

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

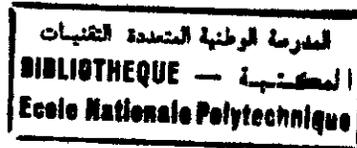
Ministère de l'enseignement supérieur Et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

G. Mécanique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique



ANALYSE DES STRUCTURES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du diplôme

d'ingénieur d'état en mécanique

Réalisé par :

M. MOHAND KACI Hakim

Dirigé par :

M^{elle}. Amor

10 Avenue Hassen Badi, El- Harrach, Alger 16200, Algérie

Promotion 1999 / 2000

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE**

Ministère de l'enseignement supérieur Et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

*ANALYSE DES STRUCTURES PAR LA METHODE DES
ELEMENTS FINIS*

Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du diplôme

D'ingénieur d'état en mécanique

Réalisé par :

M. MOHAND KACI Hakim

Dirigé par :

M^{elle}. Amor

10 Avenue Hassen Badi, El- Harrach, Alger 16200, Algérie

Promotion 1999 / 2000

Dédicaces



Je dédie ce modeste travail en premier lieu à mes très chers parents et mes adorables sœurs qui m'ont offerts tous les supports morales et matériels dont j'avais besoin et qui n'ont ménagés aucun effort pour permettre ma progression dans les différents domaines de la vie.

Je le dédie également à :

Toute ma famille

Tout mes amis et je cite en particulier Ahmed, Azzedine, Samir, et Farid.

Tout mes camarades de la promotion « Génie mécanique 1999/2000 » que je cite : Karim, Amer, Toufik, Kacim, Rachid, Abderrahmane, Nacéri, Kheter, Nabil, Djamel, Okba, Akacha.

Hakim

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à ma promotrice Mademoiselle N. Amor pour son suivi et ses encouragements ainsi qu'à Monsieur F. Belblidia pour ses précieux conseils et recommandations.

Je remercie également tous les enseignants qui ont contribué de près ou de loin à ma formation et à l'ensemble des membres des membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger notre travail.

J'exprime aussi ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé pour que ce travail abouti et je cite en particulier mon oncle M. Mohand Kaci Samir.

حاولنا من خلال هذا العمل تقديم عرض وافي و شامل حول طريقة العناصر المنتهية و سبل ترجمتها آليا في جهاز إعلام آلي.

كمرحلة أولى قدمنا شرحا نظريا حول أسس تقنيات التحليل و كذا خصائص بعض العناصر ذات 1،2،3 أبعاد المعتمدة بكثرة تطبيقيا، بعد ذلك قدمنا برنامجا آليا أعدناه بإعتبار العناصر المحللة آنفا و كذا النتائج العددية المتحصل عليها لبعض التطبيقات قد درست في خضم المستندات المرجعية. هذا العمل مكنتنا من تقدير الإمكانيات التي تمنحها لنا طريقة العناصر المنتهية في إطار التحليل الهيكلي و تأقلمها مع طرق البرمجة الآلية.

Résumé :

Nous avons essayé à travers ce travail de donner un aperçu conçi et général de la méthode des éléments finis et sa mise en oeuvre sur un ordinateur. Ainsi, nous abordons en premier lieu les fondements techniques de calcul et les caractéristiques de plusieurs éléments à 1,2,3 dimensions souvent utilisés dans la pratique. Ensuite, nous présentons un programme modulaire interfacé qui met en exidesse les différents éléments que l'on a déjà étudié et les principaux résultats d'applications traités par les références bibliographiques.

Ce travail nous a permis d'apprécier les avantages que présente la méthode des éléments finis dans l'analyse des structures et son adaptation aux techniques de programmation sur Pc.

Mots clés : Méthode des éléments finis, analyse des structures, type délément, programme.

Abstract :

We have tried, from this work to present the finite element method and to elaborate a computer program. Firstly we have considered the fondments and the procedures of calculation of this method. We have also treated massy types of elements in 1,2,3 dimensions which are frequently used in practice, we have presented in the second step, a headling package program. Which deals with the different elements studies and the results oh the applications traited by the bibliographical references.

This work allowed us to appreciate the advantages of finite element method in the structural analysis and its adaptation for the programming technics on the personal computer.

SOMMAIRE



Introduction	1
I- Historique	1
II- Organisation de l'étude	3
1 Théorèmes de l'énergie	4
I- Généralité	4
I-1. Notions	4
I-2. Rappel des Equations de la mécanique	5
I-3. Définition	8
II- Approche cinématique (déplacement)	8
II-1. "Principe des travaux virtuel"	9
II-2. Théorème de l'énergie potentielle total	10
III- Approche équilibre (contraintes)	11
IV- Synthèse	12
2 Méthodes matricielles	14
I- formulation matricielle de la mécanique des structure	14
I-1. conventions et notations	14
I-2. Equation de base de la mécanique des structures	15
II- Propriété des structures discrètes	17
II-1. Notion de structures discrète	17
II-2. Théorème de Castigliano	17
II-3. Matrice de rigidité et de flexibilité	18
II-4. Propriétés des matrice de rigidité	19
III- Méthode des force	19
IV- Méthode des déplacement	21
V- Conclusion	22
3 Fondements de la méthode des éléments finis	24
I- Rappels sur les méthodes d'approximation	24
I-1. Notion générales	24
II- Le concept d'élément fini	25

II-1. Différents formulations.....	25
II-2. Le modèle déplacement.....	26
III- Propriété.....	29
4 Techniques de calcul au niveau élémentaire.....	31
I- Matrice d'interpolation.....	31
I-1. Fonction d'interpolation.....	31
I-2. Série polynomial.....	32
I-3. Obtention directe des fonction d'interpolation.....	32
II- Coordonnées intrinsèques.....	34
II-1. Coordonnées intrinsèques pour les quadrilatères.....	35
III- Eléments isoparamétriques.....	36
III-1. Principe et propriété.....	36
III-2. Calcul des Eléments isoparamétriques.....	37
IV- Intégration Numérique.....	39
IV-1. La Méthode de gauss.....	39
IV-2. Choix de l'ordre de l'intégration.....	42
5 Techniques de calcul au niveau global.....	43
I- Assemblage.....	43
I-1. Approche énergétique.....	45
I-2. Règle pratique d'assemblage.....	45
II- Prise en compte des condition sur les déplacements.....	45
II-1. Relation de dépendance linéaire.....	46
II-2. Déplacement imposés.....	46
III- Résolution des systèmes linéaires.....	47
III-1. Classement des méthodes de résolutions.....	47
III-2. Méthode d'approximation de gauss.....	49
6 Divers types d'éléments.....	52
I – Elément barre.....	53
I – 1. Equation de rigidité de la barre dans le repère local.....	53
I – 1 – 1. Fonction de déplacement et foncion de forme.....	53
I – 1 – 2. Equation de rigidité par la méthode énergitique.....	54



I-2. Equation de rigidité d'une barre orienté arbitrairement.....	55
I-3. Equation de la torsion	57
I-4. Analyse dynamique.....	58
I-4-1. Systeme masse – ressort.....	58
I-4-2. Matrice masses de la barre.....	59
I-4-3. Matrice masse dans le repère globale.....	61
II – Elément poutre	62
II – 1. Introduction.....	62
II – 2. Fonction de déplacement.....	62
II – 3. Equation de rigidité.....	63
II – 4. Poutre orientée arbitrairement	65
II – 5. Poutre sous charges réparties.....	68
II – 6. Elément poutre a section non uniforme.....	69
III –Elément plaque.....	72
III – 1. Rappel des théorèmes fondamentaux.....	72
III – 2. Eléments pour l'analyse statique d'une Plaque.....	74
III – 2 – 1. L'élément rectangulaire a huit degrés de libertés.....	74
III – 2 – 2. Elément triangulaire à six degrés de liberté.....	77
III – 3 – Eléments pour l'analyse de la plaque flexionnelle.....	80
III – 3 – 1. Théories de la plaque en flexion	80
III – 3 – 2. Elément rectangulaire a seize D.D.L.....	80
III – 3 – 2. Elément rectangulaire a neuf D.D.L.....	82
III – 4 – Eléments pour l'analyse dynamique.....	85
III – 4 – 1. Elément rectangulaire a seize D.D.L.....	85
III – 4 – 2. Elément rectangulaire a neuf D.D.L.....	86
VI – Eléments solides a trois dimensions.....	87
VI – 1. Introduction.....	87
VI – 2 . Problèmes axisymétriques.....	87
VI – 2 –1. Equation de base	88
VI – 2 –2. Elément axisymétrique à trois nœuds.....	89
VI – 3. Tétradres.....	91
VI – 4. Hexaèdres a huit nœuds.....	93

7	Présentation du programme	95
	1 – Introduction	95
	II – Programme ADSMEF	96
	II – 1. Introduction	96
	II – 2. Organisation general	96
	II – 3. Allocation des tables	96
	II – 4. Description des tables fonctionnelles	97
	III – Application du programme ADSMEF	101
	Conclusion	120



Table des Figures



III.1	Discrétisation de la structure	27
IV.1	Coordonnées intrinsèques pour le quadrilatère	35
IV.2	Eléments isoparamétrique à deux dimension	37
IV.3	Méthode de Gauss	39
V.1	Règle pratique d'assemblage	45
VI.1	Barre dans le repère local	53
VI.2	Elément barre orienté arbitrairement	56
VI.3	Système masse -- ressort en vibration libre	59
VI.4	Elément poutre à section uniforme	62
VI.5	Elément poutre orienté arbitrairement	65
VI.6	Elément poutre à section variable	69
VI.7	Elément rectangulaire à huit d.d.l en contrainte plane ou déformation plane	74
VI.8	Elément triangulaire en contrainte ou déformation planes	78
VI.9	Elément triangulaire à neuf d.d.l	82
VI.10	Triangle axisymétrique à trois nœuds	89
VII.1	Poutre sous charges réparties linéairement	102
VII.2	Poutre à section uniformément variable	103
VII.3	Poutre en vibration libre avec l'effet d'une masse et d'un ressort	103
VII.4	Portique en vibration libre	105
VII.5	Portique en flambage	106
VII.6	Structure barres en mode statique	106
VII.7	Structure poutres en mode statique	107
VII.8	Structure poutre en vibration libre	108
VII.9	Plaque triangulaire en statique	110
VII.10	Plaque rectangulaire en flexion	112
VII.11	Elément tétraèdre à quatre nœuds	116
VII.12	Elément brique à huit nœuds	117

Table des tableaux



IV.1 Points d'intégration et coefficients de pondération dans la méthode de Gauss.....	41
VII.1 Résultats de l'application 7.....	108
VII.2 Les modes propres de l'application 8.....	109
VII.3 Les modes propres de l'application 8.....	109
VII.4 Les déplacements pour l'application 9.....	111
VII.5 Valeurs des contraintes de l'application 9.....	112
VII.6 Valeurs des déplacements pour l'application 10.....	113
VII.7 Valeurs des réactions aux nœuds pour l'application 10.....	115
VII.8 Les déplacements de l'application 11.....	116
VII.9 Résultats des contraintes de l'application 11.....	116
VII.10 Valeurs des déplacements de l'application 12.....	118
VII.11 Valeurs des contraintes de l'application 12.....	118

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Chapitre 0

INTRODUCTION

CHAPITRE 0



INTRODUCTION

Les techniques de calcul des structures ont connu un développement considérable, motivé par les besoins des industries de pointes et soutenu par les progrès effectués dans le domaine des ordinateurs. Ainsi la méthode des éléments finie (en abrégé M.E.F.) est - elle communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, nucléaire, génie civil, construction, etc....

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la M.E.F. appliquée au calcul des structures est à caractère pluridisciplinaire , car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- *La mécanique des structures* : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité, etc.....
- *L'analyse numérique* : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires, des problèmes aux valeurs propres....
- *L'informatique appliqué* : techniques de développement et de maintenance de grands logiciels.

On se propose, dans cette étude générale, d'introduire les notions de base nécessaires à la compréhension de cette méthode. Pour cela, il est utile d'en faire un bref historique.

I – HISTORIQUE

Les bases théoriques de la M.E.F. reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autres part sur les méthodes d'approximation.

En ce qui concerne les théorèmes énergétiques de l'élasticité, leur formulation a été effectuée au siècle dernier : 1819, Navier définit une méthode d'étude des systèmes hyperstatiques basée sur l'application des conditions d'équilibre et de compatibilité, puis Maxwell en 1864 et Castigliano en 1878 établissent de façon complète les théorèmes de

l'énergie. Cependant, les applications de cette formulation au calcul des structures complexes ont été pratiquement inexistantes à cause de l'indisponibilité de moyens de calcul. Il faut noter, en 1932, l'établissement par Cross d'une méthode rendant possible l'analyse de systèmes de poutres avec les moyens de calcul de l'époque. Cependant, ces techniques ne permettaient pas jusqu'alors la résolution de problèmes de milieux continus rendue possible uniquement par la discrétisation du problème continu à l'aide de méthodes d'approximation adéquates.

C'est au début du 20ème siècle qu'ont été acquis des résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de Ritz en 1908 et de Galerkin en 1915. Puis, en 1943, Courant établit les bases de la M.E.F. en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible en effectuant une discrétisation spatial du domaine tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

Après la deuxième guerre mondiale on assiste au développement de méthodes matricielles permettant de traiter des problèmes de structures assez complexes avec les calculatrices de bureaux disponibles alors. Parmi les contributions les plus importantes, celle de Levy en 1947 et Gavey en 1951 pour la méthode des forces et Levy en 1953 pour la méthode des déplacements. En 1954 Denke systématise la méthode des forces. Enfin, en 1955, Argyris présente une approche unifiée des méthodes des déplacements et des forces, puis l'année suivante Turner et Clough publient une présentation systématique de la méthode des déplacements. Ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la M.E.F.

A partir de cette date, la M.E.F. va connaître un développement intense sous l'impulsion de l'industrie aérospatiale et grâce à la disponibilité des premiers ordinateurs. La méthode des déplacements va être choisie de façon quasi universelle comme technique de résolution matricielle de préférence à la méthode des forces malgré la mise au point de procédures de traitement automatique des inconnues hyperstatiques par Robinson et Denke. Dès lors, on assiste au développement de nouveaux éléments tels que membranes, plaques, coques, éléments de volume et à l'établissement de nouvelles formulations telles que les formulations équilibre ou mixtes (Fraeys et Veubek). Par ailleurs, le domaine d'application de la M.E.F. limité au début à la statique linéaire s'étend progressivement à la dynamique linéaire. Cet historique serait incomplet si l'on omettait de mentionner le développement de programmes généraux d'analyse à partir des années 60. Ce phénomène a été particulièrement important parce qu'il a véritablement aboutit à faire rentrer la M.E.F.

dans la pratique industrielle. Il est certain que, d'une part, la M.E.F. se prête bien à la programmation sur ordinateur et que, d'autre part, la M.E.F. se caractérise par son universalité et son adaptabilité au traitement des problèmes les plus divers ; d'où l'idée de développer des codes généraux.

II – ORGANISATION DE L'ETUDE

on vise à travers de cette étude de mettre en œuvre la méthode des éléments finis en réalisant un programme numérique qui prend en charge différents éléments . Cette étude est organisé en 7 chapitres qui présentent les divers concepts de la méthode des éléments finis ainsi que les techniques numériques correspondantes.

Chapitre I : exposé des théorèmes énergétiques qui servent de base à la formulation de la méthode des éléments finis.

Chapitre II : Formulation matricielle de la méthode des éléments finis qui consiste à discrétiser la formulation intégrale du chapitre I .

Chapitre III : présentation des différentes méthodes d'approximations sur lesquelles est fondée la méthode des éléments finis.

Chapitre IV : exposé de la technique d'approximation nodale et introduction des notions de fonctions d'interpolation, d'élément de référence et de transformation géométrique.

Chapitre V : Description des méthodes de calcul au niveau globale ainsi que les méthodes numériques nécessaires pour construire et résoudre des systèmes d'équations formées au chapitre IV.

Chapitre VI : présentation des fonctions d'interpolation et des équations de rigidité des éléments à une, deux et trois dimensions.

Chapitre VII : Présentation du programme ADSMEF qui à été mis en œuvre en se basant sur les formulations citées dans le chapitre VI et présentation de quelques unes de ses applications.

finalement, une conclusion de cette étude est résumée avec recommandation pour de futures études.

Chapitre I



THEOREMES DE L'ENERGIE

Chapitre I

THEOREMES DE L'ENERGIE

Ce chapitre est consacré aux théorèmes énergétiques qui constituent le fondement essentiel des méthodes d'éléments finis en mécanique des structures.

Nous avons adopté dans ce chapitre la notation indicielle qui permet un exposé théorique rigoureux et concis. Dans les chapitres suivants, nous utiliserons à la place de cette notation un formalisme matriciel beaucoup plus commode pour la présentation des techniques numériques.

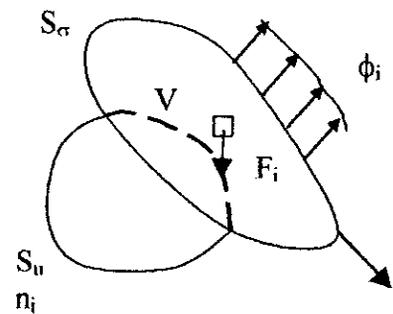
I. GENERALITES

I. 1. NOTATIONS

Soit un corps solide déformable schéma situé ci-contre dont la géométrie définit un domaine V et une surface extérieure S .

les notations utilisées dans ce chapitre sont les suivantes :

- n_j composantes de la normale unitaire à S .
- u_i composantes des déplacements.
- F_i composantes des forces de volume.
- Φ_i composantes des forces de surface.
- σ_{ij} composantes du tenseur des contraintes.
- ε_{ij} composantes du tenseur des déformations.



- V énergie potentielle total E.
 V_c énergie potentielle complémentaire
W potentiel de déformation.
 W_c potentiel complémentaire de déformation .
U énergie de déformation($U = \int w \, dv$)
 U_c énergie complémentaire de déformation($U_c = \int w_c \, cdv$)
T Travail des forces appliquées.
 T_c Travail complémentaire des forces appliquées.

Par ailleurs, on emploiera les conventions et notation particulières suivantes :

Notation pour les dérivées partielles : on utilisera pour la dérivée partielle de A par rapport à la coordonnée x_i , la notation $A_{,i} = \frac{\partial A}{\partial x_i}$

symbole de Kronecker : il est défini par : $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

I. 2. RAPPELS DES EQUATIONS DE LA MECANIQUE DES SOLIDES

Le problème type de la mécanique des solides revient à déterminer les deux champs inconnus : déplacements u_i et contraintes σ_{ij} sous l'effet des forces appliquées, force de surface Φ_i et force de volume f_i . le phénomène de déformation des corps solides est régi par des équations de champ aux dérivées partielles avec des conditions mixtes aux limites. Deux démarches principales sont envisageables suivant que l'on formule complètement le problème en fonction de l'un des champs inconnus, soit le champs de déplacement u_i , soit le champs des contraintes σ_{ij} . la première approche en fonction des déplacement est appelée *approche cinématique*, l'autre approche en fonction des contraintes est appelée *approche équilibre*. Les équations de champs et conditions aux limites de la théorie de l'élasticité sont rappelées ci dessous dans le cas général .

Les relations et équations de champs

Définies dans le domaine solide V peuvent se classer en :

Relation déformations - déplacements ou relation cinématique :

Dans le cas de la théorie linéaire de l'élasticité (déplacements et déformations petits)

on a :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (I.1)$$

Equation d'équilibre:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,i} + f_j &= 0 \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \end{aligned} \quad (I.2)$$

Equation de compatibilité :

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad (I.3)$$

Cette équation générale permet d'exprimer six équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

Relations contraintes- déformations ou relations d'élasticité :

Dans le cas de matériaux à comportement élastique linéaire, on a de façon générale :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (I.4)$$

avec C_{ijkl} composantes du tenseur d'élasticité.

Dans le cas particulier des matériaux isotropes, les coefficients d'élasticité se réduisent à 2 constantes indépendantes (λ et μ soit E et ν).

Les relations d'élasticité peuvent s'écrire sous les deux formes suivantes connues sous le nom de la loi de Hooke.

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (I.5)$$

avec $\epsilon_{kk} = \text{Tr}(\epsilon_{ij}) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ (premier invariant du tenseur de déformations).

λ, μ coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

δ_{ij} symbole de Kronecker définit par : $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad (I.6)$$

avec $\sigma_{kk} = \text{Tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ (premier invariant du tenseur contraintes).

E = module de Young.

μ = coefficient de Poisson.

Conditions aux limites:

Sur un corps de surface extérieur S, ne peuvent exister que deux types de conditions aux limites

- a) sur une partie $S_u \subset S$ sont imposés des déplacements u_i

$$u_i = \bar{u}_i \tag{I. 7}$$

Les conditions (I. 7) sont dites *conditions aux limites cinématique*. sur S_u aucune composante du tenseur des contraintes n'est imposée.

- b) sur la partie complémentaire S_σ ($S_\sigma \subset S, S_u + S_\sigma = S, S_u \cap S_\sigma = \emptyset$). De S_σ sont imposés des efforts extérieurs $\bar{\phi}_i$ (ou l'absence d'efforts extérieurs $\bar{\phi}_i = 0$). Ces efforts $\bar{\phi}_i$ imposent les valeurs de certaines composantes du tenseur des contraintes par les relations :

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{\phi}_i \tag{I. 8}$$

les conditions (I. 8) sont dites *conditions aux limites de types équilibre* ou encore *statiques*. sur S_σ aucun déplacement u_i n'est imposé.

Solution du problème de la mécanique des solides.

La solution unique du problème de mécanique des solides satisfait les deux types de conditions suivantes :

Condition de type- Portant sur les-	Cinématique (déplacement)	Equilibre (contraintes)
Equation de champs Dans v	Equation de compatibilité	Equations d'équilibre $\sigma_{ij,i} + f_j = 0$ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
Conditions aux limites sur S	$u_i = \bar{u}_i$	$\sigma_{ij} n_j = \bar{\phi}_i$ sur S_σ
<i>Remarque</i> : conditions d'intégrabilité nécessaire uniquement dans le cas d'une approche (équilibre)		

Avec les conditions subsidiaires suivantes :

Relations cinématique $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$

Relations d'élasticité $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$.

I. 3. DEFINITION

Champs de déplacement cinématiquement admissible :

On appelle Champs de déplacement cinématiquement admissible, tout champs $u_i(M)$ satisfaisant :

- Les conditions de continuité : C^0 pour les problèmes d'élasticité,
 C^1 pour les problèmes de poutres, plaques et coques.

- Les conditions cinématique, c'est à dire les conditions aux limites sur S_u soit $u_i = \bar{u}_i$

Champ de contraintes statiquement admissible :

On appelle champs de contraintes statiquement admissible tout champ de contrainte $\sigma_{ij}(M)$ satisfaisants les conditions suivantes :

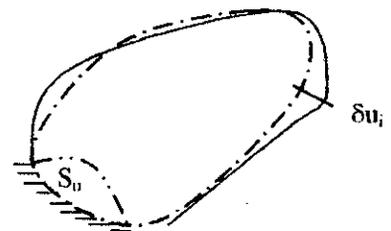
- Continuité
- Conditions statiques ou de type équilibre.

Equilibre dans v : $\sigma_{ij} + f_i = 0$.

Conditions aux limites sur S_σ : $\sigma_{ij} n_j = \phi_i$

II – APPROCHE CINEMATIQUE (DEPLACEMENT)

On vient de voir précédemment que la solution (déplacement et contraintes) du problème de mécanique des solides était à la fois cinématiquement et statiquement admissible ou en d'autre terme, satisfaisait les deux types de conditions (type cinématique et équilibre).



Dans un premier temps, nous adopteront l'approche déplacements pour chercher une formulation énergétique à l'aide du champ des déplacements inconnus. Pour cela, nous allons restreindre l'espace des solutions au dessous des déplacements cinématiquement admissibles et chercher un caractère énergétique qui permet de caractériser les déplacements solution dans ce sous espace des déplacements cinématiquement admissibles.

II - 1 - "PRINCIPE" DES TRAVAUX VIRTUELS

soit un corps solide en équilibre sous l'action de force de volume f_i et des forces de surface imposées $\bar{\phi}_i$. concéderont un champ de déplacement virtuel δu_i cinématiquement admissible ($\delta u_i = 0$ sur S_u) et calculons le travail virtuel des forces de surface dans ce champs de déplacement :

$$\int_s \bar{\phi}_i \delta u_i ds = \int_{S_u} \dots + \int_{S_\sigma} \dots = \int_{S_\sigma} \bar{\phi}_i \delta u_i ds = \int \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds$$

l'intégrale sur S_u est identiquement nulle car $\delta u_i = 0$ sur S_u et de plus à l'équilibre, on a $\bar{\phi}_i = \sigma_{ij} n_j$ sur S_σ

en outre, on obtient en appliquant le théorème de Gauss

$$\int_s \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds = \int_v (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dv = \int_v \sigma_{ij,j} \delta u_i dv + \int_v \sigma_{ij} (\delta u_j)_{,j} dv$$

en outre à l'équilibre, on a $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ dans v .

d'où la relation suivante, en utilisant la propriété $\int_s \bar{\phi}_i \delta u_i ds = \int_{S_\sigma} \bar{\phi}_i \delta u_i ds$

$$\int_{S_\sigma} \bar{\phi}_i \delta u_i ds + \int_v f_i \delta u_i dv = \int_v \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv \quad (I. 9)$$

La relation ci - dessus est l'expression générale du principe des travaux virtuels pour les corps solide déformable. On peut la mettre sous la forme courante si l'en effectue les hypothèses suivantes :

$$H1 : \text{petits déplacements et déformations :} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}).$$

$$H2 : \text{existence d'un potentiel de déformation} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (I. 10)$$

il vient , par symétrie du tenseur des contraintes :
$$\int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv = \delta \int_V W dv$$

D'ou la formulation courante du « principe » de travail virtuel :

$$\delta U = \delta \int_V W dv = \int_{S_n} \bar{\phi}_i \delta u_i ds + \int_V f_i \delta u_i dv \quad (I. 11)$$

II – 2 – THEOREME DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE .

Théorème :

Pour un état d'équilibre stable, les déplacements cinématiquement admissibles qui satisfont les conditions d'équilibre sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle et réciproquement.

La stationnarité de l'énergie potentielle totale pour un corps solide en équilibre vient d'être démontrée. Pour établir l'équivalence complète de la formulation variationnelle, il faut encore montrer que cette propriété de stationnarité implique que les conditions d'équilibre sont satisfaites.

Soit la première variation de l'énergie potentielle totale :

$$\delta V = \delta \int_V W dv - \int_V f_i \delta u_i dv - \int_S \phi_i \delta u_i ds$$

De plus , on a établi précédemment que :

$$\delta \int_V W dv = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dv = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dv - \int_V \sigma_{i,j} \delta u_i dv .$$

D'où on applique le théorème de Gauss :
$$\delta \int_V W dv = \int_S \sigma_{ij} \delta u_i n_j ds - \int_V \sigma_{ij} \delta u_i dv$$

On obtient finalement :

$$\delta V = - \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dv + \int_S (\sigma_{ij} n_j - \phi_i) \delta u_i ds \quad (I. 12)$$

$$\delta V = I_v + I_s$$

La stationnarité de V implique que $I_v = 0$ et $I_s = 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0$

D'où les deux types de conditions suivantes :

1) $I_v = \int_V -(\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dv = 0 \quad \forall \delta u_i \text{ choisi}$

On doit donc avoir dans V : $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ (équation d'équilibre)

$$2) \quad I_s = \int_s (\sigma_{ij,j} n_j - \phi_i) \delta u_i ds = \int_{S_u} \dots + \int_{S_\sigma} \dots \equiv 0 \quad \forall \delta u_i \text{ cinématiquement admissible}$$

L'intégrale de surface sur S_u est identiquement nulle à cause de la condition d'admissibilité $\delta u_i = 0$ sur S_u .

La condition $I_s = 0$ entraîne donc $\sigma_{ij} n_j = \phi_i$ sur S_σ

REMARQUE :

Il vient d'être démontré que les conditions d'équilibre dans V et sur S_σ constituent les conditions d'extremum de l'énergie potentielle totale pour toute variation cinématiquement admissible des déplacements. Il reste à montrer que l'énergie potentielle totale est un minimum absolu pour un corps en *équilibre stable*. L'énergie potentielle totale atteint donc un minimum absolu pour un état d'équilibre stable.

III – APPROCHE EQUILIBRE(CONTRAINTES) :

PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS COMPLEMENTAIRES

Soit un solide en équilibre, c'est à dire pour lequel le champ des contraintes satisfait les équations suivantes :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{dans } V$$

Et les conditions aux limites :

$$\sigma_{ij} n_j = \phi_i \quad \text{sur } S_\sigma$$

$$u_i = u \quad \text{sur } S_u$$

soient ϕ_i les forces de surface arbitraire aux appuis, définies par les relations :

$$\sigma_{ij} n_j = \phi_i \quad \text{sur } S_u$$

considérons un système d'accroissements virtuels des contraintes $\delta\sigma_{ij}$ des forces volumique δf_i et des forces de surfaces $\delta\bar{\phi}_i$ et $\delta\phi_i$ satisfaisant les équations ci-dessus.

On peut donc écrire les conditions suivantes :

$$\delta\sigma_{ij,j} + \delta f_i = 0 \quad \text{dans } v$$

$\delta \sigma_{ij}$ arbitraire sur S_u

$\delta \sigma_{ij} n_j = \delta \sigma_i$ sur S_σ

$\delta \sigma_{ij} n_j = \delta \sigma_i$ sur S_u

si on définit l'accroissement virtuel des forces de surfaces ϕ_i^* sur S par :

$$\delta \phi_i = \delta \sigma_i \text{ sur } S_\sigma$$

$$\delta \phi_i^* = \delta \sigma_i \text{ sur } S_u$$

les deux dernières relations ci – dessus peuvent s'écrire :

$$\delta \sigma_{ij} n_j = \delta \phi_i^* \text{ sur } S$$

évaluons le travail des champs virtuels des forces de volume f_i et de surface ϕ_i^* dans le champs des déplacement réels u_i travail appelé brièvement *travail virtuel complémentaire*.

$$\int_V u_i \delta f_i dv + \int_S u_i \delta \phi_i^* = - \int_V u_i \delta \sigma_{ij,j} dv + \int_S u_i \delta \sigma_{ij} n_j ds$$

Mais comme d'autre part , on a ,par application du théorème de Gauss :

$$\int_S (u_i \delta \sigma_{ij,j}) n_j ds = \int_V (u_i \delta \sigma_{ij,j}) dv = \int_V u_{i,j} \delta \sigma_{ij} dv + \int_V u_i \delta \sigma_{ij,j} dv$$

Il en résulte immédiatement après développement que :

$$W(\varepsilon_{ij}) = W_c(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Ainsi pour les matériaux élastiques linéaires, les potentiels de déformation W et W_c sont égaux.

Cette propriété est illustrée de façon évidente dans le cas de la barre en traction – compression .

IV – SYNTHÈSE

On vient de voir que le problème de mécanique des solides est équivalent à celui de la recherche de l'extremum d'une fonctionnelle ;

- soit l'énergie potentielle totale dans le cas d'une formulation à l'aide des déplacements
- soit l'énergie potentielle complémentaire dans le cas d'une formulation à l'aide de contraintes ;
- soit une fonctionnelle généralisée dans le cas d'une formulation mixte.

Ces principes variationnels ont une importance considérable, car ils constituent le fondement des différentes méthodes d'éléments finis utilisés en calcul des structures. Les éléments les plus utilisés, sont du type déplacement et sont basés sur le théorème de l'énergie potentielle totale.

D'autres types d'éléments moins utilisés (type équilibre et mixtes) sont basés sur le théorème de l'énergie complémentaire.

Chapitre II

METHODES MATRICIELLES

CHAPITRE II

METHODES MATRICIELLES

Les méthodes matricielles exposées dans ce chapitre indépendamment de la notion d'élément fini constituent la base des méthodes d'analyses au niveau global.

Dans une première partie on introduit le formalisme matriciel utilisé dans tout ce manuscrit et on présente les propriétés fondamentales des structures discrètes. Par la suite, une deuxième partie est consacré à l'exposé des méthodes des forces et des déplacements.

I – FORMULATION MATRICIELLE DE LA MECANIQUE DES STRUCTURES

I-1 – CONVENTIONS ET NOTATIONS

L'utilisation de la notation matricielle s'impose pour l'exposé des méthodes aux éléments finis pour l'analyse des structures. ainsi nous n'utiliserons plus dans les chapitres suivants la notation indicielle comme au chapitre I.

L'état de contrainte en un point d'un solide élastique est représenté par la matrice des composantes du tenseur des contraintes ; soit :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ sym & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

De la même façon, l'état de déformation en un point d'un solide élastique est représenté par la matrice des composantes du tenseur des déformations ; soit

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ sym & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Ceci constitue une représentation matricielle équivalente des contraintes et des déformations. Cette convention est particulièrement motivée par la commodité d'écriture des équations de Hooke qu'elle apporte.

Elle doit satisfaire les deux conditions suivantes :

- les ordres de numérotation des composantes de contraintes et de déformation doivent être cohérents ;
- la définition des composantes des vecteurs σ et ε doit être cohérente avec l'expression du potentiel de déformation.

$$\text{Soit : } W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\sigma]^T [\varepsilon] = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\sigma] \quad (\text{II.1})$$

Par rapport au chapitre précédent, les notations employées seront donc les suivantes :

- σ vecteur des contraintes généralisées $[\sigma_{ij}]$,
- ε vecteur des déformations généralisées $[\varepsilon_{ij}]$,
- u vecteur des déplacements généralisées $[u_i]$,
- D matrice d'opérateur différentiels,
- C matrice constitutive du matériau,
- f vecteur de forces de volume (f_i),
- P vecteur des forces de surface ($\bar{\phi}_i$),
- N matrice des cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface du solide (n_i).

I - 2 - EQUATIONS DE BASE DE LA MECANIQUE DES STRUCTURES

Avec la notation matricielle définie précédemment, les équations de base de la mécanique des structures s'écrivent de la façon suivantes :

Relation déformations - déplacements :

$$\varepsilon = D \cdot u \quad (\text{II.2})$$

Equation d'équilibre :

$$D^T \sigma + f = 0 \quad (\text{II.3})$$

Equation constitutives (loi de Hooke généralisé)

$$\sigma = C \varepsilon \quad (\text{II.4})$$

la matrice C des coefficients élastiques est symétrique

REMARQUE :

1) dans le cas d'un état de contrainte initiale σ_0 , les équations précédentes s'écrivent : $\sigma = C \varepsilon + \sigma_0$. (II . 5)

2) en générale , la matrice d'opérateurs différentiels intervenant dans les équations d'équilibre est la transposée de celle des relations déformations – déplacements .

En utilisant les équations (II . 2) , (II . 3) ,et (II . 4) on peut exprimer les équations d'équilibre en fonction des déplacements (équation de Navier) soit :

$$D^T C D u + f = 0 . \quad (II . 6)$$

I – 3 – RECAPITULATION DES THEOREMES DE L'ENERGIE

Récapitulons les théorèmes de l'énergie établie au chapitre I en utilisant la notation matricielle introduite précédemment . Le matériau sera supposé avoir un comportement élastique linéaire. On a donc :

$$W(\varepsilon) = W_c(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon \quad (II . 9)$$

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T C \varepsilon \quad (II . 10)$$

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sigma^T C^{-1} \sigma \quad (II . 11)$$

Principe des travaux virtuels :

Pour un corps solide en équilibre et pour tout accroissement virtuel cinématiquement admissible des déplacements, on a :

$$\delta U = \delta T \quad \text{soit :} \quad \int_v \sigma^T \delta \varepsilon dv = \int_v f^T \delta u dv + \int_{S_e} p^T \delta u ds \quad (II . 12)$$

Théorème de l'énergie potentielle totale:

Pour un état d'équilibre stable le champs de déplacements cinématiquement admissible minimise l'énergie potentielle totale et réciproquement. On a :

$$V = U - T$$

$$\text{Soit :} \quad V = \int_v W(\varepsilon) dv - \int_v f^T u dv - \int_{S_e} p^T u ds \quad (II . 13)$$

Principe des travaux virtuels complémentaires :

Pour un solide en équilibre et pour tout accroissement virtuel statiquement admissible des contraintes et des forces appliquées, on a :

$$\delta U_c = \delta T_c \quad \text{soit :} \quad \int_v \varepsilon^T \delta \sigma dv = \int_v u^T \delta f dv + \int_{S_e} u^T \delta p ds \quad (II . 14)$$

Théorème de l'énergie potentielle complémentaire :

Pour un état d'équilibre stable, le champ de contraintes statiquement admissible solution minimise l'énergie potentielle complémentaire, soit : $V_c = U_c - T_c$

où :

$$V_c = \int_v w_c[\sigma] dv - \int_{S_u} \bar{u}^T N^T \sigma ds. \quad (\text{II.15})$$

II – PROPRIETES DES STRUCTURES DISCRETES

II – 1 – NOTION DE STRUCTURE DISCRETE

Les méthodes matricielles qui sont exposées dans ce chapitre s'appliquent aux structures discrètes.

Qu'est-ce qu'une structure discrète ? C'est une structure composée d'éléments discrets (ex : barre, poutre) de forme géométrique simple interconnectés en des points de la structure qu'on appellera « nœuds ».

On caractérise le comportement de cette structure par un nombre fini de paramètres inconnus ; soit les déplacements aux nœuds ou bien les forces dans les éléments.

II. 2. THEOREME DE CASTIGLIANO

THEOREME 1 :

Soit une structure discrète soumise à un système de forces ponctuelles ($F_1 \dots F_i \dots F_n$). Soient respectivement e_i et q_i le vecteur unité et le déplacement dans la direction d'application de la force F_i au nœud N_i .

Soit le système de déplacements virtuels tel que l'on ait :

$$\delta \bar{u} \Big|_{=0} = \begin{matrix} \delta q_i e_i & \text{Aux nœuds } N_i \\ 0 & \text{aux autres nœuds} \end{matrix}$$

D'après le principe des travaux virtuels, on a à l'équilibre : $\delta U = \delta T$.

Ici, dans le cas d'un système de forces ponctuelles, le travail des forces appliquées s'écrit simplement :

$$T = F^T q \quad \text{d'où :} \quad \delta T = F_i \delta q_i$$

$$\text{on a donc ;} \quad F_i = \frac{\delta U}{\delta q_i}$$

ou encore si l'on exprime l'énergie de déformation en fonction seulement des déplacements aux nœuds :

$$F_i = \frac{\partial U(q_i)}{\partial q_i} \quad (\text{II.16})$$

On peut répéter le même raisonnement pour tout les degré de liberté. On obtient donc N équation qui constituent les équations d'équilibre des nœuds, soit :

$$F = \nabla_q U. \tag{II.17}$$

Ce résultat est connu sous le nom de premier théorème de Castigliano.

THEOREME II :

Considérons la structure précédente soumise à un système de forces ponctuelles aux nœuds. Choisissons un accroissement virtuel des forces appliquées défini par :

$$\delta F_i \Big|_{\substack{=0 \\ \text{aux autres nœuds}}}^{\substack{-\delta F_i \vec{e}_i \\ \text{Aux nœuds } N_i}}$$

d'après le principe des travaux virtuels complémentaires, on a : $\delta U_c = \delta T_c$

ici, le travail virtuel complémentaire s'écrit simplement :

$$\delta T_c = q_i \delta F_i$$

d'où :
$$q_i = \frac{\partial U_c(F)_i}{\partial F_i} \tag{II.18}$$

On peut répéter le raisonnement précédent pour les autre degrés de liberté d'où la relation matricielle :

$$q = \nabla_F U_c \tag{II.19}$$

ce résultat est connu sous le nom de deuxième théorème de Castigliano.

II - 3 - MATRICE DE RIGIDITE ET DE FLEXIBLE

DEFINITIONS

Matrice de rigidité :

On appelle matrice de rigidité d'une structure , la matrice K permettant d'exprimer l'énergie de déformation sous une formes quadratique des déplacements :

$$U = \frac{1}{2} q^T K q \tag{II.20}$$

Par application du premier théorème de Castigliano, il vient :

$$\nabla_q U = K q = F \tag{II.21}$$

ce système (II.21) d'équation représente la forme habituelle des équations d'équilibre des nœuds .

matrice de flexibilité :

on appelle matrice de flexibilité d'une structure , la matrice permettant d'exprimer l'énergie de déformation complémentaire sous une forme quadratique des forces :

$$U_c = \frac{1}{2} F^T \phi F \tag{II.22}$$

Par application du deuxième théorème de Castigliano, il vient :

$$\nabla_F U_c = \varphi F = q \quad (\text{II .23})$$

Pour une structure en appui isostatique au moins, le système d'équations (II .23) est l'inverse du système (II .21), d'où :

$$\varphi = K^{-1}$$

II . 4 PROPRIETES DES MATRICES DE RIGIDITE :

Symétrie :

La matrice de rigidité est symétrique à cause du théorème de réciprocité, qui est une conséquence de l'invariance de l'énergie de déformation par rapport au chemin suivi .

Déplacement et mouvement de corps rigide

L'existence de d.d.l. de déplacement rigide dans un système d'équations de rigidité de l'élément se traduit par une dépendance de certaines de ces équations par rapport à d'autres, on dira dans ce cas que [K] est singulière.

On détermine le nombre de singularités dans [K] en calculant les valeurs propres de celle - ci, le nombre de valeurs propres nulles sera égal au nombre de déplacements de corps rigide.

Valeurs propre des matrices de rigidité

Cherchons les valeurs propres de la matrice de rigidité K . Si χ est vecteur propre on a :

$$K\chi = \lambda\chi.$$

$$\text{ou encore : } \lambda = \frac{\chi^T K \chi}{\chi^T \chi}$$

Si l'on normalise les vecteurs propres de telle sorte que $\chi^T \chi = 1$, on a :

$$\lambda = \chi^T K \chi = 2 U. \quad (\text{II .24})$$

d'où la propriété suivante :

les valeurs propres d'une matrice de rigidité représentent (à un coefficient de normalisation près) les énergies de déformation mises en jeu par les modes de déformations propres de la structure.

III – METHODE DES FORCES

Les méthodes matricielles d'analyse des structures peuvent se classer suivant le choix des inconnues , en *méthode des déplacement* et *méthode des forces* . Dans la

méthode des déplacements , on formule le problème en fonction des déplacements nodaux généralisés alors que dans la méthode des forces , c'est en fonction des forces nodales généralisés (forces internes ou réactions d'appui).

PRINCIPE

La méthode des forces est basée sur une approche énergétique utilisant l'énergie de déformation complémentaire (théorème de Castiglino II). On peut distinguer différentes phases de calcul :

- Formulation élémentaire : calcul des caractéristiques élémentaires de flexibilité.
- Formulation globale :
 - choix des inconnues et écriture des équations d'équilibre des nœuds,
 - recherche des conditions de compatibilité
 - calcul de la matrice de flexibilité de la structure pour la détermination des déplacements nodaux.

Ces différentes phases sont détaillées ci-après .

Formulation élémentaire

La structure est préalablement discrétisée en éléments simples (barre, poutres, etc..). On caractérise le comportement de chaque élément par ces forces nodales indépendantes Q^e après écriture des conditions d'équilibre de l'élément. on calcul pour chaque élément sa matrice de flexibilité élémentaire, φ^e telle que l'énergie complémentaire de déformation puisse s'exprimer sous la forme ;

$$U_c^e = \frac{1}{2} Q^{eT} \varphi^e Q^e \tag{II .25}$$

Formulation globale:

L'énergie de déformation de la structure peut alors s'exprimer comme forme quadratique des forces internes aux nœuds , soit :

$$U_c = \sum_{\text{éléments}} U_c^e = \frac{1}{2} Q^T \varphi Q \tag{II .26}$$

On choisit ensuite les inconnues hyperstatiques du problème (vecteur x) correspondant aux coupures simple nécessaire pour la définition de la structure isostatique de référence. On exprime alors l'énergie complémentaire de déformation en fonction des charges appliquées et des inconnues hyperstatiques.

On obtient après les conditions supplémentaires qui permettent d'éliminer les inconnues hyperstatiques en écrivant les conditions de compatibilité des coupures, c'est à dire les conditions nécessaires pour que les déplacements relatifs des deux bords des coupures soient nuls. On applique à ce cas particulier le deuxième théorème de Castigliano. on pourra donc à ce stade calculer tous les efforts internes y compris les inconnues hyperstatiques en fonction des charges appliquées.

Il reste pour résoudre complètement le problème à calculer les déplacements aux nœuds après détermination de la matrice de flexibilité ϕ de la structure, telle que par définition, on puisse écrire : $U_c = \frac{1}{2} F^T \phi F$

IV – METHODE DES DEPLACEMENTS

Principe

dans la méthode des déplacements, on formule le problème en fonction des déplacements aux nœuds .on peut mettre en évidence les différentes étapes de calcul suivantes :

- Formulation élémentaire
 - calcul des matrices de rigidité élémentaire
- Formulation global.
 - assemblage des matrices de rigidité de manière à satisfaire les équations d'équilibre des nœuds .
 - prise en compte des conditions de déplacements imposés.
 - résolution par rapport aux inconnues de déplacements.
 - calcul des contraintes dans les éléments.

Ces différentes phases sont détaillées ci-après.

Formulation élémentaire.

La structure est préalablement discrétisée en éléments . On caractérise le comportement de chaque élément libre par ses déplacement nodaux soit le vecteur q^e .On calcule pour chaque élément sa matrice de rigidité élémentaire telle que son énergie de déformation puisse s'exprimer sous la forme :

$$U^e = \frac{1}{2} q^{eT} k^e q^e \quad (II.27)$$

Formulation global

Les matrices de rigidité élémentaires sont utilisées pour calculer la matrice de rigidité de la structure complète permettant d'exprimer l'énergie de déformation en fonction des déplacements nodaux de la structure soit :

$$U = \sum_{\text{éléments}} U_c = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} q^e T k^e q^e = \frac{1}{2} q^T$$

on peut alors obtenir les équations d'équilibre de la structure en appliquant le premier théorème de Castigliano.

Cette opération est appelée *assemblage*. La règle d'assemblage consiste pour un nœud donné à additionner les sous - matrices de rigidité nodale des éléments ayant ce nœud en commun.

Prise en compte des conditions de déplacement imposé.

La matrice de rigidité de la structure complète obtenue en assemblant les matrices de rigidité d'éléments libres à un nombre de singularités égales au nombre maximum des modes de déplacement d'ensemble possibles cette matrice K de la structure libre est donc semi - définie positive. Les conditions d'appui , si elle sont en nombre suffisant , empêchent toute possibilité de déplacement d'ensemble et rendent donc la matrice K définie positive . Avant de résoudre le système des équations d'équilibre pour déterminer les déplacements inconnus ,il faut prendre en compte ses conditions de déplacement imposé .

Résolution de système linéaire $Kq = F$

En pratique la matrice K auquel on abouti est de grand taille. Il existe des méthodes de résolution appropriées qui tirent parti du caractère symétrique et de la topologie des matrices de rigidité. Une de ces méthodes sera exposée au chapitre V.

IV – CONCLUSION

Les méthodes matricielles qui viennent d'être présentées peuvent facilement être systématisées et donc programmées sur ordinateur. On remarque néanmoins que la méthode des forces nécessite un choix préalable (et non automatique) d'inconnues hyperstatiques en fonction de la topologie de structure et des cas de charge appliquée. Ceci limite sérieusement le domaine d'application de la méthode des forces à des structures relativement simples. Il faut cependant mentionner l'existence des méthodes de choix

automatique des inconnues hyperstatiques qui ont pratiquement supprimé cet inconvénient. Malgré cette amélioration, la méthode des forces est aujourd'hui pratiquement abandonnée pour la résolution des structures complexes parce que d'une part, son efficacité numérique est moindre que celle de la méthode des déplacements et, d'autre part, la méthode des déplacements est plus universelle en permettant plus aisément la résolution de problèmes dynamiques ou non linéaires.

Chapitre III

FONDEMENTS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Chapitre III

FONDEMENTS DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Dans le chapitre précédent, on a montré que les méthodes matricielles permettaient d'analyser des structures discrètes constituées par des éléments simples (barre, poutres) et que l'on pouvait caractériser à l'aide de solutions analytiques. Cependant, les structures sont souvent constituées par des milieux continus (plaques, corps à élasticité 3D) aux géométries les plus diverses pour lesquels on ne possède pas de solution analytique et que les méthodes matricielles traditionnelles ne permettent pas d'analyser. Dans ce cas, il faut avoir recours à des techniques numériques basées sur les méthodes d'approximation adéquates pour discrétiser ces continua. *La Méthode des Eléments Finis* est parmi ces techniques la plus utilisée car elle étend les possibilités des méthodes matricielles à un très vaste domaine d'application et permet ainsi l'analyse des structures complexes. Avant d'exposer cette méthode, il est nécessaire de rappeler les principes des méthodes d'approximation sur lesquelles elle est fondée.

I – RAPPELS SUR LES METHODES D'APPROXIMATION

NOTIONS GENERALES

Le problème général de l'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction $u(M)$ à domaine de définition D de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit. Pour cela, on définit une approximation \bar{u} en posant :

$$\bar{u}(M) = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(M) \quad \forall M(x,y,z) \quad (\text{III.1})$$

les $\phi_i(x,y,z)$ sont des fonctions choisies a priori et constituent une base fonctionnelle. Les coefficients inconnus a_i sont appelés coordonnées généralisées.

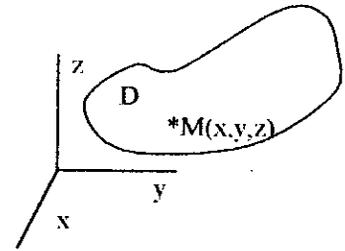
On appelle \bar{u} (M), approximation de u dans la base fonctionnelle ϕ_i .

On peut encore écrire en utilisant la notation matricielle :

$$\bar{u} = [\phi]^T [u] \quad (\text{III.2})$$

Les fonctions base de l'approximation doivent satisfaire certaines conditions : continuité, conditions aux limites et complétude.

Le principe des méthodes d'approximation consiste à remplacer la résolution d'un problème continu à un nombre infini d'inconnues par celle d'un problème à un nombre fini d'inconnues : les coordonnées généralisées a_i .



II – LE CONCEPT D'ÉLÉMENT FINI

II – 1 – DIFFÉRENTES FORMULATIONS

Le principe de base de la M.E.F consiste à subdiviser la structure en sous domaines de formes relativement simple appelés « éléments finis ». On va alors définir une approximation de la solution (déplacements et/ou contraintes) non pas pour l'ensemble de la structure mais pour chacun de ces éléments constitutifs. Le choix, comme coordonnées généralisées de paramètres physiques, permet alors d'exprimer simplement les conditions de continuité de la solution entre éléments adjacents ainsi que les conditions d'équilibre inter – éléments et finalement de résoudre le problème à l'aide de la méthode des déplacements.

Il y a plusieurs sortes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures.

1. *Formulation déplacements* : dans laquelle on se donne une approximation du champ de déplacements, le critère variationnel étant celui de l'énergie potentielle totale.

2. *Formulation contraintes* : ou équilibre dans laquelle on se donne une approximation soit sous forme d'un champ de contraintes en équilibre ou bien sous la forme d'une fonction de contraintes. Le critère variationnel utilisé est celui de l'énergie complémentaire.

3. *Les formulations hybrides* : (par exemple la formulation hybride de type contrainte) dans lesquelles le plus souvent on définit la solution en terme d'approximation d'une part du champ de contraintes internes en équilibre , d'autre part des déplacements sur la frontière de l'élément. Le critère variationnel utilisé est une variance de l'énergie potentielle complémentaire.

4. *Les formulations à plusieurs champs ou formulations mixte* : dans lesquelles on définit la solution en termes d'approximation de champs indépendants , généralement le champ des déplacements et celui des contraintes.

Dans toutes ces formulations et pas seulement dans le cas de la formulation déplacement, on peut exprimer le comportement de l'élément sous la forme de relations matricielles forces – déplacements aux nœuds et utiliser la méthode des déplacements pour la résolution globale du problème. Il ne faut donc pas confondre la formulation théorique de l'élément (déplacement, contrainte, ou mixte) et la méthode utilisé pour la résolution (méthode des déplacements ou méthode des forces).

En ce qui concerne les méthodes matricielles de résolutions, on a vu au chapitre II que la méthode la plus utilisée était celle des déplacements . les modèles contraintes sont rarement utilisée en pratique , leur principal intérêt réside dans la possibilité d'encadrer la solution dans le cadre d'une utilisation conjointe avec des modèles déplacements.

II – 2 – LE MODELE DEPLACEMENT

Dans la démarche fondamentale de la M.E.F. , il faut distinguer trois aspects que nous allons détailler , dans le cas des modèles déplacements :

- la Discrétisation de la structure en éléments,
- le choix d'une approximation pour chaque éléments,
- le choix de coordonnées généralisées (déplacements nodaux) pour chaque éléments

Discrétisation de la structure (choix d'un maillage)

On subdivise la structure ou le milieu continu à étudier en éléments finis de forme géométrique simple, de manière à approximer le mieux possible sa géométrie. Dans l'exemple considéré, il s'agit d'éléments plans de forme triangulaire.

Approximation du champ de déplacements

Par ailleurs , il est nécessaire de se donner une approximation du champ des déplacements à l'intérieur de chaque élément e , soit :

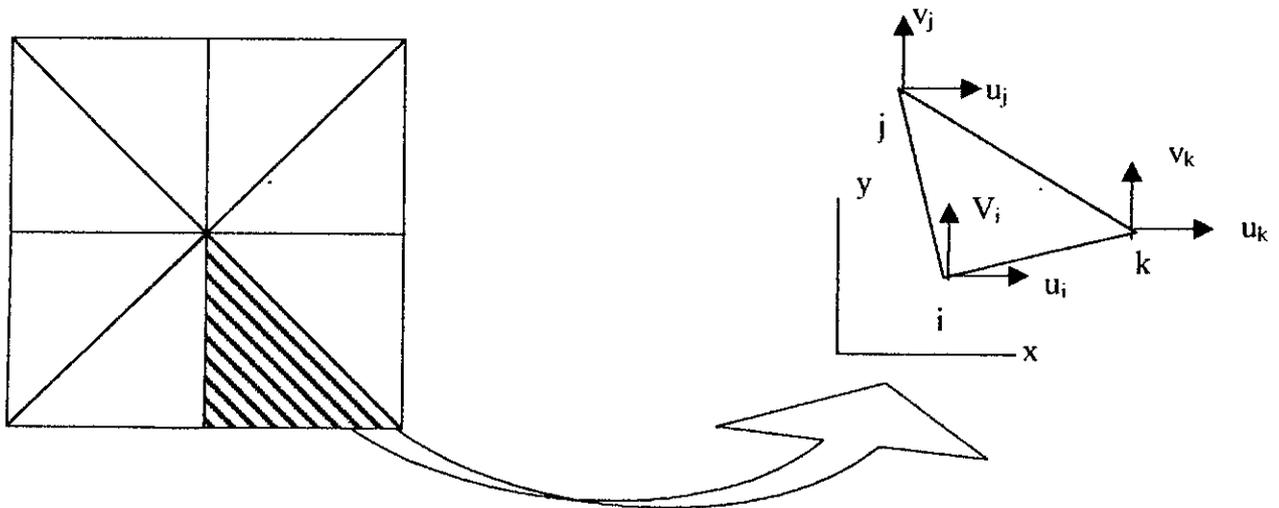


Figure III.1 : Discretisation de la structure

$$[u(M)]^e = [\phi(M)] [a]^e \quad M(x,y,z) \in V^e \quad (\text{III.3})$$

avec $\phi(x,y,z)$ matrice des fonctions base de l'approximation.

$[a]^e$ vecteur des coordonnées généralisées de l'élément

choix des variables physiques ; les déplacements aux nœuds :

La relation de définition de l'approximation élémentaire (III.3) ne peut pas être utilisée pour le problème global. En effet, les coordonnées généralisées varient d'un élément à l'autre et il est donc nécessaire d'adopter de nouvelles variables physiques permettant d'assurer la compatibilité des déplacements et d'exprimer les conditions d'équilibre aux nœuds. Dans ce but, on choisit comme nouvelle variable les déplacements généralisés aux nœuds de l'élément. Soit q^e le vecteur regroupant au moins les composantes des déplacements aux nœuds et éventuellement leurs dérivées successives. Ce choix de paramètres physiques, pour représenter le comportement de l'élément, varie en fonction de la nature du problème et des exigences de précision.

On peut alors exprimer l'approximation du champ des déplacements sous la forme :

$$[u(M)]^e = [A(M)]^e [q]^e \quad (\text{III.4})$$

avec : $[A]^e$ matrice d'interpolation dont les éléments sont fonction des coordonnées d'espace.

La relation (III.4) permet en fait de caractériser les déplacements en un point de l'élément en terme d'interpolation des déplacements aux nœuds. on peut généralement passer de l'expression (III.3) à l'expression (III.4).

REMARQUE :

1. en pratique , cette méthode est à utiliser avec précaution . En effet, la matrice ϕ^e peut être mal conditionnée dans le cas d'allongement important des éléments ce qui peut entraîner des erreurs importantes pour le calcul des matrices de rigidité. Par ailleurs, pour certain types d'éléments , il existe des cas « pathologiques » (forme d'éléments et numérotation) pour lesquels ϕ^e est singulière.

2. Le choix des paramètre nodaux q^e ainsi que du type d'approximation ou d'interpolation doit permettre de satisfaire la condition de comptabilité des déplacements aux interfaces entre éléments adjacents. Cette condition de représentation des états de déformation constante permet d'assurer la convergence de la méthode.

Cette méthode indirecte de calcul de la matrice d'interpolation a été utilisée pour le développement des éléments les plus simples. Cependant, pour les raisons mentionnées ci-dessus, on lui préfère actuellement des méthodes d'obtention directe de la matrice d'interpolation . L'expression (III .4) permet alors d'exprimer l'énergie potentielle totale de l'élément en fonction des déplacements aux nœuds. En effet, on peut aisément exprimer les déformations et contraintes en fonction des déplacements aux nœuds.

$$[\varepsilon]^e = [D][u]^e = [D][A]^e [q]^e = [B]^e [q]^e \quad (\text{III .5})$$

$$[\sigma]^e = [C][\varepsilon]^e = [C][B]^e [q]^e \quad (\text{III .6})$$

Par ailleurs, En utilisant l'expression matricielle de l'énergie potentielle totale , on a dans le cas d'un état de déformation initiale ε_0 :

$$V^e = \int_V \frac{1}{2} ([\varepsilon]^T [C][\varepsilon])^e dv - \int_V [\varepsilon]^T [C][\varepsilon_0]^e dv - \int_V ([f]^T [u])^e dv - \int_{S_2^e} [\bar{p}]^T [u]^e ds \quad (\text{III .7})$$

Cette expression de l'énergie potentielle totale suppose que n'agissent au niveau élémentaire que des forces réparties ; les forces concentrées étant prises en compte au niveau de la structure complète:

Dans l'expression ci-dessus, le premier terme représente l'énergie de déformation sans déformation initiale, le second représente la contribution de la déformation initiale à l'énergie de déformation. Les troisième et quatrième termes représentent respectivement les travaux des forces de volume et de surface imposées.

En particulier, le dernier terme n'intervient que pour les éléments dont les frontières se trouvent sur la surface extérieure S du solide où sont imposées les forces de surface.

Les relations (III . 4) et (III .5) permettent de transformer la relation (III . 7) sous la forme suivante :

$$V^e = 1/2 q^{eT} K^e q^e - q^{eT} F^e = U^e - T^e \quad (III . 8)$$

avec K^e matrice de rigidité élémentaire :

$$K^e = \int_V ([B]^T [C] [B])^e dv \quad (III . 9)$$

F^e vecteur des forces élémentaires équivalentes

$$F^e = F_{int}^e + F_{vol}^e + F_s^e$$

III - PROPRIETES

1. Compatibilité

Les critères de compatibilité sont les suivants :

1 – Continuité du champ de déplacement et sa (/ ses) première (/ s) dérivée (/ s) à l'intérieur de l'élément.

2 – Continuité du champ de déplacement et sa (/ ses) première (/ s) dérivée (/ s) à la frontière entre éléments.

Les éléments qui vérifient les conditions 1 et 2 sont dits conformes (compatibles) .

2. Complétude

La condition de complétude est satisfaite si le champ de déplacement présente un état de déformation constant , de plus ce champ doit donner lieu à des déformations lors ce que ce dernier ne correspond pas à un mouvement de corps rigide.

La condition de complétude reste nécessaire (du point de vue numérique) elle exprime le fait qu'une déformation de l'élément , sous un chargement, ne peut subsister sans application de conditions aux limites, et la représentativité de mouvement de corps rigide avec une déformation nulle à l'intérieur de l'élément. Par sa formulation l'élément doit présenter une translation ou une rotation pure.

3. Convergence

les éléments finis de type déplacement convergent en énergie s'ils satisfont les conditions de complétude et de comptabilité présentées précédemment .De tels élément sont appelés *éléments conformes* . l'énergie potentielle totale des modèles tend vers sa valeur exacte de minimum absolu lorsqu'on augmente le nombre N de d.d.l .

Certains éléments ne satisfont pas toutes les conditions de complétude ou de comptabilité . De tels éléments sont dits *non conformes*. Parmi les éléments non conformes certains d'entre eux ne convergent pas mais d'autre convergent de façon monotone . La tendance actuelle en matière d'éléments consiste à garder la propriété de complétude comme condition essentielle mais à remplacer la comptabilité par un autre critère de complétude sur un groupe d'éléments . Ce test de complétude collective est appelé en anglais « patch test » ce que l'on peut traduire par « test du rapiéçage » . Dans ce test on considère un groupe d'éléments « rapiéçage » avec au moins un nœud interne. On impose aux nœuds externes des déplacements ou des forces en accord avec un état de déformation constant . Le test est satisfait si les déplacements internes déformations et contraintes sont en accord avec cet état de déformation constante . on peut constater que les éléments complets et incompatibles mais satisfaisant ce test convergent.

4. Invariance géométrique

Les éléments ne doivent pas avoir de direction préférentielle ou être sensible à leur numérotation propre . En effet si l'on considère un élément seul soumis à un ensemble de forces ayant une orientation donnée par rapport à cet élément l'état de déformation et l'énergie de déformation obtenues après calcul doivent être indépendantes de son orientation par rapport au système d'axes globaux . Les éléments qui satisfont ce critère sont dits *invariants* certains auteurs estiment que l'invariance est obligatoire pour la convergence , même si cela n'est pas sûr. Il faut considérer que l'invariance est certainement une qualité souhaitable que l'on doit s'efforcer de recherche .

Chapitre IV

TECHNIQUES DE CALCUL AU NIVEAU ELEMENTAIRE

Chapitre IV

TECHNIQUES DE CALCUL AU NIVEAU ELEMENTAIRE

Ce chapitre est consacré aux diverses méthodes permettant la formulation et le calcul des éléments. Parmi ces techniques figurent, en particulier, l'utilisation de coordonnées intrinsèques pour la détermination des fonctions d'interpolation, la formulation isoparamétrique et la méthode d'intégration numérique.

I - MATRICE D'INTERPOLATION

I - 1 - FONCTION D'INTERPOLATION

On a vu au chapitre III que les éléments finis de type déplacement sont basés sur l'expression suivante du champ de déplacement u^e à l'intérieur des éléments:

$$u^e = A^e q^e \quad (IV.1)$$

Avec: A^e : matrice d'interpolation
 q^e : vecteur des déplacements nodaux } De l'élément e

Dans le cas général d'un élément à n nœuds, nous allons écrire la relation (IV.1) sous la forme équivalente:

$$u(M) = [T]^T \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(M) u_i$$

$$v(M) = [T]^T \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(M) v_i \quad (IV.2)$$

$$w(M) = [T]^T \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(M) w_i$$

Les fonctions $N_i(M)$ sont appelées fonctions d'interpolation. Il est important d'insister sur la signification physique des fonctions d'interpolation.

Pour une composante le déplacement donnée, la fonction d'interpolation $N_i(u)$ représente le déplacement dans l'élément dans le cas où l'on prescrit un déplacement unité à l' $i^{\text{ème}}$ nœud, les autres déplacements nodaux étant nuls, soit pour le déplacement suivant x :

$$u(M) = [N_1 \dots N_i \dots N_n] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = N_i(M)$$

I-2 - SÉRIES POLYNOMIALES

L'approche la plus simple pour décrire le comportement d'un élément consiste à approximer son champ de déplacements par des séries de polynômes dont les coefficients a_i sont les coordonnées généralisées de l'approximation, soit dans le cas d'un problème bidimensionnel, pour chaque composante de déplacement :

$$u(x,y) = \sum a_i x^j y^k$$

Ceci permet d'écrire l'approximation sous la forme matricielle :

$$[u(x,y)] = [\phi_m(x,y)] [a]$$

avec m degré du polynôme.

Il est utile d'utiliser le triangle de Pascal pour mettre en évidence le nombre de termes présents dans ce type d'approximation.

Le nombre total de coordonnées généralisées de l'approximation doit être généralement égal au nombre total de déplacements nodaux de l'élément.

I-3 - OBTENTION DIRECTE DES FONCTIONS D'INTERPOLATION

La description des champs de déplacement sous forme d'approximation par des séries de polynômes a un intérêt certain. Cependant, cette approche soulève des difficultés numériques pour le calcul des caractéristiques élémentaires dès que l'on dépasse un certain degré de complexité. Il est donc souvent préférable de construire directement les matrices d'interpolation en utilisant les techniques d'interpolation.

INTERPOLATION PAR POLYNOMES DE LAGRANGE

Considérons une fonction $u(x)$ prescrite en $(m+1)$ différents nœuds équidistants d'un segment $a - b$. Soient u_i , les valeurs prescrites de la fonction aux nœuds :
 $u_i = u(x_i)$, $i = 1 \dots m+1$

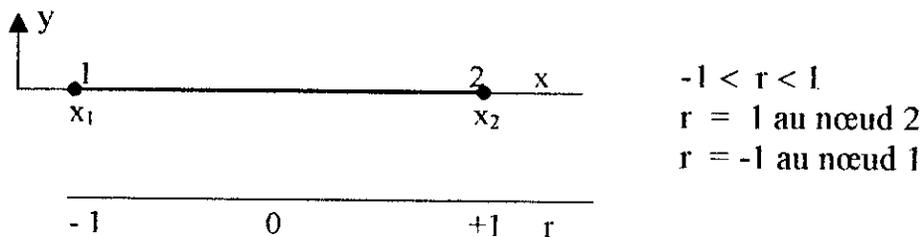
Cherchons à interpoler la fonction $u(x)$ par un polynôme de degré n sous la forme :

$$u(x) = \sum N_i(x) u_i = \mathbf{N}^T \mathbf{q}$$

Les polynômes d'interpolation appelés polynôme de Lagrange sont définis dans le cas unidimensionnel par l'expression :

$$N_i(x) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} (x - x_j)}{\prod_{j=1, j \neq i}^{m+1} (x_i - x_j)} \quad (\text{IV. 3})$$

Pour déterminer les fonctions d'interpolation, il est souvent intéressant d'utiliser, à la place du système de coordonnées physiques, un système de coordonnées naturelles ou intrinsèques. Ceci permet de définir une transformation du domaine physique de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimensions. Les coordonnées naturelles prenant les valeurs -1 ou 0 (ou $+1$) ou aux nœuds ou aux interfaces. Un exemple de coordonnées naturelles pour les problème à une dimension est défini dans la figure ci dessous. On a :



la relation entre le système de coordonnées naturelles et le système de coordonnées physiques est la suivante :

$$x = \frac{1}{2} (1-r)x_1 + \frac{1}{2} (1+r)x_2 = \sum_{i=1}^2 h_i x_i \quad (\text{IV. 4})$$

avec: $h_1 = \frac{1}{2} (1-r) \quad ; \quad h_2 = \frac{1}{2} (1+r)$

les fonctions de h_i peuvent être considérées comme des fonctions d'interpolation de la géométrie, triviales dans le cas présent.

Exprimons maintenant les fonctions d'interpolation N_i des déplacements de la barre à champ linéaire en fonction de r . On trouve immédiatement :

$$u(r) = \sum_{i=1}^2 N_i(r) u_i$$

avec

$$N_1(r) = \frac{1}{2} (1-r) \quad ; \quad N_2(r) = \frac{1+r}{2} \quad (\text{IV. 5})$$

Ainsi, dans ce cas présent, les fonctions d'interpolation de la géométrie et des déplacements de l'élément sont identiques, cet élément est dit *isoparamétrique*. Cet

exemple de coordonnées naturelles peut être aisément généralisé aux problèmes bidimensionnels pour déterminer les fonctions d'interpolation des quadrilatères. Pour les éléments triangulaires on utilise un autre système de coordonnées intrinsèques; les coordonnées barycentriques ou coordonnées d'aire.

INTERPOLATION PAR POLYNOMES D'HERMITE

Dans les problèmes de flexion où il est nécessaire de satisfaire la continuité c^1 des déplacements aux interfaces, il est nécessaire d'introduire les dérivées premières des déplacements comme d.d.l. aux nœuds. Dans ce cas, l'interpolation par polynômes d'Hermite permet facilement la description du champ des déplacement. Considérons un segment (1-2) de longueur L et utilisons la coordonnées de dimension $\varepsilon = x/L$. Cherchons à interpoler la fonction $v(\varepsilon)$ par des polynômes d'extrémité sur v et ses dérivées qu'à l'ordre $m-1$, soient:

$$\begin{array}{ll} v(\xi=0) = v_1 & v(\xi=1) = v_2 \\ v^0(\xi=0) = v_1^0 & v^0(\xi=1) = v_2^0 \\ \vdots & \vdots \\ v^{m-1}(\xi=0) = v_1^{m-1} & v^{m-1}(\xi=1) = v_2^{m-1} \end{array}$$

la fonction cherchée est définie par 2m fonction d'interpolation soit par l'expression:

$$v(\xi) = N_1 v_1 + N_2 v_1^0 + \dots + N_m v_1^{m-1} + N_{m+1} v_2 + N_{m+2} v_2^0 + \dots + N_{2m} v_2^{m-1}$$

les 2m coefficients d'interpolation sont des polynômes de degré $2m - 1$ appelés polynômes d'Hermite, soient:

$$N_i(\xi) = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_{2m} \xi^{2m-1}$$

les 2m coefficients inconnus de chaque fonction N_i sont déterminés par application des conditions d'extrémité.

II – COORDONNEES INTRINSEQUES

Les coordonnées intrinsèques (ou coordonnées naturelles) permettent de définir une transformation du domaine physique de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimension dans lequel on peut construire plus aisément les fonctions d'interpolation. On illustre le calcul des coordonnées intrinsèques par l'exemple des quadrilatères qui vient.

II - 1 - COORDONNEES INTRINSEQUES POUR LES QUADRILATERES

Pour les quadrilatères on peut définir un système de coordonnées intrinsèques (r, s) telles que sur les interfaces des éléments on ait :

$$r = \pm 1 \quad \text{ou} \quad s = \pm 1$$

tout point de l'élément peut être repéré de façon unique pour le couple (r, s). On aura en particulier pour les quatre nœuds principaux :

- Noeud 1 : (-1, -1)
- Noeud 2 : (1, -1)
- Noeud 3 : (1, 1)
- Noeud 4 : (-1, 1)

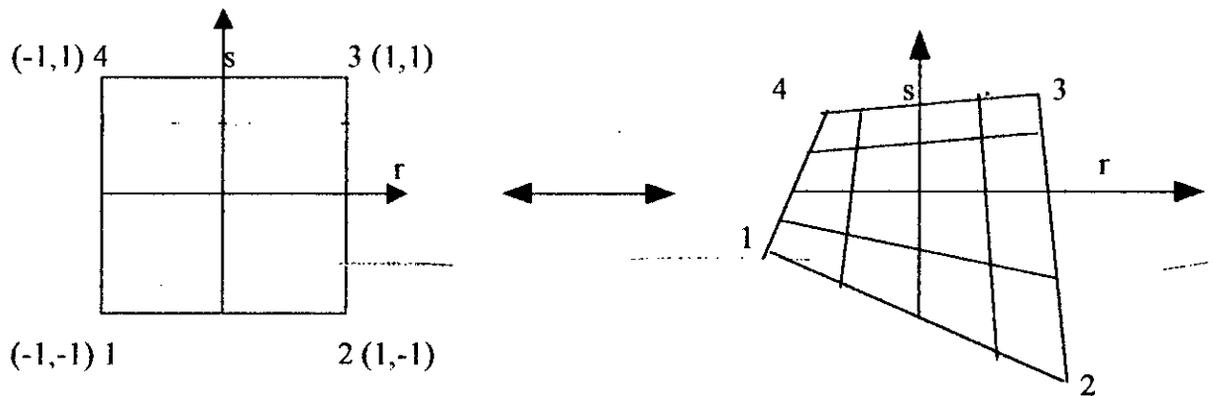


Figure IV.1 : Coordonnées intrinsèques pour le quadrilatère

Le système de coordonnées intrinsèques ainsi défini peut être facilement obtenu par extension du système de coordonnées intrinsèques défini précédemment pour la barre .

La relation entre coordonnées intrinsèques et physique s'écrit ici :

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) y_i$$
(IV . 6)

Les fonctions d'interpolation géométrique de ce cas se déduisent des relations (IV .5) établies dans le cas unidimensionnel, c'est à dire :

$$h_1(r) = \frac{1}{2}(1-r) \quad h_2(r) = \frac{1}{2}(1+r)$$

$$h_1(s) = \frac{1}{2}(1-s) \quad h_2(s) = \frac{1}{2}(1+s)$$

Compte tenu de la position des nœuds du quadrilatère, on en déduit :

$$N_1(r, s) = h_1(r) \cdot h_1(s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_2(r, s) = h_2(r) \cdot h_1(s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_3(r, s) = h_1(r) \cdot h_2(s) = \frac{1}{4} (1-r)(1-s)$$

$$N_4(r, s) = h_1(r) \cdot h_2(s) = \frac{1}{4} (1-r)(1-s)$$

Notons que le système de coordonnées intrinsèques peut être étendu aux éléments de types triangles ou tétraèdres dans le cas de problèmes bidimensionnels et tridimensionnels respectivement.

III - ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES

III - 1 - PRINCIPES ET PROPRIETES

Nous avons vu précédemment que l'utilisation de coordonnées intrinsèques permettait de définir une transformation entre le domaine physique de l'élément et un domaine simple sans dimensions et pour lequel il est aisé de construire les fonctions d'interpolation des déplacements.

Dans le cas du quadrilatère considéré précédemment, les côtes étaient rectilignes ou en d'autres termes le domaine géométrique des éléments était défini par interpolation linéaire des coordonnées des nœuds principaux. Cependant, on peut également imaginer des éléments à côtes courbes dont le domaine géométrique serait défini par des interpolations quadratiques ou cubiques des positions des nœuds (ce qui nécessiterait la définition de nœuds additionnels d'interface).

Ainsi, deux types d'interpolation interviennent dans la construction d'un élément fini : l'interpolation géométrique et l'interpolation des déplacements.

DEFINITION

Un élément fini est dit isoparamétrique quant il est basé sur des interpolations identiques pour sa géométrie et son champ de déplacement. On peut donc écrire pour tel élément les relations d'interpolation sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^m N_i(r, s) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^m N_i(r, s) y_i \end{aligned} \right\} \text{(Interpolation géométrique)}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^m N_i(r, s) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^m N_i(r, s) v_i \end{aligned} \right\} \text{(interpolation des déplacements)}$$

Quant l'interpolation géométrique est de degré inférieur à celui de l'interpolation des déplacements, l'élément est dit *sous-paramétrique*. Citons parmi eux le triangle à 3 nœuds et le quadrilatère à 4 nœuds pour lesquels l'interpolation de la géométrie et des déplacements est linéaire. On y introduit la notion d'*élément parent* c'est-à-dire de domaine adimensionnel simple (par exemple, un carré) qui après transformation donne naissance à l'élément isoparamétrique (Figure IV . 2).

PROPRIETES :

1. CONTINUITE INTER-ELEMENTS

Si les fonctions d'interpolation satisfont les conditions de continuité requises pour l'élément parent alors ces conditions de continuité sont également satisfaites pour l'élément isoparamétrique. Cette propriété est évidente s'il y a unicité de la transformation géométrique.

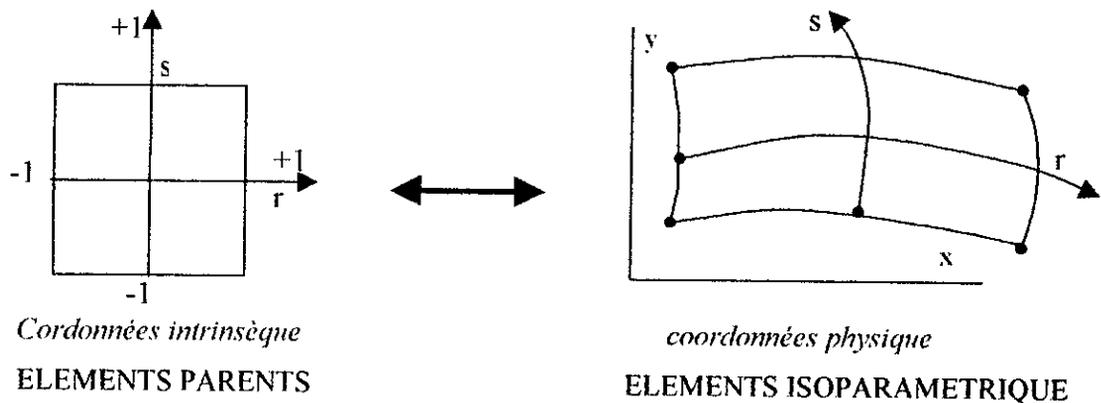


FIGURE IV.2 : *Eléments isoparamétriques à 2 dimensions*

2. COMPLETEUDE :

Les états de déformation constante sont correctement représentés dans les éléments isoparamétriques si la condition suivante est respectée

$$\sum Ni = 1$$

III – 2 – CALCUL DES ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES

Avec cette transformation , les nœuds de l'élément de référence correspondent aux nœuds de l'élément réel , et ils sont de même nombre . On a :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \mathfrak{F} \begin{Bmatrix} r \\ s \\ t \end{Bmatrix} \tag{IV .7}$$

Cette transformation (géométrique) sera dans ce cas la même que la transformation (interpolation) nodale N, ainsi :

$$x(r,s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) x_i$$

$$y(r,s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) y_i$$

$$z(r,s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) z_i$$

de même :

$$u(r,s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) u_i$$

$$v(r,s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) v_i$$

$$w(r,s,t) = \sum_{i=1}^n N_i(r,s,t) w_i$$

Dans l'expression de [K] de l'élément réel nous avons besoin des matrices [B] et [C] et un calcul d'intégrale. Or dans le cas de l'élément isoparamétrique [N] = [N(r,s,t)] donc [B] sera fonction de (r,s,t) ainsi il est nécessaire de procéder à un changement variables dans [B]. On peut écrire alors :

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta r} \\ \frac{\delta x}{\delta} \\ \frac{\delta s}{\delta} \\ \frac{\delta}{\delta t} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta y}{\delta} \\ \frac{\delta s}{\delta} \\ \frac{\delta z}{\delta} \end{bmatrix} \tag{IV.8}$$

J étant le Jacobien de la transformation, soit :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta z}{\delta r} \\ \frac{\delta x}{\delta s} & \frac{\delta y}{\delta s} & \frac{\delta z}{\delta s} \\ \frac{\delta x}{\delta t} & \frac{\delta y}{\delta t} & \frac{\delta z}{\delta t} \end{bmatrix} \tag{IV.9}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{bmatrix} = j^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta r} \\ \frac{\delta}{\delta s} \end{bmatrix} \tag{IV.10}$$

Le changement de variable que l'on a effectué permet de passer de l'intégration sur l'élément réel à une intégration plus simple sur l'élément de référence.

Dans ce cas la matrice de rigidité a pour expression :

$$K = \int_{v'} B^T C B dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B^T C B \det J dr ds dt \quad (\text{IV.11})$$

IV – INTEGRATION NUMERIQUE

Le calcul des matrices de rigidité par intégration explicite ne peut être effectué que pour les éléments les plus simples. Par ailleurs, l'intégration exacte peut soulever de sérieuses difficultés pour certains types de problèmes. Dans cette éventualité, l'intégration numérique doit être utilisée. Les principales méthodes d'intégration numérique sont la méthode de *Newton – Cotes* et la méthode de *Gausse – Legendre*. La méthode de Gauss demande moins de points d'intégration que la méthode de *Newton – Cotes* à précision égale. C'est pour cette raison que les méthodes d'intégration utilisées pour le calcul des éléments sont généralement basées sur la méthode de Gauss, et c'est pour la même raison que notre intérêt sera porté sur cette méthode.

IV – 1 – LA METHODE DE GAUSS

Soit à intégrer :

$$I = \int_{-1}^{+1} F(r) dr$$

Le calcul de cette intégrale peut être effectué en utilisant la méthode de Gauss.

Dans cette méthode, on ne se donne pas a priori la position des points d'intégration mais on détermine cette position de façon à minimiser l'erreur. Ainsi, dans le cas de n points d'intégration, nous avons n inconnues supplémentaires : les positions des points d'intégration (r_i) qui sont déterminées par des conditions de minimum de l'erreur.

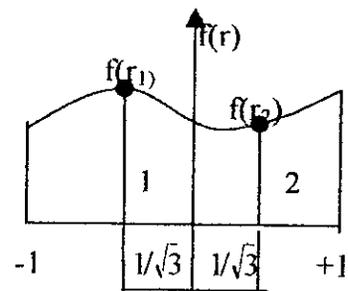


figure IV.3 : méthode de Gauss

Ainsi, on peut définir un polynôme de degré $(2n-1)$ satisfaisant $2n$ conditions, d'une part le respect des valeurs de la fonction aux points d'intégration $f(r_i)$ et d'autre part, les conditions de minimum de l'erreur en fonction de la position des points d'intégration. Dans

ce cas, l'erreur produite par cette méthode est de l'ordre $O(\Delta r)^{2n}$, elle permet d'intégrer de façon exacte un polynôme de degré $2n-1$. L'intégrale peut alors être évaluée en utilisant la formule d'intégration habituelle :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(r) dr = \sum_{i=1}^n W_i f(r_i) \quad (\text{IV. 12})$$

Considérons à titre d'exemple le cas $n = 2$. Le polynôme de degré 3 à intégrer peut s'écrire :

$$f(r) = a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + a_4 r^3$$

L'intégration exacte de cette fonction conduit au résultat suivant :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(r) dr = 2 a_1 + 2/3 a_3$$

Si on utilise deux points d'intégration ($r_1 = +R$, $r_2 = -R$) on cherche à calculer l'intégrale en utilisant la formule d'intégration :

$$I_{\text{APPROX}} = w_f(-R) + w_f(+R) = 2 w (a_1 + a_3 R^2)$$

$$\text{D'où l'expression de l'erreur : } \varepsilon = I - I_{\text{APPROX}} = 2a_1 (1-w) + 2 a_3 (1/3 - w R^2)$$

on voit alors que l'erreur s'annule quelles que soient les valeurs de a_1 et a_3 si les conditions suivantes sont respectées :

$$1 - w = 0, \quad 1/3 - w R^2 = 0$$

d'où :

$$w = 1 \text{ et } R = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm 0.57735\dots$$

ce raisonnement simple n'est pas utilisable dans le cas général. Cependant, la solution peut être obtenue de façon explicite en utilisant les polynômes de Legendre d'où le nom de la méthode de Gauss – Legendre souvent donné à cette méthode. La position des points d'intégration et les coefficients de pondération sont récapitulés dans le tableau IV.1.

- Cas bidimensionnels :

En ce qui concerne les quadrilatères, on peut utiliser des méthodes d'intégrations numériques déduites directement de la méthode de Gauss dans le cas unidimensionnel. On a vu, en effet, que le calcul de la matrice de rigidité en coordonnées intrinsèques pouvait se formuler sous la forme suivante :

$$K = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s) dr ds \tag{IV.13}$$

avec : $F(r, s) = B^T C B_c \det J$

si l'on intègre tout d'abord par rapport à r et ensuite par rapport à s en utilisant les formules de quadrature de Gauss dans le cas unidimensionnel (cf. Eq. IV.12) il vient :

$$K = \sum_i \sum_j w_i w_j F(r_i, s_j) \tag{IV.14}$$

• Cas tridimensionnels

L'extension de la méthode de Gauss aux problèmes tridimensionnels est évidente.

On obtient facilement dans ce cas :

$$K = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s, t) dr ds dt = \sum_{i,j,k} w_i w_j w_k F(r_i, s_j, t_k) \tag{IV.15}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(r) dr = \sum_{i=1}^n W_i f(r_i)$$

n	r _i	W _i
1	0.00000 00000 000000	2.00000 00000 00000
2	± 0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	± 0.77459 02691 89626 0.00000 00000 000000	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
4	± 0.86113 63115 94053 ± 0.33998 10435 84856	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
5	± 0.90617 98459 38664 ± 0.53846 93101 05683 0.00000 00000 000000	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889
6	± 0.93246 95142 03152 ± 0.66120 93864 66265 ± 0.23861 91860 83197	0.17132 44923 79170 0.36076 15730 48139 0.46791 39345 72691

Tableau IV .1 : points d'intégration et coefficient de pondération dans la méthode de Gauss

IV - 2 - CHOIX DE L'ORDRE DE L'INTEGRATION

Si l'on choisit un ordre d'intégration suffisamment élevé, on peut souvent calculer les matrices de rigidité de façon exacte ; on a vu, en effet, que la méthode à m points permettait d'intégrer de façon exacte les polynômes de degré $2m-1$. Ainsi, dans certains cas, il existe un ordre maximal d'intégration correspondant à l'intégration exacte des matrices de rigidité. Il suffit pour le déterminer de considérer le degré maximum des polynômes intervenant dans la matrice F (cf. Eq. IV.13).

Il y a par ailleurs pour chaque type d'élément un ordre d'intégration minimale nécessaire pour assurer la convergence. On peut, en effet, montrer que la convergence des éléments calculés par intégration numérique est satisfaisante si l'ordre d'intégration est suffisant pour calculer de façon exacte le volume de l'élément. En effet, au fur et à mesure que l'on resserre un maillage d'éléments, on se rapproche pour chacun d'entre eux à l'état de déformation constante, comme par ailleurs le calcul de la matrice de rigidité fait intervenir l'intégrale du potentiel de déformation on peut donc pouvoir calculer exactement :

$$\int_{v'} \varepsilon^T C \varepsilon dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [C^{sic}] e \det J dr ds$$

et donc de façon exacte le volume de l'élément. Il suffit donc pour évaluer l'ordre minimum d'intégration numérique d'étudier le produit ($e \times \det J$).

Chapitre V

TECHNIQUES DE CALCUL AU NIVEAU GLOBAL

Chapitre V

TECHNIQUE DE CALCUL AU NIVEAU GLOBAL

Ce chapitre est consacré aux techniques d'analyse globale basées sur la méthode des déplacements et qu'il faut considérer comme des extensions de la méthode matricielle à déplacements inconnus exposée au § II dans le cas d'éléments simples. Nous Supposerons que les caractéristiques des différents éléments constituant le modèle de la structure ont été préalablement calculées. Ce chapitre montre comment ces caractéristiques élémentaires (K^e , F^e pour l'élément e) sont utilisées pour la résolution du problème d'analyse statique par la méthode des déplacements. On y exposera en particulier la méthode d'assemblage, la prise en compte de conditions sur les déplacements, la résolution du système linéaire.

I – ASSEMBLAGE

La phase d'assemblage consiste à construire les matrices K et F de La Structure complète à partir des matrices caractéristiques des différents éléments K^e , F^e préalablement calculées. Nous allons exposer ici la méthode d'assemblage dans un cadre général en utilisant l'approche énergétique, ainsi que la règle pratique d'assemblage

I – 1 – APPROCHE ENERGETIQUE

Soit V^e l'énergie potentielle totale de l'élément e :

$$V^e = \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e - F^e \quad (V.1)$$

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totale élémentaires, soit :

$$V = \sum_{\text{éléments}} V^e = \sum_{\text{éléments}} \{ V^e \} = \{ \frac{1}{2} q^{eT} K^e q^e - F^e \} \quad (V.2)$$

Soit q le vecteur des déplacements nodaux de la structure :

$$q^T = [q_1 \dots q_i \dots]$$

avec : q_i sous - vecteur des déplacements au nœud i ,

La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle du type :

$$\begin{aligned} q^e &= \beta^e \times q \\ (n_e \times 1) &= (n_e \times N) \cdot (N \times 1) \end{aligned} \quad (V.3)$$

avec : β^e matrice de localisation ou de connectivité géométrique, de l'élément e
 n_e nombre de d.d.l.

N nombre de d.d.l de la structure.

Chaque relation (V.3) permet de repérer ou de localiser les d.d.l. de chaque élément dans l'ensemble des d.d.l. de la structure.

En utilisant les relations (V.2) et (V.3), on peut écrire :

$$V = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} [q]^T [\beta]^T [K^e] [q] - [q]^T [F^e]$$

D'où :

$$V^e = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q] - [q]^T [F] \quad (V.4)$$

avec :

$$[K] = \sum_{\text{éléments}} [\beta^e]^T [K^e] [\beta^e] \quad (V.5)$$

$[K]$ étant la matrice de rigidité de la structure complète

$$\text{et : } [F] = \sum_{\text{éléments}} [\beta^e]^T [F^e] \quad (V.6)$$

$[F]$ étant le vecteur des forces équivalentes

On peut alors écrire les conditions d'extremum de l'énergie potentielle totale V par rapport au vecteur q :

$$\nabla_q V = [K] [q] - [F] = 0$$

Ces conditions d'extremum sont en fait les équations d'équilibre des nœuds de la structure et constituent un système linéaire symétrique.

I - 2 - REGLE PRATIQUE D'ASSEMBLAGE

On peut déduire des considérations énergétiques précédentes ainsi que de la présentation du chapitre II la règle pratique suivante :

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en L'additionnant bloc à bloc les sous - matrices de rigidité nodale de chaque élément, les indices de ligne et colonne correspondant à la numération des nœuds de cet élément.

Cette règle est illustrée an Figure V.1 où on y montre l'assemblage d'un triangle n° 8 (5-6-9),

L'assemblage des forces équivalentes s'effectue de façon similaire.

Il faut remarquer que l'assemblage tel qu'il vient d'être décrit est un assemblage par blocs, nœud par nœud.

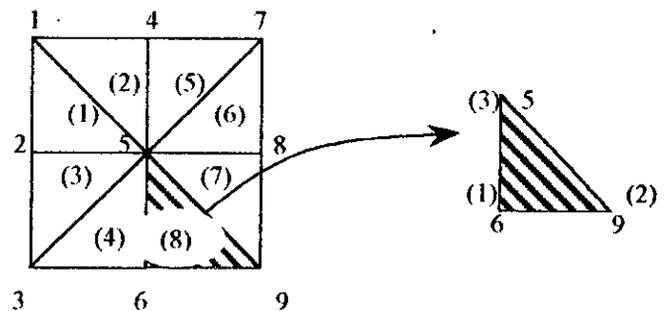


Figure V .1 : règle pratique d'assemblage

Ce type d'assemblage n'est utilisable que si l'on affecte le même nombre de d.d.l. à chaque nœud (par exemple 6 d.d.l. pour les problèmes généraux avec flexion). Dans ce cas, le système de gestion des d.d.l. est simple, mais cette option de base entraîne soit une limitation quant à la formulation des éléments <pas de dérivées secondes ou d'ordre plus élevé dans les d.d.l., pas de nœuds d'interface avec w pour les plaques), soit une certaine inefficacité numérique si tous les nœuds sont affectés du nombre maximal de d.d.l. Ce choix constitue une option de base pour l'architecture des logiciels d'analyse de structures. Si l'on admet au contraire un nombre de d.d.l. variable selon les nœuds, alors la gestion des d.d.l. devient complexe et l'assemblage s'effectue terme à terme, d.d.l. par d.d.l.

II - PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS SUR LES DEPLACEMENTS

Il existe deux types de conditions sur les déplacements nodaux dont la prise en compte nécessite des traitements différents :

- les relations de dépendance linéaire entre d.d.l.,
- les relations de déplacement imposé et en particulier la conditions d'appui.

II-1 - RELATIONS DE DEPENDANCE LINEAIRE

Il existe de nombreuses situations dans la résolution de problèmes pratiques qui nécessitent la prise en compte de relations de dépendance linéaire entre les déplacements nodaux. Ces relations peuvent être écrites sous la forme générale ci-après :

$$A \cdot q = 0 \tag{V.7}$$

A : étant une matrice (m × N) de coefficients, avec n nombre de relations supplémentaires, et

N : nombre total de d.d.l.

Effectuons une partition convenable des degrés de liberté en deux sous-ensembles le sous - ensemble des déplacements dépendants q_m et le sous-ensemble des déplacements indépendants q_n . On aura :

$$q = \begin{bmatrix} q_m \\ q_n \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mn} \\ K_{nm} & K_{nn} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_m \\ F_n \end{bmatrix} \tag{V.8}$$

La relation matricielle (V. 8) peut se développer sous la forme suivante :

$$[A_{mm} \ A_{mn}] \begin{bmatrix} q_m \\ q_n \end{bmatrix} = 0 \tag{V.9}$$

D'où la relation entre déplacements dépendants et indépendants :

$$q_m = G_{mn} q_n \tag{V.10}$$

avec :

$$G_{nm} = - A_{mm}^{-1} A_{mn} q_n \tag{V.11}$$

Il est évidant que la prise en compte de ces relations de dépendance linéaire (V.9) ou (V.11) diminue le rang de la matrice de rigidité et nécessite un traitement numérique adéquat.

II-2 - DÉPLACEMENTS IMPOSÉS

La prise en compte des conditions de déplacements imposés a été exposée au § II. Nous rappellerons brièvement le principe. Supposons avoir effectué l'élimination des d.d.l. dépendants. Il reste avant la résolution de prendre en compte les conditions d'appui et de déplacements imposés. Pour cela, effectuons la partition suivante des d.d.l. indépendants:

$$q_n = \begin{bmatrix} q_p \\ q_l \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{déplacements prescrits (connus)} \\ \text{déplacements restants (inconnus)} \end{array}$$

$$F_n = \begin{bmatrix} F_p \\ F_l \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Forces correspondant aux déplacements imposés} \\ \text{Forces appliquées aux d.d.l. restants} \end{array}$$

$$K_m = \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pt} \\ K_{tp} & K_{tt} \end{bmatrix} \quad (V.12)$$

La système des équations d'équilibre s'écrit sous forme développée :

$$K_{pp} q_p + K_{pt} q_t = F_p \quad (V.13)$$

$$K_{tp} q_p + K_{tt} q_t = F_t \quad (V.14)$$

D'où d'après (V.20) le système linéaire final à résoudre :

$$K_{tt} q_t = F_t - K_{tp} q_p \quad (V.15)$$

Les équations (V.13) permettent de calculer les réactions d'appui.

III – RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

La suite de ce chapitre est consacrée à la résolution du système d'équations d'équilibre : $K q = F^{(i)} \quad i = 1 \dots \dots N_p$

avec N_p : nombre de cas de charge.

Nous considérons que l'on a préalablement éliminé les d.d.l. dépendants et pris en compte les conditions de déplacements imposés. Le système des équations d'équilibre sera donc généralement défini positif. Un caractère semi – défini positif correspondrait soit à l'existence de modes rigides, soit à la prise en compte de relations de dépendance linéaire. Les méthodes numériques doivent permettre la résolution la plus économique possible avec de nombreux cas de charge. enfin, mentionnons que l'importance de la résolution des systèmes linéaires dépasse le cadre de l'analyse statique. En effet, la résolution de problèmes dynamiques ou non- linéaires peut se ramener à une succession de résolutions de systèmes linéaires.

III – 1 – CLASSIFICATION DES METHODES DE RESOLUTIONS

Les méthodes de résolution an analyse statique peuvent se classer en :

Méthodes itératives :

- méthode de Gauss – Seidel ,
- méthodes de relaxation ,
- minimisation de l' énergie potentielle totale par la méthode des gradients conjugués.

Méthodes directes :

- méthode d'élimination de Gauss et ses variantes,
- méthode de factorisation de Cholesky,

Les qualités requises pour une méthode de résolution utilisée dans un logiciel d'analyse des structures sont les suivantes :

- **Performances** : ces méthodes doivent conduire à un coût minimal pour une précision donnée en utilisant au mieux les ressources (mémoire centrale, périphériques, ...) de l'ordinateur. Notons qu'il est très important de pouvoir connaître à l'avance le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pour la résolution d'un système.
- **Fiabilité** : ces méthodes doivent permettre la détection des singularités ou de situations de mauvais conditionnement. Il est en outre souhaitable qu'elles permettent une évaluation de la précision obtenue sur la solution.

Certaines méthodes mentionnées précédemment peuvent être très performantes pour des classes spécifiques de problèmes mais présentent des performances médiocres dans d'autre cas. Ces méthodes ne sont généralement pas utilisées en analyse de structures où l'on peut avoir à résoudre une grande variété de problèmes (maillages 1D, 2D, 3D). La méthode utilisée ne doit donc pas être optimisée pour un type spécifique de problèmes mais plutôt avoir les meilleures qualités de performances et de fiabilité pour une vaste gamme d'applications.

Les méthodes itératives peuvent pour certains types de problèmes, présenter d'excellentes propriétés de convergence. Cependant, il n'en est pas ainsi pour la grande variété des problèmes que l'on peut être amené à résoudre en analyse des structures et pour certains problèmes il est pratiquement impossible de prévoir le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir une précision donnée. Pour ces raisons, ces méthodes ne sont pratiquement pas utilisées dans les logiciels d'analyse des structures. L'inconvénient majeur de ces méthodes réside dans leurs performances moindres par rapport aux méthodes directes de résolution bien adaptées et leur relative inaptitude à traiter des problèmes avec des cas de charges multiples.

Les méthodes directes de résolution en analyse Statique sont basées soit sur l'algorithme d'élimination de Gauss ou sur l'algorithme de factorisations de Cholesky.

Ces méthodes ont en commun une excellente fiabilité ; elles permettent en particulier la détection des singularités. Par ailleurs, elles sont particulièrement bien adaptées à la résolution de problèmes avec des cas de charge multiples.

Enfin, leur implantation dans les logiciels d'analyse de structures peut être adaptée aux problèmes traités (prise en compte du peuplement faible des matrices de rigidité) en

sans pivotement conservent la symétrie des sous - matrices $K^{(r)}$ à cause de la Symétrie initiale de K.

On obtient donc d'après (V . 16) : $K = L_1 L_2 \dots L_{n-1} U$

d'où $K = L U$ avec $L = L_1 L_2 \dots L_{n-1}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{n, n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$U = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & K_{1n}^{(1)} \\ & K_{22}^{(2)} & \dots & \dots & K_{2n}^{(2)} \\ & & K_{ii}^{(i)} & \dots & K_{in}^{(i)} \\ & & & K_{n-1, n-1}^{(n-1)} & K_{n-1, n}^{(n-1)} \\ & & & & K_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} = K^{(n)}$$

De plus, on peut noter que la matrice triangulaire supérieure U peut s'exprimer sous la forme :

$$U = D \tilde{U} \tag{V .21}$$

avec \tilde{U} matrice triangulaire supérieure.

et $D = U_{ij} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & & & \\ & K_{22}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$ matrice diagonale des pivots

On montre facilement d'après la symétrie de K et compte tenu du caractère unique de la décomposition que l'on a $\tilde{U} = L^T$

D'où : $K = L D L^T$ (V .22)

La résolution du système des équations d'équilibre par la méthode de Gauss peut s'organiser suivant les trois étapes suivantes :

1- décomposition de k : $K = LU = LDL^T$

2 - Résolution du système triangulaire en descendant :

$$LY = F \quad (V.23)$$

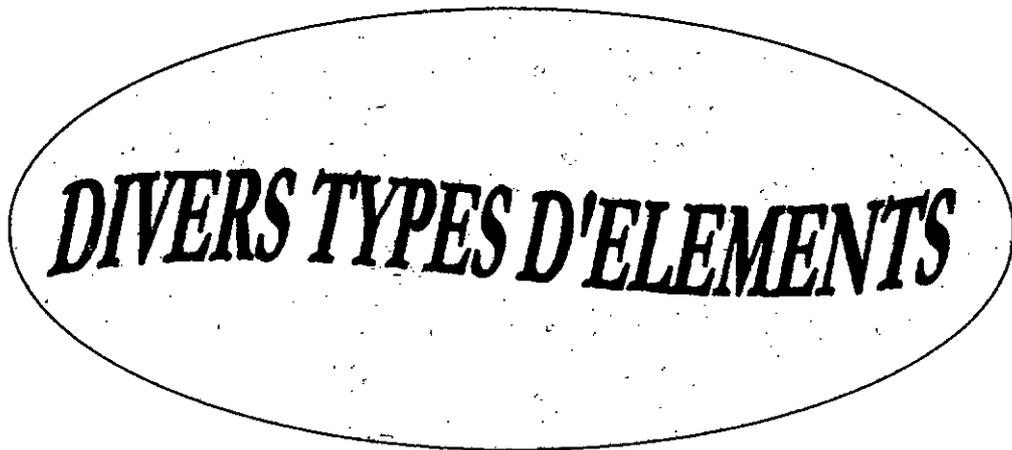
3 - Résolution du système triangulaire en remontant :

$$Uq = Y \quad \text{ou} \quad (V.24)$$

$$L^T q = D^{-1} Y \quad (V.25)$$

L'efficacité numérique des méthodes directes (Gauss ~ Cholesky) dépend de leur implantation et de la gestion des données mise en œuvre pour exploiter au mieux les propriétés des matrices de rigidité. En effet, la méthode de Gauss peut être facilement adaptée au cas des matrices symétriques compte tenu du fait que les sous - matrices $K^{(p)}$ restent symétriques en cours d'élimination. Il suffit donc de mémoriser la partie triangulaire supérieure de K , par exemple, et les vecteurs force F que l'on modifiera pendant la phase d'élimination pour obtenir respectivement la triangulaire supérieure U et les vecteurs Y .

Chapitre VI



Chapitre VI

DIVERS TYPES D'ELEMENTS

Dans les chapitres précédents, nous avons détaillé la technique d'approximation par éléments finis. Nous avons introduit en particulier les notions d'éléments et de fonction d'interpolation. Dans ce chapitre nous présenterons les fonctions d'interpolations de divers éléments couramment utilisés dans la pratique. Un type d'éléments est souvent défini par :

- Sa forme, par exemple triangulaire
- Les coordonnées de ses nœuds géométriques
- Son nombre de degré de liberté
- La définition de ses variables nodales
- La base polynomiale d'approximation

C'est à partir des informations précédentes que nous pouvons formuler un élément. Dans ce qui suit nous traiterons les éléments usuels que sont ; barre, poutre, plaque, corps solide à trois dimensions. Dans le choix de l'étude de ces éléments, nous avons pris le soin de toucher à plusieurs variante géométrique. En effet ; les éléments barre et poutre sont des éléments à une dimension, les éléments plaque et axisymétrique sont des éléments à deux dimensions, les éléments tétraèdre et hexaèdre sont à trois dimensions.

Nous signalons enfin, que tous les éléments ainsi que tous les cas de figure qui seront formulés ultérieurement ont été considérés lors de l'élaboration du programme ADSMEF qui sera exposé au chapitre VII.

I – ELEMENT BARRE

I – 1 – Equation de rigidité de la barre dans le repère local

Considérons un élément barre de longueur L , de module d'élasticité E et de section A . Les deux extrémités de cet élément représentent les points nodaux et sont notées 1 et 2 respectivement (fig. VI.1). Cet élément est soumis à deux forces X_1 et X_2 agissant dans la direction x aux points nodaux 1 et 2, respectivement. A ces forces correspondent deux déplacements u_1 et u_2 . Ces deux déplacements sont souvent appelés *degré de liberté*. Il y a au total deux degrés de liberté pour cet élément.

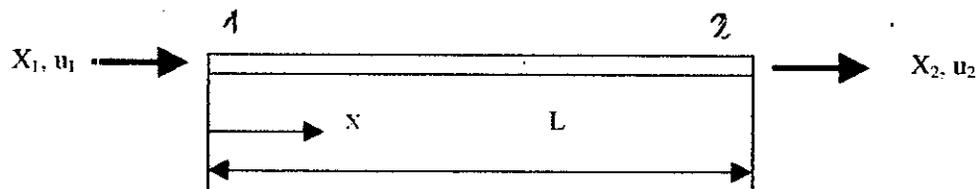


Figure VI. 1: barre dans le repère local

Il est nécessaire de déterminer deux équations pour relier les deux forces X_1 et X_2 avec les déplacements u_1 et u_2 . Cette détermination peut être faite soit par l'approche énergétique soit par l'approche équilibre. La première approche est plus puissante et plus générale en particulier pour les types d'éléments compliqués. L'approche équilibre est simple et physiquement claire, mais elle n'est efficace que pour les cas d'éléments simples. Pour cette raison, nous opterons pour l'approche énergétique. Afin d'utiliser cette approche, il est nécessaire, en premier lieu, de définir la fonction de déplacement de cet élément.

I – 1 – 1 – Fonction de déplacement et fonction de forme

Pour l'élément barre, le déplacement axial $u(x)$ distant de x par rapport au point nodal 1 peut être représenté par une fonction linéaire du type:

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (\text{VI. 1})$$

avec a_1 et a_2 , deux constantes à déterminer à partir des conditions aux limites aux points nodaux

$$\text{à } x = 0 \quad u(x) = u(0) = u_1 = a_1$$

$$\text{à } x = L \quad u(x) = u(L) = u_2 = a_1 + a_2 L \iff a_2 = u_2 - \left(\frac{u_1}{L}\right)$$

En introduisant les résultats de a_1 et a_2 dans l'équation (VI.1) et après arrangement de cette équation, la forme finale de la fonction déplacement sera :

$$u(x) = f_1(x) u_1 + f_2(x) u_2 \quad (\text{VI.2a})$$

$$\text{Avec } f_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{et } f_2(x) = \frac{x}{L} \quad (\text{VI.2b})$$

où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ décrivent la distribution des déplacements associés aux degrés de liberté u_1 et u_2 , respectivement.

I - 1 - 2 - Equations de rigidité par la méthode énergétique

Dans le cas de contrainte uniaxiale, la déformation est définie comme suit :

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{VI.3})$$

où Δx est une longueur infinitésimale. Dans le cas présent, la déformation peut être obtenue en injectant l'équation (VI.2a) dans l'équation (VI.3) :

$$\varepsilon = f_1'(x) u_1 + f_2'(x) u_2 \quad (\text{VI.4})$$

la tension dans la barre est exprimée comme suit :

$$S = \sigma A = E \varepsilon A = E A \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{VI.5})$$

L'expression de l'énergie de déformation dans le cas d'une barre est donnée par :

$$U = \int_0^L \frac{S^2 dx}{2EA} \quad (\text{VI.6})$$

avec : S : force axiale

E : module d'élasticité

A : aire de la section

en injectant l'équation (VI.5) dans l'équation (VI.6) on aboutit à :

$$U = \int_0^L \frac{S^2 dx}{2EA} = \frac{EA}{2} \int_0^L (f_1' u_1 + f_2' u_2)^2 dx \quad (\text{VI.7})$$

en appliquant le théorème de Castigliano, on aboutit à :

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial u_1} = \left(EA \int_0^L f_1' f_1' dx \right) u_1 + \left(EA \int_0^L f_1' f_2' dx \right) u_2$$

$$X_2 = \frac{\partial U}{\partial u_2} = \left(EA \int_0^L f_2' f_1' dx \right) u_1 + \left(EA \int_0^L f_2' f_2' dx \right) u_2$$

ou bien sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.8a})$$

ou symboliquement :

$$[X] = [K] [u] \quad (\text{VI.8b})$$

où $[K]$ est dite *matrice de rigidité*, dans laquelle les coefficients de rigidité sont définis tel

que :

$$K_{ij} = EA \int_0^L f_i'(x) f_j'(x) dx \quad (\text{VI.9})$$

de l'équation (VI.9), on voit que $K_{ji} = K_{ij}$, ce qui signifie que la matrice $[K]$ est symétrique.

Pour définir la matrice $[K]$ d'une manière explicite, il suffit d'introduire les fonctions de formes de l'équation (VI.2b) dans l'équation (VI.9): Ceci nous donne finalement :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.10})$$

le terme EA / L est la raideur axiale de la barre. la barre se comporte comme un ressort avec une constante de raideur égale à EA / L

I – 2 – Equation de rigidité d'une barre orientée arbitrairement

On a établi, précédemment, les fonctions de rigidité dans le cas d'un élément barre en translation horizontale. On se propose dans ce qui suit, d'établir les équations de rigidité dans le cas général d'une barre orientée arbitrairement dans un plan. Pour arriver à cette fin, nous pouvons utiliser l'approche énergétique combinée avec la méthode de transformation des coordonnées, la méthode de transformation de coordonnées seule ou bien la méthode de l'équilibre. Etant donné que la matrice de rigidité de la barre dans le plan a été calculée ci-dessus, il suffit d'opérer une transformation de coordonnées de la barre du repère locale au repère global pour aboutir à l'expression de la rigidité de la barre dans le repère global. Ce calcul est illustré ci-après.

Un élément barre orienté arbitrairement d'un angle ϕ par rapport l'axe x est représenté dans la (fig. VI.2). Dans le repère global, chaque nœud est soumis à une force horizontale X et une force verticale Y . à chaque efforts correspondent deux déplacements, l'un horizontal u , et l'autre vertical v . Chaque élément présente quatre degrés de liberté: u_1, u_2, v_1, v_2 .

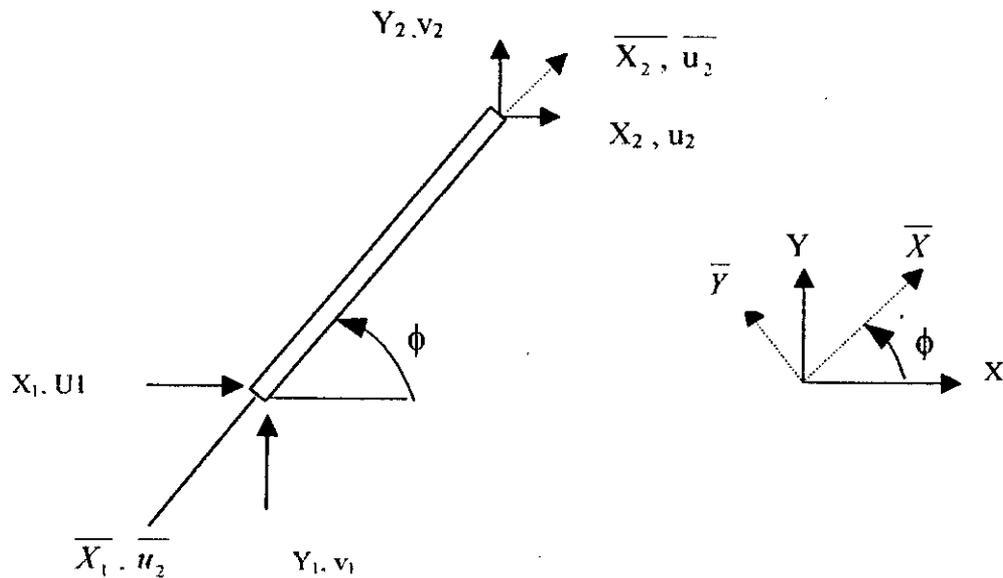


Figure VI.2 : élément barre orienté arbitrairement

de la figure (VI.2) nous déduisons les déplacements locaux \bar{u}_1 et \bar{u}_2 en fonction des déplacements globaux u_1, v_1, u_2 , et v_2 .

$$\text{Pour le nœud 1, } \bar{u}_1 = u_1 \cos\phi + v_1 \sin\phi \tag{VI.11a}$$

$$\text{Pour le nœud 2, } \bar{u}_2 = u_2 \cos\phi + v_2 \sin\phi \tag{VI.11b}$$

si nous employons les symboles $\lambda = \cos\phi$ et $\mu = \sin\phi$, les équations (VI.11a) et (VI.11b) s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{VI.12}$$

en utilisant la relation entre l'énergie de déformation et le travail qui énonce que l'énergie de déformation est égale à la moitié du travail effectué, autrement dit elle est égale à la moitié de la résultante du produit des forces nodales par les déplacements correspondant ;

$$U = \frac{1}{2} (X_1 u_1 + X_2 u_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.13})$$

en introduisant l'équation (VI.12) et l'équation (VI.10) dans l'équation (VI.13), nous aurons :

$$U = \frac{EA}{2L} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \mu^2 \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.14})$$

l'application du théorème Castigliano nous donne, finalement, le système $[K] [u] = [F]$ avec la matrice de rigidité $[K]$ exprimée comme il vient :

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \mu^2 \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.15})$$

I - 3 - Equation de la tension

Si nous connaissons les déplacements aux nœuds de l'élément, les efforts peuvent être obtenus directement de l'équation $[F] = [K] [u]$ tel que :

$$X_1 = \frac{EA}{L} [\lambda^2(u_1 - u_2) + \lambda\mu(v_1 - v_2)]$$

$$Y_1 = \frac{EA}{L} [\lambda\mu(u_1 - u_2) + \mu^2(v_1 - v_2)]$$

avec : $X_2 = -X_1$ et $Y_2 = -Y_1$

si nous employons S pour désigner la tension axiale, alors :

$$S = X_2 \lambda + Y_2 \mu = \frac{EA}{L} [\lambda(u_2 - u_1) + \mu(v_2 - v_1)]$$

= (constante de raideur) (élongation axiale totale)

ou bien, sous forme matricielle :

$$S = \frac{EA}{L} [\lambda \ \mu] \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.16})$$

Si la valeur obtenue pour S est négative on dira que la barre est soumise à des efforts de compression. Dans le cas contraire, on dira que la barre est soumise à des efforts de traction.

I - 4 - Analyse dynamique**I - 4 - 1 - Système masse - ressort**

L'exemple simple d'un système masse - ressort à un degré de liberté est représenté en fig(VI .3). Quand la masse vibre à une distance x de sa position initiale, l'équation qui gouverne son mouvement est de la forme :

$$k x + m \ddot{x} = 0 \quad (\text{VI .17})$$

où k est la constante de raideur.

Le terme ' $k x$ ' est la force élastique du ressort et le terme ' $m \ddot{x}$ ' la force d'inertie de la masse. La force d'inertie agit toujours dans le sens opposé à la résistance du ressort. En mode statique l'accélération est nulle, tandis que la vitesse est maximale. Inversement, en position extrême ($x = \pm$ amplitude), la valeur absolue de l'accélération est maximale alors que la vitesse est nulle. Notons la pulsation propre du système par : ω

avec :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{VI .18})$$

l'équation (VI .17) devient :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{VI .19})$$

le système (VI .19) admet pour solution :

$$x = A \cos (\omega t) + B \sin (\omega t) \quad (\text{VI .20})$$

les constantes A et B (amplitudes) seront déterminées à partir des conditions initiales.

si le système est sujet à une sollicitation extérieure $f(t)$, le système sera gouverné par l'équation suivante :

$$k x + m \ddot{x} = f(t) \quad (\text{VI .21})$$

dans ce cas on dira que le système est forcé.

l'écriture matricielle de l'équation (VI .21) :

$$[K] (x) + [m] (\ddot{x}) = (f) \quad (\text{VI .22})$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité, $[m]$ a matrice masse, (x) le vecteur des déplacements nodaux, (\ddot{x}) le vecteur des accélérations, et (f) le vecteur des forces appliquées.

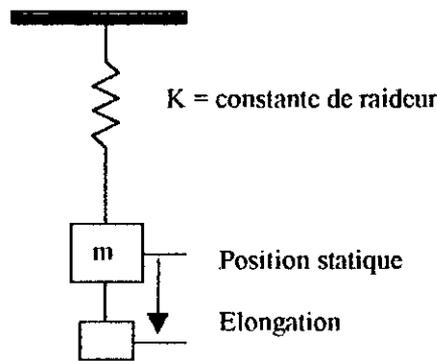


Figure (VI.3) : Système masse –ressort en vibration libre

1 – 4 – 2 – Matrice masse de la barre

La matrice masse de la barre peut être établie suivant deux méthodes ; *la méthode des masses consistantes* et *la méthode des masses concentrées*. Nous énonçons les principes de ces deux méthodes.

Méthode des masses concentrées :

Le principe de cette méthode est de répartir les forces d'inertie de l'élément considéré et de les concentrées aux deux extrémités de l'élément ; d'où son appellation 'méthode des masses concentrées'.

Méthode des masses consistantes :

Cette méthode est basée sur le théorème de Lagrange. Elle se base sur l'expression des énergies cinétique et potentielle en fonction des déplacements nodaux. Les fonctions de déplacements à utiliser sont celles utilisées dans les équations de rigidité. D'où son appellation 'méthode des masses consistantes'.

Malgré son apparence, la méthode des masses concentrées peut être très efficace pour des structures à maillage serré.

Dans ce qui suit, on adoptera la méthode des masses consistantes.

l'énergie potentielle est donnée par la relation ci – après :

$$U = \frac{EA}{L} \int_0^L \{u'(x)\}^2 dx \quad (VI.24)$$

et l'énergie cinétique comme suivant :

et l'énergie cinétique comme suivant :

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \{u'(x)\}^2 dx \quad (VI.25)$$

l'équation du mouvement est déduite à partir du théorème de Lagrange qui stipule que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i \quad (VI.26)$$

où q_i représente le i^{eme} degré de liberté.

$u(x)$ la fonction de déplacement établie précédemment par la relation (VI.2)

F_i force nodale.

vu que l'on ne traitera que le cas de vibration libre, les forces nodales n'apparaîtrons pas dans la formulation car elles sont considérées nulles. Le problème deviendra donc, un problème aux valeurs propres.

on développe la relation (VI.26) pour les degrés de liberté u_1 et u_2 en introduisant le relation (VI.2) dans les expressions (VI.24) et (VI.25), ainsi que les relations (VI.24) et (VI.25) dans la relation (VI.26), on trouve le système suivant :

$$X_1 = [m_{11} \quad m_{12}] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + [k_{11} \quad k_{12}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

avec : $m_{11} = \int_0^L f_1'(x) f_1'(x) dx$ et $m_{12} = \int_0^L f_1'(x) f_2'(x) dx$

$$X_2 = [m_{21} \quad m_{22}] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + [k_{21} \quad k_{22}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

avec : $m_{21} = \int_0^L f_2'(x) f_1'(x) dx$ et $m_{22} = \int_0^L f_2'(x) f_2'(x) dx$

d'où la forme générale suivante de la matrice masse pour une barre dans le repère local :

$$m_{ij} = \rho A \int_0^L f_i'(x) f_j'(x) dx \quad (VI.27)$$

la relation (VI.27) nous permet de déterminer la matrice masse de la barre de forme suivante :

$$[M] = \frac{\rho A L}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (VI.28)$$

I - 4 - 3 - Matrice masse dans le repère globale

Pour déterminer la matrice masse de l'élément barre dans le système global de coordonnées, il suffit d'appliquer la transformation de coordonnées décrite plus haut pour le cas de la rigidité.

Cette transformation est régie par la relation suivante :

$$\{ f \} = [T]^T [m] [T] \{ q \} \quad (\text{VI.29})$$

$$4 \times 1 \quad 4 \times 4 \quad 2 \times 2 \quad 4 \times 4 \quad 4 \times 1$$

avec :

[T] : matrice de passage décrite par l'équation (VI.12)

[m] : matrice masse dans le repère local (VI.28)

[M] : matrice masse dans le repère global

le développement de l'équation (VI.29) nous donne l'expression de la matrice dans le repère global explicitement :

$$[M] = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2\lambda^2 & 2\mu^2 & \lambda^2 & \lambda\mu \\ 2\lambda\mu & 2\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \\ \lambda^2 & \lambda\mu & 2\lambda^2 & 2\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & 2\lambda\mu & 2\mu^2 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.30})$$

La formulation qui régie les vibrations axiales - transversales de la barre, est ainsi complètement établie. Il suffit d'incorporer la matrice [K] et [M], décrites dans le repère global, dans l'équation suivante :

$$[F] = \{ [K] - \omega^2 [M] \} [q] \quad (\text{VI.31})$$

REMARQUE :

Pour exprimer les matrices [K] et [M] dans le plan avec un troisième d.d.l (rotation) pour chaque nœud, il suffit de les augmenter et ceci en ajoutant pour chacune d'elles deux lignes qui seront positionnées respectivement, en troisième et sixième ligne et symétriquement pour les deux colonnes incluses.

II – ELEMENT POUTRE

II – 1 - INTRODUCTION

Un élément poutre à section uniforme est représenté dans la figure (VI.4). Cette élément est caractérisé par le moment d'inertie I constant le long de la poutre, le module d'élasticité E , la longueur L . il assure deux degré de liberté par nœuds ; déplacement transversal v et une rotation θ (ou $\delta v / \delta x$). la force transversale Y et le moment M correspondent, respectivement, au degré de liberté v et θ .

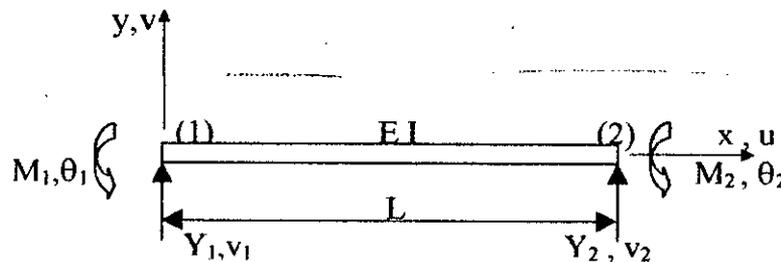


Figure.VI.4 : élément poutre à section uniforme

II – 2 - FONCTION DE DEPLACEMENT

le comportement de la poutre est décrit par la fonction de déplacement $v(x)$. Cette fonction doit satisfaire l'équation différentielle d'équilibre pour une poutre :

$$\delta^4 v / \delta x^4 = 0 \tag{VI.32}$$

la solution de l'équation (VI.32) est une fonction polynomiale cubique :

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \tag{VI.33}$$

où les constantes a_1 , a_2 , a_3 et a_4 sont à déterminer à partir des conditions aux limites sur les d.d.l

$$\begin{aligned} v = v_1 \text{ et } \delta v / \delta x = \theta_1 & \quad \text{pour } x = 0 \\ v = v_2 \text{ et } \delta v / \delta x = \theta_2 & \quad \text{pour } x = L \end{aligned} \tag{VI.34}$$

L'application des conditions de l'équation (VI.34) conduit à la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.35})$$

ou bien , symboliquement : $\{a\} = [T] \{q\}$ (VI. 35a)

après introduction de l'équation (VI .35) dans l'équation (VI .33) et arrangement du nouveau système, on aboutit à la forme suivante :

$$v(x) = f_1(x) v_1 + f_2(x) \theta_1 + f_3(x) v_2 + f_4(x) \theta_2 \quad (\text{VI .36})$$

où :

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_2(x) &= x - 2\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L^2}\right) \\ f_3(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ f_4(x) &= -\left(\frac{x^2}{L}\right) + \left(\frac{x^3}{L}\right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI .37})$$

les fonctions $f_i(x)$ données par l'équation (VI.37) sont dites *fonctions de formes*. Physiquement, chacune des fonctions de forme représente la déflexion de la poutre produite après sollicitation du degré de liberté correspondant, tout en assurant que les autres d.d.l sont fixes. Il est tout à fait claire que la fonction déplacement donnée par l'équation (IV.36) peut être obtenue par la superposition des variations correspondants aux quatre degrés de liberté.

II – 3 – EQUATIONS DE RIGIDITE

L'équation de rigidité peut être élaborée à partir du théorème de Castigliano :

$$F_i = \delta U / \delta q_i \quad (\text{VI.38})$$

où F_i la force nodale,

q_i le déplacement nodal correspondant au d.d.l, l'indice est le degré de liberté,

U l'énergie de déformation.

L'énergie de déformation pour l'élément poutre à section uniforme est donnée par :

L'énergie de déformation pour l'élément poutre à section uniforme est donnée par :

$$U = EI / 2 \int_0^L \left(\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \right)^2 dx \quad (VI.39)$$

à titre d'exemple, on se propose de déterminer les coefficients de la première ligne de la matrice de rigidité. Pour le développement de l'équation (VI.39), on calcule la dérivée seconde de la fonction de déplacement $v(x)$ donnée par (VI.36) par rapport à x , puis en substituant (VI.39) dans (VI.38), et en appliquant le Théorème de Castigliano pour le degré de liberté v_1 , nous aurons :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\delta U}{\delta v_1} = \frac{EI}{2} \int_0^L 2 \left(\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \right) \frac{\delta}{\delta v_1} \left(\frac{\delta v^2}{\delta x^2} \right) dx \\ &= EI \int_0^L [f_1''(x)v_1 + f_2''(x)\theta_1 + f_3''(x)v_2 + f_4''(x)\theta_2] f_1''(x) dx \\ &= K_{11}v_1 + K_{12}\theta_1 + K_{13}v_2 + K_{14}\theta_2 \end{aligned} \quad (VI.40)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= EI \int_0^L f_1''(x)f_1''(x)dx & K_{12} &= EI \int_0^L f_1''(x)f_2''(x)dx \\ K_{13} &= EI \int_0^L f_1''(x)f_3''(x)dx & K_{14} &= EI \int_0^L f_1''(x)f_4''(x)dx \end{aligned} \right\} \quad (VI.41)$$

ou bien, sous forme généralisée :

$$K_{ij} = EI \int_0^L f_i''(x)f_j''(x)dx \quad (VI.42)$$

les éléments de la première ligne peuvent être déterminés en appliquant l'équation (VI.42). Par méthode similaire à celle ci-dessus, les coefficients de la deuxième, troisième et quatrième ligne peuvent être déterminés.

La forme générale de l'équation de rigidité est la suivante :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (VI.43)$$

ou symboliquement.

$$\{F\} = [K] \{q\} \quad (\text{VI.43a})$$

II - 4 - POUTRE ORIENTÉE ARBITRAIREMENT

Dans le cas d'une poutre orientée arbitrairement chaque élément est sujet à une sollicitation axial, sollicitation transversale, et à un moment de flexion. Pour une représentation dans un plan chaque dans un plan chaque nœud doit avoir trois degré de liberté ; deux déplacement ; l'un horizontal u et l'autre vertical v et un angle de rotation θ .

Un élément poutre dans le plans est représenté par la figure (VI.5) où les d.d.l u , v , et θ sont soumis respectivement aux sollicitations X , Y , et M pour chaque nœud. L'élément est orienté d'un angle ϕ . noté dans le sens trigonométrique par rapport à l'axe x du repère global. Ses propriétés géométriques sont : module d'élasticité E , section A , moment l'inertie I , et Longueur L .

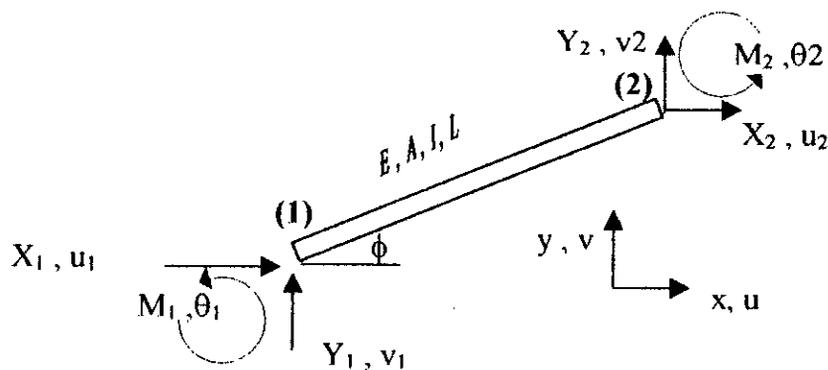


Figure (VI.5) poutre orientée arbitrairement

pour établir la matrice de rigidité de la poutre dans le repère global (6x6), on augmente la matrice (IV.43) en ajoutant les termes de prise en compte des déplacements horizontaux, puis on procède à la transformation de repère ; passage du repère locale eu repère global.

La considération des déplacements suivants l'axe des X se traduit par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (VI.44)$$

Ou bien, symboliquement : $\overline{[F]} = \overline{[K]} \overline{[q]}$ (VI.44a)

la petite barre signifie de les matrices sont exprimées dans le repère local.

Après avoir exprimé la matrice de rigidité avec prise en compte des déplacements horizontaux, on se propose de l'exprimer dans le repère global.

La transformation du vecteur force du repère local au repère global se fait de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{Y_1} \\ \overline{M_1} \\ \overline{X_2} \\ \overline{Y_2} \\ \overline{M_2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad (VI.45)$$

Où : λ et μ sont les cosinus et sinus directeurs définis par :

$$\lambda = \cos \phi \quad , \quad \mu = \sin \phi \quad (VI.46)$$

l'équation (IV.45) sous forme symbolique :

$$\overline{[F]} = [T] [F] \quad (VI.47)$$

pour réaliser la transformation des forces locales en forces globales on écrit l'équation (VI.47) sous forme inverse :

$$[F] = [T]^{-1} [\bar{F}] \tag{VI.48}$$

il est remarquable que la matrice [T] répond aux critères d'orthogonalité d'où :

$$[T]^{-1} = [T]^T \tag{VI.49}$$

l'équation (VI.48) devient alors :

$$[F] = [T]^T [\bar{F}] \tag{VI.50}$$

de la même manière, on peut transformer le vecteur déplacement du système local au système globale :

$$[\bar{q}] = [T] [q] \tag{VI.51}$$

la substitution des équations (VI.47) et (VI.51) dans l'équation (VI.44a) nous conduit au système ci-après :

$$[T] [F] = [\bar{K}] [T] [q] \tag{VI.52}$$

en utilisant les propriétés de la matrice orthogonale [T], nous obtiendrons le système :

$$[F] = [T]^T [\bar{K}] [T] [q] \tag{VI.53}$$

La quantité : $[T]^T [\bar{K}] [T]$ représente la matrice de rigidité exprimée dans le repère globale.

Finalement, la matrice de rigidité d'une poutre orientée arbitrairement d'un angle ϕ mesuré suivant le sens trigonométrique par rapport à l'axe x , à la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} R\lambda^2 + \frac{12}{L^2}\mu^2 & & & & & \\ (R - \frac{12}{L^2})\lambda\mu & R\mu^2 + \frac{12}{L^2}\lambda^2 & & & & \\ -\frac{6}{L}\mu & \frac{6}{L}\lambda & 4 & & & \\ -R\lambda^2 - \frac{12}{L^2}\mu^2 & (-R + \frac{12}{L^2})\lambda\mu & \frac{6}{L}\mu & R\lambda^2 + \frac{12}{L^2}\mu^2 & & \\ (-R + \frac{12}{L^2})\lambda\mu & -R\mu^2 - \frac{12}{L^2}\lambda^2 & -\frac{6}{L}\lambda & (R - \frac{12}{L^2})\lambda\mu & R\mu^2 + \frac{12}{L^2}\lambda^2 & \\ -\frac{6}{L}\mu & \frac{6}{L}\lambda & 2 & \frac{6}{L}\mu & -\frac{6}{L}\lambda & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{VI.54}$$

Avec :

R : rapport entre l'aire de la section et le moment d'inertie $R = A / I$

II – 5 – POUTRE SOUS CHARGES REPARTIES

Dans les paragraphes ci-dessus, on a considéré que les forces et les moments appliqués à la structure sont tous concentrés au point nodaux. Dans le domaine pratique, les forces sont parfois réparties, ce qui nécessite pour raison de calcul, leur transformation en charges ponctuelles. Pour cela deux méthodes sont à suggérées.

I. FORCES DU TRAVAIL EQUIVALENT :

Le principe de cette méthode et de considérer le travail produit par les forces nodales concentrées et inconnues est égal au travail produit par les forces réparties connues. Néanmoins cette méthode est favorisante lorsqu'il s'agit de forces distribuées selon une fonction mathématique.

Le travail effectuée par les forces nodales concentrée inconnues est formulé par :

$$W_n = \frac{1}{2} [y_1 \ M_1 \ y_2 \ M_2] \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (VI.55)$$

Le travail effectué par les charges réparties est formulé par :

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L P(x) v(x) dx \quad (VI.56)$$

avec la fonction de déplacement $v(x)$ défini par l'équation (VI .36) . :

les deux travaux sont supposé égaux. d'où :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^L P(x) f_1(x) dx \\ \int_0^L P(x) f_2(x) dx \\ \int_0^L P(x) f_3(x) dx \\ \int_0^L P(x) f_4(x) dx \end{pmatrix} \quad (VI.57)$$

Ou bien, sous une forme générale :

$$F_i = \int_0^L P(x) f_i(x) dx \quad (\text{VI.58})$$

l'indice i représente le numéro du d.d.l.

puisque les forces concentrées correspondantes sont obtenues en se basant sur les fonctions de forme, cette méthode est appelée « *Méthode de la consistante* ».

2. FORCES EQUIVALENTES STATIQUEMENT

Le principe de cette méthode est de diviser l'élément considéré en deux parties égales et d'assigner la première partie à la charge équivalente sur le premier nœud et l'autre partie à la charge équivalente au deuxième nœud. Bien que cette méthode à l'apparence d'être imprécise, elle peut être très efficace quand elle est appliquée pour une structure fortement discrétisée c'est-à-dire pour une structure composée d'un grand nombre d'éléments.

II - 6 - ELEMENT POUTRE A SECTION NON UNIFORME

Dans ce paragraphe l'élément poutre à section non uniforme illustré par la figure (VI.6) est considéré. Cet élément a les mêmes degrés de liberté que l'élément à section uniforme (i.e. V, θ). Il est caractérisé par ; module d'élasticité E , longueur L , et le moment d'inertie variable défini par :

$$I(x) = I_0 [1 + r \times (x/L)^\alpha] \quad (\text{VI.59})$$

Où I_0 est la valeur du moment d'inertie au nœud (1)

r et α : paramètres d'approximation dépendants de la géométrie de l'élément

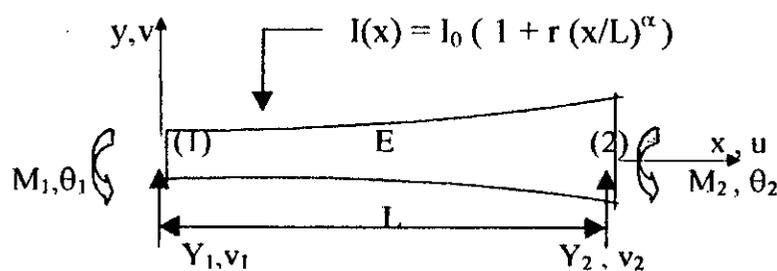


Figure.VI.6 : élément poutre à section variable

Afin de calculer la forme de la matrice de rigidité dans ce cas, on suit les étapes décrites au paragraphe (II .3). La variation de la section de la poutre est prise en compte par l'expression de l'énergie de déformation qui s'écrira, dans ce cas :

$$U = E / 2 \int_0^L I(x) \left(\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \right)^2 dx \quad (\text{VI .60})$$

En raisonnant par la procédure décrite au paragraphe (II .3), et en considérant la relation (VI .60) au lieu et place de l'équation (VI .39) , on aboutit à la forme suivante de la matrice de rigidité :

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI_0}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} C_{11} & & & & & \\ \frac{6}{L} C_{21} & 4C_{22} & \text{Symétrique} & & & \\ -\frac{12}{L^2} C_{11} & -\frac{6}{L} C_{21} & \frac{12}{L^2} C_{11} & & & \\ \frac{6}{L} C_{41} & 2C_{42} & -\frac{6}{L} C_{41} & 4C_{44} & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{VI .61})$$

Avec :

$$C_{11} = 1 + 3r \left(\frac{1}{\alpha + 1} - \frac{4}{\alpha + 2} + \frac{4}{\alpha + 3} \right)$$

$$C_{21} = 1 + 2r \left(\frac{2}{\alpha + 1} - \frac{7}{\alpha + 2} + \frac{6}{\alpha + 3} \right)$$

$$C_{22} = 1 + r \left(\frac{4}{\alpha + 1} - \frac{12}{\alpha + 2} + \frac{9}{\alpha + 3} \right)$$

$$C_{41} = 1 + 2r \left(\frac{1}{\alpha + 1} - \frac{5}{\alpha + 2} + \frac{6}{\alpha + 3} \right)$$

$$C_{42} = 1 + 2r \left(\frac{2}{\alpha + 1} - \frac{9}{\alpha + 2} + \frac{9}{\alpha + 3} \right)$$

$$C_{44} = 1 + r \left(\frac{1}{\alpha + 1} - \frac{6}{\alpha + 2} + \frac{9}{\alpha + 3} \right)$$

Dans le cas le plus général où la poutre est orientée arbitrairement , la matrice de rigidité dans le repère global peut être déterminée en utilisant la procédure de transformation de coordonnées exposé ci-dessus et décrite par l'équation (VI .53). Dans ce cas, les coefficients de rigidité correspondants aux déplacements axiaux sont dépendants de l'aire de la section et doivent tenir compte de la non constance de la section.

La variation de la section est assumée par la relation qui vient :

$$A(x) = A_0 [1 + S \times (x / L)^\beta] \tag{VI.62}$$

où A_0 : l'aire de la section au nœud (1) et S et β sont des paramètres géométriques.

Enfin, on note que les paramètres α et β expriment la conicité de la structure. Quant aux paramètres r et s , ils sont exprimés par les relations $(I_1 - I_0) / I_0$ et $(A_1 - A_0) / A_0$, respectivement.

REMARQUE

L'analyse dynamique de la poutre, ainsi que l'étude du flambage ne feront pas l'objet de détails dans cette étude. Néanmoins, pour la raison de leur prise en considération par le programme ADSMEF, on donne directement les matrices masses et incrémentale qui ont été utilisées par le programme.

- Matrice masse de la poutre : Le calcul de cette matrice ne sera pas détaillé, car la procédure à suivre pour son obtention a été formulée précédemment dans le cas d'une barre. On obtient après calcul la forme suivante de la matrice masse de la poutre exprimée dans le repère globale avec prise en compte des vibrations axiales et transversales (voir Référence [4])

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156\mu^2 & & & & & & & & \\ -156\lambda\mu & 156\lambda^2 & & & & & & & \\ -22L\mu & 22L\mu & 4L^2 & & & & & & \\ 54\mu & -54\lambda\mu & -13L\mu & 156\mu^2 & & & & & \\ -54\lambda\mu & 54\lambda^2 & 13L\mu & -156\lambda\mu & 156\lambda^2 & & & & \\ 13L\mu & -13L\lambda & -3L^2 & 22L\mu & -22L\lambda & 4L^2 & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Symétrique} \\ \left(\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix} \right) \end{matrix} \tag{VI.63}$$

- Matrice incrémentale : cette matrice est exprimée dans le repère local (voir Référence [4]).

$$[N] = \frac{P}{10} \begin{bmatrix} \frac{12}{L} & 1 & -\frac{12}{L} & 1 \\ 1 & \frac{4L}{3} & -1 & -\frac{L}{3} \\ -\frac{12}{L} & -1 & \frac{12}{L} & -1 \\ 1 & -\frac{3}{L} & -1 & \frac{4L}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left(\begin{matrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix} \right) \end{matrix} \tag{VI.64}$$

avec : P est la pression critique appliquée.

III – ELEMENT PLAQUE

Une plaque est un solide élastique dont une dimension selon l'épaisseur est petite en comparaison des deux autres, et qui comporte généralement un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur. Par convention la surface moyenne sera le plan (x, y) et l'axe oz correspond à l'axe transverse selon l'épaisseur.

III – 1 – RAPPEL DES THEOREMES FONDAMENTAUX

a) Equation d'équilibre en deux dimensions :

Les contraintes sont définies en fonction d'une force ΔF appliquée sur une aire ΔA :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{VI.65}$$

dans le cas bidimensionnel, toutes les contraintes suivant l'axe z sont nulles, d'où :

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \tag{VI.66}$$

l'équation d'équilibre est donnée par la formule suivante :

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{yx} dx = 0 \tag{VI.67}$$

en considérant les restrictions citées auparavant l'équation d'équilibre sous forme finale suivant l'axe x sera :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \tag{VI.68}$$

de manière similaire, l'équation d'équilibre dans la direction y sera :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{VI.69}$$

b) Relation déformation – déplacement en bidimensionnel :

La relation déformation – déplacement dans ce cas est définie par les termes :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{VI.70}$$

Les autres termes étant nuls.

c) Relation contrainte – déformation

• contrainte plane :

A partir de la loi de Hooke et en considérant les restrictions de l'équation (VI .66), on aboutit aux relations contraintes – déformations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \tag{VI .71}$$

Avec : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

• Déformation plane :

Dans ce cas de figure, toutes les déformations dans le sens de l'axe z valent zéro :

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{VI .72}$$

En se basant sur la loi de Hooke et les conditions de l'équation (VI .72) ont aboutit aux relations contraintes – déformations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \varepsilon_y + \nu \varepsilon_x] \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \tag{VI .73}$$

d) Energie de déformation :

L'énergie de déformation en trois dimensions est exprimée par :

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dv \tag{VI .74}$$

dans le cas de contraintes planes : $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, l'équation (VI .74) devient :

$$U = \int_V \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 \right] dv \tag{VI .75}$$

ou encore , en utilisant les équations (VI .70) et (VI .71) :

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] t dA \tag{VI .76}$$

III – 2 – ELEMENTS POUR L'ANALYSE STATIQUE D'UNE PLAQUE

III – 2 – 1 – L'ELEMENT RECTANGULAIRE A HUIT DEGRES DE LIBERTES

Il est plus convenable de formuler un élément rectangulaire que d'autres formes, parce que cet élément assure un parallélisme entre le repère de coordonnées cartésiennes et le repère de coordonnées locales. Un élément rectangulaire en déformation plane est illustré par la figure (VI.7), cet élément est d'une longueur a, largeur b et d'épaisseur constante t.

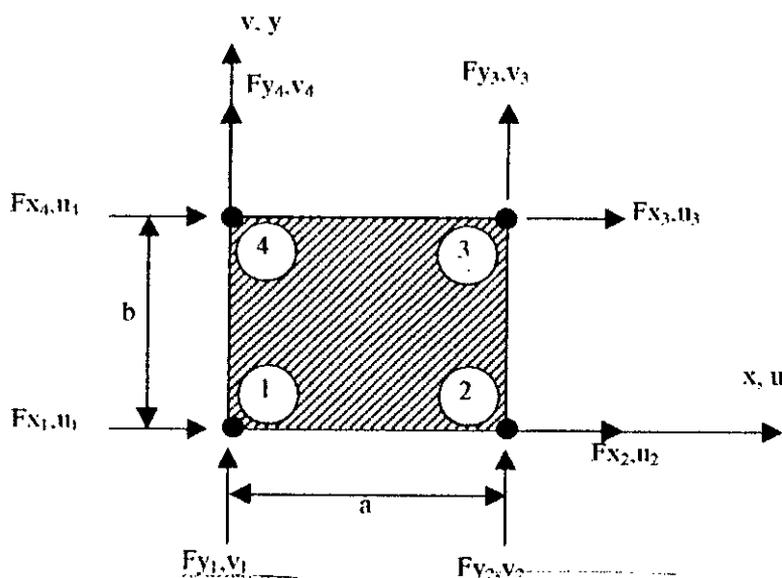


Fig.VI.7 élément rectangulaire à huit d.d.l. en contraintes planes ou déformations planes

Chaque nœud comporte deux degrés de libertés; les déplacements u et v dans les directions x et y respectivement, chaque nœud peut être sollicité par deux forces F_x et F_y dans les directions x et y respectivement.

A. Fonctions de déplacement:

Les fonctions d'interpolation pour les déplacements u et v sont assumées par la forme simple suivante:

$$\begin{cases} u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy \\ v(x, y) = c_5 + c_6 x + c_7 y + c_8 xy \end{cases} \quad (VI.77)$$

Pour déterminer les constantes c_i, on applique les conditions initiales sur les déplacements nodaux suivantes:

$$\begin{cases} u = u_1 & \text{et } v = v_1 & \text{à } (0, 0) \\ u = u_2 & \text{et } v = v_2 & \text{à } (a, 0) \\ u = u_3 & \text{et } v = v_3 & \text{à } (a, b) \\ u = u_4 & \text{et } v = v_4 & \text{à } (0, b) \end{cases} \quad (\text{VI.78})$$

après application des conditions (VI.78) dans l'équation (VI.77) et arangement des termes de l'équation, on obtient les fonctions de déplacement suivantes :

$$\begin{cases} u(x, y) = f_1(x, y) u_1 + f_2(x, y) u_2 + f_3(x, y) u_3 + f_4(x, y) u_4 \\ v(x, y) = f_5(x, y) v_1 + f_6(x, y) v_2 + f_7(x, y) v_3 + f_8(x, y) v_4 \end{cases} \quad (\text{VI.79})$$

où les quatres fonctions $f_i(x, y)$, dites *fonctions de forme*, exprimées explicitement :

$$\begin{cases} f_1(x, y) = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b}) \\ f_2(x, y) = \frac{x}{a}(1 - \frac{y}{b}) \\ f_3(x, y) = \frac{xy}{ab} \\ f_4(x, y) = (1 - \frac{x}{a})\frac{y}{b} \end{cases} \quad (\text{VI.80})$$

l'examination des relations (VI.79) et (VI.80) nous renseigne que la distribution des déplacements u et v est liniaire le long d'un côté quelconque et elle ne depend que des déplacements des deux nœuds de connexion. Ce qui nous permet de déduire que la compatibilité des déplacements aux frontières est satisfaite.

B. Relations déformations – déplacements :

En situation de contraintes planes, l'équation (VI.70) est considérée. l'incorporation de l'équation (VI.80) dans l'équation (VI.70) nous permet d'aboutir à la formulation ci – après :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b}) & 0 & \frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b}) & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b}(1 - \frac{x}{a}) & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b}(1 - \frac{x}{a}) \\ -\frac{1}{b}(1 - \frac{x}{a}) & -\frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b}) & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b}) & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b}(1 - \frac{x}{a}) & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.81})$$

ou symboliquement:

$$[\epsilon] = [A][q] \quad (\text{VI.81a})$$

C. Relations déformations – contraintes :

La relation déformation-contrainte dans ce cas est exprimée de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.82a})$$

or, dans le cas de déformation plane elle est donnée par:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.82b})$$

symboliquement les équations (VI.82a) et (VI.82b) sont écrites:

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \quad (\text{VI.83})$$

D. Equations de rigidité :

Les éléments de rigidité peuvent être établis par application du théorème de Castigliano comme décrit précédemment dans le cas d'une barre ou d'une poutre. L'équation intégrale de l'énergie de déformation est de la forme ci - après :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^t [\varepsilon]^T \cdot [\sigma] dz dy dx \quad (\text{VI.84})$$

en transposant l'équation (VI.81a) on aura :

$$[\varepsilon]^T = [q]^T [A]^T \quad (\text{VI.85})$$

a partir des équations (VI.83) et (VI.81a) ;

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] = [C][A][q] \quad (\text{VI.86})$$

Substituons l'équation (VI.86) et l'équation (VI.85) dans l'équation (VI.84) et assumons que l'épaisseur t est constante :

$$U = \frac{t}{2} [q]^T \left[\int_0^b \int_0^a [A]^T \cdot [C][A] dx dy \right] [q] \quad (\text{VI.87})$$

le théorème de Castigliano nous permet d'écrire, finalement :

$$[K] = t \iint_{\text{aire}} [A]^T [C][A] dx dy \quad (\text{VI.88})$$

le développement de la relation (VI.88) nous permet d'identifier les termes de la matrice de rigidité [K] tel que :

A. Fonctions de déplacement :

Un élément triangulaire typique est illustré par la figure (VI .8). Cet élément est composé de trois nœuds i, j, k. Les coordonnées de ces nœuds sont : (0, 0), (a_j, b_j), (a_k, b_k) respectivement. Les déplacements aux nœuds sont : (u_i, v_i), (u_j, v_j), (u_k, v_k) respectivement. Ces déplacements sont basés sur l'assomption linéaire, et ils sont décrits par les fonctions linéaires suivantes :

$$\begin{cases} u(x, y) = u_i + c_1 x + c_2 y \\ v(x, y) = v_i + c_3 x + c_4 y \end{cases} \quad (VI .90)$$

les constantes C_i sont à déterminées à partir des conditions initiales sur les déplacement aux nœuds suivantes :

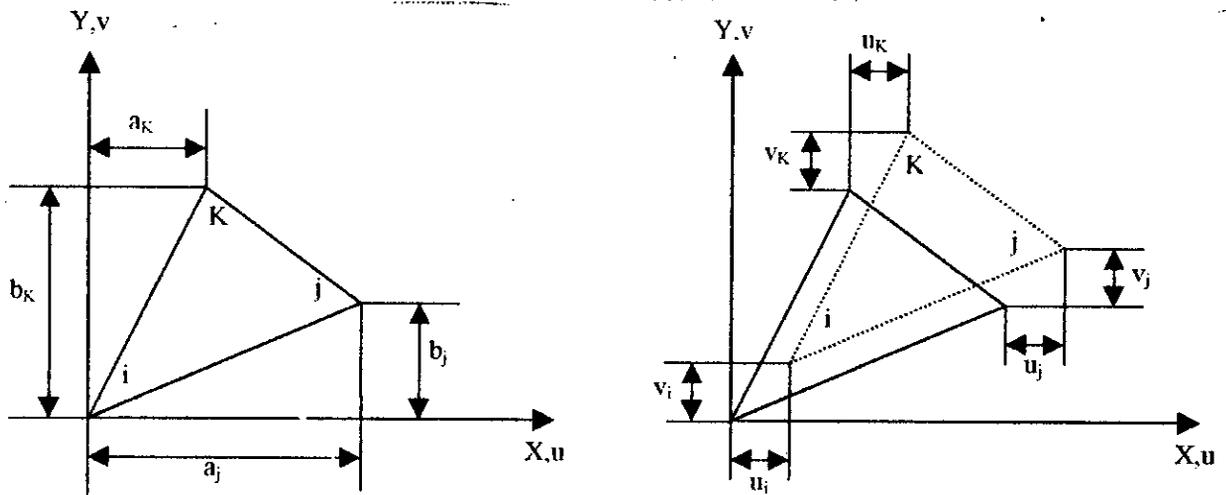


Fig. VI .8. *Élément triangulaire en contrainte ou déformation plane*

Au nœud j : $\begin{cases} x = a_j \\ y = b_j \end{cases}$ et $\begin{cases} u_j = u_i + c_1 a_j + c_2 b_j \\ v_j = v_i + c_3 a_j + c_4 b_j \end{cases}$ (VI .91a)

Au nœud k : $\begin{cases} x = a_k \\ y = b_k \end{cases}$ et $\begin{cases} u_k = u_i + c_1 a_k + c_2 b_k \\ v_k = v_i + c_3 a_k + c_4 b_k \end{cases}$ (VI .91b)

La résolution du système (VI .91) donne :

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_j b_k - a_k b_j} \begin{bmatrix} b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j & 0 \\ a_k - b_j & 0 & -a_k & 0 & a_j & 0 \\ 0 & b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j \\ 0 & a_k - b_j & 0 & -a_k & 0 & a_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (VI .92)$$

B. Equation déformation – déplacement :

Les trois composantes du vecteur contrainte correspondant à l'élément triangulaire, sont à déterminer à partir des dérivées de l'équation (VI .90) comme indiqué ci – après :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = c_1 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = c_4 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c_2 + c_3 \end{aligned} \tag{VI .93}$$

si on combine les équations (VI .93) avec (VI .92) , les trois termes des contraintes sont déterminés terme à terme en fonction des déplacements nodaux comme suit :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_j b_k - a_k b_j} \begin{bmatrix} b_j - b_k & 0 & b_k & 0 & -b_j & 0 \\ 0 & a_k - a_j & 0 & -a_k & 0 & a_j \\ a_k - a_j & b_j - b_k & -a_k & b_k & a_j & -b_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \tag{VI .94}$$

ou symboliquement :
$$[\epsilon] = [A][q] \tag{VI .95}$$

C. Equation contrainte – déformation :

Pour un élément de matériau anisotrope, la résultante contrainte déformation est de forme générale :

$$[\sigma] = [C][\epsilon] \tag{VI .96}$$

ou encore, en combinant l'équation (VI .95) avec l'équation (VI .96)

$$[\sigma] = [C][A][q] \tag{VI .97}$$

les termes C_{ij} de la matrice [C] ont été définis dans l'équation (VI .82).

D. Equation de rigidité :

On a vu précédemment que la matrice rigidité peut être obtenue à partir de la relation (VI .88) tel que :

$$[K] = \iint_{\text{aire}} t [A]^T [C] [A] dx dy$$

puisque les matrices [C] et [A] dans ce cas sont constantes , alors on écrira [K] simplement :

$$[K] = t [A]^T [C] [A] (\text{Aire}) \tag{VI .98}$$

Avec :

$$(\text{Aire}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix} \quad (\text{VI.99})$$

(Aire) : aire du triangle.

III – 3 – ÉLÉMENTS POUR L'ANALYSE DE LA PLAQUE FLEXIONNELLE

III – 3 – 1 – THÉORIES DE PLAQUE EN FLEXION

Les théories des plaques reposent sur les hypothèses suivantes :

- H1: les contraintes normales σ_{22} sont négligeable par rapport aux autres composantes de contrainte : $\sigma_{22} \cong 0$
- H2: les pentes de la surface moyenne après déformation sont supposées petites par rapport à l'unité.
- H3: on régle les contraintes dans la surface moyenne (membrane) induites par les déformations transverses (flexion).
- H4: la construction et les matériaux de la plaque sont tels que les phénomènes de membrane et de flexion sont découplés.
- H5 : les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation .

Dans ce qui suit, nous considérerons le cas d'une plaque mince avec des petites déformations.

III – 3 – 2 – ÉLÉMENT RECTANGULAIRE À SEIZE D.D.L.

A. Fonction de déplacement

L'élément rectangulaire à seize degrés de liberté est caractérisé par sa longueur a , sa largeur b , et son épaisseur h . Considérons que l'origine du repère est au nœud 1, et que chaque nœud assure quatre degrés de liberté ; la déflection w , la rotation dans la direction x w_x , la rotation dans la direction y w_y , et la torsion $\delta^2 w / \delta x \delta y$.

La fonction de déplacement pour cet élément est d'ordre cubique :

$$w(x,y) = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)(b_1 + b_2 y + b_3 y^2 + b_4 y^3) \quad (\text{VI.100})$$

ou encore :

$$w(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 x y + c_6 y^2 + c_7 x^3 + c_8 x^2 y + c_9 x y^2 + c_{10} y^3 + c_{11} x^3 y + c_{12} x^2 y^2 + c_{13} x y^3 + c_{14} x^3 y^2 + c_{15} x^2 y^3 + c_{16} x^3 y^3 \quad (\text{VI.100a})$$

les seize constantes c_i , seront obtenues à partir des conditions aux limites sur les seize d.d.l.

Suite à la détermination des constantes C_i ($i = 1,16$) à partir des conditions aux limites et après arrangement de l'équation (VI.100a) la nouvelle écriture de la fonction de déplacement $w(x,y)$ est :

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{16} N_i(x,y) q_i \quad (VI.101)$$

où :

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= f_1(x) f_1(y) & ; & & N_2(x,y) &= f_1(x) f_3(y) & ; & & N_3(x,y) &= f_3(x) f_3(y) \\ N_4(x,y) &= f_3(x) f_1(y) & ; & & N_5(x,y) &= f_2(x) f_1(y) & ; & & N_6(x,y) &= f_2(x) f_3(y) \\ N_7(x,y) &= f_3(x) f_3(y) & ; & & N_8(x,y) &= f_4(x) f_1(y) & ; & & N_9(x,y) &= f_1(x) f_2(y) \\ N_{10}(x,y) &= f_1(x) f_4(y) & ; & & N_{11}(x,y) &= f_3(x) f_4(y) & ; & & N_{12}(x,y) &= f_3(x) f_2(y) \\ N_{13}(x,y) &= f_2(x) f_2(y) & ; & & N_{14}(x,y) &= f_2(x) f_4(y) & ; & & N_{14}(x,y) &= f_4(x) f_4(y) \\ N_{16}(x,y) &= f_4(x) f_2(y) & ; & & & & & & & \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 \\ f_2(x) &= 3\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 \\ f_3(x) &= x\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 \\ f_4(x) &= x\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{x}{a}\right] \end{aligned} \quad (VI.102)$$

et : $[q] = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_{x1} \ w_{x2} \ w_{x3} \ w_{x4} \ w_{y1} \ w_{y2} \ w_{y3} \ w_{y4} \ w_{xy1} \ w_{xy2} \ w_{xy3} \ w_{xy4}]$

les fonctions $f_i(y)$ sont obtenues en remplaçant x par y et a par b dans les fonctions $f_i(x)$.

B. Equation de rigidité

Pour déterminer la matrice de rigidité, on applique le théorème de Castigliano. Finalement, on aura la formule indicielle de la matrice de rigidité ci-dessous :

$$\begin{aligned} K_{ij} &= D \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\delta^2 f_i}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 f_j}{\delta x^2}\right) + \left(\frac{\delta^2 f_i}{\delta y^2}\right)\left(\frac{\delta^2 f_j}{\delta y^2}\right) + v \left[\left(\frac{\delta^2 f_i}{\delta x^2}\right)\left(\frac{\delta^2 f_j}{\delta y^2}\right) + \left(\frac{\delta^2 f_i}{\delta y^2}\right)\left(\frac{\delta^2 f_j}{\delta x^2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + 2(1-v) \left(\frac{\delta^2 f_i}{\delta x \delta y}\right)\left(\frac{\delta^2 f_j}{\delta x \delta y}\right) \right] dx dy \quad (VI.103) \end{aligned}$$

avec $D = \frac{hE}{(1-\nu^2)}$

vu la grandeur de la taille de cette matrice , on fera l'impatte sur sa forme explicite.

III – 3 – 3 – ELEMENT TRIANGULAIRE A NEUF D.D.L.

En chaque nœud de l'élément triangulaire représenté dans la figure (VI .9), le déplacement transversale w et les rotations autour des axes x et y notées w_x et w_y , sont considérés comme étant les degrés de liberté. En somme cet élément assure neuf degrés liberté.

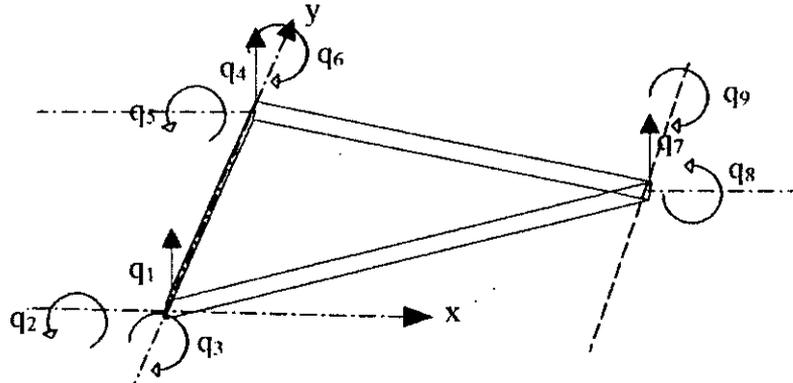


Figure (VI .9) : Elément triangulaire à neuf d.d.l.

A. Fonction de déplacement

Le polynôme caractéristique de la fonction déplacement doit contenir neuf constantes, le mode de déplacement est décrit par :

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + y^2 x) + \alpha_9 y^3 = [n] \{\alpha\} \tag{VI .104}$$

avec : $[n] = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ (x^2 y + y^2 x) \ y^3]$ (VI .105)

et $[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_9 \end{bmatrix}$ (VI .106)

Les constantes sont déterminées en fonction des conditions nodales :

$$\left. \begin{aligned} w(x,y) = q_1, \frac{\delta w}{\delta y}(x,y) = q_2, -\frac{\delta w}{\delta x}(x,y) = q_3 \quad \text{à} \quad (x_1, y_1) = (0,0) \\ w(x,y) = q_4, \frac{\delta w}{\delta y}(x,y) = q_5, -\frac{\delta w}{\delta x}(x,y) = q_6 \quad \text{à} \quad (x_2, y_2) = (0, y_2) \\ w(x,y) = q_7, \frac{\delta w}{\delta y}(x,y) = q_8, -\frac{\delta w}{\delta x}(x,y) = q_9 \quad \text{à} \quad (x_3, y_3) = (x_3, y_3) \end{aligned} \right\} \tag{VI .107}$$

on note que l'axe y local coïncide avec le côté relié par les nœuds 1 et 2 et l'axe x est perpendiculaire à l'axe y. Les nœuds locaux 1, 2 et 3, sont notés i, j, k, dans le système global. à partir de l'équation (VI.107) le système d'équations devient :

$$[q] = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_6 \end{bmatrix} = [A][\alpha] \tag{VI.108}$$

les déformations peuvent être exprimées par la formulation suivante :

$$[\varepsilon] = [De][\alpha] = [B][q] \tag{VI.109}$$

avec : $[D_e] = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4(x+y) & 0 \end{bmatrix}$ (VI.110)

d'après l'équation (VI.109), on tire $[B] = [D_e][A]^{-1}$ (VI.111)

avec : $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_2 & 0 & 0 & y_2^2 & 0 & 0 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_2 & 0 & 0 & 3y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 & -y_2^2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3^3 & (x_3^2 y_3 + x_3 y_3^2) & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & (2x_3 y_3 + x_3^2) & 3y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -(y_3^2 + 2x_3 y_3) & 0 \end{bmatrix}$ (VI.112)

la matrice de rigidité dans le système local de coordonnées est donnée sous sa forme générale par :

$$[K] = \iiint_v [B]^T [D][B] dv \tag{VI.113}$$

où [D] est la matrice de comportement.

en remplaçant [B] dans l'équation (VI.113) par son expression de l'équation (VI.111),

on trouvera :

On précise que la matrice $[A]$ doit être calculée séparément pour chaque élément de la structure lors des applications .

III – 4 – ELEMENTS POUR L'ANALYSE DYNAMIQUE

III – 4 – 1 – ELEMENT RECTANGULAIRE A SEIZE D.D.L.

Un élément rectangulaire à seize degrés de liberté est composé de quatre nœuds . chaque nœud assume quatre degrés de liberté ; une déflexion w , une rotation suivant l'axe x , une rotation suivant l'axe y , et une torsion dans le plan (x , y) . On note la longueur de l'élément a , sa largeur b , et son épaisseur h .

La formulation de la matrice masse pour les vibrations libres à fait l'objet d'étude pour les cas d'éléments barre et poutre. L'extension de cette analyse pour l'élément plaque rectangulaire sera discutée dans ce qui suit :

La matrice masse

Pour le calcul des termes de la matrice masse , nous procédons par la méthode des masses consistantes . Nous utilisons la fonction de déplacement citée par l'équation (VI .101) et l'équation de Lagrange.

L'énergie cinétique pour la plaque en vibration avec de petites déflexions est donnée selon la relation suivante :

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_0^a \int_0^b (\dot{w})^2 dx dy \quad (VI .117)$$

où : ρ : densité

h : épaisseur de la plaque

l'équation du mouvement est régie par l'équation de Lagrange de la forme ci-après :

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (VI .118)$$

où U : énergie potentielle

on ne considérera que les vibrations libres, donc $F_i = 0$, d'où l'équation de Lagrange équivalente

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (VI .119)$$

le terme $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ correspond à la rigidité établie précédemment par l'équation (VI .103) , et le

second terme de l'équation ; $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$ correspond à la matrice masse.

en suivant les étapes décrites pour les précédents éléments , on aboutit à la forme indicielle finale de la matrice masse qui suit :

$$m_{ij} = \rho h \int_0^b \int_0^a f_i(x, y) f_j(x, y) dx dy \quad (VI .120)$$

où les fonctions de forme $f_i(x, y)$ et $f_j(x, y)$ données par la relation (VI .102)

III - 4 - 2 - ELEMENT TRIANGULAIRE A NEUF D.D.L.

On donne les expressions des fonctions de déplacements dans le repère local comme il vient :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} = [N_i][A]^{-1} \{q\} \quad (VI .121)$$

$$\text{où : } [N_i] = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 & -2xz & -yz & 0 & -3x^2z & -z(y^2 + 2xy) & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 & -xz & -2yz & 0 & -z(2xy + x^2) & -3y^2z \\ 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & (x^2y + xy^2) & y^3 \end{bmatrix} \quad (VI .122)$$

$$\text{on note le produit } [N] = [N_i][A]^{-1} \quad (VI .123)$$

la matrice [A] est donnée par la relation (VI .112) .

la fonction matricielle générale de la matrice masse est de la forme :

$$[M] = \iiint_V \rho [N]^T [N] dv \quad (VI .124)$$

$$\text{ou encore : } [M] = \iiint_V \rho ([A]^{-1})^T [N_i]^T [N_i] [A]^{-1} dv \quad (VI .125)$$

puisque l'épaisseur de la plaque est supposée constante , et que l'inertie due aux rotations est autour des axes x et y négligeable , on peut écrire le système (VI .125) comme :

$$[M] = \rho t ([A]^{-1})^T \left(\iint_A [N_i]^T [N_i] dx dy \right) [A]^{-1} \quad (VI .126)$$

à partir de l'expression (VI .126) , la matrice masse sous une forme plus simple est écrite comme suivant :

$$[M] = \rho t ([A]^t)^T \int \int \int_{\Delta} \begin{bmatrix} 1 \\ x & x^2 \\ y & xy & y^2 \\ x^2 & x^3 & x^2y & x^4 \\ y^2 & x^2y & xy^2 & x^3y & x^2y^2 \\ xy & xy^2 & y^3 & x^2y^2 & xy^3 & y^4 \\ x^3 & x^4 & x^3y & x^5 & x^4y & x^3y & x^6 \\ (x^2y + (x^2y^2 + (x^3y^3 + (x^3y^2 + (x^2y^2 + (x^4y^4 + (x^4y^2 + (x^2y^2 + \\ xy^2) & x^3y) & x^2y^2) & x^4y) & x^3y^2) & x^2y^3) & x^5y) & x^2y^2)^2 \\ y^3 & xy^3 & y^4 & x^2y^3 & xy^4 & y^5 & x^2y^3 & (x^2y^5 + x^3y^3) & y^6 \end{bmatrix} dx dy [A]^{-1} \quad (VI.127)$$

avec t est l'épaisseur de l'élément

les intégrales apparentes dans la relation ci – dessus peuvent être calculées en se basant sur les formules données par les relations (VI.116).

VI – ELEMENTS SOLIDES A TROIS DIMENSIONS

IV – 1 – INTRODUCTION

On se propose dans ce chapitre de montrer les éléments qui peuvent être utilisés pour la résolution des problèmes de corps solides . Les technique de calcul élémentaire exposées au chapitre précédent ont généralement été illustrées dans le cas de problème d'élasticité plane. On montre, dans ce chapitre, comment les techniques de calcul élémentaire exposées précédemment peuvent être utilisées dans le cas de problèmes d'élasticité à symétrie de révolution et dans le cas général des problèmes à trois dimensions.

IV – 2 - PPROBLEMES AXISYMETRIQUES

La résolution des problèmes axisymétriques revêt un très grand intérêt pratique, en particulier dans le domaine aérospatial ou les structures sont souvent de ce type. Nous considérons ici le cas de solides de révolution. Si le chargement est également axisymétrique, alors le problème à trois dimensions se ramène de façon évidente à un problème bidimensionnel fonction des deux coordonnées (r , z). Si le chargement est quelconque, on peut le décomposer en séries de fourrier suivant la coordonnée circonférentielle θ et étudier

séparément le comportement de la structure suivant chaque harmonique. On peut alors ramener le problème à la résolution d'une série de problèmes bidimensionnels.

IV-2-1- Equations de base

Dans le cas général, les équations déformations – déplacements de l'élasticité peuvent se mettre sous la forme suivante en coordonnées cylindriques (r,θ,z) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{z\theta} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \left(-\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \right) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{(VI.128)}$$

Ce sont ces relations qui doivent être utilisées dans le cas de chargements quelconques.

Dans le cas d'un chargement de révolution, la solution est complètement axisymétrique.

On a dans ce cas :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad v = 0 \quad \varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0$$

d'où les relations déformations - déplacements :

$$\varepsilon = D \cdot u \quad \text{ou bien :} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad \text{(VI.129)}$$

Si le matériau est isotrope, les équations de Hooke peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma = C \cdot \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & & & \\ \nu & (1-\nu) & & \\ \nu & \nu & (1-\nu) & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{rz} \end{bmatrix} \quad (VI.130)$$

Les principes de calcul des éléments qui ont été vus au cours des chapitres précédents s'appliquent directement. La matrice de rigidité s'exprime sous la forme :

$$K = \int_{V'} B^T C B dv = \int_{S'} \int_{z'} B^T C B 2\pi r dr dz \quad (VI.131)$$

IV - 2 - 2 - Élément axisymétrique à trois nœuds

Nous allons présenter ci-après les principes de calcul de l'élément axisymétrique à trois nœuds pour la résolution des problèmes axisymétriques à chargements axisymétriques. Les considérations peuvent être étendues au cas d'un chargement quelconque avec traitement en séries de Fourier suivant θ .

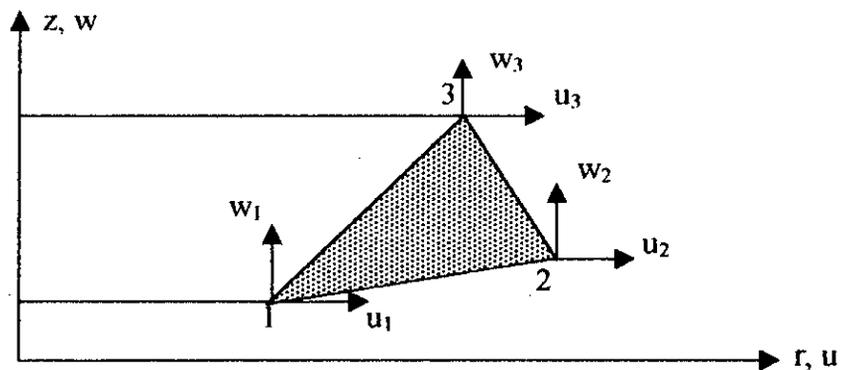


Figure VI - 10 : Triangle axisymétrique à trois nœuds

Le calcul du triangle à trois nœuds pour les problèmes axisymétriques s'effectue facilement en utilisant les méthodes exposées au chapitre IV.

L'approximation du champ des déplacements par un polynôme linéaire en r et z conduit à la forme suivante d'interpolation :

$$u(r,z) = \sum_{i=1}^3 L_i(r,z) u_i$$

$$w(r,z) = \sum_{i=1}^3 L_i(r,z) w_i \quad (VI.132)$$

avec
$$L_i(r, z) = \frac{1}{2A} (\alpha_i + b_i r + c_i z)$$

et
$$\left. \begin{aligned} a_i &= r_j z_k - r_k z_j \\ b_i &= z_j - z_k \\ c_i &= r_k - r_j \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i &= 1, 2, 3 \\ j &= 2, 3, 1 \\ k &= 3, 1, 2 \end{aligned} \quad (VI.133)$$

On en déduit facilement la matrice d'interpolation des déformations. La relation $\epsilon = B \cdot q$, s'écrit en effet sous forme développée en utilisant les relations (VI.129) et (VI.133) :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ 2\epsilon_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta u}{\delta r} \\ \frac{w}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & (\frac{a_1}{r} + b_1 + C_1 + \frac{z}{r}) & 0 & (\frac{a_2}{r} + b_2 + C_2 + \frac{z}{r}) & 0 & (\frac{a_3}{r} + b_3 + C_3 + \frac{z}{r}) \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 \\ C_1 & b_1 & C_2 & b_2 & C_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_2 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{bmatrix} \quad (VI.134)$$

la matrice de rigidité peut alors être obtenue d'après la relation (VI.131) :

$$K = \int \int_{s'} B^T C B 2\pi r dr dz$$

l'intégration analytique des termes de la matrice de rigidité est facile à effectuer. Cependant, elle entraîne de sérieuses difficultés pour les éléments dont les nœuds se trouvent sur l'axe de révolution ou à son voisinage.

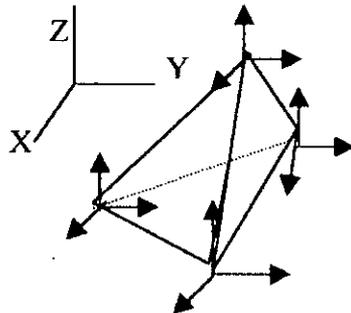
En effet, l'intégration analytique fait apparaître des termes en $\ln \frac{r_i}{r_j}$ et $\frac{1}{(r_i - r_j)}$ qui deviennent infinis lorsqu'un des nœuds se trouve sur l'axe.

Ces difficultés apparaissent également dans le calcul de certaines déformations ($\epsilon_\theta = \frac{w}{r}$) au voisinage de l'axe. Dans ce cas on peut écarter les nœuds sur l'axe d'une distance très faible. Cependant, l'intégration explicite constitue un choix maladroit et il est bien préférable de calculer le matrices de rigidité par intégration numérique ; en effet, les difficultés d'intégration au voisinage de l'axe disparaissent.

IV – 3 – TETRAEDRES

Le tétraèdre est l'élément tridimensionnel le plus simple, il correspond au triangle à trois nœuds en élasticité plane.

Il est basé sur l'approximation suivante du champ des déplacements :



$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z \\ w &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{aligned}$$

Figure VI. 11 : *Tétraèdre à champ linéaire*

Le comportement de l'élément est caractérisé par 12 d.d.l. qui correspondent ici à trois composantes de déplacement en ses quatre nœuds.

La matrice d'interpolation peut être déterminée soit en utilisant la méthode indirecte, soit directement par extension des coordonnées naturelles du triangle au tétraèdre. On obtient les résultats suivants :

$$u = \sum_{i=1}^4 L_i(x, y, z) u_i \quad v = \sum_{i=1}^4 L_i(x, y, z) v_i \quad w = \sum_{i=1}^4 L_i(x, y, z) w_i \quad (VI.135)$$

où L_i sont les coordonnées de volume du tétraèdre. On peut montrer les relations suivantes :

$$L_i(x, y, z) = \frac{1}{6V} [a_i + b_i x + c_i y + d_i z] \quad (VI.136)$$

avec

$$V = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}$$

$$a_i = \det \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} \quad b_i = -\det \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{bmatrix} \quad (VI.137)$$

$$c_i = \det \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{bmatrix} \qquad d_i = -\det \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi par permutation circulaire les 16 constantes (a_i, b_i, c_i, d_i) nécessaire pour exprimer les fonctions d'interpolation. On en déduit la matrice d'interpolation des déformations. Les relations déformations – déplacement s'écrivent ici sous la forme suivante :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \qquad \text{(VI.138)}$$

D'où la relation matricielle :

$$[\varepsilon] = B \cdot q = [B_1, B_2, B_3, B_4] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \qquad \text{(VI.139)}$$

avec :

$$q_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} L_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & L_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & L_{i,z} \\ L_{i,y} & L_{i,x} & 0 \\ 0 & L_{i,z} & L_{i,y} \\ L_{i,z} & 0 & L_{i,x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix} ; i = 1 \dots 4 \qquad \text{(VI.140)}$$

Enfin, rappelons qu'en élasticité 3D, les équations d'élasticité pour un matériau isotrope s'écrivent sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{bmatrix} \quad (VI.141)$$

SYM.

Le champ de déformation étant constant dans l'élément, on calcule la matrice de rigidité d'après la relation :

$$K = \int \int \int_v B^T C B \, dv = V B^T C B \quad (VI.142)$$

Notons, enfin, que le tétraèdre à champ linéaire a le même inconvénient majeur que le triangle à champ linéaire : dans le cas gradients de déformation significatifs, il nécessite des maillages très serrés pour l'obtention d'une précision satisfaisante. On préfère donc généralement employer des éléments de tétraèdres d'ordre plus élevé.

IV - 4 - HEXAEDRES A HUIT NOEUDS

Il est possible de construire un hexaèdre isoparamétrique à huit nœuds par extension des principes de calcul du quadrilatère isoparamétrique à quatre nœuds. On utilisera donc un système de coordonnées naturelles (r,s,t) permettant de définir la géométrie de l'élément isoparamétrique par transformation d'un élément parent de forme simple (ici un cube de côté 2).

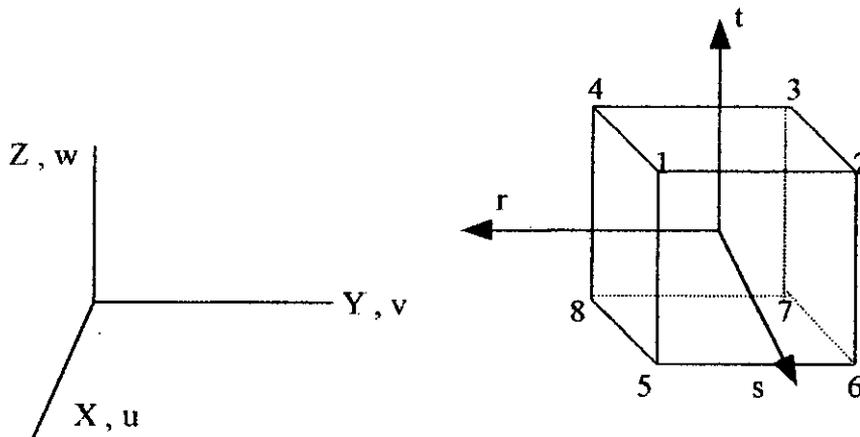


Figure VI. 12 : Hexaèdre isoparamétrique

L'élément est basé sur les relations suivantes :

Définition géométrique

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s,t) x_i \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s,t) y_i \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s,t) z_i \quad (\text{VI.143})$$

Champ des déplacements

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s,t) u_i \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s,t) v_i \quad w = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s,t) w_i \quad (\text{VI.144})$$

Les fonctions d'interpolations se déduisent du cas bidimensionnel. On a ici :

$$N_i(r,s,t) = \frac{1}{8} (1 + r r_i)(1 + s s_i)(1 + t t_i) \quad (\text{VI.145})$$

r_i , s_i et t_i prenant les valeurs +1 ou -1 suivant le nœud considéré.

Les caractéristiques élémentaires peuvent ainsi être obtenues en appliquant les techniques de calcul des éléments isoparamétriques.

Chapitre VII

PRESENTATION DU PROGRAMME

Chapitre VII

PRESENTATION DU PROGRAMME

I – INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous aborderons les étapes caractéristiques d'un programme qui met en œuvre la méthode des éléments finis sur un ordinateur. Tout d'abord nous définissons les différentes étapes du programme ADSMEF puis nous présenterons quelques-unes de ses applications.

La programmation efficace de la méthode des éléments finis requiert une bonne connaissance à la fois dans le domaine des éléments finis et dans le domaine de l'informatique ; en effet :

- Les programmes sont compliqués car ils doivent exécuter des opérations très diverses : organisation des données, intégration numérique, résolution des systèmes etc....
- La variation des problèmes nous force d'écrire des programmes qui répondent à de nombreux types de problèmes.
- Les quantités de données manipulées par un programme d'éléments finis peuvent être très importantes.

Dans les sections qui suivent nous décrivons différents aspects de l'architecture du logiciel ADSMEF et son mode d'exécution. Nous fournissons la liste des différents modules : acquisition des données, calcul des sollicitations réparties, résolution statique linéaire, résolution dynamique linéaire, calcul de valeurs et vecteurs propres, etc. Plusieurs applications de la méthode des éléments finis sont également incluses.

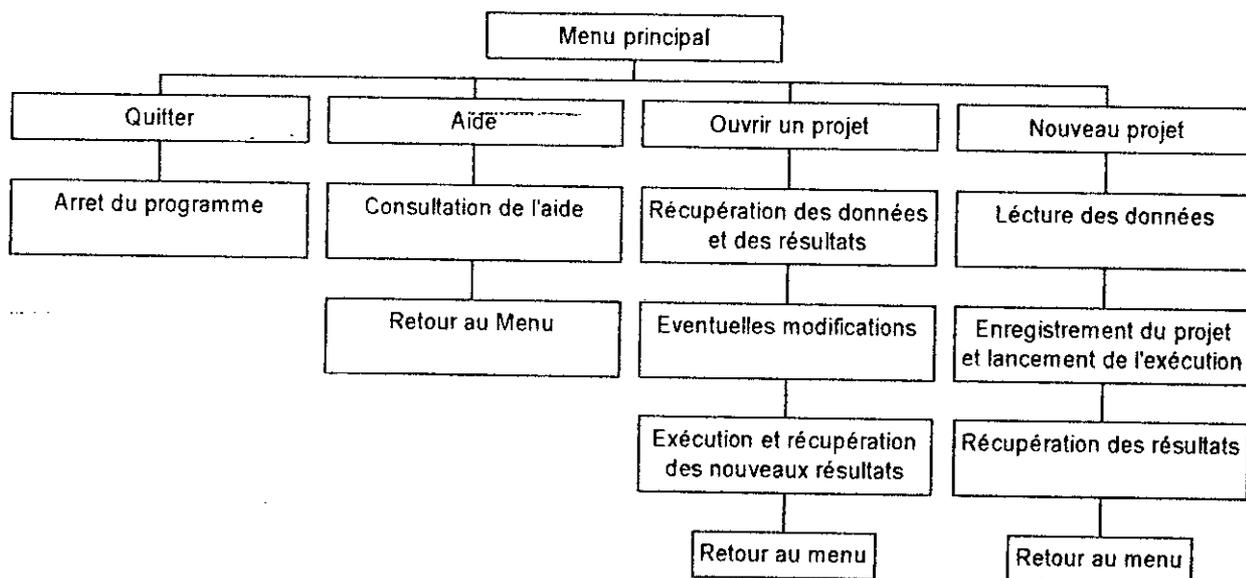
II – PROGRAMME ADSMEF

II – 1 – INTRODUCTION :

Nous présentons maintenant un programme appelé ADSMEF qui met en œuvre les techniques de calculs par la méthode des éléments finis. Il est écrit en combinaison de deux langages ; le langage fortran est utilisé pour la réalisation des différentes étapes de calcul, et le langage Delphi pour la réalisation des interfaces. Il prend en compte tous les types et cas de figure d'éléments décrits au chapitre VI.

II – 2 – ORGANISATION GENERALE :

Le programme principal est constitué d'un menu qui présente quatre variantes de choix : Nouveau projet, ouvrir un projet, consulter l'aide, et quitter le programme



II – 3 – ALLOCATION DES TABLES

L'allocation d'espace est effectuée dynamiquement et définie en cours d'exécution. Les dimensions des tables étant fonctions des paramètres des problèmes tel que le nombre d'éléments, type de description, conditions aux limites, etc, elles sont définies en fonction des paramètres sus – cités. Ce type d'allocation permet une meilleure gestion de la mémoire

II – 4 – DESCRIPTION DES TABLES FONCTIONNELLES

A. programme principal

le programme principal est composé d'un menu principal qui est, à son tour, composé de quatre parties :

- *Nouveau projet* : cette commande permet à l'utilisateur de créer un nouveau projet pour une nouvelle application si cette commande est sélectionnée, une feuille de saisie s'ouvre pour permettre à l'utilisateur d'enregistrer certaines propriétés de l'application qu'il souhaite exécuter tels que : nom du projet, nom des fichiers de données et de résultats, le chemin de l'élément, et le type d'élément à choisir parmi une liste préétablie. Ces informations sont nécessaires pour permettre une ouverture correcte et sans erreur du projet lors d'une probable réutilisation. Après confirmation des informations requises, par l'utilisateur, une nouvelle feuille est illustrée, elle concerne les données du problème et ces résultats. La sous feuille des résultats n'est pas accessible au départ car l'exécution n'est pas encore lancée.
- *Commande ouvrir* : cette commande permet la consultation d'un projet créé auparavant pour des modifications éventuelles. La sélection de cette commande provoque l'ouverture d'une table contenant tous les projets créés et enregistrés et leurs propriétés respectives. Si un projet quelconque est ouvert, les feuilles de données et résultats qui lui correspondent apparaissent à l'écran, à ce moment l'utilisateur peut introduire les modifications souhaitées et lancer l'exécution de nouveau.
- *Commande quitter* : cette commande est utilisée pour quitter le programme ADSMEF et revenir à l'environnement Windows.

B. Manipulation des données :

Le logiciel ADMEF inclut des blocs fonctionnels responsables de la lecture, l'écriture, la vérification, et l'organisation des données. La feuille des données est composée de tableaux et champs d'édition nécessaires pour des applications conformes aux cas présentés dans le chapitre IV. La disponibilité des tableaux et des champs est gérée selon le type d'élément considéré, par exemple, si on considère l'élément barre le champ du module de poisson, dans ce cas inutile, est rendu automatiquement indisponible.

Les données caractéristiques de chaque élément sont récupérées à partir des tableaux et champs d'édition par le programme et écrites dans deux fichiers d'une éventuelle ouverture du projet, et un fichier non typé nécessaire pour la lecture des données lors de l'opération de calcul. On fait remarquer que les fonctions de récupération et d'écriture des données saisies sont déclenchées par le clic du bouton Enregistre de la feuille des données.

On note que certaines erreurs de saisies sur les données sont détectables par le programme et aussitôt signalées et révoquées, notamment concernant la nature des données et leur grandeur. Par exemple, si l'utilisateur donne une valeur réelle dans la table des connectivités celle-ci est supprimée et un message d'erreur est affiché invitant l'utilisateur à réécrire la valeur ou encore si l'utilisateur introduit une valeur entière dans la même table des conductivités mais supérieure au nombre de nœuds total, cette valeur est également refusée et doit être réécrite.

La gestion des erreurs de données est toujours souhaitable pour éviter les erreurs d'exécution.

C. Calcul et exécution :

Le bloc d'exécution des opérations de calculs d'éléments finis se sert des tables construites par le bloc de lecture de donnée décrit précédemment. Le bloc d'exécution est un programme réalisé entièrement en langage FORTRAN et appelé MEFFOR. Il est appelé par le programme principal lorsque l'utilisateur actionne le bouton Calculer. Ce bouton est, par défaut, non fonctionnel pour éviter le risque de confusion lors de l'exécution et il n'est fonctionnel qu'après enregistrement des données via le bouton « Enregistrer ».

Le programme MEFFOR est composé d'un programme principal et de plusieurs sous-programmes, le programme principal récupère le type d'élément à étudier à partir du fichier de lecture créé lors de l'enregistrement des données puis fait appel au sous programme correspondant à l'élément (barre, poutre, plaque ...etc). Chaque sous programme fait appel à d'autres sous programmes ; un sous programme pour la lecture des données, un sous programme pour le calcul de la rigidité élémentaire, un sous programme d'assemblage, un sous programme de prise en compte des conditions aux limites, et un sous programme de résolution du système d'équations linéaires. Les sous programmes de prise en compte des conditions aux limites, d'assemblage, et le sous programme de résolution du système $\{ K U = F \}$ sont communs à tous les types d'éléments, par contre les autres sous programmes ne le sont pas. C'est à dire que chaque type d'élément est doté de ses propres sous

programme lecture de données , calcul de la rigidité , calcul des contraintes et/ou réactions. Cet algorithme a été adopté afin d'éviter l'encombrement des sous programmes et de réduire la complexité d'exécution engendrée par les blocs de tests.

Le programme MEFFOR crée un fichier non typé où seront enregistrés les résultats des opérations du calcul.

L'organisation du programme MEFFOR est illustrée par l'organigramme de la page suivante .

Les déferrantes blocs d'exécution présente des structures similaires puisqu'ils doivent tous :

- Construire des matrices et vecteurs élémentaires
- Construire des matrices et vecteurs élémentaires globaux par assemblage des vecteurs et matrices élémentaires.
- Résoudre des systèmes d'équations linéaires.
- Imprimer des résultats.

Seule la manière dont sont enchaînées ces opérations diffère d'un bloc à l'autre. La structure précédente est commune à tous ces blocs.

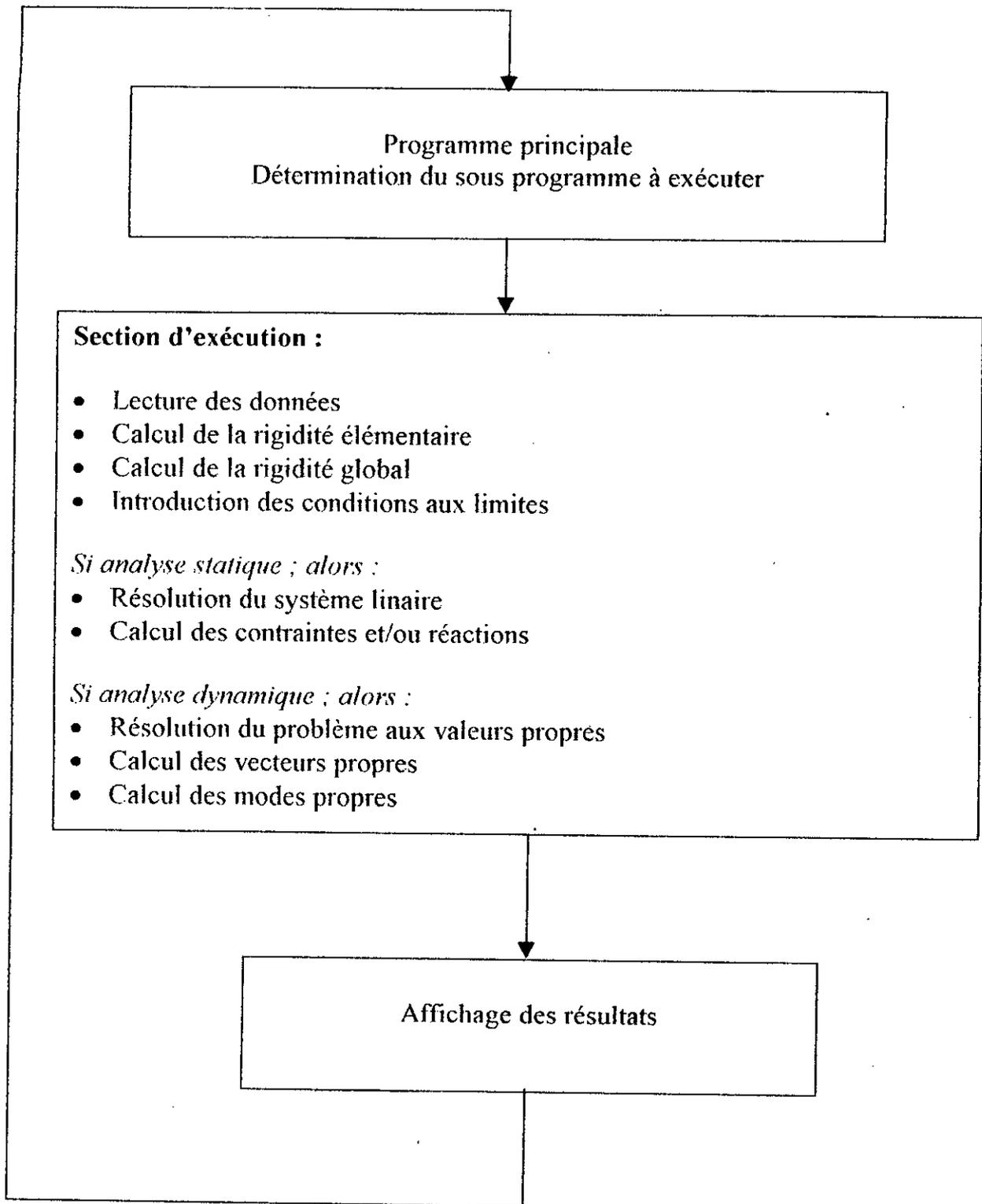
Les étapes de calcul des blocs d'exécution énumérées ci-dessus nécessitent l'adoption de certaines techniques et méthodes de calcul. Nous étalons ci-après les différentes techniques et méthodes de programmation adoptées par le programme MEFFOR.

Section de lecture des données :

Cette section lit les tables de donnée, les connectivités des éléments, les coordonnées des nœuds, le vecteur force, les conditions aux limites, les différents modules et paramètres.

Section de calcul de rigidité :

Le calcul de la rigidité élémentaire nécessite l'utilisation de l'intégration numérique. Les sous programmes de rigidité font appel à l'intégration numérique suivant la méthode de Gauss décrite précédemment. Cependant, dans le cas des rigidités à une dimension (barre, poutre, mixte) le calcul se fait son passage par l'intégration numérique vu que les matrices de rigidité sont données de manière directe en fonction des paramètres géométriques.



section assemblage :

Le sous programmes d'assemblage construisent les matrices globales en utilisant les matrices élémentaires suivant le procédé expliqué dans les sections précédentes.

Section conditions aux limites :

La technique utilisée pour prendre en compte les conditions aux limites consiste en la réduction de la matrice globale en éliminant les lignes et les colonnes correspondante aux d.d.l. fixes.

Section résolution du système linéaire :

Pour la résolution du système linéaire $K = [F]$ on a adopté la méthode de Gauss – Seidel .

D. Impression des résultats

Le programme principal récupère les résultats fournis par le programme MEFFOR à partir d'un fichier texte crée par ce dernier. Après leur récupération, ils seront aussitôt affichés sur la feuille des résultats et enregistrés également dans un autre fichier typé afin de les récupérer lors d'une éventuelle ouverture du projet par l'utilisateur.

Pour juger de la fiabilité du logiciel ADSMEF, nous mettrons en œuvre dans la section suivante quelques applications et on comparera les résultats obtenus par rapport à ceux données par les références.

III – APPLICATIONS DU PROGRAMME ADSMEF

Après avoir présente l'organisation générale des différentes parties du programme ADSMEF dans les paragraphes précédents, on s'intéressera dans cette section à sa fiabilité et sa performance. Pour cela, on traitera des exemples d'applications donnés par les références bibliographiques. Il s'agira ensuite, de comparer les résultats que l'on aura trouvés par rapport à celles données par les ouvrages de référence. Après cela, on pourra se prononcer sur le degré de performance du programme ADSMEF.

On précise enfin, que certains cas d'application du programme ne seront pas traités dans cette section pour indisponibilité d'exemple d'application. Donc, ces sections restent à vérifier à l'avenir et c'est ce que nous nous fixons comme perspectives au futur.

Application 1

La figure (VII .1) illustre une poutre sous des charges réparties linéairement le long de la longueur L.

On désire de calculer la déflexion et la rotation que subira le nœud libre 1. D'après la figure (VII .1) on voit bien que la poutre est encasté au nœud 2 , ce qui signifie que les déflexion et rotation en se nœud son nuls.

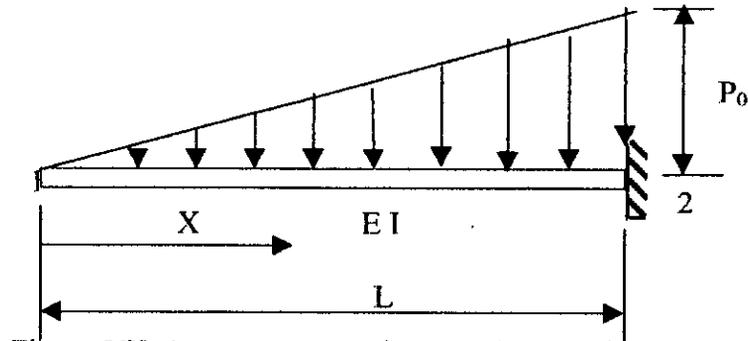


Figure VII .1 : poutre sous charges réparties linéairement

Le résultat analytique de cette analyse est le suivant :

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \frac{P_0 L^3}{EI} \begin{Bmatrix} -\frac{L}{30} \\ \frac{1}{24} \end{Bmatrix} \quad (\text{VII.1})$$

ce résultat est donné par la référence (1). Pour faciliter la comparaison des résultats que l'on obtiendra par le programme ADSMEF avec ceux donnés par la référence (1) , on pose les paramètres E , I , L , P₀ égaux à l'unité (= 1).

Le programme ADSMEF nous donne les résultats représenté dans le tableau suivant :

Nœud	V	θ
1	-3.333334E-02	4.166668E-02
2	0.000000E+00	0.000000E+00

En peut voir par comparaison que les valeurs données par la relation (VII .1) avec celles données par le tableau VII .1 coïncident parfaitement , ce qui nous permet de valider la partie du programme ADSMEF qui traite de cet élément.

Application 2 :

Une poutre à section variable est représenté par la figure (VII .2). Les paramètres de variation de la section sont $\alpha = 1$ et $r = 8$. On se propose de calculer les déplacements aux

nœuds 1 et 2 par le programme ADSMEF. les déplacements au nœuds 3 sont nuls vu que la structure est encadrée en ce nœud.

La solution exacte est donnée dans la référence (1) et elle est de la forme ci – après .

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{284} \begin{Bmatrix} 112 & 41L \\ -\frac{201}{L} & -59 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} \quad \text{avec :}$$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{EI_0} \begin{Bmatrix} -0.40864L \\ 0.36546 \end{Bmatrix} \quad \text{(VII.2)}$$

les résultats obtenus pour cette application par le programme ADSMEF sont dressés dans le tableau suivant :

Nœud	V	θ
1	-4.086351E-01	3.654609E-01
2	-1.083917E-01	2.132869E-01

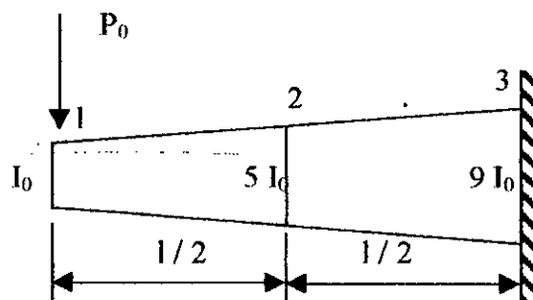


Figure VII.2. Poutre à section variable

Si l'on pose dans la relation (VII.2) les paramètres E, I₀, L, et P égaux à 1 comme supposé lors de l'exécution du programme ADSMEF on pourra remarquer que les résultats du programme sont conforme aux résultats analytiques. Ceci, nous

Application 3

Dans cette application nous considérons la structure illustrée par la figure (VII.3). Il est question ici de déterminer les deux fréquences propres de la structure. Les résultats analytiques auxquelles nous comparons les résultats numériques, données dans la référence 3

, sont les suivants : $\omega_1 = \frac{25.92}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$

et $\omega_2 = \frac{82}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$

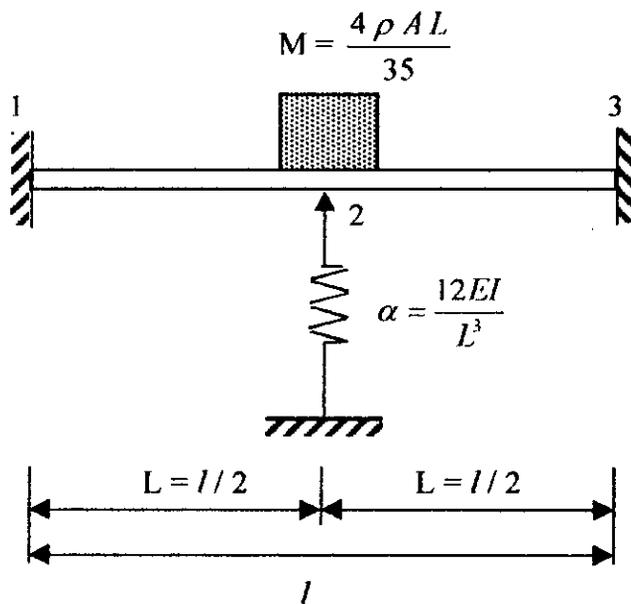


Figure VII.3 : Poutre en vibration avec l'effet d'une masse et d'un ressort

Pour faciliter la comparaison entre les résultats analytiques ci – dessus et les valeurs numériques ci – après , nous posons ,comme dans les applications précédentes, les paramètres E , I , A , l , et ρ égaux à 1. Les conditions aux limites sur cette structure sont : $v_1 = \theta_1 = v_3 = \theta_3 = 0$.

Les résultats à se problème que nous fourni le programme ADSMEF sont :

$$\omega_1 = .227359E+02$$

$$\omega_2 = .819756E+02$$

les modes propres sont :

mode 1	mode2
1.000000	1.000000
1.000000	7.692309E-02

les éléments de la matrice modale sont :

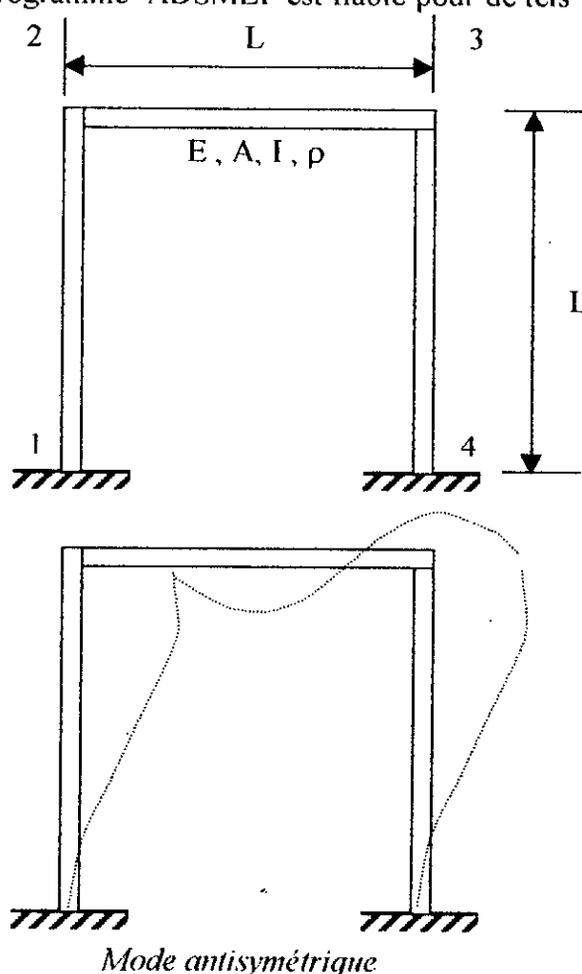
7.071068E-01	9.970545E-01
7.071068E-01	7.669651E-02

ces résultats nous permettent de constater que le programme ADSMEF est fiable pour de tels applications.

Application 4

Considérons la structure montrée par la figure VII .4 . Les conditions aux limites sur les déplacements sont les suivantes : $v_1 = \theta_1 = v_4 = \theta_4 = 0$. On traitera cette exemple en deux mode ; mode antisymétrique où $u_2 = u_3$ et $\theta_2 = \theta_3$, et le mode symétrique où $u_2 = u_3 = 0$ et $\theta_2 = -\theta_3$. Les solutions analytiques relatives à la structure de la figure (VII .4) sont données dans la référence (4) . La solution analytique des pulsations propres de la structure considérée en mode antisymétrique sont :

$$\omega_1 = \frac{3.21}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{32.68}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$



Et en mode symétrique la pulsation propre

$$\text{vaut : } \omega = \frac{15.14}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Comme dans les cas précédents , on pose les coefficients E , I , A , et ρ égaux à 1.

Les résultats numériques que nous donne le programme pour les deux modes sont ceux qui viennent :

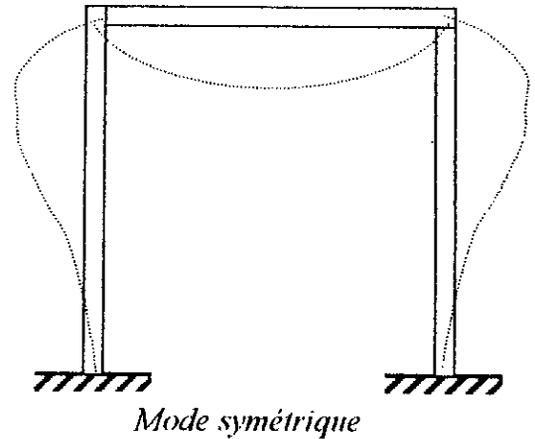


Figure VII.4 : Portique en vibration libre .

1. Mode antisymétrique :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= .321042E+01 \\ \omega_2 &= .326816E+02 \end{aligned}$$

les modes propres sont :

mode 1	mode 2
1.000000	1.000000
-2.179776	-2.103437E-02

la matrice modale est :

4.169773E-01	9.997789E-01
-9.089169E-01	-2.102972E-02

2. Mode symétrique :

$$\omega_1 = .154008E+02$$

les modes propres sont :

1.000000

la matrice modale est :

1.000000

on peut aisément vérifier que les valeurs analytiques sont conformes aux valeurs numériques .

Application 5 :

Un portique en mode flambage est illustré dans la figure (VII .5) . Cette structure a fait l'objet d'étude dans la référence (5) où la solution analytique est donnée tel que : $P_{cr} = \frac{12EI}{l^2}$.

Les conditions aux limites posées sont : $\theta_1 = -\theta_2 = \theta_3 = -\theta_4$. L'exécution du programme ADSMEF pour cette structure, en supposons toujours que es paramètres E , I , et l sont égaux à 1, nous donne les résultats ci - après :

$$P_{cr} = .120000E+02$$

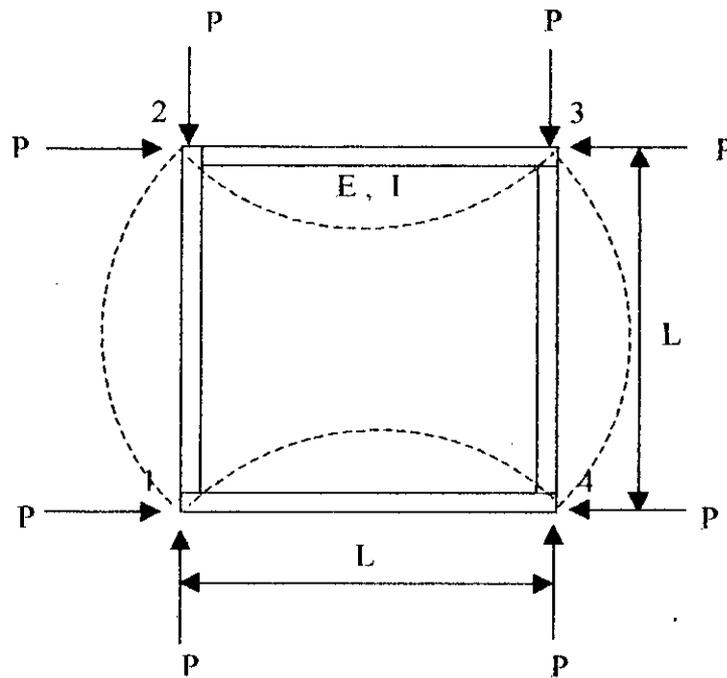


Figure VII .5 : Portique en flambage

On est tout à fait remarquable que le résultat numérique coïncide parfaitement avec la solution analytique , ce qui réconforte le programme ADSMEF.

Application 6

On considère la structure en barre montrée par la figure (VII .6). les barres ont le même module d'élasticité $E = 30.000 \text{ Ksi}$ et les sections des cinq éléments sont $A_1 = A_4 = 0.2 \text{ in}^2$, $A_2 = A_5 = 0.12 \text{ in}^2$, et $A_3 = 0.08 \text{ in}^2$. Les coordonnées des nœuds peuvent être déduites directement à partir de la figure ci – contre .

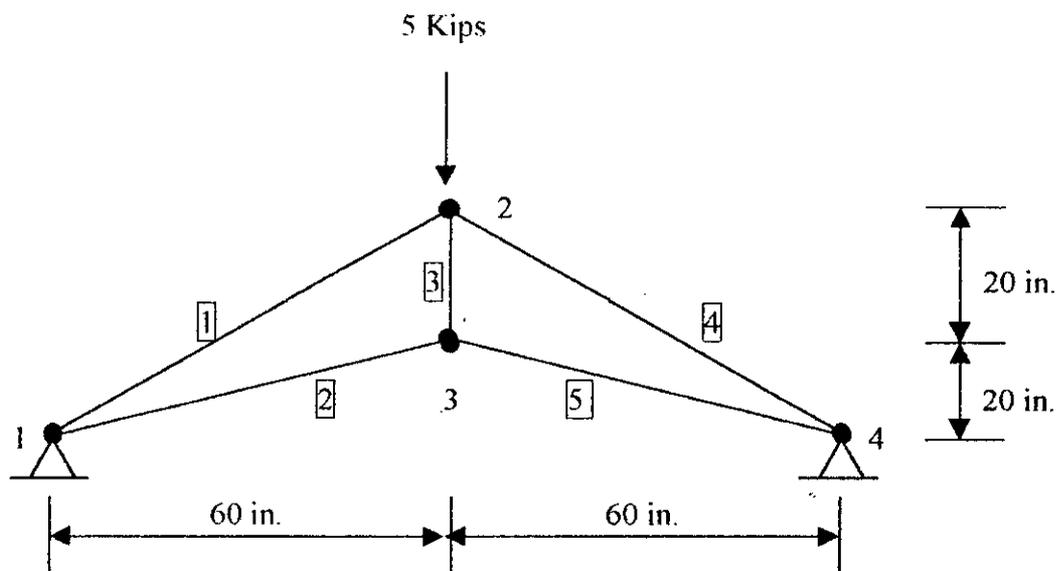


Figure VII .6 : Structure barre en mode statique

L'analyse de cette structure est réalisé dans la référence (6) . nous nous sommes basés sur les résultats donnés par la référence (6) pour valider ceux que nous avons trouvés par le programme ADSMEF.

Les solutions que nous trouvons par exécution du programme sont les suivantes :

$$\begin{aligned} u_2 &= 0.000000E+00 \\ v_2 &= -8.116768E-02 \\ u_3 &= 0.000000E+00 \\ v_3 &= -7.413464E-02 \end{aligned}$$

les tensions dans les barres sont :

Elément :	S_{12}	Nature
1	-3.746201	compression
2	-1.334424	compression
3	-8.439642E-01	compression
4	-3.746201	compression
5	-1.334424	compression

Comparés aux résultats donnés par la référence (6) , on peut voir la conformité des valeurs obtenus par le programme ADSMEF.

Application 7

Dans la figure ci – contre est représenté une structure composée de trois éléments poutre d'un module d'élasticité $E = 30.000 \text{ Ksi}$ et d'un moment d'inertie $I = 64.2 \text{ in}^2$. Les conditions aux limites pour cette structure sont tel que $u_1 = v_1 = \theta_1 = u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$. Le programme ADSMEF nous donne les résultats suivants pour ce cas de figure :

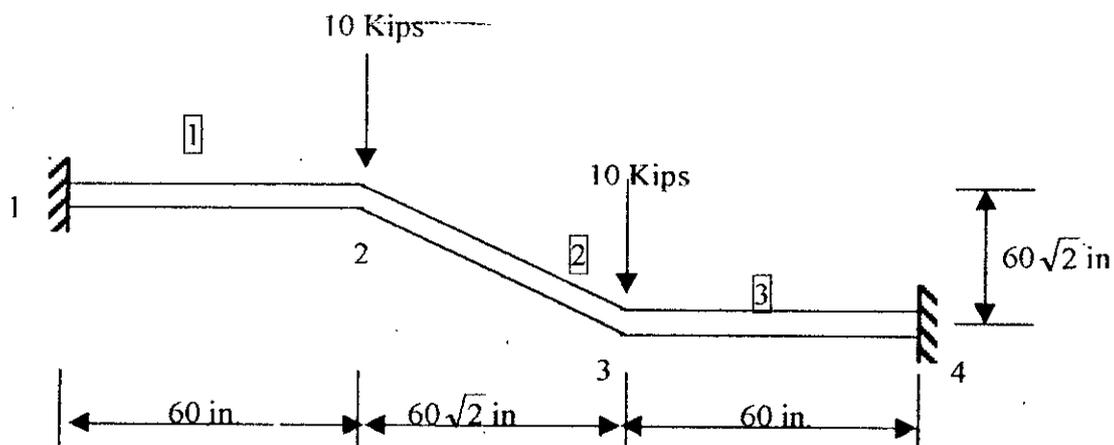


Figure VII . 7 : structure poutre en mode statique

$$\begin{aligned} u_2 &= 2.497084E-10 \\ v_2 &= -2.336177E-01 \end{aligned}$$

$$\theta_2 = -4.671993E-03$$

$$u_3 = 1.699514E-09$$

$$v_3 = -2.336177E-01$$

$$\theta_3 = 4.671993E-03$$

les efforts internes sont :

Élément	X ₁	Y ₁	M ₁	X ₂	Y ₂	M ₂
1	-1.248542E-07	9.999996	449.970900	1.248542E-07	-9.999996	150.028900
2	-1.577378E-07	-8.692322E-07	1.577378E-07	-150.029000	8.692322E-07	150.029000
3	8.497569E-07	-9.999996	-150.028900	-8.497569E-07	9.999996	-449.970900

Tableau VII .1 : résultats de l'application 7

Les résultats donnés dans le tableau ci – dessus ont été vérifiés par rapport à ceux établis par la référence (7) . Ceci nous permet encore d'approuver le déroulement du programme ADSMEF.

Application 8

La figure (VII .8) représente une structure en poutre simplement appuyée en ses deux extrémités. Les problème est défini par les constantes suivantes : $A = 6.71 \text{ in}^2$, $I = 64.2 \text{ in}^2$, $E = 30000000.0 \text{ psi}$, et $\rho = 0.000733 \text{ lb-sec}^2/\text{in}^4$. La présente structure est modélisée en utilisant trois éléments poutre. Il est souhaité de trouver les fréquences naturelles et les modes propres qui leurs correspondent.

Le programme nous donne les résultats ci – dessous :

$$\omega_1 = .340857E+04$$

$$\omega_2 = .247471E+04$$

$$\omega_3 = .138306E+04$$

$$\omega_4 = .743812E+03$$

$$\omega_5 = .301365E+03$$

$$\omega_6 = .745215E+02$$

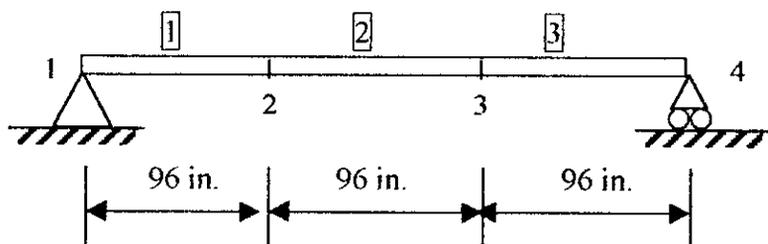


Figure VII .8 : Structure poutre en vibration libre

Les modes propres sont :

Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

9.999975E-01	1.897130	6.073802	20.999940	127.925900	2092.092000
1.302623E-05	2.471251E-05	7.911892E-05	2.735506E-04	1.666395E-03	2.725214E-02
1.106183E-18	2.098578E-18	6.718755E-18	2.322983E-17	1.415098E-16	2.314243E-15
2.776183E-25	5.266793E-25	1.686203E-24	5.829981E-24	3.551465E-23	5.808045E-22
2.811100E-08	5.333035E-08	1.707411E-07	5.903307E-07	3.596133E-06	5.881095E-05

Tableau VII .2 : Les modes propres de l'application 8

La matrice modale est :

Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
7.071077E-01	4.662980E-01	1.624544E-01	4.756530E-02	7.816789E-03	4.779904E-04
7.071059E-01	8.846278E-01	9.867160E-01	9.988681E-01	9.999694E-01	9.999999E-01
9.210946E-06	1.152339E-05	1.285322E-05	1.301152E-05	1.302586E-05	1.302626E-05
7.821907E-19	9.785627E-19	1.091491E-18	1.104934E-18	1.106152E-18	1.106186E-18
1.963060E-25	2.455895E-25	2.739311E-25	2.773048E-25	2.776105E-25	2.776190E-25
1.987750E-08	2.486783E-08	2.773765E-08	2.807925E-08	2.811021E-08	2.811107E-08

Tableau VII .3 : Les modes propres de l'application 8

Les valeurs données ci – dessus sont également conformes à celles que l'on retrouve dans la référence (8) .

Application 9 :

Etudions le cas de la plaque encastrée d'un coté et (a) libre de l'autre coté ou (b) simplement appuyée aux deux extrémités comme le montre la figure (VII . 9) . Dans les deux cas le plaque est soumise à des charges uniformément réparties d'une intensité 1000 lb/in. Sur le coté libre. Les constantes caractéristiques de cette structure sont ; $E = 30000000.0$ psi , $t = 0.1$ in , et $\nu = 0.3$. La conformité des résultats que l'on a trouvé à partir du programme ADSMEF a été vérifiée par comparaison aux résultats illustrés dans la référence (9), et ceci dans les deux cas (a) et (b) .

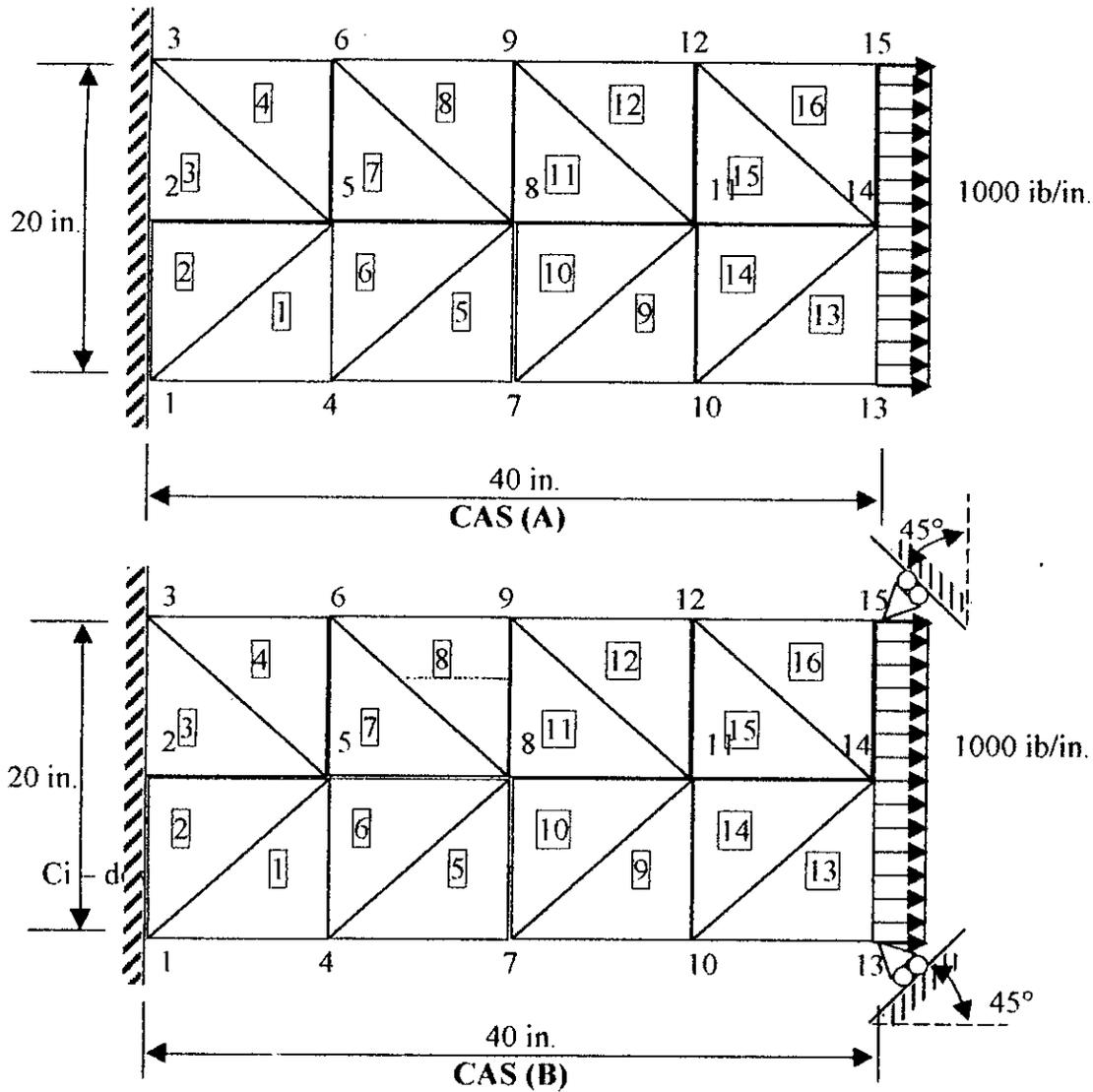


Figure VII.9 : Plaque triangulaire en statique

nocud:	Cas (a)		Cas (b)	
	ΔX	ΔY	ΔX	ΔY
1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
4	3.313944E-03	8.955021E-04	5.042501E-04	2.198520E-04
5	3.021375E-03	-1.764699E-09	5.440495E-04	1.629450E-11
6	3.313947E-03	-8.955061E-04	5.042502E-04	-2.198520E-04
7	6.547407E-03	9.893231E-04	9.533494E-04	3.853760E-04

8	6.420028E-03	-4.541711E-09	1.258863E-03	-2.919900E-11
9	6.547411E-03	-8.93322E-04	9.533498E-04	-3.853761E-04
10	9.839736E-03	9.977834E-04	1.231606E-03	7.218753E-04
11	9.790502E-03	-7.757390E-09	2.295125E-03	-1.974300E-10
12	9.839742E-03	-9.977992E-04	1.231607E-03	-7.218756E-04
13	1.316627E-02	1.006790E-03	6.158029E-04	6.158029E-04
14	1.313201E-02	-1.045309E-08	4.294576E-03	-4.136777E-10
15	1.316628E-02	-1.006810E-03	6.158035E-04	-6.158035E-04

Tableau VII.4 : Les déplacements de l'application 9

	σ_x	σ_y	σ_{xy}	σ_{max}	σ_{min}	direction
CAS (A)						
1	.10039E+05	.32532E+03	.69569E+03	-.10089E+05	.27575E+03	.40756E+01
2	-.99606E+04	.29882E+04	.20362E-02	.99606E+04	.29882E+04	.16732E-04
3	.99606E+04	.29882E+04	-.20362E-02	.99606E+04	.29882E+04	.16732E-04
4	.10039E+05	.32532E+03	-.69569E+03	.10089E+05	.27575E+03	.40756E+01
5	.96813E+04	-.63589E+02	-.38720E+02	.96815E+04	-.63743E+02	.22765E+00
6	.10319E+05	.40910E+03	-.33758E+03	.10330E+05	.39761E+03	.19488E+01
7	.10319E+05	.40909E+03	.33758E+03	.10330E+05	.39761E+03	-.19488E+01
8	.96813E+04	-.63587E+02	.38719E+02	.96815E+04	-.63741E+02	-.22765E+00
9	.98670E+04	-.33271E+02	-.47047E+02	.98672E+04	-.33495E+02	.27227E+00
10	.10133E+05	.71915E+02	-.14698E+03	.10135E+05	.69769E+02	.83678E+00
11	.10133E+05	.71915E+02	.14698E+03	.10135E+05	.69769E+02	-.83676E+00
12	.98670E+04	-.33271E+02	.47047E+02	.98672E+04	-.33494E+02	-.27227E+00
13	.99709E+04	-.29141E+02	-.29141E+02	.99709E+04	-.29225E+02	.16696E+00
14	.10029E+05	.15367E+02	-.56812E+02	.10029E+05	.15044E+02	.32505E+00
15	.10029E+05	.15366E+02	.56813E+02	.10029E+05	.15043E+02	-.32505E+00
16	.99709E+04	-.29140E+02	.29141E+02	.99709E+04	-.29225E+02	-.16697E+00
CAS (B)						
1	.14449E+04	-.22608E+03	.29960E+03	.14970E+04	-.27817E+03	-.98635E+01
2	.17936E+04	.53807E+03	.18801E-04	.17936E+04	.53807E+03	-.85802E-06
3	.17936E+04	.53807E+03	.18801E-04	.17936E+04	.53807E+03	-.85802E-06
4	.14449E+04	-.22608E+03	-.29960E+03	.14970E+04	-.27817E+03	.98635E+01

5	.10994E+04	-.82631E+03	.54350E+03	.12422E+04	-.96911E+03	-.14722E+02
6	.21391E+04	-.17829E+02	.45922E+02	.21401E+04	-.18806E+02	-.12191E+01
7	.21391E+04	-.17829E+02	-.45922E+02	.21401E+04	-.18806E+02	.12191E+01
8	.10994E+04	-.82631E+03	-.54350E+03	.12422E+04	-.96911E+03	.14722E+02
9	.20339E+03	-.21046E+04	.16154E+04	.10346E+04	-.29359E+04	-.27230E+02
10	.30351E+04	-.24560E+03	.35251E+03	.30726E+04	-.28305E+03	-.60643E+01
11	.30351E+04	-.24560E+03	-.35251E+03	.30726E+04	-.28305E+03	.60643E+01
12	.20339E+03	-.21046E+04	-.16154E+04	.10346E+04	-.29359E+04	.27230E+02
13	-.26392E+04	-.26392E+04	.41223E+04	.14832E+04	-.67615E+04	-.45000E+02
14	.58777E+04	-.40233E+03	.12271E+04	.61089E+04	-.63360E+03	-.10673E+02
15	.58777E+04	-.40233E+03	-.12271E+04	.61089E+04	-.63360E+03	.10673E+02
16	-.26392E+04	-.26392E+04	-.41223E+04	.14832E+04	-.67615E+04	.45000E+02

Tableau VII .5 : valeurs des contraintes de l'application 9

Application 10

On s'intéresse dans le cas présent à l'analyse en flexion de la plaque illustrée par la figure (VII .10). Cette plaque est modélisée par l'élément rectangulaire à seize d.d.l. comme montré dans la figure et elle est sujet à des sollicitations transversales uniformément réparties P_0 . On assume que $E = 10^7$, $\nu = 0.3$, et $P_0 = 0.4$ psi.

Pour cause de double symétrie, on n'étudiera que le quart de la structure. On note que cette application à été traitée dans la référence (10) qui nous a servie de base comparative pour la confirmation des résultats qui suivent :

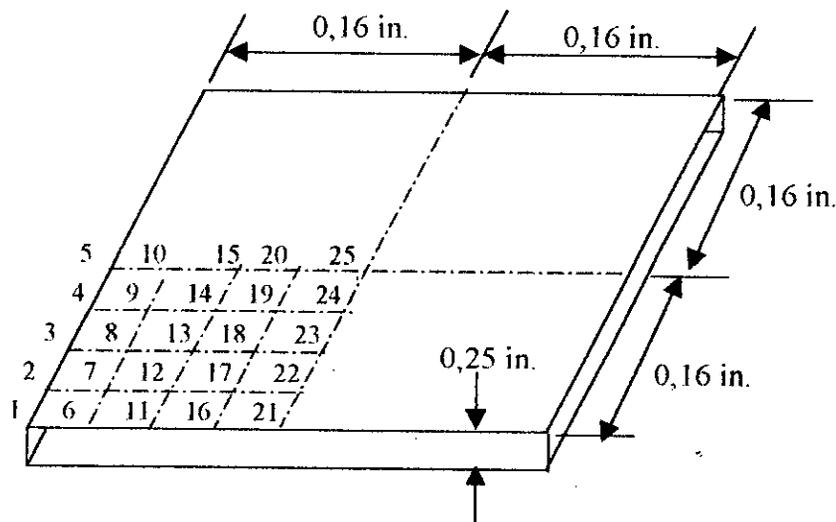


Figure VII .10 : Plaque rectangulaire en flexion

Nœud	W	θ_x	θ_y	θ_{xy}
1	0.000000E+00	-6.373850E-04	-6.379219E-04	0.000000E+00
2	0.000000E+00	-5.171974E-03	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	-8.845742E-03	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.000000E+00	-1.120003E-02	0.000000E+00	0.000000E+00
5	0.000000E+00	-1.199385E-02	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.000000E+00	0.000000E+00	-5.169773E-03	0.000000E+00
7	-1.914287E-02	-4.343136E-03	-4.344254E-03	-7.305302E-04
8	-3.382593E-02	-7.868691E-03	-3.132166E-03	-6.121307E-04
9	-4.308021E-02	-1.008105E-02	-1.621696E-03	-3.717119E-04
10	-4.622228E-02	-1.082790E-02	0.000000E+00	0.000000E+00
11	0.000000E+00	0.000000E+00	-8.839983E-03	0.000000E+00
12	-3.381758E-02	-3.130533E-03	-7.866206E-03	-5.941887E-04
13	-6.103115E-02	-5.656273E-03	-5.654914E-03	-6.119674E-04
14	-7.825539E-02	-7.324919E-03	-2.928104E-03	-3.934035E-04
15	-8.412410E-02	-7.893142E-03	0.000000E+00	0.000000E+00
16	0.000000E+00	0.000000E+00	-1.119981E-02	0.000000E+00
17	-4.307169E-02	-1.620995E-03	-1.007888E-02	-3.385454E-04
18	-7.824031E-02	-2.927415E-03	-7.326093E-03	-3.747899E-04
19	-1.007228E-01	-3.812054E-03	-3.815824E-03	-2.669446E-04
20	-1.084234E-01	-4.118082E-03	0.000000E+00	0.000000E+00
21	0.000000E+00	0.000000E+00	-1.199950E-02	0.000000E+00
22	-4.621626E-02	0.000000E+00	-1.082712E-02	0.000000E+00
23	-8.409968E-02	0.000000E+00	-7.896883E-03	0.000000E+00
24	-1.084107E-01	0.000000E+00	-4.123891E-03	0.000000E+00
25	-1.167595E-01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

Tableau VII .6 : Valeurs des déplacements pour l'application 10

les réactions dans chaque éléments sont :

Element	Nœuds	F_x	M_x	M_y	M_{xy}
1	1	-19.722010	-1.066665	-1.066665	-2.745094
	6	19.963680	12.916940	-16.596400	20.927590
	7	-20.180720	5.677507	5.674929	-12.123100
	2	19.939050	-16.659580	12.954830	20.975560

2	2	-3.873390	14.526240	19.501530	15.504060
	7	13.329040	15.024370	-12.403680	11.856920
	8	-21.062860	15.230540	15.289270	-19.663720
	3	11.607220	-13.845790	15.435520	18.095710
3	3	7.272696E-01	11.712450	14.988140	11.297970
	8	6.064319	17.858270	-15.219280	15.205680
	9	-16.499630	19.759290	18.789820	-22.472400
	4	9.708042	-7.588658	8.607667	11.616210
4	4	3.945883	5.455352	7.533835	4.064017
	9	-1.442119	19.080420	-16.727810	17.495490
	10	-9.513652	20.354200	18.543050	-20.653590
	5	7.009917	-1.066640	6.658677E-01	3.959313
5	6	-3.944250	19.397990	14.463050	15.434930
	11	11.599820	15.338510	-13.781840	17.938070
	12	-20.904340	14.962290	14.939250	-19.227920
	7	13.248750	-12.480710	15.001830	11.803860
6	7	-12.797100	-8.221224	-8.273108	-14.382090
	12	16.097680	14.299780	-17.812990	22.603650
	13	-19.566090	25.332550	25.318690	-29.564370
	8	16.265480	-17.537520	13.969820	22.185920
7	8	-7.667125	-15.551290	-14.039920	-22.705590
	13	9.427806	23.396300	-23.552860	30.226310
	14	-14.646770	31.818000	30.030780	-36.350530
	9	12.886010	-18.787170	14.604860	25.488710
8	9	-1.344420	-20.052530	-16.666920	-27.622900
	14	1.901405	28.347000	-26.849500	34.062760
	15	-6.870473	31.936290	29.668130	-36.717610
	10	6.313495	-20.354080	16.076220	27.982560
9	11	6.575686E-01	14.800250	11.648670	11.096940
	16	9.681351	8.462346	-7.611699	11.405000
	17	-16.134870	18.155160	19.189250	-21.736410
	12	5.795968	-15.603610	18.129590	15.497690
10	12	-7.389419	-13.658490	-15.255740	-22.428950
	17	12.427710	15.219980	-19.393370	26.114520
	18	-14.360100	29.736420	31.410940	-36.057070
	13	9.321750	-23.568230	23.391560	30.034260
11	13	-5.583841	-25.160670	-25.157510	-36.385110
	18	8.018476	26.604090	-28.678250	38.271530
	19	-10.616820	37.320790	37.261410	-45.335740
	14	8.182091	-28.370770	26.312890	37.852610

12	14	-1.835978	-31.793860	-29.493740	-43.387200
	19	2.589501	33.347330	-33.673350	44.068860
	20	-4.423720	37.719490	37.200680	-46.964540
	15	3.670253	-31.936230	28.980420	43.123900
13	16	4.015024	7.452474	5.478421	3.875753
	21	7.084333	5.651175E-01	-1.066604	3.913292
	22	-9.379300	18.444920	20.350080	-20.762640
	17	-1.720041	-17.282550	19.635620	18.267270
14	17	-9.723634E-01	-16.092630	-19.431730	-26.911980
	22	6.179162	16.141210	-20.350170	27.832920
	23	-6.818937	29.651700	31.906400	-36.793220
	18	1.612155	-27.141120	28.702710	34.325600
15	18	-1.670205	-29.199240	-31.435310	-42.939960
	23	3.619291	28.973630	-31.906500	43.007610
	24	-4.446510	37.197540	37.725240	-46.964610
	19	2.497460	-33.663170	33.413090	43.998370
16	19	-8.704978E-01	-37.004620	-37.001120	-51.264840
	24	1.246649	36.655330	-37.725400	50.652070
	25	-1.599890	39.481880	39.518870	-51.674030
	20	1.223932	-37.719470	36.711690	50.677270

Tableau VII . 7 : *Tableau des réactions aux nœuds pour l'application 10*

Application 11

Dans ce cas, un élément en trois dimension modélisé en tétraèdre à quatre nœuds est considéré. Les caractéristiques de cette éléments sont ; $E = 100$ et $\nu = 0.1$, les degrés de liberté libre et les forces appliquées sont tel que indiqués par la figure (VII .11) . Les résultats auxquels on abouti sont identiques à ceux que présente la référence (11) et ils sont représentés dans les tableaux ci – dessus .

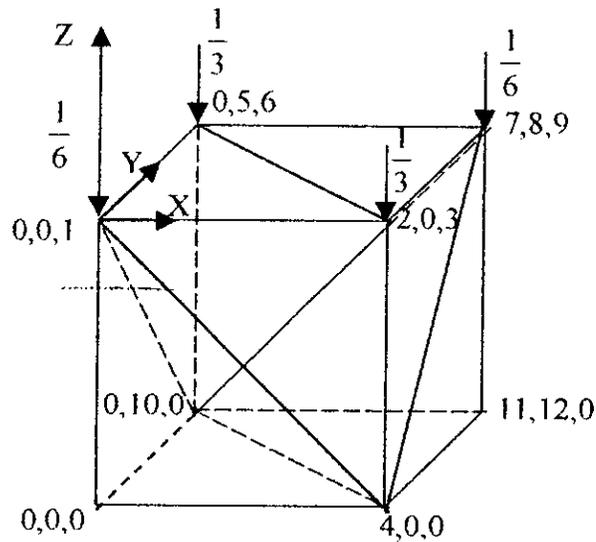


Figure VII .11 : Elément tétraèdre à quatre nœuds.

Nœud	ΔX	ΔY	ΔZ
1	0.000000E+00	0.000000E+00	-1.000069E-02
2	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
3	3.000108E-03	0.000000E+00	0.000000E+00
4	2.999941E-03	0.000000E+00	-9.999914E-03
5	0.000000E+00	2.999807E-03	-9.999457E-03
6	0.000000E+00	3.000092E-03	0.000000E+00
7	3.000109E-03	3.000133E-03	0.000000E+00
8	2.999867E-03	2.999939E-03	-1.000057E-02

Tableau VII .8 : Les déplacements de l'application 11

les contraintes dans la structure sont :

Elément	σ_x	σ_y	σ_z	σ_{xy}	σ_{yz}	σ_{zx}
1	-1.974154E-05	-2.099324E-05	-1.000081	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	2.323928E-06	1.394683E-05	-9.999865E-01	-6.438663E-06	2.973068E-05	2.328307E-05
3	1.225455E-05	1.942949E-06	-9.999413E-01	0.000000E+00	3.636636E-05	2.973068E-05
4	-1.079641E-05	-9.008266E-06	-1.000063	1.585039E-06	-7.468491E-06	-9.313226E-06
5	6.019416E-06	-1.371560E-06	-9.999900E-01	-8.766970E-06	-2.539645E-05	-3.183512E-05
6	9.870367E-06	1.535399E-05	-9.999381E-01	2.193981E-06	-3.634845E-05	-4.298412E-05

Tableau VII .9 : Résultats des contraintes de l'application 11

Application 12

Nous traiterons dans cette application l'élément brique décrit par la figure (VII .12). Les dimensions de l'éléments , les forces appliquées ainsi que les conditions aux limites correspondants à cette éléments sont indiqués dans la figure ci - dessus , quant aux paramètres E et ν ils sont égales , respectivement , à 100 KN/m² et 0.3 . On présente les résultats obtenus par le programme ADSMEF pour cette éléments dans les tableaux ci - dessus . On note que ces résultats on été validés après comparaison à ceux données dans la référence (12) .

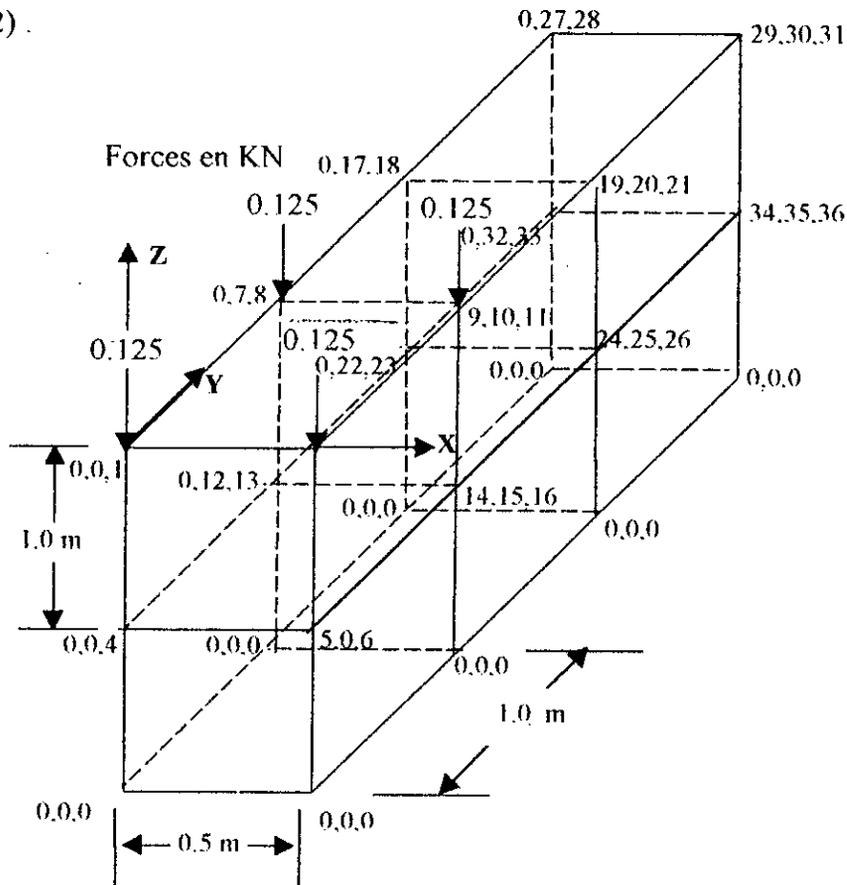


Figure VII .12 : Elément brique à huit nœuds.

Nœud	ΔX	ΔY	ΔZ
1	0.000000E+00	0.000000E+00	-1.595119E-02
2	2.297412E-03	0.000000E+00	-1.611171E-02
3	0.000000E+00	0.000000E+00	-6.533562E-03
4	1.550435E-03	0.000000E+00	-6.842136E-03
5	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
7	0.000000E+00	-1.530123E-03	-9.033686E-03

8	1.056088E-03	-1.197266E-03	-9.011309E-03
9	0.000000E+00	1.631525E-03	-4.271704E-03
10	1.029769E-03	1.819642E-03	-4.436640E-03
11	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
12	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
13	0.000000E+00	-1.193473E-03	-1.107146E-03
14	-1.365748E-04	-1.050061E-03	-9.664613E-04
15	0.000000E+00	1.431240E-03	-9.641208E-04
16	3.099607E-04	1.557349E-03	-9.722046E-04
17	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
18	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
19	0.000000E+00	-6.390038E-04	5.760295E-04
20	-1.735221E-04	-6.628683E-04	6.551553E-04
21	0.000000E+00	8.487252E-04	2.654316E-04
22	3.693545E-05	8.923945E-04	2.818375E-04
23	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
24	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00

Tableau VII .10 : Valeurs des déplacements de l'application 12

les contraintes dans la structure sont :

Elément	σ_x	σ_y	σ_z	σ_{xy}	σ_{yz}	σ_{zx}
1	5.553992E-03	-2.087466E-01	-7.616907E-01	-6.923500E-03	1.203093E-01	-4.432048E-03
2	-9.507585E-02	-1.279458E-01	-6.190075E-01	-1.388783E-03	7.806271E-02	1.570369E-02
3	1.572805E-02	-7.075675E-02	-2.533569E-01	-3.187317E-03	1.089685E-01	-4.232037E-03
4	-7.002660E-02	-1.304504E-01	-3.262598E-01	-8.784342E-04	1.270363E-01	9.554718E-03
5	5.950330E-03	-1.345933E-03	1.504716E-02	2.583466E-03	-2.391085E-02	-1.930067E-03
6	-1.467803E-02	-5.200998E-02	-5.473281E-02	6.397235E-04	6.935868E-02	3.495582E-03

Tableau VII .11 : Valeurs des contraintes de l'application 12

Nous signalons , enfin , que certains éléments pris en compte par le programme ADSMEF n'ont pas été vérifiés à cause d'indisponibilité d'application auxquelles on pourrai se référé.

Références

- 1 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 145
- 2 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 180
- 3 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 214
- 4 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 220
- 5 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 244
- 6 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 483
- 7 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 484
- 8 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 494
- 9 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 506
- 10 : T.Y.Yang , Finite Element Structural Analysis , Page 521
- 11 : I. M. Smith , et D.V. Griffiths, Programming The Finite Element Method, Page 178
- 12 : I. M. Smith , et D.V. Griffiths, Programming The Finite Element Method, Page 182

CONCLUSION

Conclusion

Nous avons vu comment la méthode des éléments finis permettait de ramener les problèmes de milieux continus à des problèmes discrets à un nombre fini de paramètres inconnus qui sont déterminés par application des critères énergétiques.

Le choix de la méthode des éléments finis a été retenu pour les raisons suivantes :

- elle facilite la prise en compte des conditions aux limites sur les forces et les déplacements nodaux.
- sa souplesse considérable dans le choix du maillage.
- elle présente un avantage certain quant à sa mise programme, devenant ainsi un outil numérique très appréciable.

On peut choisir, de façon arbitraire, la position et le nombre des nœuds et donc le nombre, la forme, et la répartition des domaines élémentaires. Ainsi tout contour peut être approché. Enfin si l'on désire calculer les déplacements ou contraintes en un point bien particulier du domaine, cela est facilement réalisable, il suffit de choisir les nœuds en ces points.

On retient, enfin, que les résultats obtenus dans notre étude par le programme que l'on a réalisé sont tout à fait fiables comparés aux résultats donnés par les références. Néanmoins certains éléments pris en considération par le programme n'ont pas pu être vérifiés. Nous nous fixons comme objectif dans le futur d'élargir le programme à d'autres éléments et de rendre son exploitation plus souple et plus accessible.

Vu l'intérêt porté à la méthode des éléments finis dans les différents domaines industriels (génie civil, aéronautique, mécanique, etc.) nous souhaitons et recommandons que les prochaines recherches puissent se faire sur les applications industrielles de la méthode des éléments finis ainsi que sur son intérêt pratique.

Références

- [1] J-L,Batoz, Dhat,G., *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermés , Paris, 1990
- [2] Delannoy, C., *Programmer en Fortran 90, Paris* , Editions Eyrolles, 1993.
- [3] Dhatt,G.,Touzout,G.,*Une présentation de la méthode des éléments finis*, 2^{ème} édition, Paris : Maloine S.A. Editeur, 1984.
- [4] Imbert J.-F., *Analyse des structures par éléments finis*, 3^{ème} édition, Toulouse : Cépadués-Editions, 1995.
- [5] Rao, S.S, *The Element Method in Engineering*, 2nd edition., U.K. Oxford : Pergamon Press, 1989.
- [6] I.M.Smith, and, D. V. Griffiths, *Programming the finite element method*, Univirsity of Manchester, U K, Second edition . John Wiley & Sons.
- [7] Yang, T.Y., *Finite Element Structural Analysis*, New Jersey : Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1986.
- [8] Zienkiwicz, O.C.,Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, Fourth Edition, London McGraw-Hill, 1989.