

12/90

—\*—  
MINISTRE DELEGUE AUX UNIVERSITES  
—><—

# THESE

PRESENTE PAR :

L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE MAGSISTER  
EN GENIE MECANIQUE

P A R  
BOUCHELAGHEM Mohamed

## Sujet

ETUDE DES CHASSIS DES VEHICULES

INDUSTRIELS DE LA S.N.V.I. - C.V.I.

PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

SOUTENU LE ..... DEVANT LA COMMISSION

A. GAHMOUSSE, Professeur (ENP) .....	Président
S. RECHAK, Maître de Conférences (ENP) .....	Rapporteur
M. KSIASEK, Docteur es-science .....	Examineur
H. BELHANECHÉ, Docteur Ingénieur .....	Examineur
Bureau d'Etudes S.N.V.I. - C.V.I. ....	Examineur

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DÉLÉGUÉ AUX UNIVERSITÉS

# THÈSE

PRÉSENTÉ PAR :

L'ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE MAGSISTER  
EN GENIE MECANIQUE

PAR  
BOUCHELAGHEM Mohamed

## Sujet

ETUDE DES CHASSIS DES VEHICULES

INDUSTRIELS DE LA S.N.V.I. - C.V.I.

PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

SOUTENU LE ..... DEVANT LA COMMISSION

A. GAHMOUSSE, Professeur (ENP) .....	Président
S. RECHAK, Maître de Conférences (ENP) .....	Rapporteur
M. KSIASEK, Docteur es-science .....	Examineur
H. BELHANECHÉ, Docteur Ingénieur .....	Examineur
Bureau d'Etudes S.N.V.I. - C.V.I. ....	Examineur

PROMOTION DÉCEMBRE 1990

## DEDICACES

Je dedie cet humble travail à :

- . Mon père
- . Ma mère
- . Tous les êtres qui nous sont chers

## R E M E R C I M E N T S

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciement à Monsieur SAID RECHAK ,maitre de conférence à L'E.N.P qui a bien voulu diriger ma thèse et la suivre avec une bonne attention .Je veux lui renouveler ici mes remerciements pour ces conseils pratiques et précieux .

Je remercie également Monsieur ABDERRAHMANE GAHMOSSE d'avoir bien voulu accepter de presider ma soutenance de thèse ,et messieurs :

- M.KSIASEK

- H.BELHANECHÉ

de l'avoir honorée par leur participation en tant qu'examineurs.

## TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1	: Introduction et recherche bibliographique.....	9
Chapitre	: Analyse par éléments poutres.....	12
2.1	: Les poutres .....	14
2.2	: Hypothèses de la théorie des poutres.....	14
2.3	: Formulation de la matrice de rigidité.....	15
2.4	: Matrice de passage .....	20
2.5	: Matrice de rigidité dans le repère global.....	25
2.6	: Assemblage de la matrice de rigidité globale....	25
2.7	: Etat de contrainte dans une section droite de poutre.....	27
2.7.1	: Equations d'équilibre.....	27
2.7.2	: Calcul de la contrainte normale.....	29
2.7.3	: Contraintes dues à l'effort tranchant.....	33
2.8	: Critère de limite élastique.....	34
2.8.1	: Contraintes principales.....	34
2.8.2	: Critère de Von Mises.....	36
2.9	: Modélisation.....	36
2.9.1	: Modélisation en éléments poutres .....	37
2.9.2	: Choix des noeuds.....	37
2.9.3	: Types d'appuis.....	37
2.9.4	: Présentation des modèles.....	48
2.9.5	: Modélisation des charges.....	43
2.9.5.1	: Charges concentrées .....	43
2.9.5.2	: Charges réparties.....	43
2.9.6	: Mode de chargement du châssis de camion.....	46
2.9.7	: Mode de chargement du châssis du bus .....	48

2.9.8	: Présentation des charges modèles.....	49
2.10	: Programmation et résultats.....	51
2.10.1	: Présentation du programme.....	51
2.10.2	: Présentation des résultats.....	56
Chapitre 3	: Analyse par éléments plaques.....	67
3.1	: Théorie de l'élasticité.....	68
3.1.1	: Equations différentielles d'équilibre.....	69
3.1.2	: Relation déformations-déplations.....	70
3.2	: Elément membranaire.....	70
3.2.1	: Matrice de rigidité élémentaire.....	71
3.3	: Elément plaque mince.....	76
3.3.1	: Hypothèses de la théorie des plaques minces.....	77
3.3.2	: Matrice de rigidité de l'élément rectangulaire en flexion.....	77
3.4	: Modélisation en éléments plaques.....	83
3.4.1	: Modélisation des charges.....	83
3.4.1.1	: Cas des charges concentrées.....	83
3.4.1.2	: Cas des charges réparties.....	89
3.5	: Présentation des résultats.....	95
Chapitre 4	: Synthèse et analyse des résultats.....	100
Chapitre 5	: Conclusion et recommandation.....	106

---

Bibliographie

Annexes

## NOMENCLATURE

$U$	: Energie de déformation
$[K]$	: Matrice de rigidité dans le repère local
$[K]$	: Matrice de rigidité dans le repère global
$\{q_e\}$	: Vecteur déplacement nodal dans le repère local
$\{q_e\}$	: Vecteur déplacement nodal dans le repère global
$\{F_e\}$	: Vecteur charge nodal dans le repère local
$\{F_e\}$	: Vecteur charge nodal dans le repère global
$[T]$	: Matrice de passage
$[\lambda]$	: Matrice de transformation
$X, Y, Z$	: Repère global
$x, y, z$	: Repère local
$l_{ox}, n_{ox}, m_{ox}$	: Cosinus directeur avec $ox$
$l_{oy}, n_{oy}, m_{oy}$	: Cosinus directeur avec $oy$
$l_{oz}, n_{oz}, m_{oz}$	: Cosinus directeur avec $oz$
$U_e$	: Energie de déformation élémentaire
$[\sigma]$	: Tenseur contrainte
$\vec{q}$	: Normale à la section droite de la poutre
$I_x, I_y, I_z$	: Moment d'inertie par rapport à $ox, oy, oz$
$A$	: Aire de la section droite
$E$	: Module d'élasticité
$u(x), \theta(x),$	
$v(x), w(x)$	: Fonctions de déplacement
$Y_{max}$	: Ordonnée maximale
$Z_{max}$	: Cote maximale
$Q$	: Charge répartie sur les longerons
$h_e$	: Epaisseur de l'aile supérieur de la poutre
$h_i$	: Epaisseur de l'aile inférieur de la poutre

$B_e$	:	Epaisseur de l'âme de la poutre
$B$	:	Largeur de la poutre
$H$	:	Hauteur de la poutre
$L$	:	Longueur de l'élément poutre
$q(x)$	:	Charge répartie sur l'élément poutre
$q(x,y)$	:	Charge répartie sur l'élément plaque
$W_e$	:	Travail de la charge répartie $q(x)$
$W_e^*$	:	Travail des charges concentrées aux noeuds
$a \times b$	:	Largeur et longueur de l'élément plaque
$t$	:	Epaisseur de l'élément plaque
$W_r$	:	Travail de la charge répartie $q(x,y)$
$W_r^*$	:	Travail des charges concentrées aux noeuds
$[B]$	:	Matrice de déformation
$[C]$	:	Matrice d'élasticité
$[H]$	:	Matrice contrainte
$\nu$	:	Coefficient de poisson
$R_e$	:	Limite élastique
$R_r$	:	Résistance à la rupture
$A\%$	:	Allongement %
$\epsilon_x$	:	Déformation longitudinale
$\epsilon_y, \epsilon_z$	:	Déformations transversales
$\delta_{xy}, \delta_{xz}, \delta_{yz}$	:	Déformations tangentielles

## LISTE DES FIGURES

3.1	: Poutre.....	14
3.2	: Elément poutre tridimensionnel.....	16
3.3	: Elément poutre dans l'espace.....	23
3.4	: Repère local et global.....	23
3.5	: Force interne dans une section droite de poutre..	28
3.6	: Modélisation des appuis.....	39
3.7	: Modèle du châssis camion en élément poutre .....	40
3.8	: Modèle du châssis bus en élément poutre.....	40
3.9	: Modèle des longerons du châssis camion.....	41
3.10	: Modèle des longerons du châssis bus.....	42
3.11	: Modélisation des charges concentrées.....	44
3.12	: Modélisation des charges réparties ( méthode des charges concentrées ).....	44
3.13	: Modélisation des charges réparties ( méthode des charges consistantes ).....	44
3.14	: Mode de chargement du châssis camion.....	50
3.15	: Mode de chargement du châssis bus.....	50
3.16	: Déformée du châssis camion .....	64
3.17	: Déformée du châssis bus.....	64
3.18	: Contraintes équivalentes dans le châssis de camion.....	65
3.19	: Contraintes équivalentes dans le châssis du bus non renforcé.....	65
3.20	: Contraintes équivalentes dans le châssis du bus..	66
4.1	: Cube élémentaire.....	69
4.2	: Elément plaque.....	71

4.3	: Plan moyen d'une plaque.....	77
4.4	: Elément plaque mince.....	78
4.5	: Modélisation des appuis.....	84
4.6	: Modèle en élément plaque du longeron du bus.....	85
4.7	: Modélisation des charges concentrées.....	86
4.8	: Modélisation des charges réparties.....	91
4.9	: Contraintes équivalentes dans les éléments membranaires.....	96
4.10	: Contraintes normales $\sigma_x$ dans les éléments membranaires.....	97
4.11	: Contraintes normales $\sigma_z$ dans les éléments membranaires.....	97
4.12	: Contraintes de cisaillement.....	97
4.13	: Contraintes équivalentes dans les éléments fléxionel ( poutre supérieur ).....	98
4.14	: Contraintes équivalentes dans les éléments fléxionel ( poutre inférieur ).....	99
4.15	: Contraintes de cisaillement dans le châssis camion ( modèle poutre ).....	104
4.16	: Contraintes de cisaillement dans le châssis bus ( modèle poutre ).....	104
4.17	: Contraintes équivalentes dans le châssis bus....	105
1	: Chassis du camion .....	112
2	: Chassis du bus.....	116

## LISTE DES TABLEAUX

3.1	: Caractéristiques géométriques pour les éléments du chassis camion.....	57
3.2	: Efforts supportés par le chassis camion.....	59
3.3	: Contraintes dans les éléments du chassis camion..	60
3.4	: Déplacement des noeuds dans le chassis camion....	61
5.1	: Déplacement des noeuds du longeron bus.....	101
5.2	: Moments d'inerties des éléments poutres .....	102

## C H A P I T R E -I-

### I N T R O D U C T I O N

Dans le domaine industriel, l'optimisation de la résistance de la construction d'une part ; et l'économie de matière et d'argent d'autre part, sont le but principal des constructeurs .

Pour cela, la connaissance du comportement de la structure lorsque celle-ci est soumise à une charge statique ou dynamique se révèle d'une grande importance. La connaissance des différentes charges rend possible le calcul des répartitions des contraintes dans les parties les plus sollicitées qui, une fois fait, représente la base pour un dimensionnement rigoureux et optimum . Dans un véhicule industriel, tel que le camion K120 ou le bus 70L6, l'organe le plus sollicité est le châssis . La S.N.V.I - C.V.I de Rouiba qui fabrique ces deux véhicules a voulu adapter le châssis du camion au bus moyennant certaines modifications. Le bureau d'étude de la S.N.V.I - C.V.I opta pour le renforcement des deux longerons du châssis par une tôle de cinq millimètres d'épaisseur sur toute la largeur et ceci afin d'éviter tout risque de fissuration ou de déformation

Dans cette thèse, dans un premier temps, une étude complète et détaillée du châssis du camion a été effectuée. Ceci a permis de déterminer les états de contraintes et de déformations dans les différentes parties de celui-ci. Ces résultats forment une base pour toute étude ultérieure. Dans une deuxième étape, il y a lieu d'analyser le châssis adapté au bus

afin de conclure quant à son comportement . Ce qui impose la réponse à un certain nombre de questions :

- 1- La solution adopté par la S.N.V.I - C.V.I est-elle satisfaisante ?
- 2- Dans le cas où le renforcement est nécessaire, comment pourrait - il être appliqué ?
- 3- Le renforcement sur l'aile ne pourrait - il pas nuire à la symétrie et aggraver l'état de contrainte ?
- 4- Serait - il plus commode de renforcer l'âme des deux longerons ?

Une réponse satisfaisante à ce grand nombre de questions ne pourra se faire qu'après une analyse détaillée de l'état de contraintes, on peut ainsi opter pour la solution optimale .

La méthode utilisée est celle des éléments finis . Cette méthode a connu un développement intense à partir de 1956 sous l'impulsion de l'industrie aérospatiale et grâce à la disponibilité des premiers ordinateurs . Des lors on assiste au développement de nouveaux éléments tels que membranes, plaques, coques ainsi que l'établissement de nouvelles formulations basées sur des considérations énergétiques et variationnelles .

De nombreux travaux reliés au calcul de structures ont été effectués telque :

Problèmes statiques et dynamiques des poutres à section variable, des plaques et coques tout en considérant les phénomènes de convergence [ 1, 2, 3 ], les problèmes de stabilité et de flambage [ 4, 5, 6, ], les problèmes de vibrations libres,

forcées, et des vibrations aléatoires [ 9, 10 ] . Certains auteurs se sont penchés aussi sur la réponse dynamique due au choc [ 11 ], la conception et l'optimisation des structures non linéaires [ 12 ] .

La thèse comprend les chapitres suivants:Après,l'introduction,le deuxième chapitre comportera la modélisation des deux structures (chassis du camion et du bus ) en éléments poutres .

Nous développerons par conséquent un programme général à utilisation multiples écrit en langage fortran, permettant l'analyse statique et dynamique des structures . On présente ainsi la répartition des contraintes dans les deux structures .

Ce même chapitre comporte la comparaison des résultats à ceux obtenus par le SAP IV, programme d'éléments finis développé à l'université de Berkley en californie ( U.S.A ).

Le troisième chapitre comprend l'analyse par éléments finis, du chassis du bus discrétisé en éléments plaques et éléments membranes .

Au quatrième chapitres, on présente la synthèse des différents résultats obtenus ainsi que l'établissement des comparaisons nécessaires entre les différents modèles et solutions étudiées.

La conclusion et les recommandations nécessaires à la S.N.V.I-C.V.I seront présentées au sixième et dernier chapitre. Les données techniques des deux véhicules , de leur chassis réels, ainsi que les caractéristiques mécaniques, chimiques et microscopiques de l'acier dont ils sont conçus sont données en annexe .

## ANALYSE PAR ELEMENTS POUTRES

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques qu'on résoud par des modèles numériques en utilisant des calculateurs .

Il existe trois types de formulations possibles.

- La formulation en déplacements ( méthode des déplacements ) .
- La formulation en contraintes ou forces .
- La formulation mixte .

Pour la première formulation, on définit un champ de déplacement en supposant qu'il satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément . Ceci en choisissant une fonction de déplacement permettant de définir l'état de déplacement d'une façon unique .

Cette formulation suppose que les conditions de compatibilité des déplacements sont satisfaites, ce qui nous amènera à poser les équations d'équilibres puis les résoudre afin de déterminer les déplacements nodaux .

La deuxième formulation consiste à définir un champ de contraintes de façon à assurer l'équilibre de l'élément, puis poser les équations de compatibilité des déplacements et les résoudre pour obtenir les forces ( solution en contraintes ) .

La troisième formulation est un mélange des deux précédentes ce qui a donné naissance au concept d'éléments finis hybrides .

Dans cette étude on a opté pour la première formulation qui présente certaines facilités par rapport aux autres dont on peut citer par exemple le fait qu'il est plus facile d'approcher les déplacements que les contraintes .

Les déplacements sont donc des inconnus de base . On approchera le champ de déplacement réel dans un élément par des fonctions d'interpolation ( forme ), généralement polynomiales , assurant la continuité des déplacements à l'interface de l'élément et aux noeuds .

Les fonctions de forme définissent l'état de déformation à l'intérieur de l'élément en fonction des déplacements nodaux . Ces déformations, jointes à d'éventuelles déformations initiales et compte tenu des propriétés élastiques du matériau , définissent l'état de contraintes en tout point de l'élément et par conséquent sur ses frontières.

Il n'est pas toujours facile de faire en sorte que les fonctions de forme choisies satisfassent les conditions de continuité des déplacements le long des interfaces des éléments . Cependant , à l'intérieur de l'élément, ces conditions doivent être satisfaites, en raison de l'unicité des déplacements qui découle de leur représentation par une fonction .

Notons également que l'utilisation de la formulation déplacement entraînera une discontinuité dans le champ des contraintes et par conséquent une incompatibilité des valeurs nodales des contraintes existe .Ceci vient du fait qu'en concentrant aux noeuds les forces nodales équivalentes, les conditions d'équilibres ne seront que globalement

satisfaites, vu qu'on applique le théorème des travaux virtuels d'une manière globale sur toute la structure et non pas à chacun des éléments séparément.

### 2.1 Les poutres .

On appelle poutre, solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de gravité -G- décrit une courbe  $G_0G_a$ , le plan de (S) restant normal à cette courbe ( fig 3.1 ). (S) est appelée section droite ou section normale,  $G_0G_a$ , est la fibre moyenne de la poutre . Selon la nature de cette fibre moyenne, la poutre sera dite gauche, plane ou droite. la poutre sera à section constante ou à section variable selon que (S) varie ou non le long de  $G_0G_a$  .

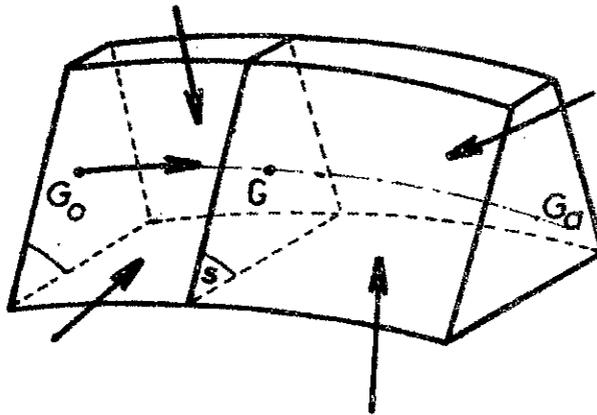


figure 3.1 Poutre

### 2.2 - Hypothèses de la théorie des poutres .

On admet, lors des études des structures en poutres, avec une bonne approximation que :

- a- Les matériaux utilisés sont homogènes et isotropes .
- b- Les matériaux sont utilisés en domaine élastique, ce qui se traduit par l'application de la loi de HOOK généralisée .
- c- Le rayon de courbure de la fibre moyenne est " grand " par rapport aux dimensions des sections droites ( rayon de

courbure supérieur à cinq fois la plus grande dimension ) .

- d- La longueur de la ligne moyenne  $G_0 G_a$  est " grande " devant les dimensions des sections droites.
- e- Les éventuelles variations de l'air de la section droite sont faibles et progressives .
- f- Les sections planes, normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation .  
( hypothèse dite de Bernoulli ) .

### 2.3 Formulation de la matrice de rigidité .

La formulation de la matrice de rigidité élémentaire consiste à rechercher pour chaque élément les expressions matricielles des énergies et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements aux noeuds de l'élément .

Ces expressions s'écrivent pour le cas statique :

- Énergie de déformation:

$$U = 1/2. \{q_e\}^t [K] \cdot \{q_e\} \quad (3.1)$$

- Travail des forces appliquées

$$W = 1/2. \{q_e\}^t \cdot \{F_e\} \quad (3.2)$$

Dans les équations (3.1) et (3.2)  $\{q_e\}$ ,  $\{F_e\}$ , et  $[K]$  sont définis comme étant :

$\{q_e\}$  : vecteur déplacement

$\{F_e\}$  : vecteur des forces équivalentes

$[K]$  : matrice de rigidité élémentaire

L'équation d'équilibre de la structure globale est obtenue par application du principe des travaux virtuels.

$$\delta U = \delta W \quad (3.3)$$

ce qui nous donne :

$$\{F_e\} = [K] \cdot \{q_e\} \quad (3.4)$$

pour formuler  $[K]$ , on considère le cas générale où la poutre possède six degrés de liberté au niveau de chaque noeud (fig :3.2)

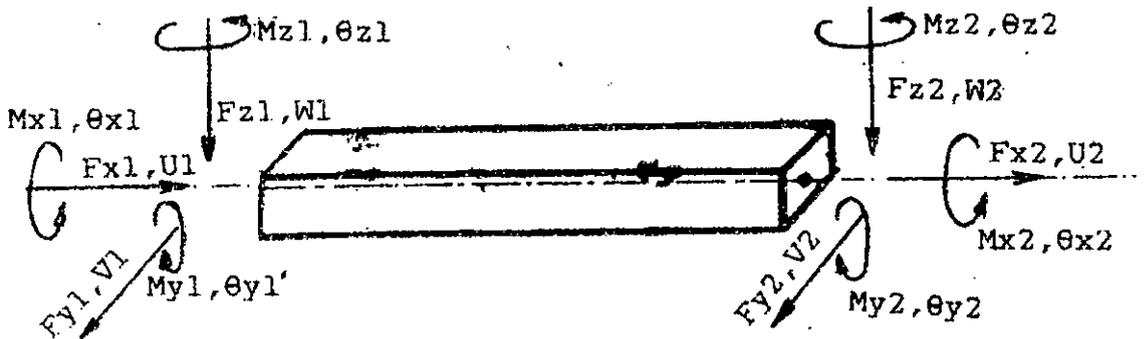


figure 3.2 :Elément poutre tridimensionnel .

On désigne par  $u, v, w$  les déplacements suivant les trois axes et par  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  les rotations. Les indices 1 et 2 désignent les noeuds  $i$  et  $j$  de l'élément . Les vecteurs déplacement et force s'écrivent :

$$\{q\}^t = [u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}] \quad (3.5)$$

$$\{F_e\}^t = [F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}, M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}] \quad (3.6)$$

Dans le cas réel, l'élément est soumis à des efforts composés : traction-compression suivant  $Ox$  , flexion autour de  $Oy$  et flexion autour de  $Oz$  . Écrivons l'expression de l'énergie de déformation dans le cas général de sollicitation d'une poutre .

$$U = 1/2 \cdot \int_0^L E.A. \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + G.J \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right)^2 + E.I_z \cdot \left( \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right)^2 + E.I_y \cdot \left( \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.7)$$

Les fonctions de déplacement des différents degrés de liberté s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= a_1 + a_2 x \\ \theta(x) &= a_3 + a_4 x \\ v(x) &= a_5 + a_6 x + a_7 x^2 + a_8 x^3 \\ w(x) &= a_9 + a_{10} x + a_{11} x^2 + a_{12} x^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Suivant les conditions aux limites on peut déterminer les constantes ( $a_i$ )

à  $x=0$

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= a_1 = u_1 \\ \theta_x(0) &= a_3 = \theta_{x1} \\ v(0) &= a_5 = v_1 \\ \theta_v(0) &= \left( \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)_{x=0} = a_6 = \theta_{v1} \\ w(0) &= a_9 = w_1 \\ \theta_w(0) &= \left( \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right)_{x=0} = a_{10} = \theta_{w1} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

à  $x=L$

$$\left. \begin{aligned} u(L) &= a_1 + a_2 L = u_2 \\ \theta_x(L) &= a_3 + a_4 L = \theta_{x2} \\ v(L) &= a_5 + a_6 L + a_7 L^2 + a_8 L^3 = v_2 \\ \theta_v(L) &= \left( \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)_{x=L} = a_6 + 2a_7 L + 3a_8 L^2 = \theta_{v2} \\ w(L) &= a_9 + a_{10} L + a_{11} L^2 + a_{12} L^3 = w_2 \\ \theta_w(L) &= \left( \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right)_{x=L} = a_{10} + 2a_{11} L + 3a_{12} L^2 = \theta_{w2} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Sous forme matricielle on peut exprimer ces relations :

$$\begin{Bmatrix} U1 \\ V1 \\ W1 \\ U2 \\ V2 \\ W2 \\ \theta x1 \\ \theta y1 \\ \theta z1 \\ \theta x2 \\ \theta y2 \\ \theta z2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \\ a5 \\ a6 \\ a7 \\ a8 \\ a9 \\ a10 \\ a11 \\ a12 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Symboliquement  $\{q_e\} = [A] \cdot \{a\}$

(3.1)

ce qui nous donne en inversant la matrice  $[A]$

$$\{a\} = [A]^{-1} \cdot \{q_e\}$$

(3.1)

$$\begin{Bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \\ a5 \\ a6 \\ a7 \\ a8 \\ a9 \\ a10 \\ a11 \\ a12 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/L^2 & 0 & 0 & -3/L^2 & 0 & 0 & 0 & -2/L & 0 & 0 & -1/L \\ 0 & 2/L^3 & 0 & 0 & -2/L^3 & 0 & 0 & 0 & 1/L^2 & 0 & 0 & 1/L^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/L^2 & 0 & 0 & 3/L^2 & 0 & -2/L & 0 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 0 & 2/L^3 & 0 & 0 & -2/L^3 & 0 & 1/L^2 & 0 & 0 & 1/L^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U1 \\ V1 \\ W1 \\ W2 \\ V2 \\ W2 \\ \theta x1 \\ \theta y1 \\ \theta z1 \\ \theta x2 \\ \theta y2 \\ \theta z2 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Ecrivons les fonctions de déplacement sous forme matricielle.

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ \theta x(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Symboliquement :

$$\{q(x)\} = [f(x)] \cdot \{a\} \quad (3.16)$$

en substituant la relation (3.13) dans la relation (3.16)

on aura :

$$\{q(x)\} = [f(x)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{a\}. \quad (3.17)$$

En Appliquant le théorème de castigliano on aura

$$\left. \begin{aligned} F_{x1} &= \partial U / \partial u_1 = EA/L \cdot u_1 - EA/L \cdot u_2 \\ F_{x2} &= \partial U / \partial u_2 = -EA/L \cdot u_1 + EA/L \cdot u_2 \\ M_{t1} &= \partial U / \partial \theta_1 = GJ/L \cdot \theta_{x1} - GJ/L \cdot \theta_{x2} \\ M_{t2} &= \partial U / \partial v_1 = -GJ/L \cdot \theta_{x1} + GJ/L \cdot \theta_{x2} \\ F_{y1} &= \partial U / \partial v_1 = 12EI_z/L^3 \cdot v_1 + 6EI_z/L^2 \cdot \theta_{z1} - 12EI_z/L^3 \cdot v_2 + 6EI_z/L^2 \cdot \theta_{z2} \\ F_{y2} &= \partial U / \partial v_2 = 6EI_z/L^3 \cdot v_1 + 4EI_z/L \cdot \theta_{z1} - 6EI_z/L^3 \cdot v_2 + 2EI_z/L \cdot \theta_{z2} \\ M_{fy1} &= \partial U / \partial \theta_{y1} = -12EI_z/L^3 \cdot v_1 - 6EI_z/L^2 \cdot \theta_{z1} + 12EI_z/L^3 \cdot v_2 - 6EI_z/L^2 \cdot \theta_{z2} \\ M_{fy2} &= \partial U / \partial \theta_{y2} = 6EI_z/L^3 \cdot v_1 + 2EI_z/L \cdot \theta_{z1} - 6EI_z/L^3 \cdot v_2 + 4EI_z/L \cdot \theta_{z2} \\ F_{z1} &= \partial U / \partial w_1 = 12EI_y/L^3 \cdot w_1 + 6EI_y/L^2 \cdot \theta_{y1} - 12EI_y/L^3 \cdot w_2 + 6EI_y/L^2 \cdot \theta_{y2} \\ F_{z2} &= \partial U / \partial w_2 = 6EI_y/L^3 \cdot w_1 + 4EI_y/L \cdot \theta_{y1} - 6EI_y/L^3 \cdot w_2 + 2EI_y/L \cdot \theta_{y2} \\ M_{fz1} &= \partial U / \partial \theta_{z1} = -12EI_y/L^3 \cdot w_1 - 6EI_y/L^2 \cdot \theta_{y1} + 12EI_y/L^3 \cdot w_2 - 6EI_y/L^2 \cdot \theta_{y2} \\ M_{fz2} &= \partial U / \partial \theta_{z2} = 6EI_y/L^3 \cdot w_1 + 2EI_y/L \cdot \theta_{y1} - 6EI_y/L^3 \cdot w_2 + 4EI_y/L \cdot \theta_{y1} \end{aligned} \right\} (3.18)$$

sous forme matricielle

$$\{F_e\} = [K] \cdot \{q_e\} \quad (3.19)$$

où  $[K]$  est la matrice de rigidité donnée par :

$$[K] = \begin{bmatrix} E.A/L & 0 & 0 & 0 & 0 & -E.A/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12EIz/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EIz/L^2 & 0 & -12EIz/L^3 & 0 & 0 & 6EIz/L^2 \\ 12EIy/L^3 & 0 & 6EIy/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EIy/L^3 & 0 & 6EIy/L^2 & 0 \\ 6Ix/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6Ix/L & 0 & 0 \\ 4EIy/L & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EIy/L & 0 & 2EIy/L & 0 & 0 \\ 4EIz/L & 0 & -6EIz/L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2EIz/L & 0 \\ \text{symétrique} & & & & & EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 12EIz/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EIz/L \\ & & & & & 12EIy/L & 0 & -6EIy/L^2 & 0 & 0 \\ & & & & & 6Ix/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 4EIy/L & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 4EIz/L \end{bmatrix}$$

#### 2.4 Matrice de passage

Dans le cadre de la M.E.F, les calculs se font au niveau élémentaire puis global, d'où la commodité d'analyser chaque élément dans son repère local. L'analyse de toute la structure se fait dans un repère global; on doit alors effectuer un changement de coordonnées. ( fig 3.3 )

les déplacements nodaux relatif au repère local et au repère global sont reliés par :

$$\begin{Bmatrix} u1 \\ v1 \\ w1 \\ \theta x1 \\ \theta y1 \\ \theta z1 \\ u2 \\ v2 \\ w2 \\ \theta x2 \\ \theta y2 \\ \theta z2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} lox & moy & nox & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ loy & moy & noy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ loz & moz & noz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & lox & moy & nox & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & loy & moy & noy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & loz & moz & noz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & lox & moy & nox & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & loy & moy & noy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & loz & moz & noz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & lox & moy & nox \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & loy & moy & noy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & loz & moz & noz \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u1\lambda \\ v1\lambda \\ w1\lambda \\ \theta x1\lambda \\ \theta y1\lambda \\ \theta z1\lambda \\ u2\lambda \\ v2\lambda \\ w2\lambda \\ \theta x2\lambda \\ \theta y2\lambda \\ \theta z2\lambda \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

la matrice de passage,  $[T]$ , peut être identifiée par:

$$\begin{matrix} [T] \\ 12 \times 12 \end{matrix} = \begin{bmatrix} [\lambda] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [\lambda] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [\lambda] \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\text{où } \begin{matrix} [\lambda] \\ 3 \times 3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} lox & moy & nox \\ loy & moy & noy \\ loz & moz & noz \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\text{et } \begin{matrix} [0] \\ 3 \times 3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$lox, moy, nox$  dénote les cosinus directeurs de l'axe  $o x$

$loy, moy, noy$  dénote les cosinus directeurs de l'axe  $o y$

$loz, moz, noz$  dénote les cosinus directeurs de l'axe  $o z$

\* Calcul de la matrice  $[\lambda]$

La matrice de transformation  $[\lambda]$  peut être déterminée en deux étapes :

Dans la première étape on calcule la matrice de transformation  $[\lambda_1]$  entre le repère global XYZ et le repère  $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$ , repère dont l'axe  $\bar{ox}$  est parallèle au plan XY. ( fig 3.4 a)

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = [\lambda_1] \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Dans la seconde étape, on calcule la matrice de transformation  $[\lambda_2]$  entre le repère local x y z et le repère  $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$ .

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [\lambda_2] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

le repère local x y z est obtenu alors par rotation du repère  $\bar{x} \bar{y} \bar{z}$  autour de l'axe  $\bar{oy}$  d'un angle  $\alpha$  ( fig 3.4 b )

la matrice de transformation recherchée serait alors :

$$[\lambda] = [\lambda_1] \cdot [\lambda_2] \quad (3.27)$$

la matrice  $[\lambda_1]$  est déduite aisément à partir de la figure (3.4 a)

$$[\lambda_1] = \begin{bmatrix} \cos \theta \cdot \cos \varphi & \sin \theta & \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ -\sin \theta \cdot \cos \varphi & \cos \theta & -\sin \theta \cdot \sin \varphi \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

De même, la matrice  $[\lambda_2]$  est déduite aisément à partir de la figure (3-4 b).

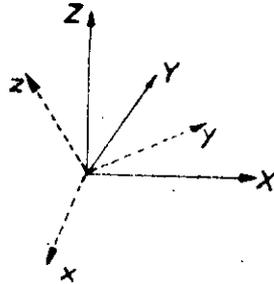
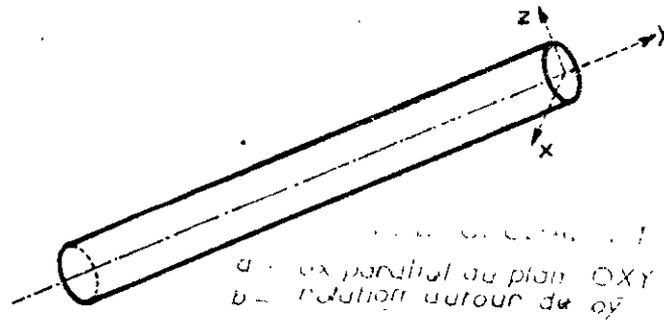


FIG 3.3 ELEMENT POUTRE  
DANS L'ESPACE

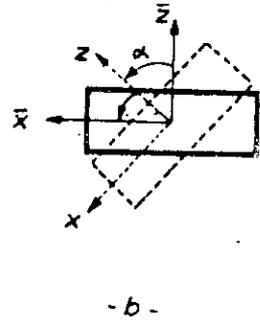
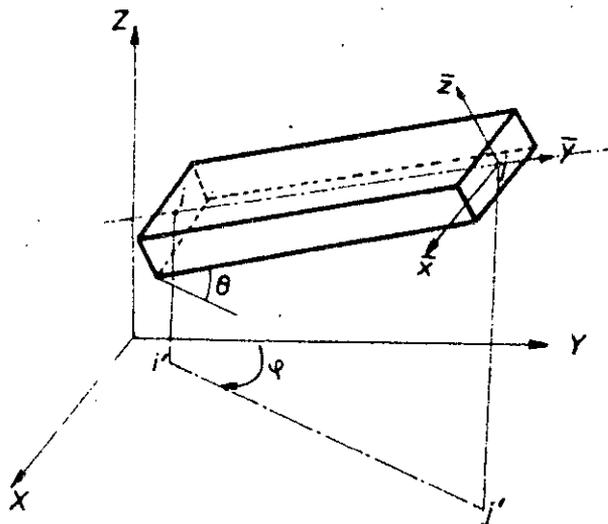


FIG 3.4 REPERE GLOBAL ET LOCAL  
 $a - o\bar{x}$  parallèle au plan  $OXY$   
 $b -$  rotation autour de  $o\bar{y}$

(3.22)

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}}{Z_j - Z_i} \\ \cos \theta &= \frac{L}{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}} \\ \sin \theta &= \frac{Y_j - Y_i}{L} \end{aligned} \right\}$$

avec

(3.31)

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ \sin \theta &= \sin \theta \\ \cos \theta &= \cos \theta \cdot \cos \alpha \\ \sin \theta &= -\sin \theta \cdot \cos \alpha \\ \cos \theta &= \cos \theta \cdot \cos \alpha + \sin \theta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi \\ \sin \theta &= \sin \theta \cdot \cos \alpha - \sin \theta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi \\ \cos \theta &= \sin \theta \cdot \cos \alpha \\ \sin \theta &= \cos \theta \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

on aura alors :

(3.30)

$$[ \lambda ] = \begin{bmatrix} \cos \theta \cdot \cos \varphi & \sin \theta & \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ -\sin \theta \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \theta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi & \cos \theta \cdot \cos \alpha & -\sin \theta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi + \sin \theta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi \\ \sin \theta \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi - \sin \theta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi & \sin \theta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi + \sin \theta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi & \cos \theta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \varphi \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation [λ] est alors :

(3.29)

$$[ \lambda ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\cos \varphi = \frac{X_j - X_i}{\sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}}$$

où :

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (3.33)$$

### 2.5 Matrice de rigidité dans le repère global.

L'énergie de déformation est invariante dans le repère local ou global .

$$U = \frac{1}{2} \cdot \{q_e\}^t \cdot [K] \cdot \{q_e\} = \frac{1}{2} \{q_{e*}\} \cdot [K*] \cdot \{q_{e*}\} \quad (3.34)$$

sachant que :

$$\{q_e\} = [T] \cdot \{q_{e*}\}$$

on déduit aisément :

$$[K*] = [T]^t \cdot [K] \cdot [T] \quad (3.35)$$

à partir de la deuxième propriété d'invariance du travail des forces élémentaires

$$\{q_e\}^t \cdot \{F_e\} = \{q_{e*}\}^t \cdot \{F_{e*}\} \quad (3.36)$$

on obtient :

$$\{F_{e*}\} = [T] \cdot \{F_e\} \quad (3.37)$$

### 2.6 Assemblage de la matrice de rigidité globale

L'assemblage est une étape d'analyse effectuée dans le but d'établir la matrice de rigidité globale de la structure en question à partir des matrices de rigidité élémentaires exprimées dans le repère global. La technique utilisée repose sur le principe de la conservation de l'énergie de déformation de la

structure.

$$U_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^n (U_e)_i \quad (3.38)$$

sachant qu'un noeud peut être commun à plusieurs éléments, le déplacement généralisé correspondant peut figurer dans plusieurs vecteurs élémentaires.

Soit l'élément  $m$  repéré dans la structure par ses noeuds  $i$  et  $j$  ; l'énergie de déformation élémentaire  $U_e$  peut s'écrire sous forme.

$$U_e = [q_i, q_j] \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

En exprimant  $U_e$  à l'aide du vecteur déplacement global d'ordre égale au nombre de degré de liberté de la structure on obtient :

$$U_e = [q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_n] \cdot \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & K_{ii} & \cdot & K_{ij} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & K_{ji} & \cdot & K_{jj} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ q_i \\ \cdot \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

Cette dernière écriture rend plus aisée la sommation matricielle des énergies de déformation.

Après ces étapes de travail, le problème de la détermination des déplacements nodaux se ramène à la résolution du système matriciel suivant :

$$[K] \cdot \{q_e\} = \{P_e\} \quad (3.41)$$

où

$[K]$  = matrice de rigidité globale de la structure.

$\{q_e\}$  = vecteur déplacement

$\{F_e\}$  = vecteur force.

Parmi les méthodes numériques utilisées dans le calcul matriciel, on choisira la méthode de Gauss-Jordan afin de déterminer le vecteur déplacement.

Le chapitre suivant sera celui de l'étude des contraintes dans la structure, vu que toute étude de structure doit aboutir à une répartition de l'état de contrainte dans cette dernière.

### 2.7 Etat de contrainte dans une section droite de poutre.

En tout point P d'une section droite l'état de contrainte se présente dans la base (i, j, k) suivant la direction  $\vec{q}$  (normale à la section droite) par la relation :

$$\vec{T}(P, \vec{q}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

où :

$[\sigma]$  = tenseur de contrainte

$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$  = les cosinus directeur de la normale  $\vec{q}$

la contrainte  $\vec{T}(P, q)$  peut être décomposée en une contrainte normale ( $\vec{\sigma}$ ) et une contrainte tangentielle ( $\vec{\tau}$ )

$$\vec{T}(P, \vec{q}) = \vec{\sigma} + \vec{\tau} \quad (3.43)$$

#### 2.7.1 Equations d'équilibre

Divisons la poutre en deux parties par l'intermédiaire d'une section transversale (s) fig (3.5).

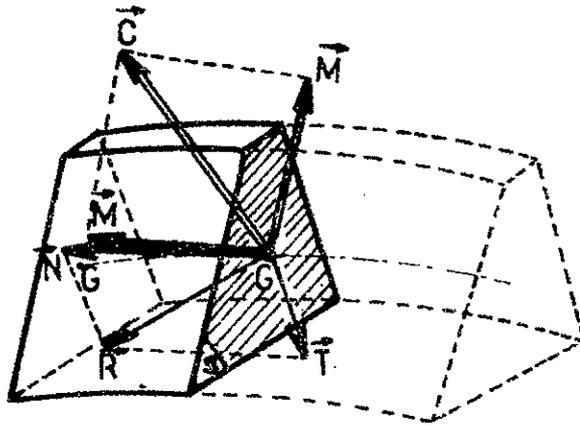


figure 3.5

Forces internes dans une section droite de poutre.

En tout point  $p$  de la section  $(s)$ , l'état de contrainte se présente dans la base  $(i, j, k)$  ( $(j, k)$  dans le plan de la section droite) par :

$$\vec{T}(P, \vec{i}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

écrivons l'équilibre de la section  $(s)$ .

$$\left. \begin{aligned} \iint_s \vec{T}(P, \vec{i}) ds + \vec{R} &= \vec{0} \\ \iint_s \vec{GP} \wedge \vec{T}(P, \vec{i}) ds + \vec{C} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

où  $\vec{R}$  : Résultante du tenseur des forces de cohésion

$\vec{C}$  : son moment.

Ces équations vectorielles se traduisent par 6 équations de projection sur les axes  $(x, y, z)$

$$\left. \begin{aligned} \cdot N + \iint \sigma_{11} ds &= 0 \\ \cdot T_2 + \iint \sigma_{12} ds &= 0 \\ \cdot T_3 + \iint \sigma_{13} ds &= 0 \\ \cdot M_1 + \iint (y \cdot \sigma_{11} - z \cdot \sigma_{12}) ds &= 0 \\ \cdot M_2 + \iint z \cdot \sigma ds &= 0 \\ \cdot M_3 - \iint y \cdot \sigma ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

où

.  $\vec{N}$  est la projection de  $\vec{R}$  sur la tangente à la ligne moyenne  
(ox)

( $\vec{N} = \vec{R} \cdot \vec{i}$ ) : C'est l'effort longitudinal ou normal

.  $\vec{T}$  est la projection de  $\vec{R}$  dans le plan de la section droite :  
c'est l'effort tranchant

$\vec{T}_2$  : Projection de  $\vec{T}$  sur o'y

$\vec{T}_3$  : Projection de  $\vec{T}$  sur o'z

.  $\vec{M}_1$  est la projection de  $\vec{C}$  sur o'x : c'est le moment  
longitudinal qui se confond avec le moment de torsion pour  
les poutres à section symétrique.

.  $\vec{M}$  est la projection de  $\vec{C}$  dans le plan de la section droite :

$\vec{M}_2$  : Projection de  $\vec{M}$  sur o'y

$\vec{M}_3$  : Projection de  $\vec{M}$  sur o'z

### 3.7.2 Calcul de la contrainte normale

On considère pour cela que le cisaillement est  
uniformément nul et que seule la contrainte normale n'est pas  
nulle. L'état de contrainte en tout point P de la section droite  
s'écrit alors :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

D'après l'hypothèse de Bernoulli la section droite étudiée reste  
plane après déformation.

Il est nécessaire alors que l'allongement relatif ( $\sigma/E$ ) dans la

direction soit une fonction linéaire des coordonnées  $y$  et  $z$  du point  $P$  dans la section droite étudiée .

soit :

$$\sigma = K_1 + K_2.y + K_3.z \quad (3.48)$$

D'après les équations d'équilibre (3.45) , on aura :

$$\left. \begin{aligned} \cdot N + \iint K_1.ds + \iint K_2.y.ds + \iint K_3.z.ds &= 0 \\ \cdot M_2 + \iint K_1.z.ds + \iint K_2.z.y.ds + \iint K_3.z^2.ds &= 0 \\ \cdot M_3 - \iint K_1.y.ds - \iint K_2.y^2.ds - \iint K_3.y.z.ds &= 0 \end{aligned} \right\} (3.49)$$

sachant que :

- Les moments statiques  $\iint y ds$  et  $\iint z ds$  sont nuls du fait que l'origine du repère est en  $G$
- Le moment produit  $\iint yz ds$  est nul puisque les axes  $Gy$  et  $Gz$  étant des axes principaux de la section droite.

d'autre part :

$$\iint y^2 ds = I_z \quad (\text{moment quadratique par rapport à } Gz)$$

$$\iint z^2 ds = I_y \quad (\text{moment quadratique par rapport à } Gy)$$

en définitive :

$$\sigma = - \frac{N}{S} + \frac{M_3}{I_z} . y - \frac{M_2}{I_y} . z \quad (3.50)$$

or :

$$\left. \begin{aligned} M_3 &= - E . I_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \\ M_2 &= - E . I_y \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \\ N &= E . S \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned} \right\} (3.51)$$

La relation donnant la contrainte normale s'écrira alors :

$$\sigma = E \left( \frac{du}{dx} - \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot y + \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot z \right) \quad (3.52)$$

D'autre part, connaissant les fonctions de déplacements élémentaires pour les différents cas de sollicitations, on peut exprimer en écriture matricielle le vecteur déplacement.

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \\ B_x(x) \\ B_y(x) \\ B_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

Cette relation est représentée symboliquement par :

$$\{q(x)\} = [f(x)] \cdot \{a\} \quad (3.54)$$

Le vecteur des constantes inconnues qui apparaissent dans les fonctions de déplacement est déterminé à partir du vecteur déplacement nodal  $\{q_e\}$ .

$$\{q_e\} = \begin{Bmatrix} q(x)_{x=0} \\ q(x)_{x=L} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\text{où } \left\{ q(x)_{x=0} \right\} = \left[ f(x)_{x=0} \right] \cdot \left\{ a \right\} \quad (3.56)$$

$$\text{et } \left\{ q(x)_{x=L} \right\} = \left[ f(x)_{x=L} \right] \cdot \left\{ a \right\} \quad (3.57)$$

ainsi on aura :

$$\left\{ qe \right\} = \left[ \frac{f(x)_{x=0}}{f(x)_{x=L}} \right] \cdot \left\{ a \right\} = \left[ A \right] \cdot \left\{ a \right\} \quad (3.58)$$

ce qui donne

$$\left\{ a \right\} = \left[ A \right]^{-1} \cdot \left\{ qe \right\} \quad (3.59)$$

en remplaçant dans la relation (3.54)

$$\left\{ q(x) \right\} = \left[ f(x) \right] \cdot \left[ A \right]^{-1} \cdot \left\{ qe \right\} \quad (3.60)$$

Vu que dans l'expression de la contrainte normale seules figurent les dérivées des déplacements  $U, V, W$  l'équation (3.60) est donnée plus explicitement par :

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[ A \right]^{-1} \cdot \left\{ qe \right\} \quad (3.61)$$

après différentiation on obtient .

$$\begin{Bmatrix} d u/dx \\ d v/dx \\ d w/dx \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[ A \right]^{-1} \cdot \left\{ qe \right\} \quad (3.62)$$

l'expression de la contrainte normale en tout point  $P$  d'une section d'abscisse  $x$  est alors :

$$\sigma = E ( u'(x) + y \cdot v''(x) + z w''(x) ) \quad (3.63)$$

la contrainte maximale en une section d'abscisse  $x_0$  de l'élément étudié est alors au point le plus éloigné du centre de gravité de cette section.

Soit le point M de coordonnées  $M ( x_0 , y_{\max} , z_{\max} )$  dans le repère local de l'élément la contrainte maximale est alors

$$\sigma_{\max} = E ( u'(x_0) + y_{\max} \cdot V''(x_0) + z_{\max}''(x_0) ) \quad (3.64)$$

### 2.7.3 Contraintes dues à l'effort tranchant .

Les contraintes tangentielles dans les poutres à parois minces sont obtenues en admettant les deux hypothèses suivantes:

- En un point quelconque M de la section droite la contrainte  $\tau$  est parallèle au contour.

- L'épaisseur des parois étant mince la contrainte de cisaillement uniformément répartie sur l'épaisseur.

Ces hypothèses se traduisent par :

- La contrainte  $\tau_{13}$  sur l'épaisseur  $h$  de l'aile est homogène et sera négligée devant la contrainte  $\tau_{12}$  dans les ailes de la poutre.

- La contrainte  $\tau_{12}$  sur l'épaisseur  $b$  de l'âme est homogène et sera négligée devant  $\tau_{12}$  dans l'âme.

Si  $b$  et  $h$  sont respectivement les épaisseurs de la paroi

on a :

$$\tau_{13} = \frac{T_3 \cdot m_3}{I_z \cdot b} \quad (3.65)$$

$$\tau_{12} = \frac{T_3 \cdot m_2}{I_z \cdot h} \quad (3.66)$$

$m_3$  et  $m_2$  sont les moments statique de la section S par rapport GZ

$$m_2 = \iint_S .y.d s \quad (3.67)$$

$$m_3 = \iint_S .z.d s \quad (3.68)$$

après intégration on aura :

$$m_2 = \frac{(H-h).h}{2} . (B-y) \quad (3.69)$$

$$m_3 = \frac{b(H-h)^2}{8} . \left[ 1 - \left( \frac{2z}{H-h} \right) \right] + \frac{B(H-h)h}{2} \quad (3.70)$$

Les contraintes de cisaillement seront alors définitivement:

$$\sigma_{12} = \frac{T(H-h)}{2 I_z} . (B-y) \quad (3.71)$$

$$\sigma_{13} = \frac{T(H-h)^2}{8 I_z} . \left[ 1 - \frac{2z}{H-h} \right] + \frac{T.B.(H-h).h}{2 . I_z . b} \quad (3.72)$$

## 2.8. Critère de limite élastique

### 2.8.1 Contraintes principales :

Dans le cas général, l'état de contrainte en un point P d'une poutre, exprimée dans le repère lié à la section droite (G/x, y, z) est défini par:

$$\left[ \sigma_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\text{avec : } \sigma = - \frac{N}{S} + \frac{M_3}{I_z} . y - \frac{M_2}{I_y} . z \quad (3.74)$$

(y et z coordonnées de P par rapport à G dans la section droite)

$$\sigma_{12} = \sigma_{12} \text{ (du à T2 et T3 )} + \sigma_{12} \text{ (du à Mt )} \quad (3.75)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{13} \text{ (du à T2 et T3 )} + \sigma_{13} \text{ (du à Mt )} \quad (3.76)$$

Le calcul des contraintes principales en P s'effectue en recherchant les racines de :

$$\begin{vmatrix} \sigma - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & -\lambda & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.77)$$

soit  $(-\lambda) \left[ \lambda^2 - \lambda \cdot \sigma - (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) \right] = 0 \quad (3.78)$

ce qui nous donne :

$$\sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)} \quad (3.79)$$

$$\sigma_{II} = 0$$

$$\sigma_{III} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}$$

ou encore en posant :

$$\tau^2 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 \quad (3.80)$$

$$\sigma_I = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_{II} = 0$$

$$\sigma = \frac{\sigma}{III} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (3.81)$$

### 2.8.2 Critère de Von - Mises .

En fonction des conditions de charge, un matériau peut se trouver dans différents états mécaniques.

On entendra par état limite, un état délimitant deux zones dans lesquelles les propriétés du matériau sont différentes.

La condition de la limite élastique d'après la théorie de Von-Mises est :

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \leq 2\sigma_e^2 \quad (3.82)$$

$\sigma_e$  : limite élastique du matériau en traction pure.

La condition peut s'exprimer en fonction des composantes du tenseur de contraintes :

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_e \quad (3.83)$$

## 2.9 MODELISATIONS

L'étude de toute structure ( phénomène ou processus ), réellement existant, nécessite tout d'abord des simplifications et des schématisations afin de rendre possible l'analyse et la formulation mathématique. Ces simplifications du modèle et les hypothèses admises doivent se faire sans toutefois s'éloigner de la réalité.

La modélisation par la méthode des éléments finis est basée sur une subdivision du domaine continu, en sous domaines en forme géométrique simple, que l'on appellera " éléments " interconnectés en des points appelés " noeuds ". Les charges réellement appliquées à la structure seront remplacées par des charges équivalentes appliquées directement aux noeuds.

Dans cette étude, on propose deux modèles simplifiés, dont le premier est formé d'éléments poutres et le second formé d'éléments plaques, permettant l'analyse des deux structures (Chassis du camion et chassis du bus ).

#### 2.9.1 Modélisation en éléments poutres.

Dans cette partie, les longerons ainsi que les traverses constituant le chassis sont modélisés par des poutres raccordées entre elles en des noeuds convenablement choisis, suivant des critères cités ci-dessous. La numérotation des noeuds est faite de manière à ce que la différence de numeros entre deux noeuds voisins soit la plus petite possible. Ceci en resulta en une largeur de bande optimale, ce qui minimise par conséquent, le temps de compilation.

#### 2.9.2 Choix des noeuds.

Les noeuds sont choisis de façon à connaitre par l'intermediaire du vecteur déplacement nodal, les déformées et les contraintes dans les sections les plus sollicitées.

Pour modéliser le chassis en éléments poutres, on est amené à définir trois types de noeuds caracterisés par leurs natures :

- Noeuds correspondant aux changements de section .
- Noeuds correspondant aux points de fixation traverses-longerons.
- Noeuds correspondant aux appuis se rapportant aux points de fixation des ressorts à lames .

#### 2.9.3 Types d'appuis .

La liaison essieu-chassis se fait par l'intermediaire des ressorts à lames, couramment utilisés dans la suspension des

véhicules industriels. Ceux-ci sont fixés de telle façon que la longueur A B varie pendant la flexion. Cette flexion due à la charge nécessite que le ressort à lames soit articulé aux deux extrémités. De plus la jumelle permet le glissement de l'extrémité B. (fig 3.6). Cet aperçu sur le mode de liaison nous permet la considération de deux appuis, l'un double et l'autre simple pour chaque ressort à l'avant et à l'arrière et pour chacun des deux longerons.

#### 3.9.4 Présentation des modèles .

Selon les considérations citées auparavant (choix des noeuds et types d'appuis), le modèle des châssis en éléments poutre comprend 32 éléments et 26 noeuds pour le cas du camion et 29 éléments et 26 noeuds pour le cas du bus (fig 3.7 et 3.8 ).

Pour illustration :

\* Dans le cas du camion :

- . Les noeuds 9, 13, 17, 21, et 23 ( 10, 14, 18, 22, et 24 ) sont des noeuds correspondant à l'intersection travers - longeron .
- . Les noeuds 5, 9, 17, et 21 ( 6, 10, 18 et 22 ) correspondent aux points d'appuis modélisé indifféremment au cas du camion
- . Les noeuds 7 et 19 ( 8 et 20 ) correspondent au changement de section .

Il est à noter que quelques simplifications sont admises lors de cette modélisation, on en cite essentiellement:

a/ Les traverses, ayant une géométrie complexe dans la zone des liaisons, ont été considérées comme ayant une section constante en forme de "U" .

b/ Les zones des longerons ayant une section variable ont été modélisées en poutres à section constante. (fig 3.9 et 3.10)

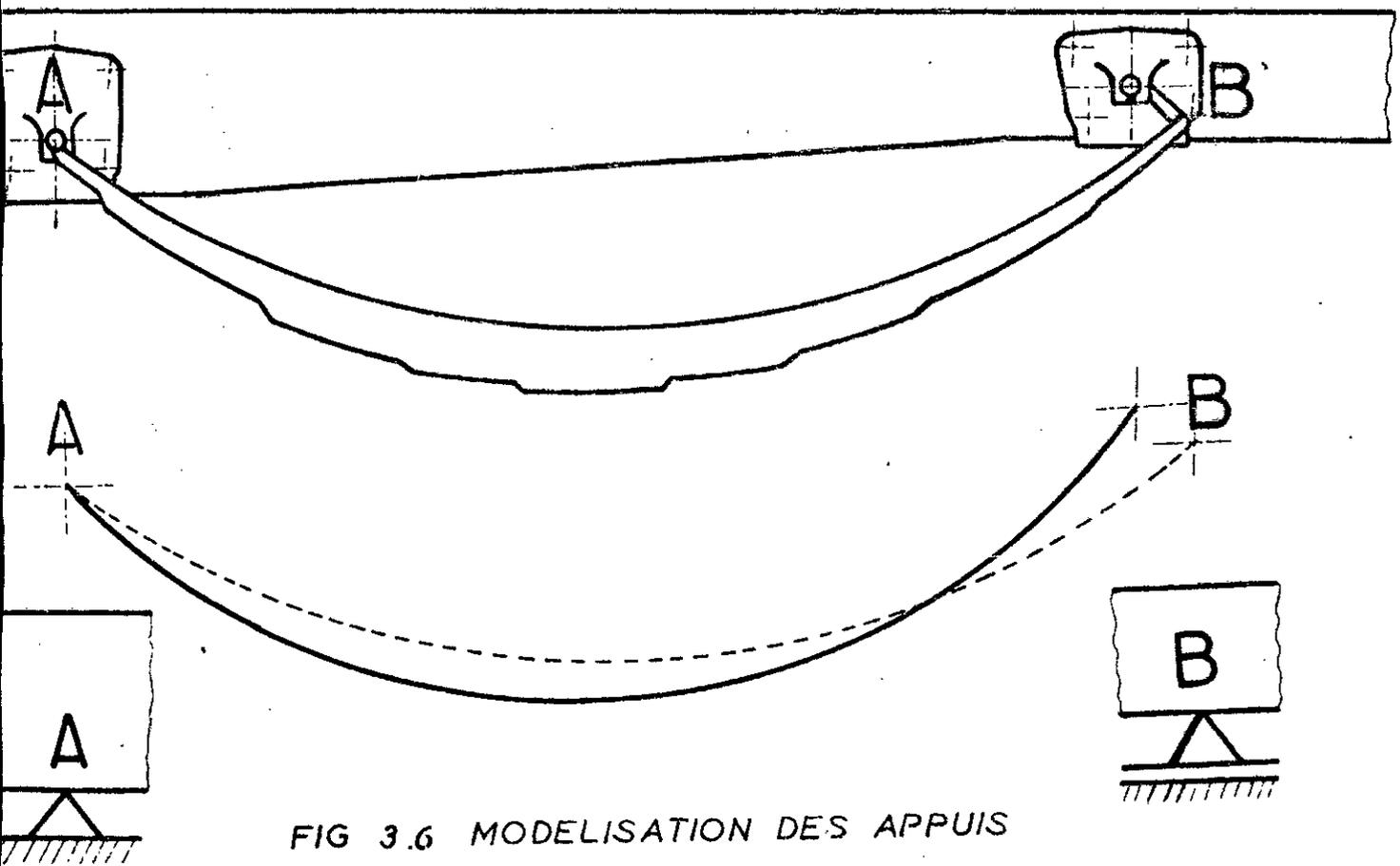


FIG 3.6 MODELISATION DES APPUIS

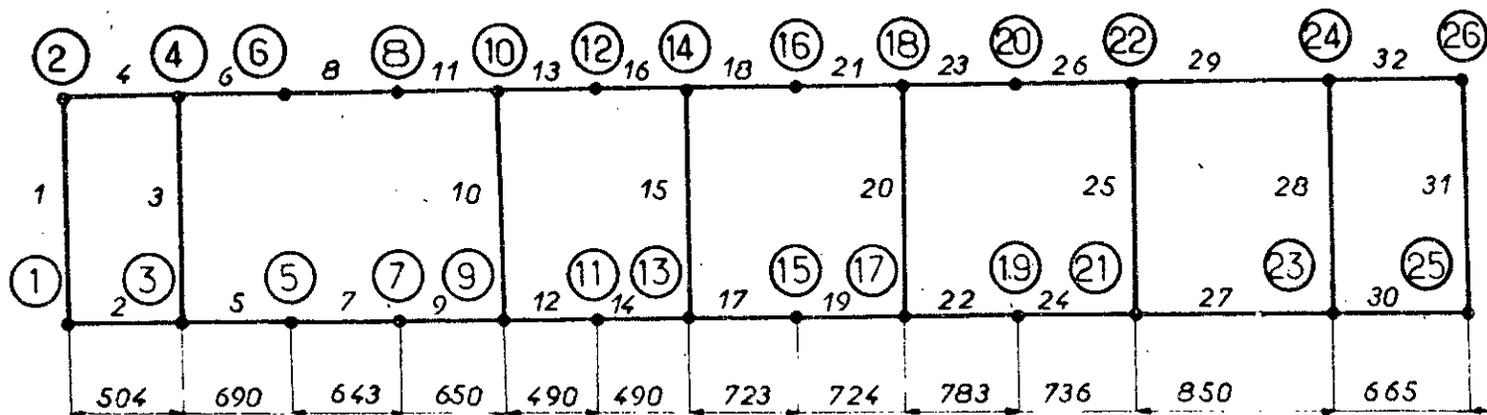


FIGURE 3.7 MODELE EN ELEMENTS POUTRES (Chassis du camion)

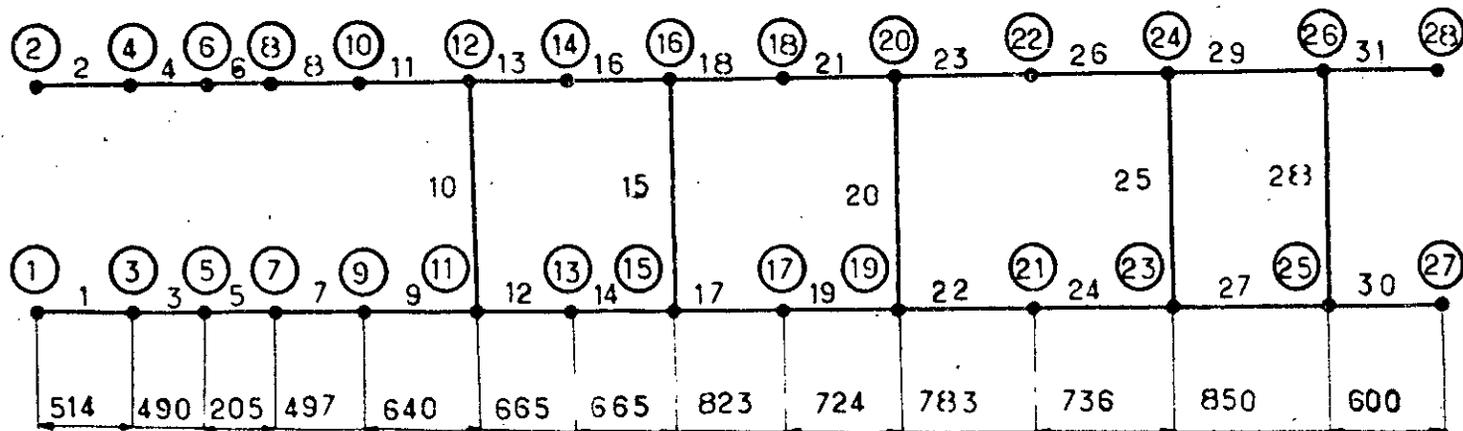


FIGURE 3.8 MODELE EN ELEMENTS POUTRES (Chassis du bus)

*i* ELEMENT *i*

*i* NOEUD *i*



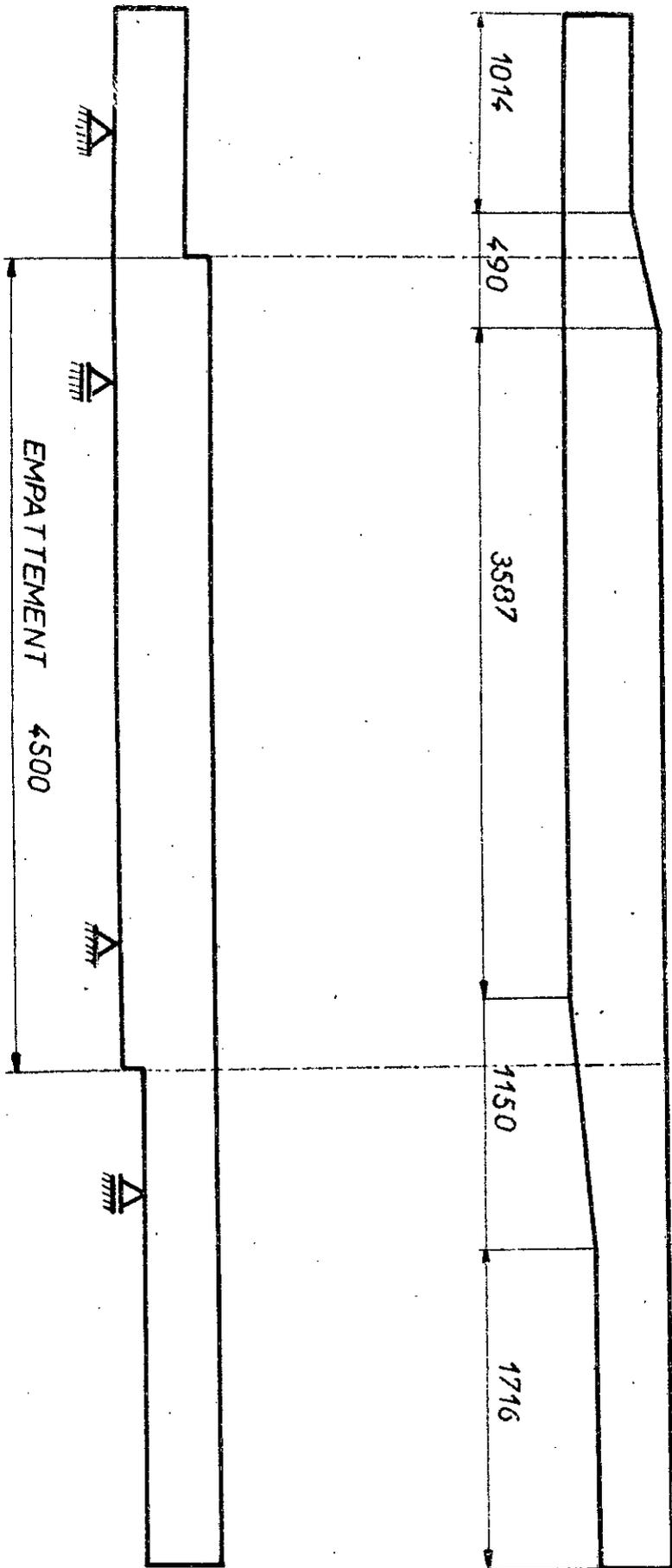
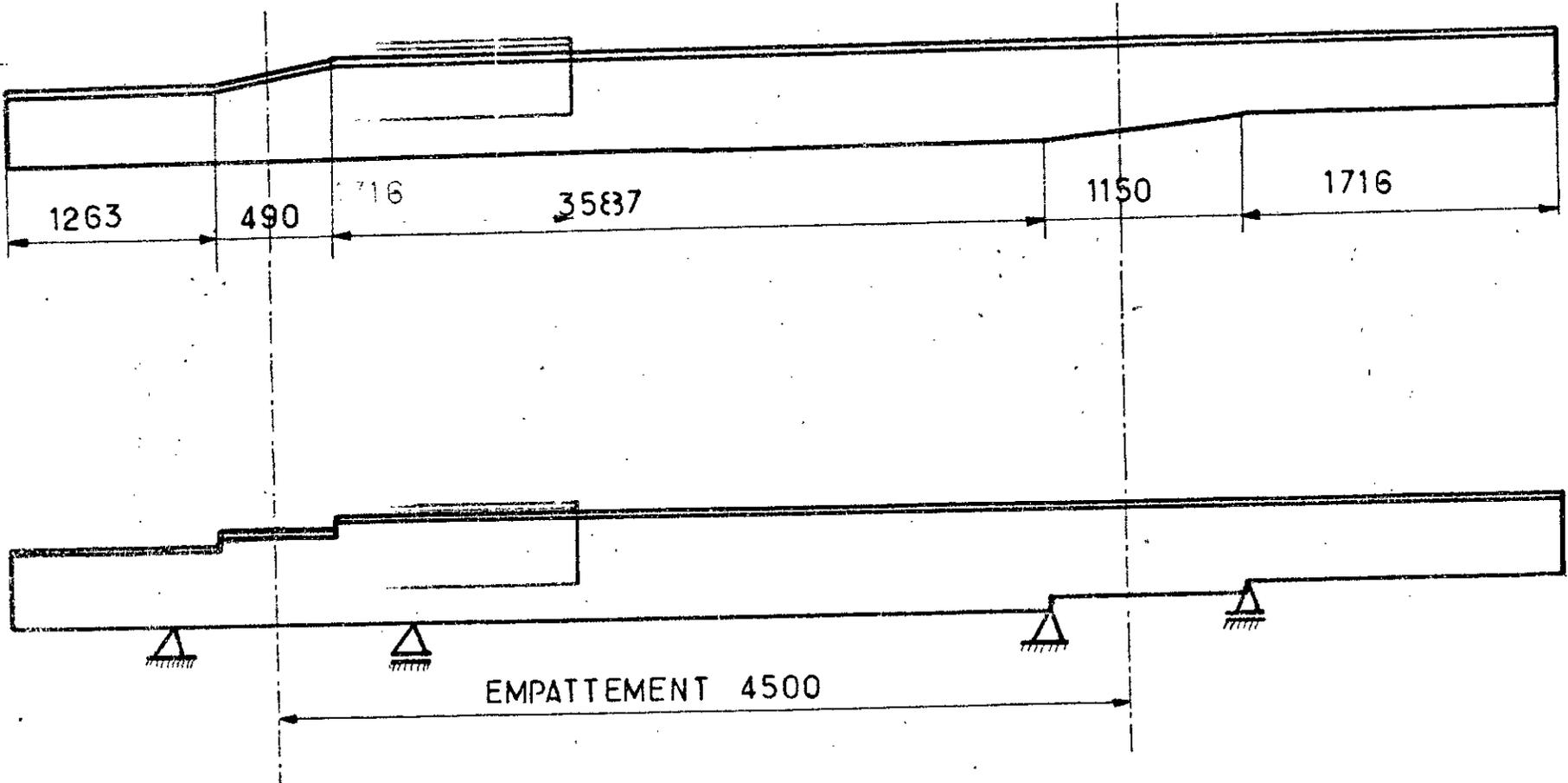


Fig 3.9 MODELE DU LONGERON  
CHASSIS DU CAMION



42

FIG. 3.10 MODELE DES LONGERONS  
CHASSIS DU BUS

### 2.9.5 Modélisation des charges.

Les contraintes auxquelles est soumis le châssis sont dues aux charges verticales qui soumettent le véhicule à des efforts de flexion. Ces charges sont soit des charges concentrées, soit des charges réparties. Dans les deux cas, les efforts sont ramenés à des forces (moments) équivalentes concentrées aux noeuds par des méthodes d'approche.

#### 2.9.5.1 Cas des charges concentrées

Soit un élément poutre de noeuds respectifs  $i$  et  $j$  chargé d'un effort  $\vec{F}$ . En se basant sur les lois de la statique, l'effort  $\vec{F}$  est remplacé par deux efforts  $\vec{F}_i$  et  $\vec{F}_j$  concentrés aux noeuds  $i$  et  $j$  additionnés à deux moments  $\vec{M}_i$  et  $\vec{M}_j$  (fig 3.11a et 3.11 b).

$$\begin{aligned} \vec{F}_i + \vec{F}_j &= \vec{F} \\ \vec{M}_i + \vec{M}_j &= \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{F}_i &= b/L \cdot \vec{F} \\ \vec{F}_j &= a/L \cdot \vec{F} \\ \vec{M}_i &= \vec{M}_j = (a \cdot b)/L \cdot \vec{F} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{F}_i + \vec{F}_j &= \vec{F} \\ \vec{M}_i + \vec{M}_j &= \vec{0} \\ \vec{F}_i &= b/L \cdot \vec{F} \\ \vec{F}_j &= a/L \cdot \vec{F} \\ \vec{M}_i &= \vec{M}_j = (a \cdot b)/L \cdot \vec{F} \end{aligned}} \right\} (3.84)$$

#### 2.9.5.2 Cas des charges réparties.

La charge répartie doit être modélisée par des charges équivalentes concentrées aux noeuds selon les deux méthodes d'approche suivantes :

\* a / - Méthode des charges concentrées.

Cette méthode consiste à diviser l'élément étudié en deux parties égales et supposer que la charge totale appliquée dans chaque région est concentrée au noeud le plus proche (figure 3.12a 3.12 b). D'après ces hypothèses l'expression des charges concentrées équivalentes s'écrit comme suit:

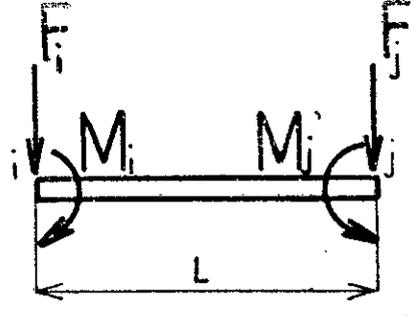
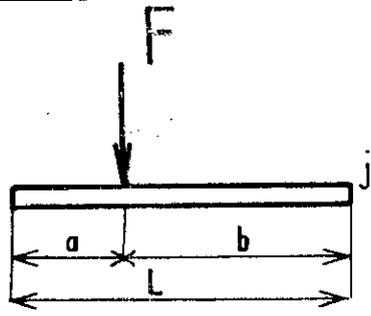


FIG 3.11 MODELISATION DES CHARGES CONCENTREES

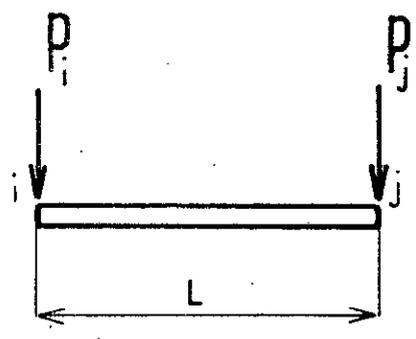
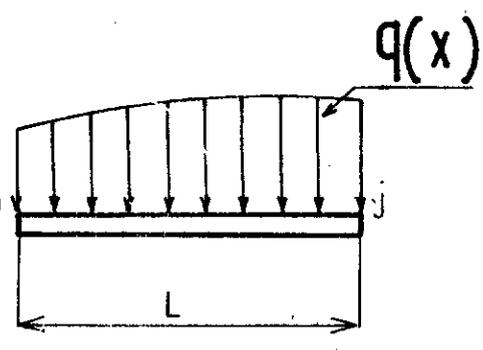


FIG 3.12 MODELISATION DES CHARGES REPARTIES

Methode des charges concentrees

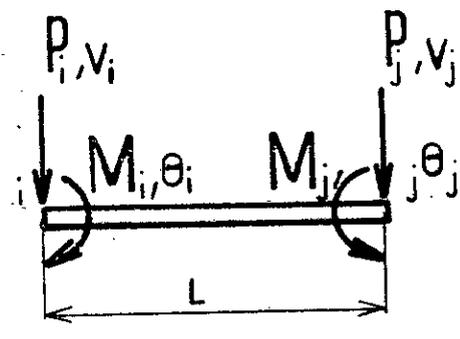
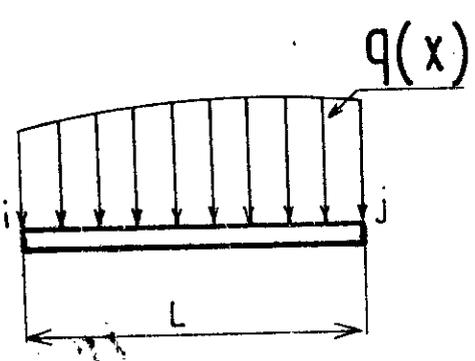


FIG 3.13 MODELISATION DES CHARGES REPARTIES  
Methode des chages consistantes

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \int_0^{L/2} q(x) \cdot dx \\ P_j &= \int_{L/2}^L q(x) \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

\* b - Methode des charges consistantes :

C'est une méthode plus rationnelle pour la détermination des charges équivalentes se basant sur la capacité du système à fournir un travail. Le travail dû à la charge répartie  $W_e$  est supposé équivalent au travail dû aux charges concentrées aux noeuds  $W_e^*$ .

Ces deux travaux sont donnés par les expressions suivantes:

$$W_e = \int_0^L \frac{1}{2} \cdot q(x) \cdot V(x) \cdot dx \quad (3.86)$$

$$W_e^* = \frac{1}{2} \cdot (P_i \cdot V_i + M_i \cdot \theta_i + P_j \cdot V_j + M_j \cdot \theta_j) \quad (3.87)$$

Dans l'équation (3.86),  $V(x)$  représente la fonction de déplacement dans le cas d'une flexion plane :

$$V(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (3.88)$$

En utilisant les conditions aux limites (fig 3.13) on obtient :

$$\begin{aligned} V(x) = & \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) \cdot V_i + \left( -x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \right) \cdot \theta_i + \\ & + \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \cdot V_j + \left( \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \right) \cdot \theta_j \quad (3.89) \end{aligned}$$

Le travail s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
 W_e &= \frac{1}{2} V_i \int_0^L q(x) \cdot \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) dx \\
 &+ \frac{1}{2} \theta_i \int_0^L q(x) \cdot \left( -x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \right) dx \\
 &+ \frac{1}{2} V_j \int_0^L q(x) \cdot \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) dx \\
 &+ \frac{1}{2} \theta_j \int_0^L q(x) \cdot \left( \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \right) dx
 \end{aligned} \quad (3.90)$$

En égalisant les deux équations (3.87) et (3.90), on arrive à :

$$\begin{aligned}
 P_i &= \int_0^L q(x) \cdot \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) dx \\
 M_i &= \int_0^L q(x) \cdot \left( -x + 2 \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \right) dx \\
 P_j &= \int_0^L q(x) \cdot \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) dx \\
 M_j &= \int_0^L q(x) \cdot \left( \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \right) dx
 \end{aligned} \quad (3.91)$$

#### 2.9.6 Mode de chargement du châssis de camion K120

Les charges, fournies par le constructeur et auxquelles est soumis le châssis, sont essentiellement :

- Le poids total du châssis cabine en ordre de marche .....4000 Kg
- La charge totale : charge utile + le poids de la carrosserie  
+conducteur + passagers et roue de secours .....8000 Kg

- Le poids total autorisé en charge du vehicule isolé ....12000 Kg
  - . maximum sur avant ....4200 Kg
  - . maximum sur arriere ....8400 Kg
- Le poids de la boite à vitesse ainsi que celui du moteur 640 Kg
- Le poids du réservoir à combustible plein 165 Kg
- Le poids du coffre à batteries et réservoir à air 90 Kg
- Le poids de la roue de secours 120 Kg
- Le poids du conducteur et des passagers 300 Kg

La cabine est fixée à quatre supports. Son poids sera réparti en quatre efforts égaux :

$$F1 = F1' = F2 = F2' = \frac{P \text{ cabine}}{4}$$

Le poids de l'ensemble moteur et boite à vitesse sera réparti également en quatre efforts égaux :

$$F4 = F4' = F5 = F5' = \frac{P \text{ mot-boite}}{4}$$

Le poids du conducteur et des passagers sera répartie en deux efforts égaux .

$$F3 = F3' = \frac{P \text{ cond.pass.}}{2}$$

Au réservoir de combustible, correspond un effort F6 égal à son poids. Symetriquement sur l'autre longeron un effort F6' correspond au coffre de batteries et réservoir à air. La roue de secours sera représentée par deux effort égaux et symetriques

$$F7 = F7' = \frac{p \text{ roue}}{2}$$

Le poids propre du chassis , du plateau ainsi que le poids de la charge transportée sont considérés comme charge répartie

équitablement sur les deux longerons sur une longueur de 6.45 m.

$$Q = Q'$$

La charge  $Q$  est déterminée comme suit :

Connaissant la charge totale maximale sur arrière qui est de l'ordre de 8400 Kg on soustrait les poids correspondant aux organes suivants:

Pont, arbre de transmission, roues et roues de secours, réservoir de combustible et à air.

La charge  $Q$  est de l'ordre de  $Q = Q' = 4500 \text{ N/m}$

Le mode de chargement du camion K120 est schématisé sur la figure (3.14.a)

#### 2.9.7 Mode de chargement du châssis du bus.

Les principales charges, données par le constructeur et auxquelles est soumis le châssis sont:

- Le poids total autorisé en charge du véhicule	12000 Kg
- Le poids du châssis carrossé à vide	6650 Kg
. Maximum sur avant	3290 Kg
. Maximum sur arrière	3360 Kg
- Le poids du moteur	400 Kg
- Le poids de la boîte à vitesse + l'huile	150 Kg
- Le poids du réservoir d'essence plein	250 Kg
- Le poids du réservoir d'air	50 Kg
- Le poids du coffre à batteries	50 Kg
- Le poids de l'essieu	310 Kg
- Le poids du pont arrière	630 Kg
- Le poids de la roue ( 2 avant, 4 arrière )	80 Kg
- Le poids de la direction avant du véhicule	80 Kg
- Le poids de la transmission	100 Kg

Ces charges sont réparties sur les longerons comme suit :

- Le moteur ainsi que la boîte à vitesse sont supportés par quatre apuis, leur poids sera représenté par quatre efforts:

$$F1 = F1' = F2 = F2' = \frac{P \text{ mot.boite}}{4}$$

- Le poids du coffre à batteries est représenté par l'effort F3
- Le poids du réservoir à air est représenté par l'effort F4 ,
- Au poids du réservoir de combustible plein correspond un effort F5
- Le poids du caisson est déterminé à partir du poids total du châssis corrossé à vide, il suffit d'en soustraire le poids des différents éléments (moteur, boîte à vitesse, réservoir d'essence, roues.....) ainsi que le poids propre du châssis. Le poids du caisson est subdivisé en dix (10), au nombre des supports auxquelles il est fixé.

$$F6 = F6' = F7 = F7' = F8 = F8' = F9 = F9' = F10 = F10' = \frac{P.\text{cai}}{10}$$

- Le poids total des passagers est déduit en retranchant du poids autorisé en charge du véhicule, le poids total du châssis carrossé à vide. Cette derrière sera considérée comme charge répartie sur les deux longerons sur une longueur de (6,656 m)

$$Q = Q = 3\ 900 \text{ N / m .}$$

ces charges sont schématisées sur la figure (3.15a)

### 3.9.8 Présentation des charges modèles.

A la base des méthodes de formulations cités ci-dessus (méthode des charges concentrées et méthode des charges consistantes ) et en utilisant les données citées en annexe , les vecteurs force modèle pour chaque structure sont présentés dans les figures (3.14b et 3.15b).

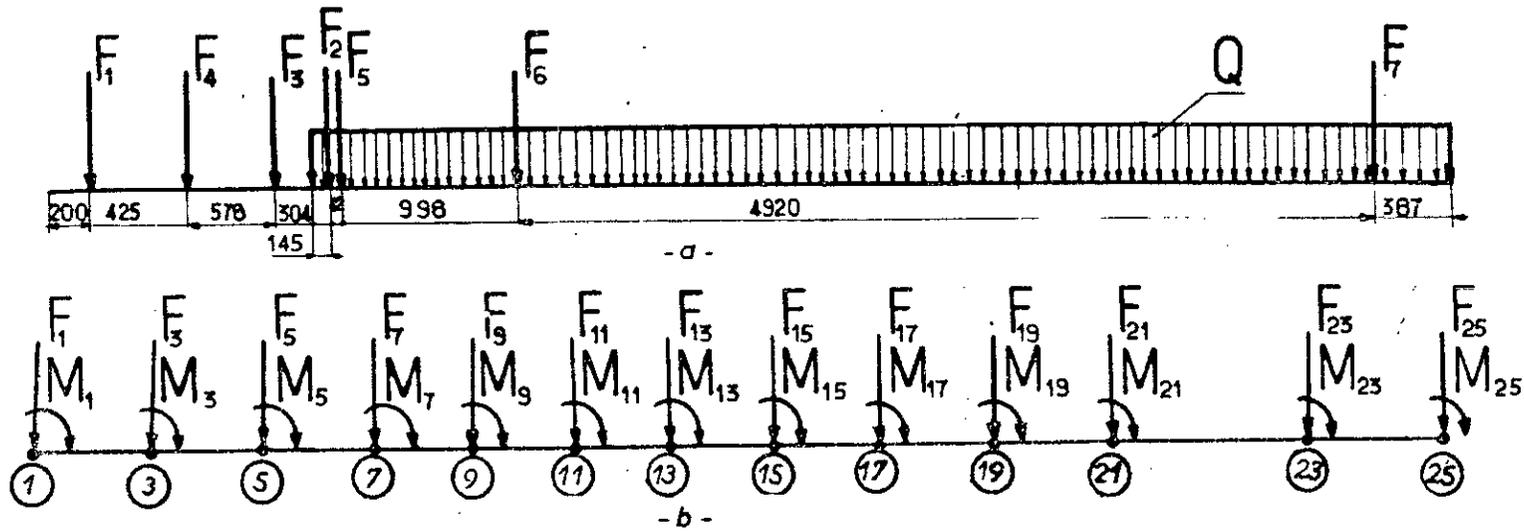


FIG 3.14 MODE DE CHARGEMENT DU CHASSIS CAMION

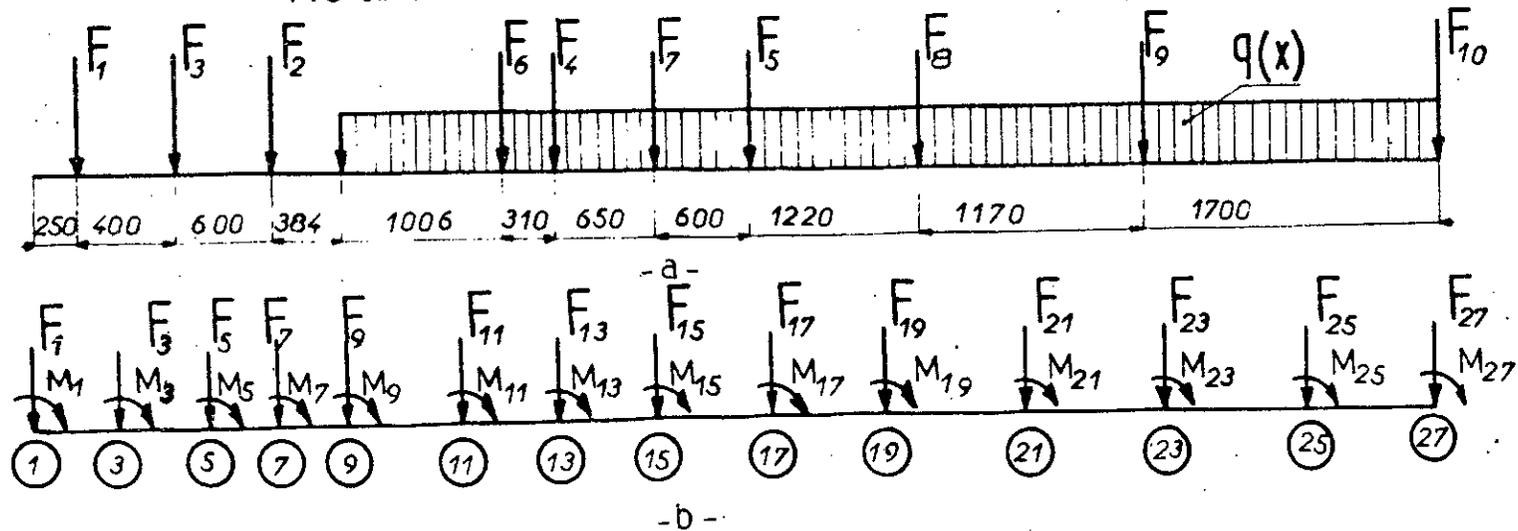


FIG 3.15 MODE DE CHARGEMENT DU CHASSIS BUS

a - chargement réel

b - chargement model

Il est à noter que lorsqu'un élément possède plusieurs points de fixation, on considère que son poids est appliqué à la cote moyenne.

### 3.10 Programmation et résultats

A partir de la théorie établie et les modélisations présentées aux paragraphes précédents, un logiciel en éléments finis, a été développé pour la résolution du problème.

Ce logiciel permet de calculer les déplacements nodaux ainsi que les contraintes dans chaque élément. Les résultats obtenus à partir du programme développé, ont été comparés à ceux du programme SAP.IV pour le calcul des structures établit par l'université de BERKLEY (U.S.A).

#### 3.10.1 Présentation du logiciel

Le logiciel développé permet le calcul statique des modèles de structures linéaires formés essentiellement d'éléments spatial de poutre. Il n'a pas de restriction concernant le nombre d'éléments utilisés. Un point nodal dans la structure peut avoir de zero à six degrés de liberté. Le programme est donc efficace pour le calcul des structures à une, deux ou trois dimensions.

Les données sont introduites sous forme de fichiers.

\* Données d'entrée des points nodaux:

Après introduction du nombre de noeud NBN et du nombre d'éléments NBE dans la première et la deuxième ligne, on entame les données concernant les noeuds.

Lors de l'introduction des noeuds, il faut spécifier pour chacun:

- Six codes concernant les conditions aux limites
- Trois coordonnées (X,Y,Z)
- Trois charges : effort suivant l'axe OZ

moment autour de l'axe OY

moment autour de l'axe OX

Le programme prend en considération, dans tous les cas, six degrés de liberté par noeud (trois déplacements et trois rotations). On supprime, suivant les cas, les d.d.l qui ne sont pas actifs. De manière spécifique "0" signifie qu'aucune équation ne peut être associée au degré de liberté correspondant, alors que "1" signifie qu'il s'agit d'un degré de liberté actif. Les efforts suivant les axes OX et OY n'ont pas été prévus, vu le mode de chargement de la structure à étudier, qui ne prévoit aucun effort suivant les axes OX et OY ni de moment de torsion suivant l'axe OZ.

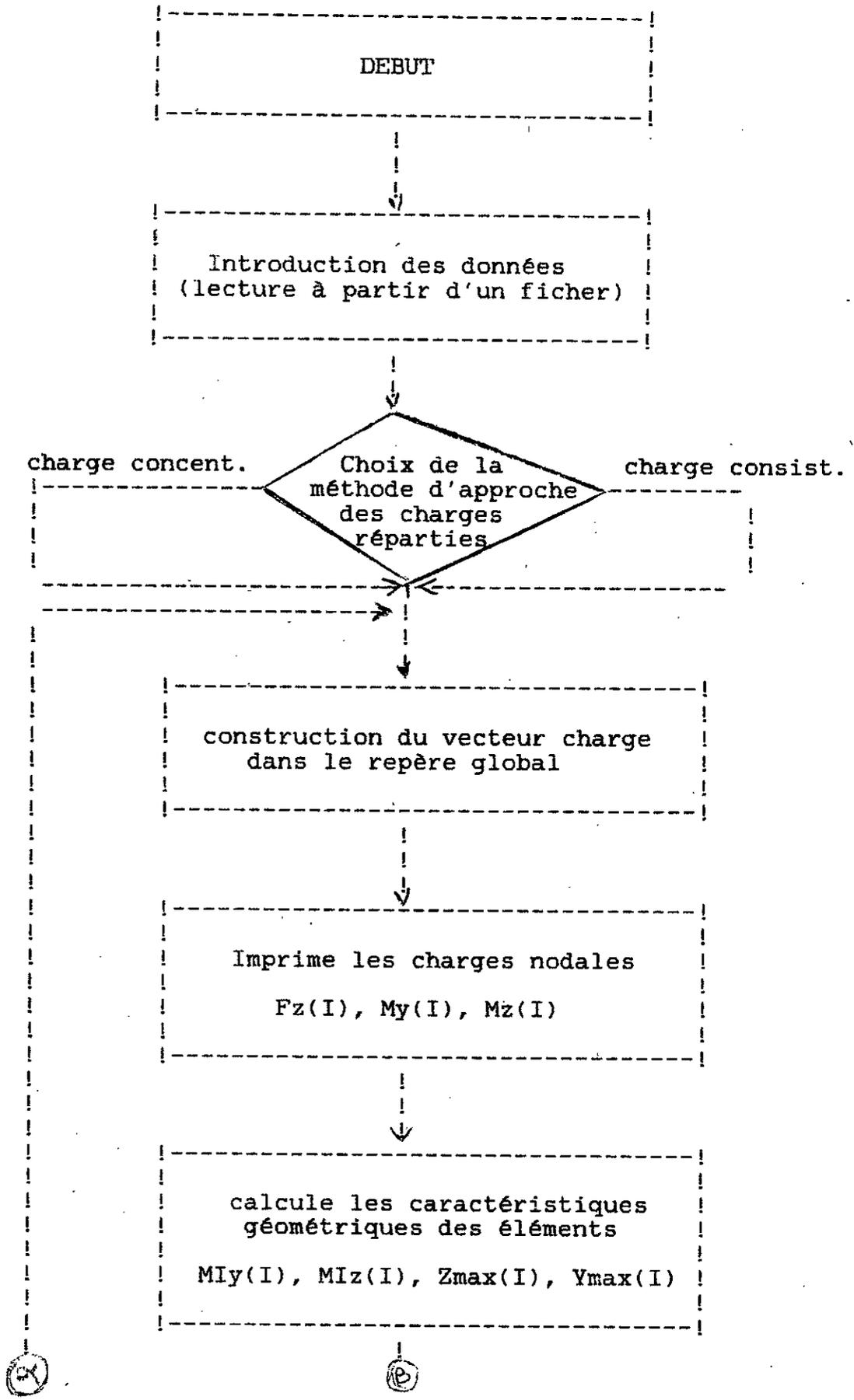
\* Données d'entrée des éléments

Vu que la structure à étudier est formée essentiellement d'éléments poutres à section droite en forme de "U" et qu'elle est située dans le plan X-Y du repère global, on introduit les données concernant les éléments de la manière suivante :

Pour chaque élément, il faut spécifier:

- Ses numéros de noeuds  $i$  et  $j$  : NUMN(I,1), NUMN(I,2)
- La largeur et la hauteur : B(I) , H(I)
- Les épaisseurs de l'aile supérieure et inférieure et de l'âme : He(I) , Hel(I) , Be(I)
- Le module de Young : E(I)
- La charge répartie : q(I)
- Le poids volumique, ainsi que le coefficient de Poisson sont introduits sous forme de DATA.

Dans ce qui suit on présente l'organigramme du programme.



Ⓟ

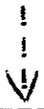
Imprime les caractéristiques géométriques



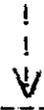
Génération de la matrice de rigidité élémentaire



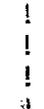
Génération de la matrice de passage



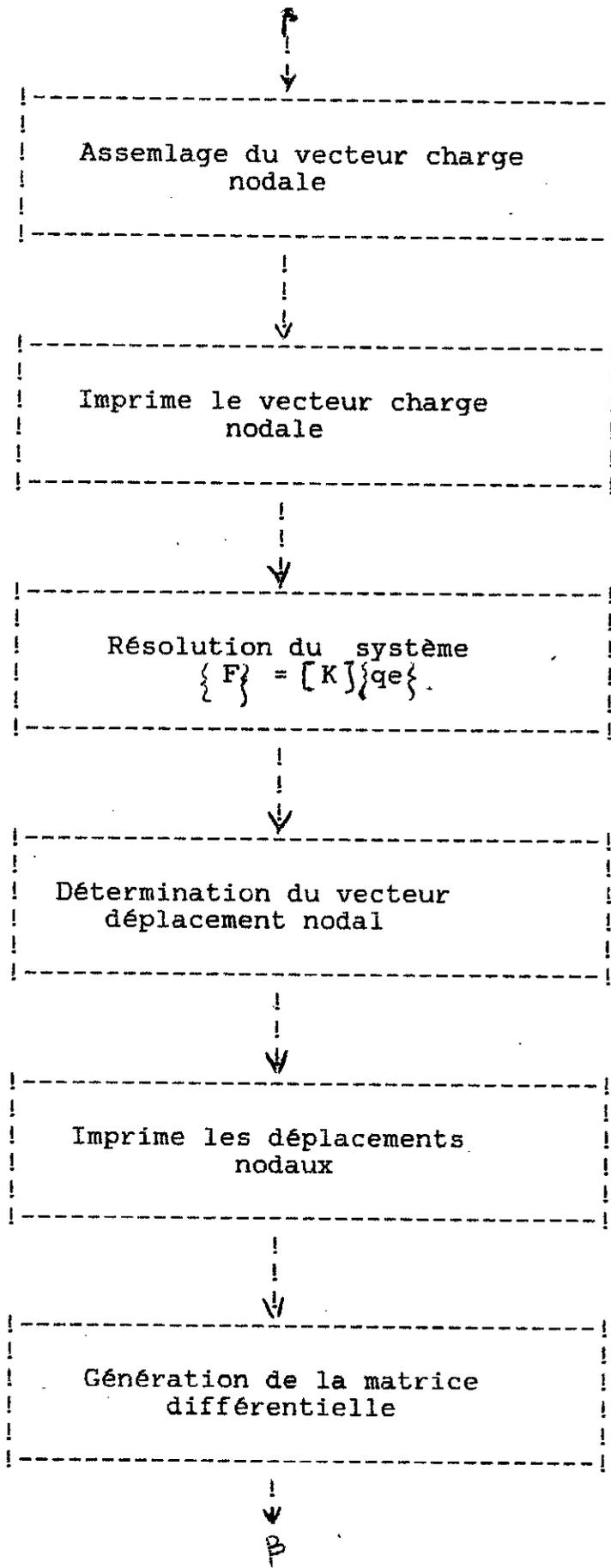
Construction du tableau des d.d.l actifs et détermination de l'ordre de la matrice de rigidité globale

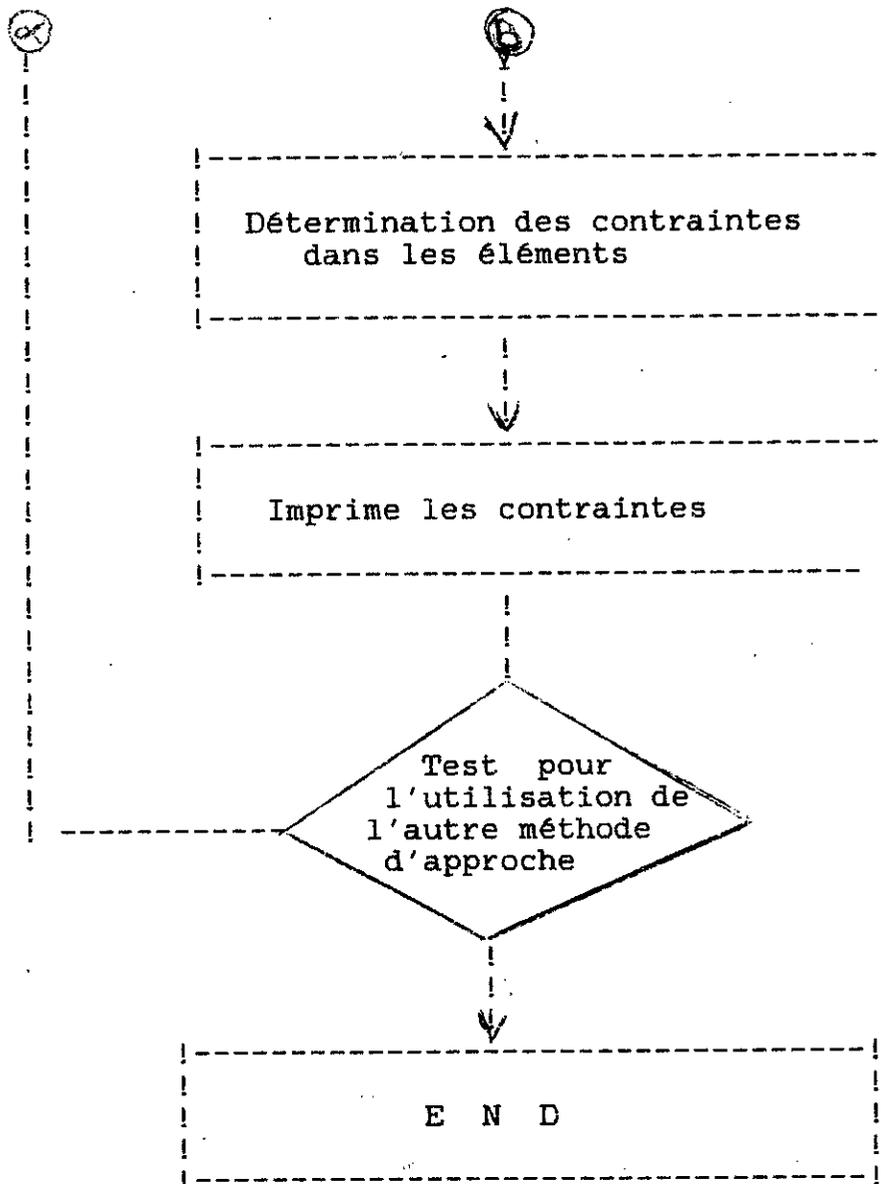


Assemblage de la matrice de rigidité globale



Ⓟ





### 3.10.2 Présentation des résultats:

Le logiciel calcule en premier les caractéristiques géométriques pour chacun des éléments à savoir:

- Les moments d'inerties :  $M_{IY(I)/OY}$   $M_{IZ(I)/OZ}$
- L'ordonnée maximale :  $Y_{max(I)}$
- La côte maximale :  $Z_{max(I)}$
- L'aire de la section droite :  $A(I)$

Par exemple pour le cas du camion ces résultats sont présentés dans le tableau 3.1 .

éléments	MIY/OY (m4)	MIZ/OZ (m4)	Ymax (m)	Zmax (m)	A (m2)
2,4,5,6	0.7623E-05	0.7967E-05	0.0519	0.0850	0.0178
1	0.1072E-04	0.9314E-04	0.1020	0.0800	0.0023
7,8,9,11, 12,13,14, 16,17,18, 19,21,22, 23	0.1925E-04	0.1155E-04	0.0551	0.125	0.00226
3	0.4841E-05	0.6577E-05	0.0497	0.0760	0.0013
10,15,20,	0.1807E-04	0.3863E-05	0.0668	0.0600	0.0015
24,26,27, 29,30,32,	0.8731E-05	0.8417E-05	0.0524	0.090	0.0018
25,28,31,	0.4063E-05	0.7630E-05	0.0517	0.0760	0.0011

Tableau 3.1 Caractéristiques géométriques  
des éléments du châssis camion

Ensuite le programme calcule et imprime les forces et les moments concentrés aux noeuds d'après les modélisations et les méthodes d'approche données aux chapitres précédents. On donne comme exemple les efforts supportés par un longeron du châssis de camion dans le tableau 3.2 .

Par la suite le programme calcule les déplacements en chaque noeud ainsi que les contraintes en chaque élément par les deux méthodes d'approche. on donne dans les tableaux 3.3 et 3.4 les contraintes ainsi que les déplacements calculés dans le cas du longeron du châssis de camion.

N O E U D	Methode des charges concentrées			Methode des charges consistantes		
	Fz (N)	Mx (N.m)	My (N.m)	Fz (N)	Mx (N.m)	My (N.m)
1	-0.724E3	-0.752E2	0.145E3	-0.724E3	-0.752E2	0.145E3
3	-0.179E4	-0.186E3	0.150E2	-0.180E4	-0.187E3	0.150E2
5	-0.351E4	-0.127E4	0.629E3	-0.353E4	-0.128E4	0.629E3
7	-0.566E4	-0.204E4	-0.790E3	-0.566E4	-0.205E4	-0.631E3
9	-0.369E4	-0.104E4	0.174E3	-0.369E4	-0.104E4	0.156E3
11	-0.272E4	-0.848E3	-0.174E3	-0.272E4	-0.848E3	-0.174E3
13	-0.272E4	-0.988E3	0.0	-0.273E4	-0.988E3	0.106E3
15	-0.325E4	-0.118E4	0.0	-0.325E4	-0.118E4	0.542E2
17	-0.339E4	-0.123E4	0.0	-0.340E4	-0.123E4	0.333E2
19	-0.341E4	-0.452E3	0.0	-0.341E4	-0.451E3	-0.267E2
21	-0.357E4	-0.471E3	0.0	-0.357E4	-0.471E3	0.678E2
23	-0.375E4	-0.496E3	0.970E2	-0.376E4	-0.496E3	-0.810E1
25	-0.174E4	-0.723E2	-0.970E2	-0.175E4	-0.723E2	-0.263E3

Tableau 3.2 Efforts supportés par le chassis  
de camion

ELEM.	CONTRAINTES ( N / m <sup>2</sup> )		
	Méthode des charges concentrées	Méthode des charges consistantes	Erreur (%)
2	0.3005E+08	0.2968E+08	1.23
5	0.6707E+07	0.6542E+07	2.46
7	0.3009E+08	0.2961E+08	1.59
9	0.8970E+08	0.9028E+08	0.64
12	0.8628E+08	0.8757E+08	1.49
14	0.1933E+08	0.1959E+08	1.34
17	0.4992E+08	0.5001E+08	0.18
19	0.8527E+08	0.8616E+08	1.04
22	0.4605E+08	0.4766E+08	3.37
24	0.4533E+08	0.4664E+08	2.76
27	0.1695E+09	0.1771E+09	4.29
30	0.2355E+09	0.2508E+09	6.10

Tableau 3.3 Contraintes dans les éléments  
du châssis de camion

NOEUD	DEPLACEMENT ( mm )		Erreur (%)
	Méthode des charges cocentées	Méthode des charges consistantes	
1	-0.18	-0.18	0.00
3	0.00	0.00	0.00
5	0.12	0.12	0.00
7	0.00	0.00	0.00
9	-0.37	-0.37	0.00
11	-0.60	-0.61	1.66
13	-0.67	-0.68	1.47
15	-0.45	-0.45	0.00
17	0.00	0.00	0.00
19	0.34	0.34	0.00
21	0.00	0.00	0.00
23	2.00	2.00	0.00
25	4.00	4.20	4.76

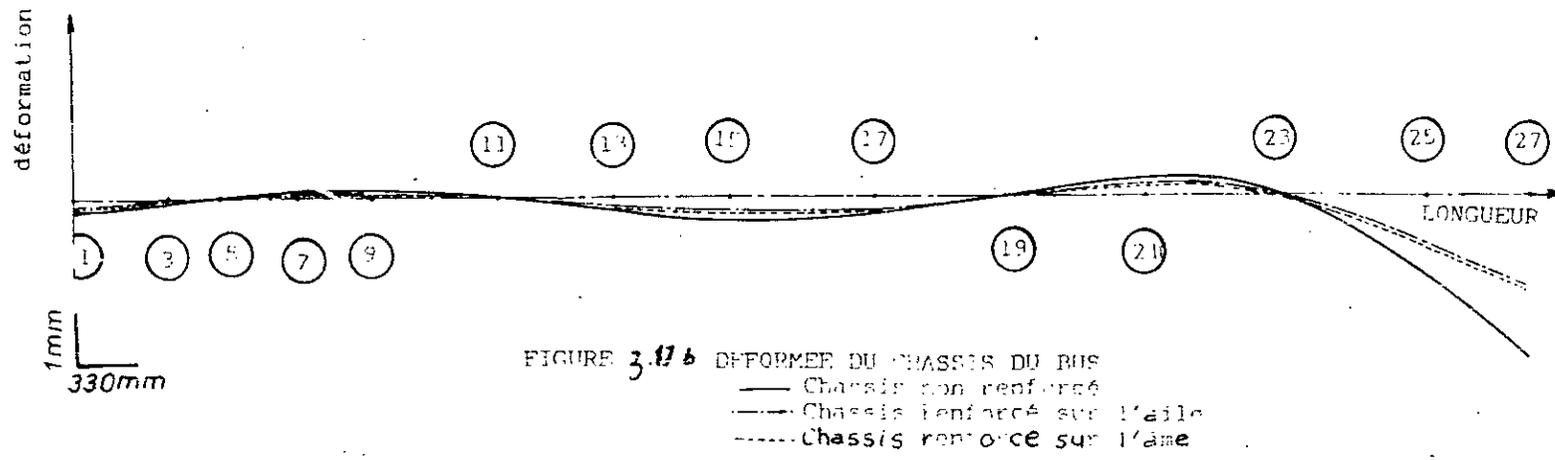
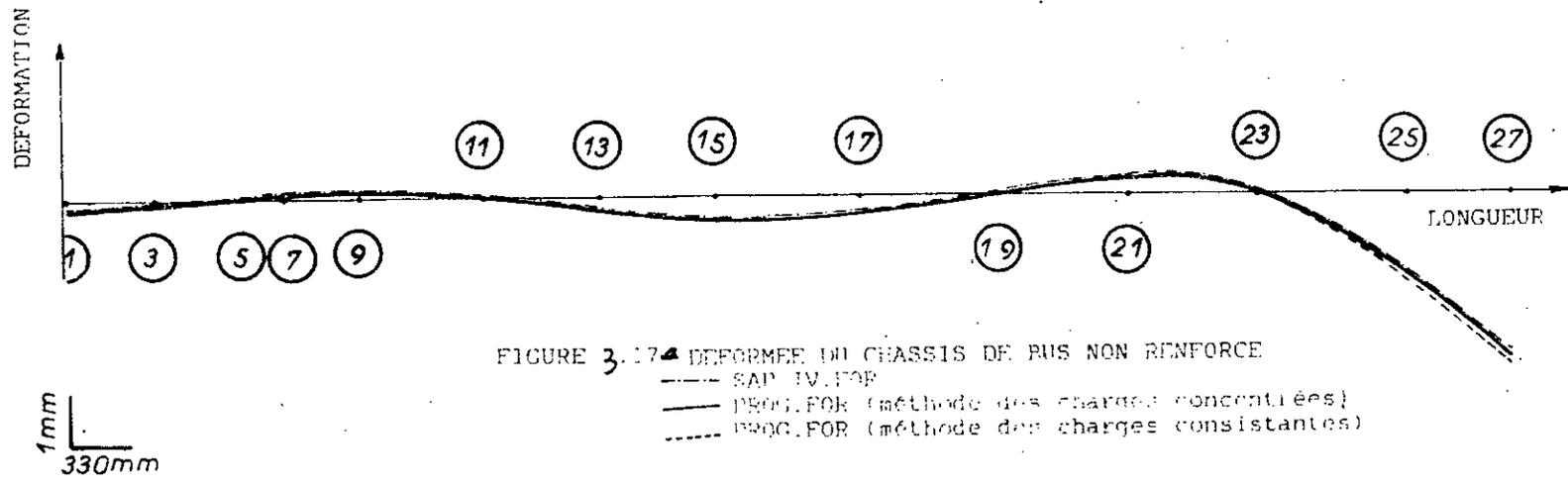
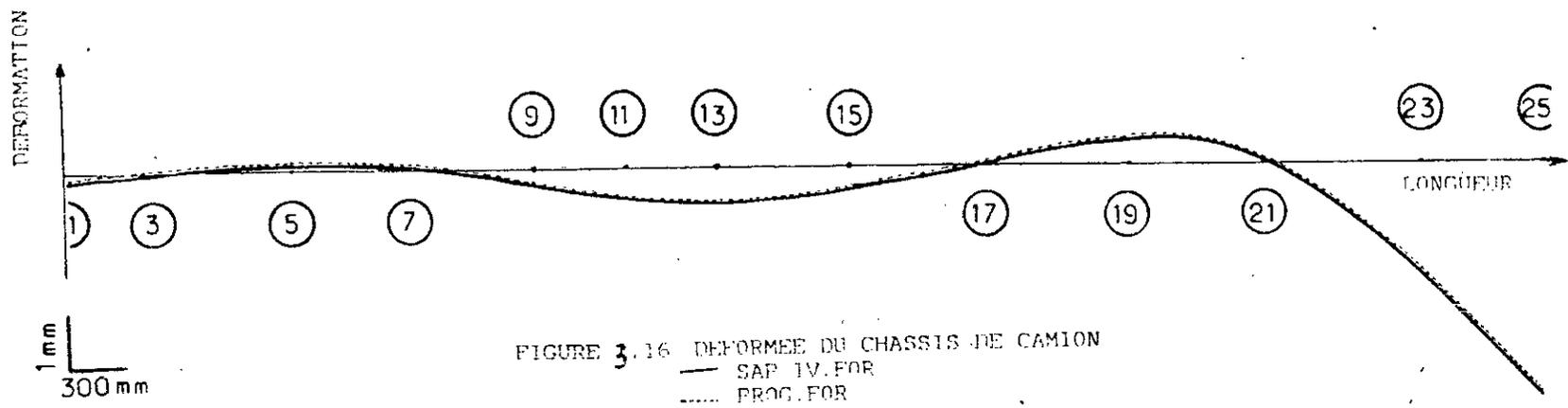
Tableau 3.4 Déplacement des noeuds  
du chassis camion

Les résultats donnés par le programme concernant le bus et le camion sont explicités sous forme de courbes .

Les figures(3.16) et (3.17)montrent les déformées respectives des chassis des véhicules camion et bus calculées par le logiciel développé et par le SAP.IV .Ces figures mettent en évidence la précision du logiciel élaboré . A partir de ces figures, on observe des déformées positives entre les appuis 3 et 7 ainsi qu'entre 17 et 21.Ceci pourra être expliqué par le fait que les déplacements sont continus entre éléments d'une part et d'autre part, les charges appliquées dans la zone de l'empattement et en porte à faux force le chassis à avoir une concavité vers le haut ( positive ) entre les appuis en question.La déformée maximale se manifeste au noeud 25 situé à l'extrémité libre du porte à faux ayant une longueur de 1515 mm .Les déformées au noeud 25 sont égales à 4,2 mm et 3,2 mm pour les chassis du camion et du bus non renforcé respectivement.Ceci s'explique d'une part par le fait que la charge répartie sur le chassis du camion est 1.15 fois celle du bus . D'autre part, l'empattement du camion est inférieur à celui du bus.

Les figures (3.21) et (3.22) montrent les contraintes dans les chassis des deux véhicules calculées par les deux méthodes des charges concentrées et consistantes . La figure ( 3 . 23 ) montre les contraintes dans le cas où le chassis du bus est renforcé sur l'aile et dans le cas où le chassis est renforcé sur l'âme des longerons.Il est évidemment observé une discontinuité des contraintes entre éléments due à la formulation déplacement.Dans tous les cas les contraintes les plus élevées se situent aux deux éléments extrêmes (17.7 DAN /mm<sup>2</sup> et 25DAN/mm<sup>2</sup>).

Néanmoins, les contraintes restent inférieures à la contrainte à la rupture qui est de 35 DAN /mm<sup>2</sup>. Les contraintes importantes ( 9 DAN /mm<sup>2</sup> ) apparaissent au niveau de la première et la troisième traverse après la cabine et ceci pour le cas du camion. Bien que celle-ci est faible devant la contrainte limite mais devient importante à cause du perçage nécessaire pour la fixation de la traverse résultant en une concentration de contrainte au niveau de l'orifice. Ceci se manifeste par des fissurations au niveau de cette traverse. Un phénomène important apparaît dans la configuration des contraintes dans le cas des différents renforcements du châssis du bus. Une explication détaillée sera donnée lors de la synthèse des résultats.



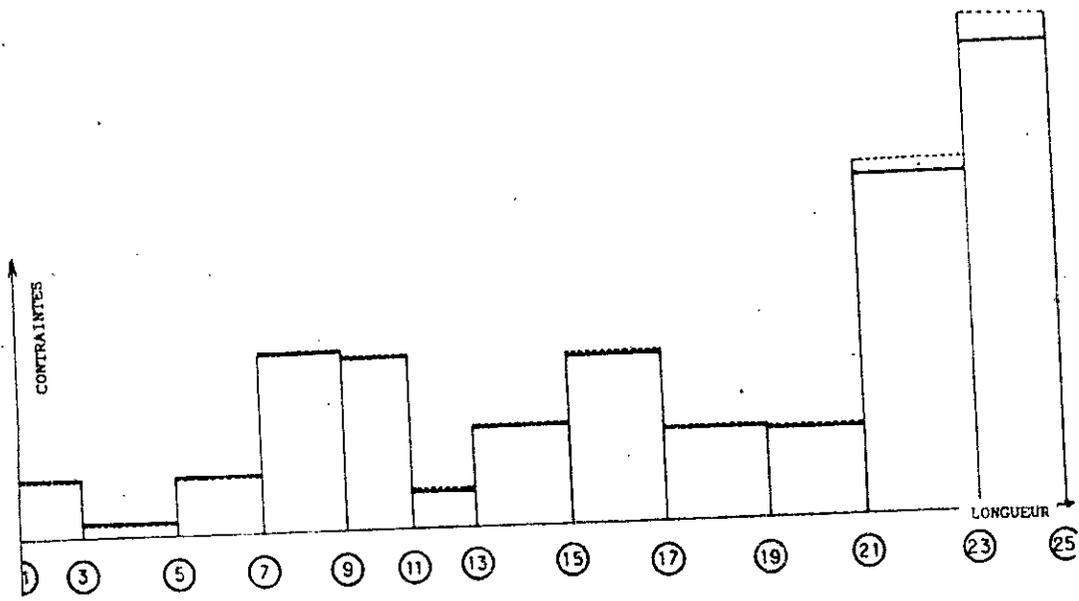


FIGURE 3.18: CONTRAINTES EQUIVAL. DANS LE CHASSIS DE CAMION

10 N/mm<sup>2</sup>  
300 mm

— methode des charges concentrees  
- - - methode des charges constantes

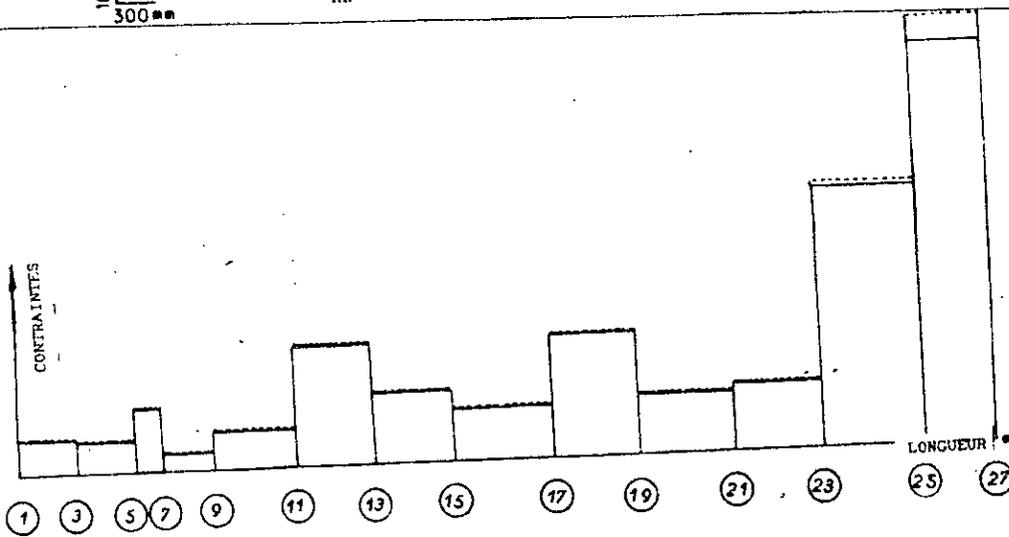


FIG3.19 CONTRAINTES EQUIVALENTES DANS LE CHASSIS BUS N.R

2 · 10<sup>7</sup> N/mm<sup>2</sup>  
330

— methode des charges concentrees  
- - - " " " constantes

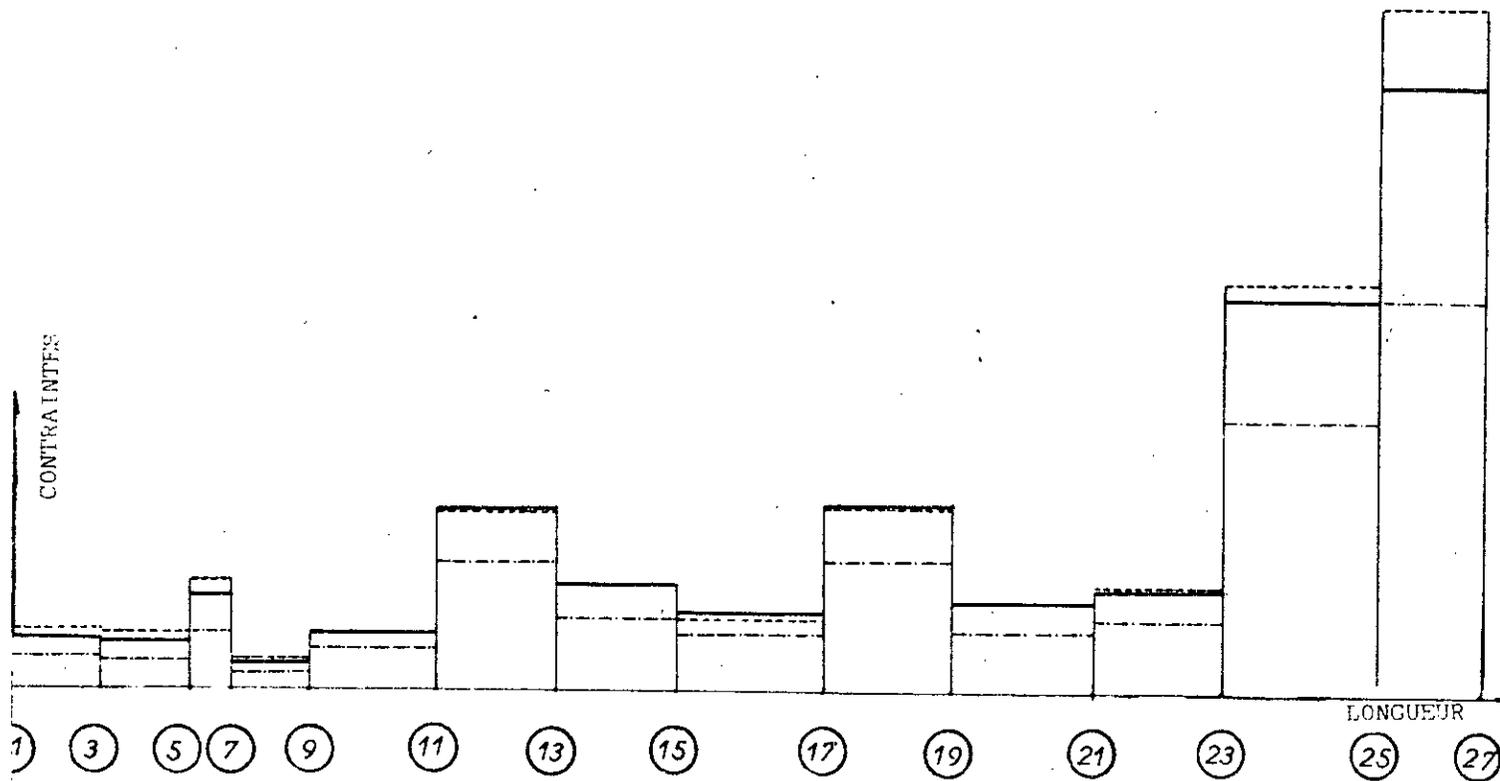


FIGURE 3.20 CONTRAINTE EQUIVALENTE DANS LE CHASSIS BUS

- chassis non renforcé
- - - chassis renforcé sur aile
- · - · chassis renforcé sur âme

## CHAPITRE III

### ANALYSE PAR ELEMENTS PLAQUES

Introduction :

Les plaques, en général, sont des éléments plans, ayant une épaisseur petite par rapport aux autres dimensions. Il y a plusieurs types de plaques, qui diffèrent par leur comportement ou leur matériau. Suivant le chargement, une plaque peut être soumise à un état de contraintes planes si ce chargement est appliqué dans son plan moyen, et peut avoir un comportement flexionnel si ce chargement est appliqué perpendiculairement à son plan moyen. Dans le cas d'une action simultanée, on parle alors de flexion composée des plaques.

On distingue deux types de plaques suivant leur épaisseur, on a alors les plaques minces et les plaques épaisses.

Pour les plaques minces, on a encore deux classes à savoir les plaques minces en faibles déplacements dans lesquelles les contraintes membranaires, dues au chargement transversal sont négligées devant les contraintes dues à la flexion.

Ces plaques sont caractérisées par le fait que leur déplacement vertical est lié à l'épaisseur par l'inégalité suivante :

$$\frac{\text{déplacement}}{\text{épaisseur}} < \frac{1}{5}$$

On a aussi les plaques minces en grandes déformations, dans ce cas les contraintes membranaires ne sont plus négligeables devant celles dues à la flexion.

Pour ce qui est des plaques épaisses, vu leur épaisseur qui est relativement élevée, on aura un état de contrainte triaxial et la théorie de l'élasticité plane cèdera sa place à l'élasticité en

trois dimensions.

Dans le cas du châssis, vu l'état de son chargement, ainsi que ses dimensions; les éléments horizontaux, c'est à dire ceux qui forment les ailes des poutres, seront modélisés en éléments plaques minces à comportement fléxionnel. Les éléments verticaux, c'est à dire ceux qui forment l'âme des poutres, seront modélisés en éléments membranaires.

A cet effet on développera les deux types d'Eléments : l'élément flexionnel et l'élément membranaire.

### 3.1 Théorie de l'élasticité .

Tous les matériaux possèdent, à un certain degré, la propriété d'être élastique. C'est à dire que si les forces extérieures qui provoquent la déformation d'un corps, ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra en même temps que la force qui lui donne naissance.

Pour ces matériaux élastiques, il existe une théorie dite " théorie de l'élasticité " qui permet d'étudier le comportement des solides réels sous l'action de différents systèmes de forces. Avant d'entamer notre exposé de la théorie on doit poser certaines hypothèses :

\* Pour l'établissement des lois mathématiques, on suppose que les solides sont homogènes, isotropes à l'état neutre c'est à dire que les propriétés physique et mécanique sont les mêmes en chaque point et dans toutes les directions.

\* Ces solides ne doivent pas être le siège d'aucune tension interne en l'absence de forces extérieures, tel que

interne en l'absence de forces extérieures, tel que gradient thermique ou autre.

La théorie de l'élasticité consiste à formuler trois types d'équation à savoir.

- \* Les équations différentielles d'équilibre .
- \* Les équations différentielles déformations-déplacements.
- \* Les lois intrinsèques du matériau.

### 3.1.1 Les équations différentielles d'équilibre

Soit un cube élémentaire :

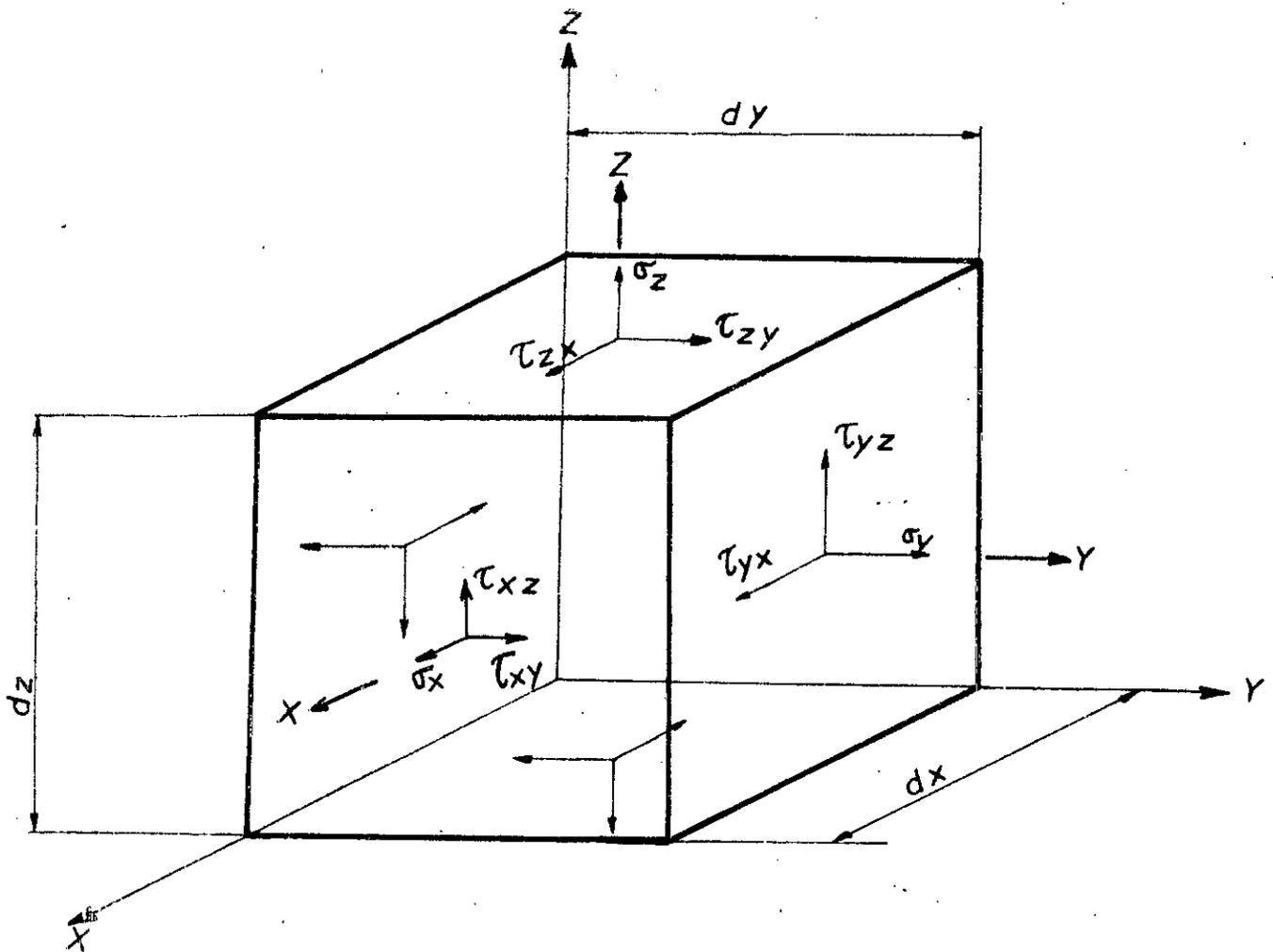


FIG 4.1 Cube élémentaire

$X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sont les forces de volume.

considérons l'équilibre de ce cube :

$$\sum X_i = 0 \implies \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

par analogie, on obtient les deux autres équations.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} (4.1)$$

#### 4.1.2 Relations déformations\_déplacements

On donne directement les relations dans le cas tridimensionnel :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \text{déformation longitudinale} \\ \epsilon_y, \epsilon_z &= \text{déformations transversales} \\ \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} &= \text{déformations tangentielles} \\ \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} (4.2)$$

#### 4.2 Elément membranaire

### 3.2.1 Matrice de rigidité élémentaire.

L'élément utilisé en élasticité plane admet quatre noeuds avec deux degrés de liberté pour chaque noeud à savoir les deux translation  $u$  et  $v$ .

Pour élaborer la matrice de rigidité élémentaire, on passe par les étapes suivantes :

1 / - On choisit un système de coordonnées local convenable. La numérotation des noeuds de l'élément est indiquée sur la figure 4.2

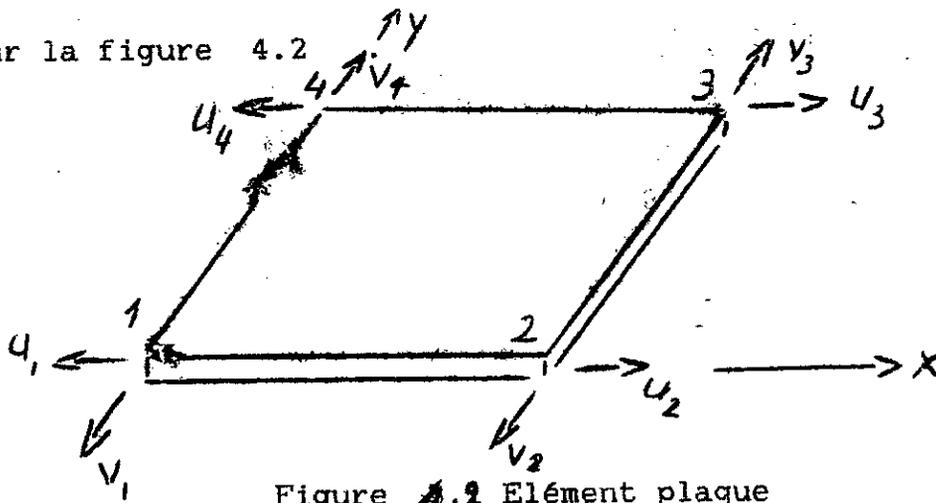


Figure 4.2 Elément plaque

$$\{q_e\} = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4] \quad (4.3)$$

$$\{F_e\} = [F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{x3}, F_{y3}, F_{x4}, F_{y4}] \quad (4.4)$$

2 / - Choix de la fonction de déplacement .

Dans le cas de l'élasticité plane, les déplacements sont représentés par deux polynomes en  $x$  et  $y$ .

$$U(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2.x + \alpha_3.y + \alpha_4.xy$$

$$V(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6.x + \alpha_7.y + \alpha_8.xy$$

le nombre de degrés de liberté de l'élément est huit, de ce fait on a choisi deux polynomes à quatre coefficients inconnus .

$$\begin{Bmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

en écriture condensée :

$$\begin{Bmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x,y) \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\} \quad (4.6)$$

3 / - On substitue les inconnues (x,y) dans la fonction f(x,y) par les coordonnées des quatre noeuds de l'élément.

$$\{\alpha_e\} = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \\ f(x_4, y_4) \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\} \text{ ou } \{\alpha_e\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (4.7)$$

ce qui nous donne

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\text{alors } \{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{\alpha_e\} \quad (4.9)$$

par substitution on obtient :

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{q_e\} \quad (4.10a)$$

ou alors :

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [N(x,y)] \cdot \{q_e\} \quad (4.10b)$$

avec :

$$[N(x,y)] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \\ \hline 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \end{array} \right] \quad (4.11)$$

4 / - Exprimons maintenant les déformations en fonction des déplacements. D'après la théorie de l'élasticité on a :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Les relations (4.12) sous forme matricielle s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

en écriture condensée :

$$\left\{ \begin{matrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{matrix} \right\} = [L] \cdot \left\{ \begin{matrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{matrix} \right\} \quad (4.14)$$

en substituant (4.10b) dans (4.14) on aura :

$$\left\{ \varepsilon(x,y) \right\} = [L] \cdot [N(x,y)] \cdot \left\{ qe \right\} \quad (4.15)$$

ou alors :

$$\left\{ \varepsilon(x,y) \right\} = [B] \cdot \left\{ qe \right\} \quad (4.16)$$

avec  $[B]$  matrice des déformations.

$$[B] = [L] \cdot [N(x,y)] \quad (4.17)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{x}{a} - \frac{1}{b} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \\ \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} & \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

5 / - Après avoir déterminé les déformations, on en déduit la matrice contrainte par le biais de la lois de hook généralisée.

$$\left\{ \sigma(x,y) \right\} = [C] \cdot \left\{ \varepsilon(x,y) \right\} \quad (4.19)$$

avec

$$[C] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

où :

E





Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles entre eux et par une surface en contour fermé. Le plan moyen d'une plaque figure 4.3 est pris comme étant son plan de symétrie d'équation  $Z = 0$

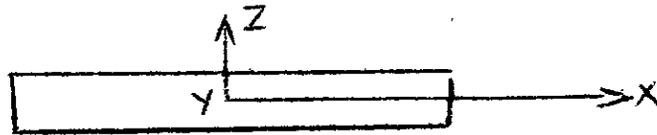


figure 4.3 Plan moyen d'une plaque

### 3.3.1 Hypothèses de la théorie des plaques minces.

On admet avec une bonne approximation, lors des études des structures en plaques minces, que :

- a/- Les forces extérieures, y compris le poids propre, sont considérés comme étant appliqués au plan moyen.
- b/- On néglige la contrainte normale sur tout élément parallèle au plan moyen ( $\sigma_z = 0$ ).
- c/- Le déplacement d'un point du plan moyen se réduit à la composante normale au plan de la plaque ( $u_z = v_z = 0$ ) ce plan ne doit subir aucune extension, ni contraction.
- d/- Les fibres de la plaque, perpendiculaires au plan median avant la flexion, restent perpendiculaires à celui-ci après la flexion. ( $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$ ).

### 3.3.2 Matrice de rigidité de l'élément rectangulaire en flexion.

L'élément utilisé dans l'étude du châssis est l'élément rectangulaire à quatre noeuds, avec trois degrés de liberté par noeuds, à savoir le déplacement verticale ( $W$ ) et les deux rotations ( $O_x$ ) et ( $O_y$ ).

L'élaboration de la matrice de rigidité de l'élément utilisé

passer par les étapes suivantes :

1/- Choix du système de référence.

Le système de coordonnées et la numérotation adoptée sont montrés dans la (figure 4.4 ).

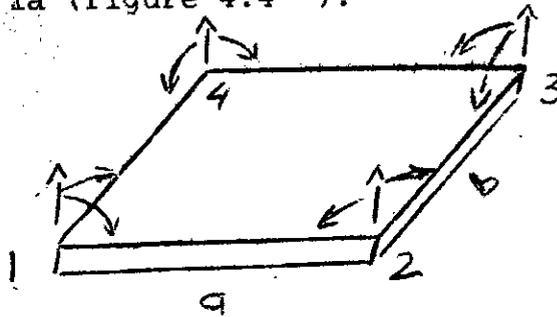


figure 4.4 Élément plaque mince

Les degrés de liberté que possèdent chaque noeud sont :

$W$  = Déplacement suivant l'axe OZ

$\theta_x$  = Rotation autour de l'axe OX

$\theta_y$  = Rotation autour de l'axe OY

Les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont considérées comme étant des pentes normales, et sont données par les expressions suivantes :

$$\theta_x = \frac{w}{y} \quad (4.31)$$

$$\theta_y = - \frac{w}{x} \quad (4.32)$$

Ce qui fait que l'élément possède à présent en tout douze (12) degrés de liberté, ainsi on aura une matrice de raideur carrée d'ordre douze. Les vecteurs déplacement et force sont :

$$\left\{ \begin{matrix} q_e \\ i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} W(x,y) \\ \theta_x = \frac{w}{y} \\ \theta_y = -\frac{w}{x} \end{matrix} \right\} \quad (4.33)$$

Le polynome d'interpolation sera alors :

$$W(x,y) = C1 + C2.X + C3.Y + C4.X^2 + C5.X.Y + C6.Y^2 + C7.X^3 + C8.X.Y^2 + C9.XY^2 + C10.Y^3 + C11.X^3.Y + C12.X.Y^3 \quad (4.37)$$

on aura alors :

$$\begin{Bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X & Y & X^2 & XY & Y^2 & X^3 & XY^2 & Y^3 & X^2Y & XY^2 & Y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X & 2Y & 0 & X^2 & 2Y & 3Y^2 & X^3 & 3XY^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2X & -Y & 0 & -3X^2 & -2XY & -Y^2 & 0 & -3XY & -Y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C1 \\ C2 \\ C3 \\ C4 \\ C5 \\ C6 \\ C7 \\ C8 \\ C9 \\ C10 \\ C11 \\ C12 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

sous forme condensée

$$\{q(x,y)\} = [f(x,y)] \cdot \{C\} \quad (4.39)$$

-3- On doit exprimer, après cela, l'état de déplacement en un point donné en fonction des déplacements nodaux.

On remplace, dans la matrice  $f(x,y)$   $x$  et  $y$  par les coordonnées des noeuds 1, 2, 3 et 4 on aura alors une équation sous la forme.

$$\{q_e\} = [A] \cdot \{C\} \quad (4.40)$$

ou  $A$  est donnée par :

$$[W1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [C1$$

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Ox1} \\
 \text{Oy1} \\
 \text{W2} \\
 \text{Ox2} \\
 \text{Oy2} \\
 \text{W3} \\
 \text{Ox3} \\
 \text{Oy3} \\
 \text{W4} \\
 \text{Ox4} \\
 \text{Oy4}
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 \\
 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & 2ab & ab^2 & b^3 & 3ab & ab^2 & ab^3 \\
 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3ab & b^3 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a & 2ab & 3b & a & 3ab & 0 \\
 1 & 0 & b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & b & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{C2} \\
 \text{C3} \\
 \text{C4} \\
 \text{C5} \\
 \text{C6} \\
 \text{C7} \\
 \text{C8} \\
 \text{C9} \\
 \text{C10} \\
 \text{C11} \\
 \text{C12}
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{4.41}$$

Ce qui donne :

$$\{C\} = [A]^{-1} \cdot \{q_e\} \tag{4.42}$$

De l'équation (4.39) et (4.42) on obtient :

$$\{q(x,y)\} = [f(x,y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{q_e\} \tag{4.43}$$

4/- Lors de cette étape on doit relier les déformations

nodaux  $\{\epsilon(x,y)\}$  aux déplacements nodaux  $\{q_e\}$

D'après les relations reliant les déformation au courbures on peut écrire sous forme matricielle .

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \epsilon_x \\
 \epsilon_y \\
 \gamma_{xy}
 \end{array} \right\} = -Z \cdot \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\
 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}
 \end{array} \right\} = -Z \cdot \begin{bmatrix}
 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2
 \end{bmatrix} \begin{array}{l}
 \text{C4} \\
 \text{C5} \\
 \vdots \\
 \text{C12}
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{4.44}$$

ou alors :

$$\{\xi(x,y)\} = [G] \cdot \{C\} \quad (4.45)$$

par la relation (4.42) on obtient :

$$\{\xi(x,y)\} = [G] \cdot [A]^{-1} \cdot \{q e\} = [B] \cdot \{q e\} \quad (4.46)$$

où  $[B] = [G \cdot A]^{-1}$

finalement on aura :

$$\{\xi(x,y)\} = [B] \cdot \{q e\} \quad (4.47)$$

5/- L'expression de la matrice de rigidité :

L'énergie de déformation est donnée par la relation suivante :

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \{\xi\}^t \cdot \{\delta\} dv = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} \{\delta\} dz dy dx \quad (4.48)$$

En substituant l'équation (4.47) dans (4.19) et après application du principe des travaux virtuels (4.24), on obtient aisément l'expression de la matrice de rigidité d'un élément flexionnel

$$[K] = \int_0^b \int_0^a \int_{-t/2}^{t/2} [B]^t \cdot [C] \cdot [B] \cdot dz \cdot dy \cdot dx \quad (4.49)$$

### 3.4 Modélisation en éléments plaques

L'analyse du modèle en éléments poutres montre que les deux longerons travaillent d'une façon identique. Cette symétrie nous a permis donc de modéliser un seul longeron pour l'étude en éléments plaques. Le longeron du châssis est conçu à partir d'une tôle d'acier d'épaisseur six millimètres, pliée à  $90^\circ$ , formant une section en forme de " U ". D'après cette conception, les parties horizontales (les ailes du longeron) travaillent à la flexion, ce qui nous amène à les modéliser en éléments plaques minces. Par contre, la partie verticale (l'âme du longeron) travaille à des sollicitation appliquées dans le plan de sa surface, ce qui nous amène à la modéliser en éléments membranaires .

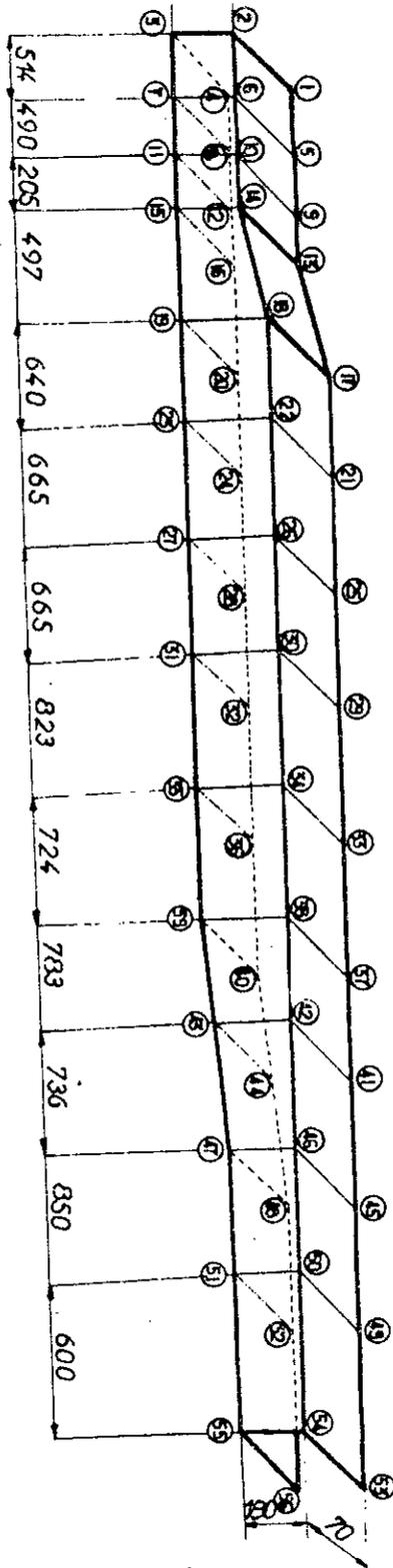
Les noeuds sont choisis suivant des considérations identiques à celles citées dans le cas du modèle en éléments poutre .les conditions aux limites (appuis géométriques) sont déduites à partir du modèle en éléments poutres .Par exemple, dans le cas de l'élément poutre, l'appui correspondant au noeud 5 est modélisé dans le cas de l'élément plaque en deux appuis correspondant aux noeuds 11 et 12 ( figure 4.5 ).

Le modèle comprend 39 éléments et 56 noeuds soit un nombre total de 122 degrés de liberté. Le modèle du longeron en éléments plaque est schématisé sur la figure 4.6 .

#### 3.4.1 Modélisation des charges

##### 3.4.1.1 Cas des charges concentrées.

Soit l'élément plaque rectangulaire de dimension  $a \times b$  possédant les noeuds  $i$  ,  $j$  ,  $k$  et  $l$  , chargé d'un effort  $F$  concentré au point  $M$  ( figure 4.7a). Cet effort sera modélisé par



① NOEUD !

FIGURE 4.6 LONGERON DU BUS  
MODELE EN ELEMENTS PLAQUES

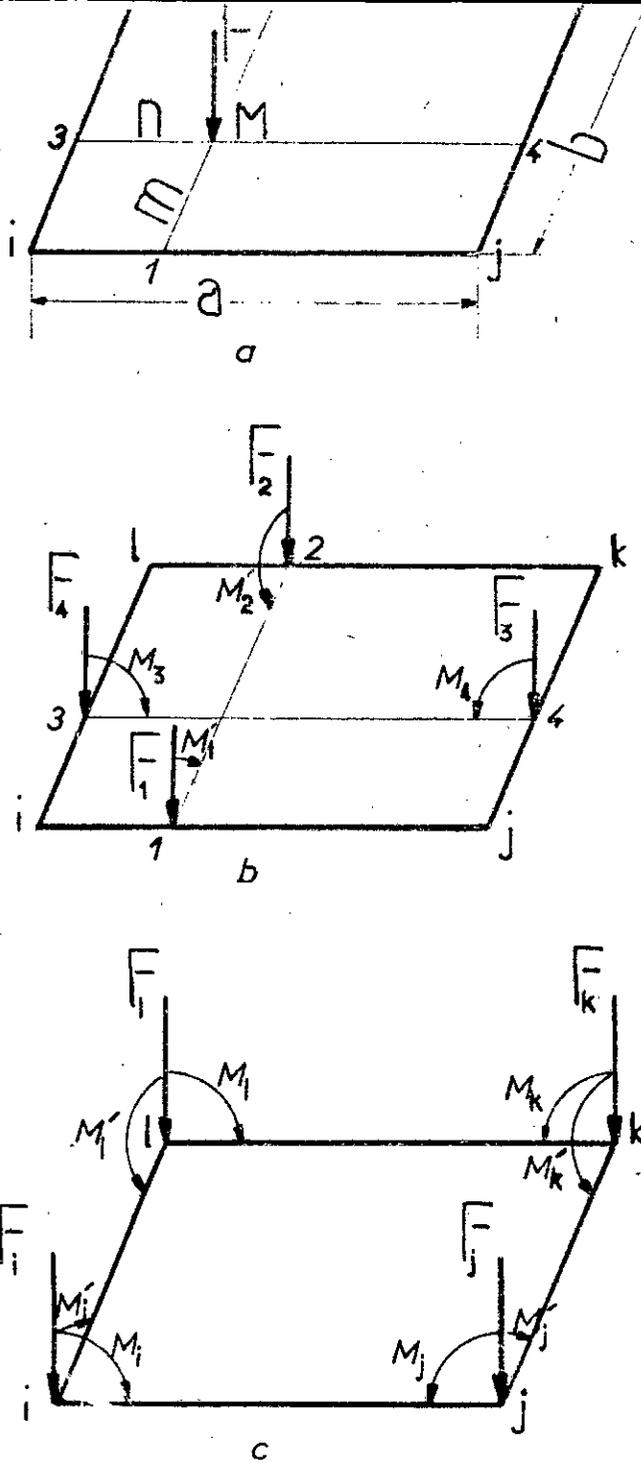


FIG 4.7 MODELISATION DES CHARGES CONCENTREES

- a charge réelle
- b première approche
- c charges équivalentes

quatre forces  $F_i$ ,  $F_j$ ,  $F_k$ , et  $F_l$ ; ainsi que huit moments:

- Quatre moments par rapport à OX :

$$M_i', M_j', M_k' \text{ et } M_l'$$

- Quatre moments par rapport à OY :

$$M_i, M_j, M_k \text{ et } M_l$$

concentrés aux noeuds  $i, j, k$  et  $l$  (figure 4.7c).

Suivant les lois de la statique, on calcule d'abord les forces et moments équivalentes à  $F$  aux points 1, 2, 3 et 4 (figure 4.7b)

$$\star \sum M_i / l = 0$$

Ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} F_2 \cdot b + F_3 \cdot m + F_4 \cdot m + F \cdot m &= 0 \\ F_1 \cdot b + F_3 \cdot (b-m) + F_4 \cdot (b-m) + F \cdot (b-m) &= 0 \\ F_1 \cdot n + F_2 \cdot n + F_4 \cdot a + F \cdot n &= 0 \\ F_1 \cdot (a-n) + F_2 \cdot (a-n) + F_3 \cdot a + F \cdot (a-n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

ou sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 0 & b & m & m \\ b & 0 & b-m & b-m \\ n & n & 0 & a \\ a-n & a-n & a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \cdot m \\ -F \cdot (b-m) \\ -F \cdot n \\ -F \cdot (a-n) \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

La résolution du système (4.51) donne :

$$\star F_1 = \frac{n \cdot (b-m)^2}{b \cdot (2m \cdot n - a \cdot m - b \cdot n)} \cdot F \quad (4.52 a)$$

$$\star F_2 = \frac{m \cdot (a-n)^2}{b \cdot (2m \cdot n - a \cdot m - b \cdot n)} \cdot F \quad (4.52 b)$$

$$\star F_3 = \frac{m \cdot (a-n)^2}{a \cdot (2m \cdot n - a \cdot m - b \cdot n)} \cdot F \quad (4.52 c)$$

$$\star F_4 = \frac{n \cdot (b-m)^2}{a \cdot (2m \cdot n - a \cdot m - b \cdot n)} \cdot F \quad (4.52 d)$$

Les moments concentrés aux noeuds 1, 2, 3 et 4 sont déduits des équations (4.52) :

$$* M1' = F1 . m \quad (4.53 a )$$

$$* M2' = F2.(b-m) \quad (4.53 b )$$

$$* M3 = F3.n \quad (4.53 c )$$

$$* M4 = F4.(a-n) \quad (4.53 d )$$

On procède par la suite au calcul des charges nodales:

$$* Fi = \frac{-(a-n).(b-m)}{a.b} . F \quad (4.54 a )$$

$$* Fj = \frac{-2n^2.(b-m)^2}{a.b(2m.n - a.m - b.n)} . F \quad (4.54 b )$$

$$* Fk = \frac{-m.n}{a.b} . F \quad (4.54 c )$$

$$* Fl = \frac{2m^2.(a-n)^2}{a.b(2m.n - a.m - b.n)} . F \quad (4.54 d )$$

$$* Mi = \frac{m.n.b(a-n)^2 + 2.n^2(a-n).(b-m)^2}{2a.b(2m.n - a.m - b.n)} . F \quad (4.54 e )$$

$$* Mj = \frac{n^2.(a-m).(b-m).(b+2)}{2a.b(2m.n - a.m - b.n)} . F \quad (4.54 f )$$

$$* Mk = \frac{n^2.b(a-n).(b-m)+2m.n(a-n)^2}{2a.b(2m.n - a.m - b.n)} . F \quad (4.54 g )$$

$$* Ml = \frac{m.n(a-n).(b+2m)}{2a.b(2m.n - a.m - b.n)} . F \quad (4.54 h )$$

$$* Mi' = \frac{m.n.a(b-m)^2+2m.(a-n)^2.(b-m)}{2a.b(2m.n - a.m - b.n)} . F \quad (4.54 i )$$

$$* M_j' = \frac{m \cdot n (b-m)^2 \cdot (a+2n)}{2a \cdot b (2m \cdot n - a \cdot m - b \cdot n)} \cdot F \quad (4.54 j)$$

$$* M_k' = \frac{m \cdot a (a-n) \cdot (b-m) + 2n \cdot m (b-m)^2}{2a \cdot b (2m \cdot n - a \cdot m - b \cdot n)} \cdot F \quad (4.54 k)$$

$$* M_l' = \frac{m (a-n) \cdot (b-m) \cdot (2a-n)}{2a \cdot b (2m \cdot n - a \cdot m - b \cdot n)} \cdot F \quad (4.54 l)$$

#### 4.4.1.2 Cas des charges réparties.

Soit un élément plaque rectangulaire de dimension  $a \times b$ , possédant les noeuds  $i, j, k, l$  et soumis à une charge répartie  $q(x, y)$  (figure 4.8a). Celle-ci sera modélisée par quatre forces  $P_i, P_j, P_k$  et  $P_l$  et huit moments  $M_{xi}, M_{xj}, M_{xk}, M_{xl}, M_{yi}, M_{yj}, M_{yk}$  et  $M_{yl}$  (figure 4.8b).

Deux méthodes essentielles existent pour déterminer ces charges équivalentes:

##### a/ Méthode des charges concentrées:

Cette méthode consiste à diviser l'élément en quatre zones égales et à concentrer l'effort réparti de chaque zone dans le noeud le plus proche, ce qui donne :

$$P_i = \int_0^{a/2} \int_0^{b/2} q(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (4.55 a)$$

$$P_j = \int_{a/2}^a \int_0^{b/2} q(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (4.55 b)$$

$$P_k = \int_0^{a/2} \int_{b/2}^b q(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (4.55 c)$$

$$P_l = \int_{a/2}^a \int_{b/2}^b q(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad (4.55 d)$$

b/ Méthode des charges consistantes.

Le travail effectué par la charge  $q(x,y)$  est donné par la relation :

$$W_r = \int_0^a \int_0^b 1/2 \cdot q(x,y) \cdot W(x,y) \cdot dx \cdot dy \quad (4.56)$$

où  $W(x,y)$  est la fonction de déplacement donnée par la relation suivante :

$$W(x,y) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y + C_4 \cdot x^2 + C_5 \cdot x \cdot y + C_6 \cdot y^2 + C_7 \cdot x^3 + C_8 \cdot x \cdot y^2 + C_9 \cdot x \cdot y^2 + C_{10} \cdot y^3 + C_{11} \cdot xy^3 + C_{12} \cdot x \cdot y^3 \quad (4.57)$$

D'après les conditions aux limites on aboutit au système suivant:

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C1	W <sub>i</sub>
1	a	0	a <sup>2</sup>	0	0	a <sup>3</sup>	0	0	0	0	0	C2	W <sub>j</sub>
1	a	b	a <sup>2</sup>	ab	b <sup>2</sup>	a <sup>3</sup>	ab <sup>2</sup>	ab <sup>2</sup>	b <sup>3</sup>	ab <sup>3</sup>	ab <sup>3</sup>	C3	W <sub>k</sub>
1	0	b	0	0	b <sup>2</sup>	0	0	0	b <sup>3</sup>	0	0	C4	W <sub>l</sub>
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C5	O <sub>xi</sub>
0	0	1	0	a	0	0	a <sup>2</sup>	0	0	a <sup>3</sup>	0	C6	O <sub>xj</sub>
0	0	1	0	a	2b	0	a <sup>2</sup>	2ab	3b <sup>2</sup>	a <sup>3</sup>	3ab <sup>2</sup>	C7	O <sub>xk</sub>
0	0	1	0	0	2b	0	0	0	b <sup>2</sup>	0	0	C8	O <sub>xl</sub>
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	C9	O <sub>yi</sub>
0	-1	0	-2a	0	0	-3a <sup>2</sup>	0	0	0	0	0	C10	O <sub>yj</sub>
0	-1	0	-2a	-b	0	-3a <sup>2</sup> -2ab	-b <sup>2</sup>	0	-3ab <sup>2</sup>	-b <sup>3</sup>	0	C11	O <sub>yk</sub>
0	-1	0	0	-b	0	0	0	-b <sup>2</sup>	0	0	-b <sup>3</sup>	C12	O <sub>yl</sub>

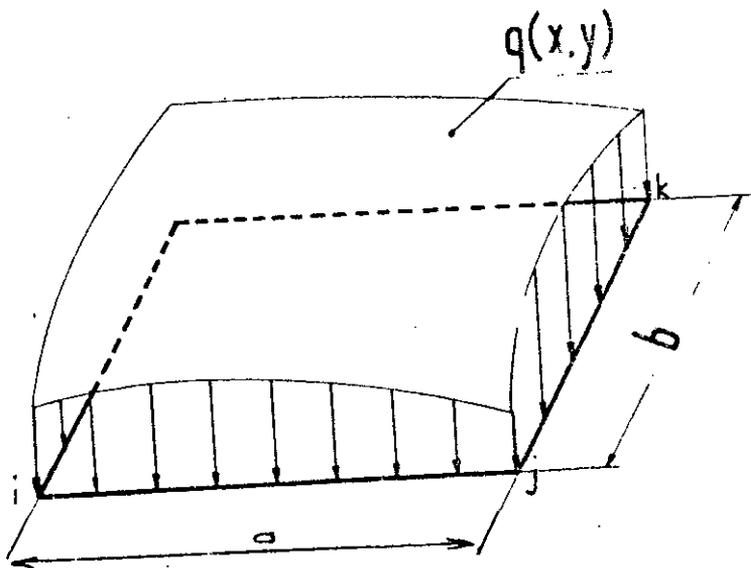
(4.58)

Symboliquement:

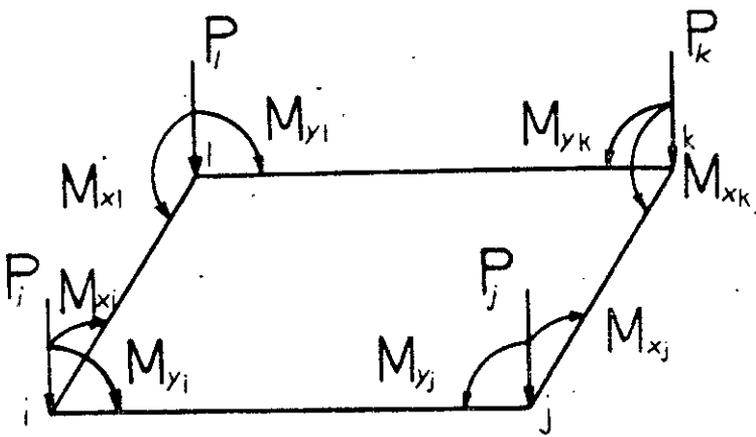
$$[A] \cdot \{C\} = \{q_e\} \quad (4.59)$$

Les constantes  $C_i$  ( $i=1,12$ ) sont obtenues en inversant le système

(4.59) :



- a -



- b -

FIG4.8 MODELISATION DES CHARGES REPARTIES

-a- charge réelle

-b- charge modelé

C1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Wi
C2	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	Wj
C3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	Wk
C4	$\frac{-3}{a^2}$	$\frac{3}{a^2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{a}$	$\frac{1}{a}$	0	0	Wl
C5	$\frac{-1}{ab}$	$\frac{1}{ab}$	$\frac{-1}{ab}$	$\frac{1}{ab}$	$\frac{-1}{a}$	$\frac{1}{a}$	0	0	$\frac{1}{b}$	0	0	$\frac{-1}{b}$	Oxi
C6	$\frac{-3}{b^2}$	0	0	$\frac{3}{b^2}$	$\frac{-2}{b}$	0	0	$\frac{-1}{b}$	0	0	0	0	Oxj
C7	$\frac{2}{a^3}$	$\frac{-2}{a^3}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{a^2}$	$\frac{-1}{a^2}$	0	0	Oxk
C8	$\frac{3}{ab^2}$	$\frac{-3}{ab^2}$	$\frac{3}{ab^2}$	$\frac{-3}{ab^2}$	0	0	0	0	$\frac{-2}{ab}$	$\frac{-1}{ab}$	$\frac{1}{ab}$	$\frac{2}{ab}$	Oxl
C9	$\frac{3}{ab^2}$	$\frac{-3}{ab^2}$	$\frac{3}{ab^2}$	$\frac{-3}{ab^2}$	$\frac{2}{ab}$	$\frac{-2}{ab}$	$\frac{-1}{ab}$	$\frac{1}{ab}$	0	0	0	0	Oyi
C10	$\frac{2}{b^3}$	0	0	$\frac{-2}{b^3}$	$\frac{1}{b^2}$	0	0	$\frac{1}{b^2}$	0	0	0	0	Oyj
C11	$\frac{-2}{ab^3}$	$\frac{2}{ab^3}$	$\frac{-2}{ab^3}$	$\frac{2}{ab^3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{1}{ab^2}$	Oyk
C12	$\frac{-2}{ab^3}$	$\frac{2}{ab^3}$	$\frac{-2}{ab^3}$	$\frac{2}{ab^3}$	$\frac{-1}{ab^2}$	$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{-1}{ab^2}$	0	0	0	0	Oyl

(4.60)

La fonction de déplacement s'écrira alors sous la forme:

$$\begin{aligned}
 W(x,y) = & f_1(x,y).W_i + f_2(x,y).W_j + f_3(x,y).W_k + f_4(x,y).W_l + \\
 & + f_5(x,y).\theta_{xi} + f_6(x,y).\theta_{xj} + f_7(x,y).\theta_{xk} + f_8(x,y).\theta_{xl} + \\
 & + f_9(x,y).\theta_{yi} + f_{10}(x,y).\theta_{yj} + f_{11}(x,y).\theta_{yk} + f_{12}(x,y).\theta_{yl}
 \end{aligned}$$

(4.61)

avec:

$$\begin{aligned}
 f_1(x,y) = & 1 - \frac{3.x^2}{a} - \frac{x.y}{ab} - \frac{3.y^2}{b} + \frac{2.x^3}{a} + \frac{3.x^2.y}{a.b} + \frac{3.x.y^2}{a.b} + \frac{2.y^3}{b} - \frac{2.xy^2}{a.b} - \frac{2.x.y^3}{a.b} \\
 f_2(x,y) = & \frac{3.x^2}{a^2} + \frac{x.y}{a.b} - \frac{2.x^3}{a^3} - \frac{3.x^2.y}{a^2.b} - \frac{3.x.y^2}{a.b^2} + \frac{2.x^3.y}{a^3.b} + \frac{2.x.y^3}{a.b^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3(x,y) &= -\frac{x.y}{a.b} + \frac{3.x.y^2}{a^2.b} + \frac{3.x.y^2}{a.b^2} - \frac{2.x^3.y}{a^3.b} - \frac{2.x.y^3}{a.b^3} \\
f_4(x,y) &= \frac{x.y}{a.b} + \frac{3.y^2}{b^2} - \frac{3.x.y^2}{a^2.b} - \frac{3.x.y^2}{a.b^2} - \frac{2.y^3}{b^3} + \frac{2.x^3.y}{a^3.b} + \frac{2.x.y^3}{a.b^3} \\
f_5(x,y) &= y - \frac{x.y}{a} - \frac{2.y^2}{b} + \frac{2.x.y^2}{a.b} + \frac{y^3}{b^2} - \frac{x.y^3}{a.b^2} \\
f_6(x,y) &= \frac{x.y}{a} - \frac{2.x.y^2}{a.b} + \frac{x.y^3}{a.b^2} \\
f_7(x,y) &= -\frac{x.y^2}{a.b} + \frac{x.y^3}{a.b^2} \\
f_8(x,y) &= -\frac{y^2}{b} + \frac{x.y^2}{a.b} + \frac{y^3}{b^2} - \frac{x.y^3}{a^2.b} \\
f_9(x,y) &= -x + \frac{2.x^2}{a} + \frac{x.y}{b} - \frac{x^3}{a^2} - \frac{2.x.y}{a.b} + \frac{x.y^3}{a^2.b} \\
f_{10}(x,y) &= \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} - \frac{x.y}{a.b} + \frac{x.y^3}{a^2.b} \\
f_{11}(x,y) &= \frac{x.y}{a.b} - \frac{x.y^3}{a^2.b} \\
f_{12}(x,y) &= -\frac{x.y}{b} + \frac{2.x.y}{a.b} - \frac{x.y^3}{a^2.b}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

A partir des équation (4.62) l'expression du travail effectué par la charge répartie  $q(x,y)$  serait alors :

$$\begin{aligned}
W_r &= 1/2 \int_0^a \int_0^b . f_1(x,y).w_i + f_2(x,y).w_j + f_3(x,y).w_k + f_4(x,y).w_l + \\
&+ f_5(x,y).e_{xi} + f_6(x,y).e_{xj} + f_7(x,y).e_{xk} + f_8(x,y).e_{xl} + \\
&+ f_9(x,y).e_{yi} + f_{10}(x,y).e_{yj} + f_{11}(x,y).e_{yk} + \\
&+ f_{12}(x,y).e_{yl} . q(x,y) . dx . dy
\end{aligned} \tag{4.63}$$

quant au travail effectué par les charges équivalentes est égal à :

$$\begin{aligned} \star W_r &= 1/2. (P_i.W_i + P_j.W_j + P_k.W_k + P_l.W_l + \\ &+ M_{xi}. \theta_{xi} + M_{xj}. \theta_{xj} + M_{xk}. \theta_{xk} + M_{xl}. \theta_{xl} + \\ &+ M_{yi}. \theta_{yi} + M_{yj}. \theta_{yj} + M_{yk}. \theta_{yk} + M_{yl}. \theta_{yl} \end{aligned} \quad (4.64)$$

En égalisant les expressions des deux travaux

$$\star W_r = W_r \quad (4.65)$$

On obtiendra les expressions des charges équivalentes à  $q(x,y)$  :

$$\star P_i = \iint_0^a \int_0^b ( 1 - 3 \frac{x^2}{a^2} - \frac{x.y}{a.b} - 3 \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{x^3}{a^3} + 3 \frac{x.y}{a.b} + 2 \frac{y^3}{b^3} - 2 \frac{x.y}{a.b} - 2 \frac{x.y}{a.b} ) . q(x,y) . dx . dy \quad (4.66)$$

$$\star M_{xi} = \iint_0^a \int_0^b ( y - \frac{x.y}{a} - 2 \frac{y^2}{b} + 2 \frac{x.y}{a.b} + \frac{y^3}{b^3} - \frac{x.y}{a.b} ) . q(x,y) . dx . dy \quad (4.67)$$

$$\star M_{yi} = \iint_0^a \int_0^b ( -x + 2 \frac{x^2}{a} + \frac{x.y}{b} - \frac{x^3}{a^3} - 2 \frac{x.y}{a.b} + \frac{x.y}{a.b} ) . q(x,y) . dx . dy \quad (4.68)$$

$$\star P_j = \iint_0^a \int_0^b ( 3 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x.y}{a.b} - 2 \frac{x^3}{a^3} - 3 \frac{x.y}{a.b} - 3 \frac{x.y}{a.b} + 2 \frac{x^3}{a^3} + 2 \frac{x.y}{a.b} ) . q(x,y) . dx . dy \quad (4.69)$$

$$\star M_{xj} = \iint_0^a \int_0^b ( x.y/a - 2 \frac{x.y}{a.b} + \frac{x^3}{a^3} ) . q(x,y) . dx . dy \quad (4.70)$$

$$\star M_{yj} = \iint_0^a \int_0^b ( x/a - \frac{x^3}{a^3} - \frac{x.y}{a.b} + \frac{x^3}{a^3} ) . q(x,y) . dx . dy \quad (4.71)$$

$$\star P_k = \iint_0^a \int_0^b ( -x.y/a.b + 3 \frac{x^2}{a^2} + 3 \frac{x.y}{a.b} - 2 \frac{x^3}{a^3} - 2 \frac{x.y}{a.b} ) . q(x,y) . dx . dy \quad (4.72)$$

$$\star M_{xk} = \iint_0^a \int_0^b ( -x.y/a.b + \frac{x^3}{a^3} ) . q(x,y) . a . b \quad (4.73)$$

$$\star M_{yk} = \iint_0^a \int_0^b ( x.y/a.b - \frac{x^3}{a^3} ) . q(x,y) . dx . dy \quad (4.74)$$

$$* P1 = \iint (x.y/a.b + 3.y^2/b^2 - 3.x^2.y/a.b^2 - 3.x.y^2/a.b^2 - 2.y^3/b^3 + 2.x^3.y/a.b^3 + 2.x.y^3/a.b^3).q(x,y).dx.dy \quad (4.75)$$

$$* Mx1 = \iint (-y^2/b^2 + x.y^2/a.b^2 + y^3/b^3 - x.y^3/a.b^3).q(x,y).dx.dy \quad (4.76)$$

$$* My1 = \iint (-x.y^2/b^2 + 2.x.y^2/a.b^2 - x.y^3/a.b^3).q(x,y).dx.dy \quad (4.77)$$

### 3.5 Présentation des résultats.

Le modèle ainsi établi admet 122 degrés de liberté et a été résolu par le programme SAP.IV sur minivax du centre de calcul de l'E.N.P. Les contraintes dans les éléments membranaires pour les trois types de conception sont donnés par la figure (4.9). Il a été observé qu'une nette réduction de contraintes allant jusqu'à 70% se manifeste au niveau des éléments 17 et 20. Au niveau de ces mêmes éléments, lieu de la traverse, ainsi qu'au niveau des éléments 35 et 38 lieu de la deuxième traverse, les contraintes de cisaillement ainsi que les contraintes normales sont maximales (figure 4.10, 4.11, 4.12). Les contraintes équivalentes dans les trois poutres constituant le longeron sont représentées sur les figures 4.9, 4.13, 4.14. Une réduction allant jusqu'à 50% est observée dans l'âme du longeron. Le même phénomène est observé au niveau de la plaque inférieure.

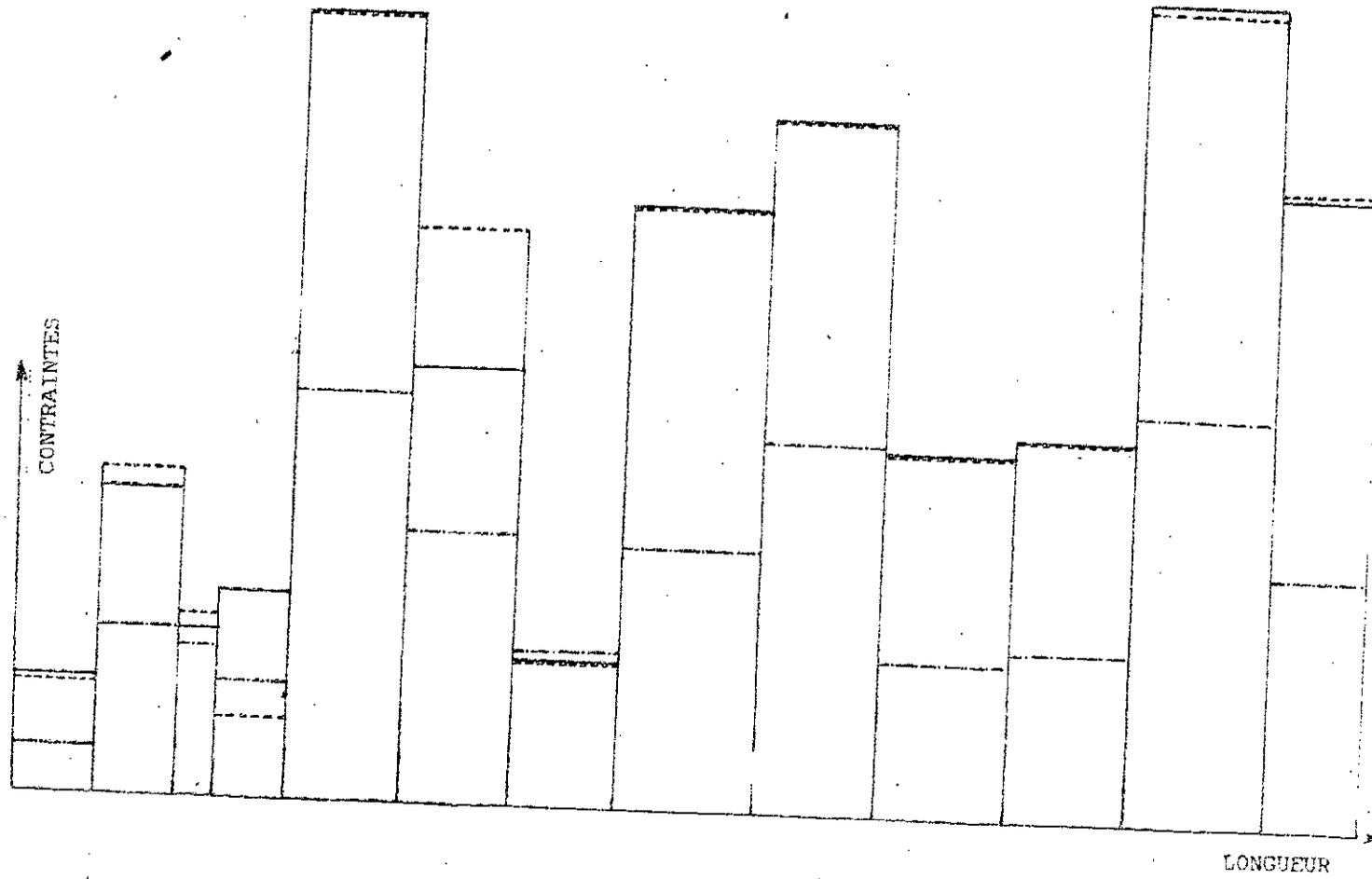


FIGURE 4.9 CONTRAINTES EQUIVALENTES  
DANS L'ÂME DU LONGERON

- non renforcé
- - - renforcé sur l'aile
- renforcé sur l'âme

5.10 N/m<sup>2</sup>  
330 mm

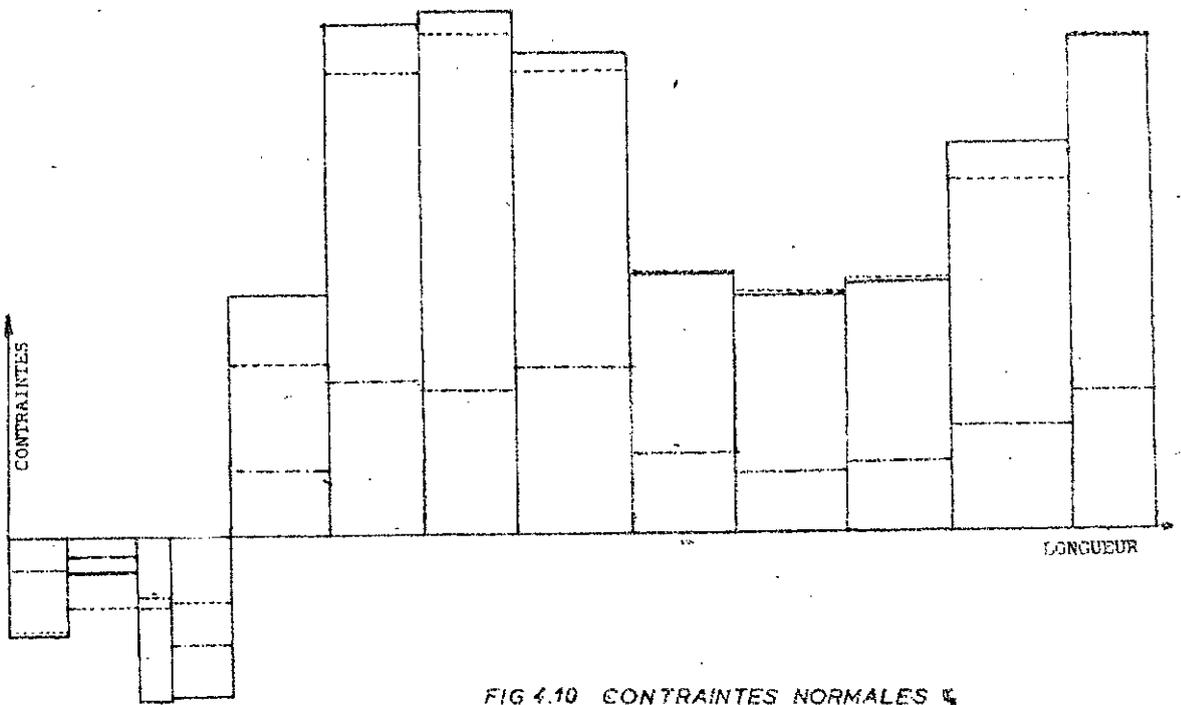


FIG 4.10 CONTRAINTES NORMALES  $\sigma_x$   
DANS L'ÂME DU LONGERON

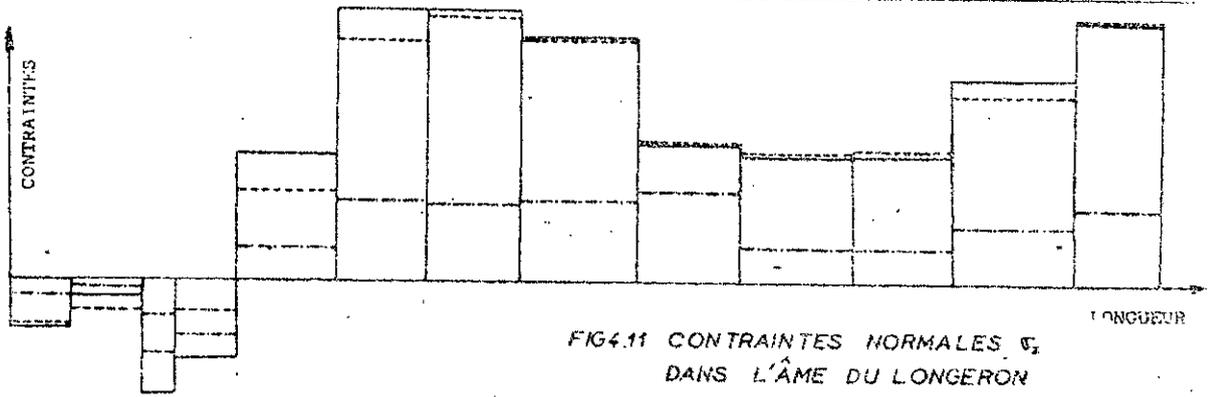


FIG 4.11 CONTRAINTES NORMALES  $\sigma_x$   
DANS L'ÂME DU LONGERON

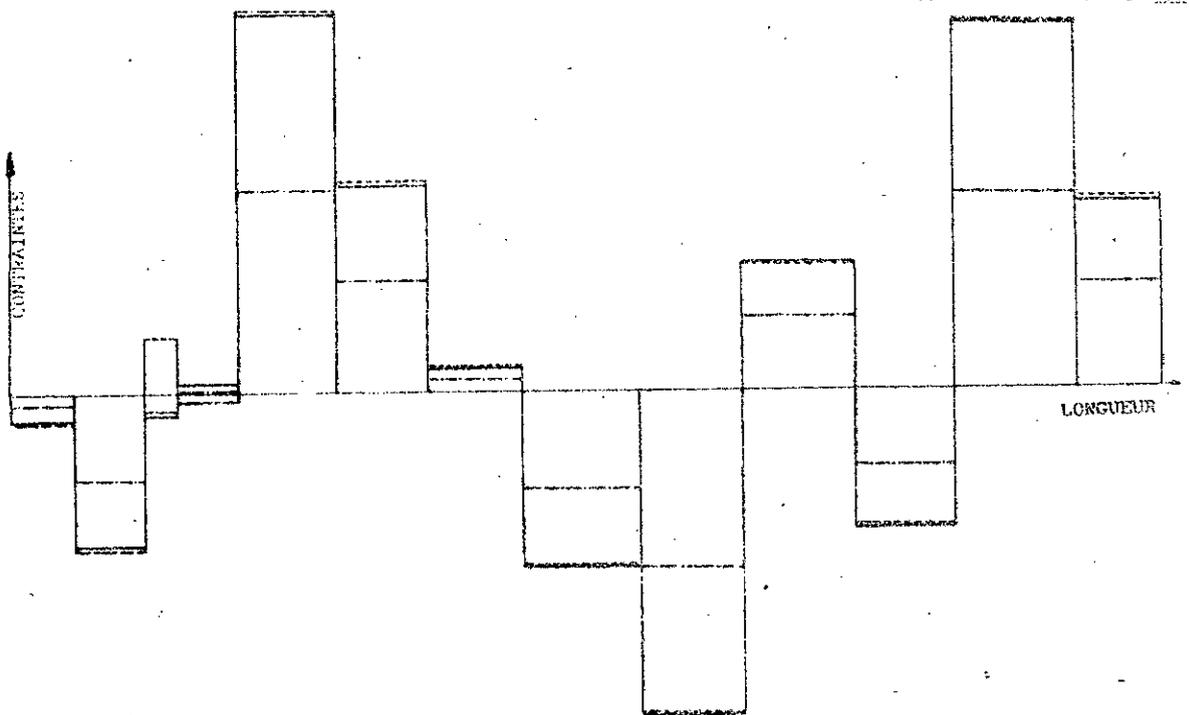


FIG 4.12 CONTRAINTES TANGENTIELLES  $\tau_{xz}$   
DANS L'ÂME DU LONGERON

- non renforcé
- - - renforcé sur l'aile.
- renforcé sur l'âme

10<sup>6</sup> kg/m<sup>2</sup>  
330mm

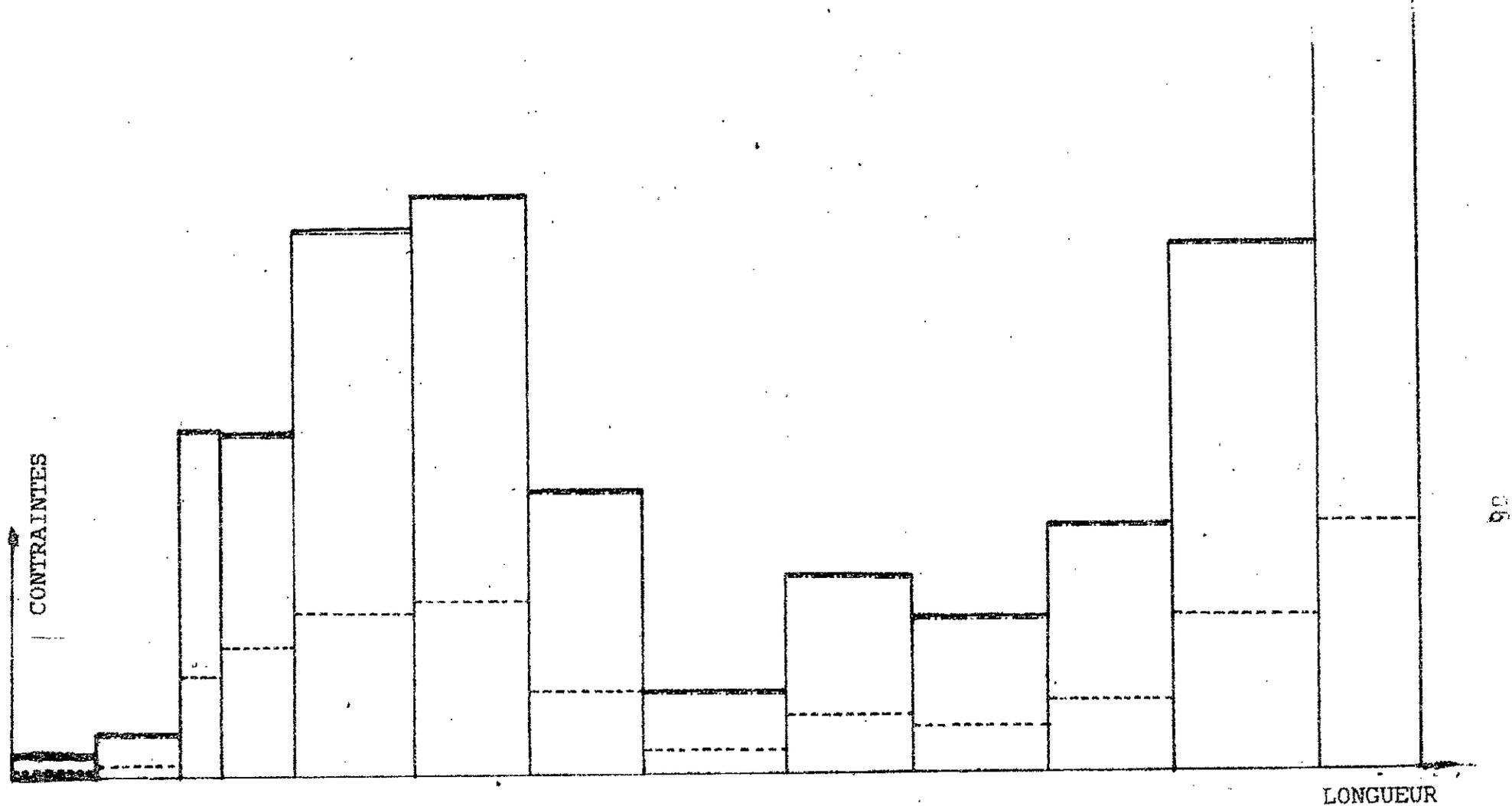


FIG4.13 CONTRAINTES EQUIVALENTES  
 DANS LA PLAQUE SUPERIEURE  
 — non renforcé  
 ---- renforcé sur l'aile  
 ..... renforcé sur l'âme

10 N/m<sup>2</sup>  
 330mm

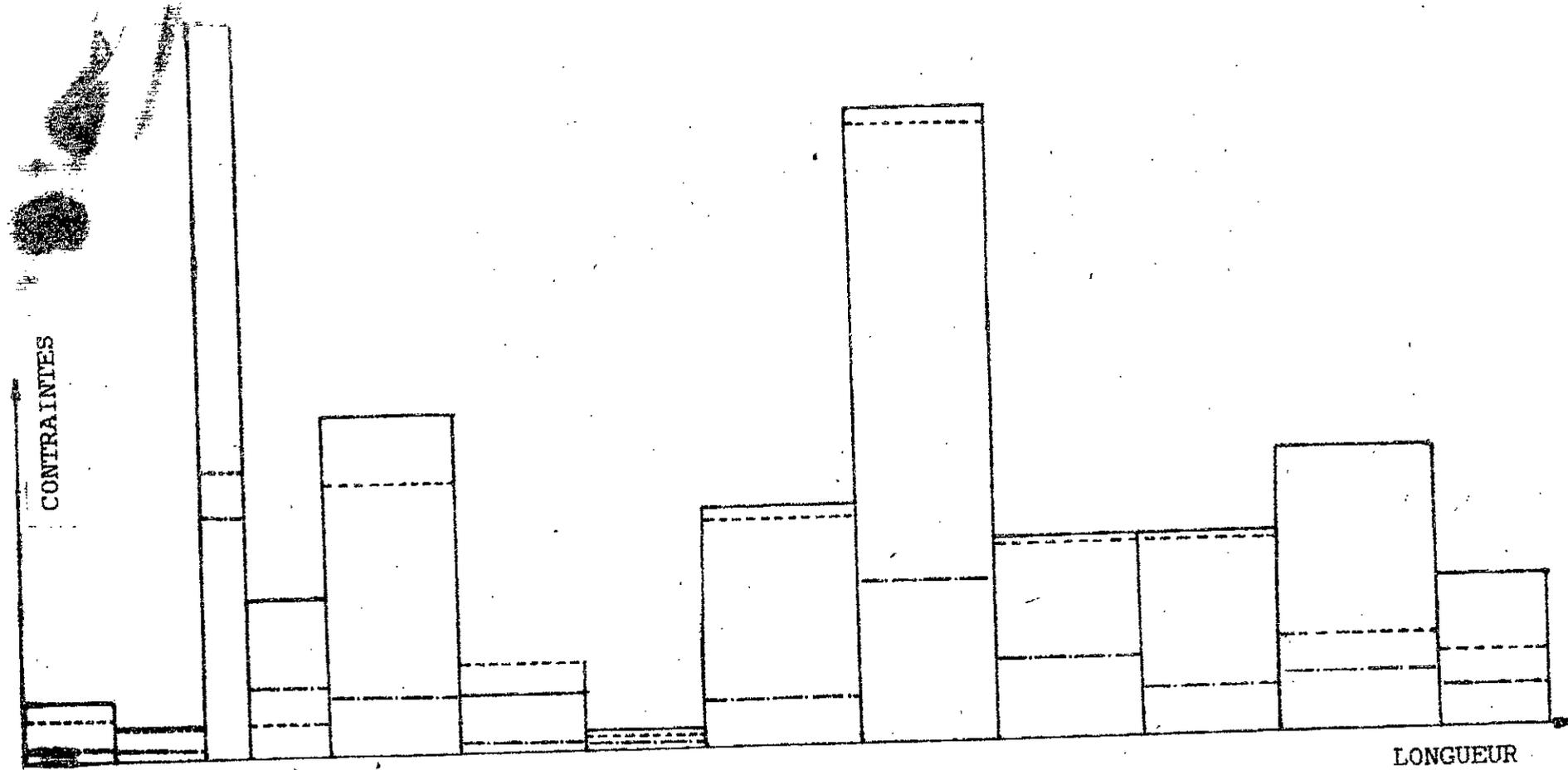


FIG.14 CONTRAINTES EQUIVALENTES  
DANS LA PLAQUE INFÉRIEURE

- non renforcé
- - - renforcé sur l'aile
- · - renforcé sur l'âme

10 N/mm<sup>2</sup>  
300mm

## CHAPITRE VI

### SYNTHESE ET ANALYSE DES RESULTATS

Dans ce chapitre une comparaison entre les solutions obtenues par modélisation en éléments poutres et celle obtenues par éléments plaques sera présentée. Une comparaison entre les différents modèles (chassis non renforcé et chassis renforcé sur l'aile ou sur l'âme) sera détaillée et commentée. Des solutions et propositions seront enfin présentées pour l'utilisateur S.N.V.I/C.V.I .

Le tableau 5.1 donne les déplacements dans un longeron dans le cas de la modélisation en éléments poutres. D'après ces résultats il a été remarqué que le renfort sur l'aile ou bien sur l'âme n'a aucun effet sur les déplacements . La diminution est pratiquement du même ordre de grandeur . Ceci vient du fait que les moments d'inerties suivants les axes OY et OZ sont très proches dans les deux cas de renfort (tableau 5.2 )

Noeuds	DEPLACEMENTS ( mm )		
	Non renf.	renf. sur l'aile	renf. sur l'âme
1	-0.20	-0.15	-0.15
3	-0.091	-0.072	-0.07
5	0.00	0.00	0.00
7	0.031	0.024	0.023
9	0.069	0.055	0.053
11	0.00	0.00	0.00
13	-0.25	-0.20	-0.19
15	-0.43	-0.34	-0.32
17	-0.32	-0.25	-0.24
19	0.00	0.00	0.00
21	0.23	0.18	0.18
23	0.00	0.00	0.00
25	-1.50	-1.20	-1.10
27	-2.90	-2.3	-2.3

Tableau 5.1 Déplacements des noeuds du longeron du bus

ELEMENTS	MIY ( m4 )			MIZ ( m4 )		
	N.renf	renf.aill	renf.âme	N.renf	renf.aill	renf.âme
1	0.762E-5	0.986E-5	0.967E-5	0.801E-6	0.103E-5	0.104E-5
3	0.762E-5	0.986E-5	0.967E-5	0.801E-6	0.103E-5	0.104E-5
5	0.762E-5	0.986E-5	0.967E-5	0.801E-6	0.103E-5	0.104E-5
7	0.126E-4	0.160E-4	0.164E-4	0.850E-6	0.109E-5	0.109E-5
9	0.192E-4	0.241E-4	0.257E-4	0.888E-6	0.115E-5	0.113E-5
12	0.192E-4	0.241E-4	0.257E-4	0.888E-6	0.115E-5	0.113E-5
14	0.192E-4	0.241E-4	0.257E-4	0.888E-6	0.115E-5	0.113E-5
17	0.192E-4	0.241E-4	0.257E-4	0.888E-6	0.115E-5	0.113E-5
19	0.192E-4	0.241E-4	0.257E-4	0.888E-6	0.115E-5	0.113E-5
22	0.161E-4	0.203E-4	0.213E-4	0.873E-6	0.113E-5	0.112E-5
24	0.109E-4	0.139E-4	0.141E-4	0.836E-6	0.107E-5	0.108E-5
27	0.873E-5	0.112E-4	0.111E-4	0.815E-6	0.105E-5	0.106E-5
30	0.873E-5	0.112E-4	0.111E-4	0.815E-6	0.105E-5	0.106E-5

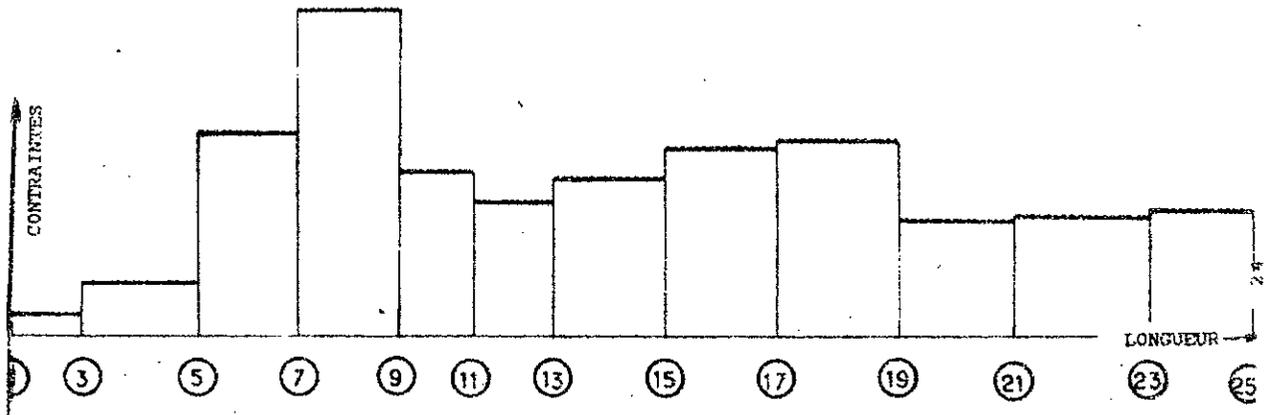
Tableau 5.2 Moments d'inertie des éléments poutres

C'est peut être cette diminution des déformations qui a guidée le constructeur pour un renfort sur l'aile du châssis sans se soucier de l'état de contrainte dans celui-ci. Pour montrer que si la solution adoptée par le constructeur est adéquate une analyse de l'état de contrainte dans le châssis est nécessaire. En effet l'analyse par éléments finis montre que le renfort sur l'aile nuit à l'état de contrainte dans celui-ci (figure 3.20).

Il ressort de ces résultats que le renfort sur l'âme réduit les contraintes de 35 % dans les éléments n° 30, 31 est de 30,5% dans les éléments 27 et 29. Par contre le renfort sur l'aile du longeron n'a aucun effet sur l'état de contrainte du châssis voir des effets néfastes. Dans les éléments 30 et 31 la contrainte équivalente augmente de 12,8%.

Ceci est observé dans la modélisation en éléments plaques (figure 4.9). L'état de contrainte de cisaillement montre que celle-ci a des effets très importants au niveau de la première traverse qui est  $0.139E+8$  et  $0.707E7$  dans le châssis du camion et bus respectivement (figure 4.15 et 4.16). Ce phénomène est la première cause de fissuration dans les châssis.

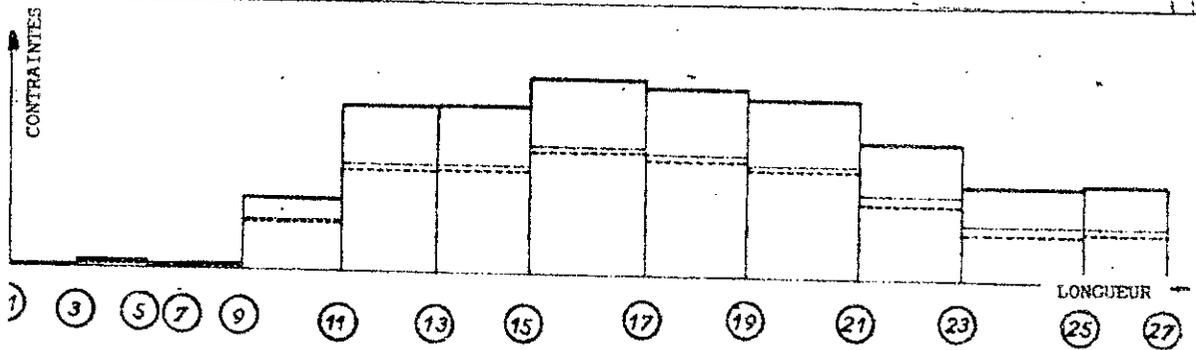
Il est à noter qu'un renfort sur l'âme du longeron à l'aide d'une tôle d'épaisseur 3 mm diminuerait convenablement l'état de contraintes dans le châssis (jusqu'à 23,93 % dans les éléments 30 et 31) (figure 4.17).



① NOEUD i

10 N/m<sup>2</sup>  
300 mm

FIG4.15 CONTRAINTES DE CISAILLEMENT  
DANS LE CHASSIS DE CAMION  
--- méthode des charges concentrées  
— méthode des charges consistantes



① NOEUD i

2.10<sup>6</sup> N/m<sup>2</sup>  
330 mm

FIG4.16 CONTRAINTE DE CISAILLEMENT  
DANS LE CHASSIS BUS

- chassis non renforcé
- chassis renforcé sur l'aile
- · - chassis renforcé sur l'âme

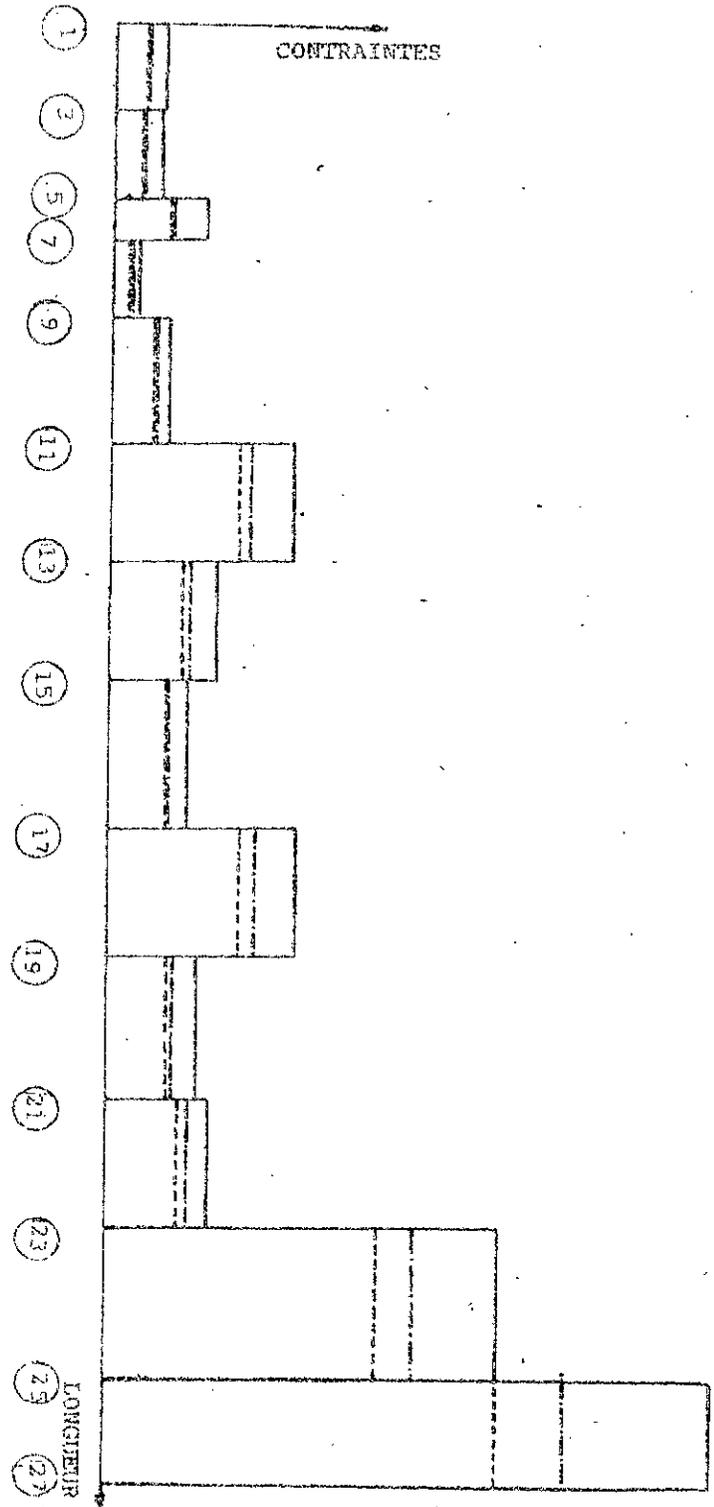


FIGURE 4.17 CONTRAINTES EQUIVALENTES  
DANS LE CHASSIS BUS

$2.10^3 \text{ N/m}^2$   
330 mm

non renforcé  
renfort sur l'âme de 5 mm  
renfort sur l'âme de 3 mm

## CHAPITRE V

### CONCLUSION ET RECOMMANDATION

Dans cette thèse , une étude complète et détaillée des châssis de camion et bus , par la méthode des éléments finis , a été élaboré. A cet effet un logiciel pour l'étude des structures élastiques , a été développé . les résultats du programme ont été comparés à ceux obtenus par SAP.IV afin de mettre en évidence la précision du programme. les résultats ont été très satisfaisants. Concernant le K120 , les résultats étaient conformes avec le comportement réel du châssis . Les contraintes de cisaillement sont maximales au niveau de la première traverse ; lieu de fissuration du châssis ( figure 4.15 )

En ce qui concerne le bus , trois types de conception ont été analysé :

- Chassis non renforcé
- Chassis renforcé sur l'aile du longeron
- Chassis renforcé sur l'âme du longeron.

Les résultats nous ont permis de faire les conclusion suivantes :

a / Le renfort sur l'aile du longeron nuit à la symetrie de la section droite et déplace la côte de son centre de gravité ce qui aggrave davantage l'état de contrainte dans celui-ci .

b / Le renfort sur l'âme du longeron , conserve à la section droite sa symetrie et augmente la rigidité du longeron ce qui entraine une diminution de l'état de contraintes dans ce dernier .

c / Le renforcement du châssis par une tôle de 3 mm d'épaisseur au lieu de 5 mm sur les âmes des longerons s'avère suffisant car il réduirait favorablement l'état de contrainte dans le châssis .

Nous espérons , par ce modeste travail , avoir contribuer à

la résolution d'un problème posé par l'entreprise nationale  
S N V I / C V I .

En effet le travail effectué est directement exploitable et  
servirait de base et clé pour différents travaux futures .

Nous espérons enfin ,avoir une fois de plus ouvert la voie pour  
une collaboration entre l'industrie et l'école nationale  
polytechnique .

## BIBLIOGRAPHIE

- / 1 / D.L. KARABALIS and D.E. BESKOS " Static ,dynamic and stability of structures composed of tapered beam"  
Computers & structures vol.16 N° 6 1983
- / 2 / SHEN PENG CHENG and WANG JIAN GUO "Static analysis of cylindrical shells by using B spline functions "  
Computers & structures vol.25 N° 6 1987
- / 3 / D.BUDCHAROENTONG and V.H. NEUBERT " Finite éléments and convergence dynamic analysis of beam "  
Computers & structures vol.10 1979
- / 4 / B.A.H. ABBAS " Dynamic stability of a rotating Timishenko beam whit a fléxible root."  
Journal of sound and vibration vol.108 1986
- / 5 / C.H. YU and N.E. SHANMUGAM "stability of frames with semi rigid joints "  
Computers & structures vol.23 N° 5 1986
- / 6 / S.J. BRIVTEC and M.D. DAVISTER "Post-buckling équilibreum of hyperstatic lattices " JEM vol.111 1985
- / 7 / N.U. KHAN and K.A. ANSARI " On the dynamics of multicomponent mooring line "  
Computers and structures vol.22 N° 3 1986
- / 8 / C.P. PROVIDAKIS and D.E BESKOS " Dynamic analysis of beams by boundary élément méthode "  
Computers and structures vol. 22 N° 6 1986
- / 9 / B.V.R GUPTA and N. GANESAN and S. NARAYANAN "Finite éléments free vibration analysis of damped stiffened panels "  
Computers and structures vol. 24 N° 3 1986

- / 10 / S. WONG FELIX " Finite elements /difference méthodes in random vibration "  
Computers and structures vol. 23 N° 1 1986
- / 11 / C.T. SUN and S.N. HUANG "Transverse impact problems by higher ordre beam finite element "  
Coputers and structures vol.5 1975
- / 12 / O. SADAJI ,W.YASUO and F.TOSHIO "Nonlineair analysis of trusses by energy minimization "  
Computers and structures vol. 27 N° 1 1987
- / 13 / T.Y. YANG " Finite éléments méthode in structural analysis "  
Printice Hall New Jersey 1986
- / 14 / K.J. BATH " Finite élément procedures in engineering analysis "  
Printice Hall New Jersey 1982
- / 15 / R.H. GALLAGHER " Finite élément analysis fundamentals"  
Printice Hall New Jersey 1975

## ANNEXE 1 : PRESENTATION GENERALE DES VEHICULES .

### 1. Présentation du camion K120 .

Le K120 est un véhicule industriel destiné au transport de matière " en sac " pour les moyens trajets . La S.N.V.I en fabrique trois variantes : le normal, le long et l'extra-long. C'est ce dernier qui intéresse notre étude .

Il a les spécifications suivantes :

#### - Dimensions ( m m )

- Longueur hors tout	8036
- Porte à faux avant	1221
- Porte à faux arrière	2475
- Empattement	4500

#### - Moteur

- Type	circa FGL912
- Puissance utile	110CV à 2800tr/mn.
- Carburant	gas-oil
- Nombre de cylindre	6 cylindres en ligne
- Couple maxi	33,7m.kg à 1500tr/mn.

#### - Boite de vitesse

- Type	BXSL
- 5 Vitesses synchronisées et un rapport arrière .	

#### - Suspension

- Ressort à lames semi - élliptiques avec amortisseurs hydrauliques à l'avant et à l'arrière .	
--	--

#### - Réservoir

- Capacité	140 litres
- Poids ( Kg )	
- Poids total autorisé en charge	12 000
- Poids de l'essieu avant à charge	4 200
- Poids du pont arrière à charge	8 400
- Poids total à vide	4 000
- Poids de l'essieu avant à vide	2 260
- Poids du pont arrière à vide	1 740
- Poids du moteur assemblé à la boite de vitesse.	640
- Poids du réservoir à combustible plein	165
- Poids du coffre à batteries et réservoir à air .	90
- Poids de la roue de secours	120
- Poids du conducteur ainsi que les passagers	300

## 2. Caractéristiques du châssis du K120 extra-long .

Le châssis du camion est constitué par deux longerons en tôle d'acier doux laminé à chaud, emboutis en forme de " U ". Les deux longerons sont reliés par huit traverses en tôle d'acier doux laminé à chaud .

La liaison longerons - traverse est une liaison rigide indémontable assuré par rivetage . ( Figure 2.1 ) .

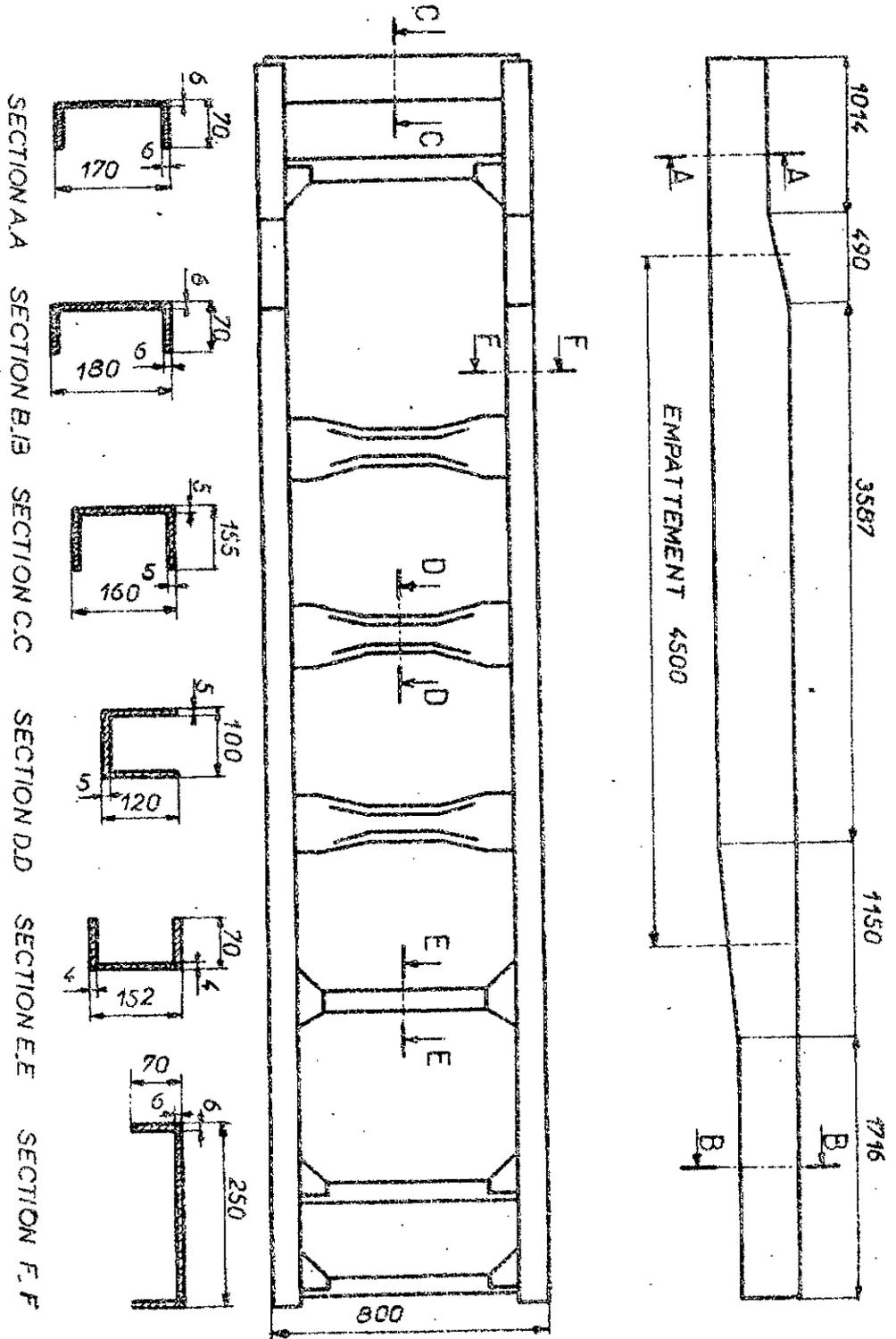


FIGURE 1 CHASSIS DU CAMION

## 2.1 Caractéristique mécaniques de l'acier

de construction .

- Nuance A
- Limite élastique  $Re [ Kg / mm^2 ] \geq 23$
- Résistance à la rupture  $Rr [ Kg / mm^2 ] = 34-44$
- Allongement %  $A\% \geq 30; l_0 = 5,65 \sqrt{50}$
- Module d'élasticité  $E = 0,22 \cdot 10^{12} N/m^2$
- Coefficient de poisson  $\nu = 0,25$
- Résilience KCV à + 20°C en travers  $\geq 6$
- Résilience KCV à - 20°C en long  $\geq 3,5$
- Résilience KCV à + 20°C en long  $\geq 4$

La largeur de l'éprouvette de résilience correspondra à l'épaisseur du large-plat considéré pour la fabrication du châssis . La valeur de la résilience étant donnée la formule suivante:

$$KCV = \frac{\text{Energie absorbée ( en DAJ )}}{\text{surface réelle de l'éprouvette ( en cm}^2 \text{ )}}$$

Note :

Les caractéristiques mécaniques  $Re$ ,  $Rr$ , et  $A$  . sont définies dans la norme NF . A . 03 . 151 .

longueur calibrée de l'éprouvette = 30 mm.

les éprouvettes de l'essai de résilience sont prises dans des larges-plates à l'état de livraison suivant la norme NF .A .35.501

## 2.2 Caractéristique chimique .

Les composantes essentielles de l'acier de construction du châssis sont:

- carbone 0,16 %
- manganèse 0,3 à 0,8 %

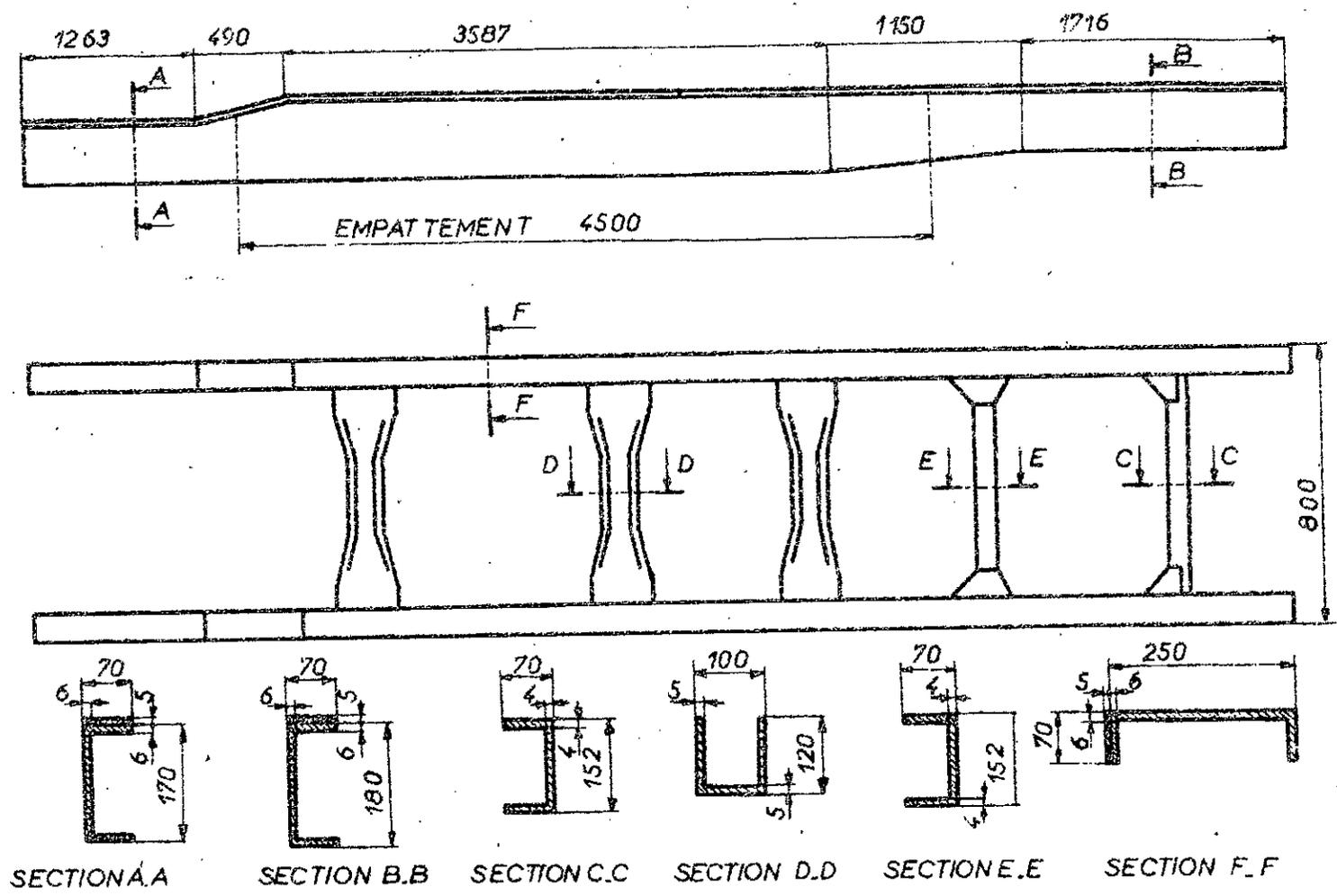


FIGURE 2 CHASSIS DU BUS

- Poids de la transmission	100
- Poids du coffre à batterie et du réservoir à air	80

#### 4. Caractéristiques du châssis de bus 70L6

Le châssis du bus est adapté à partir de celui du camion K120 extra - long .

Les modifications principales , résident essentiellement en :

- L'élimination de trois traverses .
- La modification des écarts initiaux entre les traverses .
- La modification des dimensions des longerons . Ces derniers ont maintenant une longueur de 8192 mm au lieu de 7957 mm auparavant.
- Le renforcement des longerons s'effectue en y assemblant une tôle de cinq mm d'épaisseur sur toute leur largeurs.
- Une structure en treillis formé de tubes est assemblée au deux longerons, destinée à supporter le caisson du bus. ( fig 2.2 ).

Les caractéristiques mécaniques, chimiques et microscopiques de l'acier de fabrication sont identiques à celles du châssis de camion K120.