

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

Projet de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en génie mécanique

Thème :

**Etude de la lubrification Hydrodynamique
des paliers fluides poreux auto-lubrifiants**

Proposé Par :

Mr H. BELHANECHÉ
Mr S. LARBI

Étudié par :

Mr BENKHEIRA Lahcene

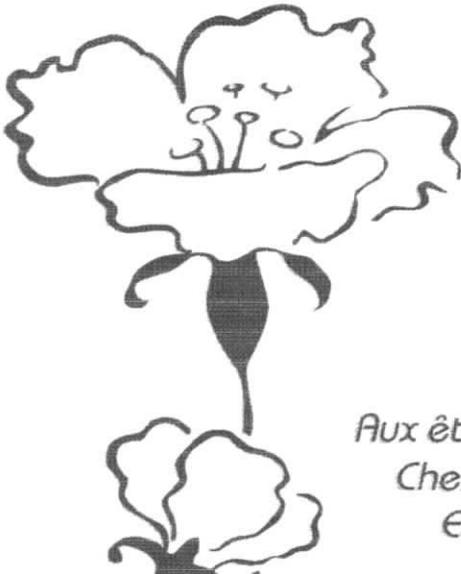
Dirigé par :

Mr H. BELHANECHÉ
Mr S. LARBI

**Promotion
- Juin 2002 -**



E.N.P 10, Avenue Hassen Badi – El Harrach – Alger



Dédicace

Je dédie ce modeste travail,

*Aux êtres les plus tendres à mes yeux et les plus
Chers à mon cœur, à qui je dois énormément
Et que je ne remercierai jamais assez :*

Mes parents.

A mon cher grand frère : Ahmed

A mes deux frères : Bachir et Zineddine

A mes chères sœurs

A Toute la famille BENKHEIRA.

*A tous mes amis : Toufik, Maamar, Nabil, Adlan,
Hamid.....*

Lahcene.

REMERCIEMENTS

Je remercie dieu de m'avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver à la finalité de ce modeste travail.

Je tiens à exprimer en premier lieu ma profonde gratitude envers : mes parents et mon grand frère Ahmed qui ont contribué à ma formation, et aux résultats auxquels je suis parvenus

Je tiens à remercier mes promoteurs Mr. H. BELHANECHHE et Mr. S. LARBI pour leurs encouragements, leurs suivi, et pour les conseils qu'ils ont apporté pour l'achèvement de ce projet.

Je tiens également à remercier monsieur le Pr. AIT ALI pour l'honneur qui m'a fait en acceptant de présider le jury, ainsi qu'à Mr. BENBRAIKA d'avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je tiens aussi à saluer l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation, sans oublier tout le personnel de la bibliothèque, en particulier Ami Salah.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Mr. N. DECHEMI pour ses encouragements et ses conseils.

Je remercie vivement Mr. S. BOUBENDIR pour tous ses conseils et les discussions fructueuses que nous avons eues.

Mes remerciements vont également à mes collègues et amis de la promotion.

ملخص:

في دراستنا هذه، نقوم بشرح ظاهرة هيدروديناميكا الموائع في المحمل الأسطواني المسامي. خاصية التشحيم الأوتوماتيكي في هذا النوع من المحمل تنتج من كمية الزيت الموجودة داخل مسامات المحمل.

لتحديد منطقة التجوف، استعملنا النموذج جي.أف.أو. جريان السائل في المحمل المسامي والغشاء الشحمي خاضع لقانون دارسي ومعادلة رينولدز على الترتيب.

النتائج المحصل عليها من خلال البرنامج المنجز تتوافق مع النتائج الموجودة في المراجع.

الكلمات المفتاحية:

هيدروديناميكا الموائع – التشحيم الأوتوماتيكي – منطقة التجوف – النموذج جي.أف.أو.

RESUME :

Dans cette étude, on aborde le problème hydrodynamique des paliers poreux auto-lubrifiants. La propriété auto-lubrifiante de ce type de paliers provient de l'huile contenue dans les pores du coussinet.

Une adaptation pour les paliers poreux, du modèle à frontière libre JFO pour la zone de cavitation a été réalisée. Les écoulements dans la matrice poreuse et dans le film lubrifiant sont respectivement modélisés par la loi de Darcy et l'équation de Reynolds modifiée.

Les résultats obtenus par notre code de calcul sont en bonne concordance avec ceux de la littérature.

Mots clés : *paliers poreux – problème hydrodynamique – propriété auto-lubrifiante – modèle JFO – zone de cavitation*

ABSTRACT:

The hydrodynamic problem in porous journal bearings is studied in steady state conditions. The auto-lubricant property of this type of journal bearings comes from oil contained in the pores of the bearing.

An adaptation for the porous journal bearings, of the JFO film rupture model for the zone of cavitation has been achieved. The flows through the porous matrix and in the thin fluid film are governed by the law of Darcy and the modified equation of Reynolds respectively.

The results obtained with our code of calculation are in good agreement with those of the literature.

Key words: *porous journal bearings – hydrodynamic problem - auto-lubricant property – JFO model – zone of cavitation*

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : DESCRIPTION DES PALIERS POREUX.	4
I.1 : Le coussinet poreux	4
I.1.1 : Description	4
I.1.2 : Le principe de fonctionnement	5
I.1.2.1 : Le palier classique	5
I.1.2.2 : Le palier poreux	6
I.2 : Bilan des études expérimentales	8
CHAPITRE II : MODELISATION MATHÉMATIQUES DES ÉCOULEMENTS DANS LES PALIERS POREUX – CONTEXTE.	9
II.1 : Écoulement en milieu poreux	9
II.1.1 : Équation d'écoulement	9
II.1.1.1 : La loi de Darcy	10
II.1.2 : Conditions limites entre deux milieux poreux et fluide	11
a. Adhérence à la paroi	11
b. Continuité des vitesses à l'interface	11
c. Condition de Beavers et Joseph	12
II.2 : Écoulement en film mince	13
II.2.1 : Les conditions limites en lubrification hydrodynamique	14
a. Solution de Sommerfeld	14
b. Solution de Gumbel ou demi-Sommerfeld	14
c. Solution de Reynolds ou de Swift-Steiber	14
d. La condition de Floberg	15

II.2.2 : Hypothèses simplificatrice en lubrification	16
II.3 : Les principales modélisations de paliers poreux	16
II.3.1 : Modélisation de Morgan et Cameron	18
II.3.2 : Autres solutions analytiques ou semi-analytiques	20
II.3.2.1 : Solutions analytiques	20
II.3.2.2 : Solutions semi-analytiques	20
II.3.3 : Les solutions numériques	21
II.3.4 : Bilan de l'étude bibliographique	22
II.4 : Conclusion	24
CHAPITRE III : EQUATIONS DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE	26
III.1 : Equations générales de la mécanique des milieux continus	26
III.1.1 : Loi de conservation de la masse	26
III.1.2 : Loi de conservation de la quantité de mouvement	27
III.1.3 : Loi de comportement du fluide utilisé	28
III.2 : Equation générale de la mécanique des films minces visqueux	29
III.2.1 : Equation de conservation de la masse	30
III.2.2 : Equation généralisée de la mécanique des films minces visqueux	30
III.2.2.1 : Intégration des équations de Navier-Stokes	30
III.2.2.2 : Equation de Reynolds généralisée	33
III.2.2.3 : Interprétation physique de l'équation des différents termes de l'équation de Reynolds	35
III.3 : Application au cas du palier	37
III.3.1 : Description géométrique et cinématique	37
a. Description géométrique	37
b. Description cinématique (cas de surfaces lisses)	38
III.3.2 : Condition aux limites pour la zone de rupture	39
III.3.2.1 : L'algorithme d'Elrod	42
III.3.2.2 : La compressibilité – une relation pression concentration	42
III.3.3 : Equation de Reynolds modifiée pour le cas des paliers poreux	44
III.3.4 : Caractéristiques statiques	46
III.3.4.1 : Charge et angle de calage	46

III.3.4.2 : Débit	47
III.3.4.3 : Le couple de frottement	47
III.4 : Conclusion	48
CHAPITRE IV : MODELE MATHEMATIQUE UTILISE ET RESOLUTION NUMERIQUE	49
IV.1 : Equations dans la matrice poreuse	49
IV.2 : Equations dans le film complet	50
IV.3 : Conservation du débit dans le film lubrifiant	51
IV.3.1 : Conservation locale du débit	51
IV.3.2 : Conservation globale du débit	53
IV.3.3 : Equivalence des conditions (IV.7) et (IV.8)	54
IV.3.4 : Pression moyenne dans le film	55
IV.4 : Les conditions limites sur le coussinet poreux	56
IV.5 : Les paramètres du modèle bidimensionnel	56
IV.6 : Résolution numérique	58
IV.6.1 : Discrétisation des équations	60
IV.6.1.1 : Equation de Reynolds	60
IV.6.1.2 : Résolution du système d'équations	61
IV.6.2 : Equation de Laplace	62
IV.6.2. Intégration numérique	63
CHAPITRE V : PRESENTATION DES RESULTATS ET DISCUSSION	64
V.1 : Modèle a frontière imposée	64
a. champ de pression et champ de vitesse	64
b. Caractéristiques statiques	67
V.2. Modèle conservatif	69
V.2.1 : Influence des paramètres	72
a. Perméabilité et Excentricité	72
b. Influence de la pression de cavitation	75
c. Influence de l'épaisseur radiale du coussinet	79

V.3 : Comparaison avec les résultats obtenus par [12]	81
a. Champs de pression	81
- Modèle à frontière imposée	81
- Modèle conservatif	81
b. Portance	82
c. Angle de calage	82
V.4 : Conclusion	83
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE	84
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	

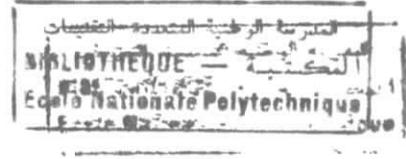
NOMENCLATURE

$c = r_i - r_a$	jeu radial (m)
C_a	couple de frottement sur l'arbre (N.m)
C_c	couple de frottement sur le coussinet (N.m)
$C = \frac{c}{r_i}$	jeu relatif
$d = 2.r_j$	diamètre intérieur du coussinet (m)
$D_m(t)$	domaine matériel fonction de temps
$\partial D_m(t)$	frontière de $D_m(t)$
e	excentricité : distance entre les centres de l'arbre et du coussinet (m)
f_a	coefficient de frottement sur l'arbre
f_c	coefficient de frottement sur le coussinet
g	coefficient de pondération : $\begin{cases} g = 1, \alpha \geq 1 \\ g = 0, \alpha < 1 \end{cases}$
$h = c(1 + \varepsilon \cos\theta)$	épaisseur du film (m)
H_1, H_2	hauteur des surfaces 1 et 2 du contact (m)
$H = \frac{h}{c}$	épaisseur sans dimension du film
h^*	épaisseur du film à la frontière du rupture (m)
$_{,i} = \partial / \partial x_i$	dérivation partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée
k	perméabilité (m^2)
$K = \frac{k.r_i}{c^3}$	perméabilité sans dimension
l	longueur du palier (m)
M_x	débit massique suivant la direction x (Kg/s)
M_z	débit massique suivant la direction axiale (Kg/s)
$L = \frac{l}{d}$	longueur relative du palier
\vec{n}	vecteur normal à une surface

p	pression dans le film (Pa)
$P = \frac{pc^2}{\mu \cdot \omega \cdot r_i \cdot r_a}$	pression sans dimension dans le film
p^*	pression dans le coussinet poreux (Pa)
$P^* = \frac{P^* c^2}{\mu \cdot \omega \cdot r_i \cdot r_a}$	pression sans dimension dans le coussinet poreux
p_c	pression de cavitation (Pa)
$P_c = \frac{P_c c^2}{\mu \cdot \omega \cdot r_i \cdot r_a}$	pression de cavitation sans dimension
r	coordonnée radiale (m)
$R = \frac{r}{r_i}$	coordonnée radiale sans dimension
r_a	rayon de l'arbre (m)
r_i	rayon interne du coussinet (m)
r_a	rayon externe du coussinet (m)
$R_e = \frac{r_e}{r_i}$	coordonnée radiale sans dimension
U	vitesse linéaire de l'arbre (m/s)
\vec{U}	vecteur vitesse d'un point du film (m/s)
u_1, u_2, u_3	composantes du vecteur vitesse (m/s)
U_{11}, U_{12}, U_{13}	vitesse de la première surface du contact (m/s)
U_{21}, U_{22}, U_{23}	vitesse de la deuxième surface du contact (m/s)
w	portance (N)
$W = \frac{w \cdot c^2}{\mu \cdot \omega \cdot r_a \cdot r_i^2 \cdot l}$	portance sans dimension
$x = \theta \cdot r_i$	coordonnée circonférentielle (m)
y	coordonnée selon l'épaisseur du film (m)
z	coordonnée axiale (m)
$Z = \frac{z}{l}$	coordonnée axiale sans dimension
$\varepsilon = \frac{e}{c}$	excentricité relative
Θ	concentration en huile

Nomenclature

Φ	angle de calage (degrés)
θ	coordonnée circonférentielle (degrés)
$\mu = \rho \cdot \nu$	viscosité dynamique (Pa.s)
ν	viscosité cinématique (m^2/s)
ρ	masse volumique (kg/m^3)
ω	vitesse angulaire (rad/s)
κ	coefficient de compressibilité
Γ	ligne de formation du film lubrifiant



INTRODUCTION GENERALE

La lubrification hydrodynamique est un chapitre de la tribologie qui concerne les contacts pour lesquels un fluide visqueux est intercalé entre les surfaces en présence. Ce fluide peut être un liquide, pratiquement incompressible, tel que de l'huile, de l'eau ou même un métal fondu : c'est le cas des paliers hydrodynamiques.

Les paliers sont des organes de machines utilisés pour guider les arbres en rotation. Deux grandes familles de paliers existent : les paliers lisses et les paliers à roulements. Dans les premiers, l'arbre prend appui sur un coussinet et est séparé de celui-ci par un film lubrifiant ; dans les seconds, des corps roulants (billes, aiguilles ou rouleaux) séparent la bague en rotation de l'alésage extérieure. Selon la direction de la charge par rapport à l'arbre en rotation, on distingue les paliers porteurs pour lesquels la charge est radiale, généralement appelés paliers, des paliers de butée ou butées pour lesquels la charge est axiale.

Pendant la révolution industrielle l'utilisation des paliers s'est largement développée. A la fin du XIX^{ème} siècle Beauchamp Tower a mis en évidence l'existence de pressions hydrodynamiques dans les paliers. C'est en 1886 que Reynolds a établi les bases de la théorie hydrodynamique.

Les paliers actuels ont des diamètres de l'ordre du dixième de millimètre (domaine médical) jusqu'à mètre et plus (centrales électriques). Ils sont généralement alimentés en lubrifiant, issu d'un réservoir externe, au moyen d'orifices ou de rainures.

Le mode d'alimentation des paliers poreux est particulier [1]. Le coussinet sert de réservoir d'huile. Ce type de palier est appelé palier auto-lubrifiant.

L'utilisation des paliers poreux dans l'industrie a débuté en 1925 et leur production mondiale n'a cessé de croître : à la fin des années 30 la production quotidienne atteignait un demi million d'unités, 8 millions dans les années 60 et 20 millions dans les années 70 ...

Les petits moteurs électriques en sont l'application essentielle dans des domaines tels que l'automobile (ventilation d'habitacle, essuie glace, lève vitre, démarreur), l'électroménager ...

L'intérêt industriel du palier poreux est double :

Intérêt pratique : sa propriété auto-lubrifiante grâce à laquelle on peut éviter tout système d'alimentation en lubrifiant,

Intérêt économique : sa fabrication ne nécessite généralement pas d'usinage. Son prix de revient est donc très inférieur à celui des mécanismes de mêmes fonctions : roulements, paliers classiques.

Cependant son utilisation reste limitée par :

- Les charges et les vitesses de rotations maximales autorisées, plus faibles que celles d'un palier classique ou d'un roulement,*
- Sa durée de vie : quelques centaines à quelques milliers d'heures, et les risques de grippage, généralement dus à un défaut d'alimentation du film lubrifiant lorsque le coussinet a perdu plus de 30% de son contenu initial.*

Il existe actuellement une forte demande industrielle [2] pour fiabiliser (grippages), optimiser (bruits, vibrations, limites de fonctionnement) et augmenter la durée de vie des coussinets poreux.

L'objectif de ce travail est d'élaborer un modèle numérique permettant de connaître non seulement les caractéristiques statiques du palier (excentricité du fonctionnement, la portance, l'angle de calage, ...) mais également les écoulements dans le film et le coussinet poreux. Notre travail est réparti selon le plan suivant :

Au chapitre I, nous présentons le principe de fonctionnement des paliers poreux auto-lubrifiants en le comparant avec les paliers lisses classiques,

Au chapitre II, nous exposons les modèles mathématiques de fonctionnement des paliers poreux existants dans la littérature. Nous montrons que ces modèles ne permettent pas de représenter de façon réaliste, ni l'étendue du film d'huile, ni les écoulements dans le film lubrifiant et le coussinet poreux,

Au chapitre III, nous abordons les équations de base de la mécanique des films minces visqueux qui régissent le comportement d'un écoulement en régime hydrodynamique laminaire, ensuite nous les appliquons au cas particulier des paliers poreux auto-lubrifiant,

Au chapitre IV, nous présentons le modèle mathématique utilisé et la méthode de résolution numérique du problème,

Le chapitre V sera consacré à la discussion des différents résultats obtenus par notre programme de calcul,

Enfin, une conclusion générale termine ce travail.

Chapitre I :

*Description
des
paliers poreux*

CHAPITRE I :**DESCRIPTION DES PALIERS POREUX**

Dans ce premier chapitre, nous présentons le principe de fonctionnement du palier poreux en le comparant à celui du palier lisse classique.

I.1. LE COUSSINET POREUX :**I.1.1. DESCRIPTION :**

Un coussinet poreux est fabriqué par **formage** et **frittage**.

- *Le formage* consiste à un compactage, dans une matrice, de particules métalliques calibrées (fer, cuivre, bronze, aluminium, ...) dont les dimensions varient du micromètre à la centaine de micromètres.
- *Le frittage* est le traitement thermique de l'objet compacté, effectué à des températures inférieures au point de fusion du constituant principal (alliages de bronze : 600 à 800°C, alliages ferreux : 900 à 1300°C).

Il en résulte des soudures entre les particules, ce qui renforce la résistance mécanique de l'objet. Ces opérations effectuées, il subsiste entre les particules des interstices appelés **pores**. Soumis au vide le coussinet est trempé dans un bain d'huile chauffé. Les pores imprégnés d'huile constituent la réserve de lubrifiant.

Dans certaines configurations, afin de compenser les pertes éventuelles et d'augmenter la durée de vie, les coussinets poreux sont munis de réservoirs annexes généralement rechargeables ou de feutres imbibés d'huile sur la périphérie externe du coussinet.

Morgan a résumé les qualités et propriétés des coussinets poreux, leurs limites d'utilisation, les différents types de montage existants ainsi que leurs conditions d'application.

Indépendamment des matériaux qui le composent, un milieu poreux [3] est caractérisé par :

- **Sa porosité :** c'est le pourcentage du volume occupé par la totalité des pores (porosité totale), ou le pourcentage du volume occupé par les seuls pores communicants (porosité ouverte). La porosité ouverte d'un coussinet poreux varie de 25 à 35% du volume de ce dernier,
- **Sa perméabilité :** elle caractérise la capacité du milieu à favoriser ou permettre l'écoulement d'un fluide le traversant. Elle est déterminée à partir de la mesure du débit (d'air en général) provoqué par un gradient de pression appliqué au milieu poreux. Son expression dépend de la géométrie du milieu. Elle est obtenue à l'aide de la loi de **Darcy** présentée au chapitre II. La détermination de la perméabilité ne se fait pas avec une grande précision. L'unité de perméabilité est homogène à une surface.

La perméabilité est fonction de la porosité mais également d'autres paramètres tels que la taille et la forme des pores du milieu. C'est pourquoi deux milieux de porosités identiques n'ont généralement pas même perméabilité. La perméabilité varie avec la porosité et la taille des pores. Plus les pores sont tortueux, plus la perméabilité est faible.

I.1.2. LE PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT :

I.1.2.1. LE PALIER CLASSIQUE :

Le palier lisse classique est constitué d'un axe cylindrique en rotation dans un coussinet de rayon légèrement supérieur. Les surfaces de l'arbre et du coussinet sont séparées par un film de lubrifiant. L'alimentation du contact est en général assurée par l'intermédiaire d'une rainure d'alimentation.

En raison de la charge appliquée sur le palier (fig. I.1), l'arbre est excentré dans le coussinet et le film lubrifiant a une forme convergente-divergente. La rotation de l'arbre entraîne l'huile dans le convergent provoquant ainsi par l'effet «de coin d'huile» une augmentation de la pression dans le film complet. C'est la zone active du film. Elle est entièrement remplie de lubrifiant. A l'inverse, dans le divergent la pression diminue. Lorsqu'elle devient très faible, pour une valeur comprise entre la pression atmosphérique et le

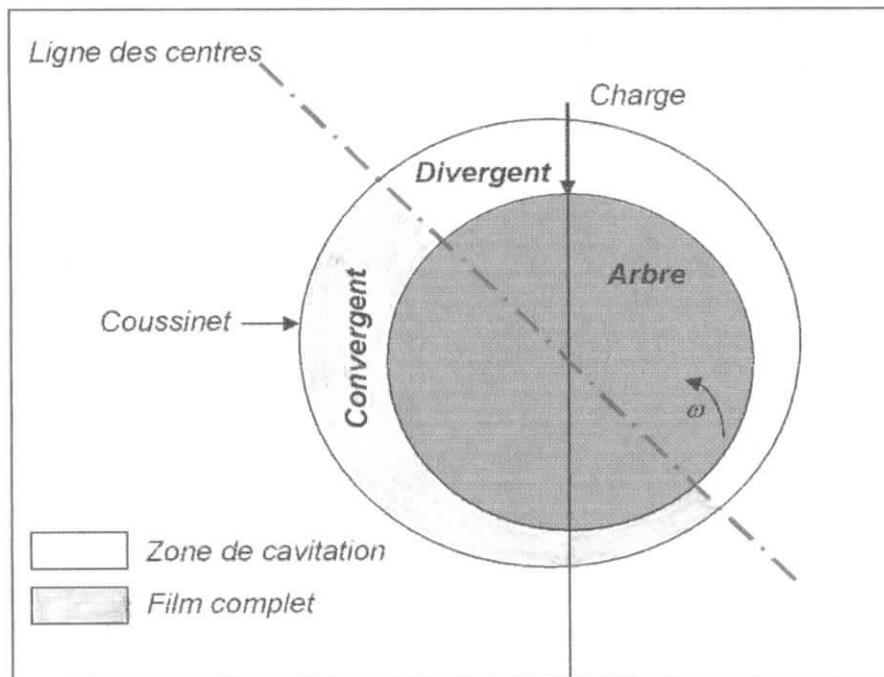


Fig. I.1 : Coupe d'un palier cylindrique classique.

zéro absolue (vide), le film lubrifiant se sépare en un mélange d'huile et de gaz. Cette zone de film incomplet est appelée **zone de cavitation**. La pression dans cette zone varie peu. La cavitation correspond à un phénomène physique complexe. Suite à de nombreuses observations expérimentales ce phénomène est décrit à l'aide d'un vocabulaire varié : bulles, doigts d'huile, séparation... lié à la diversité des conditions expérimentales dans lesquelles il apparaît.

Le régime de lubrification de surfaces séparées par un film lubrifiant porteur est dénommé régime hydrodynamique. L'équation qui gouverne le champ de pression est l'équation de **Reynolds** connue depuis plus d'un siècle. En fonction des hypothèses faites cette équation a une solution analytique ou numérique. Cette solution représente de façon précise les caractéristiques de fonctionnement.

I.1.2.2. LE PALIER POREUX :

Dans un milieu poreux, le fluide s'écoule des zones de haute pression vers des zones de basse pression.

L'huile contenue dans le coussinet poreux, sert de réserve de lubrifiant pour le palier.

Lorsque le palier ne fonctionne pas l'arbre est en contact avec le coussinet. Par effet de capillarité, les surfaces de l'arbre et du coussinet sont recouvertes d'une mince pellicule de

lubrifiant. Cette faible quantité d'huile permet d'amorcer dans de bonnes conditions le démarrage du mécanisme.

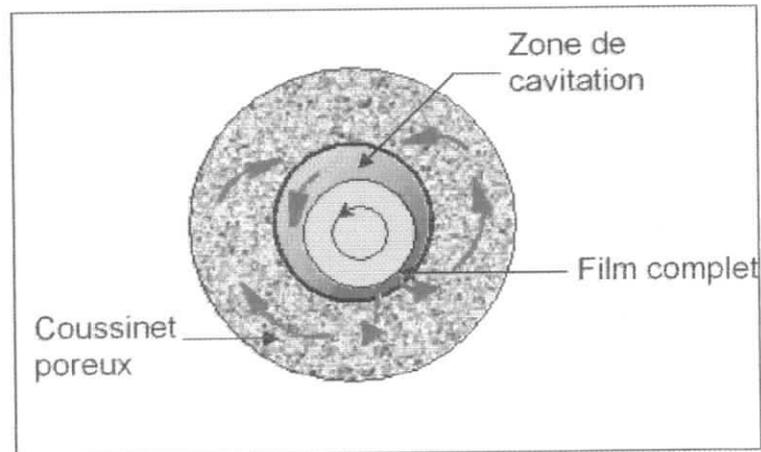


Fig. I.2 : Coupe d'un palier poreux

Selon les conditions de fonctionnement (charge, vitesse, ...), le régime de lubrification au cours de la phase de démarrage est très souvent mixte : la portance est partiellement assurée par des contacts ponctuels arbre-coussinet. La quantité de lubrifiant dans le film est trop faible pour assurer une lubrification hydrodynamique, l'arbre roule et glisse sur le coussinet. Durant cette phase l'huile est extraite du coussinet par **étirement** (adhérence aux parois de l'arbre) et par effet thermique pour aboutir à un fonctionnement hydrodynamique ou partiellement hydrodynamique. Cette phase peut durer plus d'une dizaine de minutes. Pendant la phase de régime mixte le frottement arbre coussinet peut conduire à un bouchage superficiel des pores au niveau de l'interface. Ainsi la fuite radiale de lubrifiant du film vers la matrice poreuse est limitée. L'installation du régime hydrodynamique en est facilitée. Cependant le régime hydrodynamique n'est pas toujours atteint. Lorsque la lubrification mixte persiste, la température augmente et l'huile se dégrade. Comme cette huile est peu renouvelée elle n'assure plus son rôle de lubrifiant et le mécanisme se détériore par grippage.

Lors de la mise en route d'un palier non poreux cette phase de lubrification mixte existe également mais ne dure pas car l'alimentation est généralement abondante et la fuite radiale nulle.

En fonctionnement hydrodynamique la pression dans un palier poreux provient, comme dans le cas du palier classique, de la géométrie du film lubrifiant (effet du coin d'huile).

Chapitre II :

*Modélisation mathématique
des paliers poreux
- Contexte Bibliographique*

CHAPITRE II :**MODELISATION MATHÉMATIQUE DES
ÉCOULEMENTS DANS LES PALIERS POREUX –
CONTEXTE BIBLIOGRAPHIQUE**

Dans un palier poreux le fluide circule dans deux domaines : le coussinet poreux et le film lubrifiant. Pour modéliser son fonctionnement [4] il est donc nécessaire de caractériser l'écoulement dans la matrice poreuse et dans le film lubrifiant ainsi que de définir les conditions de raccord à l'interface des deux domaines.

Les deux premières parties de ce chapitre sont consacrées aux modèles d'écoulement en milieu poreux et en film mince classique ainsi que sous-alimenté.

Nous présentons dans la troisième partie les modèles de paliers poreux de la littérature : ils sont constitués d'un couplage entre la loi de Darcy pour le coussinet poreux et une équation de type Reynolds pour le film lubrifiant.

Enfin nous montrons que ces modèles ne sont pas représentatifs : le bilan des débits d'alimentation et de fuite du film lubrifiant est significativement déficitaire.

Il apparaît que le palier poreux doit être considéré comme un mécanisme faiblement alimenté ; en conséquence la modélisation des frontières de formation et de rupture du film lubrifiant doit être prise en compte.

II.1. ÉCOULEMENT EN MILIEU POREUX :**II.1.1. ÉQUATION D'ÉCOULEMENT :**

La modélisation de l'écoulement en milieu poreux a pour origine les travaux de **H. Darcy**.

Remarque :

Dans le cas de milieux très poreux (porosité supérieure à 0.5) la loi de Darcy décrit imparfaitement l'écoulement.

II.1.1.1. LA LOI DE DARCY :

La loi de **Darcy** a été proposée en 1856 lors d'une étude relative aux fontaines publiques de la ville de Dijon [5]. Darcy a mesuré le débit entraîné par gravité dans des filtres verticaux constitués de sable homogène. Le débit mesuré à travers une section est proportionnel à son aire S ainsi qu'au gradient de pression hydrostatique. Le coefficient de proportionnalité s'exprime comme k/μ , où k homogène à une surface représente la perméabilité, paramètre caractéristique de la résistance à l'écoulement dans le milieu poreux. μ est la viscosité dynamique du fluide. La généralisation à un gradient de pression multidimensionnel s'exprime comme :

$$\vec{q} = -\frac{k}{\mu} S \overrightarrow{\text{grad}}(p + \rho gz) \tag{II.1}$$

Une vitesse moyenne de filtration est ainsi définie :

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}(p + \rho gz) \tag{II.2}$$

Selon les milieux poreux la perméabilité varie de plusieurs décades. Pour un coussinet poreux elle est de l'ordre de $10^{-13} - 10^{-14} \text{ m}^2$. Elle est souvent considérée comme proportionnelle au carré du diamètre moyen des pores.

La loi établie empiriquement par Darcy a été justifiée ultérieurement par une approche théorique.

Dans le cas d'un milieu poreux non homogène à l'échelle macroscopique la perméabilité dépend des variables d'espace.

Si le milieu n'est pas isotrope, il existe des directions d'écoulement privilégiées (sols stratifiés,). La perméabilité est alors directionnelle et s'exprime sous forme tensorielle.

Un milieu poreux peut être considéré comme constitué de capillaires plus ou moins communicants. Par analogie à un écoulement dans un cylindre, un nombre de Reynolds est défini pour un écoulement en milieu poreux perméable :

$$R_e = \frac{V\delta}{\nu} \tag{II.3}$$

Avec :

- ✦ V : vitesse moyenne du fluide définie en (II.3),
- ✦ δ : dimension représentative de la taille des pores,
- ✦ ν : viscosité cinématique du fluide.

Sur la base de constatations expérimentales [5], la loi de Darcy est valable en dessous d'un nombre de Reynolds limite dont les valeurs proposés sont dans la fourchette 1 – 10.

II.1.2. CONDITIONS LIMITES ENTRE DEUX MILIEUX POREUX ET FLUIDE :

Lorsque l'on considère un milieu poreux dont l'écoulement est régi par la loi de Darcy, les conditions aux limites pour le milieu poreux sont des conditions portant sur la pression.

Dans le milieu fluide les conditions limites sont des conditions en vitesse. Plusieurs cas de figure sont rencontrés dans la littérature :

a) Adhérence à la paroi :

Les vitesses tangentes à la paroi sont supposées nulles. Cette condition est réaliste lorsque les vitesses d'écoulement dans les milieux poreux sont très faibles par rapport aux vitesses dans le milieu fluide (fig.II.1.a).

b) Continuité des vitesses à l'interface :

Les composantes tangentielles de la vitesse sont égales de part et d'autre de l'interface (fig.II.1.b) :

$$\vec{U}_{paroi} = -\frac{k}{\mu} \vec{grad}_{paroi} P \quad (II.4)$$

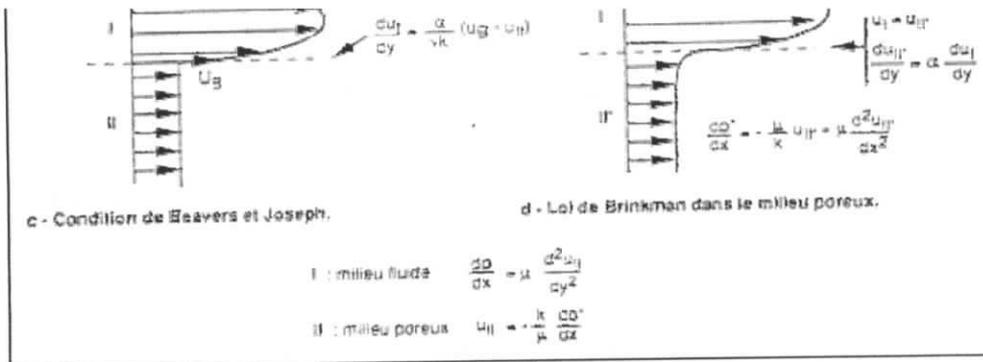


Fig.II.1 : L'interface milieu fluide - milieu poreux

c) Condition de Beavers et Joseph :

Beavers et Joseph ont étudié un écoulement de type Poiseuille dans un canal rectangulaire délimité par une paroi solide d'un coté et un milieu poreux de l'autre. Ils ont constaté que les débits dans le canal sont supérieurs aux débits théoriques obtenus avec des conditions limites de continuité de vitesse à l'interface milieu fluide - milieu poreux. Ils supposent alors l'existence d'une vitesse de glissement à l'interface des deux milieux proportionnelle à la contrainte de cisaillement :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \alpha \times k^{-1/2} (U_B - V) \quad (II.5)$$

Avec :

- U_B vitesse à l'interface dans le milieu fluide
- V vitesse à l'interface dans le milieu poreux $-\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$
- α est un coefficient sans dimension qui caractérise le glissement ($\alpha \rightarrow \infty$: pas de glissement, $\alpha=0$: contrainte nulle à la paroi).

La mesure du débit dans le canal permet de déterminer la vitesse U_B qui permet à son tour de déduire la valeur du coefficient α propre aux milieux poreux considéré. Pour différents milieux poreux (perméabilité allant de $5.5 \times 10^{-11} \text{ m}^2$ à $8.2 \times 10^{-8} \text{ m}^2$) les auteurs obtiennent des valeurs de α variant de 0.1 à 4. Le milieu fluide n'est pas de faible épaisseur.

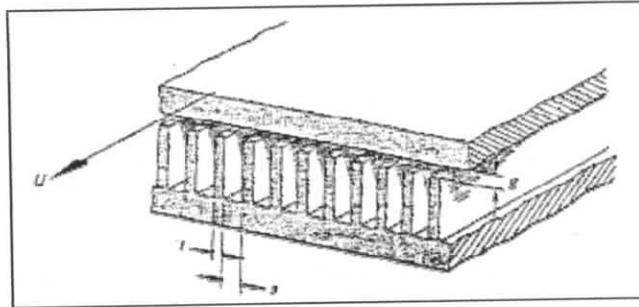


Fig.II.2 : Milieu poreux en dents de peigne.

La condition de Beavers et Joseph, proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de glissement, est retrouvée à l'aide de la loi de Brinkman. Elle est également justifiée de façon à la fois théorique et expérimentale à l'aide d'un «pseudo milieu poreux en dents de peigne» (fig.II.2). Les valeurs théoriques de α semblent toujours être supérieures à l'unité.

II.2. ECOULEMENT EN FILM MINCE :

Les bases de la lubrification hydrodynamique ont été établies par Reynolds en 1886. L'équation qu'il obtient est dénommée équation de Reynolds [6]. C'est une équation de conservation du débit, elle est détaillée en chapitre III.

Dans le cas d'un chargement statique du contact et pour un fluide d'épaisseur $h = h(x)$ supposé isovisqueux et incompressible l'équation de Reynolds en régime laminaire se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dx} \quad (\text{II.6})$$

Dans les paragraphes suivants nous rappelons successivement les différentes conditions limites associées classiquement à l'équation de Reynolds et les solutions auxquelles elles donnent lieu ainsi que les deux hypothèses simplificatrices qui permettent d'obtenir des solutions analytiques.

On distingue les frontières du film définies par la géométrie du contact $\left(z = \pm \frac{l}{2}\right)$ et l'interface entre la zone de film complet et la zone de cavitation.

Aux extrémités du palier les conditions limites sont de type Dirichlet :

$$p\left(\theta, \pm \frac{l}{2}\right) = p_{\text{ambiante}} = 0 \quad (\text{II.7})$$

La géométrie cylindrique du film lubrifiant d'un palier donne lieu à la condition de périodicité :

$$p(\theta, z) = p(\theta + 2\pi, z) \quad (\text{II.8})$$

Les solutions dites de **Sommerfeld**, **Gümbel**, **Reynolds** et **Floberg** correspondent à divers conditions limites à l'interface entre la zone de cavitation et la zone de film complet.

a)- Solution de Sommerfeld :

C'est la solution de l'équation (II.6) avec la condition (II.7) écrite sur toute l'étendue du contact $\theta \in [0, 2\pi]$.

Le champ de pression qui en résulte est antisymétrique par rapport à la ligne des centres. Il atteint généralement des valeurs inférieures au vide qui sont irréalistes.

Cette solution n'est acceptable que dans le cas de paliers pressurisés ($p_{\text{ambiante}} \gg p_{\text{atm}}$) ou dans celui de paliers très faiblement chargés.

b)- Solution de Gümbel ou demi-Sommerfeld :

C'est la solution de Sommerfeld pour laquelle les valeurs inférieures à une pression seuil sont tronquées. Elle donne lieu à une discontinuité du débit sur la frontière de rupture du film.

c)- Solution de Reynolds ou de Swift-Steiber :

Reynolds avait remarqué qu'en début de divergent d'un palier, le film lubrifiant est en dépression et se rompt.

La condition limite dite de Reynolds permet de prendre compte de la conservation du débit à la rupture du film : le gradient de pression est nul et la pression est constante dans la zone de cavitation. La frontière de rupture est a priori inconnue et se situe généralement dans le divergent près du point d'épaisseur minimum.

Sans condition adéquate à la formation du film lubrifiant, le film est supposé se former au point d'épaisseur maximale, $\theta=0$ et la pression y est imposée. Ce qui peut refléter la

présence d'une rainure axiale d'alimentation du film lubrifiant dans la zone où l'épaisseur du film est maximale.

La solution ainsi obtenue est totalement satisfaisante dans un grand nombre de configurations de fonctionnement d'un palier.

d)- la condition de Floberg :

Dans certaines configurations, paliers faiblement alimentés par exemple, la frontière de formation du film lubrifiant complet est inconnue. Un palier auto-lubrifiant entre dans cette catégorie. La frontière de rupture de film lubrifiant est également inconnue mais le problème est plus classique.

Ces deux frontières, lorsqu'elles existent, délimitent le passage du film complet à la zone de cavitation.

Les conditions limites nécessaires à la détermination de ces frontières libres proviennent de l'écriture de la conservation du débit en film mince et de l'hypothèse de pression constante dans la zone de cavitation.

De telles considérations ont permis d'obtenir à la rupture la condition de Reynolds ou Swift-Steiber (gradient de pression nul).

L'écriture de la conservation du débit au travers de la zone de cavitation permet de déterminer la condition de raccord à la frontière de formation du film : c'est la condition de **Floberg**.

Quelques auteurs ont résolu numériquement ce problème. Certains ne précisent pas la méthode de calcul utilisée.

Elrod et Adams [7,8] regroupent les deux équations de conservation (dans le film complet et dans la zone de cavitation) en un problème unique de type complémentarité et le discrétisent par différences finies. A l'origine, la méthode d'Elrod est basée sur une exploitation de la relation pression - masse volumique d'un liquide. Les auteurs supposent le module de compressibilité β indépendant de la pression :

$$\beta = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad \text{d'où} \quad p = p_c + \beta \ln \frac{\rho}{\rho_c} \quad (\text{II.9})$$

Ils introduisent une nouvelle quantité $\Theta = \frac{\rho}{\rho_c}$ qui représente la concentration en huile. Θ est légèrement supérieure à 1 dans la zone de film complet et comprise entre 0 et 1 dans la zone de cavitation.

Cette méthode « pseudo-compressible » peut conduire à des résultats erronés, elle est cependant utilisée (voir chapitre III).

Ce point a été ensuite corrigé par Elrod qui résout en fait le problème en incompressible.

Bayada, Chambat et El Alaoui [9] formulent le problème sous une forme variationnelle qui contient implicitement la condition de **Floberg**. Ils l'associent à une discrétisation par éléments finis.

II.2.2. HYPOTHESES SIMPLIFICATRICE EN LUBRIFICATION :

Dans certaines configurations il est possible de négliger les variations de la pression dans l'une des deux dimensions du contact. L'équation de Reynolds s'en trouve simplifiée.

Dans le cas des paliers ces simplifications se traduisent par les hypothèses de :

- *palier court (variations circonférentielles de la pression négligées devant les variations axiales),*
- *palier long (variations axiales de la pression négligées devant les variations circonférentielles)*

II.3. LES PRINCIPALES MODELISATIONS DE PALIERS POREUX :

Les modélisations du fonctionnement des paliers poreux sont nombreuses dans la littérature. Elles ont pour origine les travaux de **Morgan et Cameron** et sont basées, d'une part sur l'équation de la mécanique des films minces visqueux (équation de Reynolds) dans la zone de contact (Chapitre III), d'autre part sur la loi de Darcy couplée à l'équation de continuité dans le domaine poreux (fig. II.3). Les conditions de raccord à l'interface de ces deux domaines (film et coussinet poreux) sont la continuité de la pression et de la vitesse de filtration radiale.

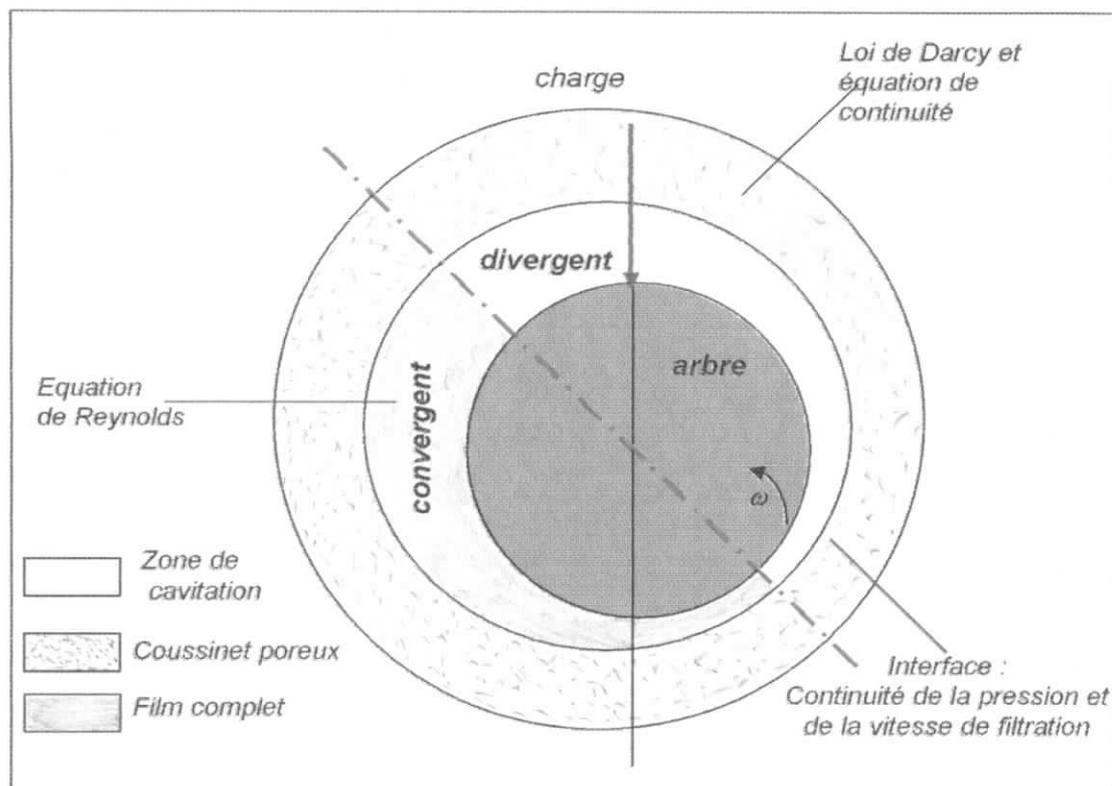


Fig.II.3 : Domaines, Equations et Conditions de raccord.

Les divers modèles de la littérature peuvent être scindés en plusieurs rubriques en fonction des hypothèses et conditions limites envisagées :

a)- hypothèse classique en lubrification hydrodynamique :

- palier court,
- palier long,
- palier de longueur finie.

b)- conditions limites en lubrification hydrodynamique :

- la solution dite de Sommerfeld,
- la solution dite de Gumbel,
- la solution dite de Reynolds.

c)- épaisseur du coussinet :

- les coussinets de faible épaisseur, pour lesquels la courbure est négligeable. L'équation dans le milieu poreux est écrite en coordonnées cartésiennes,
- les coussinets d'épaisseur quelconque. L'équation dans milieu poreux est écrite en coordonnées cylindriques.

d)- cinématique à l'interface (fig. II.1) :

- adhérence à la paroi,
- continuité de toutes les composantes de la vitesse à l'interface,
- prise en compte d'un glissement pariétal proportionnel à la contrainte de cisaillement du milieu fluide – conditions de **Beavers** et **Joseph**.

e)- conditions limites sur les surfaces externes du coussinet :

- si le coussinet est encastré au niveau de sa surface externe, on considère que la vitesse normale à cette surface est nulle, ce qui se traduit par une condition d'étanchéité,
- si les pores sur la surface externe du coussinet sont débouchants, c'est une condition de continuité de la pression entre le milieu poreux et le milieu ambiant.

Ci-dessous nous présentons :

- ✦ les travaux de Morgan et Cameron,
- ✦ les diverses solutions analytiques ou semi-analytiques,
- ✦ les solutions numériques.

II.3.1. MODELISATION DE MORGAN ET CAMERON :

La théorie hydrodynamique pour les paliers poreux a pour origine les travaux de **Morgan** et **Cameron**. Ils ont utilisés les hypothèses suivantes :

- palier court ($l/d > 0.25$),
- épaisseur de coussinet faible ($(R_e - R_i)/R_i < 0.2$),
- coussinet étanche sur son rayon externe.

A l'interface des deux milieux les auteurs supposent que les vitesses tangentielles sont nulles (adhérence à la paroi). Compte tenu, des hypothèses trois termes interviennent dans l'équation de Reynolds (voir chapitre III) ; celle-ci traduit la conservation du débit, avec de gauche à droite dans (II.10) : les variations de débit axial, circonférentiel dû à la rotation de l'arbre et de filtration radial.

$$\frac{h^3}{\mu} \frac{d^2 p}{dz^2} = 6U_2 \frac{dh}{dx} + 12V_1 \tag{II.10}$$

Avec : $U_2 = \omega R_a$ et $V_1 = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial y} \Big|_{R=R_i}$

Dans le coussinet poreux la loi de Darcy couplée à la l'équation de continuité donne l'équation de Laplace. Les auteurs négligent la courbure du coussinet et écrivent cette équation en coordonnées cartésiennes. Ils obtiennent ainsi, pour un viscosité et une perméabilité supposées constantes :

$$\left. \begin{aligned} \vec{V} &= -\frac{k}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p^* \\ \text{div} \vec{V} &= 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \Delta p^* = \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = 0$$

(II.11)

Morgan et al. Généralisent l'hypothèse de palier court au coussinet poreux : ils négligent dans ce dernier les variations circonférentielles (selon x) par rapport aux variations axiales. Pour obtenir une solution simple ils supposent que le gradient radial de pression varie linéairement selon l'épaisseur ($R_e - R_i$) du coussinet et que ce gradient est nul sur le rayon externe R_e (condition d'étanchéité). Ces hypothèses reportées dans l'équation (II.11) permettent d'aboutir à l'expression simple du gradient de pression à l'interface :

$$\left. \frac{\partial p^*}{\partial y} \right|_{R_i} = (R_e - R_i) \frac{d^2 p}{dz^2} \tag{II.12}$$

Remarquons que ce gradient est invariant selon z. C'est la conséquence de l'hypothèse retenue d'un gradient de pression radial linéaire. Physiquement cette hypothèse n'est donc pas réaliste mais elle a permis d'obtenir de façon simple une évaluation théorique des caractéristiques d'un palier poreux.

En reportant (II.12) dans l'équation de Reynolds (II.10) :

$$\frac{d^2 p}{dz^2} [h^3 + 12k(R_e - R_i)] = 6\mu\omega R_a \frac{dh}{dx} \tag{II.13}$$

Cette équation admet une solution analytique pour le champ de pression. Ils déterminent les caractéristiques statiques du palier en annulant les pressions négatives (solution de Gumbel).

Ils constatent l'affaiblissement de la portance théorique par rapport à celle d'un palier classique non poreux, dû dans la zone de haute pression du film à la fuite du fluide vers le matériau perméable. Cet affaiblissement va de pair avec un accroissement du coefficient de frottement.

Ils mettent en évidence l'existence d'une portance théorique maximale lorsque l'excentricité tend vers 1, alors que dans le cas d'un palier classique non poreux la portance théorique tend vers l'infini.

II.3.2. AUTRES SOLUTIONS ANALYTIQUES OU SEMI-ANALYTIQUES :

De nombreuses solutions analytiques sont exposées dans la littérature. Leurs auteurs supposent de faibles épaisseurs de coussinet et négligent les variations circonférentielles ou axiales de la pression (palier infiniment court ou palier infiniment long).

Des hypothèses moins restrictives peuvent donner lieu à des solutions semi-analytiques.

Tous ces travaux sont décrits brièvement car ils sont tous basés sur le modèle exposé au paragraphe précédent.

II.3.2.1. SOLUTIONS ANALYTIQUES :

On obtient des solutions purement analytiques en supposant comme l'ont fait **Morgan** et **Cameron** que la pression est parabolique selon l'épaisseur du coussinet poreux.

Capone [10] reprend donc la même hypothèse que Morgan et Cameron pour résoudre le cas du palier infiniment long. Il suppose un film lubrifiant complet (solution de Sommerfeld). La direction de la portance obtenue est en conséquence perpendiculaire à la ligne des centres.

Prakash et **Vij** [11] reprennent le problème ci-dessus mais utilisent la condition limite de Reynolds. Ils observent, à excentricité de fonctionnement identique, un accroissement de l'abscisse de rupture et de l'angle de calage lorsqu'ils augmentent la perméabilité. L'accroissement de l'angle de calage, constaté également par Cameron et al., s'explique par l'atténuation des variations circonférentielles de pression et par une pression maximale située plus en amont dans le convergent. **Prakash** et **Vij** retrouvent une portance maximale (excentricité de 1) au delà de laquelle la lubrification n'est plus totalement hydrodynamique. Ils comparent leurs résultats à ceux de Capone (solution de Sommerfeld) : ils obtiennent une portance plus faible due à l'absence des pressions négatives.

II.3.2.2. SOLUTIONS SEMI-ANALYTIQUES :

Dans ce cas l'hypothèse restrictive du paragraphe précédent, gradient de pression radial linéaire dans le coussinet disparaît. Les auteurs résolvent l'équation de Laplace - bidimensionnelle ou tridimensionnelle selon les cas- dans le coussinet par séparation de

variables. Ils reportent l'expression du champ de pression et du gradient de pression à l'interface film-coussinet poreux dans l'équation de Reynolds modifiée et déterminent les constantes de la solution par la méthode de **Galerkin**. Si le coussinet est de faible épaisseur (rapport de l'épaisseur du coussinet sur le rayon interne inférieur à 0.2), l'équation de Laplace est écrite en coordonnées cartésiennes. Dans le cas de coussinets d'épaisseur quelconque cette équation doit être écrite en coordonnées cylindriques.

II.3.3. LES SOLUTIONS NUMERIQUES :

Elles correspondent à des modèles de paliers de dimension finie [12].

Cimatti a démontré l'unicité de la solution pour un palier poreux développé (courbure du coussinet négligée), de longueur finie, sans rupture du film d'huile.

Reason et **Dyer** ont résolu numériquement le problème pour un palier de longueur quelconque tout en négligeant la courbure du coussinet (coussinet de faible épaisseur). Ils utilisent la condition d'adhérence à la paroi fluide – coussinet poreux. Les équations sont discrétisées par différences finies. Etant donné le type de résolution choisi, il est dommage qu'ils utilisent la condition de Gumbel (pression nul dans le divergent) et non la condition de Reynolds. Ils comparent leurs résultats à ceux de **Morgan et al.** Et de **Rouleau** (palier court). Tant que le rapport longueur sur diamètre est inférieur à 0.7, la solution palier court est satisfaisante, surtout pour les faibles excentricités. Pour des rapports longueur sur diamètre supérieur à 1, les modèles paliers longs sont plus précis que les modèles paliers courts. L'écart entre cette solution et celle du palier long diminue lorsque la perméabilité ou l'excentricité augmentent.

Rouleau et **Steiner** utilisent la condition de Reynolds pour des paliers de longueur quelconque et de faible épaisseur radiale. Ils supposent à l'interface film – coussinet la continuité de la vitesse dans les trois directions. Ils remarquent, par rapport à une condition d'adhérence, que cette condition n'a d'effet que pour des rapports K/C^2 importants ($\approx 10^{-2}$).

Reason et **Siew** et **Quan Yong-Xin** et **Pei-Ming** modélisent un palier poreux de dimensions quelconques et utilisent la condition de Reynolds pour déterminer la rupture du film lubrifiant. A l'interface, les premiers supposent la continuité des trois composantes de la vitesse (radiale et tangentielles), les seconds utilisent le critère de **Beavers** et **Joseph** et analysent l'effet d'une perméabilité variable circonférentiellement.

II.3.4. BILAN DE L'ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE :

Les modélisations du fonctionnement des paliers poreux en régime hydrodynamique sont basées sur :

- ✚ l'équation de Reynolds dans le film lubrifiant,
- ✚ la loi de Darcy et l'équation de continuité dans le milieu poreux,
- ✚ la continuité de la pression et de la vitesse de filtration à l'interface des deux milieux.

De nombreuses hypothèses simplificatrices ont été effectuées sur ces différents points, elles concernent :

- les dimensions du coussinet,
- les conditions limites de l'équation de Reynolds,
- les conditions de raccord à l'interface des deux milieux,
- la prise en compte de perméabilité hétérogène ou anisotrope.

Morgan et al. Ont été les premiers à poser les bases de ces recherches. Leur modèle, en dépit d'hypothèses par trop simplificatrices, a eu le mérite de mettre en concordance, au moins pour partie, l'aspect théorique de la question et la réalité expérimentale (charge critique, coefficient de frottement minimum). Ce travail a été l'origine de nombreux modèles qui dans la majorité des cas n'ont pas apporté d'éclairages nouveaux aux questions posées par le fonctionnement des paliers poreux.

La condition de Beavers et Joseph qui décrit un glissement fluide à l'interface d'un milieu fluide et d'un milieu poreux, résulte d'essais expérimentaux entrepris sur des milieux relativement poreux. Son utilisation dans des modèles de paliers poreux fait apparaître des différences mineures sur les caractéristiques de fonctionnement.

Quelque soit la nature de la perméabilité du coussinet, homogène, hétérogène ou anisotrope, les résultats obtenus sont quantitativement similaires.

Les modèles les moins restrictifs rencontrés dans la littérature sont ceux de **Quan Yong-Xin** et **Pei-Ming** et **Reason** et **Siew**. Le test numérique d'un modèle de type **Reason** et **Siew**, le bilan des débits montre un déficit significatif d'alimentation du film lubrifiant : le débit évacué du film est 100 fois plus important que le débit d'alimentation. Un tel résultat était prévisible : tous les modèles supposent que la frontière de formation du film se situe au point d'épaisseur maximum ($p=0$ en $\theta=0$), ce qui n'est pas physiquement justifié.

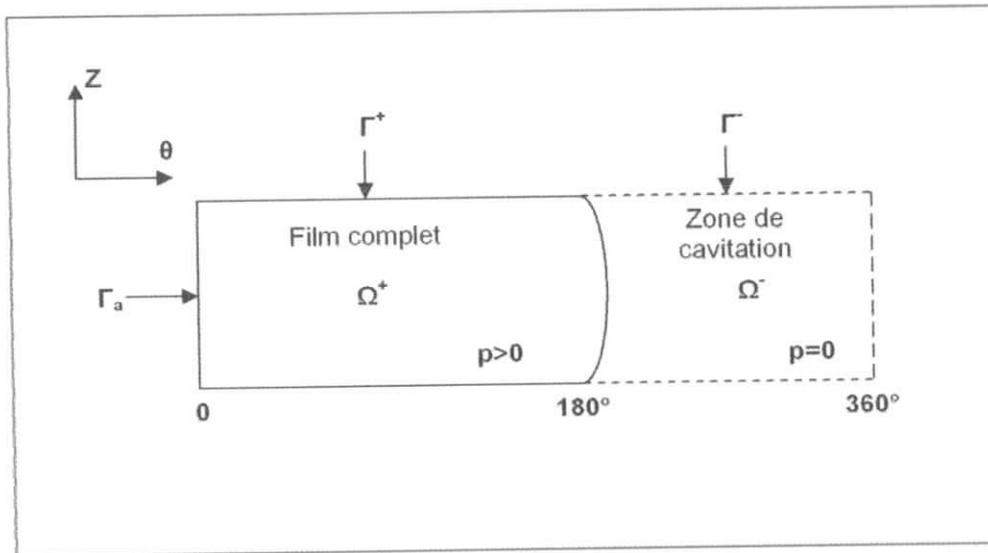


Fig.II.4 : film développée Ω .

- Dans la partie du coussinet poreux contiguë au film complet Ω^+ (fig. II.4) le gradient de pression radial est presque partout négatif. Il en résulte un débit positif du film vers la matrice poreuse égal à :

$$\int_{\Omega^+} -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial r} \Big|_{r=r_i} d\Omega > 0 \tag{II.14}$$

- Alors que dans la partie du coussinet poreux attenante à la zone de cavitation Ω^- le gradient de pression est presque partout nul car la pression de cavitation est égale à la pression extérieure. Le débit de la matrice poreuse vers le film est donc très proche de zéro. Il s'écrit :

$$\int_{\Omega^-} -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial r} \Big|_{r=r_i} d\Omega$$

Le bilan des échanges radiaux du film lubrifiant $\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$, somme des deux débits précédent est strictement positif.

- D'une façon analogue le bilan axial du débit aux extrémités du film ($\Gamma = \partial\Omega^+ - \Gamma_a$) est positif. Le débit axial est sortant (positif) sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega^+ \cap \Gamma$, il est nul sur la frontière $\Gamma^- = \partial\Omega^- \cap \Gamma$.

Le bilan total des échanges axiaux et radiaux au niveau du film lubrifiant est donc positif, c'est un débit évacué du contact.

Avec de tels modèles, pour que le débit soit conservé il faut supposer un apport de lubrifiant réalisé au moyen d'une rainure axiale. En réalité la seule alimentation du film se produit par aspiration dans la zone de plus basse pression du film lubrifiant. C'est

donc la dépression dans la zone de cavitation qui gouverne l'auto-alimentation. Dans le cas d'un palier auto-alimenté cette dépression ne peut être négligée.

La position de la frontière de formation du film complet est à priori inconnue. L'écriture de la conservation du débit dans la zone de cavitation permet de la déterminer. Un palier auto-lubrifiant poreux doit être considéré comme palier sous ou faiblement alimenté.

Les seuls modèles théoriques à même de conserver sont ceux qui supposent un film complet de lubrifiant (solution antisymétrique de Sommerfeld), ou ceux qui supposent un palier infiniment long étanche sur la surface externe du coussinet poreux (sans échange avec le milieu ambiant).

II.4. CONCLUSION :

Les modèles de paliers poreux développés dans la littérature peuvent être ainsi résumés :

- ✚ Loi de Darcy couplée à l'équation de continuité dans le coussinet poreux et des conditions limites sur la surface externe du coussinet de type Neumann ou Dirichlet,
- ✚ Equation de Reynolds dans le film lubrifiant complet avec des conditions limites représentatives de différentes solutions : Sommerfeld, Gumbel, Reynolds.

La formation du film lubrifiant complet se situe au point d'épaisseur maximale,

- ✚ Couplage des deux équations à l'interface des deux milieux : continuité de la pression et de la vitesse de filtration radiale. Pour les vitesses tangentes à l'interface trois conditions limites sont rencontrées :

Adhérence à la paroi, continuité, condition de Beavers et Joseph.

Les dimensions et caractéristiques utilisées dans ces modèles sont représentées, pour le cas le plus général, par les huit paramètres :

- Le rayon de l'arbre r_a ,
- Le jeu radial c ou le rayon interne du coussinet r_i ,
- Le rayon externe du coussinet r_e ,
- La longueur du coussinet l ,
- L'excentricité e ,
- La vitesse de rotation ω ,
- La perméabilité du coussinet k ,
- La viscosité dynamique du lubrifiant μ ,

Un paramètre supplémentaire (α) vient intervenir pour les modèles qui utilisent la condition de Beavers et Joseph.

A l'issue de cette étude, la mise en œuvre d'un modèle de type **Reason** et **Siew** fait apparaître un déficit de débit d'alimentation du film lubrifiant. Les modèles de la littérature ne sont donc pas représentatifs d'un fonctionnement en régime permanent de paliers auto-lubrifiants poreux.

Le palier poreux est un palier faiblement alimenté dont les localisations de la zone de film complet et de la zone de cavitation ne sont pas définies explicitement.

Pour assurer l'auto-alimentation du film lubrifiant il paraît impératif de considérer que la zone de cavitation est en dépression.

Sur la base de ces conclusions, l'auto-alimentation sera prise en compte dans notre modélisation du fonctionnement des paliers poreux (Chapitre IV).

Chapitre III :

*Équations de la lubrification
Hydrodynamique*

CHAPITRE III :

EQUATIONS DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE

Les relations permettant l'analyse hydrodynamique d'un contact lubrifié sont déduites à partir des équations de la mécanique des milieux continus et de loi de comportement des fluides newtoniens (en tenant compte de la forme particulière du film lubrifiant pour lequel l'épaisseur est très faible devant la largeur et la longueur du contact). Nous les présentons succinctement, puis nous les appliquons au cas particulier de la lubrification en ne prenant en compte que les termes prépondérants, ce qui permettra de définir les équations locales de la mécanique des films minces visqueux.

III.1. EQUATIONS GENERALES DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS :

Les équations générales de la mécanique des milieux continus [13] traduisent les lois de conservations suivantes :

- La loi de conservation de la masse.
- La loi de conservation de la quantité de mouvement.

Par ailleurs, il faudra rajouter à ces lois de conservation, des lois de comportement spécifique aux milieux et aux phénomènes étudiés.

III.1.1. LOI DE CONSERVATION DE LA MASSE :

Soit $D_m(t)$ un domaine matériel de S (système étudié) que l'on suit dans son mouvement. Chaque point de sa frontière $\partial D_m(t)$ a donc la vitesse \vec{U} de la particule avec laquelle il coïncide à l'instant t . Pour ce domaine, la loi de conservation de la masse se traduit par l'équation :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho dv = 0 \quad (\text{III.1})$$

Modifions cette équation à l'aide du théorème de transport de Reynolds appliqué à l'équation de conservation de la masse, il vient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho dv = \int_{D_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{D_m(t)} \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (\text{III.2})$$

Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale de surface du second membre, et la relation (III.2) devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho dv = \int_{D_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) \right] dv = 0 \quad (\text{III.3})$$

Cette relation est valable pour tout domaine $D_m(t)$. En supposant ρ et \vec{U} continus ainsi que leurs dérivées premières, il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{III.4})$$

Cette expression représente la forme locale de principe de conservation de la masse. Elle s'écrit aussi sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{III.5})$$

Lorsque le fluide est incompressible on peut écrire :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{III.6})$$

III.1.2. LOI DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT :

La loi de conservation de la quantité de mouvement écrite sur le domaine matériel $D_m(t)$ prélevé dans S se traduit par l'équation :

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m(t)} \rho u_i dv = \int_{D_m(t)} f_i dv + \int_{\partial D_m(t)} \sigma_{ij} n_j dA \quad (\text{III.7})$$

qui exprime que le taux de la quantité de mouvement de $D_m(t)$ est égale aux forces appliquées sur ce domaine.

Dans cette relation, σ_{ij} représente le tenseur des contraintes s'appliquant sur $D_m(t)$ et f_i les efforts volumiques agissant sur ce même domaine.

Le théorème de transport de Reynolds appliqué à l'équation de conservation de la quantité de mouvement et celui de la divergence permettent de transformer (III.7), en :

$$\int_{D_m(t)} \left[\rho \frac{du_i}{dt} - f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] dv = 0 \quad (\text{III.8})$$

comme le domaine $D_m(t)$ est arbitraire et l'intégrale supposée continue, on peut écrire :

$$\rho \frac{du_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{III.9})$$

Soit encore développant le premier membre :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{III.10})$$

Cette relation est la forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement.

Remarque : en lubrification, la loi de conservation de mouvement et la loi de conservation de la masse permettent d'obtenir l'équation de Reynolds.

III.1.3. LOI DE COMPORTEMENT DU FLUIDE UTILISE :

Dans cette étude nous supposons que le fluide utilisé est un fluide visqueux newtonien. Il satisfait donc aux hypothèses de linéarité, d'homogénéité et d'isotropie. Il faut cependant noter que de nombreux fluides ont des lois de comportement qui s'écartent de ces hypothèses. Cependant dans le cas étudié ici, l'huile lubrifiante d'un palier a généralement le comportement d'un fluide visqueux newtonien, dont la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (\text{III.11})$$

où :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III.12})$$

Représente le tenseur de taux de déformation, θ est le taux de déformation cubique, λ et μ les deux coefficients de Lamé, appelés encore dans le cas des fluides **coefficient de viscosité**.

III.2. EQUATION GENERALE DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX :

En mécanique des films minces visqueux, le milieu étudié est formé de deux solides, séparés par un film mince de lubrifiant, dont l'épaisseur très faible devant les autres dimensions du contact est privilégiée par rapport aux deux autres.

Si on néglige la courbure générale du film, le système d'axes orthonormés peut être choisi de telle sorte que le plan X_1OX_3 soit parallèle au film. Dans ces conditions les surfaces de contact peuvent être représentées dans ce repère par les équations $H_1(X_1, X_3, t)$ et $H_2(X_1, X_3, t)$.

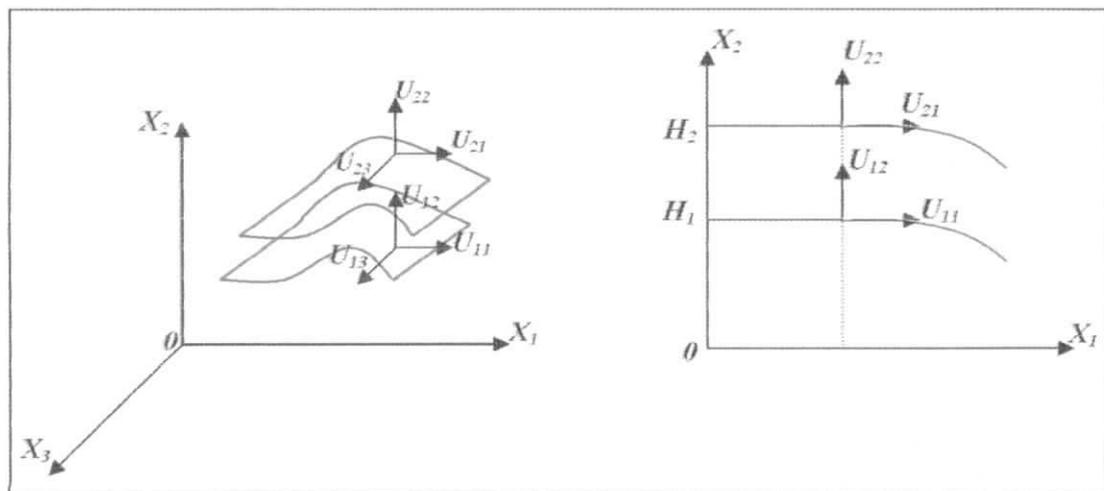


Fig. III.1 : Systèmes d'axes.

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact, la vitesse du fluide à la paroi est égale à la vitesse de celle-ci au point considéré. Cette condition peut s'écrire :

$$U_1 = U_{11} \quad V_1 = U_{12} \quad W_1 = U_{13} \quad \text{pour } H = H_1 \quad (\text{III.13})$$

$$U_2 = U_{21} \quad V_2 = U_{22} \quad W_2 = U_{23} \quad \text{pour } H = H_2$$

L'épaisseur du film représentée par $H = H_2 - H_1$ est toujours petite devant les autres dimensions du contact.

Compte tenu de la forme particulière du contact, les équations de la mécanique des milieux continus peuvent se simplifier considérablement, car certains termes sont négligeables devant les autres.

Pour déterminer l'ordre de grandeur des termes des différentes équations, une analyse dimensionnelle est nécessaire :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 = \frac{x_1}{L}; \bar{x}_2 = \frac{x_2}{H}; \bar{x}_3 = \frac{x_3}{L}; \bar{t} = t \frac{V}{L} \\ \bar{U}_1 = \frac{U_1}{V}; \bar{V}_1 = V_1 \frac{L}{VH}; \bar{W}_1 = \frac{W_1}{V} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.14})$$

Dans ces expressions L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes OX₁ et OX₃, H et VH/L celles suivant X₂.

Ce changement de variables conduit à poser pour la pression :

$$\bar{P} = P \frac{H^2}{\mu_0 VL}$$

Par ailleurs un paramètre d'échelle $\varepsilon=H/L$ est mis en évidence en mécanique des films minces visqueux, il est de l'ordre de 10^{-3} .

III.2.1 EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE :

L'équation (I.5) s'écrit sous la forme sans dimension :

$$\frac{V\rho_0}{L} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho U_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho U_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho U_3) \right] = 0 \quad (\text{III.15})$$

On constate que tous les termes ont le même ordre de grandeur. Ainsi, sauf dans des cas particuliers simples, il faudra toujours utiliser l'équation complète de la conservation de la masse.

III.2.2 EQUATION GENERALISEE DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX :

III.2.2.1 INTEGRATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOCKES :

L'analyse dimensionnelle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement conduit aux équations de **Navier-Stockes** simplifiées :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.16)}$$

Dans ces équations :

- ◆ Les forces massiques F_i sont négligées.
- ◆ L'épaisseur du film $H_2 - H_1$ est très faible devant les autres dimensions $(H_2 - H_1)/L$ est approximativement égale à 10^{-3} .
- ◆ Les forces d'inerties dans le fluide, sont négligeables devant les forces de viscosités et de pression : dans ce cas le régime est **Laminaire**.

Pour intégrer les équations (III.16) compte tenu des conditions aux limites décrites en (III.13), il est commode de poser :

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_{H_1}^{x_2} \frac{\xi d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} \\ J &= \int_{H_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.17)}$$

pour $x_2 = H_1$ $I = J = 0$

et pour $x_2 = H_2$ les intégrales I et J prennent les valeurs suivantes :

$$\left. \begin{aligned} I(H_2) &= I_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{x_2 dx_2}{\mu(x_1, t)} \\ J(H_2) &= J_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{dx_2}{\mu(x_1, t)} \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.18)}$$

il vient alors :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{\partial p}{\partial x_1} \left(I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} J + U_{11} \\
 U_3 &= \frac{\partial p}{\partial x_3} \left(I - J \frac{I_2}{J_2} \right) + \frac{U_{23} - U_{13}}{J_2} J + U_{13}
 \end{aligned}
 \tag{III.19}$$

De plus l'équation de conservation de mouvement permet d'obtenir :

$$U_2 = - \int_{H_1}^{x_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right) dx_2 + U_{12}
 \tag{III.20}$$

L'équation (III.5) de conservation de la masse s'écrit après intégration à travers l'épaisseur du film :

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) dx_2 = 0
 \tag{III.21}$$

On peut transformer cette équation en se servant de la formule de dérivation des intégrales qui s'écrit en prenant pour argument une fonction $F(x_1, H_1, x_3, t)$:

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{H_1}^{H_2} F dx_2 - F(x_1, H_2, x_3, t) \frac{\partial H_2}{\partial x_i} + F(x_1, H_1, x_3, t) \frac{\partial H_1}{\partial x_i}
 \tag{III.22}$$

avec $i = 1$ ou 3 .

Par ailleurs, pour $i = 2$ on peut intégrer directement :

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho U_2) dx_2 = \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12}
 \tag{III.23}$$

Où ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les valeurs de la masse volumique du fluide sur les parois 1 et 2.

Compte tenu des relations (III.13), (III.21), (III.22), (III.23), il vient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_3 dx_2 - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \\
 & + \rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_1}^{H_2} \rho dx_2 - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} = 0
 \end{aligned}
 \tag{III.24}$$

Les deux premiers termes peuvent être explicités grâce à l'expression des vitesses U_1 et U_3 données par (III.19) en intégrant par partie et en posant au préalable :

$$R = \int_{H_1}^{x_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi, \quad F = \frac{1}{J_2} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} dx_2$$

$$G = \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{Rx_2}{\mu} dx_2 - I_2 F \quad (III.25)$$

Il vient alors :

$$\int_{H_1}^{H_2} \rho U_1 dx_2 = R_2 U_{21} - \frac{\partial p}{\partial x_1} G - (U_{21} - U_{11}) F$$

$$\int_{H_1}^{H_2} \rho U_3 dx_2 = R_2 U_{23} - \frac{\partial p}{\partial x_3} G - (U_{23} - U_{13}) F \quad (III.26)$$

où R_2 est la valeur que prend la fonction R à la paroi 2.

En regroupant les différents termes, on obtient l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée qui s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_3} [U_{23}(R_2 - F) + U_{13}F] - \rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t}$$

$$+ \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} \quad (III.27)$$

III.2.2.2 EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE :

Généralement en lubrification la vitesse d'une paroi du contact est tangente à cette paroi, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axe sur cette paroi on peut poser $H_1 = 0$ et $H_2 = h$ (fig.III.2).

En utilisant les coordonnées cartésiennes XYZ, les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

- Sur la paroi 1, pour $y = 0$ $u = U_1$; $v=0$; $w=W_1$
- Sur la paroi 2, pour $y = h$ $u = U_2$; $v=V_2$; $w=W_2$

L'équation de **Reynolds** généralisée par **DOWSON** en 1962 s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F) + U_1 F] - \rho_2 U_2 \frac{\partial h}{\partial x} \tag{III.31}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F) + W_1 F] - \rho_2 W_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 V_2$$

Où les fonctions R, F, G et R₂ sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} R &= \int_0^y \rho(x, \xi, z, t) d\xi \\ F &= \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dy \\ G &= \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{Ry}{\mu} dy - I_2 F \\ R_2 &= \int_0^h \rho dy \end{aligned} \right\} \tag{III.32}$$

III.2.2.3 INTERPRETATION PHYSIQUE DE L'EQUATION DES DIFFERENTS TERMES DE L'EQUATION DE REYNOLDS :

L'équation (III.31) est la forme la plus générale de l'équation de Reynolds. Pour l'obtenir il a été nécessaire de poser que :

- Le milieu est continu,
- Le fluide est newtonien,
- L'écoulement est laminaire,
- Les forces massiques extérieures sont négligeables,
- Les forces d'inerties sont négligeables,
- Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact,
- la courbure générale du contact est négligée,
- L'épaisseur du film mesurée dans la direction $\vec{O}y$ est toujours très faible devant les autres dimensions du contact ; c'est l'hypothèse de base de la lubrification.

Dans cette équation :

□ Le terme

$$\frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F) + U_1 F] - \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

représente la variation de débit massique dans la direction x pour une section de dimension h suivant y et unité suivant z .

□ Le terme

$$\frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F) + W_1 F] - \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction z pour une section de dimension h suivant y et unité suivant x .

Dans les deux expressions ci-dessus, le premier terme correspond au débit dû au déplacement des parois (écoulement de **Couette**), le second terme correspond au débit dû au gradient de pression (écoulement de **Poiseuille**).

□ Le terme

$$- \rho_2 \left(U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} - V_2 \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction y ; les trois termes de cette expression caractérisent respectivement l'effet de l'inclinaison dans la direction x , de l'inclinaison dans la direction z et de la vitesse dans la direction y .

□ Le terme

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t}$$

caractérise l'effet transitoire dû à la compressibilité du fluide.

L'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée s'applique à différents lubrifiants et à différents types de contact. On peut distinguer :

- ◆ Le cas du fluide compressible, pour lequel la masse volumique peut être éliminée de l'équation (II.31),
- ◆ Le fluide de viscosité constante ; ce qui simplifie l'équation (III.31),
- ◆ Le contact hydrostatique ; la terminologie étant particulièrement imprécise nous conviendrons d'appeler contacts hydrostatiques les seuls contacts pour lesquels l'équation (I.56) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0$$

- ◆ **Le régime permanent** : on définit en mécanique des films minces visqueux le régime permanent comme un régime de fonctionnement tel que dans un repère particulier, mobile

ou non, les paramètres géométriques du contact et les vitesses des parois sont indépendants du temps.

III.3. APPLICATION AU CAS DU PALIER [13]:

Un palier est constitué d'un arbre qui tourne à l'intérieur d'un coussinet séparé de celui-ci par un film de fluide (fig.III.3). Sous l'application d'une charge, les centres du coussinet et de l'arbre ne coïncident plus et il existe un coin convergent-divergent dans le film. La rotation de l'arbre entraîne du fluide dans le coin convergent et crée un champ de pression qui s'oppose à la charge et qui l'équilibre.

III.3.1. DESCRIPTION GEOMETRIQUE ET CINEMATIQUE :

a)- DESCRIPTION GEOMETRIQUE :

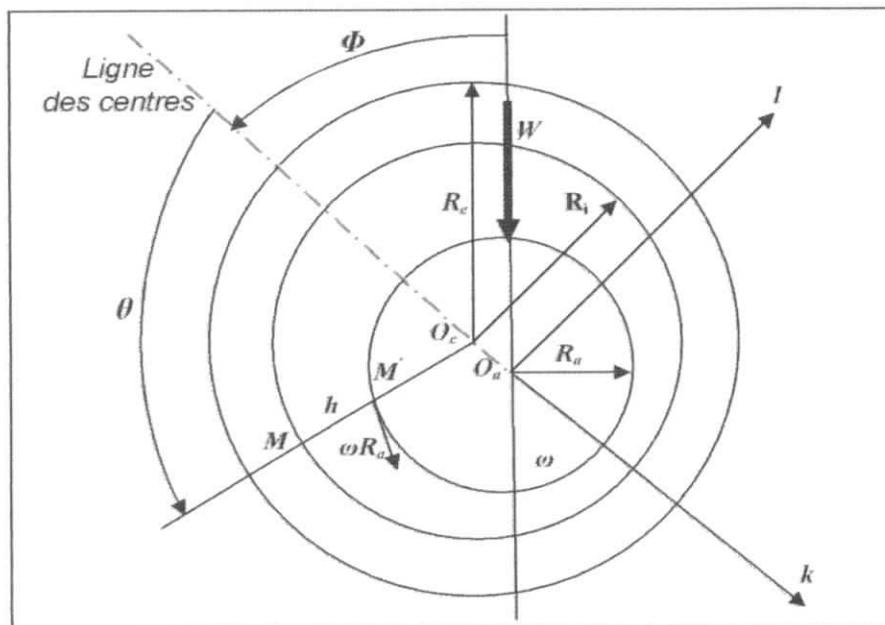


Fig.III.3 : Section droite du palier

L'angle que fait la ligne des centres $O_c O_a$ avec la direction de la charge est l'angle de calage Φ . Si les axes du coussinet et de l'arbre sont parallèles (palier aligné) et si l'on néglige les déformations élastiques des surfaces sous l'effet de la température et de la pression, ces deux paramètres sont suffisants pour repérer le positionnement de l'arbre à l'intérieur du coussinet.

Les rayons R_c et R_a étant très voisins ($R_a/(R_c-R_a) \approx 10^3$), on peut, en négligeant la courbure du film, développer le coussinet ou l'arbre et l'assimiler à un plan (fig. III.3).

Compte tenu de ces hypothèses, l'épaisseur du film a pour expression :

$$h = C(1 + \varepsilon \cos \theta) \tag{III.39}$$

soit sous forme adimensionnelle

$$\bar{h} = \frac{h}{C} = 1 + \varepsilon \cos \theta \tag{III.40}$$

Dans ces relations :

- $C = R_c - R_a$ est le jeu radial imposé par l'usinage.
- $\varepsilon = \frac{e}{C}$ est l'excentricité relative, Elle varie de 0 à 1.
- $\theta = \frac{x}{R_a}$ est la coordonnée angulaire.

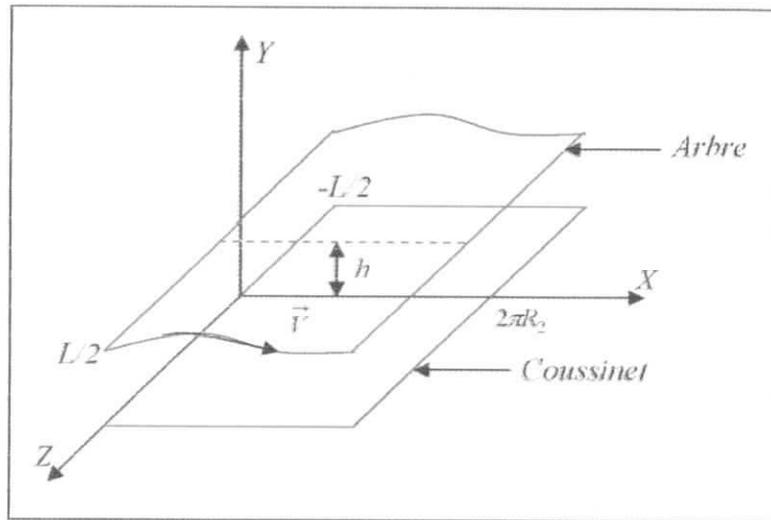


Fig.III.4 : Palier développé

b)- DESCRIPTION CINEMATIQUE (cas de surfaces lisses) :

Dans le repère associé à la figure II.5, dont le plan XOZ est confondu avec la surface développée du coussinet et en considérant qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois, les conditions limites sur la vitesse sont :

$$\text{sur le coussinet : } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 0 \\ V_1 = 0 \\ W_1 = 0 \end{cases} \tag{III.41}$$

$$\blacksquare \text{ sur l'arbre : } y = h \Rightarrow \begin{cases} U_2 = \omega R_a \\ V_2 = \omega R_a \frac{dh}{dx} \\ W_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

pour les conditions de géométrie et de vitesse définies précédemment et dans le cas d'un régime stationnaire établi, l'équation de Reynolds généralisée (II.60) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = U \frac{\partial}{\partial x} \left(h - \frac{I_2}{J_2} \right) \quad (\text{III.43})$$

Pour un fluide isovisqueux ($\mu = \text{cte}$) et incompressible l'équation (III.43) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{III.44})$$

III.3.2. CONDITION AUX LIMITES POUR LA ZONE DE RUPTURE :

Selon la nature du problème étudié (géométrie, cinématique,.....) la pression calculée peut être inférieure à la pression atmosphérique. Ces pressions relatives négatives vont entraîner une rupture du film lubrifiant. Ceci est couramment observé dans les paliers en régime permanent où la géométrie du film est convergente puis divergente.

La détermination de la zone de cavitation [14] repose sur la notion de conservation de débit, qui reprend un modèle suggéré par Jakobsson-Floberg-Olsson : *JFO model*.

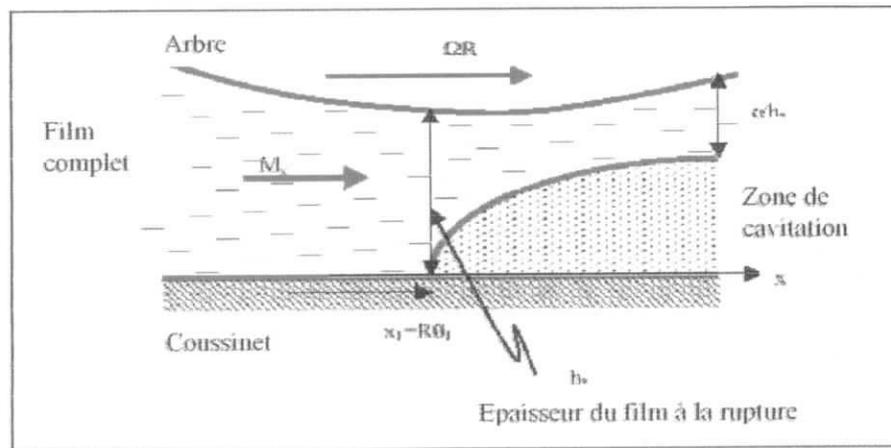


Fig.III.5 : rupture du film lubrifiant (début de la zone de cavitation)

La ligne $\theta_1(z^*)$ dont l'épaisseur du film $h=h^*$ définit la frontière de la zone de cavitation. Pour $\theta < \theta_1$ ($h > h^*$) la pression dans le film doit être diminuée jusqu'à la pression régnante dans la zone de cavitation (p_{cav}), i.e. $\frac{\partial p}{\partial \theta} < 0$. D'où :

$$M_{xB} = -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{R \partial \theta} + \rho h \frac{\omega R}{2} \geq (\rho h)_* \frac{\omega R}{2}; M_{zB} = -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{III.45})$$

Dans la région de cavitation, la pression est constante $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0\right)$, donc les débits massiques circonférentiels et axiaux sont donnés par :

$$M_{xB} = \Theta \rho h \frac{\omega R}{2} \leq (\rho h)_* \frac{\omega R}{2}; M_{zB} = 0; \text{ et } h > h^*$$

où Θ représente la fraction d'huile contenant dans la zone de cavitation, i.e. c'est le rapport entre le volume du liquide (l'huile) sur le volume total (*liquide + vapeur*).

Le long de $\theta_1(z^*)$, il ne peut pas y avoir discontinuité du débit, il s'en suit que la condition appropriée à travers $\theta_1(z^*)$ est :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_1} = 0 \quad \text{Condition dite de Reynolds ou Swift-Steiber} \quad (\text{III.46})$$

Dans la zone de cavitation l'écoulement est dû uniquement à la rotation de l'arbre, il est de type Couette, donc :

$$M^* = \rho h^* \frac{\omega R}{2} \quad (\text{III.47})$$

où : h^* est l'épaisseur du film pour $\theta = \theta_1$ (début de la zone de cavitation).

La formation du film lubrifiant se produit au bord traînant de la zone de cavitation, soit à la position θ_1 .

Sur cette frontière Γ , considérons un élément Δs de normale \vec{n} (voir fig.III.6) :

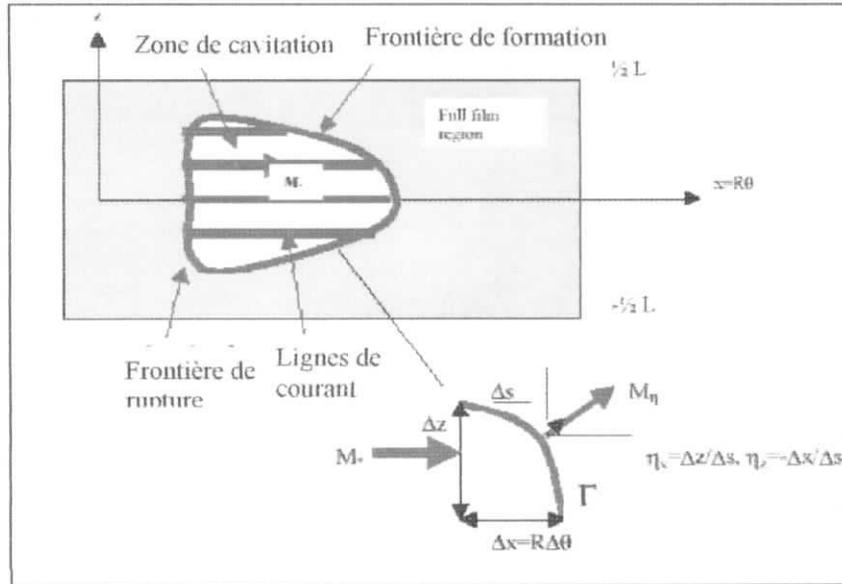


Fig.III.6 : bilan de masse à travers la frontière de reformation

On a :

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_z \vec{k}$$

$$n_x = \cos \alpha = \frac{\Delta z}{\Delta s}, n_z = \sin \alpha = -\frac{\Delta x}{\Delta s} \tag{III.48}$$

Donc, le débit massique traversant la frontière Γ est donné par :

$$M_n = M_x n_x + M_z n_z = -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n} + \Theta \rho \frac{\omega R}{2} n_x \tag{III.49}$$

Avec : $\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial z} n_z$

La conservation du débit implique que le débit quittant la zone de cavitation doit être égal au débit entrant vers le film complet à travers la ligne de formation Γ :

$$M^* \Delta z = \rho h^* \frac{\omega R}{2} \Delta z = M_n \Delta s \tag{III.50}$$

Finalement on obtient :

$$\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \text{tg}(\vec{n}, \vec{i}) = \rho h (1 - \Theta) \frac{\omega R}{2} \tag{III.51}$$

La solution de cette équation détermine la pente de la ligne de formation Γ . Notons qu'à la formation le long de la ligne Γ , il y a discontinuité dans le gradient de pression résultat de la continuité du débit massique.

Les équations (IV.46), (IV.47) et (IV.51) constituent le model *JFO*, elles fournissent les conditions aux limites adéquates pour la résolution de l'équation de Reynolds dans la zone du film complet.

Elrod et Adams ont établi la base d'un algorithme qui permet de traiter numériquement ces conditions aux limites non linéaires sur les frontières.

III.3.2.1. L'ALGORITHME D'ELROD :

Cet algorithme évite le calcul laborieux de la limite de la zone de cavitation par la reformulation du problème en terme d'une nouvelle variable (différent de la pression) et en développant une seule équation différentielle, applicable dans les deux domaines : film complet et zone de cavitation. L'algorithme, assure la conservation de masse dans le domaine d'écoulement entier (film lubrifiant + zone de cavitation).

III.3.2.2. LA COMPRESSIBILITE – UNE RELATION PRESSION CONCENTRATION :

La méthode d'Elrod est basée à l'origine sur une exploitation de l'expression du module de compressibilité en supposant ce dernier indépendant de la pression :

Pour un fluide compressible, la densité est en rapport avec la pression par la relation suivante :

$$\kappa = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (\text{III.52})$$

Avec : κ est le module de compressibilité. Les valeurs typiques (approximatives) de ce module pour l'eau et l'huile sont respectivement 2.01 et 2.41 GPa.

On a :

$$\Theta = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (\text{III.53})$$

Où ρ_c est la densité du fluide dans la zone de cavitation ($p = p_c$). En reportant l'expression (III.53) dans (III.52), il vient :

$$g\kappa = \frac{\rho}{\rho_c} \cdot \frac{\partial p}{\partial(\rho/\rho_c)} = \Theta \frac{\partial p}{\partial \Theta} \quad (\text{III.54})$$

où g est un coefficient de pondération :

$$g = \begin{cases} 1 & \text{Zone de film complet} \\ 0 & \text{Zone de cavitation} \end{cases}$$

intégrons l'équation (III.54), on obtient :

$$p = p_{cav} + g \cdot \kappa \ln \Theta \quad (\text{III.55})$$

notons que dans la zone du film complet, $g=1$ et $p > p_{cav}$, tandis que dans la zone de cavitation on a : $g=0$ et $p=p_{cav}$.

Vijayaraghavan et Keith (1989) [15,16] indiquent que la variable Θ a une double signification :

- Dans la zone active (film complet) : elle est définie comme étant le rapport des densités,
- Dans la zone inactive (zone de cavitation) : elle est définie comme étant la concentration en huile.

La conservation du débit dans le film lubrifiant est donnée par :

$$\frac{\partial(\rho \cdot h)}{\partial t} + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.56})$$

Avec :

$$M_x = -\frac{\rho \cdot h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho \cdot h U}{2} ; M_z = -\frac{\rho \cdot h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{III.57})$$

Dans la zone de cavitation, $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$, le débit de masse est donné par :

$$M_x = \Theta \rho_c h \frac{\omega \cdot R}{2}, M_z = 0 \quad (\text{III.58})$$

Remplaçons $\partial p = \frac{\kappa}{\rho} \partial \rho = g \frac{\kappa}{\Theta} \partial \Theta$ dans les expressions de M_x et M_z on obtient :

$$M_x = -\frac{\rho_c h^3}{12\mu} g \kappa \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \Theta \frac{\rho_c h U}{2} ; M_z = -\frac{\rho_c h^3}{12\mu} g \kappa \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (\text{III.59})$$

Notons que ces équations sont valables pour les deux régions puisque, dans le film complet $g=1$ et $\Theta = \frac{\rho}{\rho_c}$, et dans la zone de cavitation $g=0$ et Θ est la fraction d'huile contenue dans

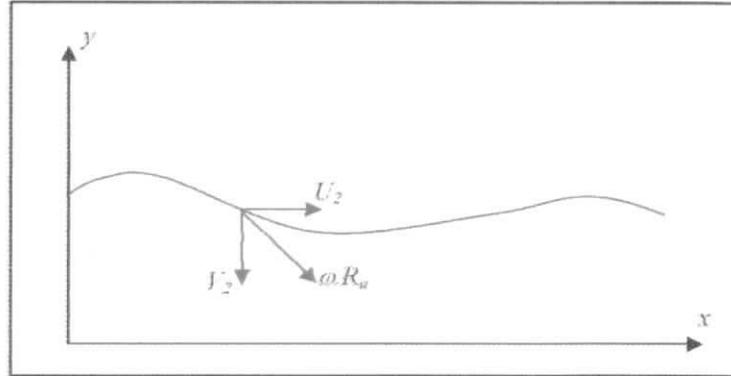
un volume élémentaire de hauteur h .

Remplaçons (III.59) dans (III.56) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_c h^3}{12\mu} g \kappa \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_c h^3}{12\mu} g \kappa \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) = \rho_c \frac{U}{2} \frac{\partial(\Theta h)}{\partial x} \quad (\text{III.60})$$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} \Big|_{r=R_i} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x} \Big|_{y=0} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 V_1 &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial r} \Big|_{r=R_i} \\
 W_1 &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial z} \Big|_{r=R_i} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{III.62}$$

avec r est la coordonnée radiale, R_i rayon interne du coussinet.



Figl.8. Projection de la vitesse linéique de l'arbre

✦ Sur la surface 2, on a :

Tenant compte la géométrie du palier développé, on obtient :

$$U_2 = \omega \cdot R_a \cdot \cos \alpha$$

$$V_2 = \omega \cdot R_a \cdot \sin \alpha$$

avec : R_a : rayon de l'arbre

ω : vitesse de rotation

l'angle α est très faible, $|\alpha| \leq 10^{-3}$, il s'ensuit que :

$$\alpha = \sin \alpha = \text{tg} \alpha = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{et} \quad \cos \alpha \approx 1$$

il vient :

$$\begin{cases}
 U_2 = \omega \cdot R_a \\
 V_2 = \omega \cdot R_a \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\
 W_2 = 0
 \end{cases}
 \tag{III.63}$$

pas de mouvement axial
de l'arbre

Si de plus, on suppose que :

- le fluide est incompressible,
- l'écoulement permanent.

On obtient, en reportant (II.62) et (II.63) dans l'équation (II.56), l'équation de REYNOLDS GENERALISEE modifiée s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{G}{\rho} + \frac{k}{\mu} \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{G}{\rho} + \frac{k}{\mu} \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \right) = U \frac{\partial}{\partial x} \left(h - \frac{I_2}{J_2} \right) - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial r} \Bigg|_{r=R_1} \quad (\text{III.64})$$

Le terme $\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial r} \Bigg|_{r=R_1}$ représente les échanges entre le film et le coussinet poreux.

REMARQUE :

Pour un fluide isovisqueux ($\mu = \text{cte}$) l'équation (III.46) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(h^3 + 6kh) \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(h^3 + 6kh) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6\mu\omega R_a \frac{\partial h}{\partial x} - 12k \frac{\partial p^*}{\partial r} \Bigg|_{r=R_1} \quad (\text{III.65})$$

Représente les échanges entre le film et le coussinet poreux

III.3.4. CARACTERISTIQUES STATIQUES :

III.3.4.1. CHARGE ET ANGLE DE CALAGE :

La charge et l'angle de calage sont obtenus par intégration du champ de pression sur la surface du palier. A l'équilibre dans le système repère (o, k, l) (fig.III.3), on a :

$$\begin{cases} W_k = -\int_S P \cos \theta dS = -W \cos \phi \\ W_l = -\int_S P \sin \theta dS = W \sin \phi \end{cases} \quad (\text{III.66})$$

d'où :

$$W = \sqrt{W_k^2 + W_l^2} \quad (\text{III.67})$$

et

$$\phi = \arctag \left(-\frac{W_l}{W_k} \right) \quad (\text{III.68})$$

III.3.4.2. DEBIT :

Le débit utilisé en lubrification est :

- le débit massique pour les fluides compressibles,
- le débit massique pour les fluides compressibles.

Ces débits sont calculés à partir des composantes de la vitesse dans le film.

On a ainsi :

$$M_j = \int_{S_j} \rho u_j ds \text{ avec } j=1 \text{ ou } 3 \quad (\text{III.69})$$

Dans cette relation u_j et M_j sont respectivement la composante de la vitesse et le débit massique dans la direction \vec{x}_j et S_j la section, normale à l'axe \vec{x}_j , à travers laquelle est calculé le débit.

Pour les fluides incompressibles $\rho = \text{cte}$ et le débit volumique Q_j s'écrit :

$$Q_j = \int_{S_j} u_j ds \text{ avec } j=1 \text{ ou } 3 \quad (\text{III.70})$$

III.3.4.3. LE COUPLE DE FROTTEMENT :

On s'intéresse particulièrement au couple de frottement sur l'arbre, puisqu'il nous permet de déterminer la puissance dissipée par le palier.

L'état de contrainte de cisaillement permettant le calcul du couple de frottement sur l'arbre s'obtient à partir des équations (II.59). en remarquant que la somme des contraintes tangentielles τ_{yz} est nulle, en raison de la symétrie du contact et en tenant compte des conditions aux limites sur la vitesse du fluide il vient :

$$\tau_{xy} = \left(y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{U}{J_2} \quad (\text{III.71})$$

dans la partie active du film, c'est-à-dire jusqu'à ce que la répartition de pression devienne nulle, le couple résistant s'écrit :

$$C_a = \int_{S_a} R \tau_{xy(y=h)} dS \quad (\text{III.72})$$

III.4 CONCLUSION :

Les équations hydrodynamiques des films minces visqueux peuvent s'appliquer à n'importe quel type de contact lubrifié par un fluide newtonien. Cependant, le problème général fait intervenir un grand nombre de paramètres qu'il est difficile de prendre en compte dans toute leurs généralité : géométrie et cinématique du contact, condition aux limites, propriétés physiques des composants.....

Aussi nous limiterons l'étude au cas particulier important du palier poreux auto-lubrifiant.

Chapitre IV :

**Modèle Mathématique Utilisé
et
Résolution Numérique**

CHAPITRE IV :

MODELE MATHEMATIQUE UTILISE ET RESOLUTION NUMERIQUE

Dans le cadre de ce travail, on néglige les variations axiales par rapport aux variations circonférentielles (vue de la complexité du problème). Cette hypothèse simplifie la détermination des frontières libres, rupture et surtout formation du film lubrifiant, qui sont rectilignes.

Dans ce chapitre, nous présentons :

- les équations de l'écoulement dans la matrice poreuse, dans le film lubrifiant complet et dans la zone de cavitation,
- La méthode de résolution utilisée.

IV.1. EQUATION DANS LA MATRICE POREUSE :

En reportant la loi de **Darcy** dans l'équation de continuité , en supposant le milieu poreux homogène et isotrope et le fluide isovisqueux, on obtient l'équation de **Laplace** avec pour inconnue la pression :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{V} = -\frac{k}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} p^* \\ \text{div} \vec{V} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta p^* = 0$$

Pour tenir compte de la forme cylindrique du coussinet l'équation est écrite en coordonnées polaires (IV.1) :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Et en variables sans dimension (IV.1) devient :

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial P^*}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 P^*}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

Avec :

$$R = \frac{r}{r_i} \quad \text{et} \quad P^* = \frac{P^* c^2}{\mu \omega r_a r_i} \quad (\text{adimensionnement classique de la pression en lubrification}).$$

IV.2. EQUATIONS DANS LE FILM COMPLET :

L'équation de **Reynolds** gouverne l'évolution du champ de pression dans un film mince délimité par deux surfaces en mouvement. Elle est obtenue à partir des équations de **Navier-Stokes** simplifiées au cas d'écoulement en film mince et de l'équation de continuité intégrée selon l'épaisseur du film.

En chapitre III, l'équation de Reynolds (III.65) est écrite pour un palier poreux de longueur finie. Elle a été établie en supposant la continuité du champ de vitesse à l'interface film-coussinet. En négligeant les variations axiales elle s'écrit en variables sans dimension :

$$\frac{d}{d\theta} \left[\left(H^3 + 6KCH \right) \frac{dP}{d\theta} \right] = 6 \frac{dH}{d\theta} - 12K \frac{\partial P^*}{\partial R} \Big|_{R=1} \quad (\text{IV.3})$$

$$\text{avec } H = 1 + \varepsilon \cos \theta, P = \frac{pc^2}{\mu \omega r_a r_i}, R = \frac{r}{r_i}, K = \frac{kr_i}{c^3}, C = \frac{c}{r_i}$$

Le terme $-\frac{d}{d\theta} \left(H^3 \frac{dP}{d\theta} \right)$ représente la variation de débit circonférentiel dû au gradient de pression (Poiseuille).

Le terme $\frac{d}{d\theta} \left[H \left(1 - KC \frac{dP}{d\theta} \right) \right]$ représente la variation de débit circonférentiel dû à la cinématique des interfaces (Couette).

La partie droite de ce terme provient de la vitesse du fluide tangente à l'interface film-coussinet poreux.

Le terme $-K \frac{\partial P^*}{\partial R} \Big|_{R=1}$ représente la vitesse radiale de filtration à l'interface film-coussinet. Ce

terme n'est pas nouveau dans l'équation de **Reynolds**, c'est un terme d'écrasement variable en tout point du contact.

La rupture du film lubrifiant est modélisée par la condition de Reynolds, gradient de pression nul.

IV.3. CONSERVATION DU DEBIT DANS LE FILM LUBRIFIANT :

Les deux équations précédentes, pour la matrice poreuse (équation de Laplace) et pour le film lubrifiant complet (équation de Reynolds), sont des équations de conservation du débit. Il reste donc à écrire la conservation du débit dans la zone de cavitation.

Deux solutions sont possibles :

- Ecrire localement la conservation du débit dans la zone de cavitation (IV.1.3.1.),
- Ecrire globalement la conservation du débit dans le film lubrifiant (IV.1.3.2.).

Nous montrons l'équivalence de ces deux écritures en paragraphe (IV.1.3.3) et utilisons la deuxième dans nos calculs.

IV.3.1. CONSERVATION LOCALE DU DEBIT :

Dans la zone de cavitation, la pression est supposée constante. L'écoulement est dû uniquement dû à la rotation de l'arbre, il est de type Couette. Floberg [4] a déterminé la condition à la frontière du film complet et de la zone de cavitation telle que le débit dans la zone de cavitation et sur cette frontière soit conservé. Il a défini dans cette zone la concentration en huile Θ .

Si l'on suppose l'huile et le gaz mélangés de façon homogène, le gradient de pression étant nul, les vitesses de ce mélange homogène se traduisent ainsi :

$$\begin{cases} U = \omega r_a \left(\frac{y}{h} - 1 \right), & \text{car la circulation axiale est nulle.} \\ w = 0 \end{cases}$$

Le débit circonférentiel de ce mélange homogène, traversant une section droite du film lubrifiant, par unité de longueur axiale vaut :

$$D = D_{\text{huile}} + D_{\text{gaz}} = \int_0^h u dy = \omega r_a \frac{h}{2} \quad \text{avec :}$$

$$D_{\text{huile}} = \Theta D \quad \text{et} \quad D_{\text{gaz}} = (1 - \Theta) D$$

Le bilan élémentaire des débits en huile dans la zone de cavitation (fig. IV.1) s'écrit :

$$\Theta D + \Delta(\Theta D) = \Theta D - v_1 \Delta x$$

$$\Rightarrow \omega r_a \frac{d\Theta h}{dx} = 2 \frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial r} \Big|_{r=r_i} \quad (\text{IV.4})$$

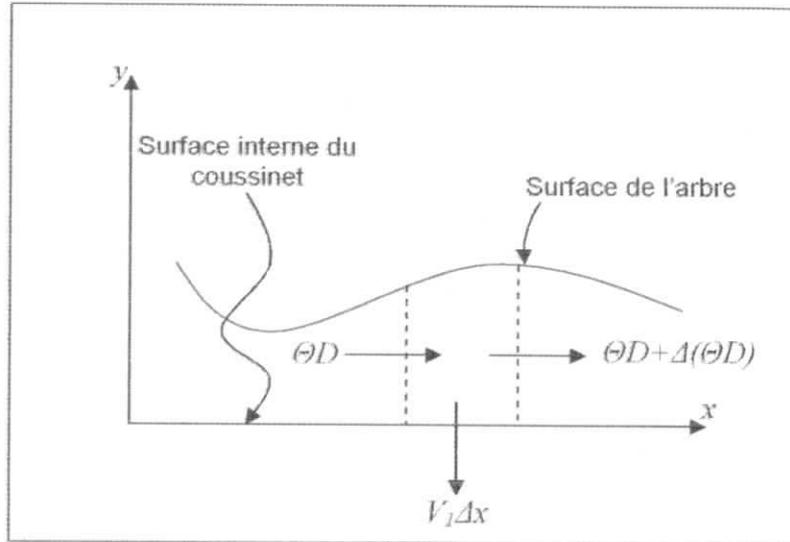


Fig. IV.1 : débit traversant un volume élémentaire de la zone de cavitation (géométrie d'un palier développé).

Et en variables sans dimension (IV.4) devient :

$$\frac{d\Theta H}{d\theta} = 2K \frac{\partial P^*}{\partial R} \Big|_{R=1} \quad (\text{IV.5})$$

C'est l'équation de conservation dans la zone de cavitation. Dans le cas classique (palier non poreux) et en régime permanent, cette équation se réduit à l'expression connue :

$$\frac{d\Theta H}{d\theta} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Theta H = cte$$

la condition de raccord sur la frontière Σ^+ qui délimite la zone de cavitation – équation (IV.5) – de la zone de film complet – équation (IV.3) – est la condition de Floberg (détails de calcul en chapitre III) :

$$H^3 \frac{dP}{d\theta} - \left(\frac{r_i}{l}\right)^2 H^3 \frac{dP}{dZ} \operatorname{tg}(\vec{N}, \vec{i}) = 6(1 - \Theta)H \quad (\text{IV.6})$$

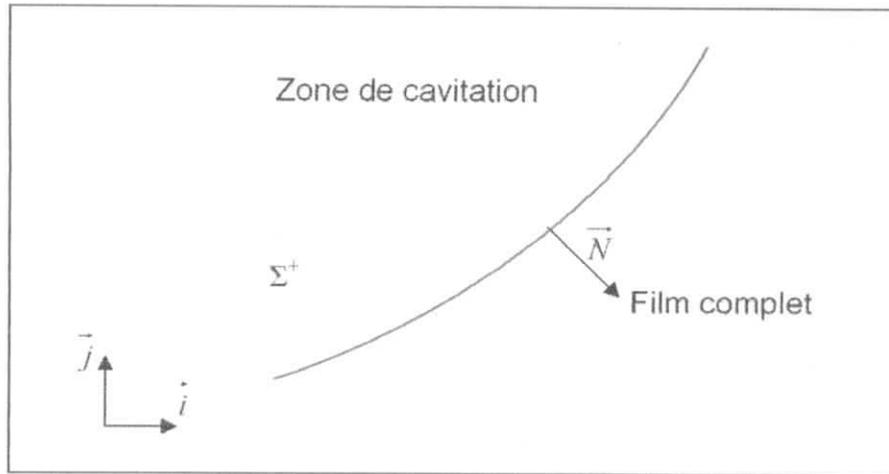


Fig. IV.2 : la frontière Σ^+ délimitant la zone de cavitation et le film complet (condition de raccord – Floberg –).

Pour un palier poreux si l'on considère la continuité des composantes aussi bien radiale que tangentielle à l'interface film-coussinet poreux, H^3 dans (IV.6) est remplacé par :

$$(H^3 + 6KCH)$$

dans le cas d'un palier infiniment long la condition de Floberg pour un palier poreux se réduit à :

$$(H^3 + 6KCH) \frac{dP}{d\theta} = 6(1 - \Theta)H \quad (\text{IV.7})$$

IV.3.2. CONSERVATION GLOBALE DU DEBIT :

Elle consiste à rechercher le point de formation du film complet tel que le bilan de débit radial sur le rayon interne du coussinet poreux soit nul, c'est-à-dire :

$$\int_0^{2\pi} v_1 d\theta = 0 \quad \text{avec} \quad v_1 = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial r}(\theta, r_i) \quad (\text{IV.8})$$

$$\Rightarrow v_1 = -\frac{k}{c^2} \omega r_a \frac{\partial P^*}{\partial R}(\theta, 1)$$

Ce qui traduit la conservation du débit dans la totalité du film lubrifiant. Le débit se trouvant conservé dans le film lubrifiant complet (équation de Reynolds), il est alors également conservé dans la zone de cavitation.

L'équivalence entre la condition de Floberg (IV.7) et l'égalité (IV.8) est développée au paragraphe suivant.

IV.3.3. EQUIVALENCE DES CONDITIONS (IV.7) ET (IV.8) :

Dans ce paragraphe nous montrons que, dans le cas de paliers poreux infiniment longs, la condition de Floberg à la formation du film complet (IV.7) est équivalente à un bilan de débit nul sur le rayon interne du coussinet (IV.8).

En intégrant l'équation de Reynolds (IV.3) sur la totalité du film complet $[\theta_f, \theta_r]$ et l'équation (IV.5) sur la totalité de la zone cavitée $[\theta_r, \theta_f + 2\pi]$, tout en tenant compte de la condition de Reynolds à la rupture du film lubrifiant :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{\theta_r} = 0 \quad \text{et} \quad \Theta_r = 1$$

on obtient respectivement les deux expressions ci-dessous :

$$6(H_f - H_r) - [H_f^3 + 6KCH_f] \left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{\theta_f} + \int_{\theta_f}^{\theta_r} 12K \left. \frac{\partial P^*}{\partial R} \right|_{R=1} d\theta = 0 \quad (\text{IV.9})$$

$$\Theta_f H_f - H_f - \int_{\theta_f}^{\theta_f + 2\pi} 2K \left. \frac{\partial P^*}{\partial R} \right|_{R=1} d\theta = 0 \quad (\text{IV.10})$$

en pondérant par (-6) l'équation (IV.10) et en l'additionnant avec (IV.9) on obtient :

$$\int_0^{2\pi} 12 \frac{k}{c^2} \frac{r_i}{c} \left. \frac{\partial P^*}{\partial R} \right|_{R=1} d\theta = [H_f^3 + 6 \frac{k}{c^2} H_f] \left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{\theta_f} - 6(1 - \Theta_f) H_f$$

On a donc :

$$\theta_f \text{ telle que } \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial P^*}{\partial R} \right|_{R=1} d\theta = 0 \quad (\text{IV.8}) \text{ est équivalente à la condition de Floberg à la formation :}$$

$$6(1 - \Theta_f) H_f - [H_f^3 + 6KCH_f] \left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{\theta_f} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

IV.3.4. PRESSION MOYENNE DANS LE FILM :

Nous avons vu que la conservation du débit dans le film se traduit par une condition sur la vitesse radiale moyenne (IV.8). nous montrons qu'elle peut également se traduire par une condition sur la pression moyenne.

En effet, la condition (IV.8) peut s'écrire sous la forme :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial P^*}{\partial R} \Big|_{R=1} d\theta = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Etant donné que dans la matrice poreuse la conservation du débit est également assurée, pour toute courbe fermée Γ appartenant au domaine poreux, il vient :

$$\int_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}} P^* \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (\text{IV.13})$$

En particulier si Γ est un cercle concentrique aux frontières du domaine, (IV.10) devient :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial P^*}{\partial R} \Big|_R d\theta = 0 \quad \forall R \in [1, R_e] \quad (\text{IV.14})$$

En supposant $P^*(\theta, R)$ et $\frac{\partial P^*}{\partial R}(\theta, R)$ continues sur $[0, 2\pi] \times [1, R_e]$, il résulte :

$$\frac{\partial}{\partial R} \int_0^{2\pi} P^*(\theta, R) d\theta = 0 \quad \forall R \in [1, R_e] \quad (\text{IV.15})$$

D'où,

$$\int_0^{2\pi} P^*(\theta, R) d\theta = \int_0^{2\pi} P^*(\theta, R_e) d\theta \quad \forall R \in [1, R_e] \quad (\text{IV.16})$$

Dans le cas où sur le rayon externe du coussinet nous avons une condition en pression : $P^*(\theta, R_e) = P_{\text{ext}}$ la pression moyenne dans le film est égale à la pression extérieure.

En prenant pour référence la pression atmosphérique il s'avère nécessaire, afin que la pression dans le film ne soit pas identiquement nulle, que la pression minimale soit négative. On montre ainsi la nécessité d'une dépression dans la zone de cavitation. La résolution du problème nécessite donc un paramètre supplémentaire : **la pression de cavitation**.

Physiquement une huile ne cavite pas à pression ambiante. Selon sa composition en molécules légères elle cavite pour des dépressions plus ou moins importantes. Pour un palier classique alimenté cette dépression joue un rôle négligeable et sa prise en considération dans une modélisation est inutile. Mais dans le cas des paliers poreux cette dépression assure

l'auto-alimentation du film lubrifiant par aspiration. (Remarquons que c'est également le cas pour un palier classique de longueur finie en barbotage).

IV.4. LES CONDITIONS LIMITES SUR LE COUSSINET POREUX :

Ils existent différents types de montage pour un coussinet poreux :

- Les pores sur le rayon externe peuvent être débouchants,
- Le coussinet peut être emmanché dans un tube qui renforce la tenue mécanique et assure une étanchéité du coussinet sur son rayon externe. C'est le montage le plus fréquent, en particulier pour les coussinets de faible épaisseur (rapport du diamètre extérieur sur le rayon intérieur inférieur à 1.5).

Sur la surface externe du coussinet poreux, ces deux types de montage se traduisent respectivement par les conditions limites suivantes :

- Condition de Dirichlet (pores débouchants) :

$$P^*(\theta, R_e) = 0 \quad (\text{IV.17})$$

- Condition de Neumann (ou d'étanchéité) :

$$\frac{\partial P^*}{\partial R}(\theta, R_e) = 0 \quad (\text{IV.18})$$

La condition de type Neumann permet d'assurer la condition (IV.12), grâce à (IV.14) avec $R=R_e$. Elle assure ainsi la continuité du débit dans le domaine film + coussinet poreux quelque soit la position de la frontière de formation

Nous nous limiterons en conséquence à la condition de Dirichlet (pores débouchants) qui confère au problème une solution unique.

IV.5. LES PARAMETRES DU MODELE BIDIMENSIONNEL :

Les dimensions et caractéristiques des milieux sont représentées par huit paramètres :

- Le rayon de l'arbre r_a ,
- Le rayon interne du coussinet r_i ou le jeu radial c ,
- Le rayon externe du coussinet r_e ,
- L'excentricité e ,
- La vitesse angulaire de l'arbre ω ,
- La perméabilité du coussinet k ,
- La viscosité du lubrifiant μ ,

- La pression de cavitation p_c .

Toutefois il est possible de réduire le nombre de paramètres à partir d'une écriture sans dimension du problème.

En effet dans l'équation de Reynolds modifiée (IV.3) rappelée ci-dessous, trois coefficients interviennent :

$$\frac{d}{d\theta} \left[(H^3 + 6KCH) \frac{dP}{d\theta} \right] = 6 \frac{dH}{d\theta} - 12K \frac{\partial P^*}{\partial R} \Big|_{R=1}$$

- L'épaisseur sans dimension du film lubrifiant, $H = 1 + \varepsilon \cos \theta$, fonction de l'excentricité relative $\varepsilon = \frac{e}{c}$,
- La perméabilité sans dimension $K = \frac{kr_i}{c^3}$,
- Le jeu sans dimension : $C = \frac{c}{r_i}$

REMARQUE : dans la plupart des cas le paramètre $KC = \frac{k}{c^2}$ est très faible (inférieur à 10^{-3})

et la solution sans dimension est peu dépendante du jeu C. Elle correspond au cas où la vitesse tangente à l'interface milieu poreux milieu fluide est négligée.

La solution sans dimension dépend de deux autres paramètres :

- Le rayon externe sans dimension du coussinet $R_e = \frac{r_e}{r_i}$ qui est représentatif de l'épaisseur relative du coussinet $(R_e - 1)$,
- La pression de cavitation sans dimension : $P_c = \frac{P_c c^2}{\mu \omega r_a^2 r_i}$.

La solution sans dimension du problème ne dépend donc que de cinq paramètres : ε, K, C, P_c et R_e .

Remarquons qu'il subsiste un couplage entre trois des paramètres sans dimension : la perméabilité K, le jeu C, et la pression de cavitation P_c . Une variation du jeu induit une variation du jeu sans dimension C, de la perméabilité sans dimension K et de la pression de cavitation sans dimension P_c .

IV.6. RESOLUTION NUMERIQUE :

Dans le film lubrifiant, l'équation de Reynolds modifiée (IV.3) est une équation aux dérivées partielles elliptique, elle est discrétisée par différences finies centrées [17] et résolue à l'aide d'un algorithme de **Christopherson** [18] pour que la condition de Reynolds à la rupture soit réalisée :

$$p = \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma'$$

il suffit de résoudre le système linéaire par une méthode itérative et d'annuler chaque terme de pression négatif dès que celui-ci est calculé.

Dans le coussinet poreux, l'équation de Laplace (IV.2) est résolue soit par la méthode des différences finies (solution numérique) ou par la méthode des séries de Fourier (solution semi-analytique) en utilisant un algorithme de transformée de Fourier rapide.

Les deux solutions dans les deux domaines (film et coussinet) étant reliées par la condition de continuité en vitesse et pression à l'interface film-coussinet, la méthode de résolution est itérative [16] (voir l'organigramme de résolution fig.IV.3). la solution dans le film lubrifiant sert de condition limite pour le coussinet poreux.

L'abscisse de formation du film est déterminée de façon itérative jusqu'à ce que la condition (IV.16) soit vérifiée (pression moyenne nulle dans le film lubrifiant).

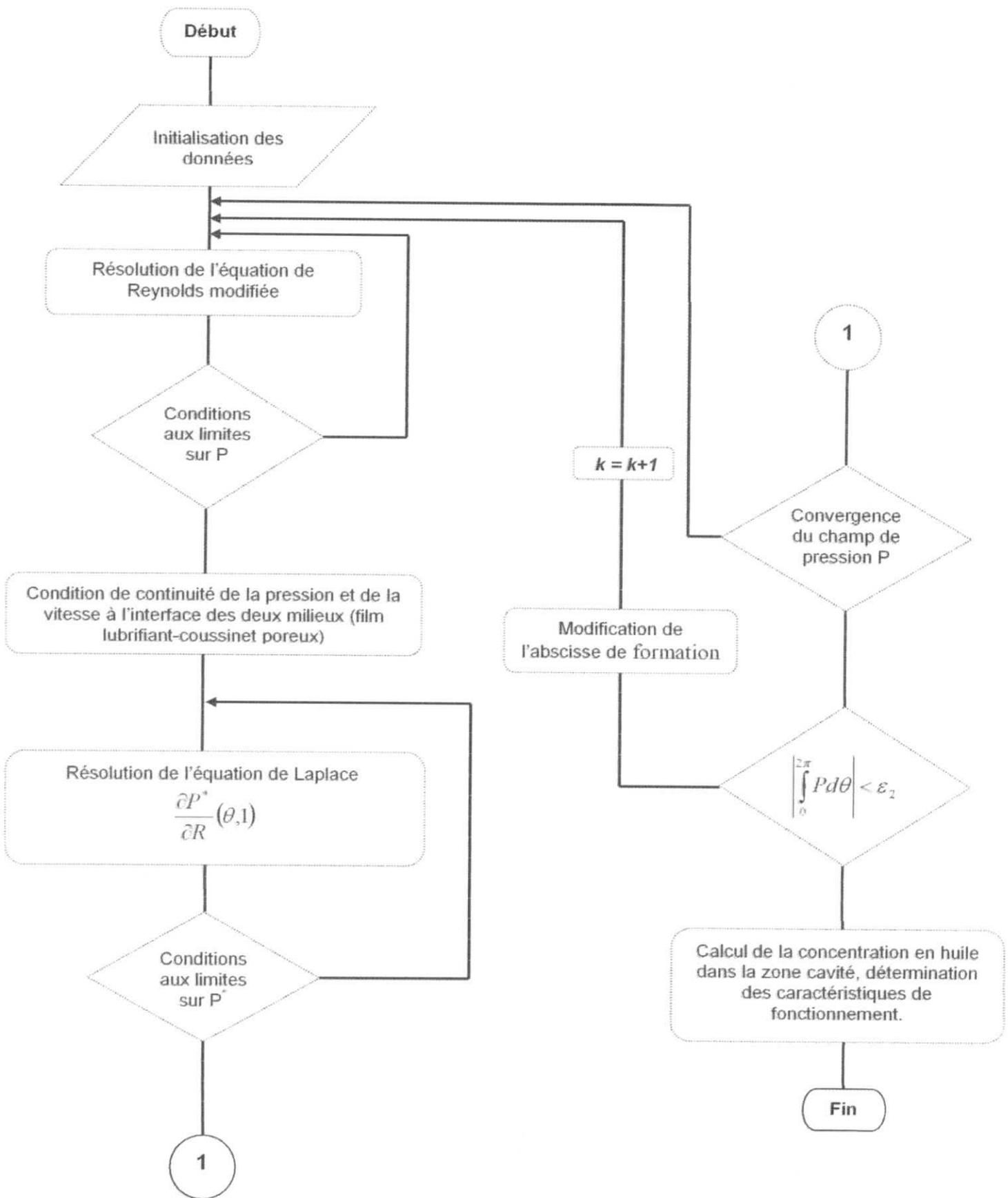


Fig.IV.3 : Organigramme du programme de calcul

IV.6.1. DISCRETISATION DES EQUATIONS [19]:

IV.6.1.1. EQUATION DE REYNOLDS :

Dans un palier, les rayons de l'arbre et du coussinet étant très voisins, la courbure du film est négligée. Le palier est alors développé suivant sa direction circonférentielle, on est ainsi ramenée à un problème bidimensionnel. Si on considère que le palier est aligné et que la pression à ses extrémités est égale à la pression atmosphérique prise comme référence, le problème devient symétrique et le domaine de discrétisation de l'équation de Reynolds se réduit à $[0, 2\pi] [0, 1/2]$ (fig.IV.4)

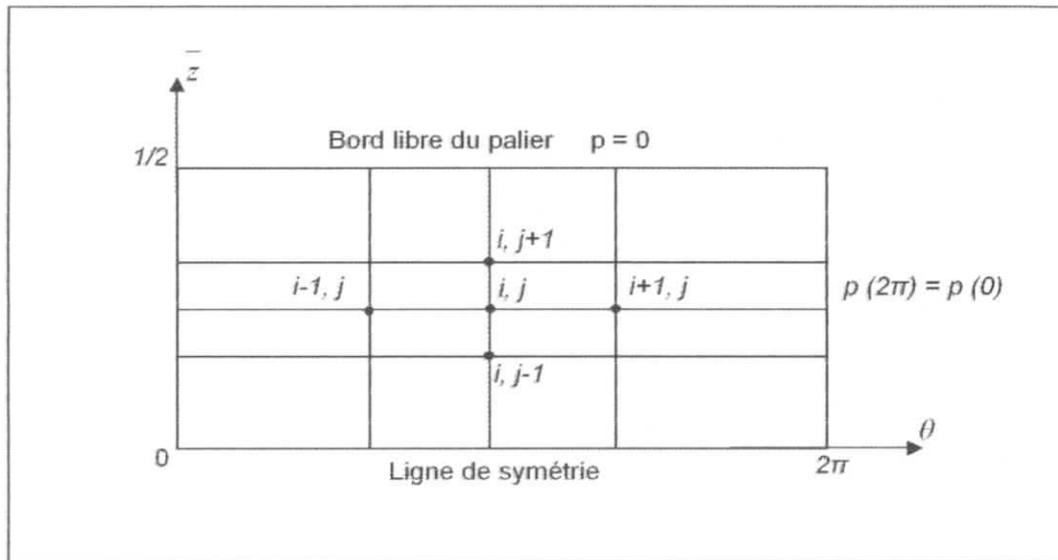


Fig. IV.4 : Maillage du film (demi-palier)

L'équation de Reynolds écrite en variables réduites est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[(H^3 + 6KCH) \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] + \frac{r_i^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[(H^3 + 6KCH) \frac{\partial P}{\partial Z} \right] = 6 \frac{\partial H}{\partial \theta} - 12K \frac{\partial P^*}{\partial R} \Big|_{R=1} \quad (\text{IV.19})$$

Dans l'équation (IV.16), les dérivées partielles par rapport à θ et Z sont approchées à partir d'un développement en série de Taylor d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{i,j} &= \frac{P(i+1, j) - P(i-1, j)}{2\Delta\theta} \\ \left. \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right|_{i,j} &= \frac{P(i+1, j) + P(i-1, j) - P(i, j)}{\Delta\theta^2} \\ \left. \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} \right|_{i,j} &= \frac{P(i, j+1) + P(i, j-1) - P(i, j)}{\Delta Z^2}\end{aligned}\quad (IV.20)$$

où $\Delta\theta$ et ΔZ sont respectivement les pas du maillage dans les directions circonférentielle et axiale.

Après discrétisation le système d'équations linéaires s'écrit :

$$P_{i,j} = a_{i,j}P_{i+1,j} + b_{i,j}P_{i-1,j} + c_{i,j}P_{i,j+1} + d_{i,j}P_{i,j-1} - e_{i,j} \quad (IV.21)$$

IV.6.1.2. RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS :

La résolution de l'équation de Reynolds est ramenée à la résolution d'un système linéaire de $(M \times N)$ équations à $(M \times N)$ inconnues. M et N sont respectivement les nombres de mailles dans les directions circonférentielle et axiale.

La méthode proposée pour la résolution du système d'équations linéaires est celle de GAUSS SEIDEL avec un coefficient de sur-relaxation. On peut écrire alors :

$$P_{i,j} = (1 - \Omega)P_{i,j} + \Omega \times (a_{i,j}P_{i+1,j} + b_{i,j}P_{i-1,j} + c_{i,j}P_{i,j+1} + d_{i,j}P_{i,j-1} - e_{i,j}) \quad (IV.22)$$

où Ω est le coefficient de sur-relaxation, sa valeur est comprise entre 1 et 2. la convergence dépend directement de la valeur du coefficient Ω . Plusieurs méthodes sont utilisées pour calculer Ω optimal en vue d'accélérer au mieux la convergence du processus itératif. Dans la majorité des problèmes de lubrification, ce coefficient est compris entre 1.5 et 1.85 [20].

le test d'arrêt du processus itératif est défini par :

$$\text{Max} \left| \frac{P_{i,j}^{k+1} - P_{i,j}^k}{P_{i,j}^{k+1}} \right| \leq \delta \quad (IV.23)$$

δ est le coefficient d'arrêt représentant l'erreur relative maximale tolérée, en général, sa valeur est comprise entre 10^{-4} et 10^{-5} .

REMARQUE :

Pour un palier long ($L/D > 4$) : l'équation (IV.19) se réduit à l'équation à l'équation (IV.3), et le système d'équations linéaires devient :

$$P_{i,j} = a_{i,j}P_{i+1,j} + b_{i,j}P_{i-1,j} - e_{i,j} \quad (IV.24)$$

IV.6.2. EQUATION DE LAPLACE :

C'est une équation aux dérivées partielles, elliptique tridimensionnelle :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial P^*}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 P^*}{\partial \theta^2} + \frac{r_i}{l^2} \frac{\partial^2 P^*}{\partial Z^2} = 0 \tag{IV.25}$$

Avec : $R = \frac{r}{r_i}$, $Z = \frac{z}{l}$ et $P^* = \frac{p \cdot c^2}{\mu \omega r_a r_i}$

Rappelons que les conditions limites sur les surfaces externes S_1 et S_2 du coussinet peuvent être de deux types :

- Condition de **Dirichlet** (pores débouchants) : pression nulle sur S_1 et/ou S_2 ,
- Condition de **Neumann** (surface étanche) : vitesse normale à S_1 et/ou à S_2 nulle, c'est-à-dire gradient de pression nul.

$$S_1 = \left\{ (\theta, Z), R = R_e, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (R, \theta), 1 \leq \theta \leq R_e, 0 \leq \theta \leq 2\pi, Z = \pm \frac{1}{2} \right\}$$

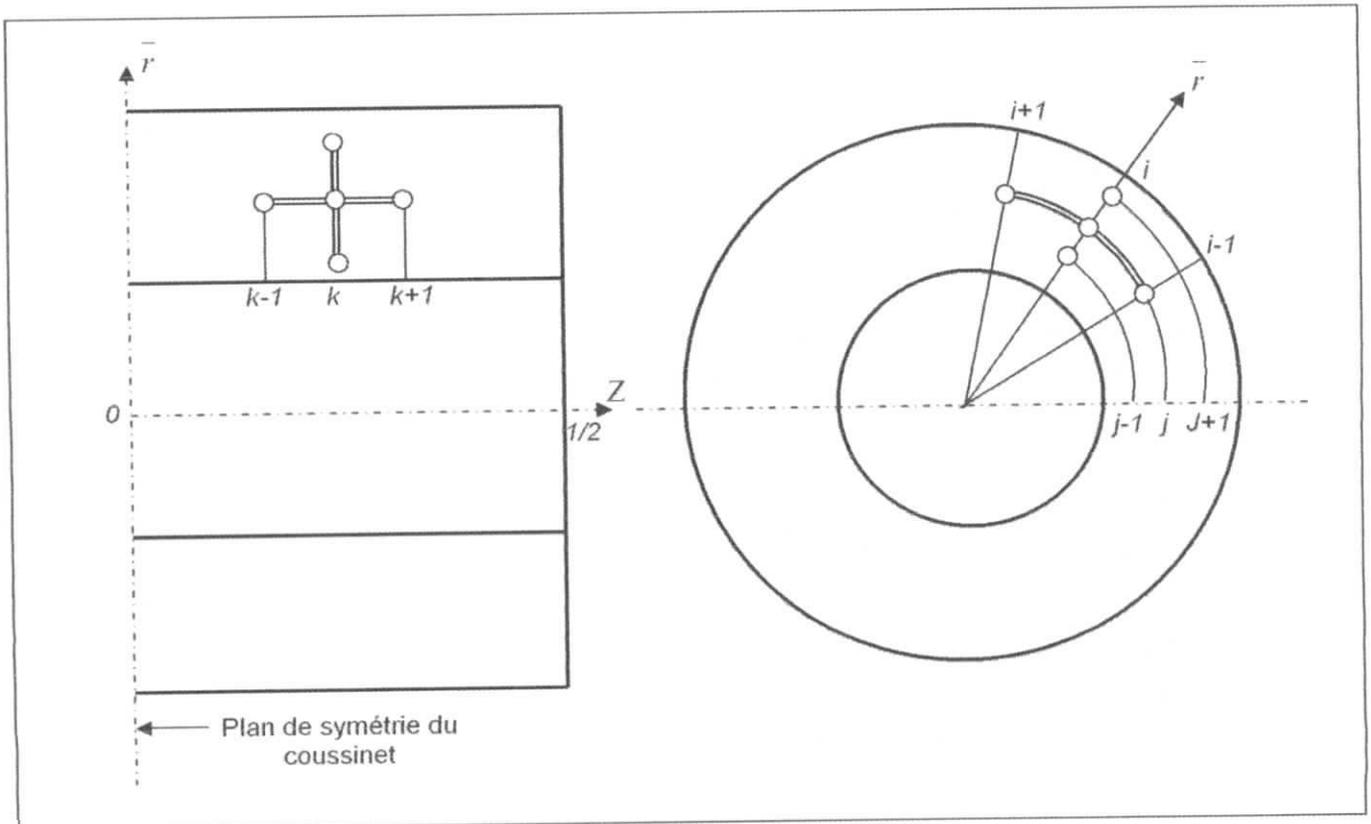


Fig.IV.5 : Demi coussinet – schéma de discrétisation

Pour la résolution de l'équation de Laplace on emploie un schéma aux différences finies centrées (fig.IV.5), l'équation discrétisée est donnée par :

$$P^*(i, j, k) = a_{i,j,k} P^*(i+1, j, k) + b_{i,j,k} P^*(i-1, j, k) + c_{i,j,k} P^*(i, j+1, k) + d_{i,j,k} P^*(i, j-1, k) + e_{i,j,k} P^*(i, j+1, k) + f_{i,j,k} P^*(i, j, k+1) + g_{i,j,k} P^*(i, j, k-1)$$

La résolution se fait par la méthode de GAUSS SEIDEL avec un coefficient de sur relaxation.

Remarque :

Si on néglige les variations axiales de la pression l'équation discrétisée de Laplace s'écrit :

$$P^*(i, j) = a_{i,j} P^*(i+1, j) + b_{i,j} P^*(i-1, j) + c_{i,j} P^*(i, j+1) + d_{i,j} P^*(i, j-1) + e_{i,j} P^*(i, j+1) \tag{IV.26}$$

VI.6.2. INTEGRATION NUMERIQUE :

Pour le calcul des différentes formes d'intégrales : charge, débit, pression moyenne et le couple de frottement, nous appliquons une méthode d'intégration dite composite [15] :

Cette méthode consiste à appliquer n fois la règle de Simpson.

Règle de Simpson :

C'est un cas particulier de la méthode d'intégration de Newton, donc pour $\alpha=2$ on a :

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

Sur un intervalle [a,b], on applique la règle précédente n fois pour une fonction f continue, on obtient la formulation de l'intégration composite :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \right] - \frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(\xi_i) \tag{VI.27}$$

Avec :

$$h = \frac{b-a}{2n}, \text{ et } x_i = x_0 + ih, i=0, 1, \dots, 2n$$

Chapitre V :

***Présentation des résultats
et
Discussion***

CHAPITRE V :**PRESENTATION DES RESULTATS ET DISCUSSION**

Dans ce chapitre nous présentons les résultats théoriques obtenus avec le programme de calcul en (Fortran 90 [21]) élaboré au cours de cette étude, tout en les comparant avec les résultats théoriques obtenus par B. Guidicelli [12].

Nous analysons ensuite, l'influence des paramètres : excentricité et perméabilité, pression de cavitation, épaisseur du coussinet sur les caractéristiques statiques de fonctionnement telles que la pression maximale, l'étendue du film complet, la portance, l'angle de calage, le coefficient de frottement.

V.1. MODELE A FRONTIERE IMPOSEE :

On désigne par le modèle à frontière imposée le modèle dont la position de la frontière de formation du film est imposée au point d'épaisseur maximale ($\theta=0$) et pression de cavitation nulle (pas d'auto-lubrification).

a. champ de pression et champ de vitesse :

Les figures (V.1) et (V.2) représentent les champs de pression circonférentielles du film lubrifiant pour deux valeurs de perméabilité sans dimension, respectivement 0.125 et 1.25 et pour différentes excentricités. Les figures (V.3) et (V.4) donnent les champs de vitesse radiale à l'interface film – coussinet correspondants. Puisque la formation du film est imposée en $\theta = 0$, on retrouve pour $K = 0$ la solution du palier long classique, solution dite de Reynolds.

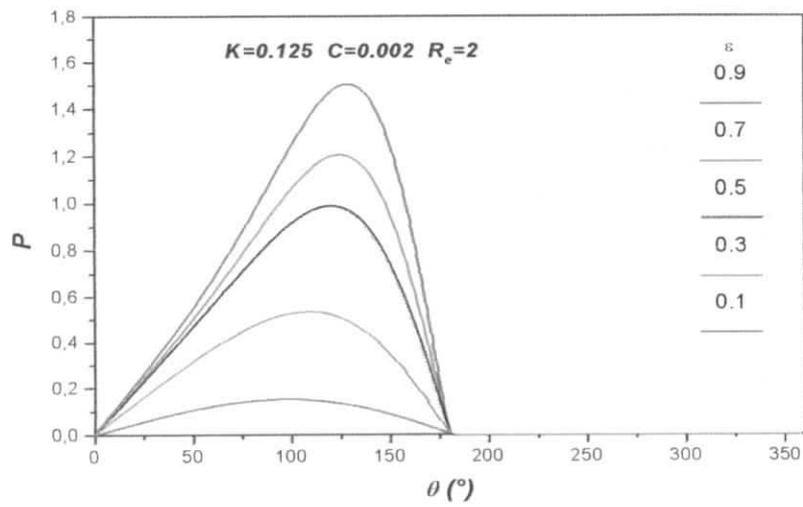


Fig.V.1 : Champ de pression sans dimension

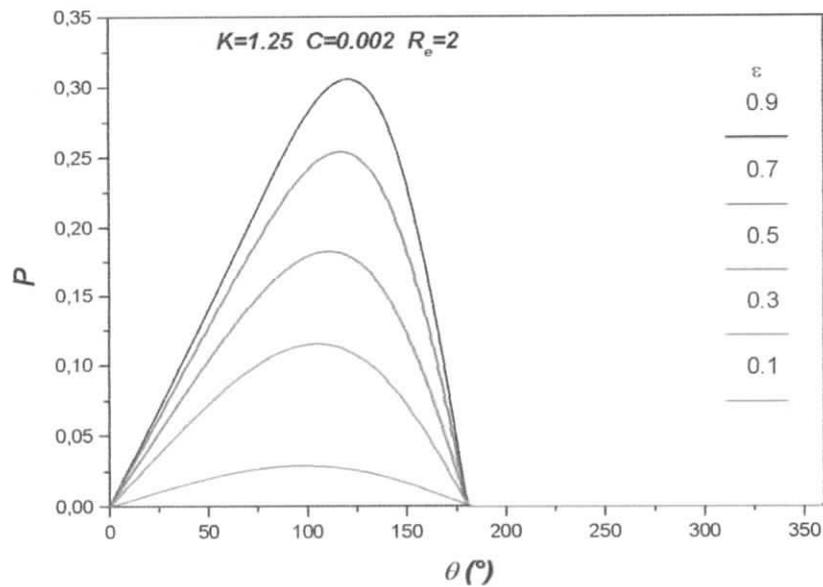


Fig.V.2 : Champ de pression sans dimension

Plus le coussinet est perméable, moins les pressions générées dans le contact sont importantes et plus le pic de pression est décalé vers l'amont.

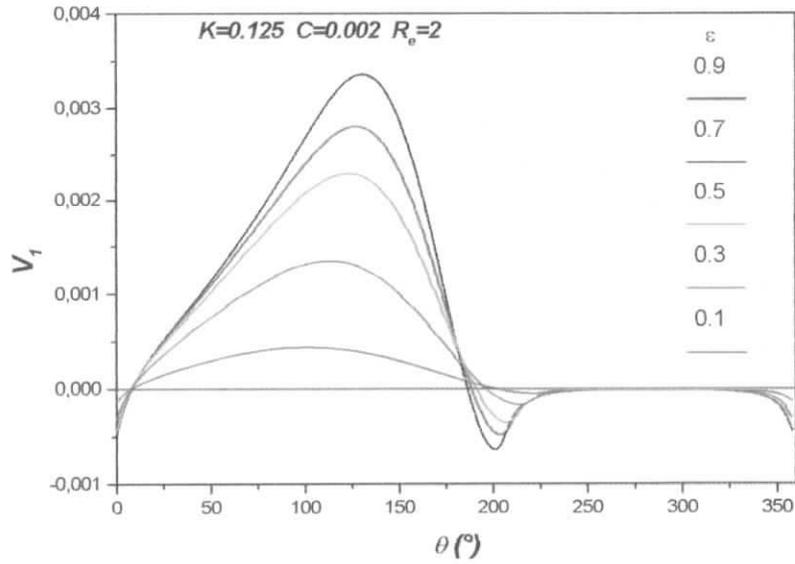


Fig.V.3 : champ de vitesse radiale en $R=r_i$

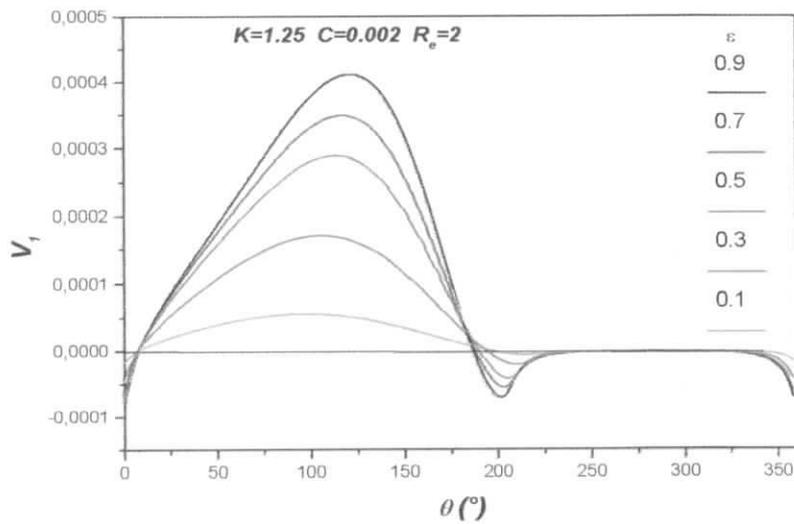


Fig.V.4 : Champ de vitesse radiale en $R=r_i$

La vitesse de filtration (fig.V.3 et fig.V.4) croît en sens inverse de la perméabilité : mais la proportionnalité de la vitesse et de la perméabilité (loi de Darcy) est atténuée par la décroissance de la pression en fonction de la perméabilité (fig.V.1 et fig.V.2).

Deux zones de vitesse négative apparaissent à la formation et à la rupture du film lubrifiant dues à la forme du champ de pression. A la formation ($\theta=0$), la discontinuité du gradient circonférentiel de pression a pour résultat une discontinuité du gradient circonférentiel de la vitesse radiale.

Dans la plus grande partie du divergent, entre 180° et 360° , la vitesse est nulle car les pressions dans la zone de cavitation et sur le rayon externe du coussinet sont nulles. Le débit sortant du contact est aussi très supérieur au débit d'alimentation du contact :

$$\int_0^{2\pi} V_1 d\theta \gg 0$$

Ce qui montre qu'il y a un déficit de débit. Seule une rainure d'alimentation situé en $\theta = 0$, inexistante dans les paliers poreux réels, serait susceptible de combler ce déficit.

b. Caractéristiques statiques :

La pression maximale est tracée en fonction de l'excentricité (fig.V.5) pour les perméabilités $K = 0.125$ et 1.25 ainsi que pour le cas limite de perméabilité nulle qui correspond à la solution de Reynolds (palier lisse). Elle décroît considérablement avec l'augmentation de perméabilité. Sa courbure $\left(\frac{\partial^2 P_{\max}}{\partial \varepsilon^2}\right)$ change de signe. En effet la pression maximale ne tend plus vers l'infini, comme dans le cas du palier lisse, lorsque l'excentricité tend vers l'unité : le fluide ne pouvant circuler dans une épaisseur de film qui s'annule est évacué dans la matrice poreuse. Des remarques analogues peuvent être faites pour la portance (fig. V.6).

Lorsque la perméabilité augmente, le pic de pression est décalé vers l'amont (fig. V.1 et fig. V.2), il en résulte un accroissement de l'angle de calage (fig. V.7). Contrairement au cas de perméabilité nulle, l'angle de calage ne s'annule pas lorsque $\varepsilon=1$.

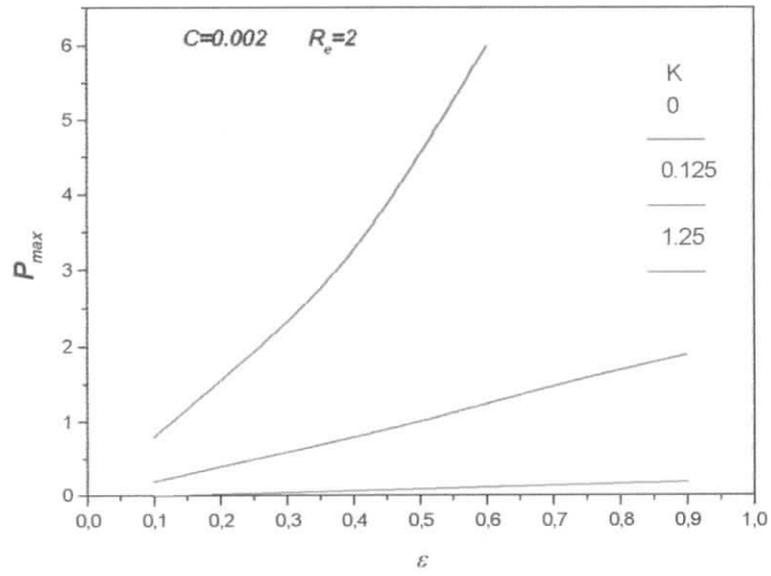


Fig.V.5 : Pression maximale sans dimension fonction de l'excentricité

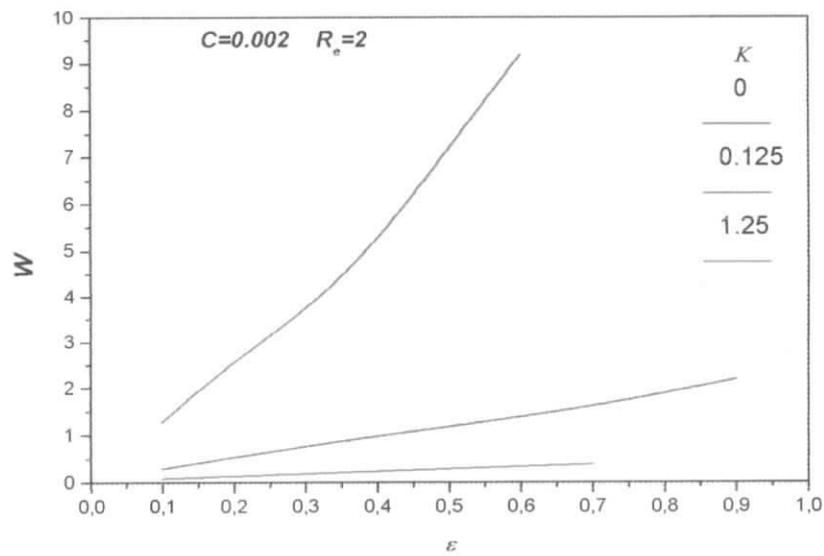


Fig.V.6 : Portance sans dimension fonction de l'excentricité

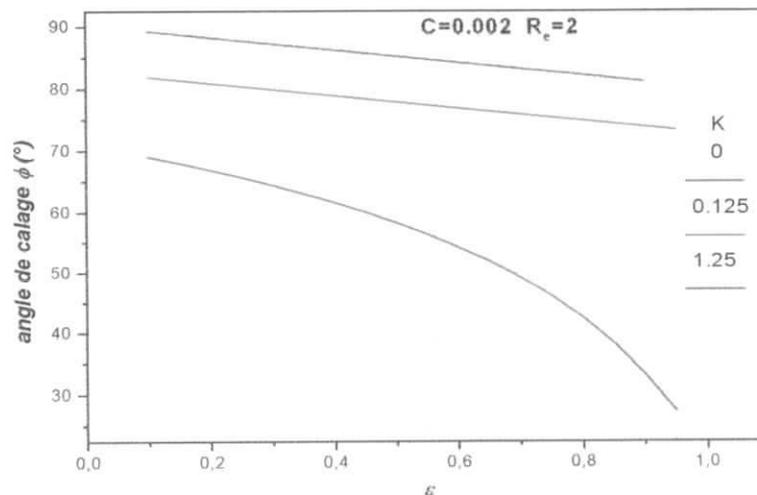


Fig.V.7 : Angle de calage fonction de l'excentricité

V.2. MODELE CONSERVATIF :

Ce modèle diffère du modèle précédent par :

- La valeur de la pression de cavitation qui est inférieure à la pression atmosphérique (pression nulle),
- La position de la frontière de formation du film complet qui est l'inconnue du problème.

Deux cas sont présentés : le premier correspond au cas des figures pour $K=0.125$, le second à une perméabilité 100 fois plus importante. Le premier cas illustre une faible étendue de film complet, le second une très large étendue.

Par rapport à la figure V.1 l'étendue du film complet est nettement diminuée (fig.V.8). Le film se forme dans le convergent au point défini par une abscisse de plus de 50° . Ceci limite fortement l'accroissement de la pression. Pour une excentricité de 0.9, on passe d'une pression maximale de l'ordre de 1.52 (fig.V.1) pour le modèle à formation imposée à une pression maximale de l'ordre de 0.30 (fig.V.8) pour le modèle conservatif (pour une pression de cavitation donnée (pour notre cas, on prend $P_c=-0.0162$)).

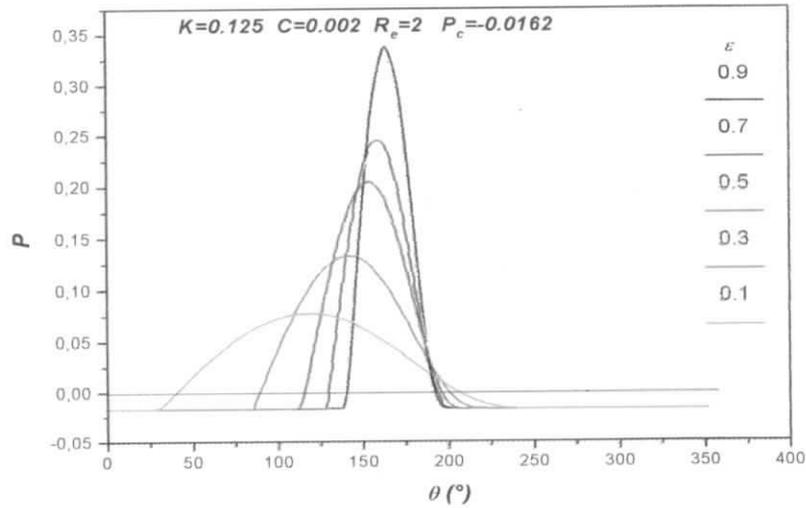


fig.V.8 : champ de pression sans dimension

La figure (V.9) donne les champs de vitesse radiale correspondants aux champs de pression de la figure (V.8).

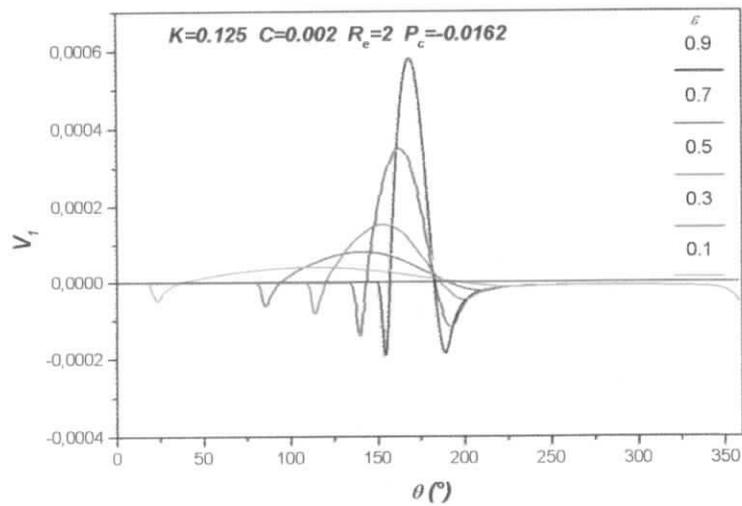


Fig.V.9 : Champ de vitesse radiale en R=r1

Les pics de vitesse à la formation sont plus accentués que sur la figure (V.3) car le gradient de pression est plus élevé. Dans une grande partie de la zone de cavitation la vitesse de filtration radiale est constante. Elle peut être approximée par la solution pour un cylindre poreux soumis à une pression interne p_c et une pression externe p_{atm} :

$$V_1 = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \approx - \frac{k}{\mu} \frac{p_c - p_{atm}}{r_1 \ln R_e}$$

Lorsque l'excentricité croît la pression dans le film lubrifiant complet et la vitesse radiale augmentent. La conservation du débit (pression moyenne nulle, paragraphe IV.3.4) ne peut se faire qu'au détriment de l'étendue de la zone de film complet, ce que l'on vérifie sur la figure (V.8).

Pour une perméabilité 100 fois plus importante la pression générée est plus faible et dans le divergent la pression de cavitation n'est pas atteinte pour des excentricités strictement inférieures à 0.7 (fig.V.10). Le champ de pression est anti-symétrique : solution de type Sommerfeld.

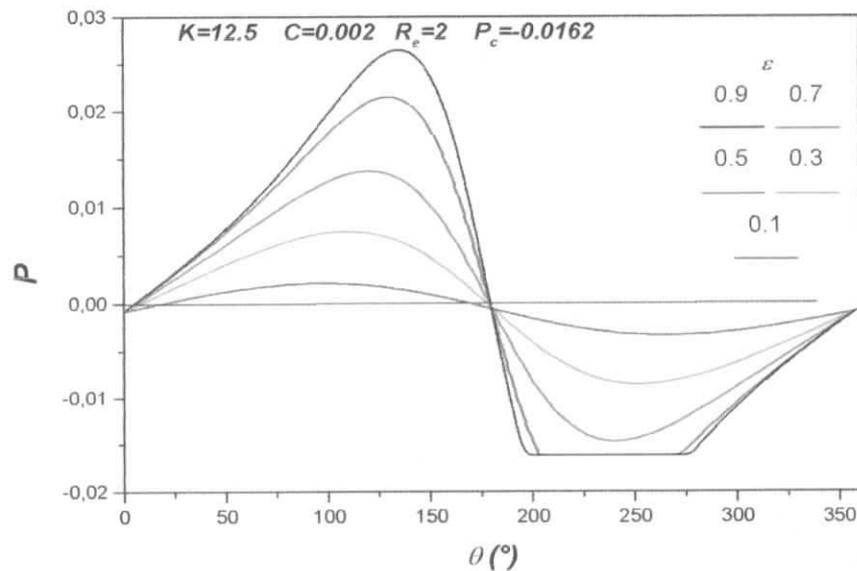


fig.V.10 : champ de pression sans dimension

Comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, une faible étendue de film entraîne une faible valeur de portance. Pour une étendue du film importante la portance obtenue est proche du modèle à formation imposée (étendue de film important). Dans certains cas il peut exister une abscisse de formation telle que la portance soit maximale, elle correspond à une pression de cavitation optimale. Ceci ne se produit que pour des très faibles perméabilités.

V.2.1. INFLUENCE DES PARAMETRES :

a. Perméabilité et Excentricité :

Le cas de perméabilité nulle est un cas limite de ce modèle ; la condition de pression moyenne nulle, qui traduit la conservation du débit lorsque $K \neq 0$ demeure appliquée.

Lorsque la perméabilité est accrue la vitesse de filtration radiale augmente et la pression dans le film lubrifiant diminue. A forte excentricité la pression maximale atteint une valeur limite, excepté pour une perméabilité nulle où la pression maximale tend vers l'infini quand l'excentricité tend vers 1 (fig.V.11)

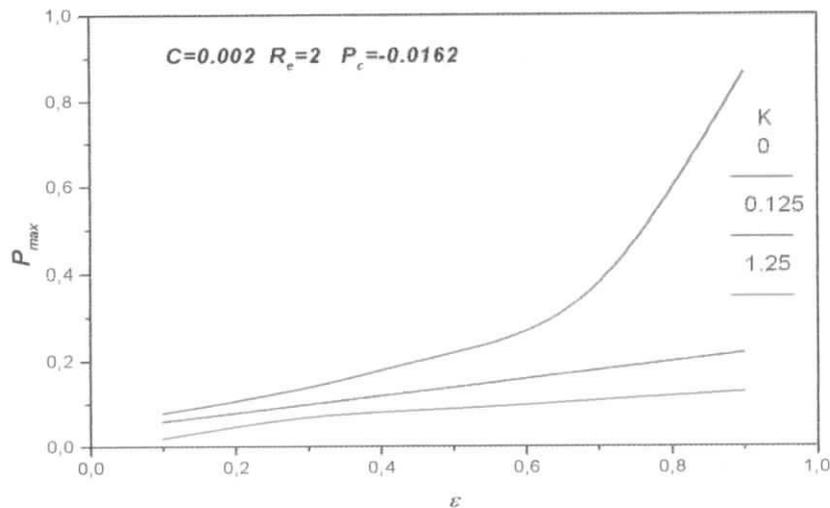


Fig.V.11 : Pression maximale sans dimension fonction de l'excentricité

Plus la pression maximale est importante (faible perméabilité, forte excentricité) moins le film complet est étendu (fig.V.12). La zone active diminue donc lorsque l'excentricité croît ou lorsque la perméabilité décroît. Alors, qu'elle atteigne une valeur nulle quand l'excentricité tend vers 1 pour $K = 0$, ce n'est plus le cas pour $K > 0$. A forte perméabilité (par exemple $K=12.5$) ou faible excentricité, le film ne se rompt pas et le champ de pression est anti-symétrique, et la solution de type Sommerfeld.

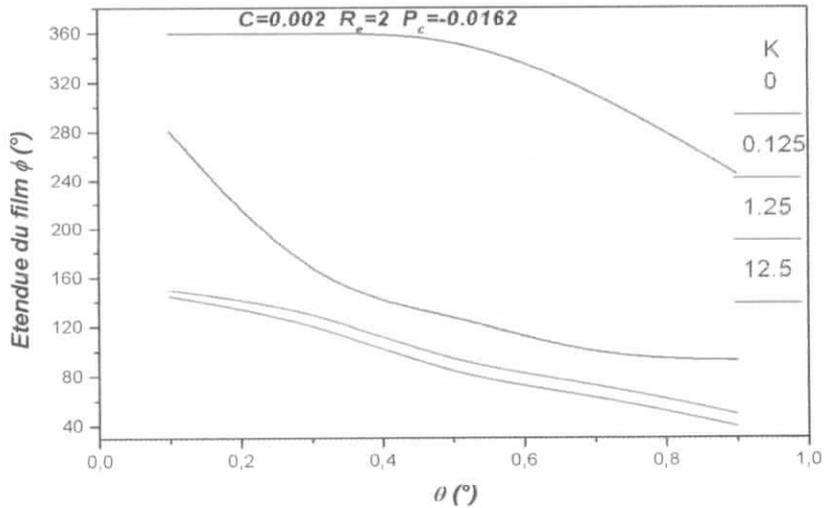


Fig.V.12 : Etendu du film complet fonction de l'excentricité

L'accroissement de la pression allant de pair avec une diminution de la zone active, lorsque ε tend vers 1, la portance (fig.V.13) tend vers une valeur limite, y compris dans le cas de perméabilité nulle. D'ailleurs, bien que les résultats concernant la pression soient très différents pour les perméabilités de 0 et 0.125 (fig.V.11), les résultats concernant la portance sont sensiblement identiques.

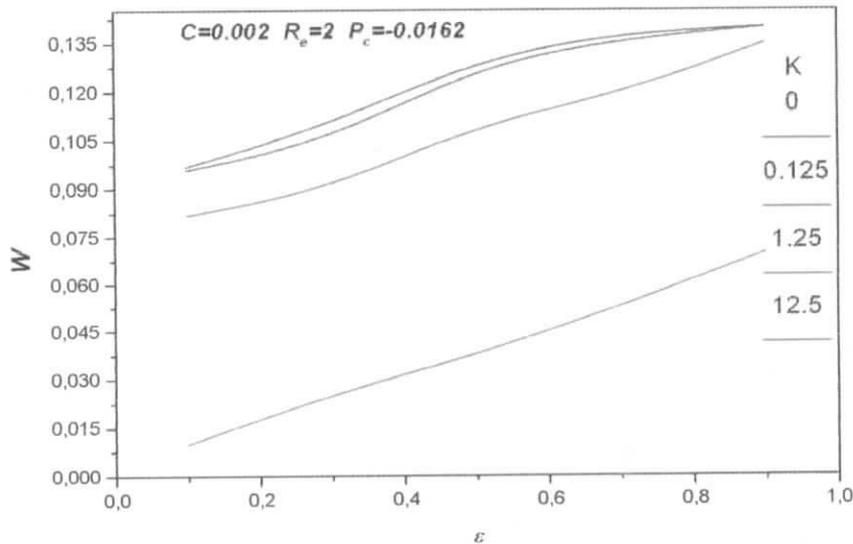


Fig.V.13 : Portance sans dimension fonction de l'excentricité

Lorsque le film ne se rompt pas, la portance varie linéairement avec l'excentricité ($K=12.5$, fig.V.13) et l'angle de calage (fig.V.14) vaut alors 90° .

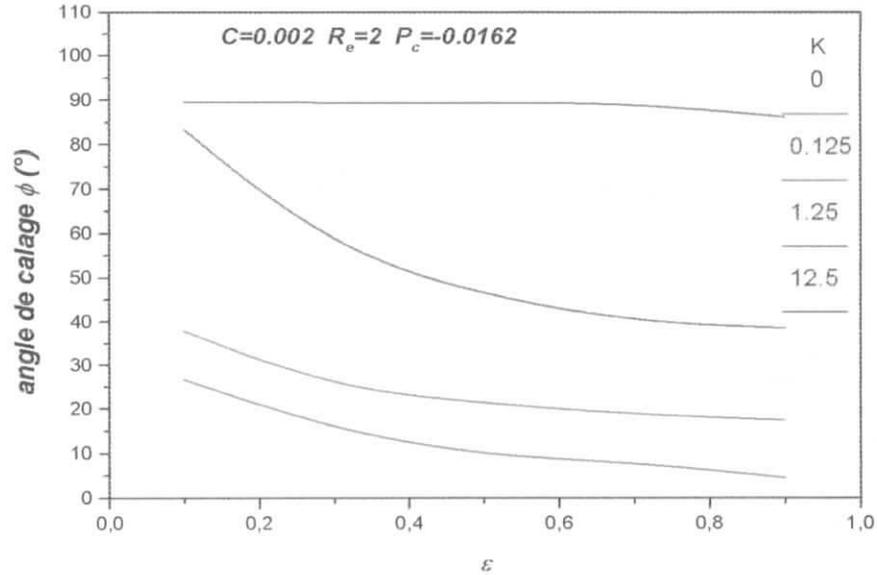


Fig.V.14 : Angle de calage fonction de l'excentricité

Remarquons que les évolutions analogues de l'angle de calage et de l'étendue du film complet (fig.V.12 et V.14). A l'exception du cas de perméabilité nulle, l'angle de calage tend vers une valeur strictement positive quand l'excentricité tend vers 1. De telles tendances (portance maximale, angle de calage différent de zéro) pour ce cas limite sont propres aux paliers poreux et avaient déjà observées dès les premières modélisations. Il en est de même pour le nombre de frottement (fig.V.15) qui atteint une valeur minimale pour une excentricité de l'ordre de 0.5 dans les cas présentés.

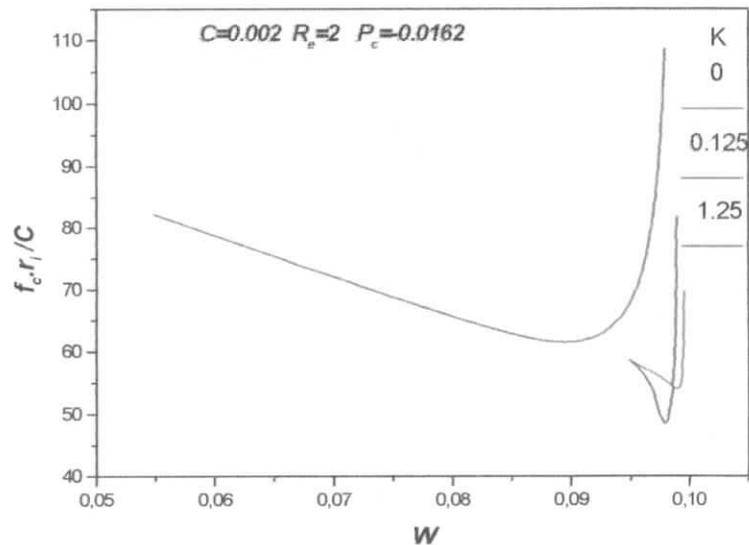


Fig.V.15 : nombre de frottement sur le coussinet fonction de la portance

La figure (V.16) représente les débits d'échange (débits entrant ou sortant), sur les surfaces cylindriques internes et externes du coussinet, entre le milieu poreux et respectivement le film et le milieu extérieur. Ils évoluent dans le même sens que la perméabilité et sont plus faibles sur la surface externe que sur la surface interne : le milieu poreux amortit les échanges provoqués par le champ de pression hydrodynamique.

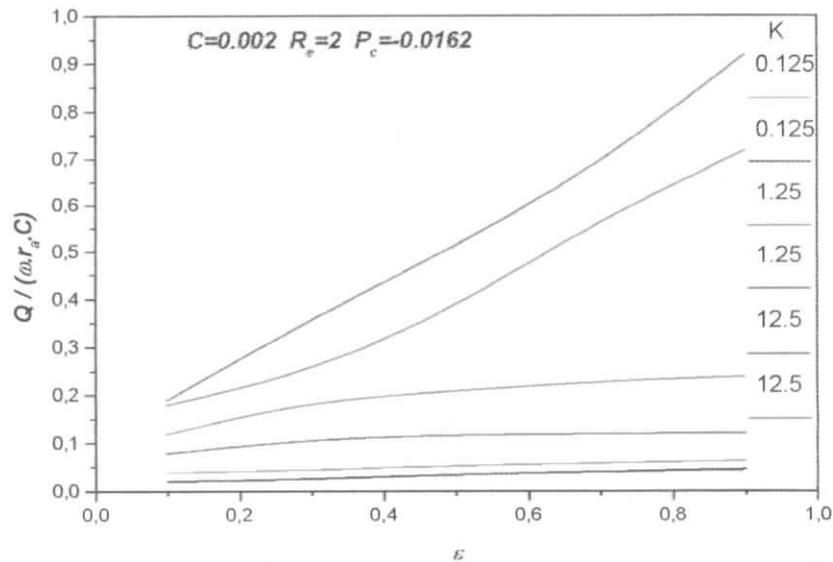


Fig.16 : Débits en $R=1$ et en $R=R_e$

Le bilan de l'étude paramétrique concernant l'influence de l'excentricité de fonctionnement et de la perméabilité fait ressortir les deux résultats pratiques suivants :

- Il existe une excentricité optimale pour laquelle le coefficient de frottement est minimum (fig.V.15),
- Une faible perméabilité favorise la portance, limite l'angle de calage et préserve ainsi la stabilité du palier.

b. Influence de la pression de cavitation :

Nous mettons ici en évidence l'influence du terme $\frac{P_c}{\mu \cdot \omega}$ qui caractérise une variation de la pression de cavitation. Ce paramètre représentatif de l'auto-alimentation du film lubrifiant est très important dans cette modélisation et nous semble essentiel pour le fonctionnement du mécanisme.

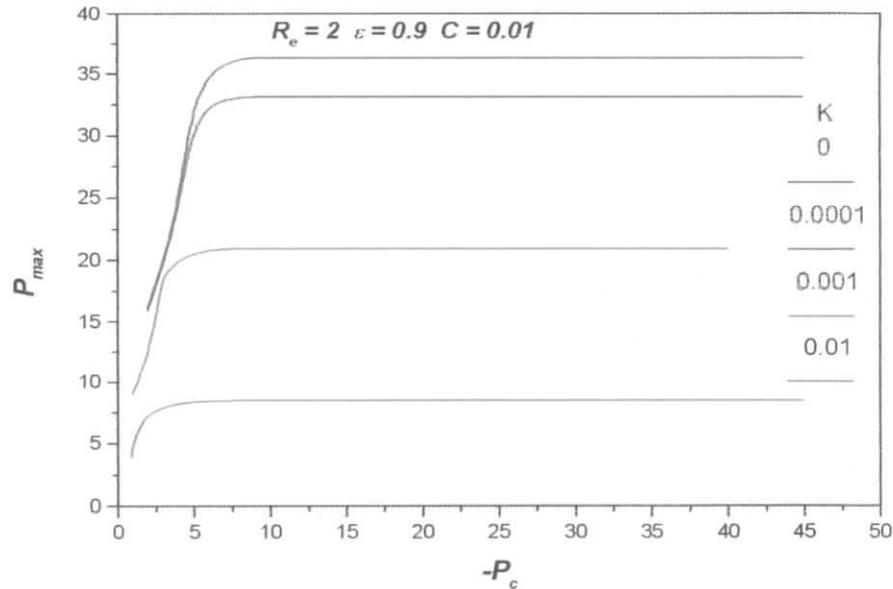


Fig.V.17 : Pression maximale sans dimension fonction de P_c

Sur la fig.V.17 l'évolution de la pression maximale dans le film lubrifiant est représentée en fonction de la pression de cavitation. Pour une pression de cavitation égale à la pression atmosphérique ($P=0$) aucune pression ne peut être générée au niveau du contact car l'alimentation de ce dernier n'est pas assurée ($\int_0^{2\pi} P d\theta = 2\pi P_{atm} = 0$). Quand la dépression dans la zone de cavitation croît, la pression dans le film lubrifiant augmente rapidement puis se stabilise et au-delà d'une certaine valeur de dépression la solution ne varie plus : elle est de type Sommerfeld. Cette valeur de P_c est de l'ordre de :

- -7.69 pour $K=10^{-2}$
- -18.4 pour $K=10^{-3}$
- -28.6 pour $K=10^{-4}$
- -28.6 pour $K=0$.

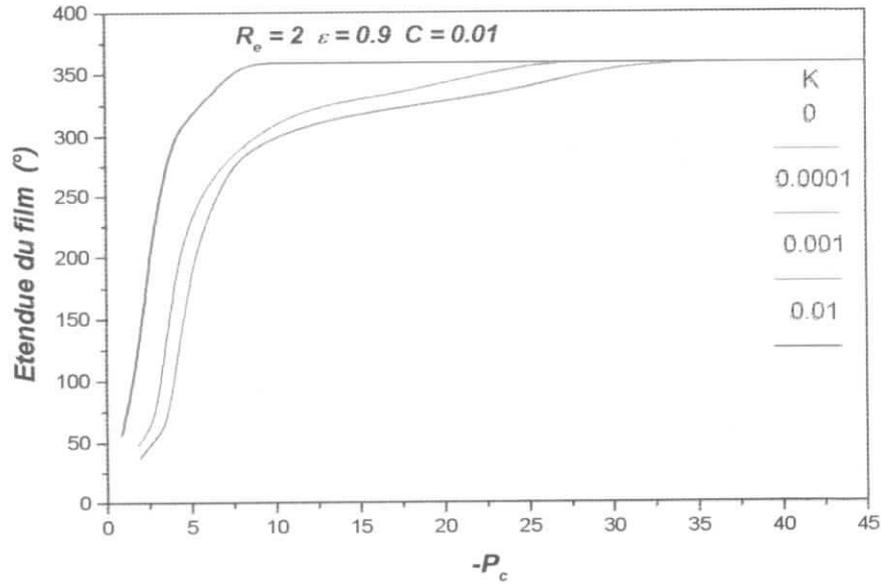


Fig.V.18 : Etendue du film complet fonction de P_c

On observe une évolution similaire à celle de la pression maximale pour les autres résultats (la portance fig.V.19, l'étendue du film fig.V.18, angle de calage fig.V.20), c'est-à-dire forte variation de $-P_c$ comprise entre 0 et 5 puis stabilisation et enfin invariance de la solution.

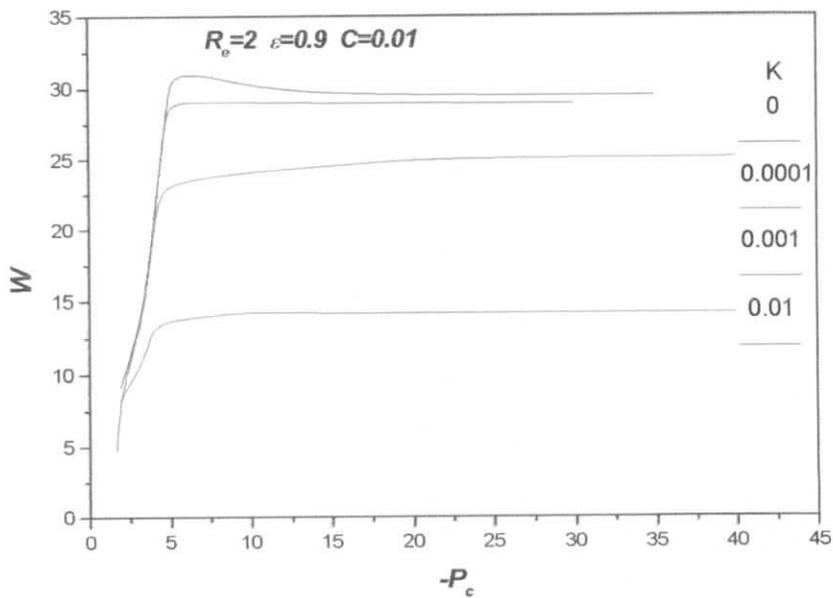


Fig.V.19 : Portance sans dimension fonction de P_c

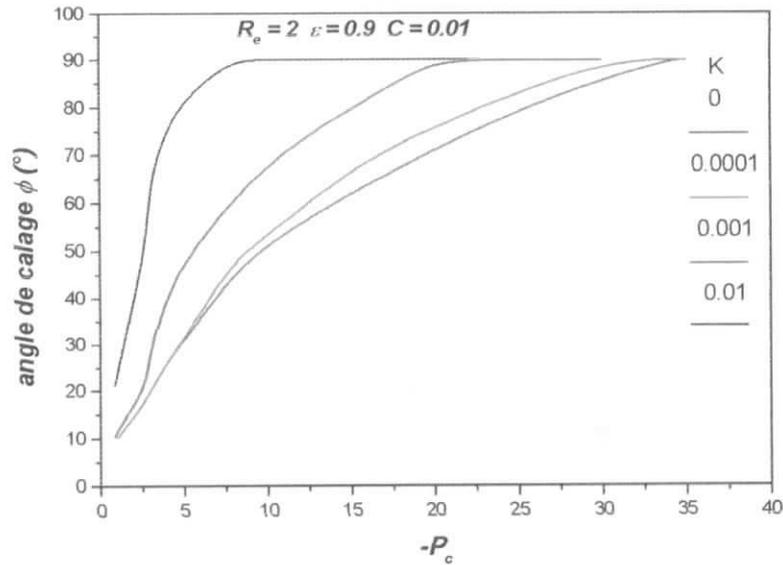


Fig.V.20 : Angle de calage fonction de P_c

Pour les cas de faible perméabilité il existe une pression de cavitation optimale pour laquelle la pression dans le film et surtout la portance sont maximales (fig.V.17 et fig.V.19, courbes $K=0$ et $K=10^{-4}$). Ce qui correspond à une abscisse de formation optimale. En effet :

- si l'étendue de film complet est faible la pression engendrée ne peut être importante,
- si l'étendue de film est maximale (solution de Sommerfeld), pour de fortes excentricités le point de pression maximale est proche du point de pression nulle d'abscisse 180° , condition défavorable à l'obtention de fortes pressions (problème de stabilité).

Il existe donc une solution intermédiaire pour laquelle la portance est maximale. Un tel comportement disparaît pour des perméabilités plus importantes car le maximum de pression se situe plus en amont dans le convergent.

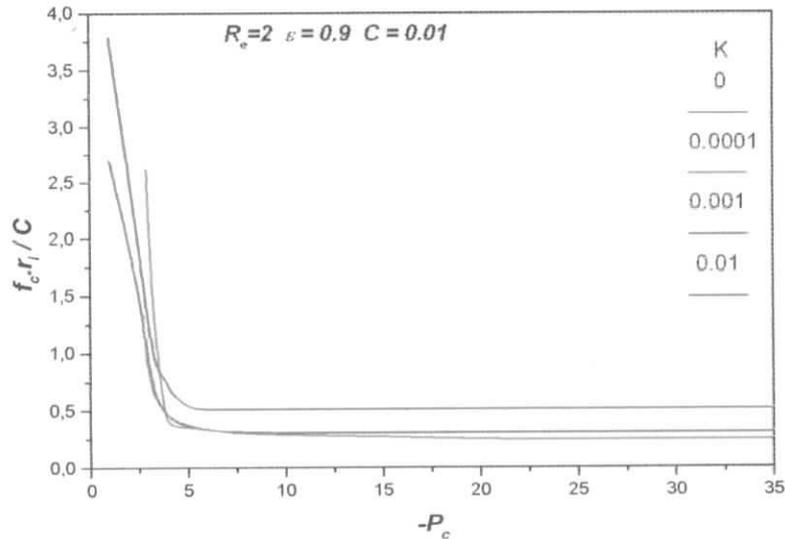


Fig.21 : Nombre de frottement sur le coussinet fonction de P_c

On peut déduire des courbes V.19, V.20 et V.21 une valeur de $-P_c$ telle que la portance soit proche de sa valeur maximale, le coefficient de frottement proche de sa valeur minimale et l'angle de calage inférieur à une valeur arbitraire de 50° afin d'assurer un minimum de stabilité. Ceci donne les résultats suivants :

$5 \leq -P_c \leq 9$	pour $K=0$
$4 \leq -P_c \leq 8$	pour $K=10^{-4}$
$3 \leq -P_c \leq 5$	pour $K=10^{-3}$
$2 \leq -P_c \leq 3$	pour $K=10^{-2}$

En conclusion la pression de cavitation doit être comprise dans une fourchette donnée. En deçà de la limite inférieure les risques d'instabilité sont très importants, on se rapproche de la solution de Sommerfeld. Au de là de la limite supérieure le palier est trop faiblement alimenté et la portance insuffisante.

c. Influence de l'épaisseur radiale du coussinet :

Ce dernier paragraphe est consacré à l'influence de l'épaisseur du coussinet poreux. Rappelons que le coussinet est supposé non encastré, c'est-à-dire à pores débouchants.

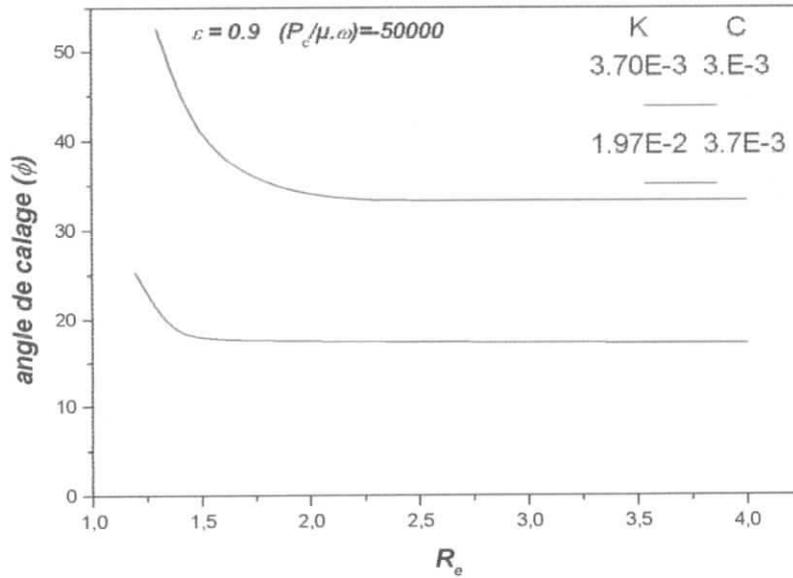


Fig.V.22 : Angle de calage fonction du rayon externe

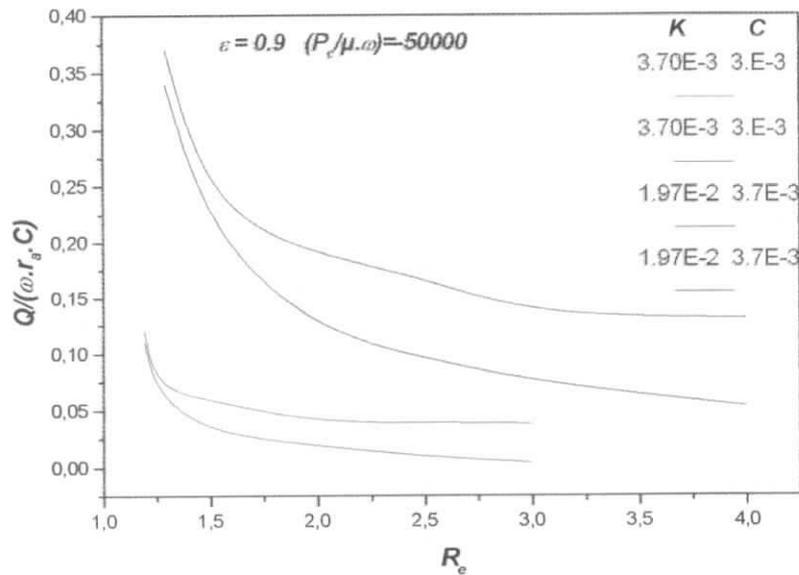


Fig.23 : Débits fonction de R_e en $R=1$ et en $R=R_e$

D'une diminution de l'épaisseur de coussinet il résulte :

- un gradient radial de pression accru et une pression plus faible dans le film lubrifiant,
- une portance diminuée,
- une étendue de film et un angle de calage (fig. V.22) plus importants,
- un coefficient de frottement augmenté,
- des débits accrus (fig. V.23).

V.3. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS OBTENUS PAR [12] :

a. Champs de pression :

- Modèle à frontière imposée :

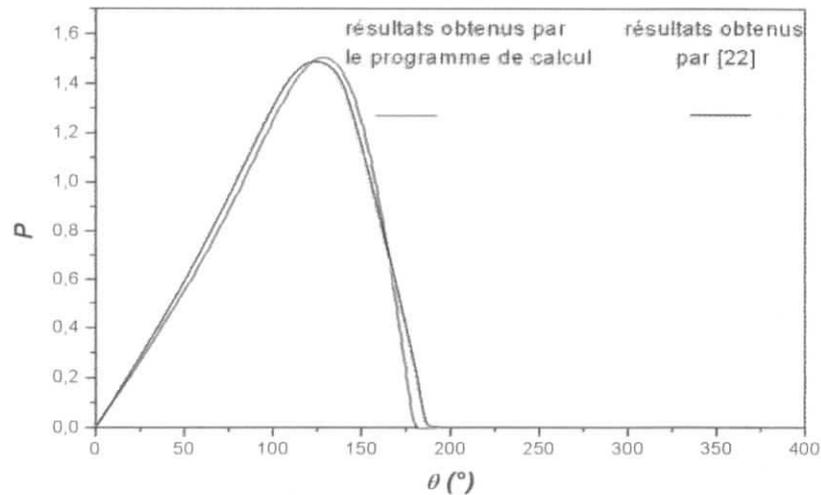


Fig.V.24 : Champ de pression sans dimension $\varepsilon=0.9$ et $K=0.125$ – comparaison avec [12]

- Modèle conservatif :

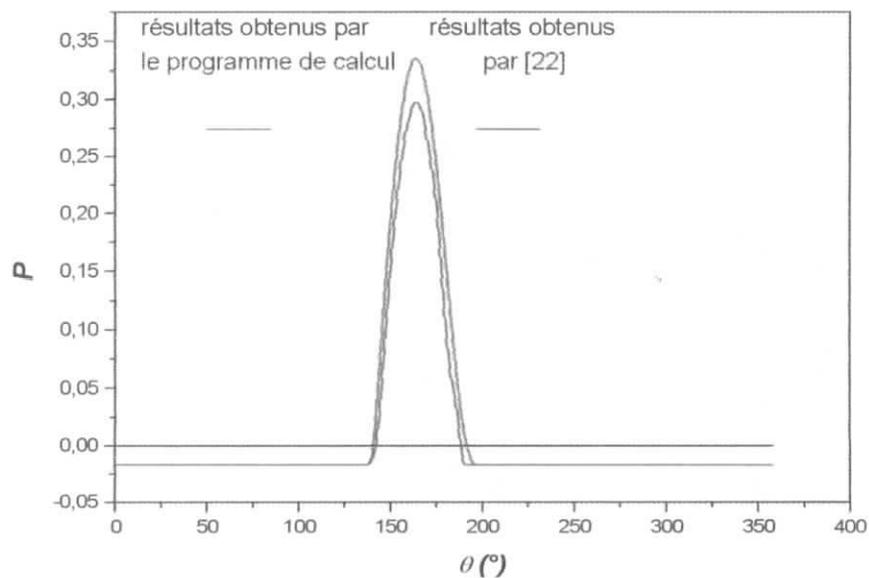


fig.V.25 : champ de pression sans dimension pour $\varepsilon=0.9$ et $K=0.125$ – comparaison avec [12]

b. Portance :

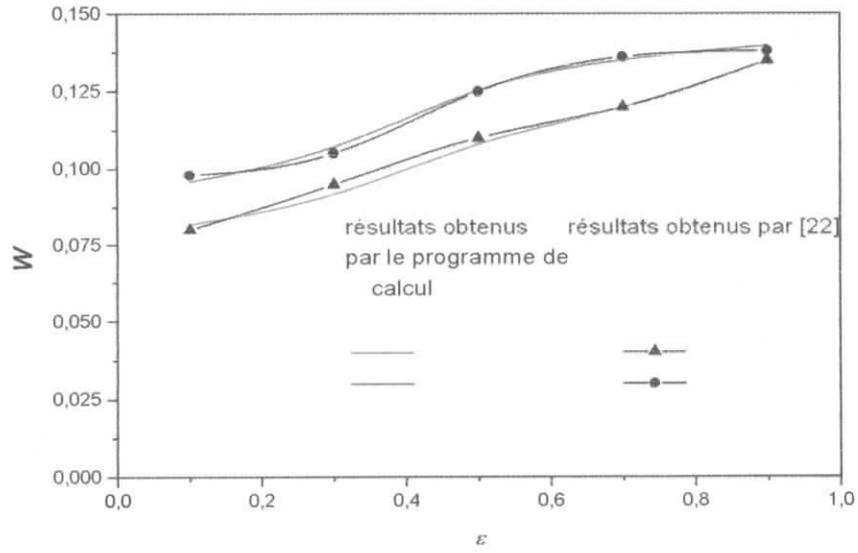


Fig.V.27 : Portance sans dimension fonction de l'excentricité pour $K=0.125$ et $K=1.25$ – comparaison avec [12]

c. Angle de calage :

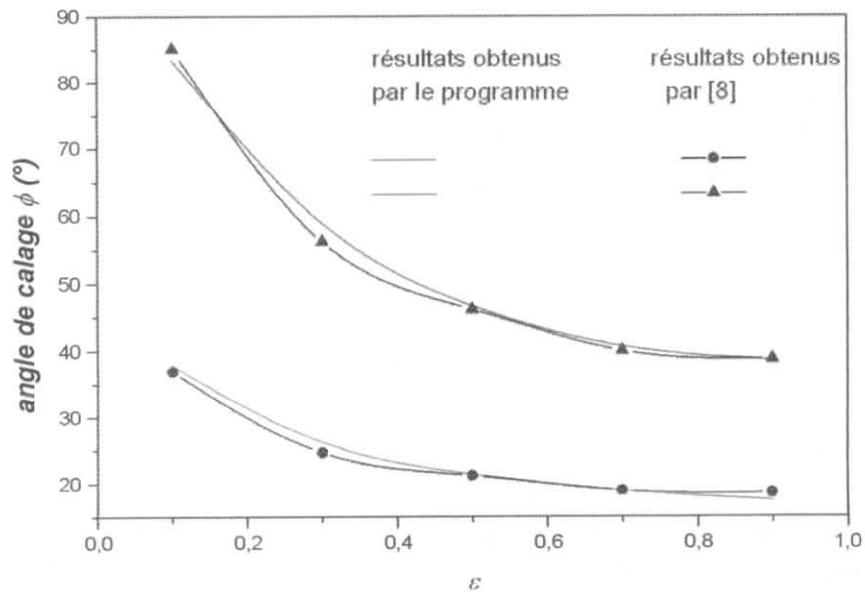


Fig.V.28 : Angle de calage fonction de l'excentricité pour $K=0.125$ et $K=1.25$ – comparaison avec [12]

L'étude comparative (fig. V.24, V.25, V.26, V.27, V.28) montre que les résultats obtenus par notre code de calcul élaboré au cours de cette étude sont en bon accord avec ceux de B. Giudicelli [12]. L'écart entre les résultats est dû principalement à la précision de la méthode numérique utilisée pour résoudre le problème. En effet :

- B. Giudicelli a utilisé pour résoudre l'équation de Laplace une méthode semi-analytique : un algorithme de transformée de Fourier rapide (solution exacte),
- Dans notre cas, on a utilisé pour résoudre l'équation de Laplace, une méthode numérique : différences finis centrées (solution approchée),
- Le pas d'incrémentation : pour un pas d'incrémentation trop petit (affinité du maillage), la solution approchée du problème tend vers la solution exacte.

V.4 CONCLUSION :

Les résultats théoriques obtenus montrent que :

- la pression générée est plus faible pour un palier poreux que pour un palier lisse, cela est dû principalement aux fuites radiales : filtration.
- Le film lubrifiant est faiblement étendu par rapport au cas classique,
- l'importance de la dépression régnante dans la zone de cavitation et qui assure l'auto-alimentation du film lubrifiant.
- Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la littérature.

*Conclusion Générale
Et
Perspectives*

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Cette étude, consacrée à la modélisation du fonctionnement des paliers auto-lubrifiants poreux, a permis d'avancer dans la compréhension du mécanisme par la prise en compte de paramètres spécifiques (pression de cavitation,).

L'analyse des modèles de la littérature, tous basés sur une hypothèse implicite de présence d'une rainure axiale d'alimentation, ces modèles ne sont pas représentatifs du fonctionnement des paliers poreux auto-lubrifiants.

Le palier poreux est un palier faiblement alimenté dont la localisation de la zone active (film complet) et la zone inactive (zone de cavitation) ne sont pas définies explicitement : nous sommes en présence d'un problème à frontière libre. La zone de rupture est déterminée en utilisant le modèle JFO (chapitre IV) qui repose sur la conservation du débit à la rupture et à la formation du film lubrifiant. Cette région est souvent plus étendue que la zone de film complet, ce résultat a été confirmé expérimentalement.

Le modèle mathématique développé au cours de cette étude a permis de mettre en évidence le rôle primordial de la zone de cavitation dans l'auto-alimentation du palier (nécessité de supposer que cette zone est en dépression pour assurer par aspiration l'auto-alimentation du film lubrifiant et la nécessité d'introduire dans les modèles de paliers poreux des équations conservatives à frontières libre pour décrire la cavitation).

Dans le but de simplifier la détermination de la frontière libre délimitant la zone de film complet de la zone de cavitation, on a négligé le gradient de pression axiale (cas de palier infiniment long) et nous avons supposé des pores débouchants sur la surface externe du coussinet ($p=p_{atm}$).

Pour modéliser le palier poreux infiniment long, la conservation du débit peut être simplement assurée en imposant une vitesse moyenne de filtration radiale nulle à l'interface des deux milieux : le débit se trouvant conservé dans le film lubrifiant complet (équation de Reynolds), il est alors également conservé dans la zone de cavitation. Nous avons montré que cette condition (pression moyenne nulle dans le film lubrifiant) est équivalente à la condition de Floberg, ce qui justifie de manière théorique la nécessité d'une zone de cavitation en dépression (pression inférieure de la pression atmosphérique).

Les résultats présentés montrent que :

- La dépression régnante dans la zone de cavitation est importante et elle assure l'auto-alimentation du film lubrifiant,
- la pression générée est plus faible pour un palier poreux que pour un palier lisse, cela est dû principalement aux fuites radiales (filtration),
- La condition qui traduit la conservation du débit (pression moyenne nulle) limite l'étendue du film lubrifiant et affecte la portance du mécanisme,
- Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la littérature.

Comme complément à cette étude, nous proposons :

- En premier lieu, l'établissement d'un code de calcul traitant le cas des paliers faiblement alimentés (problème à frontière libre) : la mise en œuvre de l'algorithme d'Elrod, ensuite on l'adapte au cas des paliers poreux auto-lubrifiants.
- en second lieu, la prise en compte de l'effet thermique : étude thermohydrodynamique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] KANEKO S. — *Application of porous materials to annular plain seals*. Journal of tribology, ASME, October 1989, Vol. 111, p. 655-660.
- [2] FRENE J. — *Butées et paliers hydrodynamiques*. Techniques de l'ingénieur, B 5320, 1996 France.
- [3] COUSSY R. — *Mécanique des milieux poreux*. Préf. de P.GERMAIN. Paris : Techniq, 1991. 436 p.
- [4] MORGAN, V.T. — *Porous metal bearings*. Tribology, 1969, Vol. 2, n° 2, p. 107-115.
- [5] BEAR, J. — *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications, Inc. 1988.764 p.
- [6] REYNOLDS O. — *On the theory of lubrication and its application to M.Beauchamp tower's experiments*. Journal of lubrication engineering, ASLE, 1964, Vol. 20, n° 12, p. 151-157.
- [7] ELROD H.G. et ADAMS M.L. — *A computer program for cavitation and starvation problems*. Proceeding of the 1st Leeds-Lyon Symposium on Tribology, cavitation and related phenomena in lubrication, Leeds, 1974, p. 37-41. ISBN 0-85298-324-7.
- [8] ELROD H.G. — *A cavitation algorithm*. Journal of lubrication technology, ASME, 1981, Vol. 103, n°2, p. 350-354.
- [9] BAYADA, G. et CHAMBAT, M. — *Sur quelques modélisations de la zone de cavitation en lubrification hydrodynamique*. Journal de mécanique Théorique et Appliquée, 1986, Vol. 5, n° 5, p. 703-729.
- [10] CAPONE, E. — *Lubrication of axially undefined porous bearings*. Wear, 1970, Vol. 15, p.157-170.
- [11] PRAKASH, J. et SANJAY KUMAR VIJ. — *Axially undefined porous journal bearings considering cavitation*. Wear, 1972, Vol. 22, p. 1-14.
- [12] GIUDICELLI B. — *Modèles hydrodynamiques conservatifs pour des paliers autolubrifiants poreux en régime permanent*. Thèse de doctorat-es-sciences présentée devant l'institut national des sciences appliquées de Lyon, 1993.
- [13] FRENE J. ; NICOLAS D. ; DEGUEURCE B. ; BERTHE D. et GODET M. — *Lubrification hydrodynamique, paliers et butées*. Paris : Eyrolles, 1990. 488 p.