible de fils d'anode, et une bonne résolution spatiale, de l'ordre de $50\mu m$, et une construction facile permettant des détecteurs de grande surface.

La région Geiger : V

Lorsque le champ électrique est suffisamment fort, les électrons primaires sont capables d'ioniser des autres atomes très rapidement et une avalanche très intense se produit. De plus, un grand nombre de photons sont créés dans le processus par désexcitation des atomes. Ces photons initient eux aussi des avalanches d'ionisation par effet photo-électrique, au long du fil d'anode où le champ électrique est le plus intense. Ces avalanches sont suffisamment intenses pour générer une décharge électrique dans le gaz, si puissante qu'elle est audible. C'est le principe du compteur Geiger. La décharge ne s'interrompt que lorsque la charge autour de l'anode écranne suffisamment le champ électrique autour de celle-ci pour que le processus de multiplication ne puisse plus continuer. Pendant ce temps le détecteur n'est plus sensible aux ionisations primaires, et jusqu'à ce que les ions aient migrés suffisamment loin de l'anode. C'est l'origine du temps mort dans le compteur Geiger.

Dans une décharge, le courant d'anode est saturé. L'amplitude du signal est donc indépendante des charges primaires. Les compteurs Geiger ne peuvent pas mesurer l'énergie des particules, mais on les utilise pour compter le nombre de particules le traversant, même aux faibles énergies. Ceci est utile pour les mesures de radioactivité. Le taux maximal mesurable est limité par le temps mort.

La région de décharge : VI

Une augmentation du champ électrique au-delà de la région Geiger entraîne une décharge continue. Un détecteur n'est plus utilisable dans cette région.

2.2.2.3 *Chambre d'ionisation*

Lorsque le gaz contenu dans le détecteur est soumis à un flux constant de particules, on recueille à l'anode un courant I qui est proportionnel :

Au nombre n de particules incidentes par second dans le volume utile.

Au nombre N_0 de paires d'ions formées par chacune de ces particules,

$$I = q_e n N_0 \quad (q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} C) \quad (2.5)$$

Dans le cas d'un rayonnement X ou γ , le courant I peut être mis sous la forme :

$$I = \frac{k \cdot \nu \cdot p \cdot D}{1,08} 10^{-13} \quad (2.6)$$

I en A , k étant une constante pour un gaz donné ($k = 1$ pour l'air), ν le volume utile en cm^3 , p la pression du gaz exprimée en atmosphère et D le débit de dose en roentgen/heure.

Ce courant I , de l'ordre de 10^{-15} à $10^{-4} A$ selon le débit de dose est indépendant de la tension C dans une plage de plusieurs centaines de volts ; le signal de mesure est la chute de tension v_m provoquée par ce courant dans une résistance R_m élevée ($R_m > 10^{10} \Omega$).

Selon la nature de rayonnement à détecter, on utilise un gaz, une pression et un type de fenêtre assurant la meilleure efficacité de détection.

Pour la mesure du courant délivré par la chambre, on utilise généralement un convertisseur courant-tension. L'utilisation de deux chambres identiques dont on mesure la différence des courants de sortie permet de compenser les effets des rayonnements parasites qui leurs sont communs (rayonnements cosmiques, γ ambiant). C'est ainsi qu'est réalisable la détection des neutrons en présence de flux important de rayonnement γ : une électrode de l'une des deux

chambres est recouverte d'une couche mince de carbure de bore qui émet des particules α lors de la capture de neutrons par les noyaux de ($\frac{1}{5}B$) ; c'est à l'ionisation provoquée par ces particules α qu'est due la différence de courant des deux chambres.

La détection individuelle de particules est possible au moyen d'une chambre d'ionisation à condition que la charge collectée à l'anode soit suffisante ; ce n'est en générale pas le cas pour une particule β .

Le gaz utilisé est notamment le fluorure de bore (BF_3) qui réagit avec les neutrons en émettant des particules α , ou l'Hélium ($\frac{3}{2}He$) qui quant à lui émet des protons. Cette réaction est importante pour les neutrons thermiques. Si on veut détecter des neutrons rapides, on est obligé d'abord de les ralentir pour réduire leur énergie par diffusion sur de l'hydrogène. C'est pourquoi les détecteurs de neutrons sont entourés d'une couche de polyéthylène, matière riche en hydrogène. [11]

2.2.2.4 Compteur proportionnel

Il s'agit d'un détecteur à ionisation de gaz, comme le compteur *Geiger-Müller* mais fonctionnant avec une plus basse tension. Ainsi, au lieu d'être en saturation (chaque arrivée de photon ou de particule provoque une étincelle maximum), on est dans le régime linéaire, et donc l'intensité de l'arc électrique créé est proportionnelle à l'énergie du photon, d'où le nom du détecteur.

2.2.2.5 Compteur de Geiger-Muller

Le compteur Geiger, ou compteur *Geiger-Müller* (ou compteur *GM*), sert à mesurer un grand nombre de rayonnements ionisants (particules alpha, bêta ou gamma et rayons X, mais pas les neutrons). Cet instrument de mesure, dont le principe fut imaginé vers 1913 par *Hans Geiger*, fut mis au point par lui et *Walther Müller* en 1928.

Il est constitué d'un tube de *Geiger-Müller*, d'un système d'amplification et d'un système d'enregistrement du signal. Le tube *Geiger-Müller*, est en fait une chambre métallique cylindrique dans l'axe de laquelle est tendu un mince fil métallique, est rempli d'un gaz sous faible pression. Une tension de l'ordre de 10000volts est établie entre le cylindre (qui fait office de cathode) et le fil (anode).

2.2.3 Performance d'un détecteur

La performance d'un détecteur dépend de plusieurs facteurs internes qui dépendent du détecteur lui-même, et externes qui dépendent du milieu externe, ces facteurs sont les suivants :

Géométrie du capteur :

Les performances d'un détecteur de flux neutronique dépendent de la géométrie du capteur c-à-d l'angle solide limitée par la surface détectrice de flux neutronique. Le flux neutronique généré par une source radioactive divergent dans tout le volume sphérique qui entoure cette source et donc le détecteur recueille uniquement les particules émises dans l'angle solide Ω .

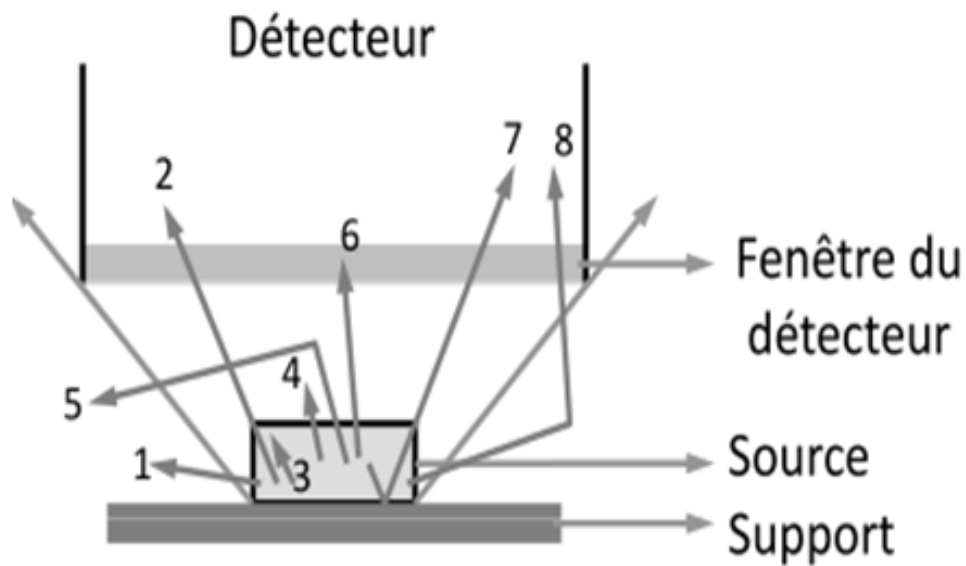


FIGURE 2.3 – Géométrie du capteur

- 1 émission hors l'angle solide de détection.
- 2 détections.
- 3 absorptions par la source.
- 4 absorptions par le milieu ambiant.
- 5 diffusions hors l'angle de détection par le milieu ambiant.
- 6 absorptions par la fenêtre de détection.
- 7 détections après rétrodiffusion sur le support.
- 8 Détection après diffusion par le milieu ambiant.

Bruit de fond :

Ce bruit est mesurable en absence de source radioactive et il est la cause du rayonnement cosmique (le flux de noyaux atomiques et de particules de haute énergie qui circulent dans le vide interstellaire), la radioactivité ambiante et à la contamination éventuelle du détecteur.

Sensibilité du détecteur :

C'est la plus faible valeur de flux détectable, elle est liée au bruit de fond donc au rapport SNR.

Efficacité de la détection :

C'est le rapport entre le flux incident et le nombre d'événements détectés, elle est liée principalement à l'énergie du rayonnement, type de particules détectées et au type de détecteur.

Temps mort τ :

Le temps minimal entre deux événements détectés, pour les compteurs actuels le taux de comptage est de 10^8 événements par seconde.

Linéarité :

Le détecteur est linéaire si le comptage est proportionnel au flux neutronique.

2.2.4 Mesures quantitatives

Taux de comptage :

C'est le nombre d'impulsions net par unité de temps mesurées par le compteur (*imp/s*).

$$n_{net} = n_{brut} - BF. \quad (2.7)$$

Rendement de comptage :

$$R = \frac{n_{net}}{A}. \quad (2.8)$$

A est l'activité de l'échantillon. Le rendement R est une fonction du type de désintégration, de la géométrie du détecteur et de l'efficacité du compteur. [10]

2.2.5 Amplifications et traitement analogique du signal

Après cette initiation à la détection nucléaire, on a intérêt maintenant à voir l'étude théorique de l'amplification du signal obtenu à la sortie de la chambre d'ionisation. Cette chaîne de mesure ou d'amplification contient 5 blocs principaux, sur la figure 2.4 [4], on voit le schéma synoptique qui représente ces blocs constituant la chaîne de mesure.

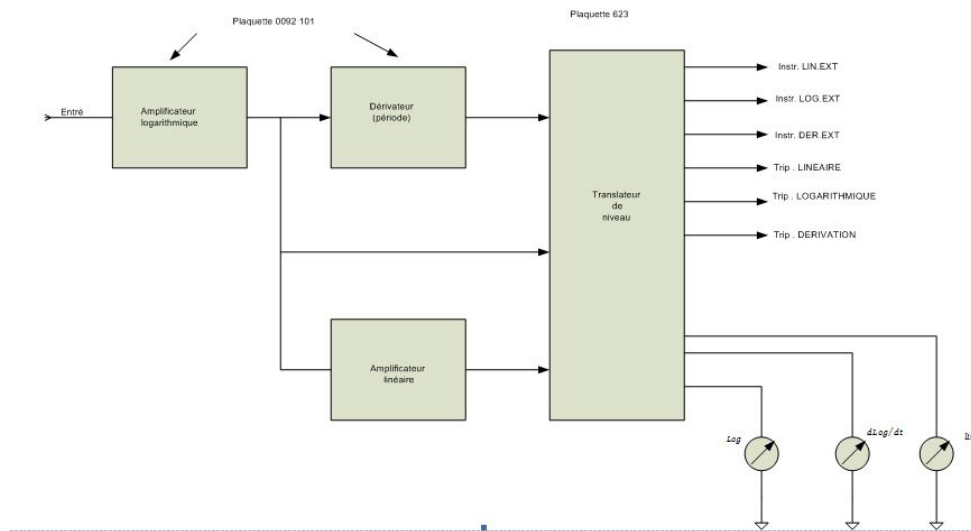


FIGURE 2.4 – Schéma synoptique de la chaîne de mesure dans le réacteur NUR

On regardant ce schéma synoptique, on constat que cette chaîne de mesure a la tâche d'amplifier le signal, et de donner soit : le signal amplifié avec un gain fixé par l'amplificateur linéaire, le *log* de ce signal ou la dérivée de ce *log*, selon le besoin (ce point va être détailler dans la partie pratique). Le signal amplifié va être transférer vers un translateur de niveau pour avoir des sortie mesurables, et en fin afficher par un afficheur analogique.

2.2.5.1 Amplificateur logarithmique

Un amplificateur logarithmique délivre en sortie une tension qui varie linéairement avec le logarithme du courant d'entrée. Dans son principe, on peut admettre qu'il est réalisé à l'aide d'un amplificateur opérationnel bouclé par un dipôle D non linéaire (figure2.5).

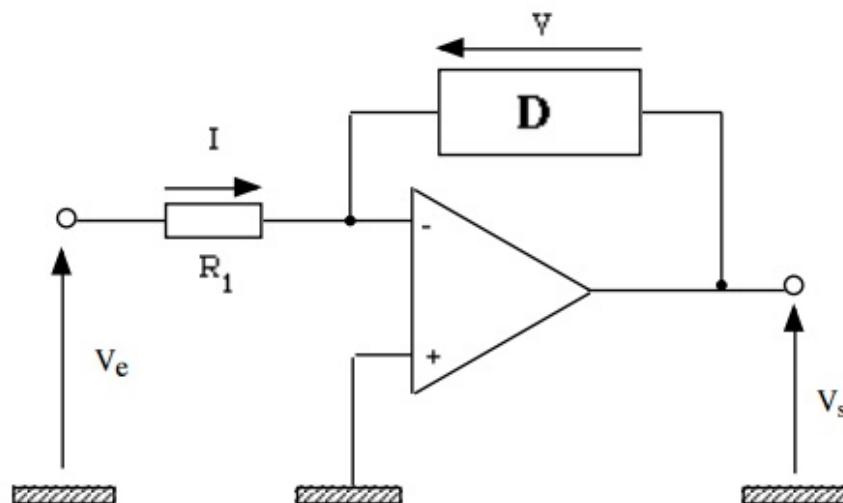


FIGURE 2.5 – Amplificateur logarithmique

Ces circuits sont essentiellement utilisés pour obtenir une compression de gamme : si l'amplitude du signal d'entrée varie sur plusieurs décades (5 ou plus), ce signal saturera un amplificateur linéaire, mais pas un amplificateur logarithmique. Ces amplificateurs sont également utilisés pour obtenir directement en décibels le gain d'un amplificateur ou l'atténuation d'un filtre.

Les amplificateurs logarithmiques utilisés en instrumentation sont des circuits intégrés très complexes et coûteux car ils possèdent des circuits de compensation en température (correction des variations de la tension de sortie dues à l'influence du gain d'amplification et du courant de saturation de dipôle).

On propose le schéma simplifié de cet amplificateur (utilisé au réacteur NUR), afin de calculer la sortie obtenue par l'amplificateur logarithmique (figure 2.6).

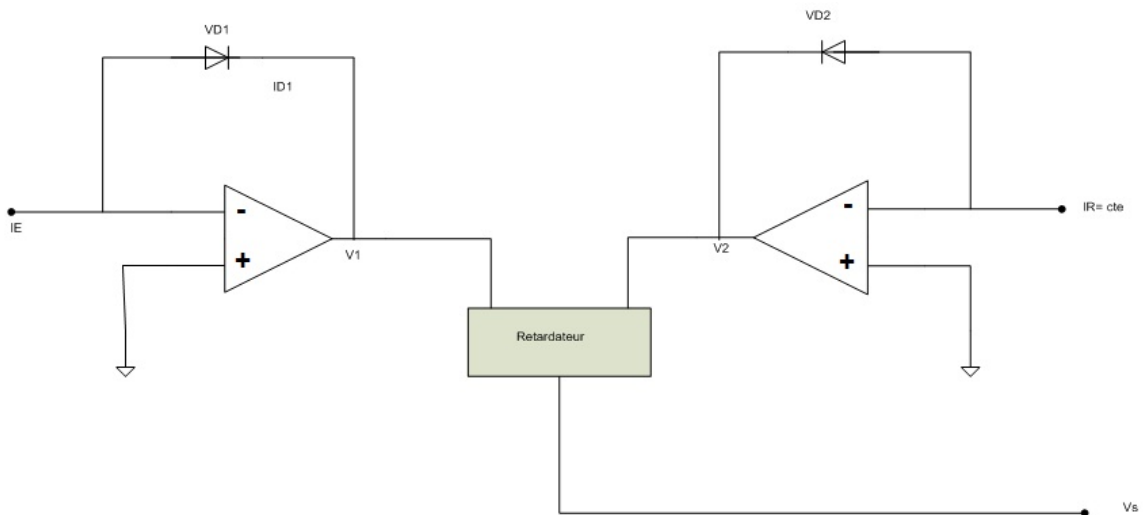


FIGURE 2.6 – schéma basique de l'amplificateur logarithmique utilisé à NUR. [4]

Avec :

$$I_E = I_{d1} \quad (2.9)$$

$$I_{d1} = I_{s1}(\exp(V_{D1}/V_T) - 1); \quad (2.10)$$

Pour une jonction PN en Si , le rapport $V_t = KT/q = 26mV$ à la température ordinaire $300K$. Tel que $K = C^{te} = 1.38J/K$ appelée la constante de Boltzman, T est la température en K , q est la charge d'un électron qui vaut $1.6021 * 10^{-19}C$, I_{s1} est le courant de saturation de la jonction et V_{D1} est la tension au bord de la diode (un élément non linéaire en générale).

Et comme le transistor utilisé dans le circuit pratique du réacteur NUR est le transistor $2N4044$

[4], le courant de saturation I_{s1} est de l'ordre de $10^{-14} A$, alors on le néglige afin d'avoir :

$$I_{d1} = I_{s1} \exp(V_{D1}/V_T); \quad (2.11)$$

C'est clair que la tension $V_{D1} = V_1$, et donc on aura $\ln(I_{d1}/I_{s1}) = V_1/V_T$. Et au finale :

$$V_1 = V_T \ln(I_E/I_{s1}); \quad (2.12)$$

Le même traitement pour la deuxième diode, Alors on a aussi :

$$V_2 = V_T \ln(I_R/I_{s2}); \quad (2.13)$$

La sortie du retardateur donne la différence $V_s = V_1 - V_2$, est donc elle est égale à :

$$V_s = V_T \ln(I_E/I_R); \quad (2.14)$$

Car les courants I_{s1} et I_{s2} sont identiques.

Autrement dit, la tension de sortie est proportionnelle au logarithme du courant d'entrée, qui peut également être variée à volonté en agissant sur I_R , qui représente l'échelle de la valeur de référence.

2.2.5.2 Amplificateur Anti-logarithmique

Pour retrouver la première fonction (signal donné par le détecteur), on a placé un amplificateur restituant le terme réel à partir du terme logarithmique. Cet amplificateur est représenté par le schéma de base suivant :

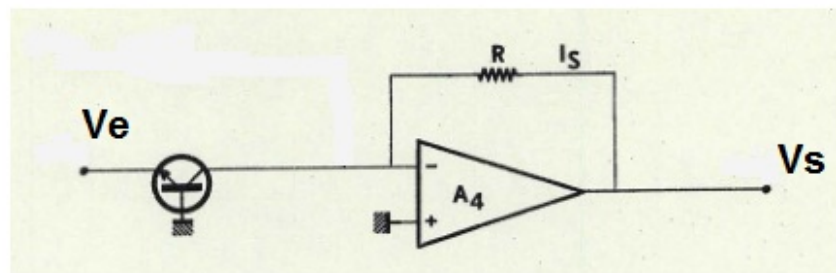


FIGURE 2.7 – Amplificateur Anti-logarithmique

2.2.5.3 Dérivateur

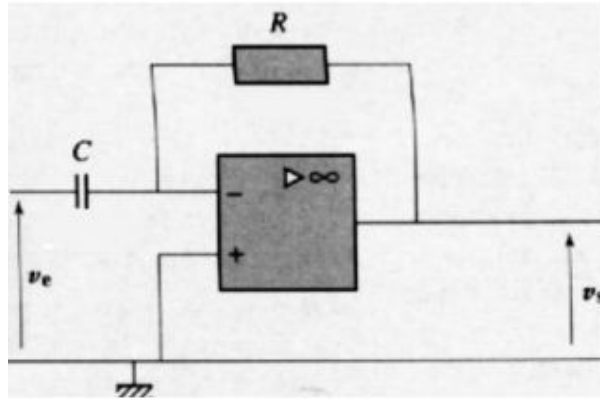


FIGURE 2.8 – Amplificateur Dérivateur

On considère le montage de la figure (2.8). La loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse donne :

$$C \frac{d(V_e - V_-)}{dt} + \frac{V_s - V_-}{R} = 0; \quad (2.15)$$

En régime linéaire $V_- = 0$ et dans ces conditions $\frac{V_s}{R} + C \frac{dV_e}{dt} = 0$, soit :

$$V_s = -RC \frac{dV_e}{dt}; \quad (2.16)$$

Et donc, ce montage réalise une dérivation.

2.2.5.4 Translateur de niveau

Ce bloc est constitué par des trois amplificateurs intégrateurs (chacun pour un des 3 signaux) ont la tâche d'intégrer les signaux dits rampes (puisque le détecteur donne des rampes chaque fois il reçoit des charges) pour enfin donner des signaux continus qui représentent le flux neutronique, ces amplificateurs intégrateurs ont des potentiomètres en entrée pour fixer le gain et l'offset (le zéro) en sortie. Dans ce bloc on a aussi des amplificateurs suiveurs ont le rôle de diviser la sortie en plusieurs, afin de pouvoir brancher les instruments de mesures, d'affichage, et de contrôle. Donc en général le rôle principal du translateur de niveau est d'assurer l'adaptation d'impédance, l'isolement et enfin avoir des sorties de contrôle et de mesure.

2.2.5.5 Isolateur galvanique

On parle d'isolation galvanique entre deux circuits électriques ou électroniques, lorsqu'il n'y a aucune liaison par un conducteur d'électricité (fil électrique, châssis métallique, etc.)

entre ces deux circuits.

Par exemple, Un transformateur permet une isolation galvanique de deux circuits, Un optocoupleur permet une isolation galvanique entre le circuit émetteur et celui du récepteur. C'est un flux lumineux qui assure la transmission d'information entre les deux circuits. Cette isolation est utilisée dans l'instrumentation du réacteur NUR pour protéger l'instrumentation de mesure.

2.3 Études pratiques

Comme on a dit auparavant cette partie va être consacrée juste aux études pratiques du circuit utilisé pour amplifier et mesurer le courant résultant du flux neutronique. Dont, on remarque qu'on a la nécessité de traiter principalement l'amplificateur logarithmique, l'anti-logarithmique et le dérivateur. On a choisit ces amplificateurs pour traiter précisément, puisque ils représentent les circuits responsables d'avoir un signal représentant du flux neutronique.

2.3.1 Amplificateur logarithmique utilisé au réacteur

Le circuit représenté sur la figure 2.9, génère une tension de sortie proportionnelle au logarithme du courant d'entrée, l'un des transistors (a) est utilisé comme élément non linéaire pour créer une contre réaction pour l'amplificateur Z_1 , et dans ce cas ce dernier est logarithmique. Étant donné que la sortie de Z_1 est reliée à l'émetteur du transistor (a) par l'intermédiaire d'un diviseur résistif et de la base d'un autre transistor (b), le courant de collecteur du transistor (a) est égale au courant d'entrée I_E . Le transistor (b), est utilisé comme élément de contre-réaction pour Z_3 , son courant de collecteur est par l'affection d'une rétroaction négative égal au courant de l'entrée constante I_R . Étant donné que le courant de collecteur et la tension base-émetteur sont constantes donc (sans tenir compte de l'effet de la température) la tension base-émetteur du premier transistor (a) est aussi constante et elle varie en fonction du changements dans le courant d'entrée . La tension de sortie V_s est une fonction de la différence des tensions émetteur-base des deux transistors, et donc les transistors (a) et (b) ont la tache du retardateur étudié à la partie théorique.

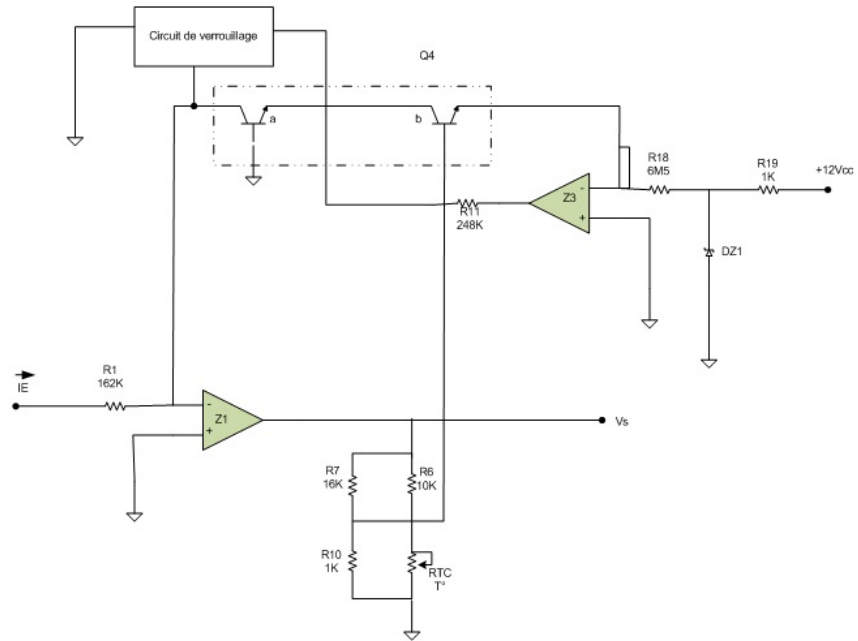


FIGURE 2.9 – Amplificateur logarithmique utilisé au sein de NUR. [4]

Et donc, on trouve :

$$V_s = \frac{(R_7 // R_6) + (R_{TC} // R_{10})}{(R_{TC} // R_{10})} (V_{BEb} - V_{BEa}); \quad (2.17)$$

avec

$$V_{BE} = (V_{BEb} - V_{BEa}) = -(KT/q) \ln(I_{ca}/I_{cb}); \quad (2.18)$$

Et, par la suite on a :

$$V_s = -(KT/q) \frac{(R_7 // R_6) + (R_{TC} // R_{10})}{(R_{TC} // R_{10})} \ln(I_{ca}/I_{cb}); \quad (2.19)$$

Cette dernière expression montre que la sortie est proportionnelle au logarithme du courant d'entrée.

Le coefficient KT/q indique que la tension de sortie est directement fonction de la température absolue, cependant R_{TC} est directement proportionnelle à la température. Elle peut maintenir un gain constant pour une précision contre température requise. La compensation de température est d'environ $\pm 0.0005C^{-1}$ sur une plage de température de $0 - 50C$.

Le diviseur de tension $\frac{(R_7 // R_6) + (R_{TC} // R_{10})}{(R_{TC} // R_{10})}$ fixe le gain, tandis que le courant à travers la résistance R_{18} définit zéro. Avec les valeurs spécifiées le facteur d'échelle est de $1V/decades$, nous avons alors :

$$V_s = -[\lg(I_E/I_R) + 0.5] Volt; \quad (2.20)$$

Mais étant donné que le courant d'entrée est directement proportionnelle au flux des neutrons, en fin de compte on a une sortie de tension proportionnel au logarithme du flux de neutrons, et donc :

$$V_s = A \lg(n(t)); \quad (2.21)$$

Dont, A est le facteur d'échelle et $n(t)$ est le flux neutronique. Pour un débit de croissance exponentielle (produite par un accroissement positif de la réactivité) on a :

$$n(t) = n(0) \exp(t/T); \quad (2.22)$$

Tel que, $n(0)$ est le flux initiale et T est temps de croissance constant ou la période.

Le débit $n(t)$ est représenté une tension de sortie d'une phase logarithmique, et donc on peut arrivé à l'équation suivante.

$$V_s = -[\lg(n(0)) + t/T \lg(\exp)]; \quad (2.23)$$

En dérivant le signal obtenu :

$$\frac{dV_s}{dt} = A \frac{0.43}{T} \text{décades/s}; \quad (2.24)$$

2.3.2 Amplificateur Anti-logarithmique utilisé au réacteur

En effet, cet amplificateur est un simple amplificateur suiveur avec un gain unitaire (le rapport entre R_{17} et R_{13}) et non pas un anti-logarithmique, puisque son entrée est la même entrée de l'amplificateur logarithmique, cette entrée est acheminé par l'intermédiaire du transistor (a). Le courant d'entrée (donné par le détecteur) est égal au courant I_{ca} , et donc égal au courant I_{ea} qui est l'entrée de l'amplificateur Z4, la diode DZ4 a la tâche de fixer la tension entre les entrées de l'amplificateur et même la bande passante (on travail toujours on basses fréquences). la figure (2.10) représente le schéma de cet amplificateur.

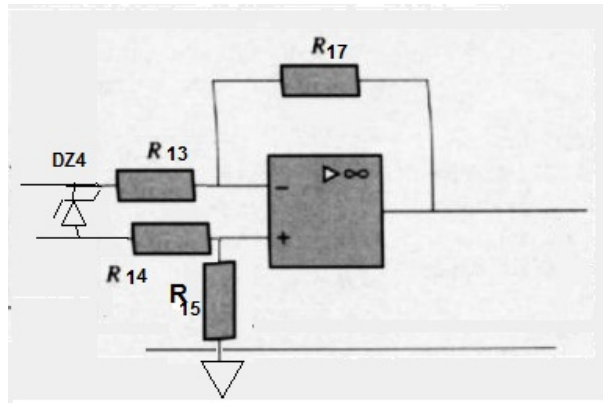


FIGURE 2.10 – Amplificateur Anti-logarithmique utilisé au NUR

2.3.3 Dérivateur utilisé au réacteur

Pour ce dérivateur, la tension de sortie donne toujours la dérivé du signal d'entrée.

$$V_s = V_e \frac{Z_2}{Z_1} \quad (2.25)$$

Tel que, $Z_1 = 1/PC_1$ et $Z_2 = R_8$ (faire référence au Datasheet CIC). Et donc on peut écrire

$$V_s = PR_8C_1V_e \quad (2.26)$$

Ce qui implique

$$V_s = R_8C_1 \frac{dV_e}{dt} \quad (2.27)$$

En remplaçant V_e

$$V_s = R_8C_1A \frac{d(\lg(n(t)))}{dt} \quad (2.28)$$

La sortie de ce dérivateur est proportionnelle à la dérivé du flux neutronique.

$$V_s = R_8C_1A \frac{0.43}{T} \quad (2.29)$$

Dans plusieurs montages, l'amplificateur dérivateur est utilisé principalement pour surveillé les variations du signal, puisque ce circuit peut donner la dérivé et donc la période du signal traité. Au sein du réacteur NUR la sortie du dérivateur est très importante afin d'avoir la période du signal représentant de flux neutronique, cette information sur la période est le clé de contrôler la réaction en cours.

2.3.4 Remarques et conclusion

On a traité dans cette approche, le circuit utilisé au réacteur NUR en général. Il reste de mentionner le rôle des circuits de verrouillage, ces circuits bloquent la chaîne de mesure en cas d'un courant d'entrée très élevé afin de protéger le circuit global. En addition, d'autres circuits et dispositifs sont utilisés pour afficher les signaux sur des afficheurs analogiques.

2.4 Application du traitement de signal dans l'instrumentation

L'application du traitement de signal dans l'instrumentation a un très grand succès à nos jours. Le traitement d'antenne est un des exemples les plus connus et les plus bénéfiques. Dans ce sous-chapitre, on a aimé introduire des notions de traitement d'antenne dans la chaîne de mesure constituée par un réseau de capteurs (antennes) situés dans l'enceinte du réacteur. Ce réseau de capteurs a l'importance de nous livrer le signal représentant du flux neutronique (résultats obtenus auparavant) et donc de contrôler le réacteur en basant sur cette information de valeur. Et pour cette raison on a proposé l'approche de l'algorithme *PCA (Principal Component Analysis)*. Cet algorithme a intérêt de filtrer le bruit et de décider le capteur qui a le signal le plus exacte.

Le PCA est le nom en général d'une technique qui utilise des principes mathématiques sophistiqués pour transformer un nombre de paramètres probablement corrélés à un nombre inférieur ou égale de paramètres décorrélés nommés "Principals Components". L'origine du PCA est lié à l'analyse multivariée de données, et donc il a plusieurs applications dans le traitement de signal et même dans le traitement de l'image (restauration, compression et décompression), les applications les plus connues de l'algorithme PCA est le *de-noising signals* et la séparation de sources.

En général, le PCA utilise une transformation de l'espace de vecteur pour réduire la taille (dimension) très grande de la donnée. En utilisant une projection mathématique, la donnée original à beaucoup de variables, peut être simplifiée pour la représenter enfin avec peu de variables.

L'objectif de cette partie de travail est d'expliquer le côté théorique du PCA, et de fournir une application pratique de l'algorithme sur la chaîne de mesure du réacteur NUR.

2.4.1 Théorie de l'algorithme PCA

Pour un signal défini dans une base quelconque, l'information toujours donnée avec un bruit aléatoire supposé de distribution Gaussienne, ce bruit peut influencer la mesure et donner de fausses résultats (dans le cas d'une chaîne de mesure désadaptée). Le principe du PCA est de transformer les vecteurs de signal dans une première base vers une autre base (à chercher), pour enfin de compte avoir un signal moins bruité.

La question qui se pose maintenant c'est : *est-ce-qu'on peut trouver une autre base qui est une composition linéaire de l'ancienne base, et à partir de cette base est-ce-qu'on peut reconstruire notre signal ?*.

En assumant qu'on a un ensemble de données représentées en terme de matrice $m \times n$, X où n est le nombre de colonnes (échantillons en temps) et le m est le nombre des lignes qui représentent le nombre de variables (signaux).

On a la tâche maintenant de transformer la matrice X linéairement, pour avoir une autre matrice Y , avec les mêmes dimensions $m \times n$, avec une matrice de transformation P de dimension $m \times m$;

$$Y = PX \tag{2.30}$$

Cette équation représente le changement de base. Si on considère les colonnes de P d'être les vecteurs colonnes p_1, p_2, \dots, p_m , et les colonnes de X comme la suite de vecteurs $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, on aura l'interprétation suivante :

$$PX = (P\bar{x}_1 P\bar{x}_2 \dots P\bar{x}_n) = \begin{pmatrix} p_1\bar{x}_1 & p_1\bar{x}_2 & \dots & p_1\bar{x}_n \\ p_2\bar{x}_1 & p_2\bar{x}_2 & \dots & p_2\bar{x}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_m\bar{x}_1 & p_m\bar{x}_2 & \dots & p_m\bar{x}_n \end{pmatrix} = Y; \tag{2.31}$$

Tel que, $p_i, \bar{x}_j \in R^m$, et $p_i \bar{x}_j$ est le produit Euclidien standard (scalaire). Ce produit scalaire est donc la projection de X dans l'espace engendré par les colonnes de P , cet espace représente les directions des composantes principales.

Pour une matrice X de vecteurs \bar{x}_j centrés, on peut considérer la matrice de covariance suivante :

$$C_X = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \bar{x}_1^T & \bar{x}_1 \bar{x}_2^T & \dots & \bar{x}_1 \bar{x}_n^T \\ \bar{x}_2 \bar{x}_1^T & \bar{x}_2 \bar{x}_2^T & \dots & \bar{x}_2 \bar{x}_n^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_n \bar{x}_1^T & \bar{x}_n \bar{x}_2^T & \dots & \bar{x}_n \bar{x}_n^T \end{pmatrix} \in R^{m \times m} \quad (2.32)$$

Pour cette matrice, on a calculé les auto-covariances sur la diagonale, et les cross-covariances sur le reste des termes. Revenant à notre problème, la transformation linéaire (la projection) de la matrice des données, en utilisant l'équation (2.30), avec une matrice P qu'on doit chercher. Il faut décider aussi les caractéristiques et les propriétés que la matrice Y (C_Y) doit vérifier pour obtenir notre objectif de compression et de filtrage.

La matrice de covariance est considérée comme un paramètre qui détermine le niveau de corrélation entre les vecteurs d'une matrice. La méthode de l'algorithme PCA, consiste à chercher une matrice Y avec des colonnes les moins corrélées possible, et donc les cross termes de la matrice C_Y doivent être nuls (les termes de la diagonale sont obligatoirement positifs). Par contre on s'intéresse aux valeurs larges de la diagonale de la matrice résultante, puisque elles représentent la dynamique du système (puisque les petites termes de la diagonale représentent le bruit). Donc pour construire la matrice C_Y , on a l'intérêt à :

- Maximiser le signal, et donc maximiser les termes de la diagonale
- Minimiser la variance entre les variables, et donc minimiser les cross-termes de la matrice de covariance

On arrive à la conclusion qui dit, plus que les cross-termes sont proches de zéro plus qu'on a une matrice C_Y diagonale. Si on doit choisir une matrice de changement de base P , donc ça doit être la quelle qui donne une matrice C_Y diagonale, avec cette solution on pourra atteindre notre objectif.

Les vecteurs p_1, p_2, \dots, p_m , sont supposés orthonormaux [16]. Avec la dernière supposition on peut obtenir la matrice diagonale de C_Y voulue. En considérant la formule mathématique de la matrice de covariance C_Y de Y en fonction des paramètres X , et P .

$$C_Y = \frac{1}{n} Y Y^T = \frac{1}{n} (P X) (P X)^T = \frac{1}{n} P (X X^T) P^T, \quad (2.33)$$

et, donc

$$C_Y = \frac{1}{n} P S P^T \quad (2.34)$$

où :

$$S = X X^T \quad (2.35)$$

Notant, que la matrice S est symétrique et de dimensions $m \times m$. Qui veut dire qu'elle est diagonalisable en une autre matrice avec des colonnes orthonormales, Donc on peut l'écrire sous la forme :

$$S = E D E^T \quad (2.36)$$

Où, E une matrice $m \times m$ orthonormale, tel que ses colonnes sont les vecteurs propres orthonormaux de la matrice S , et D la matrice des valeurs propres diagonale. Le rang r de la matrice S représente le nombre de vecteurs propres ou de valeurs propres non nulles, donc cette projection, a un sous-espace signal représenté par les r vecteurs propres de la matrice S , et $m - r$ sera la dimension du sous-espace bruit (avec des valeurs propres de D presque nulles).

En ce moment, on peut définir la matrice de transformation de base $P = E^T$. cela nous donnera :

$$C_Y = \frac{1}{n} P S P^T = \frac{1}{n} E^T (E D E^T) E \quad (2.37)$$

Sachant que, la matrice E est orthonormale donc $E^T E = I$, où I est la matrice identité $m \times m$.

Pour ce spécial choix de P :

$$C_Y = \frac{1}{n} D \quad (2.38)$$

Un dernier point à remarquer pour cette méthode, qu'on a automatiquement obtenu les composants principales directement à partir de la matrice de variance orthogonale. la valeur propre considérable représente la première composante principale (signal utile avec un changement de base), la deuxième valeur propre représente la deuxième composante qui sera le bruit dans le cas de deux capteurs (exemple de simulation). Donc on doit ordonner les valeurs propres dans un ordre croissant (la même chose pour les vecteurs propres), à ce stade on atteint notre objectif de transformer la matrice C_Y en matrice diagonale D avec une matrice de changement de base

$P = E^T$, et donc pour reconstruire notre signal on a juste à multiplier le premier vecteur propre de E avec la racine carré de la première valeur propre de D afin d'avoir le signal utile filtré du premier capteur.

2.4.2 Simulation et commentaires

Sous MATLAB, on a réalisé un programme simple pour appliquer l'algorithme PCA sur les signaux obtenus par les chambres d'ionisation situées à l'intérieur du réacteur NUR. On a prit les signaux de deux capteurs pour plus de simplicité, et afin de pouvoir représenter ces signaux en deux dimension (et non pas plus). les signaux utilisés sont bruités et non pas centrés pour obtenir un décalage sur l'axe des y afin de comparer les signaux entre eux et entre signaux et signaux après l'application du PCA. On a aimé aussi de traiter le cas où on a une panne au niveau d'un des capteurs, c'est pour voir le comportement de l'algorithme PCA.

2.4.2.1 Cas de deux capteurs

Dans cette partie de simulation, on a prit les signaux de deux chambres d'ionisation, on a donc un signal Cap_1 et un autre Cap_2 . les signaux Cap_1 et Cap_2 sont influencés par le bruit de la chaine de mesure, mais se bruit est n'est pas le même sur les deux capteurs, par contre les signaux utiles des deux capteurs sont corrélés (condition de même chaine de mesure pour les deux capteurs). En appuyant sur se principe, l'algorithme PCA cette fois cherchera le max d'énergie dans les deux signaux (valeurs propres les plus considérables), ce maximum d'énergie représente donc le signal utile qu'on cherche.

Soit Cap_1 et Cap_2 deux signaux idéaux (sans bruit) obtenus par deux capteurs, on a donc :

$$Cap_1 = Sig_1, \quad (2.39)$$

$$Cap_2 = Sig_2. \quad (2.40)$$

Si, on trace le signal Cap_1 en fonction de Cap_2 on va avoir une ligne droite représente le maximum de corrélation entre les deux signaux puisque ils sont théoriquement identiques, ce maximum de corrélation représente aussi le maximum d'énergie utile (le signal utile).

Maintenant, pour le cas réel on a :

$$Cap_1 = Sig_1 + n_1, \quad (2.41)$$

$$Cap_2 = Sig_2 + n_2, \quad (2.42)$$

Dans ce cas, le tracé du signal Cap_1 en fonction de Cap_2 est donné par la figure 2.11.

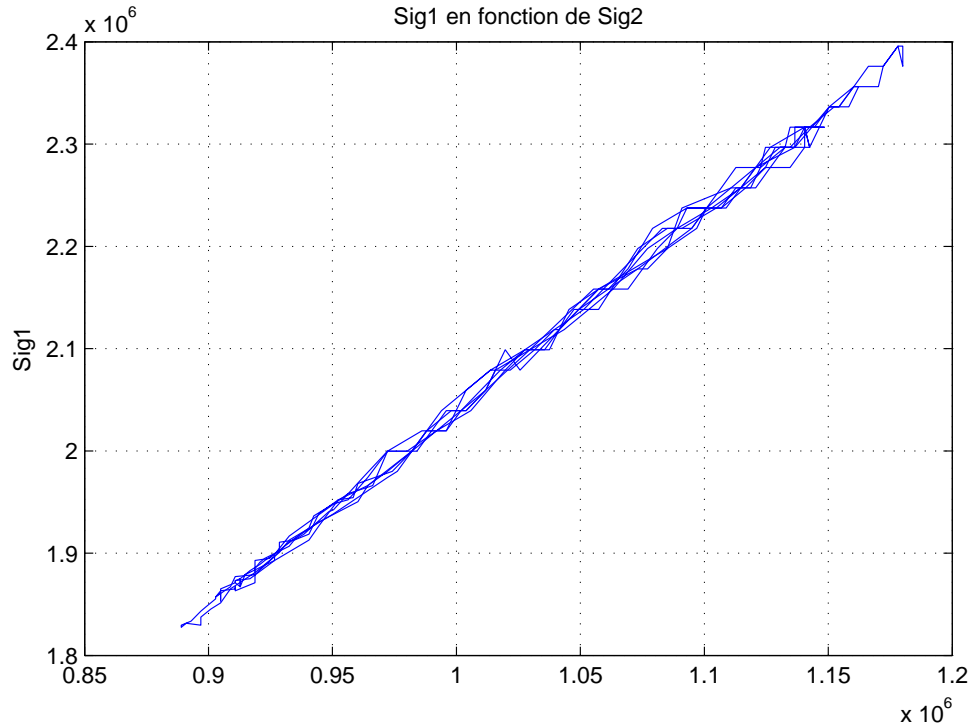


FIGURE 2.11 – Représentation des deux signaux bruités

En remarque une dispersion de l'énergie autour de la ligne supposée linéaire auparavant, c'est l'effet du bruit additif sur les deux signaux. L'algorithme PCA va donc chercher cette ligne droite (qui représente le maximum de corrélation entre les deux signaux) en cherchant la matrice diagonale transformée. la figure (2.12) représente les signaux des deux capteurs et le signal reconstitué après filtrage PCA.

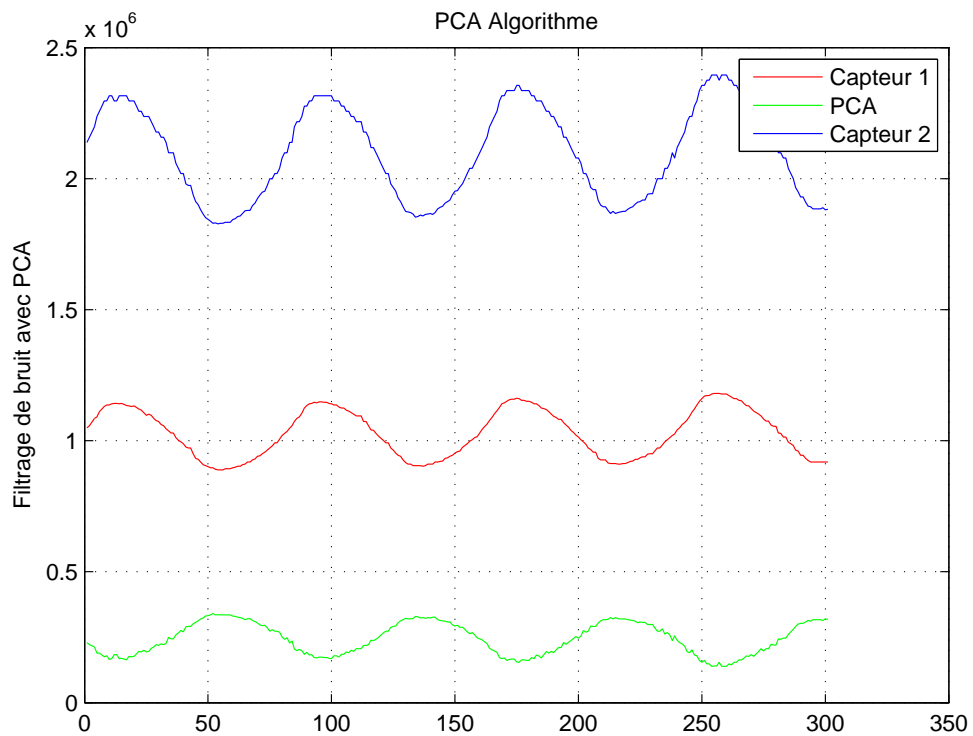


FIGURE 2.12 – Algorithme PCA

On remarque que le signal obtenu par la méthode PCA est proche aux signaux non filtrés de point de vu bruit puisque la chaine de mesure utilisée au réacteur NUR est vraiment adaptée et a un rapport SNR très grand. On remarque aussi que les deux signaux donnés par les capteurs ont des amplitudes différentes (la composante alternative) et donc le signal obtenu par le PCA a une amplitude minimale puisque la différence d'amplitude est considérée comme bruit pour cet algorithme. On a aussi un déphasage entre les signaux non filtrés et le signal donné par le PCA, c'est tout simplement l'effet du filtrage, le PCA est en fait un filtre qui a une fonction de transfert qui introduit un gain G inférieur à 1 et un déphasage Φ .

2.4.2.2 Cas de panne

Le cas où un des capteurs tombe en panne pendant l'acquisition ou le traitement des signaux. Ce cas donne une imprécision majeure, puisque les signaux donnés par les deux capteurs vont être déc-corrélés et avec une grande différence entre valeurs. Le PCA dans ce cas prend le maximum d'énergie qui va être le signal donné par le capteur en bonne état. La figure (2.13) représente le premier signal en fonction du deuxième, et la figure (2.14) représente les signaux après filtrage avec PCA.

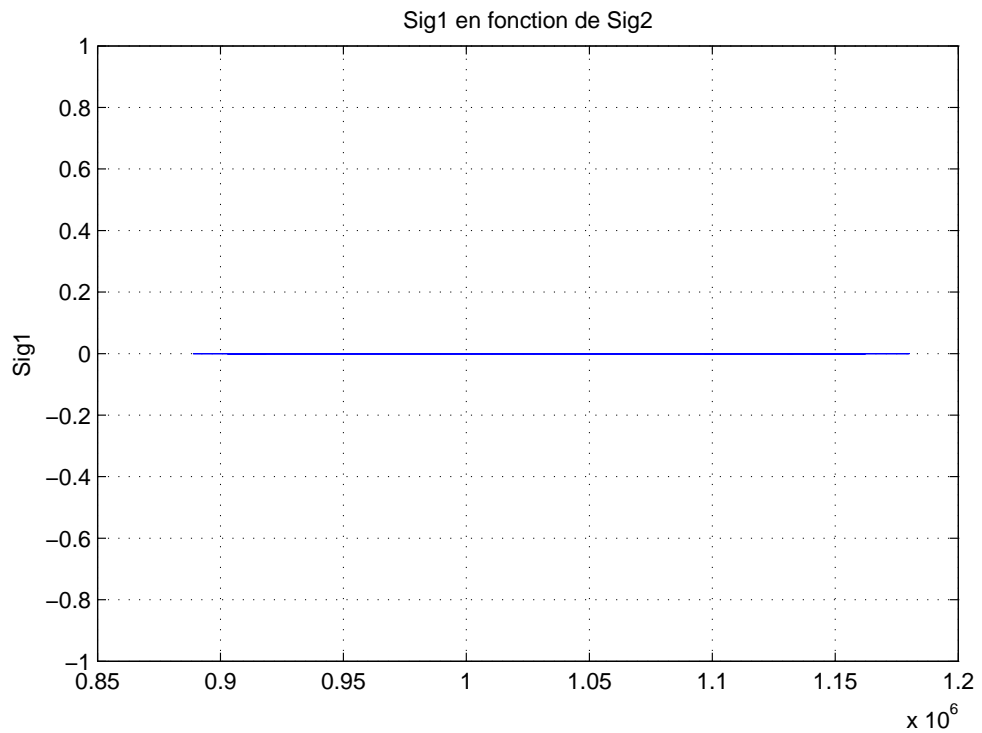


FIGURE 2.13 – Représentation des deux signaux bruités dans le cas de panne

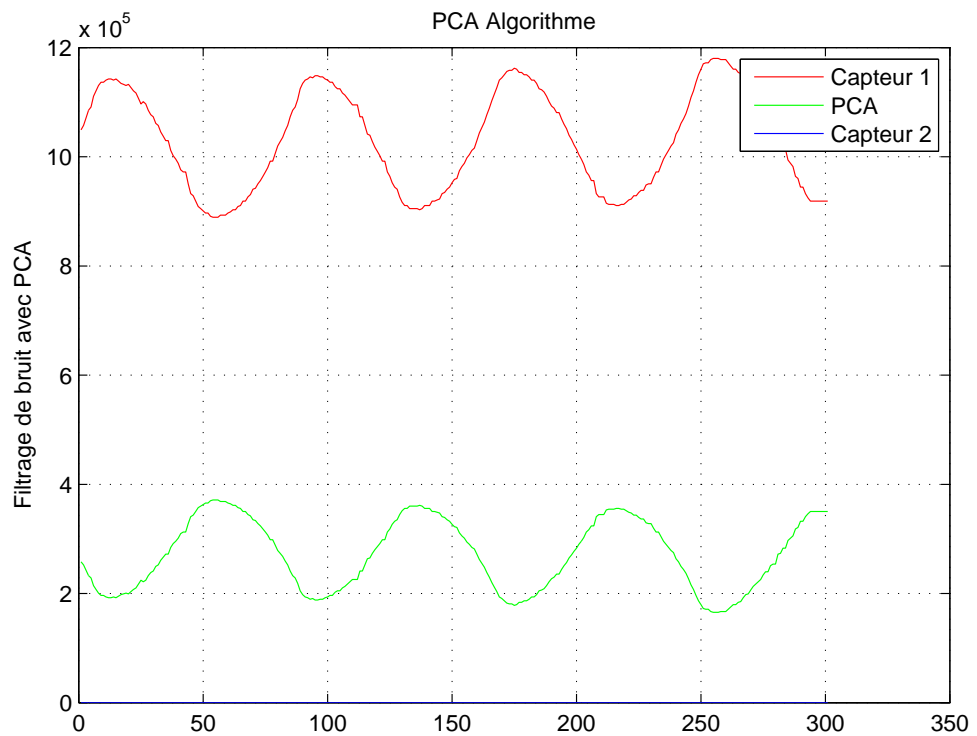


FIGURE 2.14 – Algorithme PCA dans le cas de panne

En remarque pour la deuxième figure, que l'algorithme donne un signal proche au signal du capteur en bonne état car le signal filtré représente la valeur propre la plus grande est donc le maximum d'énergie, qui est le signal Sig_1 dans notre exemple. On remarque aussi un filtrage de bruit au niveau du signal obtenu par PCA.

2.4.3 Conclusion sur PCA

La séparation de source avec l'algorithme PCA a ces avantages et ces inconvénients, l'avantage majeur est la simplicité de l'étude théorique et même la simplicité de l'implémentation sur MATLAB, l'inconvénient de cet algorithme est dans le cas où les deux capteurs (chaines de mesures) ne sont pas identiques et donc les signaux utiles obtenus seront moins corrélés. Ou dans le cas où le rapport signal sur bruit est faible dans ce cas le maximum d'énergie ne représentera plus le signal utile mais le bruit, et donc on aura une divergence de signal obtenu vers le bruit.

2.5 Conclusion

Cette partie été la partie instrumentation et au même temps ma partie Master, on a traité les types de détecteurs utilisés au réacteur NUR. On a fait aussi l'étude théorique et pratique de la chaîne de mesure qui été un travail de fourmi vu sa difficulté, cette chaîne de mesure a la tâche de donner des informations sur la puissance du réacteur, le flux neutronique et même sur la période du signal représentant le flux neutronique (tiré de la dérivé et donc on pourra même savoir la vitesse de la réaction), enfin on a introduit des notions de traitement de signal (séparation de source) pour améliorer la chaîne de mesure afin d'avoir moins de bruit sur la mesure, l'application MATLAB nous a montré l'efficacité de la séparation de sources dans l'instrumentation en général et la puissance de l'algorithme PCA dans ce genre d'approches.

Chapitre 3

Théorie de Filtrage de Kalman

3.1 Introduction

Le problème du filtrage consiste à déterminer des estimateurs de variables du système lorsque l'environnement présente des perturbations aléatoires. Nous allons donc étudier dans cette partie l'aspect stochastique de la notion d'observateurs. Deux points de vue peuvent être utilisés pour aborder cette question : celui de *Wiener* qui utilise une approche fréquentielle et celui de *Kalman* qui utilise l'approche temporelle. Dans tous les cas, le but est de déterminer un système (le filtre), optimal au sens de la minimisation de la variance d'erreur entre la variable réelle et son estimation. Nous ne regarderons ici que la deuxième approche. En effet, un filtre de Wiener est un cas particulier de filtre de Kalman et cette dernière approche permet d'appréhender directement le cas d'un système non stationnaire multivariable. Dans ce cadre on peut également classer les problèmes d'estimation suivant la quantité d'informations disponible. En effet, considérons un système dont on possède un ensemble de mesures $m(t_0, t_f)$, entre les instants t_0 (instant initial) et t_f (instant final), sur les entrées et les sorties. On peut chercher à estimer la valeur de l'état x à un instant donné τ (que l'on notera par $\hat{x}(\tau/m(t_0, t_f))$). Suivant la valeur de τ , on distingue :

- si $\tau < t_f$ il s'agit d'un problème de lissage
- si $\tau = t_f$ il s'agit d'un problème de filtrage
- si $\tau > t_f$ il s'agit d'un problème de prédiction

Alors qu'un problème de prédiction peut être ramené à un problème de filtrage par une estimation de

$\hat{x}_f = \hat{x}(t_f/m(t_0, t_f))$ suivie d'une prédiction par utilisation du modèle initialisé à x_f , il n'en est pas de même du lissage. En fait, ce dernier problème peut être résolu par la combinaison de deux problèmes de filtrage : un filtrage de t_0 à τ et un filtrage rétrograde de t_f à τ . Ainsi, un seul algorithme permettra de traiter ces trois problèmes.

Le filtre de Kalman est un reconstituteur d'état dans un environnement stochastique. Lorsque les variances des bruits sont connues, c'est un estimateur linéaire minimisant la variance de l'erreur d'estimation. Les algorithmes donnant la solution de ce problème ont été déterminés initialement par *KALMAN, 1959* dans le cas discret et *KALMAN, BÜCY, 1961* dans le cas continu. Nous établirons, dans un premier temps, les équations du filtre de Kalman discret puis, celles du filtre de Kalman continu par passage à la limite.

3.1.1 Filtre de Kalman discret

Étant donné un système linéaire stochastique (figure 3.1) dont l'évolution dynamique est modélisée à l'aide de l'équation d'état :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \quad (3.1)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \quad (3.2)$$

Où k représente les instants successifs du temps, x_k système de dimension n , y_k la sortie (mesure ou observation) de dimension m , u_k l'entrée certaine de dimension l , w_k le bruit d'entrée (ou de dynamique) de dimension l , v_k le bruit de mesure de dimension m . Les matrices certaines A_k, B_k, G_k, C_k sont de dimensions convenables. Pour éviter toute confusion nous représenterons dans la suite, la matrice identité d'ordre n , simplement par I .

Ce modèle peut être considéré comme représentatif d'un système à temps discret ou plus généralement être obtenu à partir de la discrétisation d'un modèle représentatif d'un système à temps continu. Les séquences de bruit w_k et v_k . Leurs propriétés aux premier et second ordres sont données par :

$$E \begin{pmatrix} v_k \\ x_0 \\ w_k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_l^t & x_0^t & w_l^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_k \delta_{k,l} & 0 & 0 \\ 0 & P_0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_k \delta_{k,l} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

où E représente l'espérance mathématique, R_k, Q_k, S_k, P_0 des matrices symétriques définies positives, et $\delta_{k,l}$ est le symbole de *Kronecker*.

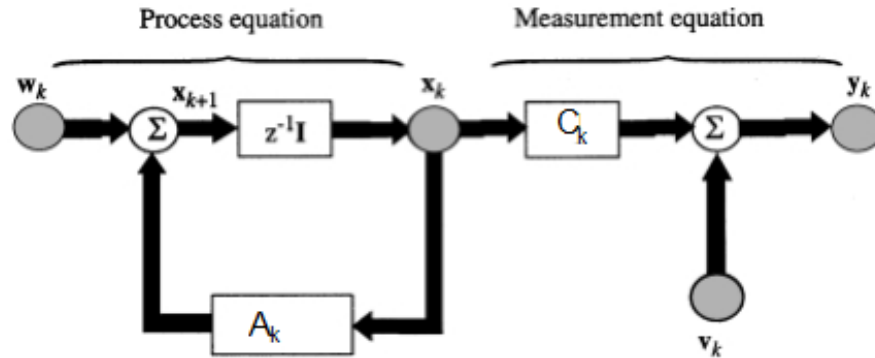


FIGURE 3.1 – Schéma représentant d'un modèle dynamique linéaire discret. [15]

3.1.1.1 Équations du filtre

Le problème du filtrage, au sens de Kalman, est de trouver, pour le système dynamique, la meilleure estimation \hat{x}_k de l'état x à l'instant k , à partir d'observations effectuées jusqu'à l'instant discret j , au sens du critère de la variance conditionnelle minimum. Cela signifie que l'estimée \hat{x} est telle que. $E[\|x_k - \hat{x}_k\|^2 / \{y_0, y_1, \dots, y_j\}] \leq E[\|x_k - z\|^2 / \{y_0, y_1, \dots, y_j\}]$ Pour tout vecteur z fonction des observations $\{y_0, y_1, \dots, y_j\}$ Nous noterons $\hat{x}_{k/j}$ estimateur optimal, et $\bar{x}_{k/j}$ et $\bar{y}_{k/j}$ erreurs d'estimations :

$$\bar{x}_{k/j} = x_k - \hat{x}_{k/j} \quad (3.4)$$

$$\bar{y}_{k/j} = y_k - C_k \hat{x}_{k/j} \quad (3.5)$$

Suivant que $k < j, k = j$ ou $k > j$, on dit que $\hat{x}_{k/j}$ une valeur lissée, filtrée ou prédite de x_k . Contrairement au problème de prédiction qui utilise, à partir d'une valeur filtrée le modèle non bruité, le problème de lissage nécessitera un traitement plus complexe (on doit tenir compte d'informations futures) qui sera étudié dans un paragraphe particulier. Pour simplifier les notations, nous poserons désormais :

$$cov(z) = E[zz^T] \quad (3.6)$$

$$P_{k/t} = E[\tilde{x}_{k/t}] \quad (3.7)$$

Tel que : $\tilde{x}_{k/t} = x_{k/t} - \bar{x}_{k/t}$ Et $\bar{x}_{k/t} = E[x_{k/t}]$.

Le problème de filtrage au sens de Kalman est résolu en utilisant les principes de base de l'estimation, simple puis récursive, d'une variable aléatoire. Dans l'annexe A, on établit que les équations de fonctionnement d'un filtre de Kalman discret se décomposent en deux étapes :

une étape de prédiction

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k \quad (3.8)$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (3.9)$$

une étape de correction

$$\hat{x}_{k+1/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.10)$$

$$P_{k/k} = (1 - K_k C_k) P_{k/k-1} \quad (3.11)$$

Où K_k est le gain optimal du filtre, donné par :

$$K_k = P_{k/k-1} C_k^T \Sigma_k^{-1} \quad (3.12)$$

$$\Sigma_k = R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T \quad (3.13)$$

La construction de cet algorithme montre qu'il permet de répondre à deux objectifs différents :

- c'est un filtre linéaire minimisant la variance a priori de l'erreur d'estimation. Dans ces conditions, les bruits peuvent ne pas être gaussiens ;
- c'est un filtre maximisant la probabilité a posteriori des grandeurs à estimer. Cela n'est alors applicable que dans l'hypothèse de bruits gaussiens

3.1.1.2 Formes particulières du filtre

Le filtre de Kalman discret est composé de l'ensemble des relations (3.11) et (3.13), mais, suivant que l'étape de prédiction suit ou précède l'étape de correction, on peut réaliser un filtre estimateur ou un filtre prédictif-à-un-pas ($(\hat{x}_{k/k}, P_{k/k}) \rightarrow (\hat{x}_{k+1/k+1}, P_{k+1/k+1})$), on réalise alors un filtre estimateur :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1/k+1} &= (I - K_{k+1} C_{k+1})(A_k) \hat{x}_{k/k} + (I - K_{k+1} C_{k+1}) B_k u_k + K_{k+1} y_{k+1} \\ P_{k+1/k+1} &= (I - K_{k+1} C_{k+1})(A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T) \\ K_{k+1} &= (A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T) C_{k+1}^T \Sigma_{k+1}^{-1} \\ \Sigma_{k+1} &= R_{k+1} + C_{k+1} (A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T) C_{k+1}^T \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\hat{x}_{k/k-1}, P_{k/k-1} \rightarrow (\hat{x}_{k+1/k+1}, P_{k+1/k+1})$$

on réalise alors un filtre prédicteur-à-un-pas :

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k(I - K_k C_k) \hat{x}_{k/k-1} + B_k u_k + K_k y_k \quad (3.15)$$

$$P_{k+1/k} = A_k(I - K_k C_k) P_{k/k-1} A_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (3.16)$$

Où K_k définie en 3.13 :

Bien que ces expressions n'apportent aucune simplification, il est nécessaire de remarquer que, dans le filtre de Kalman, le filtre estimateur et le filtre prédicteur-à-un-pas, les expressions permettant de calculer le gain K_k et les matrices de covariance $P_{k/k}$ et $P_{k+1/k}$ sont indépendantes des mesures y_k

et des valeurs de $\hat{x}_{k/k}$ et $\hat{x}_{k+1/k}$ elles peuvent donc être calculées à l'avance. On aboutit, à partir de 3.13 et 3.16, 3.11, à l'équation de récurrence fournissant $P_{k+1/k}$:

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k-1} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - A_k P_{k/k-1} C_k^T (R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T)^{-1} C_k P_{k/k-1} A_k^T \quad (3.17)$$

Qui est une équation de Riccati permettant de calculer $P_{k/k}$ et K_k par 3.13 et 3.11. Une fois ces matrices connues, les filtres peuvent être réalisés par 3.15 et 3.16 suivant que l'on dispose ou non de la sortie à l'instant $k + 1$.

3.1.1.3 Résultats supplémentaires

Les matrices intervenant dans le filtre de Kalman ont les propriétés particulières suivantes :

– de C_k ou Σ_k dans 3.11 à l'aide de 3.13 conduit directement aux expressions :

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - K_k \Sigma_k K_k^T = P_{k/k-1} - P_{k/k-1} C_k^T (R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T)^{-1} C_k P_{k/k-1} \quad (3.18)$$

– L'utilisation du lemme matriciel :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (3.19)$$

Conduit directement, à partir de 3.19, à :

$$P_{k/k}^{-1} = P_{k/k-1}^{-1} + C_k^T R_k^{-1} C_k$$

– L'utilisation du lemme matriciel sur Σ_k conduit à :

$$\Sigma_k^{-1} = R_k^{-1} - R_k^{-1} C_k P_{k/k}^{-1} C_k^T R_k^{-1} \quad (3.20)$$

Soit, d'après 3.13 :

$$K_k = P_{k/k-1} C_k^T R_k^{-1} - P_{k/k-1} C_k^T R_k^{-1} C_k P_{k/k} C_k^T R_k^{-1} \quad (3.21)$$

On obtient finalement :

$$K_k = P_{k/k} C_k^T R_k^{-1} \quad (3.22)$$

Cette relation à une interprétation plus facile que la formule initiale (3.13) qui doit être envisagée lorsque R_k est singulière. En effet, K_k est le gain de correction (3.13) et l'on peut faire le raisonnement qualitatif suivant :

- confiance dans les précédentes estimations ($P_{k/k-1}$ faible) et doute dans les mesures (R_k élevé) doivent impliquer un gain K_k faible
- doute sur les précédentes estimations et confiance dans les mesures actuelles doit entraîner un gain de correction élevé, ce qui est vérifié par la forme (3.22)

comme $\hat{y}_{k/k-1} = C_k \hat{x}_{k/k-1}$ il vient :

$$\tilde{y}_{k/k-1} = y_k - \hat{y}_{k/k-1} = C_k \tilde{x}_{k/k-1} + v_k \quad (3.23)$$

il vient :

La matrice de covariance de l'erreur de prédiction sur la sortie est alors donnée par :

$$Cov(\tilde{y}_{k/k-1}) = C_k P_{k/k-1} C_k^T + R_k = \Sigma_k \quad (3.24)$$

Ce qui permet de donner une interprétation évidente de la matrice Σ_k

- De même que précédemment, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k/k} &= y_k - \hat{y}_{k/k} \\ &= y_k - C_k \hat{x}_{k/k} \\ &= C_k \tilde{x}_{k/k} + v_k. \end{aligned}$$

La matrice de covariance de l'erreur d'estimation sur la sortie est alors donnée par :

$$cov(\tilde{y}_{k/k}) = C_k P_{k/k} C_k^T + R_k \quad (3.25)$$

– D'après les relations précédentes :

$$\tilde{y}_{k/k-1} - \tilde{y}_{k/k} = C_k(\hat{x}_{k/k} - \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.26)$$

Ce qui, d'après (3.9) et (3.22), conduit à :

$$\tilde{y}_{k/k-1} - \tilde{y}_{k/k} = C_k K_k (C_k \tilde{x}_{k/k} + v_k) \quad (3.27)$$

La matrice de covariance de l'écart estimation-prédiction, en utilisant 3.19, est donnée par :

$$\text{cov}(\tilde{y}_{k/k-1} - \tilde{y}_{k/k}) = C_k K_k \Sigma_k K_k^T C_k^T = C_k (P_{k/k-1} - P_{k/k}) C_k^T \quad (3.28)$$

3.1.1.4 Modèle à bruits corrélés

Dans le cas où les bruits de dynamique et de mesure sont corrélés, il est possible de reprendre toute l'étude précédente. Une façon plus rapide d'établir les équations du filtre de Kalman correspondant consiste à se ramener au cas d'un modèle à bruits dé-corrélés par la construction d'un modèle équivalent.

En effet, supposons que l'on ait :

$$E[v_k w_l^T] = S_k^T \delta_{k,l} \quad (3.29)$$

On introduit alors le nouveau vecteur de bruit de dynamique :

$$\bar{w}_k = w_k - S_k R_k^{-1} v_k \quad (3.30)$$

Pour lequel il est facile de vérifier que $E[v_k \bar{w}_k^T] = 0$. L'utilisation de ce bruit, dans les équations du modèle initial, conduit directement au modèle équivalent cherché :

$$x_{k+1} = \bar{A}_k x_k + B_k u_k + \bar{G}_k y_k + G_k \bar{w}_k \quad (3.31)$$

$$y_k = C_k x_k + v_k \quad (3.32)$$

$$\bar{A}_k = A_k - G_k S_k R_k^{-1} C_k, \bar{G}_k = G_k S_k R_k^{-1} \quad (3.33)$$

Les propriétés statistiques des bruits de ce modèle sont telles que :

$$E[v_k] = 0, E[\bar{w}_k] = 0 \quad (3.34)$$

$$E \left\{ \begin{pmatrix} v_k \\ \bar{w}_k \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_l^T & \bar{w}_l^T \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} R_k & 0 \\ 0 & \bar{Q}_k \end{pmatrix} * \delta_{k,l} \quad (3.35)$$

Où $\bar{Q}_k = Q_k - S_k R_k^{-1} S_k^T$.

Il suffit alors d'appliquer, sur le système 3.33, le filtre de Kalman discret défini dans le cas d'un modèle à bruits non corrélés. Les étapes de correction 3.13 et de calcul de gain 3.16 sont conservées. Seule est modifiée l'étape de prédiction qui devient :

$$\hat{x}_{k+1/k} = \bar{A}_k \hat{x}_{k+1/k} + B_k u_k + \bar{G}_k y_k \quad (3.36)$$

$$P_{k+1/k} = \bar{A}_k P_{k/k} \bar{A}_k^T + G_k \bar{Q}_k G_k^T \quad (3.37)$$

En tenant compte des expressions de \bar{A}_k et \bar{G}_k , il vient :

$$\hat{x}_{k+1/k} = \bar{A}_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + G_k S_k R_k^{-1} (y_k - C_k \hat{x}_{k/k}) \quad (3.38)$$

Et l'utilisation de (3.9) conduit à la forme :

$$\hat{x}_{k+1/k} = \bar{A}_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + G_k S_k R_k^{-1} (I - C_k K_k) (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.39)$$

Or, d'après (3.16), on a la relation suivante :

$$R_k^{-1} (I - C_k K_k) = R_k^{-1} (I - C_k P_{k/k-1} C_k^T \Sigma_k^{-1}) = R_k^{-1} R_k \Sigma_k^{-1} \quad (3.40)$$

L'étape de prédiction (3.16) est donc modifiée par ajout d'un terme correcteur :

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + \bar{K}_k (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.41)$$

Où $\bar{K}_k = G_k S_k \Sigma_k^{-1}$.

De même, en développant la deuxième expression de 3.37, on obtient :

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - G_k S_k R_k^{-1} S_k^T G_k^T \quad (3.42)$$

$$= G_k S_k R_k^{-1} C_k P_{k/k} C_k^T R_k^{-1} S_k^T G_k^T - G_k S_k R_k^{-1} C_k P_{k/k} A_k^T \quad (3.43)$$

$$- A_k P_{k/k} C_k^T R_k^{-1} S_k^T G_k^T \quad (3.44)$$

L'utilisation des relations 3.21, 3.22 et 3.39, nous permet d'écrire :

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - \bar{K}_k \Sigma_k \bar{K}_k^T - \bar{K}_k \Sigma_k K_k^T A_k^T - A_k K_k \Sigma_k \bar{K}_k^T. \quad (3.45)$$

La détermination de la matrice de covariance de l'étape de prédiction du filtre de Kalman pour un système à bruits corrélés est donc déduite de celle obtenue dans le cas de bruits non corrélés par ajout d'un terme correcteur. On a alors :

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T + A_k K_k \Sigma_k^T A_k^T - L_k \Sigma_k L_k^T \quad (3.46)$$

Où $L_k = \bar{K}_k + A_k K_k$.

En résumé, pour un système à bruits corrélés, il suffit de remplacer les relations (3.9) par les relations réajustées (3.39) et (3.46) pour obtenir le filtre de Kalman discret correspondant.

Lorsque l'on s'intéresse à la réalisation d'un filtre prédictif-à-un-pas pour un système à bruits corrélés, l'élimination de $\hat{x}_{k/k}$ et $P_{k/k}$ entre (3.39) et (3.46) conduit directement à :

$$\hat{x}_{k+1/k} = (A_k - L_k C_k) \hat{x}_{k/k-1} + B_k u_k + L_k y_k \quad (3.47)$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k-1} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - L_k \Sigma_k L_k^T \quad (3.48)$$

$$L_{k+1/k} = (A_k P_{k/k-1} C_k^T + G_k S_k) (R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T)^{-1} \quad (3.49)$$

Où les matrices $P_{k/k-1}$ et L_k peuvent être calculées à l'avance par la résolution de l'équation de Riccati :

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k-1} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - (A_k P_{k/k-1} C_k^T + G_k S_k) (R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T)^{-1} (A_k P_{k/k-1} C_k^T + G_k S_k)^T \quad (3.50)$$

A l'aide du modèle équivalent à bruits non corrélés, on a donc déterminé le filtre de Kalman dans le cas général. Un autre avantage de ce modèle est de permettre la simulation de tout système caractérisé par des bruits corrélés. En effet, les programmes de génération de bruits blancs pseudo-aléatoires ne permettent pas de générer des bruits corrélés. L'utilisation du modèle équivalent avec bruits non corrélés permet d'utiliser des bruits non corrélés \bar{w}_k et v_k .

3.1.1.5 le filtre Information

Le filtre Information est une formulation du filtre de Kalman en termes d'inverses de matrices de covariance (appelées matrices d'informations). Nous le présenterons dans le cas d'un système à bruits non corrélés, mais il va de soi que le cas d'un système à bruits corrélés serait traité de la même manière que précédemment par l'intermédiaire du modèle équivalent 3.33. Soient les estimations définies par les transformations :

$$\hat{z}_{k/k-1} = P_{k/k-1}^{-1} \hat{x}_{k/k-1} \quad (3.51)$$

$$\hat{z}_{k/k} = P_{k/k}^{-1} \hat{x}_{k/k} \quad (3.52)$$

Le filtre Information est constitué des algorithmes de prédiction permettant de passer de

($\hat{z}_{k-1/k-1}, P_{k-1/k-1}^{-1}$ à $\hat{z}_{k/k-1}, P_{k/k-1}^{-1}$) et des algorithmes de correction permettant de passer de ($\hat{z}_{k/k-1}, P_{k/k-1}^{-1}$ à $\hat{z}_{k/k}, P_{k/k}^{-1}$) La relation 3.20, que nous rappelons ici, donne le passage de $P_{k/k-1}^{-1}$ à $P_{k/k}^{-1}$:

$$P_{k/k}^{-1} = P_{k/k-1}^{-1} + C_k^T R_k^{-1} C_k. \quad (3.53)$$

L'utilisation du lemme matriciel d'inversion sur la relation 3.9 conduit à :

$$P_{k+1/k}^{-1} = (I - L_k G_k^T) M_k \quad (3.54)$$

Où :

$$M_k = A_k^{-T} P_{k/k}^{-1} A_k^{-1} \quad (3.55)$$

$$L_k = M_k G_k \Lambda_k^{-1} \quad (3.56)$$

$$\Lambda_k = Q_k^{-1} + G_k^T M_k G_k. \quad (3.57)$$

Une dualité apparaît donc entre l'étape de prédiction (resp. correction) du filtre de Kalman et l'étape de correction (resp. prédiction) du filtre Information. Par analogie avec 3.11), la matrice L_k est la matrice de gain de correction du filtre Information. Ces calculs ne dépendent pas des observations, la même remarque que pour le filtre de Kalman s'applique donc ici, les matrices d'informations et le gain du filtre peuvent être calculés à l'avance. On passe des estimations du filtre de Kalman à celles données par le filtre Information par les transformations 3.52. Cela fournit donc, d'après 3.24 et 3.22 :

$$P_{k/k}^{-1} \hat{x}_{k/k} = (P_{k/k}^{-1} - C_k^T R_k^{-1} C_k) \hat{x}_{k/k-1} + C_k^T R_k^{-1} y_k \quad (3.58)$$

Soit, pour l'étape de correction :

$$\hat{z}_{k/k} = \hat{z}_{k/k-1} + C_k^T R_k^{-1} y_k \quad (3.59)$$

De même, à partir de 3.9, on obtient :

$$P_{k+1/k}^{-1} \hat{x}_{k+1/k} = P_{k+1/k}^{-1} A_k P_{k/k} \hat{z}_{k/k} + P_{k+1/k}^{-1} B_k u_k \quad (3.60)$$

Ce qui se transforme, par 3.57, en :

$$\hat{z}_{k+1/k} = (I - L_k G_k^T) A_k^{-T} \hat{z}_{k/k} + P_{k+1/k}^{-1} B_k u_k \quad (3.61)$$

La dualité entre le filtre de Kalman et le filtre Information existe aussi à ce niveau mais est moins évidente car l'influence des mesures et des entrées reste respectivement sur les étapes de correction et de prédiction, alors que le gain passe de l'une à l'autre des étapes. Les relations 3.53 à 3.55 constituent les formules de base du filtre Information. Bien que les filtres de Kalman et Information soient équivalents, ce dernier sera préféré au filtre de Kalman dans les cas suivants :

- lorsque les connaissances statistiques sur l'état initial sont mal connues (ce qui peut conduire à une valeur propre de P_0 très grande), le filtre Information permet alors de démarrer l'algorithme de filtrage avec des matrices finies jusqu'à ce que $P_{k/k}^{-1}$ et $P_{k+1/k}^{-1}$ soient de rang plein. A partir de ce moment on peut reprendre le filtre de Kalman
- lorsque la dimension du bruit de dynamique est inférieure à la dimension du bruit de mesure, par exemple lorsque le bruit de dynamique est un bruit d'entrée et que l'on en a moins d'entrées que de mesures. La matrice Λ_k a alors une taille plus petite que Σ_k , le calcul du gain dans le filtre Information est donc plus rapide que dans le filtre de Kalman.

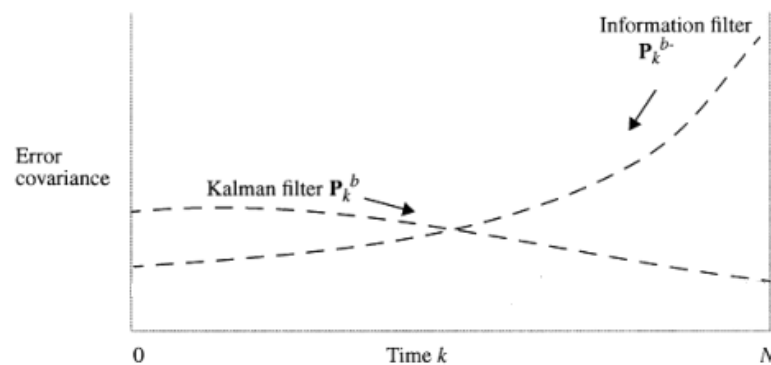


FIGURE 3.2 – Illustration de la covariance de l'erreur pour le filtrage directe (KALMAN), et le filtrage inverse (Filtre Information). [18]

3.1.2 Filtre de Kalman continu

Le filtre de Kalman-Bucy résout le problème de l'estimation de l'état d'un système continu défini par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t) \quad (3.62)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t) \quad (3.63)$$

Où t représente le temps, $x(t)$, l'État de dimension n , $y(t)$, la mesure de dimension m , $u(t)$, l'entrée certaine de dimension l , $w(t)$, le bruit d'entrée (ou de dynamique) de dimension l' , et $v(t)$, le bruit de mesure de dimension m . On suppose que ces bruits sont blancs, gaussiens, et connus par leurs matrices de covariance :

$$E\{w(t)w^T(t')\} = Q(t)\delta_{t-t'}, E\{v(t)v^T(t')\} = R(t)\delta_{t-t'} \quad (3.64)$$

$$E\{v(t)w^T(t')\} = 0, E\{v(t)\tilde{x}^T(0)\} = 0, E\{w(t)\tilde{x}^T(0)\} = 0 \quad (3.65)$$

$$E\{\tilde{x}(0)\tilde{x}^T(0)\} = P_0 \quad (3.66)$$

Où δ_t est l'impulsion de Dirac en t , et en considérant $x(0)$ comme une variable aléatoire d'espérance m_0 , $\tilde{x}(0) = x(0) - m_0$

Il serait possible en utilisant les méthodes d'estimation de variables aléatoires, détaillées dans l'annexe A, de déterminer directement la structure du système linéaire fournissant la meilleure estimation $\tilde{x}(t/\tau)$, au sens de la variance d'erreur minimale, de l'état de 3.63 à t à partir de la connaissance de la mesure y depuis l'instant initial jusqu'à l'instant τ (la démonstration est analogue au cas des systèmes discrets). Nous déterminerons ici le filtre de Kalman dans le cas continu, par passage à la limite à partir des équations du filtre de Kalman dans le cas discret, pour un problème de filtrage ($\tau = t$). En toute rigueur, pour éviter tout problème de définition en ce qui concerne les matrices de covariance, il serait préférable d'utiliser la représentation différentielle d'ITO d'un système continu stochastique :

$$dx_t = A_t x_t dt + B_t u_t dt + G_t d\beta_t \quad (3.67)$$

$$dy_t = C_t x_t dt + d\eta_t \quad (3.68)$$

Où $d\beta_t$ et $d\eta_t$ ont des mouvements browniens centrés tels que :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} E\{d\beta_t d\beta_t^T\} = Q(t) \quad (3.69)$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} E\{d\eta_t d\eta_t^T\} = R(t) \quad (3.70)$$

Nous ne le ferons pas, car cette représentation, ainsi que sa justification, fait appel à des notions complexes en calcul stochastique. Bien que l'assimilation de $w(t)$ avec $d\beta_t/dt$ et

$v(t)$ avec $d\eta_t/dt$ soit abusive en ce sens que β_t et η_t n'admettent pas de dérivées, les deux types de représentation sont formellement équivalentes et nous utiliserons le modèle 3.63, en conservant à l'esprit que le bruit blanc est une limite qui n'existe pas.

3.1.2.1 Relations formelles entre les cas continu et discret

Le passage du modèle continu au modèle discret se fait en deux étapes, d'une part par discrétisation du modèle 3.63 avec une période d'échantillonnage constante et d'autre part, par passage à la limite en faisant tendre la période d'échantillonnage vers 0. Nous allons ici établir les relations nécessaires entre les modèles discret et continu 3.63 imposées par ces transformations.

Soit Δ la période de discrétisation, la relation suivante (formelle) entre le symbole de Kronecker et l'impulsion de Dirac :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta_{i,j}}{\Delta} = \delta_{(i-j)\Delta} \quad (3.71)$$

Impose les relations entre les matrices de covariances discrètes et continues :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} Q_k \Delta = Q(t_k) \quad (3.72)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} R_k \Delta = R(t_k) \quad (3.73)$$

D'autre part, la discrétisation du modèle continu, par la méthode simple d'approximation d'Euler, conduit à, lorsque $\Delta \rightarrow 0$:

$$x_{k+1} = (I + A_k \Delta)x_k + \Delta B_k u_k + \Delta G_k w_k \quad (3.74)$$

Où l'indice k représente une évaluation pour $unk\Delta$. L'utilisation du filtre de Kalman sur ce système donne, d'après l'équation du prédicteur-à-un-pas 3.16

$$\hat{x}_{k+1/k} = (I + A_k \Delta)\hat{x}_{k/k-1} + \Delta B_k u_k + (I + A_k \Delta)K_k(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.75)$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\hat{x}_{k+1/k} - \hat{x}_{k/k-1}}{\Delta} = A_k \hat{x}_{k/k-1} + B_k u_k + \frac{(I + A_k \Delta)K_k}{\Delta} (y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (3.76)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\hat{x}_{k+1/k} - \hat{x}_{k/k-1}}{\Delta} = \dot{\hat{x}}(t) \quad (3.77)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{K_k}{\Delta} = K(t) \quad (3.78)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{x}_{k/k-1} = \hat{x}(t) \quad (3.79)$$

On obtient à partir de 3.77, l'équation de l'estimateur linéaire continu du système 3.63 :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \quad (3.80)$$

3.1.2.2 Détermination du gain optimal

Le gain optimal de l'estimateur est déterminé également par passage à la limite à partir des équations discrètes. D'après 3.79 et 3.16, on a :

$$K(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{K_k}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{k/k-1} C_k^T (C_k P_{k/k-1} C_k^T \Delta + R_k \Delta)^{-1} \quad (3.81)$$

$$C_k P_{k/k-1} C_k^T \Delta \rightarrow 0 \quad (3.82)$$

$$R_k \Delta \rightarrow R(t) \quad (3.83)$$

Soit, en notant $\lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{k/k-1} = P(t)$ il vient l'expression du gain optimal du filtre 3.80 :

$$K(t) = P(t)C(t)^T R(t)^{-1} \quad (3.84)$$

En écrivant 3.11, sous la forme :

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - \frac{K_k}{\Delta} C_k P_{k/k-1} \Delta \quad (3.85)$$

$$C_k P_{k/k-1} \Delta \rightarrow 0 \quad (3.86)$$

$$\frac{K_k}{\Delta} \rightarrow K(t) \quad (3.87)$$

On arrive à : $\lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{k/k} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_{k/k-1} = P(t)$

L'équation de Riccati récurrente 3.17 s'écrit ici :

$$P_{k+1/k} = (I + A_k \Delta) [P_{k/k-1} - P_{k/k-1} C_k^T (R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T)^{-1} C_k P_{k/k-1}] (I + A_k^T \Delta) + \Delta G_k Q_k G_k^T \Delta \quad (3.88)$$

Ce qui se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{P_{k+1/k} - P_{k/k-1}}{\Delta} &= G_k Q_k \Delta G_k^T + A_k P_{k/k-1} + P_{k/k-1} A_k^T - (I + A_k \Delta) P_{k/k-1} C_k^T \\ &\quad (\Delta R_k + \Delta C_k P_{k/k-1} C_k^T)^{-1} C_k P_{k/k-1} (I + A_k^T \Delta) + \Delta A_k P_{k/k-1} A_k^T \end{aligned} \quad (3.89)$$

En prenant la limite, quand $\Delta \rightarrow 0$, de chacun des deux termes de cette égalité on aboutit à l'équation différentielle de Riccati définissant l'évolution de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation :

$$\dot{P}(t) = G(t)Q(t)G(t)^T + A(t)P(t) + P(t)A(t)^T - P(t)C(t)^T R(t)^{-1} C(t)P(t) \quad (3.90)$$

3.1.2.3 Filtre de Kalman-Bucy

En résumé, le filtre linéaire optimal du système continu stochastique a pour structure :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad (3.91)$$

Avec $\hat{x}(0) = m_0$ et $K(t) = P(t)C^T(t)R(t)^{-1}$, où $P(t)$ est la solution de l'équation de Riccati telle que $P(0) = P_0$. On peut noter ici l'analogie entre les expressions de gain optimal discret 3.22 et continu 3.91. Dans le cas où les bruits de mesure et de dynamique sont corrélés :

$E\{w(t)v^T(t')\} = S(t)\delta_{t-t'}$. On peut construire, comme dans le cas des systèmes discrets, un filtre de Kalman-Bucy, en faisant appel au modèle équivalent à bruits non corrélés. Ce modèle est défini par :

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)\bar{w}(t) + \bar{G}(t)y(t) \quad (3.92)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t) \quad (3.93)$$

Où :

$$\bar{A}(t) = A(t) - G(t)S(t)R(t)^{-1}C(t) \quad (3.94)$$

$$\bar{G}(t) = G(t)S(t)R(t)^{-1} \quad (3.95)$$

$$\bar{w}(t) = w(t) - S(t)R(t)^{-1}v(t). \quad (3.96)$$

Dans ce modèle équivalent, $\bar{w}(t)$ est un bruit de dynamique décorrélé de $v(t)$, dont la variance est donnée par :

$$E\{\bar{w}(t)\bar{w}^T(t')\} = \bar{Q}(t)\delta_{t-t'}, \quad \bar{Q}(t) = Q(t) - S(t)R^{-1}(t)S^T(t). \quad (3.97)$$

L'utilisation de l'estimateur 3.91, sur ce système, conduit au filtre :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \bar{A}(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \bar{G}(t)y(t) + \bar{K}(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \quad (3.98)$$

avec $\bar{K}(t) = \bar{P}(t)C^T(t)R^{-1}(t)$, où $\bar{P}(t)$ est la solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$\dot{\bar{P}}(t) = G(t)\bar{Q}(t)G^T(t) + \bar{A}(t)\bar{P}(t) + \bar{P}(t)\bar{A}^T(t) - \bar{P}(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)\bar{P}(t), \quad (3.99)$$

Telle que $\bar{P}(0) = P_0$.

Ce qui, compte tenu des relations 3.96 et 3.97, se met sous la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + L(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad (3.100)$$

Où :

$$L(t) = \bar{K}(t) + G(t)S(t)R^{-1}(t) = [\bar{P}(t)C^T(t) + G(t)S(t)]R^{-1}(t) \quad (3.101)$$

Et $\bar{P}(t)$ est la solution de :

$$\dot{\bar{P}}(t) = G(t)Q(t)G(t) + A(t)\bar{P}(t) + \bar{P}(t)A^T(t) - [\bar{P}(t)C^T(t) + G(t)S(t)]R^{-1}(t)[\bar{P}(t)C^T(t) + G(t)S(t)]^T \quad (3.102)$$

Telle que $\bar{P}(0) = P_0$.

Ces relations correspondent au filtre de Kalman-Bucy dans le cas d'un système à bruits corrélés.

3.2 Commentaires sur le filtre de Kalman

3.2.1 Cas où certaines sorties sont non bruitées

L'existence de mesures non bruitées implique la singularité de la matrice de covariance des bruits de mesure. Il s'ensuit une difficulté d'application des filtres de Kalman (particulièrement dans le cas continu). Nous allons montrer que l'application de la méthode de simplification, utilisée dans le cas des observateurs déterministes, permet de contourner cette difficulté et conduit à une réduction notable du volume des calculs. Par raison de simplicité nous établirons les relations dans le cas des systèmes continus mais elles peuvent bien sûr être déterminées pour le modèle discret. Considérons le système continu stationnaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(t) + Gw(t) \quad (3.103)$$

$$y_1(t) = C_1x(t) \quad (3.104)$$

$$y_2(t) = C_2x(t) + v_2(t) \quad (3.105)$$

où $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $y_1(t) \in \mathbf{R}^{m_1}$, représente les mesures non bruitées, $y_2(t) \in \mathbf{R}^{m_2}$ les mesures bruitées, $w(t)$ et $v_2(t)$ sont des bruits centrés, non corrélés, connus par leurs matrices de covariance

$$E\{w(t)w^T(t')\} = Q\delta_{t-t'} \quad (3.106)$$

$$E\{v_2(t)v_2^T(t')\} = R_2\delta_{t-t'} \quad (3.107)$$

En supposant C_1 de rang plein (ce qui est toujours possible par élimination de mesures redondantes), un changement de variables élémentaires permet de se ramener à la forme :

$$\dot{X}_1(t) = A_{11}X_1(t) + A_{12}X_2(t) + B_1u(t) + G_1w(t) \quad (3.108)$$

$$\dot{X}_2(t) = A_{21}X_1(t) + A_{22}X_2(t) + B_2u(t) + G_2w(t) \quad (3.109)$$

$$y_1(t) = X_1(t) \quad (3.110)$$

$$y_2(t) = C_{21}X_1(t) + C_{22}X_2(t) + v_2(t). \quad (3.111)$$

La mesure $y_1(t)$ donnant une estimation certaine de $X_1(t)$, il reste à construire un estimateur fournissant une estimation de $X_2(t)$. A partir des nouvelles mesures :

$$y'_2(t) = y_2(t) - C_{21}X_1(t). \quad (3.112)$$

$$z(t) = \dot{X}_1(t) - A_{11}X_1(t) - B_1u(t) \quad (3.113)$$

Les équations donnant $X_2(t)$ se ramènent à :

$$\dot{X}_2(t) = A_{22}X_2(t) + A_{21}y_1(t) + B_2u(t) + G_2w(t) \quad (3.114)$$

$$Z(t) = CX_2(t) + V(t), \quad (3.115)$$

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_t \\ y'_2(t) \end{pmatrix} * C = \begin{pmatrix} A_{12} \\ C_{22} \end{pmatrix}, V(t) = \begin{pmatrix} G_1w(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

Ces équations font donc apparaître un modèle à bruits de dynamique et de sortie corrélés, dont les matrices de covariance sont :

$$E\{w(t)w^T(t')\} = Q(t)\delta_{t-t'} \quad (3.117)$$

$$E\{v(t)v^T(t')\} = \begin{pmatrix} G_1QG_1^T & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} * \delta_{t-t'} = \bar{R} * \delta_{t-t'} \quad (3.118)$$

$$E\{v(t)w^T(t')\} = \begin{pmatrix} G_1Q \\ 0 \end{pmatrix} * \delta_{t-t'} = \bar{S} * \delta_{t-t'} \quad (3.119)$$

On construit alors le filtre de Kalman sur ce système par la méthode développée précédemment sur un système à bruits corrélés. Cela donne la structure :

$$\hat{X}_2(t) = A_{22}\hat{X}_2(t) + A_{21}y_1(t) + B_2u(t) + K(Z(t) - C\hat{X}_2(t)), \quad (3.120)$$

Où K est le gain optimal.

De la même façon que dans le cadre des systèmes déterministes, ce filtre implique (pour la connaissance de $z(t)$, donc de $Z(t)$) la dérivation de la sortie $y_1(t)$. Pour contourner cette dernière difficulté, on introduit la variable :

$$Y(t) = \widehat{X}_2(t) - K_1 y_1(t), \quad (3.121)$$

Où $K = [K_1, K_2]$, dont l'équation d'évolution se met sous la forme :

$$\dot{Y}(t) = [A_{22} - KC]Y(t) + [B_2 - K_1 B_1]u(t) + K_2 y_2(t) + [A_{21} - K_1 A_{11} - K_2 C_{21} + (A_{22} - KC)K_1]y_1(t) \quad (3.122)$$

L'estimation optimale de $X_2(t)$ est alors fournie par la variable :

$$\widehat{X}_2(t) = Y(t) + K_1 y_1(t). \quad (3.123)$$

Rappelons que dans le cas d'un système discret, une démarche analogue peut être proposée et conduit également à un estimateur d'ordre réduit.

3.2.2 Modèle à bruits colorés

Le cas que l'on vient d'étudier n'intervient pas seulement lorsque certaines mesures sont parfaites mais également lorsque l'hypothèse de bruits de dynamique et de sortie blancs n'est plus vérifiée. Supposons en effet, que les matrices de covariance de ces bruits sont de la forme (par exemple, dans le cas discret) :

$$E\{w(t)_k w_l^T\} = Q_{k-l} \quad (3.124)$$

$$E\{v(t)_k v_l^T\} = R_{k-l} \quad (3.125)$$

Comme la transmission à travers un filtre linéaire stationnaire d'un bruit blanc génère, pour les variances de l'état ou de la sortie, de telles séquences de matrices de covariance. Ces séquences peuvent donc être considérées comme des réponses impulsionnelles. On cherche ainsi deux systèmes, appelés filtres formateurs, dont l'entrée est une séquence blanche $\{v_k\}$ telle que $E\{v_k^T v_l\} = N_k \delta_{k,l}$ et dont la sortie fournit les bruits w_k et v_k . L'application d'une méthode de réalisation conduit à modéliser les systèmes générant $\{v_k\}$ et $\{w_k\}$ à partir de $\{v_k\}$ sous la forme équations d'état :

$$d_{k+1} = A^d d_k + G^d v_k \quad (3.126)$$

$$w_k = C^d d_k + L^d v_k \quad (3.127)$$

$$m_{k+1} = A^m m_k + G^m v_k \quad (3.128)$$

$$v_k = C^m m_k + L^m v_k \quad (3.129)$$

L'application du filtre de Kalman se fait alors sur le système à état-augmenté :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ d_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & G_k C^d & 0 \\ 0 & A^d & 0 \\ 0 & 0 & A^m \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_k \\ d_k \\ m_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_k L^d \\ G^d \\ G^m \end{pmatrix} * v_k + \begin{pmatrix} B_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} * u_k \quad (3.130)$$

$$Y_k = \begin{pmatrix} C_k & 0 & C^m \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_k \\ d_k \\ m_k \end{pmatrix} + L^m v_k \quad (3.131)$$

3.2.3 Filtre stationnaire

Qui est un système où les bruits sont blancs mais les bruits de sortie ou de mesure sont corrélés ou, si $\det(L^m N_k L^{mT}) = 0$ la covariance des bruits de mesure est singulière. Nous verrons, dans la partie consacrée aux applications, que le filtre de Kalman est un filtre formateur particulier.

– cas continu :

$$\dot{P}(t) = GQG^T + AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R^{-1}CP(t), \quad (3.132)$$

$$P(0) = P_0;$$

– cas discret

$$P(k+1) = AP(k)A^T + GQG^T - AP(k)C^T [R + CP(k)C^T]^{-1}CP(k)A^T, \quad (3.133)$$

$$P(0) = P_0;$$

Où les matrices A, G, C, Q et R sont des matrices constantes définissant l'équation d'état du processus considéré. Nous n'entrerons pas dans l'analyse de la stabilité de ces équations, mais on a le résultat suivant :

Théorème1 : Si (A, C) est une paire observable, le filtre optimal est asymptotiquement stable, quelles que soient les matrices GQG^T et R , définies positives et quelle que soit l'initialisation P_0 . La matrice de covariance de l'erreur d'estimation tend vers la solution unique et définie positive des équations algébriques de Riccati :

– pour le cas continu :

$$0 = GQG^T + AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP_i \quad (3.134)$$

– pour le cas discret :

$$P = APA^T + GQG^T - APC^T [R + CPC^T]^{-1} CPA^T \quad (3.135)$$

On a alors intérêt, dans un but de simplification, à remplacer le gain optimal $K(t)$ (resp. K_k) Du filtre de Kalman, calculé à partir de $P(t)$ (resp. P_k), Par 3.132 (resp. 3.133), par le gain optimal constant donné par :

– pour le cas continu :

$$K_c = PC^T R^{-1} \quad (3.136)$$

– pour le cas discret :

$$K_d = PC^T [R + CPC^T]^{-1} \quad (3.137)$$

pour le cas où P est solution de l'équation continue 3.134 ou discrète 3.135 suivant le cas.

La différence entre le filtre optimal et le filtre stationnaire sous-optimal ne se fera sentir qu'en début de fonctionnement (on perd en effet des informations initiales) mais le gain en temps de calcul peut être, en contrepartie, appréciable. D'autre part, on peut montrer que le filtre de Kalman stationnaire ainsi déterminé est identique au filtre de Wiener déterminé à partir d'une réalisation du signal aléatoire $x(t)$. Des méthodes numériques de résolution de ces équations de Riccati, qui interviennent également en commande optimale ou en commande robuste [17] sont décrites dans [18].

3.2.4 Phénomène de divergence (Square-Root-Filtring)

Le filtre de Kalman est le sujet de plusieurs sérieuses difficultés surtout dans le traitement numérique [15]. Par exemple, la matrice de covariance à posteriori $P_{k/k}$ est définie comme la différence entre $P_{k/k-1}$ et $K_k C_k P_{k/k-1}$ (A.31). Et, dans le cas où la justesse est très élevée (incertitudes d'ordre très faible), on peut tomber sur une matrice non

définie-positif. Ce qui est illogique puisque la matrice $P_{k/k}$ représente la covariance. L'instabilité du filtre de Kalman dans ce cas est connu sous le nom du Phénomène de divergence.

Une méthode plus raffinée est utilisée pour surmonter le problème de divergence. cette méthode utilise une transformation numérique unitaire pour stabiliser le filtre de Kalman dans chaque itération de l'algorithme. En particulier, La matrice $P_{k/k}$ s'est réécrite sous une forme de produit de deux matrices en utilisant la Factorisation de *Cholesky* [15] :

$$P_{k/k} = P_{k/k}^{1/2} P_{k/k}^{T/2}. \quad (3.138)$$

Où, $P_{k/k}^{1/2}$ est une matrice triangulaire, et $P_{k/k}^{T/2}$ est sa transposée. En algèbre linéaire, le facteur de *Cholesky* $P_{k/k}^{1/2}$ est le carré de la matrice $P_{k/k}$. Alors, toute variation de l'algorithme du filtre de Kalman basée sur la factorisation de *Cholesky* a référence au filtrage dite Filtrage Racine Carrée. Le point le plus important à citer ici est que le produit $P_{k/k}^{1/2} P_{k/k}^{T/2}$ a moins de chance pour être indéfini, puisque le produit de toutes les racines carrées d'une matrice avec sa transposée est toujours défini positif [15].

3.3 Filtre de Kalman Étendu (EKF)

Le problème du filtrage de Kalman pour cette partie est que ce filtrage est conçu pour l'estimation d'un vecteur d'état dans un modèle de système dynamique linéaire. Si, et c'est le cas majeur, le modèle est non linéaire, on peut étendre l'utilisation du filtre de Kalman avec une procédure de linéarisation qu'on va traiter dans cette partie de travail. Le filtre résultant de cette approche est nommé Filtre de Kalman Étendu (EKF). Cette extension est faisable en vertu que le filtre de Kalman est décrit en terme d'équations différentielles dans le cas d'un système discret [15].

Pour citer l'approche de développement du filtre de Kalman étendu, on considère un système dynamique non linéaire décrit par le modèle d'espace d'état suivant :

$$x_{k+1} = f(k, x_k) + w_k, \quad (3.139)$$

$$y_k = h(k, x_k) + v_k, \quad (3.140)$$

Où, comme toute à l'heure, w_k et v_k sont indépendants, à moyenne nulle et considéré comme bruit Blanc et Gaussien, avec des matrices de covariance Q_k et R_k , respecti-

vement. Ici, la fonction $f(k, x_k)$ représente une fonction matricielle de transition non linéaire qui varie en temps. De même, la fonction $h(k, x_k)$ représente une matrice non linéaire variante en temps.

L'idée basique du filtre de Kalman étendu est de linéariser le modèle d'état (3.140) dans chaque instant autour du dernier état estimé, dont on peut le prendre comme $\hat{x}_{k/k}$ ou $\hat{x}_{k+1/k}$, ça dépend de quelle fonction on doit linéariser. Quand le modèle linéaire est obtenu, les équation du filtre de Kalman étendu sera appliqué par la suite.

La première étape est la linéarisation du modèle exprimé par les équations suivante :

$$A_k = \left. \frac{\partial f(k, x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k/k}}, \quad (3.141)$$

$$C_k = \left. \frac{\partial h(k, x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k+1/k}}, \quad (3.142)$$

Pour le premier cas, les dérivés sont évaluées par rapport à $\hat{x}_{k/k}$. Par contre dans le deuxième cas la dérivation est par rapport à $\hat{x}_{k+1/k}$. Les valeurs des matrices A_k et C_k sont toutes connues (mesurables).

Dans la deuxième partie, et vu qu'on a maintenant les matrices A_k et C_k , elles vont être employées dans une approximation de premier ordre de *Taylor* autour de $\hat{x}_{k/k}$ et $\hat{x}_{k+1/k}$, respectivement.

Avec ces expressions approximées à la main, on peut approximer aussi les équations de notre modèle d'état discret

$$x_{k+1} \approx A_k x_k + w_k + d_k, \quad (3.143)$$

$$\bar{y}_k \approx C_k x_k + v_k, \quad (3.144)$$

Dont on a introduit de nouveaux quantités définies par

$$\bar{y}_k = y_k - [h(x, \hat{x}_{k+1/k}) - C_k \hat{x}_{k+1/k}] \quad (3.145)$$

$$d_k = f(x, \hat{x}_{k/k}) - A_k \hat{x}_{k/k} \quad (3.146)$$

Et les équations du filtre de Kalman deviendront :

$$\hat{x}_{k+1/k} = f(k, \hat{x}_{k/k}) \quad (3.147)$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + Q_k. \quad (3.148)$$

$$K_k = P_{k+1/k} C_k^T [C_k P_{k+1/k} C_k^T + R_k]^{-1} \quad (3.149)$$

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k [y_k - h(k, \hat{x}_{k/k-1})] \quad (3.150)$$

$$P_{k/k} = [I - K_k C_k] P_{k/k-1}. \quad (3.151)$$

Ce qui donne le modèle d'espace d'état linéarisé de (3.140), nous pourrions maintenant appliquer ces équations pour résoudre le cas d'un système non linéaire.

Conclusion : Cette étude théorique, est utilisée par la suite afin d'estimer les paramètres cinétiques du réacteur NUR. Dans cette partie disant théorique, on a discuté presque la totalité des cas particuliers du Filtre de Kalman et même leurs propriétés. En prenant en compte la difficulté de cette approche théorique, l'implémentation de ce type d'algorithme est moins complexe. Ces deux caractéristiques majeures du filtre de Kalman nous donne une idée sur la large utilisation de cet estimateur.

Chapitre 4

Simulation et Estimation des Paramètres Cinétiques du Réacteur Nucléaire NUR

4.1 Position du problème

La théorie du filtrage stochastique d'état est un domaine de recherche très développé. Un filtre d'état permet d'obtenir la meilleure estimation de l'état d'un système dynamique à tout instant, compte tenu des observations passées de certaines grandeurs liées au système. L'intérêt de ces méthodes est d'obtenir des valeurs de grandeurs qui ne sont pas directement accessibles à l'observation. Lorsque le système est non linéaire, le plus souvent il n'est pas possible d'obtenir un estimateur optimal. Dans le cas linéaire, le filtre de Kalman, conçu vers 1959 par *Kalman*, est l'estimateur d'état optimal. Cette découverte initiale a ouvert la voie à un grand nombre de travaux, soit sur le développement du filtrage non linéaire, soit sur les qualités et le comportement d'estimateurs d'état optimaux ou sous- optimaux. [15]

La finalité d'un filtre d'état est de fournir à chaque instant la meilleure estimée de l'état, à partir de mesures antérieures. Il est donc possible de suivre, en temps réel, lors de l'évolution d'un système, les valeurs de paramètres inaccessibles à la mesure. Cependant, les exemples de telles réalisations sont peu nombreux. Compte tenu des performances actuelles des ordinateurs, il est devenu plus facile d'utiliser en ligne un algorithme de filtrage pour l'estimation de ces paramètres.

Un réacteur nucléaire est un système physique dont les paramètres, la réactivité, le flux neutronique, la densité des neutrons retardés et le terme source, sont très importants à connaître lors du démarrage et durant le fonctionnement du réacteur. Ces grandeurs ne sont pas accessibles à une mesure directe. Un algorithme d'estimation de ces termes par filtrage de Kalman étendu est mis au point au cours de la présente étude. Après des tests sur MATLAB, en simulation, puis sur un jeu de données réelles enregistrées, les résultats obtenus sur le bon comportement de l'algorithme, ont été validés par l'étude théorique. Les essais faits ont montré la bonne qualité de l'estimation et la possibilité d'un traitement en temps réel. Il est ainsi montré que des techniques modernes de l'automatique peuvent être employées avec succès sur des systèmes réels, le réacteur nucléaire dans notre cas.

4.2 Préambule et solutions proposées

La revue étudiée des divers travaux consacrés à l'estimation des paramètres cinétiques du réacteur nucléaire NUR, a montré la possibilité de l'emploi du filtrage de Kalman pour de tels problèmes. Nous nous proposons d'estimer en ligne les valeurs du flux neutronique, de la densité des neutrons retardés, de la réactivité et du terme source d'un réacteur en fonctionnement sous-critique (puissance inférieure à $10kW$), à l'aide d'un filtre de Kalman étendu implanté sous MATLAB.

L'étude comprend deux parties d'études pratiques, sur l'estimation les paramètres cités auparavant. Le traitement sous MATLAB de données enregistrées sur le réacteur met en évidence l'importance du choix d'un modèle approprié pour que le problème d'estimation soit soluble. L'algorithme mis au point dans cette étape est implanté sous MATLAB. Il peut acquérir et traiter les mesures des signaux venant des détecteurs placés près du cœur du réacteur. On montre que la méthode peut être appliquée en temps réel avec de bons résultats. Pour des raisons extra-techniques, il n'a pas été possible de travailler sur le réacteur lui-même, mais seulement sur des enregistrements de données.

4.3 Estimation des paramètres cinétiques du réacteur NUR

Comme cité dans la section précédente, cette partie du travail va être sur l'estimation en ligne des paramètres cinétiques du réacteur NUR. Cette estimation est basée sur des enregistrements effectués au niveau du réacteur. Comme observation on a le courant donné par la chambre d'ionisation (la chaîne de mesure). Ce courant admet un bruit de mesure qu'on modélise par sa covariance R , ce courant est notre représentant du flux neutronique, donc comme première étape de traitement on doit multiplier ce courant par le facteur d'échelle qui vaut $\approx 2 \times 10^{15} \text{ Amp/n}$ dans la bande passante entre 380 Hz et 12 MHz (la bande de travail de la chaîne de mesure). On a effectué une estimation avec deux modèles d'état, les deux modèles sont tirés des équation 1.24 et 1.25. Pour le premier modèle les paramètres à estimer sont le flux neutronique, la concentration des neutrons retardés et la source, et vu que les observations enregistrées sont au régime sous critique (puissance inférieur à 10 kW) le terme source doit être obligatoirement très faible. La réactivité dans ce premier modèle est tenue comme commande donnée en dollar (en injectant la réactivité le réacteur diverge et dans le cas contraire le réacteur converge vers son arrêt).

Le deuxième modèle est pour l'estimation des paramètres suivants : le flux neutronique, la concentration des neutrons retardés et la réactivité. Cette dernière est obtenue en pcm pour pouvoir la comparer avec celle donnée pour le premier modèle (en multipliant par $\beta_{eff} = 820 \times 10^{-5}$).

Pour ces deux modèles on a appliqué plusieurs transformations et approximations afin d'avoir les résultats voulus. La première transformation est la discrétisation du modèle pour pouvoir l'implémenter sous MATLAB, la fonction utilisée est la fonction $c2d$ qui donne une discrétisation avec l'approximation d'*Euler* (référence Annexe B), la deuxième transformation est d'appliquer le filtre de Kalman étendu et donc de linéariser le modèle donné par 1.24. Cette dernière fait nous perdre l'optimalité du filtre de Kalman comme estimateur, et elle le rend sous-optimal (optimal sous des conditions). D'autres simplifications sur le modèle discret linéaire afin de minimiser la complexité

de l'algorithme MATLAB sans introduire d'imprécision sur les résultats.

4.3.1 Premier modèle

Le premier modèle d'état est celui qu'on estime avec : le flux neutronique, la concentration des neutrons retardés et la source. Avant l'application de l'approche de discrétisation le modèle est donné par l'équation matricielle suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\Lambda} & \lambda & 1 \\ \frac{\beta}{\Lambda} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} \frac{n(t)}{\Lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + W(t); \quad (4.1)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + v(t) \quad (4.2)$$

Tel que

$$X(t) = \begin{pmatrix} n(t) \\ c(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$y(t) = n(t); \quad (4.4)$$

$$u(t) = \rho(t) \quad (4.5)$$

Le bruit d'état $W(t)$ est une matrice (vecteurs lignes) de dimension $3 \times m$, m représente les échantillons en temps, avec une matrice de covariance Q . Le bruit de mesure $v(t)$ est un vecteur ligne de dimension $1 \times m$ a une variance R . Donc les matrices A, B, C sont connues, la matrice G est prise comme matrice unitaire. Le flux neutronique est introduit dans la matrice B et donc on l'a pris égale à l'observation. La discrétisation (en introduisant des approximations) du modèle (équation 4.2), donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0.005359 & 0.005359 & 0.048 \\ 0.9946 & 0.9946 & 0.952 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.048 \\ 0.0952 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

4.3.1.1 Estimation de flux neutronique

En remarque, que notre modèle final 4.7, 4.8, est stationnaire, par la suite la covariance de l'erreur définie par l'équation 3.9 sera stationnaire (équation 3.133), et par la suite le gain de Kalman sera aussi stationnaire 3.137.

Les résultats obtenus par ce modèle vont être exposés et commentés :

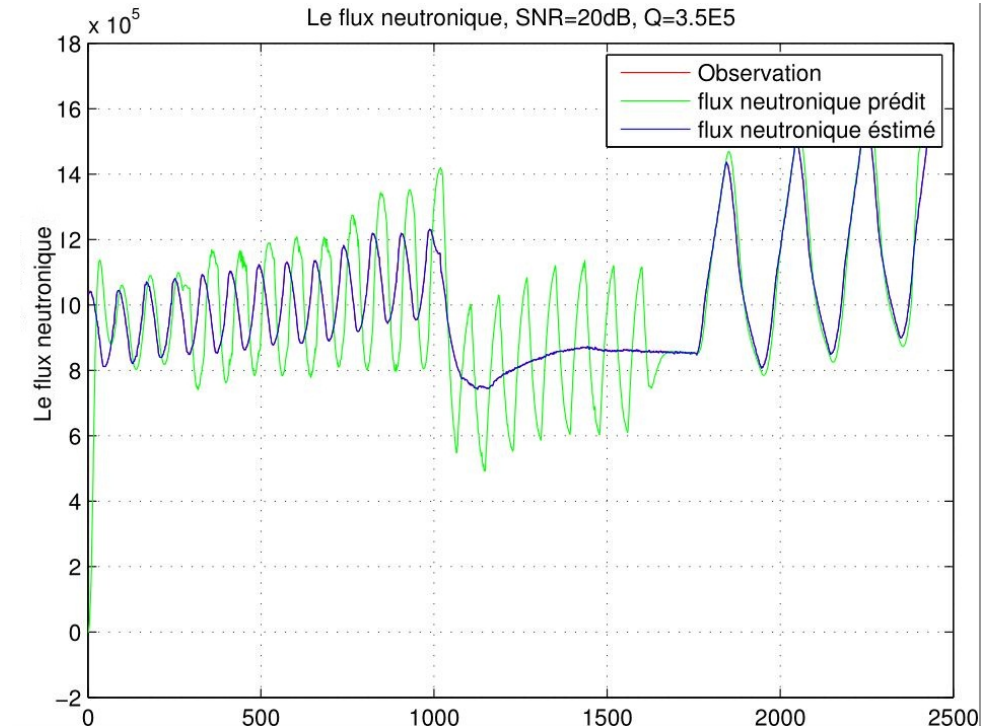


FIGURE 4.1 – Estimation du flux neutronique avec EKF

Avec une variance de bruit d'état de 3.5×10^5 , un $SNR = 20dB$ représente la variance du bruit de mesure, et une variance d'observation de 3.5×10^{10} donc la nature dynamique du paramètre cherché est inférieure au bruit de mesure avec $30dB$ parlant en terme énergie, on remarque que le signal obtenu et représenté par la figure 4.1 est vraiment identique au flux neutronique injecté. Pour plus de clarté on a sélectionné un intervalle plus étroit aléatoirement (de 1800s jusqu'à 2500s)(figure 4.2).

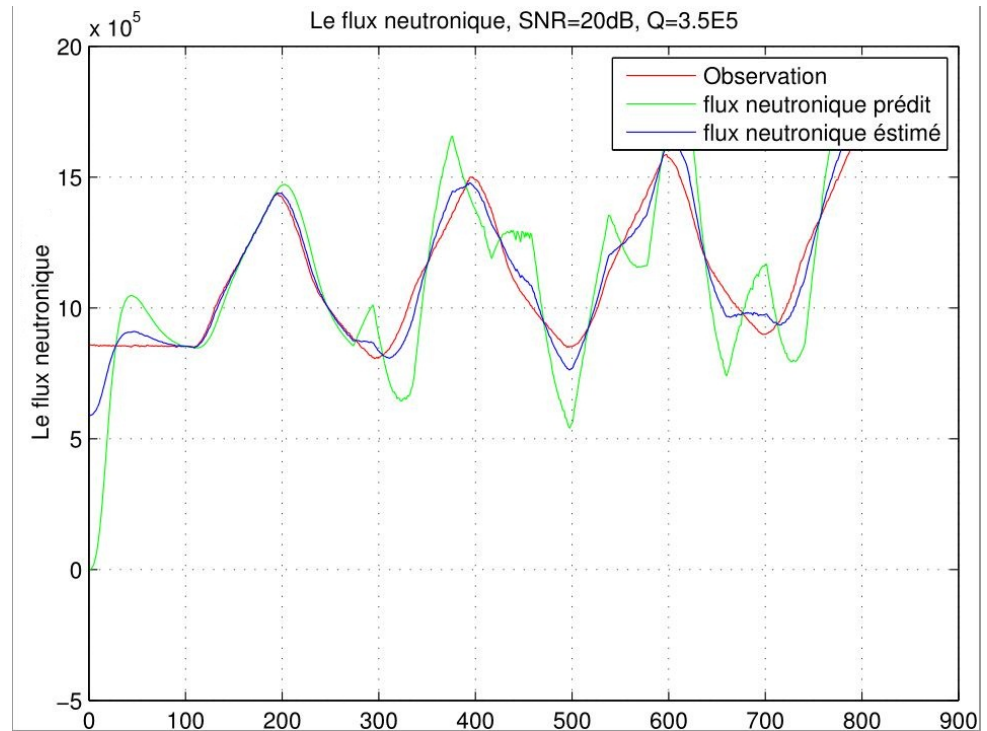


FIGURE 4.2 – Estimation du flux neutronique avec EKF, intervalle étroit

Sur cette figure, on remarque que le filtre de Kalman nous a permis d’avoir un très bon tracking, sauf pour des régions ayant des variations brusques, les termes : constante de convergence μ et vitesse de convergence doivent être donc inclus dans cette partie d’explication. Le gain de Kalman, le rapport R/Q , le terme correctif de la correction entre observation et sa prédiction et même le modèle d’état influent cette constante de convergence. Pour les approches de filtrage adaptatives étudiées en classe durant les séances de traitement d’antennes (SGD, LMS) cette constante doit être fixée au début de l’estimation avec un compromis entre vitesse de convergence et le bon tracking. Par contre le filtre de Kalman a une constante μ adaptative (un des avantages), mais comme on a remarqué pour les régions qui ont des variations brusques on remarque une petite divergence, cette divergence est vraiment limitée en temps vu qu’on a une constante μ adaptative.

On propose cette comparaison entre l’équation 3.16 et l’équation d’estimateur de la méthode *NLMS* représentée par :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \frac{\mu}{\|y\|^2} y_k \bar{e}_k \quad (4.9)$$

Une première vue, il parait que la constante de convergence μ dans la *NLMS*, pour le cas de Kalman n'apparaît pas dans l'équation 3.16, mais une simple déduction nous permet de dire que cette constante doit être incluse implicitement dans le deuxième terme de la dernière équation comme cité auparavant.

Comme le filtre de Kalman étendu a deux phases de travail (prédiction et correction), on a représenté les deux. On remarque clairement que la correction entre la prédiction de $n(t)$ et son estimation est considérable, et donc le filtre de Kalman a donné plus de valeur à la mesure qu'à la prédiction. Mais quand on augmente le nombre de mesures considérées, la prédiction va être plus exacte et plus proche à la valeur estimée et donc l'effet de la correction diminue (figure 4.1).

4.3.1.2 Estimation de la densité des neutrons retardés

Pour les mêmes valeurs des variances des bruits, l'estimation du deuxième paramètre est donnée par la figure 4.3.

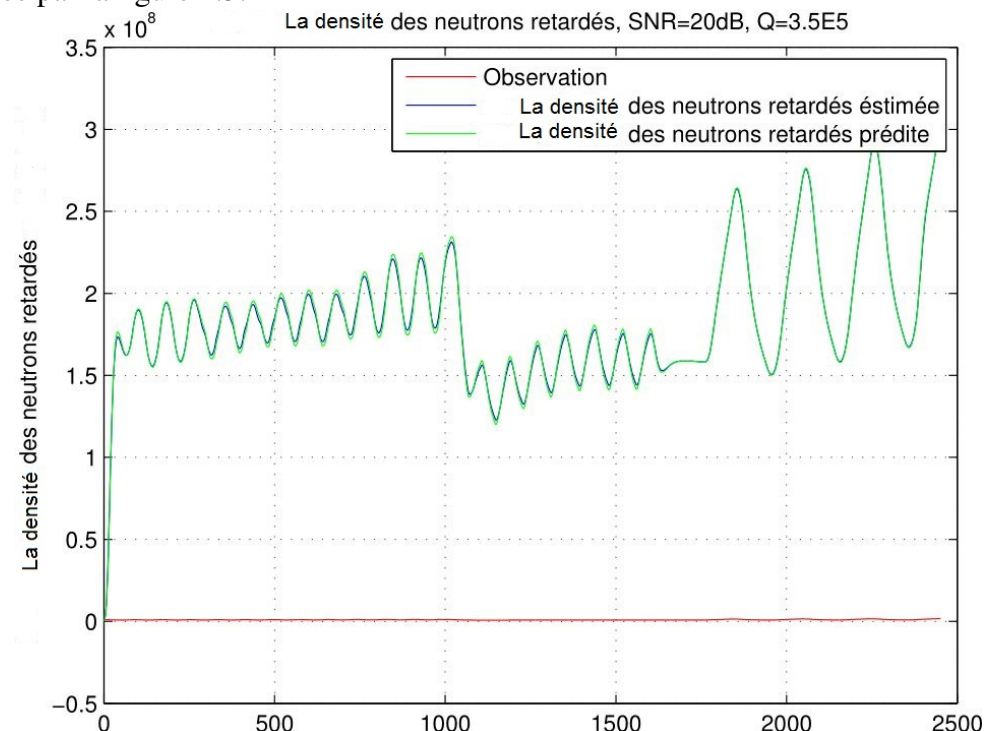


FIGURE 4.3 – Estimation de la densité des neutrons retardés avec EKF

Cette fois l'EKF fait confiance aux prédictions qu'à l'observation car le paramètre

en question est loin d'être proche de l'observation. Pour ce cas il est préférable de travailler avec le signal résultant mais après un intervalle considérablement large pour assurer la bonne estimation, ou de faire référence à la figure 4.6 et attendre l'instant où l'erreur de la prédiction devient minimal.

4.3.1.3 Estimation de la source

Toujours avec les mêmes variances des bruits, on remarque que le signal obtenu comme représentant du terme source tend vers zéro. Ce résultat est due au régime sous-critique qu'on a réalisé l'enregistrement avec.

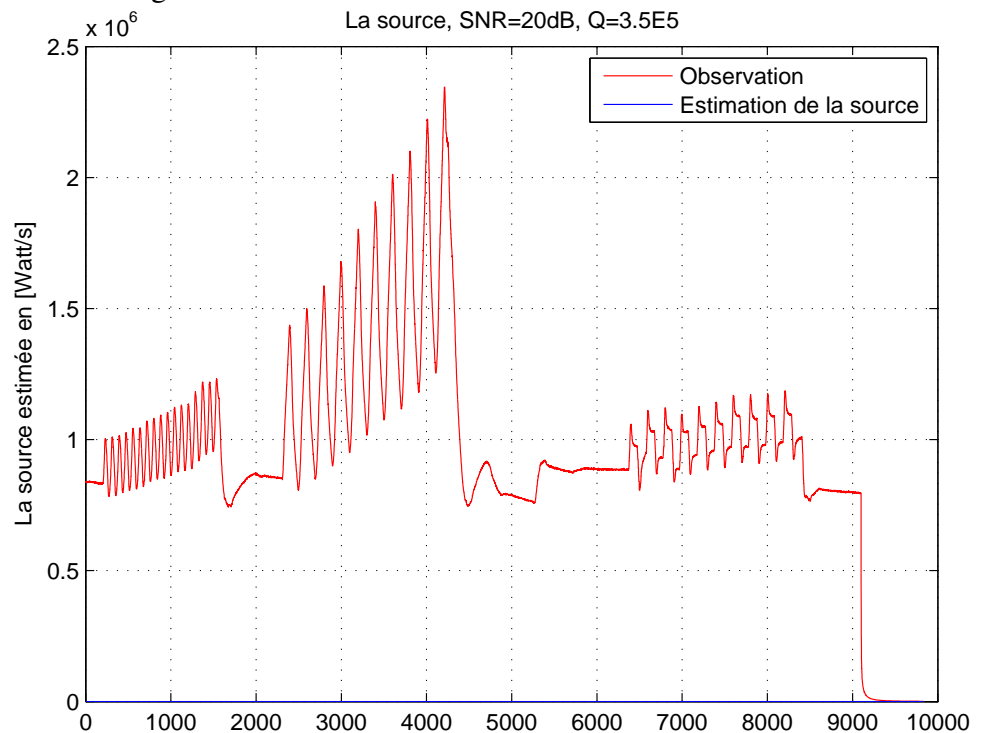


FIGURE 4.4 – Estimation de la source avec EKF

4.3.1.4 Paramètres à discuter

Dans cette partie on va discuter les allures du gain et de l'erreur entre prédiction et estimation pour les trois paramètres cinétiques traités auparavant. En commençant avec le gain de Kalman (figure 4.5), les trois allures ont stationnées sur des valeurs constantes après quelques échantillons en temps. Cette stationnarité est relative car en réalité on a de petites variations au niveau des trois gains, la figure 4.5 représente les gains obtenus.

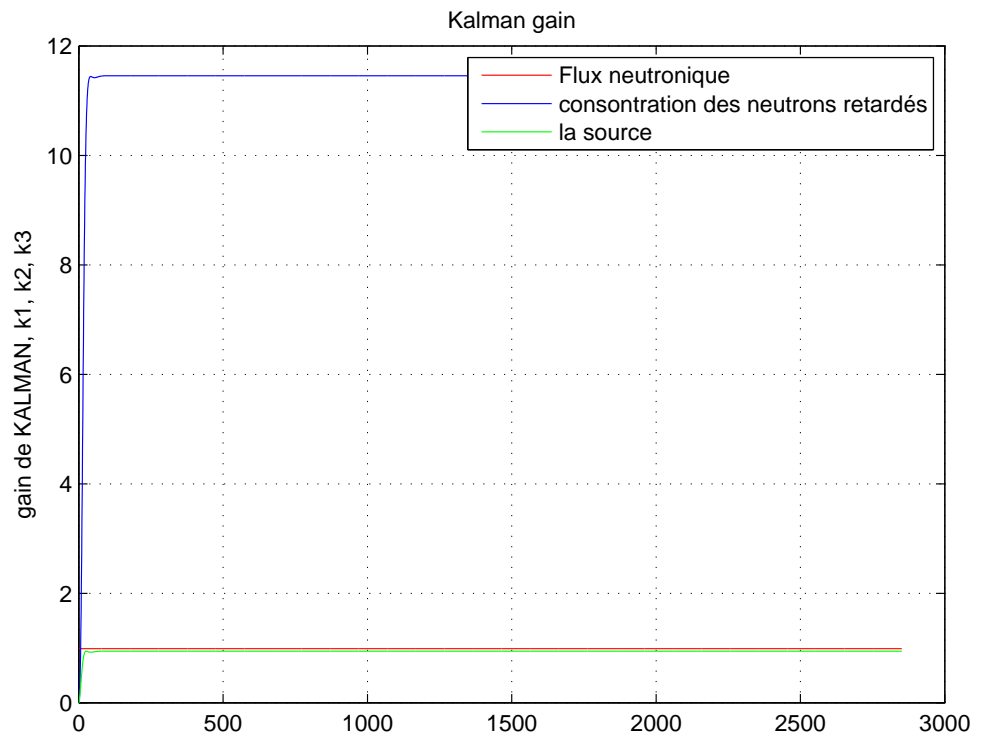


FIGURE 4.5 – Gains de Kalman pour les trois paramètres estimés

Ces grandeurs représentent le facteur de correction entre l'observation et sa prédiction (équation 3.11), ces grandeurs représentent implicitement aussi la constante de convergence μ .

Pour l'erreur entre les prédictions des paramètres et les estimations de ces derniers, la figure 4.6 représente les allures obtenues.

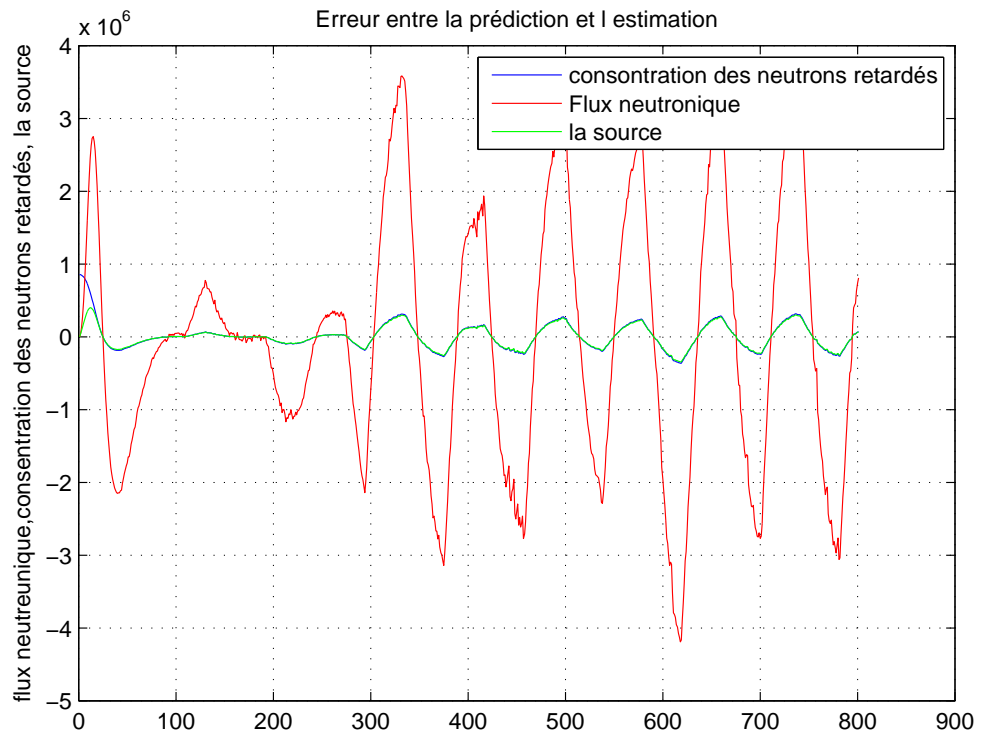


FIGURE 4.6 – Erreur entre prédiction et estimation pour les trois paramètres

On remarque facilement que l'erreur est large pour le cas du flux neutronique, car comme cité auparavant l'estimation de ce paramètre favorise l'observation et non pas la prédiction. Cette erreur converge vers une valeur négligeable puisqu'on a un nombre de mesure élevé. Pour les autres paramètres on remarque que cette erreur a des valeurs petites par rapport au premier cas.

4.3.1.5 Conclusion

Comme conclusion, on a toujours intérêt de parler de l'efficacité et l'exactitude du filtre de Kalman même dans le cas sous-optimal (EKF). Le jeu effectué sur les covariances de bruit nous a permis de discuter les résultats obtenus. En tenant compte de l'intervalle large entre le bruit de mesure et le bruit dynamique le filtre de Kalman étendu nous a permis d'avoir des résultats disant très justes même avec un niveau de filtrage considérable ($-30dB$ par rapport à la covariance de bruit de mesure).

4.3.2 Deuxième modèle

Le deuxième modèle, a la tâche d'estimer la réactivité au lieu de la source, Tel que

$$X(t) = \begin{pmatrix} n(t) \\ c(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$y(t) = n(t); \quad (4.11)$$

Comme pour le premier modèle, le bruit d'état $W(t)$ est une matrice (vecteurs lignes) de dimension $3 \times m$ (m représente les échantillons en temps) avec une matrice de covariance Q , le bruit de mesure $v(t)$ est un vecteur ligne de dimension $1 \times m$ et a une variance R . Donc les matrices A et C sont connues, la matrice B est nulle (pas de commande) et la matrice G est prise comme matrice unitaire. Le flux neutronique est introduit dans la matrice A . Dans ce cas, on l'a prie égale à l'observation. La réactivité dans la matrice A est la réactivité mesurée (on l'a divisée par β_{eff} tel que $\rho_{pcm} = \frac{\rho_{dollar}}{\beta_{eff}}$).

La discrétisation (en introduisant des approximations) de ce modèle, donne des matrices dépendantes du temps, donc on a un modèle non stationnaire.

4.3.2.1 Estimation du flux neutronique

Pour la figure 4.7, on remarque très bien l'effet de la non stationnarité du modèle sur la constante de convergence μ . Dans ce cas cette constante a des variations considérables vu la non stationnarité des paramètres dont elle est dépendante avec (Gain en général), la constante adaptative donne des divergence au niveau des pics (variations brusques), dont elle représente le compromis entre convergence rapide (et donc divergence rapide) et convergence lente (et donc divergence lente). Dans le cas de divergence lente, on prend beaucoup de temps au début pour converger vers le bon estimateur mais on aura moins de divergence sur les pics, dans ce cas le filtre de Kalman a le temps de corriger cette divergence avant qu'on puisse la remarquer. Dans le cas contraire le EKF n'aura pas le temps suffisant de corriger, et donc ; en remarque les divergences sur les pics du signal.

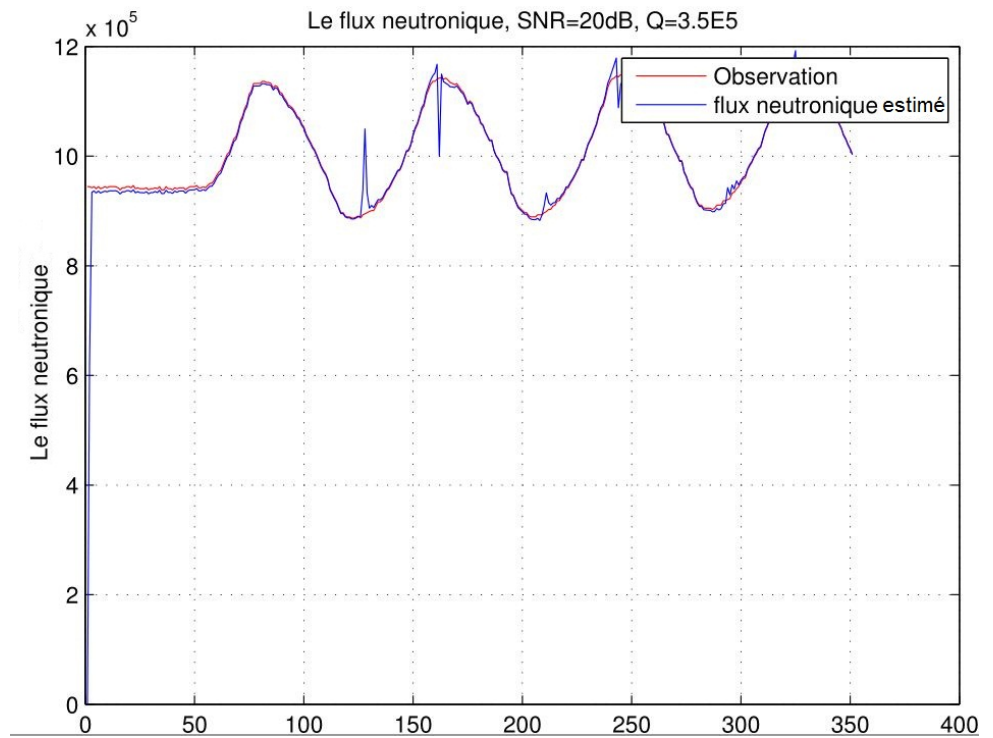


FIGURE 4.7 – Estimation du flux neutronique avec EKF, deuxième modèle

4.3.2.2 Estimation de la concentration des neutrons retardés

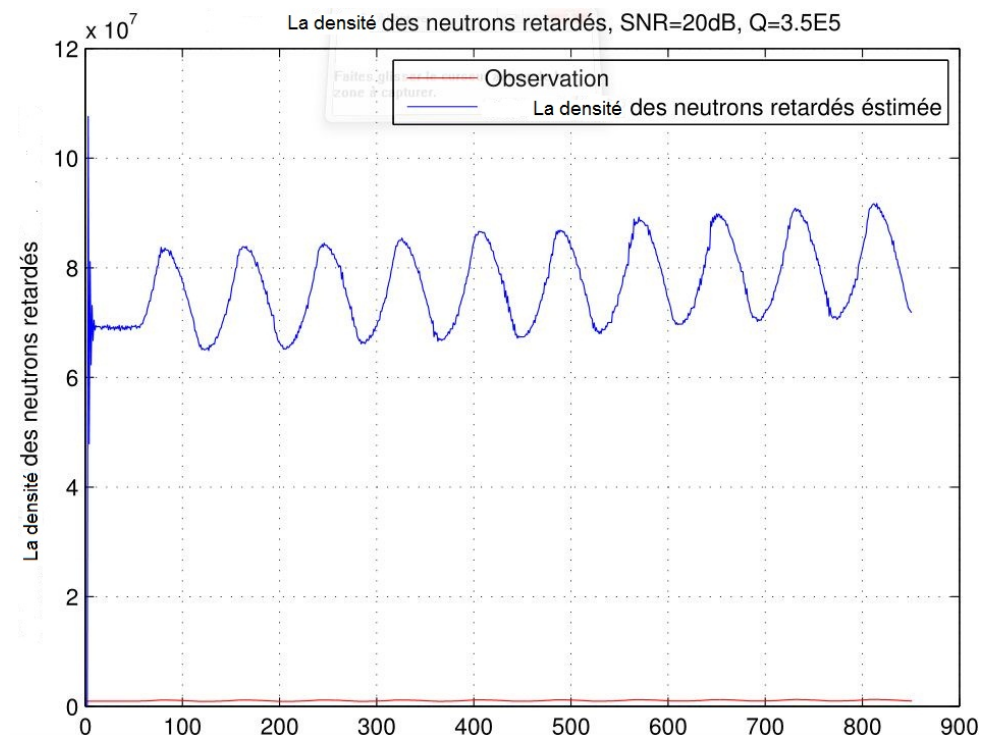


FIGURE 4.8 – Estimation de la densité des neutrons retardés avec EKF, deuxième modèle

Dans cette estimation on a diminué la constante μ en jouant sur le modèle afin d'avoir presque une stationnarité du gain. On remarque un temps de convergence élevé (20s

presque), mais on a obtenu la non divergence du signal sur les pics comme résultat. La figure 4.8 représente l'allure de la concentration des neutrons retardés estimée.

4.3.2.3 Estimation de la réactivité

La figure 4.9, représente le signal estimé et le signal donné de la réactivité. On a divisé la réactivité donnée par le facteur β_{eff} , calculé mathématiquement afin de pouvoir comparer les deux signaux. Le facteur de déphasage inclut toujours dans ce type de filtrage, apparait dans ce graphe (même chose pour les autres), et dans ce cas il va influencer le calcul du paramètre β_{eff} qui va être calculé par la suite.

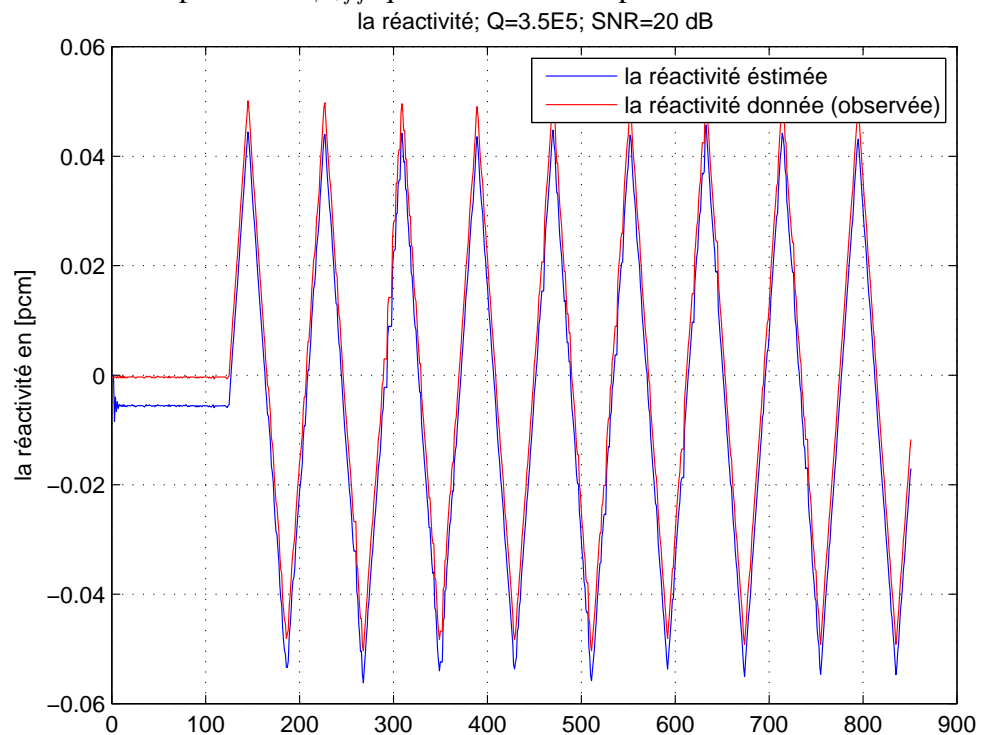


FIGURE 4.9 – Estimation de la réactivité en *pcm* avec EKF, deuxième modèle

4.3.2.4 Paramètres à discuter

Le modèle non stationnaire utilisé dans cette partie de travail, implique la non stationnarité du gain de Kalman. On remarque que le gain de Kalman pour la réactivité est nul, c'est le résultat d'utiliser plusieurs échantillons de l'observation durant l'estimation de ce paramètre. L'intervalle pris pour l'affichage est juste pour avoir des graphes plus claires.

Pour l'erreur entre prédiction et estimation, on a pris un intervalle plus large cette fois (3000s). Avec cet intervalle on remarque la convergence de l'erreur vers une valeur

nulle quand on considère plus d'observations, ce qui donne moins de corrections sur la prédiction. La figure 4.10 représente l'allure des gains trouvés, et la figure 4.11 représente l'erreur entre la prédiction et l'estimation des trois paramètres cinétiques.

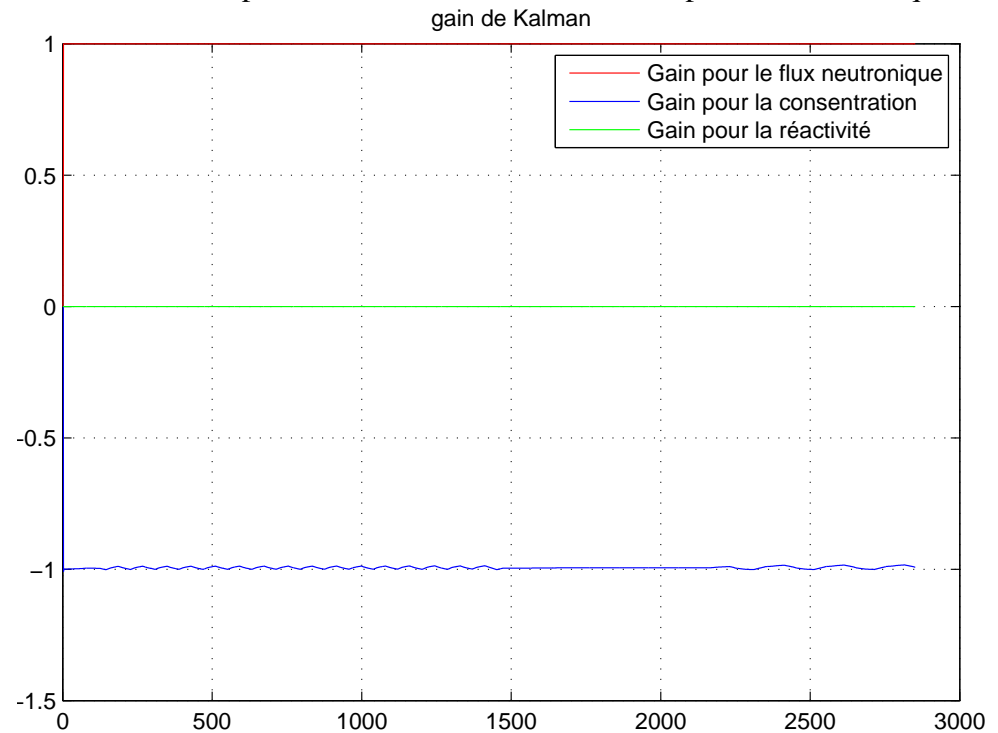


FIGURE 4.10 – Gains de Kalman pour les trois paramètres, deuxième modèle

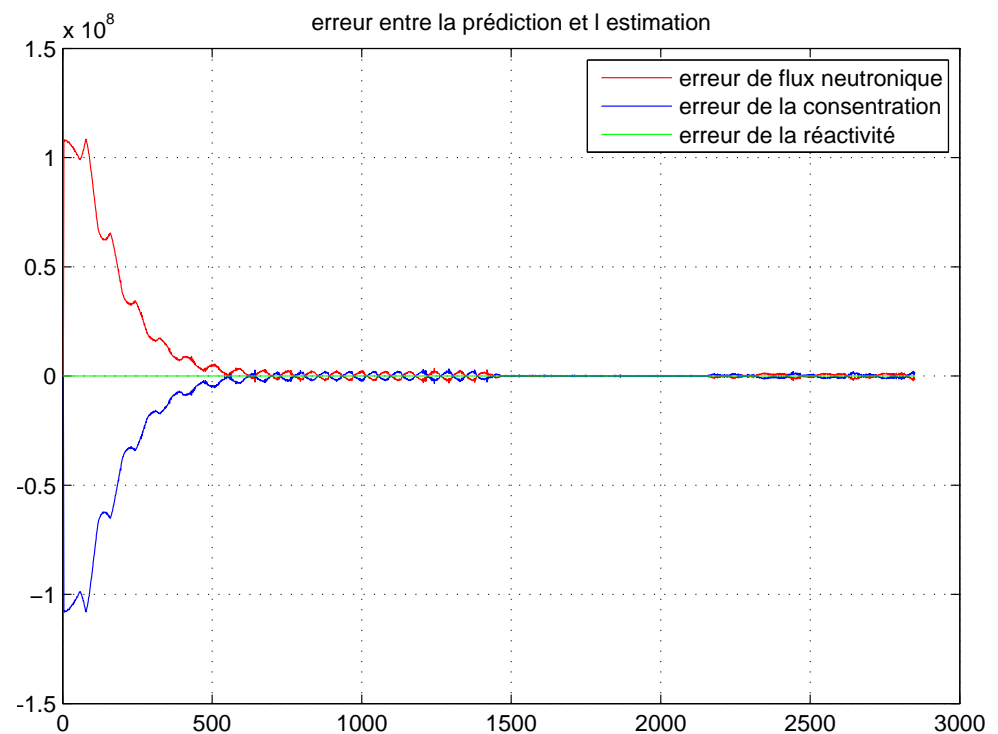


FIGURE 4.11 – Erreur entre la prédiction et l'estimation, deuxième modèle

Comme cité, afin d'avoir des très bonnes estimées des paramètres cinétiques, on doit

avoir une information sur les covariances des bruit (bruit d'observation spécialement). des estimateurs ont été développés afin de chercher la covariance de bruit, on cite par exemple "autocovariance least-squares method" (ALSM). Dans ce travail on a préféré de jouer sur ces matrices de covariance afin de traiter l'influence de ces dernières sur l'estimation des paramètres et pour donner plus de clarté, pour plus de détails sur les approches d'estimations des covariances des bruit appliquées pour le filtre de Kalman on peut faire référence à [19].

4.3.3 Estimation du paramètre Bêta effectif

On fait, cette partie est un calcul vectoriel simple, et non pas une estimation. En basant sur les paramètres estimés auparavant on peut tirer des signaux représentant le paramètre β_{eff} . on a aimé de présenter les résultats du deuxième modèle en premier, afin de laisser le meilleur pour la fin.

Pour le deuxième modèle on a estimé la réactivité ρ en *pcm*, et on a divisé la réactivité donnée (en *dollar*) par celle qu'on a estimé, on tire dans ce cas le facteur β_{eff} . La figure 4.12, représente les résultats obtenus.

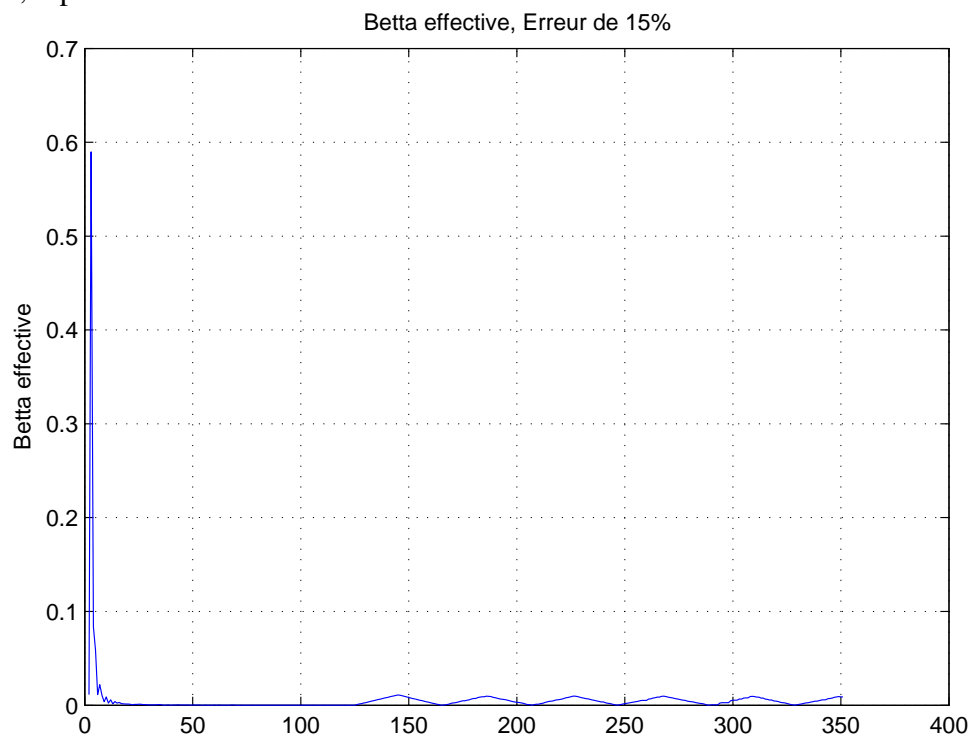


FIGURE 4.12 – Estimation du paramètre β_{eff} , deuxième modèle

On remarque, une erreur très large qui dépasse les 15%. la raison de cette erreur est le déphasage appliqué par le filtre de Kalman sur le paramètre estimé (la réactivité). Par la suite on a proposé de calculer ce paramètre avec le premier modèle en basant sur l'hypothèse de stationnarité du flux neutronique en espace (réacteur point) et en temps (équation 1.29).

En utilisant la première approche (premier modèle d'état), et en appliquant l'hypothèse de stationnarité du flux neutronique en temps obtenu au premier chapitre (équation 1.29) , on peut calculer le paramètre β_{eff} par la relation suivante :

$$\beta_{eff} = \Lambda \times \lambda \times \frac{n(t)}{c(t)}. \quad (4.12)$$

Et vu que cette deuxième méthode appuie sur une fraction des deux paramètres estimés, le déphasage par le filtre de Kalman est le même pour les deux, la figure 4.13, représente les résultats.

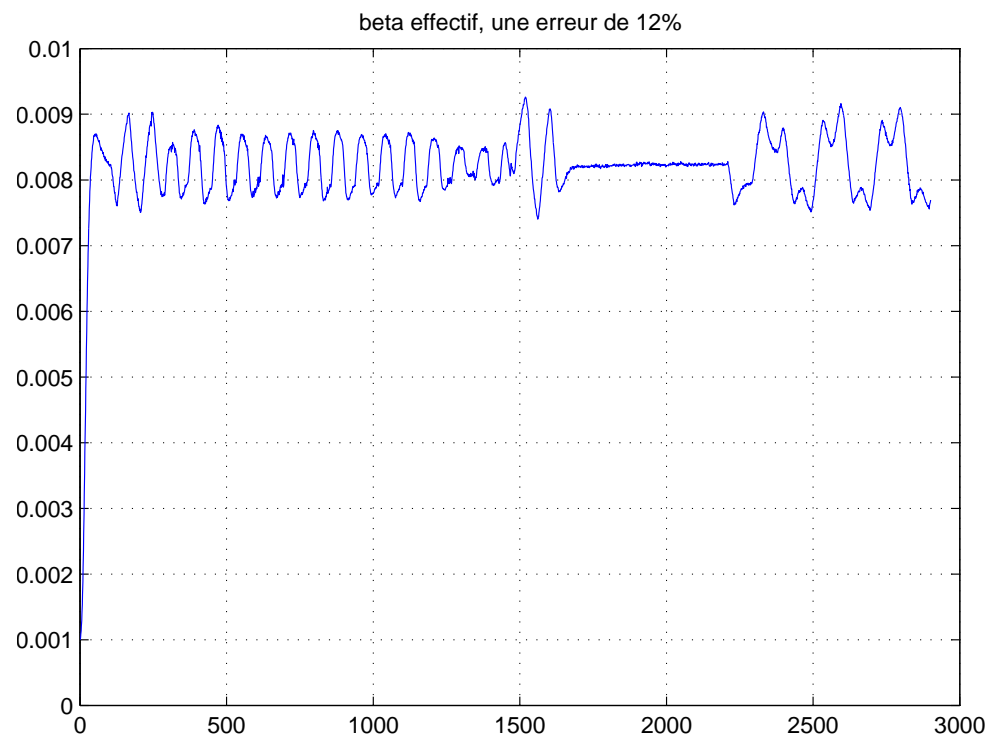


FIGURE 4.13 – Estimation du paramètre β_{eff} , premier modèle

On remarque aussi une erreur très élevée même pour cette solution. L'erreur est plus large dans l'intervalle non stationnaire. Par contre pour les intervalles où le flux neutronique obéi à cette hypothèse (intervalle entre 1800 et 2200s) on remarque une erreur proche à 1%, la figure 4.14 représente les résultats satisfaisants de cet hypothèse qui

est utilisée dans le cadre ce projet.

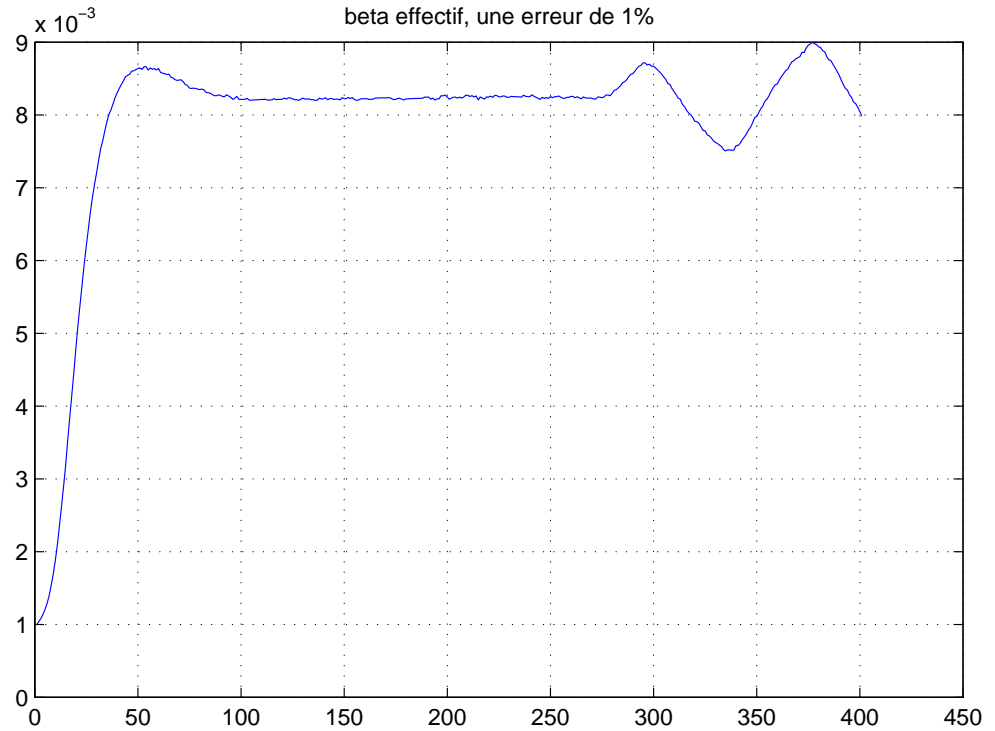


FIGURE 4.14 – Estimation du paramètre β_{eff} avec une intervalle étroite, premier modèle

4.4 Conclusion

Après l'obtention de ces résultats estimés, on les a comparé avec les courbes des paramètres calculées par des approches mathématiques basées sur la théorie de la physique nucléaire. On remarque une ressemblance entre les deux résultats avec une marge d'erreur négligeable. Donc on peut dire finalement qu'on a pu trouver les paramètres cinétiques du réacteur NUR et même le paramètre β_{eff} avec des approches de l'estimation en ligne en utilisant le filtrage de Kalman étendu.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette étude a fourni un algorithme d'estimation en temps réel des paramètres cinétiques d'un réacteur nucléaire. Cet algorithme utilise la technique du filtrage de Kalman étendu. La première partie de l'étude fournit l'arrière plan théorique du filtre de Kalman. Des problèmes simples d'estimation de paramètres déterministes, l'utilisation de cette méthode met en évidence les difficultés pratiques liées à la formulation du filtre : initialisation des variables, influence des erreurs sur les statistiques des bruits, sur la convergence des signaux résultants, et sur la technique de compensation de certaines erreurs sur la structure du modèle.

La deuxième partie décrit le fonctionnement général du réacteur nucléaire, sa physique et son instrumentation. Préciser le problème d'introduire le traitement d'antenne dans l'instrumentation était étudiée dans la troisième partie, on utilisant l'algorithme *PCA*. Les paramètres cinétiques sont des paramètres très importants pour le démarrage d'un réacteur nucléaire, qui ne sont pas accessibles directement à l'observation dans le cas général. Deux études préliminaires traitées avant d'obtenir les modèles linéaires discrets, à partir d'une approche sur la théorie de fonctionnement des réacteurs, et de données réelles enregistrées sur le réacteur NUR, ont permis de sélectionner le modèle d'état approprié.

Les seules mesures de la puissance du réacteur se sont révélées insuffisamment riches en information, la valeur de la réactivité injectée par les plaques de commande a été considérée comme une entrée du premier modèle. Celle-ci a été approximée d'après les relevés expérimentaux disponibles. Moyennant ce supplément d'information à fournir à l'estimateur de Kalman, la convergence de l'estimation des paramètres estimés est

bonne. L'implantation de l'algorithme sous MATLAB a conservé la qualité de l'estimation optimale du filtre de Kalman. La rapidité de traitement de l'algorithme permet de suivre l'évolution en temps réel des paramètres, ce qui n'a pu être testé sur le réacteur lui même.

La méthode moderne d'estimation de paramètres, qu'est le filtre de Kalman étendu, a ainsi pu être appliquée avec succès à un problème physique .

Annexe A

Démonstration des équations du filtre de Kalman

A.1 Équations de filtre de Kalman et positionnement de problème

Dans toute la suite, pour ne pas alourdir les équations mathématiques avec les notations, nous confondrons les variables aléatoires avec leurs réalisations (nous intéresserons aux variables aléatoires).

Pour un système linéaire stochastique discret (les mêmes approches sont utilisées dans le cas continu) dont nous rappelons les équations pour plus de clarté :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k, \quad (\text{A.1})$$

$$y_k = C_k x_k + v_k, \quad (\text{A.2})$$

l'entrée u_k , ainsi que les matrices A_k , B_k , G_k et C_k sont des grandeurs certaines. L'état initial x_0 est non corrélé avec les bruits de sortie (v_k) et de dynamique (w_k) qui sont connus par :

$$E[x_0] = m_0, \quad (\text{A.3})$$

$$E[(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)^T] = P_0, \quad (\text{A.4})$$

$$E[w_k] = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$E[v_k] = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$E[w_k v_j^T] = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$E[w_k w_j^T] = Q_k \delta_{kj}, \quad (\text{A.8})$$

$$E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj}, \quad (\text{A.9})$$

Le problème du filtre de Kalman est de déterminer l'équation récurrente de l'estimateur optimal $\hat{x}_{k+1/k}$ de $x_k + 1$ à partir de la séquence de sortie $Y_k = y_0, y_1, \dots, y_k$.

Étant donné le modèle dynamique et connaissant les sorties et les entrées jusqu'à l'instant k c'est-à-dire Y_k , le problème du filtrage linéaire est de déterminer un estimateur d'état \hat{x}_{k+l} également appelé $\hat{x}_{k+l/k}$, qui est à variance minimale (MVUE quand le modèle est linéaire). notons $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_{k+l/k}$ comme erreur d'estimation, la fonction coût (une fonction quadratique de l'erreur) $\mathcal{L}(\tilde{x}_k) = \tilde{x}_k^T \tilde{x}_k$ et notre critère d'optimisation est $\min_{\hat{x}_k} E[\tilde{x}_k^T \tilde{x}_k] = \min_{\hat{x}_k} \text{trace}(E[\tilde{x}_k \tilde{x}_k^T])$. Nous nous intéressons au problème de filtrage quand $l = 0$ et de prédiction à un pas quand $l = 1$.

A.1.1 Filtre de Kalman estimateur

Dans cette étape on cherche un estimé linéaire $\hat{x}_{k/k}$ de x_k qui minimise la trace de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation. Un filtre récursif est déterminé par la relation de récurrence reliant $\hat{x}_{k+1/k+1}$ à l'estimé à l'instant précédent $\hat{x}_{k/k}$ et aux mesures collectées à l'instant $k + 1$ c'est-à-dire Y_{k+1} et à la commande u_k . Cette estimation est réalisée en deux étapes.

$$\hat{x}_{k/k} \xrightarrow{\text{prédiction}} \hat{x}_{k+1/k} \xrightarrow{\text{estimation}} \hat{x}_{k+1/k+1} \quad (\text{A.10})$$

où $\hat{x}_{k+1/k}$ est l'estimé a priori et $\hat{x}_{k+1/k+1}$ l'estimé a posteriori. Pour l'étape de prédiction on fait l'étude de la propagation de l'estimé (on utilisant l'équation dynamique (A.1)). La meilleur prédiction qu'on peut faire de l'état x_{k+1} connaissant les mesures jusqu'à l'instant k , à partir de l'estimé $\hat{x}_{k/k}$ est

$$\hat{x}_{k+1/k} = A\hat{x}_{k/k} + Bu_k \quad (\text{A.11})$$

On définit les variables :

$$\tilde{x}_{k+1/k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k} \quad (\text{A.12})$$

l'erreur a priori ou de prédiction.

$$\hat{y}_{k+1/k} = C\hat{x}_{k+1/k} \quad (\text{A.13})$$

comme estimation a priori de la sortie.

$$\hat{y}_{k+1/k+1} = C\hat{x}_{k+1/k+1} \quad (\text{A.14})$$

comme estimateur a posteriori de la sortie.

La covariance de l'erreur a priori $P_{k+1/k} = E[\tilde{x}_{k+1/k}\tilde{x}_{k+1/k}^T]$ est donnée par.

$$P_{k+1/k} = AP_{k/k}A^T + GQG^T \quad (\text{A.15})$$

en utilisant les équations (A.1), (A.11) et l'équation de propagation de la covariance.

A.1.1.1 Étape d'estimation (ré-actualisation)

Pour établir les relations reliant l'estimé à posteriori à l'estimé à priori en utilisant les mesures à l'instant $k + 1$, au début on cherche l'estimateur linéaire :

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1/k}) \quad (\text{A.16})$$

tel que K_{k+1} est le gain de Kalman, et donc comme une deuxième étape on doit déterminer ce gain en optimisant le critère.

$$\mathcal{I} = \text{trace}(E[\tilde{x}_{k+1/k+1}^T\tilde{x}_{k+1/k+1}]) \quad (\text{A.17})$$

càd résoudre

$$\underset{K_{k+1}}{\text{mintrace}}(E[\tilde{x}_{k+1/k+1}^T \tilde{x}_{k+1/k+1}]) = \underset{K_{k+1}}{\text{mintrace}}(P_{k+1/k+1}) \quad (\text{A.18})$$

Il faut aussi trouver une relation de récurrence entre la matrice de covariance de l'erreur à posteriori $P_{k+1/k+1}$ et la matrice de covariance de l'erreur à priori $P_{k+1/k}$ pour pouvoir tirer le gain de Kalman par le dernier critère. En utilisant la définition de la covariance de l'erreur d'estimation et l'équation (A.16), on peut démontrer que :

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} + K_{k+1} P_{y(k+1)} K_{k+1}^T - P_{x(k+1)y(k+1)} K_{k+1}^T - K_{k+1} P_{x(k+1)y(k+1)}^T \quad (\text{A.19})$$

où :

$$P_{y(k+1)} = E[(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1/k})(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1/k})^T] \quad (\text{A.20})$$

et

$$P_{x(k+1)y(k+1)} = E[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k})(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1/k})^T] \quad (\text{A.21})$$

Avec un simple calcul mathématique en utilisant l'équation (A.2) et l'expression de $\hat{y}_{k+1/k}$, on trouve :

$$P_{y(k+1)} = C P_{k+1/k} C^T + R \quad (\text{A.22})$$

$$P_{x(k+1)y(k+1)} = P_{k+1/k} C^T \quad (\text{A.23})$$

La condition d'optimisation du critère $\mathcal{I} = \text{trace}(P_{k+1/k+1})$ est donnée par la première dérivé par K_{k+1}

$$\frac{d\mathcal{I}}{dK_{k+1}} = 2K_{k+1} P_{y(k+1)} - 2P_{x(k+1)y(k+1)} = 0 \quad (\text{A.24})$$

on utilisant (A.22),(A.23) on obtient le gain de Kalman

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} C^T (C P_{k+1/k} C^T + R)^{-1} \quad (\text{A.25})$$

On pourra donc simplifier l'équation de la covariance à posteriori sous la forme récurrente

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - P_{k+1/k} C^T (C P_{k+1/k} C^T + R)^{-1} C P_{k+1/k} \quad (\text{A.26})$$

Alors l'étape de prédiction qui correspond à la propagation de l'estimé optimal est représentée par l'équation dynamique suivante :

$$\hat{x}_{k+1/k} = A\hat{x}_{k/k} + Bu_k \quad (\text{A.27})$$

$$P_{k+1/k} = AP_{k/k}A^T + GQG^T \quad (\text{A.28})$$

Et l'étape d'estimation qui correspond à la ré-actualisation de l'estimé optimal à l'arrivée de la mesure à l'instant $k + 1$ est représentée par :

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}C^T(CP_{k+1/k}C^T + R)^{-1} \quad (\text{A.29})$$

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1/k}) \quad (\text{A.30})$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_{k+1}CP_{k+1/k} \quad (\text{A.31})$$

Avec le terme $y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1/k}$ est appelé résidu de la correction. On a maintenant l'intérêt d'initialiser juste le \bar{x}_0 comme prédiction initiale et P_0 comme la covariance de l'erreur de prédiction initiale. On remarque pour les équations (A.29) et (A.31) que le gain de Kalman et la matrice de covariance de l'erreur ne dépendent pas de la mesure y_k et ils dépendent juste du modèle, et donc on peut les calculer hors ligne.

A.1.1.2 *Filtre de Kalman estimateur stationnaire*

Dans le cas où on a un établissement d'un régime permanent (le cas où le modèle est indépendant du temps et donc les matrices A , B , C , G ne dépendent pas de k), alors $P_{k+1/k} \longrightarrow P_\infty$ et $K_k \longrightarrow K_\infty$. En regroupant les équations (A.27) avec (A.28) et (A.30) avec (A.31), on obtient que le filtre de Kalman estimateur stationnaire définit par

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = A\hat{x}_{k/k} + Bu_k + K_\infty(y_{k+1} - C(A\hat{x}_{k/k} + Bu_k)) \quad (\text{A.32})$$

$$K_{\infty} = P_{\infty}C^T(CP_{\infty}C^T + R)^{-1} \quad (\text{A.33})$$

$$P_{\infty} = AP_{\infty}A^T - AP_{\infty}C^T(CP_{\infty}C^T + R)^{-1}CP_{\infty}A^T + GQG^T \quad (\text{A.34})$$

L'équation (A.34) permettant de calculer $P_{\infty} > 0$ est appelée Équation Algébrique de Riccati discrète.

Cette partie du travail est beaucoup plus détaillée dans le chapitre 3.

Annexe B

Discrétisation des Équations différentielles stochastiques

B.1 discrétisation d'un modèle d'espace d'état linéaire

Aux Mathématiques la discrétisation concerne les fonctions de transfert continus, le but de cette opération est de trouver les modèles ou les équations Homologues discrètes. Cette étape est considérée comme première adaptation des systèmes continus dans le monde de l'évaluation, la simulation et l'implémentation numérique. Pour cela on trouve plusieurs approches comme la méthode de Euler-Maruyama (Ito Calculus), la méthode de Zero-Order Hold et la méthode de Milstein [1974]. Quand on applique une discrétisation sur un système ou une donnée continue on aura toujours un erreur de discrétisation. le but des méthodes qu'on a vient de les citées est de minimiser le niveau de cet erreur et le rendre négligeable.

La discrétisation ciblée dans cet annexe est une transformation d'une équation différentielle continue pour obtenir l'équivalence de cet équation dans le cas discret, afin de l'intégrer dans un système de traitement numérique. Rappelons le modèle continu d'un espace d'état à temps continu :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (\text{B.1})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \quad (\text{B.2})$$

Avec v et w sont des des processus aléatoires continus centrés tel que, $w(t) \sim \mathcal{N}(0, Q)$ et $v(t) \sim \mathcal{N}(0, R)$.

Ces équations peuvent êtres discrétisées par la méthode de Zero-Order Hold pour une

entré u et un bruit v , dans ce cas on trouve :

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + w_k \quad (\text{B.3})$$

$$y_k = C_d x_k + D_d u_k + v_k \quad (\text{B.4})$$

avec des matrices de covariances (dans le cas vectoriel), $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_d)$, $v_k \sim \mathcal{N}(0, R_d)$

où

$$A_d = \exp(AT) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]_{t=T} \quad (\text{B.5})$$

$$B_d = \left(\int_{\tau=0}^T \exp(A\tau) d\tau \right) B = A^{-1}(A_d - I)B, \quad (\text{B.6})$$

si A est non singulière.

$$C_d = C \quad (\text{B.7})$$

$$D_d = D \quad (\text{B.8})$$

$$Q_d = \int_{\tau=0}^T \exp(A\tau) Q \exp(A^T \tau) d\tau \quad (\text{B.9})$$

$$R_d = \frac{1}{T} R \quad (\text{B.10})$$

Et T est le temps d'échantillonnage, aussi A^T est la matrice transposée de A .

Une approche disons intelligente et plus simple pour calculer A_d et B_d en utilisant la formule matricielle suivante :

$$\exp \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

tel que $A_d = M_{11}$ et $B_d = M_{12}$.

B.1.1 Discrétisation du bruit de système

L'évaluation numérique de Q_d est un peu difficile pour faire, vu qu'on a un calcul d'exponentiel d'une matrice (dans le cas générale cette matrice est rectangulaire et non décomposée en valeurs propres). ce calcul peut se faire d'une autre manière plus simple, dans ce cas on construit une nouvelle matrice G , et on cherche son exponentiel

[Van Loan, 1978]

$$F = \begin{pmatrix} -A & Q \\ 0 & A^T \end{pmatrix} T \quad (\text{B.12})$$

$$G = \exp(F) = \begin{pmatrix} \dots & A_d^{-1} Q_d \\ 0 & A_d^T \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Donc la discrétisation du bruit de système est évalué par la multiplication du transposé de du terme droit en bas avec celui en haut dans la matrice G .

B.1.2 Dérivation

En démarrnant avec le modèle continu, on a :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{B.14})$$

On sait très bien que le dérivé d'une matrice exponentielle est donnée par

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At) = \exp(At)A \quad (\text{B.15})$$

En multipliant B.14 et B.15 on trouve :

$$\exp(-At)\dot{x}(t) = \exp(-At)Ax(t) + \exp(-At)Bu(t) \quad (\text{B.16})$$

Et donc, on peut écrire

$$\frac{d}{dt}(\exp(-At)x(t)) = \exp(-At)Bu(t) \quad (\text{B.17})$$

En intégrant, on trouve

$$\exp(-At)x(t) - \exp(0)x(0) = \int_0^t \exp(-A\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (\text{B.18})$$

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp(A(t_\tau))Bu(\tau)d\tau \quad (\text{B.19})$$

Ce qui est une solution analytique de l'équation différentielle B.14.

Maintenant on a l'intérêt de discrétiser cette dernière expression, afin de trouver le modèle discret à nouveau. On assume que u est constant dans chaque intervalle temporelle T (pa d'échantillonnage)

$$x_k = x(kT) \quad (\text{B.20})$$

$$x_k = \exp(AkT)x(0) + \int_0^{kT} \exp(A(kT - \tau))Bu(\tau)d\tau \quad (\text{B.21})$$

$$x_{k+1} = \exp(A(k+1)T)x(0) + \int_0^{(k+1)T} \exp(A(k+1)T - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (\text{B.22})$$

$$x_{k+1} = \exp(AT)[\exp(AkT)x(0) + \int_0^{(k+1)T} \exp(A(kT - \tau))Bu(\tau)d\tau] \quad (\text{B.23})$$

$$+ \int_{kT}^{(k+1)T} \exp(A(kT + T - \tau))Bu(\tau)d\tau \quad (\text{B.24})$$

Avec le terme entre braquet est le x_k , en posant $\nu = kT + T - \tau$ et on assume toujours que le u est constant pendant l'intervalle d'intégration, on aboutit l'expression suivante

$$x_{k+1} = \exp(AT)x_k + \left(\int_0^T \exp(A\nu)d\nu \right) Bu_k \quad (\text{B.25})$$

$$= \exp(AT)x_k + A^{-1}(\exp(AT) - I)Bu_k \quad (\text{B.26})$$

Ce qui est la solution exacte du problème discret.

B.1.3 Approximation

La discrétisation exacte peut être intraitable vue sa complexité (exponentielle d'une matrice et sa intégration). C'est plus simple de calculer une approximation du modèle discret, tel qu'on suppose qu'on a un intervalle d'échantillonnage et donc d'intégration infinitésimale, et donc $\exp(AT) \approx I + AT$. La solution approximée est donc donnée par :

$$x_{k+1} \approx (I + AT)x_k + TBu_k \quad (\text{B.27})$$

d'autres approximations sont proposées, $\exp(AT) \approx (I - AT)^{-1}$ et $\exp(AT) \approx (I + \frac{1}{2}AT)(I + \frac{1}{2}A)^{-1}$. dont chacune de ces approximations a ses propriétés de stabilité. La dernière entre eux connue sous le nom de transformation bilinéaire ou la transformation de Tustin, préserve la stabilité du système continu.

Bibliographie

- [1] Reuss.P, les bases neutroniques de la fission le neutron au cœur du réacteur. unité d'enseignement réacteurs et techniques de l'ingénieur Institut national des sciences et techniques nucléaires CEA/Saclay.
- [2] Claude Le Sech,Christian PHYSIQUE NUCLÉAIRE Des quarks aux applications Maison d'édition DUNOD ,paris ,2010
- [3] Davide Bertolloto,Pavel Frajtag et Gaëtan Girardin : Flux Neutronique - Théorie et Mesures Laboratoire de physique des Réacteurs et de comportement des Systèmes École Polytechnique Fédéral de Lausanne.
- [4] F.Adda, Application de la commande de la logique flou au contrôle d'un réacteur nucléaire de recherche. Thèse de magister. ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'Alger. 06 Mai 2001.
- [5] J-L. MOURLEVAT, Instrumentation interne des réacteurs, *Techniques de l'Ingénieur, traité Génie nucléaire*, Adjoint du Chef du Département Performances Cœur à Framatome - ANP, 2000.
- [6] D.Jacquemain Les accidents de fusion du cœur des réacteurs nucléaires de puissance ,État des connaissances. INSTITUT DE RADIOPROTECTION ET DE SURETÉ NUCLÉAIRE. COLLECTION SCIENCES ET TECHNIQUES,FRANCE 2013
- [7] La gestion des déchets radioactifs INSTITUT DE RADIOPROTECTION ET DE SURETÉ NUCLÉAIRE Collection thématique,France 2012
- [8] Richard, M.A., Rowe, A.M., Chahine, R., Bose, T.K., Barclay, J.Ana, California. Towards magnetic liquefaction of hydrogen : experiments with an active magnetic

- regenerator test apparatus. *Hydrogen and Fuel cells conference*, Vancouver, June 8-11, 2003
- [9] Incropera, F.P., DeWitt, D. P. Fundamentals of heat and mass transfer. 2002, Fifth ed. John Wiley & Sons, Inc.
- [10] D.G, Cacuci. Handbook of Nuclear Engineering. 2010, Volume 1. Library of Congress Control Number : 2010927864.
- [11] P, REUSS. Précis de neutronique. EDP Sciences 2003, Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires.
- [12] F, Rotella. Filtrage Optimal. 2006, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes.
- [13] R.Balian, W. Beiglbock, H. Grosse, E.H. Leib, N.Reshetikhin, H.Spohn, W.Thirring. Statistical Methodes in Quantum Optics1 : Master Equations and Fokker-Planck Equations. *Library of Congress Cataloging-in-Publication Data*, 1998
- [14] R. Hérault, A. Rakotomamonjy. Estimateur de signaux, Filtre de Wiener à Réponse Impulsionnelle Finie. *INSA Rouen*, 6 septembre, 2012
- [15] S. Haykin. KALMAN Filtring and Neural Networks. *Mc Master University, Communication Research Laboratory*, Hamilton, Ontario, Canada, 2001.
- [16] M. Richardson, Principal Component Analysis. May, Université of MIT, 2001.
- [17] Zhou, K. Doyle, J. Glover. Robust and optimal control. Prentice Hall. 1995.
- [18] V. Kucera, "Riccati equations and their solution", The control handbook, Levine, W., Ed., CRC Press, 1996.
- [19] Bernt M. Akesson, J. Bagterp Jørgensen, N. Poulsen, A generalized autocovariance least-squares method for Kalman filter tuning. *CAPEC, Department of Chemical Engineering, Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, Denmark. Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, Denmark* 3 November 2007.