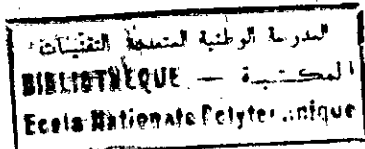


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

25/90

MINISTRE AUX UNIVERSITES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



THESE

Pour l'Obtention du Diplôme de
MAGISTER EN GENIE INDUSTRIEL

**INVESTIGATION DES MODELES A COUTS
UNITAIRES VARIABLES DANS LE CAS
D'UN SYSTEME DE DISTRIBUTION A DEPOT
UNIQUE OU A PLUSIEURS DEPOTS**

Par

Mohamed SARI

Ingénieur d'Etat en Informatique USTHB

soutenu le 30 Juin 1990 devant la Commission d'Examen

Présentée devant le Jury :

Dr A. BOUZAHER
" H. KERBACHE
" A. OUABDESSELEM
" H. DAMARDJI
" S. SALHI
" A. MEHALIA

Président
Examineur
..
..
Rapporteur
Invité

Remerciements

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة -- 2181078001
École Nationale Polytechnique

L'ambiguïté des mots et la dualité de l'être, les convenances, la diplomatie et ... l'hypocrisie font souvent perdre leur sens aux remerciements. Aussi, c'est avec sincérité que j'adresse mes plus grands remerciements:

- A mon directeur de thèse, D^r Y. FAHFI, pour son extraordinaire disponibilité, son aide et ses précieux conseils, et surtout pour la patience infinie dont il a su faire preuve lorsque, accablé par mes fonctions administratives, je reléguais mon travail de recherche à la seconde position. Qu'il soit enfin remercié pour la sympathie qu'il m'a témoignée.

- Au président du jury, D^r A. BOUZAKER, pour l'attitude favorable qu'il a eue envers moi, pour ses précieuses et pertinentes suggestions lors de l'élaboration de l'article "Models for the vehicle fleet mix problem with variable unit running cost" et enfin pour avoir accepté la délicate tâche de présider le jury qui aura à juger ce travail.

- Aux membres du jury, D^r A. OUBDEYSSAM, D^r H. KERBACHE et D^r H. DAMERDJJ, pour avoir accepté de faire partie du jury, pour leurs conseils et pour l'accueil bienveillant qu'ils m'ont toujours réservé.

- Au D^r A. MEHARJJA, pour avoir bien voulu répondre à notre invitation et pour avoir accepté de faire partie du jury.

- A tous mes collègues et amis enseignants du Département de Génie Industriel, et à mes collègues et amis du Centre de Calcul de l'ENP, pour leur aide et leur soutien moral. Un grand merci à M^r A. BOUYAGOUR, pour avoir lu et commenté cette thèse (bien qu'il soit chimiste de métier, il prétend avoir compris quelque chose!) et pour toute l'aide qu'il m'a apportée.

- A Frida, enfin et surtout, mais sans rentrer dans les détails!

Dédicaces

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A Frida, p. p., p. c., p. &

ORGANISATION DU DOCUMENT	1
Chapitre 1: PRESENTATION DU SYSTEME ET DU PROBLEME GENERAL	
1.1- Introduction	3
1.2- Définitions	4
1.3- Hypothèses, simplifications et approximations considérées dans les algorithmes de résolution	7
1.4- Aspects fondamentaux liés au problème	10
Chapitre 2: CLASSIFICATION DES PROBLEMES ET RETROSPECTIVE DES TRAVAUX DE RECHERCHE	
2.1- Introduction	17
2.2- Aspects du problème	17
2.3- The Traveling Salesman Problem (TSP)	18
2.3.1- Introduction	
2.3.2- Formulation du problème	
2.3.3- Approches de résolution	
2.3.4- Conclusion	
2.4- The Vehicle Routing Problem (VRP)	23
2.4.1- Introduction	
2.4.2- Formulation du problème	
2.4.3- Approches de résolution	
2.4.4- Conclusion	
2.5- The Fleet Composition Problem (FCP)	30
2.5.1- Présentation	
2.5.2- Approches de résolution	
2.5.3- Conclusion	
2.6- The Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem (FSMVRP)	33
2.6.1- Introduction	
2.6.2- Formulation du problème	
2.6.3- Approches de résolution	
2.6.4- Conclusion	

**Chapitre 3: FORMULATION DU PROBLEME ETUDIE ET PRESENTATION DES
METHODES DE RESOLUTION ADOPTEES**

3.1-	Introduction	39
3.2-	Modèle mathématique et approches de résolution	39
3.3-	Algorithmes de partitionnement de tour géant	40
3.3.1-	Variantes considérées	
a-	Single giant Tour (SGT)	
b-	Multiple Giant Tour (MGT)	
3.3.2-	Algorithme de base	
3.3.3-	Mise en oeuvre et validation	
3.3.4-	Evaluation des algorithmes utilisés	
3.3.5-	Incorporation de procédures de raffinage	
a-	Fusion de tournées	
b-	Eclatement de tournées	
c-	Permutation de clients entre tournées	
d-	Réaffectation de clients	
3.3.6-	Performances des approches améliorées	
3.3.7-	Impact de la tournée géante initiale sur la solution	
3.3.8-	Conclusion	
3.4-	Les Savings	73
3.4.1-	Introduction	
3.4.2-	Approches classiques	
a-	The Combined Savings Approach (CS)	
b-	The Opportunity Savings Approach (OS)	
3.4.3-	Mise en oeuvre et résultats	
3.5-	Etude comparative	79
3.6-	Conclusion	82

**Chapitre 4: IMPACT DU COUT VARIABLE UNITAIRE SUR LA COMPOSITION
DE LA FLOTTE ET SUR LE COUT TOTAL DE DISTRIBUTION**

4.1-	Introduction	83
4.2-	Modèle mathématique considéré	84
4.3-	Méthodologie suivie	84
4.4-	Adaptation des approches de résolution	86
4.4.1-	Adaptation des algorithmes de partitionnement de tour	
4.4.2-	Adaptation des algorithmes de savings	

4.5-	Etude de l'impact du cout variable unitaire	92
4.5.1-	Approches de partitionnement de tour (SGT et MGT)	
4.5.2-	Approches de savings	
4.5.3-	Introduction de la contrainte sur la distance	
	a- Introduction	
	b- Construction des contraintes	
	c- Résultats numeriques	
4.6-	Conclusion	110

Chapitre 5: THE MULTIDEPOT VEHICLE FLEET MIX PROBLEM

5.1-	préambule	112
5.2-	Formulation du problème et approches de résolution	114
	5.2.1- Introduction	
	5.2.2- Limites des formulations actuelles	
	5.2.3- Formulation	
	5.2.4- Approches de résolution	
	a- Approche d'amélioration locale	
	b- Approche Assignment-Sweep	
	c- Approche des savings	
5.3-	Heuristique de résolution proposée	124
	5.3.1- Principe général	
	5.3.2- Algorithme de base	
	5.3.3- Extensions	
	5.3.4- Raffinage de la solution	
	5.3.5- Implémentation et résultats numériques	
	a- Génération des problèmes tests	
	b- Résultats numériques	
5.4-	Conclusion	143

Chapitre 6: CONCLUSIONS GENERALES ET SUGGESTIONS

6.1-	Préambule	145
6.2-	Résumé du travail réalisé	146
6.3-	Perspectives de développement	148

BIBLIOGRAPHIE	151
---------------------	-----

ANNEXES	156
---------------	-----

PRESENTATION DU PROBLEME

ET

ORGANISATION DU DOCUMENT

La présente étude s'insère dans le contexte de la distributique, discipline en vogue depuis quelques années et qui regroupe toutes les activités de transport au sein d'une entreprise. Elle a pour objectif principal l'étude de l'impact du coût unitaire variable de transport sur la solution du problème mixte de composition de flottes et d'élaboration de tournées de véhicules (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*, note FSMVRP). Elle part d'une constatation générale, à savoir l'assimilation par les modèles standards du coût variable unitaire de transport à un paramètre constant, et tente d'étudier les implications de cette hypothèse simplificatrice sur la solution du problème considéré. Ces implications sont ainsi analysées dans une première partie de l'étude, dans laquelle le système contient un dépôt unique. La seconde partie sera, quant à elle, consacrée à l'étude du système général à plusieurs dépôts, et l'on y retrouvera les mêmes aspects de composition de flottes et d'élaboration de tournées, dans les conditions initialement définies pour le cas à dépôt unique.

L'étude s'articule sur cinq chapitres principaux, et se déroule de la manière suivante:

Le chapitre I définit le système de distribution général, et les différents aspects du problème de distribution y sont brièvement passés en revue, pour être ensuite repris avec force détails dans le chapitre II.

A travers une rétrospective des travaux réalisés en la matière, le chapitre II, que l'on pourrait intituler "Etat de l'art", brosse un tableau d'ensemble du système et décortique ses composantes fondamentales et les multiples approches de résolution connues. Il permet ainsi d'introduire certains concepts de base et de présenter des algorithmes dont les principes seront exploités par la suite, lorsqu'il s'agira de mettre en évidence l'impact étudié.

Le chapitre III cerne de manière précise l'aspect le plus général du problème de distribution, à savoir le FSMVRP. Les approches de résolution adoptées y sont exposées dans leur version de base puis transformées progressivement afin d'intégrer les différents paramètres considérés. La validation, nécessaire pour la suite de l'étude, est établie par étude de problèmes tests standards puisés dans la littérature. Les résultats numériques obtenus sont alors confrontés aux solutions connues.

Le chapitre IV, consacré exclusivement à l'étude de l'impact du coût unitaire de distribution sur la solution du problème, définit la méthodologie de travail et la met en oeuvre. Plusieurs variantes sont alors considérées, et des résultats numériques sont donnés et analysés au fur et à mesure.

Le chapitre V étend l'étude au cas de systèmes à plusieurs dépôts, et développe une approche de résolution adaptée. Des résultats numériques illustrent l'exposé de la méthode.

Enfin, au chapitre VI, nous terminerons l'étude sur une conclusion générale suivie de suggestions destinées à développer d'autres aspects de la question.

CHAPITRE I

PRESENTATION DU SYSTEME ET DU PROBLEME GENERAL

1.1- INTRODUCTION

Initialement réservée à la logistique militaire, l'étude des fonctions de distribution touche aujourd'hui tous les secteurs d'activité. Au fur et à mesure que les systèmes de distribution se développaient, leur gestion devenait de plus en plus complexe, et échappait au contrôle des méthodes artisanales. Le besoin de stocker et de transporter des quantités de marchandises de plus en plus importantes et l'augmentation des coûts ont poussé les chercheurs à développer des outils analytiques rigoureux, seuls à même d'assurer une gestion efficace. Le nombre, la taille et la localisation des dépôts dans un système de distribution, l'analyse des fonctions des coûts de transport, et le tracé des tournées de distribution sont devenus depuis, autant de sujets d'intérêt.

Pour beaucoup d'entreprises industrielles, le problème de transport (collecte et/ou distribution d'objets allant des matières premières aux produits finis) revêt une importance capitale, puisqu'il participe pour une part non négligeable dans les coûts supportés. L'utilisation efficiente du parc de véhicules est donc souvent le centre des préoccupations des gestionnaires, auxquels une question naturelle se pose en particulier: Combien de véhicules faut-il, et de quelle capacité, pour satisfaire la demande de manière optimale?

Cette question, à laquelle il est difficile de répondre en raison du nombre énorme de combinaisons "flottes-tournées", montre tout l'intérêt de cette étude, qui s'insère dans le domaine de l'optimisation combinatoire. Les développements actuels de la théorie de la complexité des algorithmes ouvrent de nouvelles perspectives de recherche dans ce domaine.

1.2- DEFINITIONS

a- Distributique:

Selon West [69], la distributique regroupe, dans son sens large, toutes les activités de transport de la firme, qu'il s'agisse de l'acheminement des matières premières aux sites de production, du transport des produits finis des usines aux entrepôts ou aux dépôts et enfin, de ceux-ci aux clients.

b- Système de distribution:

De nombreux systèmes de distribution peuvent être représentés par un diagramme à trois niveaux ou couches:

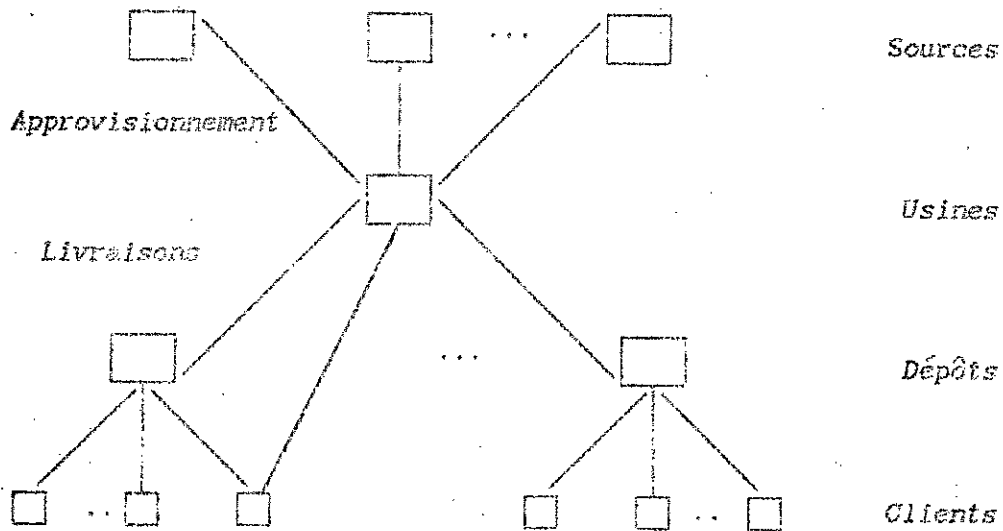
- 1- le niveau *primaire*, constitué par les usines,
- 2- le niveau *secondaire*, formé des dépôts, et
- 3- le niveau *tertiaire*, qui regroupe les clients.

L'entreprise industrielle, qui englobe l'usine et les depots dans le système de distribution, occupe une position intermédiaire entre les sources d'entrée et le marché. Elle est concernée par la conversion de toutes ces entrées en biens et services qui devront être disponibles aux points de demande. Ainsi, pour des sources de position donnée et pour des besoins du marché connus, l'entreprise doit planifier l'exécution effective des différentes opérations.

Le mode de distribution utilisé par les véhicules basés à une couche donnée caractérise le système. Généralement, ces véhicules relient deux niveaux successifs, mais il peut aussi y avoir des transitions directes entre couches séparées (on peut, par exemple, approvisionner directement un gros client à partir d'une usine).

En général, la couche primaire et les clients sont connus à l'avance, et l'on a ainsi leur nombre, leur position, et leur capacité (usines) ou leur demande (clients). Il s'agit alors de définir la couche intermédiaire (dépôts), ce qui pose trois problèmes majeurs:

- a)- *Le nombre et la localisation des dépôts.*
- b)- *La composition de la flotte.*
- c)- *Les chemins de distribution, ou tournées.*



(figure 1.1)

Système de distribution

Les deux premiers problèmes peuvent être considérés comme stratégiques et le troisième comme tactique. En effet, une fois le nombre des dépôts et leur emplacement choisis, le système change peu, alors que l'affectation des véhicules varie souvent, parfois même chaque jour, et les décisions peuvent donc varier d'une période à une autre.

Le problème de localisation de dépôt est en fait constitué de plusieurs sous-problèmes: nombre de dépôts dans le système, leur taille respective, leur emplacement, et l'affectation des clients à ces dépôts. Lors de la localisation des dépôts, il est nécessaire de tenir compte de la disponibilité de sites et de personnel, de la proximité des voies d'accès, et autres facteurs.

De même, le problème d'affectation des véhicules est lié à leur capacité, à la taille et la composition de la flotte, à la fréquence d'approvisionnement des clients, et au taux d'utilisation de la flotte qui peut éventuellement être appuyée par des transporteurs externes.

Les problèmes (a) et (c) sont liés et la solution de l'un peut affecter l'autre. Par exemple, il est possible de réduire les coûts de transport en augmentant le nombre de dépôts dans le système, mais ce faisant, on augmente les frais liés aux dépôts. L'optimum passe par un compromis entre les trois composantes du coût total, et il n'est plus possible, dès lors, de traiter ces problèmes séparément sans courir le risque de générer des solutions sous-optimales.

Le souci du gestionnaire d'un tel système peut être la minimisation des coûts supportés (coûts de distribution, coûts d'acquisition de véhicules ou d'ouverture de dépôts, ...) ou encore l'amélioration de la qualité de service (réduction des temps d'attente, augmentation des capacités de service, ...), sous certaines contraintes. Celles-ci peuvent être imposées sur:

- a) les dépôts (nombre, localisation possible, capacité, ...)
- b) la flotte de véhicules (type, nombre et capacité des véhicules)
- c) les points de demande (quantités demandées, temps de service, satisfaction totale ou partielle, qualité du service, ...)
- d) la structure des routes (longueur, coût, durée limite d'une tournée, ...)
- e) la dynamique du système (périodes d'inventaires, délais d'acquisition ou de distribution, ...).

Un élément essentiel de tout système de distribution est la construction des flottes de véhicules et l'élaboration des tournées de distribution, chaque activité ayant un coût associé. Différents aspects du problème peuvent être considérés, et il convient de les définir, au même titre que les coûts inhérents.

Coûts liés aux dépôts:

Ces coûts comprennent les frais d'acquisition, de gestion, d'assurance, et les différentes charges (loyers, gardiennage, électricité, gaz, etc ...).

Coûts de transport:

Parmi les paramètres qui interviennent dans le calcul de ces coûts, nous pouvons citer:

- Le type de marchandise à transporter, et les précautions à prendre lors du chargement et du déchargement (fragilité, ...).
- La nature des produits, lorsque certains de ceux-ci imposent des restrictions dans le transport des autres dans le système.
- Le moyen de transport (terre, air, mer).
- La capacité, le type et l'âge des moyens de transport.
- La propriété de ces moyens.

Le coût de transport peut être vu comme la somme de deux composantes: l'une fixe, liée à la possession du véhicule et indépendante du niveau d'activité de celui-ci, et l'autre variable, proportionnelle à cette activité (généralement le kilométrage parcouru). Ces coûts peuvent aussi dépendre du type du véhicule, et surtout de sa capacité.

1.3- HYPOTHESES, SIMPLIFICATIONS ET APPROXIMATIONS CONSIDEREES

DANS LES ALGORITHMES DE RESOLUTION

Introduction

Au delà des difficultés purement algorithmiques, il semble que l'un des problèmes majeurs associés à cette classe de problèmes soit l'estimation de la distance et du temps de voyage entre deux sites, à partir de leurs coordonnées géographiques. Dans la pratique, une fois l'algorithme de résolution mis au point, la moitié du chemin qui mène à la solution du problème reste encore à faire. En effet, ce n'est pas tout de modéliser, d'élaborer la stratégie de résolution puis de tester l'algorithme sur un problème dont on possède et les données et la solution. Il faut encore pouvoir disposer de toutes les données nécessaires au problème pratique considéré, et s'assurer de leur fidélité. En effet, toute inexactitude ou manque qui altérerait ces données ne manquerait pas de se répercuter de façon souvent signi-

ficative sur la solution.

Les données se répartissent en deux blocs: celles relatives aux clients, et celles liées à la flotte.

a- Données relatives aux clients:

Dans le système, chaque client est connu à travers:

- ses coordonnées, et
- sa demande.

b- Données relatives à la flotte:

La flotte est déterminée par:

- le nombre et types de véhicules, chaque véhicule ayant ses caractéristiques propres (capacité, consommation, frais d'amortissement, d'assurance et de maintenance, etc...).

- A cela s'ajoutent les frais liés au personnel (chauffeurs/livreurs).

Coûts fixes de distribution:

Ces coûts incluent aussi bien le coût du personnel, d'amortissement, d'assurance, qu'une partie des coûts de maintenance (relative aux opérations de maintenance régulières). Certains de ces paramètres sont directement disponibles, alors que d'autres nécessitent la connaissance de données supplémentaires (fréquence de renouvellement et coût moyen d'une pièce de rechange, etc...), et sont souvent estimés.

Coûts variables de distribution:

Ils comprennent le coût du carburant, qui est lié au kilométrage parcouru aussi bien qu'à l'âge et à la technologie du véhicule, et enfin le coût de maintenance. Celui-ci est déterminé par le prix des pièces dont l'usure est liée directement à l'utilisation du véhicule.

Chaque véhicule est caractérisé, en plus du coût fixe, d'un coût unitaire de transport. Ce coût dépend de plusieurs paramètres, et particulièrement de la capacité du véhicule. En effet, un véhicule de 5 tonnes ne consomme pas, par exemple, autant de carburant qu'un autre de 10 ou de 20 tonnes.

L'absence de données et/ou l'incertitude dont celles-ci peuvent être entachées conduisent parfois à d'autres simplifications ou approximations, parmi lesquelles nous citerons:

Utilisation des distances Euclidiennes:

Dans les algorithmes de résolution des différents problèmes cités auparavant, le recours aux distances euclidiennes (ou encore distances à vol d'oiseau) est quasi-systématique. En effet, dans un système formé de n entités (clients plus dépôt), il n'y aurait pas moins de $n*(n-1)/2$ liens possibles, et autant de distances à mesurer!

Dans la pratique, il est improbable d'avoir toutes ces données. Aussi, la simplification qui consiste à approximer les distances réelles par des distances euclidiennes est-elle souvent admise de fait. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que la route réelle peut s'écarter considérablement de celle à vol d'oiseau, surtout en terrain accidenté, zones interdites ou en présence de voies d'eau à traverser.

L'introduction de facteurs correctifs tend à limiter cet écart qui peut parfois avoir un impact important sur la solution: sur la détermination des tournées dans le *Vehicle Routing Problem* (VRP), mais aussi dans celle de la flotte dans le *FSMVRP*. De plus, la solution d'un problème soumis à la contrainte sur la distance peut s'avérer être non réalisable (distance réelle au-delà de la limite imposée).

Une approximation communément utilisée est la suivante:

$$d_{ij}^r = \alpha * d_{ij}^e$$

où:

d_{ij}^r : distance réelle de i à j , $0 \leq i, j \leq$ nombre de clients dans le système, 0 représentant le dépôt.

d_{ij}^e : distance euclidienne de i à j .

α : coefficient de correction.

Le problème se ramène alors à trouver la "bonne valeur" de α .

Temps de service:

Le temps de service comprend à la fois:

- Le temps de chargement et/ou de déchargement de la marchandise, qui est lié à la demande.

- Le temps de facturation, qui est généralement fixe.

Le temps de service est souvent modélisé sous la forme:

$$t_i = a + b * d_i$$

où:

d_i : demande du client i

a : temps fixe perdu au niveau d'un client

b : temps consommé par unité de demande.

Là encore, il faut estimer deux paramètres, à savoir a et b . Une fois ce facteur mesuré, il est souvent converti en distance pour être utilisé par les modèles mathématiques standards. Bien entendu, cette conversion doit tenir compte de la vitesse moyenne de circulation dans les itinéraires empruntés.

1.4- ASPECTS FONDAMENTAUX LIES AU PROBLEME

Classification des problèmes:

Définition [60]:

Un problème d'optimisation combinatoire est défini à partir:

- d'un ensemble fini E

- d'une famille S de sous-ensembles de E

- d'une application $C : E \longrightarrow R$ dont on déduit une application

$f : S \longrightarrow R$ par

$$f(S) = \sum_{s \in S} C(s)$$

Il s'agit alors de déterminer s^* tel que:

$$f(s^*) = \text{Optimum}_{s \in S} \left(f(s) \right)$$

Classification:

Le problème peut être vu sous trois aspects relevant de l'optimisation combinatoire, qui consiste à rechercher dans un ensemble discret de solutions, l'élément optimisant une fonction d'évaluation donnée. Le nombre de combinaisons est généralement trop élevé et l'examen exhaustif de toutes les possibilités ne peut être envisagé.

Il est difficile d'aborder certaines considérations liées à la complexité, sans rentrer dans le formalisme de la théorie de la complexité des algorithmes introduite par Cook et Karp [10, 32]. Celle-ci, définit, dans toute sa rigueur, plusieurs classes de problèmes: P , NP , NP -Complet, et NP -hard. Le développement de toutes ces classes ne peut être entrepris ici, mais le lecteur intéressé trouvera certainement son compte en consultant le traité d'optimisation combinatoire de Sakarovitch [60], et l'ouvrage particulièrement intéressant de Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan et Schmoys, "The traveling salesman problem. A guided tour to combinatorial optimisation" [49].

Les différents aspects du problème qui nous intéresse sont considérés comme difficiles, conformément à la classification suivante:

« la classe des problèmes faciles, pour lesquels il existe des algorithmes de résolution efficaces, et

* la classe des problèmes difficiles, dont la résolution ne semble pas admettre d'algorithme efficace. La résolution exacte de ce genre de problèmes, lorsqu'elle est possible, ne peut s'effectuer dans un intervalle de temps raisonnable.

La notion d'efficacité est liée à l'effort de calcul (temps de calcul) nécessité par l'algorithme de résolution, lequel effort dépend de la taille du problème (nombre de villes, de types de véhicules, etc...). Ainsi, le temps d'exécution d'un algorithme sera exprimé en fonction de la taille du problème, et un algorithme efficace sera caractérisé par une fonction polynomiale. Cependant, il existe certains algorithmes dont le temps d'exécution peut varier de manière significative, pour une même taille. Le temps moyen (nombre moyen d'opérations) ou le temps consommé dans le pire des cas (worst case) caractérisera alors l'algorithme. Néanmoins, cette information doit être manipulée avec prudence (un algorithme coûteux en temps dans le pire des cas peut être économique dans les cas "normaux").

Par ailleurs, simplicité n'est pas nécessairement synonyme d'efficacité. En effet, s'il est simple d'énumérer une liste de combinaisons, il n'est pas toujours possible de les examiner toutes.

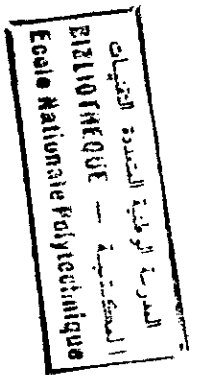
Ainsi, un problème sera dit facile ou difficile selon qu'il peut être résolu à l'aide d'un algorithme polynomial ou non.

Approches de résolution:

Il existe, en dehors des considérations liées à la complexité d'un problème donné, deux approches de résolution fondamentales: la résolution à l'aide de méthodes exactes, et la résolution à l'aide de méthodes heuristiques.

Méthodes exactes:

Essentiellement analytiques, ces méthodes permettent, lorsqu'elles sont applicables, l'obtention d'une solution exacte du problème traité. Il convient de distinguer, dans la pratique, entre la formulation mathématique à la fois précise et rigoureuse, et son image informatique



qui est tributaire de la précision de l'ordinateur utilisé. L'implantation d'un algorithme exact sur un ordinateur à précision limitée peut conduire à des solutions sous-optimales, voire même à des valeurs s'écartant de manière significative des solutions réelles. Ces méthodes de résolution ne permettent de trouver la solution exacte du problème traité que si:

- un nombre fini de calculs sont exécutés, et si
- ces calculs sont faits avec une arithmétique infiniment précise.

Ainsi, le résultat de ces algorithmes peut être entaché d'une double erreur: la première due au fait que le processus est nécessairement interrompu au bout d'un nombre fini d'itérations, et la seconde, due à la propagation des erreurs de calcul occasionnées par l'arithmétique à précision limitée de l'ordinateur [71].

La théorie de la complexité des algorithmes montre que le recours à ces méthodes n'est pas toujours possible, quand bien même la formulation exacte serait disponible.

Comme exemple de méthodes exactes, nous pouvons citer:

- *La programmation dynamique*, basée sur le principe de Bellman [2] et que Sakarovitch [60] définit comme suit: "Dans une séquence optimale de décisions, quelle que soit la première décision prise les décisions subséquentes forment une sous-séquence optimale, compte tenu des résultats de la première décision".

- *Les méthodes de séparation et évaluation (Branch and Bound)* qui agissent par une exploration intelligente du domaine des solutions réalisables: basées sur le principe d'énumération implicite, elles évitent d'effectuer l'inventaire systématique de l'ensemble des solutions potentielles. Cet ensemble est structuré sous forme d'arborescence et l'exploration repose sur une fonction d'évaluation qui permet d'éliminer des branches complètes de l'arborescence. Les méthodes basées sur le principe des plans sécants (Gomory cutting planes, entre autres variantes), qui consiste à cerner la solution par des coupes successives dans l'espace des solutions admissibles, constituent une autre approche de résolution. La *programmation mathématique*, et

particulièrement la *programmation linéaire en nombres entiers*, est à la base de la plupart des algorithmes que l'on rencontre dans ce contexte.

Méthodes heuristiques:

Souvent de nature *intuitive*, ces méthodes s'inspirent de la structure du problème pour lui trouver une solution. Elles ne nécessitent pas la connaissance totale du système étudié, ni la formulation rigoureuse du problème associé. Approximatives dans leur approche, elles conduisent à des solutions toujours réalisables, mais pas nécessairement optimales. De plus, elles sont très souvent spécifiques aux problèmes qu'elles se proposent de résoudre. Simplicité de mise en œuvre et rapidité de traitement sont leurs caractéristiques essentielles, en plus de la qualité des solutions qu'elles génèrent. En effet, la solution n'étant pas nécessairement optimale, son degré de *sous-optimalité* (écart par rapport à la solution optimale) revêt une grande importance.

L'existence de ces méthodes approximatives se justifie par les raisons suivantes:

- Notre inaptitude à résoudre efficacement des problèmes difficiles.

- Par ailleurs, il arrive souvent que les contraintes et/ou la fonction objective ne soient pas précisément définies. Ceci peut être soit de l'imprécision des données, soit de la complexité du modèle et de la diversité des objectifs poursuivis simultanément (critères multiples). A quoi bon, alors, déterminer un *optimum exact* d'un problème flou par nature?

- Enfin, une bonne solution approchée peut être utilisée pour initialiser un algorithme exact.

Ces méthodes sont particulièrement destinées à la résolution des problèmes difficiles. On attend d'elles alors la production de solutions acceptables, en un temps raisonnable (polynomial). Rien ne permet, dans l'absolu, de se prononcer sur les performances d'une méthode heuristique. Il faut alors observer son comportement moyen, à travers

une analyse probabiliste, ou encore son comportement dans "le pire des cas" (*worst case*):

a- Worst Case:

L'approche pessimiste consiste à se placer dans les cas les plus défavorables, afin de mesurer l'erreur absolue ou l'erreur relative maximale pouvant entacher une solution.

b- Analyse probabiliste:

Au lieu de se baser sur le comportement extrême de la méthode, c'est à dire sur l'erreur maximale, on s'intéresse à son comportement moyen, c'est à dire à l'erreur moyenne.

Parmi les nombreux types d'heuristiques existant, les méthodes d'exploration locale et les algorithmes gloutons sont les plus utilisés:

a- Méthodes d'exploration locale:

Elles partent d'une solution réalisable et essaient de l'améliorer au fur et à mesure, par itérations successives. Le passage d'une solution à une autre peut s'effectuer de deux manières différentes: en opérant la meilleure transformation locale, ou bien en opérant la première transformation pouvant améliorer la solution. La méthode peut alors être "piégée" par un optimum local, au voisinage duquel aucune amélioration n'est possible. Une perturbation de la solution peut être effectuée à ce moment-là, pour s'écarter de l'optimum local.

b- Algorithmes gloutons (Greedy Algorithms):

Au contraire des méthodes d'exploration qui raffinent une solution réalisable, ces algorithmes construisent itérativement leur propre solution. A chaque étape du processus, de nouveaux éléments s'ajoutent à la solution, sans possibilité de retour arrière. Un choix effectué à une itération donnée du processus ne sera donc pas remis en question par la suite.

Ces éléments d'information, qui sont avant tout d'ordre général, sont nécessaires à la bonne compréhension des chapitres suivants. Nous les retrouverons, au besoin, détaillés et adaptés aux différents aspects du problème qui nous préoccupe, à savoir le problème de distribution.

Remarque:

La bibliographie étant essentiellement de langue anglaise, nous avons retenu, afin d'éviter tout problème de terminologie, les appellations d'origine de certaines entités et techniques utilisées dans l'étude. Afin de ne pas surcharger le texte, celles-ci ont été mises en relief simplement en changeant de fonte d'écriture, là où des guillemets auraient été nécessaires autrement.

CHAPITRE II

CLASSIFICATION DES PROBLEMES

ET

RETROSPECTIVE DES TRAVAUX DE RECHERCHE

2.1- INTRODUCTION

Le problème de distribution est rarement perçu comme une entité unique et indivisible. Sa nature même pousse en fait à le décomposer en sous-systèmes, pour mieux l'étudier et surtout pour essayer de lui trouver une solution acceptable.

2.2- ASPECTS DU PROBLEME

1- L'élaboration d'un programme optimal de tournées de livraison et/ou de collecte, connu sous le nom de "*Vehicle Routing Problem*" et noté VRP. Le parcours d'un véhicule à travers un ensemble de points constitue la composante principale des problèmes de tournées, dont la modélisation est intimement liée au problème du voyageur de commerce, ou *Traveling Salesman Problem*, noté TSP.

2- La détermination de la composition optimale de la flotte, problème communément appelé "*The Fleet Size Problem*" et noté FSP.

3- Le problème combinant les deux aspects précédents, soit "*The Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem*", noté FSMVRP.

Lorsque la fonction d'évaluation et les contraintes sont linéaires, ces problèmes peuvent être ramenés à un programme linéaire en nombres entiers, et il devient alors possible de leur appliquer la théorie de la programmation mathématique, moyennant certaines relaxations. Il existe d'autres approches de traitement dont nous citerons certaines par la suite.

2.3- The Traveling Salesman Problem (TSP):

2.3.1- Introduction:

Connu pour le contraste qui existe entre sa formulation somme toute simple, et la difficulté de sa résolution (Karp [32, 33] a montré qu'il est *NP-Complet*), ce problème est peut être celui auquel on a consacré le plus d'efforts en recherche opérationnelle. Il consiste à déterminer l'itinéraire de distance minimale d'un voyageur de commerce qui, partant d'une ville appelée *dépôt*, doit visiter $n-1$ autres villes une et une seule fois chacune et revenir à son point de départ.

On distingue deux cas: le cas *symétrique* ou encore *non orienté*, caractérise par une matrice des distances (plus généralement des coûts) *symétrique*, et le cas *orienté*.

2.3.2- Formulation:

Dantzig, Fulkerson et Johnson [12] ont été parmi les premiers à proposer une formulation du TSP sous forme de *programme linéaire en nombres entiers* (cas *symétrique*). Ils ont alors élaboré un mécanisme de résolution dont le principe de base a été repris et perfectionné par de nombreux chercheurs par la suite: celui de la résolution d'un programme linéaire en nombres entiers par *relaxation de contraintes*. Cette méthode consiste à résoudre un premier *problème relaxé* contenant un nombre restreint de contraintes et à y ajouter graduellement les contraintes non explicitement présentes à mesure que l'on découvre qu'elles sont violées [42].

$$\text{Min } \sum_{i,j} C_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

assujettie a:

$$\sum_i X_{ik} + \sum_j X_{kj} = 2, \quad (k \in N) \quad (2)$$

$$\sum_{i,j \in S} X_{ij} \leq |S| - 1 \quad (S \subset N) \quad (3)$$

$$X_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad (i, j \in N) \quad (4)$$

Ou:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ désigne les villes à visiter, et $C = (C_{ij})$ représente la matrice des distances inter-villes.

X_{ij} (défini pour $i < j$, lorsque C est symétrique) indique si l'arête (i, j) est utilisée ou non dans la solution optimale.

Les contraintes (2), qui sont des contraintes de degré, indiquent qu'un seul et même véhicule rentre et sort de chaque ville.

Les contraintes (3), qui sont des contraintes d'élimination de sous-tours, garantissent que la solution finale sera formée d'un seul tour passant par toutes les villes.

Les contraintes (4), sont dites contraintes d'intégrité.

2.3.3- Approches de résolution

a- Approches exactes

Le principe consiste à déterminer par une méthode donnée (relaxation lagrangienne, méthode des sous-gradients, etc...) des bornes inférieures utilisées par la suite dans une procédure de branch and bound.

On retrouve dans cette catégorie les travaux de Held et Karp, ceux de Christofides, de Hansen et Krarup, etc... (voir [4] pour références).

b- Approches heuristiques

Les plus connues de ces méthodes peuvent être réparties sur trois classes: procédures de construction de tournées (*Tour Construction Procedures*), procédures d'affinage de tournées (*Tour Improvement Procedures*) et procédures mixtes (*Composite Procedures*).

b.1- Procédures de construction de tournées

On y retrouve:

a) *Nearest neighbor procedure*, due à Rosenkrantz, Stearns et Lewis [58], et dont le principe est le suivant:

- étape 1: démarrer la tournée à partir d'un noeud quelconque
- étape 2: trouver le sommet le plus proche du dernier sommet de la tournée et l'ajouter à celle-ci.
- étape 3: répéter l'étape 2 jusqu'à épuisement des sommets, puis joindre le sommet initial au sommet final.

b) *Clark and Wright Savings* [9]: basée sur le principe d'économie, cette procédure agit comme suit:

- étape 1: retenir un sommet quelconque, noté i
- étape 2: calculer les économies $s_{ij} = C_{ii} + C_{jj} - C_{ij}$ pour $i, j = 2, 3, \dots, n$, et les classer en ordre décroissant.
- étape 3: On relie les sommets selon l'ordre ainsi établi.

c) *Insertion Procedures*: Une procédure d'insertion considère une tournée formée de k sommets, à la $k^{\text{ème}}$ itération, et détermine le prochain sommet à insérer (étape de sélection), puis l'endroit de l'insertion (étape d'insertion). Il existe alors plusieurs manières d'insertion:

- *Nearest Insertion*

- étape 1: initialiser la tournée avec le sommet i .
- étape 2: trouver le sommet k tel que C_{ik} est minimal, et former la tournée $i-k-i$.
- étape 3: (sélection) trouver le sommet k le plus proche de la tournée.
- étape 4: (insertion) trouver l'arc (i, j) de la tournée qui minimise $C_{ik} + C_{kj} - C_{ij}$ et insérer k entre i et j .
- étape 5: s'il reste des sommets, aller à l'étape 3.

- *Cheapest Insertion*

Elle est identique à la procédure précédente, sauf que les étapes (3) et (4) sont remplacées par:

étape 3: trouver (i, j) dans la tournée et k à l'extérieur de la tournée tels que $C_{ik} + C_{kj} - C_{ij}$ est minimal

étape 4: insérer k entre i et j .

- *Arbitrary Insertion*

Elle est identique à la procédure de la plus proche insertion sauf que le sommet k est sélectionné arbitrairement puis inséré dans la tournée.

- *Farthest Insertion*

Identique à la procédure de la plus proche insertion, mais considère le sommet le plus éloigné, à l'étape (3), et remplace "minimal" par "maximal", à l'étape (2).

Il existe encore une longue série de procédures d'insertion qu'il serait fastidieux d'énumérer ici: *quick Insertion or Nearest Addition*, *Convex Hull Insertion*, *Greatest Angle Insertion*, *Difference x Ratio Insertion*, etc... Les procédures utilisant des principes différents existent en aussi grand nombre: *Minimal Spanning Tree Approach*, *Nearest Merger*, etc... (voir [4] pour plus de détails).

b.2- Procédures d'affinage de tournées

Les meilleures heuristiques pour le TSP sont probablement celles qui consistent à échanger (permuter) des branches ou arcs dans une tournée. Lin [51, 52] introduisit d'abord les procédures 2-Opt et 3-Opt, puis définit, en collaboration avec Kernighan, la procédure générale r -Opt pour $r \geq 3$. Ces procédures agissent comme suit:

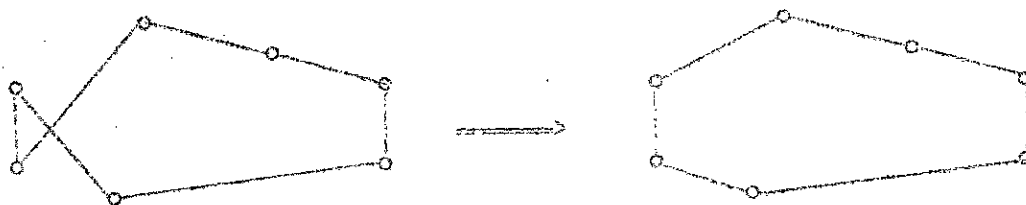
étape 1: trouver une tournée initiale (généralement de manière aléatoire)

étape 2: améliorer la tournée en substituant à un ensemble de r arcs, un autre ensemble de même nombre d'arcs.

étape 3: reprendre l'étape (2) jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement (la solution est alors dite r -optimale).

Pour une tournée donnée comprenant n clients, le nombre de combinaisons à considérer est de l'ordre de n^r , puisqu'il y a C_n^r façons d'enlever r arcs et $r!$ manières de reconnecter les chaînes.

Plus la valeur de r est élevée, meilleure est la solution; mais l'effort de calcul augmente considérablement par la même occasion. Aussi, il est rare que r prenne des valeurs supérieures à 3 dans la pratique.



(figure 2.1)
Illustration d'une opération 2-Opt

La procédure *Or-Opt* développée par Or [55] est similaire en principe, mais considère à la fois toutes les opérations d'échange portant sur deux arcs ou jonctions, et celles qui conduisent à insérer une chaîne d'au plus trois sommets adjacents entre deux autres sommets du graphe. Cette procédure est plus rapide que la première.

b.3- Procédures mixtes

Le principe de base est alors le suivant:

- étape 1: obtenir une tournée initiale, en utilisant l'une des procédures de construction.
- étape 2: lui appliquer la procédure *2-Opt*
- étape 3: lui appliquer la procédure *3-Opt*

Il existe plusieurs variantes qui consistent à ne pas passer par l'une des étapes (2) ou (3), ou à réitérer ces mêmes étapes un certain nombre de fois.

b.4- Méthodes de recherche avec tabous (voir [35]):

On examine successivement les solutions voisines d'une solution donnée et on permet la détérioration de l'objectif pour éviter que le processus ne s'enlise dans un optimum local. Afin d'empêcher le processus de cycler, on interdit les solutions déjà examinées que l'on place dans une liste tabous constamment mise à jour.

b.5- Méthode de "recuit simulé" [28]:

C'est une méthode d'améliorations successives qui tire son nom d'une analogie avec le processus de recuit des matériaux utilisé en mécanique. Pour amener un matériau à un état solide d'énergie minimale, on le chauffe suffisamment jusqu'à ce que les particules soient distribuées aléatoirement dans l'état liquide, puis, afin d'éviter des minima locaux, on en abaisse graduellement la température par paliers, jusqu'à ce que le système atteigne son état d'équilibre à l'intérieur d'un palier donné. A haute température, on peut atteindre tous les états, mais, à mesure que le système refroidit, le nombre de possibilités diminue et le processus finit par converger vers un état stable.

En optimisation combinatoire, on cherchera à passer d'une solution initiale donnée à une solution de coût minimum, en effectuant des modifications graduelles.

2.3.4- CONCLUSION

La complexité du TSP lui a valu l'intérêt de nombreux chercheurs. Il a permis ainsi la mise au point d'une grande variété d'algorithmes de résolution qui ont été étendus aux autres aspects du problème de distribution général, par la suite. Cependant, il n'existe toujours pas d'algorithme exact efficace pour sa résolution.

2.4- The Vehicle Routing Problem (VRP)

2.4.1- Introduction:

Le problème de tournées de distribution, qui permet de modéliser bien des phénomènes n'ayant pas toujours un lien direct ou apparent avec la distribution (câblage de circuits imprimés, ordonnancement de tâches, etc...), consiste à déterminer les itinéraires d'un ensemble de véhicules de même capacité opérant à partir d'un point central, pour assurer la livraison et/ou la collecte de produits en certains points de demande géographiquement dispersés. L'hypothèse de base est que les coûts fixes (liés à l'acquisition de la flotte) ont déjà été supportés, et que seuls les coûts variables (liés aux mouvements de la flotte) doivent être considérés explicitement. L'objectif se trouve donc réduit à minimiser le coût de distribution qui est fonction de la distance totale parcourue par les véhicules. Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des clients desservis par chaque véhicule, et l'ordre selon lequel s'effectuera le parcours, tout en respectant certaines contraintes telles que:

- a- Satisfaction totale de tous les clients,
- b- Limite de charge des véhicules,
- c- Limite sur la durée, le coût ou la longueur du trajet,
- d- Un client ne peut être servi que par un seul véhicule,
- e- Limite sur le nombre d'arrêts, etc ...

Ce problème ne manque pas d'applications pratiques: ramassage scolaire et transport d'handicapés, collecte d'ordures ménagères ou de courrier, distribution de journaux, de produits pétroliers, de lait, etc...

2.4.2- Formulation:

Parmi les nombreuses formulations mathématiques qu'il admet Nous retenons celle proposée par Fisher et Jaikumar [20], sous forme de programme linéaire en nombres entiers.

$$\text{Min } \sum_{i,j,k} c_{ij} x_{ij}^k \quad (1)$$

Sous les contraintes :

$$\sum_i a_i y_{ik} \leq b_k \quad k = 1, \dots, K \quad (2)$$

$$\sum_k y_{ik} = \begin{cases} K, & i = 0 \\ 1, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

$$y_{ik} = 0 \text{ ou } 1, \quad \begin{matrix} i=0, \dots, n \\ k=1, \dots, K \end{matrix} \quad (4)$$

$$\sum_j x_{ij}^k = y_{jk} \quad j = 0, \dots, n \quad (5)$$

$$\sum_j x_{ij}^k = y_{jk} \quad i = 0, \dots, n \quad (6)$$

$$\sum_{i,j \in S \times S} x_{ij}^k \leq |S| - 1 \quad \begin{matrix} S \in \{1, \dots, n\} \\ 2 \leq |S| \leq n-1 \end{matrix} \quad (7) \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} k=1, \dots, K$$

$$x_{ij}^k = 0 \text{ ou } 1 \quad \begin{matrix} i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, n \end{matrix} \quad (8)$$

Notation:

Constantes:

K : nombre de véhicules

n : nombre de clients. Les indices 1 à n désignent les clients alors que l'indice 0 désigne le dépôt.

b_k : capacité (poids ou volume) du véhicule k

a_i : demande du client i

c_{ij} : coût du trajet du client i au client j .

Variables:

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est desservi par le véhicule } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule } k \text{ va du client } i \text{ au client } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les contraintes (2)-(4) sont celles d'un problème d'affectation et assurent que chaque route commence et s'achève au dépôt, que chaque client est desservi par un véhicule, et que la charge supportée par chaque véhicule est inférieure ou égale à la capacité de celui-ci. Si les y_{ik} satisfont à ces contraintes alors pour un k donné, les contraintes (5)-(8) définissent un problème du voyageur de commerce sur les clients desservis par le véhicule k .

Les méthodes de résolution exactes semblent inappropriées pour cette classe de problèmes, en raison de sa nature combinatoire.

Plusieurs variantes peuvent être considérées (voir Bodin et al. [3,4]):

- a) Taille de la flotte disponible:
 - un seul véhicule
 - plusieurs véhicules
- b) Composition de la flotte disponible:
 - homogène (un seul type de véhicules)
 - hétérogène (plusieurs types de véhicules)
- c) Nombre de dépôts:
 - dépôt unique
 - plusieurs dépôts
- d) Nature de la demande:
 - déterministe
 - aléatoire
- e) Localisation de la demande:
 - sur les sommets (pas nécessairement tous)
 - le long des arcs (pas nécessairement tous)
 - mixte
- f) Nature du réseau:
 - dirigé
 - non dirigé
 - mixte
 - euclidéen
- g) Capacité des véhicules:
 - imposée, identique pour tous les véhicules
 - imposée, et variant avec les types des véhicules
 - non imposée
- h) Durée (coût ou longueur) maximale d'une tournée:
 - fixée, et identique pour tous les véhicules
 - fixée pour chaque type de véhicules
 - non imposée

i) Opération:

- ramassage (collecte) uniquement
- distribution (livraison) uniquement
- mixte
- satisfaction totale ou partielle de la demande

j) Lieu:

- sur les sommets
- le long des arcs
- mixte

k) Coûts:

- variables
- fixes et coûts d'acquisition
- location

l) Objectif:

- minimiser le coût total de distribution
- minimiser la somme des coûts fixes et des coûts variables
- minimiser le nombre de véhicules utilisés
- améliorer la qualité du service

2.4.3- Approches de résolution:

Dans leur ouvrage de référence, "Routing and Scheduling of Vehicles and Crews - The State of The Art", Bodin, Golden, Assad et Ball [14] font le tour des principales approches mises au point aussi bien dans le cas où le dépôt est unique, que dans celui utilisant plusieurs dépôts. Un autre travail de synthèse a été entrepris par Golden et Assad [26] dans un récent ouvrage intitulé "Vehicle Routing: Methodes and Studies". Il nous suffira donc, pour fixer les idées, de donner un bref aperçu sur les méthodes les plus utilisées.

Laporte et Nohert [39], répartissent ces algorithmes en trois catégories principales: recherche directe, programmation dynamique, et programmation linéaire en nombres entiers (ILP). Bodin, et al. proposent une classification encore plus développée: *cluster first-route second*, *route first-cluster second*, *savings/insertion*, *improvement/exchange*, *mathematical-programming based*, *interactive optimization*, et enfin, *exact procedures*.

* *Cluster first-Route second*: dans une première étape, les clients sont regroupés en *clusters* selon leur répartition géographique. Chaque *cluster* sera ensuite considéré comme un problème de TSP, dont la

résolution donne les tournées des véhicules. Il existe plusieurs variantes de cette procédure, selon la manière dont sont formés les clusters (plus proche voisin, etc...). La procédure de Gillett et Miller [23], *the sweep approach*, qui utilise ce principe, reste efficace pour des problèmes comprenant jusqu'à 250 noeuds.

* *Route first-Cluster Second*: on procède cette fois-ci dans le sens inverse. On commence par former une tournée géante (généralement non admissible) regroupant tous les clients, tournée que l'on partitionne par la suite en routes plus courtes mais réalisables. Les travaux de Beasley [1] illustrent parfaitement cette approche.

* *Improvement/Exchange procedures*: En s'inspirant de la procédure *r-Optimale* initialement développée par Lin puis mise au point par Lin et Kernighan [52], Christofides et Eilon [6], et enfin Russel [59] ont développé une procédure qui, tout en maintenant la réalisabilité, s'efforce de trouver une solution optimale. La solution est transformée itérativement de manière à en réduire le coût. Le processus s'arrête lorsque ce coût devient stationnaire. L'algorithme des *savings* développé par Clarke et Wright [9] est un exemple particulier de ces procédures, puisqu'à chaque itération un ensemble de tours est échangé contre un autre. Cet algorithme sera décrit en détail par la suite, en raison de son utilisation dans la présente étude pour la validation de certains résultats.

* *Mathematical Programming Approaches*: L'exemple type de ces procédures est celui proposé par Fisher et Jaikumar [20]. Dans cette formulation, le problème est ramené à deux composantes de base: un TSP pur (*routing*), et un problème d'affectation généralisé (*packing*). L'algorithme de Krolak et Nelson utilise le même principe, alors que Christofides, Mingozzi et Toth [8], Stewart et Golden [64] recourent à une relaxation Lagrangienne. Christofides et al. utilisent la programmation mathématique (en particulier la programmation dynamique) pour évaluer une borne inférieure de plusieurs problèmes combinatoires liés à la distribution. Stewart et Golden proposent un algorithme basé sur le principe de pénalités (problème Lagrangien). Les contraintes de capacité

sont alors "incorporées", avec un multiplicateur, dans la fonction objective pour pénaliser les tournées violant la contrainte de capacité.

* *Interactive Optimization*: L'opérateur humain participe interactivement dans le processus de résolution. Cet opérateur peut alors modifier des paramètres ou incorporer des *facteurs subjectifs* basés sur son expérience et son intuition. Il est évident que la solution peut alors varier de manière sensible, selon les paramètres injectés. De plus, par leur aspect interactif, ces algorithmes se limitent souvent au traitement des problèmes de petite et moyenne taille, en raison du temps que peut nécessiter chaque itération. Nous citons à titre d'exemple les travaux de Waters [66] dans ce domaine.

* *Exact procédures*: Elles sont basées sur le principe de séparation et évaluation (*branch and bound*), sur la programmation dynamique, ou encore sur le principe des plans sécants (voir les travaux de Christofides et al. [8] pour plus de détails). On peut citer, à titre d'exemple:

1- Algorithmes de recherche directe:

Ils consistent à construire séquentiellement des routes en explorant une arborescence générée par *branch and bound*. Deux stratégies de base sont alors utilisées:

- *Branchement sur arcs*: une branche correspond à l'inclusion ou à l'exclusion d'un arc.

- *Branchement sur route*: la branche correspond alors à une route admissible.

Pour les deux approches, on calcule pour chaque sous-problème une borne inférieure sur le coût de la solution optimale. La progression dans une branche de l'arborescence se termine lorsque cette borne est au moins égale à la meilleure solution connue, ou lorsque le sous-problème est irréalisable. Il est donc utile d'entamer le processus avec une

bonne solution réalisable (obtenue à l'aide d'un algorithme approximatif). Ces algorithmes sont, de manière générale, assez flexibles et permettent de prendre en compte une grande variété de contraintes. En fait, comme il s'agit de méthodes constructives, leur efficacité s'améliore à mesure que le nombre de contraintes augmente puisque le développement de l'arbre d'énumération devient alors plus restreint (voir [39] pour références).

2- Programmation dynamique:

Beaucoup d'auteurs ont appliqué la programmation dynamique au VRP. La formulation générale proposée par Elion et al. [16] en est l'exemple type. Cette formulation est cependant d'un intérêt pratique généralement limité, en raison du nombre important d'états considérés. Toutefois, les performances de ce genre d'algorithmes peuvent être améliorées considérablement par les techniques de relaxation (*state-space relaxation* de Christofides et al.) ou encore par l'élimination d'états non admissibles (Desrosiers et al.). Christofides rapporte que des problèmes du type *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP) comprenant jusqu'à 50 noeuds peuvent être facilement résolus ainsi (voir [39]).

3- Programmation linéaire en nombres entiers (ILP):

Les algorithmes utilisant une formulation en programme linéaire en nombres entiers sont de loin les plus utilisés. Ils se répartissent, à leur tour, en deux classes :

- partitionnement d'ensemble (voir [39] pour les détails).
- modèles basés sur l'étude du flux de produits ou de véhicules dans le système (voir Laporte et Nobert [43, 46]).

2.4.4- Conclusion

Les approches de résolution du VRP avec dépôt unique sont nombreuses et variées. Simulation, programmation linéaire en nombres entiers, et programmation heuristique s'y sont tour à tour essayées, avec plus ou

moins de bonheur. L'utilisation de méthodes de résolution exactes semble cependant inappropriée pour cette classe de problèmes. Aussi, les approches utilisées dans ce contexte sont-elles essentiellement du type heuristique. Par ailleurs, il serait faux de croire que le problème a été entièrement couvert, et qu'il existe des méthodes générales pouvant traiter avec efficacité tous ses aspects. Néanmoins, les ordinateurs de plus en plus puissants et rapides, permettent aujourd'hui de considérer certaines contraintes autrefois relaxées, et de se rapprocher de la réalité dans toute sa complexité: flotte de véhicules hétérogène, coûts fixes et coûts variables différents pour des véhicules de types, de tonnage ou d'âge différents, demande aléatoire, fenêtres de temps de distribution, etc ... De plus, la majorité des travaux portent sur des cas de flotte homogène et procèdent parfois par simplification. Tout laisse donc croire que cet axe de recherche, loin d'être entièrement exploré, continuera à être prospecté pendant longtemps encore.

2.5- The Fleet Composition Problem (FCP)

2.5.1- Présentation:

La détermination de la taille optimale de la flotte et le nombre de véhicules de chaque type est un problème stratégique. d'autant plus que les coûts fixes représentent une grande proportion du coût de distribution, allant jusqu'à 80% du coût total, selon Elion et al. [16]. Utile en période de pointe, une flotte importante peut être insuffisamment exploitée le reste du temps. Il convient alors de la dimensionner de la manière la plus exacte possible.

Dans certains cas, les véhicules peuvent provenir de deux sources différentes: achat ou location, et il s'agit alors de réaliser le compromis entre les coûts dus aux véhicules achetés et ceux des véhicules loués.

2.5.2- Approches de résolution:

A l'inverse des problèmes de localisation de dépôts et d'élaboration de tournées de véhicules, le problème de détermination de la flotte optimale a relativement moins retenu l'attention des chercheurs. Les travaux effectués dans ce domaine peuvent être répartis entre deux classes:

* Ceux ayant trait au problème où les types des véhicules sont fixés. La décision est alors le nombre exact de véhicules de chaque type (*vehicle fleet size problems*).

* Ceux traitant les deux aspects du problème: détermination des types de véhicules et du nombre de véhicules de chaque catégorie (*vehicle fleet composition problems*).

La plupart des études portent alors sur les problèmes de la première classe. Etezadi et Beasley [18] rapportent l'ensemble des travaux effectués dans ce contexte: Kirkby tente d'équilibrer entre les coûts d'acquisition et ceux de location dans le cadre du transport ferroviaire, en ne considérant qu'un seul type de véhicules. Son étude a été développée par la suite par Wyatt, lequel y a introduit des coûts variables de distribution. Plus tard, Gould s'est attaqué au problème des flottes hétérogènes, et l'a formulé sous forme de programme linéaire. Mole utilise quant à lui la programmation dynamique pour dimensionner la flotte. Il a suggéré une formulation dans laquelle la variable de décision pour chaque période de planning n'est autre que la taille de la flotte propre à la compagnie, cherchant par là à identifier les périodes pour lesquelles des décisions d'achat devaient être prises. New a développé un modèle linéaire tenant compte du phénomène d'obsolescence technologique de l'équipement. A la différence des autres chercheurs, il n'a pas fait abstraction de l'influence de l'âge sur le coût de la maintenance et d'amortissement ainsi que sur le prix de vente du véhicule. Maskell adopte la simulation pour déterminer la taille optimale de la flotte, mais en considérant un seul type de véhicules uniquement. Levy et al. ont formulé le problème de composition de la flotte sous forme de programme linéaire en nom.

entiers pour lequel ils ont mis au point certaines heuristiques basées sur le concept des *savings* de Clarke et Wright. Enfin, Etezadi et Beasley ont développé un modèle mathématique mixte (utilisant à la fois des variables discrètes et des variables continues) qui permet d'examiner différentes compositions de flotte, sans recourir pour autant à la simulation qui nécessite un temps considérable dans ce cas précis, vu le nombre immense de combinaisons possibles (voir [18] pour références).

2.5.3- Conclusion

Les chercheurs accordent beaucoup plus d'importance au problème d'élaboration de tournées qu'à celui de détermination des flottes optimales (taille et composition), malgré le poids relatif des coûts fixes dans les frais de distribution. L'aspect opérationnel semble primer sur l'aspect stratégique. Pourtant, le choix initial de la flotte et de sa taille effective est un facteur déterminant. De plus, les problèmes de tournées ne font qu'optimiser l'utilisation des véhicules.

Par ailleurs, il n'existe pas d'approche exacte tenant compte de tous les aspects du problème, ce qui est sans nul doute dû à la complexité de celui-ci.

2.6- The Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem (FSMVRP)

2.6.1- Introduction:

Les deux aspects du problème de distribution relatés dans les sections précédentes faisaient intervenir en priorité, soit la composante variable (problème de tournées uniquement), soit la composante fixe du coût total de distribution (problème de détermination de flotte, uniquement). Il est évident que ces deux aspects s'influencent mutuellement, et que toute tentative d'optimisation "séparée", c'est à dire qui ne les prend pas en compte globalement et simultanément, conduirait par conséquent à des solutions sous-optimales. En effet, la composition et la taille optimales de la flotte ne peuvent pas se fonder uniquement sur les demandes des clients, et négliger leur

répartition géographique. De même, les tournées de véhicules sont tributaires de la composition et de la taille de la flotte. Il serait donc opportun de les incorporer dans un même problème.

Le problème FSMVRP répond à ce double objectif. Il se propose ainsi d'optimiser *simultanément* et la composition (en nombre et en types) de la flotte, et la distance totale parcourue, cherchant par là à "concilier" entre coûts fixes et coûts variables.

2.6.2- Formulation mathématique du problème:

Gheysens, Golden et Assad [22] proposent la formulation mathématique suivante (programme linéaire en nombres entiers):

$$\text{Min} \sum_{k=1}^T f_k \sum_{j=1}^n x_{0j}^k + \sum_{k=1}^T \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij}^k \quad (1)$$

Sous les contraintes:

$$\sum_{k=1}^T \sum_{i=0}^n x_{ij}^k = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{i=0}^n x_{ij}^k = \sum_{i=0}^n x_{ji}^k, \quad j = 0, \dots, n; k = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^n y_{ij} - \sum_{i=0}^n y_{ji} = d_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$y_{0j} \leq \sum_{k=1}^T Q_k x_{0j}^k, \quad j = 1, \dots, n \quad (5)$$

$$y_{ij} \leq M \sum_{k=1}^T x_{ij}^k, \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad i \neq j = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad i \neq j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, T \quad (8)$$

Où:

n : Nombre de clients dans le système

T : Nombre de types de véhicules

Q_k : Capacité du véhicule k ($Q_1 < Q_2 < \dots < Q_T$)

f_k : Coût fixe associé au véhicule de type k

d_j : Demande du client j
coût de la maison

c_{ij} : ~~Distance~~ entre i et j (0 représente le dépôt)

M : Un grand nombre

sont les données du problème. Les variables de décision sont:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule } k \text{ va de } i \text{ à } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

y_{ij} : flot de marchandises de i à j

On suppose de plus que le nombre de véhicules d'un type donné est illimité.

Interprétation des contraintes:

Le terme $\sum_{j=1}^n x_{0j}^k$ représente le nombre total de véhicules de type k dans la flotte. Le premier terme de (1) représente les coûts fixes et le second la composante variable. Cette formulation suppose un coût variable unitaire égal à 1.

Les contraintes (2) et (3) assurent qu'un et un seul véhicule va à un noeud et en repart.

La contrainte (4) représente le mouvement de marchandises et garantit que toutes les demandes des clients seront satisfaites.

La contrainte (5) assure que le chargement y_{0j} n'excèdera pas la capacité du véhicules.

La contrainte (6) assure qu'aucune marchandise ne va de i à j si aucun véhicule n'emprunte cette liaison ($x_{ij}^k = 0, \forall k=1, \dots, T$). M est choisi assez grand pour que la contrainte devienne redondante si $\sum_{k=1}^T x_{ij}^k = 1$.

La spécification complète de toutes les variables x_{ij}^k détermine simultanément la composition de la flotte et les tournées optimales.

La multiplication des contraintes et la présence de plusieurs types de véhicules et coûts fixes, rend ce problème particulièrement difficile à résoudre. En fait, la formulation de ce problème dans le contexte de la programmation mathématique est d'un intérêt pratique fort limité, car elle ne permet pas sa résolution par les méthodes exactes connues, en raison de sa complexité. Ceci explique le fait que les approches de résolution soient toutes du type heuristique. La simulation sur ordinateur est parfois utilisée pour évaluer certaines options, mais les techniques analytiques restent encore à mettre au point.

2.6.3- Approches de résolution:

L'approche la plus utilisée consiste à adapter le concept des *savings* de Clarke and Wright [9] développé pour le VRP. Remarquons d'abord que l'application de ce principe (fusion de tournées après calcul des économies exprimées par $S_{ij} = C_{oi} + C_{oj} - C_{ij}$) qui ignore le coût fixe des véhicules, conduit à combiner les tournées jusqu'à saturation des véhicules de plus forte capacité. Malheureusement, une flotte composée uniquement de véhicules de plus forte capacité n'est pas nécessairement la plus appropriée. Afin d'éviter ce problème, il convient d'inclure les coûts fixes associés aux véhicules. Ceci donne naissance à plusieurs variantes que nous retrouverons avec plus de détails par la suite : *Combined Savings (CS)*, *Optimistic Opportunity Savings (OOS)*, et *Realistic Opportunity Savings (ROS)*.

D'autres approches sont souvent utilisées en la matière. Citons en particulier celles du type *Route first-Cluster second*. Ce sont des procédures à deux étapes. D'abord, une procédure est utilisée pour générer un tour géant (*Giant Tour*) visitant tous les clients une et une seule fois. Ensuite, le tour ainsi obtenu est partitionné en tournées

satisfaisant les contraintes du problème (capacité des véhicules, distance maximale ou autre). Le succès de cette approche est dû à la procédure de partitionnement, qui transforme le problème en sous-problèmes de recherche du plus court chemin, qui sont de taille réduite et donc moins difficiles à résoudre. Les différentes versions du GT se distinguent essentiellement par la manière dont est formé le tour géant initial.

Citons aussi les travaux de Gheysens, Golden et Assad [21] qui s'appuient sur une configuration de flotte obtenue par une procédure dite *Lower Bound* initialement développée par Golden et al. [26], laquelle est ensuite répartie entre certains clients "périphériques" de la manière suivante: au plus éloigné des clients, on affecte le plus gros tonnage; au suivant, le second, etc... L'affectation des autres clients aux véhicules ainsi dispatchés se fait selon le concept d'affectation généralisée de Fisher et Jaikumar [20].

Salhi et Rand [63], quant à eux, procèdent par perturbation d'une solution initiale, en vue de l'améliorer. Une solution utilisant une flotte de véhicules homogène est transformée progressivement de manière à utiliser une flotte hétérogène. La solution initiale est obtenue à l'aide de leur heuristique développée pour le VRP classique.

Récemment, Desrochers et Verhoog [13, 14] ont développé une approche utilisant le même principe des savings défini par Golden et al., dans laquelle le couplage de poids maximum permet de choisir la meilleure fusion de tournées (flotte hétérogène).

Les seuls algorithmes exacts connus sont dûs à Laporte et al. [38-48], et utilisent tous une flotte homogène. Ces auteurs ont d'abord considéré le problème de localisation d'un dépôt et de construction de tournées, puis le cas plus général nécessitant la localisation de plusieurs dépôts avec l'élaboration simultanée de tournées de distribution. Le premier problème a été formulé sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers, puis résolu avec une méthode de relaxation de contraintes. L'intégralité est obtenue par *Branch and Bound*. Dans une autre étude, ce sont les plans sécants de Gomory (*Gomory cutting planes*) qui assurent l'intégralité.

Dans une dernière étude, enfin, Laporte, Nobert et Taillefer [13] recourent à une représentation du problème sous forme de graphe étendu. La transformation est telle que chaque solution réalisable correspond à un ou plusieurs circuits Hamiltoniens dans le nouveau graphe. Elle conduit à résoudre un ensemble de problèmes d'affectation au lieu du problème initial. Les solutions optimales s'obtiennent par la méthode de *branch and bound*, avec relaxation des contraintes d'élimination de sous-tours et de chaînes. De cette manière, des problèmes comprenant jusqu'à 80 noeuds peuvent être résolus sans difficulté.

2.6.4- Conclusion

En dépit de la longueur de la liste d'approches donnée plus haut, en fait peu de chercheurs se sont intéressés à ce problème. Ceci s'explique en grande partie par le fait que le principe de résolution simultanée des deux aspects flottes/tournees n'est pas entièrement acquis. Les natures différentes de ces deux aspects, l'un étant d'ordre stratégique, et l'autre d'ordre opérationnel, font que beaucoup de chercheurs hésitent à les aborder conjointement. Dans de pareilles circonstances, il est normal que le problème ne soit pas encore entièrement couvert. De plus, La quasi-totalité des études ne considèrent que le problème du dépôt unique, même lorsque le problème est réduit au seul aspect d'élaboration de tournées.

CHAPITRE III

FORMULATION DU PROBLEME ETUDIE

ET

PRESENTATION DES METHODES DE RESOLUTION ADOPTEES

3.1- Introduction

Parmi les trois aspects fondamentaux (VRP, FSP, FSMVRP) cites, nous allons nous interesser a la classe de problemes la plus generale, soit "The Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem". En raison de leur complexite, ces problemes font souvent l'objet de simplifications, dont l'une des plus importantes est d'associer un meme cout unitaire de distribution (c.v.u) a tous les vehicules, sans distinction d'aucune nature.

L'objet de ce chapitre est de definir quelques approches de resolution du FSMVRP et de les valider sur un certain nombre de problemes tests de reference, qui serviront a mettre en evidence l'impact du cout variable de distribution sur la solution.

A travers les resultats donnees par quatre methodes heuristiques definies plus loin, nous tenterons d'etudier l'impact du c.v.u sur la solution du probleme. Certains autres parametres, tels que la contrainte sur la longueur maximale d'une tournée, seront pris en consideration. Plusieurs variantes seront ainsi examinees, et illustrees par des resultats numeriques.

3.2- Modele mathematique considere et approches de resolution

Le modele retenu est celui defini par Cheysens, Golden et Assad [22] qui considere la fonction objective suivante:

$$\text{Min} \sum_{k=1}^T f_k \sum_{j=1}^n x_{0j}^k + \sum_{k=1}^T \sum_{l=0}^n \sum_{j=0}^n c_{lj} x_{lj}^k \quad (3.1)$$

Le problème étant assujéti aux contraintes classiques déjà définies en section 2.6.2.

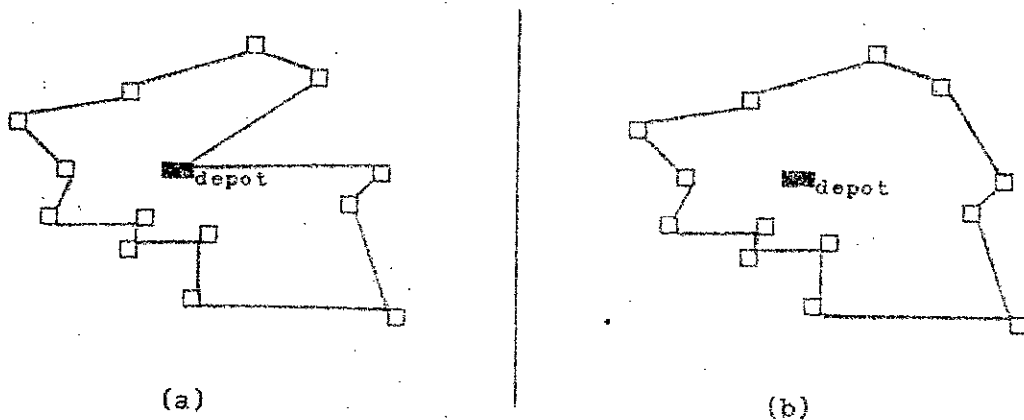
Approches de résolution:

Pour la résolution de ce problème, deux familles d'heuristiques ont été particulièrement développées: celles des tours géants (*Giant Tour*), et celles des *Savings*.

3.3- ALGORITHMES DE PARTITIONNEMENT DE TOUR GEANT

Le principe de ces méthodes a été introduit par Gillett et Miller [23]. Du type *Routes first-Cluster second*, ces algorithmes se déroulent en deux phases:

1- Dans la première, une *tournée géante* est formée en utilisant une méthode quelconque. Cette tournée passe une et une seule fois par chaque client. Selon qu'elle transite ou non par le dépôt, nous obtenons deux variantes différentes:



(figure 3.1)

Formation d'un tour géant
 a- Passant par le dépôt
 b- Ne passant pas par le dépôt

2- La deuxième phase consiste, quant à elle, à partitionner la tournée géante ainsi obtenue, en un certain nombre de tournées qui sont réalisables, à l'inverse de la tournée mère. Pour cela, il faut d'abord construire le graphe associé à l'aide des arcs valués correspondants aux différentes routes possibles. Les couts associés aux arcs sont les couts des routes en question. La procédure de partitionnement transforme le problème initial en sous-problèmes de recherche du plus court chemin, au sens qui sera défini plus loin. Ces problèmes sont de taille relativement réduite et donc moins difficiles à résoudre.

Les tournées de distribution finales épousent le contour de la tournée géante générée au départ. Autrement dit, des tournées géantes initiales différentes engendreront des solutions différentes. En fait, une même tournée peut donner naissance à plusieurs solutions distinctes, selon le sens dans lequel s'effectue le partitionnement (dans le sens des aiguilles d'une montre, ou dans le sens contraire), et selon le sommet de départ. Cet aspect sera repris et développé par la suite.

3.3.1- Variantes considérées:

3.3.1.a- SGT:

La première de ces variantes, dite *Single Giant Tour (SGT)* ou encore *Single Tour Partitioning Algorithm (STPA)*, démarre à partir du dépôt, visite l'ensemble des clients, puis revient enfin au dépôt.

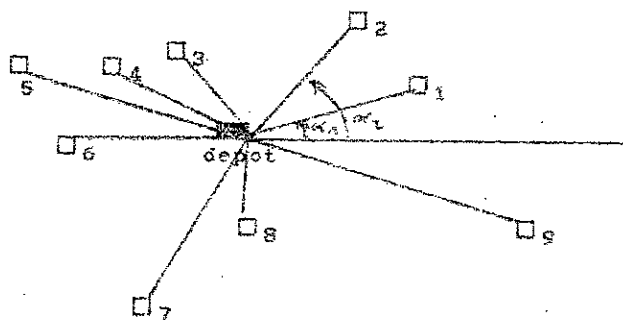
3.3.1.b- MGT:

La deuxième variante, dite *Multiple Giant Tour (MGT)* ou encore *Multiple Tour Partitioning Algorithm (MTPA)*, fait le tour de l'ensemble des clients, sans passer par le dépôt. Pour n clients, ce procédé autorise ainsi la formation de n tours géants, selon que l'on joint le dépôt à l'un ou l'autre de ces clients. Une fois cette jonction faite, nous retrouvons en fait la première variante.

De nouvelles variantes peuvent être obtenues, dans un cas comme dans l'autre, selon la manière dont on construit la tournée géante. Les méthodes les plus courantes sont alors:

* *Génération aléatoire*: On passe par l'ensemble des clients dans un ordre aléatoire (le hasard fait bien les choses parfois!).

* *"Tri angulaire" (Sweep)*: Vus à partir du dépôt, les clients sont triés selon les angles polaires croissants, conformément au mécanisme défini par Gillet et Miller [23]. Cette méthode nécessite la connaissance des coordonnées exactes des clients.



(figure 3.2)

Tri "angulaire"

* *TSP*: La tournée est obtenue par résolution d'un problème du voyageur de commerce. Il est évident que cette méthode ne peut être appliquée qu'aux problèmes de petite taille.

* *r-Opt*: La tournée est générée aléatoirement puis rendue *r-optimale*, selon le concept défini par Lin [51]. De la même manière, la longueur de la tournée pourra être réduite en utilisant la procédure *Or-Opt* développée par Or [55].

3.3.2- Algorithme de base des méthodes de partitionnement de tour:

Notation:

Pour plus de clarté, et afin de formaliser l'écriture, nous allons adopter la notation suivante:

N_c : nombre de clients dans le système
 N_t : nombre de types de véhicules
 $Q(i)$: demande du client i , $i=1, \dots, N_c$
 $Y(i)$: capacité du véhicule i , $i=1, \dots, N_t$
 $F(i)$: coût fixe associé au véhicule de type i , $i=1, \dots, N_t$
 C_{ij} : coût de la liaison (i, j)
 $0 \leq i, j \leq N_c$
 Le client 0 représente le dépôt.

$T_c(k, m)$: coût total (fixe et variable) de distribution associé à la route commençant et s'achevant au dépôt (note 0) et formée successivement des clients $(k, k+1, \dots, m)$.

Considérons maintenant le parcours formé des clients:

$(k, k+1, \dots, m-1, m)$.

La demande totale de ces clients est donnée par $D = \sum_{i=k}^m Q(i)$

Notons par L_{km} l'expression:

$$L_{km} = C_{0k} + \sum_{i=k}^{m-1} C_{i,i+1} + C_{m0}$$

Nous pouvons alors écrire :

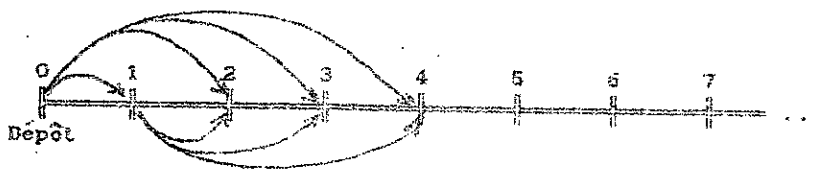
$$\text{SI } \left\{ D > \max_{i=1, \dots, N_t} \{ Y(i) \} \text{ OU } L_{km} > C_{\max} \right\}$$

ALORS $T_c(k, m) = \infty$

SINON $T_c(k, m) = F(s) + L_{km}$

avec s tel que: $Y(s-1) < D \leq Y(s)$

C_{\max} étant le seuil maximum autorisé.



Processus de partitionnement
(figure 3.3)

Le processus se déroule de la manière suivante:

A- Génération du tour géant initial:

Les clients sont puisés un à un, aléatoirement, et forment le parcours initial dont les deux extrémités coïncident avec le dépôt. La longueur de ce parcours est ensuite optimisée en utilisant la procédure *r-Opt* de Lin (*2-Opt* suivie de *3-Opt*).

B- Construction du graphe valué:

Ce graphe est donné par sa matrice d'adjacence sommet-sommet, les sommets représentant ici les clients. C'est une matrice symétrique à $(Nc+1)$ lignes. Ses éléments sont déterminés comme suit:

$$G_{ij} = Tc(i, j) \text{ tel que défini précédemment, avec} \\ 0 \leq i, j \leq Nc$$

La tournée $\{0, i, i+1, \dots, j-1, j, 0\}$ est donc réalisable si $G_{ij} < \infty$, c'est à dire si:

1- Il existe un véhicule de capacité suffisante pour desservir d'un seul coup tous les clients de la tournée (on retiendra celui dont la capacité est la plus faible).

$$2- L_{ij} \leq C_{\max}$$

Il s'agit de démarrer à partir d'un sommet donné de la tournée géante et de desservir autant de clients (pris selon leur disposition dans la tournée géante) que possible. La demande totale des clients ainsi traités détermine alors le type du véhicule utilisé. Lorsqu'il n'est plus possible d'adjoindre de nouveaux clients à la tournée en cours de construction, celle-ci est "refermée" en réalisant la jonction entre le dernier sommet visité et le dépôt. Le processus reprend ensuite à partir du client suivant (c-à-d le premier client non encore traité dans la tournée géante).

Une fois la matrice des coûts construite, il s'agira de résoudre le problème de chemin optimal obtenu. Grâce à l'incorporation à la fois des composantes fixe et variable du coût total de distribution, la solution de ce problème donnera en même temps la flotte et les routes optimales.

C- Résolution du problème de chemin optimal:

Il existe plusieurs méthodes permettant l'obtention du chemin optimal, caractérisé ici par la longueur minimale, dans un graphe tel que celui-ci, dans lequel tous les arcs sont à valeur strictement positive. Nous avons retenu celle de Dijkstra [15] pour ses performances et la simplicité de sa mise en oeuvre.

La solution obtenue donne aussi bien la composition de la flotte que les différentes tournées. Chaque tournée est alors caractérisée par le véhicule associé et le taux de remplissage de celui-ci, les clients desservis et l'ordre de parcours, et enfin la longueur et le coût de la tournée.

D- Sauvegarde de la solution optimale:

La solution est enfin comparée à "l'optimum courant", afin d'être éventuellement retenue, puis le processus reprend, si cela est nécessaire, à l'étape (A).

Remarque 1:

Le critère de sélection des solutions joue un rôle capital dans le processus de résolution: s'agit-il de retenir la solution de coût minimal, celle utilisant la plus petite flotte, celle qui minimise la distance totale à parcourir, ...?

Une solution de coût $C1$, utilisant une flotte $F1$ de taille $T1$ pourra être préférée à une autre solution de coût $C2$, utilisant une flotte $F2$ de taille $T2$ même si $C1 > C2$, pourvu que:

$$\begin{aligned} C1 - C2 &< \Delta C \quad \text{et} \\ T2 - T1 &> \Delta T \end{aligned}$$

ΔC et ΔT restant à déterminer.

Evidemment, d'autres critères "mixtes" peuvent être imaginés, avec l'éventualité d'aboutir à des solutions différentes. En règle générale, la présence d'objectifs multiples qui sont de surcroît conflictuels (par exemple, le recours à un véhicule de capacité supérieure entraîne le rallongement de la longueur de la tournée, alors même qu'il réduit les coûts fixes) complique la décision à prendre. Il serait donc intéressant

de retenir tout un ensemble d'alternatives (par exemple les n meilleures, avec $n \geq 2$) au lieu de la classique solution unique, ce qui répondra certainement aux vœux du décideur.

L'organigramme de cette procédure est illustré par la figure (figure 3.4).

Dans le cas de MGT, le tour géant initial est généré aléatoirement, puis optimisé de la même manière que dans la variante précédente (2-Opt/3-Opt). Les deux sens de parcours sont explorés alternativement, chaque sens pouvant donner naissance à N_c tours géants, N_c étant le nombre total de clients dans le système. Il suffit pour cela de commencer le parcours à partir du client 1, puis une fois le processus terminé, d'effectuer un décalage circulaire, de manière à placer le client $(i+1)$ en tête de parcours et le client i en fin de celui-ci. Pour les problèmes de petite taille, il est possible de passer en revue de manière exhaustive tous ces tours géants. Cependant, lorsque la taille du problème augmente, le temps de calcul devient prohibitif et l'exploration devra se restreindre à un nombre limité de ces tours. Le client de tête sera alors sélectionné aléatoirement.

Tous les résultats qui suivent dans la première partie de cette étude (système à dépôt unique) ont été obtenus en effectuant:

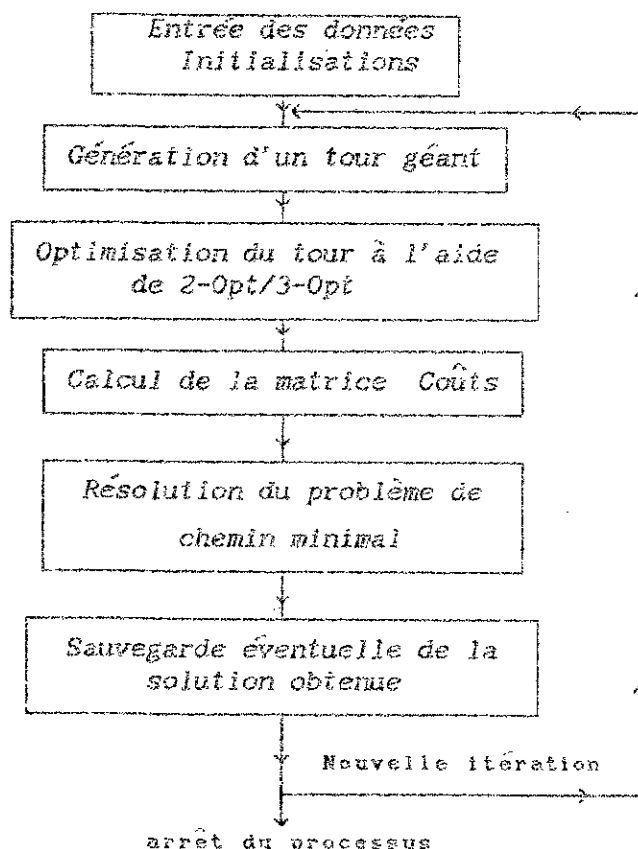
25 tours géants dans le cas de SGT,

05 tours géants dans le cas de MGT, avec la différence que le tour géant, généré ici sans le dépôt, est exploité de nombreuses fois: 10 fois dans un sens, et 10 dans l'autre. Les 20 clients qui servent de départ sont choisis aléatoirement. Ces nombres ont été fixés de manière à ce que les résultats obtenus soient comparables aux résultats de référence.

Remarque 2:

Le résultat de ces algorithmes (qui sont des heuristiques) est en grande partie tributaire du nombre d'itérations fixé. Se pose alors le problème de détermination d'une *bonne valeur* de ce nombre, car l'effort de calcul (et par conséquent le temps de traitement) en dépend fortement et directement. De plus, il n'est pas évident qu'en le fixant à un seuil élevé, le résultat final sera significativement meilleur que pour une valeur inférieure: le processus peut converger vers un optimum local au

bout des toutes premières itérations et stagner à son voisinage pendant un grand nombre d'itérations ultérieures, occasionnant une perte de temps inutile. A l'inverse, si le nombre d'itérations est trop faible, le processus risque d'être interrompu avant l'obtention d'une *solution satisfaisante*. Dans l'absolu, le nombre d'itérations du processus ne peut pas servir de critère d'arrêt objectif. La connaissance d'une *bonne* borne inférieure peut seule permettre d'apprécier la *qualité relative* de la solution courante et par-là même de décider l'interruption éventuelle du traitement, encore que cette borne doit être déterminée de manière *suffisamment fine*.



(figure 3.4)

Organigramme général de la méthode SGT

3.3.3- Mise en oeuvre et validation des algorithmes de résolution:

Les différents algorithmes ont été implantés sur un Micro VAX II, en langage FORTRAN 77. La validation a porté sur les mêmes problèmes

tests utilisés par Golden et al. pour prouver l'efficacité de leurs approches [27]. Ces problèmes, qui sont devenus une référence en la matière, sont de taille variable. Le nombre de clients varie entre 12, pour le plus petit problème, et 100 pour le plus grand d'entre-eux (voir annexe A). Diverses configurations de flottes y sont utilisées.

Les tableaux suivants (3.1 et 3.2) donnent une idée sur la qualité des solutions obtenues par les algorithmes de partitionnement adaptés.

Tableau comparatif: SGT, MGT et Golden et al. [27]

1- Coûts

Pb.	Taille	SGT	MGT	Opt	Dev ₁ %	Dev ₂ %
1	12	622	610	602 *	-3.49	-1.33
2	12	722 *	722 *	722 *	0.00	0.00
3	20	961 *	974	965	0.41	-0.93
4	20	7300	7300	6446 *	-13.25	-13.25
5	20	1009 *	1024	1013	0.39	-1.09
6	20	7349	7069	6522 *	-12.69	-8.39
7	30	7461	7408	7298 *	-2.23	-1.51
8	30	2359	2370	2349 *	-0.43	-0.89
9	30	2249	2239	2220 *	-1.30	-0.86
10	30	2382	2382	2368 *	-0.59	-0.59
11	30	4797	4826	4763 *	-0.71	-1.32
12	30	4191	4264	4112 *	-1.92	-3.69
13	50	2430 *	2445	2438	0.33	-0.29
14	50	9592	9136	9132 *	-5.03	-0.04
15	50	2657	2654	2640 *	-0.64	-0.53
16	50	2822	2810 *	2822	0.00	0.43
17	75	1806	1818	1783 *	-1.29	-1.96
18	75	2450	2455	2432 *	-0.74	-0.95
19	100	9026	9065	8721 *	-3.50	-3.94
20	100	4236	4216	4195 *	-0.98	-0.50

(tableau 3.1)

* * indique la meilleure solution pour un problème donné.
Opt: Meilleures solutions citées par Golden et al. [27]

$$\text{Dev}_1 = (\text{Opt} - \text{SGT})/\text{Opt} * 100$$

$$\text{Dev}_2 = (\text{Opt} - \text{MGT})/\text{Opt} * 100$$

Tableau comparatif: SGT, MGT et Golden et al. [27]

2- FLOTTES

Probleme	Taille	SGT	MGT	Opt
1	12	A ¹ C ³	B ² C ²	B ² C ²
2	12	A ³ C ¹	A ³ C ¹	A ³ C ¹
3	20	A ¹ B ² C ¹ E ²	A ¹ B ¹ D ¹ E ²	A ¹ B ² C ¹ E ²
4	20	A ¹ C ²	A ¹ C ²	A ⁶
5	20	E ³	E ³	A ¹ B ¹ D ¹ E ²
6	20	A ¹ B ² C ¹	A ⁵ B ¹	A ⁶
7	30	A ¹ B ¹ C ¹ D ⁴	B ² C ² D ³	B ² C ² D ³
8	30	C ² D ²	C ² D ²	C ² D ²
9	30	D ¹ E ³	D ¹ E ³	D ¹ E ³
10	30	C ² D ⁴	C ² D ⁴	C ² D ⁴
11	30	B ¹ C ⁵	B ¹ C ⁵	B ¹ C ⁵
12	30	A ¹ C ¹ E ⁴ F ¹	B ¹ C ¹ E ⁴ F ¹	E ⁶
13	50	A ⁴ B ⁴ D ¹ E ¹ F ³	A ² B ³ C ² D ¹ E ¹ F ³	A ¹ B ³ C ¹ F ⁴
14	50	A ³ B ⁴	A ⁷ B ¹	A ⁷ B ¹
15	50	A ⁴ B ⁶	A ⁵ B ⁴ C ¹	A ⁶ B ⁵
16	50	A ¹ B ⁶ C ²	B ³ C ⁴	A ¹ B ⁶ C ²
17	75	A ² B ¹ C ⁶	A ¹ B ³ C ⁵	A ¹ B ³ C ⁵
18	75	A ¹ B ⁶ C ⁵ D ⁴	A ³ B ⁴ C ⁴ D ⁵	A ¹ B ³ C ³ E ³
19	100	A ¹¹ B ²	A ¹¹ B ²	A ¹⁵
20	100	A ⁹ B ⁷	A ⁹ B ⁷	A ⁵ B ⁷

(tableau 3.2)

Le tableau 3.2 représente les meilleures configurations de flottes obtenues pour chaque problème. Ainsi, par exemple, le problème N° 1 utilise tantôt un (1) véhicule de type 'A' et trois (3) véhicules de type 'C', et tantôt deux (2) véhicules de type 'B' et deux autres de type 'C'. Les deux solutions (A¹C³ et B²C²) reviennent respectivement à 622 et 610 u.m. La codification des types de véhicules est telle que: capacité(véhicule de type 'A') < capacité(véhicule de type 'B') < capacité(véhicule de type 'C') < ...

3.3.4- Evaluation des algorithmes utilisés:

La qualité de la solution et l'effort de calcul nécessaire pour son obtention, sont les principaux critères d'évaluation des performances d'un algorithme. Il en existe encore d'autres, parmi lesquels nous citons: la simplicité de la mise en oeuvre, la flexibilité, la facilité de contrôle, le degré d'interaction et l'ergonomie. Dans cette étude, nous nous intéresserons uniquement aux deux premiers critères: le temps d'exécution et la qualité de la solution.

La qualité de la solution est mesurée en terme d'écart relatif par rapport aux meilleurs résultats cités par Golden et al. pour les problèmes tests. Comme ceux-ci sont de taille variable, l'effort de calcul est estimé à partir de la moyenne arithmétique des temps d'exécution consommés par les problèmes de taille identique (même nombre de clients). Le tableau suivant donne les tailles des différentes flottes utilisées, le nombre de problèmes de chaque taille, et le temps consommé par chaque problème:

Temps de traitement

Taille	12	20	30	50	75	100
Nombre	2	4	6	4	2	4
CPU-TIME (SGT) _(s)	4.6	11.4	23.8	52.6	121.2	182.9
CPU-TIME (MGT) _(s)	2.6	7.4	17.1	45.7	107.3	187.9

(tableau 3.3)

Il faut noter cependant que le temps d'exécution ne dépend pas uniquement de la taille du problème, mais aussi de la solution initiale et du nombre de types de véhicules disponibles.

Statistiques générales

Méthode	Moyenne %	Ecart Type %	Pire/2 ^{ème} Pire	Fréquence
SGT	-2.38	3.80	13.25/12.69	4
MGT	-2.08	3.19	13.25/8.39	2

(tableau 3.4)

où:

Moyenne: moyenne arithmétique des écarts relatifs (entre la solution donnée par la méthode étudiée et les meilleurs résultats rapportés par Golden et al.).

Pire/2^{ème} Pire: les deux plus grands écarts relatifs moyens.

Fréquence: Fréquence d'obtention de la meilleure solution.

Ces résultats mettent en évidence les limites intrinsèques des approches utilisées, et surtout leur caractère imprévisible. Par ailleurs, il est difficile de dire que l'une des deux techniques est meilleure, ou moins bonne, que l'autre.

Pour deux problèmes (4 et 6), les deux algorithmes semblent éprouver quelques difficultés à converger vers une meilleure solution, et la perte de qualité est alors importante (supérieure à 10 %). Est-ce dû à l'inadaptation des algorithmes à ces problèmes particuliers, à une mauvaise configuration de départ (solution initiale), ou bien tout simplement à un arrêt trop hâtif du processus de résolution (bien que le nombre d'itérations soit le même partout, pour une méthode donnée), ...?

3.3.5- INCORPORATION DE PROCEDURES DE RAFFINAGE:

Les approches étudiées seront utilisées pour la détermination de l'impact de certains paramètres sur le problème. Or, de nature heuristique, elles ne donnent pas nécessairement la solution optimale, et il est alors à craindre que l'effet observé ne soit masqué par les

limites intrinsèques des outils d'investigation. En effet, seule une méthode exacte est à même de déterminer et de mesurer avec exactitude l'impact étudié. Malheureusement, il n'existe pas de telles méthodes pour ce problème. Soucieux de se rapprocher le plus possible de la solution optimale, nous avons été amenés à mettre en oeuvre une série de procédures de raffinages similaires à ceux développés par Wren et Holliday [70], Waters [67], Sahi et Rand [52]. Dans le texte, ces différentes procédures seront appelées indifféremment procédures de "raffinage", "d'affinage" ou de "raffinement".

3.3.5.a- Fusion de tournées:

Une fois les routes obtenues, une procédure tente de fusionner celles qui le permettent. La fusion ne se fait que si:

a- La longueur totale de la route résultante est admissible. Considérons que les routes à fusionner, r_1 et r_2 , sont formées respectivement de:

$$\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \text{ et } \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$$

et ont pour longueur:

$$L_1 = d_{0i_1} + \sum_{t=1}^{n-1} d_{i_t i_{t+1}} + d_{i_n 0}$$

$$L_2 = d_{0j_1} + \sum_{t=1}^{m-1} d_{j_t j_{t+1}} + d_{j_m 0}$$

où d_{ij} représente la distance séparant les sites i et j .

Notons alors par $\widehat{\text{coût}}_1$ et $\widehat{\text{coût}}_2$ les expressions suivantes:

$$\widehat{\text{coût}}_1 = C_{0i_1} + \sum_{t=1}^{n-1} C_{i_t i_{t+1}} + C_{i_n 0}$$

$$\widehat{\text{coût}}_2 = C_{0j_1} + \sum_{t=1}^{m-1} C_{j_t j_{t+1}} + C_{j_m 0}$$

ou C_{ij} représente le coût de la liaison (i, j) .

Pour simplifier, nous allons représenter la route résultante par :

$$\{i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}, i_{n+2}, \dots, i_{n+m}\}$$

En fait, la fusion directe n'est pas optimale du point de vue distance. Nous appliquons alors à la route résultante la procédure 2-Opt/3-Opt afin de trouver une meilleure disposition des clients. Soit alors NL la longueur qui en résulte. Nous devons donc vérifier la contrainte

$$NL \leq \text{DistMax} \quad (1)$$

où DistMax représente la distance maximale pouvant être parcourue.

Notons par Ncout l'expression

$$N\text{cout} = C_{0i_1} + \sum_{k=1}^{n+m-1} C_{i_k i_{k+1}} + C_{i_{n+m} 0}$$

Il serait tout aussi possible d'appliquer une autre procédure afin de réduire la longueur de la tournée issue de la fusion. Le cas extrême revient alors à résoudre un problème de voyageur de commerce sur les clients de cette tournée, ce qui nécessitera un effort de calcul important.

b- La charge totale du véhicule est admissible. En effet, le même véhicule va se voir affecter l'ensemble des clients des deux routes, et il faut s'assurer que sa capacité le lui permet. Formellement, si nous notons la demande du client i par $Q(i)$, la capacité du véhicule j par $Y(j)$ et son coût fixe par $F(j)$, les charges des véhicules v_1 et v_2 associés aux routes considérées étant :

$$C_1 = \sum_{t=1}^n Q(i_t) \quad \text{et} \quad C_2 = \sum_{t=1}^m Q(j_t)$$

La condition sur la capacité devient :

$$Y(s-1) < C_1 + C_2 \leq Y(s) \quad \text{avec} \quad \text{Max}(v_1, v_2) \leq s \leq Nt \quad (2)$$

Nt étant le nombre de types de véhicules.

c- Le coût de distribution ne doit pas augmenter suite à cette fusion. Avec les notations précédentes, les coûts de distribution relatifs aux deux routes s'écrivent:

$$Ct_1 = F(v1) + Cout_1$$

$$Ct_2 = F(v2) + Cout_2$$

et le coût relatif à leur fusion:

$$Ct_f = F(s) + NCout$$

La condition sur le coût de distribution devient:

$$Ct_f \leq Ct_1 + Ct_2 \quad (3)$$

3.3.5.b- Eclatement de tournées:

La procédure inverse peut se concevoir elle aussi. Nous essayerons cette fois de diviser une même route en plusieurs tournées. En effet, une amélioration peut résulter de la substitution d'un véhicule de capacité donnée par un ensemble de véhicules de tonnage inférieur, généralement de coûts moindres.

3.3.5.c- Permutation de clients entre tournées:

Cette procédure essaye de permuter un client d'une route r1 avec un client d'une route r2, toujours dans le but de réduire le coût total.

Soient les routes r1 et r2 formées respectivement de n et m clients, de longueur L₁ et L₂, de demandes totales C₁ et C₂, de coûts de distribution Ct₁ et Ct₂, et desservies respectivement par les véhicules v1 et v2. Après permutation des clients i_p de r1 et j_q de r2, les distances changent en NL1 et NL2 respectivement, les charges des véhicules associés en NC1 et NC2, les véhicules en nv1 et nv2, et enfin les coûts de distribution en NCT1 et NCT2. La permutation n'est retenue que si les conditions suivantes sont vérifiées:

a- La contrainte distance n'est pas violée:

$$NL1 \leq DistMax \quad \text{et} \quad NL2 \leq DistMax \quad (1)$$

b- Les véhicules nv_1 et nv_2 existent dans la flotte:

$$1 \leq nv_1, nv_2 \leq Nt, \quad nt \text{ étant le nombre de types de véhicules (2)}$$

c- Le coût ne s'en trouve pas augmenté:

$$Nc_{t_1} + Nc_{t_2} \leq Ct_1 + Ct_2 \quad (3)$$

3.3.5.d- Réaffectation de clients:

La procédure tente d'éliminer un client donné d'une route pour le réaffecter ensuite à une autre, dans le souci de réduire le coût total de distribution. Là encore, il faudra s'assurer que les contraintes sont respectées à chaque étape.

Ces procédures de raffinement peuvent être appliquées jusqu'à obtention d'une solution stationnaire (optimum local). Toutefois, nous les avons arbitrairement limitées à un seul passage, en raison du temps qu'auraient nécessité les plus gros problèmes.

Exemple illustrant l'apport de ces différents raffinages:

Considérons le problème test N° 1. Les solutions obtenues par SGT sans raffinement et avec raffinement sont rapportées dans les tableaux 3.5 et 3.6 respectivement.

Solution obtenue par SGT sans raffinages

Route	Longueur	Charge	Vehicule	T.R. %	Coût	Tournee
1	64.0	60	C	100.0	164.0	0-1-2-5-6-0
2	84.0	47	C	78.3	184.0	0-7-10-8-0
3	112.0	60	C	100.0	212.0	0-4-12-11-9-0
4	42.0	15	A	75.0	62.0	0-3-0
Total	302.0	182	Total		622.0	Flotte : A ¹ C ³

(tableau 3.5)

Solution obtenue par SGT avec raffinages

Route	Longueur	Charge	Vehicule	T.R. %	Coût	Tournee
1	92.0	59	C	98.3	192.0	0-1-8-10-7-0
2	42.0	32	B	91.4	92.0	0-2-3-0
3	112.0	60	C	100.0	212.0	0-4-12-11-9-0
4	56.0	31	B	88.6	106.0	0-6-5-0
Total	302.0	182	Total		602.0	Flotte : B ² C ²

(tableau 3.6)

TR étant le taux de remplissage du véhicule.

Ce problème, qui fait partie d'une série de vingt (20) autres conçus par Golden et al., constitue un bon test pour les heuristiques de résolution.

La flotte est passée de A¹C³ (un véhicule de type 'A' et 3 de type 'C') à B²C² (2 véhicules de type 'B' et 2 de type 'C'), ce qui se traduit par une diminution des coûts fixes:

$$\text{Coûts fixes}(A^1C^3) = 1*20 + 3*100 = 320 \text{ u.m}$$

$$\text{Coûts fixes}(B^2C^2) = 2*50 + 2*100 = 300 \text{ u.m}$$

Dans ce cas précis, et ce n'est sûrement pas le fait du hasard, la distance totale parcourue n'a pas augmenté d'un millimètre! Il aurait été intéressant de représenter graphiquement les tournées correspondant aux deux solutions, mais nous n'avons pas, pour ce problème-ci, les coordonnées des clients et du dépôt (problème donné sous forme de distances inter-sommets). Dans le cas général, c'est le coût total (composante fixe et composante variable) qui détermine le choix de la meilleure solution.

Il faut signaler que la première solution a nécessité 2.5 s, alors que la deuxième en a consommé pas moins de 13.66, soit 5.46 fois plus de temps que n'en a pris la première, pour une diminution de coût relativement faible. Ceci peut être normal si nous admettons que la première solution se trouvait déjà au voisinage de l'optimum. Par ailleurs, l'objectif assigné étant de produire des solutions optimales

ou quasi-optimales à des fins d'étude, le temps de calcul devient secondaire. Néanmoins, il pourra probablement être amélioré en définissant un meilleur critère pour le choix des clients à réaffecter, à permuter, etc...

Les différentes procédures de raffinages précédemment définies ont été intégrées aux algorithmes de base (SGT et MGT), et leur implémentation a conduit aux résultats rapportés dans les tableaux 3.7 et 3.8.

Tableau comparatif: SGT*, MGT* et Golden et al. [27]

1- Coûts

Pb.	Taille	SGT*	MGT*	Opt	Dev ₁ %	Dev ₂ %	Dev ₃ %
1	12	602*	602*	602*	0.00	0.00	0.00
2	12	722*	722*	722*	0.00	0.00	0.00
3	20	961*	961*	965	0.00	0.00	0.42
4	20	6895	6895	6446*	6.97	6.97	0.00
5	20	1009*	1009*	1013	0.00	0.00	0.40
6	20	7025	6521*	6522	7.73	0.00	0.02
7	30	7393	7370	7298*	1.30	0.99	0.00
8	30	2352	2348*	2349	0.17	0.00	0.04
9	30	2227	2218*	2220	0.41	0.00	0.09
10	30	2364*	2364*	2368	0.00	0.00	0.17
11	30	4764	4764	4763*	0.02	0.02	0.00
12	30	4097	4095*	4112	0.05	0.00	0.42
13	50	2416*	2421	2438	0.00	0.21	0.91
14	50	9127*	9130	9132	0.00	0.03	0.05
15	50	2638	2615*	2640	0.88	0.00	0.96
16	50	2805	2783*	2822	0.79	0.00	1.40
17	75	1779*	1781	1783	0.00	0.11	0.22
18	75	2417	2415*	2432	0.08	0.00	0.70
19	100	9019	9044	8721*	3.42	3.70	0.00
20	100	4222	4193*	4195	0.69	0.00	0.05

(tableau 3.7)

Opt: Meilleures solutions citées par Golden et al. [27]

$$Dev_1 = (\text{Opt}^* - \text{SGT}^*) / \text{Opt}^* * 100$$

$$Dev_2 = (\text{Opt}^* - \text{MGT}^*) / \text{Opt}^* * 100$$

$$Dev_3 = (\text{Opt}^* - \text{Opt}) / \text{Opt}^* * 100$$

Opt: $\text{Min}(\text{SGT}^*, \text{MGT}^*, \text{Opt})$

'*' indique la meilleure solution pour un problème donné.

SGT* et MGT* représentent les méthodes de base avec raffinement.

Tableau comparatif: SGT*, MGT* et Golden et al. [27]

2- FLOTTES

Probleme	Taille	SGT	MGT	Opt2
1	12	B ² C ²	B ² C ²	B ² C ²
2	12	A ³ C ¹	A ³ C ¹	A ³ C ¹
3	20	A ¹ B ² C ¹ E ²	A ¹ B ² C ¹ E ²	A ¹ B ² C ¹ E ²
4	20	A ⁵ B ¹	A ⁵ B ¹	A ⁶
5	20	E ³	E ³	A ¹ B ¹ D ¹ E ²
6	20	A ⁵ B ¹	A ⁶	A ⁶
7	30	B ² C ² D ³	B ⁴ C ² D ²	B ² C ² D ³
8	30	C ² D ²	C ² D ²	C ² D ²
9	30	D ¹ E ³	D ¹ E ³	D ¹ E ³
10	30	B ¹ D ⁵	B ¹ D ⁵	C ² D ⁴
11	30	B ¹ C ⁵	B ¹ C ⁵	B ¹ C ⁵
12	30	E ⁶	E ⁶	E ⁶
13	50	A ¹ B ³ C ² F ⁴	A ¹ B ³ C ² F ⁴	A ¹ B ³ C ¹ F ⁴
14	50	A ⁷ B ¹	A ⁷ B ¹	A ⁷ B ¹
15	50	A ⁴ B ⁶	A ⁶ B ⁵	A ⁶ B ⁵
16	50	A ¹ B ⁶ C ²	A ¹ B ⁶ C ²	A ¹ B ⁶ C ²
17	75	A ² B ¹ C ⁶	A ³ B ² C ⁵	A ¹ B ³ C ⁵
18	75	B ⁵ C ⁷ D ³	A ² B ³ C ³ D ⁶	A ¹ B ³ C ⁸ D ³
19	100	A ¹¹ B ²	A ¹¹ B ²	A ¹⁵
20	100	A ² B ⁷	A ⁹ B ⁷	A ⁹ B ⁷

(tableau 3.3)

3.3.6- Performances:

Grâce aux différentes procédures de raffinage, la qualité des solutions a été globalement améliorée (voir tableau 3.9): Fait notable mais pas anormal, l'écart relatif observé pour les problèmes 4 et 6 a été considérablement réduit (MGT* améliore même la solution du problème 6) mais reste cependant supérieur à 6 %. Les questions soulevées précédemment restent ainsi posées.

Statistiques générales

Methode	Moyenne %	Ecart Type %	Pire/2 ^{ème} Pire	Frequence
SGT*	1.13	2.22	7.73/6.97	8
MGT*	0.60	1.67	6.97/3.70	13
Opt	0.29	0.39	1.40/ 0.96	6

(tableau 3.9)

NB: Le nombre total de solutions (8+13+6) est supérieur au nombre de problèmes (20) car les différentes méthodes ont donné parfois le même résultat.

L'amélioration des solutions aurait certainement pu être plus importante si, au lieu d'effectuer les différents raffinages une seule fois, on avait réitéré le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'évolution notable.

Le tableau 3.10 permet de comparer les résultats fournis par l'une des deux approches (soit MGT) dans les deux cas (sans raffinage et avec raffinage) aux bornes inférieures connues pour les problèmes étudiés. La comparaison porte sur l'étude de l'écart relatif par rapport à la borne inférieure. Une comparaison avec d'autres approches de résolution sera faite en annexe (B).

La borne inférieure (Lower Bound) obtenue par relaxation de certaines contraintes, est une solution *non réalisable*, de coût

inférieur (au sens large) à celui de la solution optimale. La qualité est ainsi mesurée par l'écart qui sépare les deux solutions, et la borne peut être *bonne* (voisinage immédiat de la solution optimale), ou *mauvaise* (écart relativement important). Aussi, les résultats rapportés dans le tableau (tableau 3.10) doivent-ils être manipulés avec prudence. Ceci étant, ils nous renseignent indirectement sur la qualité des bornes inférieures déterminées pour ces problèmes. Il est possible de considérer les solutions dont l'écart relatif est inférieur à un seuil donné (soit 5 %, par exemple) comme étant quasi-optimales. Les déviations de forte amplitude peuvent être imputées à la qualité de la borne inférieure aussi bien qu'à l'approche de résolution utilisée.

*Impact du raffinage sur la solution
Evolution du coût par rapport à la borne inférieure*

Probleme	MGT	MGT*	Lower bound	Dev1. %	Dev2. %
1	610	602	554	10.11	8.66
2	722	722	672	7.44	7.44
3	974	961	790	23.29	21.65
4	7300	6895	6260	16.61	10.14
5	1024	1009	866	18.24	16.51
6	7069	6521	6375	10.89	2.29
7	7408	7370	7060	4.93	4.39
8	2370	2348	2204	7.53	6.53
9	2239	2218	2110	6.11	5.12
10	2382	2364	2240	6.34	5.54
11	4826	4764	4636	4.10	2.76
12	4264	4095	3878	9.95	5.60
13	2445	2421	2119	15.38	14.25
14	9136	9130	8874	2.95	2.88
15	2654	2615	2264	17.23	15.50
16	2810	2783	2504	12.22	11.14
17	1818	1781	1380	31.74	29.06
18	2455	2415	2002	22.63	20.63
19	9065	9044	8290	9.35	9.10
20	4216	4193	3588	17.50	16.78

(tableau 3.10)

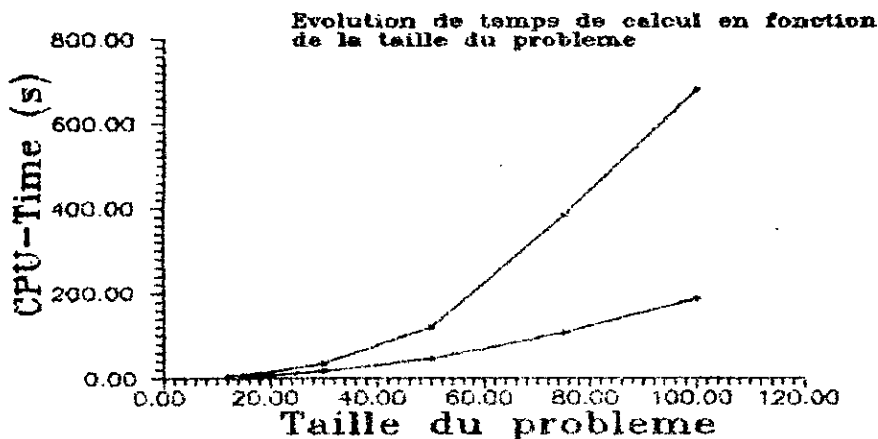
où:

$$\text{Dev1} = (\text{MGT} - \text{Lower Bound}) / \text{Lower Bound} * 100$$

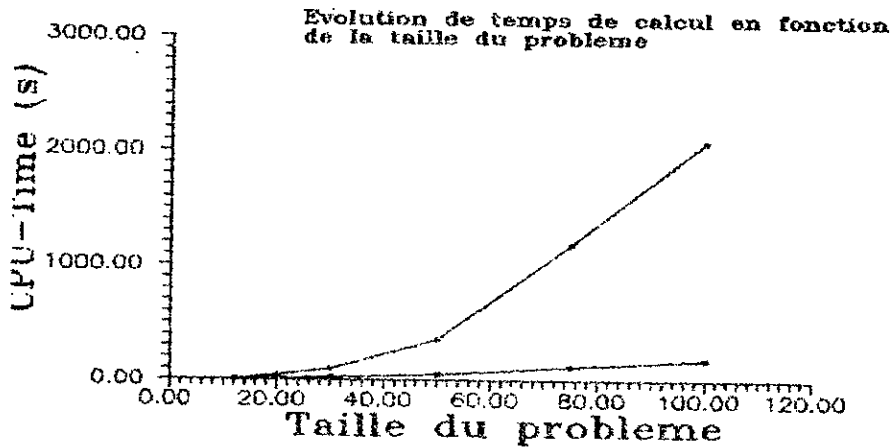
$$\text{Dev2} = (\text{MGT}^* - \text{Lower Bound}) / \text{Lower Bound} * 100$$

Observations concernant l'évolution du temps de calcul:

Les graphes (figure 3.5) montrent l'évolution du temps de traitement après introduction des procédures de raffinage. L'effort de calcul supplémentaire semble suivre une fonction exponentielle de la taille du problème, ce qui tend à en limiter l'utilisation aux problèmes de petite et moyenne taille. Il reste cependant possible de réduire ce temps en limitant la "prospection" aux seuls cas réellement susceptibles d'améliorer la solution. Il faudrait alors déterminer de "bons critères" (fonction d'évaluation) qui renseigneront à l'avance et de manière efficace, sur l'apport de toute opération de transformation que subirait la solution. En effet, l'examen de tous les cas possibles (toutes les opérations de permutation de clients, toutes les opérations de fusion de routes, etc...) est difficilement concevable, dès que la taille du problème dépasse un certain seuil. Un bon critère permettrait alors de n'analyser que les opérations de fusions, de réaffectation, ou autres, qui sont susceptibles d'améliorer le coût total du système. Un exemple de critères concernant l'opération de réaffectation serait de limiter l'examen aux tournées qui se trouvent juste à proximité du client considéré, bien que cela ne sera pas toujours la meilleure décision à prendre. Il faudrait ainsi définir tout un ensemble de règles de décisions. Un système expert pourrait être ainsi mis en place afin de décider de l'opportunité d'une opération donnée.



1- SGT



2- MGT

*Evolution du temps de traitement
en fonction de la taille du problème*

(figure 3.5)

3.3.7- IMPACT DE LA TOURNÉE GEANTE INITIALE SUR LA SOLUTION

En minimisant la distance à parcourir, l'optimisation du parcours initial (2-Opt/3-Opt ou autre) privilégie la composante variable du coût de transport, dans la mesure où le remplissage du véhicule se fait à partir des demandes de clients "triés" selon les distances. Bien que les deux heuristiques (SGT et MGT), avec raffinement des solutions, ont donné des résultats satisfaisants dans un nombre respectable de problèmes tests, il serait intéressant d'étudier l'impact de l'ordonnement (autrement dit de la solution initiale) sur la solution finale.

Une question vient alors à l'esprit: que se passerait-il si la tournée géante initiale, qui est générée aléatoirement, ne subit aucune optimisation? Si la solution ne varie pas de manière significative, la procédure 2-Opt/3-Opt (Or-Opt, TSP ou autre) pourra être éliminée. Le gain de temps qui s'ensuivrait -d'autant plus que les procédures en question sont gourmandes en temps de traitement- pourra être utilisé pour construire des parcours aléatoires supplémentaires et pour résoudre davantage de problèmes de recherche de chemin minimum.

Afin de montrer l'influence de cette optimisation sur la solution finale, nous avons procédé à la résolution des vingt problèmes précédents, en ne portant aucune transformation à la tournée géante initiale. Nous tacherons ici de comparer les résultats obtenus par les deux variantes: avec et sans optimisation initiale (avec et sans raffinage).

Tableau comparatif
Variantes avec et sans optimisation initiale
SANS RAFFINAGES

1- Coûts

Probleme	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev ₁ %	Dev ₂ %
		SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}		
1	12	622	610	632	632	-1.60	-3.61
2	12	722	722	774	742	-7.20	-2.77
3	20	961	974	1088	1068	-13.22	-9.65
4	20	7300	7300	7030*	7064*	3.69	3.23
5	20	1009	1024	1122	1146	-11.20	-11.39
6	20	7349	7069	7115*	7152	3.18	-1.17
7	30	7461	7408	7613	7722	-2.04	-4.24
8	30	2359	2370	2459	2488	-4.24	-4.98
9	30	2249	2239	2378	2344	-5.74	-4.69
10	30	2382	2382	2645	2532	-11.04	-6.30
11	30	4797	4826	5143	5091	-7.22	-5.49
12	30	4191	4264	4307	4307	-2.77	-1.01
13	50	2430	2445	3072	3109	-24.42	-27.16
14	50	9592	9136	9665	9642	-0.75	-5.54
15	50	2657	2654	3200	3242	-20.44	-22.16
16	50	2822	2810	3299	3293	-16.90	-17.19
17	75	1806	1818	2696	2635	-49.28	-44.94
18	75	2450	2455	3453	3531	-40.94	-43.83
19	100	9026	9065	10403	9977	-15.26	-10.06
20	100	4236	4216	5462	5454	-28.94	-29.36

(tableau 3.11)

avec:

$$Dev_1 = (SGT_{v1} - SGT_{v2}) / SGT_{v1} * 100$$

$$Dev_2 = (MGT_{v1} - MGT_{v2}) / MGT_{v1} * 100$$

'*' indique l'obtention d'une meilleure solution par la version 2.

v1: version avec optimisation de la tournée initiale

v2: version sans optimisation de la tournée initiale

2- Flottes

Pb.	Taille	SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}
1	12	A ¹ C ³	B ² C ²	A ¹ C ³	A ¹ C ³
2	12	A ³ C ¹	A ³ C ¹	A ³ C ¹	A ³ C ¹
3	20	A ¹ B ² C ¹ E ²	A ¹ B ¹ D ¹ E ²	B ⁴ C ³ D ²	B ² C ² E ²
4	20	A ¹ C ²	A ¹ C ²	A ⁵ B ¹	A ⁵ B ¹
5	20	E ³	E ³	B ¹ C ¹ D ¹ E ²	A ¹ B ³ C ² D ¹ E ¹
6	20	A ¹ B ² C ¹	A ⁵ B ¹	A ⁵ B ¹	A ⁵ B ¹
7	30	A ¹ B ¹ C ¹ D ⁴	B ² C ² D ³	B ⁴ C ² D ²	B ³ D ⁴
8	30	C ² D ²	C ² D ²	C ² D ²	C ² D ²
9	30	D ¹ E ³	D ¹ E ³	D ¹ E ³	D ¹ E ³
10	30	C ² D ⁴	C ² D ⁴	B ¹ D ⁵	B ¹ D ⁵
11	30	B ¹ C ⁵	B ¹ C ⁵	A ¹ B ¹ C ⁵	A ¹ B ¹ C ⁵
12	30	A ¹ C ¹ E ⁴ F ¹	B ¹ C ¹ E ⁴ F ¹	E ⁶	E ⁶
13	50	A ⁴ B ⁴ D ¹ E ¹ F ³	A ² B ³ C ² D ¹ E ¹ F ³	A ⁹ B ¹² C ⁸ D ³	A ⁶ B ¹³ C ¹¹ E ¹
14	50	A ³ B ⁴	A ⁷ B ¹	A ⁷ B ¹	A ⁷ B ¹
15	50	A ⁴ B ⁶	A ⁵ B ⁴ C ¹	A ⁴ B ⁶	A ⁸ B ³ C ¹
16	50	A ¹ B ⁶ C ²	B ³ C ⁴	A ¹ B ⁶ C ²	A ² B ⁴ C ³
17	75	A ² B ¹ C ⁶	A ¹ B ³ C ⁵	A ⁵ B ⁵ C ³	A ⁵ B ⁵ C ³
18	75	A ¹ B ⁶ C ⁵ D ⁴	A ³ B ⁴ C ⁴ D ⁵	A ⁷ B ¹⁴ C ⁷	A ¹³ B ²⁰ C ³
19	100	A ¹¹ B ²	A ¹¹ B ²	A ¹⁶	A ¹¹ B ²
20	100	A ⁹ B ⁷	A ⁹ B ⁷	A ¹⁴ B ⁵	A ¹² B ⁶

(tableau 3.12)

Le tableau 3.11 montre que:

a- La solution initiale a un impact direct et souvent important sur la solution finale. La différence de coût peut atteindre 49.94 % pour SGT et 44.94 % pour MGT.

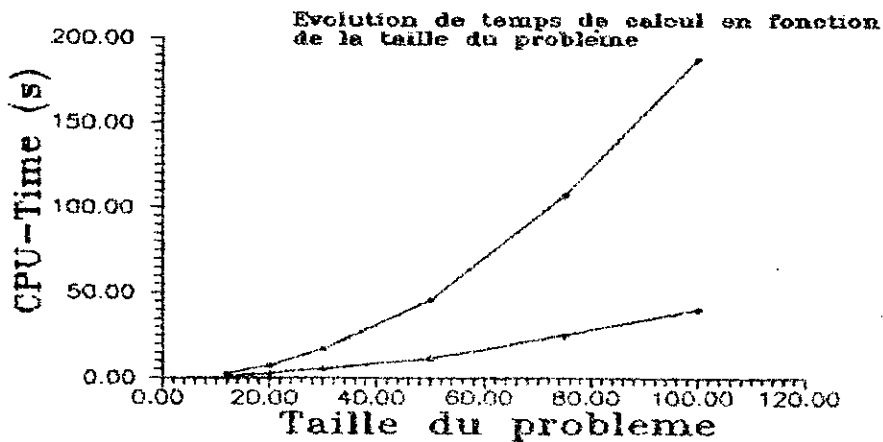
b- Les problèmes 4 et 6, auxquels les approches utilisées n'arrivaient pas jusque-là à trouver une bonne solution, sont résolus ici avec un coût meilleur (amélioration supérieure à 3 %), au bout du même nombre d'itérations imposé au départ. Il semblerait ainsi que l'optimisation de la longueur des tournées se soit faite, dans ces cas particulièrement, au détriment du coût global de la solution (objectifs multiples et en conflits). Cependant, le résultat aurait-il été le même si la tournée optimisée avait été la tournée de longueur minimale? En effet, l'optimisation de la longueur a été réalisée en utilisant les procédures 2-Opt/3-Opt, ce qui ne donne pas nécessairement la tournée de longueur optimale.

Evolution du temps de traitement:

Le graphe suivant (figure 3.6) montre l'évolution du temps d'exécution de l'algorithme SGT dans les deux cas étudiés:

a- Avec optimisation de la tournée initiale (et sans raffinage)

b- Sans optimisation initiale (et toujours sans raffinage)



(figure 3.6)

Tableau comparatif des résultats obtenus par
les deux variantes: avec et sans optimisation initiale
AVEC RAFFINAGES

1- Coûts

Probleme	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev ₁ %	Dev ₂ %
		SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}		
1	12	602	602	602 ⁼	608	0.00	-0.99
2	12	722	722	724	722 ⁼	-0.28	-1.45
3	20	961	962	1008	976	-4.89	-1.45
4	20	7300	7300	6954 [*]	6931 [*]	4.74	5.05
5	20	1009	1022	1038	1037	-2.87	-1.47
6	20	7349	6595	7023 [*]	7022	4.44	-6.47
7	30	7408	7406	7405 [*]	7366 [*]	0.04	0.54
8	30	2356	2353	2419	2390	-2.67	-1.57
9	30	2238	2223	2279	2257	-1.83	-1.53
10	30	2364	2380	2481	2389	-0.67	-0.38
11	30	4764	4807	4916	4828	-3.19	-0.43
12	30	4097	4120	4177	4157	-1.95	-0.89
13	50	2430	2445	2616	2544	-7.65	-4.05
14	50	9147	9130	9287	9281	-1.53	-1.65
15	50	2656	2648	2800	2768	-5.42	-4.53
16	50	2805	2789	2957	2951	-5.41	-5.80
17	75	1799	1781	2021	1976	-12.34	-10.95
18	75	2427	2428	2662	2606	-9.68	-7.33
19	100	9019	9044	9462	9333	-4.91	-3.20
20	100	4222	4193	4574	4595	-8.33	-9.59

(tableau 3.13)

avec :

$$\text{Dev}_1 = (\text{SGT}_{v1} - \text{SGT}_{v2}) / \text{SGT}_{v1} * 100$$

$$\text{Dev}_2 = (\text{MGT}_{v1} - \text{MGT}_{v2}) / \text{MGT}_{v1} * 100$$

'=' signale les solutions qui n'ont pas changé

'*' indique l'obtention d'une meilleure solution.

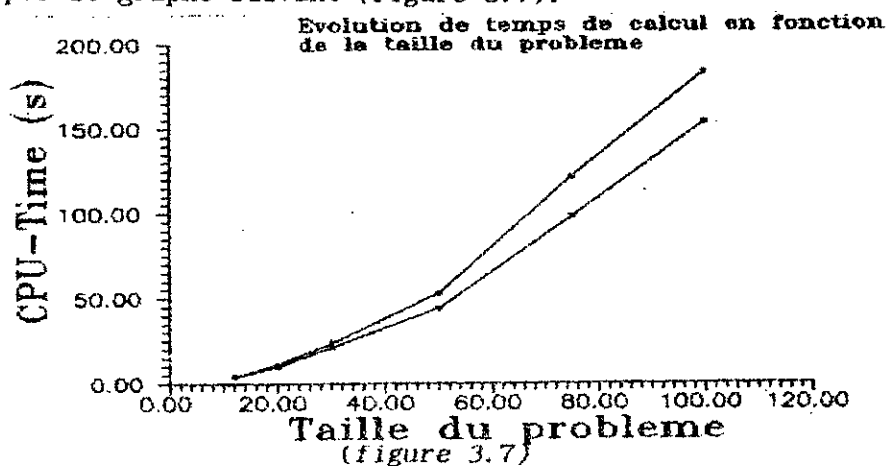
V1 étant la version avec optimisation, V2 celle où le tour géant
est exploité tel qu'il se présente après la génération aléatoire. Les

résultats ont été obtenus dans les mêmes conditions opératoires, en considérant le même nombre d'itérations.

Ce tableau montre que les observations concernant les solutions obtenues avec les algorithmes de base (sans les procédures de raffinement) restent valables. Naturellement, les coûts des solutions diminuent, et les écarts les plus importants sont alors de 12.34 % pour SGT et de 10.95 % pour MGT (écarts observés pour le même problème, par ailleurs, ce qui laisse supposer que celui-ci a une structure particulière à laquelle les heuristiques utilisées n'ont pas pu s'adapter).

Il faut noter que ces résultats, au même titre que ceux obtenus lorsque les procédures de raffinement ne sont pas utilisées, ne sont pas réellement comparables, car obtenus au bout de temps de calcul différents. Autrement dit, l'amélioration relative résultant de l'ordonnancement initial pourrait être moins significative, si l'on augmente le nombre d'itérations du processus dans le deuxième cas afin de consommer un temps de calcul identique. Il serait donc intéressant d'étudier le comportement de la solution au bout du même temps de traitement. Néanmoins, il semblerait que l'optimisation de la tournée initiale conduit généralement à de meilleures solutions, alors que le rallongement du temps de calcul permet, tout au plus, d'espérer obtenir une amélioration. Vu sous cet angle, le problème de l'optimisation ne se pose plus en dilemme.

Le temps de traitement nécessité par SGT dans les deux cas est donné par le graphe suivant (figure 3.7):



Evolution du temps de traitement
a- Avec ordonnancement initial
b- Sans ordonnancement initial

Tableau comparatif des résultats obtenus par
les deux variantes: avec et sans optimisation initiale
AVEC RAFFINAGES

2- Flottes

Pb.	Taille	SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}
1	12	B^2C^2	B^2C^2	B^2C^2	B^2C^2
2	12	A^3C^1	A^3C^1	A^3C^1	B^2C^1
3	20	$A^1B^2C^1E^2$	$A^1B^2C^1E^2$	$B^1C^2D^2E^1$	$A^1B^1C^2E^2$
4	20	A^1C^2	A^1C^2	A^5B^1	A^5B^1
5	20	E^3	E^3	$A^1C^1D^1E^2$	$A^1B^1D^1E^2$
6	20	$A^1B^2C^1$	A^6	A^5B^1	A^5B^1
7	30	$B^2C^2D^3$	$B^2C^2D^3$	$A^1B^2C^3D^2$	$A^1B^2C^3D^2$
8	30	C^2D^2	C^2D^2	C^2D^2	C^2D^2
9	30	D^1E^3	D^1E^3	D^1E^3	D^1E^3
10	30	B^1D^5	C^2D^4	C^2D^4	C^2D^4
11	30	B^1C^5	$A^1B^3C^4$	B^1C^5	B^1C^5
12	30	E^6	E^6	E^6	E^6
13	50	$A^4B^4D^1E^1F^3$	$A^2B^3C^2D^1E^1F^3$	$A^3B^5C^2D^4E^2F^1$	$A^2B^5C^2D^3E^1F^2$
14	50	A^7B^1	A^7B^1	A^7B^1	A^7B^1
15	50	A^4B^6	$A^5B^4C^1$	$A^3B^5C^1$	$A^7B^3C^1$
16	50	$A^1B^6C^2$	$A^1B^6C^2$	B^3C^4	B^3C^4
17	75	$A^1C^5D^1$	$A^3B^2C^5$	$A^3C^1D^3$	$A^2C^5D^1$
18	75	$B^7C^3D^5$	$A^1B^6C^8D^2$	$B^3C^1D^8$	$A^3B^2C^2D^7$
19	100	$A^{11}B^2$	$A^{11}B^2$	A^{16}	$A^{11}B^2$
20	100	A^2B^7	A^9B^7	$A^2B^7C^2$	$A^{10}B^4C^2$

(tableau 3.14)

Ce tableau donne la composition des différentes flottes apparaissant dans les solutions obtenues dans les quatre cas.

Alternative a la procedure 2-Opt/3-Opt:

Considérant que l'optimisation du parcours initial à l'aide de 2-Opt/3-Opt nécessite un temps de calcul relativement important, nous avons pensé à la remplacer par une autre procédure moins coûteuse, dans le cas où son élimination pure et simple n'était pas envisageable. Celle-ci est basée sur l'insertion optimale d'un client dans le parcours qui se constitue au fur et à mesure: pour chaque nouveau client tiré aléatoirement dans la liste des clients non encore traités, nous passons en revue toutes les possibilités d'insertion dans le parcours, pour en retenir finalement celle qui minimise la longueur totale (*best insertion*).

Exemple:

Soit le parcours formé de trois clients notés i, j et k:
{ 0-i-j-k-0 } et soit à insérer le client m. Quatre positions d'insertion sont alors possibles:

0-m-i-j-k-0 0-i-m-j-k-0 0-i-j-m-k-0 0-i-j-k-m-0

La comparaison entre les longueurs des différents parcours permet d'en sélectionner l'optimal.

Le tableau 3.15 montre les résultats obtenus avec cette variante.

Ainsi, Le résultat est resté inchangé dans quatre (04) problèmes pour SGT, et deux (02) pour MGT.

L'ordonnancement initial utilisant les procédures 2-Opt/3-Opt a donc finalement donné une meilleure solution dans uniquement sept (07) problèmes pour SGT, et dans neuf (09) problèmes pour MGT.

Inversement, la procédure de meilleure insertion a permis l'obtention de dix (10) meilleures solutions et de trois solutions identiques pour SGT (respectivement 9 et 2 solutions pour MGT).

Tableau comparatif entre les deux variantes:
avec 2-Opt/3-Opt (v1) et
avec la procédure d'insertion optimale (v2)

1- Coûts

Probleme	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev ₁ %	Dev ₂ %
		SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}		
1	12	602	602	602*	606	0.00	-0.66
2	12	722	722	722*	722*	0.00	0.00
3	20	961	962	961*	961*	0.00	0.00
4	20	7300	7300	6904*	6447*	5.42	11.68
5	20	1009	1022	1009*	1023	0.00	-0.10
6	20	7349	6595	7002*	6976	4.72	-5.77
7	30	7408	7406	7373*	7371*	0.47	0.47
8	30	2356	2353	2363	2352*	-0.30	0.04
9	30	2238	2223	2219*	2221*	0.84	0.09
10	30	2364	2380	2380	2373*	-0.67	0.29
11	30	4764	4807	4768	4792*	-0.08	0.31
12	30	4097	4120	4150	4094*	-1.29	0.63
13	50	2430	2445	2427*	2439*	0.12	0.24
14	50	9147	9130	9146*	9142	0.01	-0.17
15	50	2656	2648	2672	2655	-0.60	-0.26
16	50	2805	2789	2793*	2817	0.43	-1.00
17	75	1799	1781	1790*	1786	0.50	-0.28
18	75	2427	2428	2432	2435	-0.21	-0.29
19	100	9019	9044	9240	9161	-2.45	-1.18
20	100	4222	4193	4193*	4166*	0.69	0.64

(tableau 3.15)

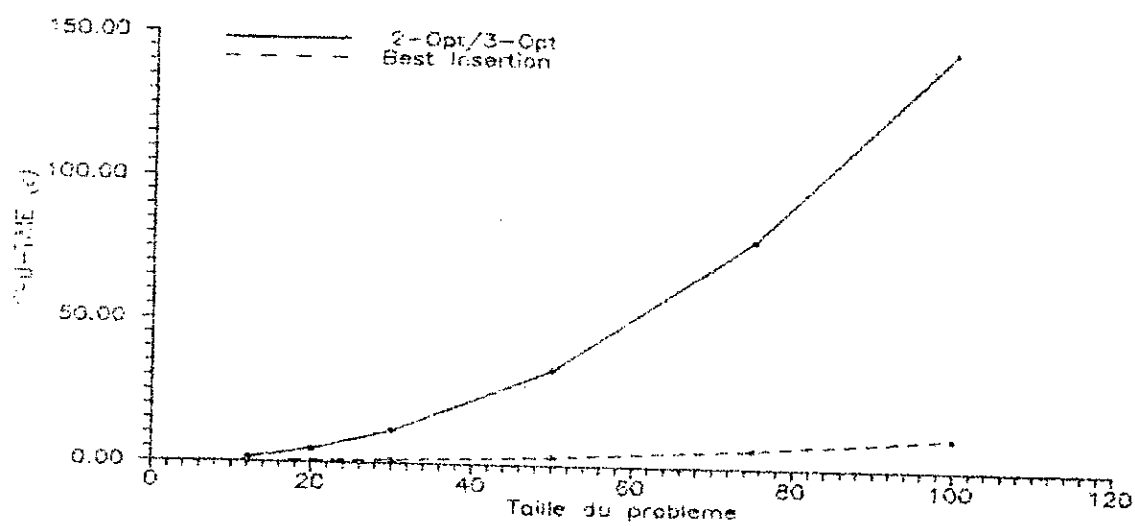
avec:

$$Dev_1 = (SGT_{v1} - SGT_{v2}) / SGT_{v1} * 100$$

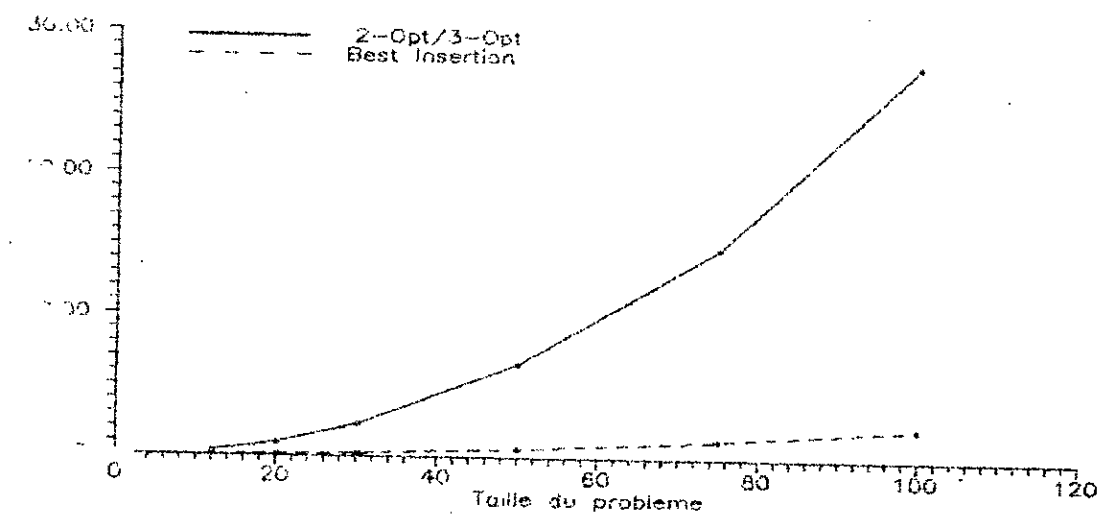
$$Dev_2 = (MGT_{v1} - MGT_{v2}) / MGT_{v1} * 100$$

Les graphes (figure 3.8) montrent le temps CPU consommé par les deux procédures utilisées dans l'optimisation de la tournée initiale: 2-Opt et Best Insertion.

Performances des deux variantes :
 a- 2-Opt/3-Opt
 b- Best Insertion



1- SGT



2- MGT

(figure 3.8)

Tableau comparatif entre les deux variantes:
avec 2-Opt/3-Opt (v1) et
avec la procédure d'insertion optimale (v2)

2- Flottes

Pb.	Taille	SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}
1	12	B^2C^2	B^2C^2	B^2C^2	B^2C^2
2	12	A^3C^1	A^3C^1	A^3C^1	A^3C^1
3	20	$A^1B^2C^1E^2$	$A^1B^2C^1E^2$	$A^1B^2C^1E^2$	$A^1B^2C^1E^2$
4	20	A^1C^2	A^1C^2	A^5B^1	A^6
5	20	E^3	E^3	E^3	$A^1B^1C^2E^2$
6	20	$A^1B^2C^1$	A^6	A^5B^1	A^5B^1
7	30	$B^2C^2D^3$	$B^2C^2D^3$	$B^4C^2D^2$	$B^1C^4D^2$
8	30	C^2D^2	C^2D^2	C^2D^2	C^2D^2
9	30	D^1E^3	D^1E^3	D^1E^3	D^1E^3
10	30	B^1D^5	C^2D^4	C^2D^4	C^2D^4
11	30	B^1C^5	$A^1B^3C^4$	B^1C^5	B^1C^5
12	30	E^6	E^6	E^6	E^6
13	50	$A^4B^4D^1E^1F^3$	$A^2B^3C^2D^1E^1F^3$	$A^1B^3D^1F^4$	$A^5B^3F^4$
14	50	A^7B^1	A^7B^1	A^7B^1	A^7B^1
15	50	A^4B^6	$A^5B^4C^1$	$A^7B^3C^1$	$A^5B^4C^1$
16	50	$A^1B^6C^2$	$A^1B^6C^2$	$A^1B^6C^2$	B^3C^4
17	75	$A^1C^5D^1$	$A^3B^2C^5$	$A^2B^1C^6$	$A^3B^2C^5$
18	75	$B^7C^3D^5$	$A^1B^6C^8D^2$	$A^1B^5C^4D^5$	$A^1B^7C^6D^3$
19	100	$A^{11}B^2$	$A^{11}B^2$	A^{16}	A^9B^3
20	100	A^9B^7	A^9B^7	A^4B^9	A^4B^9

(tableau 3.16)

3.3.8- Conclusion:

Les méthodes de partitionnement de tour semblent donner un résultat satisfaisant, c'est à dire comparable à celui fourni par d'autres méthodes proches. Toutefois, ce résultat a pu être amélioré grâce à l'incorporation de procédures de raffinement dans le processus de partitionnement, au prix d'une augmentation substantielle du temps d'exécution. L'impact de la solution initiale sur la solution finale a été mis en évidence, et plusieurs variantes ont alors été étudiées avec des résultats probants.

3.4- LES SAVINGS:

3.4.1- Introduction:

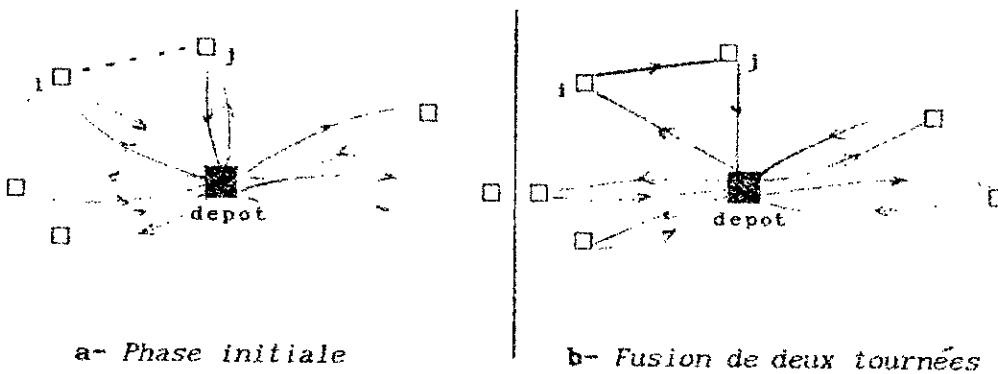
Les approches de résolution basées sur le partitionnement de tour (SGT, MGT) ont montré que les c.v.u avaient un impact direct sur la solution. Cependant, la nature de ces approches de résolution ne permet pas de tirer des conclusions d'ordre général. Comment le faire, en effet, quand on sait que la solution initiale ou le nombre d'itérations, ont une répercussion directe sur la solution finale? L'adaptation d'une autre famille d'approches de résolution, celle des Savings cette fois-ci, part de ce principe fondamental et vise la confirmation éventuelle des résultats précédemment obtenus.

3.4.2- Approches classiques:

Initialement développée par Clarke et Wright (CW) pour le VRP simple, la méthode de résolution basée sur le concept d'économie, gain, ou encore *saving*, a souvent été reprise et étendue à d'autres problèmes, dont le FSMVRP.

Principe de base:

Le principe en est le suivant: On considère au départ que chaque client est desservi à part, ce qui donne autant de tournées qu'il y a de clients dans le système (figure 3.7-a):



(figure 3.7)

Principe de la méthode des Savings

La distance totale parcourue dans ce cas est donnée par:

$$D = 2 * \sum_{i=1}^n C_{0i}$$

n étant le nombre de clients dans le système, et C_{0i} la distance entre le dépôt, noté 0, et le client i .

Remarque:

Dans le cas où la matrice des distances n'est pas symétrique ($C_{0i} \neq C_{i0}$), le principe reste valable, sauf que la distance totale parcourue sera alors égale à:

$$D = \sum_{i=1}^n (C_{0i} + C_{i0})$$

La fusion de deux tournées élémentaires réduit à la fois les coûts fixes (un seul véhicule au lieu de deux), et la distance. Ainsi, La fusion des tournées desservant les clients i et j dans (fig. 3.7-b) permet un gain de distance S_{ij} égal à:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= 2 * C_{0i} + 2 * C_{0j} - (C_{0i} + C_{ij} + C_{0j}) \\ &= C_{0i} + C_{0j} - C_{ij} \end{aligned} \quad (1)$$

La procédure s'applique ensuite à regrouper deux tournées en une seule, donc à éliminer un véhicule, à chaque fois que cela est possible. Les tournées sont alors construites simultanément (approche concurrentielle), ou encore séquentiellement (approche séquentielle). Dans le second cas, une tournée n'est abandonnée que lorsqu'il n'est plus possible de lui concaténer d'autres tournées.

L'algorithme général (CW) est le suivant:

* Calculer l'économie S_{ij} pour toute éventuelle liaison entre deux clients i et j .

* Classer les S_{ij} dans l'ordre décroissant

* Tant que la liste n'est pas vide

Faire

Si les tournées d'extrémités i et j peuvent être fusionnées Alors réaliser la fusion

Fin Si

Fin faire

Fin.

Ne tenant pas compte des coûts fixes associés aux véhicules, cette procédure tend à combiner les tournées jusqu'à ce que la capacité du plus gros véhicule soit saturée, ce qui ne conduit pas forcément à la solution optimale du point de vue coût. L'introduction des coûts fixes s'avère ainsi nécessaire. Le concept des *savings* a donc été adapté, donnant naissance à plusieurs variantes: *The Combined Savings (CS)*, *The Optimistic Opportunity Savings (OOS)*, *The Realistic Opportunity Savings (ROS et ROS- γ)*, pour ne citer que les plus connues.

3.4.2.a- *The Combined Savings Approach (CS)*:

Notons par $F(z)$ le coût fixe du plus petit véhicule pouvant desservir une tournée de demande totale z . Le nouveau *saving*, qui tient compte d'une éventuelle économie sur le coût fixe du véhicule en plus de celle sur la distance, s'exprime alors par:

$$S_{ij}^{CS} = S_{ij}^{CW} + F(z_i) + F(z_j) - F(z_i + z_j) \quad (2)$$

ou $S_{ij}^{CW} = C_{0i} + C_{0j} - C_{ij}$ représente l'économie de distance définie dans l'approche de base (CW).

Le problème posé par l'approche précédente est ainsi résolu, mais au prix d'un nouveau problème! En effet, tant que la fusion de deux tournées permet de conserver l'un des véhicules initialement utilisés, le processus de *combinaison* peut se dérouler normalement, réduisant au fur et à mesure le coût total. Malheureusement, dès que le recours à un

véhicule de capacité supérieure devient nécessaire, la fusion est abandonnée en raison de l'augmentation brutale des coûts associés au nouveau véhicule. Elle n'a lieu que lorsque le coût additionnel entraîné par l'utilisation d'un véhicule de plus fort tonnage est immédiatement amorti, ce qui n'est pas toujours possible. C'est ce problème que la variante suivante s'efforcera de régler.

3.5.2.b- *The Opportunity Savings Approach (OS):*

Le recours à un véhicule de plus fort tonnage donne un surplus de capacité qui, tout en ne pouvant pas être entièrement utilisé au moment de la combinaison des deux tournées d'origine, devra être payé sur le champ. Or, si l'opération n'est pas immédiatement rentable, elle pourrait l'être plus tard, si toutefois elle n'est pas exclue dès le départ. Il faut donc compenser d'une certaine façon le coût additionnel lié à la capacité non utilisée. Deux variantes sont alors possibles:

* *The Optimistic Opportunity Savings Approach (OOS):*

Le facteur de compensation est défini comme étant le coût du plus petit véhicule ayant une capacité au moins égale à la capacité non exploitée du nouveau véhicule. Cet algorithme est dit "optimiste" car il suppose qu'il existe toujours une tournée pour absorber le surplus de capacité résultant, et cela lors d'une future opération de fusion. Le *saving* devient alors:

$$S_{ij}^{oos} = S_{ij}^{cs} + F \left(P(z_1 + z_j) - (z_1 + z_j) \right) \quad (3)$$

où $P(z)$ représente la capacité du plus petit véhicule pouvant desservir une demande z .

Bien entendu, il peut arriver que le surplus de capacité ne soit pas effectivement absorbé par la suite. Si tel est le cas, la solution finale ne sera pas la meilleure. Nous arrivons ainsi à la seconde variante.

* *The Realistic Opportunity Savings Approach (ROS):*

Si l'approche CS peut rejeter des tournées "potentiellement bonnes" par excès de prudence, l'approche OOS risque, en revanche, de conduire à la formation de tournées non avantageuses, en encourageant parfois à tort certaines opérations de fusion. Il faudrait donc que la compensation n'ait lieu que lorsque l'opération de combinaison est effectivement profitable. Ainsi, cette variante n'introduit de compensation que lorsque la fusion requiert l'utilisation d'un véhicule de capacité supérieure à celle de chacun des deux véhicules initialement utilisés. L'expression du *saving* devient alors:

$$S_{ij}^{ros} = \begin{cases} S_{ij}^{cs} + F' \left\{ P(z_1 + z_j) - (z_1 + z_j) \right\} & \text{SI } P(z_1 + z_j) > \text{Max} \left\{ P(z_1), P(z_j) \right\} \\ S_{ij}^{cs} & \text{SINON} \end{cases} \quad (4)$$

ou $F'(z)$ représente le coût fixe du plus grand véhicule de capacité inférieure ou égale à la demande z .

En fait, quelle que soit la variante de *saving* utilisée jusque-là, une combinaison devient définitive dès le moment où elle est sélectionnée, quelle que soit sa valeur "intrinsèque". Ainsi, certaines mauvaises combinaisons seront quand même retenues, alors que d'autres, moins bonnes *a priori* mais meilleures *a posteriori*, seront exclues. En d'autres termes, l'approche des *savings* ignore l'impact futur de la concrétisation d'une liaison donnée. L'incorporation d'un paramètre variable dans la formule de *saving* tend à remédier à cet inconvénient. Ce paramètre, γ , donnera plus ou moins d'importance à la distance entre noeuds, ce qui aura pour effet de générer des tournées radiales ou circonférentielles. La formule de *saving* ROS- γ s'écrit alors:

$$S_{ij}^{ros-\gamma} = S_{ij}^{ros} + (1-\gamma) * C_{ij} \quad (5)$$

Lorsque γ vaut 1, nous retrouvons la formule ROS. Généralement, γ varie entre 0.0 et 3.0, avec un certain pas qui déterminera le nombre d'itérations du processus [27] (la valeur 0.25 a été retenue pour ce

pas, ce qui entraîne 31 itérations au total). Il va de soit que la solution nécessitera alors beaucoup plus de temps.

Deux variantes seront étudiées: l'une sera dite "Savings aux extrémités" car ne calculant l'économie qu'à partir des clients formant les extrémités des tournées à combiner (concaténation de tournées), et l'autre, "Saving total" qui considère la fusion de tournées au sens général. L'économie de distance réalisée lors de la fusion s'écrit alors comme suit:

$$\bar{S}_{ij}^{cw} = TSP(N_i) + TSP(N_j) - TSP(N_U) \quad (6)$$

où:

N_U est la tournée obtenue par fusion des deux tournées N_i et N_j .

$TSP(N_i)$ est la longueur de la tournée N_i . Cette longueur peut être déterminée par résolution d'un problème de voyageur de commerce sur N_i ou encore en utilisant la procédure *r-optimal*, *Or-Opt*, etc ...

Les différentes variantes CS, OOS, ROS et ROS(γ) s'obtiennent alors simplement en intégrant cette expression de base (6) dans les formules de savings correspondantes.

3.4.3- Mise en oeuvre et résultats:

Le comportement général de ces approches est semblable à celui des algorithmes basés sur le partitionnement de tour, bien que les résultats soient de moins bonne qualité (coûts généralement supérieurs à ceux obtenus par SGT et MGT).

Approche des Savings

Variante 1: Saving aux extrémités

Variante 2: Saving Total

Probleme	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev %
		Coût ₁	Flotte ₁	Coût ₂	Flotte ₂	
1	12	708	B ² C ²	695*	B ² C ²	1.84
2	12	754	A ³ C ¹	753*	A ³ C ¹	0.13
3	20	1092	B ¹ C ² D ² E ¹	1059*	A ¹ B ² C ¹ E ²	3.02
4	20	7380	A ¹ C ²	7352*	A ¹ C ²	0.38
5	20	1171*	B ² C ² E ²	1175	A ¹ C ³ E ²	-0.34
6	20	7410*	A ¹ B ² C ¹	7437	A ⁴ B ²	-0.36
7	30	7825	C ² D ⁴	7460*	B ² C ² D ³	4.66
8	30	2643*	C ² D ²	2696	C ² D ²	-2.01
9	30	2571	D ¹ E ³	2480*	D ¹ E ³	3.54
10	30	2807	C ² D ⁴	2715*	B ¹ D ⁵	3.28
11	30	5107	B ¹ C ⁵	5051*	A ¹ B ³ C ⁴	1.10
12	30	4576	D ¹ E ⁴ F ¹	4576*	D ¹ E ⁴ F ¹	0.00
13	50	2563*	A ⁴ B ⁴ D ¹ E ¹ F ³	2578	A ⁴ B ⁴ D ¹ E ¹ F ³	-0.59
14	50	9176*	A ⁷ B ¹	9589	A ³ B ⁴	-4.50
15	50	2736	A ⁵ B ⁴ C ¹	2670*	A ⁴ B ⁶	2.41
16	50	3022	B ³ C ⁴	3022*	B ³ C ⁴	0.00
17	75	2012*	A ² B ¹ C ⁶	2015	A ² B ¹ C ⁶	-0.15
18	75	2576	A ¹ B ⁷ C ³ D ⁵	2567*	A ¹ B ⁶ C ⁵ D ⁴	0.33
19	100	9081	A ¹⁶	9062*	A ¹⁶	0.21
20	100	4262	A ⁸ B ⁶ C ¹	4135*	A ⁹ B ⁷	2.98

(tableau 3.17)

*' indique la meilleure solution d'un problème donné

$$\text{Dev} = (\text{Coût}_1 - \text{Coût}_2) / \text{Coût}_1 * 100$$

La variante *saving total* a permis l'obtention de la meilleure solution dans 14 problèmes sur 20. Pour les autres problèmes, l'écart relatif maximal est inférieur à 5%.

3.5- Etude Comparative entre les approches de partitionnement de tour et celles des savings:

Deux classes d'approches de résolution ont été élaborées jusqu'ici: partitionnement de tour (*SGT* et *MGT*), et *savings* (*saving aux extrémités* et *saving total*). Il serait intéressant d'étudier leur comportement général afin de déterminer les performances de chacune. A cet effet, nous avons rapporté dans un même tableau (*tableau 3.18*) le coût des solutions obtenues par ces différents algorithmes.

Comportement général:

MGT semble dominer de loin les autres approches, puisqu'elle donne la meilleure solution pour 14 problèmes sur 20. *SGT* arrive en deuxième position, avec 8 meilleures solutions. Les approches basées sur le principe des *savings* donnent de moins bons résultats.

Statistiques générales concernant les différentes approches:

Le tableau 3.20 donne quelques statistiques générales concernant les différentes approches adoptées. Nous observons que les écarts maximums sont atteints (13.89 et 14.31) pour le même problème (problème N° 6) pour lequel *MGT* a obtenu une très bonne solution, relativement aux autres méthodes.

Comportement général des différentes heuristiques utilisées

1- Coûts des solutions obtenues

Probleme	Taille	Partionnement		Savings	
		SGT	MGT	Sav ₁	Sav ₂
1	12	633*	633*	708	695
2	12	721*	721*	754	753
3	20	1001*	1002	1092	1059
4	20	7325*	7325*	7380	7352
5	20	1109*	1126	1171	1175
6	20	7363	6506*	7410	7437
7	30	7454	7451*	7825	7460
8	30	2539	2536*	2643	2696
9	30	2452	2434*	2571	2480
10	30	2659	2657*	2807	2715
11	30	4911	4897*	5107	5051
12	30	4426*	4456	4576	4576
13	50	2574	2606	2563*	2578
14	50	9064	9049*	9176	9589
15	50	2630*	2637	2736	2670
16	50	2833	2820*	3022	3022
17	75	1929	1859*	2012	2015
18	75	2472	2436*	2576	2567
19	100	8889*	8912	9081	9062
20	100	4142	4130*	4262	4135

(tableau 3.18)

* : meilleure solution pour un problème donné

Sav₁ : Saving aux extrémités

Sav₂ : Saving total

Le tableau 3.19 donne les écarts relatifs (en %) entre les solutions obtenues par chaque approche et la meilleure solution de chaque problème.

Comportement général des différentes heuristiques utilisées
 2- Ecart relatif par rapport à la meilleure solution (%)

Probleme	Taille	Partionnement		Savings	
		SGT	MGT	Sav ₁	Sav ₂
1	12	0.00	0.00	11.85	9.79
2	12	0.00	0.00	4.58	4.44
3	20	0.00	0.10	9.89	5.79
4	20	0.00	0.00	0.75	0.37
5	20	0.00	1.53	5.59	5.95
6	20	13.17	0.00	13.89	14.31
7	30	0.04	0.00	5.02	0.12
8	30	0.12	0.00	4.22	6.31
9	30	0.74	0.00	5.63	1.89
10	30	0.08	0.00	5.65	2.18
11	30	0.29	0.00	4.29	3.14
12	30	0.00	0.68	3.39	3.39
13	50	0.43	1.68	0.00	0.59
14	50	0.17	0.00	1.40	5.97
15	50	0.00	0.27	4.03	1.52
16	50	0.46	0.00	7.16	7.16
17	75	3.77	0.00	8.23	8.39
18	75	1.48	0.00	5.75	5.38
19	100	0.00	0.26	2.16	1.95
20	100	0.29	0.00	3.20	0.12

(tableau 3.19)

Statistiques générales

Methode	Moyenne %	Ecart Type %	Pire/2 ^{eme} Pire	Frequence
MGT	1.05	2.91	1.68/1.53	14
SGT	0.23	0.49	13.17/3.77	08
Sav ₁	5.33	3.43	13.89/11.85	01
Sav ₂	4.44	3.55	14.31/9.79	00

(tableau 3.20)

3.6- Conclusion:

Les approches basées sur le principe d'économie ont donné des résultats relativement moins bons que ceux obtenus par partitionnement de tour géant (SGT et MGT). La variante ROS(γ) est celle qui a donné les meilleures solutions, et pour cause: le processus est réitéré plusieurs reprises, ce qui avantage manifestement l'approche en question.

L'objectif de ce chapitre était l'élaboration, la mise en oeuvre et la validation d'algorithmes de résolution du problème FSMVRP. Ces algorithmes devaient être suffisamment flexibles pour permettre l'incorporation de nouveaux paramètres. Les résultats obtenus témoignent de performances appréciables, notamment en ce qui concerne les techniques de partitionnement de tour géant. Toutefois, connaissant le comportement parfois capricieux des heuristiques (ou tout au moins de certaines d'entre-elles), il serait sans doute utile de porter l'étude sur d'autres problèmes que ceux considérés ici.

CHAPITRE IV

IMPACT DU COUT VARIABLE UNITAIRE

SUR LA COMPOSITION DE LA FLOTTE

ET SUR LE COUT TOTAL DE DISTRIBUTION

4.1- Introduction

Les modèles standards utilisés dans les problèmes FSMVRP ne tiennent pas compte de la variation du coût unitaire de distribution (c.v.u), lequel cout est généralement pris égal à l'unité (Golden et al. [27], Gheysens et al. [22], Salhi et Rand [63], Desrochers et Verhoog [13, 14]. L'hypothèse admise alors est que le coût de transport est indépendant du type de véhicule utilisé. Ainsi, ces modèles associent implicitement le même coût unitaire de distribution à tous les véhicules, sans distinction de type. Ce coût est tantôt pris égal à l'unité, tantôt à une autre valeur moyenne directement injectée dans la matrice des coûts. Plusieurs raisons justifient cette simplification, parmi lesquelles nous citons en particulier:

- a- l'erreur dont sont souvent entachés ces coûts dans la pratique, et
- b- l'absence de méthodes de résolution exactes.

A priori, nous serions tentés de croire que la valeur considérée par Golden et al. permet, en tant que valeur moyenne, d'équilibrer entre eux les différents coûts unitaires variables que l'on pourrait considérer. Il y aurait ainsi compensation des économies qui découleraient des véhicules de faible capacité (coût variable unitaire faible) par les surcoûts dus aux véhicules de plus forte capacité (ayant généralement des coûts variables unitaires élevés), bien que cela ne nous renseigne pas sur la composition de la flotte. Il est alors légitime de s'interroger sur l'impact de cette approximation sur la solution d'un problème donné.

L'hypothèse selon laquelle il y aurait équilibre entre les coûts justifierait, si elle venait à se confirmer, le recours exclusif aux mêmes c.v.u. Mais qu'en est-il réellement? La réponse à cette question passe certainement par l'incorporation du c.v.u dans les modèles utilisés.

4.2- Modèle mathématique considéré:

Le modèle retenu est celui défini par Gheysens, Golden et Assad [22], dans lequel nous introduisons une légère modification afin de tenir compte du c.v.u.

La fonction objective s'écrit alors:

$$\text{Min} \sum_{k=1}^T f_k \sum_{j=1}^n x_{0j}^k + \sum_{k=1}^T \sum_{l=0}^D \sum_{j=0}^n c_{lj}^k x_{lj}^k \quad (4.1)$$

Nous avons ainsi deux composantes, dont l'une exprime les coûts fixes, et l'autre les coûts variables.

Le paramètre c_{ij}^k qui dépend du véhicule utilisé, est donné par:

$$c_{ij}^k = \alpha_k * c_{ij} \quad (4.2)$$

où:

α_k est le coût variable unitaire associé au véhicule de type k, et c_{ij} la distance entre les sommets i et j.

Ce problème est assujéti aux contraintes classiques déjà définies en section 2.6.2.

4.3- Méthodologie suivie:

La manière la plus simple de contourner le problème posé par les c.v.u est, semble-t-il, d'ajuster la solution donnée par les modèles standards -lesquels considèrent les c.v.u comme constants- en utilisant les c.v.u réels. Toutefois, le risque de se retrouver avec des solutions sous-optimales, voire même inadmissibles rend cette approche peu réaliste.

La méthodologie suivie consiste à incorporer d'emblée le c.v.u dans certains modèles classiques que nous adapterons au besoin, et à observer l'effet de ce facteur sur la solution du problème. Nous essayerons de montrer à quel point la méthodologie basée sur l'utilisation de valeurs moyennes pour le coût unitaire de distribution peut être inappropriée.

L'impact sera mesuré en terme de changement dans le coût total de la flotte et dans la flotte elle-même. Son étude se fera par comparaison entre deux variantes de chaque problème, obtenues en utilisant des c.v.u différents. Ainsi, pour chaque problème considéré, il faudra:

- a- Déterminer la solution obtenue avec des c.v.u constants
- b- Ajuster le coût total de la solution en utilisant les c.v.u variables (coût₁ et flotte₁).
- c- Déterminer la solution obtenue avec des c.v.u variables (coût₂ et flotte₂).

d- Calculer la déviation $dev = \frac{Coût_1 - Coût_2}{Coût_2} * 100$ (4.3)

L'obtention des solutions se fait à l'aide des approches développées dans le chapitre précédent, et qui se répartissent en deux classes: les algorithmes de partitionnement de tour, et ceux des savings. Ces algorithmes ont été adaptés afin de tenir compte des c.v.u. et d'en montrer l'impact sur la composition et le coût de la flotte de véhicules utilisée, et sur les tournées de distribution.

Les problèmes tests seront traités à l'aide des algorithmes SGT et MGT dans une première étape, puis les résultats obtenus seront confrontés à ceux donnés par les approches des savings. Enfin, les résultats des différentes méthodes seront comparés entre-eux. Notons que les coûts unitaires variables ne sont pas donnés avec ces problèmes tests, et qu'il faudra les déterminer au préalable.

Problèmes posés par la détermination des c.v.u

Dans la pratique, le coût variable unitaire de distribution dépend de plusieurs facteurs et particulièrement de la capacité du véhicule (la

consommation de carburant, par exemple, croit avec le tonnage). L'âge du véhicule peut avoir, lui aussi, un rôle non négligeable dans l'évaluation de ce coût.

Présents dans la fonction objective, ces coûts influent directement sur la solution finale du problème. Si des valeurs arbitraires suffissent pour mettre en évidence une éventuelle influence (*qualitative*), seules des valeurs réalistes (qui tiennent compte des différentes caractéristiques des véhicules) peuvent, en revanche, témoigner de la nature exacte (*quantitative*) de cet impact. Craignant de tirer hâtivement des conclusions (qui plus est sont de portée générale) à partir de cas particuliers, nous avons jugé nécessaire de considérer plusieurs variantes.

La tentative de déterminer ces coûts unitaires de manière analytique, en se basant sur la capacité des véhicules et sur leur coût fixe, a vite été abandonnée, car l'écart observé entre les différents coûts était trop important dans certains cas, ce qui aurait eu pour effet le "rejet" systématique des véhicules de fort tonnage. Dans une autre partie de cette étude, nous utiliserons un modèle linéaire basé uniquement sur la capacité des véhicules, pour la détermination des ces coûts.

4.4- ADAPTATION DES APPROCHES DE RESOLUTION

4.4.1- Adaptation des algorithmes de partitionnement de tour:

La prise en compte du c.v.u est obtenue en transformant le modèle élaboré dans le chapitre précédent (sections 3.3 et 3.4). En considérant les mêmes données de base, nous introduisons un nouveau paramètre, $\alpha(i)$, dénotant le cout variable unitaire associé au véhicule de type i . Sous les mêmes considérations précédentes, le coût total de distribution (composantes fixe et variable) associé à la route commençant et s'achevant au dépôt (noté 0) et formée successivement des clients $\{k, k+1, \dots, m\}$ se définit comme suit:

$$\text{SI } \left\{ D > \text{Max}_{i=1, \dots, Nt} \{ Y(i) \} \text{ OU } L_{km} > C_{\text{max}} \right\}$$

ALORS $T_c(k, m) = \infty$

SINON $T_c(k, m) = F(s) + \alpha(s) * L_{km}$ (4.4)

avec s tel que: $Y(s-1) < D \leq Y(s)$

Ce nouveau coût défini, le processus de traitement se déroule de la même manière qu'avant. Il est cependant nécessaire d'introduire le nouveau paramètre (le c.v.u) dans les procédures de raffinement développées avant.

Adaptation des procédures de raffinement au nouveau modèle

Fusion de routes:

La fusion de tournées doit tenir compte des contraintes de longueur totale (ou durée totale), de charge du véhicule, et aussi du coût résultant. Telles qu'elles ont été définies, les deux premières contraintes ne sont pas perturbées par l'introduction du c.v.u. Par contre, le coût total de la tournée doit être ré-évalué dans le nouveau contexte. Les coûts des tournées initiales à fusionner s'écrivent maintenant de la manière suivante:

$$Ct_1 = F(v1) + \alpha(v1) * Coût_1$$

$$Ct_2 = F(v2) + \alpha(v2) * Coût_2$$

$\alpha(v1)$ et $\alpha(v2)$ étant les coûts variables unitaires associés aux véhicules desservant les tournées 1 et 2 respectivement.

Le coût relatif à la fusion de ces tournées est donné par:

$$Ct_f = F(s) + \alpha(s) * NCoût$$

La condition sur le coût de distribution reste alors:

$$Ct_f \leq Ct_1 + Ct_2$$

L'adaptation des autres procédures de raffinement s'obtient de la même manière: le principe est conservé, mais l'expression des coûts des tournées change.

4.4.2- Adaptation des algorithmes de savings:

Introduction:

Les approches précédentes (CW, CS, OOS, ROS et ROS(γ)) ne tenaient pas compte des c.v.u associés aux différents types de véhicules utilisés. Aussi, une adaptation préalable est-elle nécessaire.

Deux variantes seront étudiées: l'une sera dite "Savings aux extrémités" car ne calculant l'économie qu'à partir des clients formant les extrémités des tournées à combiner, et l'autre, "Saving total" (voir Salhi et al. [61]).

Principe de base:

L'approche des savings part d'une solution initiale dans laquelle chaque client est desservi par un véhicule propre, puis la transforme progressivement jusqu'à obtention d'un optimum local. Considérons maintenant deux clients i et j , desservis individuellement par deux véhicules I et J de c.v.u α_i et α_j . Le coût variable de distribution est alors donné par:

$$\alpha_i * (2 * C_{0i}) + \alpha_j * (2 * C_{0j})$$

Si les clients i et j peuvent être desservis ensemble par le même véhicule K , de c.v.u α_k , il en découlera une économie de coûts variables égale à:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \alpha_i * (2 * C_{0i}) + \alpha_j * (2 * C_{0j}) - \alpha_k * (C_{0i} + C_{0j} - C_{ij}) \\ &= (2 * \alpha_i - \alpha_k) * C_{0i} + (2 * \alpha_j - \alpha_k) * C_{0j} - \alpha_k * C_{ij} \quad (4.5) \end{aligned}$$

avec: $\alpha_k \geq \text{Max}(\alpha_i, \alpha_j)$

Cette expression, qui est à la base de la première variante étudiée, sera dite "Savings aux extrémités". En effet, l'économie ne tient compte ici que des clients i et j se trouvant aux extrémités des tournées à combiner.

Notons qu'elle se ramène, en prenant des c.v.u unitaires, à l'expression classique des savings:

$$S_{ij} = C_{0i} + C_{0j} - C_{ij}$$

En fait, dès que l'une des deux routes (ou les deux) comprend plus d'un client, la formule d'économie doit être généralisée pour tenir compte du gain réel qui découle de toute éventuelle combinaison de routes.

Notation:

Soit N_i l'ensemble de clients formant la tournée i , et soit encore $TSP(N_i)$ la longueur de cette tournée. Cette longueur peut être obtenue de diverses manières: résolution d'un problème de voyageur de commerce sur N_i , r -optimal, Or-opt, ...

Au démarrage de l'algorithme, nous avons:

$N_i = \{i\}$ et $TSP(N_i) = C_{0i} + C_{i0}$ ($= 2 * C_{0i}$ lorsque C est symétrique).

Après quelques itérations, certaines tournées vont desservir plus d'un client à la fois. Soient N_i et N_j deux tournées générales, desservies par les véhicules v_i et v_j dont les c.v.u sont respectivement α_{v_i} et α_{v_j} .

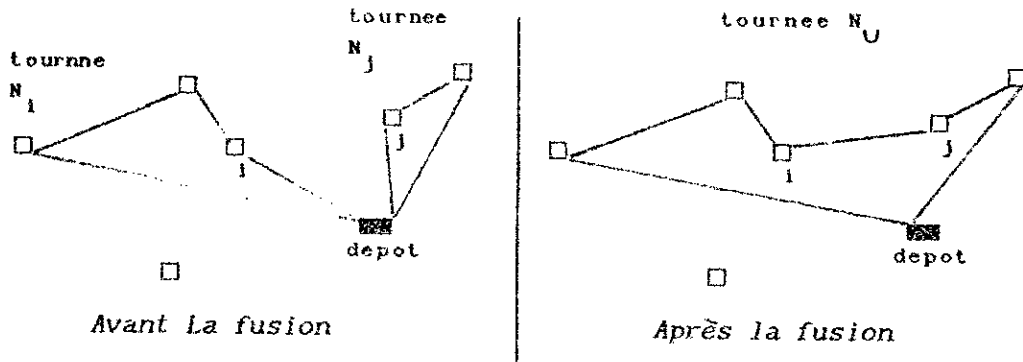
Notons par N_{ij} la tournée admissible (quand elle existe) résultant de la combinaison des tournées N_i et N_j :

$$N_{ij} = N_i \cup N_j$$

Soit enfin v_{ij} le véhicule desservant la tournée N_{ij} .

Nous avons alors:

$$\alpha_{v_U} = \text{Max} \left\{ \alpha_{v_i}, \alpha_{v_j} \right\}$$



(figure 4.1)

Combinaison de deux tournées (concaténation)

L'économie réalisée lors de la fusion s'écrit alors comme suit:

$$\bar{S}_{ij}^{cw} = \alpha_{v_i} * \text{TSP}(N_i) + \alpha_{v_j} * \text{TSP}(N_j) - \alpha_{v_U} * \text{TSP}(N_U) \quad (4.6)$$

La combinaison de deux tournées ne se fait donc plus uniquement par simple concaténation bout à bout, ce qui réduit la longueur totale, mais rallonge le temps de traitement. C'est cette expression qui sera à la base des variantes dites de "Saving total".

L'adaptation des variantes CS, OOS, ROS et ROS(γ) se ramène alors à intégrer cette nouvelle formule de *savings* dans les différentes expressions utilisées:

$$\bar{S}_{ij}^{cs} = \bar{S}_{ij}^{cw} + F(z_i) + F(z_j) - F(z_i + z_j) \quad (4.7)$$

$$\bar{S}_{ij}^{oos} = \bar{S}_{ij}^{cs} + F\left(P(z_i + z_j) - (z_i + z_j)\right) \quad (4.8)$$

$$\bar{S}_{ij}^{ros} = \begin{cases} \bar{S}_{ij}^{cs} + F\left(P(z_i + z_j) - (z_i + z_j)\right) & \text{SI } P(z_i + z_j) > \text{Max}\{P(z_i), P(z_j)\} \\ \bar{S}_{ij}^{cs} & \text{SINON} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\bar{S}_{1j}^{\text{ros}-\gamma} = \bar{S}_{1j}^{\text{ros}} + (1-\gamma) * \text{TSP}(N_U) \quad (4.10)$$

z_1 étant la demande totale de la tournée N_1 .

Remarque:

Dans une étude récente (1990), Desrochers et Verhoog [14] ont proposé une autre méthode basée sur le principe de couplage (*matching*). Plusieurs variantes similaires dans le principe à celles des *savings* de Golden et al. ont été présentées. Parmi ces variantes, ROM- ρ est celle qui donne les meilleurs résultats. Elle est définie comme suit:

$$S_{1j}^{\text{ROM}-\rho} = S_{1j}^{\text{ROS}} + \rho * \left(|N_1| + |N_j| \right) \quad (4.11)$$

Cette nouvelle variante valorise le nombre de clients dans une route. Le paramètre ρ est la récompense obtenue pour chaque client supplémentaire inséré dans une route. Lorsque ρ est positif, la combinaison touche en priorité les tournées desservant un grand nombre de clients, ce qui permet d'exploiter au mieux la capacité du véhicule utilisé. Si ρ est négatif, la variante tend à construire des tournées équilibrées (routes desservant le même nombre de clients). Les auteurs ont testé leur variante en faisant varier ρ de -15 à 30, par pas de 5. Les résultats obtenus alors sont toutefois moins bons que ceux obtenus par Golden et al. [27].

Cas particulier: concaténation de deux tournées

En règle générale, la combinaison de deux tournées ne se fait pas uniquement par simple concaténation "bout à bout". Dans le cas d'une opération de concaténation, nous pouvons écrire:

$$\bar{S}_{1j}^{\text{CW}} = \alpha_{v_1} * \text{Lg}(N_1) + \alpha_{v_j} * \text{Lg}(N_j) - \alpha_{v_U} * (\text{Lg}(N_1) + \text{Lg}(N_j) - C_{01} - C_{0j} + C_{1j}) \quad (4.12)$$

où $\text{Lg}(N_1)$ représente la longueur de la tournée N_1 .

Les variantes CS, OOS et ROS(γ) se dérivent simplement en intégrant l'expression de saving précédente dans les formules respectives.

4.5- ETUDE DE L'IMPACT DU COUT VARIABLE UNITAIRE SUR LA SOLUTION

4.5.1- Etude basée sur les approches de partitionnement de tour:

Première variante:

Dans une première variante, destinée essentiellement à mettre en évidence l'impact étudié, nous associons à ces coûts des valeurs arbitraires croissant avec la capacité. Ces valeurs sont prises autour de l'unité, avec un pas de 15%. Le tableau suivant donne les différents coûts utilisés:

*Coûts variables unitaires
(Première Variante)*

Nombre de types de véhicules	Coûts variables unitaires utilisés					
3	0.85	1.00	1.15			
4	0.85	1.00	1.15	1.30		
5	0.70	0.85	1.00	1.15	1.30	
6	0.70	0.85	1.00	1.15	1.30	1.45

(tableau 4.1)

Notons que ces coûts favorisent les véhicules de faible capacité, au détriment de ceux de capacité plus élevée, puisqu'ils réduisent le coût de distribution (du moins la composante variable) pour les premiers, et gonflent celui des autres. Nous pouvons donc prévoir le type de changement -si toutefois il y a changement- consécutif à l'utilisation de ces derniers coûts: la disparition, dans la flotte, des véhicules de fort tonnage, donc de c.v.u élevé. En fait, comme l'élimination totale n'est pas toujours possible, il y a substitution "jusqu'à équilibre" des véhicules de capacité élevée par ceux de faible tonnage.

Nos observations vont porter encore une fois sur les vingt problèmes tests, en considérant les c.v.u définis précédemment. Le tableau ci-dessous montre à la fois les résultats obtenus par SGT et M. avec un c.v.u fixe (pris égal à 1 dans la variante 1), puis avec des c.v.u variant autour de l'unité par pas de 15% dans la deuxième variante.

Impact du cout variable unitaire sur la flotte

Variante 1: c.v.u = 1

Variante 2: c.v.u variant par pas de 15% autour de l'unité

1- Coûts

Probleme	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev. % ₁	Dev. % ₂
		SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}		
1	12	633	633	633	631	0.00	0.32
2	12	721	721	721	721	0.00	0.00
3	20	1001	1002	974	974	2.70	2.79
4	20	7325	7325	6848	6848	6.51	6.51
5	20	1109	1126	1081	1076	2.52	4.44
6	20	7363	6506	6449	6506	12.41	0.00
7	30	7454	7451	7342	7319	1.50	1.77
8	30	2539	2536	2538	2535	0.04	0.04
9	30	2452	2434	2441	2428	0.45	0.25
10	30	2659	2657	2660	2657	-0.04	0.00
11	30	4911	4897	4911	4897	0.00	0.00
12	30	4426	4456	4476	4439	-1.13	0.38
13	50	2574	2606	2556	2552	0.70	2.07
14	50	9064	9049	9147	9130	-0.92	-0.89
15	50	2630	2637	2584	2574	1.75	2.39
16	50	2833	2820	2833	2820	0.00	0.00
17	75	1929	1859	1863	1865	3.42	-0.32
18	75	2472	2436	2422	2389	2.02	1.93
19	100	8889	8912	8889	8912	0.00	0.00
20	100	4142	4130	4120	4107	0.53	0.55

(tableau 4.2)

La solution correspondant à la variante 1 est ajustée à l'aide des coûts unitaires variables utilisés dans la variante 2, afin de permettre la comparaison.

La différence entre les valeurs obtenues n'est pas très importante, bien que les c.v.u constants (tous égaux à "1") donnent des coûts plus

élevés (dans 12 problèmes, aussi bien pour SGT que pour MGT), alors que le coût total reste inchangé dans 5 problèmes pour SGT et 6 pour MGT. En fait, il faut s'intéresser surtout aux changements pouvant toucher la composition de la flotte.

2- Flottes

Pb.	Taille	SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}
1	12	B^2C^2	B^2C^2	B^2C^2	B^2C^2
2	12	A^3C^1	A^3C^1	A^3C^1	A^3C^1
3	20	$A^1B^2C^1E^2$	$A^1B^2C^1E^2$	$A^3B^3C^2D^2$ *	$A^3B^3C^2D^2$ *
4	20	A^1C^2	A^1C^2	A^5B^1 *	A^5B^1 *
5	20	E^3	E^3	$A^1B^1C^2E^2$ *	$A^1B^1C^2E^2$ *
6	20	$A^1B^2C^1$	A^6	A^6 *	A^6
7	30	$B^2C^2D^3$	$B^2C^2D^3$	$A^4B^3C^3D^1$ *	$A^3B^5C^2D^1$ *
8	30	C^2D^2	C^2D^2	C^2D^2	C^2D^2
9	30	D^1E^3	D^1E^3	$B^1C^2D^2E^1$ *	D^1E^3
10	30	B^1D^5	C^2D^4	C^2D^4 *	C^2D^4
11	30	B^1C^5	$A^1B^3C^4$	B^1C^5	$A^1B^3C^4$
12	30	E^6	E^6	$A^1C^1E^4F^1$ *	$B^2D^2E^4$ *
13	50	$A^4B^4D^1E^1F^3$	$A^2B^3C^2D^1E^1F^3$	$A^6B^7C^3E^3F^1$ *	$A^8B^6C^2D^1E^1F^2$ *
14	50	A^7B^1	A^7B^1	A^7B^1	A^7B^1
15	50	A^4B^6	$A^5B^4C^1$	$A^{11}B^1C^1$ *	A^8B^4 *
16	50	$A^1B^6C^2$	$A^1B^6C^2$	$A^1B^6C^2$	$A^1B^6C^2$
17	75	$A^1C^5D^1$	$A^3B^2C^5$	$A^2B^6C^3$ *	$A^7B^4C^3$ *
18	75	$B^7C^3D^5$	$A^1B^6C^8D^2$	$A^2B^16C^6$ *	$A^1B^{12}C^8$ *
19	100	$A^{11}B^2$	$A^{11}B^2$	$A^{11}B^2$	$A^{11}B^2$
20	100	A^9B^7	A^9B^7	$A^{14}B^5$ *	$A^{19}B^3$ *

(tableau 4.3)

*' indique un changement dans la flotte.

Nous observons ainsi que la flotte a changé dans 13 problèmes pour SGT, et 10 pour MGT. Le tableau (tab. 4.4) donne la taille de chaque flotte, dans les différents cas de figure.

Impact du cout variable unitaire sur la taille de la flotte

Pb.	Taille	SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}
1	12	4	4	4	4
2	12	4	4	4	4
3	20	6	6	10 *	10 *
4	20	3	3	6 *	6 *
5	20	3	3	6 *	6 *
6	20	4	6	6 *	6
7	30	7	7	11 *	11 *
8	30	4	4	4	4
9	30	4	4	6 *	4
10	30	6	6	6	6
11	30	6	8	6	8
12	30	6	6	7 *	8 *
13	50	13	12	20 *	20 *
14	50	8	8	8	8
15	50	10	10	13 *	12 *
16	50	9	9	9	9
17	75	7	10	11 *	14 *
18	75	15	17	24 *	21 *
19	100	13	13	13	13
20	100	16	16	19 *	22 *

(tableau 4.4)

'*' indique un changement dans la taille de la flotte.

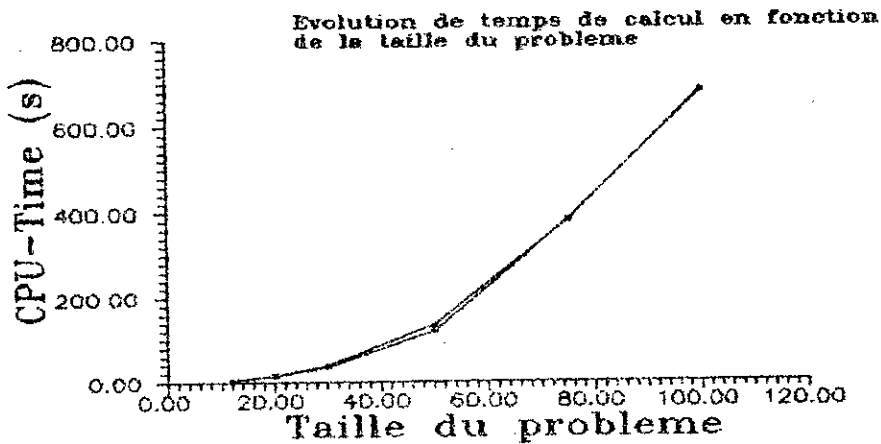
Ce tableau, qui donne la taille des flottes utilisées (nombre total de véhicules, sans distinction de types) par les différentes variantes, montre qu'il y a effectivement eu substitution de véhicules au sein d'une même flotte. Les véhicules de plus fort tonnage sont remplacés par d'autres véhicules de moindre capacité, et donc de c.v.u moins élevé, comme prévu. Il en découle, comme conséquence directe, l'augmentation de la taille de la flotte (alors que le coût total de distribution diminue!)

Si l'impact du c.v.u parait réel et effectif, en revanche, les coûts unitaires utilisés semblent y avoir contribué pour beaucoup. A priori, l'utilisation d'autres valeurs pourrait bien conduire à des résultats différents. De plus, l'augmentation des coûts est rarement uniforme dans la pratique. Il est donc nécessaire de considérer d'autres variantes de coûts afin de mettre en évidence l'impact réel.

Impact du c.v.u sur le temps de traitement:

Le graphe ci-dessous montre l'évolution du temps de traitement dans les deux cas, selon que l'on utilise des c.v.u constants ou variables (temps consomme par SGT).

Evolution du temps de traitement
a- c.v.u fixes
b- c.v.u variables



(figure 4.2)

Deuxieme variante

a- Génération des Coûts variables unitaires:

Les c.v.u seront générés aléatoirement dans un intervalle [a,b] de longueur donnée, selon la loi de distribution uniforme, et en utilisant la procédure suivante:

- α - Tirer autant de nombres aléatoires distincts qu'il y a de types de véhicules. Soit Nbv le nombre de types de véhicules.
- β - Trier ces nombres dans l'ordre croissant et les ranger dans un tableau Alea(Nbv).
- γ - Pour i de 1 à Nbv
Faire
 $CVU(i) = a + (b-a) * Alea(i)$
Fin Faire

b- Coûts Variables Unitaires utilisés:

Deux cas sont étudiés:

Variante 1: La solution est obtenue en prenant un c.v.u fixé à la moyenne arithmétique des c.v.u utilisés dans la variante 2. Elle est ensuite ajustée par rapport à ces derniers.

c.v.u considérés dans la version 1

Nombre de types de véhicules	Coût variable unitaire utilisé
3	1.11
4	1.16
5	1.18
6	1.07

(tableau 4.5)

Variante 2: Les c.v.u ont été générés aléatoirement dans l'intervalle [0.5, 1.5] (Il faut noter que le choix de l'intervalle

peut avoir à son tour un impact sur la solution finale).

c.v.u considérés dans la version 2

Nombre de types de véhicules	Coûts variables unitaires utilisés					
3	0.858	1.064	1.422			
4	0.858	1.064	1.307	1.422		
5	0.858	1.064	1.263	1.307	1.422	
6	0.536	0.858	1.064	1.263	1.307	1.422

(tableau 4.6)

Résultats numériques et observations:

Les tableaux (tab. 4.7 et 4.8) montrent que:

a- Les c.v.u utilisés avantagent les véhicules de faible capacité. En effet, la plupart des véhicules de gros tonnages apparaissant dans la première variante ont cédé la place à de plus petits véhicules (substitution), dans la seconde variante. Au total, MGT montre 12 changements de flotte, alors que SGT n'en observe que 10.

b- Pour MGT, la variante 2 conduit à une baisse des coûts des solutions: sur les 20 problèmes étudiés, 3 sont restés inchangés (Dev.=0), alors que les autres ont vu leur coût diminuer (diminution pouvant aller jusqu'à 7.82 % pour MGT, et 14.86 % pour SGT). Les mêmes changements sont observés par SGT, avec cependant l'apparition de 2 solutions de coût plus élevé.

Impact du cout variable unitaire sur la flotte

variante 1: avec c.v.u moyens
variante 2: avec c.v.u générés aléatoirement.

1- MGT

Probleme	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev %
		Cout	Flotte	Cout	Flotte	
1	12	694	B^2C^2	685	B^2C^2	1.13
2	12	753	A^3C^1	753	A^3C^1	0.00
3	20	1054	$A^1B^2C^1E^2$	1053	$A^1B^2C^1E^2$	0.09
4	20	7389	A^1C^2	6853	A^5B^1 *	7.82
5	20	1169	E^3	1149	$A^1B^1C^2E^2$ *	1.74
6	20	6511	A^6	6508	A^6	0.05
7	30	7689	$B^2C^2D^3$	7651	$B^4C^2D^2$ *	0.50
8	30	2638	C^2D^2	2637	C^2D^2	0.04
9	30	2537	D^1E^3	2532	D^1E^3	0.20
10	30	2804	C^2D^4	2784	B^1D^5 *	0.72
11	30	5131	B^1C^5	5046	$A^1B^3C^4$ *	1.68
12	30	4467	E^6	4460	$A^2D^1E^5$ *	0.16
13	50	2602	$A^1B^3D^1F^4$	2517	$A^8B^7C^1F^3$ *	3.38
14	50	9059	A^7B^1	9059	A^7B^1	0.00
15	50	2696	$A^5B^4C^1$	2605	A^8B^4 *	3.49
16	50	2913	$A^1B^6C^2$	2897	$A^1B^8C^1$ *	0.55
17	75	1961	$A^3B^2C^5$	1948	$A^4B^7C^2$ *	0.67
18	75	2503	$A^1B^6C^8D^2$	2425	$A^4B^15C^6$ *	3.22
19	100	8936	$A^{11}B^2$	8936	$A^{11}B^2$	0.00
20	100	4221	A^4B^9	4118	$A^{11}B^6$ *	2.50

(tableau 4.7)

"*" indique les flottes qui ont subi un changement.

Dev indique l'écart relatif (%) entre les coûts des deux solutions.

Impact du coût variable unitaire sur la flotte

variante 1: avec c.v.u moyens
variante 2: avec c.v.u générés aléatoirement.

2- SGT

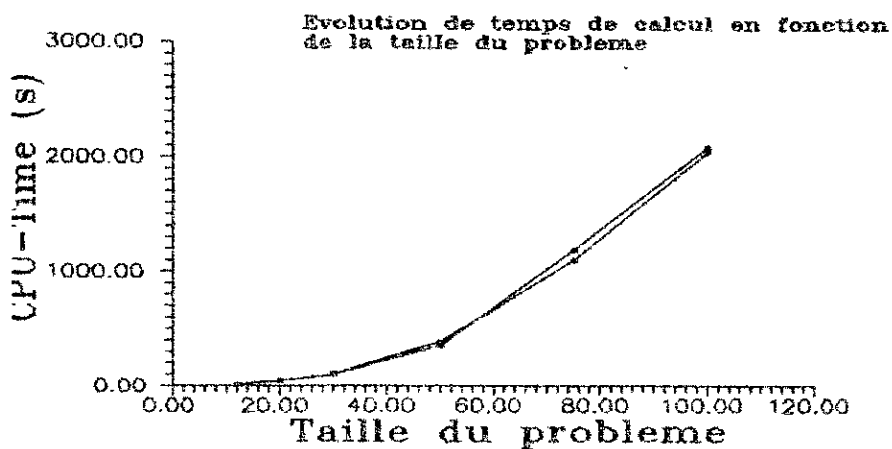
Probleme	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev %
		Coût	Flotte	Coût	Flotte	
1	12	694	B^2C^2	691	B^2C^2	0.43
2	12	753	A^3C^1	753	A^3C^1	0.00
3	20	1059	$A^1B^2C^1E^2$	1053	$A^1B^2C^1E^2$	0.57
4	20	7389	A^1C^2	6854	A^5B^1 *	7.81
5	20	1149	E^3	1149	E^3	0.00
6	20	7413	$A^1B^2C^1$	6454	A^6 *	14.86
7	30	7692	$B^2C^2D^3$	7673	$B^6C^2D^1$ *	0.25
8	30	2641	C^2D^2	2641	C^2D^2	0.00
9	30	2556	D^1E^3	2535	D^1E^3	0.83
10	30	2784	B^1D^5	2784	B^1D^5	0.00
11	30	5071	B^1C^5	5071	B^1C^5	0.00
12	30	4462	E^6	4470	$A^2D^1E^5$ *	-0.18
13	50	2584	$A^3B^3E^2F^3$	2513	$A^8B^7C^1F^3$ *	2.83
14	50	9075	A^7B^1	9117	A^7B^1	-0.46
15	50	2714	$A^5B^4C^1$	2623	A^8B^4 *	3.45
16	50	3002	B^3C^4	2922	$A^1B^8C^1$ *	2.74
17	75	2029	$A^1C^5D^1$	1933	$A^5B^8C^1$ *	4.97
18	75	2556	$B^7C^3D^5$	2439	$A^4B^{15}C^6$ *	4.80
19	100	8912	$A^{11}B^2$	8912	$A^{11}B^2$	0.00
20	100	4177	A^9B^7	4153	$A^{19}B^3$ *	0.58

(tableau 4.8)

* * indique les flottes qui ont subi un changement.

Influence de la variabilité du c.v.u sur le temps de traitement:

Comme le montre le graphe (figure 4.3), les temps de calcul qui ont été nécessaires pour la résolution des vingt problèmes tests traités restent pratiquement constants, selon que l'on prenne des c.v.u égaux ou différents, tel que défini ci-dessus (temps consommé par l'algorithme MGT).



(figure 4.3)

Evolution du temps de traitement

- a- c.v.u moyens
- b- c.v.u aléatoires

4.5.2- Etude de l'impact du c.v.u à l'aide des approches des savings

Dans le but de confirmer les résultats obtenus par les approches de partitionnement de tour utilisées (SGT et MGT), les approches adaptées des savings ont été utilisées, et l'étude a porté sur les mêmes problèmes tests, conformément à la méthodologie décrite précédemment. L'approche ROS(γ), qui a donné les meilleurs résultats pour cette classe de méthodes, a été retenue à titre d'illustration. Deux variantes sont étudiées:

- a- Saving aux extrémités
- b- Saving total.

Dans chacune d'elles, nous considérons deux cas:

* *Le premier utilisant des c.v.u unitaires* (le résultat final est ensuite ré-évalué en considérant les c.v.u utilisés dans la deuxième variante).

* *Le deuxième utilisant des c.v.u variables.*

Les résultats consignés dans les tableaux 4.9 et 4.10 confirment ceux obtenus par les algorithmes procédant par partitionnement de tour (SGT et MGT):

- 14 changements de flotte sont rapportés par la première variante, alors que la seconde en signale 15.

- L'écart relatif entre les solutions des deux variantes varie entre -4.42 % et 4.12 % pour la première variante, et entre -4.89 et 3.82 % pour la seconde.

A- Saving aux extrémités

Résultats obtenus par ROS(γ)
 variante 1: c.v.u = 1
 variante 2: c.v.u différents de l'unité

Probleme	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev %
		Cout	Flotte	Cout	Flotte	
1	12	708	B^2C^2	708	B^2C^2	0.00
2	12	754	A^3C^1	786	A^2C^2 *	-4.24
3	20	1092	$B^1C^2D^2E^1$	1061	$A^2B^3E^2$ *	2.84
4	20	7380	A^1C^2	7496	$A^1B^2C^1$ *	-1.57
5	20	1171	$B^2C^2E^2$	1085	$A^1B^1C^2E^2$ *	7.34
6	20	7410	$A^1B^2C^1$	7413	$A^1B^2C^1$	-0.04
7	30	7825	C^2D^4	7825	C^2D^4	0.00
8	30	2643	C^2D^2	2649	C^2D^2	-0.23
9	30	2571	D^1E^3	2541	$A^1C^1D^3E^1$ *	1.17
10	30	2807	C^2D^4	2780	B^1D^5 *	0.96
11	30	5107	B^1C^5	5107	B^1C^5	0.00
12	30	4576	$D^1E^4F^1$	4488	$A^2D^1E^5$ *	1.92
13	50	2563	$A^4B^4D^1E^1F^3$	2546	$A^7B^8C^2E^3F^1$ *	0.66
14	50	9176	A^7B^1	9582	A^6B^2 *	-4.42
15	50	2736	$A^5B^4C^1$	2681	$A^{13}B^2$ *	2.01
16	50	3022	B^3C^4	2937	$A^1B^8C^1$ *	2.81
17	75	2012	$A^2B^1C^6$	1987	$A^6B^8C^1$ *	1.24
18	75	2576	$A^1B^7C^3D^5$	2470	$A^7B^8C^9$ *	4.12
19	100	9081	A^{16}	9081	A^{16}	0.00
20	100	4262	$A^8B^6C^1$	4220	$A^{17}B^4$ *	0.99

(tableau 4.9)

'*' indique un changement de flotte.

B- Saving total

Résultats obtenus par ROS(γ)
 variante 1: c.v.u = 1
 variante 2: c.v.u différents de l'unité

Probleme	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev %
		Cout	Flotte	Cout	Flotte	
1	12	695	B^2C^2	675	B^2C^2	2.87
2	12	753	A^3C^1	753	A^3C^1	0.00
3	20	1059	$A^1B^2C^1E^2$	1054	$A^2B^3C^1D^1E^1$ *	0.47
4	20	7352	A^1C^2	7361	A^4B^2 *	-0.12
5	20	1175	$A^1C^3E^2$	1081	$A^1B^1C^2E^2$ *	8.00
6	20	7437	A^4B^2	7413	$A^1B^2C^1$ *	0.32
7	30	7460	$B^2C^2D^3$	7825	C^2D^4 *	-4.89
8	30	2696	C^2D^2	2649	C^2D^2	1.74
9	30	2480	D^1E^3	2510	$A^1C^1D^3E^1$ *	-1.21
10	30	2715	B^1D^5	2795	C^2D^4 *	-2.95
11	30	5051	$A^1B^3C^4$	5107	B^1C^5 *	-1.11
12	30	4576	$D^1E^4F^1$	4488	$A^2D^1E^5$ *	1.92
13	50	2578	$A^4B^4D^1E^1F^3$	2546	$A^7B^8C^2E^3F^1$ *	1.24
14	50	9589	A^3B^4	9569	A^3B^4	0.21
15	50	2670	A^4B^6	2624	A^8B^4 *	1.72
16	50	3022	B^3C^4	2937	$A^1B^8C^1$ *	2.81
17	75	2015	$A^2B^1C^6$	1964	$A^3B^9C^1$ *	2.53
18	75	2567	$A^1B^6C^5D^4$	2469	$A^6B^{17}C^5$ *	3.82
19	100	9062	A^{16}	9062	A^{16}	0.00
20	100	4135	A^9B^7	4218	$A^{12}B^6$ *	-2.01

(tableau 4.10)

'*' indique un changement de flotte.

4.5.3- INTRODUCTION DE LA CONTRAINTE SUR LA DISTANCE

4.5.3.a- Introduction

Dans la pratique, les tournées sont souvent assujetties à un certain ensemble de contraintes autres que celles généralement imposées sur la capacité du véhicule: contraintes sur la longueur, sur la durée, ou encore sur le coût maximum. Celles-ci n'ont pas été considérées jusque-là, car la nécessité de se comparer aux seuls résultats connus ne permettait pas de procéder autrement. En effet, les problèmes tests proposés dans la littérature n'en font pas état. L'objectif visé est d'étudier le comportement général du système, lorsque les deux aspects de variabilité des c.v.u et de contrainte sur la distance sont pris en compte.

4.5.3.b- Construction des contraintes:

L'introduction de contraintes supplémentaires engendre une perte de qualité de la solution, lorsque ces contraintes sont actives. Le système devient alors plus complexe, et par la même plus difficile à résoudre. Mais, au delà de toute difficulté d'ordre algorithmique, se pose le problème réel et difficile de la détermination des frontières à ne pas violer. Les contraintes délimitent l'espace des solutions admissibles, et tout *mauvais conditionnement* (erreur dans la détermination des limites autorisées) restreint cet espace et exclue des solutions potentiellement bonnes ou, au contraire, élargit cet espace et introduit des solutions non réalisables.

La contrainte sur la distance n'échappe pas à cette réalité, et la détermination des limites admissibles se heurte à plusieurs problèmes: les distances inter-sites sont généralement estimées, d'une part, et les durées de parcours ne peuvent être qu'approximées (la vitesse de circulation dépend de l'itinéraire, de la période, de l'état du véhicule, de sa charge, etc ...).

Aussi, l'objectif de cette partie de l'étude se limite-t-il à observer le comportement général du système lors de l'introduction de la contrainte examinée, en tenant compte du coût variable unitaire de transport.

Les problèmes tests traités ne considèrent pas de contrainte sur la distance, aussi avons-nous été obligés de la définir pour chaque cas cité. Il fallait ainsi "fabriquer" des contraintes vraisemblables: généralement actives, mais pas exagérément restrictives. L'objectif visé est d'étudier le comportement général de la solution du problème considéré, dans le cas où la contrainte est imposée: il se pourrait, par exemple, que le recours aux véhicules de grande capacité soit influence, avec comme conséquence directe l'augmentation du nombre de véhicules de plus faible capacité. Il est évident que la répartition géographique des clients, et leur demande respective, joue elle aussi un rôle important (si les clients forment des clusters "denses", le recours aux véhicules de fort tonnage pourra toujours se faire lorsque les demandes l'exigent).

La durée d'une tournée varie selon le parcours emprunté. Elle devra tenir compte des temps perdus pendant les opérations de chargement/déchargement au niveau des clients. Le temps de service d'un client est souvent comptabilisé de la manière suivante:

$$t_i = a * d_i + b$$

où t_i et d_i représentent respectivement le temps perdu au niveau du client i et la demande de ce client; a et b sont des paramètres à estimer.

Cette durée peut être exprimée sous forme de distance, et le problème revient alors à déterminer la distance équivalente. Ceci ne peut être fait qu'en connaissance de la vitesse moyenne du véhicule.

Notations:

- $NC(i)$: Nombre de clients du problème i , $i=1, \dots, 20$
- $NV(i)$: Nombre de véhicules (routes) utilisés dans la solution du problème i , $i=1, \dots, 20$.
- $TRD(i)$: Longueur totale des tournées de la solution du problème i , $i=1, \dots, 20$.
- $DL(i)$: Distance maximale pouvant être parcourue dans le cas du problème i , $i=1, \dots, 20$.

D_{0j} : Distance entre le dépôt et le client j (problème i)

DT : Facteur qui tient compte du temps perdu au niveau de chaque client, exprimé ici sous forme de distance additionnelle à parcourir pour chaque client.

Les contraintes (distance maximale pouvant être parcourue par un véhicule) ont été établies de la manière suivante [60].

$$DL(i) = \text{Max} \left\{ \frac{TRD(i) + NC(i) * DT}{NV(i)} ; 2 * \text{Max}_{j=1, \dots, NC(i)} \left\{ D_{0j} \right\} + DT \right\}$$

Le deuxième terme permet aux clients les plus éloignés d'être desservis (dans le cas extrême, une tournée desservira un seul client à la fois).

Les calculs, à partir des solutions optimales obtenues par Salhi et Rand [60] en fixant DT à 10 unités, donnent les valeurs suivantes:

*Contraintes sur la distance considérées
dans la résolution des problèmes tests*

Probleme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DL	120	120	80	110	130	120	210	270	270	230

Probleme	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
DL	240	210	90	150	100	130	210	100	150	140

(tableau 4.11)

4.5.3.c- Résultats numériques:

Les tableaux 4.12 et 4.13 confirment les résultats obtenus dans le cas où la contrainte sur la longueur des tournées n'était pas limitée. Les problèmes sont traités dans les mêmes conditions initiales, et les changements qui affectent les solutions peuvent ainsi être imputés, au moins en partie, aux c.v.u. L'écart entre les solutions correspondant aux deux variantes étudiées est important: il varie entre -10.83 % et

15.43 % pour SGT, et entre -11.66 % et 13.97 % pour MGT. Les flottes sont affectées elles-aussi: 11 d'entre-elles ont subi des modifications dans le cas de SGT, et 10 dans le cas de MGT.

Les approches *savings* conduisent aux mêmes observations et aux mêmes conclusions. Les écarts relevés sont encore plus importants.

Problème avec contrainte sur la distance

*v1: c.v.u fixes
v2: c.v.u variables*

Problème	Taille	Variante 1		Variante 2		Dev ₁ %	Dev ₂ %
		SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}		
1	12	718	718	771	777	-7.38	-8.22
2	12	954	954	924	924	3.14	3.14
3	20	1172	1172	1177	1177	-0.43	-0.43
4	20	7950	7939	7901	7886	0.62	0.67
5	20	1270	1266	1362	1354	-7.24	-6.96
6	20	10222	10222	10130	10129	0.90	0.91
7	30	9910	9904	9790	9783	1.21	1.22
8	30	2834	2837	3166	3141	-11.71	-10.37
9	30	2555	2555	2792	2853	-9.26	-11.66
10	30	3076	3092	3409	3391	-10.83	-9.67
11	30	5476	5463	5635	5656	-2.90	-3.53
12	30	6210	6399	5843	5875	5.91	8.19
13	50	3118	3125	2747	2755	11.90	11.84
14	50	10215	10191	10131	10103	0.82	0.86
15	50	3671	3675	3477	3480	5.28	5.31
16	50	3143	3168	3087	3176	1.78	-0.25
17	75	1883	1909	1996	1990	-6.00	-4.24
18	75	3429	3457	2900	2974	15.43	13.97
19	100	10900	10946	10701	10741	1.83	1.87
20	100	4640	4727	4419	4497	4.76	4.87

(tableau 4.12)

$$\text{Dev}_1 = (\text{SGT}_{v1} - \text{SGT}_{v2}) / \text{SGT}_{v1} * 100$$

$$\text{Dev}_2 = (\text{MGT}_{v1} - \text{MGT}_{v2}) / \text{MGT}_{v1} * 100$$

Vi: La solution est d'abord déterminée avec des c.v.u. identiques, puis ajustée sur les c.v.u. utilisés par la solution v2. Les deux solutions sont déterminées dans le cas où une distance limite est imposée aux tournées.

2- Flottes

Pb.	Taille	SGT _{v1}	MGT _{v1}	SGT _{v2}	MGT _{v2}
1	12	A ¹ B ² C ²	A ¹ B ² C ³	A ² B ⁵ *	A ² B ⁵ *
2	12	A ⁵ B ²	A ⁵ B ²	A ⁵ B ²	A ⁵ B ²
3	20	A ⁶ B ⁶ C ¹ D ¹	A ⁶ B ⁶ C ¹ D ¹	A ⁶ B ⁶ C ¹ D ¹	A ⁶ B ⁶ C ¹ D ¹
4	20	A ⁶ B ¹	A ⁶ B ¹	A ⁶ B ¹	A ⁶ B ¹
5	20	A ¹ B ⁴ C ³ D ²	A ² B ² C ⁴ D ²	A ⁵ B ³ C ² D ² *	A ⁴ B ² C ¹ D ³ *
6	20	A ⁸ B ¹	A ⁸ B ¹	A ⁸ B ¹	A ⁸ B ¹
7	30	A ¹¹ B ³ C ³ D ¹	A ¹² B ⁴ C ² D ¹	A ¹² B ⁴ C ² D ¹ *	A ¹² B ⁴ C ² D ¹
8	30	B ¹ C ⁵ D ¹	B ² C ² D ²	B ³ C ⁴ D ¹ *	B ² C ² D ²
9	30	B ² C ¹ D ¹ E ²	B ² C ¹ D ¹ E ²	A ² B ¹ D ³ E ¹ *	B ² C ¹ D ¹ E ²
10	30	A ² C ⁴ D ³	A ² B ² C ⁴ D ²	A ³ B ² C ² D ³ *	A ² B ⁴ C ² D ³ *
11	30	A ³ B ⁶ C ³	A ¹ B ⁷ C ³	A ³ B ⁶ C ³	A ³ B ⁶ C ³ *
12	30	A ⁶ B ⁴ C ¹ D ⁴ E ¹ F ¹	A ⁸ B ³ C ¹ D ⁴ E ¹ F ¹	A ¹⁰ B ⁴ C ² D ³ E ³ *	A ⁹ B ³ C ³ D ³ E ² *
13	50	A ¹² B ¹⁵ C ⁷ D ²	A ¹² B ¹⁶ C ⁶ D ²	A ²⁰ B ¹⁸ C ³ D ¹ *	A ²² B ¹⁷ C ³ D ¹ *
14	50	A ⁸ B ¹	A ⁸ B ¹	A ⁸ B ¹	A ⁸ B ¹
15	50	A ²³	A ²³	A ²³	A ²³
16	50	A ⁹ B ⁶	A ⁶ B ⁸	A ¹¹ B ⁵ *	A ¹² B ⁵ *
17	75	A ² B ⁶ C ³	A ¹ B ⁵ C ⁴	A ⁶ B ⁸ C ¹ *	A ⁷ B ⁹ *
18	75	A ¹² B ²⁷ C ¹	A ¹¹ B ²⁴ C ³	A ²¹ B ²⁵ *	A ²⁰ B ²⁷ *
19	100	A ¹⁹	A ¹⁹	A ¹⁹	A ¹⁹
20	100	A ²³ B ²	A ²¹ B ³	A ²³ B ²	A ²⁹ *

(tableau 4.13)

*' indique un changement de flotte.

4.5- Conclusion

Cette étude montre à quel point le fait d'ignorer la variabilité dans les coûts unitaires de distribution peut influencer la composition de la flotte et son coût total. L'utilisation de méthodes heuristiques ne permet pas, dans l'absolu, de juger rigoureusement cet impact. Toutefois, le recours à plusieurs heuristiques différentes tend à montrer que cet impact est réel et souvent important. Il serait cependant intéressant de résoudre ce type de problèmes de manière exacte afin de généraliser la portée des conclusions obtenues. Il serait tout aussi intéressant de reconsidérer la manière dont les coûts unitaires de distribution ont été déterminés. Il est possible, par exemple, de considérer ces coûts comme dépendant linéairement de la capacité des véhicules:

$$c.v.u_i = a + b * q_i$$

$c.v.u_i$ et q_i étant respectivement le coût unitaire et la capacité du véhicule i , a et b des paramètres à estimer. Cependant, il ne faut pas perdre de vue le fait que le $c.v.u$ ne dépend pas uniquement de la capacité, et qu'une fonction continue peut ne pas suffire à représenter la réalité. Une étude plus détaillée pourrait nous éclairer sur l'évolution des $c.v.u$ en fonction de la capacité: s'agit-il d'une fonction concave (auquel cas on aurait une économie d'échelle qui encouragerait le recours aux véhicules de fort tonnage), ou bien d'une fonction convexe (qui limiterait vraisemblablement le recours à ces mêmes véhicules)? En effet, l'évolution des $c.v.u$ (aussi bien que celle des coûts unitaires fixes, d'ailleurs) joue un rôle capital lors de la sélection des types de véhicules. Que représente, en particulier, le supplément de coût introduit par l'utilisation d'un type de véhicule au lieu d'un autre, dans le coût total de la solution?

Ainsi, l'étude témoigne d'un impact réel du coût unitaire variable sur la solution du problème. Celle-ci peut être affectée dans son coût total, dans la configuration de sa flotte ou, plus généralement, dans les deux composantes à la fois. De plus, l'utilisation de $c.v.u$ différents peut conduire à l'élaboration de tournées de distribution plus économiques, mais surtout plus réalistes. Les tournées déterminées

à partir de coûts pris constants peuvent s'avérer non admissibles dans la pratique, et surdimensionner ces tournées n'est pas la meilleure solution au problème, car elle induit une certaine perte de contrôle du système, d'une part, et peut être aussi un manque à gagner sur le plan des profits, d'autre part. Aussi, sans les difficultés que l'on a à déterminer de manière exacte les c.v.u dans la pratique, et sans l'absence de techniques de résolution exactes efficaces (pouvant résoudre les problèmes réels en un temps raisonnable), l'utilisation de c.v.u constants perdrait tout sens et serait injustifiable.

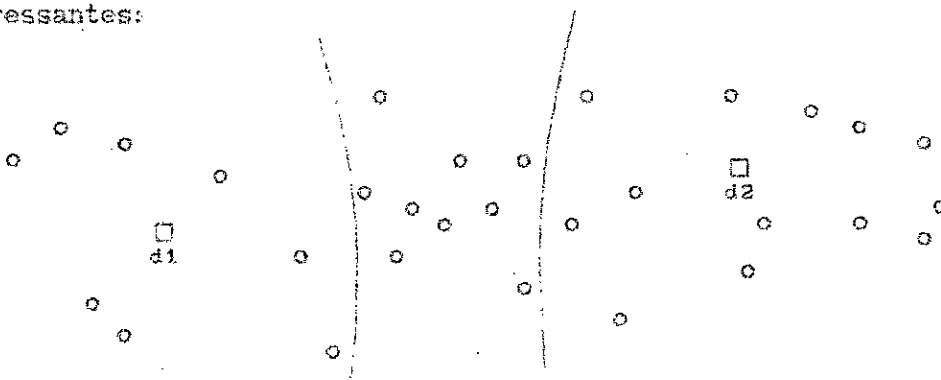
Une question pour finir: l'erreur, l'incertitude, ou le manque à gagner et tous les risques inhérents à l'utilisation de c.v.u constants sont-ils plus importants que ceux encourus lors de l'utilisation de c.v.u mal estimés ou maladroitement mesurés?

THE MULTIDEPOT VEHICLE FLEET MIX PROBLEM

5.1- Preamble

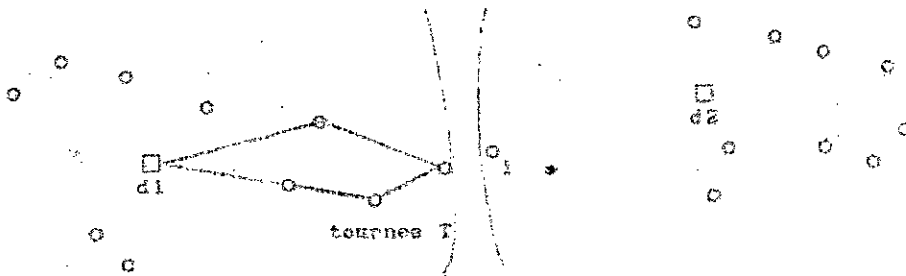
A l'inverse du VRP avec dépôt unique, ce problème n'a pas suscité beaucoup d'attention chez les chercheurs. En effet, vu comme une simple généralisation du premier problème, grande est la tentation de lui appliquer les algorithmes traitant le cas à dépôt unique. Ramener un problème à N dépôts à N problèmes à dépôt unique, qui répond au principe de *diviser pour régner*, est intéressant à plusieurs égards: il devient alors possible d'appliquer des algorithmes qui existent déjà, aux sous-problèmes obtenus, lesquels sont plus faciles (ou moins difficiles) à résoudre que le problème initial.

Vu sous cet angle, le problème du VRP avec dépôts multiples n'existe pas. En fait, cette vision des choses occulte plusieurs aspects du problème considéré: La division du problème en sous-systèmes doit obéir à une stratégie rigoureuse (affectation d'un client au plus proche dépôt, ou autre), stratégie qui détermine dans une large mesure la qualité de la solution finale. La pré-affectation des clients aux dépôts exclue d'emblée certaines solutions qui pourraient pourtant être intéressantes:



*Pré-affectation de clients aux dépôts
(figure 5.1)*

Si l'on procède par affectation d'un client au plus proche dépôt, la solution qui consiste à desservir le client i à partir de la tournée T ne pourra pas être examinée.



(figure 5.2)

Plus généralement, la bande-frontière se situant entre deux sous-systèmes est d'un traitement délicat. Soient d_1 et d_2 les deux dépôts les plus proches du client i , C_i^{d1} et C_i^{d2} les distances séparant le client i des dépôts d_1 et d_2 respectivement. Lorsque C_i^{d1} est très inférieur à C_i^{d2} , i sera affecté à d_1 pratiquement sans risque. Malheureusement, l'affaire se complique dès que C_i^{d1} se rapproche de C_i^{d2} (bande-frontière). Elle se compliquera davantage lorsque la bande frontière se trouve à l'intersection de plusieurs sous-systèmes.

Rigoureusement, la division du problème en sous-systèmes ne peut se concevoir que sur la base d'une affectation optimale des clients aux différents dépôts. Or cette affectation ne peut se faire qu'en fonction des tournées, tournées qui sont inconnues alors.

Tout aussi important est sans doute le problème de répartition des ressources (véhicules/chauffeurs) entre les différents sous-systèmes. Là-encore, une répartition optimale ne peut se faire qu'en fonction de l'utilisation réelle des ressources qui, elle aussi, est inconnue au départ.

Quelle que soit la stratégie de division utilisée, une vérité fondamentale doit rester présente à l'esprit: une solution optimale du problème entier n'est pas nécessairement la somme des solutions des sous-problèmes considérés, quand bien même celles-ci seraient optimales, prises individuellement.

Ceci dit, la taille du problème global interdit actuellement le recours aux méthodes exactes en vue de sa résolution optimale. En définitive, seule l'étude des différentes approches, et la comparaison entre leurs résultats réels, peut nous renseigner sur leurs performances et leurs limites respectives.

5.2-Formulation du Problème Général et Approches de Résolution

5.2.1- Introduction

Le problème général utilise un ensemble de dépôts comprenant au moins deux éléments, sous les mêmes contraintes définies pour le problème à dépôt unique. La finalité reste la même: déterminer l'affectation optimale des clients aux dépôts, la meilleure configuration de flotte pour chaque dépôt, et les tournées optimales de distribution qui vérifient les différentes contraintes imposées. La plupart des heuristiques de résolution utilisables dans ce contexte procèdent par décomposition du problème et par traitement séquentiel des sous-problèmes ainsi obtenus, ce qui conduit le plus souvent à des solutions sous-optimales.

5.2.2- Limites des formulations actuelles

Ce problème souffre des mêmes limites citées dans le cas du système à dépôt unique. Parmi celles-ci, nous avons:

a- la composition de la flotte de véhicules est presque toujours restreinte à un seul type de véhicules (Laporte, Nobert et Taillefer [48], Perl [56]).

b- Les coûts variables unitaires sont considérés comme un paramètre constant, même lorsque la flotte de véhicules est hétérogène (Laporte et al. [35-48]).

c- La capacité des dépôts est supposée infinie. Ce n'est que dans une étude récente que Perl [56] considère l'impact du coût variable de stockage sur l'affectation des clients aux dépôts et sur la formation des tournées dans le cas où les dépôts ont une capacité limitée.

d- Les formulations ne font pas toujours état de contrainte sur la longueur totale, la durée ou le coût d'une tournée, autorisant ainsi la formation de tournées pouvant être pratiquement irréalisables.

Comme dans le cas du problème à dépôt unique, la formulation dans le contexte de la programmation mathématique ne présente pas de grand intérêt pratique. En effet, le nombre de variables et de contraintes utilisées atteint rapidement des seuils inabordables. Les variables de décision peuvent être représentées de différentes manières:

$$\left. \begin{aligned} X_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si un véhicule emprunte l'arc } (i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & (1) \\ X_{ij}^k &= \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule } k \text{ emprunte l'arc } (i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & (2) \\ W_{ij} &= \text{quantité de produits circulant sur l'arc } (i,j) & (3) \\ \dots & & \end{aligned} \right\}$$

Certaines formulations utilisent des variables de décision du type (1), alors que d'autres leur préfèrent les variables du type (2). Les premières sont concises (notamment dans le cas des problèmes symétriques), mais en revanche, elles sont impuissantes à prendre en compte des flottes hétérogènes. Le problème inverse se pose pour celles à trois indices, qui sont cependant flexibles et facilitent l'inclusion d'une grande variété de contraintes et la définition de fonctions objectives très générales. De plus, la taille d'un tel problème est considérable, et l'utilisation de méthodes de résolution exactes semble alors difficilement concevable.

Nous nous proposons de formuler le problème ci-dessus sous une forme moins restrictive, puis d'élaborer une stratégie de résolution tenant compte des nouveaux paramètres introduits.

Des résultats numériques seront présentés pour des problèmes comprenant jusqu'à 225 clients et 6 dépôts. Une comparaison entre les résultats donnés par différentes variantes de la méthode et ceux obtenus à l'aide d'une variante adaptée de l'algorithme *Assignment-Sweep* [24] donnera une idée sur les performances générales.

5.2.3- Formulation du Problème

Notations

Soit $G = (N, E, C)$ un graphe dans lequel :

$N = \{1, \dots, n\}$ est un ensemble de noeuds, partitionné en R et $N-R$:

$$N = \{ R, N-R \}$$

avec:

- * $R = \{1, \dots, nd\}$ ensemble des dépôts.
- * $N-R$: ensemble des clients.
- * $V = \{1, \dots, nv\}$ ensemble des types de véhicules.
- * E : Un ensemble d'arcs non dirigés ($E = N^2$)
- * $C = (c_{ij})$: matrice des coûts, distances ou durées de trajet, associée à E .

Le problème est dit *symétrique* lorsque $c_{ij} = c_{ji} \quad \forall i, j \in N$, et *asymétrique*, dans le cas contraire. De plus, C satisfait l'*inégalité du triangle* si et seulement si :

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \quad \forall i, j, k \in N.$$

- * Route $k = \{ i_1, i_2, \dots, i_p \}$
avec: $i_j \in N-R, \forall j = 2, \dots, p-1$ et $i_1 = i_p \in R$
- * d_i : demande du client $i, i \in N-R$ ($d_i \geq 0, \forall i \in N-R$)
- * D_k : demande totale de la route k (charge totale du véhicule associé) :
$$D_k = \sum_{i=2}^{p-1} d_i$$
- * $Lg(k)$: Longueur totale de la route k
$$Lg(k) = \sum_{i=1}^{p-1} c_{i, i+1}$$
- * CV_v : Capacité du véhicule de type $v, v \in V$.
- * α_v : Coût fixe associé au véhicule de type $v, v \in V$.
- * β_v : Coût variable associé au véhicule de type $v, v \in V$.

- * L_r : Longueur maximale d'une tournée issue du dépôt r , $r \in R$
- * CD_r : Capacité du dépôt r , $r \in R$
- * X_{ij}^v : indique le nombre de fois que l'arc (i, j) est emprunté par un véhicule de type v dans la solution optimale. X_{ij}^v n'est pas défini si $i \geq j$, si $i, j \in R$ ou enfin si $d_i + d_j > CV_v$. Lorsque $i > j$, X_{ij}^v est interprété comme X_{ji}^v .
- * m_{rv} : Nombre de véhicules de type v basés au dépôt r ($v \in V$, $r \in R$), $l \leq \underline{m}_{rv} \leq m_{rv} \leq \bar{m}_{rv}$ (\underline{m}_{rv} et \bar{m}_{rv} étant des valeurs limites imposées: le nombre minimum et le nombre maximum de véhicules d'un type donné).
- * $[t] = \begin{cases} \text{Le plus petit entier } \geq t \text{ si } t \geq 1 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$
- * $F(Z)$: Coût fixe du plus petit véhicule de capacité $\geq Z$
- * $F'(Z)$: Coût fixe du plus gros véhicule de capacité $\leq Z$
- * $V(Z)$: Coût variable du plus petit véhicule de capacité $\geq Z$
- * $P(Z)$: Capacité du plus petit véhicule de capacité $\geq Z$
- * $TC(k)$: Coût total de la route k
 $TC(k) = F(D_k) + V(D_k) * Lg(k)$
- * t_i^v : temps d'immobilisation du véhicule v ($v \in V$) au point i , ($i \in N$).
- * t_{ij}^v : durée du trajet du point i au point j ($i, j \in N$).

En nous inspirant de la formulation sous forme de programme linéaire en nombres entiers proposée par Laporte et al. [34-36] dans laquelle C représente la matrice des distances, nous pouvons énoncer le problème de la manière suivante:

$$P: \text{Min } Z = \sum_{r \in R} \sum_{v \in V} \left(m_{rv} * \alpha_v + \beta_v * \sum_{i,j \in N} c_{ij} * X_{ij}^v \right)$$

Sous les contraintes :

$$(1) \sum_{i < k} X_{ik}^v + \sum_{k < j} X_{kj}^v = 2 \quad (v \in V, k \in N-R)$$

$$(2) \sum_{i < r} X_{ik}^v + \sum_{r < j} X_{kj}^v = 2 * m_{rv} \quad (v \in V, r \in R)$$

$$(3) \sum_{i,j \in S} X_{ij}^v \leq |S| - \left[\frac{\sum_{k \in S} d_k}{CV_v} \right] \quad \left(S \subseteq N-R, |S| \geq 3, \text{ et } v \in V \text{ tel que : } CV_{v-1} < \sum_{k \in S} d_k \leq CV_v \right)$$

$$(4) X_{i_1 i_2}^v + 3 * X_{i_2 i_3}^v + X_{i_3 i_4}^v \leq 4 \quad (i_1, i_4 \in R; i_2, i_3 \in N-R \text{ et } v \in V)$$

$$(5) X_{i_1 i_2}^v + X_{i_{h-1} i_h}^v + 2 * \sum_{i,j \in R - \{i_1, i_h\}} X_{ij}^v \leq 2 * h - 5 \quad (v \in V)$$

(avec $h \geq 5$; $i_1, i_h \in R$; $i_2, \dots, i_{h-1} \in N-R$; et

$$\sum_{j=2}^{h-1} d_{i_j} \leq \text{Max} \{ CV_v \}$$

$$(6) \sum_{j=1}^{h-1} c_{i_j i_{j+1}} \leq L_r \quad i_1 = i_h = r \in R; i_2, \dots, i_{h-1} \in N-R$$

$$(7) \underline{m}_{rv} \leq m_{rv} \leq \bar{m}_{rv} \quad (r \in R, v \in V)$$

$$(8) X_{ij}^v = \begin{cases} 0, 1 \\ 0, 1, 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (i, j \in N-R) \\ (v \in V) \\ (i \text{ ou } j \in R) \end{matrix}$$

$$(9) \sum_{i \in N-R} d_i * X_{ri}^v \leq CD_r \quad (v \in V, r \in R)$$

$$(10) \sum_{i,j} d_i * X_{ij}^v \leq CV_v \quad (v \in V)$$

$$(11) \sum_{i \in N} t_i^v \sum_{j \in N} X_{ij}^v + \sum_{i,j \in N} t_{ij}^v X_{ij}^v \leq T_v \quad (v \in V)$$

Interprétation des contraintes

Les contraintes (1) et (2) spécifient le degré de chaque noeud. La première assure que chaque noeud de $N-R$ (client) est servi exactement une fois. En fait, ces noeuds peuvent être visités plus d'une fois, si cela permet un gain de distance (c'est le cas lorsque la matrice C ne vérifie pas l'inégalité du triangle: un même noeud peut alors faire partie de deux plus courts chemins et être visité deux fois. L'essentiel est qu'il soit servi uniquement une fois), mais ceci n'a pas besoin d'apparaître explicitement dans la formulation.

La contrainte (2) exprime le fait que m_{rv} véhicules doivent quitter et regagner chaque dépôt de R .

La contrainte (3) élimine les solutions contenant des tournées ne passant pas par un dépôt, ou ayant une demande totale supérieure à la capacité du véhicule (voir [36-42] pour plus de détails). Pour le TSP, elle se réduit à la contrainte d'élimination de sous-tours:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij}^v \leq |S| - 1 \quad (S \subseteq N-R, |S| \geq 3)$$

lorsque $\sum_{i \in N-R} d_i \leq CV_v$

La contrainte sur la capacité peut être exprimée sous la forme:

$$\sum_{i \in N-R} d_i \left(\sum_{j \in N-R} x_{ij}^v \right) \leq CV_v, \quad \forall v \in V.$$

Les contraintes (4) et (5) (contraintes d'élimination de chaînes) interdisent la formation de chaînes entre deux dépôts, et garantissent ainsi que chaque tournée commence et se termine au même dépôt.

La contrainte (6) empêche la formation de tournées de longueur supérieure à la limite admise.

La contrainte (7) empêche le nombre de véhicules basés en un dépôt donné, de prendre des valeurs interdites.

La contrainte (8) indique le nombre de fois qu'un arc (i,j) peut être utilisé dans la solution optimale.

Les contraintes (9) et (10) évitent les dépassements de capacité sur les dépôts et les camions, respectivement.

La contrainte (11) interdit la formation de tournées de durée supérieure au seuil admis.

Ce problème utilise $|N|^2 * |R|$ variables entières, nombre qui montre à lui seul à quel point il serait difficile et long de résoudre le problème par des approches exactes inspirées de celles mises au point pour le cas où la flotte est homogène.

5.2.4- Approches de résolution

Comme nous l'avons vu précédemment, les seules approches de résolution que connaît ce problème sont du type heuristique. Elles se répartissent en trois classes:

5.2.4.a- L'approche d'amélioration locale:

La première méthode génère une solution de manière arbitraire puis lui fait subir une série de raffinages afin de l'améliorer. Le processus de raffinement, qui consiste à échanger des clients entre tournées (un client à la fois) se poursuit tant qu'il y a réduction du coût total (avec le risque de s'arrêter à un minimum local). Selon Wren et Holliday [70], et Cassidy et Bennett [5], cette méthode donne des résultats comparables à ceux obtenus à l'aide des autres méthodes. Cependant, les tests n'ont porté que sur des problèmes comprenant moins de 100 noeuds.

Les deux autres approches sont des extensions d'heuristiques développées pour le VRP avec dépôt unique:

5.2.4.b- L'approche ASSIGNEMENT-SWEEP

Cette méthode, proposée par Gillett et Johnson [24], est une extension du *Sweep Algorithme* de Gillett et Miller [23], qui résout le problème en deux étapes séparées. Une fois les clients affectés aux dépôts, le système se décompose en un certain nombre de VRPs avec dépôt unique qui sont résolus à l'aide du *Sweep Algorithm*.

L'affectation des clients aux dépôts se fait comme suit:

Soient k_1 et k_2 les deux dépôts les plus rapprochés du client i . Le rapport

$$r(i) = C_{i,k_1} / C_{i,k_2}$$

est calculé pour chaque client. Les clients sont ensuite triés selon les $r(i)$ croissants. Cet arrangement détermine l'ordre dans lequel seront affectés les clients à un dépôt: ceux qui se trouvent à proximité d'un dépôt sont considérés en premier. Les clients i dont le ratio est voisin de 1 sont affectés de la manière suivante: si deux noeuds j et k sont déjà affectés à un dépôt t , l'insertion de i entre j et k sur une route reliée à t entraîne un coût additionnel égal à:

$$C_{ji} + C_{ik} - C_{jk}$$

qui représente une part du coût (ou distance) total. L'insertion, et donc l'affectation, qui sera réalisée est celle entraînant le moindre coût additionnel.

Une fois tous les clients affectés aux dépôts et les routes construites, la solution obtenue est raffinée au moyen de techniques diverses.

5.2.4.c- L'approche des Savings adaptée au multi-dépôt:

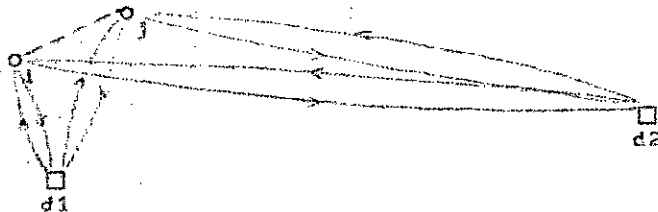
Tillman et Cain [65] ont généralisé le principe d'économie, ou *savings*, développé par Clark et Wright pour le VRP à dépôt unique, au cas où le système comporte plusieurs dépôts.

Identique dans le principe de fonctionnement, la procédure utilisée part d'une solution initiale qui consiste à servir chaque client par une route propre, à partir du plus proche dépôt.

Soit C_{ij} le coût (ou distance) entre les noeuds i et j , et C_i^k le coût (ou distance) entre le noeud i et le dépôt k . Le coût total initial de toutes les routes est alors donné par

$$D = \sum_{i=1}^N 2 * \text{Min} \left\{ C_i^k \right\}, N \text{ étant le nombre de clients dans le système.}$$

Les noeuds sont ensuite reliés en vue de réduire le coût total. Cependant, un problème se pose lors du calcul de l'économie pour deux clients se trouvant à proximité d'un dépôt donné, et sensiblement éloignés d'un autre. Le critère qui consiste à sélectionner les clients d'économie maximale en vue de les relier et de les affecter au dépôt approprié conduirait à les affecter au dépôt le plus éloigné, qui donne en effet l'économie maximale:



(figure 5.3)

$$S_{ij}^{d1} = C_i^{d1} + C_j^{d1} - C_{ij}$$

$$S_{ij}^{d2} = C_i^{d2} + C_j^{d2} - C_{ij}$$

où:

S_{ij}^{d1} , S_{ij}^{d2} représentent l'économie réalisée en reliant les clients i et j aux dépôts d_1 et d_2 respectivement.

Les clients i et j étant plus proches du dépôt d_1 , nous avons:

$$C_i^{d1} + C_j^{d1} < C_i^{d2} + C_j^{d2}$$

et par conséquent $S_{ij}^{d1} < S_{ij}^{d2}$

ce qui revient à relier les clients i et j au dépôt d_2 !

Il faudrait donc éviter que l'accroissement de la distance totale conduise à celui des économies réalisées. Tillman et Cain [65] définissent alors une nouvelle distance entre les clients et les dépôts:

$$\tilde{C}_i^k = \min_{r \in R} \{ C_i^r \} - \left(C_i^k - \min_{r \in R} \{ C_i^r \} \right) = 2 * \min_{r \in R} \{ C_i^r \} - C_i^k$$

Cette distance reprend sa valeur réelle lorsque le client reçoit une affectation définitive:

$$\tilde{C}_i^k = \begin{cases} 2 * \min_{r \in R} \{ C_i^r \} - C_i^k & \text{SI } i \text{ n'a pas encore reçu} \\ & \text{d'affectation définitive} \\ C_i^k & \text{SINON} \end{cases}$$

Une fois ces distances modifiées calculées, on détermine les économies réelles pour chaque dépôt:

$$\tilde{S}_{ij}^k = \tilde{C}_i^k + \tilde{C}_j^k - C_{ij}^k$$

Le principe d'économie maximale peut alors être utilisé. La liaison de deux clients, quand elle est possible, est décidée en fonction de l'économie de coût qui en résulte. Le calcul de ces économies n'est plus aussi simple que dans le cas d'un dépôt unique, puisqu'il faut désormais considérer chaque combinaison de clients i et j et de dépôt k .

Golden, Magnanti et Nguyen [29] ont développé une méthode dont le principe est similaire à celui défini par Tillman et Cain, mais qui ne considère que les clients de la bande frontière (en se basant sur la ratio $r(i)$ défini plus haut). Cet algorithme est aussi rapide et efficace que celui de *Sweep Assignment*. Certaines procédures de raffinages ont été introduites dans l'algorithme.

5.3- HEURISTIQUE DE RESOLUTION PROPOSEE

5.3.1- Principe Général

Le principe général consiste à attribuer aux différents clients du système un coût qui exprime "l'urgence" qu'il y a à les desservir, c'est à dire à les affecter à un dépôt puis à une tournée issue de ce dépôt.

Etant donné un client non encore traité, le problème consiste à déterminer le dépôt, puis la tournée -et donc le véhicule- auxquels il sera affecté. L'ordre dans lequel sont traités les clients a un impact significatif sur le coût total, et il faut par conséquent élaborer une stratégie d'affectation déterministe. Considérons l'exemple suivant:

Supposons que l'on ait deux manières de traiter un client donné, coûtant respectivement C_1 et C_2 , avec $C_1 < C_2$. Si, pour une raison quelconque, la première solution devient irréalisable (ce qui arrive lorsqu'une contrainte quelconque est "saturée" par une affectation précédente), il ne restera alors plus que la deuxième solution, qui coûtera $\Delta C = (C_2 - C_1)$ de plus que la première.

Le surcoût résultant, ΔC , pénalise ainsi le retard mis à traiter le client, retard qui s'est traduit, dans notre cas, par le fait que certaines solutions initialement réalisables cessaient de l'être.

Cette notion peut être généralisée au cas où le nombre de possibilités initiales est plus élevé. Pour P possibilités (correspondant à P dépôts) de coûts respectifs C_1, C_2, \dots, C_P tels que $C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_P$, le surcoût entraîné peut être exprimé de la manière suivante:

$$\Delta C(i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^P (C_k - C_r^*) \quad (5.1)$$

C_r^* étant le dépôt qui permet de servir le client i, au coût minimum.

Ce surcoût peut être évalué pour l'ensemble des clients non encore traités, permettant ainsi de classer ces derniers et de déterminer un ordre d'affectation. Le client ayant le surcoût (ou "regrêt") maximum sera classé en tête de liste, et donc affecté en priorité, dans l'espoir de réduire le coût total.

L'effort de calcul nécessaire pour l'évaluation de ces surcoûts peut être important, et il serait alors tentant de procéder à l'affectation simultanée de plusieurs clients (par exemple tous ceux ayant un surcoût supérieur ou égal à un seuil à déterminer) afin de minimiser cet effort. Malheureusement, chaque affectation peut influencer sur la valeur des surcoûts préalablement calculés. En effet, au fur et à mesure que les affectations se font et que les tournées se développent, de nouvelles possibilités de traitement surgissent, avec des coûts généralement différents.

La manière dont sont exprimés les coûts E_i détermine la qualité de la solution finale, d'où l'intérêt qu'il y a à bien la définir, tout en essayant de minimiser l'effort de calcul.

A ce niveau, l'ensemble des dépôts intervient dans le calcul des $AE(i)$. Cependant, il peut être intéressant de n'en considérer que les d plus proches du client, en prenant $d = 3$ ou 4 dépôts. Cette limitation, outre le fait qu'elle réduit l'effort de calcul nécessaire, correspond à la logique d'affectation d'un client à l'un de ses plus proches dépôts.

Dans cet algorithme, les tournées de véhicules sont construites simultanément, et la flotte de véhicules se forme pendant le même temps. A chaque itération du processus, un client, celui ayant le "regrêt" maximum, est traité. Toutefois, si une affectation tient compte de toutes celles qui l'ont précédée, elle ne peut malheureusement pas voir celles qui la suivront, afin de s'y adapter ou de les préparer. Ce problème pourra être résolu, tout au moins partiellement, en introduisant des procédures de raffinement qui pourront être mises en action soit tout au long du processus, soit à la fin de celui-ci. Les procédures de fusion de tournées, de permutation de clients entre tournées, de réaffectation de clients, etc... en sont un exemple classique.

Algorithme de base

Début

Tant qu'il ya des clients non encore affectés
Faire

Pour Chaque client i non encore affecté
Faire

Pour Chaque dépôt $r \in R$
Faire

Calculer le meilleur coût de service C_{ri}^*

Fin Faire

Soit $p \in R$ tel que $C_{pi}^* \leq C_{ji}^* \quad \forall j \in R$

Calculer

$$\Delta_i = \sum_{j=1, j \neq p}^{|R|} (C_{ji}^* - C_{pi}^*) = \sum_{j=1}^{|R|} C_{ji}^* - |R| * C_{pi}^* \quad (5.2)$$

Fin Faire

Soit $l \in N-R$ tel que $\Delta_l \geq \Delta_j \quad \forall j \in N-R$

Affecter le client l au dépôt et à la tournée ayant réalisé
la plus faible augmentation de coût.

Fin Faire

Fin.

Calcul du Meilleur Coût de Service d'un Client

Une fois le dépôt retenu, un client donné peut être desservi de
deux manières différentes:

1- Soit à partir d'une nouvelle tournée

2- Soit à partir d'une tournée qui existe déjà, lorsque l'insertion
du client dans cette tournée est possible. Cette insertion se fait alors
au meilleur endroit (best insertion).

Celle des deux qui entraîne la plus faible augmentation du coût
total (i.e différence entre le coût total avant la prise en compte du
client considéré, et après) sera retenue.

Considérons un client i non encore affecté et notons NR la nouvelle route, ou tournée, qui correspondrait à la première possibilité (création d'une nouvelle tournée):

$$NR = \{ u, i, u \}$$

où $u \in R$ est un dépôt du système. NR est admissible (réalisable) par hypothèse. Soit encore :

CTS0 : Coût total du système avant prise en compte du client i

CTS1(j) : Coût total du système après prise en compte du client i :

$$j = \begin{cases} 1 & \text{si une nouvelle route est créée} \\ 2 & \text{sinon (insertion de } i \text{ dans une ancienne tournée)} \end{cases}$$

$\Delta C_{1i}^1(u)$: Coût additionnel entraîné par la première possibilité, la route démarrant alors du dépôt $u \in R$.

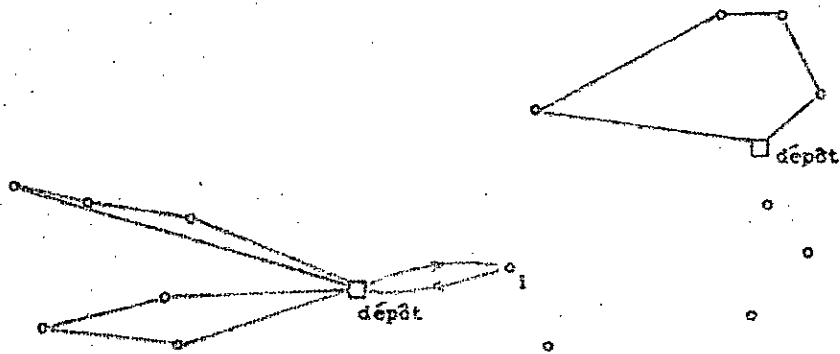
$$\Delta C_{1i}^1(u) = CTS1(1) - CTS0 \quad (5.2)$$

$\Delta C_{2i}^k(u)$: Coût additionnel entraîné par la deuxième possibilité, lors de l'insertion du client i dans la route k .

$$\Delta C_{2i}^k(u) = CTS1(2) - CTS0 \quad (5.4)$$

La première possibilité entraînerait une augmentation de coût ΔC_1 égale à:

$$\begin{aligned} \Delta C_{1i}^1(u) &= TC(NR) \\ &= F(D_{NR}) + V(D_{NR}) * Lg(NR) \\ &= F(d_i) + V(d_i) * (C_{ui} + C_{iu}) \\ &= F(d_i) + 2 * V(d_i) * C_{ui} \quad \text{si } C \text{ est symétrique} \end{aligned} \quad (5.5)$$



(figure 5.4)

Création d'une nouvelle tournée pour le client i

Dans le deuxième cas de figure, le client i devra être inséré dans la route k déjà formée, entre les noeuds i_1 et i_{1+1} de N . L'insertion d'un client dans une tournée se fait toujours à l'endroit le plus avantageux. Une tournée composée de n clients donne naissance à $(n+1)$ possibilités d'insertion parmi lesquelles nous retenons la meilleure, c'est à dire celle qui entraîne le plus faible accroissement de la distance, ΔL :

$$\Delta L = \min_{i_j \in \text{Route } k} \left\{ c_{i_1 i_j} + c_{i_j i_{j+1}} - c_{i_1 i_{j+1}} \right\} \quad (5.6)$$

La route k avant l'insertion du client i est définie par:

$$\text{Route } k = \left\{ i_1, i_2, \dots, i_1, i_{1+1}, \dots, i_p \right\} \text{ avec } i_1 = i_p \in R$$

et $i_2, \dots, i_{p-1} \in N-R$.

Son coût total, CR_1 , avant l'insertion de i , est donné par:

$$CR_1 = TC(k) = F(D_k) + V(D_k) * Lg(k) \quad (5.7)$$

Pour des raisons de simplicité, posons alors:

$a = D_k$ demande totale de la route k avant l'insertion de i

$b = Lg(k)$, longueur de la route k avant l'insertion de i .

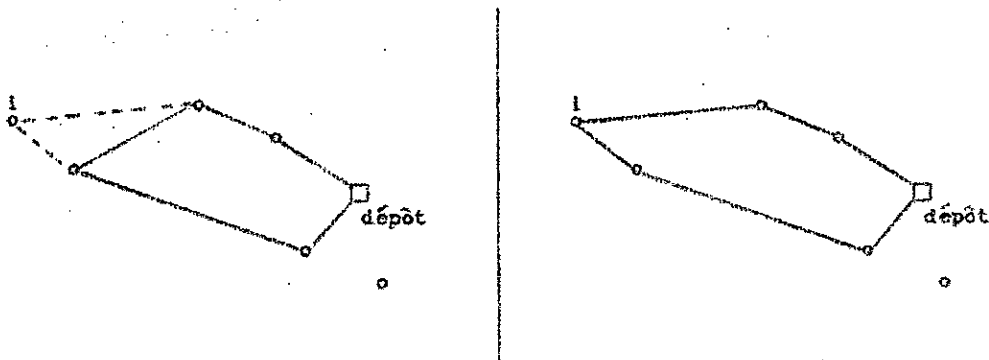
$$CR_1 = F(a) + V(a) * b \quad (5.8)$$

La route k devient, apres insertion du client i entre i_1 et i_{1+1} :

$$\left\{ i_1, i_2, \dots, i_1, i, i_{1+1}, \dots, i_p \right\}$$

Son coût total, CR_2 , est alors égal à:

$$CR_2 = F(D_k) + V(D_k) * Lg(k) \quad (5.9)$$



(figure 5.5)

Route k avant et apres insertion du client i

sachant que:

$$D_k = a + d_i \quad (5.10)$$

et

$$Lg(k) = b + C_{i_1 i} + C_{i_1 i_{1+1}} - C_{i_1 i_{1+1}} = b + \Delta L \quad (5.11)$$

nous obtenons:

$$CR_2 = F(a+d_i) + V(a+d_i) * \left(b + C_{i_1 i} + C_{i_1 i_{1+1}} - C_{i_1 i_{1+1}} \right) \quad (5.12)$$

et l'augmentation de coût résultante, ΔC_{2i}^k , serait égale à:

$$\Delta C_{2i}^k = CR_2 - CR_1 \quad (5.13)$$

$$= \left[F(a+d_i) + V(a+d_i) * \left(b + C_{1i} + C_{1i+1} - C_{1i+1} \right) \right] - \left[F(a) + V(a) * b \right] \quad (5.14)$$

Remarque:

lorsque l'insertion n'entraîne pas de changement de véhicule (i.e. $F(a+d_i) = F(a)$ et $V(a+d_i) = V(a)$), l'augmentation de coût se réduit à:

$$\Delta C_{2i}^k(u) = V(a) * \left(C_{1i} + C_{1i+1} - C_{1i+1} \right) \quad (5.15)$$

Notons R_u l'ensemble des routes issues du dépôt $u \in R$.

$\Delta C_{2i}^k(u)$ est alors calculé pour toutes les routes $k \in R_u$.

$$\text{Soit alors } \Delta C_{2i}^*(u) = \min_{k \in R_u} \left\{ \Delta C_{2i}^k(u) \right\} \quad (5.16)$$

Le meilleur coût de service est alors donné par:

$$E_{ui}^* = \min \left\{ \Delta C_{1i}(u), \Delta C_{2i}^*(u) \right\} \quad (5.17)$$

Pour chaque client i , nous déterminons ainsi les meilleurs coûts de service à partir de chacun des dépôts du système, pour calculer ensuite le regret Δ_i exprimé par la formule (5.2).

Complexité de l'algorithme proposé:

Pour résoudre un problème comprenant N clients et R dépôts, l'algorithme précédent nécessite le calcul de:

■ $R * N * (n+1)/2$ coûts de service E_{ri}^* et de

■ N expressions de "regret" Δ_i (dont chacune nécessite à son tour R additions, une soustraction et une multiplication).

Comme nous l'avons mentionné précédemment, le calcul des G_{ri}^* peut être restreint aux d dépôts les plus proches du client i considéré. Ceci entraînera alors le calcul de $(d*N*(N+1)/2)$ coûts de service.

Le calcul d'un coût de service G_{ri}^* se fait comme suit:

$$G_{ri}^* = \text{Min} \left\{ AC_{i_1}^*(r), AC_{i_2}^*(r) \right\}$$

$$= \text{Min} \left\{ F(d_i) + 2*V(d_i)*C_{ri}, \right.$$

$$\left. \text{Min}_{\text{route}_k \in R_r} \left\{ F(a+d_i) + V(a+d_i) * \left(b + C_{i_1 i_1} + C_{i_1 i_{1+1}} - C_{i_1 i_{1+1}} \right) - \left(F(a) + V(a)*b \right) \right\} \right\}$$

i_1 et $i_{1+1} \in \text{route}_k$

où F , V , a , b , d_i , R_r , i_1 et i_{1+1} sont les entités définies plus haut.

Selon l'expression (5.16), la détermination d'un $AC_{i_1}^*(r)$ (qui intervient dans le calcul de tout G_{ri}^*) nécessite l'énumération de toutes les insertions possibles du client i dans l'ensemble des routes issues du dépôt r considéré. Dans le pire des cas, il s'agira d'explorer $(n-1)$ tournées (en supposant que $(n-1)$ tournées sont issues du même dépôt r et que chacune dessert un et un seul client). En fait, le nombre de tournées qui seront réellement examinées est beaucoup moins important: il comprend uniquement les tournées voisines du client considéré.

5.3.3- Extensions

L'insertion d'un client i dans une route déjà formée peut nécessiter l'utilisation d'un véhicule de capacité supérieure à celle du véhicule initial, entraînant du coup l'augmentation des coûts associés. Ceci peut rendre l'insertion non avantageuse, en raison de la sous-utilisation du nouveau véhicule. En effet, cette insertion entraîne le "payement" immédiat de toute la capacité du véhicule, alors que

celle-ci ne sera (éventuellement) utilisée que lors d'insertions futures.

Une manière d'éviter ce problème est de compenser le coût de cette portion de capacité inutilisée. Nous pouvons ainsi considérer les économies E_1 (savings) initialement proposées par Golden et al [27] et discutées dans le chapitre précédent:

$$E_1 = F(a) + F(d_1) - F(a+d_1) \quad (CS)$$

$$E_2 = E_1 + F\left(P(a+d_1) - a - d_1\right) \quad (OOS)$$

$$E_3 = \begin{cases} E_1 + F\left(P(a+d_1) - a - d_1\right) & \text{SI } P(a+d_1) > \text{Max}\{P(a), P(d_1)\} \\ E_1 & \text{SINON} \end{cases} \quad (ROS)$$

L'augmentation de coût AC_2^k résultant de l'insertion du client i dans la route k serait alors donnée par:

$$AC_2^k = CR_2 - CR_1 - E_j \quad \text{avec } j \in \{1, 2, 3\} \quad (5.18)$$

5.3.4- Raffinage de la solution

La procédure *best insertion*, utilisée dans la recherche de la position d'insertion d'un client dans une route, est peu gourmande en temps de calcul. En revanche, elle ne garantit pas l'optimalité de la tournée.

Pour cette raison, lorsqu'un certain nombre de clients ont été insérés dans une route, celle-ci est de nouveau raffinée, mais en utilisant cette fois-ci les procédures 2-Opt et 3-Opt. Ce procédé permet de réduire l'effort de calcul tout en générant des tournées de longueur "acceptable", c'est à dire proche de la longueur minimale (longueur qu'il serait possible d'obtenir en résolvant un problème du voyageur de commerce, par exemple).

En plus de l'optimisation de la longueur des tournées, la solution peut subir d'autres raffinages, comme ceux utilisés par Salhi et Rand [62]. Nous en avons considéré trois: fusion de tournées, permutation de clients entre tournées, et réaffectation de clients d'une tournée à une autre. Le processus d'optimisation peut être réitéré un certain nombre de fois (Max_itérations), ou encore jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'amélioration dans le coût total:

Début

$\mathcal{C}_1 :=$ Coût Total de la solution courante;
 itération := 0;

Répéter

$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1$;
 itération := itération + 1;

Fusion de tournées;
 Permutation de clients entre tournées;
 Réaffectation de clients d'une tournée à une autre;

$\mathcal{C}_1 :=$ Coût Total de la solution courante

Jusqu'à ce que $\left\{ \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_1 \right\}$ ou $\left\{ \text{itération} = \text{Max_itérations} \right\}$

Fin.

Lorsqu'on procède par énumération exhaustive de toutes les combinaisons possibles, un tel processus peut demander un temps considérable, de loin plus important que celui nécessité par la première phase de l'algorithme. Aussi, l'exploration des tournées à fusionner, des clients à permuter et de ceux à réaffecter doit être optimisée de sorte que seules les opérations susceptibles d'améliorer la solution soient effectivement analysées.

Par ailleurs, l'ordre dans lequel sont effectués ces différents raffinages peut conduire à des solutions finales différentes. Il serait alors intéressant d'établir des critères permettant de décider de l'opération à exécuter en priorité, mais ce problème n'est pas facile à résoudre.

1- Fusion de tournées

Considérons les deux tournées suivantes:

$$T_1 = \{ i_1, i_2, \dots, i_p \} \text{ avec } i_1 = i_p \in R \text{ et } i_2, \dots, i_{p-1} \in N-R$$

$$T_2 = \{ j_1, j_2, \dots, j_m \} \text{ avec } j_1 = j_m \in R \text{ et } j_2, \dots, j_{m-1} \in N-R$$

Notons par D_{T_t} , $Lg(T_t)$, v_{T_t} et C_{T_t} la demande totale, la longueur, le véhicule et le coût de la tournée t respectivement ($t=1,2$).

La fusion des deux tournées est réalisée lorsque la tournée résultante T_{12} est admissible (i.e aucune des contraintes associées n'est violée) et que le coût total n'augmente pas :

$$T_{12} = \{ i_1, i_2, \dots, i_s \} \text{ avec } i_1 = i_s \in R; \quad i_2, \dots, i_{s-1} \in N-R$$

et $s = p+m-2$

$$C_{T_1} + C_{T_2} \leq C_{T_{12}} - E_k$$

où:

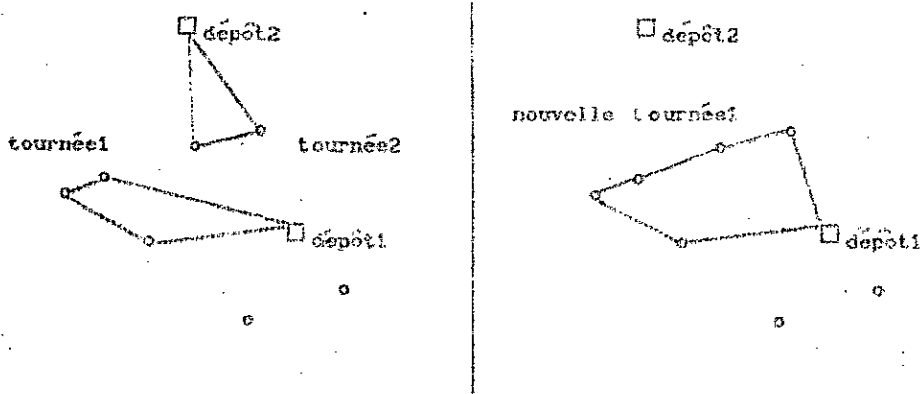
$$C_{T_{12}} = F(D_{T_1} + D_{T_2}) + V(D_{T_1} + D_{T_2}) * Lg(T_{12})$$

E_k ($k=1,2,3$) le facteur de compensation précédemment défini:

$$E_1 = F(D_{T_1}) + F(D_{T_2}) - F(D_{T_1} + D_{T_2}) \quad (CS)$$

$$E_2 = E_1 + F(P(D_{T_1} + D_{T_2}) - D_{T_1} - D_{T_2}) \quad (OOS)$$

$$E_3 = \begin{cases} E_1 + F(P(D_{T_1} + D_{T_2}) - D_{T_1} - D_{T_2}) & \text{SI } P(D_{T_1} + D_{T_2}) > \text{Max} \left\{ P(D_{T_1}), P(D_{T_2}) \right\} \\ E_1 & \end{cases} \quad (ROS)$$



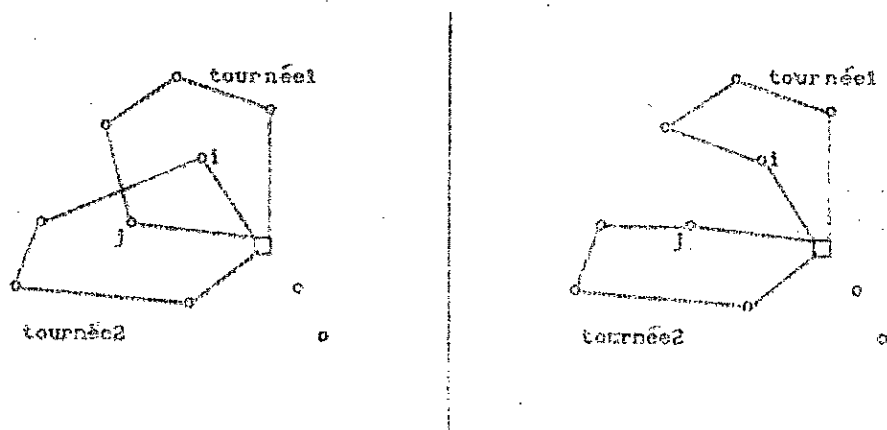
(figure 5.6)

Fusion de tournées

2- Permutation de clients

Il est parfois possible de réduire le coût total en permutant entre deux clients de tournées différentes, de manière à réduire les distances à parcourir ou les capacités non utilisées, ou encore à permettre l'utilisation de véhicules relativement "plus économiques".

L'insertion d'un client dans une tournée, se fait toujours au meilleur endroit (celui qui entraîne le plus faible accroissement de distance). Il va de soi que cette opération n'est réalisée que si les tournées résultantes restent admissibles.



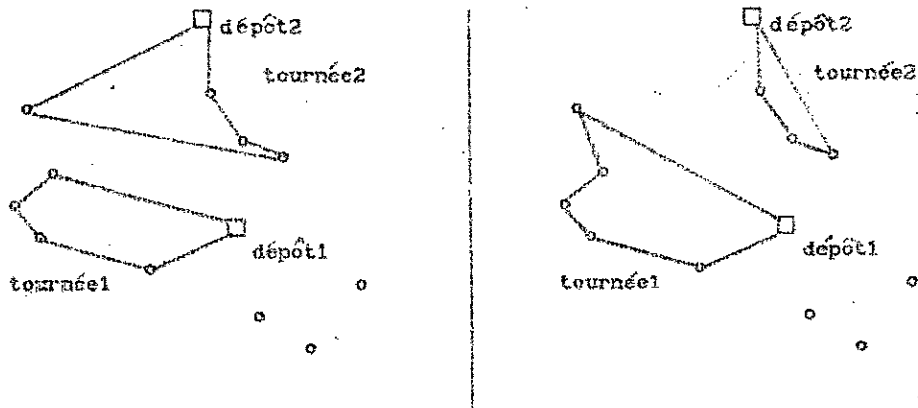
(figure 5.7)

Permutation de clients

3- Réaffectation de clients

De la même manière, le coût total pourra parfois être réduit en réaffectant un client d'une tournée à une autre, lorsque ceci n'entraîne pas la formation de tournées interdites.

Les opérations de permutation et de réaffectation de clients entraînent toujours un changement dans la longueur des tournées impliquées, et quelques fois aussi dans le type du véhicule utilisé par la tournée. Afin de ne pas pénaliser le recours à des véhicules de capacité supérieure, les mêmes facteurs de compensation seront utilisés là-encore. Le coût d'une tournée peut ainsi évoluer aussi bien à la hausse qu'à la baisse, en fonction des changements subis. C'est donc le coût total des deux tournées considérées qui détermine si une opération donnée doit être effectuée ou non. Lorsque la réduction de coût observée sur l'une des deux tournées ne compense pas l'augmentation observée sur l'autre, l'opération n'est pas profitable *a priori* (elle peut cependant l'être, à terme).



(figure 5.8)

Réaffectation de clients

IMPLEMENTATION ET RESULTATS NUMERIQUES

L'algorithme, codé en FORTRAN 77, a été implémenté sur un micro-ordinateur de type Micro-VAX II, à l'École Nationale Polytechnique. Les tests ont porté sur un ensemble de problèmes générés aléatoirement.

5.3.5.a- Génération des problèmes tests

0- Notations:

- * Nb_Clients : Nombre de clients dans le système
- * Nb_Depots : Nombre de dépôts dans le système
- * Nb_Types : Nombre maximum de types de véhicules différents
- * d_{\min} : Demande minimale d'un client
- * d_{\max} : Demande maximale d'un client

1- Données concernant les clients:

Nous avons considéré les problèmes tests étudiés par Eilon, Watson-Gandy et Christofides [15]. Les coordonnées de chaque client sont données ainsi que sa demande.

2- Données concernant les dépôts:

a- Nombre de dépôts:

Le nombre de dépôts dans le système sera pris entre 2 et 6, selon le nombre des clients.

b- Localisation des dépôts:

Les dépôts ont été localisés en utilisant la méthode de base développée par Cooper, *Random Destination Algorithm* [10].

c- Composition des flottes de véhicules:

Les flottes seront formées à partir de types de véhicules puisés dans un ensemble de Nb_Types construit en utilisant l'algorithme défini ci-après.

Dans le cas de problèmes avec dépôt unique, la capacité minimale d'un véhicule est déterminée de manière à lui permettre de desservir n'importe quel client, en une seule tournée. D'autre part, la capacité maximale permettra à un véhicule de desservir l'ensemble des clients du système, si le reste des contraintes était relaxé. Ceci revient à puiser les différentes capacités dans l'intervalle

$$[\text{Max}\{d_i\}, \sum d_i].$$

En fait, il n'est pas nécessaire que la capacité minimale de tous les véhicules soit supérieure à la plus forte demande. Il suffit en effet, pour que le problème admette une solution dans les conditions supposées, que la flotte comprenne au moins un type de véhicules ayant une capacité suffisante:

$$\forall i \in N-R, \exists v \in V \text{ tel que } CV_v \geq d_i$$

condition beaucoup moins restrictive (et aussi plus proche de la réalité) que la première:

$$CV_v \geq \text{Max} \{ d_i \} \quad \forall v \in V$$

Dans la pratique, la génération aléatoire des différents types de véhicules (différentes capacités) donnait naissance à des véhicules de capacités parfois quasi-identiques, et parfois regroupées de part et d'autre de l'intervalle retenu.

Pour éviter ce genre de problèmes, l'intervalle initial a été d'abord réduit à:

$$\left[\left(\sum d_i \right) / (|N|-|R|), \left(\sum d_i \right) / |R| \right]$$

ce qui revient à considérer la demande moyenne par client et la demande moyenne par dépôt. Cet intervalle est découpé en $2 \cdot \text{Nb_Types}$ bandes disjointes de même largeur L . Deux tirages aléatoires successifs seront ensuite opérés dans des intervalles séparés par une ou deux bandes de largeur L .

Remarque:

Généralement, en l'absence de contraintes sur le coût, la durée ou la longueur d'une tournée, le fait que les véhicules de plus faible capacité peuvent desservir d'un seul coup plusieurs clients à la fois, encourage la formation de tournées parfois très longues. De plus, la création d'une nouvelle tournée entraîne l'utilisation systématique d'un nouveau véhicule, ce qui revient souvent plus cher que l'insertion du client dans une ancienne route. Le coût fixe de tout nouveau véhicule va donc à l'encontre de la création de nouvelles tournées. Un problème important peut alors se poser: si la création d'une tournée pour un client seul n'est pas toujours la solution la plus économique, elle peut l'être en considérant un groupe de clients. Malheureusement, une solution plus économique *a posteriori* risque fort bien d'être exclue dès le départ. Ceci rend nécessaires les différentes procédures de raffinement décrites précédemment.

Une fois les types de véhicules obtenus, il reste, enfin, à déterminer pour chacun d'entre-eux, les coûts unitaires fixes et variables.

Nous avons alors procédé, lors de la génération de ces coûts, de la manière suivante:

Début

Pour $v = 1$ à Nb_Types

Faire

* Tirer aléatoirement la capacité CV_v du véhicule v dans l'intervalle $[Max\{d_i\}, \sum d_i]$

* Coût fixe $\alpha_v = CV_v * a_1 + b_1$

* Coût variable $\beta_v = CV_v * a_2 + b_2$

Fin Faire

Fin.

a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont des constantes arbitraires. Pour des raisons de simplicité, les valeurs suivantes sont utilisées [54].

$$a_1 = 2.0 \qquad b_1 = 35.0$$

$$a_2 = 0.004 \qquad b_2 = 0.104$$

Une fois cet ensemble défini, les flottes de véhicules des différents dépôts sont construites comme suit:

Début

Four Chaque dépôt r

Faire

Tirer aléatoirement le nombre de types de véhicules, N_r .
Tirer aléatoirement N_r types de véhicules différents dans $\{1, 2, \dots, Nb_Types\}$ avec leurs capacité, coûts fixe et variable associés.

Fin Faire

Fin.

5.3.5.b- Résultats Numériques

Les tableaux 5.1 et 5.2 donnent quelques résultats obtenus à l'aide de l'algorithme proposé, en considérant les trois types de *saving* précédemment définis: CS, OOS, et ROS, en plus de celui obtenu directement (Nul), c'est à dire sans compensation d'aucune espèce pour la capacité non utilisée des véhicules. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus, pour les mêmes problèmes, par une heuristique dérivée de l'approche *Assignment-Sweep*.

Résultats numériques

1- COÛTS

Pb	C	D	CS	OOS	ROS	Nul	Affect.	A- <i>Fiveep</i> ⁺
1	30	2	1762	1708	1660	1762	1774	1671
2	50	2	2683	2974	2690	2801	2765	2697
3	50	3	2634	2646	2649	2703	2827	2612
4	50	2	3355	3449	3158	3410	3949	3388
5	50	3	3272	3105	3117	3292	3940	3092
6	75	2	4684	4510	4512	4457	4710	4677
7	75	3	4529	4317	4302	4430	4630	4351
8	75	4	4496	4221	4294	4577	4506	4218
9	100	2	5033	5015	4985	5075	5015	4903
10	100	3	4928	5046	5018	4900	5046	4884
11	100	4	4873	4890	5021	4708	4921	4897
12	150	2	7286	7352	7053	7305	7352	7178
13	150	3	7258	7831	7042	7122	7231	7120
14	150	4	7317	7009	7332	7517	7229	7131
15	150	5	7148	6834	7031	7135	7109	6904
16	175	2	9721	9761	8921	9013	10061	9046
17	175	3	9646	9684	8773	8981	9774	8765
18	175	4	9409	9521	9129	9529	9621	8904
19	175	5	9279	9435	9129	9003	9433	8971
20	225	2	11408	11554	11130	11401	12384	11255
21	225	3	11166	12271	11054	11132	12271	10915
22	225	4	11837	11926	11837	11801	11926	11586
23	225	5	11808	11659	10701	11744	11959	10758
24	225	6	10521	10898	10121	11321	11798	10506

(tableau 5.1)

C: Nombre de clients dans le système

D: Nombre de dépôts dans le système

Nul: Aucun facteur de compensation n'a été utilisé.

AFFECT.: Affectation au plus proche dépôt puis résolution

A-*Fiveep*⁺: procédure définie ci-après et utilisée à fin de validation et d'étude des performances.

Le tableau suivant donne les configurations de flottes obtenues pour ces mêmes problèmes par l'une des variantes, soit celle qui utilise un saving de type ROS.

Résultats numériques

2- FLOTTES
Variante ROS

Pb	Depot 1	Depot 2	Depot 3	Depot 4	Depot 5	Depot 5
1	C^2	B^2C^1				
2	$A^1C^2D^1$	$A^1B^1C^2$				
3	A^1C^2	B^1C^2	$A^1B^1C^1$			
4	$A^2B^2C^1$	B^3D^1				
5	B^2C^1	A^2B^1	$A^1B^2C^1$			
6	$B^1C^4D^1$	B^2C^3				
7	B^3C^2	B^1C^3	C^3			
8	B^1C^3	A^1C^2	C^2	$A^1B^2C^1$		
9	B^2C^4	B^2C^3				
10	$A^1B^1C^2$	$A^1B^2C^3$	$A^1B^2C^1$			
11	B^3C^1	B^4	C^3	B^2C^1		
12	$B^4C^2D^1$	$A^1B^4C^3$				
13	B^6	B^6C^1	B^6			
14	B^6C^1	B^1C^1	B^2C^2	$A^1B^4C^1$		
15	$A^1B^2C^1$	B^3C^2	B^1C^1	B^1C^1	A^4B^1	
16	$A^1B^7C^1$	$A^1B^5C^2$				
17	$A^1B^3D^1$	A^2B^6	$A^2B^3C^1$			
18	B^4	A^1B^3	B^4C^1	B^3C^1		
19	B^2C^1	$A^3B^1C^1$	$A^1B^2C^1$	B^4	$A^1B^1C^1$	
20	$A^1B^9C^1$	A^2B^{10}				
21	B^5C^2	$A^1B^4C^1$	$A^1B^5C^1$			
22	A^1B^6	$A^3B^2C^1$	A^1B^5	A^1B^6		
23	A^2B^4	A^1B^4	A^2B^5	B^4	$A^3B^1C^1$	
24	$A^1B^1C^1$	A^1B^3	A^1B^4	B^4	A^1B^2	B^5

(tableau 5.2)

Résultats numériques

4- CPU-TIME (s)

Pb	C	D	ROS	4-Sweep ⁺
1	30	2	8.60	15.81
2	50	2	23.31	38.07
3	50	3	13.66	22.54
4	50	2	24.97	35.90
5	50	3	26.64	33.81
6	75	2	64.87	91.99
7	75	3	69.35	68.02
8	75	4	75.43	83.15
9	100	2	135.94	198.56
10	100	3	133.98	172.40
11	100	4	125.30	139.18
12	150	2	304.74	583.20
13	150	3	386.94	531.62
14	150	4	393.18	425.03
15	150	5	397.44	429.61
16	175	2	530.56	846.74
17	175	3	542.85	850.30
18	175	4	565.14	737.24
19	175	5	573.21	648.29
20	225	2	1096.45	1651.13
21	225	3	1114.52	1503.07
22	225	4	1240.30	1481.97
23	225	5	1287.01	1462.12
24	225	6	1294.41	1353.48

(tableau 5.3)

4-Sweep⁺:

C'est une procédure à trois phases:

1- Au démarrage, elle se comporte exactement comme la procédure

définie par Gillett and Johnson [24]. Les clients sont alors affectés aux n différents dépôts du système, ce qui donne naissance à n VRPs à dépôt unique.

2- Les n VRPs sont ensuite résolus à l'aide de l'une des procédures de partitionnement de tour définies précédemment (SGT a été retenue à cet effet).

3- La solution subit alors un raffinage qui consiste à:

- Echanger des clients entre tournées issues de dépôts différents.
- Réaffecter des clients (un client est alors détaché de son dépôt initial, puis affecté à un autre, de manière à minimiser le coût total du système entier).

Pour les besoins de l'étude, la phase 3 est réitérée un certain nombre de fois (le critère "réitérer tant qu'il y a amélioration du coût total" n'a pas été retenu, en raison du temps de traitement que cela aurait pris).

5.4- Conclusion

L'algorithme proposé procède de la manière suivante:

- Il définit une priorité de prise en compte des clients et
- Il propose un mécanisme pour cette même prise en compte.

Le principe utilisé (priorité de service basée sur la notion de regret ou de surcoût potentiel lié à l'impossibilité de satisfaire une demande donnée dans certaines conditions ou à certaines étapes du processus) peut être développé de manière à intégrer d'autres paramètres que ceux utilisés.

De plus, la structure de l'algorithme permet et facilite l'introduction de nouvelles contraintes. Elle tient d'ores et déjà

compte des différents coûts associés aux véhicules (fixes et variables, selon le type du véhicule) et considère la contrainte sur la distance.

Les résultats obtenus semblent raisonnables bien qu'il soit difficile de se prononcer de manière précise sur leur qualité, en l'absence de méthodes de résolution exactes et de bornes inférieures suffisamment fines. La seule tentative de validation entreprise est basée sur la comparaison avec les résultats obtenus en utilisant une approche adaptée de l'algorithme *assignment-sweep*, spécialement "renforcée" pour les besoins de l'étude. Cette comparaison témoigne d'un comportement général satisfaisant.

CHAPITRE VI

CONCLUSION GENERALE

ET

SUGGESTIONS

6.1- PREAMBULE

La distributique constitue une fonction complexe et fort couteuse pour nombre d'entreprises, et la nécessité de la gérer de manière plus rationnelle et efficace n'est plus à démontrer. L'intérêt porté par les chercheurs à cette discipline est à la mesure de son importance, bien que certains aspects commencent seulement à être explorés. En effet, la diversité des applications pratiques, leur complexité et les limites des outils de prospection et de traitement imposent une certaine discipline dans la manière de les aborder et de les résoudre. L'ordinateur, qui est l'outil par excellence pour cette classe de problèmes, conditionne le développement de beaucoup de ces aspects. Il définit à lui seul toute la problématique de la discipline. Par ailleurs, le paradoxe engendré par la facilité relative de la formulation mathématique de ces problèmes et l'énorme difficulté que l'on rencontre à les résoudre de manière optimale et efficace illustrent bien leur caractère spécial. Il suffit, pour percevoir toute cette complexité, de savoir que le problème du voyageur de commerce, qui est lié à tous ces aspects, est de nature NP-Complet.

Les approches de résolution, qu'elles soient exactes ou approximatives, se heurtent à cette difficulté intrinsèque due à la nature combinatoire du problème. Le temps de traitement sur ordinateur handicape certains de ces algorithmes, limite l'utilisation de certains autres, et rend enfin difficilement concevable l'utilisation de quelques autres. Néanmoins, la maîtrise des calculateurs à architecture parallèle, l'évolution des performances des ordinateurs en général, et

les progrès algorithmiques réalisés, permettent de résoudre des problèmes de plus en plus difficiles. Ainsi, tout laisse à croire que ce domaine de la recherche connaîtra des développements considérables durant les années à venir.

6.2- RESUME DU TRAVAIL REALISE

Cette étude nous a permis d'aborder un problème général relevant de la distributique, à savoir le *problème mixte de composition de flottes de véhicules et d'élaboration de tournées de distribution*.

- L'impact du coût variable unitaire sur la solution a été étudié à travers plusieurs approches, et les résultats obtenus semblent concluants. Il ressort ainsi que l'assimilation des coûts variables unitaires à un paramètre constant conduit généralement à des écarts importants avec ce que devrait être la solution véritable. Ces écarts peuvent affecter le coût total de la solution, la composition de sa flotte de véhicules, et les tournées de distribution.

- Des modèles ont été élaborés pour l'étude proprement dite, et ceci dans deux cas: l'un qui considère les systèmes à dépôt unique, et l'autre, plus général, qui considère plusieurs dépôts à la fois.

1- Dépôt unique:

Nous avons pu étudier concrètement et expérimenter deux classes d'algorithmes de résolution:

a- Algorithmes basés sur la technique du partitionnement de tour: deux variantes principales ont été développées et adaptées pour tenir compte des paramètres étudiés. Implémentées sur ordinateur, ces deux variantes (SGT et MGT) ont montré leurs performances et leur flexibilité. Ces méthodes étant de type heuristique, le problème de la validation des résultats s'est posé de manière cruciale, nous amenant à mettre au point d'autres techniques de résolution.

b- Algorithmes basés sur le concept d'économie (gain, ou encore

saving): là encore, deux variantes ont été adaptées pour tenir compte des différentes données du problème, et implémentées avec autant de succès que les premières.

D'autres aspects, tel que l'impact de la solution initiale et celui de la contrainte distance (ou temps) sur la solution finale ont été analysés par la même occasion. Beaucoup de questions se sont posées à nous lors de l'élaboration de ces algorithmes, et nous avons tenté d'apporter une réponse à certaines d'entre-elles, lorsque le temps et les moyens le permettaient. Ainsi, nous ne nous sommes pas contentés d'adapter des techniques déjà éprouvées, mais nous avons de plus visé l'amélioration et l'élévation de leurs performances générales.

2- Dépôts multiples:

Le problème initial a été étendu pour prendre en compte les systèmes à plusieurs dépôts, avec flottes de véhicules hétérogènes à coûts unitaires variables différents et sous les contraintes de capacité des véhicules et de longueur maximale des tournées. Une approche de résolution de type heuristique basée sur la notion de "regrêt" a été développée et implémentée sur ordinateur. Cet algorithme affecte les clients aux dépôts et construit simultanément les tournées de distribution, contrairement aux approches classiques qui procèdent en deux phases (affectation d'abord, composition des flottes et élaboration des tournées ensuite) et dont le résultat est souvent sous-optimal. Les résultats obtenus à l'aide de notre algorithme semblent satisfaisants, autant qu'on puisse en juger. L'algorithme présente une grande flexibilité et permet l'incorporation de contraintes supplémentaires.

Enfin, la mise en oeuvre de tous ces algorithmes a nécessité le traitement de certains aspects sous-jacents mais non directement apparents, ce qui s'est traduit par la mise au point de tout un ensemble de procédures de traitement.

6.3- PERSPECTIVES DE DEVELOPPEMENT

Le domaine considéré est bien vaste, et l'on pourrait penser à bien des extensions tout aussi intéressantes les unes que les autres. Nous nous contenterons d'en citer quelques unes, tout en suggérant quelques idées au passage.

1- ASPECT PROBABILISTE DU PROBLEME

Les formulations des problèmes considérés (VRP, FSP, FSMVRP) occultent un aspect important de la réalité des systèmes de distribution: de nombreux paramètres (durées de parcours, distances inter-sites, localisation des sites, demandes des clients, etc...) sont de nature stochastique. En dépit de son importance, cet aspect est loin d'atteindre le niveau de développement connu par le problème déterministe.

Dans les problèmes traités dans cette étude, nous avons supposé que la demande des clients était connue à l'avance (c'est à dire avant la composition de la flotte et l'élaboration des tournées de véhicules) pour chaque site. Ceci n'est pas toujours le cas dans la pratique, et il existe des situations où la demande ne peut être connue à l'avance (notamment dans le cas de collecte) ce qui engendre le risque de générer des flottes et des tournées non réalisables. Le problème peut être résolu en créant des tournées supplémentaires pour desservir les clients non pris en compte dans la tournée initialement prévue, en raison de la saturation de la capacité du véhicule associé, moyennant un certain coût additionnel. Il serait intéressant d'étudier cet aspect et de formuler les problèmes mixtes de composition de flottes et d'élaboration de tournées de véhicules dans le contexte de la programmation stochastique (*Chance-Constrained Programming*).

La stabilité des solutions revêt une importance vitale, et il faut veiller à ce que les fluctuations de la demande n'aient pas un impact négatif trop important sur le coût total.

L'introduction du facteur aléa dans les approches utilisées ici devrait donner une plus grande consistance et une fiabilité accrue aux

solutions. Le principe de "regret" défini plus haut pourrait être étendu dans ce but là.

2- SYSTEMES EXPERTS ET DISTRIBUTIQUE

La majorité des méthodes de résolution utilisées dans ce contexte sont de type heuristique. Nous avons pu constater à travers cette étude le caractère imprévisible de ces approches, et nous avons vu que le résultat final peut changer d'une approche de résolution à l'autre. De plus, une même méthode peut générer de très bonnes solutions dans certains cas précis, et avoir un comportement médiocre dans d'autres cas. La distribution géographique des clients (isolés, regroupés en clusters, uniformément répartis, ...), leur demande et le type des véhicules disponibles peuvent expliquer, au moins partiellement, la perte de qualité observée alors. Limité par le temps ou par les contraintes budgétaires, le gestionnaire peut difficilement se permettre d'essayer une à une les différentes approches (ou classes d'approches). L'élaboration d'un système expert capable de choisir l'algorithme le plus approprié pour un problème donné permettra probablement d'éviter ce problème.

3- AMELIORATIONS CONCERNANT CERTAINES APPROCHES

a- Les méthodes de partitionnement de tour étudiées et adaptées ici sont des approches constructives (elles élaborent progressivement les solutions) et itératives (le nombre d'itérations permet d'explorer davantage de solutions candidates). L'introduction du principe de la recherche avec "tabous" est donc intéressant, afin d'éviter que la même tournée géante initiale ne soit considérée plus d'une fois.

b- Le processus de traitement converge souvent vers un optimum local et stagne alors à son voisinage. La perturbation de la solution peut alors permettre au processus de s'éloigner de ce point et de considérer d'autres solutions candidates.

Le principe de base de l'approche dite de "recuit simulé" pourrait être introduit dans ces variantes afin d'en améliorer encore plus les performances (voir Golden et Skiscim [28]).

c- La solution de certains problèmes tests n'a pas été affectée par les coûts variables unitaires considérés. Il serait intéressant de voir dans quelles conditions exactes cette solution est laissée intacte, et dans quelles autres elle a tendance à varier.

4- CONSIDERATIONS GENERALES

a- Le nombre de véhicules d'un type donné, supposé infini dans cette étude, peut conduire à des solutions différentes dans le cas contraire.

b- L'âge du véhicule peut, lui aussi, influencer la solution et mérite que l'on s'y intéresse davantage. En effet, les coûts d'amortissement baissent alors que les frais de maintenance augmentent avec l'âge du véhicule. Il faudrait ainsi étudier le comportement du coût variable unitaire de transport en fonction de ce paramètre.

c- Enfin, il serait tout aussi intéressant de se pencher sur certains autres aspects, tels que le niveau de service des clients, l'utilisation équitable des véhicules, la possibilité d'effectuer plusieurs voyages en un seul jour, la possibilité de desservir les clients en plusieurs voyages, ou de les desservir partiellement, etc ...

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.E. BEASLEY: "Route First-Cluster Second Methods for Vehicle Routing", *OMEGA* 11, (4), (1983), pp. 403-408.
- [2] R. BELLMAN: "An application of dynamic programming to location-allocation problems", *S.I.A.M.* 7, (1), (1965), pp. 126-128.
- [3] L. BODIN and B. GOLDEN: "Classification of vehicle routing and scheduling", *Networks* 11, (1981), pp. 87-108.
- [4] L. BODIN, B. GOLDEN, A. ASSAD and M. BALL: "The state of the art in routing and scheduling of vehicles and crews", *Computers and Operations Research* 11, (1983) pp. 62-212.
- [5] P. CASSIDY and H. BENNETT: "TRAMP-a multidepot vehicle scheduling system", *Operational Research Quarterly*, 23, (1972), pp. 151-163.
- [6] N. CHRISTOFIDES and S. EILON: "An algorithm for the vehicle dispatching problem", *Operational research quarterly*, 20, (1969), pp. 309-318.
- [7] N. CHRISTOFIDES and S. EILON: "Expected distances in distribution problems", *Operational Research Quarterly*, 20, (1969), pp. 437-443.
- [8] N. CHRISTOFIDES, A. MINGOZZI and P. TOTH: "Exact algorithms for the TSP with additional constraints", *Euro-IV Cong.*, Cambridge, England (1980).
- [9] C. CLARKE and J.W. WRIGHT: "Scheduling of vehicles from central depot to a number of delivery points", *Operations Research*, 12, (1964), pp. 568-581.
- [10] S.A. COOK: "On the complexity of theorem proving procedures", *Proc. 3rd A.C.M. Symposium on the theory of computing*, (1971), pp. 151-158.
- [11] L. COOPER: "A heuristic methods for location-allocation problems", *SIAM*, 6, (1), (1964), pp. 37-53.
- [12] G. DANTZIG, D. FULKERSON and S. JOHNSON: "On a linear programming, combinatorial approach to the travelling salesman problem", *Operations Research*, 7, (1), (1959), pp. 58-66.

- [13] M. DESROCHERS and T.W. VERHOOG : "A new heuristic for the fleet size and mix vehicle routing problem", Working paper GERAD-89-05, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1989).
- [14] M. DESROCHERS and T.W. VERHOOG: "A Matching Based Savings Algorithm for the Vehicle Routing Problem", Working paper GERAD-89-05, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1990).
- [15] E. DIJKSTRA: "A note on two problems in connection with graphs", Numer. Math., 1, (1959), pp. 269-271.
- [16] S. EILON, C.D.T. WATSON-GANDY and A. HEILBRON: "A vehicle fleet costs more", International Journal of physical Distribution 1, (1971), pp. 126-132.
- [17] S. EILON, C.D.T. WATSON-GANDY and N. CHRISTOFIDES: "Distribution Management: Mathematical Modeling and Practical analysis", Hafner, New-York (1971).
- [18] T. ETEZADI and J.E. BEASLEY: "Vehicle fleet composition", Journal of the Operational Research Society, 34, (1983), pp. 87-91.
- [19] J. A. FERLAND and P. MICHELON: "The Vehicle Scheduling Problem with Multiple Vehicle Types", J.Opl Res.Soc., 39, (6), (1988), pp. 577-583.
- [20] M.L. FISCHER and R. JAİKUMAR: "A generalised assignement heuristic for vehicle routing", Networks 11, (1981), pp. 109-124.
- [21] F.G. GHEYSENS, B. GOLDEN and A. ASSAD: "A relaxation heuristic for the fleet size and mix vehicle routing problem", Working paper MS/S 82-029, University of Maryland, College Park, MD20742. U.S.A. (1982).
- [22] F.G. GHEYSENS, B. GOLDEN and A. ASSAD: "A comparison of technics for solving the fleet size and mix vehicle routing problem", O.R.Spektrum, 6, (1984), pp 207-216.
- [23] B.E. GILLETT and L.R. MILLER: "A heuristic algorithm for the vehicle dispatch problem", Operations Research, 22, (1974), pp. 340-344.
- [24] B.E. GILLETT and J.G. JOHNSON: "Multi-terminal vehicle dispatch algorithm", OMEGA, 4, (6), (1976), pp. 711-718.
- [25] B. GOLDEN: "Evaluating a sequential vehicle routing algorithm", A.I.I.E. Transactions 9, (2), (1977) pp. 204-208.
- [26] B. GOLDEN and A. ASSAD (eds): "Vehicle Routing: Methodes and Studies", Elsevier Sciences Publishers, B.V, (1988).

- [27] B.L. GOLDEN, A. ASSAD, L. LEVY and F.G. GHEYSENS: "The fleet size and mix vehicle routing problem", *Computers and Operations Research*, 11, (1984), pp. 49-66.
- [28] B.L. GOLDEN and S. SKISCIM: "Using simulated annealing to solve routing and location problem", *Nav. Res. Logist. Quart.*, 33, (1986), pp. 261-279.
- [29] B.L. GOLDEN, T.L. MAGNANTI and H.Q. NGUYEN: "Implementing vehicle routing algorithms", *Networks*, 7, (1977), pp. 113-148.
- [30] B.L. GOLDEN, F.J. GHEYSENS and A. ASSAD: "On solving the vehicle fleet size and mix problem", in: J.P. BRANS eds, *Operational Research*, Amsterdam, 84, (1984), pp. 721-734.
- [31] M. HELD and R.M. KARP: "The traveling salesman problem and minimum spanning trees. Part 1", *Operations research* 18, (1970), pp. 1138-1162.
- [32] R.M. KARP: "Probabilistic analysis of partitioning algorithms for the traveling salesman problem in the plane", *Math., Operations Research*, 2, (1977), pp. 209-224.
- [33] R.M. KARP: "Reducibility among combinatorial problems", in R.E. MILLER and J.W. THATCHER "Complexity of computer computation", Plenum Press, (1972), pp. 85-103.
- [34] D. KIRBY: "Is your fleet the right size?", *Operational research quarterly* 10, (1959), pp. 252.
- [35] G. LAPORTE: "Developpements alogrithmiques recents et perspectives de recherche en distributique", Working paper, CRT-645, Universite de Montreal, Centre de Recherche sur les Transports, Montreal, (1989).
- [36] G. LAPORTE: "Generalised subtour elimination constraints and connectivity constraints", *Journal of the Operational Research Society* 37, (5), (1986), pp. 509-514.
- [37] G. LAPORTE: "An integer linear programming approach to the vehicle scheduling problem", Working paper GERAD-82-10, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1982).
- [38] G. LAPORTE, H. MERCURE and Y. NOBERT: "An optimal algorithm for a general class of asymetrical vehicle routing problems", Working paper GERAD-86-14, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1986).
- [39] G. LAPORTE and Y. NOBERT: "Exact algorithms for the vehicle routing problem", Working paper GERAD-85-11, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1985).

- [40] G. LAPORTE and Y. NOBERT: "A cutting planes algorithm for the m -salesman problem", Journal of the Operational Research Society 31, (1980), pp. 1017-1023.
- [41] G. LAPORTE and Y. NOBERT: "A branch and bound algorithm for the capacitated vehicle routing problem", O.R. Spektrum, 5, (1989), pp. 77-85.
- [42] G. LAPORTE and Y. NOBERT: "Algorithmes de relaxation de contraintes pour le probleme du voyageur de commerce symmetrique et ses extensions", Ann.Sc.Math 7, (2), (1983), pp. 109-137.
- [43] G. LAPORTE and Y. NOBERT: "Two exact algorithms for the distance-constrained vehicle routing problem", Working paper GERAD-82-05, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1982).
- [44] G. LAPORTE, Y. NOBERT and D. ARPIN: "Optimal solutions to capacitated multidepot vehicle routing problem", Working paper CRT-355, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1984).
- [45] G. LAPORTE, Y. NOBERT and D. ARPIN: "An exact algorithm for solving a capacitated location-routing problem", Working paper GERAD-84-05, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1985).
- [46] G. LAPORTE, Y. NOBERT and M. DESROCHERS: "Optimal routing under capacity and distance restrictions", Working paper GERAD-83-18, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1983).
- [47] G. LAPORTE, Y. NOBERT and S. TAILLEFER: "A branch and bound algorithm distance constrained vehicle routing problem", Working paper GERAD-85-05, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montreal, (1985).
- [48] G. LAPORTE, Y. NOBERT and S. TAILLEFER: "Solving a family of multi-depot vehicle routing and location-routing problems", Transportation Science, 27, (1988), pp. 161-172.
- [49] E. LAWLER, J.K. LENSTRA, A.H.G. RINNOOY KAN and D.B. SCHMOYS: "The traveling salesman problem. A guided tour to combinatorial optimization", Wiley, (1985), pp. 221-227.
- [50] J.K. LENSTRA and A.H.G. RINNOOY KAN: "Some simple applications of the TSP", Operational Research Quaterly, 26, (1975), pp. 717-773.
- [51] S. LIN: "Computer solutions to the travelling salesman problem", Bell System Technology Journal, 44, (1965), pp. 2245-2269.

- [52] S. LIN and B.W. KERNINGHAN: "An effective heuristic algorithm for the travelling salesman problem", *Operational Research*, 21, (1973), pp. 498-516.
- [53] J.D.C. LITTLE, K.G. MURTY, D.W. SWEENEY and C. KAREL: "An algorithm for the travelling salesman problem", *Operations Research*, 11, (1963), pp. 972-989.
- [54] P. MILIOTIS: "Integer programing approaches to the TSP", *Mathematical programming* 10, (1976), pp. 367-378.
- [55] I. OR: "Travelling salesman-type combinatorial problems and their relation to the logistics of regional blood banking", Doctoral dissertation, Northwestern University, Evanston, Illinois, (1976).
- [56] J. PERL: "The multi-depot routing allocation problem", *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 7, (1987), pp. 7-34.
- [57] G.K. RAND: "A vehicle cost model revised", University of Lancaster, Magnet Pet Foods Ltd. Working paper 4, (May 1984).
- [58] D. ROSENKRANTZ, R. STERNS and P. LEWIS: "An analysis of several heuristics for the traveling salesman problem", *SIAM J. Comp* 6, (1977), pp. 563-581.
- [59] R. RUSSEL: "An effective heuristic for M-tour traveling salesman problem with some side conditions", *Operations Research*, 25, (3), (1977), pp. 517-524.
- [60] M. SAKAROVITCH: "Optimisation combinatoire, Methodes mathematiques et Algorithmique - Programmation discrete", Herman, (1984).
- [61] S. SALHI, M. SARI, D. SAIDI and N. TOUATI: "Models for the Vehicle Fleet Mix with variable vehicle unit running cost" submitted to *Transportation Science*, (1990).
- [62] S. SALHI and G.K. RAND: "Improvements to vehicle routeing heuristics", *Journal of the Operational Research Society*, 38, (3), (1987), pp. 293-295.
- [63] S. SALHI and G.K. RAND: "A route perturbation procedure for the vehicle fleet composition problem", Submitted to *Computers and Operations Research* (revision 1989).
- [64] W. STEWART and B. GOLDEN: "A vehicle routing algorithm based on generalized Lagrange multipliers", *Proc of AIDS 1979 Annual Convention* (L. Moore, K. Monroe and B Taylor, eds), New-Orleans., 2, (1979), pp. 108-110.
- [65] F.A. TILLMAN and T. CAIN: "An upper bounding algorithm for the single and multiple terminal delivery problem",

Management Science, 18, (11), (1972), pp. 664-682.

- [66] C. D. J. WATERS: "*Interactive Vehicle Routeing*", Journal of the Operational Research Society, 35, (1984), pp. 821-826.
- [67] C. D. J. WATERS: "*Vehicle scheduling revisited*", Journal of the operational of the Operational Research Society, 35, (2), (1984), pp. 145-148.
- [68] C. D. T. WATSON-GANDY and L. R. FOULDS: "*The vehicle scheduling problem - A survey*", New-Zealand Operational Research, 9, (2), (1989), pp. 73-92.
- [69] A. WEST: "*Managing distributions and charges: A total distribution concept*", Wiley, Chichester, (1989).
- [70] A. WREN and A. HOLLIDAY: "*Computer scheduling of vehicles from one or more depots to a number of delivery points*", Operational Research Quaterly 23, (1972), pp. 333-344.
- [71] J. VIGNES, E. ALT and M. PICHAT: "*Algorithmes numeriques - Analyse et mise en oeuvre*", tomes 1 et 2, Technip, (1980).

ANNEXE A

Problème 1

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	15	20	0.858
B	35	50	1.064
C	60	100	1.422

Problème 2

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	30	60	0.858
B	40	90	1.064
C	110	300	1.422

Problème 3

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	20	20	0.858
B	30	35	1.064
C	40	50	1.263
D	70	120	1.307
E	120	225	1.422

Problème 4

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	60	1000	0.858
B	80	1500	1.064
C	150	3000	1.422

Problèmes 5 et 6 : mêmes flottes que les problèmes 3 et 4.

Problème 7

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	40	150	0.858
B	100	500	1.064
C	140	800	1.263
D	200	1200	1.307
E	300	2000	1.422

Problème 8

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	10	15	0.858
B	50	50	1.064
C	150	200	1.307
D	400	600	1.422

Problème 9

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	40	30	0.858
B	100	100	1.064
C	140	160	1.263
D	200	240	1.307
E	300	400	1.422

Problème 10

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	40	30	0.858
B	100	100	1.064
C	140	160	1.307
D	200	240	1.422

Problème 11

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	30	60	0.858
B	80	200	1.064
C	200	700	1.307
D	350	1500	1.422

Problème 12

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	30	40	0.536
B	50	80	0.858
C	75	150	1.064
D	120	300	1.263
E	180	500	1.307
F	250	800	1.422

ANNEXE A (suite)

Problème 13

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	20	20	0.536
B	30	35	0.858
C	40	50	1.064
D	70	120	1.263
E	120	225	1.307
F	200	400	1.422

Problème 14

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	120	1000	0.858
B	160	1500	1.064
C	300	3500	1.422

Problème 15

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	50	100	0.858
B	100	250	1.064
C	160	450	1.422

Problème 16

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	40	100	0.858
B	80	200	1.064
C	140	400	1.422

Problème 17

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	50	25	0.858
B	120	80	1.064
C	200	150	1.307
D	350	320	1.422

Problème 18

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	20	10	0.536
B	50	35	0.858
C	100	100	1.064
D	150	180	1.263
E	250	400	1.307
F	400	800	1.422

Problème 19

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	100	500	0.858
B	200	1200	1.064
C	300	2100	1.422

Problème 20

Type	Cap.	C.F	C.V.U
A	60	100	0.858
B	140	300	1.064
C	200	500	1.422

Flottes considérées dans les problèmes tests

Où:

- Type : Type du véhicule
- Cap. : Capacité du véhicule
- C.F : Coût fixe associé au véhicule
- C.V.U: Coût variable unitaire associé au véhicule (pris égal à 1 par Golden et al. [27]).

ANNEXE B

Performances des heuristiques SGT et MGT**

Pb.	Taille	SGT	MGT	⁵ LB+VRP	ROM- γ	ROM- ρ	RPert
1	12	602*	602*	618	606	602*	620
2	12	722*	722*	722*	730	722*	722*
3	20	961*	961*	968	990	979	1003
4	20	6895	6895	6451	6547	6896	6447*
5	20	1009*	1009*	1030	1040	1033	1015
6	20	7025	6521	6518	6517	6517	6516*
7	30	7393	7370	7354*	7421	7438	7430
8	30	2352	2348*	2362	2387	2390	2378
9	30	2227	2218	2262	2231	2231	2211*
10	30	2364*	2364*	2388	2393	2387	2386
11	30	4764*	4764*	4788	4862	4913	4813
12	30	4097	4095	4132	4254	4247	4092*
13	50	2416*	2421	NF	2525	2510	2500
14	50	9127*	9130	9156	9155	9192	9175
15	50	2638	2615*	2621	2622	2644	2637
16	50	2805	2783	XX	2809	2877	2761*
17	75	1779	1781	XX	1877	1878	1767*
18	75	2417	2415*	XX	2489	2487	2439
19	100	9019	9044	XX	8700*	8700*	8759
20	100	4222	4193	XX	4248	4307	4184*

*SGT** : SGT + Raffinages

*MGT** : MGT + Raffinages

LB⁵+VRP : Gheysens, Golden et Assad [27]

ROM- γ , ROM- ρ : Realistic Opportunity Matching [14]

RPert : Route Perturbation Procedure [63]

XX : Non calculé.

ANNEXE C (Suite)

c. Problèmes 7 à 12

n° demande	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29		
0																															
1	24	41																													
2	34	38	3																												
3	11	80	54	56																											
4	15	80	54	56	3																										
5	11	97	64	67	19	16																									
6	1	92	59	62	13	10	7																								
7	3	96	56	59	16	14	11	10																							
8	29	78	39	41	54	54	53	57	48																						
9	6	98	59	62	20	17	12	13	4	39																					
10	25	87	52	50	47	46	46	42	35	12	33																				
11	6	95	58	61	15	12	8	8	45	45	6	39																			
12	25	77	38	41	30	29	34	32	25	24	21	18	28																		
13	2	93	55	58	15	12	10	14	3	47	7	19	3	26																	
14	28	91	52	53	25	22	24	19	12	30	9	24	15	14	14																
15	8	98	58	61	19	16	10	10	4	42	3	36	4	24	6	12															
16	10	96	59	62	17	14	8	8	4	44	5	38	2	26	4	14	2														
17	18	40	5	5	60	61	71	65	63	40	66	49	65	40	62	54	65	66													
18	45	74	34	37	46	46	50	46	39	8	39	12	43	16	41	28	42	44	36												
19	21	82	48	46	44	44	45	42	33	9	31	4	36	18	36	21	34	35	45	9											
20	17	55	16	19	54	54	58	55	48	22	45	30	53	24	51	38	48	50	18	22	31										
21	9	52	16	17	68	68	77	72	69	36	65	46	71	44	68	57	67	69	14	36	45	21									
22	16	76	46	49	8	9	19	15	18	44	22	40	16	20	17	24	20	18	52	37	35	45	59								
23	35	76	44	46	11	11	20	15	15	42	19	36	18	18	14	18	20	18	47	35	33	39	57	6							
24	5	76	50	53	4	4	20	14	18	50	21	43	17	25	16	28	20	19	57	41	40	50	64	5	10						
25	60	72	33	34	53	54	57	55	47	6	45	15	49	22	49	34	46	48	34	6	15	16	30	47	42	50					
26	80	98	58	61	33	30	27	30	21	27	15	18	19	19	21	8	17	19	60	76	18	44	61	34	28	34	34	3			
27	39	98	56	61	32	29	26	29	20	28	15	20	18	19	20	7	16	18	60	26	19	44	61	34	28	34	34	3			
28	95	93	66	68	14	12	23	18	22	65	25	54	20	41	20	32	24	22	72	57	54	61	79	20	26	15	64	39	39		
29	96	67	55	58	10	9	8	5	7	48	10	39	5	29	5	18	9	7	62	44	39	51	69	15	12	11	52	24	23	15	
30	23	65	32	33	64	64	67	66	57	22	55	38	63	34	60	47	58	60	32	26	33	21	18	66	53	60	18	51	52	76	65

Vehicle capacity: 7 tons. No distance constraint on vehicle routes.

d. Problèmes 13, 14, 17 et 18

No.	x	y	q	No.	x	y	q	No.	x	y	q	No.	x	y	q
1	22	22	18	20	66	14	22	39	30	60	16	58	40	60	21
2	36	26	26	21	44	13	28	40	30	50	33	59	70	64	24
3	21	45	11	22	20	13	12	41	12	17	15	60	64	4	13
4	45	35	30	23	11	28	6	42	15	14	11	61	36	6	15
5	55	20	21	24	7	43	27	43	16	19	18	62	30	20	18
6	33	34	19	25	17	64	14	44	21	48	17	63	20	30	11
7	50	50	15	26	41	46	18	45	50	30	21	64	15	5	28
8	55	45	16	27	55	34	17	46	51	42	27	65	50	70	9
9	26	59	29	28	35	16	29	47	50	15	19	66	57	72	37
10	40	66	26	29	52	26	13	48	48	21	20	67	45	42	30
11	55	65	37	30	43	26	22	49	12	38	5	68	38	33	10
12	35	51	16	31	31	76	25	50	15	56	22	69	50	4	8
13	62	35	12	32	22	53	28	51	29	39	12	70	66	6	11
14	62	57	31	33	26	29	27	52	54	38	19	71	59	5	3
15	62	74	8	34	50	40	19	53	55	57	22	72	35	60	1
16	21	36	19	35	55	50	10	54	67	41	16	73	27	24	6
17	33	44	20	36	54	10	12	55	10	70	7	74	40	20	16
18	9	56	13	37	60	15	14	56	6	25	26	75	40	37	20
19	62	48	15	38	47	66	24	57	65	27	14				

Depot co-ordinates: (40, 40). Customer demands (q) in Sticky units (t=1)

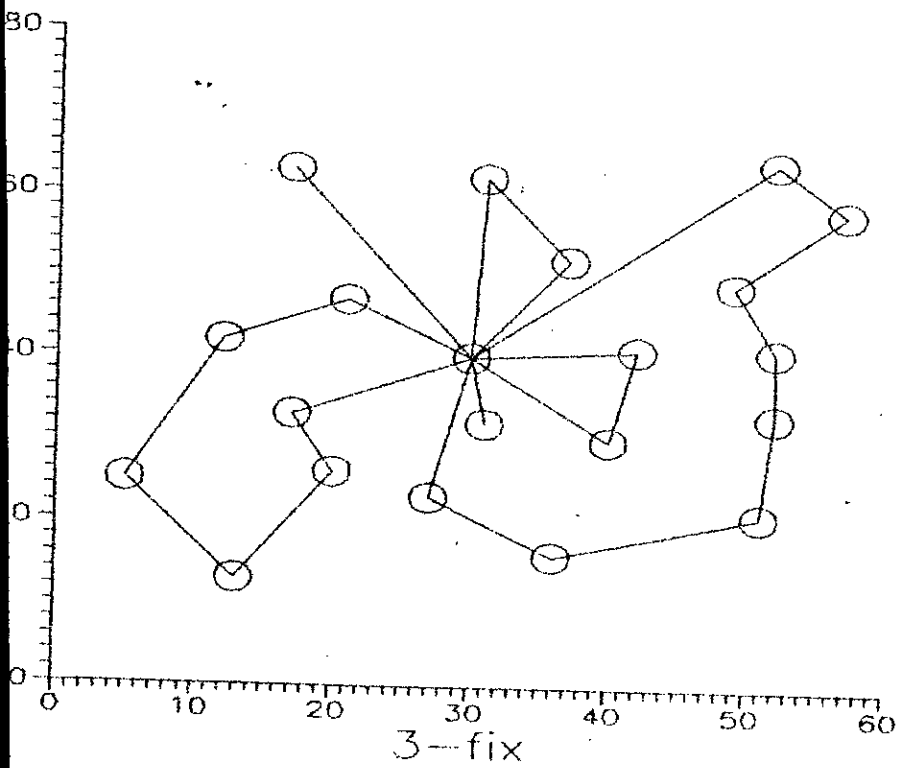
ANNEXE C (Suite)
Données relatives aux clients

e. Problèmes 19 et 20

No.	x	y	q	No.	x	y	q	No.	x	y	q	No.	x	y	q
1	41	49	10	26	45	30	17	51	49	58	10	76	49	42	13
2	35	17	7	27	35	40	16	52	27	43	9	77	53	43	14
3	55	45	13	28	41	37	16	53	37	31	14	78	61	52	3
4	55	20	19	29	64	42	9	54	57	29	18	79	57	48	23
5	15	30	26	30	40	60	21	55	63	23	2	80	56	37	6
6	25	30	3	31	31	52	27	56	53	12	6	81	55	54	26
7	20	50	5	32	35	69	23	57	32	12	7	82	15	47	16
8	10	43	9	33	53	52	11	58	36	26	18	83	14	37	11
9	55	60	16	34	65	55	14	59	21	24	28	84	11	31	7
10	30	60	16	35	63	65	8	60	17	34	3	85	16	22	41
11	20	65	12	36	2	60	5	61	12	24	13	86	4	18	35
12	50	35	19	37	20	20	8	62	24	58	19	87	28	18	26
13	30	25	23	38	5	5	16	63	27	69	10	88	26	52	9
14	15	10	20	39	60	12	31	64	15	77	9	89	26	35	15
15	30	5	8	40	40	25	9	65	62	77	20	90	31	67	3
16	10	20	19	41	42	7	5	66	49	73	25	91	15	19	1
17	5	30	2	42	24	12	5	67	67	5	25	92	22	22	2
18	20	40	12	43	23	3	7	68	56	39	36	93	18	24	22
19	15	60	17	44	11	14	18	69	37	47	6	94	26	27	27
20	45	65	9	45	6	38	16	70	37	56	5	95	25	24	20
21	45	20	11	46	2	48	1	71	57	68	15	96	22	27	11
22	45	10	18	47	8	56	27	72	47	16	25	97	25	21	12
23	55	5	29	48	13	52	36	73	44	17	9	98	19	21	10
24	65	35	3	49	6	68	30	74	46	13	8	99	20	26	9
25	65	20	6	50	47	47	13	75	49	11	18	100	18	18	17

Depot co-ordinates: (35, 35). Customer demands (q) in 50-kg units (cwt).
Vehicle capacity: 10 tons. No distance constraints on vehicle routes.

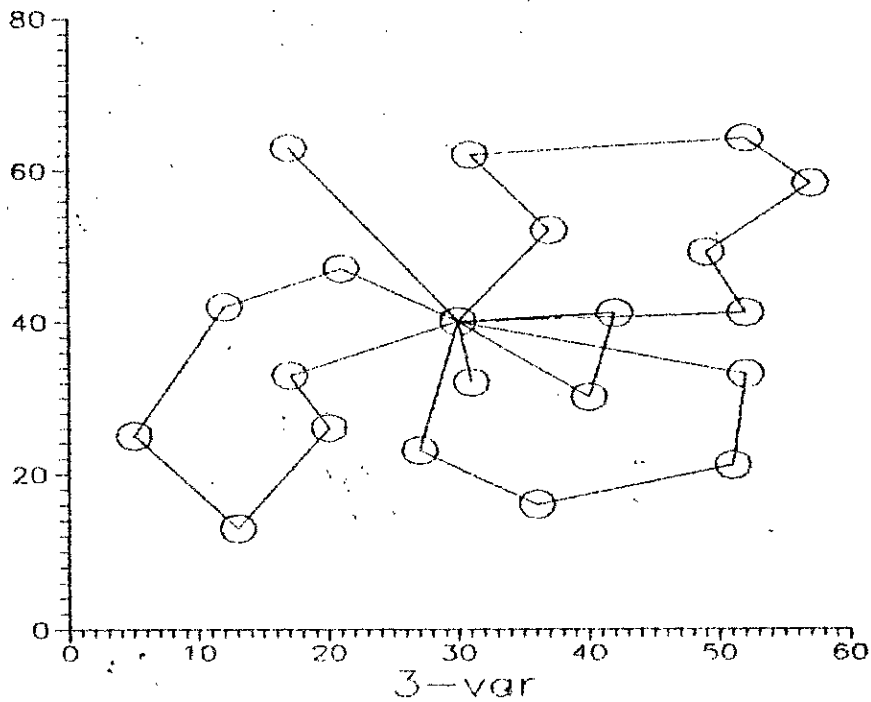
ANNEXE D



Resultat du probleme : 3.fix

N°	Miles	Load	Type	cout	Route	
1	52.84	19.00	1	72.0	- 0- 7- 0-	
2	37.36	40.00	3	97.4	- 0- 5-11- 0-	
3	47.58	30.00	2	82.6	- 0- 1- 8- 0-	
4	16.12	29.00	2	51.1	- 0-12- 0-	
5	91.65	118.00	5	316.6	- 0- 6-14-13-19- 4-18- 0-	
6	125.47	118.00	5	350.5	- 0-17-15-10- 9-16- 2-20- 3- 0-	
371.03				<-- Total -->	961.0	Flotte : A 1B 2C 1E 2
V.U'utilises :	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
usage sur cvu :	0.8582766	1.063818	1.262904	1.307291	1.422086	
cout ajuste est :		1059.1				

ANNEXE D (suite)

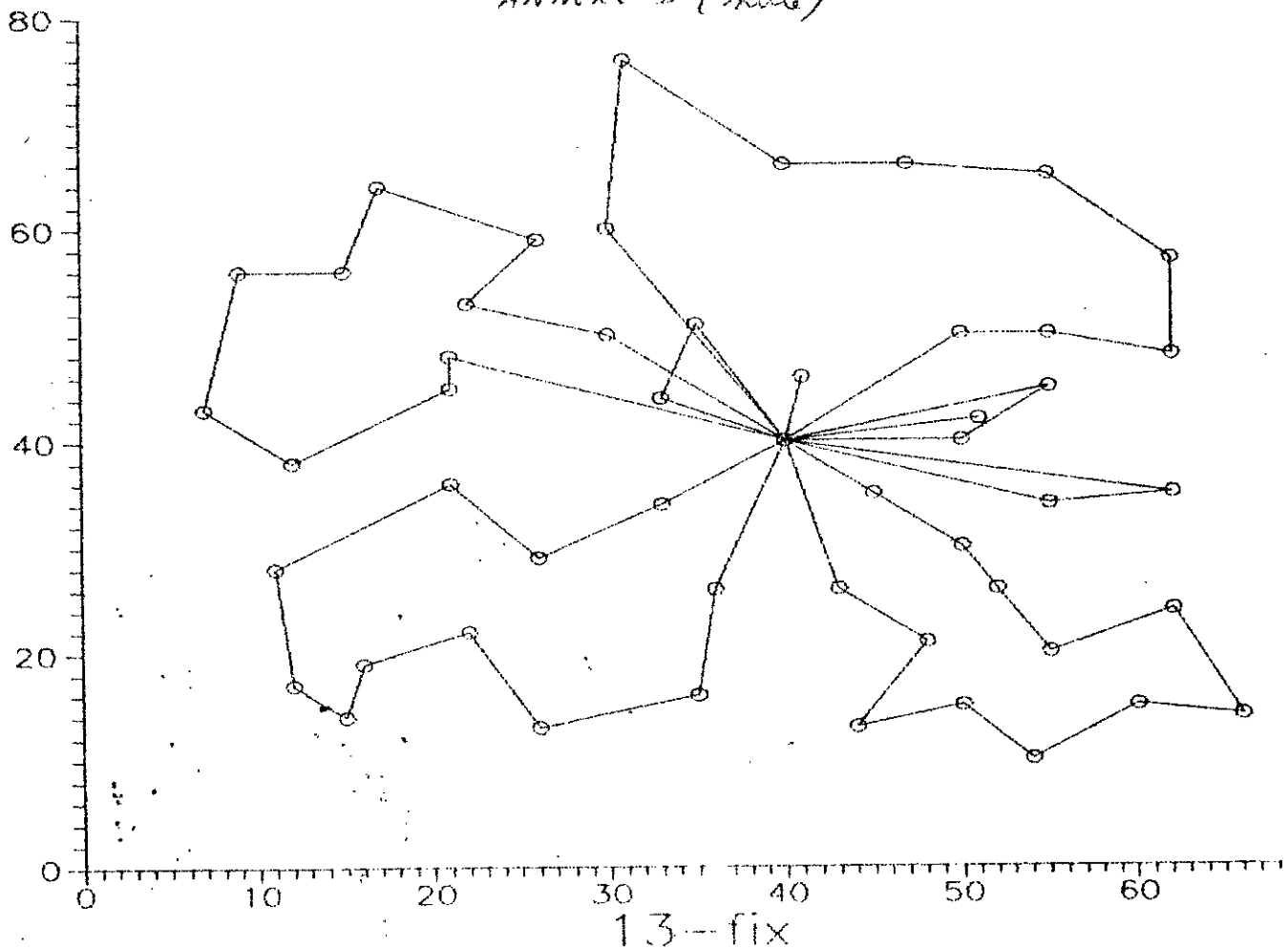


Resultat du probleme : 3.var

N°	Miles	Load	Type	cout	Route
1	37.36	40.00	3	97.2	- 0-11- 5- 0-
2	97.07	119.00	5	363.0	- 0-16- 2-20- 3- 8- 1- 0-
3	52.84	19.00	1	65.4	- 0- 7- 0-
4	91.65	118.00	5	355.3	- 0- 6-14-13-19- 4-18- 0-
5	79.60	29.00	2	119.7	- 0-17-15-10- 9- 0-
6	16.12	29.00	2	52.2	- 0-12- 0-
374.65		<-- Total -->		1052.7	Flotte : A 1B 2C 1E 2

C.V.U utilises : 0.8582766 1.063818 1.262904 1.307291 1.422086

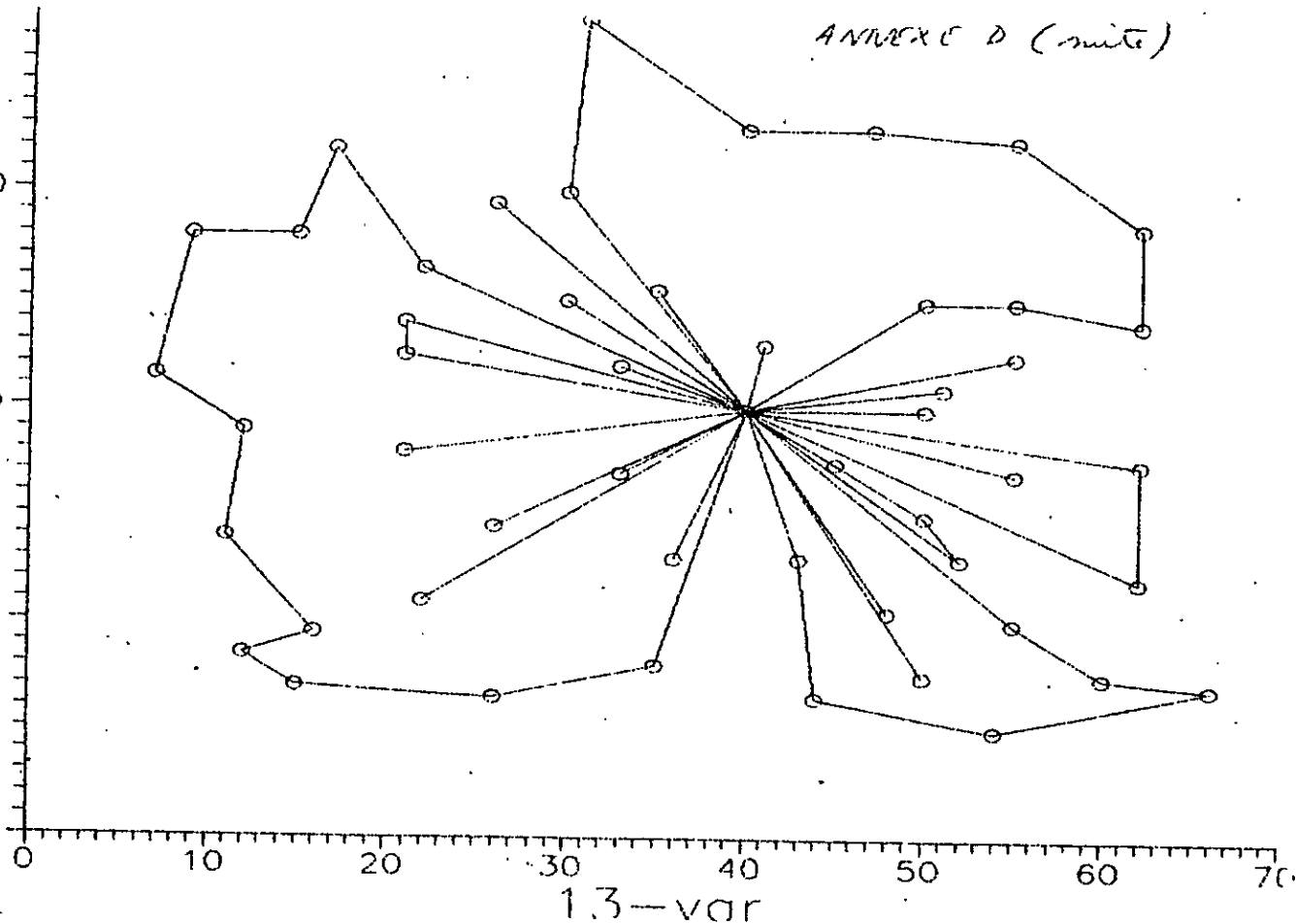
ANNEXE B (suite)



Resultat du probleme : 13.fix

N°	Miles	Load	Type	cout	Route		
1	27.43	35.00	5	77.4	- 0-12-17- 0-		
2	110.27	70.00	6	510.3	- 0- 6-33-16-23-41-42-43- 1-22-28- 2- 0-		
3	101.11	70.00	6	501.1	- 0-30-18-21-47-36-37-20-15- 5-29-45- 0-		
4	45.77	35.00	2	80.8	- 0-13-27- 0-		
5	100.00	100.00	6	513.0	- 0- 7-35-19-14-11-38-10-31-39- 0-		
6	100.00	100.00	6	509.7	- 0-44- 3-49-24-18-50-25- 9-32-40- 0-		
	31.88	35.00	7	82.9	- 0-34- 8- 0-		
	14.14	35.00	2	49.1	- 0- 4- 0-		
9	12.17	20.00	1	32.2	- 0-26- 0-		
10	22.36	20.00	2	57.4	- 0-46- 0-		
Total -->				2413.8	Flotte : A 1B 3C 2F 4		
C	0.0000	0.0000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
ajustage sur cout	0.60276	0.8582766	1.000000	1.262904	1.307291	1.422086	
Le cout global est	2583.5						

ANNEXE D (suite)



Resultat du probleme : 13.var

N°	Miles	Load	Type	cout	Route
1	12.17	18.00	1	26.5	- 0-26- 0-
2	16.12	20.00	1	28.6	- 0-17- 0-
3	24.17	16.00	1	33.0	- 0-12- 0-
4	28.28	33.00	3	80.1	- 0-40- 0-
5	43.26	28.00	2	72.1	- 0-44- 3- 0-
6	38.83	19.00	1	40.8	- 0-16- 0-
7	35.61	27.00	2	65.6	- 0-33- 0-
8	50.91	18.00	1	47.3	- 0- 1- 0-
9	142.86	200.00	6	603.2	- 0-28-22-42-41-43-23-49-24-18-50-25-32- 0-
10	47.20	29.00	2	75.5	- 0- 9- 0-
11	112.96	199.00	6	560.6	- 0-39-31-10-38-11-14-19-35- 7- 0-
12	31.62	16.00	1	37.0	- 0- 8- 0-
13	22.36	27.00	2	54.2	- 0-46- 0-
14	20.00	19.00	1	30.7	- 0-34- 0-
15	32.31	17.00	1	37.3	- 0-27- 0-
16	60.76	20.00	1	52.6	- 0-13-15- 0-
17	88.60	119.00	5	340.8	- 0- 5-37-20-36-21-30- 0-
18	41.23	20.00	1	42.1	- 0-48- 0-
19	37.05	34.00	3	89.4	- 0-29-45 0-
20	14.14	30.00	2	47.1	- 0- 4- 0-
21	53.85	19.00	1	48.9	- 0-47- 0-
22	29.12	26.00	2	60.0	- 0- 2- 0-
23	18.44	19.00	1	29.9	- 0- 6- 0-
1001.88	(-- Total --)			2503.3	Flotte : A12B 6C 2E 1F 2