

République Algérienne Démocratique et populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Mécanique



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'études  
Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'état en génie Mécanique

SUJET :

ELABORATION D'UN CODE DE CALCUL  
 POUR LA VISUALISATION  
 ET LA GENERATION DE MAILLAGE  
 D'UNE CONFIGURATION AEROSPATIALE EN 3D

Proposé et encadré par:

M<sup>elle</sup> N. AMOR

Etudié par :

M. GUERGUER Rachid

PROMOTION 2001

## REMERCIEMENTS

*Je remercie ALLAHE qui m'a donné la volonté et le courage de réaliser ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier vivement ma promotrice M<sup>elle</sup> AMOR qui a bien voulu m'encadrer, et pour ses orientations, ses conseils précieux, son suivi et ses encouragements.*

*Je tiens également à remercier l'ensemble des membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger notre travail.*

*Je remercie également tous mes amis TAWAT, mes amis du Centre Culturel Universitaire qui ont un apport considérable pour l'achèvement de ce travail, et je voudrai citer Omar, Fateh et Moussa.*

في هذا البحث، قمنا بإبراز مختلف طرق التشبيك الموجودة، ثم قمنا بإنشاء برنامج لإنشاء الشبكة معتمدين على أحد الطرق المذكورة سابقا (الطريقة النصف ذاتية). الشبكة منشأة على سطح طائرة، البرنامج منشأ بواسطة لغة البرمجة "Fortran 90".  
من أجل تحليل جيد لنتائج البرنامج، قمنا بإنشاء نافذة "Windows" للمشاهدة، هذه النافذة منشأة بواسطة برمجة/آلية "OpenGL".  
مفتاح الكلمات : تشبيك ، نصف ذاتي ، ثلاثي الأبعاد ، عرض ، فضائي ، تحولات هندسية ، فورتران 90 ، أين ج ل.

## Résumé

Dans cette étude, nous avons présenté les différentes méthodes de maillage qui existent, ensuite on a élaboré un code de génération de maillage basé sur l'une de ces approches (l'approche *semi-automatique*). Le maillage est généré sur la surface d'un avion. Le code est réalisé avec le langage *Fortran 90*.

Pour une bonne appréciation du résultat du code, nous avons créé une fenêtre *Windows* de visualisation, réalisée avec l'interface graphique logiciel/matériel *OpenGL*.

**Mots clés :** maillage, semi-automatique, trois dimensions, visualisation, aérospatial, transformations géométriques, Fortran 90, OpenGL.

## Abstract

In this study we presented the different methods of mesh generation that exist, then we have elaborated a code based on one of these approaches (the *semiautomatic* approach). The mesh is generated on the surface of an aircraft; and the code is achieved with the *Fortran 90* language.

For a good appreciation of results, we created a *Window* of visualization, achieved with the graphic interface *OpenGL* software/hardware.

**Key words :** mesh, semiautomatic, tree dimension, display mode, aerospace, geometric transformation, Fortran 90, OpenGL.

## SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
<b>I CHAPITRE I : GENERALITES.....</b>	<b>4</b>
Introduction .....	5
I.1 Introduction à la méthode des éléments finis .....	5
I.2 Notions générales sur les maillages .....	6
I.3 Description générale d'un maillage .....	7
I.3.1 Introduction : .....	7
I.3.2 Les informations constitutives : .....	7
I.3.3 Topologie et numérotation : .....	8
I.3.4 les numéros physiques : .....	10
I.3.5 Quelques méthodes de génération de maillages : .....	10
Conclusion.....	12
<b>II. CHAPITRE II : METHODOLOGIE GENERALE DE GENERATION D'UN MAILLAGE.....</b>	<b>13</b>
Introduction .....	14
II.1 Analyse descendante de la géométrie : .....	14
II.2 Construction ascendante de la géométrie : .....	18
II.3 Transformations de maillages : .....	19
II.3.1 Transformations géométriques : .....	19
II.3.2 Le recollement de deux maillages : .....	22
II.3.3 Affinage d'un maillage : .....	23
II.3.4 Régularisation d'un maillage : .....	23
II.3.5 Renumérotations : .....	24
Conclusion.....	27
<b>III. CHAPITRE III : PRESENTATION DETAILLEE DES METHODES DE MAILLAGE.....</b>	<b>28</b>
Introduction .....	29
III.1 Classe 1 " méthodes manuelles et semi-automatiques " : .....	29
III.1.1 Maillage manuel : .....	29
III.2 Classe 2 " méthodes de transport-projection " : .....	29
III.2.1 Principe général de la méthode : .....	29
III.2.2 Méthode basée sur les sommets du domaine : .....	30
III.2.3 Méthode préservant un contour polygonal : .....	32
III.3 Classe 3 " maillage par résolution d'équations aux dérivées partielles " : .....	34
III.3.1 Principe général de la méthode : .....	34
III.3.2 Méthodes elliptiques : .....	35
III.4 Classe 4 " superposition-déformation de grilles " : .....	37
III.4 Classe 4 " superposition-déformation de grilles " : .....	38
III.4.1 Génération à partir d'une grille régulière : .....	38
III.4.2 Génération basée sur l'arbre quaternaire : .....	39
III.4.3 Génération basée sur l'arbre octal : .....	40
III.5 Classe 5 " méthodes de blocs " : .....	40
III.6 Classe 6 : " méthodes frontales et méthodes de Delaunay-Voronoi " : .....	42
III.6.1 Méthodes frontales : .....	42
III.6.2 Méthodes de Delaunay-Voronoi : .....	45
III.7 Classe 7 : " maillage des surfaces " : .....	49
III.7.1 Approche C.A.O. : .....	49
Conclusion.....	51

<b>IV. CHAPITRE IV LA METHODES DE MAILLAGE SEMI-AUTOMATIQUE</b> .....	52
Introduction :	53
IV.1 Maillage pour des topologies hexaédriques :	53
IV.1.1 Méthode de maillage :	53
IV.1.2 Description des données à fournir :	54
IV.2 Maillage pour une topologies cylindriques :	54
IV.2.1 Méthode de maillage :	54
IV.2.2 Description des données à fournir :	55
<b>V. CHAPITRE IV : APPLICATION DE LA METHODE SEMI-AUTOMATIQUE</b> :.....	56
Introduction .....	57
V.1 Description du programme :	57
V.2 Analyse du problème (analyse descendante de la géométrie) :	61
V.3 Maillage des sous-ensembles (construction ascendante de la géométrie) :	62
V.3.1 Sous-ensemble 1 :	62
V.3.2 Sous-ensemble 2 :	64
V.3.3 Sous-ensemble 3 :	65
V.3.4 Sous-ensemble 4 :	66
V.3.5 Sous-ensemble 5 :	67
V.4 Déroulement du programme :	69
Conclusion.....	70
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	71
<b>RÉFÉRENCES</b> .....	73
<b>ANNEXES</b> .....	74

## Table des Figures :

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

N°	Titre de la figure	Page
Figure 1.1	<i>Topologie d'un triangle</i>	8
Figure 1.2	<i>Elément fini de type Lagrange de degré 3</i>	8
Figure 1.3	<i>Eléments fréquemment utilisés</i>	9
Figure 2.1	<i>Le domaine complet après maillage</i>	15
Figure 2.2	<i>Le sous-ensemble à considérer</i>	15
Figure 2.3	<i>Le domaine à considérer et une décomposition possible</i>	16
Figure 2.4	<i>Maillages déductible l'un de l'autre</i>	16
Figure 2.5	<i>Deux sous-ensembles déferents par leur propriétés physiques</i>	17
Figure 2.6	<i>Contraintes liées aux recollements.</i>	17
Figure 2.7	<i>Analyse descendante et conception ascendante</i>	18
Figure 3.1	<i>les trois phase de l'algorithme des méthodes de transport-projection</i>	30
Figure3.2	<i>Illustration de deux types de fonction de transport</i>	32
Figure3.3	<i>Transformation de grilles.</i>	37
Figure3.4	<i>Contour du domaine et la grille initiale</i>	38
Figure3.5	<i>Les différents motifs internes et leur traitement</i>	39
Figure3.6	<i>Les différents motifs du contour et leur traitement</i>	40
Figure3.7	<i>Deux types de discrétisation d'un même contour</i>	43
Figure3.8	<i>Les différents motifs et leurs constructions associées.</i>	44
Figure3.9	<i>Les trois configurations possibles.</i>	46
Figure4.1	<i>Construction de l'empilement par l'ajout de la troisième coordonnée</i>	53
Figure4.2	<i>Partition du domaine par de coordonnées</i>	53
Figure5.1	<i>Organigramme utilisé pour générer le maillage</i>	58
Figure5.2	<i>Différentes relations entre le programme et ses sousroutines</i>	60
Figure5.3	<i>Maillage du sous-ensemble 1</i>	63
Figure5.4	<i>Maillage du sous-ensemble 2</i>	64
Figure5.5	<i>Maillage du sous-ensemble 3</i>	65
Figure5.6	<i>Maillage du sous-ensemble 4</i>	66
Figure5.7	<i>Maillage du sous-ensemble 5</i>	67
Figure5.8	<i>Repère globale associé à l'avion.</i>	68
Figure5.9	<i>Organigramme de la numérotation des éléments et des nœuds</i>	69



## Notions Principales :

Les principales notations utilisées dans cette thèse sont rassemblées ci-après. Les autres notions seront définies lors de leur apparition dans chaque chapitre.

- $\Omega$  : domaine de la configuration.
- $\Gamma$  : contours du domaine.
- $T_h$  : ensemble des éléments du maillage.
- $h$  : diamètre du cercle circonscrivant un élément du maillage.
- $K$  : un élément du maillage.
- $M$  : matrice de transformation.
- $P$  : point du maillage.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION



De nombreux problèmes physiques sont modélisés par les équations aux dérivées partielles. Afin de pouvoir résoudre ces problèmes numériquement on peut utiliser la méthode des éléments finis.

Cette méthode consiste à calculer des valeurs approchées du champ cherché (température, déplacements, contrainte, ...) en certains points du domaine de définition du calcul associé au problème traité : ces points de calcul sont les nœuds. Ensuite, il est possible de déduire de ces valeurs la solution en tout point du domaine en utilisant une interpolation.

Afin que nous puissions réaliser ces calculs, il est nécessaire de réaliser un maillage du domaine de définition pour construire un recouvrement de ce domaine et de définir ses nœuds.

Cette phase de prétraitement est très importante dans la mesure où la création d'un maillage pour un domaine de géométrie complexe n'est pas une opération simple, elle demande beaucoup de temps et doit donner comme résultat des maillages adaptés aux problèmes à résoudre. En effet la qualité de la solution obtenue dépend étroitement de celle du maillage servant de support aux calculs.

La visualisation graphique permet de vérifier la qualité du maillage d'un domaine, et de l'améliorer si nécessaire. L'outil de visualisation doit fournir des outils permettant une analyse aisée de telle ou telle partie du maillage considéré.

L'objet de ce présent travail est de réaliser un code qui génère un maillage de surface appliqué sur la géométrie d'un avion, et de le visualiser. Vu le manque d'ouvrage traitant des méthodes de maillage dans notre environnement, nous avons présenté en détails les méthodes de maillage qui existent.

## **INTRODUCTION GENERALE**

---

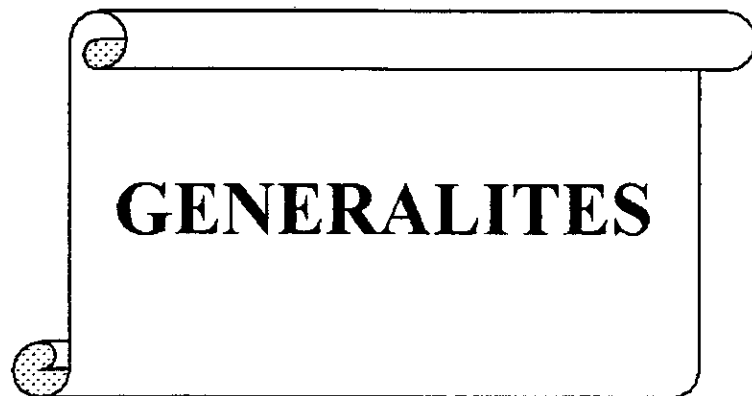
Dans le premier chapitre, on a traité des généralités et des notions de base concernant les maillages.

Le deuxième chapitre introduit une méthodologie générale pour la construction d'un maillage, ainsi que des opérations de transformation des maillages ; et le troisième chapitre présente en détail les différentes approches conduisant à la génération d'un maillage.

Le chapitre quatre contient une application de l'approche semi-automatique, réalisée sur la géométrie d'un avion. Ce chapitre comporte une description du code de visualisation du maillage obtenu.

# CHAPITRE I

## CHAPITRE I



## Introduction

La résolution des problèmes par voie numérique nécessite une discrétisation de ces problèmes. Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution, parmi elles la méthode des éléments finis ; pour laquelle la discrétisation du domaine à étudier joue un rôle important dans l'exactitude des résultats de calculs.

### I.1 Introduction à la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode numérique qui est très utilisée vu les avantages qu'elle présente : précision dans les calculs, formulation simple, domaines d'utilisation très variés.

En effet, c'est une technique de résolution des équations aux dérivées partielles donc applicable à tous les problèmes physiques décrits par des équations différentielles [Réf.1].

Son apparition est généralement coïncider avec l'apparition des articles de Argyris en 1955 et de Clough en 1956 [Réf.2].

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède selon les étapes successives suivantes :

1. On se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles à satisfaire en tout point d'un domaine  $\Omega$ , avec des conditions aux limites sur le bord  $\delta\Omega$  nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.
2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : C'est la *formulation variationnelle* du problème.
3. On divise  $\Omega$  en sous domaines : C'est le *maillage*. Les sous domaines sont appelés mailles.
4. On choisit la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée *élément*.
5. On ramène le problème à un problème discret : C'est la *discrétisation*. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée.

6. On résout le problème discret : C'est la résolution.
7. On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs : C'est le post-traitement.
8. On visualise et on exploite la solution pour examiner la qualité numérique et juger si elle satisfait les critères du cahier des charges : C'est *l'exploitation des résultats*.

Les étapes 1, 2, 3, 4 et 5 sont souvent rassemblées sous le nom de pré-traitement.

La méthode a comme avantages la possibilité de traiter des géométries complexes, une possibilité de démonstrations mathématiques de convergence et de majoration d'erreurs et fonctionnent sur tous les types de maillage ; d'autre part elle a une complexité de mise en œuvre et un coût en temps de calcul et en mémoire.

Ce qui nous intéresse dans notre étude est l'étape 3 (qui s'occupe de la génération du maillage) et la visualisation de ce maillage.

## I.2 Notions générales sur les maillages

Un maillage d'un domaine  $\Omega$  est par définition un ensemble  $T_h$  recouvrant  $\Omega$ . Cet ensemble est composé d'un nombre fini de segments en dimension 1, de segments, de triangles et de quadrangles en dimension 2 et en plus de ces éléments des tétraèdres, des pentaèdres et des hexaèdres en dimension 3. Les éléments  $K$  d'un tel maillage doivent satisfaire un certain nombre de propriétés :

- L'intersection de deux éléments de  $T_h$  doit être soit :
  - réduite à l'ensemble vide,
  - réduite à un point,
  - réduite à une arête,
  - réduite à une face.
- Les propriétés de nature géométrique :
  - La variation de taille entre deux éléments voisins doit être progressive et ne pas présenter de discontinuités trop brutales.
  - La densité des éléments en certaines zones du domaine doit être plus importante.
- Les propriétés de nature physique :

Elles sont liées au problème physique à résoudre ; en effet la nature du problème traité indique s'il est nécessaire de prévoir des mailles plus ou moins fines ou de formes particulières.

### I.3 Description générale d'un maillage

#### I.3.1 Introduction :

Selon les applications (problème thermique, de structures, de mécanique des fluides, ...) la simulation numérique par la méthode des éléments finis va s'appuyer sur un maillage du domaine de calcul considéré.

Le maillage doit contenir toutes les informations utiles lors du traitement des différentes étapes intervenant dans le calcul (calcul des matrices, résolution des systèmes, visualisation des résultats, ...). Ces informations sont de plusieurs types :

- 1- *Informations géométriques* qui consistent en la description du maillage c'est à dire d'un recouvrement géométrique aussi fidèle que possible du domaine de calcul, avec une description des informations ayant servi aux définitions relatives à la construction des éléments.
- 2- *Informations sur l'interpolation par éléments finis* : c'est à dire que le maillage doit être cohérent avec l'interpolation choisie afin de pouvoir le définir (type de l'interpolation, le nombre de nœuds par élément, la liste et position de ces nœuds).
- 3- *Informations physiques* : les valeurs contenues dans le maillage doivent permettre l'affectation des caractéristiques physiques de la matière présente, celle des efforts, sources de chaleur c'est à dire les conditions aux limites.

#### I.3.2 Les informations constitutives :

Pour répondre à ces objectifs, la représentation d'un maillage doit permettre de trouver rapidement telle ou telle valeur (quantité stockée dans cette représentation) ou de pouvoir calculer une valeur à partir des informations présentes (quantité déduite des informations stockées dans la représentation). Le maillage contient un ensemble de valeurs et de tableaux de valeurs contenant la liste des éléments géométriques le constituant.

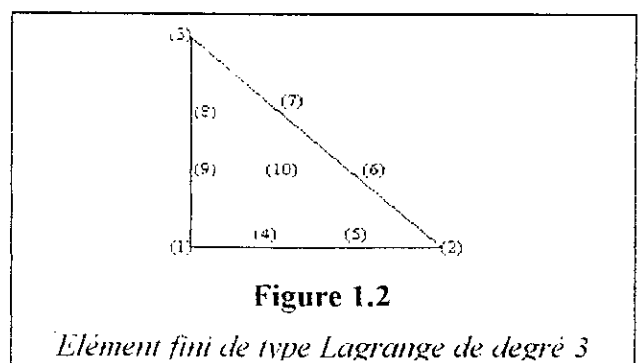
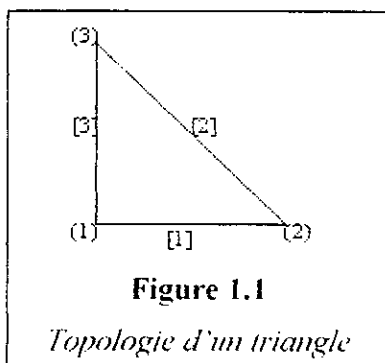
Pour chaque élément les informations suivantes sont nécessaires :

- la nature de l'élément : soit un segment, triangle, quadrangle, tétraèdre, pentaèdre, hexaèdre ou élément particulier ;
- le passé de l'élément : un élément est constitué de faces, d'arêtes et de sommets, ces items ont été construits à partir de données auxquelles on doit pouvoir remonter (par exemple, tel sommet de l'élément est sur une courbe d'équation connue) ;
- la liste des sommets de l'élément ;
- la connectivité et la topologie de l'élément ;
- le nombre et la liste des nœuds ;
- les coordonnées de ses sommets ;
- les attributs physiques de l'élément.

### I.3.3 Topologie et numérotation :

La numérotation des sommets, des arêtes et des faces des éléments sont prédéfinie de manière à induire implicitement certaines propriétés. Dans le cas du triangle (de connectivité (1)(2)(3)), le premier sommet (1) étant choisi, la numérotation des autres s'en déduit par rotation dans le sens direct (*Figure 1.1*). Les arêtes sont alors déterminées par :

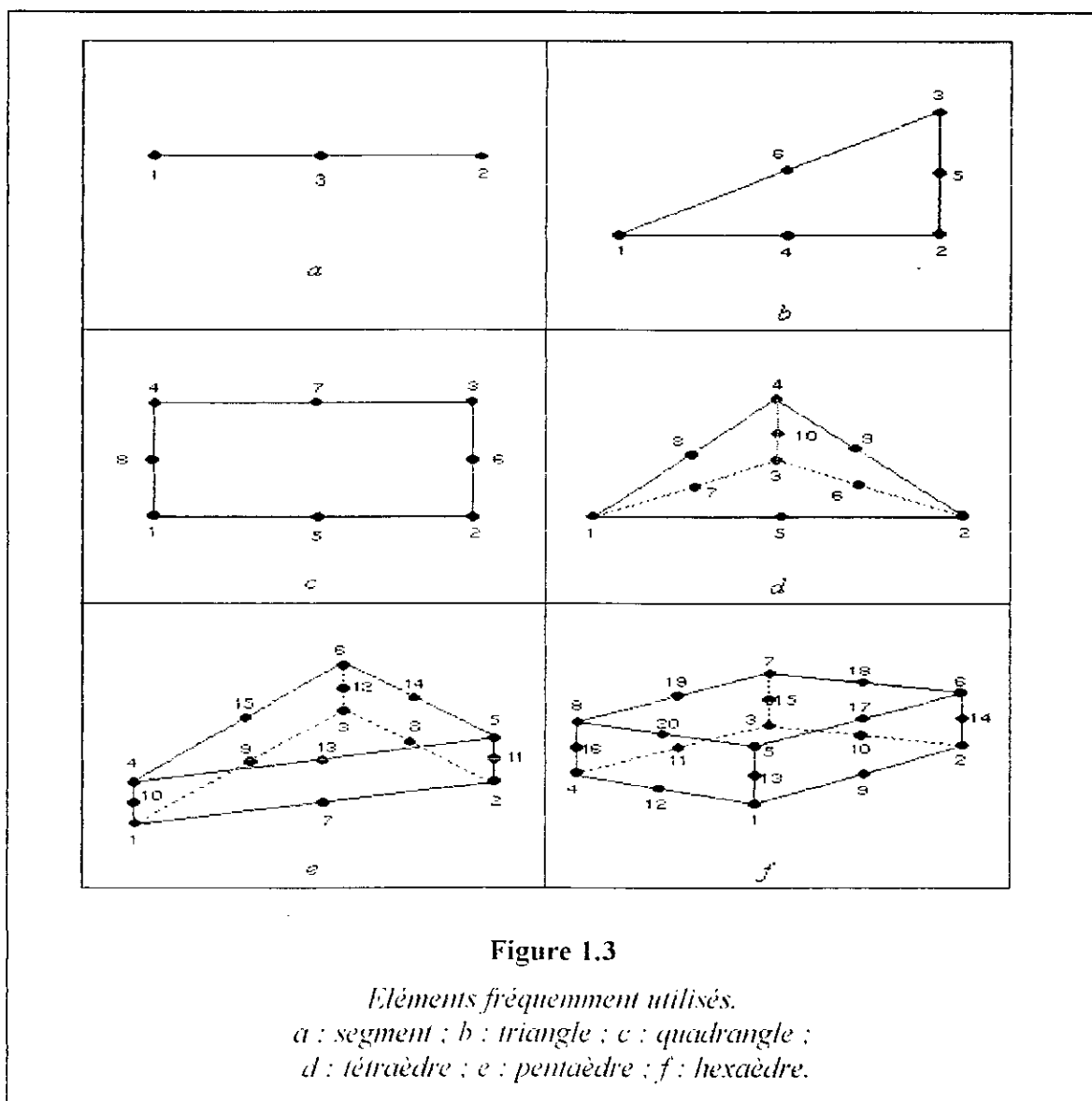
- l'arête [1] joint le sommet (1) au sommet (2) et est parcouru dans le sens (1) vers (2) ;
- l'arête [2] : (2)  $\rightarrow$  (3) ;
- l'arête [3] : (3)  $\rightarrow$  (1).



A partir de la connectivité, la topologie est donc définie. Dans le cas du triangle et par souci de simplification on peut utiliser la convention suivante : l'arête [i] est l'arête qui est opposée au sommet (i). Cette définition n'est pas applicable aux autres types d'éléments.

Les nœuds intermédiaires situés sur les arêtes sont numérotés séquentiellement dans l'ordre des arêtes après les nœuds sommets en parcourant les arêtes dans leur sens de définition. Les nœuds des faces suivantes puis les nœuds internes sont énumérés.

Prenons par exemple l'élément fini de type Lagrange de degré 3 où les nœuds sont les sommets ; il y a deux points par arête et un point interne. Les nœuds sommets sont énumérés en premier dans l'ordre des sommets, viennent ensuite les nœuds des arêtes pris dans l'ordre de celles-ci en les parcourant dans leur sens de définition, vient ensuite le nœud interne (Figure 1.2). Dans le cas d'un élément avec plusieurs nœuds internes, on s'efforcera de les numérotés de manière logique par exemple en fonction de leur position dans le sens direct (Figure 1.3).





### I.3.4 les numéros physiques :

Les tableaux décrivant le maillage contiennent des informations permettant de repérer les éléments, les faces, les arêtes et les nœuds de ceux-ci en vue de leur affecter des valeurs de nature physique. Ces attributs, le numéro de sous-domaine et les numéros de référence vont être très utiles lors du calcul.

Le numéro de sous-domaine, associé à chaque élément permettra un traitement par lot de tous les éléments ayant le même numéro. Une correspondance sera établie entre cette valeur et les caractéristiques physiques du matériau auquel appartient l'élément (conductivité, chaleur massique, module de Young, coefficient de Poisson, ...) ou avec les efforts auxquels il est soumis (distribution d'efforts volumiques ou surfaciques) ou enfin avec tout traitement spécial que l'on peut désirer effectuer.

Les numéros de référence, associés à chaque item constituant un élément (face, arête et nœud) permettront de même un traitement par lot de tous les items de même numéro. Une correspondance sera établie entre cette valeur et :

- les efforts auxquels l'item est soumis (coefficient d'échange, flux à travers une surface ou distribution d'efforts surfaciques un effort linéique) ; dans ce cas il s'agit d'une valeur caractérisant une face ou une arête.
- l'affectation de conditions aux limites aux nœuds : dans ce cas il s'agit d'un numéro caractérisant un nœud.

### I.3.5 Quelques méthodes de génération de maillages :

On peut distinguer sept classes [Réf.3] de méthode de génération de maillage, cette classification englobe les différentes approches possibles.

#### Classe 1 :

Elle englobe les méthodes manuelles ou semi-automatiques permettant de traiter des cas géométriques simples.

Ces méthodes sont énumératives (les points, arêtes, faces et éléments constituant le maillage sont fournis explicitement).

1. *Méthodes manuelles* : elles consistent à définir toutes les informations utiles à la construction du maillage, en identifiant les éléments à partir de leurs sommets. Cette approche se prête bien au traitement des domaines de géométrie très simple ou à ceux qu'il est possible de recouvrir à l'aide d'un nombre limité d'éléments ; ce type

de maillage subit souvent des transformations de façon à obtenir des mailles plus fines.

2. *Méthodes semi-automatiques* : elles consistent à définir toutes les informations utiles à la construction du maillage en respectant une liaison connue entre ces sommets.

Un maillage simple sert de base à une construction plus élaborée. Cette approche permet de traiter les domaines de géométrie hexaédrique ou cylindrique.

### **Classe 2 :**

Cette classe de méthodes est appelée méthode de transport-projection ou méthode algébriques. Elles font une projection du maillage d'un domaine de référence sur tout le domaine grâce à une fonction. Ce domaine de référence est un domaine de géométrie élémentaire, il peut être un triangle ou un quadrangle ...

La fonction de transformation est définie à l'avance pour assurer un certain nombre de propriétés (respect du contour, ...).

### **Classe 3 :**

Ces méthodes sont basées sur la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles formulées sur un maillage de référence d'un domaine géométriquement simple.

Cette approche ressemble à l'approche vue ci-dessus, mais dans ce cas la fonction de projection est calculée en résolvant des équations aux dérivées partielles de façon à satisfaire certaines propriétés (densité des mailles, respect des contours ...).

### **Classe 4 :**

Dans cette approche le domaine est englobé dans un rectangle ou un parallélépipède rectangle qui est découpé en cases construites de façon à assurer un certain nombre de propriétés (le nombre, la taille et la répartition des cases suivant le problème traité).

Cette grille est déformée pour épouser le domaine réel puis ces cases sont découpées pour obtenir les éléments du maillage final.

### **Classe 5 :**

Ici le domaine est décomposé en une série de blocs de formes élémentaires auxquels est appliquée une des approches correspondant aux classes 2 ou 3. Les interfaces entre ces blocs sont à définir pour assurer la validité du résultat et indiquer la nature du découpage qui leur sera appliqué.

Cette technique permet de traiter des domaines de formes quelconques, mais lorsqu'il s'agit de formes complexes, le nombre de blocs initiaux sera d'autant plus élevé.

### **Classe 6 :**

Cette classe englobe les méthodes qui construisent directement un maillage du domaine élément par élément à partir de la donnée de son contour.

En effet, à partir de la frontière du domaine les points et les éléments internes sont construits, le contour est donné soit de manière globale (par une définition de type analytique), soit de manière discrète (par la liste des arêtes ou des faces triangulaires).

Deux approches rentrent dans ce cadre, les algorithmes d'avancée de fronts (méthode frontale) et les algorithmes utilisant l'approche Voronoï-Delaunay.

1. *Approche frontale* : à partir d'une arête (ou d'une face) du front initialisé par la donnée un ou plusieurs éléments sont créés, le front est mis à jour par suppression et adjonction d'arêtes (ou de faces), le processus est poursuivi de manière itérative jusqu'à ce que le front soit vide. Cette technique permet de créer des maillages triangulaires ou tétraédriques dans des domaines quelconques.
2. *Approche Voronoï-Delaunay* : cette approche permet de construire le maillage de l'enveloppe convexe à partir d'un nuage de points.

### **Classe 7:**

Cette classe contient les méthodes qui construisent un maillage de surfaces qui s'avère utile pour des simulations numériques portant sur des domaines modélisés par des surfaces dans l'espace ; ou pour créer les données nécessaires aux algorithmes de maillage comme l'approche frontal ou Delaunay-Voronoï qui partent d'un maillage de la peau du domaine tridimensionnel considéré.

## **Conclusion**

La numérotation des nœuds et des mailles influe sensiblement sur la formulation du problème. Plusieurs attributs sont joints aux éléments pour simuler le plus fidèlement le problème réel. Il existe plusieurs approches pour construire un maillage, et chaque approche peut contenir plusieurs variantes. Ces méthodes de maillage seront reprises plus en détail. On donnera plus d'explication dans les chapitres suivants.

# CHAPITRE II

## CHAPITRE II

**METHODOLOGIE  
GENERALE  
DE GENERATION  
D'UN MAILLAGE**

## Introduction

La conception d'un maillage peut être décomposée en quatre étapes :

1. *L'analyse du problème* : c'est l'analyse de la géométrie du domaine et du problème physique à étudier. Cette analyse se fera sous forme descendante (décomposition d'un problème compliqué en une succession de problèmes simples).
2. *La définition formelle du processus de maillage* : elle prendra en compte les résultats de l'analyse précédente et sera basée sur une réalisation ascendante (définition d'objets simples permettant de réaliser par étapes la totalité du travail).
3. *La création des données nécessaires au maillage* : en utilisant les algorithmes appropriés.
4. *La création effective du maillage* : avec l'aide des transformations géométriques (rotation, translation, ...).

### II.1 Analyse descendante de la géométrie :

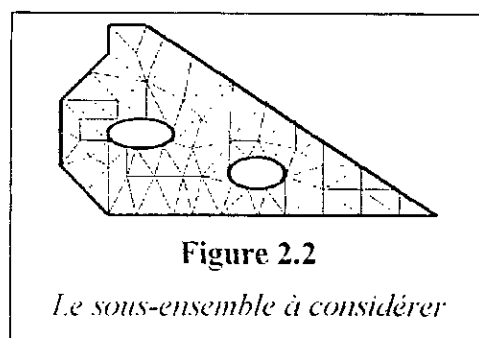
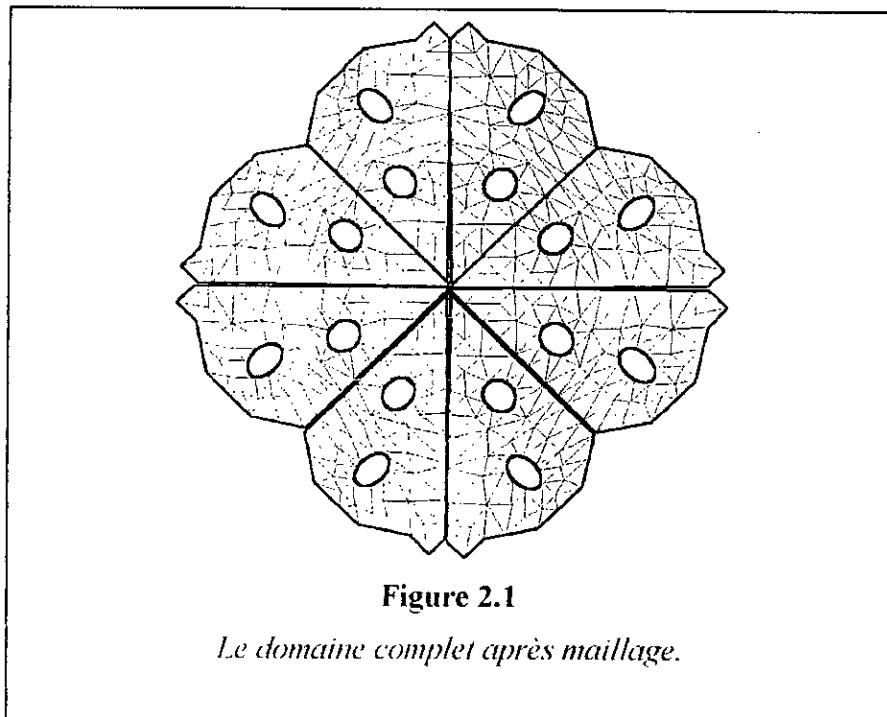
Le but de cette étape est d'utiliser au mieux les particularités géométriques du domaine à traiter afin de minimiser le travail nécessaire à la génération du maillage sans oublier la prise en compte des caractéristiques physiques et les conditions aux limites qui règnent sur le domaine. Sa stratégie consiste à décomposer le problème posé en une suite de sous-problèmes plus faciles ou mieux adaptés aux algorithmes de maillage disponibles.

Cette étape est liée à trois impératifs :

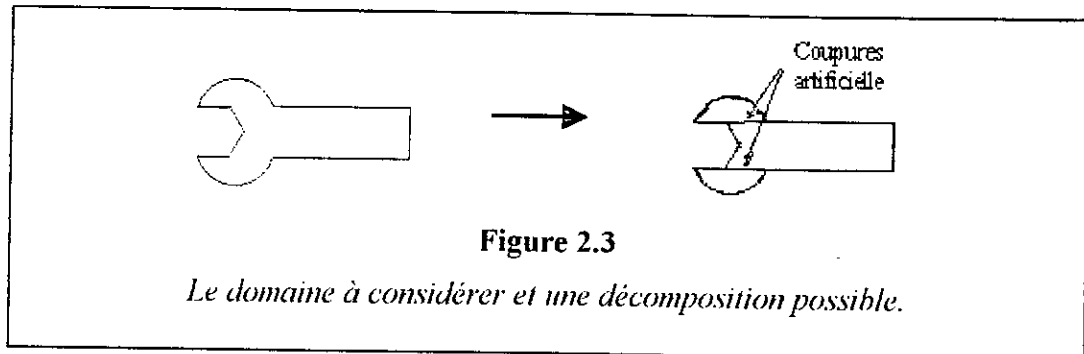
- Minimiser et fiabiliser l'opération de maillage en tenant compte d'éventuelles répétitivités présentes dans le domaine.
- Adapter aux possibilités du générateur de maillage dans la zone à considérer.
- Obtenir un maillage ayant certaines propriétés, par exemple :
  - pour faire varier la densité des mailles ;
  - pour forcer le maillage à se concentrer sur un point ou à suivre une ligne...

Un domaine peut être subdivisé en sous-domaines géométriquement simples. Plusieurs possibilités existent pour obtenir un tel découpage :

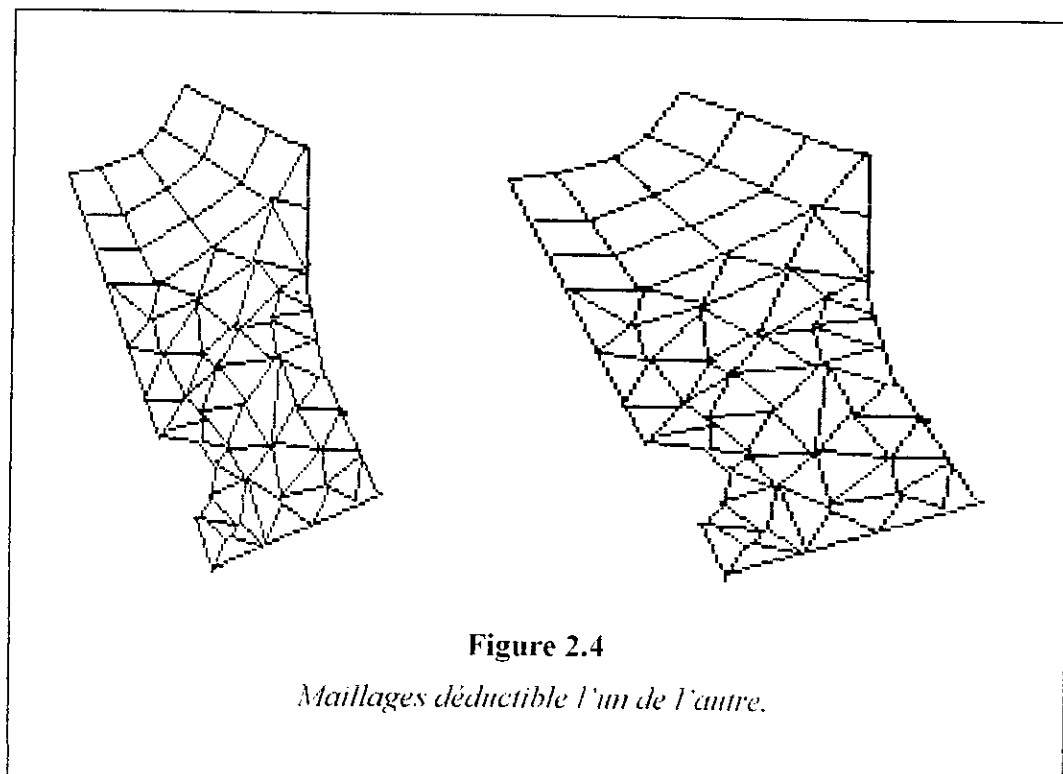
1. On recense les répétitivités géométriques existantes (présence de symétries, translations, rotations, ...) pour définir les sous-ensembles primaires qui subiront une opération de maillage ; par opposition aux sous-ensembles secondaires qui pourront s'en déduire par les transformations géométriques recensées précédemment. (Figure 2.1 et 2.2). Les traits forts montrent que le domaine complet n'est qu'une duplication du sous-ensemble de la Figure 2.2 avec traitement géométrique.



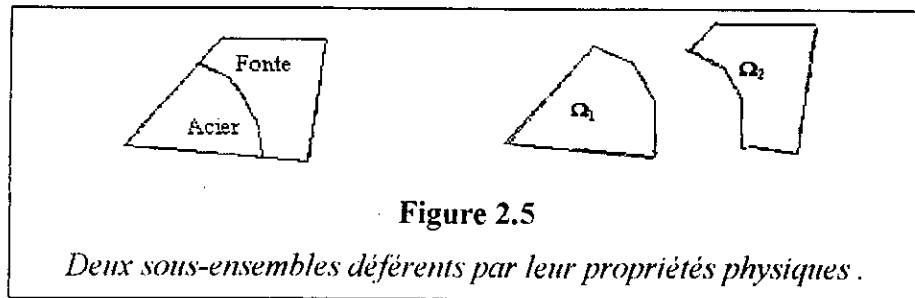
2. Si de telles possibilités n'existent pas, on pourra procéder à un découpage artificiel du domaine en zones géométriquement plus simples qui formeront ces sous-ensembles. (Figure 2.3). Les deux lignes introduites permettent de découper le domaine en sous-ensembles de géométrie plus simple.



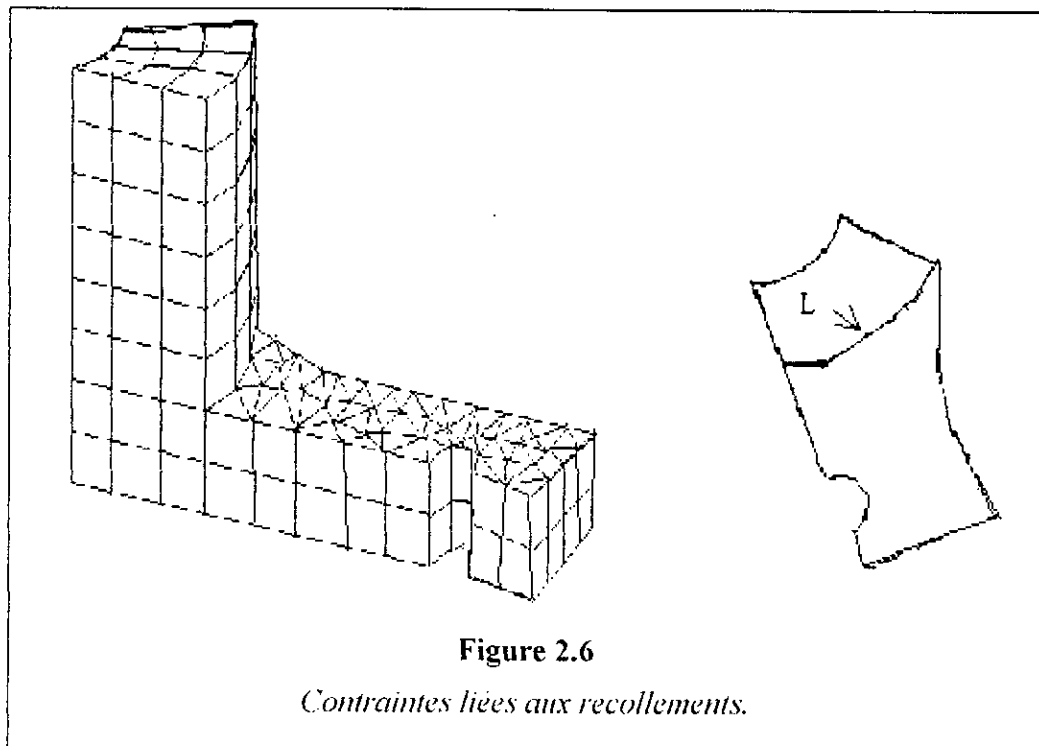
3. Une autre possibilité qui est d'obtenir des maillages légèrement différents de deux pièces légèrement différentes en ne traitant comme sous-ensemble que l'une d'elles. (Figure 2.4). Le maillage du domaine de droite est obtenu de la même façon que celui du domaine de gauche par une simple modification géométrique.



4. Il faudra tenir compte des caractéristiques physiques du matériau à étudier ainsi que des conditions aux limites pour arriver aux sous-ensembles génériques. (Figure 2.5).



Enfin, il ne faut pas oublier l'opération de recollement lors de la création des sous-ensembles a fin de respecter leur conformité. (Figure 2.6), Il faut prévoir une ligne L qui servira lors du recollement des sous-ensembles.

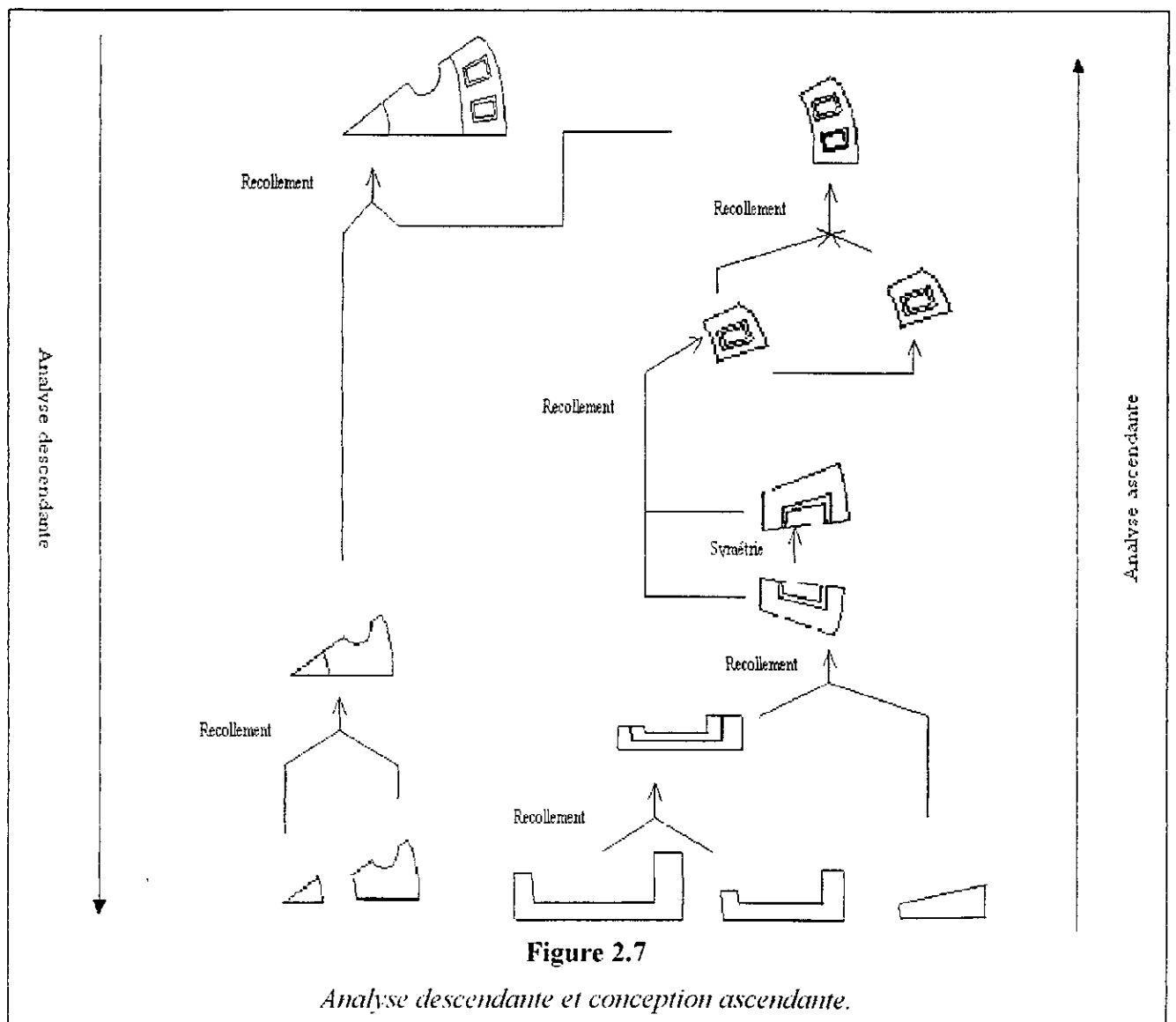




## II.2 Construction ascendante de la géométrie :

Chaque sous-ensemble générique sera maillé séparément par l'utilisation de l'algorithme de maillage approprié (qui répond au mieux aux caractéristiques physiques et géométriques du matériau et au besoin de l'étude à faire).

La conséquence de cette méthodologie est que le maillage global, en tant qu'assemblage de maillages primaux et secondaires de zone géométriquement plus simples, est correct tant que ces derniers le sont (*Figure 2.7*).



### II.3 Transformations de maillages :

Après l'obtention d'un maillage par l'utilisation de l'une des approches citée précédemment, on peut utiliser des transformations géométriques pour obtenir un nouveau maillage, et en recollant les différents sous-ensembles on obtient le domaine voulu, mais généralement le maillage obtenu n'est pas vraiment au point.

En effet, il doit être affiné, ses éléments doivent être régularisés et renumérotés, si nécessaire, afin de minimiser l'erreur de calcul et représenter au mieux le problème étudié.

#### II.3.1 Transformations géométriques :

A partir d'un maillage existant, l'application à ce dernier d'une transformation géométrique (symétrie, translation, rotation, dilatation anisotrope ou transformation quelconque définie explicitement par sa matrice) permet de construire un nouveau maillage.

Les différentes transformations utiles sont :

- les symétries par rapport à une droite d'équation donnée en deux dimensions ou par rapport à un plan d'équation donné en trois dimensions ;
- les translations de vecteur donné ;
- les rotations d'angle donné autour d'un point en deux dimensions ou autour d'un axe et par rapport à un centre de rotation en trois dimensions ;
- les dilatations isotropes ou anisotropes par rapport à un centre dont les coefficients dans les deux (ou trois) directions sont donnés.

D'autre part la combinaison de deux ou plus de ces transformations fournit une nouvelle transformation.

Ces transformations peuvent être formulées, d'une manière générale, de la façon suivante : passage du point  $P_1$  vers le point  $P_2$  par l'intermédiaire d'une matrice de passage  $M$  tel que

$$P_2 = M(P_1). \quad (\text{II.1})$$

Pour donner explicitement les transformations on a besoin d'utiliser les coordonnées homogènes [Réf.4]. Il est à noter que toutes les transformations infographiques sont exprimées sous forme matricielle par les coordonnées homogènes.

**Les transformations en deux dimensions :****La symétrie :**

Pour une symétrie par rapport à la droite  $Ax + By + C = 0$ , la matrice de passage  $M$

$$\text{s'écrit sous la forme suivante : } M = \begin{pmatrix} 1 + A^2F & ABF & ACF \\ ABF & 1 + B^2F & BCF \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{avec } F = \frac{-2}{A^2 + B^2}.$$

**La translation :**

Pour une translation de vecteur  $\vec{T}=(T_x, T_y)$ , la matrice de passage  $M$  s'écrit sous la

$$\text{forme suivante : } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**La rotation :**

Pour une rotation d'angle  $\alpha$  effectuée autour du point  $P = (P_x, P_y)$ , on a comme

$$\text{matrice : } M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & P_x \\ \sin \alpha & \cos \alpha & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**La dilatation :**

Dans le cas d'une dilatation de centre  $C(C_x, C_y)$  et de coefficients  $\alpha_x, \alpha_y$ , la matrice

$$M \text{ est la suivante : } M = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 & C_x(1 - \alpha_x) \\ 0 & \alpha_y & C_y(1 - \alpha_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Les transformations en trois dimensions :****La symétrie :**

Pour une symétrie par rapport au plan  $Ax + By + Cz + D = 0$ , la matrice de passage

$$M \text{ s'écrit sous la forme suivante : } M = \begin{pmatrix} 1 + A^2F & ABF & ACF & ADF \\ ABF & 1 + B^2F & BCF & BDF \\ ACF & BCF & 1 + C^2F & CDF \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{avec } F = \frac{-2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

**La translation :**

Pour une translation de vecteur  $\vec{T} = (T_x, T_y, T_z)$ , la matrice de passage  $M$  s'écrit sous

la forme suivante : 
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**La rotation :**

Pour une rotation d'angle  $\alpha$ , et d'axe  $A = (A_x, A_y, A_z)$  qui est effectuée autour du point  $P = (P_x, P_y, P_z)$ , on a comme matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -a^2 + Sd - CS_2g & ab + Se - CS_2h & ac + Sf - CS_2i & P_x \\ -SC_2a + Cd + SS_2g & -SC_2b + Ce + SS_2h & -SC_2c + Cf + SS_2i & P_y \\ S_2a + C_2g & S_2b + C_2h & S_2c + C_2i & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec :

- Si  $A_x \neq 0$  alors :

$$C = \cos \left[ \arctan \left( \frac{A_y}{A_x} \right) \right], \quad S = \sin \left[ \arctan \left( \frac{A_y}{A_x} \right) \right]$$

$$C_2 = \cos \left[ \arctan \left( \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \right) \right], \quad S_2 = \sin \left[ \arctan \left( \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \right) \right]$$

- Si  $A_y \neq 0$  alors :

$$C = 0, \quad S = 1$$

$$C_2 = \cos \left[ \arctan \left( \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 - A_y^2}} \right) \right], \quad S_2 = \sin \left[ \arctan \left( \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 - A_y^2}} \right) \right]$$

- Si  $A_x = 0$  et  $A_y = 0$  alors :

$$C = 1, \quad S = 0, \quad C_2 = 0, \quad \text{et } S_2 = 1.$$

et :

$$a = C_2C$$

$$b = -C_2S$$

$$c = S_2$$

$$d = \cos \alpha S - \sin \alpha S_2C$$

$$e = \cos \alpha C - \sin \alpha S_2S$$

$$f = -\sin \alpha C_2$$

$$g = \sin\alpha S - \cos\alpha S_2 C$$

$$h = \sin\alpha C + \cos\alpha S_2 S$$

$$i = \cos\alpha C_2$$

### La dilatation :

Dans le cas d'une dilatation de centre  $C(C_x, C_y, C_z)$  et de coefficients  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  la

matrice  $M$  est la suivante : 
$$M = \begin{pmatrix} \alpha_x & 0 & 0 & C_x(1-\alpha_x) \\ 0 & \alpha_y & 0 & C_y(1-\alpha_y) \\ 0 & 0 & \alpha_z & C_z(1-\alpha_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### II.3.2 Le recollement de deux maillages :

le recollement consiste à construire le maillage résultant de la juxtaposition de deux maillages initiaux par identification des zones de contact communes (point, arêtes et faces). La recherche des items communs à deux maillages comprend plusieurs phases :

- La détermination des points géométriquement communs : il s'agit des points confondus, pour cela on suit la méthode suivante :
  - On englobe les deux maillages initiaux dans une boîte quadrangulaire (ou hexaédrique pour la dimension trois) dont on calcule les dimensions  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$  ;
  - Soit  $\varepsilon$  une tolérance donnée, on détermine le pas  $\varepsilon_\eta$  qui donne la dimension des cases de la boîte :  $\varepsilon_\eta = \varepsilon \times \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  (II.2)
  - A partir de la valeur  $\varepsilon_\eta$  on discrétise l'espace en blocs de cette taille ;
  - Les points des maillages 1 et 2 sont alors définis par rapport à ces blocs.

On cherche alors les points recollables au sens des blocs introduits :

- Soit un point du maillage 1, on regarde s'il existe des points du maillage 2 contenus dans le bloc englobant ce point ou dans les blocs adjacents ;
- Si on trouve un ou plusieurs candidats, il suffit de vérifier que :

$$\sup |x'_1 - x'_2| \leq \varepsilon_\eta \quad (II.3)$$

où  $x'_1$  est la coordonnée  $i$  du point du premier maillage et  $x'_2$  celle du point du second maillage ; dans ce cas les deux points sont confondus.

- La détermination des arêtes communes : deux arêtes seront communes si les deux points des extrémités sont reconnus commun.

- La détermination des faces communes : deux faces seront communes si leurs points sont reconnus communs.

De cette façon on retrouve les éléments du nouveau maillage qui sont ceux du premier maillage puis ceux du second maillage.

### II.3.3 Affinage d'un maillage :

L'opération d'affinage est une opération qui permet d'augmenter le nombre d'éléments ou bien sur tout le domaine, donc c'est un affinage global, ou bien sur une zone du domaine (ligne, sommet, face, ...), c'est-à-dire un affinage local.

Dans le cas de l'affinage global, tous les éléments du maillage sont découpés de la même façon. On peut utiliser dans ce cas un des algorithmes de la classe 2.

Dans le cas de l'affinage local, la zone à mailler subit un processus d'insertion de points afin de découper ces éléments. On peut utiliser dans ce cas l'approche de Delaunay-Voronoi.

### II.3.4 Régularisation d'un maillage :

La régularisation d'un maillage se fait par la technique de barycentrage pondéré ou des techniques itératives.

#### *Technique de barycentrage :*

On détermine l'ensemble des points voisins d'un point  $P$  donné, il est alors repositionné au barycentre pondéré de ses voisins :

$$P = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j P_{kj} \quad (II.4)$$

où  $n$  est le nombre de points connectés à ce point  $P$ ,  $P_j$  ces points de numéro  $k_j$  et  $\alpha_j$  un poids associé (avec  $\sum \alpha_j = 1$ ).

#### *Méthode itérative :*

Soit  $P$  un sommet du maillage et  $Q$  une mesure associée (par exemple le maximum de la qualité des éléments ayant  $P$  comme sommet), on définit un processus itératif de déplacement de  $P$  dans une direction quelconque, dont l'amplitude est initialisée à une valeur donnée.

### II.3.5 Renumerotations :

Afin de minimiser, soit la place requise pour stocker les matrices calculées lors du traitement numérique, soit le nombre de coefficients par ligne (colonne) de ces matrices ou bien le nombre d'opérations nécessaires à la résolution du système final, il est utile de renuméroter les nœuds et éventuellement les éléments d'un maillage.

Pour effectuer cette opération, nous allons décrire en détails la méthode de Gibbs qui est entièrement automatique. Afin de pouvoir décrire cet algorithme, nous allons introduire les notions suivantes :  $T_h$  désigne la triangulation,  $T_j$  l'élément  $j$  de ce maillage,  $NE$  le nombre d'éléments de  $T_h$ ,  $NOE$  le nombre de nœuds de  $T_h$ .

#### Renumerotation des nœuds :

La renumérotation des nœuds, selon la méthode de Gibbs, comprend formellement trois étapes consistant en :

1. la recherche d'un bon point de départ,
2. l'optimisation de la descendance de la numérotation,
3. la numérotation avec l'algorithme de Cuthill MacKee, numérotation éventuellement inversée.

Nous allons maintenant détailler ces trois phases ; en premier lieu nous définissons les notions supplémentaires suivantes :

- $x, y, \dots$  sont les nœuds de la triangulation  $T_h$ ,
- $y$  est *voisin* de  $x$  s'il existe un élément  $T$  de  $T_h$  tel que  $x$  et  $y$  en soient des nœuds,
- le *degré* d'un nœud  $x$  est le nombre de ses voisins, il est noté  $d(x)$ ,
- les voisins de  $x$  constituent  $N_1(x)$  le niveau 1 de sa descendance,
- les voisins des nœuds de  $N_1(x)$  non encore répertoriés forment  $N_2(x)$ , le niveau 2 de la descendance de  $x$  (un nœud apparaît au plus une fois dans  $N_k(x)$  et par suite ne peut être dans les autres niveaux),
- l'ensemble des niveaux  $N_k(x)$  constitue la descendance, notée  $D(x)$  du nœud  $x$ ,
- la profondeur  $p$  de la descendance est le nombre de niveaux de celle-ci,
- le graphe  $G$  des nœuds représente les connexions entre les nœuds ( en terme de voisins),
- le graphe  $G$  contient une ou plusieurs composantes connexes notées  $C_i$ .

Les trois phases de l'algorithme sont les suivantes :

**le point de départ :**

Parmi les nœuds du contour du domaine, on sélectionne le nœud  $x$  tel que  $d(x)$  soit minimal.

Soit  $D(x)$  sa descendance et  $N_p(x)$  son dernier niveau ; on réalise alors l'algorithme suivant :

- Début
- Pour tous les nœuds  $y$  de  $N_p(x)$ , dans l'ordre croissant de leur degré  $d(y)$ , on calcule  $D(y)$  et sa profondeur  $p(y)$ ,
- Si  $p(y) > p(x)$  alors  $y$  est sélectionné, on fait  $x = y$  et on va à Début,
- Sinon on teste un nouveau  $y$ .

Le résultat nous donne un nœud  $y$ , extrémité d'un pseudo-diamètre dont l'autre extrémité  $x$  est un point du dernier niveau de la descendance de  $y$  tel que son degré soit minimal.

**Optimisation de la descendance :**

Soient :  $x$  et  $D(x) = \{N_1(x), \dots, N_p(x)\}$  ;  $y$  et  $D(y) = \{N_1(y), \dots, N_p(y)\}$  les descendances des points de pseudo-diamètre ; on cherche à construire  $D = \{N_1, \dots, N_p\}$  qui nous donnera la nouvelle numérotation des nœuds. Ce processus se décompose en plusieurs phases :

- Boucle de  $w = 1$  à  $NOE$   
Construction des couples  $(i, j)$  associés à  $w$  tel que :  
 $(i, j)$  est formé si  $w \in N_i(x)$  et  $w \in N_{p-1-j}(y)$   
Fin de boucle.
- A partir de ces couples  $(i, j)$ , on commence à construire les  $N_i$  de la manière suivante :  
Boucle de  $w = 1$  à  $NOE$   
Si  $(i, j)$  associé à  $w$  existe :  
mettre  $w$  dans  $N_i$  et retirer  $w$  du graphe  $G$  des nœuds  
Fin de boucle.

Si  $G = 0$  aller à l'étape finale (Numérotation selon C.McK.)

Sinon on classe selon leur cardinal les  $t$  composantes connexes  $C_k$  du graphe  $G$  et on cherche à répartir les nœuds restants dans les niveaux  $N_i$  comme suit :

- Boucle de  $k = 1$  à  $t$ 
  - Boucle de  $m = 1$  à  $p$ , les niveaux de descendance



On calcule :

$$n_m = \text{card}\{N_m\}$$

$$h_m = n_m + \text{card}\{\text{nœuds de } C_k \in N_m(x)\}$$

$$l_m = n_m + \text{card}\{\text{nœuds de } C_k \in N_m(y)\}$$

Fin de boucle.

Soient  $h_0 = \max_{m=1 \dots p} \{h_m \text{ tel que } h_m - n_m > 0\}$  et

$$l_0 = \max_{m=1 \dots p} \{l_m \text{ tel que } l_m - n_m > 0\}$$

- Si  $h_0 > l_0$  alors : placer chaque nœud de la composante  $C_k$  dans le niveau  $N_i$  défini par le numéro  $i$  du couple  $(i, j)$
- Sinon  $l_0 < h_0$  et si  $\max_{i=1 \dots p} \{\text{card } N_i(x)\} > \max_i \{\text{card } N_i(y)\}$  ranger  $i$ , sinon ranger  $j$ .

Fin de boucle.

Ainsi une bonne répartition des nœuds est obtenue dans les différents niveaux.

- L'algorithme de Cuthill MacKee est alors utilisable à partir de ces résultats.

#### L'algorithme de Cuthill MacKee :

Si  $d(y) < d(x)$ , on échange  $x$  et  $y$  et on reverse les niveaux associés :  $N_{p-i+1} \leftarrow N_i$  pour  $i = 1 \dots p$

Notons  $NEW(x)$  le nouveau numéro correspondant à l'ancienne valeur  $n$  du nœud  $x$ . on pose :  $NEW(x) = 1$

Initialisation :  $n = 1$  à  $N_0 = \{x\}$

On boucle alors sur les  $p$  niveaux de la descendance :

- Boucle de  $k = 0$  à  $p - 1$ 
    - a) tant qu'il existe  $w$  plus petit numéro des nœuds de  $N_k$  précédant des voisins non renumérotés,  
faire :  $C(w) = \text{voisins}(w) \cap N_{k+1}$
    - b) tant qu'il existe  $s$  de degré minimal de  $C(w)$  non renuméroté,  
faire :  $n \leftarrow n + 1$  et  $NEW(s) \leftarrow n$
    - Si a) échange  $x$  et  $y$  et b) choisit  $N_i(x)$  pour  $C_i$
    - Ou si a) n'échange pas  $x$  et  $y$  et b) choisit  $N_i(x)$  pour  $C_i$
- Fin de boucle.

Alors :

- Boucle de  $i = 1$  à  $NOE$ 
  - $s \leftarrow NEW(i)$
  - $NEW(i) \leftarrow NOE - 1 - s$
- Fin de boucle

C'est le renversement de la renumérotation dont l'intérêt est dû au résultat suivant : la largeur du profil est globalement meilleure ou au moins aussi bonne que la largeur avant renversement.

### Renumerotation des éléments :

La renumérotation des éléments est liée à la numérotation des nœuds. L'algorithme nécessaire est le suivant :

$$num = 0$$

$$new(j) = 0 \text{ pour } j = 1 \text{ à } NE$$

- Boucle de  $i = 1$  à  $NE$ 
  - Pour  $T_j \in T_h$  faire :
    - Si  $T_j$  contient le nœud  $i$  alors :
      - Si  $new(j) = 0$  alors  $num = num + 1$  et  $new(j) = num$
      - Sinon  $new(j)$  est déjà connu
  - Fin de boucle.
- Fin de boucle.

### Conclusion

Pour dégager une méthodologie générale pour la génération d'un maillage, il est nécessaire de faire une étude de toutes les méthodes de maillage.

L'apport des transformation de maillage pour faciliter la construction est étroitement liée à la géométrie de l'objet étudié.

Un poste traitement du maillage résultant est presque nécessaire pour avoir des résultats de calculs satisfaisantes.

# CHAPITRE III

**PRESENTATION  
DETAILLE  
DES METHODES  
DE MAILLAGE**

## Introduction

Dans cette section nous allons présenter avec plus de détails les méthodes de maillage citées précédemment dans leurs classes.

### III.1 Classe 1 ' méthodes manuelles ' :

#### III.1.1 Maillage manuel :

Cette approche permet de générer des maillages simples, où l'utilisateur fournit la description de tous les éléments du maillage à construire.

Il faut alors fournir pour tout élément :

- Sa nature géométrique (segment, triangle, quadrangle, tétraèdre, pentaèdre ou élément particulier) ;
- Les coordonnées de ces sommets ;
- Les attributs physiques des sommets, des arêtes et des faces ;
- Son numéro de sous-domaine.

### III.2 Classe 2 ' méthodes de transport-projection ' :

#### III.2.1 Principe général de la méthode :

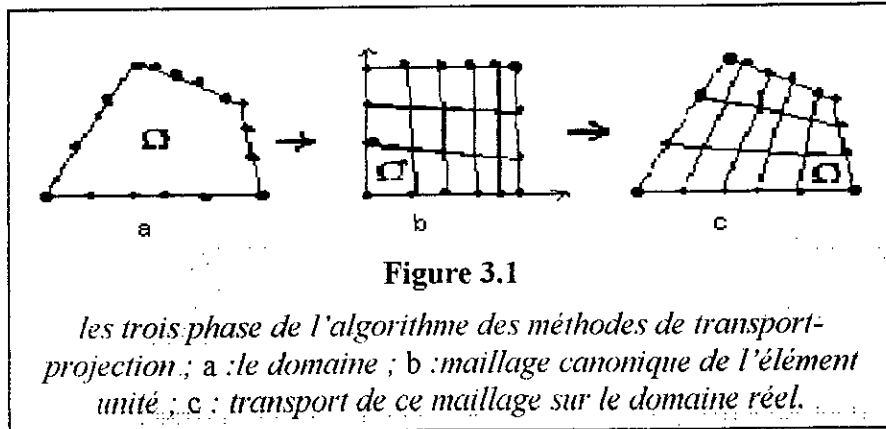
Ces méthodes sont basées sur le transport d'un maillage de référence correspondant à une géométrie élémentaire (triangle, quadrangle, tétraèdre, pentaèdre, hexaèdre ...) par l'emploi d'une fonction de transport.

Prenons le cas d'un domaine  $\Omega$  dont la forme est voisine de celle d'un quadrangle (*Figure 3.1*). Il est donc décrit par les points des sommets et d'autres sur les segments.

Soit alors  $\Omega'$  le carré de côté unité, on définit sur ses côtés des points tel que leur nombre sera égal et leur positions respectent (par proportions) celles des points du domaine réel.

Joignant les points d'un côté à l'autre on construit un maillage canonique de  $\Omega'$ . ensuite, par une fonction  $F$  permettant de projeter tout point de  $\Omega'$  dans  $\Omega$ , on retrouve le maillage du domaine  $\Omega$ .

Dans ce qui suit nous allons construire des fonctions de transport permettant de définir différentes méthodes de maillage entrant dans cette classe.



**III.2.2 Méthode basée sur les sommets du domaine :**

Pour des domaines analogues aux formes élémentaires (Figure 3.2.a), on prendra pour fonction  $F$  les expressions suivantes (qui ne sont autre que les fonctions d'interpolation de la méthode des éléments finis) :

- Pour un triangle :  $F(x', y') = \sum_{i=1}^3 P_i(x', y') a_i(x, y)$  (III.1)

où  $P_i$  sont les polynômes suivants :

$$P_1(x', y') = 1 - x' - y'$$

$$P_2(x', y') = x'$$

$$P_3(x', y') = y'$$

et les  $a_i$  sont les sommets du triangle

- Pour un quadrangle :  $F(x', y') = \sum_{i=1}^4 P_i(x', y') a_i(x, y)$  (III.2)

$$P_1(x', y') = (1 - x')(1 - y')$$

$$P_2(x', y') = x'(1 - y')$$

$$P_3(x', y') = x'y'$$

$$P_4(x', y') = (1 - x')y'$$

Les  $P_i$  et  $a_i$  sont indiqués précédemment et seront les mêmes pour ce qui suit.

- Pour un tétraèdre :  $F(x', y', z') = \sum_{i=1}^4 P_i(x', y', z') a_i(x, y, z)$  (III.3)

$$P_1(x', y', z') = 1 - x' - y'$$

$$P_2(x', y', z') = x'$$

$$P_3(x', y', z') = y'$$

$$P_4(x',y',z') = z'$$

- Pour un pentaèdre :  $F(x',y',z') = \sum_{i=1}^5 P_i(x',y',z') a_i(x, y, z)$  (III.4)

$$P_1(x',y',z') = (1 - x' - y')(1 - z')$$

$$P_2(x',y',z') = x'(1 - z')$$

$$P_3(x',y',z') = y'(1 - z')$$

$$P_4(x',y',z') = (1 - x' - y') z'$$

$$P_5(x',y',z') = x' z'$$

$$P_6(x',y',z') = y' z'$$

- Pour un hexaèdre :  $F(x',y',z') = \sum_{i=1}^8 P_i(x',y',z') a_i(x, y, z)$  (III.5)

$$P_1(x',y',z') = (1 - x')(1 - y')(1 - z')$$

$$P_2(x',y',z') = x'(1 - y')(1 - z')$$

$$P_3(x',y',z') = x'y'(1 - z')$$

$$P_4(x',y',z') = (1 - x')y'(1 - z')$$

$$P_5(x',y',z') = (1 - x')(1 - y')z'$$

$$P_6(x',y',z') = x'(1 - y')z'$$

$$P_7(x',y',z') = x'y'z'$$

$$P_8(x',y',z') = (1 - x')y'z'$$

Ces polynômes  $P_i$  permettent de construire l'image de  $M$  d'un sommet  $M'$  du maillage de référence de la façon suivante :  $M = F(M')$ , ainsi le maillage du domaine  $\Omega$  est obtenu comme image de celui de  $\Omega'$ .

La fonction  $F$  ne permet d'appliquer ce processus de maillage que dans le cas d'un domaine à côtes droites, car les polynômes  $P_i$  le constituant sont de degré un; d'où vient l'appellation de la méthode qui est dite consistante de degré un.

Dans le cas d'un domaine à côtes paraboliques (*Figure 3.2.b*) il nous faut une fonction  $F$  avec des polynômes de degré deux.

Dans le cas du quadrangle la fonction sera de la forme :

$$F(x',y') = \sum_{i=1}^5 P_i(x',y') a_i(x, y) \quad (III.6)$$

avec :  $P_1(x',y') = (1 - x')(1 - y')(1 - 2x' - 2y')$

$$P_2(x',y') = x'(1 - y')(2x' - 2y' - 1)$$

$$P_3(x',y') = -x'y'(3 - 2x' - 2y')$$

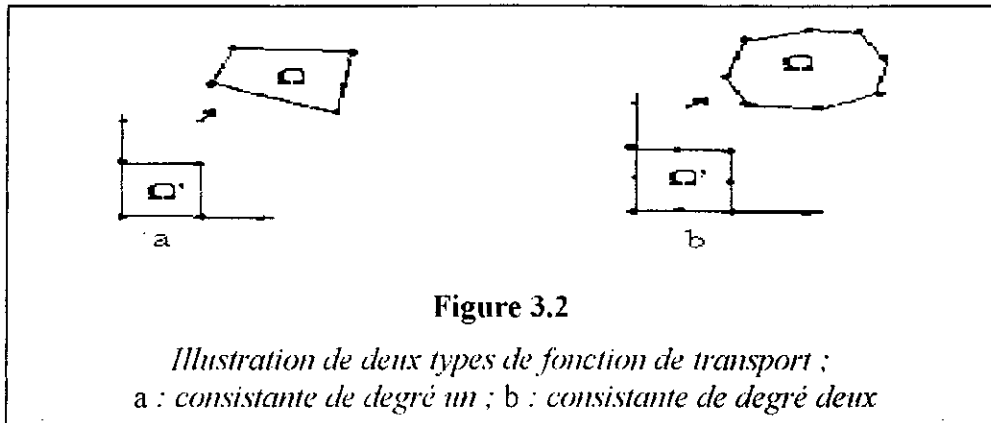
$$P_4(x',y') = (1 - x')y'(-2x' - 2y' - 1)$$

$$P_5(x',y') = 4x'(1 - x')(1 - y')$$

$$P_6(x',y') = 4x'y'(1-y')$$

$$P_7(x',y') = 4x'(1-x')y'$$

$$P_8(x',y') = 4(1-x')y'(1-y')$$



### III.2.3 Méthode préservant un contour polygonal :

Cette méthode est plus générale que la méthode précédente, car elle fournit une fonction  $F'$  qui respecte exactement le contour polygonal du domaine. Cette approche est applicable dans le cas de domaines assimilables topologiquement à une géométrie élémentaire (triangle, quadrangle, tétraèdre, ...).

Les éléments créés sont de même nature que le domaine de référence ; par post-traitement on pourra découper des quadrangles en triangles.

Les fonctions de transfert sont les suivantes :

- Pour un domaine topologiquement analogue à un triangle :

$$F(x', y') = \frac{1-x'-y'}{1-x'} f_1(x') + \frac{x'}{1-y'} f_2(y') + \frac{y'}{x'-y'} f_3(1-x'-y') - \left( \frac{y'}{x'-y'} (1-x'-y') a_1(x, y) + \frac{1-x'-y'}{1-x'} x' a_2(x, y) + \frac{x'}{1-y'} y' a_3(x, y) \right) \quad (III.7)$$

où  $a_i$  désigne le sommet  $i$  du domaine réel et  $f_i$  une paramétrisation du côté  $i$  de ce même domaine.

- Pour un domaine topologiquement analogue à un quadrangle :

$$F(x', y') = (1 - y')f_1(x') + x'f_2(y') + y'f_3(x') + (1 - x')f_4(y') - ((1 - x')(1 - y')a_1(x, y) + x'(1 - y')a_2(x, y) + x'y'a_3(x, y) + (1 - x')y'a_4) \quad (\text{III.8})$$

Les  $a_i$  et  $f_i$  sont comme indiqués précédemment. La paramétrisation  $f_i$  n'est connue que de manière discrète, elle sert donc à approcher le mieux possible les valeurs utiles en fonction des valeurs effectivement connues.

- Pour un domaine de topologiquement analogue à un tétraèdre :

$$F(x', y', z') = \frac{\sum_{i=1}^4 \alpha_i \phi_i(x', y', z')}{\sum_{i=1}^4 \alpha_i} \quad (\text{III.9})$$

où les  $\phi_i$  des paramétrisations des faces de  $\Omega$  et les  $\alpha_i$  sont des fonctions de  $x', y'$  et  $z'$  définies par :

$$\alpha_i = (1 - \lambda'_{i-3}) \frac{\lambda'_i}{(\lambda'_i - \lambda'_{i+3})} \frac{\lambda'_{i+1}}{(\lambda'_{i+1} + \lambda'_{i-3})} \frac{\lambda'_{i-2}}{(\lambda'_{i-2} + \lambda'_{i+3})}$$

pour  $i = 1, 4$  avec  $\lambda'_{i,j}$  pour  $j = 0, 3$  ( $i-j$  étant pris modulo 4) les coordonnées barycentriques :

$$\lambda'_1 = 1 - x' - y' - z'$$

$$\lambda'_2 = x'$$

$$\lambda'_3 = y'$$

$$\lambda'_4 = z'$$

- Pour un domaine topologiquement analogue à un pentaèdre :

$$F(x', y', z') = \frac{\sum_{i=1}^5 \alpha_i \phi_i(x', y', z')}{\sum_{i=1}^5 \alpha_i} \quad (\text{III.10})$$

où les  $\phi_i$  des paramétrisations des faces de  $\Omega$  et les  $\alpha_i$  sont des fonctions de  $x', y'$  et  $z'$  définies par :

$$\alpha_1 = (1 - z') \frac{1 - x' - y'}{(1 - x' - y' + z')} \frac{x'}{(x' + z')} \frac{y'}{(y' + z')}$$

$$\alpha_2 = (1 - x') \frac{z'}{(x' + z')} \frac{(1 - z')}{(1 - z' + x')} \frac{(1 - x' - y')}{(1 + y')} \frac{y'}{(x' + y')}$$

$$\alpha_3 = (1 - y') \frac{z'}{(y' + z')} \frac{(1 - z')}{(1 + y' - z')} \frac{x'}{(x' + y')} \frac{(1 - x' - y')}{(1 - x')}$$

$$\alpha_4 = z' \frac{x'}{(1 + x' - z')} \frac{y'}{(1 + y' - z')} \frac{(1 - x' - y')}{(2 - x' - y' - z')}$$



$$\alpha_5 = (x'+y') \frac{z'}{(z'+1-x'-y')} \frac{1-z'}{(2-x'-y'-z')} \frac{x'}{(1-y')} \frac{y'}{(1-x')}$$

- Pour un domaine topologiquement analogue à un hexaèdre :

$$F(x', y', z') = \frac{\sum_{i=1}^6 \alpha_i \phi_i(x', y', z')}{\sum_{i=1}^6 \alpha_i} \tag{III.11}$$

où les  $\alpha_i$  sont des fonctions de  $x', y'$  et  $z'$  définies par

$$\alpha_i = (1-x'_{i-1}) \frac{x'_i}{(x'_i+x'_{i-1})} \frac{1-x'_j}{(1-x'_i-x'_{i-1})} \frac{x'_{i+1}}{(x'_{i+1}+x'_{i-1})} \frac{1-x'_{i+1}}{(1-x'_{i+1}+x'_{i-1})}$$

pour  $i = 1, 3$  avec  $x'_{i+j} = x', y'$  ou  $z'$  pour  $j = 0, 3$  ( $i+j$  étant pris modulo 4).

$$\alpha_{i+3} = x'_{i-1} \frac{x'_i}{(x'_i+1-x'_{i-1})} \frac{1-x'_j}{(x'_{i-1}-x'_i)} \frac{x'_{i+1}}{(x'_{i+1}+1-x'_{i-1})} \frac{1-x'_{i+1}}{(2-x'_{i+1}-x'_{i-1})}$$

pour  $i = 1, 3$  avec  $x'_{i+j} = x', y'$  ou  $z'$  pour  $j = 0, 3$  ( $i+j$  étant pris modulo 4).

### III.3 Classe 3 ' maillage par résolution d'équations aux dérivées partielles ' :

#### III.3.1 Principe général de la méthode :

Cette classe de méthodes suit les mêmes étapes de la classe précédente, mais elle se limite aux géométries de topologie assimilable à un rectangle ou un hexaèdre ; et la fonction utilisée pour générer le maillage n'est pas fixée à l'avance, elle est calculée en résolvant un système d'équations aux dérivées partielles convenablement choisi.

on a :  $x, y, z$  les variables d'espace liées au domaine réel  $\Omega$ , et  $x', y', z'$  les variables liées au domaine de référence  $\Omega^*$ .

(S) un système d'équations aux dérivées partielles qui est appelé système de génération, et (CL) des conditions aux limites.

A chaque couple (S), (CL) ayant au moins une solution calculable correspond une méthode qui possède des propriétés différentes. Le problème est dans le choix de ce système (S). On peut trouver deux approches :

- (S) est posé en variables  $x, y, z$  avec comme conditions aux limites (CL) des conditions d'isovaleurs sur les quatre cotés ou les six faces du domaine. (S) est inversé, c'est à dire au lieu de calculer les fonctions  $x'(x,y,z), y'(x,y,z), z'(x,y,z)$  on cherche les fonctions  $x(x',y',z'), y(x',y',z'), z(x',y',z')$  ceci conduit à un

système couplé que l'on résout par des méthodes itératives ; dont la solution donne le résultat cherché.

B. (S) est posé en variables  $x', y', z'$  avec comme conditions aux limites (CL) les valeurs des coordonnées des points du contour de  $\Omega$ . De cette façon (S) est résolu sur le contour  $\Omega'$  et sa solution  $x(x',y',z')$ ,  $y(x',y',z')$ ,  $z(x',y',z')$  permet de construire le maillage de  $\Omega$ .

### III.3.2 Méthodes elliptiques :

L'idée consiste à l'utiliser des propriétés régularisantes de l'opérateur de Laplace ' $\Delta$ '

#### Approche de type A :

Dans ce cas on considère les deux systèmes suivants :

$$x'_{xx} + x'_{yy} = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ c'est une condition aux limites sur } \Gamma \text{ (la frontière du domaine } \Omega)$$

$$y'_{xx} + y'_{yy} = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ comme ci-dessus}$$

On suppose que l'on connaisse la solution de ces systèmes que l'on inverse afin de trouver  $x(x',y')$  et  $y(x',y')$  pour obtenir un système en  $x$  et  $y$ .

A partir de

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy' \\ dy = \frac{\partial y}{\partial x'} dx' + \frac{\partial y}{\partial y'} dy' \end{cases} \quad \text{(III.12)}$$

et de

$$\begin{cases} dx' = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy \\ dy' = \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy \end{cases} \quad \text{(III.13)}$$

en déduit :

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial x'} \left[ \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy \right] + \frac{\partial x}{\partial y'} \left[ \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy \right] \\ dy = \frac{\partial y}{\partial x'} \left[ \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy \right] + \frac{\partial y}{\partial y'} \left[ \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy \right] \end{cases} \quad \text{(III.14)}$$

qui donne par identification les relations suivantes :

$$x_x x'_x + x_y y'_x = 1 \quad \text{(III.15)}$$

$$x_x x'_y + x_y y'_y = 0 \quad \text{(III.16)}$$

$$y_x x'_x + y_y y'_x = 0 \quad (III.17)$$

$$y_x x'_y + y_y y'_y = 1 \quad (III.18)$$

qui s'exprime sous forme matricielle par :

$$\begin{pmatrix} x_x & x_y \\ y_x & y_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_x & x'_y \\ y'_x & y'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (III.19)$$

d'où on déduit :

$$\begin{pmatrix} x'_x & x'_y \\ y'_x & y'_y \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_y & -x_y \\ -y_x & x_x \end{pmatrix} \quad (III.20)$$

avec  $J = x_x y_y - x_y y_x$  le déterminant de la matrice  $\begin{pmatrix} x_x & x_y \\ y_x & y_y \end{pmatrix}$

partant de  $x'_x = \frac{y_y}{J}$ , on calcule  $x'_{xx}$  qui vaut :

$$x'_{xx} = \frac{\delta}{\delta x'} \left[ \frac{y_y}{J} \right] x'_x + \frac{\delta}{\delta y'} \left[ \frac{y_y}{J} \right] y'_x$$

$$x'_{xx} = \frac{\delta}{\delta x'} \left[ \frac{y_y}{J} \right] \frac{y_y}{J} + \frac{\delta}{\delta y'} \left[ \frac{y_y}{J} \right] \frac{y_x}{J}$$

$$x'_{xx} = \frac{1}{J^2} [y_y y_{y'x'} - y_x y_{y'y'}] + \frac{1}{J^2} [-J_x y_y^2 + J_y y_x y_x']$$

De manière analogue on trouve les expressions de  $x'_{yy}$ ,  $y'_{xx}$ ,  $y'_{yy}$ . D'après l'équation  $\Delta x' = \Delta y' = 0$  et les valeurs de  $J_x$  et  $J_y$  exprimées en fonction de  $x$  et  $y$ , on déduit que  $x$  et  $y$  satisfont le système :

$$g_{11} x_x x' + g_{22} x_y y' + 2g_{12} x_x y' = 0 \quad (III.21)$$

$$g_{11} y_x x' + g_{22} y_y y' + 2g_{12} y_x y' = 0 \quad (III.22)$$

$$\text{avec : } g_{ij} = \sum_{m=1}^2 A_{mi} A_{mj}$$

$$\text{où } A_{mi} = (-1)^{i+m} (\text{cofacteur}_{mi} \text{ de la matrice } \begin{pmatrix} x_x & x_y \\ y_x & y_y \end{pmatrix})$$

Le résultat est donc un système posé dans  $\Omega'$  (dont on connaît un maillage) ; ce système est couplé et non linéaire. On peut le résoudre par des techniques de relaxations successives (on impose les conditions aux limites réelles) à partir d'une solution initiale donnée.

Pour un système de génération plus compliqué et plus sophistiqué, on pourra jouer sur les conditions aux limites en ajoutant un second membre aux systèmes précédents.

**Approche de type B :**

Soit  $\Omega'$  le carré unité et soit une grille régulière recouvrant ce domaine (*Figure 3.3*).

On considère les deux systèmes suivants :

$$x_{xx'} - x_{yy'} = 0 \text{ dans } \Omega'$$

$$x(x',y') = x_{\Gamma} \text{ sur } \Gamma'$$

et

$$y_{xx'} - y_{yy'} = 0 \text{ dans } \Omega'$$

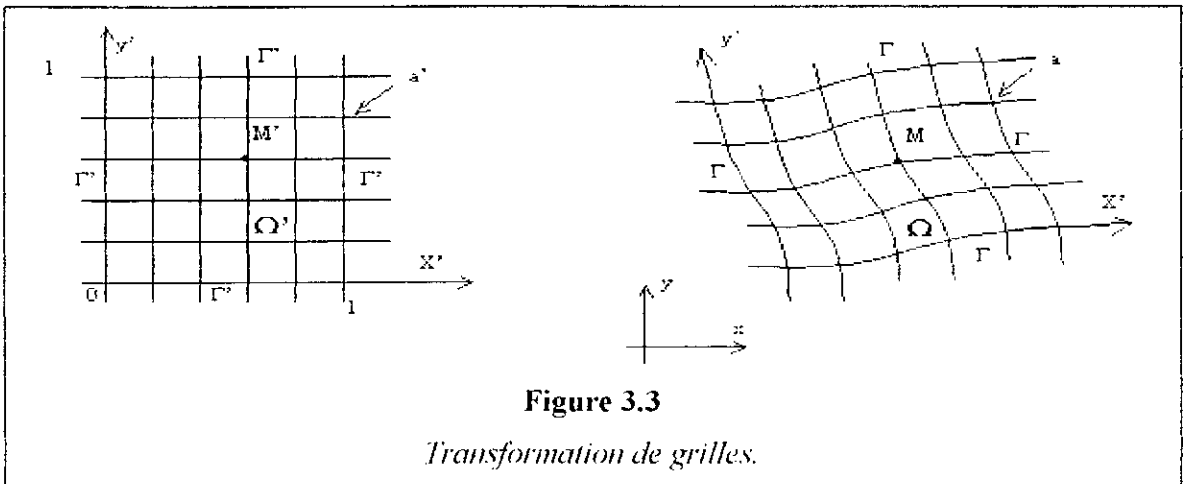
$$y(x',y') = y_{\Gamma} \text{ sur } \Gamma'$$

Les conditions aux limites consistent à imposer, en tout point  $a'$  de  $\Gamma'$  la valeur réelle, c'est à dire :

$$x(x'_a, y'_a) = x_a$$

$$y(x'_a, y'_a) = y_a$$

la solution de ces systèmes de génération donne en chaque point  $M'$  de  $\Omega'$  les valeurs de  $x(x',y')$  et  $y(x',y')$  ce qui donne le maillage de  $\Omega$ .



**Figure 3.3**

*Transformation de grilles.*

### III.4 Classe 4 ' superposition-déformation de grilles ' :

Une grille est définie de façon à contenir  $\Omega$  (son contour est donnée). Elle est composée de cases carrées ou cubiques, qui sont ensuite déformées pour mieux prendre en compte la géométrie réelle de  $\Omega$ , et enfin découpées en triangles ou tétraèdres de manière à produire le maillage cherché.

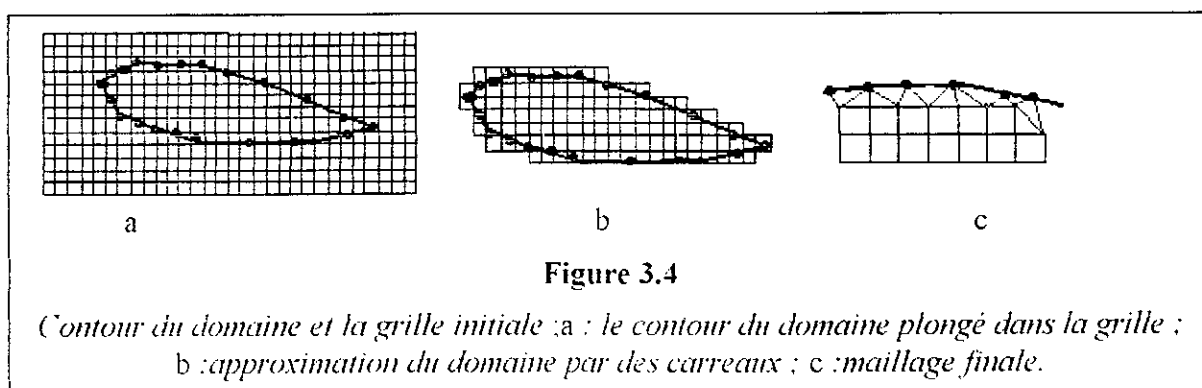
La grille peut être régulière ou basée sur une construction sous forme d'arbre quaternaire ou octal.

#### III.4.1 Génération à partir d'une grille régulière :

La grille  $G$  est régulière composée de carrée ou de cubes de taille identiques. Cette taille est fonction de la plus petite distance entre deux points du contour du domaine (*Figure 3.4.a*). Le procédé comprend les phases suivantes :

- élimination des cases de  $G$  dont l'intersection avec  $\Omega$  est vide ;
- traitement des cases de  $G$  contenant une partie de la frontière du domaine. Deux possibilités existent :
  - une case dont l'intersection avec le frontière est non vide est prise comme élément du maillage ; le domaine est donc approché par les case de la grille (*Figure 3.4.b*).
  - les cases frontales sont découpées et tordues ou transformé en triangle pour épouser la forme du contour (*Figure 3.4.c*).
- énumération des éléments du maillage.

Cette méthode perd son efficacité quand les données discrétisant le contour sont



irrégulières ; par contre certaines applications ont besoin d'un maillage régulier pour simplifier les calculs.

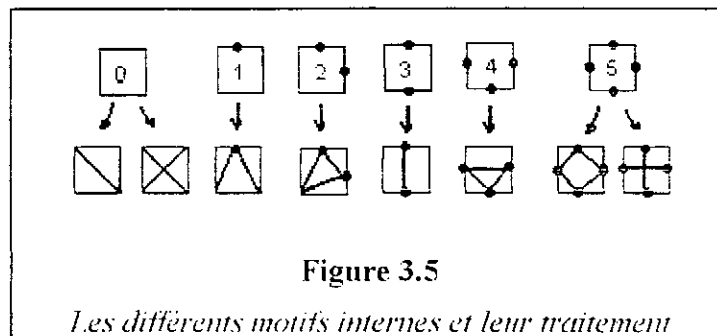
### III.4.2 Génération basée sur l'arbre quaternaire :

L'arbre quaternaire ou *quadtree* (en anglais) est une méthode de découpage de la grille  $G$ , elle commence par une case  $c_l$  englobant tout le domaine  $\Omega$  qui est découpé en quatre cases notées  $c_{lj}$  pour  $j = 1, 4$  par création des médianes aux côtés de  $c_l$  ; le découpage continue de cette façon jusqu'à la satisfaction d'un critère de découpage  $C_r$ .

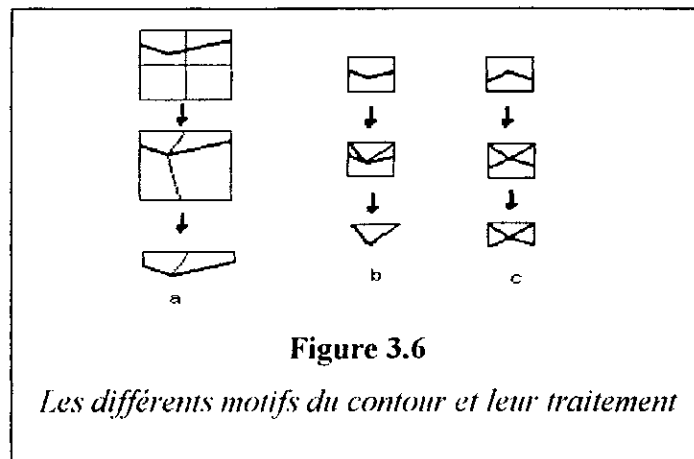
Ainsi la position de toute case est connue par  $c_{indice}$  qui identifie son rang dans la hiérarchie du découpage.

Pour générer le maillage basé sur cette approche on passe par les phases suivantes :

- Phase 1 : un premier rectangle est formé qui contient tous les points du contour. Le processus de découpage commence et continue jusqu'à ce que le critère  $C_r$  qui est  $C_r = \text{'chaque case contiens au plus un seul point du contour'}$
- Phase 2 : l'équilibrage qui consiste à continuer le découpage jusqu'à avoir au plus un point intermédiaire existe sur une arête d'une maille.
- Phase 3 : analyse des mailles. Les configurations ou motifs sont mis en évidence puis traités. Le choix du critère  $C_r$  induit les motifs suivant :
  - maille externe : elle ne nous intéresse pas, elle sera éliminée.
  - maille interne : on peut avoir les motifs suivant (*Figure 3.5*) :
    - ★ sans point sur ses côtés (motif 0),
    - ★ avec un point sur un côté (motif 1),
    - ★ avec un point sur deux côtés consécutifs (motif 2),
    - ★ avec un point sur deux côtés non consécutifs (motif 3),
    - ★ avec un point sur trois côtés (motif 4),
    - ★ avec un point sur chacun des côtés (motif 5).



- maille comprenant une intersection avec le contour (*Figure 3.6*) :
  - ★ le point du contour contenu dans la case est voisin d'un sommet de la case (motif a),
  - ★ le point du contour est à l'intérieur de la case (motif b et c).
- Phase 4 : régularisation des points internes (sommets des mailles issues de la phase 2). Elle est généralement basée sur un barycentrage des sommets par rapport à leurs voisins. Elle permet d'équilibrer le résultat.



### III.4.3 Génération basée sur l'arbre octal :

Cette approche est réservée aux géométries en trois dimensions. Elle est similaire à l'approche précédente sauf que dans ce cas, les rectangles sont remplacés par des hexaèdres et le découpage d'une case (ou père) est fait en huit cases (fils) au lieu de quatre en respectant le critère de découpage ( $C'$ ).

### III.5 Classe 5 ' méthodes de blocs ' :

Ces méthodes sont très efficaces lors du traitement des géométries complexes en trois dimensions. elles sont basées sur le découpage du domaine en une série de blocs de topologies élémentaires (triangles, quadrangles, tétraèdres, pentaèdres et hexaèdres). Chaque bloc est alors traité par l'une des méthodes des classes 2 (transport-projection) et 3 (résolution d'équations aux dérivées partielles).

Le maillage du domaine complet est obtenu par le recollement des différents maillages des blocs avec la contrainte de bien gérer les interfaces inter-blocs.

Cette approche nécessite la fourniture d'une discrétisation grossière du domaine en blocs de nature linéique, triangulaire, quadrangulaire, tétraédrique, pentaédrique ou hexaédrique et d'une répartition de points sur les arêtes de ces blocs qui serviront à découper les arêtes grossières puis les faces grossières et enfin les blocs eux - mêmes.

L'approche comprend quatre étapes :

- Etape 1 : création du maillage des faces des différents blocs. On distingue deux cas :
  - Le maillage des faces est donné, chaque face triangulaire est décomposée en  $N^2$  sous-triangles de manière canonique et chaque face quadrangulaire est décomposée en  $N^2$  sous-quadrangles de manière canonique aussi.
  - Le maillage des faces est créé à partir des points de ses arêtes on utilise la méthode vue dans l'approche de classe 2.
- Etape 2 : maillage du blocs et cela en utilisant une des méthodes décrites dans la classe 2 ou celles décrites dans la classe 3 pour générer les fonctions de transport et mailler le bloc.
- Etape 3 : énumération des éléments du bloc issus du découpage : les sommets des éléments sont connus par trois indices  $i, j$  et  $k$ , et à chaque sommet est associé un numéro global :  $(i, j, k) \Rightarrow N = P(i, j, k)$ .

tel que  $P$  un pointeur construit comme suit :

- Si le sommet  $S$  est sommet du maillage grossier,  $P(i, j, k)$  est son numéro dans ce maillage grossier :
- Si le sommet  $S$  est sur une arête grossier,  $P(i, j, k)$  est calculé grâce au numéro de cette arête dans le maillage grossier.



- Si le sommet  $S$  est sur une face grossière,  $P(i, j, k)$  est calculé grâce au numéro de cette face dans le maillage grossière.
- Pour  $S$  interne,  $P(i, j, k)$  est défini séquentiellement à partir du premier numéro libre (c'est à dire après le dernier numéro du dernier point de la dernière face grossière).

$P$  étant connue, on peut alors trouver les sommets de tout élément à partir des triplets  $(i, j, k)$  associés à la numérotation  $i, j, k$  repérée dans l'élément grossier de départ.

- Etape 4 : recollement des maillages des différents blocs. Cette opération est implicite dès lors que les points des faces communes à deux blocs sont numérotées de façon globale.

### III.6 Classe 6 : ' méthodes frontales et méthodes de Delaunay-Voronoi ' :

#### III.6.1 Méthodes frontales :

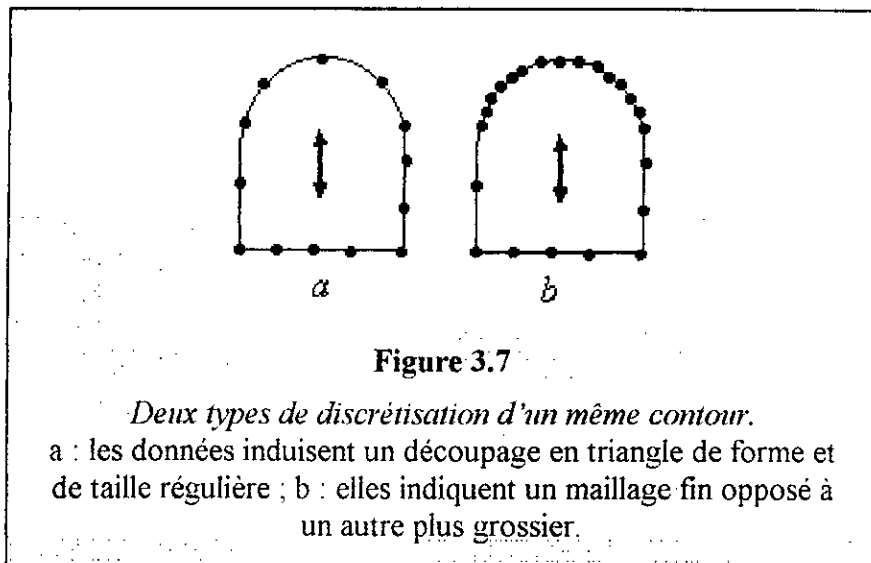
Elles utilisent comme données une approximation polygonale en dimension deux sous la forme d'une liste de segments, ou bien une approximation polyédrique en dimension trois sous la forme d'une liste de faces triangulaires.

Elles sont basées sur un processus itératif. En effet un front est initialisé par l'ensemble des items du contour, ce front est analysé pour déterminer une zone de départ, celle-ci permet de créer un ou plusieurs éléments internes, le front est alors mis à jour et le processus de création des éléments est poursuivi tant que le front n'est pas vide.

Pour gérer au mieux le déroulement de cette approche on aura besoin des outils suivants :

- La définition d'un espace de voisinage : qui permet un accès rapide aux éléments voisins d'un élément donné. Pour cela on peut construire une grille englobant le domaine  $\Omega$ , les cases de cette grille référencent les informations utiles c'est à dire pour chaque élément à traiter, on pourra connaître l'ensemble des éléments, arêtes (ou faces) et l'ensemble des points voisins. La grille peut être régulière ou bien une grille de type arbre quaternaire ou arbre octale (cf. classe 4).
- La définition d'un espace de contrôle : qui permet d'orienter la création des points internes, car on ne sait pas ce qui se passe devant le front

(Figure 3.7).



Afin de résoudre ce problème on utilise un espace de contrôle  $(\Delta, H)$  défini tel que  $\Delta$  est une grille ou un recouvrement du domaine et à tout point appartenant au recouvrement est associée une fonctionnelle  $H$  qui permet de spécifier des propriétés à satisfaire ou des critères à vérifier par les éléments du maillage cherché.

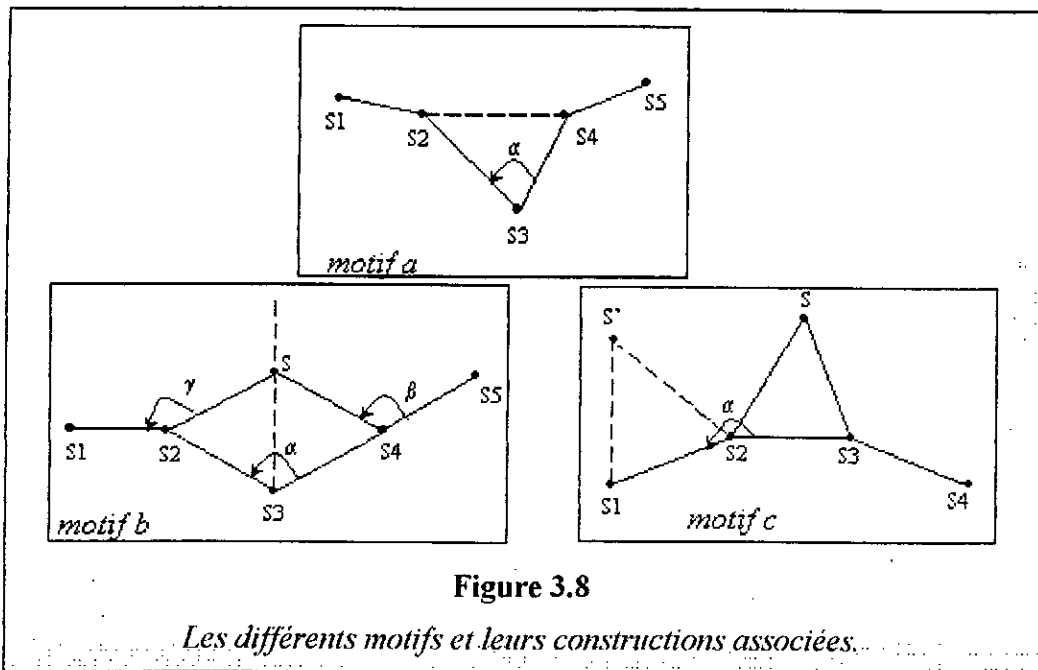
- L'utilisation de cet espace pour créer les points internes et les éléments en résultant, donc à partir de l'état du front actuel, on utilise  $(\Delta, H)$  pour obtenir le nouvel front par création d'éléments vérifiant les propriétés contenues dans l'espace de contrôle, en effet  $H$  permet de préciser tant une direction à suivre qu'une distance à respecter.

### Méthode frontale en deux dimensions :

Le front est construit comme l'ensemble des segments du contour  $\Gamma$  décrivant le domaine  $\Omega$ . Le processus de création d'un nouveau front (ou éléments internes) est le suivant :

Soit  $F$  l'état actuel du front associé au contour  $\Gamma$ , l'analyse du front repose sur l'étude des propriétés géométriques des segments le constituant. L'intérieur du domaine est identifié grâce à l'orientation des segments du contour.

Soit  $\alpha$  l'angle formé par deux segments consécutifs du front  $F$ . trois motifs sont envisageables (Figure 3.8) :



- $\alpha < \pi/2$  (motif a), les deux segments d'angle  $\alpha$  sont retenues et vont être les deux cotés du seul triangle créé.
- $\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi/3$  (motif b), à partir des deux segments d'angle  $\alpha$ , on va générer un point interne et deux triangles ; dans le cas où  $\beta$  et  $\gamma$  sont compris entre  $\pi/5$  et  $2\pi/5$  le sommet est générer sur la bissectrice de l'angle  $\alpha$  à une distance  $d_{SS3} = 1/6 (2d_{S2S3} + 2d_{S3S4} + d_{S1S2} + d_{S4S5})$  autrement la construction numéro 1 (motif a) est employée.
- $2\pi/3 < \alpha$  (motif c), un seul segment est retenu, un triangle est construit avec ce segment comme coté et un point interne ; le triangle doit être proche d'un triangle équilatéral.

La position des points internes créés est définie de telle sorte que l'élément s'appuyant sur ces points soit aussi régulier que possible ; sans oublier que ce point doit être interne au domaine et qu'il n'est pas dans un élément déjà construit ; ceci peut être satisfait en vérifiant que l'intersection de toutes les arêtes issues de ce point avec une arête quelconque du front est vide.

Le nouveau front  $F$  est formé en éliminant du front actuel, les arêtes du front  $F'$  actuel appartenant à un triangle créé et en y ajoutant les arêtes du ou des triangles construits, arêtes non communes à deux éléments.

Dans le cas de domaine fortement non convexe cette approche ne converge pas nécessairement ; la même chose arrive si une variation trop brutale dans la répartition des points du contour se présente ; dans ce cas il faut diviser le domaine en sous-ensembles plus simples.

### **Méthode frontale en trois dimensions :**

L'application de cette approche en dimension trois est plus délicate qu'en dimension deux ; en effet elle nécessite la fourniture d'une discrétisation du contour formé d'un maillage en faces triangulaires du domaine considéré.

Donc à partir d'une approximation polyédrique du contour, cet algorithme construit le recouvrement du domaine en tétraèdres. L'intérieur du domaine est déterminé grâce à l'orientation des données du contour.

On applique le même schéma qu'en dimension deux. De ce fait, selon les cas, soit un élément est créé avec les faces retenues, soit un point interne est généré et permet de construire des éléments en le joignant aux faces sélectionnées.

Un nouveau front  $F'$  est formé en éliminant du front actuel la faces du front actuel appartenant à un tétraèdre créé et y ajoutant les faces du ou des tétraèdres construits, dans le cas où une telle face est non commune à deux élément.

Ce nouveau front est traité par la même méthode, et quand il est vide, le maillage final est obtenu.

### **III.6.2 Méthodes de Delaunay-Voronoi :**

A partir de la donnée de sa frontière ce maillage est construit. L'approche est basée sur un processus d'insertion de points ; ces points sont insérés un à un jusqu'à ce que le domaine soit totalement balayé.

La frontière est définie soit de façon globale (c'est à dire, elle est connue de manière analytique ou sous forme paramétrée (équations, splines, carreaux de Bézier, ...)), soit de façon discrète (c'est à dire, elle est connue via la liste de ses arêtes ou facettes triangulaires composant son maillage).

#### **Processus d'insertion de points**

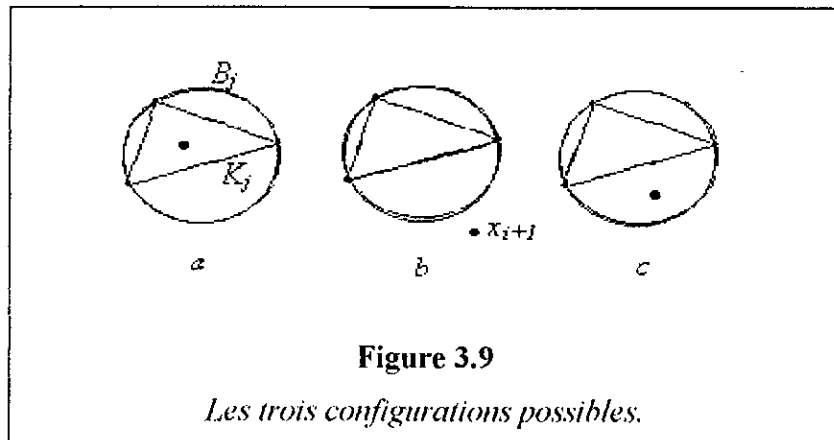
Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  un ensemble (ou nuage) de  $n$  points distincts appartenant au plan ou à l'espace  $\{x_k\}$ , et  $T_i$  un maillage dont les sommets d'éléments sont les  $i$  premiers points de  $\{x_k\}$ , le nouveau maillage  $T_{i+1}$  contenant le point  $x_{i+1}$  du nuage de sorte qu'il soit un de ces sommets est défini :

A partir des deux ensembles suivants :

- $B_i = \bigcup_j B_j$  où  $B_j$  est le cercle circonscrit à l'élément  $K_j$  de  $T_i$ .
- $T_i = \bigcup_j K_j$  est la triangulation s'appuyant sur les  $i$  premiers points.

La position du point  $x_{i+1}$  dépend de trois situations possibles (Figure 3.9) :

- $a : x_{i+1} \in T_i$  c'est à dire  $\exists K_j \in T_i$  tel que  $x_{i+1} \in K_j$ ,
- $b : x_{i+1} \notin B_i$  c'est à dire  $x_{i+1}$  n'est dans aucun cercle  $B_j$ ,
- $c : x_{i+1} \notin T_i$  mais  $x_{i+1} \in B_i$  c'est à dire  $x_{i+1}$  n'est pas dans un élément  $K_j$  de  $T_i$  mais est dans un cercle  $B_j$ .



A chacune de ces configurations correspond une construction du maillage  $T_{i+1}$  cherché :

- Situation  $a$  : soit  $S$  l'ensemble des éléments de  $T_i$  dont le cercle circonscrit contient le point  $x_{i+1}$  ; et soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  les arêtes externes de cet ensemble, on montre que ces faces sont visibles depuis le point  $x_{i+1}$ . Par suite on a :  

$$T_{i+1} = (T_i - S) \cup \{F_j, x_{i+1}\} \quad 1 \leq j \leq p$$
Ainsi  $T_{i+1}$  est construit, ce maillage comprend comme sommets d'éléments les  $(i+1)$  premiers points du nuage  $\{x_k\}$ . Les nouveaux éléments, notés  $\{F_j, x_{i+1}\}$ , sont construits en joignant le point  $x_{i+1}$  aux arêtes externes  $F_j$  dans le sens direct.
- Situation  $b$  : comme  $x_{i+1} \notin B_i$ ,  $x_{i+1} \notin T_i$ , on cherche  $F_1, F_2, \dots, F_p$  les arêtes externes de  $T_i$  définissant un demi plan séparant strictement  $x_{i+1}$  et  $T_i$ , alors :  
Comme ci-dessus les triangles doivent être énumérés dans le sens direct.

- Situation  $c$  : soit  $S$  l'ensemble des éléments de  $T_i$  dont le cercle circonscrit contient le point  $x_{i+1}$  ; et soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  les arêtes non communes à deux éléments de  $S$  déterminant un demi plan ne séparant pas  $x_{i+1}$  et  $T_i$ , dans ce cas :

$T_{i+1} = T_i - S \cup \{F_j, x_{i+1}\}_j \quad 1 \leq j \leq p$  est la triangulation de Delaunay associée aux  $(i + 1)$  premiers points du nuage  $\{x_k\}$ .

### Algorithme du maillage dans le cas bidimensionnel :

Soit un domaine défini par la liste des arêtes de son contour, le schéma de l'algorithme est le suivant :

1. création du nuage de points associé aux données, c'est-à-dire les points des arêtes du contour du domaine ;
2. détermination de la position de quatre points supplémentaires tels que le quadrilatère formé par ces points englobe tous les points du nuage ;
3. maillage de ce quadrilatère à l'aide de deux triangles ;
4. insertion un à un des points du nuage pour construire un maillage comprenant comme sommets d'éléments ces points.

Cette dernière étape est réalisée à l'aide du processus d'insertion décrit ci-dessus, et les triangles de l'étape trois initialisent ce processus.

Le maillage résultant est appelé le maillage boîte (qui est une triangulation qui recouvre un quadrilatère englobant le domaine et dont les sommets d'éléments sont les quatre points définissant le quadrilatère englobant et les points donnée). Après avoir éliminé tous les triangles hors contour on obtient un maillage frontalier (qui est une triangulation construite uniquement à partir des points du contour du domaine).

Pour obtenir le maillage final, il faut procéder à la création de points internes ; dans ce sens on peut utiliser l'une des deux approches suivantes :

- insérer un point dans chaque élément jugé trop grand par rapport à une valeur calculée à partir des " $h$ " locaux, ou dans chaque élément dont le cercle circonscrit est grand.
- Evaluer chaque élément du maillage en calculant sa qualité, sa surface et la consistance entre la longueur de ses arêtes et les  $h$  locaux de ses sommets. Si l'élément est incorrect pour l'un ou l'autre de ces critères, on crée le point optimal associé à sa plus petite arête. Si ce point est interne à l'élément ou est dans un de ses voisins, on insère ce point ; sinon on passe au triangle suivant.

Cet algorithme de maillage est le plus général dont on peut disposer. Ses applications sont nombreuses, en particulier on peut l'utiliser à des fins diverses en jouant sur différentes options (obtenir le maillage boîte ou le maillage frontalier seulement, spécifier tout ou partie des points internes, obtenir le maillage de l'enveloppe d'un nuage de points,...).

### **Algorithme de maillage dans le cas tridimensionnel :**

Soit un domaine défini par la liste des faces triangulaires de son contour, les étapes de maillage sont les suivantes :

1. création du nuage de points associé aux données, c'est-à-dire les points du contour du domaine (les sommets du triangle discrétisant ce contour) ;
2. calcul de la position de huit points supplémentaires tels que l'hexaèdre formé par ceux-ci englobe tous les points ;
3. maillage de cet hexaèdre à l'aide de cinq tétraèdres ;
4. insertion, un à un, des points du nuage de départ pour construire un maillage comprenant comme sommets d'éléments ces points.

La réalisation de cette étape se base sur le processus décrit auparavant ayant comme maillage initial les tétraèdres créés lors de la troisième étape. Le maillage résultant est le maillage boîte. ensuite, on procède à l'élimination de tous les tétraèdres dont un sommet n'appartient pas à l'ensemble des points du domaine.

Ce maillage ne contient pas toutes les facettes triangulaires de la donnée, pour cela on va procéder aux deux étapes suivantes :

1. recherche des arêtes manquantes et recréation une à une de celles-ci : pour une telle arête on définit l'ensemble des tétraèdres dont l'intersection avec le segment associé est non vide. On rencontre les deux situations suivantes : soit le segment coupe des faces d'éléments ou il coupe des arêtes d'élément. alors l'ensemble des éléments liés au segment est localement modifié de façon à créer une arête désirée et supprimer une arête gênante.
2. recherche des faces manquantes et recréation une à une de celle-ci : à partir de l'étape précédente, on examine la situation géométrique liée aux faces manquantes : le triangle associé à une telle face est percé par une ou plusieurs arêtes.

Cet algorithme est d'application général. En effet on peut l'utiliser à des fins divers en jouant sur différentes options ou en n'utilisant que certaines phases de la méthode : on

peut l'utiliser pour une application en reconnaissance de formes utilisée en robotique par exemple.

### III.7 Classe 7 : ' maillage des surfaces ' :

La création d'un maillage de surfaces est nécessaire pour leur usage dans des simulations numériques ou dans la préparation de données destinée à d'autres algorithmes de maillage.

La construction d'un maillage surfacique peut être le résultat d'une transformation d'un maillage bidimensionnel on utilisant l'une des approches décrites ci-dessus, ou par l'utilisation de l'approche de type blocs (classe 5) qui s'applique à des géométries plus compliquées. Les techniques de description de surfaces utilisées dans les codes de C.A.O. (conception assisté par ordinateur) semblent être la meilleur solution pour définir la géométrie des domaines surfaciques (ce type d'algorithme s'appui sur une description du domaine).

#### III.7.1 Approche C.A.O. :

La plupart des code C.A.O. permettent la saisie d'une surface sous une forme arborescente : définition de points, définition de courbes, définition de surfaces élémentaires et enfin définition de la surface considérée à partir des objets précédents.

#### Définition d'un point :

Il y a plusieurs types de point :

- Les points de contrôle qui servent à définir les entités d'ordre supérieur (courbes puis surfaces),
- Les points des courbes et des surfaces (qui ne sont pas nécessairement confondus avec le type de points précédents),
- Les points qui sont créés par l'algorithme de maillage sur les surfaces (c'est-à-dire les sommets des éléments du maillage).

Un point est soit donné explicitement soit le résultat d'un calcul (intersection de deux courbes par exemples). D'autre part les points donnés seront retrouvés dans l'approximation de la surface ou bien ne sont que supports d'informations. Dans ce cas ils n'existeront pas dans cette approximation mais permettront de définir l'ensemble des points à créés sur la surface.



**Définition d'une courbe :**

Les courbes sont construites à partir de points et de fonctions plus ou moins complexes de manière à assurer certaines propriétés de continuité (en particulier au niveau des raccords entre deux courbes). On distingue divers types de construction : Soit la courbe est définie par des points et passe par ceux-ci ; ou bien elle ne passe pas nécessairement par ces points ; on peut même imposer des contraintes supplémentaires.

On peut encore spécifier deux catégories de méthodes [Réf.4], [Réf.8] : celles définissant la courbe par les valeurs données en une seule fois et celles la définissant comme un ensemble de sous-courbes chacune s'appuyant sur un sous ensemble de valeurs prises parmi l'ensemble donné.

**Définition de surfaces :**

Une surface courbée est définie comme l'ensemble de surfaces élémentaires. Les raccords entre ces dernières assurent la continuité de la surface totale. Comme surface élémentaire, on trouve les carreaux rectangulaires et triangulaires.

Comme pour les courbes, les surfaces sont décrites par des points à partir desquelles on construit la fonction d'interpolation.

**Construction du maillage :**

On suppose que la surface à mailler est connue sous la forme d'un ensemble de surfaces élémentaires des types mentionnés ci-dessus. Le maillage global peut se concevoir comme la réunion des maillages des différentes surfaces élémentaires. Afin d'obtenir un maillage correct il est nécessaire d'assurer la propriété d'avoir tout point (sommet d'éléments du maillage) commun à deux carreaux doit être défini de la même façon dans chaque carreau le contenant.

Pour cela il faut que les lignes, bords de chaque carreau, soient maillées de la même façon dans tous les carreaux les contenant. Pour satisfaire cette condition, on doit suivre l'algorithme suivant :

- Pour chaque carreau, faire :
  - Pour chaque ligne de son contour, faire :
    - \* Si la ligne a déjà été maillée (lors du traitement d'un carreau précédemment considéré), prendre sa discrétisation (son maillage).
    - \* Sinon mailler la ligne en s'assurant que son maillage est compatible avec celui des lignes déjà maillées.

Une fois toutes les lignes, bords des carreaux, discrétisées, on peut sur chaque carreau, créer un maillage. Ce maillage est fonction de la nature du carreau.

1. si le carreau est rectangulaire ou triangulaire et que chaque ligne de son bord ne contient pas de points intermédiaires, il est considéré comme un élément du maillage ;
2. si le carreau est rectangulaire ou triangulaire et que chaque ligne de son bord contient un nombre donné de points intermédiaires compatibles avec un découpage régulier, il est maillé par la méthode correspondante adaptée à ce type.

Les impératifs de la C.A.O. (c'est-à-dire la description des surfaces par exemple pour en permettre la visualisation ou pour pouvoir fabriquer les objets correspondants) ne sont pas identiques à ceux de la méthode des éléments finis. En particulier les détails nécessaires dans la première approche ne sont pas toujours strictement utiles dans la modélisation numérique.

## Conclusion

Le choix d'une méthode avec laquelle nous voulons mailler une structure est un peu difficile à faire, vue le nombre important de méthodes de maillages, et la géométrie de la structure qu'on veut mailler, ainsi qu'à la nature de l'étude qu'on veut faire.

L'expérience acquise par l'usage de ces méthodes permet de faire un choix optimale de la méthode à employer.

Cette exposé sur les différentes classes de maillage peut être accru par des études plus détaillées de chaque méthode, avec des applications rendant plus explicitement l'efficacité, les avantages, et les inconvénients de chacune d'elles.

# CHAPITRE IV



**LA METHODES DE MAILLAGE  
SEMI-AUTOMATIQUE**

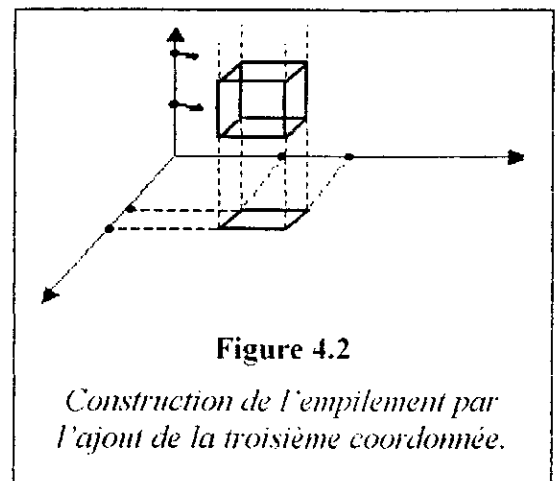
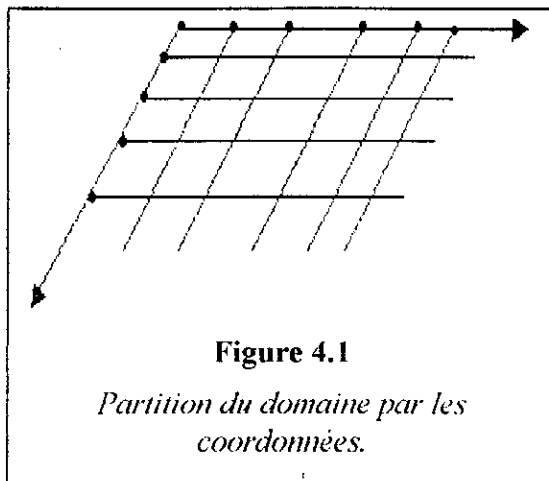
**Introduction :**

Dans cette approche nous allons traiter deux types de domaines ; le premier est assimilable à un hexaèdre où la distribution de points dans trois directions va permettre de créer les mailles correspondantes, et le deuxième est assimilable à un cylindre dont la donnée d'un maillage quelconque d'une section de ce cylindre va permettre de construire les maillages volumiques associés.

**IV.1 Maillage pour des topologies hexaédriques :****IV.1.1 Méthode de maillage :**

Adaptée aux géométries de type cubique, cette méthode va construire le recouvrement du domaine en hexaèdres (qui pourront être redécoupés par la suite) à partir de la donnée de point selon 3 directions.

En se plaçant dans le plan défini par les deux premières directions un maillage est construit. Il est formé de quadrangles dont les sommets sont déduits par convolution des deux ensembles de points associés aux directions. Chaque élément de ce maillage sert alors à construire un empilement d'hexaèdres par convolution avec les points de la troisième direction (*Figure 4.1 & 4.2*).



Relativement simple dans son principe, cette méthode permet déjà de résoudre le problème du maillage de domaines assez complexes entrant dans le cadre de cette topologie particulière. La connectivité est de type différences finies ( $i, j, k$ ) et la position des sommets est définie via les points donnés dans les trois directions privilégiées.

Cette technique produit essentiellement des hexaèdres. Ceux-ci peuvent alors être découpés en deux pentaèdres ou en cinq ou six tétraèdres.

#### IV.1.2 Description des données à fournir :

Comme données, ce maillage nécessite la fourniture de toutes les informations nécessaires à la définition des 3 répartitions de points.

L'efficacité de la méthode résulte des nombreuses possibilités offertes pour définir les coordonnées des sommets. Un sommet étant connu via ses trois indices  $i, j, k$ , il suffira de fournir, selon les cas, les données suivantes :

- Maillage à pas constant dans une, deux ou trois directions : on donnera le ou les pas correspondant à l'espacement des points dans cette (ou ces) direction (s) ;
- Mailles à pas variables dans une ou plusieurs directions : on donnera, sous la forme d'un tableau, les pas correspondants ;
- Mailles quelconque : on donnera, sous la forme d'un tableau ou de fonction, la position des points ;
- Mailles mixtes : on donnera la combinaison adéquate de pas, tableaux ou fonctions utiles.

Les références des faces, des arêtes et des points du maillage crée sont définies d'après leur position (indice  $i, j, k$ ), tout comme le numéro de sous-domaine des éléments créés.

#### IV.2 Maillage pour une topologies cylindriques :

##### IV.2.1 Méthode de maillage :

Par cette approche le maillage de tout domaine de topologie cylindrique pourra être créé à partir de la connaissance d'un maillage en deux dimensions de référence par empilement de couches d'éléments pour trois dimensions. La nature des éléments en trois dimensions est déduite de celle des éléments en deux dimensions du maillage de référence.

En fait, tout domaine qu'il est possible de définir de cette façon sera dit de topologie cylindrique. La donnée de ce mailleur est donc le maillage en deux dimensions d'une section de référence et la définition des sections le long de la génératrice du cylindre.

Cette méthode qui peut être vue comme une généralisation de la précédente est connue sous le nom de méthode de translation-empilement ou d'extrusion.

Aux segments du maillage deux dimension sont associées des couches de quadrangles dans l'espace, aux triangles sont associés des pentaèdres, aux quadrangle des hexaèdres. La connectivité est déduite de la connectivité du maillage bidimensionnel de base et de l'indice de la section considérée.

Afin de permettre de traiter des domaines comprenant l'axe du cylindre associé, il est nécessaire de considérer les cas de dégénérescence possible.

#### IV.2.2 Description des données à fournir :

Comme données, ce mailleur nécessite la fourniture du maillage bidimensionnel d'une section représentative du domaine et la définition d'une fonction de transport de cette section servant à définir l'ensemble des couches de l'empilement à réaliser.

L'efficacité de la méthode résulte, encore une fois, des nombreuses possibilités offertes pour définir les coordonnées des sommets des sections à partir soit directement du maillage deux dimensions de base, soit, section par section à partir de la définition d'une première section. Un sommet trois dimensions est connu grâce au sommet deux dimensions duquel il se déduit et grâce à son indice  $k$  de section ; par suite, il suffira de fournir, selon le cas, les données suivantes :

- Mailles à pas constant dans la direction de l'axe du cylindre : on donnera le pas correspondant à l'espacement des points dans cette direction ;
- Mailles à pas variables dans la direction de cet axe : on donnera sous forme d'un tableau les pas correspondants ;
- Transport quelconque de la section de base : on donnera, sous la forme de fonction, la transformation permettant de connaître les trois coordonnées des points à partir des deux coordonnées du point de base correspondant et de l'indice de section ;
- Transport quelconque à partir d'une section déjà construite : on donnera, sous la forme de fonctions, la transformation permettant de connaître les trois coordonnées des points de la section à créer à partir des trois coordonnées du point associé de la section précédente.

Les références des faces, des arêtes et des points du maillage créé sont définies par l'utilisateur, tout comme le numéro de sous-domaine des éléments créés; ces valeurs sont déduites, selon une correspondance donnée, des valeurs associées au maillage de départ.

# CHAPITRE V

# CHAPITRE V

**APPLICATION DE LA  
METHODE  
SEMI-AUTOMATIQUE**

## Introduction

Nous allons appliquer la méthode de maillage dite semi-automatique (*cf. Chapitre III*) sur la géométrie d'un avion militaire (avion de chasse) [Réf.10]. Notre programme est écrit dans le langage scientifique *Fortran 90* [Réf.11] (*cf. Annexe A*). Pour nos besoins de visualisations on a utilisé avec ce langage l'interface graphique *OpenGL* (*cf. Annexe B*).

L'organigramme établie pour construire ce maillage est présenté sur la figure de la page suivante (*Figure 5.1*). On a suivie les étapes décrites dans le chapitre II

### V.1 Description du programme :

Les relations entre les différentes sous-routines utilisées dans notre programme, ainsi que les fichiers exploités et les fichiers générés par celles-ci, sont décrites dans les paragraphes suivants (*Figure 5.2*).

#### Le programme Main :

*Main* (*en anglais*) veut dire principale, c'est le nom donné au programme principal (*Main.f90*). Il construit la fenêtre (*Windows*), ensuite, il fait appel aux différentes sous-routines qui servent à la génération des données de maillage (*ails*, *fuselage*, *nacelles*, *emp\_ver*, *emp\_hor*) et à la sous-routine *Dessin* qui visualise le maillage à l'intérieur de la fenêtre.

#### Les sous-routines Données :

Ce sont les sous-routines *ails*, *fuselage*, *nacelles*, *emp\_ver* et *emp\_hor*. Ces sous-routines lisent les données concernant la structure, ensuite ils génèrent les fichiers de données propres au maillage.

#### La sous-routine Dessin :

Cette sous-routine contient essentiellement des instructions *OpenGL* : elle est sous forme de plusieurs sous-routines qui se suivent, et chacune d'elles s'occupe d'une opération de dessin (rotation, translation, ...).



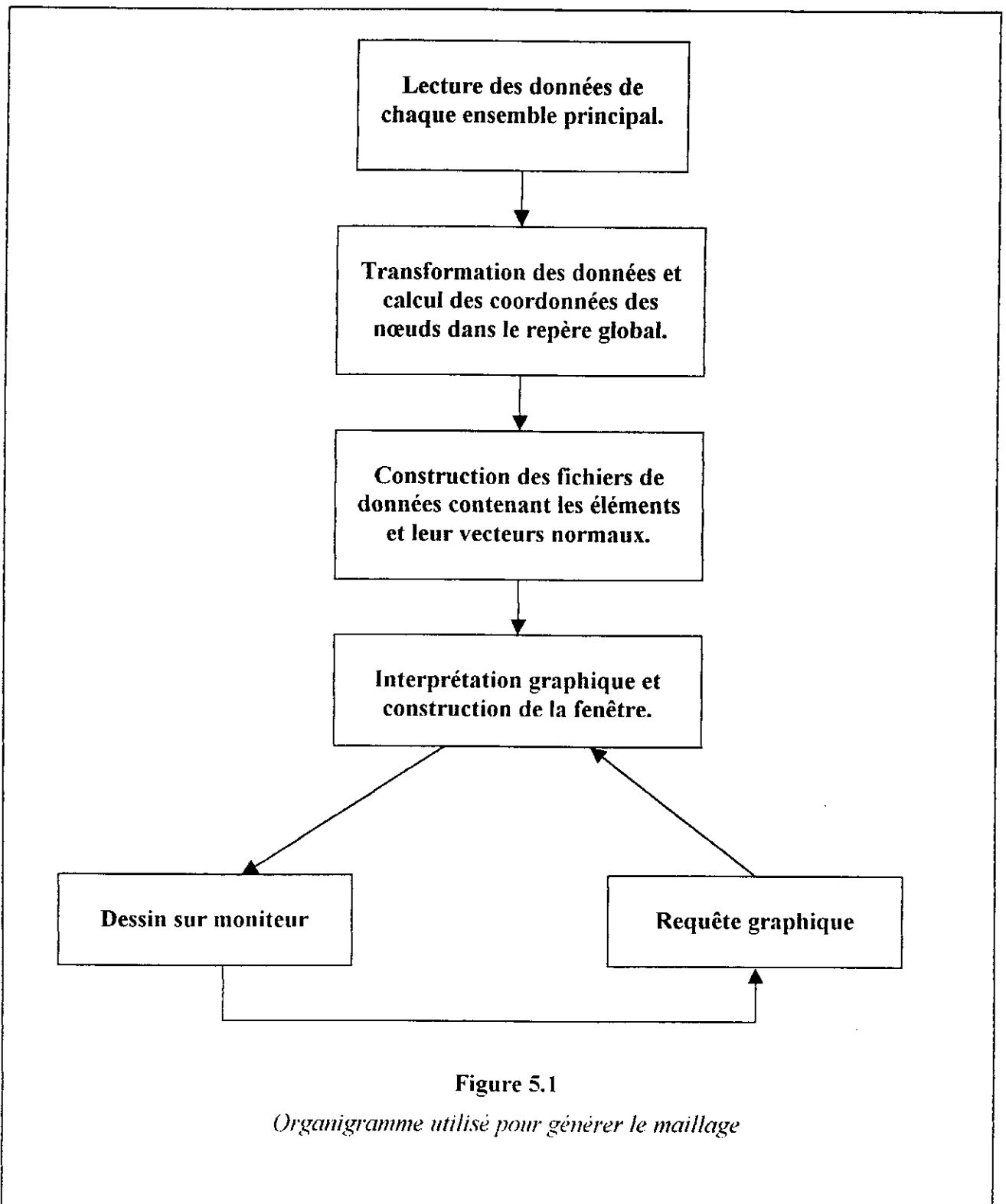


Figure 5.1

*Organigramme utilisé pour générer le maillage*

Les principales instructions *OpenGL* utilisées sont :

***fglBegin et fglEnd :***

Les fonctions *fglBegin* et *fglEnd* délimitent les *vertex* (notion utilisée par *OpenGL* qui désigne un point dans l'espace 3D.) d'une primitive. Cinq types de variables peuvent être associés à ces fonction ; ce sont : *GL\_POINTS*, *GL\_LINES*, *GL\_TRIANGLES*, *GL\_QUADS* et *GL\_POLYGON*, ces variables indiquent la nature de la primitive à construire.

***fglVertex :***

Les commandes *fglVertex* sont utilisées à l'intérieur de la paire *fglBegin/fglEnd* pour spécifier les coordonnées d'un point, line ou un polygone.

***fglCallList :***

La fonction *fglCallList* exécute une liste contenant des primitives à visualiser. Chaque liste est nommée par une variable entière.

***fglNewList et fglEndList :***

Les fonctions *fglNewList* et *fglEndList* créent ou remplace une liste de primitives. Cette liste est exécutée par la fonction *fglCallList*.

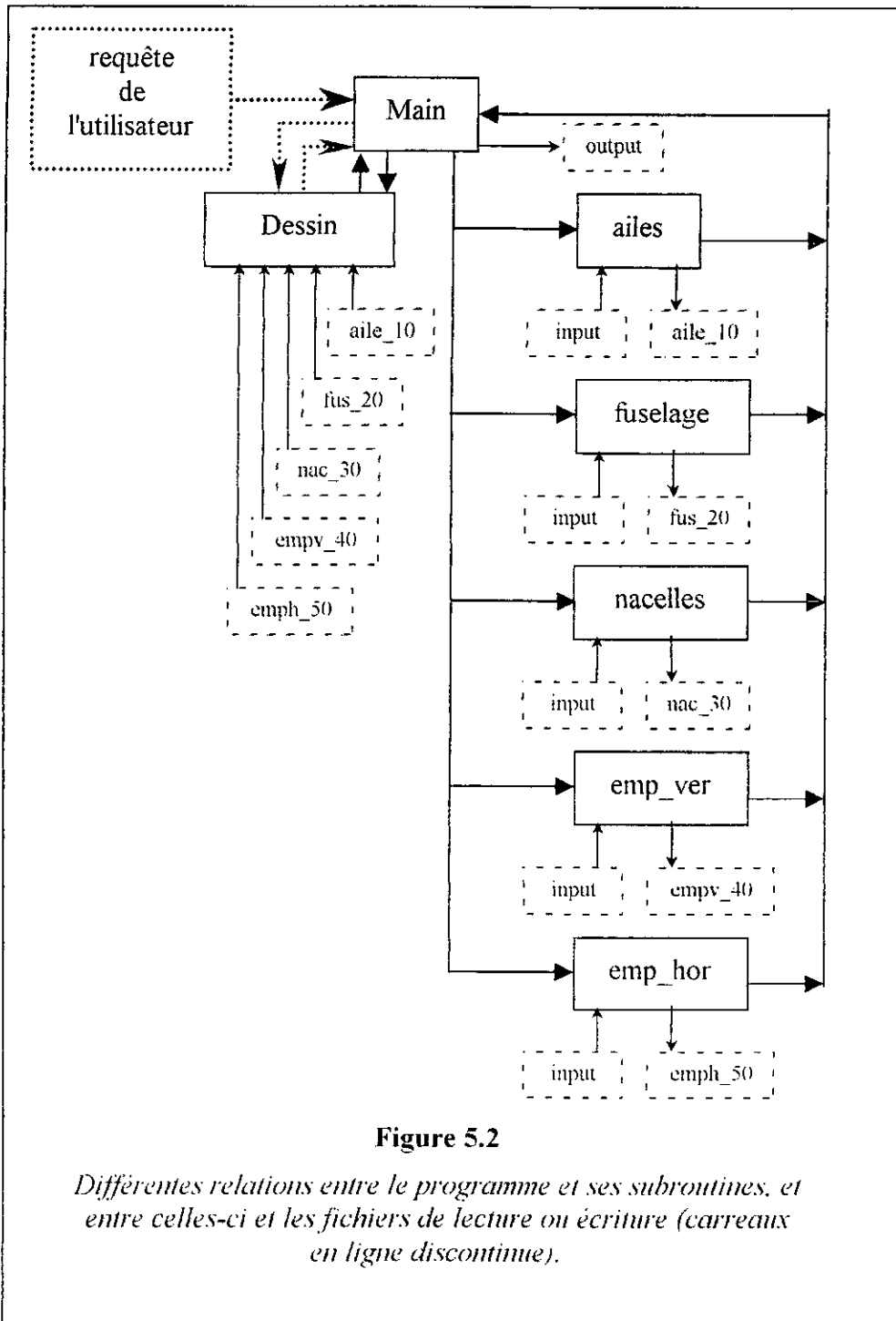
**Les fichiers :**

Les fichiers utilisées dans ce code sont de type texte '\*.txt', les noms de ces fichiers sont : *input*, *output*, *aile\_10*, *fus\_20*, *nac\_30*, *empv\_40*, *emph\_50*.

Le fichier de données principal est '*input.txt*' ; il contient des valeurs décrivant la géométrie de l'avion ; il est exploitée par les sous-routines générant les données du maillage.

Le fichier de sortie principal est '*output.txt*' ; il contient toutes les données du maillage à générer.

Les fichiers *aile\_10*, *fus\_20*, *nac\_30*, *empv\_40*, *emph\_50* sont des fichiers de transfère de données ; ils contiennent les *vertex* utilisés par les listes de primitives. Les données dans ces fichiers sont disposées sur trois colonnes : la première contient les valeurs des abscisses, la deuxième contient les valeurs des ordonnées et la troisième contient les valeurs des cotes.



**Figure 5.2**

*Différentes relations entre le programme et ses sous-routines, et entre celles-ci et les fichiers de lecture ou écriture (carreaux en ligne discontinue).*

## V.2 Analyse du problème (analyse descendante de la géométrie) :

Nous allons donc commencer par une analyse descendante de la géométrie de l'avion et créé les différents sous-ensembles, les sous-ensembles secondaires et les ensembles principaux.

On peut diviser l'avion en 5 sous-ensembles :

1. Sous-ensemble 1 : les ailes
2. Sous-ensemble 2 : le fuselage
3. Sous-ensemble 3 : les nacelles (ou les carénages)
4. Sous-ensemble 4 : empennage vertical
5. Sous-ensemble 5 : empennages horizontaux

En utilisant une analyse géométrique, ces sous-ensembles peuvent être divisés en sous-ensembles secondaires qui sont les suivants :

1. Pour le sous-ensemble 1 : les ailes sont symétriques par rapport au plan  $(XOZ)$ , de ce fait :
  - le sous-ensemble secondaire 1 est l'aile droite ( $y$  positif) ;
  - le sous-ensemble secondaire 2 est l'aile gauche ( $y$  négatif).
2. Pour le sous-ensemble 2 : le fuselage est symétrique par rapport au plan  $(XOZ)$ , de la même façon :
  - le sous-ensemble secondaire 3 est la partie droite ( $y$  positif) ;
  - le sous-ensemble secondaire 4 est la partie gauche ( $y$  négatif).
3. Pour le sous-ensemble 3 : l'avion a trois nacelles ; deux sont symétriques par rapport au plan  $(XOZ)$ , et la troisième se trouve sur le plan  $(XOZ)$  à  $y = 0$ , donc :
  - le sous-ensemble secondaire 5 est la nacelle qui se trouve à  $y = 0$  ;
  - le sous-ensemble secondaire 6 est la nacelle de droite ;
  - le sous-ensemble secondaire 7 est la nacelle de gauche.
4. Le sous-ensemble 4 : l'avion contient 4 empennages verticaux ; deux sont symétriques par rapport au plan  $(XOZ)$ , et les deux autres se trouvent sur le plan  $(XOZ)$  à  $y = 0$  l'un devant l'autre, donc :
  - le sous-ensemble secondaire 8 est l'empennage vertical qui se trouve à  $y = 0$  et qui est derrière ;
  - le sous-ensemble secondaire 9 est l'empennage vertical qui se trouve à  $y = 0$  et qui est devant ;
  - le sous-ensemble secondaire 10 est l'empennage vertical de droite ;

- le sous-ensemble secondaire 11 est l'empennage vertical de gauche.
5. Le sous-ensemble 5 : il y a deux empennages horizontaux symétriques par rapport au plan  $(XOZ)$ , d'où on trouve :
- le sous-ensemble secondaire 12 qui est l'empennage horizontal de droite ;
  - le sous-ensemble secondaire 13 qui est l'empennage horizontal de gauche.

Nous allons maintenant présenter les ensembles principaux sur lesquels nous allons générer le maillage, et à partir desquels nous allons déduire les sous-ensembles ensuite le domaine entier.

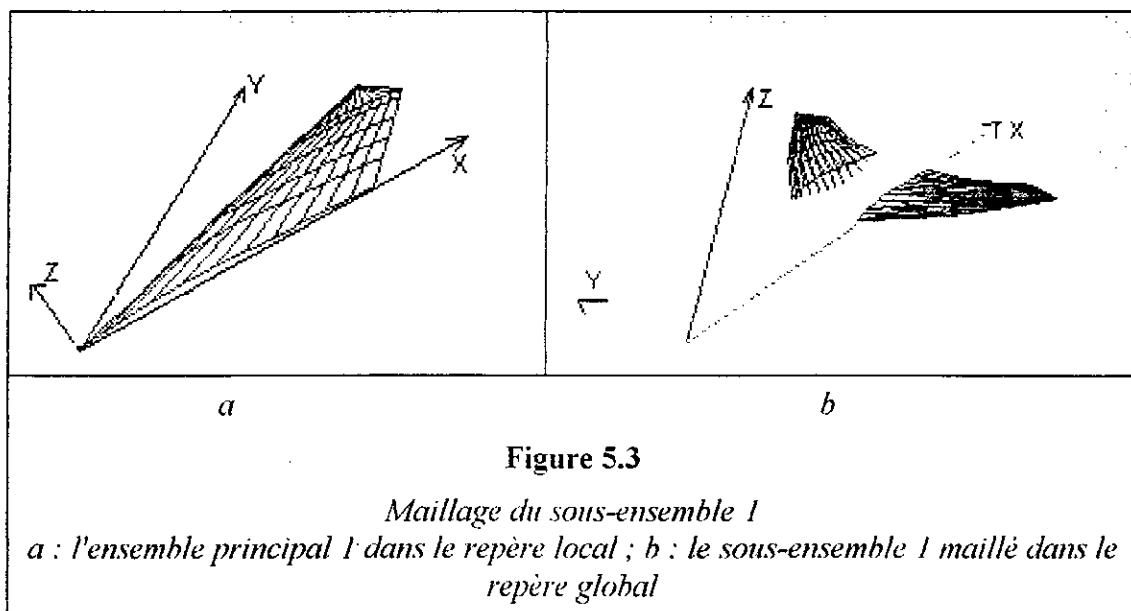
1. ensemble principal 1 : l'aile de droite ; l'aile de gauche est déduite par symétrie par rapport au plan  $(XOZ)$ .
2. ensemble principal 2 : la moitié droite du fuselage ; la moitié gauche est déduite par symétrie par rapport au plan  $(XOZ)$ .
3. ensemble principal 3 : La nacelle qui se trouve à  $y = 0$  ; la nacelle de droite est déduite en appliquant le même organigramme de maillage, celle de gauche est déduite par symétrie par rapport au plan  $(XOZ)$  de la nacelle de droite.
4. ensemble principal 4 : C'est la moitié droite de l'empennage vertical qui se trouve à  $y = 0$  et derrière l'autre moitié est déduite par symétrie ; L'empennage vertical de devant est déduit en appliquant le même organigramme de maillage ; l'empennage vertical de droite est déduit de la même façon ; Enfin l'empennage vertical de gauche est déduit de l'empennage vertical de droite par symétrie.
5. ensemble principal 5 : C'est la moitié droite de l'empennage horizontal qui se trouve à droite, l'autre moitié est déduite par symétrie ; L'empennage horizontal de gauche est déduit par symétrie.

### V.3 Maillage des sous-ensembles (construction ascendante de la géométrie) :

Dans cette partie, nous allons procéder au maillage des sous-ensembles. Le fichier qui contient les données est le fichier *"input.txt"*. Nous allons d'abord lire les données disponibles pour chaque ensemble principal ensuite procéder à la génération des fichiers contenant les données des éléments du maillage de ce sous-ensemble.

#### V.3.1 Sous-ensemble 1 :

L'ensemble principal à partir duquel nous allons construire le maillage de ce sous-ensemble est l'aile de droite du domaine : c'est une aile avec cambrure.



### Description des données disponibles :

Les données disponibles qui décrivent les ailes sont présentées sous la forme suivante : chaque ligne contient au maximum 10 valeurs ; l'aile est divisée en 7 sections.

Les premières valeurs sont au nombre de 13 et se sont les positions, en pourcentage de la corde, sur lesquelles les ordonnées des sections d'aile sont indiquées. Les 7 prochaines lignes comprennent 4 valeurs qui donnent l'origine et la longueur de la corde de chaque section d'aile ; la section la plus proche du fuselage est présentée la première. Les 4 valeurs suivantes sont les coordonnées  $(x, y, z)$  du bord d'attaque de la section, plus 'l' la corde de cette section. Les lignes qui suivent contiennent l'ordonnée de la flèche (la cambrure) pour chaque position.

Enfin, les lignes qui suivent contiennent les ordonnées des sections d'aile, en commencent toujours par la section la plus proche du fuselage.

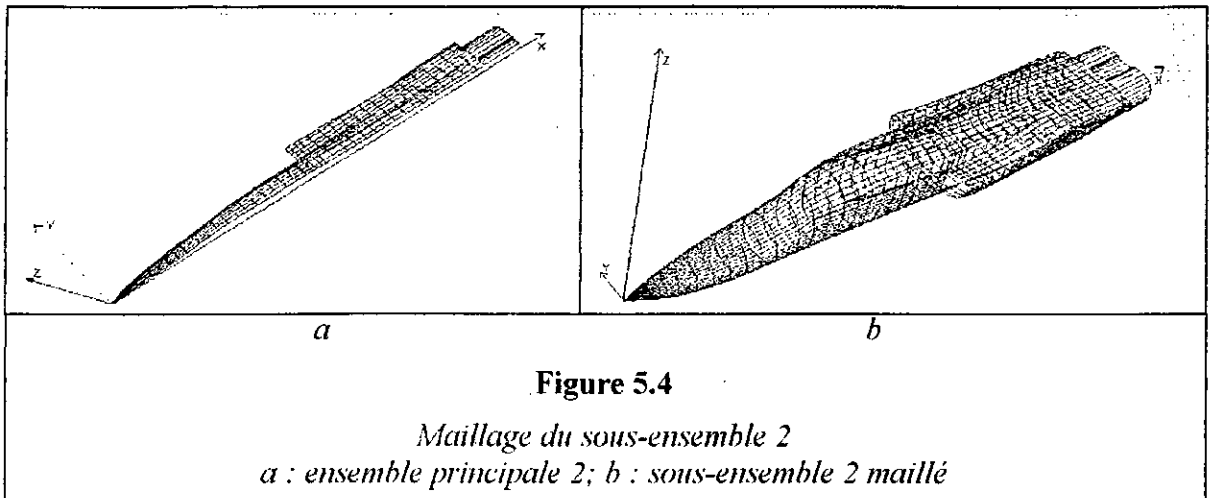
### Préparation des données de maillage :

Le sous-routine "ailes.f90" lit les données. ensuite elle construit les éléments et calcul les coordonnées des nœuds par rapport au repère lié au nez de l'avion (Figure 5.3).

Après avoir construis le sous-ensemble secondaire 1, le sous-ensemble secondaire 2 est déduit du sous-ensemble secondaire 1 par symétrie par rapport au plan  $(XOZ)$ . Enfin la sous-routine met ces données dans un fichier qui sera exploité par la sous-routine "dessin.f90". plus exactement la liste N°1.

### V.3.2 Sous-ensemble 2 :

L'ensemble principal à mailler, dans cette partie, est le sous-ensemble secondaire 3, qui est la moitié droite du fuselage.



#### Description des données disponibles :

Les données disponibles qui décrivent le fuselage sont présentées sous la forme suivante : chaque ligne contient au maximum 10 valeurs ; le fuselage est divisé en 4 segments, le premier segment contient 13 stations avec 21 points, le deuxième contient 10 stations avec 25 points, le troisième contient 21 stations avec 30 points et le quatrième contient 2 stations avec 25 points.

En commençant par le premier segment du fuselage jusqu'au quatrième, les premières valeurs sont les abscisses des stations du premier segment, suivie par les ordonnées des points de la première station puis leur cotes, viennent après les ordonnées et les cotes des points de la deuxième station, ainsi de suite jusqu'à la dernière station du premier segment. Les autres segments seront définis, de la même façon que le premier dans les lignes suivantes.

Les ordonnées partent de la valeur 0, vers l'extérieur jusqu'à une valeur maximale et rebroussent chemin jusqu'à la valeur 0. Les cotes suivent ces ordonnées du bas (valeur min.) vers le haut (valeur max.).

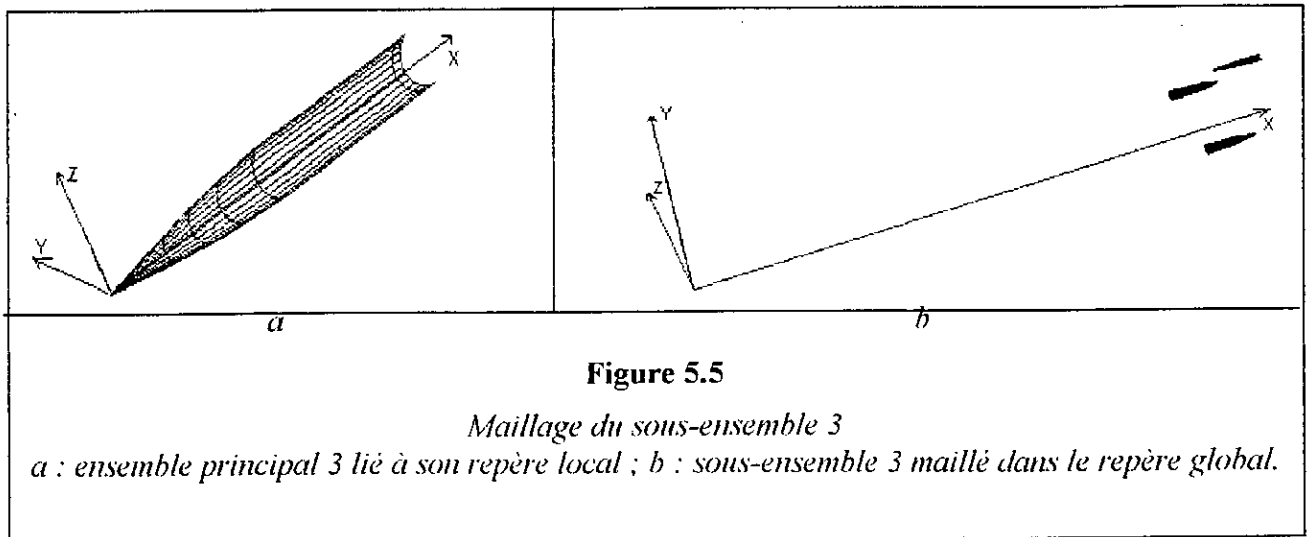
#### Préparation des données du maillage :

La subroutine "*fuselage.f90*" lit les données, ensuite elle construit les éléments. Les coordonnées des nœuds sont déjà données par rapport au repère lié au nez de l'avion.

Après avoir construit l'ensemble principal (*Figure 5.4*) qui est en même temps le sous-ensemble secondaire 3, le sous-ensemble secondaire 4 est déduit du sous-ensemble secondaire 3 par symétrie par rapport au plan ( $XOZ$ ). Enfin la subroutine met ces données dans un fichier qui sera exploité par la subroutine "*dessin.f90*" (liste N° 2).

### V.3.3 Sous-ensemble 3 :

L'ensemble principal de ce sous-ensemble est la nacelle qui se trouve à  $y = 0$  à partir duquel nous allons construire le maillage de ce sous-ensemble. La nacelle est formée par des sections circulaires jointes une à une.



#### Description des données disponibles :

Les données disponibles qui décrivent la nacelle sont présentées sous la forme suivante : chaque ligne contient au maximum 10 valeurs ; la nacelle contient 9 stations.

La position de la nacelle, qui se trouve à  $y = 0$ , est donnée la première ; c'est l'abscisse puis l'ordonnée puis la cote du centre du cercle de la première section de la nacelle. Ces valeurs sont sur la même ligne.

La prochaine ligne contient 9 valeurs, ce sont les abscisses des centres des cercles indiquées par rapport à un repère lié au centre du premier cercle. Enfin la prochaine ligne contient aussi 9 valeurs, ce sont les rayons des sections de la nacelle.

#### Préparation des données du maillage :

La subroutine "*nacelle.f90*" lit les données, ensuite, il construit une matrice contenant les éléments. Les coordonnées des nœuds sont générées, en divisant le cercle par tranche

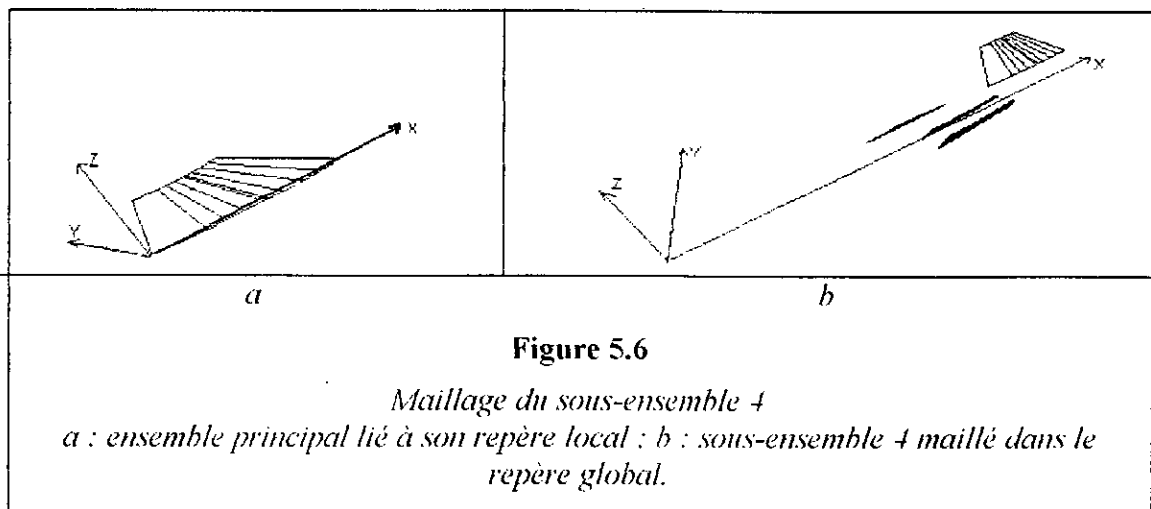


de  $15^\circ$  (24 tranches), dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à partir du bas. Ensuite les coordonnées des nœuds sont recalculées par rapport au repère lié au nez de l'avion.

Après avoir construit l'ensemble principal (*Figure 5.5*) qui est en même temps le sous-ensemble secondaire 5, le sous-ensemble secondaire 6 est déduit du sous-ensemble secondaire 5 en utilisant la même méthode, et le sous-ensemble secondaire 7 est déduit du sous-ensemble 6 par symétrie par rapport au plan ( $XOZ$ ). Enfin la subroutine met ces données dans un fichier qui sera exploité par la subroutine "*dessin.f90*" (liste N° 3).

#### V.3.4 Sous-ensemble 4 :

Dans ce cas l'ensemble principal est la partie droite de l'empennage vertical qui se trouve à  $y = 0$  et qui est derrière ; ces empennages sont symétriques par rapport à un plan parallèle ( $XOZ$ ) les coupant en deux parties égales et symétriques.



#### Description des données disponibles :

Les données disponibles qui décrivent l'empennage vertical sont présentées sous la forme suivante : chaque ligne contient au maximum 10 valeurs ; la première ligne contient 8 valeurs, les trois premières sont : l'abscisse, l'ordonnée et la cote du bord d'attaque du côté droit de l'empennage, suivies par la longueur de sa corde. Des données similaires aux précédentes sont indiquées pour le côté gauche de l'empennage.

La deuxième ligne contient les abscisses auxquelles les ordonnées, spécifiant l'épaisseur de l'empennage, sont indiquées. Enfin la troisième ligne contient ces ordonnées.

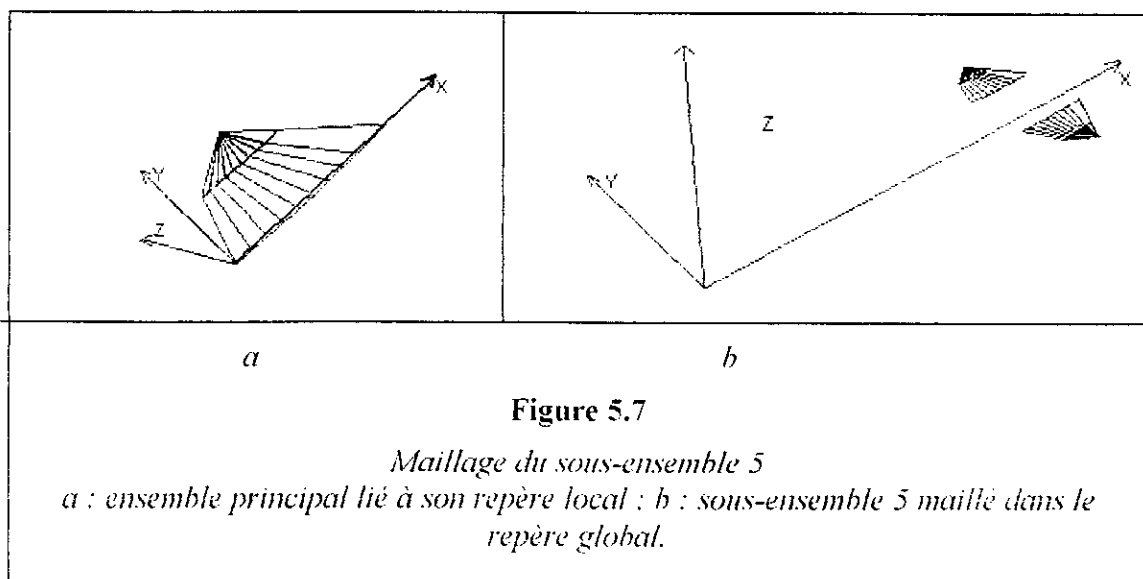
### Préparation des données du maillage :

La subroutine "*emp\_ver.f90*" lit les données, ensuite, elle construit la matrice qui contient les éléments ; les coordonnées des nœuds sont générées par rapport à un repère local lié au bord de l'empennage. Ensuite les coordonnées des nœuds sont recalculées par rapport au repère lié au nez de l'avion.

Après avoir construit l'ensemble principal (*Figure 5.6*), le sous-ensemble secondaire 8 est construit en utilisant la symétrie, le sous-ensemble secondaire 9 est déduit du sous-ensemble secondaire 8 en utilisant la même méthode, et le sous-ensemble secondaire 10 est déduit du sous-ensemble secondaire 8 en utilisant le même algorithme. Le sous-ensemble secondaire 11 est déduit en utilisant la symétrie par rapport au plan  $(XOZ)$ . Enfin la subroutine met ces données dans un fichier qui sera exploité par la subroutine "*dessin.f90*" (liste N° 4).

#### V.3.5 Sous-ensemble 5 :

L'empennage horizontal a une forme similaire aux ailes, mais il n'a pas de cambrure, il est symétrique par rapport à un plan parallèle au plan  $(XOY)$  le divisant en deux parties symétriques.



### Description des données disponibles :

Les données disponibles qui décrivent l'empennage horizontal sont introduites de la même façon que celles de l'empennage vertical : chaque ligne contient au maximum 10 valeurs ; la première ligne contient la première ligne contient 8 valeurs, les trois premières sont : l'abscisse, l'ordonnée et la cote du bord d'attaque du coté droit de l'empennage, suivies par la longueur de sa corde. Des données similaires aux précédentes sont indiquées pour le coté gauche de l'empennage.

De la même façon, la deuxième ligne contient les abscisses auxquelles les ordonnées, spécifiant l'épaisseur de l'empennage, sont indiquées. Enfin la troisième ligne contient ces ordonnées.

### Préparation des données du maillage :

La subroutine "*emp\_hor.f90*" lit les données, elle construit la matrice qui contient les éléments ; les coordonnées des nœuds sont générées par rapport à un repère local lié au bord de l'empennage. Ensuite les coordonnées des nœuds sont recalculées par rapport au repère lié au nez de l'avion.

Après avoir construit l'ensemble principal (*Figure 5.7*) ; le sous-ensemble secondaire 12 est construit en utilisant la symétrie Le sous-ensemble secondaire 13 est déduit du sous-ensemble secondaire 12 en utilisant la symétrie par rapport au plan ( $XOZ$ ). Enfin la subroutine met ces données dans un fichier qui sera exploité par la subroutine "*dessin.f90*" (liste N° 5).

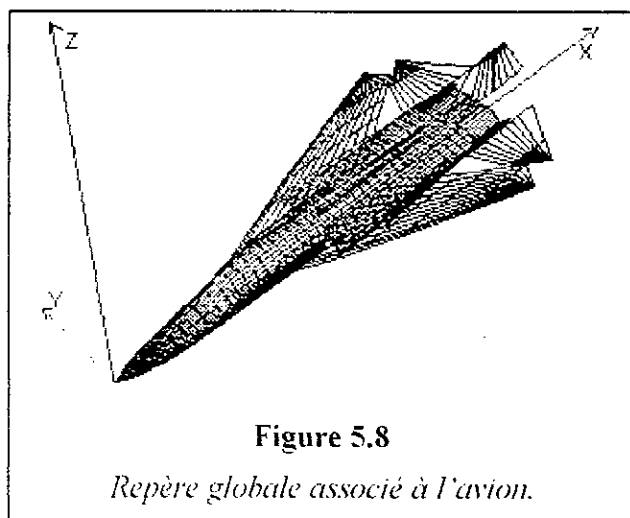
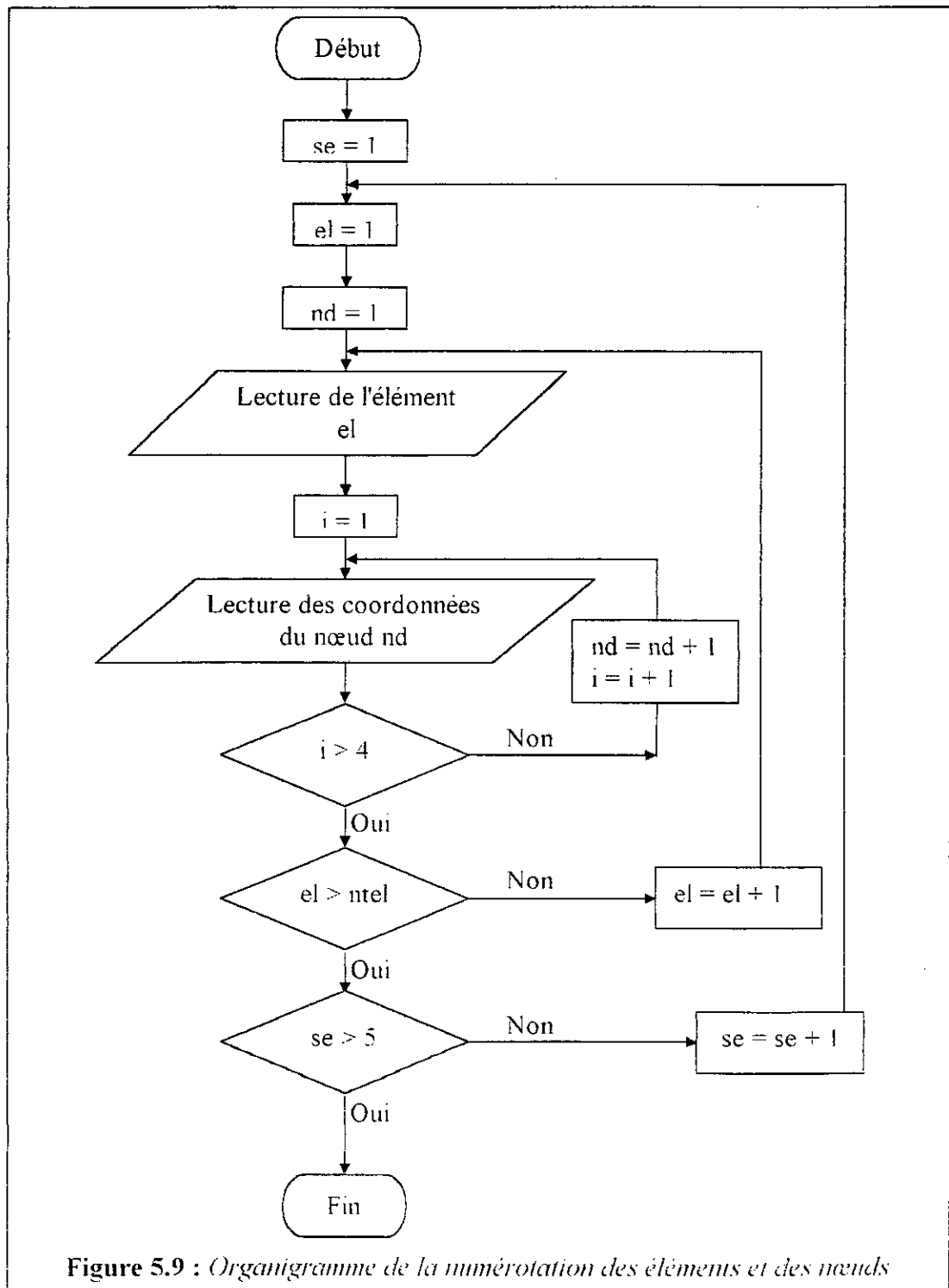


Figure 5.8

Repère globale associé à l'avion.

#### V.4 Déroulement du programme :

En suivant l'organigramme de la *figure 5.1*, et dans la partie construction des fichiers de données contenant les éléments et leur vecteurs normaux, c'est-à-dire après la lecture des données à partir du fichier "input.txt" (*annexe D*) ; les éléments du maillage ainsi que leur numérotation sont effectuées. L'organigramme décrivant cette opération est le suivant :



Dans cette organigrammé 'se' désigne un sous-ensemble, 'el' désigne un élément, 'nd' désigne un nœud et 'ntel' désigne le nombre total des éléments.

Le programme réalisant la numérotation est décrit dans l'annexe E ainsi que les résultats de cette numérotation (enregistré dans le fichier "output.txt"), où on retrouve le numéro du sous-ensemble, le nombre d'éléments et de nœuds de chaque sous-ensemble, et les numéros des éléments accompagnés des numéros des nœuds et de leur coordonnées ; et à la fin du fichier on retrouve le nombre total d'éléments et le nombre total de nœuds.

Vue la symétrie de la configuration par rapport au plan  $XOZ$ , l'étude ultérieure de la structure de la configuration se fera seulement sur la moitié droite. Le nombre total d'élément de la partie droite de la configuration est de 1600 éléments, et le nombre total de nœuds de la partie droite de la configuration est de 1930 nœuds.

## Conclusion

La génération du maillage de cette géométrie d'avion est passée par plusieurs étapes : une analyse descendante, une construction ascendante, préparation de données pour le programme de visualisation, enfin la visualisation.

Le choix des ensembles et sous-ensembles dans l'analyse descendante de la géométrie a été guidé par les données disponible pour décrire la géométrie de l'avion.

La visualisation du maillage permet de mieux apercevoir la géométrie de l'avion, et de contrôler la taille et la disposition des éléments du maillage. On constate qu'il y a des endroits où le maillage doit être affiné.

L'interface graphique *OpenGL* a permis de satisfaire la tache visualisation, et elle a présenté de bons résultats. En effet. en peut voir le maillage de tous ces cotés.

CONCLUSION

## **CONCLUSION GENERALE**

Dans ce présent travail nous avons pris connaissance des différentes approches de réalisation d'un maillage, des domaines d'application de chaque une d'elles, ainsi que des difficultés de leur mise en œuvre.

Nous avons réalisé un code qui génère un maillage sur la surface d'un avion, et qui visualise ce maillage ; ce code est construit par l'association du langage de programmation scientifique *Fortran 90* avec l'interface logiciel/matériel *OpenGL*.

L'application générée permet de visualiser n'importe quelle partie du maillage, avec une très grande simplicité de manipulation.

Les éléments du maillage sont rectangulaire et l'interpolation utilisée est de type linéaire, de ces faits, ce code de maillage pourra être enrichi par l'apport de sous-routines qui génèrent des éléments triangulaires ou des éléments volumiques (tétraèdres, hexaèdres,...), et par la modification du type d'interpolation (utiliser des interpolations spline ou bspline ...).

Ce code de maillage peut être associé avec un autre code de calcul des structures - par exemple - par la méthode des éléments finis de tel sorte que les résultats du maillage (nœuds, éléments, ... ) seront exploités par ce code.

## RÉFÉRENCES

- [1] Smith I. M. et Griffiths D. V., *Programming the finite element method*, 2<sup>nd</sup> ed., JOHN WILEY & SONS, 1992.
- [2] Drouin B., Lavaste F. Senicourt J.-M., et Fezans G., *De la mécanique vibratoire classique à la méthode des éléments finis* (vol. 1), AFNOR, 1993.
- [3] Zienkiewicz O.C., *Méthode des éléments finis*, Edition McGraw-Hill, 1979.
- [4] George P. L., *Génération automatique de maillages, Application aux méthodes d'éléments finis*, MASSON, 1991.
- [5] Rapin P. *Méthode des éléments finis, techniques numériques*, Technique de l'ingénieur, 1992.
- [6] Farin G., *Courbes et surfaces pour la CAO, conception géométrique assistée par ordinateur*, MASSON, 1992.
- [7] Liebling T. et Röthlisberger H., *Infographie et applications*, MASSON, 1988.
- [8] Mayer J. J., *3D vrai et relief, images de synthèse, initiation (AO-DAO) sur tous micros*. EDITIONS RADIO, 1986.
- [9] Petit J. P., *PANGRAPHE, Dessins en trois dimensions*, Editions du P.S.I., 1984.
- [10] Craidon C.B., *Description of a digital coputer program for airplane configuration plots*. NASA Langley Research Center. 1970.
- [11] Delanoy C., *Programmer en Fortran 90, Guide complet*, Eyrolles, 1993.



ANNEXES

## ANNEXE A

### Le Fortran 90 :

Le Fortran 90 est une version évoluée du langage Fortran 77, conçu pour suivre le développement des autres langages. En effet les langages de programmation actuels sont des langages dit à aspect structuré. Cet aspect est une caractéristique qui améliore la lecture et l'écriture des programmes, et diminue la taille ceux-ci.

Le Fortran 90 contient toutes les améliorations apportées au Fortran 77, et ajoute les extensions et les nouveautés des nouveaux langages. Il ajoute six améliorations majeures au Fortran 77 :

#### 1. *Les opérations sur les vecteurs (ou matrices) :*

Les calculs englobent souvent des vecteurs de grande taille. Un vecteur peut maintenant être utilisé comme une seule entité. Les opérations pour traiter des vecteurs entiers ou sections de vecteur sont incluses dans le langage pour deux raisons principales : Ces opérations fournissent un langage plus clair qui aide les programmeurs à développer et entretenir des applications plus rapidement ; ces opérations peuvent aider à optimiser le traitement des vecteurs sur différentes plates-formes. Les opérations à aspect arithmétique, logique ou caractère, et les fonctions intrinsèques sont étendues sur les opérandes des vecteurs.

#### 2. *La capacité numérique des calculs augmentés :*

Les capacités du calcul numériques du Fortran ont été étendues par le contrôle de la précision numérique.

#### 3. *Spécification de la précision des données :*

Avec Fortran 90 on peut spécifier un paramètre avec chaque type de donnée intrinsèque appelé paramètre de type "*kind type parameter*".

#### 4. *Les types de données utilisateur :*

C'est un mécanisme simple pour structurer les données, et crée des types de données spéciales adaptées au programme.

**5. Les modules contenant des données et des procédures :**

Un nouveau type d'unité de programme est appelé "*Module*". Elle permet de définir des données globales dans une seule place, et utiliser un ensemble de sous-routines avec un simple appel à ce module.

**6. les pointeurs :**

Les pointeurs permettent de définir, d'accéder, et de libérer des cases de la mémoire dynamiquement. Avec les pointeurs les vecteurs peuvent être créés en ne prenant que la taille de stockage qu'ils ont besoin et de libérer cet emplacement quand l'opération est finie.

**Autres nouveautés :**

Avec le Fortran 90 il y a une possibilité de faire un mixage entre ce langage et d'autres langages de programmation comme le C++ et le *Visual Basic*.

Ce langage contient déjà quelques primitives graphiques simples et en deux dimensions, néanmoins, on peut associer à ce langage une interface graphique logiciel/matériel pour réaliser des graphismes de niveau plus haut ; *OpenGL* et *ActiveX* sont deux interfaces joignables à ce langage.

## ANNEXE B

### C'est quoi *OpenGL* :

*OpenGL* est une interface logiciel pour le matériel graphique. Cette interface contient approximativement 150 commandes distinctes, elles sont utilisées pour générer des objets et spécifier des opérations à aspect interactives en trois dimensions. Cette interface est indépendante du matériel graphique utilisé.

D'autre part, *OpenGL* ne fournit pas des commandes de haut niveau qui décrivent des objets en trois dimensions très compliqués. Avec *OpenGL*, le modèle désiré est construit à partir d'un petit ensemble de primitifs géométriques : points, lignes, et polygones.

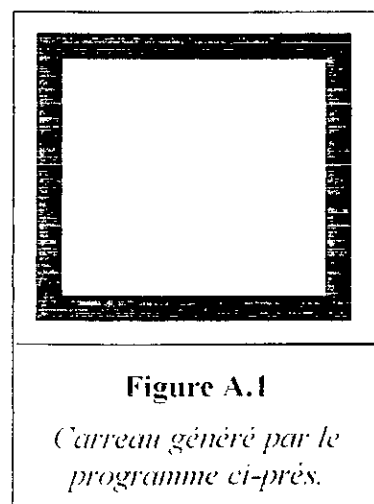
### Présentation d'un programme *OpenGL* :

La structure de base d'un programme *OpenGL* est simple : Des tâches sont initialiser qui permettent à *OpenGL* de contrôler l'affichage ; en suite les primitives spécifiant le modèle sont introduites.

Les primitives géométriques point, ligne, et polygones sont identifier à l'aide de vecteurs.

Soit un programme qui dessine sur l'écran un rectangle blanc sur une surface noire (*Figure A.1*) ;

```
Call fglClearColor (0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
Call fglClear (GL_COLOR_BUFFER_BIT)
Call fglColor3f (1.0, 1.0, 1.0)
Call fglOrtho(0.0, 1.0, 0.0, 1.0, -1.0, 1.0)
Call fglBegin(GL_POLYGON)
    Call fglVertex3f (0.25, 0.25, 0.0)
    Call fglVertex3f (0.75, 0.25, 0.0)
    Call fglVertex3f (0.75, 0.75, 0.0)
    Call fglVertex3f (0.25, 0.75, 0.0)
Call fglEnd()
Call fglFlush()
```



Les deux premières lignes sont des commandes *OpenGL* qui couvrent la fenêtre avec la couleur noir : *glClearColor ()* indique la couleur de couverture, et *glClear ()* couvre la fenêtre par cette couleur. Une fois la couleur de couverture est choisie, la fenêtre est couverte par cette couleur à chaque fois que *glClear* est utilisée.

De la même façon, *glColor3f ()* indique la couleur à utiliser pour dessiner les objets. Dans l'exemple la couleur est blanche. Une nouvelle appelle de *glColor* avec d'autres paramètres changera la couleur avec laquelle les nouveaux objet seront dessinés.

Le prochain ordre *OpenGL* dans le programme est *glOrtho ()*, il spécifie le système de coordonnées qu'*OpenGL* prendra en charge pour dessiner l'image sur l'écran.

Les prochains appels, *glBegin ()* et *glEnd ()*, définissent l'objet à dessiner. Dans cet exemple c'est un polygone dessiné avec quatre vecteurs. Les coins du polygone sont définis par les *glVertex3f ()*.

Finalement, *glFlush ()* permet de s'assurer que les ordres de dessin sont exécutés sans attendre d'autres ordres *OpenGL* supplémentaires.

### **Syntaxe des commandes *OpenGL* :**

Comme dans le programme exemple de la section précédente, *OpenGL* utilise les *gl* comme préfixe, des lettres en majuscule pour les initiaux des mots qui indiquent le nom d'une commande (*glClearColor ()*, par exemple) ; les constantes *OpenGL* commencent par *GL*, et toutes ces lettres s'écrivent en majuscule, et avec des tirets pour séparer les mots (par exemple *GL\_COLOR\_BUFFER\_BIT*).

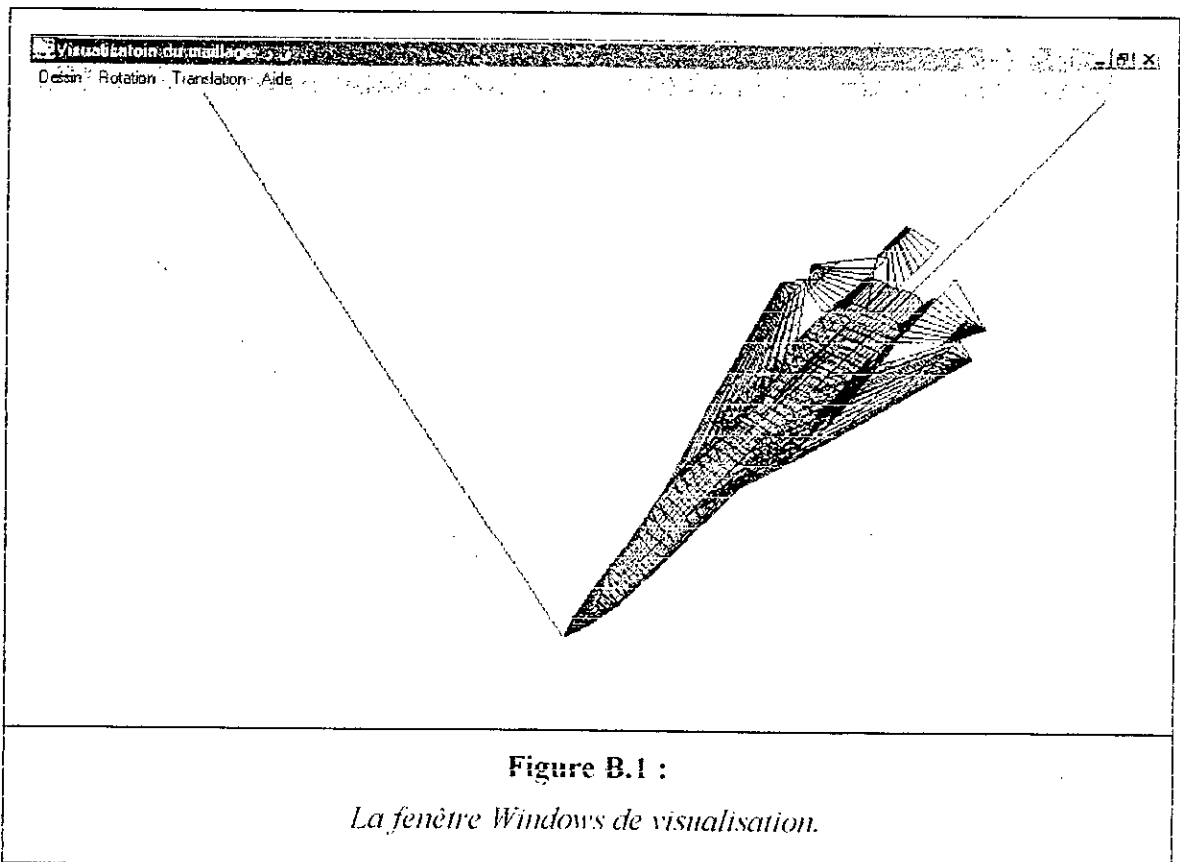
Il y a aussi un suffixe attaché à certaines commandes ; par exemple : « *3f* » dans *glColor3f ()* et *glVertex3f ()* qui indiquent le nombre et la nature des arguments qu'on associe à ces commandes.

## ANNEXE C

**Présentation de l'interface du code :**

Le code réalisé a une interface utilisateur *Windows* (Figure B.1), c'est une fenêtre munie d'un menu utiliser pour contrôler l'affichage sur la fenêtre, et modifier la visualisation de l'objet affiché.

Le menu contient des rubriques auxquelles sont associées des commandes. Ces commandes ont des raccourcis qui facilitent la tâche de l'utilisateur, et en même temps accélèrent l'utilisation du code.



Le menu est formé des quatre rubriques suivantes :

1. **Dessin :**

La rubrique Dessin englobe des commandes et des sous-rubriques à aspect général (Figure B.2) comme : le retour des axes au point de départ, l'affichage des axes.

l'agrandissement ou la diminution de l'angle de vision (le zoom) et la fermeture de la fenêtre. Ces commandes et rubriques sont présentes dans le menu avec les noms suivants :

1. La commande "*Redessiner*" : cette commande permet à l'utilisateur de rendre les axes au point de départ, c'est-à-dire :
  - l'origine "O" des axes sera au centre de la fenêtre ;
  - l'axe des abscisses (OX) sera dirigé du centre vers la droite ;
  - l'axe des ordonnées (OY) sera dirigé du centre vers le fond ;
  - l'axe des cotes (OZ) sera dirigé du centre vers le haut de la fenêtre.
 En rendant les axes au point de départ, le zoom garde la même intensité, car cette commande n'a pas d'influence sur le zoom. Pour activer cette commande, sans passer par le menu, on utilise l'accélérateur "*Alt - N*".
2. La commande "*Axes on/off*" : cette commande active ou désactive l'affichage des axes. L'affichage des axes permet de savoir l'orientation de l'objet affiché. Cette commande possède l'accélérateur ( ou le raccourci ) "*Alt + a*".
3. La rubrique "*Zoom*" : cette rubrique permet l'augmentation et la diminution de l'angle de vision. Elle comporte deux commandes :
  - "*Augmenter*" : elle permet de diminuer l'angle de vision ; dans ce cas, l'objet se rapproche de l'observateur, d'où il devient plus grand. Le raccourci de cette commande est la touche "+" du pavé numérique.
  - "*Réduire*" : elle permet d'augmenter l'angle de vision ; dans ce cas, l'objet s'éloigne de l'observateur, donc il devient plus petit. Le raccourci de cette commande est la touche "-" du pavé numérique.
4. La commande "*Quitter*" : permet de fermer la fenêtre et de quitter l'application (mettre fin au code). L'accélérateur de cette commande est "*Alt + F4*".

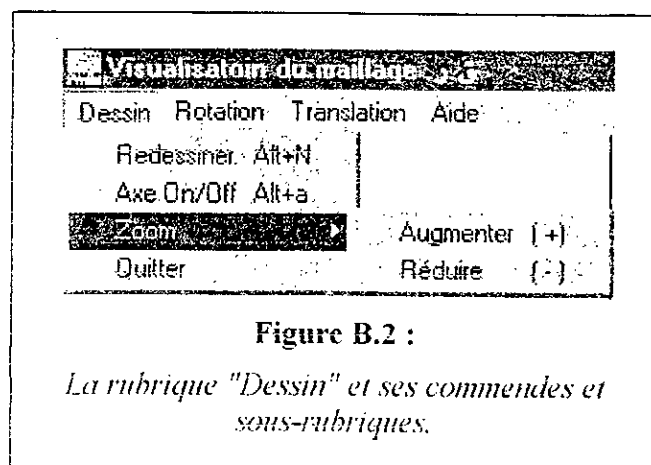


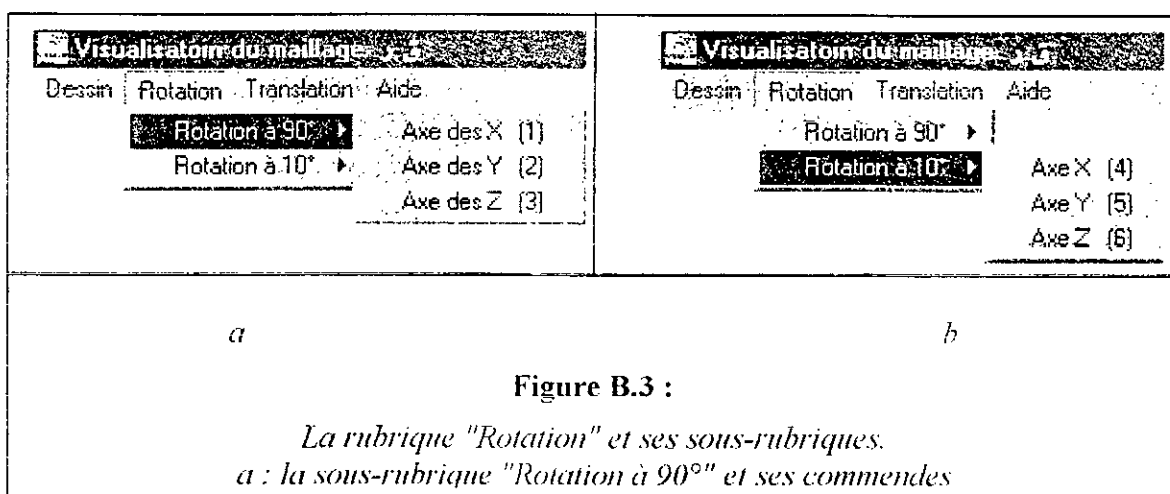
Figure B.2 :

La rubrique "*Dessin*" et ses commandes et sous-rubriques.

## 2. *Rotation* :

La rubrique "*Rotation*" dirige la rotation de l'objet, en effet on peut tourner l'objet autour de l'axe (*OX*) ou l'axe (*OY*) ou bien autour de l'axe (*OZ*). Deux sous-rubriques appartiennent à cette rubrique :

1. "*Rotation à 90°*" : elle contient trois commandes. Ces commandes réalisent une rotation d'angle égale à  $90^\circ$  autour de l'un des axes (*Figure B.3-a*).
  - La commande "*Axe des X*" : elle permet de tourner l'objet autour de l'axe des abscisses avec un angle égale à  $90^\circ$ . Elle a la touche "1" comme raccourcis
  - La commande "*Axe des Y*" : elle permet de tourner l'objet autour de l'axe des ordonnées avec un angle égale à  $90^\circ$ . Elle a la touche "2" comme raccourcis
  - La commande "*Axe des Z*" : elle permet de tourner l'objet autour de l'axe des cotes avec un angle égale à  $90^\circ$  aussi. Elle a la touche "3" comme raccourcis
2. "*Rotation à 10°*" : comme la rubrique précédente, elle contient trois commandes. Ces commandes réalisent une rotation d'angle égale à  $10^\circ$  (*Figure B.3-b*). Les commandes de cette rubrique sont similaires à celles de la rubrique précédente. Ces commandes sont : "*Axe des X*", "*Axe des Y*" et "*Axe des Z*" ; elles ont les touches "4", "5", "6" respectivement comme raccourcis.



**Figure B.3 :**

*La rubrique "Rotation" et ses sous-rubriques.  
 a : la sous-rubrique "Rotation à 90°" et ses commandes*



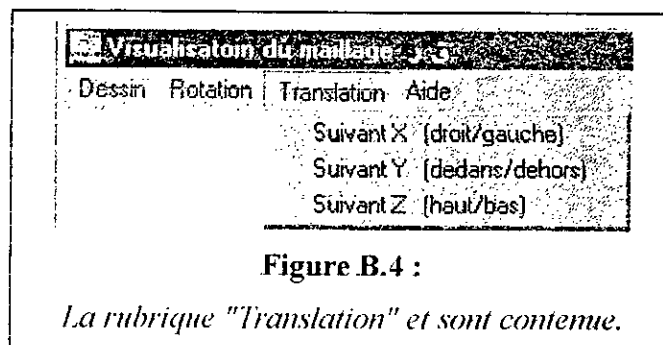
### 3. Translation :

Cette rubrique comporte des commandes qui réalisent une translation de l'objet le long de l'un des axes (Figure B.4). Ces commandes sont :

"Suivant X" : elle engendre une translation d'un unité le long de l'axe des abscisses. La touche " → " permet de déplacer l'objet la gauche vers la droite, et la touche " ← " permet de déplacer l'objet la droite vers la gauche.

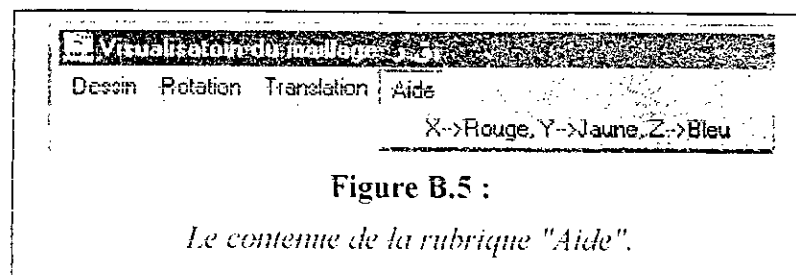
"Suivant Y" : elle réalise une translation d'un unité le long de l'axe des ordonnées. La touche " ⬆ " permet de déplacer l'objet de la face vers le fond, et la touche " ⬇ " permet de déplacer l'objet du fond vers la face.

"Suivant Z" : elle réalise une translation d'un unité le long de l'axe des cotes. La touche " ↑ " permet de déplacer l'objet du bas vers le haut, et la touche " ↓ " permet de déplacer l'objet du haut vers le bas.



### 4. Aide :

Cette rubrique contient la remarque suivante : "X - - Rouge, Y - - Jaune, Z - - Bleu", qui veut dire que l'axe des abscisses (OX) est dessiné avec la couleur rouge, l'axe des ordonnées (OY) est présenté avec la couleur jaune et l'axe des cotes (OZ) est de couleur bleu (Figure B.5).



## ANNEXE D

**Description des données :**

Dans cette annexe nous allons décrire les données qui se trouvent dans le fichier "input.txt".

Sachant que l'avion est symétrique par rapport au plan XZ, seulement la moitié de l'avion sera décrite. Le nombre de ligne de ce fichier dépend de la configuration à décrire. On retrouve dans ce fichier les données décrivant chaque sous-ensemble dans l'ordre.

La première ligne contient dans l'ordre :

- *NWAF* : le nombre de section d'aile utilisée pour décrire l'aile ;
- *NWAFOR* : le nombre d'ordonnées utilisée pour définir chaque section d'aile ;
- *NFUS* : le nombre de segments de fuselage ;
- *NRADX(I:NFUS)* : nombre de points utilisées pour décrire la demi-section du segment de fuselage ;
- *NFORX(I:NFUS)* : nombre de stations du segment de fuselage ;
- *NP* : nombre de descripteur des nacelles ;
- *NPODOR* : nombre de stations décrivant la nacelle ;
- *NF* : nombre d'empennage vertical ;
- *NFINOR* : nombre d'ordonnées décrivant chaque empennage ;
- *NCAN* : nombre d'empennage horizontal ;
- *NCANOR* : nombre d'ordonnées décrivant chaque empennage.

Les lignes qui suivent décrivent les sous-ensembles. Ils sont dans l'ordre. Chaque ligne contient au maximum 10 valeurs qui sont identifiées.

Données décrivant le sous-ensemble 1 (l'aile) : les *NWAFOR* premières valeurs sont les locations, en pourcentage de la corde, des ordonnées ; il sont identifié par "XAFi". Les *NWAF* prochaines lignes contiennent les coordonnées de l'origine et la longueur de la corde ; il sont identifié par "WORGi". Les *NWAF* prochaines lignes contiennent chaque une *NWAFOR* valeurs qui représentent l'épaisseur de la cambrure ; il sont identifié par "TZORDi". Enfin les *NWAF* prochaines lignes contiennent chaque une *NWAFOR* valeurs qui représentent l'ordonnée de l'aile en pourcentage de la corde ; il sont identifié par "WORDi".

Données décrivant le sous-ensemble 2 (le fuselage) : les  $NFORX(1:NFU)$  premières valeurs sont les locations des segments de fuselage, identifiés par "XFUSi". Les  $NRADX(1:NFU)$  sont les ordonnées suivies par les cotes de la demi-section du fuselage, identifié par "Yi" pour les ordonnées et "Zi" pour les cotes.

Données décrivant le sous-ensemble 3 (les nacelles) : la première ligne contient les coordonnées de l'origine du premier cercle de la nacelle, identifié par "PODORGi". La prochaine ligne contient les positions des sections de nacelle, identifié par "XPODi". Enfin la prochaine ligne contient les rayons de chaque section de nacelle, identifié par "PODRi".

Données décrivant le sous-ensemble 4 (l'empennage vertical) : chaque trois lignes décrivent un empennage. la première ligne contient les coordonnées du bord d'attaque inférieur avec la longueur de sa corde puis les coordonnées et longueur de la corde du bord d'attaque supérieur, elle est identifiée par "FINORG"; la deuxième ligne contient  $NFINOR$  stations, identifié par "XFN"; enfin la troisième ligne contient les ordonnées des sections d'empennages, identifié par "FINORD".

Données décrivant le sous-ensemble 5 (l'empennage horizontal) : comme l'empennage vertical, chaque trois lignes décrivent un empennage. la première ligne contient les coordonnées du bord d'attaque intérieure avec la longueur de sa corde puis les coordonnées et longueur de la corde du bord d'attaque extérieure, elle est identifiée par "CANORG"; la deuxième ligne contient  $NCANOR$  stations, identifié par "XCAN"; enfin la troisième ligne contient les ordonnées des sections d'empennages, identifié par "CANORD".

#### Contenu du fichier *input.txt* :

Voici l'intégralité du fichier des données *input.txt*, ces données peuvent être saisies en utilisant le logiciel *Excel* de *Microsoft* ou par un éditeur de texte.

7	13	4	21	24	30	25	13	10	21	2	2	9	6	10	2	10			
0,000	0,010	5,000	10,000	20,000	30,000	40,000	50,000	60,000	70,000										xaf 10
80,000	90,000	100,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										xaf 13
11,800	1,400	2,000	13,600	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										worg 1
16,250	3,000	1,830	11,625	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										worg 2
18,975	4,000	1,763	10,460	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										worg 3
22,150	5,000	1,719	8,856	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										worg 4
25,332	6,000	1,709	7,250	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										worg 5
26,688	6,430	1,695	6,550	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										worg 6
32,140	8,120	1,670	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										worg 7
0,000	0,000	0,010	0,020	0,020	-0,020	-0,090	-0,170	-0,200	-0,140										tzord 1
-0,050	0,050	0,190	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										tzord 1
0,000	0,000	0,020	0,030	0,020	0,010	-0,020	-0,010	0,010	0,000										tzord 2
0,020	0,040	0,020	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000										tzord 2

0,000	0,000	-0,002	-0,001	-0,003	0,003	0,010	0,013	0,017	0,019	tzord 3
0,022	0,020	0,018	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	tzord 3
0,000	0,000	0,002	0,012	0,024	0,040	0,045	0,051	0,057	0,063	tzord 4
0,070	0,073	0,074	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	tzord 4
0,000	0,000	-0,004	0,005	0,021	0,034	0,047	0,056	0,064	0,076	tzord 5
0,087	0,093	0,099	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	tzord 5
0,000	0,000	0,003	0,012	0,029	0,043	0,057	0,068	0,078	0,090	tzord 6
0,104	0,114	0,120	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	tzord 6
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	tzord 7
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	tzord 7
0,000	0,000	1,090	1,710	2,630	3,220	3,650	3,900	3,680	3,080	word 1
2,210	1,180	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	word 1
0,000	0,000	1,125	1,800	2,810	3,380	3,300	2,405	2,190	1,821	word 2
1,267	0,660	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	word 2
0,000	0,000	1,363	1,855	2,199	2,314	2,423	2,405	2,190	1,821	word 3
1,267	0,660	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	word 3
0,000	0,000	1,225	1,604	2,078	2,366	2,484	2,422	2,197	1,813	word 4
1,248	0,638	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	word 4
0,000	0,000	1,297	1,682	2,138	2,393	2,476	2,407	2,159	1,738	word 5
1,193	0,600	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	word 5
0,000	0,000	1,306	1,703	2,153	2,390	2,489	2,397	2,138	1,718	word 6
1,153	0,580	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	word 6
0,000	0,000	1,306	1,703	2,153	2,390	2,489	2,397	2,138	1,718	word 7
1,153	0,580	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	word 7
0,000	1,542	2,375	3,208	4,042	4,875	5,708	6,542	7,375	8,625	xfus 10
9,458	10,292	11,125	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	xfus 13
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y 1
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y 1
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y 1
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z 1
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z 1
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z 1
0,000	0,064	0,142	0,216	0,290	0,366	0,428	0,479	0,516	0,531	y 2
0,533	0,516	0,486	0,442	0,389	0,329	0,267	0,195	0,130	0,068	y 2
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y 2
-0,482	-0,480	-0,475	-0,455	-0,425	-0,376	-0,321	-0,252	-0,175	-0,093	z 2
0,001	0,088	0,155	0,224	0,285	0,333	0,370	0,400	0,419	0,428	z 2
0,435	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z 2
0,000	0,102	0,207	0,306	0,405	0,505	0,585	0,654	0,700	0,718	y 3
0,721	0,701	0,659	0,592	0,525	0,450	0,361	0,275	0,180	0,089	y 3
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y 3
-0,675	-0,665	-0,642	-0,612	-0,570	-0,511	-0,436	-0,339	-0,227	-0,118	z 3
0,003	0,116	0,213	0,314	0,390	0,455	0,509	0,546	0,577	0,595	z 3
0,602	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z 3
0,000	0,123	0,244	0,372	0,494	0,611	0,713	0,799	0,851	0,877	y 4
0,879	0,854	0,809	0,740	0,656	0,561	0,455	0,338	0,225	0,111	y 4
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y 4
-0,755	-0,750	-0,733	-0,700	-0,652	-0,581	-0,494	-0,378	-0,252	-0,109	z 4
0,028	0,165	0,285	0,406	0,503	0,584	0,646	0,696	0,728	0,748	z 4
0,756	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z 4
0,000	0,138	0,268	0,409	0,539	0,675	0,790	0,890	0,957	0,993	y 5

1,002	0,985	0,940	0,868	0,779	0,673	0,537	0,404	0,272	0,136	y	5
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y	5
-0,825	-0,818	-0,801	-0,764	-0,715	-0,636	-0,545	-0,425	-0,279	-0,128	z	5
0,035	0,187	0,338	0,478	0,594	0,694	0,779	0,837	0,875	0,896	z	5
0,904	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z	5
0,000	0,153	0,299	0,454	0,599	0,747	0,876	0,980	1,052	1,089	y	6
1,091	1,074	1,025	0,949	0,853	0,733	0,592	0,455	0,308	0,153	y	6
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y	6
-0,845	-0,839	-0,822	-0,787	-0,733	-0,645	-0,542	-0,412	-0,250	-0,075	z	6
0,103	0,267	0,429	0,581	0,709	0,824	0,921	0,981	1,026	1,052	z	6
1,063	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z	6
0,000	0,156	0,310	0,466	0,623	0,755	0,912	1,035	1,118	1,164	y	7
1,175	1,155	1,107	1,032	0,933	0,805	0,666	0,506	0,333	0,163	y	7
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y	7
-0,831	-0,826	-0,809	-0,779	-0,729	-0,654	-0,548	-0,410	-0,244	-0,067	z	7
0,126	0,300	0,482	0,648	0,792	0,944	1,044	1,122	1,177	1,206	z	7
1,217	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z	7
0,000	0,158	0,312	0,472	0,636	0,790	0,937	1,070	1,159	1,215	y	8
1,238	1,230	1,194	1,124	1,015	0,886	0,729	0,563	0,377	0,188	y	8
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y	8
-0,796	-0,794	-0,782	-0,755	-0,707	-0,636	-0,532	-0,385	-0,225	-0,041	z	8
0,162	0,352	0,542	0,719	0,899	1,044	1,165	1,258	1,324	1,359	z	8
1,374	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z	8
0,000	0,166	0,342	0,522	0,684	0,867	1,008	1,126	1,217	1,261	y	9
1,274	1,266	1,225	1,147	1,040	0,908	0,750	0,584	0,400	0,203	y	9
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y	9
-0,760	-0,760	-0,753	-0,725	-0,672	-0,581	-0,463	-0,310	-0,113	0,079	z	9
0,277	0,464	0,664	0,860	1,024	1,174	1,301	1,394	1,467	1,514	z	9
1,531	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z	9
0,000	0,188	0,375	0,562	0,753	0,935	1,090	1,205	1,283	1,312	y	10
1,319	1,327	1,313	1,248	1,149	0,992	0,873	0,684	0,500	0,247	y	10
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y	10
-0,714	-0,714	-0,712	-0,687	-0,629	-0,526	-0,381	-0,213	-0,016	0,196	z	10
0,401	0,606	0,817	1,040	1,224	1,392	1,572	1,753	1,873	1,968	z	10
1,995	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z	10
0,000	0,252	0,468	0,720	0,935	1,102	1,241	1,322	1,344	1,351	y	11
1,358	1,356	1,321	1,252	1,127	1,029	0,898	0,713	0,495	0,244	y	11
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y	11
-0,719	-0,719	-0,704	-0,650	-0,548	-0,406	-0,201	0,049	0,265	0,483	z	11
0,703	0,921	1,138	1,327	1,514	1,728	1,907	2,082	2,216	2,297	z	11
2,323	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z	11
0,000	0,235	0,466	0,707	0,933	1,136	1,263	1,336	1,365	1,372	y	12
1,380	1,386	1,377	1,333	1,243	1,156	0,998	0,807	0,554	0,277	y	12
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y	12
-0,701	-0,700	-0,697	-0,652	-0,553	-0,386	-0,182	0,044	0,290	0,521	z	12
0,738	0,951	1,185	1,414	1,635	1,886	2,135	2,327	2,488	2,588	z	12
2,617	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z	12
0,000	0,232	0,467	0,715	0,945	1,149	1,277	1,348	1,370	1,380	y	13
1,390	1,397	1,405	1,390	1,337	1,242	1,076	0,864	0,606	0,308	y	13
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	y	13
-0,688	-0,688	-0,683	-0,645	-0,553	-0,392	-0,181	0,063	0,309	0,537	z	13

0,757	0,972	1,208	1,464	1,710	1,999	2,259	2,469	2,634	2,739	z	13
2,776	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	z	13
11,125	11,958	12,792	13,625	14,458	15,292	16,125	16,958	17,792	18,333	xfus	10
0,000	0,238	0,472	0,721	0,958	1,161	1,287	1,356	1,379	1,387	y	1
1,397	1,405	1,410	1,398	1,344	1,253	1,253	1,253	1,253	1,087	y	1
0,875	0,611	0,312	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,691	-0,690	-0,687	-0,648	-0,551	-0,389	-0,178	0,070	0,319	0,548	z	1
0,767	0,988	1,225	1,479	1,723	2,009	2,009	2,009	2,009	2,281	z	1
2,490	2,657	2,759	2,794	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,000	0,229	0,476	0,722	0,965	1,166	1,294	1,367	1,384	1,396	y	2
1,408	1,419	1,430	1,436	1,410	1,379	1,407	1,407	1,344	1,146	y	2
0,913	0,650	0,333	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,688	-0,688	-0,683	-0,650	-0,559	-0,399	-0,183	0,073	0,321	0,543	z	2
0,769	0,990	1,227	1,493	1,791	1,938	1,958	2,070	2,108	2,334	z	2
2,563	2,725	2,841	2,873	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,000	0,231	0,471	0,727	0,972	1,175	1,300	1,366	1,381	1,394	y	3
1,405	1,419	1,431	1,444	1,448	1,444	1,402	1,402	1,402	1,175	y	3
0,936	0,647	0,331	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,676	-0,676	-0,673	-0,653	-0,566	-0,404	-0,190	0,064	0,316	0,547	z	3
0,762	0,984	1,226	1,506	1,813	1,845	1,845	2,216	2,216	2,388	z	3
2,599	2,768	2,872	2,904	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,000	0,234	0,475	0,730	0,978	1,180	1,306	1,370	1,387	1,400	y	4
1,413	1,426	1,439	1,456	1,471	1,407	1,407	1,407	1,407	1,208	y	4
0,947	0,658	0,326	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,666	-0,666	-0,666	-0,650	-0,584	-0,416	-0,186	0,061	0,310	0,539	z	4
0,760	0,993	1,233	1,513	1,764	1,759	1,759	2,323	2,323	2,433	z	4
2,620	2,771	2,867	2,901	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,000	0,225	0,459	0,721	0,981	1,201	1,319	1,376	1,392	1,407	y	5
1,424	1,442	1,459	1,479	1,489	1,409	1,409	1,409	1,409	1,244	y	5
0,953	0,664	0,334	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,657	-0,657	-0,656	-0,650	-0,586	-0,431	-0,194	0,058	0,313	0,541	z	5
0,767	0,993	1,239	1,519	1,687	1,677	1,677	2,389	2,389	2,464	z	5
2,621	2,752	2,837	2,867	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,000	0,214	0,447	0,712	0,976	1,201	1,324	1,384	1,403	1,419	y	6
1,437	1,453	1,470	1,490	1,498	1,409	1,409	1,409	1,409	1,249	y	6
0,942	0,647	0,333	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,647	-0,647	-0,647	-0,643	-0,601	-0,447	-0,215	0,049	0,298	0,530	z	6
0,757	0,984	1,230	1,519	1,615	1,603	1,603	2,418	2,418	2,473	z	6
2,600	2,715	2,786	2,809	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,000	0,223	0,459	0,719	0,991	1,224	1,341	1,390	1,410	1,428	y	7
1,446	1,464	1,484	1,504	1,504	1,403	1,403	1,403	1,403	1,236	y	7
0,917	0,624	0,313	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,643	-0,643	-0,643	-0,639	-0,604	-0,447	-0,214	0,055	0,307	0,536	z	7
0,772	1,004	1,250	1,546	1,546	1,532	1,532	2,431	2,431	2,475	z	7
2,575	2,675	2,737	2,755	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,000	0,224	0,459	0,716	0,993	1,233	1,359	1,402	1,424	1,443	y	8
1,463	1,483	1,503	1,520	1,401	1,401	1,401	1,401	1,401	1,231	y	8
0,896	0,607	0,297	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,639	-0,639	-0,639	-0,635	-0,604	-0,477	-0,231	0,048	0,303	0,539	z	8
0,767	1,010	1,256	1,475	1,456	1,456	1,456	2,423	2,423	2,456	z	8
2,539	2,612	2,667	2,679	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		

0,000	0,221	0,456	0,715	0,999	1,274	1,382	1,429	1,452	1,472	y	9
1,488	1,507	1,529	1,539	1,409	1,409	1,409	1,409	1,409	1,217	y	9
0,878	0,585	0,296	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,624	-0,624	-0,624	-0,622	-0,602	-0,483	-0,244	0,037	0,296	0,538	z	9
0,778	1,014	1,269	1,403	1,384	1,384	1,384	2,411	2,411	2,437	z	9
2,495	2,553	2,601	2,616	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,000	0,223	0,454	0,702	0,989	1,268	1,393	1,436	1,456	1,478	y	10
1,497	1,516	1,540	1,547	1,401	1,401	1,401	1,401	1,401	1,209	y	10
0,964	0,581	0,284	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
-0,618	-0,618	-0,618	-0,616	-0,600	-0,505	-0,259	0,028	0,281	0,528	z	10
0,761	0,984	1,259	1,361	1,340	1,340	1,339	2,393	2,393	2,416	z	10
2,460	2,504	2,551	2,564	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
18,333	18,625	19,075	19,458	20,194	21,125	21,950	22,792	23,625	24,458	xfus	10
25,192	26,125	26,958	27,519	28,000	28,625	29,458	30,292	31,125	31,958	xfus	20
32,563	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	xfus	21
0,000	0,706	0,992	1,272	1,399	1,435	1,686	1,939	2,186	2,414	y	1
2,626	2,780	2,906	2,989	3,027	3,011	3,011	3,011	3,011	3,011	y	1
2,766	2,357	2,043	1,726	1,408	1,408	1,215	0,874	0,283	0,000	y	1
-0,623	-0,619	-0,603	-0,506	-0,257	-0,018	-0,018	0,016	0,098	0,225	z	1
0,303	0,593	0,820	1,071	1,336	1,583	1,583	1,583	1,583	1,583	z	1
1,446	1,484	1,438	1,389	1,342	2,401	2,423	2,471	2,566	2,580	z	1
0,000	0,714	1,107	1,278	1,403	1,433	1,692	1,957	2,223	2,458	y	2
2,667	2,830	2,957	3,044	3,071	3,054	3,054	3,054	3,054	3,054	y	2
2,666	2,354	2,043	1,727	1,411	1,411	1,198	0,869	0,218	0,000	y	2
-0,621	-0,618	-0,608	-0,500	-0,253	-0,108	-0,107	-0,063	0,025	0,156	z	2
0,336	0,551	0,788	1,053	1,310	1,569	1,569	1,569	1,569	1,569	z	2
1,528	1,467	1,422	1,373	1,324	2,396	2,417	2,457	2,542	2,560	z	2
0,000	0,710	0,996	1,274	1,420	1,446	1,708	1,970	2,242	2,470	y	3
2,675	2,840	2,969	3,048	3,083	3,076	3,076	3,076	3,076	3,076	y	3
2,768	2,359	2,043	1,724	1,411	1,411	1,190	0,850	0,295	0,000	y	3
-0,620	-0,616	-0,610	-0,519	-0,278	-0,160	-0,152	-0,110	-0,019	0,112	z	3
0,292	0,497	0,740	1,000	1,263	1,525	1,525	1,525	1,525	1,525	z	3
1,487	1,434	1,391	1,347	1,306	2,372	2,394	2,429	2,502	2,522	z	3
0,000	0,706	0,993	1,294	1,435	1,451	1,716	1,980	2,235	2,468	y	4
2,673	2,844	2,971	3,059	3,092	3,081	3,081	3,081	3,081	3,081	y	4
2,769	2,364	2,047	1,734	1,413	1,413	1,166	0,838	0,303	0,000	y	4
-0,609	-0,607	-0,595	-0,514	-0,276	-0,188	-0,184	-0,144	-0,051	0,087	z	4
0,268	0,479	0,711	0,967	1,234	1,498	1,498	1,498	1,498	1,498	z	4
1,464	1,420	1,387	1,352	1,318	2,355	2,378	2,410	2,475	2,489	z	4
0,000	0,705	0,990	1,292	1,452	1,464	1,728	1,999	2,246	2,470	y	5
2,673	2,830	2,952	3,025	3,058	3,052	3,052	3,052	3,052	3,052	y	5
2,768	2,359	2,045	1,730	1,411	1,411	1,138	0,812	0,310	0,000	y	5
-0,604	-0,600	-0,586	-0,501	-0,275	-0,249	-0,245	-0,197	-0,098	0,047	z	5
0,228	0,436	0,684	0,929	1,191	1,443	1,443	1,443	1,443	1,443	z	5
1,424	1,401	1,382	1,365	1,346	2,328	2,344	2,372	2,422	2,435	z	5
0,000	0,699	0,984	1,264	1,475	1,475	1,754	2,027	2,292	2,503	y	6
2,694	2,827	2,929	2,992	3,016	3,027	3,027	3,027	3,027	3,027	y	6
2,786	2,353	2,040	1,725	1,407	1,407	1,113	0,781	0,313	0,000	y	6
-0,594	-0,592	-0,578	-0,487	-0,325	-0,325	-0,317	-0,254	-0,133	0,022	z	6
0,243	0,461	0,704	0,962	1,216	1,457	1,457	1,457	1,457	1,457	z	6
1,455	1,448	1,440	1,435	1,431	2,295	2,305	2,318	2,368	2,381	z	6

0,000	0,686	0,964	1,219	1,414	1,414	1,718	2,000	2,270	2,492	y	7
2,671	2,798	2,890	2,942	2,966	2,973	2,973	2,973	2,973	2,973	y	7
2,768	2,356	2,042	1,729	1,411	1,411	1,098	0,777	0,318	0,000	y	7
-0,584	-0,580	-0,570	-0,500	-0,408	-0,408	-0,381	-0,315	-0,175	0,014	z	7
0,248	0,488	0,746	1,002	1,259	1,509	1,509	1,509	1,509	1,509	z	7
1,514	1,519	1,525	1,528	1,533	2,271	2,270	2,283	2,333	2,348	z	7
0,000	0,685	0,966	1,225	1,440	1,440	1,762	2,071	2,340	2,547	y	8
2,704	2,798	2,852	2,875	2,890	2,896	2,896	2,896	2,896	2,896	y	8
2,770	2,356	2,042	1,725	1,412	1,412	1,090	0,760	0,314	0,000	y	8
-0,586	-0,583	-0,562	-0,499	-0,461	-0,461	-0,429	-0,319	-0,129	0,110	z	8
0,379	0,647	0,917	1,179	1,405	1,632	1,632	1,632	1,632	1,632	z	8
1,634	1,647	1,656	1,664	1,673	2,257	2,250	2,245	2,295	2,309	z	8
0,000	0,680	0,957	1,192	1,410	1,410	1,748	2,068	2,325	2,524	y	9
2,653	2,743	2,797	2,814	2,824	2,830	2,830	2,830	2,830	2,830	y	9
2,768	2,356	2,041	1,726	1,408	1,408	1,069	0,742	0,316	0,000	y	9
-0,569	-0,565	-0,557	-0,526	-0,511	-0,511	-0,478	-0,343	-0,124	0,146	z	9
0,426	0,695	0,958	1,213	1,440	1,676	1,676	1,676	1,676	1,676	z	9
1,680	1,723	1,757	1,789	1,820	2,239	2,234	2,221	2,277	2,298	z	9
0,000	0,684	0,972	1,193	1,414	1,414	1,779	2,094	2,339	2,506	y	10
2,618	2,695	2,743	2,767	2,785	2,787	2,787	2,787	2,787	2,787	y	10
2,764	2,356	2,044	1,729	1,408	1,408	1,057	0,728	0,318	0,000	y	10
-0,559	-0,557	-0,560	-0,566	-0,567	-0,567	-0,522	-0,352	-0,091	0,208	z	10
0,518	0,785	1,036	1,283	1,505	1,722	1,722	1,722	1,722	1,722	z	10
1,725	1,808	1,870	1,929	1,990	2,226	2,217	2,199	2,257	2,283	z	10
0,000	0,585	0,827	1,109	1,414	1,414	1,772	2,094	2,329	2,482	y	11
2,577	2,639	2,688	2,720	2,746	2,756	2,756	2,756	2,756	2,756	y	11
2,756	2,357	2,043	1,731	1,411	1,411	1,036	0,716	0,320	0,000	y	11
-0,533	-0,531	-0,530	-0,575	-0,593	-0,593	-0,545	-0,359	-0,071	0,257	z	11
0,561	0,824	1,077	1,305	1,515	1,728	1,805	1,805	1,805	1,805	z	11
1,805	1,920	2,007	2,094	2,179	2,214	2,199	2,181	2,236	2,255	z	11
0,000	0,602	0,849	1,152	1,411	1,411	1,769	2,082	2,313	2,450	y	12
2,539	2,594	2,636	2,670	2,703	2,718	2,719	2,719	2,719	2,719	y	12
2,722	2,357	2,041	1,725	1,409	1,409	1,015	0,699	0,313	0,000	y	12
-0,508	-0,508	-0,508	-0,571	-0,600	-0,600	-0,551	-0,361	-0,051	0,281	z	12
0,596	0,856	1,092	1,307	1,518	1,720	1,794	1,794	1,794	1,794	z	12
1,892	1,998	2,089	2,154	2,189	2,189	2,170	2,147	2,207	2,227	z	12
0,000	0,626	0,885	1,146	1,411	1,411	1,769	2,076	2,308	2,436	y	13
2,523	2,576	2,612	2,641	2,669	2,688	2,690	2,690	2,690	2,690	y	13
2,704	2,359	2,045	1,732	1,420	1,420	0,996	0,686	0,319	0,000	y	13
-0,469	-0,469	-0,467	-0,539	-0,572	-0,572	-0,516	-0,311	0,002	0,313	z	13
0,618	0,877	1,117	1,332	1,531	1,729	1,793	1,793	1,793	1,793	z	13
2,029	2,091	2,102	2,147	2,179	2,179	2,147	2,127	2,187	2,215	z	13
0,000	0,619	0,882	1,138	1,409	1,409	1,756	2,058	2,281	2,422	y	14
2,513	2,565	2,599	2,629	2,650	2,672	2,672	2,672	2,672	2,672	y	14
2,673	2,365	2,045	1,729	1,414	1,414	0,998	0,678	0,318	0,000	y	14
-0,439	-0,439	-0,439	-0,518	-0,545	-0,545	-0,485	-0,282	0,014	0,324	z	14
0,634	0,883	1,116	1,330	1,522	1,719	1,793	1,793	1,793	1,793	z	14
2,010	2,072	2,088	2,128	2,166	2,166	2,134	2,100	2,170	2,197	z	14
0,000	0,629	0,888	1,148	1,411	1,411	1,751	2,054	2,275	2,413	y	15
2,511	2,560	2,588	2,613	2,635	2,664	2,705	2,864	2,864	2,673	y	15
2,673	2,362	2,044	1,728	1,406	1,406	0,997	0,679	0,317	0,000	y	15



-0,426	-0,426	-0,424	-0,498	-0,527	-0,527	-0,467	-0,269	0,016	0,301	z	15
0,615	0,878	1,117	1,326	1,519	1,718	1,766	1,786	1,797	1,827	z	15
2,015	2,064	2,074	2,124	2,162	2,162	2,129	2,094	2,164	2,186	z	15
0,000	0,657	0,928	1,161	1,417	1,417	1,746	2,043	2,259	2,401	y	16
2,491	2,538	2,563	2,580	2,613	2,673	2,758	2,862	2,862	2,641	y	16
2,641	2,359	2,048	1,727	1,389	1,389	0,981	0,667	0,314	0,000	y	16
-0,374	-0,371	-0,371	-0,445	-0,472	-0,472	-0,406	-0,214	0,063	0,353	z	16
0,644	0,896	1,136	1,345	1,528	1,616	1,697	1,723	1,858	1,892	z	16
2,009	2,040	2,051	2,104	2,154	2,154	2,116	2,079	2,144	2,166	z	16
0,000	0,616	0,876	1,151	1,412	1,412	1,738	2,021	2,237	2,382	y	17
2,479	2,528	2,546	2,571	2,643	2,742	2,860	2,860	2,860	2,611	y	17
2,611	2,359	2,044	1,728	1,412	1,412	0,933	0,687	0,315	0,000	y	17
-0,299	-0,299	-0,302	-0,377	-0,403	-0,403	-0,331	-0,140	0,108	0,380	z	17
0,663	0,914	1,147	1,340	1,455	1,551	1,610	1,610	1,906	1,953	z	17
1,986	2,016	2,030	2,089	2,136	2,136	2,094	2,079	2,124	2,122	z	17
0,000	0,587	0,836	1,127	1,414	1,414	1,725	2,001	2,217	2,359	y	18
2,459	2,510	2,530	2,597	2,661	2,749	2,862	2,862	2,862	2,676	y	18
2,676	2,362	2,044	1,699	1,412	1,412	0,990	0,693	0,316	0,000	y	18
-0,213	-0,213	-0,217	-0,296	-0,319	-0,319	-0,248	-0,080	0,163	0,417	z	18
0,682	0,921	1,153	1,344	1,440	1,519	1,556	1,556	1,939	1,964	z	18
1,964	1,990	2,000	2,078	2,121	2,121	2,078	2,075	2,093	2,093	z	18
0,000	0,557	0,789	1,103	1,418	1,418	1,710	1,968	2,183	2,336	y	19
2,440	2,490	2,527	2,602	2,706	2,864	2,864	2,864	2,864	2,682	y	19
2,682	2,362	2,048	1,735	1,414	1,414	1,010	0,708	0,317	0,000	y	19
-0,125	-0,125	-0,124	-0,179	-0,208	-0,208	-0,149	0,002	0,214	0,449	z	19
0,700	0,986	1,150	1,333	1,444	1,505	1,505	1,505	1,938	1,939	z	19
1,939	1,948	1,964	2,043	2,098	2,098	2,077	2,076	2,073	2,071	z	19
0,000	0,547	0,769	1,072	1,420	1,420	1,694	1,939	2,144	2,299	y	20
2,396	2,440	2,461	2,523	2,679	2,862	2,862	2,862	2,862	2,679	y	20
2,679	2,360	2,048	1,733	1,418	1,418	1,026	0,714	0,315	0,000	y	20
-0,043	-0,043	-0,043	-0,050	-0,059	-0,059	-0,006	0,115	0,296	0,505	z	20
0,743	0,976	1,188	1,315	1,417	1,478	1,478	1,478	1,911	1,917	z	20
1,917	1,924	1,928	2,015	2,082	2,082	2,081	2,078	2,076	2,074	z	20
0,000	0,519	0,745	1,026	1,417	1,417	1,677	1,912	2,106	2,251	y	21
2,348	2,391	2,430	2,518	2,673	2,863	2,863	2,863	2,863	2,670	y	21
2,670	2,362	2,042	1,698	1,418	1,418	1,027	0,714	0,316	0,000	y	21
0,022	0,024	0,026	0,028	0,036	0,036	0,084	0,196	0,365	0,550	z	21
0,789	1,011	1,201	1,312	1,412	1,452	1,452	1,452	1,858	1,881	z	21
1,881	1,888	1,894	2,028	2,079	2,079	2,078	2,077	2,074	2,073	z	21
32,563	40,010	35,323	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	xfus	2
0,000	0,519	0,626	0,740	1,021	1,410	1,672	1,907	2,100	2,245	y	1
2,343	2,382	2,365	2,279	2,133	1,937	1,692	1,411	1,021	0,711	y	1
0,655	0,593	0,520	0,313	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,019	0,022	0,023	0,023	0,025	0,029	0,081	0,193	0,358	0,546	z	1
0,781	1,005	1,250	1,503	1,724	1,895	2,019	2,070	2,070	2,067	z	1
2,067	2,067	2,067	2,066	2,066	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,000	0,508	0,624	0,739	1,016	1,407	1,666	1,903	2,096	2,240	y	2
2,338	2,377	2,360	2,279	2,130	1,931	1,690	1,409	1,014	0,709	y	2
0,659	0,591	0,512	0,312	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
0,314	0,314	0,211	0,206	0,206	0,206	0,258	0,369	0,534	0,723	z	2
0,950	1,173	1,423	1,674	1,895	2,073	2,188	2,241	2,241	2,241	z	2

2,240	2,213	2,067	2,066	2,062	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
33,129	0,000	6,511	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	podorg1
0,000	0,183	0,367	0,733	1,090	1,467	1,917	3,612	3,712	0,000	xpod 1
0,000	0,025	0,048	0,088	0,122	0,148	0,167	0,167	0,167	0,000	podr 1
32,563	2,558	1,502	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	podorg2
0,000	0,437	0,837	1,207	1,582	1,957	2,437	3,037	3,874	0,000	xpod 2
0,336	0,295	0,275	0,265	0,265	0,265	0,240	0,165	0,000	0,000	podr 2
31,771	0,000	2,059	8,896	33,129	0,000	6,511	3,654	0,000	0,000	finorg1
0,000	29,742	40,000	50,000	60,000	62,529	70,000	80,000	90,000	100,000	xfin 1
0,000	1,034	1,338	1,518	1,596	1,607	1,540	1,259	0,753	0,000	finord1
19,058	0,000	2,191	0,000	21,125	0,000	2,371	6,145	0,000	0,000	finorg2
0,000	20,260	30,000	40,000	50,000	60,000	70,000	84,000	98,373	100,000	xfin 2
0,000	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,000	finord2
21,125	0,000	2,371	6,145	22,370	0,000	2,532	0,000	0,000	0,000	finorg3
0,000	20,260	30,000	40,000	50,000	60,000	70,000	84,000	98,373	100,000	xfin 3
0,000	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,765	0,000	finord3
23,758	2,488	-0,925	0,000	25,292	2,138	-0,300	6,008	0,000	0,000	finorg4
0,000	10,000	20,000	30,000	40,000	50,000	60,000	70,000	80,000	100,000	xfin 4
0,000	0,462	0,819	1,113	1,324	1,429	1,450	1,345	1,113	0,000	finord4
25,292	2,138	-0,300	6,008	29,062	2,050	-0,170	3,512	0,000	0,000	finorg5
0,000	10,000	20,000	30,000	40,000	50,000	60,000	70,000	80,000	100,000	xfin 5
0,000	0,462	0,819	1,113	1,324	1,429	1,450	1,345	1,113	0,000	finord5
29,062	2,050	-0,170	3,512	32,604	1,869	0,132	0,000	0,000	0,000	finorg6
0,000	10,000	20,000	30,000	40,000	50,000	60,000	70,000	80,000	100,000	xfin 6
0,000	0,462	0,819	1,113	1,324	1,429	1,450	1,345	1,113	0,000	finord6
30,958	2,842	1,680	7,504	32,471	5,717	1,680	3,758	0,000	0,000	canorg1
0,000	10,000	20,000	30,000	40,000	50,000	60,000	70,000	80,000	100,000	xcan 1
0,000	0,856	1,393	1,755	1,975	2,062	1,909	1,722	1,332	0,000	canord1
32,471	5,717	1,680	3,758	35,007	7,334	1,680	0,000	0,000	0,000	canorg2
0,000	10,000	20,000	30,000	40,000	50,000	60,000	70,000	80,000	100,000	xcan 2
0,000	0,856	1,393	1,755	1,975	2,062	1,909	1,722	1,332	0,000	canord2

## ANNEXE E

## Programme réalisant le numérotation :

Le programme réalisant la numérotation est décrit ci-dessous, il est incorporé dans la programme *main*.

```

use com_var
implicit none
integer(2) ll,i2,l,k,n,n3,i,j
integer(2) :: compt1, compt2
integer(2) :: nse = 0, nel = 0, nnd(30,2) = 0, a
                nelt = 0, nndt = 0, ntel = 0, ntnd = 0
 7 format (3f9.3)
 9 format (2(i5,3f8.3$)$)
70 format ("N° sous-ensemble",i5," Nbr elements",i5," Nbr noeuds",i5)
OPEN (99, FILE = 'output.txt')

!*****
!*****      liste pour les ailes
!*****
OPEN (10, FILE = 'ailes_10.TXT')

    compt1 = nsecl ; compt2 = nord_secl

nnd(1:compt2,1) = (/ (i,i=1,compt2) /)
nnd(1:compt2,2) = nnd(1:compt2,1) + compt2
nse = 1
nelt = 2*(compt1-1)*(compt2-1); nndt = 2*compt1*(compt2-1)
ntel = nelt ; ntnd = nndt
write (99,70) nse, nelt, nndt

do l = 1, 2
  select case (l)
    case (1) ; ll = 1 ; l2 = 2
      case (2) ; ll = 2 ; l2 = 1
        nnd(1,1) = 1 ; nnd(compt2,1) = compt2
        nnd(1,2) = compt2+1; nnd(compt2,2) = 2*compt2
  end select
  read (10,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
  do k = 1, compt1-1
    alrt(1:compt2,1:3,1)=alrt(1:compt2,1:3,2)
    read (10,7) ((vecrt(n,n3) ,n3=1,3),n=i,compt2-1)
    read (10,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
    do i = 1, compt2-1
      nel = nel + 1
      write (99,'(i5$)') nel
      do j = i, i+1
        write(99,9) nnd(j,1),alrt(j,1:3,11)
      end do
      do j = i+1, i, -1
        write(99,9) nnd(j,2),alrt(j,1:3,12)
      end do
      write(99,7) vecrt(i,1:3)
    end do
    nnd(1:compt2,1) = nnd(1:compt2,2)
    nnd(1:compt2,2) = nnd(1:compt2,1) + compt2
  end do
end do

close (10)
!*****

```

```

!*****liste pour le fuselage
!*****
OPEN (20, FILE = 'fus_20.TXT')

nel = 0
nelt = 0
nndt = 0
nse = 2
do i = 1, nseg_fus
  nelt = (nord_secf(i)-1)*(nstat_segf(i)-1) + nelt
  nndt = (nord_secf(i)-1+1)*(nstat_segf(i)-1+1) + nndt
end do
ntel = nelt + ntel          ; ntnd = nndt + ntnd
write (99,70) nse, nelt, nndt

compt2 = nstat_segf(1)
nnd(1:compt2,1) = (/ (i,i=1,compt2)/)
nnd(1:compt2,2) = nnd(1:compt2,1) + compt2
do l =1, nseg_fus
  compt1 = nord_secf (l)
  compt2 = nstat_segf(l)
  read (20,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
  do k = 1, compt1-1
    alrt(1:compt2,1:3,1)=alrt(1:compt2,1:3,2)
    read (20,7) ((vecrt(n,n3) ,n3=1,3),n=1,compt2-1)
    read (20,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
    do i = 1, compt2-1
      nel = nel + 1
      write (99,'(i5$)') nel
      do j = i+1, i, -1
        write(99,9) nnd(j,1),alrt(j,1:3,1)
      end do
      do j = i, i+1
        write(99,9) nnd(j,2),alrt(j,1:3,2)
      end do
      write(99,7) vecrt(i,1:3)
    end do
    nnd(1:compt2,1) = nnd(1:compt2,2)
    nnd(1:compt2,2) = nnd(i:compt2,1) + compt2
  end do
end do

close (20)

!*****
!*****          nacelles
!*****

OPEN (30, FILE = 'nac_30.TXT')

nel = 0
nelt = 0
nndt = 0
nse = 31

compt1 = 25
compt2 = npodor
nelt = ((compt1-1)/2)*(compt2-1); nndt = compt2*((compt1-1)/2+1)
nrel = nelt + ntel          ; ntnd = nndt + ntnd
write (99,70) nse, nelt, nndt
nnd(1:compt2,1) = (/ (i,i=1,compt2)/)
nnd(1:compt2,2) = nnd(1:compt2,1) + compt2

read (30,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
do k = 1, (compt1-1)/2
  alrt(1:compt2,1:3,1)=alrt(1:compt2,1:3,2)
  read (30,7) ((vecrt(n,n3) ,n3=1,3),n=1,compt2-1)

```

```

      read (30,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
      do i = 1, compt2-1
      nel = nel + 1
      write (99,'(i5$)') nel
        do j = i, i+1
          write(99,9) nnd(j,1),alrt(j,1:3,1)
        end do
        do j = i+1, i, -1
          write(99,9) nnd(j,2),alrt(j,1:3,2)
        end do
        write(99,7) vecrt(i,1:3)
      end do
      nnd(1:compt2,1) = nnd(1:compt2,2)
      nnd(1:compt2,2) = nnd(1:compt2,1) + compt2
    end do

nel = 0
nelt = 0
nndt = 0
nse = 32
nelt = ((compt1-1)/2)*(compt2-1); nndt = compt2*((compt1-1)/2+1)
ntel = nelt*2 + ntel ; ntnd = nndt*2 + ntnd
write (99,70) nse, nelt, nndt
nnd(1:compt2,1) = ((i,i=1,compt2)/)
nnd(1:compt2,2) = nnd(1:compt2,1) + compt2

      read (30,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
      do k = 1, (compt1-1)/2
        alrt(1:compt2,1:3,1)=alrt(1:compt2,1:3,2)
        read (30,7) ((vecrt(n,n3) ,n3=1,3),n=1,compt2-1)
        read (30,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
        do i = 1, compt2-1
        nel = nel + 1
        write (99,'(i5$)') nel
          do j = i, i+1
            write(99,9) nnd(j,1),alrt(j,1:3,1)
          end do
          do j = i+1, i, -i
            write(99,9) nnd(j,2),alrt(j,1:3,2)
          end do
          write(99,7) vecrt(i,i:3)
        end do
        nnd(1:compt2,1) = nnd(1:compt2,2)
        nnd(1:compt2,2) = nnd(1:compt2,1) + compt2
      end do

close (30)

!*****
!***** empennage vertical
!*****
OPEN (40, FILE = 'empv_40.TXT')

nel = 0
nelt = 0
nndt = 0

compt1 = nfinor
compt2 = nf
nse = 41
nelt = compt1-1 ; nndt = compt1*2
ntel = nelt + ntel; ntnd = nndt - ntnd
write (99,70) nse, nelt, nndt
nnd(1:2,1) = ((i,i=1,2)/)
nnd(1:2,2) = nnd(1:2,1) + 2

do l = 1, 2
  read (40,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,2)

```

```

do k = 1, compt1-1
  alrt(1:2,1:3,1)=alrt(1:2,1:3,2)
  read (40,7) ((vecrt(n,n3) ,n3=1,3),n=1,2-1)
  read (40,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,2)
  if (modulo(1,2) <> 0) then
    do i = 1, 2-1
      nel = nel + 1
      write (99,'(i5$)') nel
      do j = i, i+1
        write(99,9) nnd(j,1),alrt(j,1:3,1)
      end do
      do j = i+1, i, -1
        write(99,9) nnd(j,2),alrt(j,1:3,2)
      end do
      write(99,7) vecrt(i,1:3)
    end do
    nnd(1:2,1) = nnd(1:2,2)
    nnd(1:2,2) = nnd(1:2,1) + 2
  end if
end do
end do

nel = 0
nelt = 0
nndt = 0
nse = 42
nelt = (compt1-1)*2; nndt = ((compt1-1)*2)*2+2
ntel = nelt + ntel ; ntnd = nndt + ntnd
write (99,70) nse, nelt, nndt

nnd(1:2,1) = ((i,i=1,2)/)
nnd(1:2,2) = nnd(1:2,1) + 2

do l = 3, 2*(compt2/2)
  read (40,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,2)
  do k = 1, compt1-1
    alrt(1:2,1:3,1)=alrt(1:2,1:3,2)
    read (40,7) ((vecrt(n,n3) ,n3=1,3),n=1,2-1)
    read (40,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,2)
    if (modulo(1,2) <> 0) then
      do i = 1, 2-1
        nel = nel + 1
        write (99,'(i5$)') nel
        do j = i, i+1
          write(99,9) nnd(j,1),alrt(j,i:3,1)
        end do
        do j = i+1, i, -1
          write(99,9) nnd(j,2),alrt(j,1:3,2)
        end do
        write(99,7) vecrt(i,1:3)
      end do
      nnd(1:2,1) = nnd(1:2,2)
      nnd(1:2,2) = nnd(1:2,1) + 2
    end if
  end do
end do

nel = 0
nelt = 0
nndt = 0
nse = 43
nelt = (compt1-1)*6; nndt = ((compt1-1)*2)*6+2
ntel = nelt + ntel ; ntnd = nndt + ntnd
write (99,70) nse, nelt, nndt

nnd(1:2,1) = ((i,i=1,2)/)
nnd(1:2,2) = nnd(1:2,1) + 2

```

```

do l = 1, 2*(compt2/2)
  read (40,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,2)
  do k = 1, compt1-1
    alrt(1:2,1:3,1)=alrt(1:2,1:3,2)
    read (40,7) ((vecrt(n,n3) ,n3=1,3),n=1,2-1)
    read (40,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,2)
    do i = 1, 2-1
      nel = nel + 1
      write (99,'(i5$)') nel
      do j = i, i+1
        write(99,9) nnd(j,1),alrt(j,1:3,1)
      end do
      do j = i+1, i, -1
        write(99,9) nnd(j,2),alrt(j,1:3,2)
      end do
      write(99,7) vecrt(i,1:3)
    end do
    nnd(1:2,1) = nnd(1:2,2)
    nnd(1:2,2) = nnd(1:2,1) + 2
  end do
end do

close (40)

!*****
!***** empennage horezontal
!*****

OPEN (50, FILE = 'emph_50.TXT')

nel = 0
nelt = 0
nndt = 0
nse = 5
compt1 = ncan
compt2 = ncanor
nelt = (compt2-1)*4; nndt = compt2*4+10
ntel = nelt + ntel ; ntnd = nndt + ntnd
write (99,70) nse, nelt, nndt
nnd(1:compt2,1) = (/ (i,i=1,compt2) /)
nnd(1:compt2,2) = nnd(1:compt2,1) + compt2

do l = 1, 2*compt1
  if (MODULO(l,2) == 1) then
    l1 = 2 ; l2 = 1
  else
    l1 = 1 ; l2 = 2
  end if
  read (50,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
  alrt(1:compt2,i:3,1)=alrt(1:compt2,1:3,2)
  read (50,7) ((vecrt(n,n3) ,n3=1,3),n=1,compt2-1)
  read (50,7) ((alrt(n,n3,2),n3=1,3),n=1,compt2)
  do i = 1, compt2-1
    nel = nel + 1
    write (99,'(i5$)') nel
    do j = i, i+1
      write(99,9) nnd(j,1),alrt(j,1:3,l1)
    end do
    do j = i+1, i, -1
      write(99,9) nnd(j,2),alrt(j,1:3,l2)
    end do
    write(99,7) vecrt(i,1:3)
  end do
  nnd(1:compt2,1) = nnd(1:compt2,2)
  nnd(1:compt2,2) = nnd(1:compt2,1) + compt2
end do

close (50)

```

```

write (99, '(t10, "Le nombre total des éléments est ", i5)') ntel
write (99, '(t10, "Le nombre total des nœuds est ", i5)') ntnd
close (99)
! *****
!           fin
! *****
end

```

### Récupération des résultats du maillage :

Le fichier "*output.txt*" est le fichier de sortie ; il contient le résultat du maillage sous la forme suivante :

- la première ligne contient le numéro du sous-ensemble "*N°sous-ensemble ...*", ensuite, le nombre d'éléments du sous-ensemble "*Nbr elements ...*", enfin, le nombre de nœuds "*Nbr noeuds ...*";
- les lignes qui suivent et qui sont au nombre de "*Nbr elements ...*" contiennent les informations décrivant chaque élément : avec le format *I5* → le numéro de l'élément, avec le format *4(I5,3F8.3)* → les numéros des quatre nœuds accompagné par leur coordonnées *x*, *y* et *z* dans l'ordre et sur la même ligne et avec le format *F8.3* les coordonnées du vecteur normal à l'élément.

Dans ce qui suit nous présentons 46 lignes sur 1514 lignes du fichier "*output.txt*" pour avoir une idée de la numérotation des nœuds et celle des éléments. Il est nécessaire de noter que ce fichier que comporte 40 pages.

N° sous-ensemble	1	Nbr elements	144	Nbr noeuds	168														
1	1	11,800	1,400	2,000	2	11,801	1,400	2,000	15	16,251	3,000	1,830	14	16,250	3,000	1,830	0,000	0,106	0,994
2	2	11,801	1,400	2,000	3	12,480	1,400	2,158	16	16,831	3,000	1,981	15	16,251	3,000	1,830	-0,190	0,606	0,773
3	3	12,480	1,400	2,158	4	13,160	1,400	2,253	17	17,413	3,000	2,069	16	16,831	3,000	1,981	-0,128	0,445	0,886
4	4	13,160	1,400	2,253	5	14,520	1,400	2,378	18	18,575	3,000	2,177	17	17,413	3,000	2,069	-0,086	0,337	0,938
5	5	14,520	1,400	2,378	6	15,880	1,400	2,418	19	19,737	3,000	2,233	18	18,575	3,000	2,177	-0,037	0,210	0,977
6	6	15,880	1,400	2,418	7	17,240	1,400	2,406	20	20,900	3,000	2,194	19	19,737	3,000	2,233	0,020	0,077	0,997
7	7	17,240	1,400	2,406	8	18,600	1,400	2,360	21	22,063	3,000	2,100	20	20,900	3,000	2,194	0,055	0,024	0,998
8	8	18,600	1,400	2,360	9	19,960	1,400	2,300	22	23,225	3,000	2,095	21	22,063	3,000	2,100	0,026	0,091	0,995
9	9	19,960	1,400	2,300	10	21,320	1,400	2,279	23	24,388	3,000	2,042	22	23,225	3,000	2,095	0,029	0,080	0,996
10	10	21,320	1,400	2,279	11	22,680	1,400	2,251	24	25,550	3,000	1,997	23	24,388	3,000	2,042	0,029	0,099	0,995
11	11	22,680	1,400	2,251	12	24,040	1,400	2,210	25	26,712	3,000	1,947	24	25,550	3,000	1,997	0,036	0,099	0,994
12	12	24,040	1,400	2,210	13	25,400	1,400	2,190	26	27,875	3,000	1,850	25	26,712	3,000	1,947	0,046	0,113	0,993



```

write (99, '(t10, "Le nombre total des éléments est ", i5)') ntel
write (99, '(t10, "Le nombre total des noeuds est ", i5)') ntnd
close (99)
! *****
!           fin
! *****
end

```

### Récupération des résultats du maillage :

Le fichier "*output.txt*" est le fichier de sortie ; il contient le résultat du maillage sous la forme suivante :

- la première ligne contient le numéro du sous-ensemble "*N°sous-ensemble ...*" , ensuite, le nombre d'éléments du sous-ensemble "*Nbr elements ...*" , enfin, le nombre de nœuds "*Nbr noeuds ...*" ;
- les lignes qui suivent et qui sont au nombre de "*Nbr elements ...*" contiennent les informations décrivant chaque élément : avec le format *I5* → le numéro de l'élément, avec le format *4(I5,3F8.3)* → les numéros des quatre nœuds accompagné par leur coordonnées *x, y* et *z* dans l'ordre et sur la même ligne et avec le format *F8.3* les coordonnées du vecteur normal à l'élément.

Dans ce qui suit nous présentons 46 lignes sur 1514 lignes du fichier "*output.txt*" pour avoir une idée de la numérotation des nœuds et celle des éléments. Il est nécessaire de noter que ce fichier que comporte 40 pages.

N° sous-ensemble		1			Nbr elements			144			Nbr noeuds			168					
1	1	11,800	1,400	2,000	2	11,801	1,400	2,000	15	16,251	3,000	1,830	14	16,250	3,000	1,830	0,000	0,106	0,994
2	2	11,801	1,400	2,000	3	12,480	1,400	2,158	16	16,831	3,000	1,981	15	16,251	3,000	1,830	-0,190	0,606	0,773
3	3	12,480	1,400	2,158	4	13,160	1,400	2,253	17	17,413	3,000	2,069	16	16,831	3,000	1,981	-0,128	0,445	0,886
4	4	13,160	1,400	2,253	5	14,520	1,400	2,378	18	18,575	3,000	2,177	17	17,413	3,000	2,069	-0,086	0,337	0,938
5	5	14,520	1,400	2,378	6	15,880	1,400	2,418	19	19,737	3,000	2,233	18	18,575	3,000	2,177	-0,037	0,210	0,977
6	6	15,880	1,400	2,418	7	17,240	1,400	2,406	20	20,900	3,000	2,194	19	19,737	3,000	2,233	0,020	0,077	0,997
7	7	17,240	1,400	2,406	8	18,600	1,400	2,360	21	22,063	3,000	2,100	20	20,900	3,000	2,194	0,055	0,024	0,998
8	8	18,600	1,400	2,360	9	19,960	1,400	2,300	22	23,225	3,000	2,095	21	22,063	3,000	2,100	0,026	0,091	0,995
9	9	19,960	1,400	2,300	10	21,320	1,400	2,279	23	24,388	3,000	2,042	22	23,225	3,000	2,095	0,029	0,080	0,996
10	10	21,320	1,400	2,279	11	22,680	1,400	2,251	24	25,550	3,000	1,997	23	24,388	3,000	2,042	0,029	0,099	0,995
11	11	22,680	1,400	2,251	12	24,040	1,400	2,210	25	26,712	3,000	1,947	24	25,550	3,000	1,997	0,036	0,099	0,994
12	12	24,040	1,400	2,210	13	25,400	1,400	2,190	26	27,875	3,000	1,850	25	26,712	3,000	1,947	0,046	0,113	0,993