

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique
Département Génie mécanique

Post-graduation commune
Mémoire de Magister

Etudié par :

AMEUR MECHRAOUI

Ingénieur d'état en Génie mécanique (ENSET)

Spécialité : Système Mécanique

Thème :

**Influence du champ des contraintes sur
la détermination du facteur d'intensité
des contraintes par la méthode
des éléments aux frontières .**

Soutenu le : 02 /07/ 2008

Devant le jury :

M.BOUAZIZ	MC/ENP	Président
Y.BELKACEMI	MC/ENP	Examineur
A.MILOUDI	MC/USTHB	Examineur
N.BELOUACHRANI	MC/EMP	Examineur
S.RESHAK	Pr./ENP	Directeur de mémoire
B.K.HACHI	MC/C.U.Djelfa	Co-directeur de mémoire

-----E.N.P 10, Avenue Hassan Badi ,El HARRACH , ALGER-----

Tél (021) 52.14..92. Fax.(021) 52.29.73

E-mail: enp@wissal.dz

اللهم أخرجنا من ظلمات الوهم و أكرمنا بنور الفهم و أفتح

عينا بمعرفة العلم و سهل ألقنا بالحلم

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

- *A mes parents qui j'espère trouveront ici leurs fruits d'amour et de souffrance*
- *A ma petite famille*
- *A mes frères et sœurs*
- *Et à tous ceux qui ont vécu avec moi les pires et les heureux moments de ma vie*

Remerciements

Je souhaite avant tout, à travers ce travail, témoigner mon profond respect pour monsieur le directeur de thèse Said Reshak , qui fut mon directeur de thèse et pour Ibrahim el Khalil Hachi qui fut mon co-directeur.

Je tiens également à remercier les membres de mon jury pour le temps qu'ils m'ont consacré

Enfin, je voudrais dire merci à tous ceux qui m'ont apporté un coup de pouce ou un brin de bonne humeur tout au long de cette thèse,et adresser un amical et collectif salut à tout mes collègues et amis .

ملخص:

إن الهدف من هذا العمل هو تحليل العوامل المؤثرة على تغير معامل شدة الإجهاد لأسطوانة مضغوطة تحتوي على شق ممثل بخدش عامة شقوق هذا النوع من المسائل يمثل بشكل شبيه بنصف قطع ناقص و الانتقال من المسائل الثلاثية الأبعاد إلى المسائل الثنائية الأبعاد يؤدي إلى عدم مراعاة تأثير شكل رأس الشق لكن تأثير فتحة الخدش و حقل الاجتهادات يبقى مستمرا في كل الحالات. أولا, بدأنا بإيجاد معاملات شدة الإجهاد باستعمال برنامج طريقة العناصر الحدودية و بعد الحصول على النتائج قمنا بتحقق منها بواسطة برنامج طريقة العناصر المنتهية (Ansys) و بعد ذلك شرعنا في تحليلها **كلمات مفتاح :** ميكانيكا التشققات, شق, خدش, اسطوانة سميكة, طريقة العناصر الحدودية, معامل شدة الإجهاد.

Abstract:

This aim of this work is to analyse the factors that influence the stress intensity factor (SIF) variation for thick-pressurized cylinder containing crack represented by notch.

In general, cracks of this type of problems are represented by semi-elliptical forms and the passage from the three-dimensional to two-dimensional problems leads to neglect the front effect. However, the opening notch effect and the stress field effect persist.

First, SIF are determined using boundary element code and afterwards analysis and validation of results are done by using finite element method code (Ansys)

Key Words: fracture mechanics, crack, notch, thick-walled cylinder, boundary element method, stress intensity factor.

Résumé:

Ce travail porte sur l'analyse des facteurs influant sur la variation du facteur d'intensité des contraintes (FIC) pour un cylindre épais contenant une fissure représentée par une entaille.

En général, dans ce type de problème les fissures sont de forme semi-elliptique et le passage d'un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel entraîne la négligence de l'effet du front. Cependant, l'effet d'ouverture et l'effet du champ de contraintes persistent.

Tout d'abord, la mise au point d'un code de calcul permet l'obtention des FIC par la méthode des éléments aux frontières et ensuite un code d'éléments finis (Ansys) permet la validation et l'analyse des résultats ainsi trouvés.

Mots clés : mécanique rupture, fissure, entaille, cylindre épais, méthode des éléments aux frontières, facteur d'intensité des contraintes.

Sommaire :

<u>Chapitre I : Introduction et étude bibliographique</u>	1
--	---

Chapitre II : Bases théoriques de la mécanique linéaire de la rupture.....5

<u>II-1- Introduction</u>	5
<u>II- 2- Equations de l'élastostatique</u>	5
<u>II-3- Analyse linéaire élastique des corps fissurés</u>	8
<u>II-3-1- Etude d'un milieu élastique fissuré</u>	8
<u>II-3-2- Représentation générale d'une fissure</u>	9
<u>II-3-3- Modes fondamentaux de rupture</u>	9
<u>II-3-4- Facteurs d'intensité de contraintes (approche locale)</u>	10
<u>II-3-5- Théorie de Griffith (approche globale)</u>	12
<u>II-3-6- Champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure</u>	14
<u>II-3-7- Relation entre G et K</u>	17

Chapitre III: Présentation de la méthode des éléments de frontière.....19

<u>III-1- Introduction</u>	19
<u>III-2- Equation de Navier</u>	19
<u>III-3- Identité de Somigliana</u>	20
<u>III-4- Equations intégrales aux frontières</u>	21
<u>III-5- Résolution numérique des équations intégrales</u>	22
<u>III-5-1- Représentation de la géométrie par éléments de frontière</u>	22
<u>III-5-2- Discrétisation des inconnues</u>	24
<u>III-5-3- Construction et résolution numérique du problème discrétisé</u>	25

Chapitre IV : Implémentation de la méthode des éléments de frontières et applications27

<u>IV-1- Introduction</u>	27
<u>IV-2- Méthodes de calcul du facteur d'intensité des contraintes</u>	27
<u>IV-2-1- Méthode d'extrapolation</u>	27
<u>IV-2-2- Éléments singuliers</u>	28
<u>IV-3- Calcul des intégrales et problèmes de singularités</u>	30
<u>IV -3-1- Cas d'un élément unidimensionnel</u>	30
<u>IV -3-1- Cas d'un élément bidimensionnel</u>	33
<u>IV-4- Implémentation numérique</u>	38
<u>IV-5- Applications et validations des résultats</u>	40
<u>IV-5-1- Cas d'une plaque fissurée</u>	40
<u>IV-5-2- Cas d'un cylindre fissuré</u>	45
<u>Résultats et commentaires</u>	54

Conclusion Générale55

Bibliographie.....57

<u>Annexe A</u> : Fonctions de forme pour un élément quadratique	63
<u>Annexe B</u> : Solutions fondamentales	66
<u>Annexe C</u> : Géométrie différentielle	68
<u>Annexe D</u> : Calcul des intégrales régulières (Choix des points de Gauss)	70
<u>Annexe E</u> : Calcul des intégrales singulières (Méthode de subdivision).....	72

Listes des figures :

Fig II-1 : Corps élastique	6
Fig II-2 : Corps fissuré	8
Fig II-3 : Zones des champs mécaniques	9
Fig II-4 : Contraintes au voisinage d'une fissure	10
Fig II-5 : Les trois modes de fissuration	11
Fig II-6 : Milieu élastique fissuré	12
Fig II-7 : Fissure dans un plan infini	15
Fig III-1 : Domaine réel Ω et domaine auxiliaire E	21
Fig III-2 : Schéma explicitant la valeur limite de l'intégrale	22
Fig III-3 : Élément de référence et élément de	23
Fig IV-1 : Élément singulier	29
Fig IV-2 : Intégration quand P_i est un nœud de l'élément	31
Fig IV-3 : Intégration sur un élément quadratique quand P_i et n coïncident	32
Fig IV-4 : Diagramme de calcul des intégrales régulières	34
Fig IV-5 : Diagramme de calcul des intégrales singulières	36
Fig IV-6 : Élément quadratique à huit nœuds (Singularité sur un nœud coin)	37
Fig IV-7 : Élément quadratique à huit nœuds (Singularité sur un nœud milieu)	38
Fig IV-8 : Schéma présentant les liaisons entre les différents modules pour le calcul de KI et KIN par éléments de frontières	39
Fig IV-9 : Plaque fissurée	40
Fig IV-10: Variation des KI pour une plaque fissurée	41
Fig IV-11: Condition aux limites pour une plaque chargée	42
Fig IV-12: Variation des déplacements U_x pour une plaque fissurée	43
Fig IV-13: Variation des déplacements U_y pour une plaque fissurée	43
Fig IV-14: Variation des contraintes σ_x pour une plaque fissurée	44
Fig IV-15: Variation des contraintes σ_y pour une plaque fissurée	44
Fig IV-16: Termes géométriques pour une fissure elliptique	45
Fig IV-17: Variation des KIN pour un cylindre fissuré (par BEM)	46
Fig IV-18: Maillage d'un quart de cylindre par Ansys	47
Fig IV-19: Variation des contraintes σ_x pour un cylindre fissuré	47
Fig IV-20: Variation des contraintes σ_y pour un cylindre fissuré	48
Fig IV-21: Variation des déplacements U_x pour un cylindre fissuré	48
Fig IV-22: Variation des déplacements U_y pour un cylindre fissuré	49
Fig IV-23: Variation des KIN pour un cylindre fissuré (par ANSYS)	51
Fig IV-24: Validation des résultats par ANSYS	51
Fig IV-25: Distribution des contraintes sur les facettes d'une fissure	51
Fig IV-26: Influence du champ des contraintes sur la variation des KIN	52
Fig IV-27: Variation des KIN pour différents angles d'ouverture	53

Listes des tableaux :

Tableau IV-1 : Valeurs des KI pour une plaque fissurée	41
Tableau IV-2 : Valeurs des KI et des KIN pour un cylindre fissuré (par Ansys)	50
Tableau IV-3 : Tableau comparatif des KIN pour deux cas de chargements	52
Tableau IV-4 : Valeurs des KIN pour un cylindre fissuré par BEM	53

NOMENCLATURE :

E : Module de young

E_e : Elements de frontières

G, H : Matrices d'influence

J : Jacobien de transformation

$KI, KII, KIII$: Facteurs d'intensité des contraintes pour les trois modes

N :Matrice des fonctions de forme

NE : Nombre de noeud total

P : Pression intérieure

Q : Le taux de chaleur reçue

R_1 : Rayon intérieur

R_2 : Rayon extérieur

T_{ij}, U_{ij} : Solutions fondamentales aux contraintes et aux déplacements

\bar{f} : Force extérieure

$f_{ij}^I, f_{ij}^II, f_{ij}^III$: Fonctions angulaires pour chaque mode

\bar{n} : Vecteur normal

n_1, n_2, n_3 : Composantes du vecteur normal

p : Point source

$p_{(x)}$: Puissance des efforts extérieurs

$p_{(i)}$: Puissance des efforts intérieurs

\bar{r} : Vecteur position du point source p

r_1, r_2, r_3 : Longueurs des projections de r suivant les directions x_1, x_2, x_3

$t_i(q), u_i(q)$: Composantes du vecteur contrainte et du vecteur déplacement au point champ q

\bar{u} : Vecteur déplacement

μ : module de cisaillement

σ_{ij} : Composantes du tenseur contrainte

σ_{ij}^I : Composantes du tenseur contrainte au front de la fissure

δ_{lk} :Symbole de Kronecker

ε_{ij} : Composantes du tenseur deformation

r, θ : coordonnées polaires

ε, η : Système de référence

ν : Coefficient de poisson

β : angle d'ouverture d'entaille

$2\gamma\dot{a}$: Puissance dissipée dans le mécanisme de décohésion

δW_{ext} : Travail des forces extérieures appliquées

δP : Variation potentielle totale

δW_{ela} : Variation de l'énergie élastique

\dot{E} : Variation de l'énergie interne

\dot{K} : Variation de l'énergie cinétique

KIN : facteur d'intensité des contraintes normalisés

$[u_{ij}]$: Saut de déplacement

Chapitre : Introduction et étude bibliographique

Historique et étude bibliographique :

La rupture est un problème auquel l'homme devra faire face aussi longtemps qu'il construira des édifices ou fabriquera des structures. Ce problème est de plus en plus crucial avec le développement, lié aux progrès technologiques, de structures complexes.

Durant le XIX^{ème} siècle le développement industriel de l'acier et de ses alliages a permis de fabriquer des structures capables de résister à certains types de chargements, cependant ces structures conçues à l'aide de la théorie de l'élasticité ne saurait prévoir les risques d'accidents et de catastrophes causés par la rupture fragile.

En grande Bretagne et durant la période 1860-1870 [1] le nombre de personnes victimes d'accidents s'élevait environ à deux cents par ans à cause des accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou des rails .

De nombreux accidents interviennent également sur les pipelines, les pétroliers, ou encore sur les avions.

En 1950 par exemple, deux avions Comet se sont brisés à haute altitude à cause d'un problème de fatigue au niveau des trous des rivets près des hublots [61] .

Et récemment en 2001 un Airbus A300, s'est écrasé après son décollage de l'aéroport international de Kennedy et selon les déclarations du service de sécurité de transportation nationale, la cause était la disjonction du stabilisateur du fuselage juste avant le choc.

Ces risques d'accidents sont généralement dus aux défauts préexistants qui proviennent du processus de fabrication. En effet, aucune structure n'est exempte de ces défauts, un pétrolier par exemple peut contenir des millions de défauts microscopiques [2] qui peuvent se propager sous forme de fissures (**Fig A**). En fait, les estimations de tenue des structures, fondées sur les méthodes classiques , ne tenaient pas compte de la ténacité des matériaux en conditions réelles de service , et les chercheurs étaient incapables d'expliquer le phénomène de rupture brusque sous des sollicitations bien inférieures à celle de la limite élastique.



Fig A : Propagation d'une fissure dans un cylindre

Les références historiques de la mécanique de la rupture sont celles de Griffith et Irwin : En 1920, Griffith [3] dont le critère fondé sur des considérations énergétiques, exprime la rupture à l'aide du taux de restitution d'énergie libéré lors de l'avancée par rupture brutale de la fissure et en 1957 celui d'Irwin [4] reprend cette même idée mais en précisant bien le lien existant entre cette quantité (taux de restitution d'énergie) et le champ des contraintes au voisinage de la fissure en introduisant de nouveaux paramètres appelés : facteurs d'intensité de contraintes (FIC).

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand essor scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui prend en compte le comportement plastique des matériaux.

De nombreux travaux sont publiés [Rice 1968] et [Bui 1973] qui introduisent la notion d'intégrales de contour dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est pas confinée à la pointe de la fissure.

Jusqu'à présent l'évaluation du FIC revêt toujours d'une grande importance puisqu'il permet de juger la stabilité d'une fissure en prévoyant la rupture brutale, mais du fait qu'il dépend de la bonne prise en compte de la singularité qui caractérise le champ des contraintes aux voisinages d'une fissure, les méthodes analytiques deviennent laborieuses.

Avec l'introduction des méthodes numériques dans la modélisation des structures, de considérables efforts ont été consacrés au calcul précis du facteur d'intensité des contraintes.

En effet, les principales méthodes numériques sont : la méthode des éléments finis [9-13] et la méthode des éléments de frontières [14-23].

La méthode des éléments finis occupe une position dominante et son champ d'application est vaste mais elle devient laborieuse et inefficace pour certains problèmes dont la géométrie n'est pas simple étant donné qu'elle nécessite un raffinement du maillage et une augmentation de la densité des éléments aux voisinages des régions critiques.

Au contraire, les méthodes des équations intégrales sont d'un emploi assez fréquent en mécanique de la rupture et pour les domaines infinis. Outre l'avantage du gain d'une dimension d'espace par rapport aux éléments finis, une meilleure précision est obtenue dans l'évaluation des grandeurs locales aux voisinages des fronts des fissures.

Historiquement, et jusqu'aux années quatre-vingts, la méthode des éléments de frontière était reconnue par la méthode des équations intégrales de frontières dont l'objectif était tout d'abord la résolution des problèmes de la physique mathématique.

En 1828 et pour la première fois, G.Green [5], a formulé une représentation intégrale de la solution des problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'équation de Laplace en introduisant des fonctions appelées : fonctions de Green.

En 1872, Betti [6] a présenté une méthode générale pour l'intégration des équations de l'élasticité. En fait elle était une extension directe de l'approche de Green pour les équations de Navier.

Et en 1885, en se référant sur le théorème de réciprocité de Betti, Somigliana [7] a formulé une représentation intégrale de la solution des problèmes de l'élasticité en prenant en considération les forces de volumes, les déplacements et les charges aux frontières.

En effet, la méthode des éléments de frontières est attribuée à Fredholm puisqu'il était le premier qui avait appliqué les équations intégrales singulières aux problèmes de la théorie du potentiel [8] pour la détermination des inconnues aux frontières.

Jusqu'à la fin des années cinquante, la méthode des équations intégrales était encore négligée mais avec le développement des ordinateurs, elle est devenue une méthode numérique puissante appliquée aux différents types de problèmes d'élasticité, d'élastodynamique, de géomécanique, de la mécanique de fluide, de la mécanique de la rupture ...etc.

En rupture bidimensionnelle plusieurs approches basées sur la méthode des équations intégrales de frontières ont été utilisées pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes [24] :

- Méthode de fonction de Green (T.A Cruse 1972)
- Méthode de discontinuité de déplacements [Crouch et Strafield 1983]
- Méthode de sous structuration [Blandford et Al, 1981, Sollero et Al, 1994, Sollero et Allabadi 1995]

La méthode des fonctions de Green [54-57] ne nécessite pas la discrétisation de tout le domaine mais juste les surfaces de la fissure, elle convient seulement pour certaines géométries dont les fonctions de Green sont connues alors que la méthode de discontinuité de déplacements (MDD) [58-59] nécessite la discrétisation des surfaces de la fissure ainsi que les frontières du domaine. Elle convient beaucoup mieux pour les problèmes de fissuration en milieu infini. Quant à la méthode de sous structuration, elle consiste à décomposer le domaine élastique en deux sous domaines complémentaires et chaque sous domaine pouvant être formulé au moyen d'une équation intégrale. Cette méthode permet alors la discrétisation de toute sorte de fissure étant donné que chaque surface de la fissure est discrétisée séparément [14],[24].

Dans le cas de la rupture tridimensionnelle, l'un des problèmes importants des cylindres épais sous pression est la détermination des facteurs d'intensités des contraintes au voisinage des fissures semi elliptiques. Jusqu'à présent plusieurs méthodes numériques ont été utilisées pour l'obtention de ce paramètre : la méthode des éléments finis (FEM) [25 -29], la méthode des éléments de frontières (BEM) [30-37], la méthode de la force volumique (BFM) [38-41], la méthode des équations intégrales singulières (HSIE)[42-44], la méthode des fonctions de poids (WFM) [45-47]...etc.

Ce travail entre dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, Il se focalise sur la mise au point d'un code de calcul d'éléments de frontières pour la détermination du facteur d'intensité des contraintes pour un cylindre contenant une fissure intérieure représentée par une entaille.

Le corps de ce mémoire est divisé en trois parties :

Dans la première partie, nous commencerons par rappeler les théories et les hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture (MLR), en insistant seulement sur celles qui entrent dans le cadre de notre étude.

Dans la deuxième partie, nous présenterons les bases théoriques de la méthode des éléments de frontières nécessaires à son implémentation numérique.

La troisième partie, se consacrera tout d'abord à l'implémentation numérique de la méthode des éléments de frontières puis aux applications et la validation des résultats trouvés avec ceux déterminés par éléments finis en utilisant le logiciel commercial Ansys.

Finalement, une conclusion générale présente les commentaires sur les résultats trouvés.

Chapitre II : Bases théoriques de la mécanique linéaire de la rupture

II-1- Introduction :

Le développement des microfissures sous l'action des sollicitations mécaniques, thermiques, chimiques ... peut conduire à une destruction totale des structures.

Cette rupture peut intervenir brutalement sans déformation préalable pour les matériaux qualifiés de : **fragiles** tandis qu'elle intervient qu'après une étape de déformation permanente pour les matériaux qualifiés de : **ductiles**.

Dans le cas où la plasticité est absente ou reste très confinée, les théories qui permettent de traiter ce type de problèmes considèrent le matériau comme étant élastique et linéaire partout : C'est la mécanique linéaire de la rupture (MLR).

Pour cette approche deux études alternatives sont possibles : l'une utilise un critère d'énergie et l'autre le concept d'intensité de contraintes.

Dans le présent chapitre nous présentons les équations fondamentales de la mécanique linéaire de la rupture, en commençant tout d'abord par rappeler les équations de l'élastostatique que nous utiliserons alternativement par la suite. Ensuite, nous définissons dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les caractéristiques d'un milieu fissuré tels que les modes de ruptures, les facteurs d'intensité des contraintes, le taux de restitution d'énergie, les champs des contraintes et des déformations au voisinage d'une fissure . Enfin, nous présenterons les critères de rupture.

II- 2-Equations de l'élastostatique :

Soit un solide élastique linéaire, homogène et isotrope Ω dont la frontière est Γ et soumis aux forces volumiques \mathbf{b} , aux tractions \mathbf{t} sur Γ_t et aux déplacements imposés \mathbf{u} sur Γ_u (**Fig II-1**)

Supposons que ce corps subit des petites déformations et de petits déplacements [64] :

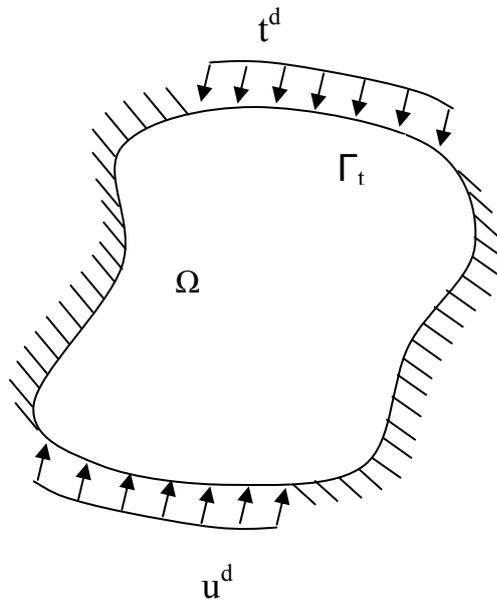


Fig II-1 :Corps élastique

- L'état de contrainte en un point est défini par le tenseur des contraintes suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (II - 1)$$

Où :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} ; \sigma_{13} = \sigma_{31} ; \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

- Ces contraintes doivent satisfaire les équations d'équilibre suivantes :

$$\sigma_{lj,j} + b_l = 0 \quad (l,j=1,2,3) \quad (II-2)$$

Où :

b_l : les forces de volume

- Le vecteur contrainte en un point est défini par :

$$t_k = \sigma_{lk} e_l \quad (II-3)$$

- L'état de déformation est défini par le tenseur de déformation suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II-4})$$

Où:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} ; \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} ; \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$$

- Les relations déformations -déplacements sont définies par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right) \quad (\text{II-5})$$

- La loi de comportement pour un matériau isotrope est définie par la loi de Hooke généralisée suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II-6})$$

Où :

C: est la matrice des coefficients élastiques

L'Equ.(II-6) peut s'écrire alors sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} & \frac{2\nu}{(1-2\nu)} & \frac{2\nu}{(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} & \frac{2\nu}{(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-7})$$

Où sous la forme indicelle suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i,j,m=1,2,3) \quad (\text{II-8})$$

- Equations de compatibilité des déformations :

Pour que les six fonctions ε_{ij} soient les composantes du tenseur des déformations, elles doivent satisfaire à un ensemble de conditions, dites conditions de compatibilité exprimées par :

$$\varepsilon_{kk,lj} = (\varepsilon_{kl,j} + \varepsilon_{kj,l} - \varepsilon_{lj,k})_{,k} \quad (l,j,k=1,2,3) \quad (\text{II-9})$$

II-3-Analyse linéaire élastique des corps fissurés :

La rupture d'un corps Ω soumis à l'action des contraintes ou des déformations imposés (**Fig II-2**) se manifeste par la formation de deux nouvelles surfaces libres S^+ et S^- : appelées lèvres de la fissure [14] :

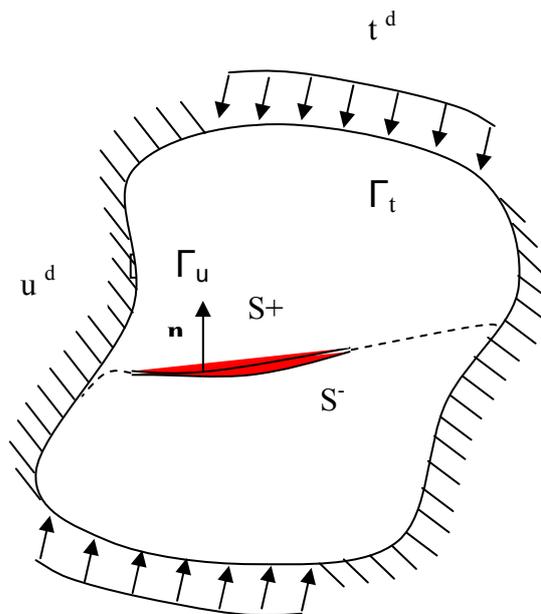


Fig II-2 : Corps fissuré

II-3-1-Etude d'un milieu élastique fissuré :

Dans un milieu élastique fissuré [72] , la région proche de la pointe d'une fissure peut être décomposée en trois zones(**Fig II-3**) :

1. La zone d'élaboration :

L'étude de cette zone est très complexe du fait que les contraintes tendent vers l'infini au voisinage direct de la pointe d'une fissure.

2. La zone singulière :

Dans cette zone le champ des contraintes présente une singularité de type $1/r^{1/2}$.

3. La zone des champs lointains :

Elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites de chargement et de déplacement.

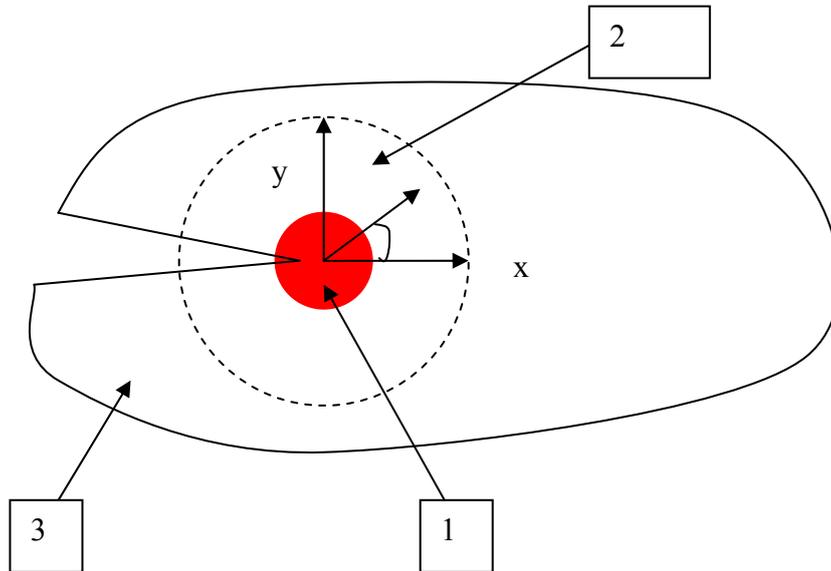


Fig II-3 : Zones des champs mécaniques

II-3-2-Representation générale d'une fissure :

Dans un système d'axes orthonormés OXYZ, les fissures sont représentées comme étant une séparation bordée à l'intérieur du matériau par un front de fissure (Fig II-4)[62]

II-3-3-Modes fondamentaux de rupture:

Irwin a montré [65] que les mouvements cinématiques possibles d'une surface supérieure par rapport à une surface inférieure d'une fissure sont en générale une combinaison de trois modes indépendantes (Fig II-5) :

- Mode I : mode d'ouverture (ou clivage)
- Mode II : mode de cisaillement plan
- Mode III : mode de cisaillement anti -plan

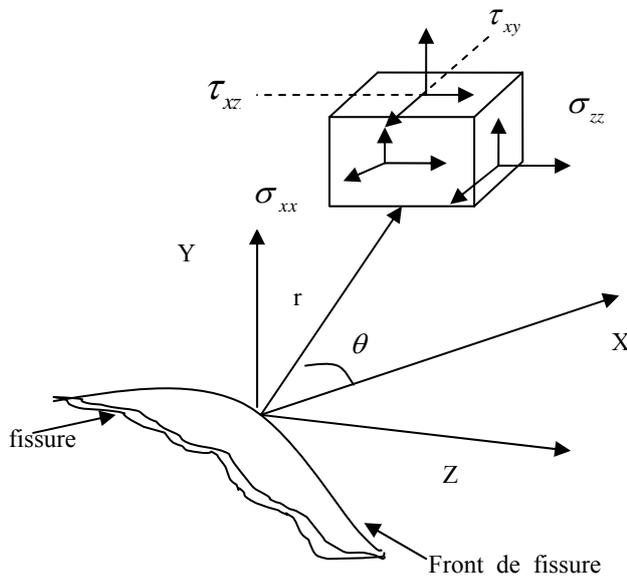


Fig II-4 : Contraintes au voisinage d'une fissure

A chaque mode et au voisinage immédiat de la fissure sont associés un champ de contraintes et un champ de déformations.

II-3-4-Facteurs d'intensité de contraintes (approche locale) :

En 1920, en s'appuyant sur les travaux de Griffith, Irwin [65,72] fut le premier qui a exprimé le champ des contraintes au voisinage d'une fissure sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{KI}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{KII}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{KIII}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + \sigma_{ij}^{(1)} \quad (\text{II-10})$$

Les premiers développements théoriques ont été entrepris par Westergaard [71] en 1940 afin de déterminer les fonctions angulaires et d'exprimer les facteurs d'intensité des contraintes sous la forme :

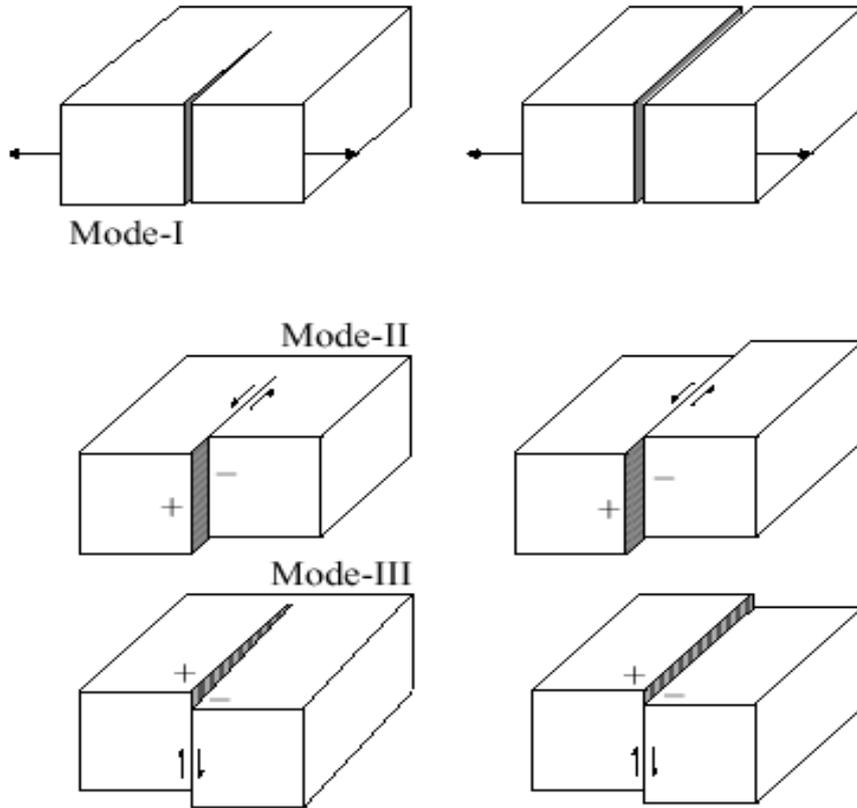


Fig II-5 : les trois modes de fissuration

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{yy} (2\pi r)^{1/2} \right]_{(\theta=0)} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_{yy}] \right) \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{xy} (2\pi r)^{1/2} \right]_{(\theta=0)} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_{xx}] \right) \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\sigma_{yz} (2\pi r)^{1/2} \right]_{(\theta=0)} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [u_{zz}] \right)
 \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

L'approche locale est basée sur la détermination des facteurs d'intensité des contraintes (FIC) au voisinage du front de la fissure.

Ces paramètres mesurent l'intensité de la singularité du champ des contraintes et dépendent essentiellement de la longueur de fissure, de la géométrie et du type de chargement.

Les facteurs d'intensité des contraintes sont exprimés en $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$

II-3-5-Theorie de Griffith (Approche globale) :

L'approche globale est basée sur la théorie de Griffith (1920) [62-63] qui a montré que la rupture d'un milieu élastique- fragile pouvait être caractérisée par une variable appelée : taux de restitution d'énergie

II-3-5-1-Définition du taux de restitution d'énergie :

Soit un milieu élastique fissuré contenant une fissure de longueur a , de front de fissure égale à l'unité, qui subit un accroissement δa (**Fig II-6**)
Le bilan des énergies pendant la propagation δa de la fissure est exprimé par [67]:

$$\delta W_{ext} - \delta W_{ela} = 2\gamma\delta a \quad (\text{II-12})$$

γ : énergie de surface

Posons :

$$\delta P = \delta W_{ela} - \delta W_{ext}$$

Alors :

$$-\frac{\delta P}{\delta a} = 2\gamma \quad (\text{II-13})$$

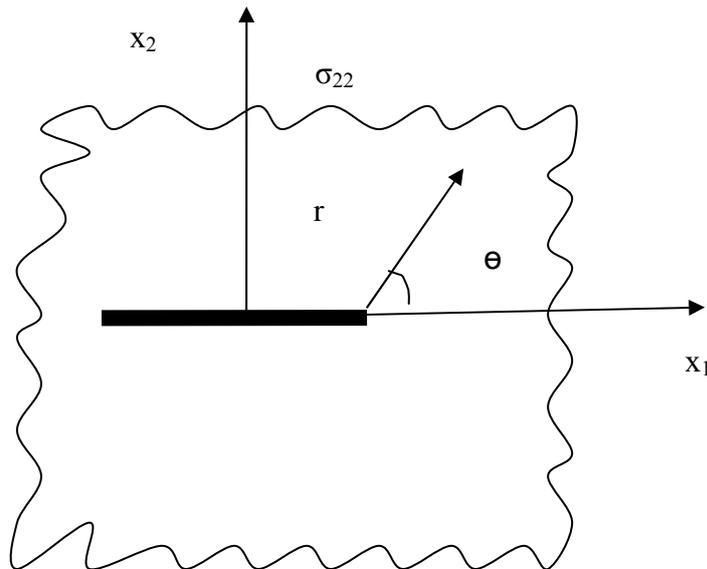


Fig II-6 : Milieu élastique fissuré

Le taux de restitution d'énergie G est défini par :

$$G = -\frac{\delta P}{\delta a} = 2\gamma \quad (\text{II-14})$$

II-3-5-2-Expression du taux de restitution de l'énergie :

Pour un milieu élastique fissuré dont la fissure croît avec une vitesse \dot{a} et sous l'hypothèse de petites déformations le premier principe de la thermodynamique s'écrit [67]:

$$\dot{E} + \dot{K} = p_{(x)} + Q - 2\gamma\dot{a} \quad (\text{II-15})$$

- **L'énergie interne est définie par :**

$$\dot{E} = -p_{(i)} + Q = \int_s \sigma : \dot{\varepsilon} dV + Q = \dot{W}_e + Q \quad (\text{II-16})$$

- **La puissance des efforts extérieurs :**

$$p_{(x)} = \int_{\partial s} \vec{f} \cdot \dot{\vec{u}} ds \quad (\text{II-17})$$

En substituant l'Equ.(II-16) et l'Equ.(II-17) dans l'Equ. (II-15) on obtient :

$$\dot{W}_e + \dot{K} = \int_{\partial s} \vec{f} \cdot \dot{\vec{u}} ds - 2\gamma\dot{a} \quad (\text{II-18})$$

La condition de stabilité permet alors d'écrire :

$$\dot{K} = \left(\int_{\partial s} \vec{f} \cdot \frac{\delta \vec{u}}{\delta a} ds - \frac{\delta W_e}{\delta a} - 2\gamma \right) \dot{a} \leq 0 \quad (\text{II-19})$$

avec: $\dot{a} \geq 0$

$$\int_{\partial s} \vec{f} \cdot \frac{\delta \vec{u}}{\delta a} ds - \frac{\delta W_e}{\delta a} \leq 2\gamma \quad (\text{II-20})$$

Dans l'Equ.(II-20) le membre de droite représente le taux de restitution de l'énergie

Posons :

$$G = \int_{\delta_s} \vec{f} \cdot \frac{\delta \vec{u}}{\delta a} ds - \frac{\delta W_e}{\delta a} = \left. \frac{dW_x}{da} \right|_F - \frac{\delta W_e}{\delta a} \quad (\text{II-21})$$

En appliquant le principe des travaux virtuels l'Equ.(II-21) peut s'écrire sous la forme :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\delta_s} \left(\vec{f} \cdot \frac{\delta \vec{u}}{\delta a} - \vec{u} \cdot \frac{\delta \vec{f}}{\delta a} \right) ds \quad (\text{II-22})$$

Pour une partition Γ_u et Γ_t (**Fig II-2**), l'Equ. (II-22) peut s'écrire :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\delta_{s_f}} \vec{f}^d \cdot \frac{\delta \vec{u}}{\delta a} ds - \frac{1}{2} \int_{\delta_{s_u}} \vec{u}^d \cdot \frac{\delta \vec{f}}{\delta a} ds \quad (\text{II-23})$$

II-3-6-Champs des contraintes et des déformations au voisinage d'une fissure :

En modes I et II on peut avoir soit un état de déformation plane, soit un état de contrainte plane (**Fig II-7**) et par conséquent la substitution des facteurs d'intensité de contraintes définies par IRWIN dans le développement de Williams [68] pour les cas de déformation/contrainte plane permet d'écrire [62] :

• Champ des contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{KI}{\sqrt{(2 \pi r)}} \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] - \frac{KII}{\sqrt{(2 \pi r)}} \sin(\theta/2) [2 + \cos(\theta/2)\cos(\theta/2)] \\ \sigma_{yy} = \frac{KI}{\sqrt{(2 \pi r)}} \cos(\theta/2) [1 + \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] - \frac{KII}{\sqrt{(2 \pi r)}} \sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(3\theta/2) \\ \sigma_{xy} = \frac{KI}{\sqrt{(2 \pi r)}} \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)\cos(3\theta/2) + \frac{KII}{\sqrt{(2 \pi r)}} \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] \\ \sigma_{zz} = \begin{cases} \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{pour la deformation plane} \\ 0 & \text{pour la contrainte plane} \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{II-24})$$

En intégrant les équations (II-24) et en utilisant les relations déformations/déplacements et contraintes /déformations , le champ des déplacements s'écrit:

• **Champ des déplacements :**

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_2 = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ u_3 \begin{cases} = 0 \text{ deformation plane} \\ \neq 0 \text{ contrainte plane} \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{II-25})$$

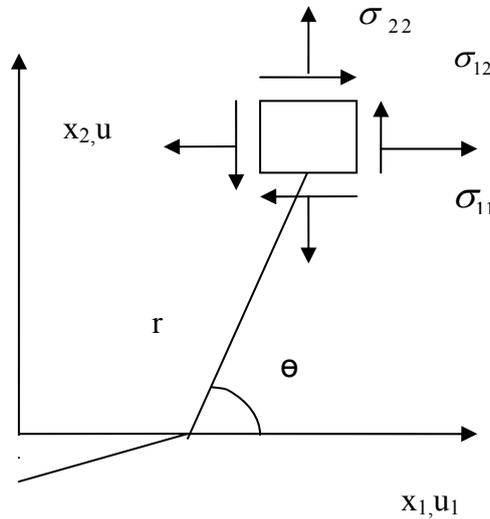


Fig II-7 : Fissure dans un plan infini

• **Mode I (mode d'ouverture) :**

• **Champ des contraintes**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{KI}{\sqrt{(2\pi r)}} \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] \\ \sigma_{yy} = \frac{KI}{\sqrt{(2\pi r)}} \cos(\theta/2) [1 + \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] \\ \sigma_{xy} = \frac{KI}{\sqrt{(2\pi r)}} \cos(\theta/2)\sin(\theta/2)\cos(3\theta/2) \\ \sigma_{zz} = \begin{cases} \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{pour la deformation plane} \\ 0 & \text{pour la contrainte plane} \end{cases} \end{array} \right. \quad (\text{II-26})$$

- **Champ des déplacements :**

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ u_{yy} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

- **Mode II(mode de cisaillement plan) :**

- **Champ des contraintes :**

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_{II}}{\sqrt{(2 \pi r)}} \sin(\theta/2) [2 + \cos(\theta/2)\cos(3\theta/2)] \\ \sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{(2 \pi r)}} \cos(\theta/2) \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) \\ \sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{(2 \pi r)}} \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)] \\ \sigma_{zz} = \begin{cases} \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{pour la deformation plane} \\ 0 & \text{pour la contrainte plane} \end{cases} \end{cases} \quad (\text{II-28})$$

- **Champ des déplacements :**

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ u_{yy} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

- **Mode III(mode de cisaillement anti plan) :**

- **Champ des contraintes :**

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{(2 \pi r)}} (-\sin(\theta / 2)) \\ \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{(2 \pi r)}} \cos(\theta / 2) \end{cases} \quad (\text{II-30})$$

- **Champ des déplacements :**

$$u_{zz} = 2 \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{II-31})$$

II-3-7- Relation entre G et K :

Dans le cas général la relation entre le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte s'exprime alors [62] :

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (\text{II-32})$$

Où:

$$E' = \begin{cases} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \text{déformation plane} \\ E & \text{contrainte plane} \end{cases}$$

II-3-8-Criteres de rupture :

1. Critère de contrainte :

On dira qu'il y a rupture lorsque l'état de contrainte au voisinage de la fissure atteindra une configuration critique c'est-à-dire quand le facteur d'intensité de contrainte K atteindra une valeur critique K_c , soit [61] :

$$K = K_c \quad (\text{II-33})$$

K_c : est la ténacité, elle dépend du matériau, de la vitesse de chargement, du vieillissement et de la température

2. Critère d'énergie :

On dira qu'il y a rupture lorsque l'état de contrainte au voisinage de la fissure atteindra une configuration critique c'est-à-dire quand l'énergie disponible pour la propagation de la fissure atteindra une valeur critique G_c [61] :

$$G = G_c \quad (\text{II-34})$$

Chapitre III: Présentation de la méthode des éléments de frontière (BEM)

III-1-Introduction :

La méthode des éléments de frontières (BEM) est une méthode numérique qui a pour objectif l'analyse du comportement mécanique des systèmes et en particuliers les structures soumises à des chargements extérieurs. Cette méthode est basée sur la discrétisation des équations intégrales : les équations intégrales qui portent sur une inconnue intermédiaire (une source réelle ou fictive) sont qualifiées « d'indirectes » et celles qui établissent une relation directe entre les variables physiques sur la frontière du domaine d'étude sont dites « directes » [14]

Dans ce chapitre nous commençons tout d'abord par rappeler les bases théoriques de la méthode des éléments de frontières ensuite nous exposons la méthode de collocation, qui consiste à discrétiser l'équation intégrale prise en un nombre fini de points de collocation \mathbf{x}^c , suffisant pour fournir au moins autant d'équations que d'inconnues et enfin nous présentons le problème de singularité et les différentes méthodes de traitement de certaines types d'intégrales.

III-2-Equation de Navier :

Soit Ω un solide élastique, borné. La formulation de l'équation intégrale aux frontières est basée sur l'application du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti à un état élastostatique inconnu et à une solution élémentaire associée à un ouvert E compatible avec Ω (**Fig III-1**).

La combinaison des équations (II-2), (II-5) et (II-8) permet d'écrire l'équation de Navier en terme de déplacement [16]:

$$\frac{u_{j,jl}}{(1-2\nu)} + u_{l,jj} + \frac{b_l}{\mu} = 0 \quad (\text{III-1})$$

La solution de Kelvin est obtenue quand une force unitaire \vec{b} est appliquée en "i" dans la direction e_1 .

Les composantes de cette force peuvent s'exprimer alors par :

$$b_l = \Delta^i e_l \quad (\text{III-2})$$

La manière la plus simple qui permet de chercher les solutions fondamentales est la représentation des déplacements à l'aide du vecteur Galerkin :

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad (\text{III-3})$$

Où :

G_{ij} : vecteur de Galerkin

La substitution des équations (III-2) et (III-3) dans l'Equ.(III-1) permet d'écrire :

$$\nabla^2(\nabla^2 G_l) + \frac{1}{\mu} \Delta^i e_l = 0 \quad (\text{III-4})$$

La résolution de l'Equ.(III-4) dans un milieu infini donne les solutions fondamentales de Kelvin U_{ij} et T_{ij} (voir annexe B).

III-3-Identité de Somigliana :

La méthode directe est basée sur le théorème de réciprocité qui s'exprime par :

$$\int_V \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 dv = \int_V \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 dv \quad (\text{III-5})$$

En appliquant ce théorème à notre problème et à un milieu infini soumis à une force de volume définie par l'Equ.(III-2), on obtient l'identité de Somigliana:

$$u_k^i = \int_{\Gamma} U_{lk} t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{lk} u_k d\Gamma \quad (\text{III-6})$$

Où :

$u_j(q)$ et $t_j(q)$: sont respectivement les composantes du vecteur déplacement et du vecteur traction au point champ q

En dérivant l'Equ.(III-6) ,on obtient l'équation de Somigliana pour les contraintes :

$$\sigma_{ik} = \int_{\Gamma} U_{kij}^* t_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{kij}^* u_k d\Gamma \quad (\text{III-7})$$

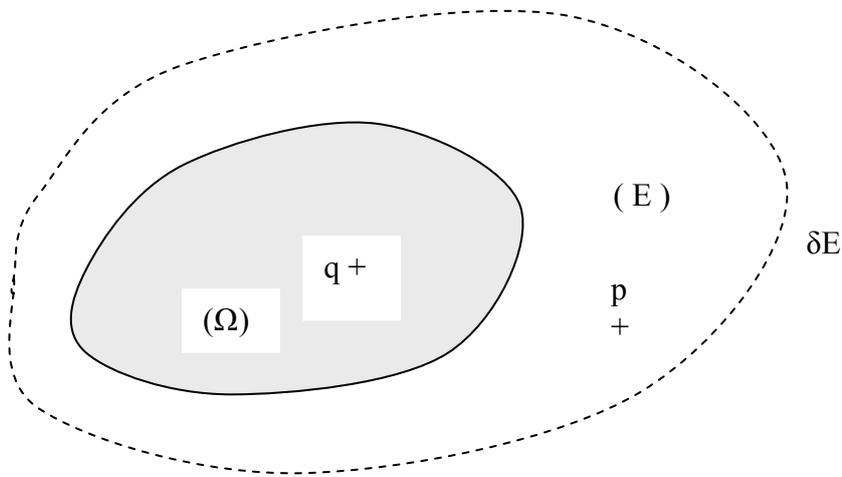


Fig III-1 : Domaine réel Ω et domaine auxiliaire E

III-4-Equations intégrales aux frontières:

Quand le point de collocation « p » est sur un nœud « i » de la frontière l'application de l'Equ.(III-6) et de l'Equ.(III-7) nécessite la subdivision du domaine en deux surfaces S_ε et $S-S_\varepsilon$ (**Fig III-2**) telle que S_ε soit la surface d'une sphère (ou d'un cercle en 2D) de centre p est de rayon ε

Le passage aux limites quand $\varepsilon \rightarrow 0$, permet d'obtenir l'équation intégrale aux frontières qui représente un moyen direct pour calculer les inconnues de la frontière :

$$C_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} T_{lk} u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk} t_k d\Gamma \quad (\text{III-8})$$

Avec:

$$C_{lk}^i = \frac{1}{2} \delta_{lk} \text{ quand "i" est régulier}$$

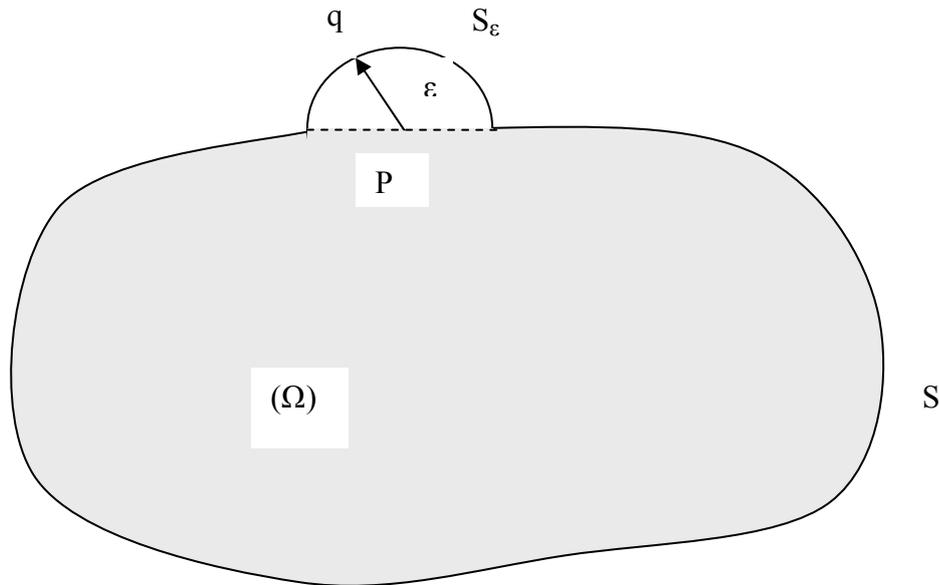


Fig III-2 : Schéma explicitant la valeur limite de l'intégrale

III-5-Résolution numérique des équations intégrales :

III-5-1-Représentation de la géométrie par éléments de frontière [14] :

- **Discrétisation:**

Pour résoudre numériquement l'Equ.(III-8) la frontière Γ devrait être discrétisée en éléments de frontière E_1, E_2, \dots, E_{NE}

Alors :

$$\Gamma = \bigcup_{e=1}^{NE} E_e$$

Où :

E_e : éléments de frontière

- **Interpolation géométrique :**

Chaque élément E_e de l'espace physique est rapporté à un élément de référence Δ_e (Fig III-3) et alors chaque élément de la frontière est décrit par :

$$\xi \in \Delta_e \rightarrow y(\xi) \in E_e \quad 1 \leq e \leq NE$$

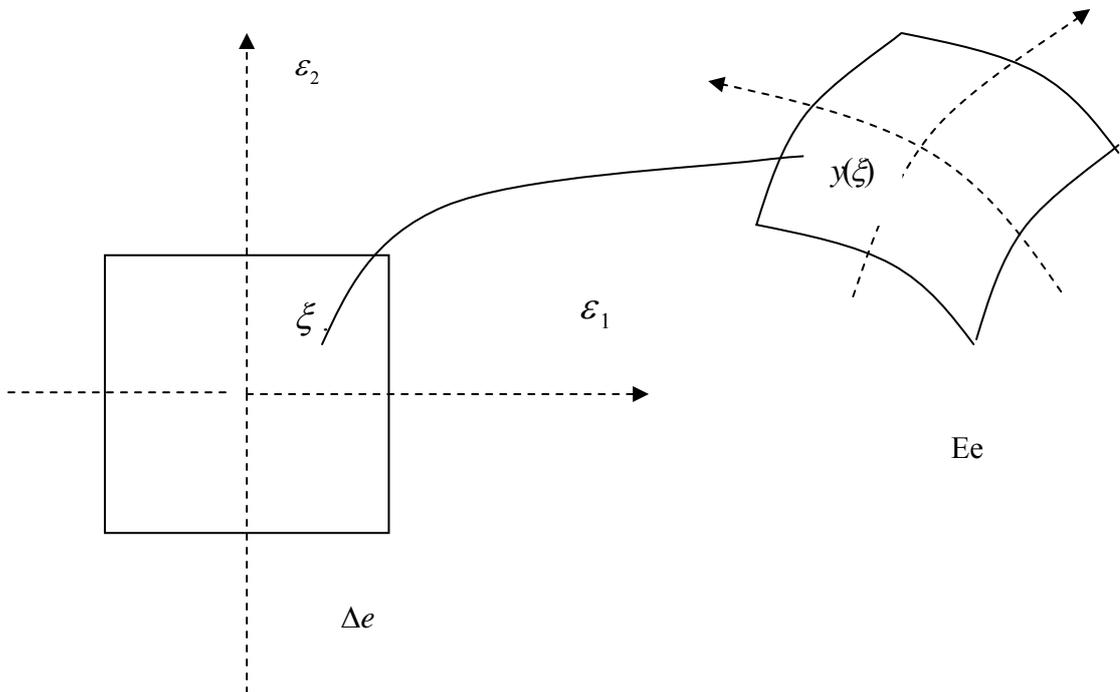


Fig III-3 : élément de référence et élément de frontière

Chaque élément de la frontière approchée Γ est décrit par un paramétrage de la forme :

$$\xi \in \Delta_e \rightarrow y(\xi) = \sum_{m=1}^{N_e} N_m(\xi) y^m \quad (\text{III-9})$$

Où :

N_e : points y^1, y^2, \dots, y^{N_e} nœuds géométriques (en numérotation locale)

N_m : fonctions de forme $N_1(\epsilon) \dots \dots N_{N_e}(\epsilon)$ vérifiant les propriétés :

$$\begin{cases} N_p(\boldsymbol{\varepsilon}) = \delta_{pq} \\ \sum_{m=1}^{Ne} N_q(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1 \end{cases}$$

III-5-2- Discrétisation des inconnues :

Pour les éléments isoparamétriques les nœuds d'interpolation représentent des nœuds géométriques et les fonctions de forme représentent les fonctions d'interpolations. (Voir annexe A) et par conséquent les déplacements et les contraintes peuvent être exprimés par :

$$(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) \in \Delta e \rightarrow \begin{cases} u_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{m=1}^{Ne} N_m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) u_1^m \\ u_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{m=1}^{Ne} N_m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) u_2^m \\ u_3(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{m=1}^{Ne} N_m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) u_3^m \end{cases} \quad (\text{III-10a})$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) \in \Delta e \rightarrow \begin{cases} t_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{m=1}^{Ne} N_m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) t_1^m \\ t_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{m=1}^{Ne} N_m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) t_2^m \\ t_3(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{m=1}^{Ne} N_m(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) t_3^m \end{cases} \quad (\text{III-10b})$$

III-5-3- Construction et résolution numérique du problème discrétisé:

La discrétisation de la frontière permet de transformer l'Equ.(III-7) en une somme d'équations intégrales élémentaires [16]:

$$C^i u^i + \sum_j^{E_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} TN d\Gamma \right\} u^j = \sum_j^{E_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} U N d\Gamma \right\} t^j \quad (\text{III-11})$$

Où:

u^j, t^j : Sont les déplacements et les contraintes aux nœuds de l'élément "j"

Dans le système de référence l'Equ.(III-11) s'écrit :

$$C^i u^i + \sum_j^E \left\{ \int_{\Gamma_j} TN |J| d\varepsilon d\eta \right\} u^j = \sum_j^E \left\{ \int_{\Gamma_j} UN |J| d\varepsilon d\eta \right\} t^j \quad (\text{III-12})$$

Où :

$|J|$: Jacobien de la transformation (voir Annexe C)

L'Equ. (III-12) correspond au cas où le point de collocation p est sur un nœud particulier "i", pour tout point "i" de la frontière on obtient :

$$C u(p_i) + \sum_{e=1}^{E_e} \sum_{n=1}^{Ne} \bar{H}_{ni}^e u_{ni}^e = \sum_{e=1}^{E_e} \sum_{n=1}^{Ne} \bar{G}_{ni}^e t_{ni}^e \quad (\text{III-13})$$

\bar{H}, \bar{G} : Sont les sous matrices d'influence de dimension (2x2) ou (3x3), elles peuvent s'exprimer par :

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_{ni}^e &= \sum_t \int_{\Gamma_t} N_q T d\Gamma \\ \bar{G}_{ni}^e &= \sum_t \int_{\Gamma_t} N_q U d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-14})$$

La sommation s'étend sur tous les éléments contenant le nœud j et q est le numéro d'ordre du nœud j à l'intérieur de l'élément t

Posons :

$$H_{ni}^e = \overline{H}_{ni}^e + \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

Le système devient alors :

$$HU = \overline{GT} \quad (\text{III-15})$$

Si les conditions aux frontières sont bien posées, le système (III-15) représente un système de 2N équations linéaires et 2N inconnues (ou 3N équations linéaires et 3N inconnues pour les problèmes tridimensionnels).

Pour avoir un système d'équation bien conditionné la matrice \overline{G} doit être multipliée par 2μ et le système (III-15) s'écrit alors sous la forme :

$$HU = GT \quad (\text{III-16})$$

Après introduction des conditions aux frontières dans le système (III-16) , il peut se mettre en fin sous la forme suivante :

$$AX = F \quad (\text{III-17})$$

La résolution du système ci dessus permet alors la détermination de toutes les inconnues aux frontières et par suite les déplacements aux points intérieurs peuvent être déterminés à l'aide de l'Equ.(III-6) et les contraintes par l'Equ.(III-7)

Chapitre IV : Implémentation numérique de la méthode des éléments de frontières et applications

IV-1-Introduction :

La résolution numérique des équations intégrales par la méthode des éléments de frontières procède en deux étapes :

- 1- Résolution de l'équation intégrale aux frontières qui permet de connaître les valeurs $(u,t)|_{\delta\Omega}$ en tout point de la frontière
- 2- Application des équations intégrales pour le calcul explicite des valeurs prises par $u(x)$, $\sigma(x)$ en tout point intérieur.

Dans ce chapitre nous présentons tout d'abord les méthodes de calcul du facteur d'intensité des contraintes et le type d'éléments utilisés pour représenter la singularité qui apparaît au voisinage immédiat de la pointe d'une fissure. Ensuite, nous exposons les méthodes de résolution des intégrales confrontées à l'implémentation numérique de la méthode des éléments de frontières. Enfin, pour concrétiser ce travail et montrer l'efficacité de cette approche, nous procédons à une application industrielle qui est le cas d'un cylindre épais, fissuré et soumis à une pression intérieure .

IV-2-Méthodes de calcul du facteur d'intensité des contraintes :

En mécanique de la rupture les méthodes des équations intégrales sont d'un emploi assez fréquent. Outre l'avantage du gain d'une dimension, une meilleure précision est obtenue dans l'évaluation des grandeurs locales.

Plusieurs techniques ont été proposées afin de déterminer le FIC telles que :

- La méthode d'extrapolation des déplacements au voisinage de la pointe de la fissure (Chan et Al 1970)
- La méthode de J- intégrale (Moran Shih 1987)

IV-2-1-Méthode d'extrapolation :

L'extrapolation des champs des contraintes ou des déplacements s'appuie sur la connaissance à priori du champ des contraintes et celui des déplacements au voisinage de la fissure en utilisant les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontières.

D'après l'Equ.(II-11) le facteur d'intensité de contrainte (FIC) peut s'exprimer par [98] :

$$KI = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E' \sqrt{2\pi}}{4} \frac{u_{yy}}{\sqrt{r}} \quad (\text{IV-1})$$

Où ;

u_{yy} : est le déplacement suivant y

La résolution du système d'équations intégrales permet alors la détermination des déplacements en tout points de la face de la fissure le long de la ligne normale au front de la fissure et par suite le facteur d'intensité de contrainte peut être obtenu graphiquement [76], soit par le calcul de la tangente à la courbe $u = f(\sqrt{r})$, soit par l'extrapolation de la courbe $K_I = h(1/\sqrt{r})$ pour $r = 0$.

IV-2-2 Eléments singuliers :

En mécanique de la rupture les éléments singuliers dont un nœud est déplacé au un quart (**Fig IV-1**) permettent la meilleure représentation de la singularité des déplacement et des contraintes au voisinage de la pointe de la fissure [99],[52]

Dans ce cas les trois fonctions de forme sont exprimées par [24] :

$$\begin{cases} N_1 = 2(\bar{\varepsilon} - 1/2)(\bar{\varepsilon} - 1) \\ N_2 = 2\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon} - 1/2) \\ N_3 = -4\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon} - 1) \end{cases} \quad (\text{IV-2})$$

Les coordonnées x d'un point par rapport aux coordonnées locales s'expriment alors par :

$$x = \sum_i N_i(\bar{\varepsilon}) x_i \quad (\text{IV-3})$$

En substituant $x_1 = 0.0, x_2 = 1.0, x_3 = 0.25$ dans l'Equ. (IV-3) on obtient :

$$\begin{cases} N_1 = 1 + 2x - 3\sqrt{x} \\ N_2 = 2x - \sqrt{x} \\ N_3 = -4x + 4\sqrt{x} \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

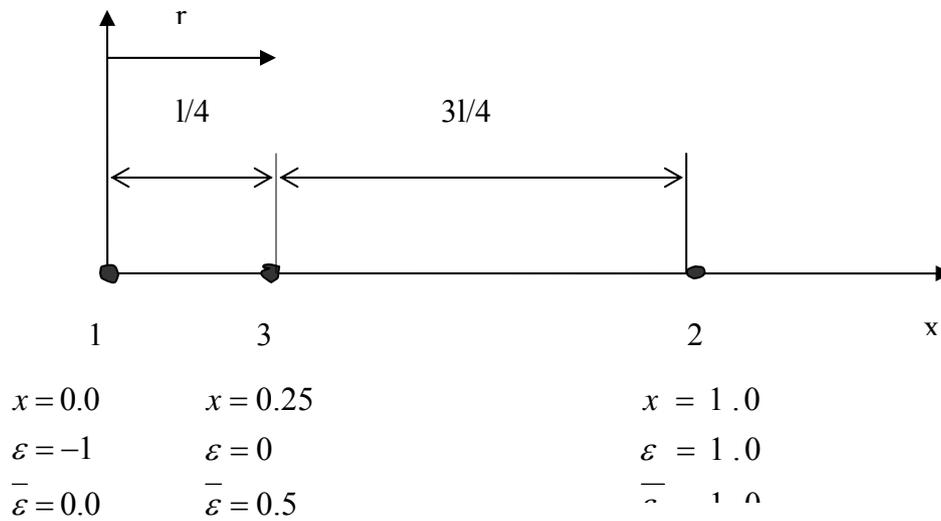


Fig IV-1 : Élément singulier

En introduisant les expressions des fonctions de forme (IV-4) dans l'expression du déplacement :

$$u_x = \sum_i N_i u_{x_i} = u_{x1} + x(2u_{x1} + 2u_{x2} - 4u_{x3}) + \sqrt{x}(3u_{x1} + 4u_{x2} - u_{x3}) \quad (IV-5)$$

En posant $x = r$

si « 1 » est un point singulier alors :

$$u_x = A_i^1 + A_i^2 \sqrt{r} + A_i^3 r \quad (IV-6)$$

avec :

$$A_i^1 = u_{x1}$$

$$A_i^2 = 3u_{x1} + 4u_{x2} - u_{x3}$$

$$A_i^3 = 2u_{x1} + 2u_{x2} - 4u_{x3}$$

Afin de représenter la singularité $1/\sqrt{r}$ dans l'expression de la contrainte l'expression (IV-6) doit être multipliée par $1/\sqrt{r}$

$$\begin{aligned}
t_i &= (A_i^1 + A_i^2 \sqrt{r} + A_i^3 r) \sqrt{\frac{l}{r}} \\
&= B_i^1 / \sqrt{r} + B_i^2 + B_i^3 \sqrt{r}
\end{aligned} \tag{IV-7}$$

Avec :

$$B_i^j = A_i^j \sqrt{l} \quad (j=1,2,3)$$

IV-3-Calcul des intégrales et problèmes de singularités :

La présence des termes en r^{-1} , r^{-2} , r^{-3} provenant des solutions fondamentales U et T et leurs dérivées dans les intégrales qui apparaissent dans les équations (III-5),(III-6), (III-11) entraîne une forte variation de l'intégrande et selon la position relative du point «P_i», la méthode de calcul des intégrales devrait être choisie [19],[75-97]

IV-3-1-Cas d'un élément d'intégration unidimensionnel:

$$I = \int_{-1}^{+1} N_n(\xi) U_{ij}(p, \xi) J(\xi) d\xi \tag{IV-8a}$$

$$J = \int_{-1}^{+1} N_n(\xi) T_{ij}(p, \xi) J(\xi) d\xi \tag{IV-8b}$$

1- Calcul de l'intégrale I :

- **Cas 1 :** Si le point «P_i» n'est pas sur l'élément d'intégration (**Fig IV-2**) : Les intégrales élémentaires (IV-8a) et (IV-8b) sont régulières et peuvent être résolues par la méthode de Gauss classique [73-74] selon la formule :

$$I = \sum_{m=1}^M N_n(\xi_m) U(p_i, \xi_m) J(\xi_m) W_m \tag{IV-9a}$$

$$J = \sum_{m=1}^M N_n(\xi_m) T(p_i, \xi_m) J(\xi_m) W_m \tag{IV-9b}$$

Pour le choix des points de Gauss (voir annexe D)

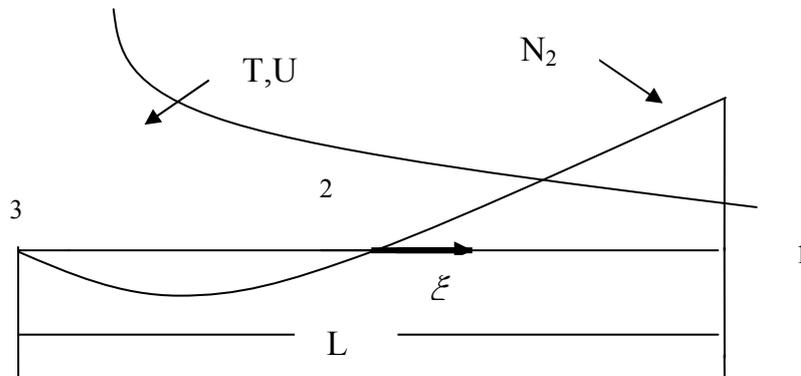


Fig IV -2 : Intégration quand P_i est un nœud de l'élément

- **Cas 2 :**
- Si la position de « P_i » et la valeur de n coïncident, dans ce cas T et U tendent vers l'infinie et la fonction de forme tend vers 1 (**Fig IV-3b**) : L'intégrale (IV-8a) peut être résolue par la méthode de Gauss modifiée appelée méthode de Gauss -Laguerre selon la formule suivante :

$$\int_0^1 f(\bar{\xi}) \ln(1/\bar{\xi}) d\bar{\xi} \approx \sum_{m=1}^M W_m f(\bar{\xi}) \quad (\text{IV-10})$$

Et les changements de variables :

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= 2\xi - 1 && \text{quand } P_i \text{ est en 1} \\ \bar{\xi} &= 1 - 2\xi && \text{quand } P_i \text{ est en 2} \end{aligned}$$

- si « P_i » est sur un nœud du milieu «3» (**Fig IV-3a**), dans ce cas l'élément d'intégration est subdivisé en deux régions, et l'intégration s'effectue sur $-1 < \xi < 0$ et sur $0 < \xi < 1$

$$\begin{aligned} \xi &= -\bar{\xi} && \text{pour la region 1} \\ \xi &= \bar{\xi} && \text{pour la region 2} \end{aligned}$$

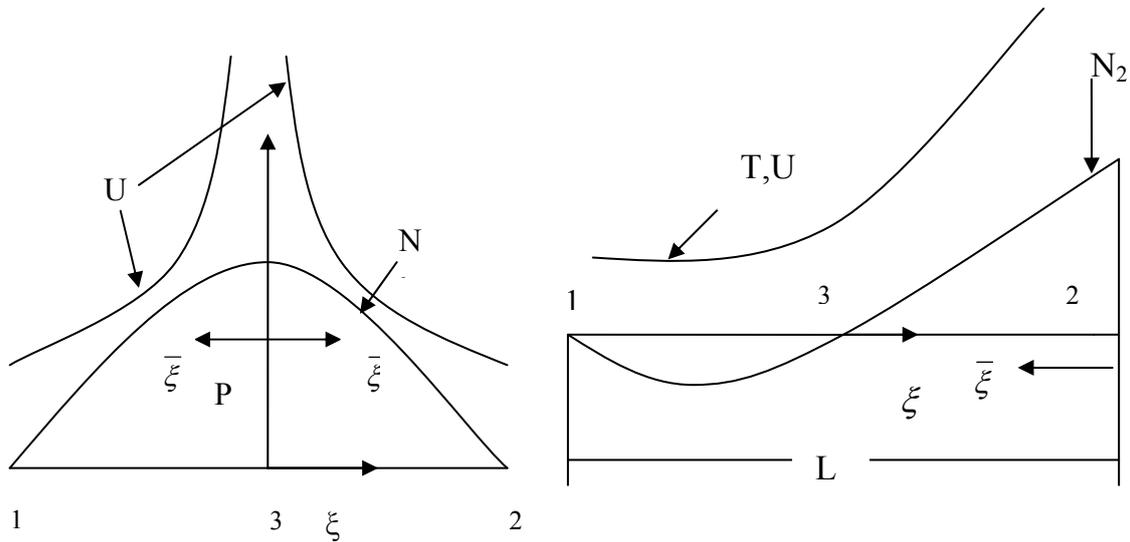


Fig IV-3a

Fig IV-3b

Fig IV-3 : Intégration sur un élément quadratique quand P_i et n coïncident

2- Calcul de l'intégrale J :

L'intégrale (IV-8b) existe sous forme de valeur principale de Cauchy mais les termes de la diagonale peuvent être calculés selon l'hypothèse du mouvement d'un corps rigide qui suppose qu'on ait un déplacement de corps rigide suivant une des directions des coordonnées cartésiennes [c.a.d un corps rigide qui n'est soumis à aucune force ($t_i = 0$) mais effectue un déplacement unitaire ($u_i = 1$) suivant une direction] et par conséquent :

$$\bar{H}^{ii} = - \sum_{j=1}^N \bar{H}^{ij} \quad (IV-11)$$

En utilisant l'Equ.(IV-11) on peut calculer les termes de la diagonale en fonction des autres termes (c.a.d les intégrales singulières en fonction des intégrales régulières).

IV-3-2-Cas d'un élément d'intégration bidimensionnel :

En élasticité tridimensionnelle l'élément d'intégration est un élément bidimensionnel et dans ce cas les intégrales (IV-8a) et (IV-8b) s'écrivent sous la forme :

$$\bar{I} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_n(\varepsilon, \eta) U_{ij}(p, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (\text{IV-12a})$$

$$\bar{J} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_n(\varepsilon, \eta) T_{ij}(p, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (\text{IV-12b})$$

- **Cas 1 :** si le point de collocation « Pi » est loin de l'élément d'intégration ces deux intégrales peuvent être résolues par la méthode classique de quadrature de Gauss selon la formule (**Fig IV-4**):

$$\bar{I} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K N_n(\varepsilon_m, \eta_k) U_{ij}(p_i, \varepsilon_m, \eta_k) J(\varepsilon_m, \eta_k) d\varepsilon_m d\eta_k \quad (\text{IV-13a})$$

$$\bar{J} = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K N_n(\varepsilon_m, \eta_k) U_{ij}(p_i, \varepsilon_m, \eta_k) J(\varepsilon_m, \eta_k) d\varepsilon_m d\eta_k \quad (\text{IV-13b})$$

- **Cas 2 :** mais si ce point est sur l'élément d'intégration cette méthode devient insuffisantes à cause de la faible singularité de l'intégrale (IV-12a) et la forte singularité de l'intégrale (IV-12b) (**Fig IV-5**)

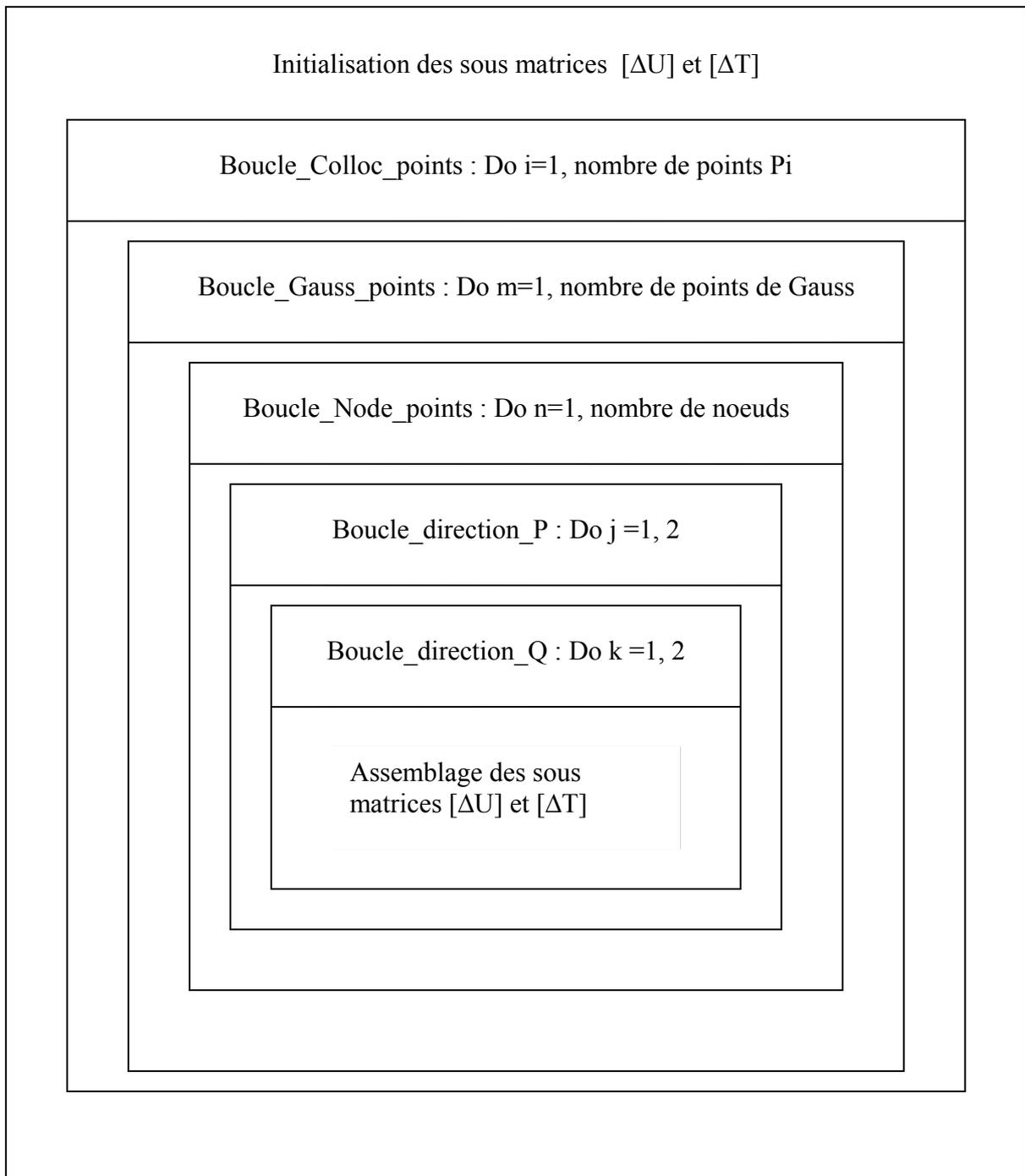


Fig IV-4 : Diagramme de calcul des intégrales régulières

1-Traitement de la faible singularité :

Quand le point de collocation est sur l'élément d'intégration ce type d'intégrale présente une faible singularité de type (1/r) du fait de la singularité de la solution fondamentale U :

- Cas1 : Le point de collocation est sur un nœud coin :

Pour calculer \bar{I} l'élément d'intégration carré est subdivisé en triangles (**Fig IV-6**) dont les sommets sont sur le nœud m où apparaît la singularité

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I^{m1} + I^{m2} \\ &= \sum_{s=1}^{s=2+1+1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_n(\varepsilon, \eta) U(p_i, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) \frac{\partial(\varepsilon, \eta)}{\partial(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta})} d\bar{\varepsilon} d\bar{\eta} \quad (\text{IV-14}) \end{aligned}$$

Où :

I_1^m : représente l'intégrale sur le triangle $\Delta 1$ quand le point de collocation est sur le nœud m

I_2^m : représente l'intégrale sur le triangle $\Delta 2$ quand le point de collocation est sur le nœud m

$(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta})$: Système de coordonnées (**Fig IV-6b**) définie par la transformation suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon = \sum_{n=1}^3 \bar{N}_n(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) \varepsilon_{l(n)} \\ \eta = \sum_{n=1}^3 \bar{N}_n(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) \eta_{l(n)} \end{cases} \quad (\text{IV-15})$$

Avec :

$l(n)$: numéro local du n^{eme} nœud (voir annexe F)

\bar{N}_n : Fonctions de forme définies par :

$$\begin{cases} \bar{N}_1 = \frac{1}{4}(1+\bar{\varepsilon})(1-\bar{\eta}) \\ \bar{N}_2 = \frac{1}{4}(1+\bar{\varepsilon})(1+\bar{\eta}) \\ \bar{N}_3 = \frac{1}{2}(1-\bar{\varepsilon}) \end{cases} \quad (\text{IV-16})$$

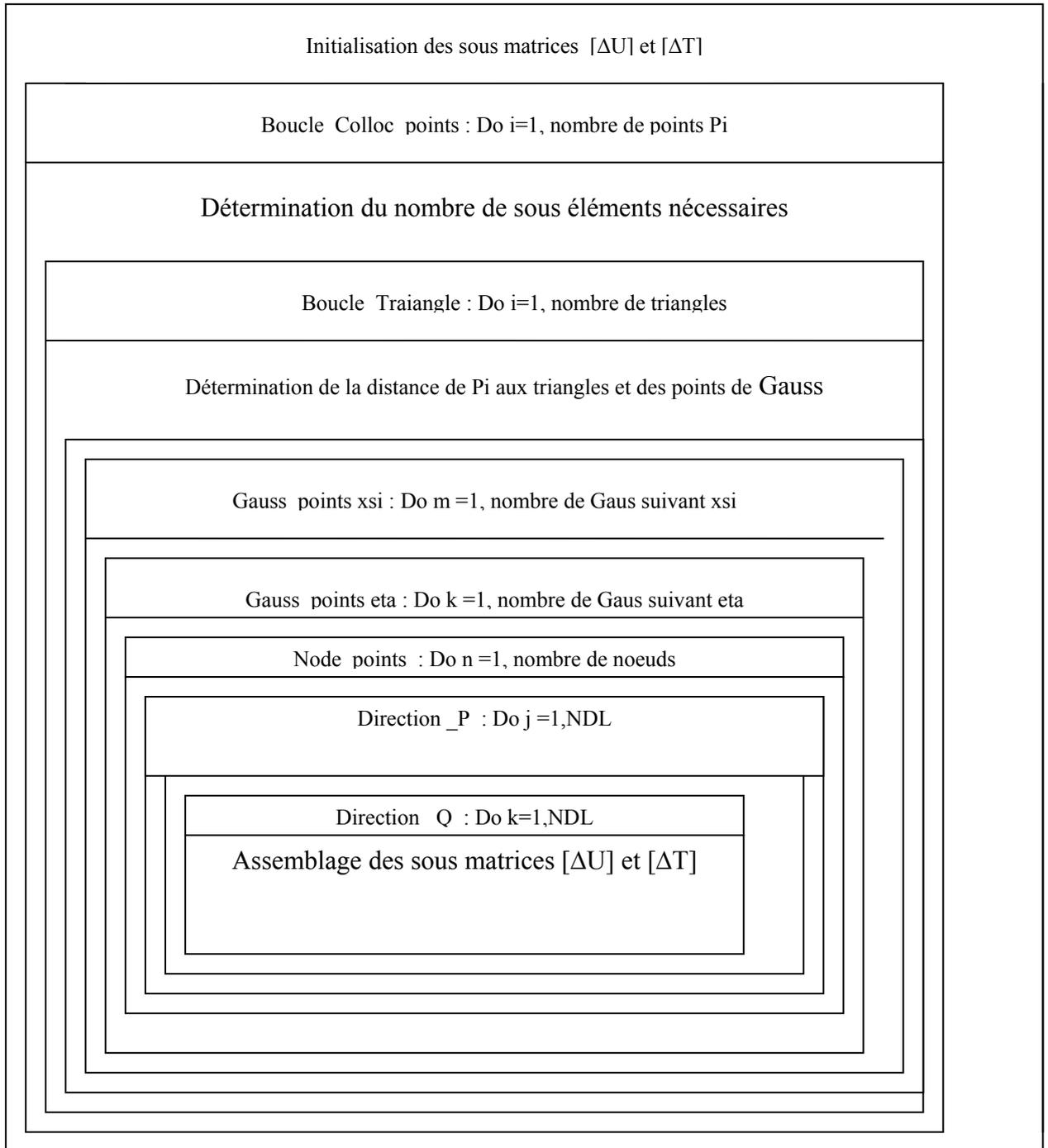


Fig IV-5 : Diagramme de calcul des intégrales singulières

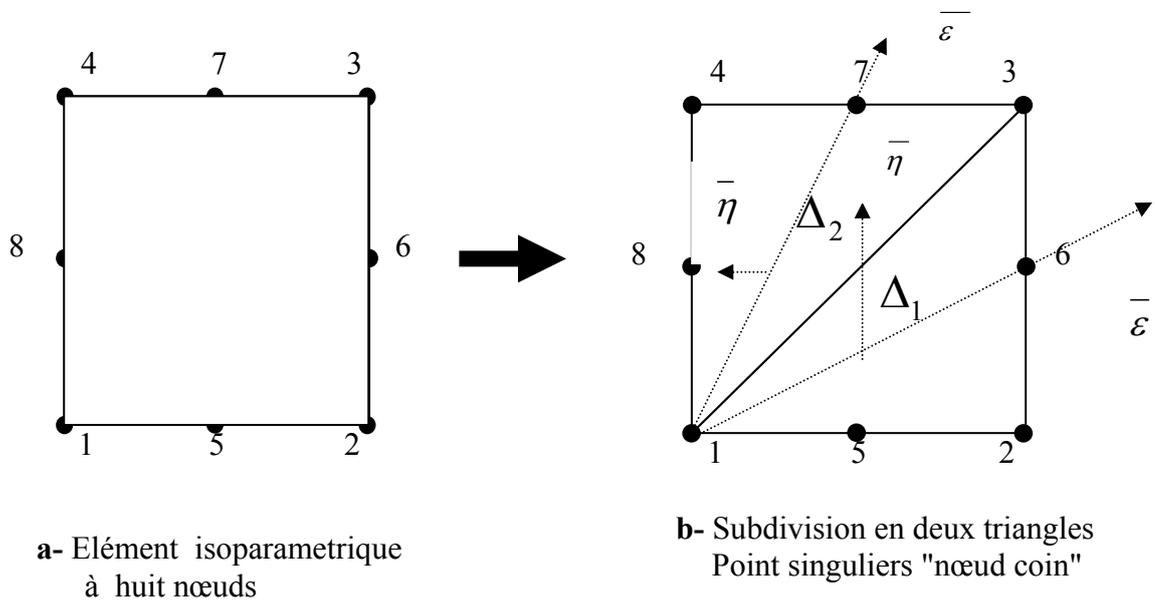


Fig IV-6 : Élément quadratique à huit nœuds
(Singularité sur un nœud coin)

• **Cas2 : le point de collocation est sur un nœud du milieu :**

Dans ce cas l'élément d'intégration est subdivisé en trois triangles (**Fig IV-7**) et par conséquent l'intégrale \bar{I} peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{I} = I^{m1} + I^{m2} + I^{m1}$$

$$= \sum_{s=1}^{s=3+1+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_n(\varepsilon, \eta) U(p_i, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) \frac{\partial(\varepsilon, \eta)}{\partial(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta})} d\bar{\varepsilon} d\bar{\eta} \quad (\text{IV-17})$$

Où :

I^m_3 , I^m_4 et I^m_5 désignent les intégrales sur les triangles Δ_3 , Δ_4 et Δ_5

2-Traitement de la forte singularité :

L'intégrale (IV-12b) présente une forte singularité et peut être résolue selon l'hypothèse du mouvement d'un corps rigide sus indiquée

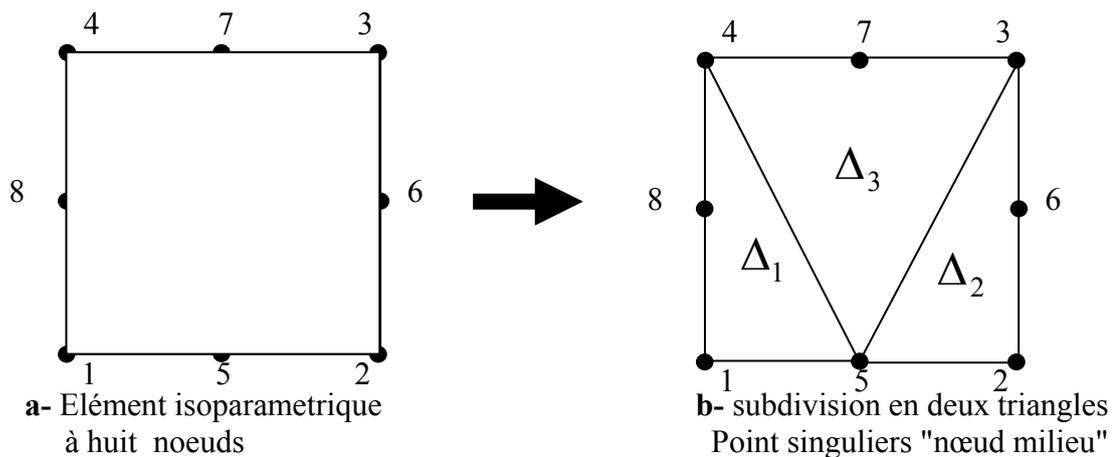


Fig IV-7 : Élément quadratique à huit nœuds
(Singularité sur un nœud du milieu)

IV-4-Implémentation numérique :

La résolution du système d'équation permettra la connaissance des inconnues aux frontières et par conséquent l'évaluation du facteur d'intensité des contraintes en utilisant la méthode d'extrapolation sus indiquée.

Le code mis au point pour ce calcul est en FORTRAN 90/95 , il est basé sur le concept de la programmation modulaire qui permet de rassembler les procédures dans des bibliothèques facilement utilisable par le programme principale. Dans notre code le programme principal fait appel à quatre bibliothèques (**FigIV-8**) :Utilité_lib , Geometrie_lib,Integration_lib et elasticité_lib

- Dans l'Utilité_lib sont rassemblés tous les sous-programmes qui permettent l'introduction des informations de base, les conditions aux frontières, l'assemblage et la résolution du système d'équation par la méthode d'élimination de Gauss.
- Dans la Geometrie_lib se trouvent les sous programmes nécessaires à la détermination des caractéristique géométrique et les fonctions de forme des éléments de la frontière.
- L'integration_lib contient les sous programmes qui permettent le traitement des intégrales régulières et les intégrales singulières.
- L'elasticité_lib permet le calcul des solutions fondamentales de Kelvin.

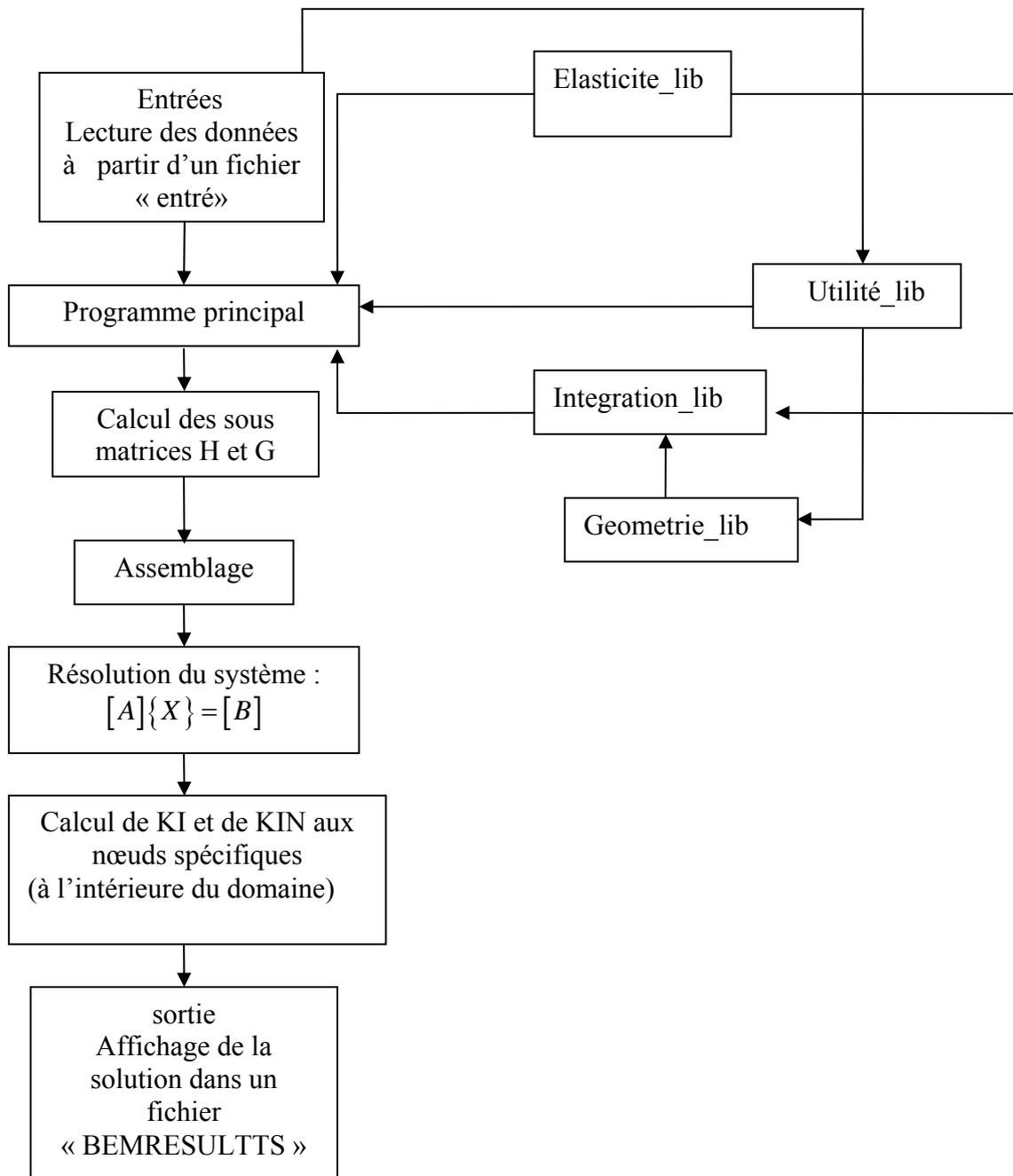


Fig IV-8:Schéma présentant les liaisons ente les différents modules pour le calcul de KI et KIN par éléments de frontière

IV-5-Application et validation des résultats :

IV-5-1-Cas d'une plaque fissurée :

Le facteur d'intensité de contrainte pour une plaque fissurée en mode I (Fig IV-9) est exprimé par [70] :

$$KI = C' \sigma \sqrt{\pi a} \quad (\text{IV-18})$$

Où :

C' : facteur de correction défini

$$C' = (1 - 0,1\chi^2 + 0,96\chi^4) \sqrt{1/\cos(\pi\chi)}$$

$$\chi = \frac{a}{b}$$

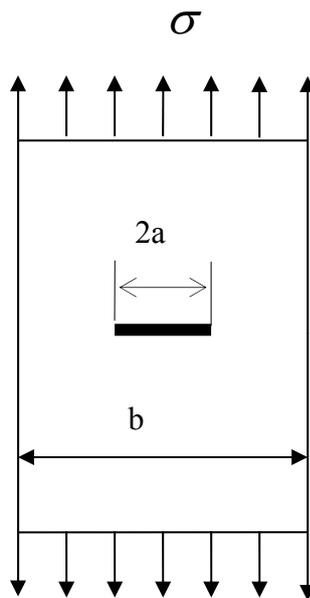


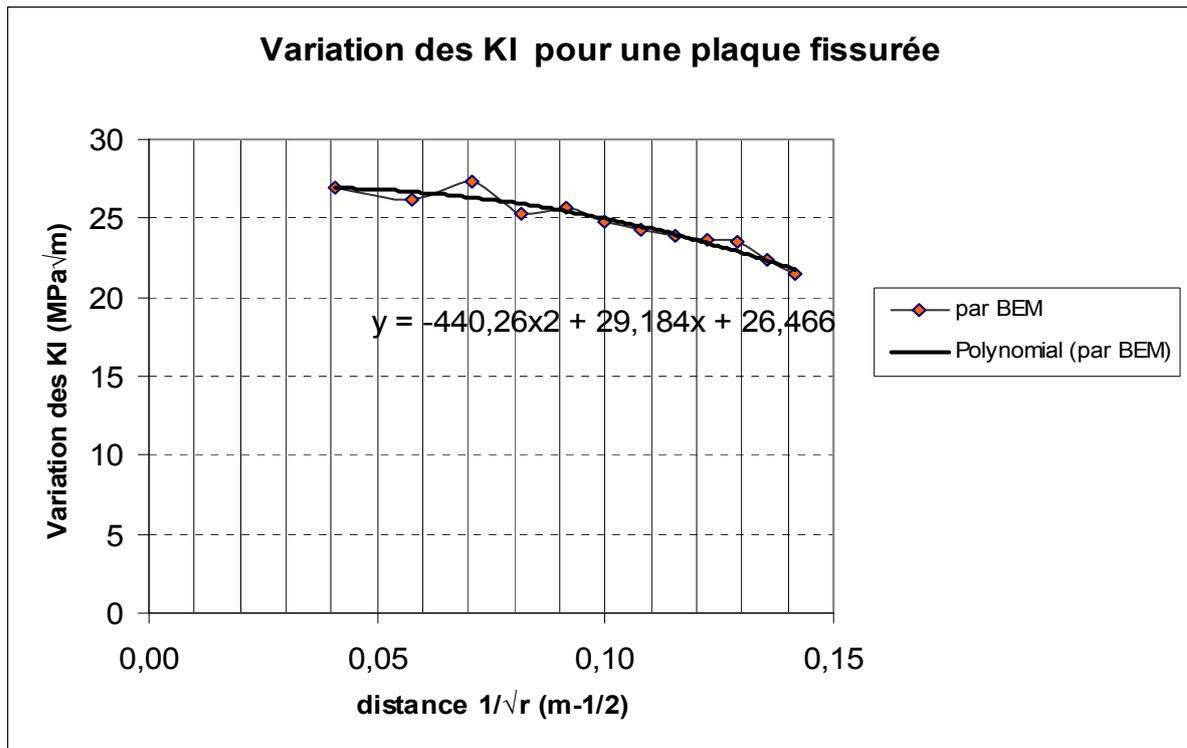
Fig IV -9 : Plaque fissurée

1-Calcul de KI par la méthode des éléments de frontières :

Soit une plaque carrée en acier ($\nu=0.3$, $E=200\text{GPa}$), contenant une fissure centrale de longueur $2a=0.02\text{m}$ et soumise à une traction suivant l'axe Y ($\sigma=100\text{MPa}$) (Fig IV-9)

Tableau IV-1 : Valeurs des KI pour une plaque fissurée :

\sqrt{r} (m ^{-1/2})	KI (Mpa√m)
4,08E-02	26,9888363
5,77E-02	26,2404851
7,07E-02	27,2685208
8,16E-02	25,302034
9,13E-02	25,6482708
0,1	24,7908291
0,10801234	24,2269505
0,11547005	23,8549864
0,12247449	23,6152317
0,12909944	23,4702033
0,13540064	22,3779608
0,14142136	21,4252663



**Fig IV -10 : Variation de KI pour une plaque fissurée
0,2mx0,2m,2a=0,02m,P=100MPa,E=200GPa,NU=0,3**

D'après le tableau (IV-1) l'extrapolation de la courbe $K_I = h(1/\sqrt{r})$ pour $r=0$ permet le calcul du facteur d'intensité des contraintes (Fig IV-10) :

$$KI = 26,466 \text{ MPa } \sqrt{m}$$

2-Calcul de KI par Ansys :

A Cause de la double symétrie de la plaque (Fig IV-11) seulement l'un quart est discrétisé

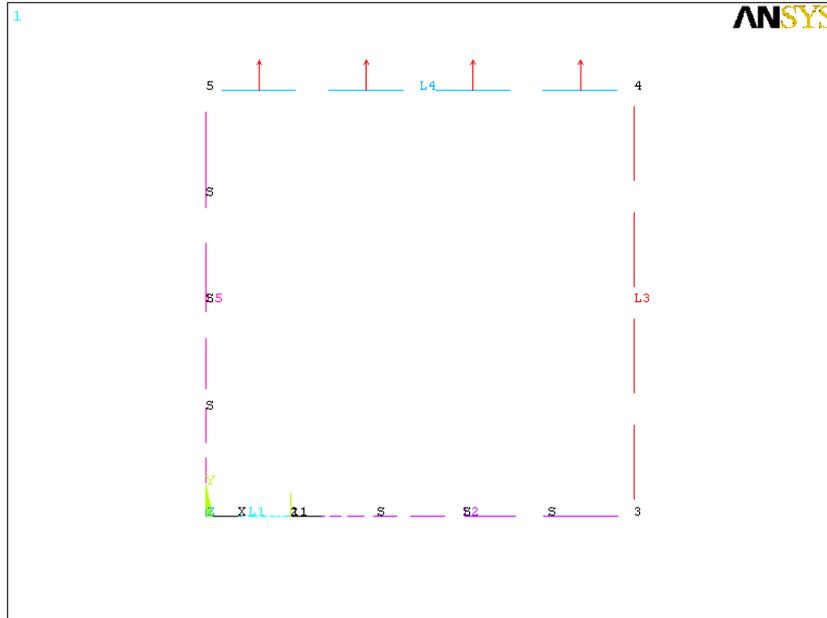


Fig IV-11 : Condition aux limites pour une plaque chargée

****** CALCULATE MIXED-MODE STRESS INTENSITY FACTORS ******

ASSUME PLANE STRAIN CONDITIONS

ASSUME A HALF-CRACK MODEL WITH SYMMETRY BOUNDARY CONDITIONS (USE 3 NODES)

**EXTRAPOLATION PATH IS DEFINED BY NODES: 2 15 14
WITH NODE 2 AS THE CRACK-TIP NODE**

**USE MATERIAL PROPERTIES FOR MATERIAL NUMBER 1
EX = .20000E+06 NUXY = .30000 AT TEMP = .00000**

****** KI = 26.533 , KII = .00000 , KIII = .00000**

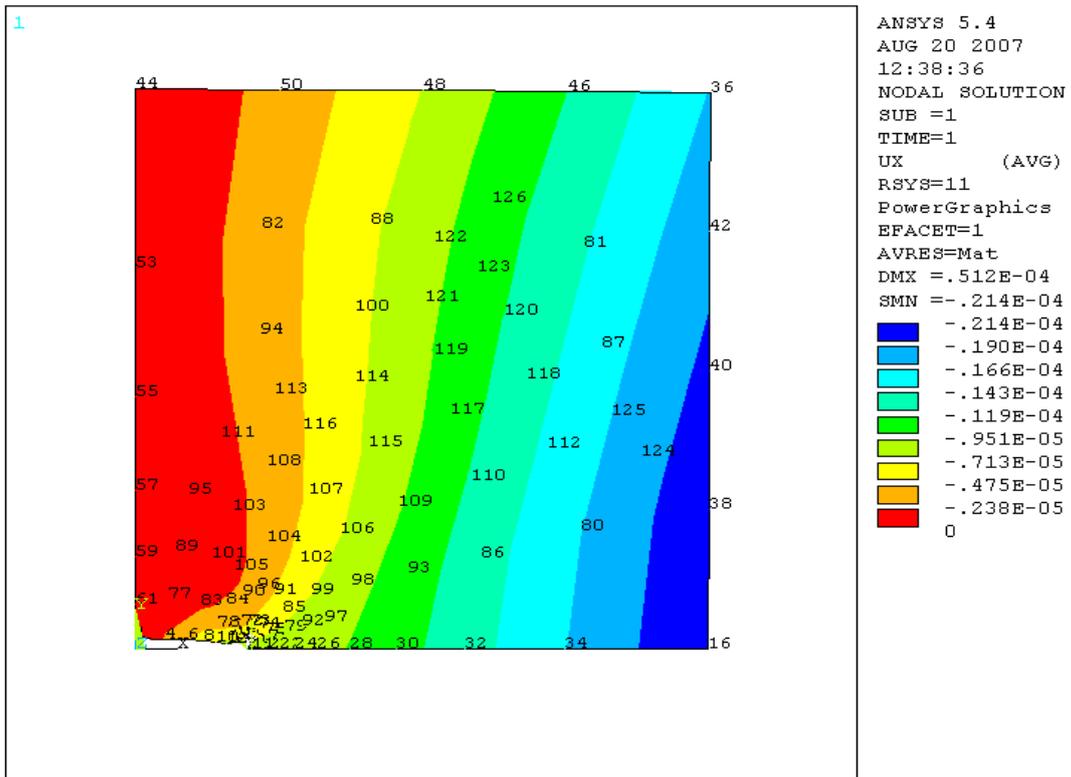


Fig IV-12 : Variation des déplacements U_x pour une plaque fissurée

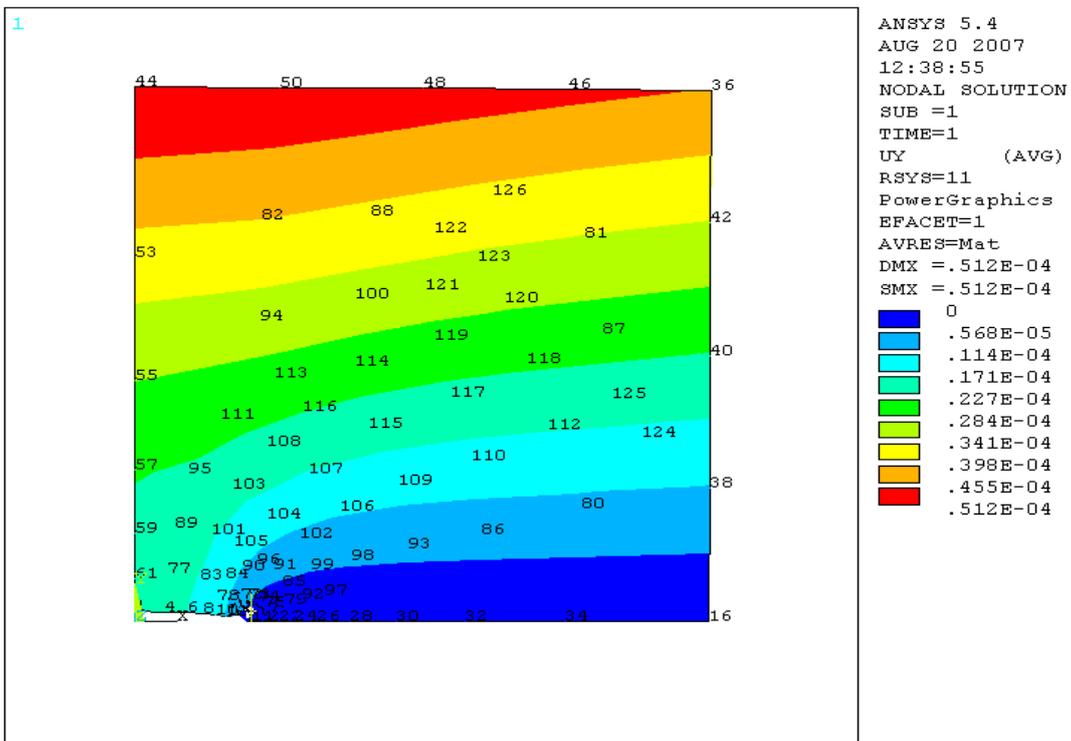


Fig IV-13 : Variation des déplacements U_y pour une plaque fissurée

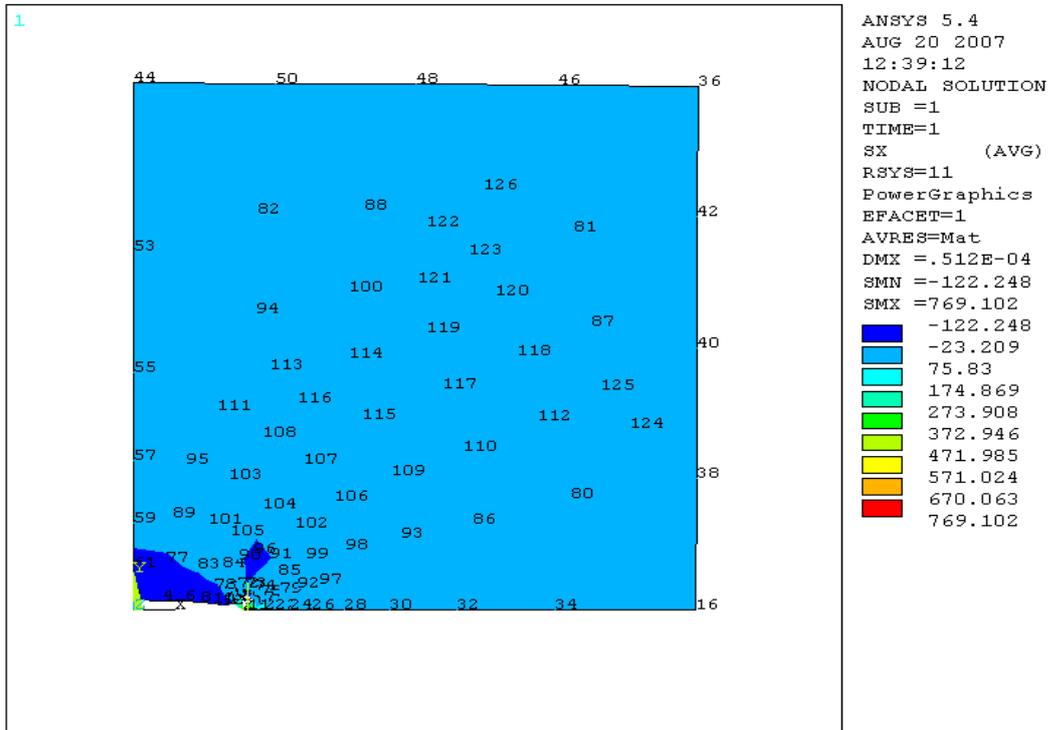


Fig IV-14 : Variation des contraintes σ_x pour une plaque fissurée

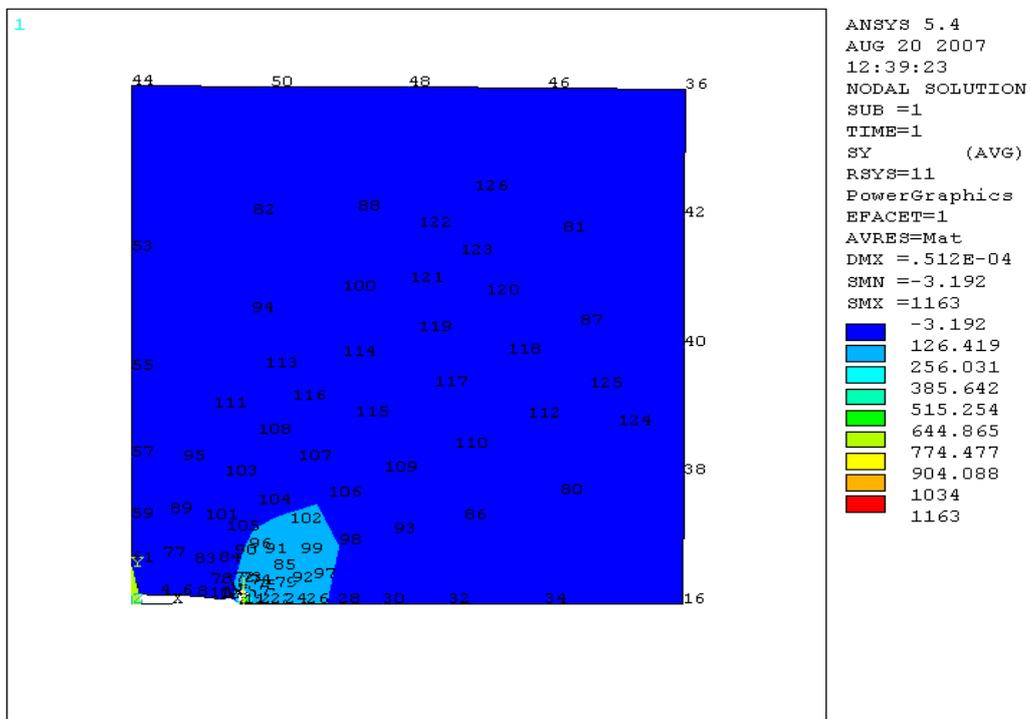


Fig IV-15 : Variation des contraintes σ_y pour une plaque fissurée

3-Validation des résultats:

Valeur de KI par PILKEY (analytique) = 25.68

Valeur de KI par ANSYS (FEM) = 26.533

Valeur de KI par BEM = 26.466

Valeur de l'erreur en % par rapport à l'Ansys = 0.25%

Valeur de l'erreur en % par rapport à PILKEY = 2.96%

IV-5-2-Cas d'un cylindre fissuré:

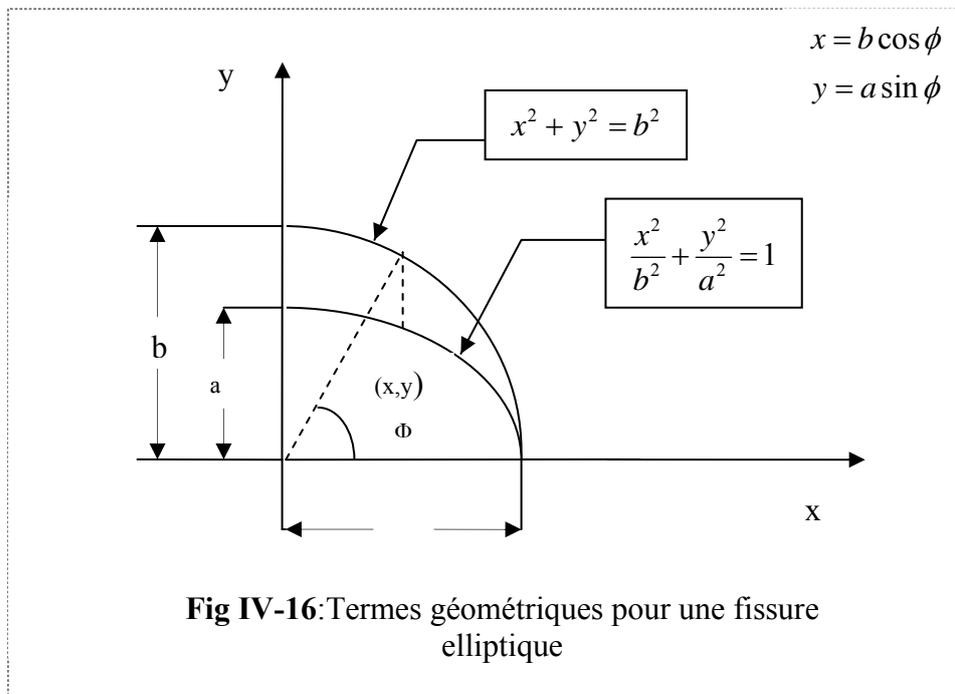
Dans les problèmes tridimensionnels, les fissures sont souvent considérées comme étant de forme elliptique (**Fig IV-16**)[18] et le facteur d'intensité de contrainte dans le cas d'un chargement symétrique est exprimé par [69] :

$$KI = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{E(k)} \left\{ \sin^2(\Phi) + (a^2/b^2)\cos^2(\Phi) \right\}^{1/4} \quad (\text{IV-19})$$

Avec :

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k \sin^2 \Phi}$$

$$k = 1 - \frac{a^2}{b^2}$$



Le facteur d'intensité des contraintes normalisé est défini par :

$$KIN = KI / P \sqrt{\pi R_1} \quad (IV-20)$$

Le champ des contraintes pour une fissure soumise à une distribution de Lamé et à une pression P est exprimé par [45] :

$$\sigma(x) = p \left[1 + \frac{R_1^2}{(2R_1^2 + t)t} \left[1 + \left(\frac{R_1 + t}{R_1 + x} \right)^2 \right] \right] \quad (IV-21)$$

1-Calcul des KI pour un cylindre fissuré par la méthode des éléments aux frontières :

Soit un cylindre épais soumis à pression intérieure et contenant une fissure semi-elliptique interne de longueur a (**Fig IV-25b**) et dont les caractéristiques sont :

$R_1=20\text{mm}$, $R_2=40\text{mm}$, $t= R_2- R_1$, $P=100\text{MPa}$, $E=210000\text{MPa}$, $\nu=0.3$

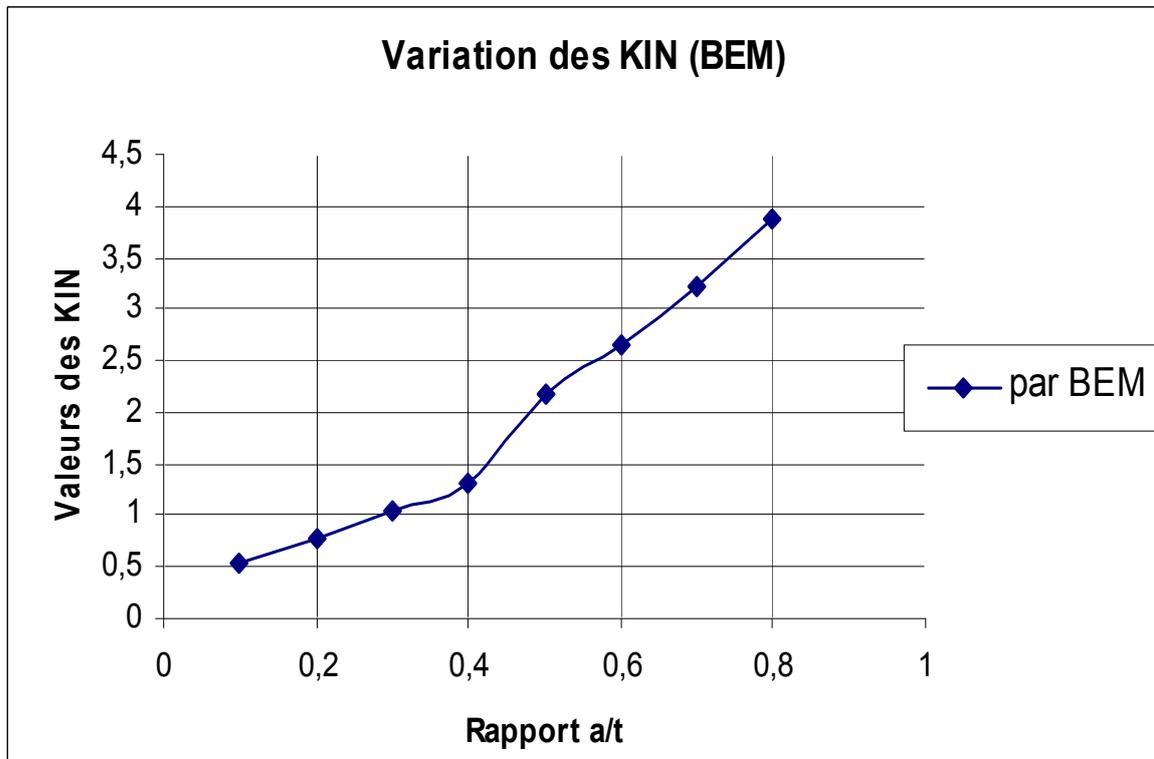


Fig IV-17 : Variation des KIN pour un cylindre fissuré (par BEM)

2- Calcul de KI par Ansys:

Le tableau IV-2 illustre les différentes valeurs des KI et des KIN déterminées par ANSYS

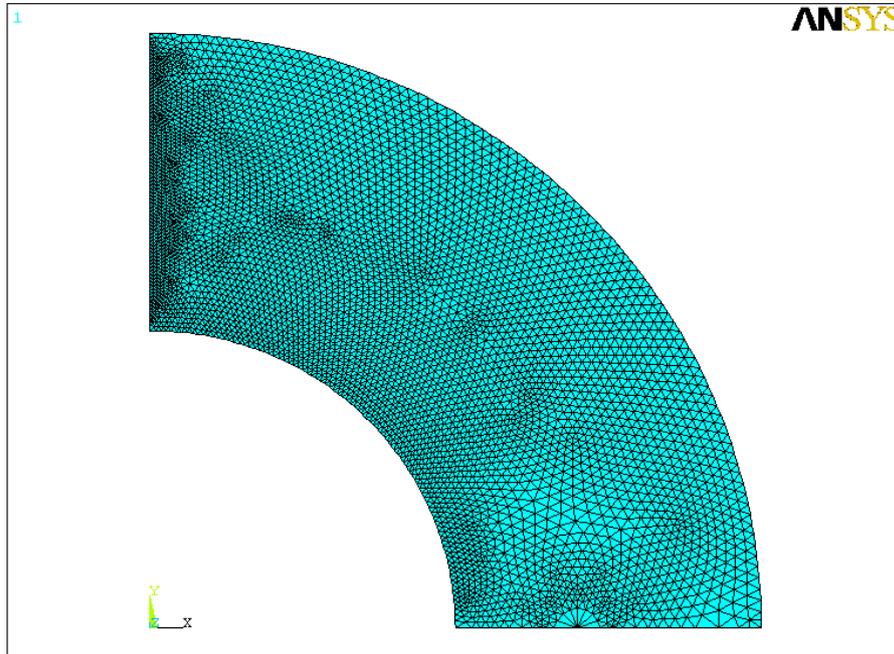


Fig IV-18 : Maillage d'un quart de cylindre par Ansys

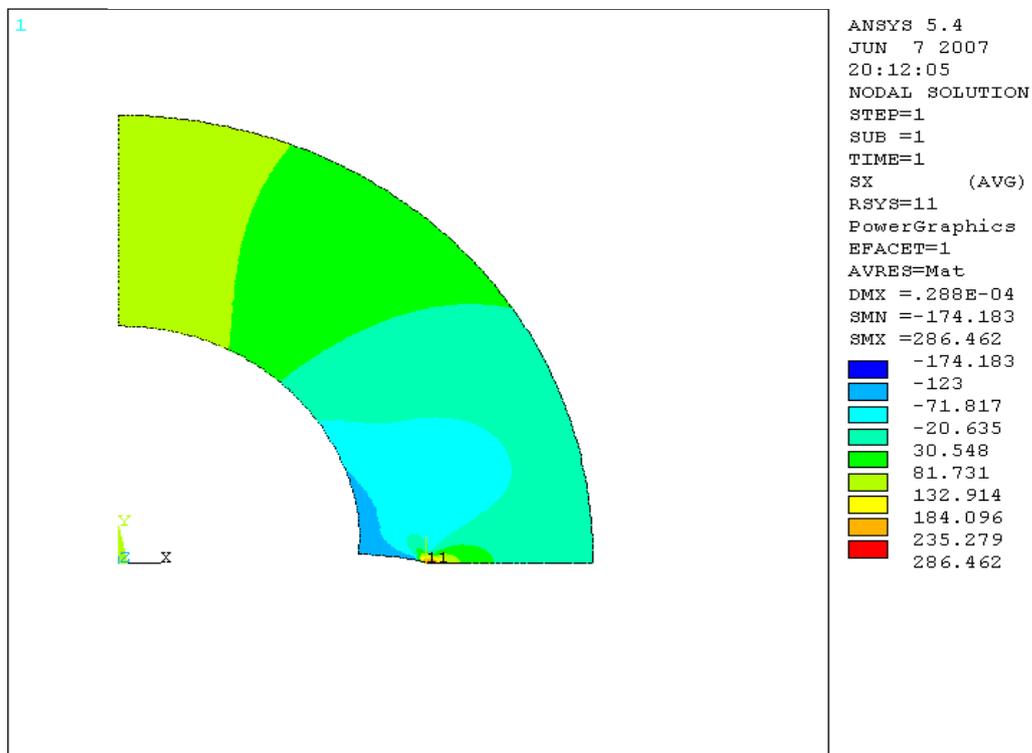


Fig IV-19 : Variation des contraintes σ_x pour un cylindre fissuré

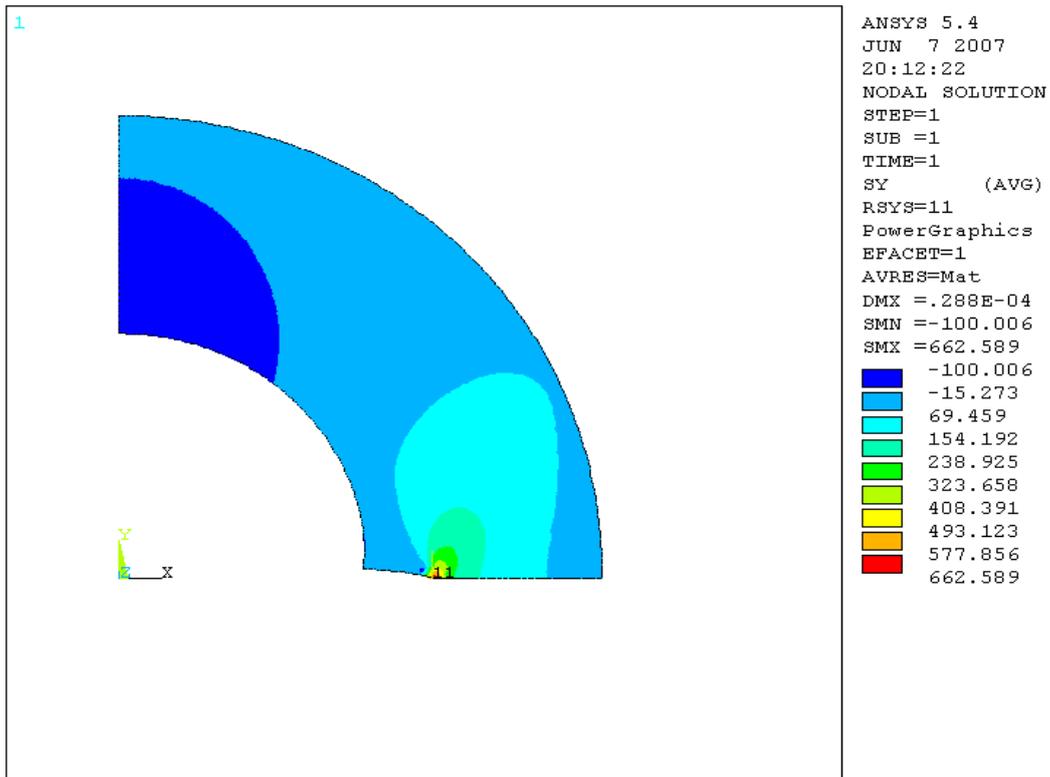


Fig IV-20 : Variation des contraintes σ_y pour un cylindre fissuré

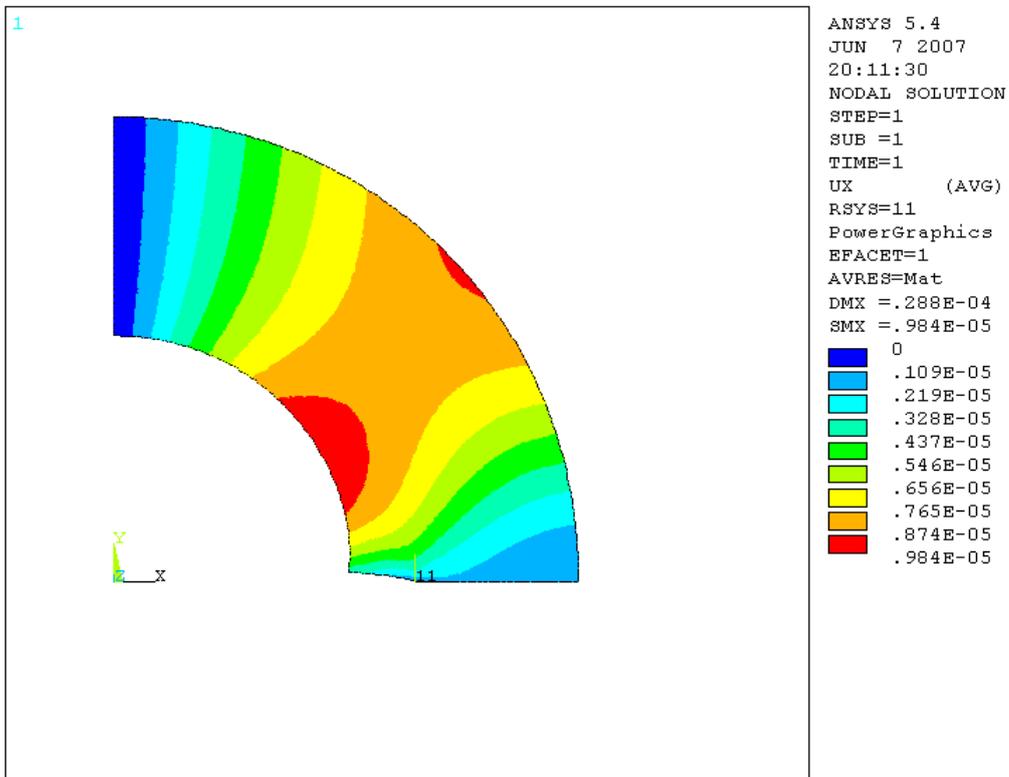


Fig IV-21 : Variation des déplacements U_x pour un cylindre fissuré

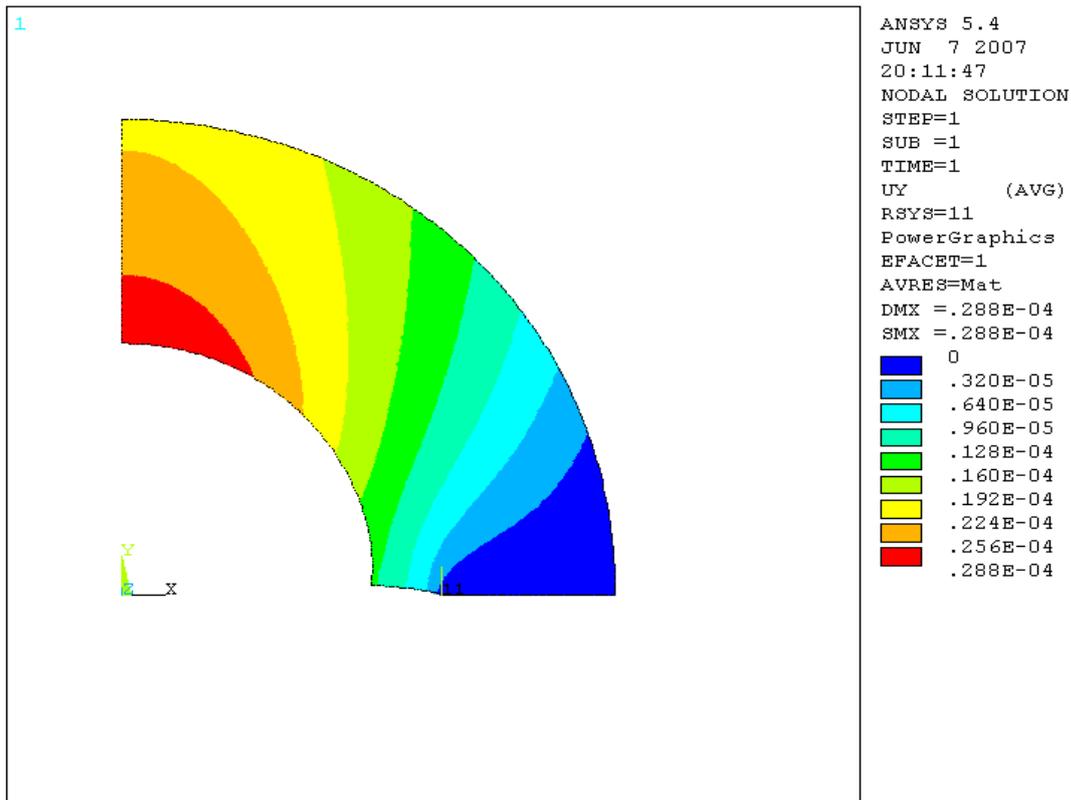


Fig IV-22 : Variation des déplacements U_y pour un cylindre fissuré

-Pour $a/t = 0.3$ par exemple, on obtient :

****** CALCULATE MIXED-MODE STRESS INTENSITY FACTORS ******

ASSUME PLANE STRAIN CONDITIONS

ASSUME A HALF-CRACK MODEL WITH SYMMETRY BOUNDARY CONDITIONS (USE 3 NODES)

**EXTRAPOLATION PATH IS DEFINED BY NODES: 122 2222 33664
 WITH NODE 122 AS THE CRACK-TIP NODE**

**USE MATERIAL PROPERTIES FOR MATERIAL NUMBER 1
 EX = .21000E+06 NUXY = .30000 AT TEMP = .00000**

****** KI = 23.485 , KII = .00000 , KIII = .00000 ******

Tableau IV-2 : Valeurs des KI et des KIN pour un cylindre fissuré (par Ansys) :

a/t	KI	KIN
0,1	13,636	0,543997694
0,2	18,17	0,724878123
0,3	23,485	0,936915946
0,4	29,221	1,165749238
0,5	35,947	1,434077815
0,6	43,757	1,745651736
0,7	57,16	2,280354075
0,8	64,121	2,558057796

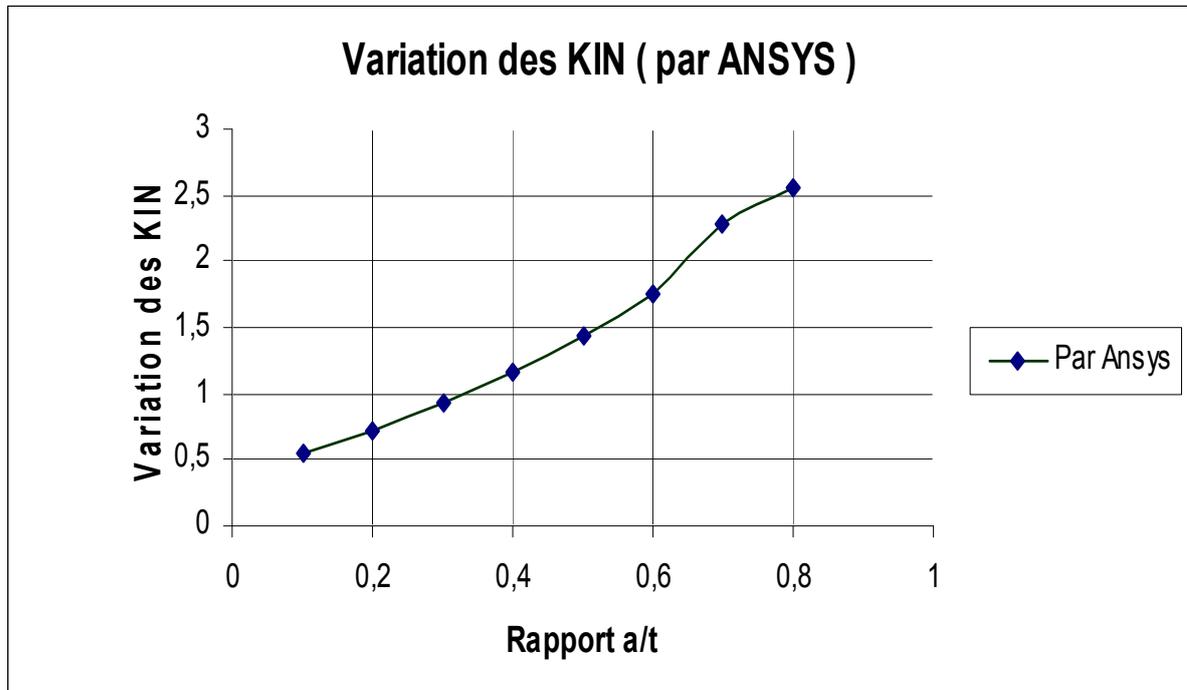


Fig IV-23 : Variation des KIN pour un cylindre fissuré (par ANSYS)

3-Validations des résultats :

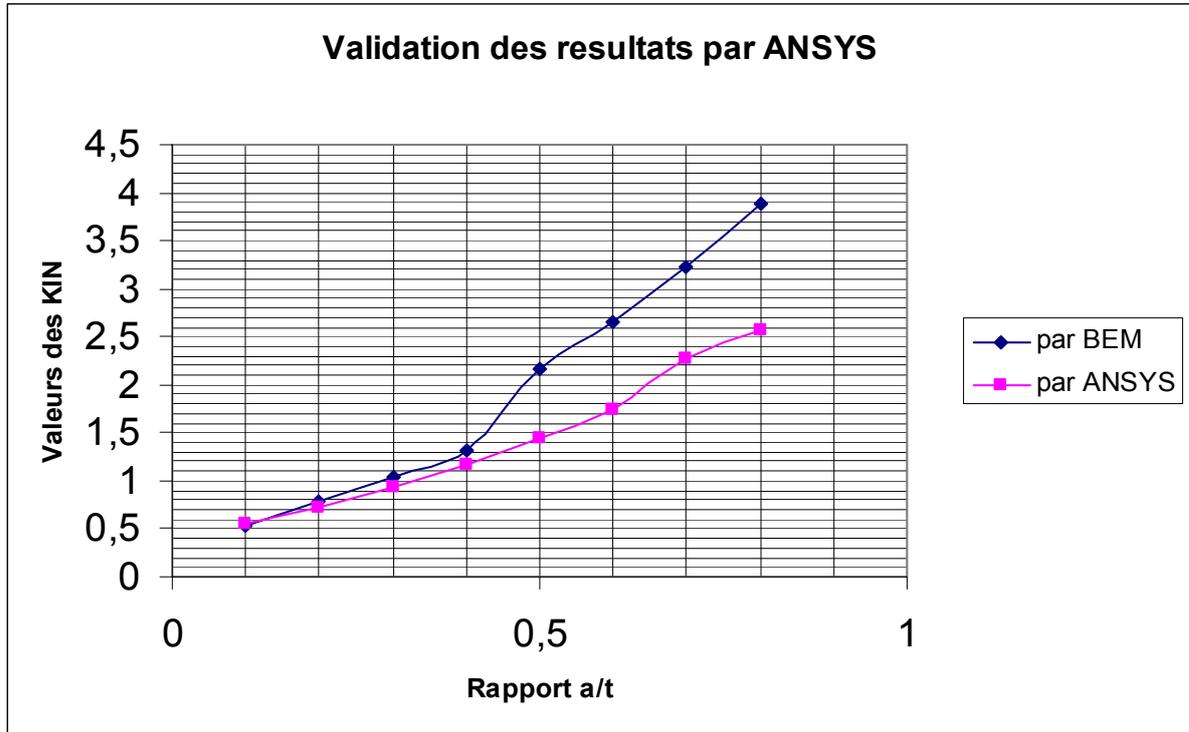


Fig IV-24 : Validation des résultats par ANSYS

4-Influence du champ des contraintes sur la variation des KIN :

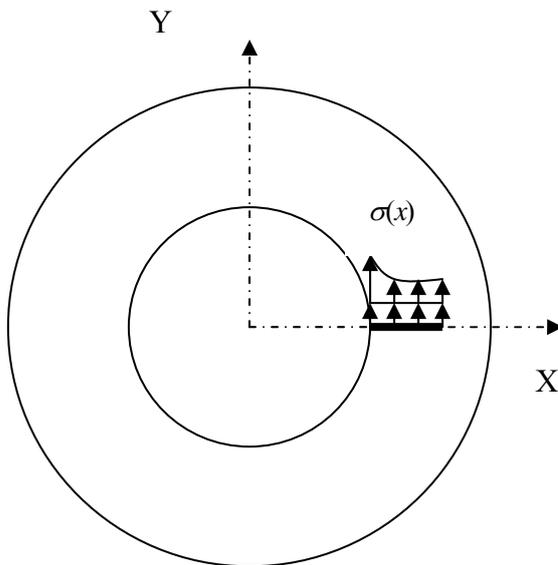


Fig IV-25a : Cylindre fissuré
(Cas1 : Avec pression)

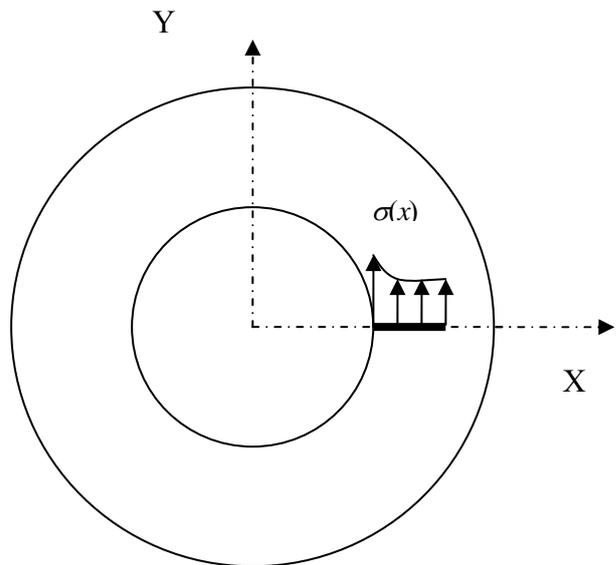


Fig IV-25b: Cylindre fissuré
(Cas 2 : Sans pression)

Fig IV-25 : Distribution des contraintes sur les facettes d'une fissure

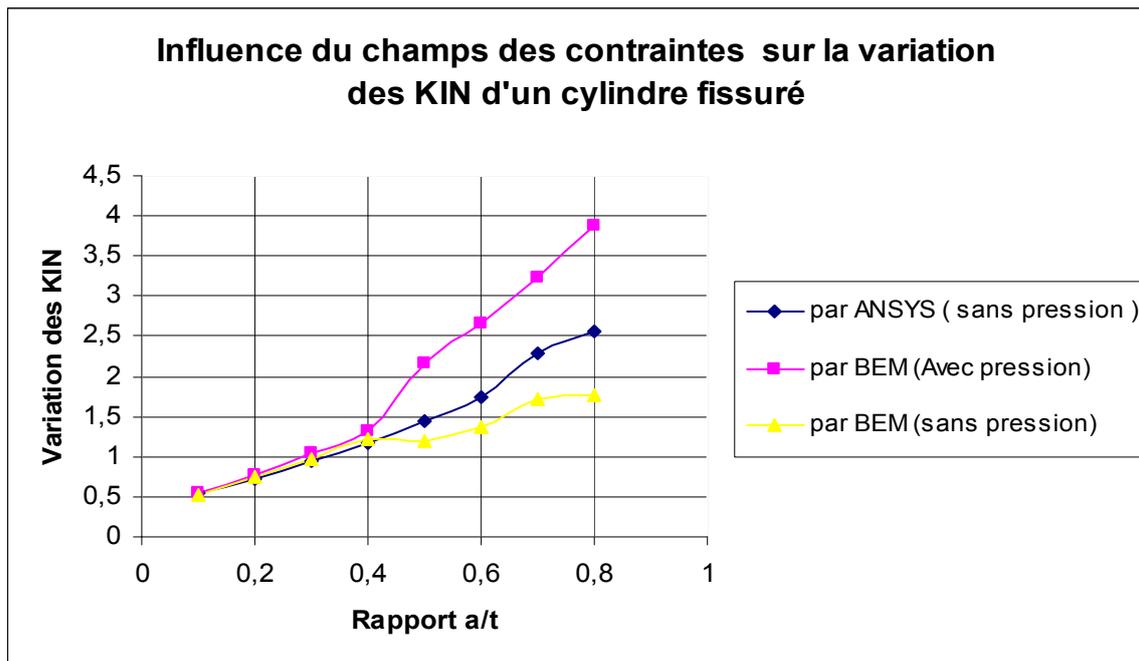


Fig IV-26 : Influence du champ des contraintes sur la variation des KIN pour un cylindre fissuré

Tableau IV-3 : Tableau comparatif des KIN pour deux cas de chargements (pour $\beta = 6^\circ$):

a/t	KIN par Ansys (sans pression)	KIN par BEM (avec pression)	Err en %	KIN par BEM (sans pression)	Err en %
0,1	0,54399769	0,540019724	0.71	0,53272216	2.07
0,2	0,72487812	0,781763766	7.84	0,753382903	3.93
0,3	0,93691595	1,038566234	10.85	0,979580728	4.55
0,4	1,16574924	1,317210272	12.99	1,225990724	5.16
0,5	1,43407782	2,17027389	51.33	1,199361887	16.37
0,6	1,74565174	2,654483201	52.66	1,377888306	21.07
0,7	2,28035408	3,220221696	41.21	1,703200768	25.31
0,8	2,5580578	3,876567849	51.54	1,773803924	30.66

5-Variation des KIN pour différents angles d'ouverture :

Le tableau IV-4 illustre les valeurs des KIN pour différents angles d'ouverture et différents cas de configuration dans le cas où les facettes de la fissure sont chargées (Fig 25a)

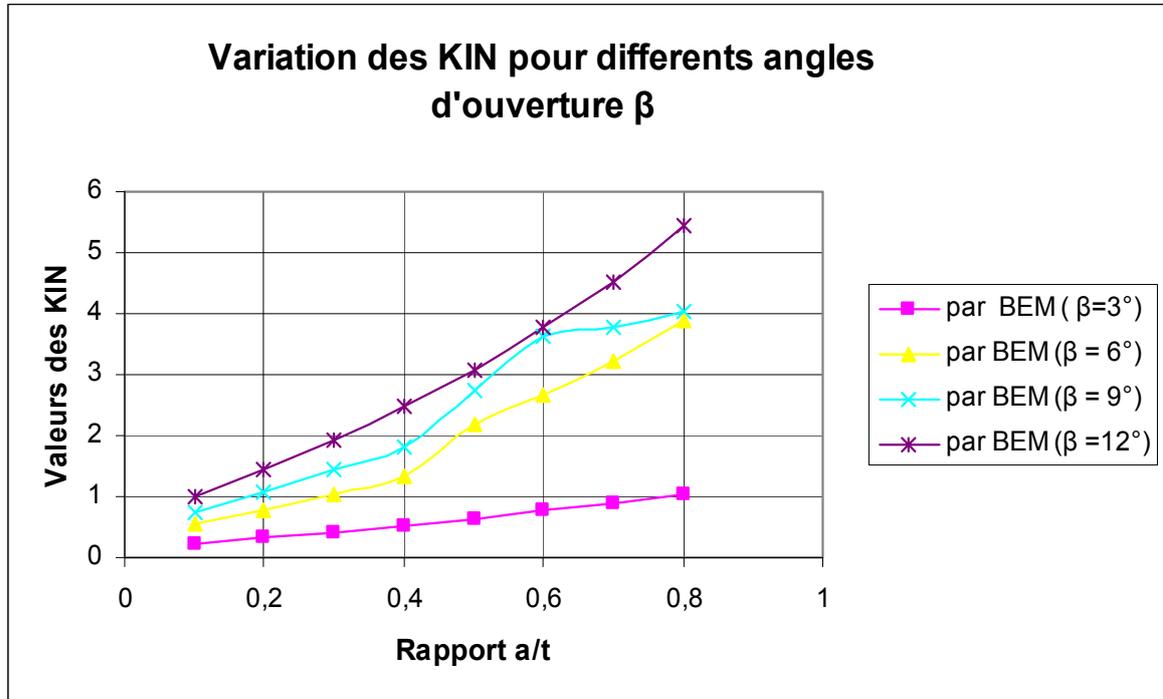


Fig IV-27 : Variation des KIN pour différents angles d'ouverture

Tableau IV-4 : Valeurs des KIN pour un cylindre fissuré par la présente approche (BEM)

a/t	KIN (β =3°)	KIN (β = 6°)	KIN (β = 9°)	KIN (β =12°)
0,1	0,222575697	0,540019724	0,751649075	1,003415027
0,2	0,325089883	0,781763766	1,086213021	1,460324395
0,3	0,423431669	1,038566234	1,436718401	1,944415079
0,4	0,525424596	1,317210272	1,818917785	2,473874139
0,5	0,638027888	2,17027389	2,729976104	3,072650928
0,6	0,759700579	2,654483201	3,61974982	3,761262673
0,7	0,888146797	3,220221696	3,778761219	4,531755243
0,8	1,032031374	3,876567849	4,024922359	5,447835617

Résultats et commentaires :

Afin de tester notre code de calcul par éléments de frontières pour la détermination du facteur d'intensité des contraintes ; on a tout d'abord traité le cas d'une plaque fissurée ensuite on a procédé à une application beaucoup plus industrielle qui est le cas d'un cylindre épais, fissuré et soumis à une pression intérieure.

Dans le cas d'une plaque fissurée, le test de validation a montré que l'erreur par rapport à un logiciel d'éléments finis (ANSYS) est environ 0.25% et par rapport à la méthode analytique [70] est de 2.96% .

Dans le cas d'un cylindre fissuré, le calcul des facteurs d'intensité des contraintes pour différents cas de configurations fait apparaître une bonne corrélation des résultats trouvés avec ceux déterminés par ANSYS dans le cas des fissures non profondes seulement ($a/t < 0.4$)(**Fig IV-24**).

Le décalage des résultats qui apparaît dans le cas des fissures profondes, nous a conduit à considérer un autre type de chargements avec différents cas de configurations (**Fig IV-25**) et analyser par la suite l'influence du champ des contraintes appliqué aux facettes sur la détermination du facteur d'intensité des contraintes au voisinage d'une fissure représentée par une entaille en utilisant la méthode des éléments de frontières.

En conclusion, le graphique (**Fig IV-26**) a montré que le champ des contraintes appliqué aux facettes de la fissure influe légèrement sur la détermination des facteurs d'intensité des contraintes pour le cas des fissures non profondes mais son influence dans le cas des fissures profondes est considérable et dépend étroitement de l'angle d'ouverture (**Fig IV-27**).

Conclusion générale

En bibliographie, plusieurs stratégies ont été proposées pour l'analyse des problèmes fissurés en utilisant la méthode des éléments de frontières. Cependant, la représentation d'une fissure par une entaille est l'une des stratégies utilisées pour la résolution des problèmes symétriques.

Notre travail consiste alors à déterminer le facteur d'intensité des contraintes pour un cylindre épais, soumis à une pression intérieure et contenant une fissure représentée par une entaille en utilisant la méthode des éléments de frontières.

Nous avons tout d'abord rappelé les théories et les hypothèses de la mécanique linéaires de la rupture qui entrent dans notre cadre d'étude.

Ensuite, nous avons présenté les bases théoriques nécessaires à l'implémentation numérique des équations intégrales.

Enfin, nous avons présenté les différentes techniques de calcul des facteurs d'intensités des contraintes et les types d'éléments choisis pour la représentation de la singularité au voisinage des fissures.

Et puisque l'efficacité de la méthode des éléments de frontières est basée sur la précision de l'évaluation des intégrales, nous avons pris en considération les méthodes de traitement des intégrales qui apparaissent dans la résolution numérique des équations intégrales.

Quand le point de collocation est loin de l'élément d'intégration les intégrales sont régulières et peuvent être résolues par la méthode classique de Gauss mais dans ce cas la notion de proximité et le choix des points de Gauss sont étroitement corrélés d'où la nécessité d'introduire un facteur de sévérité.

Et quand le point de collocation est sur l'élément d'intégration les intégrales deviennent singulières et la méthode de Gauss ne peut être appliquée.

En général, dans la méthode des éléments de frontières et selon l'ordre de singularités, nous sommes confronté à résoudre deux types d'intégrales singulières :

Les intégrales faiblement singulières et les intégrales fortement singulières.

Pour le traitement des intégrales faiblement singulières nous avons développé la méthode de subdivision qui consiste à subdiviser l'élément d'intégration en sous éléments et ceci selon la position de la singularité et faire par la suite la sommation des intégrales.

Pour le traitement des intégrales fortement singulières nous avons présenté seulement l'hypothèse du mouvement d'un corps rigide qui permet de transformer directement ces intégrales en intégrales régulières.

Finalement, pour concrétiser ce travail nous avons tout d'abord traité le problème d'une plaque contenant une fissure centrale et puis nous avons entamé une application beaucoup plus industrielle qui est le cas des cylindres fissurés et analysé par la suite les facteurs influençant sur la détermination du facteur d'intensité des contraintes au voisinage d'une fissure représentée par une entaille en utilisant cette approche.

En conclusion, la représentation d'une fissure par une entaille permet le passage d'un problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel sans tenir compte de l'effet du front, cependant l'effet d'ouverture et l'effet du champ des contraintes persistent.

En effet, Cette étude a permis de mettre en évidence l'influence du champ des contraintes appliqué aux surfaces d'une fissure représentée par une entaille sur la détermination du facteur d'intensité des contraintes, en utilisant la méthode des éléments aux frontières.

Bibliographies:

- [1] :D.Broek, “Elementary engineering fracture mechanics”, Martinus Nijhoff publishers, Taipei, 1986
- [2] :K.B.Broberg, “Cracks and fracture”, Academic Press, San Diego, 1999
- [3] :A.A.Griffith, “The phenomena of fracture and flow in solids” Philosophical Transactions”, series A221 (1920), 163-198
- [4] : Wei-liang Wu “Boundary element formulations for fracture mechanics problems”, Phd, university Wollongong Australia (2004)
- [5]:Green,G., “An essay on the application on Mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism”, Nottingham (1828)
- [6]:Betti,E., “Theoria dell’Elasticita, il Nuovo Cimento”, Ser.2, pp.7-10 (1872)
- [7]:Somigliana, C, “Sopra l’equilibrio di un Corpo Elastico Isotropo, il Nuovo Cimento”, Ser.3, pp.17-20(1885)
- [8]:Fredholm,I, “Sur une classe d’équation fonctionnelles”, Acta Mathematica”, Vol.27, pp.365-390(1903)
- [9] :Batoz J.L, Dhatt G, “Modélisation des structures par éléments finis”, Hermes, Paris, (1990)
- [10] : Gouri Dhatt, Gilbert Touzot, “Une présentation de la méthode des éléments finis”. 2^{ème} édition (1987)
- [11] :O.C Zienkiewicz, “The finite element method”, 3rd edition, Mc Graw-hill (1977)
- [12]:Jean-Charles Craveur, “Modélisation des structures, calcul par éléments finis”. édition (masson) (1997)
- [13]: Robert D.Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha “Concept and application of finite element analysis” 3 éd(1988)
- [14]: Marc Bonnet, “Equations intégrales et éléments de frontière (applications en mécanique des solides et des fluides)” CNRS Editions (EYROLLES)(1995)
- [15]:W.S.Hall, “The boundary element method” kluwer academic publisher London (1994).
- [16]:C.A Brebbia and J.Dominguez, “Boundary elements an introductory course” second edition (1996)
- [17] :CETIM, “application de la méthode des équations intégrales à la mécanique” rapport interne, senlis, France, 1978
- [18]: T.A Cruse, “Boundary element analysis in computational fracture mechanics” kluwer academic publishers (1988)
- [19]: Beer,G.and Dunser,Ch.(2000) “Boundary element analysis of problems in tunnelling Developments in Theoretical Geomechanics” (D.W.Smith and J.P.Carter eds.) AA. Balkema, Rotterdam, 103-122
- [20] : W.S Venturini, “Boundary element method in geomechanics” Springer-Verlag (1983).
- [21] : Banergee, P.K and Butterfield, R., “Boundary element methods in engineering science”, Mc Graw-Hill, New York (1981)

- [22] : Gernot Beer ,“ programming the boundary element method”edition (Wiley) (2001)
- [23] : J.T.Katsikadelis “ Boundary elements (theory and application) ”éds (Elsevier) (2002)
- [24] : George E. Blandford,“ Two- dimensional stress intensity factor computation using the boundary element method ” Int. Journal for numerical methods in engineering,Vol.17,387-404(1981)
- [25] :P.V. Mareal “ Three-dimensional finite element analysis for fracture mechanics”,IntJ.L,Swedlow(Ed). Physical problem and computational solutions ASME (1972)
- [26] : D.M.Tracy , “3D singularity element for evaluation of K along an arbitrary crack”,Int.J.Fract.9(1973)340-343
- [27] :S.N.Atluri,K.Kathiresan, “3D analysis of surface flaws in thick walled reactor pressure-vessels using displacement –hybrid finite element method ”.Nucl.Engrg.Des.51(1979)163-176
- [28] : I.S.Raju, J.C. Newman Jr., “ stress intensity factors for wide range of semi-elliptical surface cracks in finite –thickness plate”,Engrg .Fract.Mech.11(1979)817-829
- [29] : K.J.Kirkhope,R.Bell,J.Kirkhope, “ Stress intensity factors for single and multiple semi-elliptical surface cracks in pressurized thick –walled cylinders” ,Int.J.Press. Vess.Pip 47 (1991)247-257
- [30] : T.A.Cruse, “Boundary integral equation method for three-dimensional elastic fracture mechanics analysis”,AFOSR –Tr-75-0813(1975)
- [31] :H.D.Bui, “An integral equation method for solving the problem of a plane cracks of arbitrary shape” ,J.Mech .Phy.Solids 25(1977)29-39
- [32] :C.L.Tan,R.T.Fenner, “Elastic fracture mechanics analysis by boundary integral equation method ”,Proc.R.Soc.London,Ser.A 369 (1979)243-260
- [33] : J.Heliot,R.C.Labbeng,A.Pellissier-Tanon, “Semi elliptical cracks in a cylinder subjected to stress gradients”,ASTM STP 667 (1979)341-364
- [34]: M.L.Luchi,S.Rizzuti, “Boundary elements for three –dimensional elastic cracks analysis” ,”Int.J.Numer.Meth.Engrg.24(1987)2253-2271
- [35]: Z.H.Jia,D.J.Shippy,F.J.Rizzo, “Three-dimensional elastic crack analysis using singular boundary elements” “Int.J.Numer.Meth.Engrg.28(1998)2257-2273
- [36] : T.n.Farris,M.Liu, “ Boundary element crack closure calculation of three-dimensional stress intensity factors”Int.J.Frct.60 (1993)33-47
- [37]: Chai Guozhong , Zhang Kangda ,“Stress intensity factor for semi elliptical surface cracks in plates and cylindrical pressure vessels using the hybrid boundary element method” Engineering fracture Mechanics Vol,52,4,pp1035-1054(1995).
- [38]H.Nisitani,Y.Murakami, “stress intensity factors of an elliptical crack or semi elliptical crack subject to tension” ,Int.J.Fract. 10(3)(1974) 353-368

- [39]: Y.Murakami,“Analysis of stress intensity factors of modes I,II,III for inclined surface cracks of arbitrary shape” ,Engrg.Fract.Mech.22(1985) 101-144
- [40]: M.Isida,T.Yoshida,H.Noguchi, “ Tension of finite-thickness plate with a pair of semi elliptical surface cracks” ,Engrg.Fract.Meth. 35 (1990) 961-965
- [41]: D.Chen,H.Nisitani,K.Mori, “Stress intensity factors for an internal semi elliptical surface crack in cylindrical pressure vessels”, Trans.JSME,Ser.A 55 (510)(1989) 1537-1542
- [42]: N.I.Iokimidis, “A natural approach to the introduction of finite –part integrals into crack problems of three –dimensional elasticity,” Engrg .Fract.Mech.16 (1982) 669-673
- [43]: N.I.Iokimidis , “Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three dimensional elasticity” , Acta Meth ,45 (1982) 31-47.
- [44]: L.J.Gray,L.F.Martha,A.R.Ingraffea, “Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis ,”Int.J.Numer.Meth.Engrg.29(1990)1135-1158.
- [45]: Zheng.X.J.and Glinka .G. “ Weight functions and stress intensity factors for longitudinal semi-elliptical cracks in thick-walled cylinders ”.ASME.Journal of Pressure Vessel technology,(1995),117,383-389
- [46]: Kiciak.A.Glinka.G.and Burns.D.J. “ Weight functions for external longitudinal semi-elliptical surface crack in thick walled cylinder” ASME.Journal of Pressure Vessel technology,(1997),119,74-82
- [47]: Zheng .X.J , Kiciak.A. and Glinka .G. “Weight functions and stress intensity factors for internal surface semi-elliptical crack in thick-walled cylinders”Engrg fracture mechanics ,58 , 3 ,207-221(1997)
- [48]: C.F.Shih,H.G.de Lorenzi ,M.D.German, “Crack extension modelling with singular quadratic isoparametric element”,Int.J.of fract.,12,647-651(1976)
- [49]: A.R.Ingraffea, “On discrete fracture propagation in rock loaded in compression” , Proc.Num.Meth.Fract.Meth.,Swansea,wales,Jan,(1978)(Eds.A.R.Luxemoore and D.R.J.Owen).pp.235-248
- [50]: D.M.Tracey, “Discussion of On the use of isoparametric finite elements in linear elastic fracture mechanics ” by R.S.Barsoum’,Int.J.of Fract.,12,647-651(1976)
- [51]:L.J.Gray,A.V.Phan,Glaucio H. Paulino , T , Kaplan ,“Improved quarter-point crack tip element ” Engrg.Fract.mechanics,70,pp.269-283(2003)
- [52]: Anthony R.Ingraffea, “Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements ” Int.J.Num.Meth.Engrg, Vol.15,pp.1427-1445(1980)
- [53]:T.Denise de Araujo*,T.N.Bittencourt,D.Roehl,L.F.Martha,“Numerical estimation of fracture parameters in elastic and elastic –plastic analysis” “ European Congress on computational methods in applied Sciences,Barcelona(2000)

- [54]: T.A.Cruse , “Boundary integral equation fracture mechanics analysis ”
 “,in boundary integral equation method computational applications in applied
 Mechanics ,ASME Appl.Mech.Sym.Series,AMD-Vol,11,(1975),pp.31-48
- [55]: T.A.Cruse , “Two dimensional BIE fracture mechanics analysis”
 Appl.Mech.modelling,2,(1978),pp.287-293
- [56]: T.A.Cruse and R.B.Wilson,“Advanced application of boundary integral
 equation methods “”,Nuc.Engr.Design,46,223-234(1978)
- [57]: M.D.Snyder and T.A.Cruse,“Boundary integral equation analysis of
 cracked anisotropic plates”,IntJ.Fract.11(2),315-328(1975)
- [58] : Crouch S.L, “Solution of plane elasticity problems by displacement
 discontinuity method” .Int.J.Num.Methods Eng.10,pp301-343,(1976)
- [59] : Guo H.Aziz.N.I,Schmidt L.C, “Linear elastic crack tip modelling by
 displacement discontinuity method”.Engng Fracture Mech.36,pp,933-
 942(1990)
- [60] : Kent L.Lawrence , “Ansys Tutorial Release 7.0”SDC publications
- [61] : Bernard Barthelemy, “Notions pratiques de la mécanique de la rupture”
 édition Eyrolles . (1980)
- [62]: D.P.Miannay,“ Mécaniques de la rupture ” Les Editions de Physique,(1995)
- [63] :Bui H.D, “ Mécaniques de la rupture fragile”,Masson (1978)
- [64]: S. Laroze J.J Barrau, “Mécaniques des structures ”tome 1,2^{ème} édition
 (masson)(1979).
- [65]:G.R.Irwin , “Fracture in handbook”,Vol 79,spring-verlag,Berlin,pp.551-
 590,(1958)
- [66]:J.Lemaitre,J.L.Chaboche, “Mecanique des materiaux solides ”,Eds Dunod
 ,Paris (1986)
- [67]:Parton V.Z, “ Fracture mechanics from theory to practice” “Beach science
 publishers (1992)
- [68]:M.L.Williams, “ On the stress distribution at the base of stationnary
 crack”,J.Appl.Mech,24,109-114(1957)
- [69]:B.Nuller ,“On the stress intensity factor for elliptical Crack ” Int.J.of
 fracture ,92,17-20(1998)
- [70]: Walter D.Pilkey,“Formulas for stress, strain and structural matrices”2^{ème}
 Eds, (Wiley)
- [71] :H.M.Westergaard , “Bearing pressure and cracks”, Journal of Applied
 Mechanics 6 (1939), 49-53
- [72]: Ionel Nistor , “Identification expérimentale et simulation numérique de
 l’endommagement en dynamique rapide : application aux structure
 aéronautique”,Thèse doctorat ,Institut National polytechnique de
 Toulouse(2005)
- [73] : Davis JJ, Rabinowitz .p « Method for numerical integration academic
 press,(1975)

- [74] : Stroud .A.H,Secret .D“Gaussian quadrature formulas, Prentice-Hall (1966)
- [75] : T.A.Cruse. “Numerical boundary integral equation method for three dimensional elastostatics.”Int.J.Solids struct.5(12),: 1259-1274,(1969)
- [76] : T.A.Cruse. “An improved boundary integral equation method for three dimensional stress analysis.”Comput. struct.4(4),: 1259-1274,(1974)
- [77] : J.O.Watson,“Advanced implementation of the boundary element method for two and three dimensional elastostatics”.In P.K.Banerjee and Butterfield ,editors, Developements in boundary elements methods , Vol 1,pp 31-63, Elsevier Applied Science London (1979)
- [78] :G.G.W.Mustoe., “Advanced integration schemes over boundary elements and volume cells for two and three dimensional nonlinear analysis ”.In P.K.Banerjee and S.Mukherjee,editors, Developments in boundary elements methods , Vol 3,pp 213-270, Elsevier Applied Science London (1984)
- [79] :H.R.Kutt,“The numerical evaluation of the principal value integrals by finite part integration ”,Numer.Math,24(3):205-210,(1975)
- [80] : H.R.Kutt, “ Quadrature formulae for finite-part integrals ”, Technical report , National Research Institute for Mathematical Sciences,CSIR,Pretoria,South Africa,(1975)
- [81] :Q.Huang and T.A.Cruse, “Some notes on singular integration techniques in boundary element analysis”.Int.J.Numer.Methods Eng.,36(15):2643-2659,(1993)
- [82] :M.H.Lean, “ Adaptatively meshed boundary intefral method for nonlinear magnetostatics”,IEEE Trans.Magn,26(2):614-617 (1990)
- [83] :A.Nagarajan and S.Mukherjee, “A mapping method for numerical evaluation of two –dimensional integral $1/r$ singularity”,Comput.Mech,12(1/2):19-26,(1993)
- [84] :M.S.Casale and P.Sankar, “Microconceptions in the interpolation of singular integrals in mathematical physics”.Int.J.Numer.Methods .Eng,36(7):1246-1247(1993)
- [85] :M.Guiggiani,G.Krishnasamy,T. J.Rudolphi and F.J.Rizzo , “ A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations”,J.Appl,Mech ,Trans ,ASME,59(3):604-614,(1992)
- [86] :Tanaka.M., Sladek.V,and Sladek.J. “Regularisation techniques applied to boundary element methods ”,ASME Applied Mechanics Reviews,47:457-499 (1994)
- [87] :G.Krishnasamy,L.W.Schmerr,T.J.Rudolphi and F.J.Rizzo, “Hypersingular boundary integral equations : some application in acoustics and elastic wave scattering”, J.Appl.Mech.Trans.ASME,57(2):404-414,(1990)
- [88] :E.D.Lutz, “Systematic derivation of contour integration formulae for Laplace and elastostatic gradient BIE’S”,Comput.Mech,14(4):339-353,(1994)

- [89] :E.D.Lutz,A.R.Ingraffea and L.J.Gray, “Use of simple solution for boundary integral methods in elasticity and fracture analysis”, Int .J.Numer.Methods.Eng,35(9):1737-1751(1992)
- [90] : S.Vijaykumar and D.E.Cormack, “ An invariant imbedding method for singular integral evaluation of finite domains”,SIAM.J.Appl.Meth,48(6):1335-1349,(1988)
- [91] :D.Rosen and D.E.Cormack, “Analysis and evaluation of singular integrals by the invariant imbedding approach”.Int.J.Numer.Methods.Eng,35(3):563-587,(1992)
- [92] :D.Rosen and D.E.Cormack, “Singular and near singular integrals in the BEM : A global approach”,SIAM.J.Appl.Math.,53(2):340-357(1993)
- [93] : D.Rosen and D.E.Cormack, “ The continuation approach for singular and near singular integration”, Eng.Anal.Boundary Elem,13(30):99-113,(1994)
- [94] :L.J.Gray, “ Boundary elemnt method for regions with thin internal cavities” .Eng.Anal.Boundary Elem,6(4):180-184,(1989)
- [95] : J.C.Lachat,J.O.Watson, “ Effective numerical treatment of boundary integral equation : a formulation for three –dimensional elastostatics”,Int.J.num.Meth.Engng,10,991-1005(1976)
- [96] :C.Lachat “ A further development of the boundary integral techniques ,for elastostatics”PHD (1975) university of southampton
- [97] : Sladek ,V,and Sladek ,J.(eds) 1998, “Singular integrals in boundary element methods ”computational mechanics publications ,Southampton
- [98] : H.Navid , R.T.Fenner,F.Nadiri & G .A.Webster, “stress intensity factors for internal and external cracks in pressurised thick –walled cylinders”, Int .J.Pres Ves & Pipping 18 (1985) 241-254
- [99] : N.A.B .Yahia and M.S.Sherpard, “ On the effect of quarter-point element size on fracture criteria,” Int.J. Num.Meth.Engng,Vol,21,No 10 (1985) pp. 1911-1924

Annexe A : Fonctions de forme pour un élément quadratique

1. Éléments quadratiques à trois nœuds :

En élasticité bidimensionnelle les frontières sont en générale discrétisées par des éléments quadratiques à trois nœuds (**Fig A-1**) [14] :

$$\varepsilon \in \Delta e \rightarrow y(\varepsilon) = \sum_{m=1}^3 N_m(\varepsilon) y^m$$

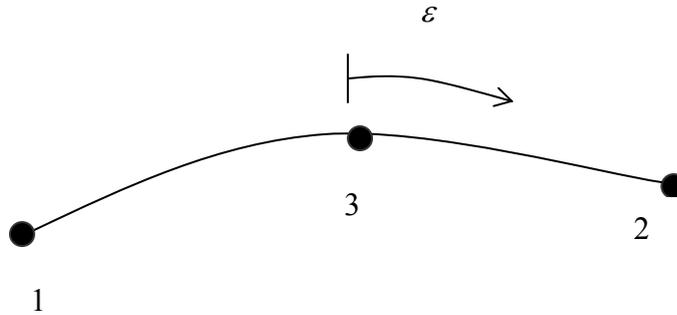


Fig A-1 : élément quadratique à 3 nœuds

Ou sous la forme :

$$\varepsilon \in \Delta e \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1(\varepsilon) = \sum_{m=1}^3 N_m(\varepsilon) x_1^m \\ x_2(\varepsilon) = \sum_{m=1}^3 N_m(\varepsilon) x_2^m \end{array} \right\}$$

Avec [9-11]:

$$N_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon(\varepsilon - 1)$$

$$N_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon(\varepsilon + 1)$$

$$N_3(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2$$

2. Eléments quadratiques à huit nœuds

Pour les problèmes tridimensionnels, si les frontières sont discrétisées par des éléments quadratiques à huit nœuds (**Fig A-2**) on peut écrire [14,19]:

$$(\varepsilon, \eta) \in \Delta e \rightarrow y(\varepsilon, \eta) = \sum_{m=1}^8 N_m(\varepsilon, \eta) y^m$$

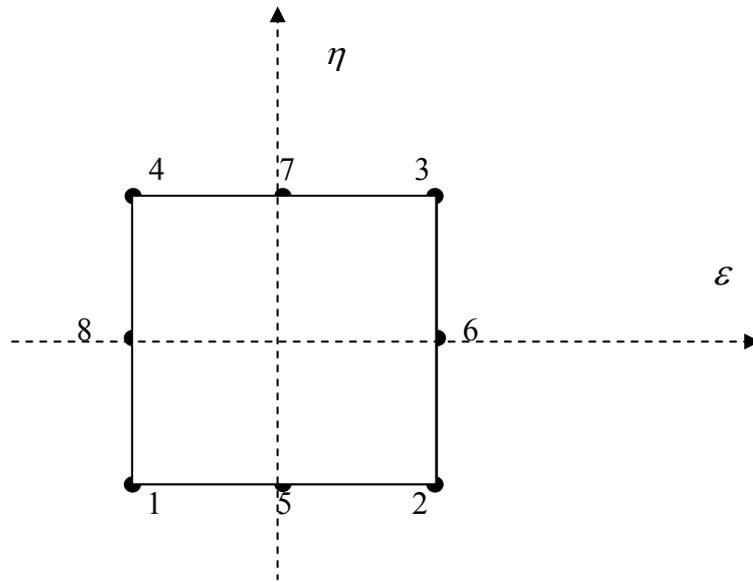


Fig A-2: élément quadratique à huit nœuds

Ou sous la forme :

$$(\varepsilon, \eta) \in \Delta e \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1(\varepsilon, \eta) = \sum_{m=1}^8 N_m(\varepsilon, \eta) x_1^m \\ x_2(\varepsilon, \eta) = \sum_{m=1}^8 N_m(\varepsilon, \eta) x_2^m \\ x_3(\varepsilon, \eta) = \sum_{m=1}^8 N_m(\varepsilon, \eta) x_3^m \end{array} \right.$$

Avec [9-11]:

- Nœuds aux milieux

$$N_n = 1/2 (1 - \varepsilon^2)(1 + \eta_n \eta) \quad \text{pour } n = 5,7$$

$$N_n = 1/2 (1 - \eta^2)(1 + \varepsilon_n \varepsilon) \quad \text{pour } n = 6,8$$

- Nœuds des coins:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \varepsilon)(1 - \eta) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \varepsilon)(1 - \eta) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \varepsilon)(1 + \eta) - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \varepsilon)(1 + \eta) - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8$$

Annexe B : Solutions fondamentales

- En élasticité bidimensionnelle les solutions fondamentales sont exprimées par :

$$\begin{cases} U_{lk}(p,q) = \frac{A}{2\mu r} [(3-4\nu)\delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}] \\ T_{lk}(p,q) = \frac{A}{r^2} \left\{ \frac{\delta r}{\delta n(q)} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 3r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)[r_{,l}n_k(q) - r_{,k}n_l(q)] \right\} \end{cases}$$

Avec :

$$A = 1/8\pi(1-\nu)$$

ν : coefficient de poisson, μ module de cisaillement

$r = \sqrt{((x_q)_k - (X_P)_k)((x_q)_k - (X_P)_k)}$: est la distance entre le point champ q

et le point source p

$$r_{,k} = (x_q)_k - (X_P)_k / r = r_k / r$$

$$\frac{\delta r}{\delta n} = -r_{,k}n_k$$

Ou :

n_1, n_2, n_3 : représentent les composantes du vecteur normal

r_1, r_2, r_3 représentent les longueurs des projections de \mathbf{r} suivant les directions x_1, x_2, x_3

- En déformation plane :

$$\begin{cases} U_{lk}(p,q) = \frac{A}{\mu} [(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}] \\ T_{lk}(p,q) = \frac{2A}{r} \left\{ \frac{\delta r}{\delta n(q)} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)[r_{,l}n_k(q) - r_{,k}n_l(q)] \right\} \end{cases}$$

- En élasticité tridimensionnelle :

$$\left\{ \begin{aligned}
 U_{kij}^*(p,q) &= \frac{1}{r^\alpha} \{ (1-2\nu) [\delta_{ki}^{r,j} + \delta_{kj}^{r,i} - \delta_{ij}^{r,k}] + \beta r_{i,j,k} \} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)} \\
 T_{kij}^*(p,q) &= \frac{2\mu}{r^\beta} \left\{ \beta \frac{\delta r}{\delta n} [(1-2\nu) \delta_{ij}^{r,k} + \nu (\delta_{ik}^{r,j} + \delta_{jk}^{r,i}) - \right. \\
 &\quad \left. \gamma r_{i,j,k} \right] + \beta \nu (n_i^{r,j,k} + n_j^{r,i,k}) + (1-2\nu) (\beta n_k^{r,i,j} + \\
 &\quad \left. n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)}
 \end{aligned} \right.$$

Avec :

$$\alpha=2, \beta=3, \gamma=5$$

Annexe C : Géométrie différentielle

1 Caractéristiques géométriques [19]:

- Vecteur normal :

La surface de l'élément est munie de deux vecteurs tangentiels \mathbf{V}_ε et \mathbf{V}_η suivant la direction ε et la direction η respectivement :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_\varepsilon = \sum_{m=1}^{N_e} \frac{\partial N_m(\varepsilon, \eta)}{\partial \varepsilon} x_i^m \\ \mathbf{V}_\eta = \sum_{m=1}^{N_e} \frac{\partial N_m(\varepsilon, \eta)}{\partial \eta} x_i^m \end{cases}$$

Le vecteur normale \mathbf{n} à la surface peut être obtenu par :

$$\vec{n} = \vec{V}_\varepsilon \times \vec{V}_\eta$$

donc :

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varepsilon} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x_3}{\partial \eta} - \frac{\partial x_3}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} - \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

- Le Jacobien :

Le Jacobien J de la transformation est donc défini par :

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x_3}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \end{aligned}$$

- Cas d'un problème plan :

Pour les problèmes plans le vecteur normale \mathbf{n} et le Jacobien sont définis par :

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} \end{Bmatrix}$$

$$|J| = |n| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\varepsilon}\right)^2}$$

Annexe D : Calcul des intégrales régulières (Choix des points de Gauss)

Dans la méthode des éléments de frontières, le calcul numérique des intégrales élémentaires régulières repose sur la méthode de Gauss [72,73]:

- En une dimension

$$\int_{-1}^{+1} f(x) d\xi = \sum_{i=1}^{i=N} w_i f(\xi_i)$$

- En deux dimensions :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta = \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{j=1}^{j=N} w_i w_j f(\varepsilon_i, \eta_j)$$

- **Choix des points de Gauss :**

Ce choix dépend [14]:

1. du type de frontière (courbe ou surface)
2. de la représentation de la géométrie (variation du Jacobien et des degrés des fonctions d'interpolation)
3. des positions relatives de p et de la frontière (spécifique pour les équations intégrales):

- si p est éloigné de la frontière les termes de l'intégrande deviennent à peu près constants et le choix des points de Gauss selon le choix des fonctions d'interpolations et les variations du jacobien est satisfaisant mais si p est proche de la frontière les termes de l'intégrande varient fortement est ce choix devient insuffisant car il dépend aussi des positions relatives de p et de la frontière

Donc afin de maintenir une précision d'intégration numérique satisfaisante au moindre coût il est préférable de choisir le nombre de points de Gauss selon l'indicateur de sévérité IS défini par [3] :

$$IS=(2.37+0.424\cos\theta)D/d$$

Avec:

D : taille de l'élément (plus grande diagonale)

$$d = |z-p|$$

Où :

z : est le centre de l'élément (**Fig D-1**)

θ : angle entre $z-p$ et $n(z)$

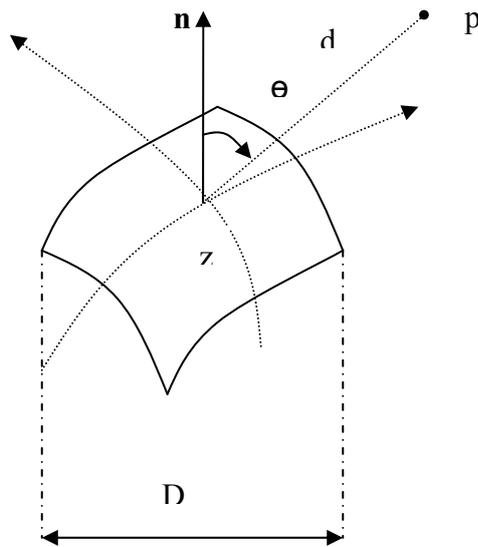


Fig D-1 : Indicateur de sévérité
(choix des points de Gauss)

Tableau D-1 : choix du nombre de points de Gauss selon IS :

	Nombre de points de Gauss par élément
IS	Quadrilatères($N_e=8$)
1	$2 \times 2 = 4$
2	$3 \times 3 = 9$
3	$4 \times 4 = 16$
4	$5 \times 5 = 25$
5	$6 \times 6 = 36$
6	$4 \times (4 \times 4) = 64$
7	$4 \times (5 \times 5) = 100$
8	$4 \times (6 \times 6) = 144$

Annexe E : Calcul des intégrales singulières (Méthode de subdivision)

La méthode de subdivision consiste à subdiviser l'élément d'intégration selon la position du point singulier en triangles (**Fig IV-6**) et par conséquent elle nécessite une transformation des coordonnées locales aux coordonnées définies par la formule (**IV-16**).

Les valeurs des numéros locaux sont choisies selon les tableaux suivants :

Tableau:E-1: numéro local quand Pi est un nœud coin

Pi sur le nœud	sous- élément 1			sous- élément 2		
	n=1	n=2	n=3	n=1	n=2	n=3
1	2	3	1	3	4	1
2	3	4	2	4	1	2
3	1	2	3	4	1	3
4	1	2	4	2	3	4

Tableau:E-2: numéro local quand Pi est un nœud milieu

Pi sur le nœud	sous- élément 1			sous- élément 2			sous- élément 3		
	n=1	n=2	n=3	n=1	n=2	n=3	n=1	n=2	n=3
5	4	1	5	2	3	5	3	4	5
6	1	2	6	3	4	6	4	1	6
7	4	1	7	2	3	7	1	2	7
8	1	2	8	3	4	8	2	3	8

- **Cas 1 : singularité est sur le nœud "1" :**

Dans ce cas l'élément est subdivisé en deux triangles Δ_1 et Δ_2 (**Fig IV-6**) et l'intégrale I s'écrit alors :

$$I = I_1^1 + I_2^1$$

Au nœud "1" toutes les fonctions de forme sont nulles pour $n \neq 1$ et par conséquent I_1^1 et I_2^1 deviennent :

$$I_1^1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_1(\varepsilon, \eta) U_{ij}(p, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (E-1)$$

$$I_2^1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_1(\varepsilon, \eta) U_{ij}(p, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (\text{E-2})$$

1. Calcul de I_1^1 :

Le calcul de l'intégrale I_1^1 nécessite des transformations spéciales

Transformation I :

Transformation du triangle $\Delta 1$ en carré en utilisant l'expression suivante :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \varepsilon \\ \bar{\eta} = \frac{1+2\eta-\varepsilon}{1+\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{a})$$

Transformation II:

La transformation inverse de (a) peut s'écrire alors sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon = \bar{\varepsilon} \\ \eta = \frac{1}{2} \left[-1 + \bar{\varepsilon} - \bar{\eta}(1 + \bar{\varepsilon}) \right] \end{cases} \quad (\text{b})$$

Où :

$$\begin{aligned} -1 &\leq \bar{\varepsilon} \leq +1 \\ -1 &\leq \bar{\eta} \leq +1 \end{aligned}$$

L'intégrale I_1^1 sur un domaine triangulaire est transformée en intégrale sur un domaine carré en utilisant le Jacobien régularisé $J_r(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta})$ de la transformation (b)

$$J_r(\varepsilon, \eta) = \frac{\partial(\varepsilon, \eta)}{\partial(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\varepsilon}} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{\eta}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\varepsilon}} & \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\eta}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \quad (\text{c})$$

Finalement l'intégrale I_1^1 peut s'écrire sous la forme régularisée suivante :

$$I_1^1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_1(\varepsilon, \eta) U_{ij}(p, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) J_r(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) d\bar{\varepsilon} d\bar{\eta} \quad (\text{E-3})$$

L'intégrale **(E-3)** peut être résolue maintenant par la méthode de quadrature de Gauss puisqu'il ne présente aucune singularité

2. Calcul de I_2^1 :

Pour calculer I_2^1 , on procède de la même façon que précédemment mais avec la transformation du triangle Δ_2 suivante :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \varepsilon \\ \bar{\eta} = -\frac{(1+2\varepsilon-\eta)}{(1+\eta)} \end{cases} \quad (\text{a})$$

Et le Jacobien de la transformation suivant :

$$J_r(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) = \frac{(1+\bar{\varepsilon})}{2} = \frac{(1+\eta)}{2} \quad (\text{b})$$

Alors l'intégrale **(E-2)** peut se mettre sous la forme régularisée suivante :

$$I_2^1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_1(\varepsilon, \eta) U_{ij}(p, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) J_r(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) d\bar{\varepsilon} d\bar{\eta} \quad (\text{E-4})$$

L'intégrale **(E-4)** peut être résolue maintenant par la méthode de quadrature de Gauss puisqu'il ne présente aucune singularité.

- **Cas 2 : Singularité est sur le nœud "5" :**

Dans ce cas l'élément est subdivisé en deux triangles Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 (**Fig IV-7**) et l'intégrale I s'écrit alors :

$$I = I_1^5 + I_2^5 + I_3^5$$

Avec :

$$I_1^5 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_5(\varepsilon, \eta) U_{ij}(p, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (\text{E-5})$$

$$I_2^5 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_5(\varepsilon, \eta) U_{ij}(p, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (\text{E-6})$$

$$I_3^5 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_5(\varepsilon, \eta) U_{ij}(p, \varepsilon, \eta) J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (\text{E-7})$$

Où :

I_1^5 , I_2^5 et I_3^5 sont les intégrales sur les triangles Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 respectivement

*Pour le triangle Δ_1 :

Transformation:

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = -2\varepsilon - 1 \\ \bar{\eta} = \frac{(\eta - \varepsilon)}{\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{a})$$

Le jacobien de la transformation :

$$J_r(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) = -\frac{\varepsilon}{2} = \frac{(1 + \bar{\varepsilon})}{4} \quad (\text{b})$$

*Pour le triangle Δ_3 :

Transformation

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \eta \\ \bar{\eta} = -\frac{2\varepsilon}{(1 + \eta)} \end{cases} \quad (\text{a})$$

Le Jacobien de la transformation :

$$J_r(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) = \frac{(1 + \eta)}{2} = \frac{(1 + \bar{\varepsilon})}{2} \quad (\text{b})$$

*Pour le triangle Δ_2 :

Transformation

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = 2\varepsilon - 1 \\ \bar{\eta} = \frac{(\varepsilon + \eta)}{2\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{a})$$

Le Jacobien de la transformation :

$$J_r(\bar{\varepsilon}, \bar{\eta}) = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{(1 + \bar{\varepsilon})}{4} \quad (\text{b})$$

Après toutes ces transformations les intégrales I_1^5 , I_2^5 et I_3^5 peuvent être résolues par la méthode de quadrature de Gauss