

M0030/95A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE-CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

THESE DE MAGISTER

Présentée par : **Brahim MEZAZIGH**
Ingénieur d'état diplômé de l'E.N.P.

ANALYSE DU COMPORTEMENT GEOMETRIQUE ET MATERIEL NON LINEAIRES DES STRUCTURES SPATIALES EN POUTRES

Soutenue devant le Jury composé de :

B. TILIOUINE	Professeur	Président
AEK. CHELGHOU	Professeur	Examineur
M. BERRAH	Maître de conférence	Examineur
Y. BELKACEMI	Maître de conférence	Examineur
A. CHARIF	Professeur	Rapporteur

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE-CIVIL



THESE DE MAGISTER

Présentée par : **Brahim MEZAZIGH**
Ingénieur d'état diplômé de l'E.N.P.

ANALYSE DU COMPORTEMENT GEOMETRIQUE ET MATERIEL NON LINEAIRES DES STRUCTURES SPATIALES EN POUTRES

Soutenu devant le Jury composé de :

B. TILIOUINE	Professeur	Président
AEK. CHELGHOUM	Professeur	Examineur
M. BERRAH	Maître de conférence	Examineur
Y. BELKACEMI	Maître de conférence	Examineur
A. CHARIF	Professeur	Rapporteur

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

je dédie cette thèse,

à ma mère,

à mon père,

à mon frère

en témoignage de mon affection



REMERCIEMENTS

A l'occasion de la présentation de cette thèse, je remercie avec une sincère gratitude, mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur **Abdelhamid CHARIF** pour tous les encouragements et la sollicitude avec laquelle il m'a orienté tout au long de cette étude.

C'est avec un grand honneur que je tiens à adresser mes sincères remerciements au Professeur **B.TILIOUINE** qui a bien voulu accepter de présider le jury d'examen.

Qu'il me soit aussi permis d'exprimer ma respectueuse reconnaissance au Docteur **M. BERRAH** et au Docteur **Y. BELKACEMI** pour avoir bien voulu examiner ce document et faire parti du jury d'examen.

Il m'est profondément agréable de remercier le Professeur **AEK. CHELGHOUM** qui a bien voulu accepter de faire parti du jury d'examen.

J'adresse l'expression de ma profonde gratitude à Messieurs **M. SARI**, chargé de cours au département **G.INDUSTRIEL** et au Docteur **K. SILHADI** et les remercie pour les suggestions et les critiques très positives ayant contribué à l'obtention de ce manuscrit.

Je tiens à témoigner ma particulière considération à mes amis, **Hacène DJOUZI** et **El Hadi YAHY**, Ingénieurs d'état en informatique au centre de calcul de E.N.P, pour tous les conseils fructueux, les encouragements et l'aide matérielle qu'ils m'ont prodigué durant toute la durée de cette étude. Je remercie également à cette occasion toute l'équipe du centre de calcul et de la bibliothèque pour toute l'aide qu'ils m'ont apporté.

Enfin je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette recherche.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
-----------------------	---

× CHAPITRE 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1) Introduction	3
1.2) Formulation Eulerienne	4
1.3) Formulations Lagrangiennes	4
1.4) Concept de la matrice de rigidité externe	6
1.5) Champ d'interpolation non linéaire des degrés de liberté de rotations nodales	8
1.6) Description corotationnelle	8
1.7) Conclusion	12

× CHAPITRE 2

CINEMATIQUE DES GRANDS DEPLACEMENTS

2.1) Introduction	13
2.2) Différentes formulations	13
2.3) Notations et systèmes de référence	15
2.4) Etude du comportement de la déformation	17
2.4.1) Tenseur de Green-Lagrange	19
2.4.2) Tenseur d'Almansi-Euler	22
2.5) Tenseurs des contraintes	22
2.6) Equation du mouvement	24
2.6.1) Introduction	24

2.6.2) Formulation Lagrangienne totale	27
2.6.3) Formulation Lagrangienne actualisée	29
2.7) Conclusion	31

CHAPITRE 3

THEORIE DES POUTRES A PAROIS-MINCES

3.1) Introduction	33
3.2) Caractéristiques sectorielles	34
3.2.1) Aire sectorielle	35
3.2.2) Moments sectoriels	36
3.2.3) Centre de torsion	37
3.3) Comportement flexionnel	38
3.4) Gauchissement en torsion	39
3.5) Torsion pure	41
3.5.1) Section circulaire	42
3.5.2) Section rectangulaire mince	43
3.6) Torsion non uniforme	46
3.7) Cas général de chargement	48
3.7.1) Comportement transversal de la section droite	49
3.7.2) Comportement longitudinal de la section droite	49

CHAPITRE 4

COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE

4.1) Introduction	51
4.2) Description du modèle élasto-plastique	52
4.3) Différents modèles élasto-plastiques	53
4.3.1) Modèle fibre	53
4.3.2) Modèle rotule plastique	54
4.3.3) Conclusion	55
4.4) Développement du modèle élasto-plastique	55
4.4.1) Relation incrémentale contrainte-déformation	55

4.4.2) Détermination des déformations	57
4.4.3) Détermination de la matrice de rigidité élasto-plastique	57
4.5) Algorithme d'analyse élasto-plastique	59
4.6) Difficultés relatives à une analyse élasto-plastique en grands déplacements	61
4.6) Conclusion	62

CHAPITRE 5

METHODES DE RESOLUTION NON LINEAIRES

5.1) Introduction	64
5.2) Généralités sur les méthodes itératives	64
5.3) Critères de convergence	65
5.4) Méthodes de contrôle en chargement	66
5.4.1) Méthode de Newton Raphson	66
5.4.2) Méthode de Newton Raphson modifiée	67
5.4.3)- Méthode de Quasi-Newton	68
5.4.4)- Inconvénients des méthodes de contrôle en chargement	70
5.5) Méthode de contrôle en déplacement	71
5.6) Technique des ressorts fictifs	73
5.7) Méthode Arclength	75
5.7.1) Introduction	75
5.7.2) Principe de la technique	75
5.7.3) Paramètres régissant la technique Arclength	76
a) Equation de contrainte	77
b) Choix de la racine appropriée	78
c) Choix de la grandeur de l'incrément de chargement	80
5.7.4) Description de l'algorithme de résolution	80
5.8) Conclusion	83

CHAPITRE 6

DEVELOPPEMENT DU MODELE NUMERIQUE

6.1) Introduction	84
6.2) Hypothèses et repères de référence	85
6.3) Formulations en éléments finis des équations de mouvement	87
6.3.1) Principe des déplacements virtuels	87
6.3.2) Fonction d'interpolation	93
6.4) Matrices de transformations	95
6.4.1) Matrice de rotation classique R1	96
6.4.2) Matrice d'expansion R2	99
6.4.3) Matrice de rotation relative aux axes principaux d'inertie	102
6.4.4) Matrice de rotation en grands déplacements	103
6.4.5) Transformation du gauchissement	106
6.4.6) Matrice de rotation globale	106
6.5) Description du modèle géométrique non linéaire	108
6.6) Conclusion	112

CHAPITRE 7

APPLICATION NUMERIQUE

7.1) Présentation du programme	113
7.1.1) Introduction	113
7.1.2) Description du bloc non linéaire	115
7.2) Expérimentation numérique	120
7.2.1) Poutre console chargée par un moment à son extrémité	120
7.2.2) Structure de Williams	125
7.2.3) Coupole Spatiale	128
7.2.4) Structure Hexagonale	131
7.2.5) Structure de Lee	134
7.2.6) Console soumise à une charge axiale excentrée	137

7.2.7) Analyse du comportement élasto-plastique d'une poutre console	140
7.2.8) Portique plan	143
7.3) Conclusion	147

CHAPITRE 8

CONCLUSIONS GENERALES

8.1) Objectifs	148
8.2) Méthodologie	149
8.3) Résultats et recommandations	150

INTRODUCTION GENERALE

Les structures spatiales composées de poutres à section mince et ouverte, comme les pylônes électriques et les structures en Offshore, sont beaucoup utilisées dans la pratique. Ce type de structure appartient à une classe où une large proportion de chargement est reprise par la force axiale dans les membrures. Ces membrures deviennent alors plus flexibles et instables, et souvent, elles subissent de larges déformations avant la rupture. Aussi, l'évaluation du facteur de sécurité effectif de ce type de structure nécessite la prise en considération en même temps des effets non linéaires géométriques et matériels dans l'analyse.

Les études traitant ce type de problème sont abondantes. Elles sont classées en deux catégories. Les analyses de la première catégorie sont très efficaces mais elles ne sont développées que pour des problèmes bien particuliers. Dans la seconde catégorie, les études s'appliquent à un domaine plus général, mais présentent quelques inconvénients. Elles sont limitées à de petits incréments de chargement et elles nécessitent un nombre important d'éléments pour la bonne modélisation du comportement du milieu à étudier. En effet, elles sont basées sur la description Lagrangienne approchée. Cette dernière néglige les matrices de rigidité relatives aux termes non linéaires du tenseur de Green-Lagrange qui sont difficiles à calculer.

Par conséquent, l'application de ces études à l'analyse non linéaire reste limitée au seul domaine de la recherche étant donné leur coût élevé.

Pour rendre accessible ces études à des analyses pratiques, il est nécessaire d'améliorer les performances des méthodes de calcul.

Le but qu'on s'est assigné dans cette étude est d'examiner les effets résultants de la négligence des termes d'ordres supérieurs du tenseur des déformations de Green-Lagrange sur la réponse de la structure dans une analyse en grands déplacements d'une part, et de suggérer une description cinématique permettant l'amélioration de la vitesse de convergence et la précision de la réponse avec de grands incréments de chargement et un nombre réduit d'éléments, d'autre part. Ceci en gardant en vue les problèmes théoriques inhérents à un élément fini de poutre spatiale non linéaire, à savoir:

- La torsion non uniforme
- Continuité de gauchissement en un noeud
- Connexion en un point quelconque
- Matrice de rotation
- Tenseur des déformations
- La loi constitutive non linéaire

La formulation du modèle numérique proposé réside essentiellement dans:

- Le développement d'une description mixte (DM) qui permet l'utilisation d'incrément de chargement modérés avec un nombre réduit d'éléments.
- La formulation d'une matrice de rigidité tangente devant tenir compte de la connexion excentrée, des forces initiales et de la dissymétrie de la section.
- La construction d'un algorithme de calcul élasto-plastique basé sur le modèle fibre et prenant en considération l'effet de l'érouissage isotrope et l'influence d'un déchargement élastique.
- L'inclusion d'une technique de résolution permettant de tracer toute la réponse de la structure jusqu'à la ruine. Celle-ci permet d'éviter la sous ou la surestimation de la capacité réelle de chargement de la structure résultant de la rupture fictive durant les itérations d'équilibres. Ainsi, elle permet de connaître la sensibilité d'une structure à s'accommoder à de grands déplacements.

Afin d'illustrer les performances relatives à l'application de grands incréments de chargements, à la vitesse de convergence et à la bonne précision du programme développé dans cette étude de nombreux exemples numériques pour lesquels des solutions existes sont présentés.

Chapitre 1

Analyse Bibliographique

Chapitre 1

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1) INTRODUCTION

Le développement de nouvelles formulations pour l'analyse non linéaire des structures composées de poutres, capables de s'accommoder à de grandes translations et à de larges rotations, a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. Depuis la première application de l'ordinateur à l'analyse non linéaire des structures, diverses formulations cinématiques non linéaires ont été présentées [1-28]. Ces analyses ont porté sur quatre parties essentielles, qui sont:

- * L'établissement d'une matrice de rigidité devant tenir compte simultanément des non linéarités matérielles et géométriques.
- * Le développement d'une formulation cinématique capable de prendre en compte les grandes translations et les larges rotations.
- * Le développement d'un modèle élasto-plastique.
- * La construction d'un algorithme efficace de résolution de systèmes non linéaires permettant de tracer toute la réponse non linéaire.

Vu le nombre important de paramètres régissant une analyse géométrique non linéaire élasto-plastique, nous avons jugé utile de ne considérer dans ce chapitre que les formulations cinématiques, tout en revenant à chacun des autres paramètres dans les chapitres suivants.

En pratique, les théories non linéaires sont principalement formulées en fonction des variables d'Euler ou celles de Lagrange.

1.2) FORMULATION EULERIENNE

Cette formulation est très employée dans les applications de la mécanique des fluides. Dans la mécanique du solide en grands déplacements, par contre, les travaux relatifs à cette description sont rares [1,2,3]. En outre, la majorité d'entre eux [2,3] confondent celle-ci avec la formulation Lagrangienne actualisée.

La principale différence entre ces deux formulations réside essentiellement dans la manière dont sont calculées les déformations. En effet, pour la formulation Eulérienne, les déformations du corps en mouvement sont déterminées à travers une région fixée de l'espace, alors que pour la formulation Lagrangienne, les déformations sont déterminées en suivant son mouvement dans l'espace.

1.3) FORMULATIONS LAGRANGIENNES

A la différence de la formulation Eulérienne, la formulation Lagrangienne est très utilisée dans les applications d'analyse non linéaire des structures par la méthode des éléments finis, à cause de sa simplicité et de la faciliter de son implémentation numérique.

Sharifi et Popov [4] présentent en 1971, une formulation incrémentale basée sur l'actualisation du système local. Ils déduisent les équations d'équilibre en soustrayant l'expression des travaux virtuels exprimée dans la configuration à l'instant t et de celle à l'instant $t+\Delta t$ repérée par rapport à la configuration à l'instant t .

$$\int_A {}^t t_{ij} \delta U_{ij} dA = \int_V {}^t \tau_{ij} \delta \eta_{ij} dV + \int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (1.3.1)$$

avec

$$e_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \quad (1.3.2)$$

où τ_{ij} et σ_{ij} sont le tenseur des contraintes de Cauchy et l'incrément du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, respectivement. e_{ij} et η_{ij} sont, respectivement, les parties linéaire et non linéaire du tenseur des déformations de Green-Lagrange e_{ij} .

Toutefois, à cause des termes non linéaires du tenseur des déformations de Green-Lagrange, cette équation ne peut être directement résolue. Aussi, Sharifi et Popov [4] proposent de linéariser celle-ci en négligeant le terme non linéaire η_{ij} du tenseur e_{ij} . L'équation obtenue n'étant mathématiquement pas exacte, ils suggèrent d'employer la méthode itérative de Newton-Raphson pour minimiser l'erreur.

En 1973, dans une analyse élastique en grands déplacements des structures spatiales composées de poutres à parois minces et à section ouverte, Bazant et Nimeiri [3] développent une procédure incrémentale basée sur un système Lagrangien actualisé, dans lequel, les forces internes sont tenues constantes durant tout l'incrément de chargement, et où les coordonnées locales de chaque élément sont actualisées au début de chaque cycle de chargement.

Cependant, ce n'est qu'en 1975, en utilisant le principe des déplacements virtuels (travaux virtuels), que les formulations Lagrangiennes reçoivent par Bathe, Ramm et Wilson [5], un développement théorique général. Ce développement adapté à la méthode des éléments finis incorpore les différents types de non linéarités ainsi que l'effet dynamique. Aussi, plusieurs récentes publications [6-11] y font référence.

En 1979, Bathe et Boulourchi [12] présentent un élément poutre spatiale non linéaire capable de s'accommoder à de larges rotations, dont les équations de mouvement sont:

$$(K_E + K_G) \Delta U = {}^{t+\Delta t}F - {}^tF \quad (1.3.3)$$

où K_E est la matrice de rigidité linéaire, K_G la matrice de rigidité géométrique et ΔU l'incrément de déplacement entre les instants t et $t+\Delta t$.

Dans leur publication, Bathe et Boulourchi [12] montrent aussi que les équations d'équilibre régissant les formulations Lagrangiennes totale et actualisée sont identiques, c'est à dire que les mêmes matrices de rigidité et les vecteurs forces nodales seront générés dans les deux formulations. La réponse prédite par les deux formulations est la même, si le même nombre d'éléments est employé pour modéliser la structure. Ils déduisent alors que le choix entre la formulation Lagrangienne totale et la formulation Lagrangienne actualisée, ne dépend que de la facilité de l'implémentation numérique et des équations rhéologiques.

Les formulations Lagrangiennes présentent cependant un inconvénient fondamental: Elles sont restreintes à de petites rotations entre deux incréments successifs de chargement durant le processus de déformation. Cette limitation survient d'une part, parce que les rotations nodales sont considérées comme des quantités vectorielles. D'autre part, elle est due à la négligence des termes de déformation d'ordres supérieurs dans les équations d'équilibre. En effet, en 1975 Jagannathan [13] montre que la négligence de certains termes non linéaires dans l'expression de déformations-déplacements induit des déformations imaginaires conduisant à des efforts internes erronés. Ces derniers peuvent créer des difficultés de convergence lorsque l'élément subi d'importantes rotations de corps rigide.

Par ailleurs, à cause de la négligence de la déformée de la poutre au cours de son chargement, un nombre important d'éléments entre deux noeuds structuraux est nécessaire à la bonne modélisation du comportement non linéaire. Par conséquent, l'analyste employant les formulations Lagrangiennes se trouve confronté à deux problèmes: le choix du nombre optimal d'éléments entre deux noeuds structuraux et la grandeur optimale de l'incrément de chargement garantissant une solution proche de la réponse réelle.

1.4) CONCEPT DE LA MATRICE DE RIGIDITE EXTERNE

Pour pallier au problème induit par la rotation de corps rigide, Porter et Powell [14] décomposent la matrice de rigidité géométrique K_G en deux parties, qu'ils appellent matrice de rigidité interne et matrice de rigidité externe. La matrice de rigidité interne, tout comme la matrice de rigidité linéaire, permet de prendre en compte le changement des forces nodales élémentaires dû aux déformations naturelles (déformations réelles) durant l'incrément de chargement, alors que la matrice de rigidité externe permet de prendre en considération celui dû à la rotation de corps rigide du même incrément de chargement.

Le concept de la matrice de rigidité externe et interne est exploité par Gattas [7] en 1982 pour expliquer l'équilibre d'un élément poutre plane subissant un mouvement de corps rigide. En analysant l'équation de mouvement, exprimée dans la configuration à l'instant $t+\Delta t$ et repérée par rapport à la configuration à l'instant t , obtenue par Bathe et Boulourchi [12]:

$$[K_E]\{U\} + [K_G]\{U\} + \{ {}^tF \} = \{ {}^{t+\Delta t}F \} \quad (1.4.1)$$

où K_E et K_G sont, respectivement, les matrices de rigidité linéaire et géométrique.

Il remarque que le vecteur des forces extérieures $\{ {}^{t+\Delta t}F \}$ est en équilibre par rapport la configuration à l'instant t . Cependant, le vecteur des efforts résistants $\{ {}^tF \}$, qui était lui en équilibre dans la configuration t ne le reste plus dans la nouvelle configuration à l'instant $t+\Delta t$. En conséquence, il conclut que le terme $[K_E + K_G]\{U\}$ ne peut pas être en équilibre dans cette dernière configuration. Mais, comme le terme $[K_E]\{U\}$ est en équilibre dans la configuration à l'instant $t+\Delta t$, il déduit alors que c'est le terme $[K_G]\{U\}$ qui ne l'est pas.

Pour définir le système de force qui doit contrebalancer le défaut d'équilibre du vecteur $\{ {}^tF \}$, il décompose, selon le procédé de Porter et Powell, le terme $[K_G]\{U\}$ en deux parties:

$$[K_G]\{U\} = [K_G]_i\{U\} + [K_G]_e\{U\} \quad (1.4.2)$$

où $[K_G]_i$ est la matrice de rigidité interne qui permet de prendre en considération l'effet des déformations réelles et $[K_G]_e$ la matrice de rigidité externe qui compense les efforts générés par le mouvement des forces $\{ {}^tF \}$ de la configuration à l'instant t à celle à l'instant $t+\Delta t$.

Ce procédé est repris en 1986 par Yang et McGuire [8,9] pour expliquer l'équilibre d'un élément poutre spatiale subissant divers mouvements de rotation de corps rigide. En suivant le même raisonnement, et en supposant dans une formulation Lagrangienne actualisée, que le déplacement virtuel δU peut être séparé en la somme d'un déplacement naturel δU_n et d'un déplacement de corps rigide δU_r , ils établissent les matrices de rigidité élémentaires interne et externe. Celles-ci sont obtenues par décomposition de l'équation variationnelle de mouvement en une partie devant tenir compte de l'effet de mouvement rigide et une autre qui prend en considération l'effet des déformations naturelles.

1.5) CHAMP D'INTERPOLATION NON LINEAIRE DES DEGRES DE LIBERTE DE ROTATIONS NODALES

Pour remédier aux effets néfastes dûs à la rotation de corps rigide, Surana et Sorem [15] présentent en 1989 une intéressante description pouvant lever la restriction de petites rotations nodales entre deux incréments successifs de chargement.

Dans une formulation Lagrangienne totale, ils développent un élément isoparamétrique poutre courbe tridimensionnel à 3 noeuds, basé sur un champ de déplacement fonction non linéaire des rotations nodales. En comparant les équations d'équilibre obtenues dans la formulation de Bathe et Boulourchi [12] avec celles obtenues dans cette description, on remarque la présence de deux matrices géométriques supplémentaires caractérisant l'effet non linéaire de la rotation nodale.

L'expérimentation numérique présentée par les auteurs montre que cet élément permet d'utiliser de larges incréments de chargement avec une bonne précision de convergence.

1.6) DESCRIPTION COROTATIONNELLE

Un autre type de technique qui a montré sa performance durant cette dernière décennie est la formulation corotationnelle. Cette formulation a été proposée pour la première fois par Argyris [16] en 1964, mais elle n'a pu être efficacement utilisée qu'à partir de 1973 par Belytschko et Hsieh [17] dans une analyse non linéaire des poutres planes. Le principe de la description corotationnelle consiste simplement à éliminer la rotation rigide de la rotation totale et à calculer les efforts internes par rapport à la configuration déformée à l'instant $t+\Delta t$.

En 1988, Chen et Kitipornchai [18] étendent ce principe, que nous rappelons ci-après, à l'analyse du comportement non linéaire des structures tridimensionnelles composées de poutres à parois minces et à section dissymétrique et ouverte. Après avoir transformé le vecteur des déplacements nodaux d'un élément vers le repère local, ils déduisent d'après la figure(1-1),

les rotations de déformation naturelle.

$$\begin{cases} \alpha_{xi} = \varphi_{xi} - \mu_x \\ \alpha_{zj} = \varphi_{zj} - \mu_x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_{yi} = \varphi_{yi} + \mu_y \\ \alpha_{yj} = \varphi_{yj} + \mu_y \end{cases} \quad (1.6.1a)$$

où μ_x et μ_y sont les rotations de corps rigide autour des axes z et y respectivement telles que:

$$\mu_x = \arcsin\left(\frac{u_{yj} - u_{yi}}{l}\right) \quad \mu_y = \arcsin\left(\frac{u_{zj} - u_{zi}}{l}\right) \quad (1.6.1b)$$

La variation de la longueur de l'élément en tenant compte de l'effet du déplacement axial et de la courbure de l'élément est calculée de la manière suivante:

$$\delta = e + \frac{l}{30} \left[(2\alpha_{zi}^2 - \alpha_{xi}\alpha_{zj} + 2\alpha_{zj}^2) + (2\alpha_{yi}^2 - \alpha_{yi}\alpha_{yj} + 2\alpha_{yj}^2) \right] \quad (1.6.1c)$$

avec

$$e = \sqrt{(l + u_{xj} - u_{xi})^2 + (u_{yj} - u_{yi})^2 + (u_{zj} - u_{zi})^2} - l$$

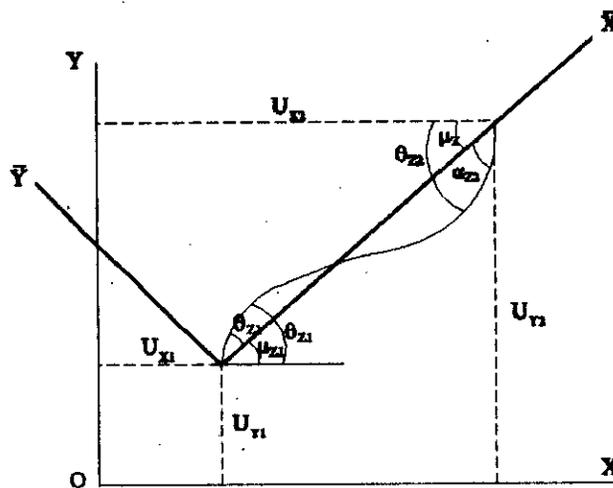


Figure (1-1): Déformation d'un élément quelconque

Grâce à l'élimination des rotations rigides de la rotation nodale totale, cette méthode permet de traiter de grands incréments de chargement sans que cela ne

créé des difficultés de convergence. Aussi, les résultats obtenus avec cette formulation (même en utilisant des incréments de chargement importants) sont de loin supérieurs à ceux recueillis avec la méthode présentée par Bathe et Boulourchi [12].

Toutefois, cette méthode perd de son efficacité lorsque la rotation dépasse les 90 degrés. Cette limitation est due essentiellement à l'incapacité des fonctions trigonométriques à représenter correctement les rotations rigides réelles au delà de 90 degrés. Par exemple, comme il est montré sur la figure (1-2), représentant un élément d'une structure donnée durant son mouvement, la rotation rigide μ_1 pour la première position est identique à celle déterminée par la formule trigonométrique (EQ 1.6.1b). Cependant, pour la seconde position de déformation, la rotation rigide déterminée par l'intermédiaire de la formule (EQ 1.6.1b) sera différente de la vraie valeur de la rotation rigide. En effet, si on prend le cas de la formule (EQ 1.6.1b) la rotation déterminée serait μ'_2 le complément de μ_2 à 180 degrés. Par conséquent, lorsque la rotation dépasse les 90 degrés, de nouveau une partie de la rotation rigide sera incluse dans l'évaluation des efforts internes engendrant ainsi des efforts parasites.

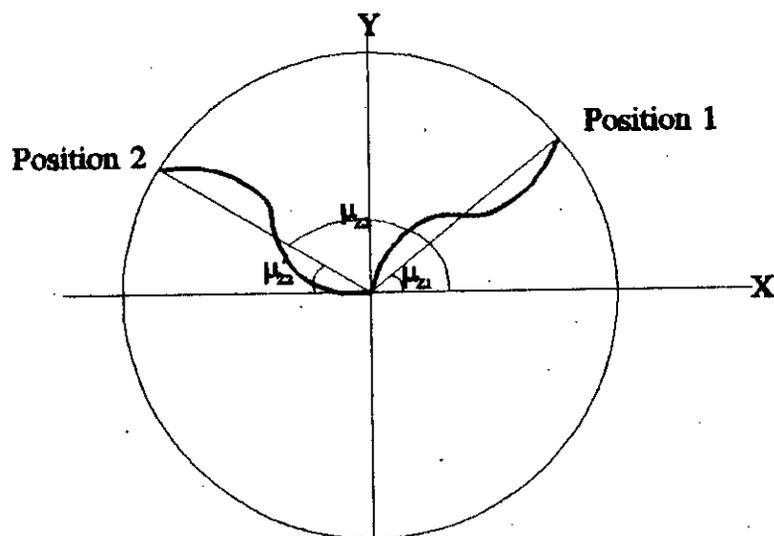


Figure (1-2): Processus de déformation durant le chargement d'un élément quelconque en description corotationnelle

En 1987 Hsiao [19] développe pour les problèmes d'analyse du comportement géométrique non linéaire des structures planes, une procédure qui permet de s'accommoder à de larges rotations. Contrairement à la technique utilisée par Chan et Kitipornchai [14,15], cette procédure, consiste à éliminer la rotation rigide, non pas de la rotation totale, mais de l'incrément de rotation par rapport à la configuration à l'instant t , de telle sorte qu'entre deux incréments successifs, la rotation rigide calculée à partir des formules trigonométriques (EQ1.6.1b) permet de représenter la vraie valeur de la rotation rigide. Il faut ensuite ajouter l'incrément de rotation de déformation naturelle à la rotation cumulée. Cette procédure peut être représentée mathématiquement par l'expression suivante:

$$\varphi_{t+\Delta t} = \varphi_t + \Delta\varphi - \mu \quad (1.6.2a)$$

où $\varphi_{t+\Delta t}$, φ_t représentent les rotations de déformation naturelle à l'instant $t+\Delta t$ et t , $\Delta\varphi$ est l'incrément de rotation nodale entre les configurations à l'instant t et l'instant $t+\Delta t$ et μ est l'incrément de la rotation rigide tel que:

$$\mu = \arctan\left(\frac{u_{yj} - u_{yi}}{l_t}\right) \quad (1.6.2b)$$

Cette technique, cependant, ne peut être directement étendue à l'analyse des structures tridimensionnelles, pour la simple raison que les grandes rotations ne sont pas des quantités vectorielles et n'obéissent donc pas aux règles du calcul vectoriel, car elles dépendent de l'ordre dans lequel elles sont considérées.

Pour des grandes rotations, la méthode de l'orientation des noeuds d'un élément, proposée par Oran [20.21] en 1973, et reprise ensuite en 1989 par Meek et Loganathan [22] peut être utilisée. Cette méthode peut manier des incréments de rotations illimités, mais elle est numériquement inefficace à cause du besoin de stocker l'orientation des axes aux extrémités de chaque élément pour chaque itération. Par ailleurs, l'extension de cette méthode à une analyse inélastique est très compliquée à cause de la difficulté de séparation des déformations élastiques et plastiques.

1.7) CONCLUSION

Nous relevons de cette étude bibliographique un nombre important de travaux sur l'analyse non linéaire des structures en poutres. Ceci est dû à la diversification des formulations cinématiques non linéaires qui peuvent être employées et au fait que jusqu'à ce jour, il n'est pas clair, laquelle des formulations est la plus efficace.

A cause de la difficulté de l'évaluation des matrices de rigidité correspondants aux termes non linéaires du tenseur des déformations de Green-Lagrange, plusieurs auteurs se sont contentés des matrices de rigidité linéaire et géométrique dans leurs équations de mouvement. Ces travaux souffrent, cependant, d'un problème inhérent à une analyse en grands déplacements: ils sont restreints à de petits incréments de déformation entre deux niveaux successifs de chargement. En effet à cause de la troncation des termes de déformation d'ordre supérieurs, la rotation rigide induit des déformations imaginaires produisant des efforts internes parasites. Par conséquent, ces formulations nécessitent un important outil informatique et un énorme temps de calcul.

Pour pallier à cet inconvénient, plusieurs techniques ont été développées. Celles-ci consistent à ajouter de nouvelles matrices de rigidité dans les équations Lagrangiennes de mouvement ou à adopter un processus de déformation pouvant lever cette restriction à de petits incréments de chargement.

Dans le premier cas, les travaux se sont limités qu'aux sections symétriques. Pour une analyse où les problèmes inhérents à une poutre spatiale (torsion non uniforme, excentricité des connexions, section dissymétrique) doivent être pris en considération, la détermination de ces matrices devient très complexe.

Dans le second cas, il s'agit de la formulation corotationnelle totale. Cette dernière est très efficace dans les problèmes d'analyse non linéaire des structures planes. En éliminant la rotation rigide, cette technique permet d'éviter les déformations imaginaires induit par celle-ci. Toutefois, elle ne peut être directement étendue à une analyse tridimensionnelle, du faite que les grandes rotations nodales ne sont pas des quantités vectorielles. Aussi, ces rotations ne peuvent pas être cumulées aux rotations des incréments précédents.

Chapitre 2

Cinématique des Grands Déplacements

Chapitre 2

CINEMATIQUE DES GRANDS DEPLACEMENTS

2.1) INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de présenter les formulations permettant la description du mouvement d'un corps en grands déplacements.

Les sections suivantes donnent un aperçu sur les outils nécessaires au développement de ces formulations.

Ainsi, dans le paragraphe (2.4), la forme générale du tenseur des déformations de Green-Lagrange en fonction des déplacements est établie.

Dans la section (2.5), le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et ses caractéristiques essentielles sont présentés. Mais, comme les composantes de ce tenseur ne sont pas directement calculées, une relation entre celui-ci et le tenseur de Cauchy est établie.

2.2) DIFFERENTES FORMULATIONS

Pour la description du mouvement du corps, il existe quatre formulations de base (Trusdell [29], Malvern [30] et Abou-Elkhier [1]):

- la description matérielle,
- la description référentielle,
- la description relative,
- la description spatiale.

a) Description matérielle

Dans cette description, les variables indépendantes sont le point matériel lui-même et le temps t . Cette formulation est extrêmement utilisée dans les problèmes analytiques de la mécanique des corps rigides. Cependant, elle est rarement employée par la mécanique des milieux continus, et spécialement, par la méthode des éléments finis.

b) Description référentielle

Dans cette description, les variables indépendantes sont la position X du point matériel P du corps, relative à une configuration de référence arbitraire, et le temps t . Il existe, par conséquent, une infinité de formulations référentielles, et le choix de l'une d'elles n'affecte en aucune façon les résultats de l'analyse. Une description particulière de référence a été introduite par Euler, dans laquelle la configuration de référence est celle correspondant à l'instant $t=0$. Cette formulation est souvent appelée dans la littérature "formulation Lagrangienne totale".

c) Description relative

Dans cette formulation, les variables indépendantes sont le temps t et la position X d'un point matériel P dans la configuration courante qui dépend elle-même du temps. Toutes les variables sont repérées par rapport à la dernière configuration connue. Dans certains ouvrages d'analyse par la méthode des éléments finis, cette description est connue sous le nom de la formulation Lagrangienne actualisée.

d) Description spatiale

Dans cette description, les variables indépendantes sont la position courante X d'un point matériel P (point fixe par rapport au repère en mouvement) et le temps t . On s'intéresse à ce qui se passe dans une région fixée de l'espace en

fonction du temps, sans se préoccuper des positions des éléments matériels à un instant antérieur. Cette approche est très employée dans les problèmes de la mécanique des fluides. Signalons enfin que, contrairement à la formulation référentielle, il n'existe qu'une seule description spatiale.

2.3) NOTATIONS ET SYSTEMES DE REFERENCE

Pour faciliter l'étude du comportement d'un corps Ω durant son mouvement, on suppose que la description de l'état de déformation du corps, est basée sur trois configurations: (c.f figure 2.1)

* la configuration à l'instant $t=0$, notée C_0 représentant l'état initial non déformé;

* la configuration à l'instant t , notée C_t : le premier état déformé ou la dernière position de déformation connue.

* la configuration à l'instant $t+\Delta t$, notée $C_{t+\Delta t}$: le second état déformé ou la position inconnue adjacente à la configuration C_t . Δt est l'incrément de temps.

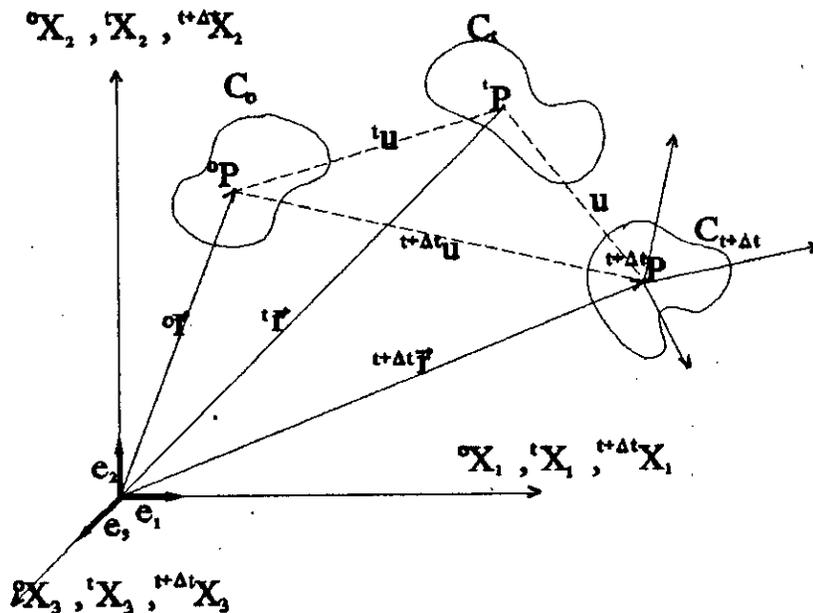


Figure (2-1): Mouvement d'un corps dans un système de coordonnées rectangulaires

Aussi, comme il est montré sur la figure (2.1), deux systèmes de coordonnées rectangulaires cartésiens de référence sont assignés à chaque configuration:

- un système global de référence fixe (X_I, \bar{e}_I) commun aux trois états;
- et
- un système local convectif (\bar{x}_I, \bar{e}_I) continuellement attaché au corps.

Par ailleurs, pour permettre de distinguer entre les différentes variables et leurs références par rapport aux différents états de déformation, la notation suivante, utilisée dans la référence [31] et reprise ensuite par plusieurs auteurs, est adoptée tout au long de cette étude: l'exposant et l'indice placés à gauche indiquent, respectivement, la configuration dans laquelle la variable se produit et celle par rapport à laquelle celle-ci est mesurée. L'absence d'exposant, à gauche, signifie seulement que la variable est un incrément entre les configurations aux instants t et $t+\Delta t$. En outre, la variable temps t représente le niveau de chargement.

Si on désigne par 0P , tP et ${}^{t+\Delta t}P$ les positions d'un point matériel quelconque P du corps dans les configurations C_0 , C_t et $C_{t+\Delta t}$, respectivement, alors les vecteurs positions de ce point, durant la déformation, par rapport au système fixe (X_I, \bar{e}_I) , seront repérés par:

$${}^0\bar{r} = {}^0\bar{r} ({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3) \quad \text{à l'instant } t=0 \quad (2.3.1)$$

$${}^t\bar{r} = {}^t\bar{r} ({}^tx_1, {}^tx_2, {}^tx_3) \quad \text{à l'instant } t \quad (2.3.2)$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{r} = {}^{t+\Delta t}\bar{r} ({}^{t+\Delta t}x_1, {}^{t+\Delta t}x_2, {}^{t+\Delta t}x_3) \quad \text{à l'instant } t+\Delta t \quad (2.3.3)$$

où $({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3)$, $({}^tx_1, {}^tx_2, {}^tx_3)$ et $({}^{t+\Delta t}x_1, {}^{t+\Delta t}x_2, {}^{t+\Delta t}x_3)$ sont, respectivement, les coordonnées du point P aux temps $\tau=0$, $\tau=t$ et $\tau=t+\Delta t$.

D'une manière similaire, on peut définir les déplacements du point P par rapport à la configuration initiale non déformée C_0 par:

$${}^t\bar{u} = {}^t\bar{u} ({}^tu_1, {}^tu_2, {}^tu_3) \quad \text{à l'instant } t \quad (2.3.4)$$

$${}^{t+\Delta t}\bar{u} = {}^{t+\Delta t}\bar{u} ({}^{t+\Delta t}u_1, {}^{t+\Delta t}u_2, {}^{t+\Delta t}u_3) \quad \text{à l'instant } t+\Delta t \quad (2.3.5)$$

Ainsi, les coordonnées des points tP et ${}^{t+\Delta t}P$ peuvent être exprimées en fonction de ces déplacements, comme suit:

$${}^t\vec{r} = {}^0\vec{r} + {}^t\vec{u} \quad (2.3.6)$$

$${}^{t+\Delta t}\vec{r} = {}^t\vec{r} + {}^{t+\Delta t}\vec{u} \quad (2.3.7)$$

Par conséquent, l'incrément de déplacement entre les positions C_t et $C_{t+\Delta t}$ est obtenu par l'expression:

$$\vec{u} = {}^{t+\Delta t}\vec{u} - {}^t\vec{u} \quad (2.3.8)$$

Remarque: Pour faciliter le développement, on suppose que le repère local dans la configuration à l'instant $\tau=0$ est identique au repère global (figure 2-2).

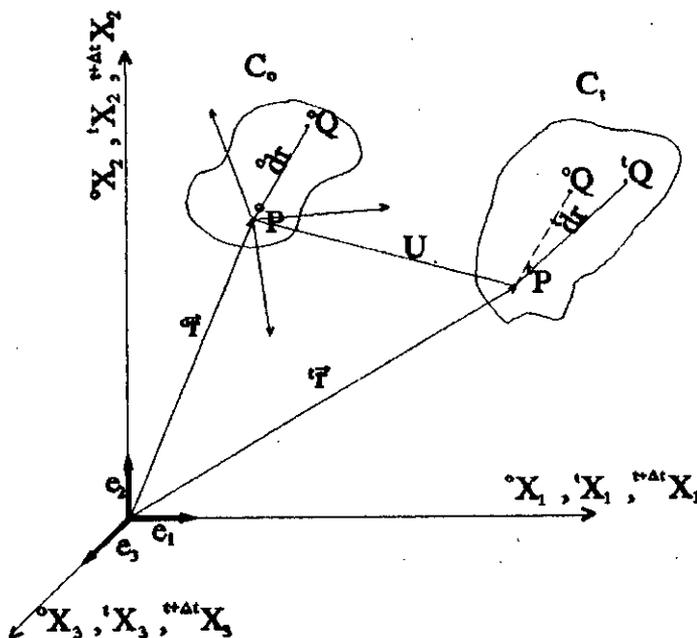


Figure (2-2): Processus de déformation d'un segment quelconque

2.4) ETUDE DU COMPORTEMENT DE LA DEFORMATION

Compte tenu des hypothèses présentées dans la section précédente, les positions d'une particule matérielle P , avant et après déformation, sont indiquées par ${}^0\vec{r} ({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3)$ et ${}^t\vec{r} ({}^tx_1, {}^tx_2, {}^tx_3)$, respectivement.

Considérons un point 0Q voisin de 0P . Dénotons ses coordonnées par ${}^0\vec{r}+{}^0d\vec{r}$ (${}^0x+{}^0dx$, ${}^0y+{}^0dy$, ${}^0z+{}^0dz$). alors, la distance 0ds , avant déformation, entre ces deux points, peut être exprimée par: (figure 2-2)

$$({}^0ds)^2 = {}^0d\vec{r} \cdot {}^0d\vec{r} \quad (2.4.1)$$

où

$${}^0d\vec{r} = \frac{\partial {}^0\vec{r}}{\partial {}^0x_i} {}^0dx_i \quad (2.4.2)$$

Si on désigne par \vec{e}_i la base vectorielle du système de référence fixe (0X_1 , 0X_2 , 0X_3), il vient:

$$\frac{\partial {}^0\vec{r}}{\partial {}^0x_i} = \vec{e}_i \quad (2.4.3)$$

Par conséquent:

$${}^0d\vec{r} = {}^0dx_i \vec{e}_i \quad (2.4.4)$$

L'équation (2.4.1) s'écrit alors:

$$({}^0ds)^2 = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j {}^0dx_i {}^0dx_j \quad (2.4.5)$$

Vu que les vecteurs unitaires \vec{e}_i formant la base vectorielle du système de référence fixe, sont mutuellement orthogonaux, alors:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (2.4.6)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker tel que:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i=j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.4.7)$$

ainsi l'équation (2.4.5) se réduit à:

$$({}^0ds)^2 = {}^0d\vec{r} \cdot {}^0d\vec{r} = \delta_{ij} {}^0dx_i {}^0dx_j \quad (2.4.8)$$

Sous l'influence d'un chargement extérieur, le corps se déforme, et les deux points 0P et 0Q se déplacent en tP et tQ (figure(2.2)). Désignons par ${}^t\vec{r}$ (tx_1 , tx_2 , tx_3) et ${}^t\vec{r}+{}^td\vec{r}$ (${}^tx_1+{}^tdx_1$, ${}^tx_2+{}^tdx_2$, ${}^tx_3+{}^tdx_3$) leurs coordonnées respectives, alors, la nouvelle longueur (tds) entre ces deux points sera égale à:

$$({}^t ds)^2 = {}^t d\vec{r} \cdot {}^t d\vec{r} \quad (2.4.9)$$

Le vecteur ${}^t d\vec{r}$ peut être exprimé dans le repère global fixe $({}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3)$ par:

$${}^t d\vec{r} = \frac{\partial {}^t \vec{r}}{\partial {}^0x_1} {}^0 dx_1 \quad (2.4.10)$$

Dénotons par \vec{a}_1 le terme:

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial {}^t \vec{r}}{\partial {}^0x_1} \quad (2.4.11)$$

alors le vecteur ${}^t d\vec{r}$ s'écrira:

$${}^t d\vec{r} = \vec{a}_1 \cdot {}^0 dx_1 \quad (2.4.12)$$

L'équation (2.4.9) devient par conséquent:

$$({}^t ds)^2 = {}^t d\vec{r} \cdot {}^t d\vec{r} = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 {}^0 dx_1 {}^0 dx_1 \quad (2.4.13)$$

Il est évident que l'égalité entre $({}^t ds)^2$ et $({}^0 ds)^2$ est une condition nécessaire et suffisante d'un mouvement de corps rigide. Par conséquent, la différence $({}^t ds)^2 - ({}^0 ds)^2$ peut être interprétée comme une mesure de déformation.

2.4.1) Tenseur de Green-Lagrange

Dans le paragraphe précédent, nous avons mis en évidence que la variation du carré de la longueur d'un segment peut être considérée comme une mesure de déformation. Dans cette section, les équations (2.4.8) et (2.4.13) exposées précédemment sont explicitées afin d'établir, sous la forme utilisée dans les descriptions Lagrangiennes, les termes du tenseur des déformations de Green-Lagrange.

Ainsi, à partir des équations (2.4.8) et (2.4.13), la variation de la longueur d'un segment PQ est égale à:

$$({}^t dS)^2 - ({}^o dS)^2 = {}^t d\vec{r} \cdot {}^t d\vec{r} = (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j - \delta_{ij}) {}^o dx_i {}^o dx_j \quad (2.4.14)$$

La moitié de la quantité $(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j - \delta_{ij})$ représente par définition le tenseur des déformations de Green-Lagrange:

$${}^t e_{ij} = \frac{1}{2} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j - \delta_{ij}) \quad (2.4.15)$$

Reprenons l'équation (2.4.14), et décomposons, selon l'équation (2.3.7) le vecteur position ${}^t \vec{r}$ en la somme de la position initiale ${}^o \vec{r}$ et du déplacement ${}^t \vec{u}$:

$${}^t \vec{r} = {}^o \vec{r} + {}^t \vec{u} \quad (2.4.16)$$

$${}^t d\vec{r} = {}^o d\vec{r} + {}^t d\vec{u} \quad (2.4.17)$$

D'après l'équation (2.3.4) ${}^t \vec{u} = {}^t u_i \vec{e}_i$. Par conséquent:

$${}^t d\vec{u} = \frac{\partial {}^t u_j}{\partial {}^o x_i} {}^o dx_i = \frac{\partial {}^t u_j}{\partial {}^o x_i} \vec{e}_j {}^o dx_i = {}^t u_{j,i} \vec{e}_j {}^o dx_i \quad (2.4.18)$$

d'où
$${}^t d\vec{r} = {}^o d\vec{r} + {}^t u_{j,i} \vec{e}_j {}^o dx_i \quad (2.4.19)$$

En remplaçant le terme ${}^o d\vec{r}$ par l'équation (2.4.4), on obtient:

$${}^t d\vec{r} = \vec{e}_i {}^o dx_i + {}^t u_{j,i} \vec{e}_j {}^o dx_i \quad (2.4.20)$$

soit:

$${}^t d\vec{r} = (\delta_{ji} + {}^t u_{j,i}) {}^o dx_i \vec{e}_i \quad (2.4.21)$$

Substituons cette égalité dans l'expression (2.4.14), il vient:

$$\begin{aligned} ({}^t dS)^2 - ({}^o dS)^2 &= (\delta_{ir} + {}^t u_{r,i}) {}^o dx_i (\delta_{jm} + {}^t u_{m,j}) {}^o dx_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_m \\ &\quad + \delta_{ij} {}^o dx_i {}^o dx_j \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Après quelques développements, on obtient:

$$({}^t dS)^2 - ({}^o dS)^2 = ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{r,i} {}^t u_{r,j}) {}^o dx_i {}^o dx_j \quad (2.4.23a)$$

En comparant cette dernière équation avec l'équation (2.4.14), on déduit:

$$(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j - \delta_{ij}) = ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{r,i} {}^t u_{r,j}) \quad (2.4.23b)$$

Sous la forme utilisée dans les descriptions Lagrangiennes, le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit:

$${}^t_0 e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{r,i} {}^t u_{r,j}) \quad (2.4.24)$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange dans la configuration $C_{t+\Delta t}$ peut être obtenu par la différence de la variation du carré de la longueur d'un segment donné entre les configurations C_0 et $C_{t+\Delta t}$:

$$2 \int_0^{\Delta t} {}^t_0 e \, dx_i \, dx_j = ({}^{t+\Delta t} ds)^2 - ({}^0 ds)^2 \quad (2.4.25)$$

En suivant le même procédé, on obtient:

$${}^{t+\Delta t}_0 e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} u_{i,j} + {}^{t+\Delta t} u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} u_{r,i} {}^{t+\Delta t} u_{r,j}) \quad (2.4.26)$$

Finalement, le tenseur incrément des déformations de Green-Lagrange peut être déduit par:

$$2 \, {}_0 e_{ij} = 2 ({}^{t+\Delta t}_0 e_{ij} - {}^t_0 e) \quad (2.4.27)$$

ou encore:

$$\begin{aligned} 2 \, {}_0 e_{ij} = & ({}^{t+\Delta t} u_{i,j} - {}^t u_{i,j}) + ({}^{t+\Delta t} u_{j,i} - {}^t u_{j,i}) + \\ & + {}^{t+\Delta t} u_{r,i} {}^{t+\Delta t} u_{r,j} - {}^t u_{r,i} {}^t u_{r,j} \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Soit, en utilisant l'incrément de déplacement entre les configurations C_t et $C_{t+\Delta t}$:

$${}_0 e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + {}^t u_{k,j} u_{k,i} + {}^t u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (2.4.29)$$

où u est l'incrément de déplacement entre les configurations C_t et $C_{t+\Delta t}$.

En général, le tenseur de Green-Lagrange est écrit sous la forme:

$${}_0 e_{ij} = {}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij} \quad (2.4.30)$$

où ${}_0 e_{ij}$ et ${}_0 \eta_{ij}$ sont, respectivement, les composantes linéaires et non linéaires du tenseur incrément des déformations de Green-Lagrange relatives à la configuration initiale non déformée, telles que:

$${}^0e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + {}^t u_{r,j} u_{r,i} + {}^t u_{r,i} u_{r,j}) \quad (2.4.31a)$$

et

$${}^0\eta_{ij} = \frac{1}{2} (u_{r,i} u_{r,j}) \quad (2.4.31b)$$

Par ailleurs, le tenseur des déformations de Green-Lagrange relatif à la configuration C_t peut être obtenu par le même procédé. Par analogie avec l'équation (2.4.24), on déduit:

$${}^{t+\Delta t}e = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{r,i} u_{r,j}) \quad (2.4.32)$$

où u est l'incrément de déplacement entre les configurations C_t et $C_{t+\Delta t}$.

Il est intéressant de signaler que ce tenseur reste invariant lors d'une rotation de corps rigide [30,31].

2.4.2) Tenseur d'Almansi-Euler

Le tenseur des déformations d'Almansi-Euler mesurant la déformation du corps par rapport à la configuration déformée, peut être obtenu par le même procédé [30,31,32]. Il est égal à:

$$2 {}^t e_{ij} = {}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} - {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j} \quad (2.4.32)$$

Remarquons que les composantes de ce tenseur, contrairement, à celles du tenseur de Green-Lagrange, ne sont pas invariantes lors d'une rotation de corps rigide.

2.5) TENSEUR DES CONTRAINTES

Dans la littérature, on peut trouver plusieurs types de tenseur de contrainte, comme:

- le tenseur de Cauchy;
- le premier tenseur de Piola-Kirchhoff;
- le second tenseur de Piola-Kirchhoff;
- le tenseur de Jauman,...

Cependant, le seul tenseur des contraintes qui peut être employé avec le tenseur des déformations de Green-Lagrange, est le second tenseur des contraintes de Piola-kirchhoff. Ceci pour différentes raisons:

- 1)- Il est énergiquement conjugué au tenseur des déformations de Green-Lagrange.
- 2)- Ses composantes, contrairement au tenseur de Cauchy, sont invariantes lors d'une rotation rigide du corps.
- 3)- A la différence du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, il est symétrique.

En général, le tenseur de Piola-kirchhoff n'est obtenu que par l'intermédiaire du tenseur des contraintes de cauchy, puisqu'en pratique c'est celui-ci qui est calculé. En effet, ce dernier mesure les contraintes effectives agissant sur le corps dans son état déformé. Aussi, il est nécessaire d'établir une relation permettant de relier ces deux tenseurs.

Soient ${}^t d\vec{f}$ le vecteur force actuel agissant sur une unité d'aire ${}^t dA$, dans la configuration à l'instant t et ${}^0 d\vec{f}$ celui qui agit sur l'unité d'aire ${}^0 dA$ à l'état non déformé à l'instant $t=0$. La relation entre ces deux vecteurs est donnée par:

$${}^0 d\vec{f} = {}^0 X \quad {}^t d\vec{f} \quad (2.5.1)$$

${}^0 X$ est le vecteur gradient des déformations à l'état C_t relatif à la configuration C_0 .

Soient ${}^t \vec{n}$ et ${}^0 \vec{n}$ les vecteurs unitaires normaux aux surfaces unitaires ${}^t dA$ et ${}^0 dA$, respectivement. En utilisant les formules de Cauchy, on obtient:

$${}^t df_i = {}^t \tau_{ij}^T \quad {}^t n_j \quad {}^t dA \quad (2.5.2)$$

$${}^0 df_i = {}^0 \sigma_{ij}^T \quad {}^0 n_j \quad {}^0 dA \quad (2.5.3)$$

où ${}^t \tau_{ij}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy agissant dans la configuration à l'instant t . ${}^0 \sigma_{ij}$ est le second tenseur des contraintes de Piola-kirchhoff agissant dans la configuration à l'instant t mais mesuré par rapport à la configuration initiale non déformée C_0 .

De même que dans l'équation (2.5.1), les vecteurs unitaires normaux aux surfaces ${}^t dA$ et ${}^0 dA$, sont reliés par la relation:

$${}^0\vec{n} = {}^0X {}^t\vec{n} \quad (2.5.4)$$

aussi:

$${}^0dA = \det({}^0X) {}^tdA \quad (2.5.5)$$

Multiplions membre à membre, les équations (2.5.4) et (2.5.5), nous obtenons alors, la formule de Nanson:

$${}^0\vec{n} {}^0dA = \det({}^tX) {}^0X {}^t\vec{n} {}^tdA \quad (2.5.6)$$

Substituons les équations (2.5.2) et (2.5.3) dans l'équation (2.5.1) et en utilisant l'équation (2.5.6), on obtient:

$${}^t\sigma_{ij} = \text{Det}({}^tX) {}^0X \tau_{ij} {}^0X \quad (2.5.7)$$

En considérant le principe de conservation de la masse, le déterminant du gradient des déformations peut être exprimé par:

$$\text{Det}({}^0X) = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} \quad (2.5.8)$$

où ${}^0\rho \setminus {}^t\rho$ représente le rapport des densités aux temps $t=0$ et t .

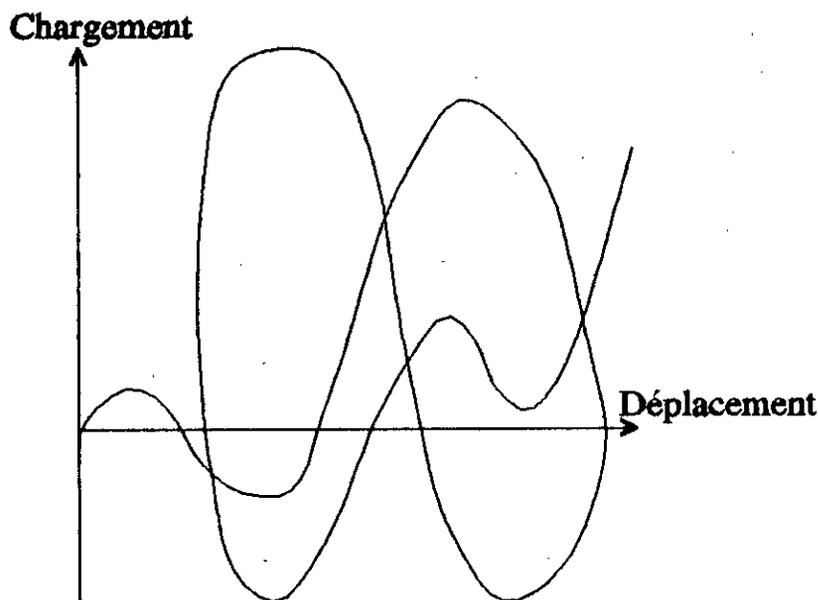
Par conséquent, l'équation (2.5.8) devient:

$${}^t\sigma = \frac{{}^0\rho}{{}^t\rho} {}^0X_{i,k} {}^t\tau_{ij} {}^0X_{j,k} \quad (2.5.9)$$

2.6) EQUATION DE MOUVEMENT

2.6.1) Introduction

Généralement et comme il est montré sur la figure (2.3), la solution dans une analyse non linéaire n'est pas unique. Bien qu'une solution puisse être obtenue, elle peut cependant ne pas être nécessairement celle attendue ou encore n'avoir aucune signification physique. Ceci est dû au fait que la solution dépend du chemin de chargement. Par conséquent, il est nécessaire d'employer une formulation incrémentale permettant de suivre correctement le bon chemin de chargement-déplacement (déformation).



Figure(2-3): Réponse d'une couple spatiale en treillis [67]

Dans ce sens, on suppose, comme il a été mentionné dans la section (2.2), que les solutions correspondantes aux incréments de temps entre l'instant $t=0$ et l'instant t ont été obtenues.

L'équation d'équilibre pour le prochain incrément de chargement à l'instant $t+\Delta t$ peut être établie en utilisant le principe des déplacements virtuels.

Ce principe stipule que si un système est en équilibre sous l'action d'une ou de plusieurs forces et que celui-ci est soumis à un déplacement virtuel cinématiquement compatible avec ses contraintes géométriques, alors le travail virtuel effectué par les efforts internes sera égal au travail virtuel des forces extérieures appliquées.

En utilisant la notation tensorielle, l'équation de mouvement s'écrit: [31]

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} {}^{t+\Delta t}dV = {}^{t+\Delta t}g \quad (2.6.1)$$

où ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$: les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy.

${}^{t+\Delta t}e_{ij}$: les composantes du tenseur des déformations infinitésimales par rapport à la configuration à l'instant $t+\Delta t$.

${}^{t+\Delta t}\mathcal{G}$: travail virtuel des forces extérieures, tel que:

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{G} = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}f_i^V \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{{}^{t+\Delta t}A} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i {}^{t+\Delta t}dA \quad (2.6.2)$$

dans cette équation:

${}^{t+\Delta t}f_i^V$, ${}^{t+\Delta t}f_i^S$:représentent les composantes des vecteurs forces extérieures de volume et de surface, respectivement.

δu_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur déplacement virtuel.

Comme en général, le corps peut subir de grands déplacements, c'est à dire que la configuration à l'instant $t+\Delta t$ est inconnue, et que les relations constitutives sont non linéaires, la relation (2.6.1) ne peut être directement résolue. Toutefois, une solution approximative peut être obtenue en repérant toutes les variables cinématiques et statiques par rapport à des configurations d'équilibre connues. Mais, étant donné que les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy et celles du tenseur des déformations infinitésimales changent lors d'une rotation de corps rigide et induisent ainsi des efforts supplémentaires parasites pouvant conduire à des résultats inattendus, ces tenseurs ne peuvent être directement utilisés.

Pour pallier à ce problème, d'autres grandeurs doivent être utilisées Bathe [31] et Washizu [33]. Il s'agit évidemment du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (voir section (2.5)) et du tenseur des déformations de Green-Lagrange. Ces deux tenseurs sont, d'un côté, énergiquement conjugués. Ceci implique que les équations développées pour les petits déplacements peuvent être employées en grands déplacements. D'un autre côté, ils sont invariants lors d'un mouvement de corps rigide. Par conséquent, seules les déformations pures du matériau produiront une variation dans les composantes du tenseur des contraintes.

En utilisant ces grandeurs, on distingue deux formulations pour l'étude du mouvement du corps en grands déplacements. Le choix de l'une d'elles ne dépend que du choix du référence par rapport auquel ces grandeurs sont mesurées.

2.6.2) Formulation Lagrangienne totale

Dans cette formulation, toutes les variables statiques et cinématiques sont référées à la configuration (état) initiale non déformée ($t=0$). L'équation d'équilibre (2.6.1) se transforme en:

$$\int_{\circ v} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} \circ dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{G} \quad (2.6.3)$$

où ${}^{t+\Delta t} \mathcal{G}$ est le travail virtuel total des forces extérieures, tel que:

$${}^{t+\Delta t} \mathcal{G} = \int_{\circ A} {}^{t+\Delta t} T_k \delta u_k \circ dA + \int_{\circ v} \circ \rho {}^{t+\Delta t} f_k \delta u_k \circ dV \quad (2.6.4)$$

Dans les équations (2.6.3) et (2.6.4), δu_k est la variation (virtuelle) des composantes courantes du vecteur de déplacement. $\delta {}^{t+\Delta t} e_{ij}$ est la variation virtuelle des composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange dans la configuration à l'instant $t+\Delta t$ repérées par rapport à la configuration initiale $t=0$, défini dans le paragraphe (2.4.3). ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}$ sont les composantes du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff agissant dans la configuration actuelle $C_{t+\Delta t}$ relatives à la configuration initiale non déformée C_0 , introduit dans la section (2.5).

D'après les équations (2.4.26) et (2.5.9) on a:

$${}^{t+\Delta t} e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} u_{i,j} + {}^{t+\Delta t} u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} u_{k,i} {}^{t+\Delta t} u_{k,j}) \quad (2.6.5)$$

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = \frac{\circ \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} \circ {}^{t+\Delta t} X_{i,k} {}^{t+\Delta t} \tau_{kl} \circ {}^{t+\Delta t} X_{j,l} \quad (2.6.6)$$

où $\circ {}^{t+\Delta t} X_{i,j} = \frac{\partial \circ X_i}{\partial {}^{t+\Delta t} X_j}$ et ${}^{t+\Delta t} \tau_{kl}$ est la composante du tenseur des contraintes de Cauchy à l'instant $t+\Delta t$.

Puisque les contraintes ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}$ et les déformations ${}^{t+\Delta t} e$ sont inconnues à l'instant $t+\Delta t$, la décomposition incrémentale suivante est nécessaire.

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + \circ \sigma_{ij} \quad (2.6.7)$$

$${}^{t+\Delta t} e_{ij} = {}^t e_{ij} + \circ e_{ij} \quad (2.6.8)$$

où ${}^t\sigma_{ij}$ et ${}^t\epsilon$ sont les composantes du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et du tenseur des déformations de Green-Lagrange connues dans la configuration à l'instant t , respectivement. Il découle de l'équation (2.6.8) que:

$$\delta {}^{t+\Delta t} \circ \epsilon_{ij} = \delta \circ \epsilon_{ij} \quad (2.6.9)$$

comme nous l'avons mentionné dans la section (2.4), l'incrément des déformations peut être séparé en 2 parties; une partie linéaire et une autre non linéaire:

$$\circ \epsilon_{ij} = \circ \epsilon_{ij} + \circ \eta_{ij} \quad (2.6.10)$$

où:

$$\circ \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [(\circ u_{i,j} + \circ u_{j,i}) + ({}^t u_{k,j} \circ u_{k,j} + {}^t u_{k,j} \circ u_{k,i})] \quad (2.6.11)$$

et

$$\circ \eta_{ij} = \frac{1}{2} [(u_{k,i} \circ u_{k,j})] \quad (2.6.12)$$

D'après les relations constitutives, l'incrément de contraintes $\circ \sigma_{ij}$ est égal à:

$$\circ \sigma_{ij} = \circ C_{ijkl} \circ \epsilon_{kl} \quad (2.6.13)$$

En utilisant les équations (2.6.7) à (2.6.13), l'équation (2.6.4) peut être transformée en:

$$\begin{aligned} & \int_{\circ v} \circ C_{ijkl} \circ \epsilon_{kl} \delta \circ \epsilon_{ij} \circ dV + \int_{\circ v} \circ C_{ijkl} \circ \eta_{kl} \delta \circ \epsilon_{ij} \circ dV + \\ & + \int_{\circ v} \circ C_{ijkl} \circ \epsilon_{kl} \delta \circ \eta_{ij} \circ dV + \int_{\circ v} \circ C_{ijkl} \circ \eta_{kl} \delta \circ \eta_{ij} \circ dV + \\ & \int_{\circ v} {}^t \sigma_{ij} \delta \circ \eta_{ij} \circ dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{E} - \int_{\circ v} {}^t \sigma_{ij} \delta \circ \epsilon_{ij} \circ dV \quad (2.6.14) \end{aligned}$$

La formulation en éléments finis de l'équation (2.6.14) est établie par approximation du champ de déplacement à l'intérieur de chaque élément par l'expression:

$$\circ \bar{u}_i = \sum_{k=1}^{ndle} \circ N_k^i \circ \bar{u}_k \quad (2.6.15)$$

Où ${}^0\bar{u}^k$ sont les incréments de déplacements nodaux à l'instant t , mais mesurés par rapport au repère initial local ${}^0\bar{x}_i$. ${}^0\eta_k^i$ sont les fonctions d'interpolation correspondantes au repère local ${}^t\bar{x}_i$ mais mesurées dans le repère convectif locale ${}^0\bar{x}_i$. Nous supposons que ces fonctions vérifient toutes les conditions requises. En substituant les équations (2.6.11), (2.6.12) et (2.6.15) dans l'équation (2.6.14) on obtient l'équation d'équilibre éléments finis qui s'écrit:

$$(\delta_0 \bar{u})^T ([{}^t\bar{K}_e] + [{}^t\bar{K}_g] + [{}^t\bar{K}_{u1}] + [{}^t\bar{K}_{u2}]) \{ \bar{u} \} = \{ \delta_0 \bar{u} \}^T (\{ {}^{t+\Delta t} R_{ext} \} - \{ {}^t F_{int} \}) \quad (2.6.16)$$

Où:

$$\{ \delta_0 \bar{u} \}^T [{}^t\bar{K}_e] \{ \bar{u} \} = \int_{0v} {}_0 C_{ijkl} {}_0 e_{kl} \delta_0 e_{ij} {}^0 dv$$

$$\{ \delta_0 \bar{u} \}^T [{}^t\bar{K}_g] \{ \bar{u} \} = \int_{0v} {}^t \sigma_{ij} \delta_0 \eta_{ij} {}^0 dv$$

$$\{ \delta_0 \bar{u} \}^T [{}^t\bar{K}_{u1}] \{ \bar{u} \} = \int_{0v} {}_0 C_{ijkl} {}_0 \eta_{kl} \delta_0 e_{ij} {}^0 dv + \int_{0v} {}_0 C_{ijkl} {}_0 e_{kl} \delta_0 \eta_{ij} \text{sup} 0 dv$$

$$\{ \delta_0 \bar{u} \}^T [{}^t\bar{K}_{u2}] \{ \bar{u} \} = \int_{0v} {}_0 C_{ijkl} {}_0 \eta_{kl} \delta_0 \eta_{ij} {}^0 dv$$

$$\{ \delta_0 \bar{u} \}^T ({}^t F) = \int_{0v} {}^t \sigma_{ij} \delta_0 e_{ij} {}^0 dv$$

En pratique, les matrices de rigidité ${}^t\bar{K}_{u2}$ et ${}^t\bar{K}_{u1}$ sont très difficiles à obtenir. Aussi, la plupart des études traitant le problème de la non linéarité géométrique se sont limitées qu'aux deux premiers termes.

2.6.3) Formulation Lagrangienne actualisée

Dans cette formulation, toutes les variables sont repérées (mesurées) par rapport à la dernière configuration connue, c'est à dire la configuration C_t . De même que dans la formulation Lagrangienne totale, l'équilibre du corps peut être déterminé en utilisant le principe des déplacements virtuels. Il s'exprime alors par l'équation:

$$\int_{tV} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{G} \quad (2.6.18)$$

Il est essentiel de remarquer que l'équilibre est exprimé par rapport à la configuration déformée à l'instant t .

Les termes ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}$ et ${}^{t+\Delta t} e_{ij}$ sont, respectivement, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et le tenseur des déformations de Green-Lagrange repérés par rapport à la configuration à l'instant t .

Procédons de la même manière que dans le paragraphe précédent, et décomposons les deux tenseurs sous la forme incrémentale suivante:

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + {}^t \sigma_{ij} \quad (2.6.19)$$

$${}^{t+\Delta t} e_{ij} = {}^t e_{ij} = {}^t e_{ij} + {}^t \eta_{ij} \quad (2.6.20)$$

où

$${}^t e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

et

$${}^t \eta_{ij} = \frac{1}{2} (u_{k,i} u_{k,j})$$

Remarquons que le tenseur ${}^t \sigma_{ij}$ est identique au tenseur de Cauchy τ_{ij} .

En considérant la relation constitutive entre l'incrément de contrainte et celui de déformation:

$${}^t \sigma_{ij} = {}^t C_{ijkl} e_{kl} \quad (2.6.21)$$

L'équation (2.6.15) s'écrira alors:

$$\int_{tV} {}^t C_{ijkl} e_{kl} \delta {}^{t+\Delta t} e_{ij} {}^t dV + \int_{oV} \tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} e_{i,j} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{G} \quad (2.6.22)$$

Si on suppose de petits incréments de déplacement et de déformation entre les configurations C_t et $C_{t+\Delta t}$, alors le premier terme de cette dernière équation peut être linéarisé en prenant ${}^{t+\Delta t} e_{ij} = {}^t e_{ij} = {}^t e_{ij}$. L'équation linéarisée devient par conséquent:

$$\int_{\tau_V} {}^t C_{ijkl} {}^t e_{kl} \delta {}^t e_{ij} {}^t dV + \int_{\tau_V} \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{G} \quad (2.6.23)$$

Le second terme du membre à gauche de l'équation (2.6.22), par contre, ne peut être linéarisé, étant donné que le tenseur initial des contraintes τ_{ij} n'est pas relié au tenseur incrément de déformation ${}^t e_{ij}$. Aussi, nous aurons:

$$\tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} = \tau_{ij} (\delta {}^t e_{ij} + \delta {}^t \eta_{ij}) \quad (2.6.24)$$

L'équation finale d'équilibre s'écrira alors:

$$\int_{\tau_V} {}^t C_{ijkl} {}^t e_{kl} \delta {}^t e_{ij} {}^t dV + \int_{\tau_V} \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{G} - \int_{\tau_V} \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} {}^t dV \quad (2.6.25)$$

De même que dans le paragraphe précédent, la formulation en éléments finis de l'équation (2.6.25) peut être réalisée par approximation l'incrément du champ de déplacement à l'intérieur de chaque élément par la fonction:

$${}^t \bar{u}_i = \sum_{k=1}^{ndle} {}^t n_k^i {}^t \bar{u}^k \quad (2.6.26)$$

L'équation en éléments finis correspondant à l'équation (2.6.25) s'écrit:

$$\{ {}^t \bar{u} \}^T ([{}^t \bar{K}_E] + [{}^t \bar{K}_G]) \{ {}^t \bar{u} \} = \{ {}^t \bar{u} \}^T (\{ {}^{t+\Delta t} R \} - \{ {}^t F \}) \quad (2.6.27)$$

Dans cette expression:

[K_E] est la matrice de rigidité élastique

[K_G] est la matrice de rigidité géométrique.

2.7) Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les deux formulations les plus utilisées pour décrire le mouvement d'un corps solide en grands déplacements.

Ces formulations sont identiques en ce qui concerne les équations de mouvement, toutefois la formulation Lagrangienne actualisée est numériquement plus efficace

pour différentes raisons:

1)- La procédure incrémentale de la formulation Lagrangienne actualisée est très simple. Elle n'implique que des additions de vecteurs comme les déplacements nodaux ou les contraintes. Ceci n'est pas le cas de la formulation totale. En effet, la comparaison des équations de mouvement (2.6.25) et (2.6.14) correspondant respectivement aux descriptions Lagrangiennes actualisée et totale révèle que la première équation est écrite en fonction des contraintes de Cauchy, alors que la seconde est en fonction des contraintes de Piola-Kirchhoff. Mais comme ces dernières ne sont obtenues que par l'intermédiaire des contraintes de Cauchy (voir paragraphe 2.5), ceci implique que dans la description totale, les contraintes doivent être évaluées dans la configuration déformée puis transformées par l'intermédiaire de l'équation (2.5.7) vers l'état non déformé. Ceci doit être exécuté pour chaque point d'intégration.

2)- Dans la formulation Lagrangienne actualisée, la non linéarité géométrique est prise naturellement par actualisation du repère à chaque incrément de temps.

3)- Plusieurs modèles constitutifs (béton, roche, sol,...) qui sont aujourd'hui développés, sont basés sur des incréments de déformations et de contraintes.

Chapitre 3

Théorie des Poutres à Parois Minces

THEORIE DES POUTRES A PAROIS MINCES

3.1) INTRODUCTION

Le besoin accru de réaliser des constructions de plus en plus hautes et économiques a engendré un recours à des constructions en poutres à parois-minces. Celles-ci assurent une grande rigidité avec un poids relativement faible par rapport aux poutres à sections pleines.

Cependant, ces poutres possèdent quelques particularités qui font qu'elles présentent, sous certains cas de chargement, un comportement différent des poutres pleines. Ces particularités résident essentiellement à travers les caractéristiques géométriques. En effet, dans la section d'une poutre à parois-minces, une des dimensions (l'épaisseur) est plus petite que l'autre, la longueur du contour (s). Cette dernière, à son tour, est bien plus petite que la longueur de la barre (l). Ceci lui procure un comportement semblable à celui des enveloppes.

Pour certaines applications, la poutre à parois-minces conserve, en tant que schéma de calcul, les principales propriétés d'une poutre ordinaire. Ainsi, pour un chargement flexionnel et axial, la théorie des poutres simples est généralement suffisante pour prédire la réponse de la poutre à parois-minces. Aussi, les mêmes traitements analytiques sont employés quel que soit le type de section considéré.

Cependant, sous un chargement de torsion, la poutre à parois-minces révèle, en vertu de ses rapports géométriques, un comportement très différent d'une poutre à section pleine. Cette différence provient principalement du gauchissement de la section (la section droite ne reste pas plane) et doit être pris en compte dans l'analyse. Le gauchissement se produit dans la majorité des poutres, quel que soit le type de la section envisagé. Mais, alors que, pour les poutres à section pleine, les déformations associées au gauchissement sont souvent négligées, elles peuvent atteindre des grandeurs considérables pour les poutres à parois-minces et à section ouverte. Ceci est dû à leur faible rigidité à la torsion.

Bien que la section ne reste pas plane, le principe de torsion de Saint-Venant reste toujours applicable si les déformations résultantes du gauchissement ne sont pas empêchées. Cependant, si pour une raison quelconque le gauchissement résultant de la torsion varie d'une section à une autre, par exemple, en encastrant la barre à ses extrémités, il apparaît alors, dans les sections droites, des contraintes normales notables qui ne peuvent être justifiées par le principe de torsion de Saint-Venant.

Dans quelques applications, ces contraintes peuvent être plus importantes que celles produites simultanément par le moment de flexion et la force axiale. Dans ces conditions, la théorie des poutres simples n'est pas adéquate, et un recours à une théorie plus complexe est requis.

Les principes de la théorie des poutres à parois-minces ont été formulés par Timoshenko [34]. Cette théorie a reçu ensuite un développement général dans les travaux de Vlasov [35], aussi l'appelle-t-on habituellement théorie de Vlasov. L'intérêt de cette approche est qu'elle représente une simple extension de la théorie des poutres simples, dans laquelle des termes additionnels sont ajoutés pour tenir compte de l'effet résultant de la limitation du gauchissement.

3.2) CARACTERISTIQUES SECTORIELLES

Pour prendre en compte l'effet résultant du gauchissement, la théorie des poutres à parois-minces fait intervenir, en plus des propriétés géométriques classiques (moment statique, moment d'inertie, ...) de nouvelles grandeurs [36]. Celles-ci

sont appelées caractéristiques sectorielles.

3.2.1) Aire sectorielle

L'aire sectorielle d'une section à parois-minces est définie par l'intégrale:

$$\omega = \int_A^B r ds \quad (3.2.1)$$

où r désigne la distance entre la tangente en un point arbitraire N de la ligne médiane et l'axe de rotation (figure 3-1).

Comme il est montré sur la figure (3-1), la fonction de gauchissement ω est égale au double de l'aire balayée par le rayon vecteur ON .

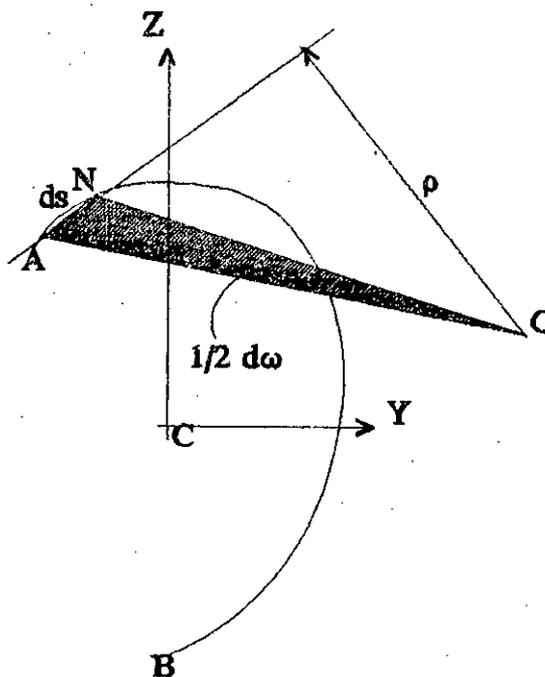


Figure (3-1): Aire sectorielle

Par hypothèse, le rayon r est compté positif lorsqu'un vecteur porté par la tangente à la ligne médiane, se dirigeant vers les coordonnées s croissantes, avance dans le sens trigonométrique par rapport à l'axe de la rotation. Ainsi, si le rayon r tourne dans le sens trigonométrique, l'accroissement de l'aire ω

est affecté d'un signe plus, sinon, il est négatif.

Il découle de la définition (équation 3.2.1) que l'aire sectorielle est une fonction de l'aire et du rayon r . Elle dépend donc, de l'origine des arcs sur la courbe et de la position du centre de rotation O .

Le déplacement du centre de rotation produit un enrichissement de l'aire sectorielle par de nouveaux termes linéaires par rapport aux coordonnées y et z . Ainsi, par exemple, si le centre de rotation se déplace en T , alors:

$$\omega_T = \omega_O + a_y y - a_z z + c \quad (3.2.2)$$

où a_y et a_z sont les coordonnées du point t par rapport au point O , respectivement.

Le changement de l'origine des arcs s (du point A) entraîne le changement de l'aire sectorielle en tous les points du contour d'une même quantité constante, puisqu'il entraîne le changement de la borne inférieure de l'intégrale.

3.2.2) Moments sectoriels

En plus de l'aire sectorielle, l'analyse des poutres à parois-minces et à section ouverte fait intervenir d'autres caractéristiques sectorielles qui sont:

- Moment statique sectoriel qui est égal à:

$$S_\omega = \int_A \omega \, dA \quad (3.2.7)$$

- Moments linéiques sectoriels, définis par:

$$I_{\omega y} = \int_A y \omega \, dA \quad (3.2.8)$$

$$I_{\omega z} = \int_A z \omega \, dA \quad (3.2.9)$$

- Moment d'inertie sectoriel:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA \quad (3.2.10)$$

Notons toutefois, que les expressions I_{ω_x} et I_{ω_y} sont nulles par rapport au centre de torsion.

3.2.3) Centre de torsion

Pour les applications dans lesquelles la section est dissymétrique, la flexion simple s'accompagne généralement d'une torsion. Dans ces conditions, l'analyse devient extrêmement complexe à cause du couplage des effets de la flexion et ceux de la torsion.

Pour faciliter l'analyse, il est d'usage en pratique de séparer ces effets. Ceci est réalisé en considérant la flexion autour d'un axe ne contenant que les points pour lesquels les forces extérieures appliquées n'engendrent pas de torsion. On appelle centre de torsion tout point appartenant à cet axe. Dans certains ouvrages, le centre de torsion est connu aussi sous le nom de centre de cisaillement ou centre de flexion.

Les coordonnées du centre de torsion S par rapport au centre de gravité de la section sont données par:

$$z_s = \frac{-\int y \omega_c dA}{I_x} \quad y_s = \frac{\int z \omega_c dA}{I_y} \quad (3.2.24)$$

où ω_c est l'aire sectorielle par rapport au centre de gravité C, et I_x et I_y sont, respectivement, les moments d'inertie de la section par rapport aux axes z et y passant par le centre de gravité.

Lorsque la section possède un axe de symétrie, le centre de torsion se trouve sur cet axe. Si la section a deux axes de symétrie, le centre de torsion coïncide avec le centre de gravité de celle-ci.

De même, pour certaines formes simples, la position du centre de torsion peut être connue sans calculs. Ainsi, pour les profilés en forme de té et cornière (figure 3-2), le centre de torsion se trouve au point d'intersection de la ligne moyenne de la branche verticale et de la semelle.

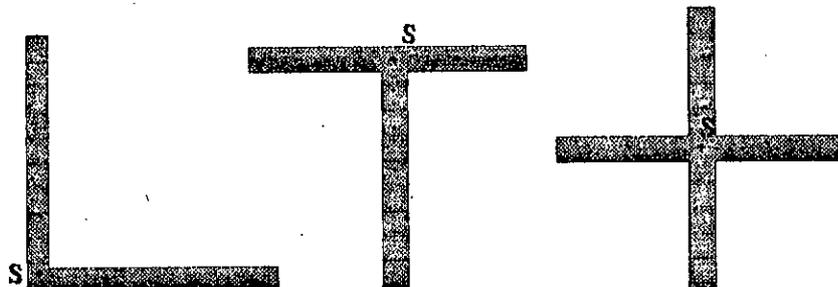


Figure (3-2): Centre de torsion

3.3) COMPORTEMENT FLEXIONNEL

Lorsqu'une poutre à parois-minces est soumise à une flexion simple, il apparaît au droit de ses sections, des contraintes normales et tangentielles.

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, les relations de calcul des contraintes normales sont identiques à celles développées pour les poutres ordinaires. Ces contraintes sont en général plus importantes que les contraintes tangentielles, ce sont donc elles qui déterminent la résistance ultime de la barre.

Toutefois, la grandeur et les lois de répartition des contraintes tangentielles révèlent une importance primordiale. Le principe de détermination de ces contraintes est semblable à celui utilisé pour les poutres pleines.

Il est important de remarquer que les contraintes tangentielles dans une poutre à parois-minces, contrairement aux poutres pleines, ne sont pas déterminées dans le plan parallèle à la couche neutre, mais, calculées dans le plan perpendiculaire à la ligne médiane où l'épaisseur de paroi est minimum.

En admettant que ces contraintes soient uniformément réparties, alors:

$$\tau = \frac{F_y S_z^*}{I_z e} \quad (3.3.1)$$

où F_y est l'effort tranchant dans la direction y , S_z^* est le moment statique d'un secteur situé d'un côté de la coupe longitudinale (figure 3-3), I_z est le moment d'inertie et e est l'épaisseur de la paroi.

D'après le principe de réciprocité, les contraintes tangentielles τ agissant dans la section longitudinale engendrent des contraintes de cisaillement conjuguées. Celles-ci se manifestent dans les sections droites et sont dirigées selon la tangente au contour de la section.

Dans le cas où la section est soumise à plusieurs forces dont la direction n'est pas confondue avec l'axe principal, on a évidemment:

$$\tau = \frac{F_y S_z^*}{I_z e} + \frac{F_z S_y^*}{I_y e} \quad (3.3.2)$$

3.4) GAUCHISSEMENT EN TORSION

Considérons la torsion d'une barre à profil ouvert et à section de forme quelconque (figure 3-4). Supposons que pendant la torsion, les sections droites de la barre tournent autour d'un axe passant par un point immobile O (hypothèse de l'indéformabilité de la section).

L'angle de glissement γ dans l'élément de surface $ABCD$ est égal à la somme des angles α et β :

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (3.4.1)$$

D'après la figure (3-4), l'angle α est égal à:

$$\alpha = \frac{AA'}{dx} \quad (3.4.2a)$$

tel que

$$AA' = r d\varphi \quad (3.4.2b)$$

Où r est la distance du centre de torsion à la tangente du contour au point A

et $d\varphi$ est l'angle de rotation réciproque de deux sections voisines. L'angle $d\varphi$ est tel que:

$$d\varphi = \theta dx \quad (3.4.2c)$$

où θ est l'angle de rotation par unité de longueur.

En substituant l'équation (3.4.2b) par l'équation (3.4.2a), on obtient:

$$\alpha = r \frac{d\varphi}{dx} = r\theta \quad (3.4.3)$$

Si on désigne par u_x les déplacements des points de la ligne médiane dans la direction x , le terme β s'écrit:

$$\beta = \frac{du_x}{ds} \quad (3.4.4)$$

l'équation (3.4.1) devient alors:

$$\gamma = r\theta + \frac{du_x}{ds} \quad (3.4.5)$$

Conformément à la loi de Hooke on peut écrire:

$$\frac{du_x}{ds} = \left(\frac{\tau}{G} - r\theta \right) \quad (3.4.6)$$

Selon l'hypothèse de Vlasov [35], les contraintes tangentielles dans la ligne moyenne sont nulles $\tau = 0$. Ainsi, l'équation ci-dessus se réduit à:

$$du_x = -\theta r ds \quad (3.4.7)$$

Posons:

$$d\omega = r ds \quad (3.4.8)$$

Par conséquent:

$$du_x = -\theta d\omega \quad (3.4.9a)$$

Après intégration:

$$u_x = -\theta\omega \quad (3.4.9b)$$

où ω est l'aire sectorielle.

D'après l'équation (3.2.2), le déplacement du centre de rotation enrichit l'aire sectorielle par de nouveaux termes linéaires par rapport aux coordonnées y et

z. Ceci implique que ce déplacement n'entraîne pas de déformations supplémentaires de la poutre. c'est à dire que le déplacement longitudinal s'obtient en déplaçant la section comme un corps rigide. Autrement dit, la position de l'axe de rotation, pour une torsion pure, n'importe pas et toute ligne parallèle à l'axe longitudinal peut être prise comme axe de rotation.

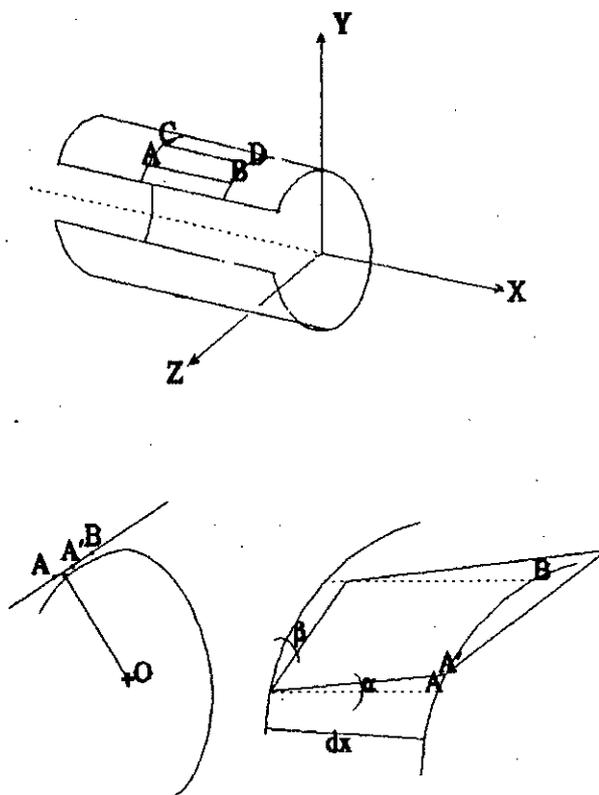


Figure (3-4): Gauchissement en torsion d'une poutre à parois minces

3.5) TORSION PURE

Lorsqu'une barre est soumise à une torsion pure, ses extrémités sont libres de se mouvoir. Dans ce cas, l'angle de rotation par unité de longueur est constant. Ceci implique que le gauchissement est le même pour toutes les sections droites (indépendamment de x). Il s'effectue sans qu'il y ait des déformations axiales des fibres longitudinales. Dans ce cas:

$$e_x = \frac{dU_x}{dx} = -\omega \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad (3.5.1)$$

les seules contraintes produites sont celles de cisaillement.

Nous avons pour but dans cette section de présenter la distribution des contraintes de cisaillement et de déterminer la rigidité de torsion d'une section rectangulaire mince d'une poutre soumise à la torsion pure.

Toutefois, étant donné que la théorie élémentaire de la torsion est limitée aux sections circulaires, nous avons jugé important de leur consacrer un paragraphe. Les relations qui en découlent seront utilisées comme référence dans la suite de ce chapitre.

3.5.1) Section circulaire

Considérons la torsion d'une poutre à section circulaire. Admettons que la section plane reste plane et que, pendant la torsion, celle-ci n'effectue qu'un mouvement de rotation, sans qu'il ait de distorsion. En conséquence de cette hypothèse, seules les contraintes tangentielles se manifestent au droit de la section. Elles sont maximales aux points les plus éloignés du centre de rotation (centre de gravité).

Ainsi, on montre (Annexe 1) que les contraintes tangentielles engendrées en un point P situé à une distance r du centre de rotation sont égales à:

$$\tau = G \theta r \quad (3.5.2)$$

où G est le module de rigidité transversal et θ l'angle de rotation par unité de longueur.

De même, le moment de torsion réciproque est égal à:

$$M_t = G \theta J \quad (3.5.3)$$

où

$$J = \int_A r^2 dA \quad (3.5.4)$$

J est appelé moment d'inertie polaire.

3.5.2) Section rectangulaire mince

Dans le paragraphe précédent, l'hypothèse des sections planes a permis de faciliter amplement la résolution du problème de torsion. Cette hypothèse n'est, cependant, pas applicable pour toutes les formes de section. Ainsi, les sections rectangulaires, par exemple, subissent une distorsion durant la torsion.

Une des méthodes pour résoudre le problème de torsion consiste à établir une analogie avec d'autres problèmes ayant les mêmes équations différentielles et admettant une simple interprétation.

Il ressort des travaux de nombreux auteurs dont Timoshenko [34] et Johnson [37], que quelle que soit la forme de la section étudiée, le problème de la torsion d'une barre se ramène à la même équation différentielle que l'équilibre d'une membrane tendue sur un contour identique et chargée par une pression latérale uniforme.

Dans ce cas, on montre (Annexe 2) que l'équivalent de la contrainte est l'angle entre la tangente à la surface de la membrane et le plan du contour. De même, l'équivalent du moment de torsion est le volume limité par le plan du contour et la surface de la membrane.

Pour une barre à section rectangulaire étroite de dimension (bx) , la surface de la membrane uniformément chargée peut être considérée, si on néglige l'effet des petits côtés du rectangle, comme un cylindre. Dans ces conditions, la contrainte maximale est égale à:

$$\tau = G\theta e \quad (3.5.5)$$

et le moment de torsion:

$$M_t = \frac{be^3}{3} G\theta \quad (3.5.6)$$

Il importe de remarquer que les contraintes tangentielles maximales se manifestent aux points où l'angle entre la tangente à la surface de la membrane et le plan du contour est maximum. C'est à dire, le long de l'extrémité du contour correspondant au grand côté du rectangle.

De même, les points où ces contraintes sont nulles se situent au milieu du petit côté du rectangle. C'est à dire le long de la ligne médiane du contour où l'angle entre la tangente à la surface de la membrane et le plan du contour est nul. Cette proposition est dite hypothèse de Vlasov [35].

Une comparaison directe de l'équation (3.5.6) avec celle des poutres à section circulaire montre que le terme $\frac{1}{3}be^3$ est équivalent au moment d'inertie polaire J. Ainsi:

$$J = \frac{1}{3} b e^3 \quad (3.5.7)$$

Ce résultat peut être directement étendu aux poutres à parois-minces et à section ouverte du type de celles montrées dans la figure (3-5). Il suffit pour cela, de remplacer la longueur du grand côté du rectangle (b) par la longueur du contour de la section (s). Dans ce cas, nous aurons:

$$J = \frac{1}{3} e^3 s \quad (3.5.8)$$

Lorsque le profil mince ouvert est composé de plusieurs segments et qu'il n'est pas possible de le redresser en un rectangle mince, comme, par exemple, celui de la figure (3-6), on considère que le moment de torsion M_t est la somme des moments dans les différentes portions de la section [38]. Par conséquent:

$$M_t = \frac{\theta G}{3} \{ e_1^3 s_1 + e_2^3 s_2 + \dots + e_n^3 s_n \} \quad (3.5.9)$$

En général, pour les poutres à parois-minces dont la section est composée de plusieurs segments, la rigidité à la torsion est égale à:

$$J = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n e_i^3 s_i \quad (3.5.10)$$

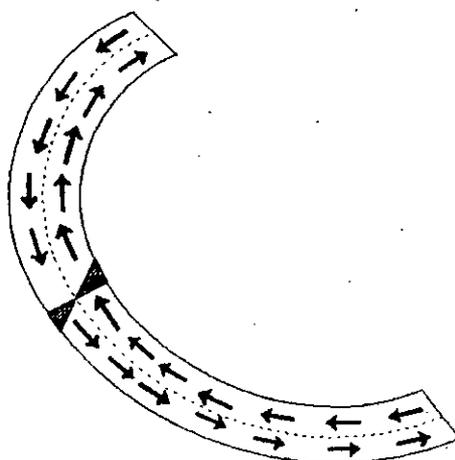
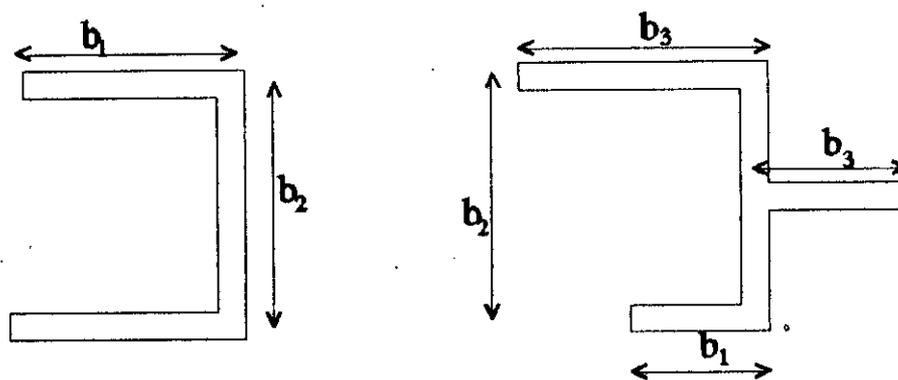


Figure (3-5): Distribution des contraintes tangentielles en torsion pure dans une section d'une poutre à parois minces



$$s = 2b_1 + b_2$$

$$J = \frac{1}{3} e^3 (2b_1 + b_2)$$

$$J = \frac{1}{3} e^3 (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$$

Figure 3-6: Rigidité à la torsion d'une poutre à parois-minces

3.6) TORSION NON UNIFORME

Le cas de la torsion gênée ou non uniforme se produit lorsque l'une des sections droites n'est plus libre de se gauchir ou si le couple de torsion varie le long de l'axe longitudinal. Il apparaît alors des contraintes normales dans les sections droites de la barre. En effet, pour un segment quelconque AB de longueur dx , on aura, d'après (3.5.1):

$$e_x = \frac{dU_x}{dx} = -\omega \frac{d\theta}{dx} \quad (3.6.1)$$

En utilisant la loi de Hooke, la contrainte normale due au gauchissement s'écrit:

$$\sigma = -E \omega \frac{d\theta}{dx} \quad (3.6.2)$$

L'apparition de contraintes normales variables le long de l'axe x engendre inévitablement des contraintes tangentielles secondaires τ_s dans la section droite de la barre. Pour déterminer ces contraintes, écrivons l'équation d'équilibre d'un élément ABCD de la paroi de la barre:(figure (3-7))

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} e dx ds + \frac{\partial \tau_s}{\partial s} ds dx e = 0 \quad (3.6.3)$$

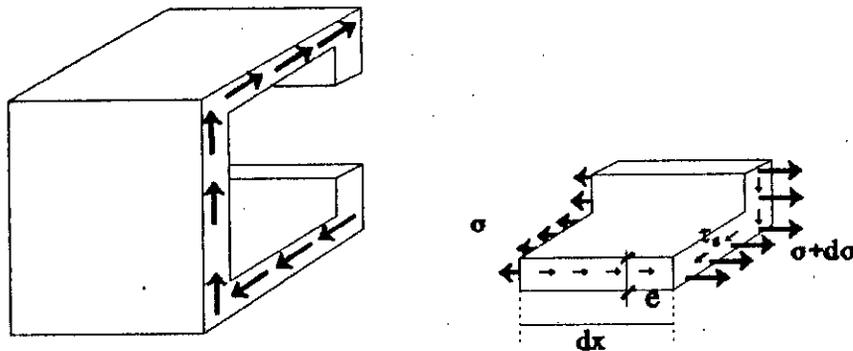


Figure (3-7): Répartition des contraintes secondaires résultant de la torsion gênée

Comme e est indépendant de s , on a:

$$\frac{\partial(\tau_s e)}{\partial s} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} e \quad (3.6.4)$$

et

$$\tau_s e = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} e ds = -\int_{A^*} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA^* \quad (3.6.5)$$

ou compte tenu de l'expression (3.6.2):

$$\tau_s e = E \frac{d^2 \theta}{dx^2} \int_{A^*} \omega dA^* = ES_\omega \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (3.6.6)$$

Les contraintes tangentielles secondaires τ_s sont uniformément réparties dans l'épaisseur du profil. Contrairement aux contraintes fondamentales τ , ces contraintes ne s'annulent pas dans la ligne médiane.

On déduit donc que le couple M_t est compensé en partie par les contraintes de cisaillement correspondantes à la torsion pure et par les contraintes secondaires τ_s . Par conséquent:

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} \quad (3.6.7)$$

Le moment M_{t1} est proportionnel à la variation de l'angle de rotation le long de l'axe de la barre:

$$M_{t1} = G J \theta = G J \frac{d\phi}{dx} \quad (3.6.8)$$

Le moment M_{t2} s'obtient par:

$$M_{t2} = \int_A \tau_2 e r dS = \int_A \tau_2 e d\omega \quad (3.6.9)$$

En vertu de l'équation (3.6.6), cette dernière devient:

$$M_{t2} = E \frac{d^2 \theta}{dx^2} \int_A \left(\int_{A^*} \omega dA^* \right) d\omega \quad (3.6.10)$$

En intégrant par parties, nous obtenons:

$$M_{t2} = -E I_\omega \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (3.6.11)$$

L'expression (3.6.7) se ramène alors à la forme :

$$GJ \theta - EI_{\omega} \frac{d^2\theta}{dx^2} = M_t \quad (3.6.12)$$

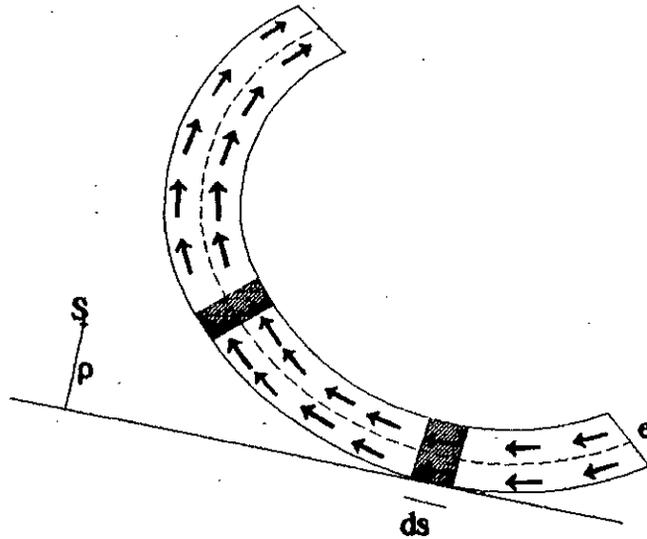


Figure (3-8): Distribution des contraintes de cisaillement en torsion non uniforme dans une section d'une poutre à parois minces

3.7) CAS GENERAL DE CHARGEMENT

Après avoir étudié le comportement de la poutre à parois-minces séparément sous différents types de chargement, considérons dans ce qui suit le cas où la section est soumise simultanément aux différentes charges. Dans ce cas, la section est sujette aux effets suivants:

- * effort normal
- * forces de cisaillement
- * moments fléchissants
- * moment de torsion.

3.7.1) Comportement transversal de la section droite

En vertu de l'hypothèse de l'indéformabilité de la section droite dans son plan durant les déformations, la description de son comportement requiert trois composantes de déplacement, deux translations u_y , u_z et une rotation φ_x autour de l'axe longitudinal.

Si on suppose de petites rotations de torsion, alors les déplacements transversaux (u_y et u_z) d'un point arbitraire de la section, dans les directions y et z , respectivement, peuvent être exprimés en fonction des déplacements u_{ys} et u_{zs} du centre de torsion S et de la rotation φ_x autour de ce centre:

$$u_y = u_{ys} - (z - a_z) \varphi_x \quad (3.7.1)$$

$$u_z = u_{zs} - (y - a_y) \varphi_x \quad (3.7.2)$$

où a_y et a_z sont les coordonnées du centre de torsion S par rapport au centre de gravité C .

3.7.2) Comportement longitudinal de la section droite

Le déplacement longitudinal u_x d'un point arbitraire N dû au gauchissement est calculé en utilisant l'hypothèse de Vlasov, concernant l'absence des déformations de cisaillement dans la ligne médiane du profil:

$$u_{x\omega} = -\omega_s \varphi_x' = -\omega_s \theta_x \quad (3.7.3)$$

où $\theta_x = \frac{d\varphi_x}{dx}$.

En superposant ce déplacement à ceux dus aux moments de flexion et l'effort normal, on obtient:

$$u_x = u_{xc} - z u_{zs}' - y u_{ys}' - \omega_s \varphi_x' \quad (3.7.4)$$

On considère donc que le comportement tridimensionnel d'une poutre à parois minces est le résultat de la superposition des effets suivants:

- Déplacement axial le long de l'axe neutre CC' .
- Déplacements transversaux, u_y et u_z dans les directions y et z .
- Rotation φ_x et taux de rotation θ_x autour de l'axe de flexion

construit par la droite SS' .

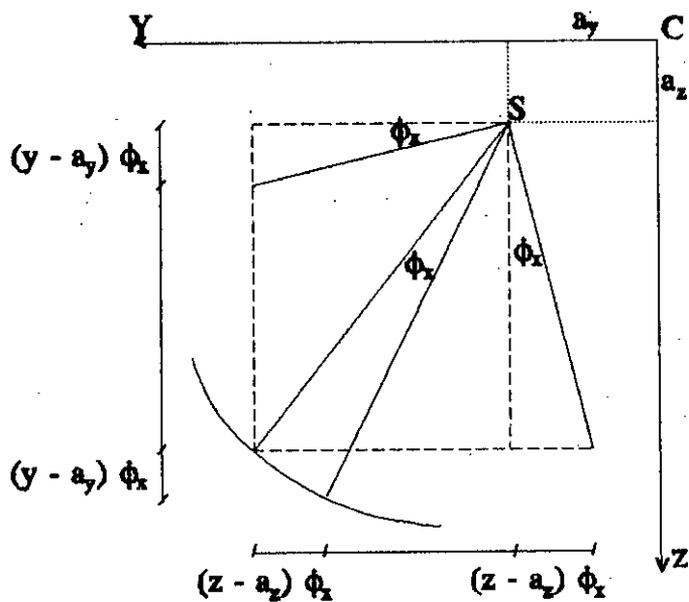


Figure (3-9): Déplacement transversal d'un point de contour de la section

Chapitre 4

Comportement Elasto-Plastique

Chapitre 4 .

COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE

4.1) INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré la répartition des déformations et des contraintes pour un matériau élastique. Ceci sans se préoccuper, cependant, si un tel état élastique est possible ou non. Dans la réalité, lorsque les contraintes internes dépassent une certaine limite, des dislocations au niveau atomique se produisent. Il apparaît alors dans le corps des déformations plastiques irréversibles. Ces déformations induisent un changement dans la relation contrainte-déplacement qui ne peut être pris en compte par la théorie de l'élasticité.

Ce chapitre représente un complément nécessaire du chapitre précédent. Il a pour objectifs, la formulation mathématique des relations contraintes-déformations susceptibles de décrire le comportement élasto-plastique d'une poutre tridimensionnelle, ainsi que l'établissement d'une matrice de rigidité élasto-plastique efficace permettant de prédire la réponse dans le domaine plastique et de fournir par conséquent, une meilleure estimation de la capacité réelle de chargement d'une structure.

4.2) DESCRIPTION DU MODELE ELASTO-PLASTIQUES

Dans les problèmes d'analyse des structures, il est nécessaire de spécifier la relation entre les contraintes et les déformations. Cette relation reflète les propriétés physiques du matériau et elle est généralement obtenue par une idéalisation convenable de la courbe expérimentale de chargement. La figure (4-1) montre une courbe contrainte-déformation typique d'un matériau élasto-plastique sous un chargement axial.

Le point A sur la portion est appelé point de limite élastique, il marque le début des déformations plastiques irréversibles. Après ce point, la réponse du matériau devient à la fois élastique et plastique. Au point D, la réponse est complètement plastique et la rigidité du matériau est nulle.

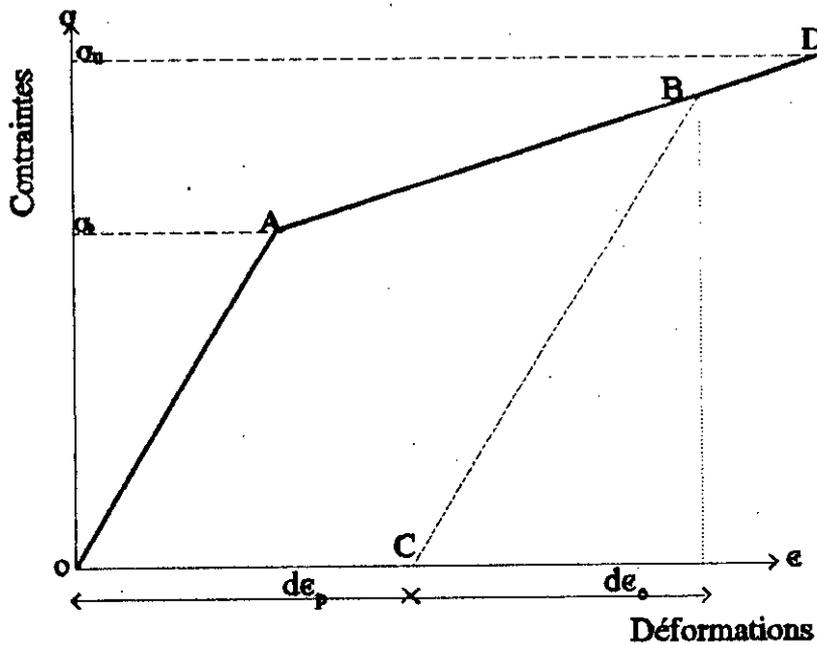


Figure (4-1): Description du comportement élasto-plastique

Au début de chargement (courbe OA), tel que $\sigma < \sigma_A$, le matériau est élastique, c'est à dire qu'il existe une relation univoque entre la contrainte et la déformation. Par ailleurs, un déchargement dans cette zone suivrait le chemin inverse (AO).

Au delà du point A ($\sigma \geq \sigma_A$), le matériau est partiellement élastique et partiellement plastique, et un déchargement dans cette zone engendrerait un état de déformation suivant le chemin BC parallèle à la portion élastique OA de la courbe. A la fin du déchargement (point c), la contrainte s'annule, mais la déformation résiduelle représentée par la portion OC, sur la courbe, demeure. Cette déformation irréversible OC est appelée déformation plastique.

Si le matériau est rechargé de nouveau, la courbe contrainte-déformation suivrait le chemin de rechargement CB identique à celui de déchargement BC. La réponse du matériau est par conséquent élastique jusqu'au point B correspondant à la nouvelle contrainte limite.

4.3) DIFFERENTS MODELES ELASTO-PLASTIQUES

Dans l'analyse de l'effet de la non-linéarité matérielle des poutres par la méthode des éléments finis, on distingue deux principaux modèles:

- modèle fibre
- modèle rotule plastique

4.3.1) Modèle fibre

Dans ce modèle, la section est subdivisée en plusieurs aires élémentaires. Chaque aire est supposée axialement chargée et possédant sa propre histoire de déformation et sa propre rigidité déterminées par les caractéristiques contraintes-déformations du matériau. La matrice de rigidité élémentaire est calculée par une intégration numérique sur tout le volume de la poutre.

Parmi les chercheurs qui ont employé cette approche, nous citerons Rajasekaran et Murray [39,40], Epstein, Nixon et Murray [41], Yang et Saigal [42], Saleeb et Chen [43], Chan et Kitipornchai [44] et récemment Kitipornchai, Al-Bermani et Chan [45,46].

Dans la référence [39], les auteurs développent un modèle basé sur l'hypothèse d'un chargement monotone. Ce modèle permet d'analyser le comportement inélastique en grands déplacement des structures à parois-minces et à sections arbitraires ouvertes.

Chapitre 4: Comportement élasto-plastique

Chan et Kitipornchai [44], étudient le comportement inélastique avec possibilité d'un déchargement élastique, des structures composées de poutres à section circulaire creuse. Les sollicitations sont supposées agir dans un même plan et, le matériau est élastique parfaitement plastique. Les références [45,46] étendent cette approche à l'étude des structures tridimensionnelles composées de poutres à section rectangulaire creuse et cornière, respectivement. Pour prendre en considération l'écoulement graduel de la section, ils suggèrent d'actualiser les caractéristiques géométriques et mécaniques. Ces caractéristiques sont calculées par une procédure d'intégration numérique sur les aires élémentaires encore en état élastique.

Il est important de signaler que la procédure employée est basée sur l'actualisation de la position du centre de rigidité instantané ainsi que l'inclinaison des axes principaux d'inerties à chaque incrément de chargement.

4.3.2) Modèle rotule plastique

Dans ce modèle, le comportement inélastique est défini pour la totalité de la section et pas seulement pour des aires élémentaires comme c'est le cas dans le modèle fibre. L'écoulement de la section est engendré par une combinaison entre les différents efforts présents dans celle-ci. Les effets de la plasticité sont assumés se produire seulement aux noeuds situés aux extrémités de l'élément.

Au début du chargement, les noeuds situés aux extrémités de l'élément sont supposés élastiques. Aussi, la matrice rigidité employée correspond à la matrice de rigidité élastique de l'élément. Une fois que la contrainte à l'une des deux extrémités atteint le seuil de plasticité, le noeud se plastifie. Ceci engendre une réduction des composantes de la matrice de rigidité. Cette réduction est considérée par l'intermédiaire d'une matrice dite plastique. Celle-ci est ajoutée à la matrice initiale pour prendre en considération la plastification de la section.

Cette technique a été attribuée à Negam [47] qui a le premier formulé les principes de base en 1970. Cependant, le mérite de son développement revient à Porter et Powell [48] qui l'ont adapté à sa forme matricielle actuelle. Depuis, plusieurs chercheurs ont contribué à son évolution, comme Orbison, McGuire et Abel [49], Ueda et Yao [50], et récemment Al-Bermani et Kitipornchai [51].

Il est intéressant de noter que tous les travaux employant ce modèle sont limités au comportement élastique parfaitement plastique. Ceci est dû à l'impossibilité de développer une fonction générale d'écoulement permettant de suivre la plastification dans la zone d'écroutissement.

4.3.3) Conclusion

Les deux modèles ont leurs avantages et leurs limites. D'un côté, le modèle rotule plastique est, du point de vue rapidité, plus efficace, car il prend la section dans son ensemble. D'un autre côté, le modèle fibre est plus précis, car il permet de suivre l'évolution de la plastification partielle de la section. Mais, au prix d'un important coût de calcul.

Par ailleurs, le modèle fibre est plus simple, contrairement au modèle rotule plastique. Il ne nécessite pas l'établissement de la fonction reliant les différents efforts présents dans la section. Il ne requiert que la courbe matérielle de chargement.

Dans cette étude, on se propose d'utiliser un modèle fibre semblable à celui employé par Kitipornchai et Chan [46]. Néanmoins, pour éviter la procédure fastidieuse qui consiste à actualiser la position du centre de rigidité instantané et l'inclinaison des axes principaux d'inertie à chaque incrément de chargement, nous supposons que la position du centre de rigidité et l'inclinaison des axes principaux sont fixes. De même, pour permettre de prendre en considération l'écroutissement isotrope du matériau, les caractéristiques des zones plastifiées ne sont pas négligées.

4.4) DEVELOPPEMENT DU MODELE ELASTO-PLASTIQUE

4.4.1) Relation incrémentale Contrainte-déformation

Comme on vient de le remarquer dans le paragraphe (4.2), après le début de l'écoulement de la section, le comportement du matériau est partiellement élastique et partiellement plastique. Aussi, on suppose que durant l'incrément de contraintes, la variation des déformations est constituée d'une composante élastique et d'une autre plastique, de sorte que:

$$de = de_e + de_p \quad (4.4.1)$$

Par ailleurs, l'incrément de contraintes peut être obtenu par l'intermédiaire de la loi de Hooke. Dans ce cas:

$$d\sigma = E_e de_e \quad (4.4.2)$$

Substituons l'incrément des déformations élastiques de_e de l'équation (4.4.1) dans l'équation de Hooke. On obtient alors:

$$d\sigma = E_e (de - de_p) \quad (4.4.3)$$

ou encore

$$d\sigma = E_e de - E_e de_p$$

le paramètre d'écrouissage isotrope est défini par la relation: [52]

$$H' = \frac{d\sigma}{de_p}$$

soit

$$d\sigma = H' de_p \quad (4.4.4)$$

Il est utile de remarquer que pour un comportement élastique parfaitement plastique, le paramètre d'écrouissage H' est nul.

Multiplions et divisons le second terme du membre à droite de l'équation (4.4.3) par le paramètre d'écrouissage. On obtient par conséquent:

$$d\sigma = E_e de - \frac{E_e}{H'} H' de_p \quad (4.4.5)$$

Notons que d'après l'équation (4.4.3), le terme $H' de_p$ correspond à $d\sigma$. Il vient alors:

$$d\sigma = E_e de - \frac{E_e}{H'} d\sigma \quad (4.4.6)$$

Après quelques opérations cette équation se réduit à:

$$d\sigma = \frac{E_e H'}{E_e + H'} de \quad (4.4.7)$$

ou encore

$$d\sigma = E_{ep} de$$

E_{ep} est appelé module de rigidité élasto-plastique.

4.4.2) Détermination des déformations

Ayant déterminé l'incrément de déplacement par rapport au repère local convectif, continuellement attaché à l'élément, il est alors possible de calculer l'incrément des courbures moyennes entre les deux extrémités de l'élément. Celles-ci sont obtenues par les relations:

$$\Delta\phi_z = \frac{1}{l} (\Delta\phi_{z2} - \Delta\phi_{z1}) \quad (4.4.8a)$$

$$\Delta\phi_y = \frac{1}{l} (\Delta\phi_{y2} - \Delta\phi_{y1}) \quad (4.4.8b)$$

L'incrément des déformations longitudinales Δe_x pour une aire élémentaire peut être obtenu par combinaison entre les effets dus à l'allongement axial et les courbures de flexion, de sorte que:

$$\Delta e_{xx}^k = \frac{\Delta U_x}{l} + z_k \Delta\phi_y + y_k \Delta\phi_z \quad (4.4.9)$$

où Y_k et Z_k sont les coordonnées de l'aire élémentaire par rapport à l'axe passant par la position initiale du centre de rigidité.

4.4.3) Détermination de la matrice de rigidité élasto-plastique

Considérons une section rectangulaire d'un élément fini soumis à un moment M et à un effort axial P . Au début du chargement, les caractéristiques mécaniques sont identiquement réparties à travers la section. Une fois que les sollicitations atteignent le seuil d'écoulement, il apparaît dans la section des zones élastiques et plastiques. En d'autres termes, ceci signifie que les caractéristiques mécaniques varient d'une zone à une autre. Cette variation engendre un déplacement de la position du centre de rigidité. De même, elle peut engendrer une rotation des axes principaux d'inertie si le chargement est dissymétrique.

La technique généralement employée [45,46] pour prendre en compte l'écoulement graduel de la section durant le chargement consiste à déterminer, pour chaque

incrément de chargement, la position du centre de rigidité et l'inclinaison des axes principaux d'inertie de la section correspondant aux aires en état élastique. Puis à actualiser les caractéristiques géométriques et mécaniques de celle-ci par rapport à ce nouveau centre et à ces nouveaux axes d'inertie. Cette technique est cependant complexe et non économique. Elle demande un important temps de calcul.

Dans cette étude, nous proposons d'inclure des termes de couplage dans les composantes de matrice de rigidité tangente. Ils permettront de calculer la matrice de rigidité par rapport à un point fixe, et de prendre implicitement en considération l'influence du déplacement du centre de rigidité et la variation de l'inclinaison des axes principaux d'inertie.

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont obtenues par une intégration numérique sur toutes les unités d'aires. Elles sont données par les relations:

$$EA = \int_{A^e} E_e dA + \int_{A^p} E_t dA = \sum_{i=1}^{n_e} E_e \Delta A_i + \sum_{i=1}^{n_p} E_t \Delta A_i \quad (4.4.10a)$$

$$ES_y = \int_{A^e} E_e y dA + \int_{A^p} E_t y dA = \sum_{i=1}^{n_e} E_e y_i \Delta A_i + \sum_{i=1}^{n_p} E_t y_i \Delta A_i \quad (4.4.10b)$$

$$ES_z = \int_{A^e} E_e z dA + \int_{A^p} E_t z dA = \sum_{i=1}^{n_e} E_e z_i \Delta A_i + \sum_{i=1}^{n_p} E_t z_i \Delta A_i \quad (4.4.10c)$$

$$EI_z = \int_{A^e} E_e y^2 dA + \int_{A^p} E_t y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_e} E_e y_i^2 \Delta A_i + \sum_{i=1}^{n_p} E_t y_i^2 \Delta A_i \quad (4.4.10d)$$

$$EI_y = \int_{A^e} E_e z^2 dA + \int_{A^p} E_t z^2 dA = \sum_{i=1}^{n_e} E_e z_i^2 \Delta A_i + \sum_{i=1}^{n_p} E_t z_i^2 \Delta A_i \quad (4.4.10e)$$

$$EI_{yz} = \int_{A^e} E_e yz dA + \int_{A^p} E_t yz dA = \sum_{i=1}^{n_e} E_e y_i z_i \Delta A_i + \sum_{i=1}^{n_p} E_t y_i z_i \Delta A_i$$

(4.4.10f)

Dans ces expressions z_i, y_i sont les coordonnées d'une unité d'aire par rapport au centre de rigidité initial, n_e et n_p sont les nombres d'unités d'aires en état élastique et plastique respectivement. E_e et E_{ep} sont les modules de rigidité élastique et plastique, respectivement.

L'incrément des forces nodales équivalent aux contraintes internes est calculé comme suit:

$$\{\Delta F_{int}\} = [K_{EP} + K_G] \{\Delta U\} \quad (4.4.11)$$

où K_{ep} est la matrice de rigidité élasto-plastique composée des caractéristiques géométriques actualisées.

On suppose dans cette étude que l'écoulement est indépendant de l'effet de torsion et du bimoment

4.5) ALGORITHME D'ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE

L'algorithme utilisé pour ce modèle est basé sur la procédure générale suggérée par Owen et Hinton [52]. Il permet de considérer, comme exposé dans la section (4.2), les cinq possibilités qui peuvent se produire dans les domaines élastique et plastique. En effet, en comparant la contrainte d'écoulement et la contrainte ultime avec la nouvelle contrainte ${}^{t+\Delta t}\sigma$ et la contrainte totale de l'incrément précédent ${}^t\sigma$, on peut montrer que les situations suivantes peuvent exister.

- 1)- la contrainte effective reste dans le domaine élastique $E = E_e$.
- 2)- la contrainte effective passe de l'état élastique à l'état plastique.
- 3)- la contrainte effective était et reste dans le domaine plastique.
- 4)- la contrainte effective diminue indiquant un déchargement élastique.
- 5)- la contrainte effective était dans l'état plastique et dépasse maintenant la contrainte ultime σ_u .

La seconde situation, représentant la transition élasto-plastique, requiert souvent une correction de la contrainte effective σ . Afin d'éviter une possible déviation de la courbe de chargement, la contrainte effective doit être corrigée. Cette contrainte s'obtient par:

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + \lambda \Delta \sigma + (1 - \lambda) E_{op} \Delta \epsilon \quad (4.5.1)$$

où $\lambda = \frac{\sigma_y - \sigma^t}{\Delta \sigma}$ est le facteur de correction.

Le terme $\lambda \Delta \sigma$ représente l'incrément de contrainte élastique, alors que, $(1 - \lambda) E_{op} \Delta \epsilon$ représente l'incrément de contrainte dans l'état plastique.

L'algorithme peut être résumé dans les étapes suivantes:

- 1) Déterminer les courbures moyennes $\Delta \varphi_y$ et $\Delta \varphi_z$ selon les équations (4.4.8)
- 2) Dédire le vecteur incrément des déformations $\Delta \epsilon$ suivant l'équation (4.4.9)
- 3) Calculer l'incrément des contraintes élastiques:

$$\Delta \sigma^k = E_o \Delta \epsilon^k \quad (4.5.2)$$

avec E_o le module de rigidité longitudinale élastique.

- 4) Récupérer les incréments précédents des contraintes à partir du fichier contrainte
- 5) Ajouter cet incrément des contraintes aux incréments précédents

$$\sigma_i^k = \sigma_{i-1}^k + \Delta \sigma^k \quad (4.5.3)$$

- 6) Récupérer des fichiers, la contrainte critique σ_y et l'état de l'aire élémentaire dans l'incrément précédent.
- 7) Si l'aire élémentaire était dans un état élasto-plastique (indicateur=1) alors:

a) Si $|\sigma_i^k| > |\sigma_{i-1}^k|$, il s'agit d'un chargement plastique. Dans ce cas, le facteur de correction λ est nul et le contrôle passe au point 9.

b) Si $|\sigma_i^k| < |\sigma_{i-1}^k|$, c'est un déchargement élastique, dans ce cas, il faut:

i) Actualiser la contrainte critique. Ceci est réalisé en écrivant la contrainte effective de l'incrément précédent dans le fichier contrainte critique.

ii) Actualiser l'état de l'aire élémentaire (indicateur = 0) et aller au point 9.

- 8) Si par contre l'aire élémentaire était dans un état élastique, alors:
 - a) Si $|\sigma_i^k| \leq |\sigma_y|$ alors l'incrément de contrainte est un incrément

élastique. Dans ce cas $\lambda=1$ et le contrôle passe au point 9.

b) Sinon si $|\sigma_x| > |\sigma_y|$: il y a passage de l'état élastique à l'état plastique. Dans ce cas:

i) Calculer λ .

ii) Actualiser l'état de l'aire élémentaire.

9) Calculer le module de rigidité élasto-plastique suivant l'équation (4.4.7).

10) Déterminer le module de rigidité tangent:

$$E_t = \lambda E_e + (1 - \lambda) E_{ep} \quad (4.5.4)$$

11) Recalculer l'incrément de contrainte en utilisant le module tangent:

$$\Delta \sigma^k = E_t \Delta \epsilon \quad (4.5.5)$$

12) Recalculer la contrainte effective:

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta \sigma$$

13) Calculer les caractéristiques géométriques nécessaires à l'établissement de la matrice de rigidité.

Une fois la convergence atteinte, les contraintes et les indicateurs qui se trouvent dans les fichiers temporaires sont recopiés dans les fichiers définitifs.

4.6) DIFFICULTES RELATIVES A UNE ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE EN GRANDS DEPLACEMENTS

Les méthodes de résolution non linéaires appliquées à des problèmes impliquant un comportement élasto-plastique en grands déplacements présentent toutes, si certaines précautions ne sont pas prises, des difficultés numériques.

En effet, dans une analyse non linéaire géométrique et durant les premières itérations d'équilibre, les valeurs des forces nodales équivalentes aux contraintes internes sont largement supérieures à leurs valeurs à la convergence. Si ces efforts sont prises en considération dans la procédure élasto-plastique et s'ils engendrent un écoulement de la section, il se produit alors un déchargement fictif durant les itérations d'équilibre suivantes.

Si ce déchargement est considéré comme irréversible, et traité de la même façon qu'un déchargement réel, alors de sérieuses erreurs peuvent être induites dans la réponse de la structure. Ceci peut causer la divergence de la solution.

Pour éviter ces difficultés, nous adoptons dans cette étude une stratégie dans laquelle les itérations sont séparées pour les analyses géométrique et matérielle.

Ainsi, pour chaque incrément de chargement, les propriétés matérielles sont gardées constantes durant les itérations jusqu'à la convergence. Les incréments de déplacements obtenus sont employés pour calculer l'incrément de contrainte et actualiser les caractéristiques matérielles. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que l'actualisation des propriétés matérielles n'ait aucun effet sur la déformation de la structure.

4.7) CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté un modèle simple permettant d'analyser le comportement élasto-plastique des structures avec écrouissage isotrope. Ce modèle est basé sur la modélisation fibre (appelée également multi-couches). Il permet de réduire la dimension d'un problème flexionnel avec des non linéarités matérielles. Il consiste à subdiviser l'aire de la section en fines aires élémentaires. Cette subdivision permet de suivre la plastification partielle de la section durant le chargement.

Dans ce modèle, on suppose que l'aire élémentaire est axialement chargée et son comportement est indépendant de l'effet dû à la torsion. De même, on considère que les caractéristiques géométriques et mécaniques des zones plastifiées sont non négligeables. Ceci permet de prendre en considération l'écrouissage du matériau. Pour prendre en considération le déplacement du centre de rigidité et la variation de l'inclinaison des axes principaux d'inertie, nous avons introduit des termes de couplage dans la matrice de rigidité tangente. Ceci permet d'éviter la procédure fastidieuse du recherche du centre de rigidité à chaque incrément de chargement.

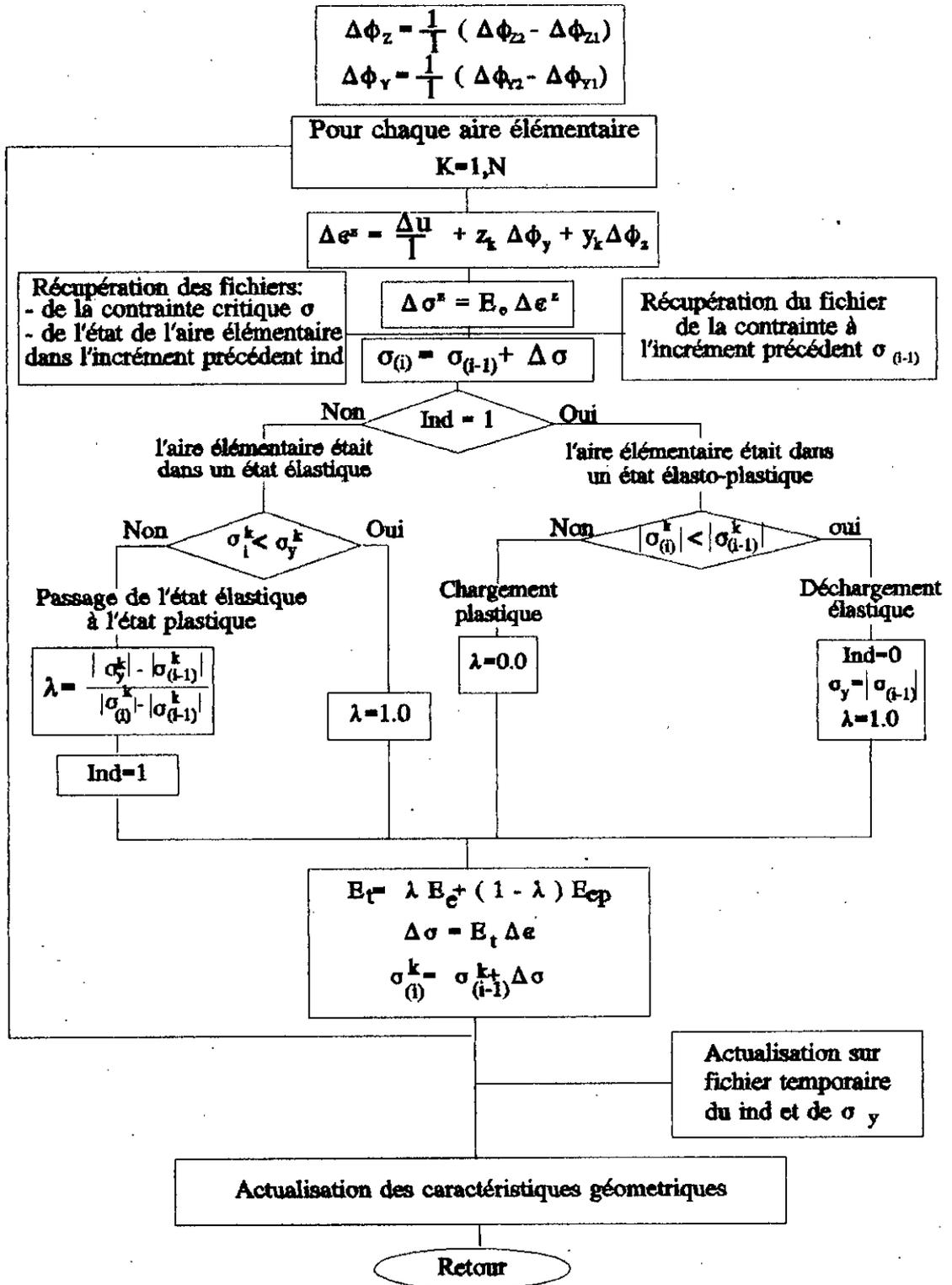


Figure (4-2) : Organigramme de sous-programme PLAST

Chapitre 5

Méthodes de Résolution Non linéaires

Chapitre 5

METHODES DE RESOLUTION NON LINEAIRES

5.1) INTRODUCTION

L'utilisation de l'analyse non linéaire dans les applications pratiques est de plus en plus importante. Cependant, étant donné le coût considérablement élevé de celle-ci, la sélection d'un algorithme efficace de résolution devient fondamentale.

L'objectif de ce chapitre est d'examiner les techniques numériques les plus utilisées, afin de déterminer la plus efficace dans une analyse non linéaire des structures discrétisées par des éléments finis.

5.2) GENERALITES SUR LES METHODES ITERATIVES

En pratique, il n'existe pas de méthodes générales directes de résolution des systèmes non linéaires.

Aussi, pour résoudre le système suivant:

$${}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F = 0 \quad (5.2.1)$$

et tracer ainsi la réponse non linéaire complète de la structure, on utilise

généralement des méthodes basées sur des procédures incrémentales / itératives du type Newton. Elles peuvent se résumer par la mise en oeuvre du schéma suivant:

$$K^{(i)} \Delta u = \lambda P - F(u^{(i)}) \quad (5.2.2)$$

$$u^{(i+1)} = u^{(i)} + \Delta u \quad (5.2.3)$$

Dans la pratique, ces méthodes sont basées en général sur le calcul des contraintes à partir du champ de déplacement et des lois de comportement (cas de la non linéarité matérielle). Ces contraintes sont statiquement équivalentes à un système de forces nodales internes et doivent équilibrer les forces nodales externes. Initialement, ces deux systèmes ne sont pas égaux, et la différence entre les deux est appelée forces résiduelles. Ces dernières doivent être annulées. Pour cela, un certain nombre d'itérations linéaires successives est donc nécessaire pour chaque incrément de chargement.

5.3) CRITERES DE CONVERGENCE

La définition d'un critère propre de convergence pour contrôler les itérations d'équilibre est une partie essentielle de l'efficacité de la stratégie incrémentale de résolution employée. A la fin de chaque itération, la solution obtenue est comparée avec la tolérance prescrite pour vérifier si la convergence est atteinte.

A ce propos, on distingue trois critères de base:

- 1) Critère en déplacements
- 2) Critère en forces
- 3) Critère en énergie

Dans cette étude, nous adoptons le critère en forces pour les raisons suivantes:

a)- Dans une analyse non linéaire géométrique, la précision sur les déplacements n'est pas aussi importante que sur les forces. En effet les forces nodales équivalentes aux contraintes internes sont déterminées par l'intermédiaire de la matrice géométrique qui est fonction des efforts internes. Aussi, la moindre erreur dans le calcul des efforts internes induirait une accumulation d'erreurs dans la matrice géométrique qui se répercuterait sur la réponse de la structure.

b)- Nous avons constaté (voir paragraphe 5.7), que lors de l'utilisation de la technique Arclength, la norme des déplacements se stabilise après les deux premières itérations d'équilibre, alors que la variation des forces restent grands et ne s'attenuent qu'après quelques autres itérations.

Le critère de convergence des forces requiert que les forces résiduelles s'annulent. Mais, comme dans une procédure numérique, un tel état n'est jamais atteint, on introduit une approximation de la forme:

$$\|{}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(j)}\| \leq \epsilon_F \|{}^{t+\Delta t}R - {}^tF\|$$

Il est important de remarquer que la tolérance de précision ϵ_F doit être judicieusement choisie pour la performance de la méthode. Car, une faible précision donnerait des résultats erronés, alors qu'une grande précision conduirait à des calculs supplémentaires inutiles.

5.4) METHODES DE CONTROLE EN CHARGEMENT

Elles consistent à calculer, dans un premier temps, le déplacement correspondant aux charges extérieures appliquées. Ce déplacement est ensuite employé pour déterminer la nouvelle matrice de rigidité et les contraintes internes. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que le vecteur des forces internes équivalent aux contraintes internes soit aussi proche que possible du vecteur des forces extérieures appliquées.

Parmi les méthodes de contrôle en chargement, on distingue:

- 1)- La méthode de Newton-Raphson
- 2)- La méthode de Newton-Raphson modifiée
- 3)- La méthode de Quasi-Newton

5.4.1) Méthode de Newton-Raphson[53,54,31]

La méthode de Newton-Raphson consiste à redistribuer les forces résiduelles jusqu'à leur réduction à un certain niveau de précision. Ces forces résiduelles sont obtenues par la différence entre les forces nodales internes équivalentes aux contraintes calculées et les forces externes appliquées.

$${}^{t+\Delta t}R(u) - {}^{t+\Delta t}F(u) = 0 \quad (5.4.1)$$

L'algorithme de résolution peut se résumer en:

$${}^{t+\Delta t}K_T^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (5.4.2)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad (5.4.3)$$

En général, l'avantage de cette méthode est qu'un petit nombre d'itérations est suffisant pour atteindre la convergence.

Toutefois, la solution devient très chère avec l'augmentation de la taille du système, à cause de l'actualisation et la factorisation de la matrice de rigidité tangente à chaque itération. En outre, des problèmes numériques peuvent apparaître, lorsque les éléments de la matrice tangente diminuent.

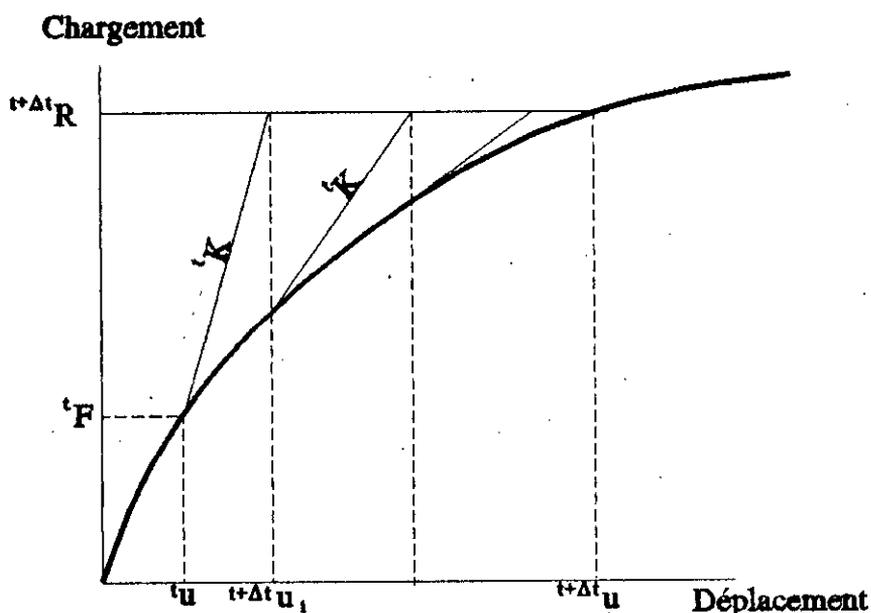


Figure (5-1): Représentation graphique de la méthode de Newton-Raphson

5.4.2) Méthode de Newton-Raphson modifiée [53,51,31]

Cette méthode ne diffère de la méthode de Newton-Raphson que par le nombre d'actualisations de la matrice de rigidité. Dans la méthode de Newton-Raphson

modifiée, la matrice de rigidité tangente n'est jamais actualisée ou seulement pendant quelques itérations (en général, après la première itération de chaque incrément et quelques autres itérations éventuellement bien choisies).

Cette variante de la méthode de Newton-Raphson est beaucoup plus économique dans les problèmes à plusieurs degrés de liberté. Cependant, comme elle converge linéairement, elle nécessite un nombre plus important d'itérations que la méthode de Newton-Raphson.

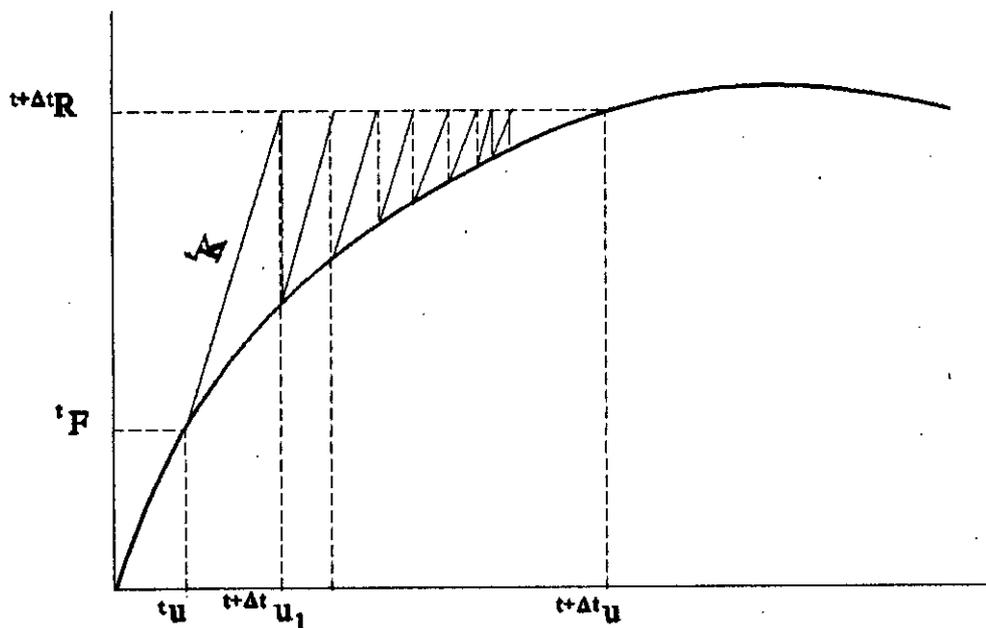


Figure (5-2): Représentation graphique de la méthode de Newton-Raphson modifiée

5.4.3)- Méthode de Quasi-Newton[31,54-56]

Un compromis entre la méthode de Newton-Raphson et la méthode de Newton-Raphson modifiée est l'algorithme de Quasi-Newton. Celui-ci est beaucoup moins cher que la méthode de Newton-Raphson et plus rapide que la méthode de Newton-Raphson modifiée (en nombre d'itérations). Ceci est dû à l'actualisation non pas de la matrice de rigidité elle même, mais de son inverse. Cette alternative permet d'éviter la factorisation de la matrice de rigidité à chaque itération.

Le principe de cette méthode peut se résumer comme suit. A partir de la première

itération, l'incrément de déplacement $\Delta U^{(1)}$ et le vecteur forces résiduelles peuvent être établis comme sur les formules suivantes:

$$\Delta \bar{U}^{(1)} = {}^t K_T^{-1} \Delta \bar{R}^{(1)} \quad (5.4.4)$$

où

$$\Delta \bar{R}^{(1)} = {}^{t+\Delta t} R - {}^t F \quad (5.4.5)$$

Le vecteur des forces résiduelles pour cette itération est égal à:

$$\Delta \bar{R}^{(2)} = {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F^{(1)} \quad (5.4.6)$$

où ${}^{t+\Delta t} F^{(1)}$ est le vecteur des forces internes à la première itération.

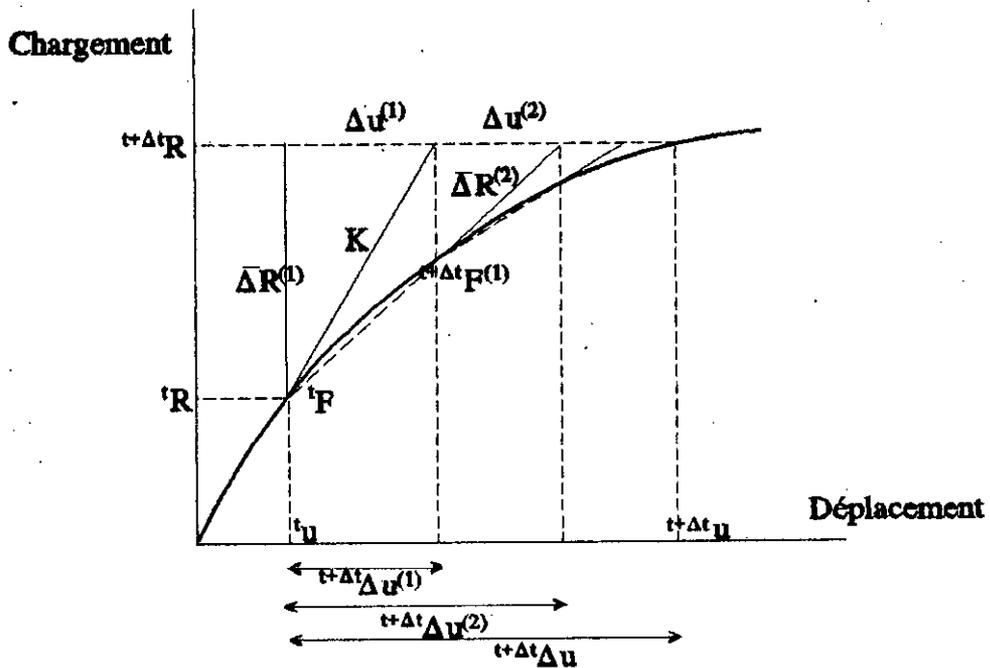


Figure (5-3): Représentation graphique de la méthode de Quasi-Newton

Comme il est montré sur ci-dessus, la pente sécante K_s^{-1} de la droite AB peut être trouvée, de sorte que:

$$\Delta u^{(1)} = ({}^{t+\Delta t} K_s^{-1})^{(1)} (\Delta \bar{R}^{(1)} - \Delta \bar{R}_2) \quad (5.4.7)$$

Une fois que $[{}^{t+\Delta t} K_s^{-1}]^{(1)}$ est déterminée, on peut calculer l'incrément de déplacement suivant:

$$\Delta U^{(2)} = (t + \Delta t K_B^{-1})^{(1)} \Delta \bar{R}^{(2)} \quad (5.4.8)$$

La généralisation de cette procédure pour $i > 1$ peut être établie, telle que:

$$\Delta U^{(i)} = (t + \Delta t K_B^{-1})^{(i-1)} \Delta \bar{R}^{(i)} \quad (5.4.9)$$

où $(t + \Delta t K_B^{-1})^{(i-1)}$ est déterminée de sorte que:

$$\Delta U^{(i-1)} = (t + \Delta t K_B^{-1})^{(i-1)} (\Delta \bar{R}^{(i-1)} - \Delta \bar{R}^{(i)}) \quad (5.4.10)$$

5.4.4) Inconvénients des méthodes de contrôle en chargement

Il est important de remarquer que les méthodes de contrôle en chargement présentent certains inconvénients.

Un des problèmes réside dans l'extrême difficulté à prédéterminer la grandeur et le nombre d'incrément de chargement. Sans connaissance préalable du comportement non linéaire de la structure, le concepteur peut prescrire de très petits incréments de chargement rendant le coût de la solution très cher ou, au contraire, de grands incréments de chargement créant des difficultés de convergence ou pouvant mener à une divergence durant les itérations d'équilibres.

L'autre inconvénient provient des difficultés de ces méthodes à dépasser les points critiques (points limites) lorsque la matrice tangente s'approche du seuil de la singularité. En outre, le processus itératif peut diverger dans les régions voisines du point limite. Ceci cause deux problèmes notables:

1)- La charge critique déterminée peut sous-estimer la capacité réelle de chargement de la structure, à cause de la possibilité de divergence numérique qui peut se produire sans qu'il y ait de rupture structurale du système.

2)- La réponse post-critique de la structure ne peut pas être définie. Celle-ci est très importante. Elle permet, en effet, d'identifier la capacité de la structure à s'accommoder à de grands déplacements.

Pour détecter les points critiques et tracer la réponse post-critique, d'autres méthodes de contrôle sont nécessaires.

Quelques techniques pouvant permettre de tracer la réponse au delà du point critique, ont été proposées dans la littérature. Parmi ces techniques, nous

citerons celle de contrôle en déplacement [57,58,59], la technique des ressorts fictifs [60] et la méthode Arclength [61-73].

5.5) METHODE DE CONTROLE EN DEPLACEMENT [57]

Cette méthode, comme son nom l'indique, consiste à appliquer un incrément de déplacement en un point fixe, et à résoudre ensuite le système pour l'incrément de chargement et les autres composantes restantes de déplacement.

Soit le système, suivant:

$$Ku = R \quad (5.5.1)$$

où K : est la matrice de rigidité symétrique d'ordre n ; U : est le vecteur déplacement inconnu; et R le vecteur chargement vérifiant l'équation:

$$R = R_r + \lambda P \quad (5.5.2)$$

avec R_r : vecteur des forces résiduelles, P vecteur de chargement initial (ou unitaire) et λ le facteur de chargement.

Supposons que la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur déplacement est imposée telle que $U_i = \bar{U}$, il est alors nécessaire de modifier la forme du système afin de déterminer les $(n-1)$ composantes de déplacement restantes et le facteur de chargement λ . Décomposons le système (5.5.1) sous la forme suivante.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1r} \\ R_{2r} \end{Bmatrix} + \lambda \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (5.5.3)$$

où $U_2 = U_q = \bar{U}$, K_{11} est la matrice de rigidité d'ordre $(n-1)$, obtenue en supprimant les $i^{\text{ème}}$ ligne et colonne. K_{12} et K_{21} sont la $i^{\text{ème}}$ colonne et ligne de $[K]$, respectivement.

En réorganisant le système (5.5.3) on obtient:

$$\begin{bmatrix} k_{11} - P_1 \\ K_{21} - P_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1r} - k_{12}\bar{U} \\ R_{2r} - K_{22}\bar{U} \end{Bmatrix} \quad (5.5.4)$$

L'équation (5.5.3) peut être directement résolue pour $\{U_1\}$ et λ :

$$u_1 = K_{11}^{-1} (R_{1r} - K_{12} \bar{u} + P_1) \quad (5.5.5)$$

où

$$\lambda = \frac{\alpha \bar{u} - R_{2r} + k_{21} k_{11}^{-1} R_{1r}}{P_2 - k_{21} k_{11}^{-1} P_1} \quad (5.5.6)$$

et

$$\alpha = k_{22} - k_{21} k_{11}^{-1} k_{12} \quad (5.5.7)$$

Plusieurs techniques de contrôle en déplacement ont été développées dans la littérature [58,59].

En incrémentant le déplacement au lieu du chargement, cette méthode permet de résoudre les problèmes de divergence rencontrés dans les méthodes de contrôle en chargement et de tracer ainsi la réponse post-critique.

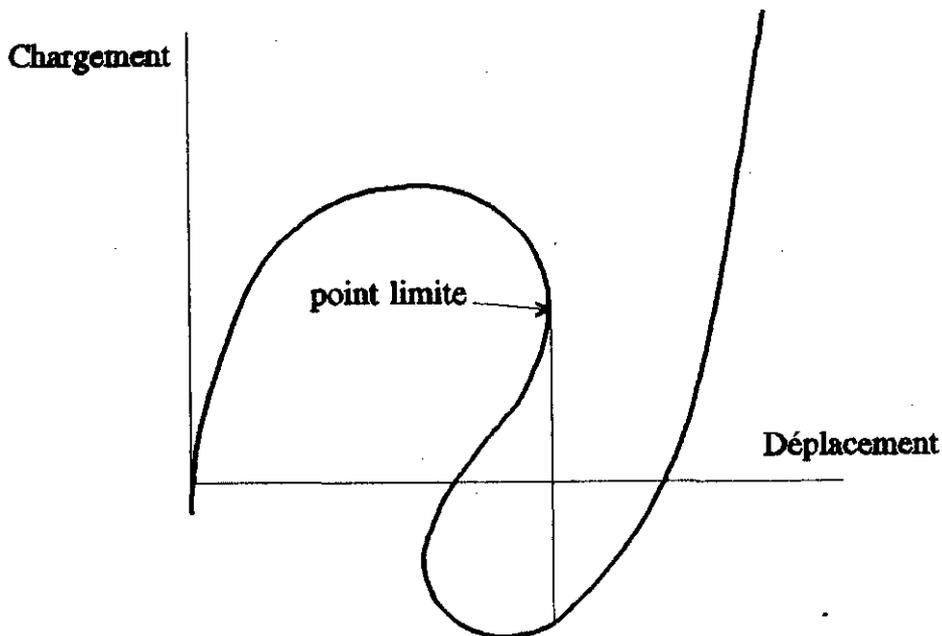


Figure (5-4): Point limite sous contrôle en déplacement

Toutefois, de même que la méthode de contrôle en chargement, cette méthode présente, aussi, un point limite. Il s'agit du saut vers le bas (snap-back) sur la courbe de chargement. Ceci peut créer une divergence dans la procédure

incrémentale/itérative. Dans cette situation, l'analyste n'a aucune information sur la nature de la rupture. Il ne peut savoir s'il s'agit d'une rupture structural du système ou seulement d'une divergence numérique dans la procédure incrémentale/itérative.

5.6) TECHNIQUE DES RESSORTS FICTIFS [60]

Cette technique est basée sur l'idée d'augmenter les termes de la matrice de rigidité. Ceci, afin d'éviter les problèmes d'instabilités numériques rencontrés au voisinage des points limites et dans les zones post-critiques. Ces dernières sont caractérisées par une matrice de rigidité singulière et définie non positive.

Pour augmenter les termes de la matrice de rigidité la rendant définie positive, cette méthode ajoute des ressorts fictifs aux points d'application du chargement.

Afin d'illustrer cette technique, examinons l'exemple suivant proposé par Sharrifi et Popov [60]. La figure (5-5) représente une structure en treillis chargée par une force P en son milieu, augmentée d'un ressort fictif au point d'application du chargement.

Sur le graphe (5-5), on peut voir le comportement non linéaire de la structure augmentée (courbe 1), la réponse du ressort seul (courbe 2) et le comportement non linéaire de la structure réelle sans ressort (courbe 3). Cette dernière est obtenue en soustrayant les résultats de la courbe 2 de ceux de la courbe 1. Par exemple, comme il est montré sur la figure, le point M sur la courbe 3 est obtenu en calculant la quantité de chargement repris par la structure réelle c.a.d

$$R = R_a - R_k .$$

Cette technique peut être généralisée à des structures plus complexes chargées d'une manière quelconque en employant la procédure suivante:

* Ayant calculé la matrice de rigidité de la structure réelle, additionnons à celle-ci une matrice K_a correspondant aux ressorts fictifs ajoutés:

$$K_a = \frac{\kappa}{|R|^2} R R^T \quad (5.6.1)$$

où κ est la rigidité du ressort fictif élastique, R le vecteur de chargement.

* Résoudre ensuite le système augmenté:

$$(K + K_a) u = R \quad (5.6.2)$$

* Calculer le facteur de réduction Λ . En substituant l'équation (5.6.2) dans l'équation (5.6.1), on obtient la relation:

$$K u = \Lambda R \quad (5.6.3)$$

dans laquelle Λ est un facteur scalaire tel que:

$$\Lambda = 1 - \frac{\kappa}{|R|^2} R^T u \quad (5.6.4)$$

Il est à noter que le facteur de réduction Λ ne peut être évalué que si le déplacement correspondant à la structure augmentée est déterminé.

Cette technique présente, cependant, un inconvénient. Il réside dans la difficulté du choix d'une valeur appropriée de κ . En effet, une petite valeur de κ n'aura aucun effet sur la matrice de rigidité, alors qu'une grande valeur de κ conduirait à la technique de contrôle en déplacement [57-59].

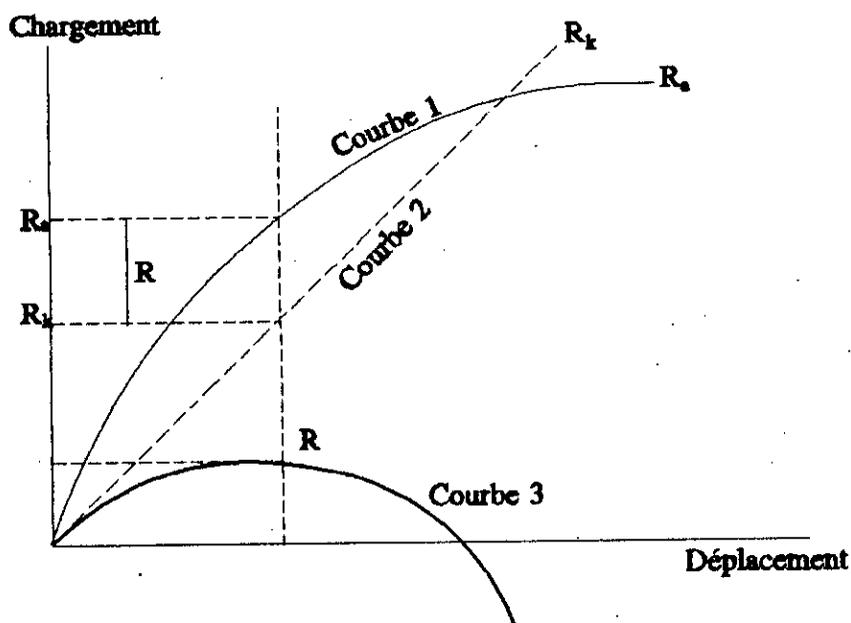


Figure (5-5): Analyse d'une structure en treillis par la technique des ressorts fictifs

5.7) METHODE ARCLENGTH

5.7.1) Introduction

La technique Arclength a été introduite pour la première fois, simultanément par Ricks [61] et Wempner [62].

Elle permet d'éviter les problèmes de divergence rencontrés dans les techniques de contrôle en chargement et en déplacement.

Depuis son apparition, plusieurs modifications lui ont été apportées par de nombreux chercheurs [63-73]. Ceci, afin d'améliorer sa vitesse de convergence et sa stabilité numérique dans les zones post-critiques.

Ce paragraphe a pour objectif de présenter cette technique, d'étudier les paramètres qui la régissent et enfin de déduire un algorithme efficace de résolution permettant de tracer toute la réponse non linéaire.

5.7.2) Description de la technique

La technique Arclength consiste à combiner une équation de contrainte, fonction mixte de déplacement et de chargement, avec l'une des méthodes de contrôle en chargement présentées dans la section (5.4). Cette équation permet d'ajuster l'incrément de chargement pour qu'il soit fonction de la longueur d'un arc (1) pendant la procédure itérative/ incrémentale.

Elle consiste à réécrire le schéma correspondant à une méthode générale de contrôle en chargement suivant:

$${}^t K \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} P - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}$$

$${}^{t+\Delta t} U^{(i)} = {}^{t+\Delta t} U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)}$$

sous la forme:

$${}^{t+\Delta t} K_T^{(i-1)} \Delta \bar{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda P - {}^t F \quad (5.7.1a)$$

$${}^{t+\Delta t} K_T^{(i-1)} \Delta \bar{U}^{(i)} = P \quad (5.7.1b)$$

$$\Delta u^{(i)} = \Delta \bar{u}^{(i)} + \Delta \lambda^{(i)} \Delta \bar{u}^{(1)} \quad (5.7.1c)$$

$$t+\Delta t u^{(i)} = t+\Delta t u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)} \quad (5.7.1d)$$

$$t+\Delta t \lambda^{(i)} = t+\Delta t \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \quad (5.7.1e)$$

$$f(\Delta \lambda^i, \Delta u^i) = 0 \quad (5.7.1f)$$

K_T étant la matrice de rigidité tangente, P le vecteur initial de chargement, λ le facteur de chargement, F le vecteur des forces internes et f la fonction de contrainte dans l'espace chargement-déplacement.

La représentation graphique de la technique Arclength pour le cas d'une équation de contrainte sphérique [63] est montrée sur la figure suivante:

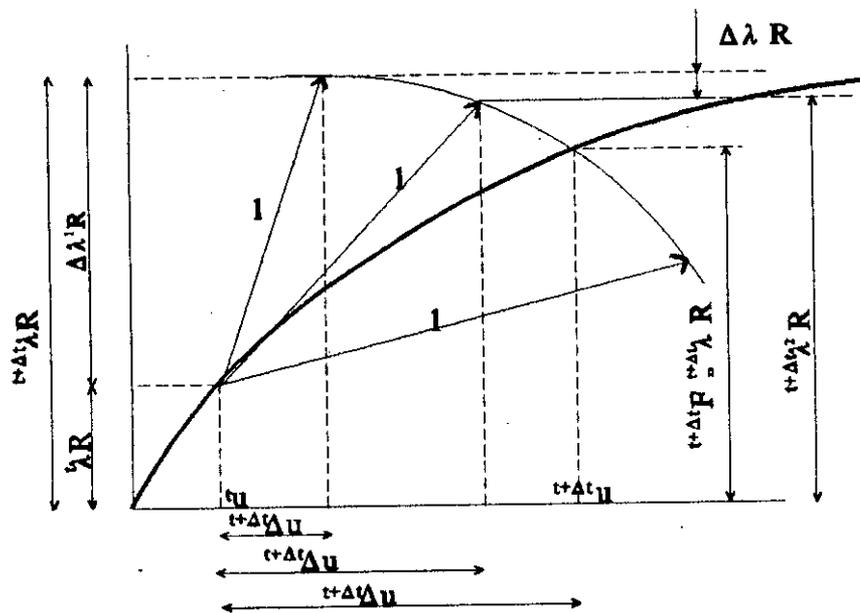


Figure (5-6): Représentation graphique de la méthode Arclength dans le cas d'une équation de contrainte sphérique

5.7.3) Paramètres régissant la technique Arclength

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de cette section, plusieurs modifications ont été apportées à la technique pour améliorer sa stabilité [63-73]. Ces modifications concernent principalement:

- * La définition d'une équation de contrainte.

- * Le choix des racines appropriées de l'équation de contrainte.
- * Le choix de la longueur d'arc de l'incrément de chargement.

A ce propos, Bellini [67] a montré par une étude comparative des différents algorithmes proposés, que le choix des deux derniers points a une importance capitale sur la convergence et la stabilité de la méthode.

a) Equation de contrainte

Durant cette dernière décennie, un impressionnant nombre d'équations de contrainte a été proposé. Parmi ces équations, les plus connues sont:

- Les équations de contrainte sphérique et cylindrique [63] proposées par Crisfield;
- L'équation de contrainte elliptique développée par Park [68];
- L'équation de contrainte de la méthode d'incrément constant du travail des forces extérieures, présentée par Bathe et Dvorkin [69]; et
- L'équation de contrainte de la méthode d'incrément constant du travail complémentaire des forces extérieures proposée par Bellini et Chulya [67].

Par ailleurs, l'analyse que nous avons effectuée sur de nombreux articles [19,22,25,63-65,67,70-71] indique que le choix de la fonction de contrainte dépend de l'application. Pour un usage général l'équation de contrainte proposée par Crisfield [63] est la plus efficace. Aussi, dans cette étude, c'est cette équation qui est employée.

La forme générale de cette équation est donnée par la relation:

$$\Delta \mathbf{u}^{(i)T} \Delta \mathbf{u}^{(i)} = \Delta l^2 \quad (5.7.2)$$

où Δl est la longueur de l'arc et $\mathbf{u}^{(i)}$ est l'incrément de déplacement entre l'instant $t+\Delta t$ et t , tel que:

$$\mathbf{u}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u} \quad (5.7.3)$$

En décomposant cet incrément suivant la technique de Batoz et Dhatt [57]:

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u}^{(i-1)} + \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} + \Delta \lambda^{(i)} \underline{\Delta \mathbf{u}^{(1)}} \quad (5.7.4)$$

L'équation de contrainte (5.7.2), se réduit alors à:

$$A(\Delta\lambda^{(i)})^2 + B(\Delta\lambda^{(i)}) + C = 0 \quad (5.7.5)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \Delta\bar{u}^{(1)T} \cdot \Delta\bar{u}^{(1)} \\ B &= 2 [u^{(i-1)} + \Delta\bar{u}^{(i)}]^T \cdot \Delta\bar{u}^{(1)} \\ C &= [u^{(i-1)} + \Delta\bar{u}^{(i)}]^T [u^{(i-1)} + \Delta\bar{u}^{(i)}] - \Delta l^2 \end{aligned} \quad (5.7.6)$$

b) Choix de la Racine la plus appropriée

Le choix de la racine appropriée dépend de l'équation de contrainte employée. Pour certaines équations, comme celle proposée par Bathe et Dvorkin [69] ou celle par Bellini et Chulya [67], la solution est unique et réelle.

Pour d'autres équations, comme l'équation cylindrique développée par Crisfield, la résolution de celle-ci conduit généralement à deux racines distinctes $\Delta\lambda_1$ et $\Delta\lambda_2$. Dans ce cas, une question se pose: laquelle de ces deux solutions est la meilleure? d'après de nombreux auteurs [19,22,25,64-65,67,70-71], la solution la plus appropriée est celle qui assure un non retour en arrière. Dans ce sens, plusieurs suggestions ont été présentées.

Si les racines sont réelles, Crisfield [63] propose de prendre comme solution celle qui maintient un angle positif entre les vecteurs incréments de déplacement actuel U^i et précédent $U^{(i-1)}$.

Cette proposition se traduit mathématiquement en prenant la racine pour laquelle:

$$\delta = U^{(i-1)} \cdot U^{(i)} > 0.$$

Dans le cas où les deux racines donnent un δ positif, alors la racine la plus appropriée est celle qui s'approche de la solution linéaire.

Bellini et Chulya [67] proposent de prendre comme solution celle donnant la plus grande valeur de δ telle que:

$$\delta = U^{(i-1)T} U^{(i)} \quad \text{Pour } i > 1 \quad (5.7.8a)$$

$$\delta = U^{(0)T} U^{(1)} \quad \text{pour } i=1 \quad (5.7.8b)$$

avec $u^{(0)} = \tau_U - \tau^{-\Delta} \tau_U$.

Ces équations assurent le plus petit changement de direction entre les vecteurs incréments de déplacement actuel $u^{(i)}$ et celui de l'itération précédente $u^{(i-1)}$.

Dans le cas où les racines sont imaginaires, Bellini et Chulya [67] suggèrent de diviser la longueur d'arc en deux et de reprendre l'exécution du programme à partir de la fin de l'incrément précédent. Meek et Logathan [22], d'après leur expérience, proposent de réduire proportionnellement la longueur d'arc et l'incrément de facteur de chargement durant les itérations, tout en revenant aux valeurs initiales à la fin des itérations.

Pour la première itération et pour assurer un non retour en arrière, le signe de la racine choisie est basé sur le critère de changement de signe du déterminant. Ainsi, dès que le déterminant change de signe, l'incrément de signe opposé ($-\Delta\lambda$) est appliqué.

Cette procédure assure une diminution du chargement lorsque le point limite est juste dépassé (la matrice devient définie négative, ce qui implique un changement du signe du déterminant) dans les zones post-critiques instables.

Cette technique n'est, cependant, pas toujours évidente. Il peut arriver un cas où la matrice devient définie négative avant même de dépasser le point limite. Alors, au lieu de continuer et appliquer un incrément de charge $\Delta\lambda$, l'algorithme appliquera automatiquement un incrément de charge de signe opposé ($-\Delta\lambda$) conformément au critère du changement du signe du déterminant. Ceci peut conduire à un retour en arrière.

Un pareil problème a été rencontré par Meek et Logathan [22] lors d'une analyse d'une voûte bi-articulée. Ils s'aperçoivent qu'avant même d'atteindre le point limite, le nombre de termes négatifs dans la diagonale de la matrice factorisée a varié de zéro à deux termes. Ceci indique que le déterminant a changé deux fois de suite de signe.

Pour pallier à ce problème, Meek et Logathan [22] proposent d'adopter le critère du changement du signe du travail extérieur avec celui du déterminant de la matrice de rigidité tangente.

C) Choix de la grandeur de l'incrément de chargement

Pour avoir un algorithme efficace, il est essentiel de choisir automatiquement la longueur du rayon Arclength. L'étude comparative réalisée par Bellini montre que la définition du nouveau rayon Arclength ΔI a un effet direct sur la performance de la méthode.

Parmi les formules de calcul qui ont été proposées, on ne citera dans cette étude que celles les plus connues.

Crisfield en 1981 proposa la formule suivante:

$$\Delta I_{new} = \Delta I_{old} \frac{N_d}{N_{j-1}} \quad (5.7.9)$$

Après plusieurs expériences numériques, Ramm [71] réduit l'équation ci-dessus à:

$$\Delta I_{new} = \Delta I_{old} \left(\frac{N_d}{N_{j-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.7.10)$$

5.7.4) Description de l'algorithme de résolution non linéaire

L'algorithme de résolution employé dans cette étude est basé sur l'algorithme de Crisfield [63] auquel sont ajoutées quelques modifications concernant principalement le choix de l'incrément de chargement et l'actualisation automatique de la longueur d'arc.

Pour un niveau de chargement Arbitraire $\{P\}$ (généralement, l'incrément de chargement initial introduit par l'utilisateur), le vecteur déplacement peut être calculé par:

$$\{U\}_i^1 = [K_T]_i^{-1} \{P\} \quad (5.7.11)$$

où $[K_T]_i$ est la matrice de rigidité tangente formée au début de chaque incrément et gardée constante durant les itérations d'équilibres. A la $j^{ème}$ itération du $i^{ème}$ incrément de chargement, les incréments de déplacement dus aux forces résiduelles $\{R\}$ sont données par:

$$\{\Delta U_R\}_i^j = [K_T]_i^{-1} \{R_P\}_i^j \quad (5.7.12)$$

$$\{R_P\}_i^j = \lambda_i^{j-1} \{P\} - F_i^{(j-1)} \quad (5.7.13)$$

Dans lesquels $\{\Delta U_R\}_i^j$ est le vecteur incrément de déplacement dû aux forces résiduelles $\{R_P\}_i^j$ pour la $j^{\text{ème}}$ itération du $i^{\text{ème}}$ incrément de chargement et λ_i^{j-1} le facteur de chargement après la $(j-1)^{\text{ème}}$ itération du $i^{\text{ème}}$ incrément de chargement.

Les déplacements cumulés au $i^{\text{ème}}$ incrément de chargement après la $j^{\text{ème}}$ itération, sont obtenus par:

$$\{\Delta U\}_i^j = \{\Delta U\}_i^{j-1} + \Delta \lambda_i^j \{U_P\}_i^j + \{\Delta U_R\}_i^j \quad (5.7.14)$$

où ΔU est l'incrément de déplacement cumulé et $\Delta \lambda_i^j$ la variation du facteur de chargement à la $j^{\text{ème}}$ itération.

La variation du facteur de chargement $\Delta \lambda_i^j$ pour la $j^{\text{ème}}$ itération est déterminée par résolution de l'équation suivante:

$$\{\Delta U\}_i^{jT} \{\Delta U\}_i^j = I^2 \quad (5.7.15)$$

Si les racines sont réelles, alors la racine appropriée est celle qui maintient un angle positif entre les incréments de déplacements précédent et actuel, c'est à dire entre $\{\Delta U_R\}_i^{j-1}$ et $\{\Delta U_R\}_i^j$.

Toutefois, si les deux angles sont positifs, alors celle qui s'approche le plus de la solution linéaire est choisie.

Si par contre les racines sont imaginaires, alors on revient à la première itération en réduisant proportionnellement, selon la procédure de Meek et Logathan [22], l'incrément de déplacement et le facteur de chargement. Pour la première itération du $i^{\text{ème}}$ incrément de chargement.

$$\{\Delta U\}_i^0 = \{\Delta U_R\}_i^1 = 0 \quad (5.7.16)$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (5.7.14) et en tenant compte de l'équation on obtient:

$$I^2 = (\Delta \lambda_i^1)^2 \{\Delta U_R\}_i^T \{\Delta U_R\}_i \quad (5.7.17)$$

par conséquent:

$$\Delta\lambda_i^1 = \frac{l}{\sqrt{(\Delta U_T)_i^T (\Delta U_T)_i}} \quad (5.7.18)$$

Cette dernière équation détermine la variation du facteur de chargement pour la première itération du $i^{\text{ème}}$ incrément de chargement.

Pour la première itération du premier incrément de chargement, la valeur initiale $\Delta\lambda_1^1$ doit être spécifiée pour définir la longueur d'arc initiale.

Une fois $\Delta\lambda_i^j$ déterminé, l'incrément de déplacement à la $j^{\text{ème}}$ itération peut être calculé, par:

$$\{\Delta U\}_i^j = \Delta\lambda_i^j \{U_T\}_i + \{\Delta U_R\}_i^j \quad (5.7.19)$$

Le vecteur déplacement cumulé pour cet incrément est donné par l'équation (5.7.14). Le nouveau facteur de chargement cumulé devient:

$$\lambda_i^j = \lambda_i^{j-1} + \Delta\lambda_i^j \quad (5.7.20)$$

Il est importe de remarquer que le vecteur déplacement comporte des dimensions différentes, translations et rotations. Aussi, pour éviter une incompatibilité des dimensions, on ignore dans l'équation de contrainte de cette étude les degrés de liberté relatifs aux rotations.

Par ailleurs, pour exploiter la variation de l'allure de la courbe de chargement-déplacement durant le chargement, la méthode de longueur d'arc variable est utilisée. Dans cette méthode, la longueur d'arc est actualisée à chaque cycle selon la formule suivante:

$$l_i = l_{(i-1)} \sqrt{\frac{J_d}{J_{i-1}}} \quad (5.7.21)$$

où l_i et l_{i-1} sont les longueurs d'arc pour le $i^{\text{ème}}$ et $(i-1)^{\text{ème}}$ incrément de chargement, J_d est le nombre d'itérations désiré et (j_{i-1}) est le nombre d'itérations requis pour atteindre la convergence au $(i-1)^{\text{ème}}$ incrément de chargement.

Si durant l'incrément de chargement, le déterminant de la matrice de rigidité globale et le travail des forces extérieures changent de signe en même temps,

alors l'incrément de chargement de signe opposé est appliqué.

5.8) CONCLUSION

Dans ce chapitre, les différentes méthodes de résolution non linéaires sont analysées. Il découle que la technique Arclength est la mieux adaptée pour une analyse non linéaire.

En effet, cette méthode ne permet pas seulement de tracer la réponse post-critique et de nous renseigner ainsi sur l'aptitude de la structure à s'accommoder à de larges valeurs de déplacement, Mais d'accélérer la convergence dans la zone précritique. Ceci grâce au choix automatique de la valeur de l'incrément de chargement qui est ajusté suivant l'allure de la courbe de chargement.

Chapitre 6

Développement du Modèle Numérique

Chapitre 6

DEVELOPPEMENT DU MODELE NUMERIQUE

6.1) INTRODUCTION

Les structures spatiales, type pylône électrique, appartiennent à une classe de structure, où une large proportion de chargement est reprise par la force axiale dans les membrures. De ce fait, ces membrures deviennent plus flexibles et souvent, elle subissent de considérables déformations sans qu'aucune non linéarité matérielle n'apparaisse. Par conséquent, pour une meilleure estimation de la capacité réelle de chargement, il est important de considérer dans l'analyse de ce type de structure l'effet de la non linéarité géométrique.

Durant ces deux dernières décennies, l'analyse non linéaire géométrique a fait l'objet de plusieurs recherches. Cependant, la plupart de ces études se sont confinées aux structures à section symétrique et/ou aux formulations Lagrangiennes. Ces dernières présentent certains inconvénients. Elles sont limitées à des rotations infinitésimales entre deux incréments successifs de chargement.

Le but de ce chapitre est de développer une matrice de rigidité tangente pour l'analyse en grands déplacements des structures tridimensionnelles, qui prend en considération les effets inhérents à une poutre spatiale (moment de torsion non uniforme, excentricité des connexions, dissymétrie de la section, ...). Pour éviter l'engendrement des efforts internes parasites résultants de l'emploi de grands incréments de chargement, on se propose de développer une procédure incrémentale basée sur les descriptions corotationnelle et Lagrangienne.

6.2) HYPOTHESES ET REPERES DE REFERENCE

L'élément fini choisi pour cette étude est un élément de type poutre spatiale, à parois-minces et à section dissymétrique, prismatique et ouverte. Il est composé de deux noeuds avec sept degrés de liberté par noeud. Il peut transmettre un effort axial, deux efforts de cisaillement, deux moments de flexion, un moment de torsion et un bimoment (figure (6-1)).

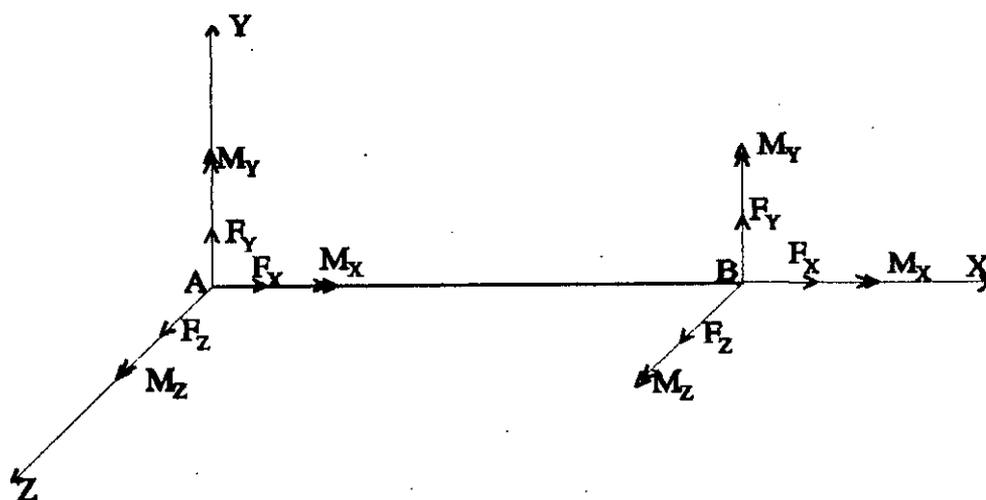


Figure (6-1): Élément de poutre spatiale

Par ailleurs, cet élément est basé sur les hypothèses suivantes:

- 1)- hypothèse de Vlasov: les déformations de cisaillement dans la ligne médiane de la section sont négligeables;
- 2)- la section reste indéformable durant le chargement. Les déformations sont supposées petites, par contre, les déplacements et les rotations peuvent être grands;
- 3)- le chargement est appliqué statiquement et maintient sa direction durant les déformations;
- 4)- le critère de plasticité est uni-axial;
- 5)- le moment de torsion est faible devant les moments de flexion;
- 6)- la loi constitutive est élasto-plastique avec déchargement élastique

possible. L'écroutissage est supposé isotrope;

7)- le voilement local et la distorsion ne sont pas considérés.

De plus, comme nous l'avons souligné dans l'introduction de ce chapitre, les structures spatiales composées de poutres à parois-minces et à section dissymétrique et ouverte présentent certaines particularités, qui sont:

- 1)- couplage des effets de la torsion et ceux de la flexion,
- 2)- excentricité des liaisons entre les éléments, et
- 3)- inclinaison des axes principaux d'inertie.

Pour prendre en compte tous ces paramètres, nous avons choisi quatre systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires:(Figure 6-2)

* Un système d'axes $\overline{OX}_o\overline{Y}_o\overline{Z}_o$ passant par le point O que l'on appellera point de connexion.

* Un système d'axes $\overline{SX}_s\overline{Y}_s\overline{Z}_s$ parallèle aux axes de la structure et passant par le point S, centre de torsion.

* Un système d'axes $\overline{SX}'_s\overline{Y}'_s\overline{Z}'_s$ tels que les axes \overline{SY}'_s et \overline{SZ}'_s passent par le centre de torsion S et soient parallèles aux axes principaux d'inertie de la section avant déformation.

* Un système d'axes $\overline{CX}_c\overline{Y}_c\overline{Z}_c$ passant par le point C, centre de gravité de la section.

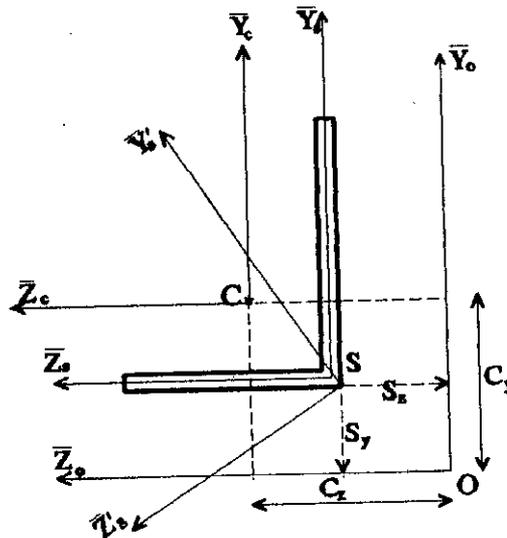


Figure (6-2): Différents systèmes de référence

6.3) FORMULATION EN ELEMENTS FINIS DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

6.3.1) Principe des déplacements virtuels

Nous avons montré dans le chapitre deux, qu'en utilisant la description Lagrangienne actualisée, l'équation de mouvement se réduit à l'expression suivante:

$$\int_{\tau_V} {}^t C_{ijkl} {}^t e_{kl} \delta {}^t e_{ij} {}^t dV + \int_{\tau_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} \mathcal{G} - {}^t \mathcal{G} \quad (6.3.1)$$

dans laquelle, ${}^{t+\Delta t} \mathcal{G}$ est le travail des forces appliquées à l'instant $t+\Delta t$:

$${}^{t+\Delta t} \mathcal{G} = \int_{\tau_V} {}^{t+\Delta t} t_k \delta U_k {}^t dV \quad (6.3.2)$$

et ${}^t \mathcal{G}$ est celui des forces internes réciproques à l'instant t :

$${}^t \mathcal{G} = \int_{\tau_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} {}^t dV \quad (6.3.3)$$

Les termes ${}^t e_{ij}$ et ${}^t \eta_{ij}$ représentent, respectivement, les composantes linéaires et non linéaires du tenseur incrément des déformations de Green-Lagrange. ${}^t \tau_{ij}$ dénote le tenseur des contraintes de Cauchy à l'instant t . Le terme C_{ijkl} représente les composantes du tenseur constitutif et ${}^{t+\Delta t} T_k$ les forces surfaciques exprimées dans la configuration $t+\Delta t$, mais mesurées par rapport à la configuration à l'instant t .

Dans la théorie conventionnelle des poutres tridimensionnelles, on considère que les contraintes ${}^t \tau_{22} = {}^t \tau_{33} = {}^t \tau_{23} = 0$ et que ${}^t \tau_{12} = {}^t \tau_{21}$ et ${}^t \tau_{13} = {}^t \tau_{31}$. Il ne reste donc que trois composantes de contraintes indépendantes, qui sont ${}^t \tau_{11}$, ${}^t \tau_{12}$ et ${}^t \tau_{13}$ et trois composantes correspondantes de déformation ${}^t e_{11}$, ${}^t e_{12}$ et ${}^t e_{13}$.

Pour des raisons pratiques, le tenseur des contraintes de Cauchy $\langle {}^t \tau \rangle$, le tenseur des déformations linéaires $\langle {}^t e \rangle$ et celui des déformations non linéaires $\langle {}^t \eta \rangle$ sont écrits sous la forme matricielle suivante:

$$\langle {}^t\tau \rangle = \langle \tau_{xx} \quad \tau_{yx} \quad \tau_{zx} \rangle \quad (6.3.4)$$

$$\langle {}^t e \rangle = \langle e_{xx} \quad e_{yx} \quad e_{zx} \rangle \quad (6.3.5)$$

$$\langle {}^t \eta \rangle = \langle \eta_{xx} \quad \eta_{yx} \quad \eta_{zx} \rangle \quad (6.3.6)$$

où

$$\tau_{xx} = {}^t\tau_{11} \quad \tau_{yx} = {}^t\tau_{12} \quad \tau_{zx} = {}^t\tau_{13} \quad (6.3.7)$$

$$e_{xx} = e_{xx} + \eta_{xx} = {}^t e_{11} + {}^t \eta_{11} = {}^t e_{13} \quad (6.3.8)$$

$$e_{yx} = e_{yx} + \eta_{yx} = 2({}^t e_{12} + {}^t \eta_{12}) = {}^t e_{12} \quad (6.3.9)$$

$$e_{zx} = e_{zx} + \eta_{zx} = 2({}^t e_{12} + {}^t \eta_{13}) = {}^t e_{13} \quad (6.3.10)$$

Le tenseur constitutif reliant les déformations aux contraintes est donné par la relation:

$$[C] = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (6.3.11)$$

où G est le module de rigidité transversale et E est le module de Young tel que:

- *) $E = E_e$ pour un comportement élastique; et
- *) $E = E_t$ pour un comportement élasto-plastique (l'expression de ce coefficient est donnée dans le chapitre 4).

En substituant cette équation dans l'équation de mouvement (6.3.1), on obtient:

$$\int_{{}^tV} [E e_{xx} \delta e_{xx} + G e_{yx} \delta e_{yx} + G e_{zx} \delta e_{zx} + \tau_{xx} \delta \eta_{xx} + \tau_{yx} \delta \eta_{yx} + \tau_{zx} \delta \eta_{zx}] dv = {}^{t+\Delta t} \mathcal{E} - {}^t \mathcal{E} \quad (6.3.12)$$

Les expressions des déformations linéaires et non linéaires en fonction des déplacements ont été obtenues dans le chapitre deux. Elles sont données par les relations:

$$e_{xx} = u_{x,x} \quad ; \quad e_{yx} = u_{x,y} + u_{y,x} \quad ; \quad e_{zx} = u_{x,z} + u_{z,x} \quad (6.3.13)$$

$$\eta_{xx} = \frac{1}{2} (u_{x,x}^2 + u_{y,x}^2 + u_{z,x}^2) \quad (6.3.14)$$

$$\eta_{yx} = u_{x,y} u_{x,x} + u_{y,y} u_{y,x} + u_{z,y} u_{z,x} \quad (6.3.15)$$

$$\eta_{zx} = u_{x,z} u_{x,x} + u_{y,z} u_{y,x} + u_{z,z} u_{z,x} \quad (6.3.16)$$

Dans ces expressions, il est à noter que les termes $u_{y,y}$ et $u_{z,z}$ sont nuls, et que la quantité $u_{x,x}^2$ est négligeable. Les termes contenant le produit $u_{x,y} u_{x,x}$ et $u_{x,z} u_{x,x}$ représentent des quantités notables et ne sont donc pas éliminés.

Explicitons les termes de déformation en fonction des déplacements. En utilisant les équations (6.3.13) à (6.3.16), on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int [E \delta (u_{x,x}^2) + G \delta ((u_{x,y} + u_{y,x})^2 + (u_{x,z} + u_{z,x})^2)] dv + \\ & \frac{1}{2} \int \tau_{xx} \delta (u_{y,x}^2 + u_{z,x}^2) dv + \int [\tau_{yx} \delta (u_{x,y} u_{x,x} + u_{z,y} u_{z,x})] dv + (6.3.17) \\ & \int [\tau_{zx} \delta (u_{x,z} u_{x,x} + u_{y,z} u_{y,x})] dv = {}^{t+\Delta t} \mathcal{E} - {}^t \mathcal{E} \end{aligned}$$

Les déplacements u_x , u_y et u_z ont été développés dans le chapitre trois. Ils sont donnés par:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{xc} - z u'_{zs} - y u'_{ys} - \omega_s \phi'_x \\ u_y &= u_{ys} - (z - a_z) \phi_x \\ u_z &= u_{zs} + (y - a_y) \phi_x \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

En différentiant ces équations par rapport à x , y et z , on obtient:

$$\begin{aligned}
 u_{x,x} &= u'_{xc} - zu''_{zs} - yu''_{ys} - \omega_s \phi''_x \\
 u_{x,y} &= -u'_{ys} - \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \phi'_x u_{x,z} = -u'_{zs} - \frac{\partial \omega_s}{\partial y} \phi'_x \\
 u_{y,x} &= u'_{ys} - (z - a_z) \phi'_x \\
 u_{z,x} &= u'_{zs} + (y - a_y) \phi'_x \\
 u_{y,z} &= -\phi_x \\
 u_{z,y} &= \phi_x
 \end{aligned} \tag{6.3.19}$$

Par ailleurs, les forces internes généralisées en fonction des contraintes τ_{xx} , τ_{yx} et τ_{zx} sont données par les relations:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_A \tau_{xx} dA \\
 F_y &= \int_A \tau_{yx} dA \\
 F_z &= \int_A \tau_{zx} dA \\
 M_x &= \int_A [\tau_{zx}(y - a_y) - \tau_{yx}(z - a_z)] dA \\
 M_y &= \int_A y \tau_{xx} dA \\
 M_z &= \int_A z \tau_{xx} dA \\
 B &= - \int_{\tau_{xx}} \omega_T dA
 \end{aligned} \tag{6.3.20}$$

En substituant les termes de l'équation (6.3.19) dans l'équation des déplacements virtuels (6.3.17) et en considérant la relation entre les contraintes et les efforts internes, l'équation (6.3.17) devient:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^1 EA \delta (u'_x)^2 dx - \int_0^1 ES_z \delta (u'_x u''_z) dx + \int_0^1 ES_y \delta (u''_y u'_x) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^1 EI_y \delta (u''_y)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 EI_\omega \delta (\varphi''_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 GJ \delta (\varphi'_x)^2 dx \\
 & \quad \frac{1}{2} \int_0^1 EI_z \delta (u''_y)^2 dx + \int_0^1 EI_{yz} \delta (u''_z u''_y) dx + \\
 & \quad \frac{1}{2} \int_0^1 P \delta (u'_y)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 P \delta (u'_z)^2 dx + \int_0^1 Pa_z \delta (u'_y \varphi'_x) dx \\
 & - \int_0^1 Pa_y \delta (u'_z \varphi'_x) + \frac{1}{2} \int_0^1 PI_p \delta (\varphi'_x)^2 dx - \int_0^1 (M_y a_z + M_z a_y) \delta (\varphi'_x)^2 dx \\
 & \quad \int_0^1 M_z \delta (u'_z \varphi'_x) dx - \int_0^1 M_y \delta (u'_y \varphi'_x) dx \\
 & \quad - \int_0^1 F_y \delta (u'_y u'_x) dx - \int_0^1 F_z \delta (u'_z u'_x) dx + \int_0^1 F_y \frac{S_z}{A} \delta (u'_y u''_z) dx \\
 & \quad \int_0^1 F_y \frac{S_y}{A} \delta (u'_y u''_y) dx + \int_0^1 F_y \delta (\varphi_x u'_z) dx - \int_0^1 F_z \delta (\varphi_x u'_y) dx \\
 & + \int_0^1 F_z \frac{S_z}{A} \delta (u'_y u''_z) dx + \int_0^1 F_z \frac{S_y}{A} \delta (u'_z u''_y) dx + \int_0^1 F_z \frac{S_z}{A} \delta (\varphi_x \varphi'_x) dx \\
 & - \int_0^1 F_z a_z \delta (\varphi_x \varphi'_x) dx + \int_0^1 F_y \frac{S_y}{A} \delta (\varphi_x \varphi'_x) dx - \int_0^1 F_y a_y \delta (\varphi_x \varphi'_x) dx \\
 & = {}_{t+\Delta t} \mathcal{E} - {}_t \mathcal{E}
 \end{aligned} \tag{6.3.21}$$

où

$$\begin{aligned}
 S_y &= \int_A y dA & S_z &= \int_A z dA & I_{yz} &= \int_A yz dA \\
 I_y &= \int_A z^2 dA & I_z &= \int_A y^2 dA & I_\omega &= \int_A \omega^2 dA \\
 I_p &= \frac{1}{A} \int_A (y^2 + z^2) dA + a_y^2 + a_z^2
 \end{aligned} \tag{6.3.22}$$

$$J = \int_A \left[\left(\frac{\partial \omega_s}{\partial z} + z - a_z \right)^2 + \left(-\frac{\partial \omega_s}{\partial z} + y - a_y \right)^2 \right] dA$$

6.3.2) Fonction d'interpolation

Pour résoudre l'équation de mouvement (6.3.21) par la M.E.F, il est nécessaire de définir le champ de déplacement à l'intérieur de chaque élément:

$${}^t\bar{u}_1 = \sum_{k=1}^{n_t} n_k^i {}^t\bar{u}^k \quad (6.3.24)$$

où ${}^t\bar{n}_k$ et ${}^t\bar{u}^k$ sont, respectivement, les fonctions d'interpolation et les incréments de déplacement nodaux définis par rapport aux axes locaux ${}^t\bar{x}_1$ à l'instant t .

Le choix adéquat de ces fonctions d'interpolation est essentiel pour la performance et la précision de l'élément, étant donné qu'elles affectent directement le calcul des matrices de rigidité impliquées dans les équations de mouvement.

En considérant ce choix, il est reconnu pour une poutre à section constante que les polynômes linéaires du type Lagrange et cubiques du type l'Hermite sont suffisants pour décrire les champs de déplacement longitudinal et transversal, respectivement.

Pour ce qui est du champ de déplacement de rotation, le choix d'une fonction d'interpolation a été le point de discussion de plusieurs chercheurs. Alors que la plupart des auteurs, comme Barsoum et Gallagher [74], Powell et Klinger [75] et Mei [76] ont assumé une variation cubique du champ de rotation ϕ_x , Krajinovic [77] a adopté la fonction hyperbolique dans sa formulation, soutenant que la fonction d'influence exacte doit être utilisée.

$$\phi_x = C_1 \cosh(kx) + C_2 \sinh(kx) + C_3 Kx + C_4 \quad (6.3.24)$$

où $k^2 = GJ/EI_w$ et C_1, C_2, C_3, C_4 des constantes à déterminer.

Il a justifié ce choix par les larges erreurs induites par le polynôme du 3^{ème} ordre, lorsque le rapport du moment de torsion de Saint-Venant au bimoment (GJ/EI_w) n'est pas négligeable.

Cependant, ces propositions ont été contesté par Mei [78], vu les meilleurs résultats obtenus avec le polynôme du 3^{ème} degré. Récemment, Pittalga [79] suggère

que la différence des deux résultats revient aux erreurs d'arrondis induites par les fonctions hyperboliques, qui sont plus grandes que celles produites par les polynômes du 3^{ème} degré.

Le polynôme d'ordre cinq du type Hermite a été aussi utilisé par Barsoum [74] et Adman [80]. Dans une analyse non linéaire géométrique élastique, ce polynôme offre de meilleurs résultats avec moins d'éléments. Seulement, ces polynômes présentent des difficultés numériques dans une analyse non linéaire inélastique. Aussi, Barsoum a recommandé l'utilisation des polynômes d'ordre inférieurs avec plus d'éléments.

Dans notre formulation, on suppose une variation cubique de la fonction d'interpolation pour les variables u_y , u_z et φ_x et une variation linéaire pour la variable u_x . On utilisera la notation $\langle \rangle$ pour désigner un vecteur ligne et la notation $\{ \}$ pour indiquer un vecteur colonne.

Le champ de déplacement peut être exprimé par:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \langle n_x \rangle \{ \bar{u}_x \} \\ u_y &= \langle n_y \rangle \{ \bar{u}_y \} \\ u_z &= \langle n_z \rangle \{ \bar{u}_z \} \\ \varphi_x &= \langle n_\varphi \rangle \{ \bar{\varphi}_x \} \end{aligned} \right\} \quad (6.3.25)$$

Dans lesquelles, en posant $i = \frac{x}{l}$:

$$\begin{aligned} \langle n_x \rangle &= \langle 1-i, i \rangle \\ \langle n_y \rangle = \langle n_z \rangle = \langle n_\varphi \rangle &= \langle 1-3i^2+2i^3, i+2i^2+i^3, 3i^2-2i^3, i^3-i^2 \rangle \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

Les incréments de déplacement aux noeuds A et B de l'élément sont donnés par les relations:

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}_x \rangle &= \langle u_{xA}, u_{xB} \rangle \\ \langle \bar{u}_y \rangle &= \langle u_{yA}, -l\varphi_{zA}, u_{yB}, -l\varphi_{zB} \rangle \\ \langle \bar{u}_z \rangle &= \langle u_{zA}, l\varphi_{yA}, u_{zB}, l\varphi_{yB} \rangle \\ \langle \bar{\varphi}_x \rangle &= \langle \varphi_{xA}, l\varphi'_{xA}, \varphi_{xB}, l\varphi'_{xB} \rangle \end{aligned} \quad (6.3.27)$$

Les forces nodales correspondantes sont montrées sur la figure(6-1).

Les forces internes résultantes à une position x de l'élément peuvent être exprimées en fonction des valeurs nodales par les expressions suivantes:

$$\left. \begin{aligned}
 F_x &= F_{xB} \\
 F_y &= -\frac{(M_{zA} + M_{zB})}{l} \\
 F_z &= \frac{(M_{yA} + M_{yB})}{l} \\
 M_x &= M_{xB} \\
 M_y &= -M_{yA} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_{yB} \left(\frac{x}{l}\right) \\
 M_z &= -M_{zA} \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_{zB} \left(\frac{x}{l}\right)
 \end{aligned} \right\} (6.3.28)$$

La suite de développement ainsi que la matrice de rigidité tangente sont présentées dans les annexes 3 et 4, respectivement.

6.4) MATRICES DE TRANSFORMATION

En général, la construction de la matrice de rigidité tangente s'obtient par transformation et assemblage des matrices de rigidité élémentaires. Cette transformation s'effectue du repère local vers le repère global par l'intermédiaire d'une matrice de rotation.

Toutefois, dans le cas d'une analyse en grands déplacements des structures spatiales à section dissymétrique, cette transformation ne s'effectue pas directement en une seule étape. Mais, elle est composée de quatre étapes de transformation. Celles-ci permettent de prendre en considération:

- les grands déplacements par rapport à la configuration à l'instant $t=0$;
- l'inclinaison des axes principaux d'inertie;
- l'excentricité de chargement;
- la dissymétrie de la section; et enfin
- le gauchissement.

Les différentes matrices de rotation correspondantes à chaque étape sont développées dans la suite de ce paragraphe.

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_n$$

(il est à noter que $\vec{v}_n \otimes \vec{v}_1$ donne $-\vec{v}_3$)

Une fois \vec{v}_3 déterminé, le vecteur \vec{v}_2 définissant la direction de l'axe \bar{y} peut être calculé de la même manière, en utilisant cette fois-ci, la condition d'orthogonalité entre le vecteur \vec{v}_2 et le plan $\bar{x}_o\bar{z}_o$ formé par les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_3 . On obtient analogiquement:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \otimes \vec{v}_1$$

(de même, $\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_3$ donne $-\vec{v}_2$)

Examinons dans ce qui suit le détail de développement de cette matrice.

Par définition, le vecteur \vec{v}_1 est égale à:

$$\vec{v}_1 = \begin{Bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{BA} \\ y_{BA} \\ z_{BA} \end{Bmatrix}$$

Par conséquent, les cosinus directeurs de l'axe \bar{x} sont donnés par:

$$\frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \frac{x_{BA}}{\sqrt{x_{BA}^2 + y_{BA}^2 + z_{BA}^2}} \bar{i} + \frac{y_{BA}}{\sqrt{x_{BA}^2 + y_{BA}^2 + z_{BA}^2}} \bar{j} + \frac{z_{BA}}{\sqrt{x_{BA}^2 + y_{BA}^2 + z_{BA}^2}} \bar{k}$$

Le vecteur \vec{v}_n est choisi, de telle sorte qu'il coïncide avec l'axe Y. Il est défini par les composantes suivantes:

$$\vec{v}_n = \begin{Bmatrix} x_K - x_A \\ y_K - y_A \\ z_K - z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ y_{KA} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Comme on vient de le mentionner plus haut, le vecteur \vec{v}_3 est déterminé en utilisant le produit vectoriel:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_n$$

soit alors:

$$\vec{v}_3 = -y_{KA}z_{KA}\vec{i} - 0\vec{j} + x_{BA}y_{BA}\vec{k}$$

La norme de ce vecteur est égale à:

$$|\vec{v}_3| = y_{KA}\sqrt{z_{BA}^2 + x_{BA}^2}$$

Les cosinus directeurs sont donnés par:

$$\frac{\vec{v}_3}{|\vec{v}_3|} = \frac{-z_{BA}}{\sqrt{z_{BA}^2 + x_{BA}^2}} \vec{i} + \frac{x_{BA}}{\sqrt{z_{BA}^2 + x_{BA}^2}} \vec{j}$$

Calculons à présent, les composantes du vecteur \vec{v}_2 . Elles sont déterminées par la relation suivante:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3 \otimes \vec{v}_1$$

ou encore

$$\vec{v}_2 = -y_{BA}x_{BA}y_{KA}\vec{i} + (y_{KA}z_{BA}^2 + x_{BA}^2y_{KA})\vec{j} - y_{KA}z_{BA}y_{BA}\vec{k}$$

La norme de ce vecteur est donnée par:

$$|\vec{v}_2| = y_{KA}\sqrt{(x_{BA}^2 + z_{BA}^2)(x_{BA}^2 + y_{BA}^2 + z_{BA}^2)}$$

posons

$$\beta = \sqrt{(x_{BA}^2 + z_{BA}^2)(x_{BA}^2 + y_{BA}^2 + z_{BA}^2)}$$

Dans ce cas, les cosinus directeurs de l'axe $O\bar{y}_o$ sont égales à:

$$\frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \frac{-y_{BA}x_{BA}}{\beta}\vec{i} + \frac{(z_{BA}^2 + x_{BA}^2)}{\beta}\vec{j} - \frac{y_{BA}z_{BA}}{\beta}\vec{k}$$

La matrice de rotation devient par conséquent:

$$R_1 = \begin{bmatrix} \frac{X_{BA}}{\sqrt{X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 + Z_{BA}^2}} & \frac{Y_{BA}}{\sqrt{X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 + Z_{BA}^2}} & \frac{Z_{BA}}{\sqrt{X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 + Z_{BA}^2}} \\ -\frac{Y_{BA} X_{BA}}{\beta} & \frac{Z_{BA}^2 + X_{BA}^2}{\beta} & -\frac{Y_{BA} Z_{BA}}{\beta} \\ -\frac{Z_{BA}}{\sqrt{Z_{BA}^2 + X_{BA}^2}} & 0 & \frac{X_{BA}}{\sqrt{Z_{BA}^2 + X_{BA}^2}} \end{bmatrix}$$

Il importe de noter que si on pose:

$$C_x = \frac{X_{BA}}{\sqrt{X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 + Z_{BA}^2}} \quad C_y = \frac{Y_{BA}}{\sqrt{X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 + Z_{BA}^2}} \quad C_z = \frac{Z_{BA}}{\sqrt{X_{BA}^2 + Y_{BA}^2 + Z_{BA}^2}}$$

Alors, la matrice de rotation, ci-dessus, se réduit à:

$$R_1 = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_y^2} & \frac{-C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \end{bmatrix}$$

Remarque:

La matrice de rotation R_1 est indéfinie si l'élément est vertical, c'est à dire si l'axe local $O\bar{X}$ est confondu avec l'axe Y du repère global. Aussi, dans ce cas et pour éviter cette indétermination, la matrice de rotation suivante est employée:

$$R_{1(\text{vect})} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.4.2) Matrice d'expansion R_2

Cette matrice permet de transformer les forces et les déplacements du point de connexion O vers les points C et S, centres de gravité et de torsion,

respectivement.

Pour faciliter le développement des relations de transformation, nous considérons dans ce qui suit l'opération inverse. C'est à dire nous effectuerons une réduction des forces des et déplacements nodaux des points C et S vers le point O.

Une des méthodes permettant de réaliser cette réduction est d'appliquer les lois de la statique. En effet, tout ensemble de forces qui agit sur un corps peut être réduit en un seul point à trois forces et trois moments.

Notons par:

P_c, P_o : Les forces axiales agissant au centre de gravité C et au point de connexion O respectivement;

$F_{y_o}, F_{z_o}, F_{y_s}, F_{z_s}$: les efforts tranchants dans les directions y et z, agissant aux points de connexion O et au centre de torsion S, respectivement;

M_{x_o}, M_{x_s} : moments de torsion autour des axes O et S;

M_{y_o}, M_{y_s} : moments de flexion par rapport aux axes passant par les points O_y et S_y ;

M_{z_o}, M_{z_s} : moments de flexion par rapport aux axes passant par les points O_z et S_z .

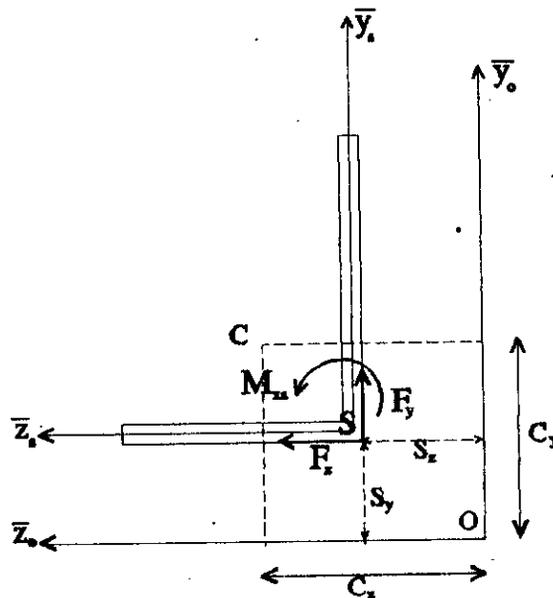


Figure (6-4): Réduction des forces au point de connexion O

Ecrivons les équations d'équilibre des forces agissant dans la section par rapport au point de connexion O (figure ci-dessus). Il découle:

$$P_o = P_c$$

$$F_{yo} = F_{ys}$$

$$F_{zo} = F_{zs}$$

$$M_{xo} = M_{xs} - S_z F_{ys} + S_y F_{zs}$$

$$M_{yo} = M_{ys} + C_z P_o$$

$$M_{zo} = M_{zs} - C_y P_o$$

ou sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} P_o \\ F_{yo} \\ F_{zo} \\ M_{xo} \\ M_{yo} \\ M_{zo} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_z & S_y & 1 & 0 & 0 \\ C_z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -C_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_c \\ F_{ys} \\ F_{zs} \\ M_{xs} \\ M_{ys} \\ M_{zs} \end{Bmatrix}$$

ou encore:

$$\{P_o\} = [T] \{P_{c/s}\}$$

La matrice de rotation R_2 est l'inverse de cette matrice. Elle s'écrit sous la forme:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_z & -S_y & 1 & 0 & 0 \\ -C_z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.4.3) Matrice de rotation relative aux axes principaux d'inertie R_3

La matrice de rotation R_3 permettant de prendre en compte la transformation correspondant à l'inclinaison des axes principaux d'inertie, peut être directement établie par une rotation d'un angle α (positif dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) autour de l'axe x. (figure 6-5)

$$u_{x's} = u_{xs}$$

$$u_{y's} = u_{ys} \cos(\alpha) + u_{zs} \sin(\alpha)$$

$$u_{z's} = -u_{ys} \sin(\alpha) + u_{zs} \cos(\alpha)$$

La matrice de rotation s'écrit alors:

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

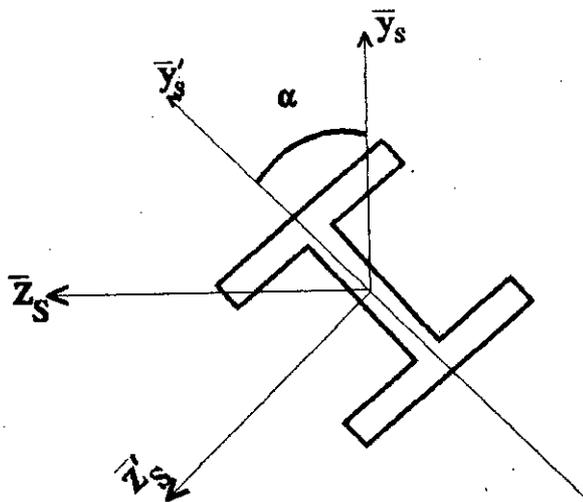


Figure (6-5): Inclinaison des axes principaux d'inertie

6.4.4) Matrice de rotation en grands déplacements ${}^t\bar{R}$

Cette matrice prend en compte l'effet des grands déplacements. Elle permet le passage de la configuration non déformée à l'instant $t=0$ vers celle à l'instant t .

Comme les transformations (rotations) dans l'espace dépendent du chemin suivi, il est nécessaire de choisir un mode de déplacement. Pour cela, nous considérons dans cette étude que le passage de la position à l'instant $t=0$ à celle à l'instant t s'effectue comme suit (figure 6-6)

- Rotation d'un angle ${}^t\alpha$ autour de l'axe y . Elle permet de passer des axes $({}^o\bar{X}_B, {}^o\bar{Y}_B, {}^o\bar{Z}_B)$ aux axes $(\bar{A}B_1, {}^o\bar{Y}_B, \tilde{t})$.
- Rotation d'un angle ${}^t\beta$ autour de l'axe \tilde{t} . Celle-ci transforme les variables des axes $(\bar{A}B_1, {}^o\bar{Y}_B, \tilde{t})$ aux axes $(\tilde{F}, \tilde{S}, \tilde{t})$.
- Rotation d'un angle ${}^t\gamma$ autour de l'axe longitudinale \tilde{F} qui permet la transformation du repère $(\tilde{F}, \tilde{S}, \tilde{t})$ au repère final $({}^t\bar{X}, {}^t\bar{Y}, {}^t\bar{Z})$.

Par conséquent, la matrice de transformation du repère non déformé à l'instant $t=0$ à celui à l'instant t sera le produit des trois rotations, telle que:

$${}^t\bar{R} = \begin{bmatrix} {}^t\bar{R}_\gamma \cdot {}^t\bar{R}_\beta \cdot {}^t\bar{R}_\alpha & 0 \\ 0 & {}^t\bar{R}_\gamma \cdot {}^t\bar{R}_\beta \cdot {}^t\bar{R}_\alpha \end{bmatrix}$$

où ${}^t\bar{R}_\alpha$ est la matrice de rotation autour de l'axe y . Elle est égale à:

$${}^t\bar{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos({}^t\alpha) & 0 & \sin({}^t\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin({}^t\alpha) & 0 & \cos({}^t\alpha) \end{bmatrix}$$

où ${}^t\alpha$ est l'angle tel que:

$$\cos({}^t\alpha) = \frac{{}^oI + {}^t\bar{U}_{BA}^{-1}}{\bar{A}B_1}$$

avec

$${}^t\bar{U}_{BA}^{-1} = {}^t\bar{U}^T - {}^t\bar{U}^{-1}$$

et

$$\bar{A}B_1 = \{({}^oI + {}^t\bar{U}_{BA}^{-1})^2 + ({}^t\bar{U}_{BA}^{-3})^2\}^{\frac{1}{2}}$$

Expression dans laquelle ${}^t\bar{u}^i$ est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur déplacement local à l'instant t mesurée par rapport à la configuration à l'instant $t=0$ et 0l est la longueur originale de la poutre.

De même, la matrice de rotation ${}^t\bar{R}_\beta$ est déterminée par une rotation autour de l'axe \tilde{e} (figure 6-6b) de sorte que:

$${}^t\bar{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos({}^t\beta) & \sin({}^t\beta) & 0 \\ -\sin({}^t\beta) & \cos({}^t\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

l'angle β est calculé par: (c.f figure 6-6a)

$$\sin({}^t\beta) = \frac{{}^t\bar{u}_{BA}^2}{{}^tl}$$

où

$${}^tl = \{ (\bar{AB}_1)^2 + ({}^t\bar{u}_{BA}^2)^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

Les composantes de la matrice de transformation ${}^t\bar{R}_\beta$ sont déterminées en considérant la rotation autour de r :

$${}^t\bar{R}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos({}^t\gamma) & \sin({}^t\gamma) \\ 0 & -\sin({}^t\gamma) & \cos({}^t\gamma) \end{bmatrix}$$

où ${}^t\gamma$ est la matrice de rotation rigide de la poutre autour de l'axe r .

Cet angle est calculé par les relations:

$$\Delta\gamma = \frac{1}{2} ({}^t\bar{u}_4 + {}^t\bar{u}_{10})$$

et

$${}^t\gamma = {}^{t-\Delta t}\gamma + \Delta\gamma$$

Le symbole Bar indique que les variables sont mesurées par rapport au repère local.

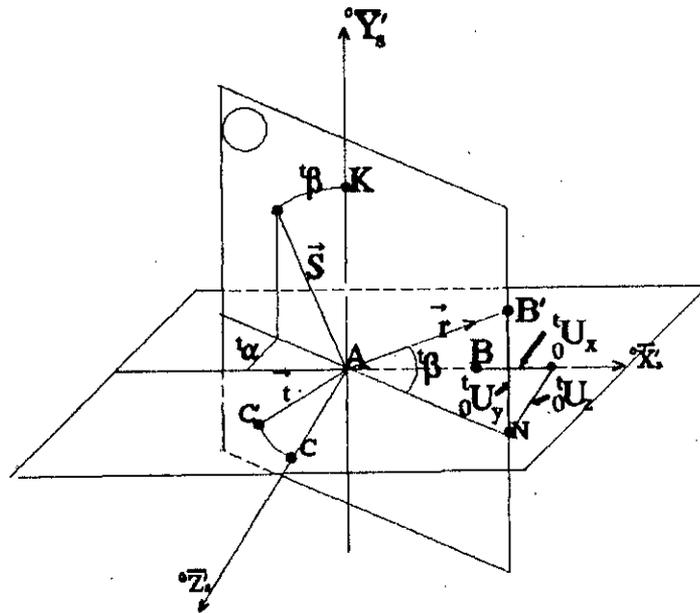


Figure (6-6a): Rotation d'un élément poutre tridimensionnel en grands déplacements

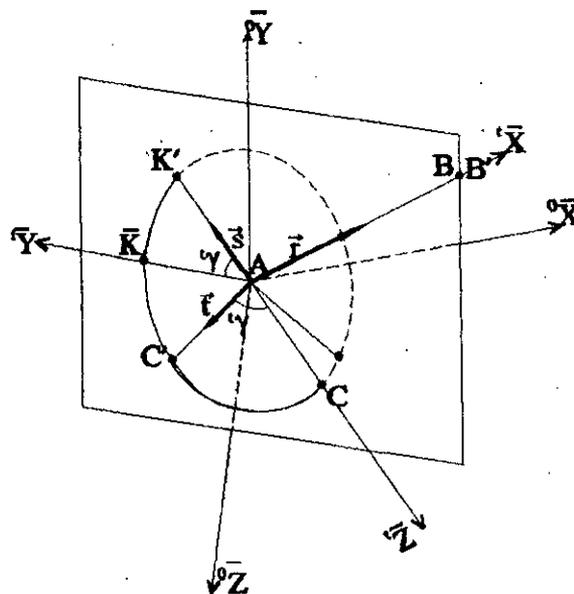


Figure (6-6b): Rotation d'un élément poutre tridimensionnel en grands déplacements

6.4.5) Transformation du gauchissement

La transformation du gauchissement d'un élément à un autre est un problème très complexe. En effet, durant ces deux dernières décennies, il a fait l'objet de nombreuses recherches. Parmi celles-ci nous citerons, Vacharajittiphan et Trahair [82], Sharman [83], Yang et McGuire [9] et Morell [84].

L'étude expérimentale menée par Morell [84] a révélé que la transmission du gauchissement entre deux éléments dépend de plusieurs facteurs, dont l'un est fondamental concernant le détail de réalisation du joint considéré. Dans la référence [9], les auteurs introduisent un concept appelé "Indicateur de gauchissement". Malheureusement, il n'est applicable qu'à des problèmes linéaires bien spécifiques.

En général, il n'existe encore pas de méthode permettant de considérer la transmission du gauchissement.

Dans cette étude nous supposons que le comportement de la structure est indépendant du gauchissement. Aussi, on considère que la transformation du gauchissement et du bimoment est unique [3]. En d'autres termes, un gauchissement ne produira qu'un gauchissement.

6.4.6) Matrice de rotation globale

Il s'agit, dans ce paragraphe, d'assembler les différentes matrices de transformation développées dans les sections précédentes, afin d'obtenir une matrice de rotation totale. Celle-ci permettra de passer du repère global vers le repère local correspondant à la configuration à l'instant t . Ce passage est composé, dans l'ordre, des étapes suivantes:

- a)- transformation classique du repère global XYZ au repère local $O\bar{x}_o\bar{y}_o\bar{z}_o$;
- b)- extension des déplacements et des forces internes du point de connexion O vers les points C et S, centres de gravité et de torsion, respectivement;
- c)- transformation du repère local SY_sZ_s vers le repère correspondant aux axes principaux d'inertie;
- d)- transformation des vecteurs déplacements et forces du repère local incliné à l'instant $t=0$ vers le repère correspondant à la configuration à

l'instant t .

Ecrivons à présent les différentes relations de transformation. Soient ${}^t\bar{u}$ et ${}^t u$ les déplacements d'un élément donné par rapport au repère local à l'instant t et au repère global, respectivement. Ces variables sont reliées par la relation:

$${}^t\bar{u}_i = T_{ij} {}^t u_j$$

où les T_{ij} sont les composantes de la matrice de rotation totale T .

De même, les forces internes locales et globales sont reliées par:

$${}^t\bar{F}_i = T_{ij} {}^t F_j$$

La matrice de transformation T est donnée par la relation:

$$T = \begin{bmatrix} {}^tR & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^tR & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où tR est la matrice de rotation de dimension (6x6), telle que:

$${}^tR = {}^t\bar{R} {}^0R$$

Dans cette expression, ${}^t\bar{R}$ est la matrice de transformation en grands déplacements développée dans la section précédente, et 0R est la matrice de rotation qui permet le passage du repère global vers le repère local incliné, telles que:

$${}^t\bar{R} = \begin{bmatrix} {}^t\bar{R}_\gamma & {}^t\bar{R}_\beta & {}^t\bar{R}_\alpha & 0 \\ 0 & {}^t\bar{R}_\gamma & {}^t\bar{R}_\beta & {}^t\bar{R}_\alpha \end{bmatrix}$$

et

$${}^0R = \begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ 0 & R_3 \end{bmatrix} [R_2] \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}$$

6.5) DESCRIPTION DU MODELE GEOMETRIQUE NON LINEAIRE

Dans les paragraphes précédents, nous avons développé les équations en éléments finis de mouvement permettant de décrire le comportement non linéaire des structures en grands déplacements. Ces équations qui sont issues de la description Lagrangienne actualisée, sont basées sur l'hypothèse des petits incréments de déplacement entre deux incréments successifs de chargement. Ceci implique que l'obtention de la réponse non linéaire complète nécessite un nombre important d'incrément de chargement.

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre deux, cette hypothèse a été adoptée en vue de limiter d'un côté, l'effet néfaste des rotations de corps rigide dû à la négligence des termes d'ordres supérieurs du tenseur des déformations de Green-Lagrange dans les équations de mouvement. Cet effet se caractérise par un développement des déformations imaginaires conduisant à des efforts internes parasites pouvant créer des difficultés de convergence. D'un autre côté, pour permettre de considérer les rotations nodales comme des quantités vectorielles.

Pour avoir un algorithme performant, il est nécessaire de réduire au maximum le nombre d'incrément de chargement. Autrement dit, il faut pouvoir employer de grands incréments de chargement.

Pour pallier aux inconvénients et limitations de la description Lagrangienne, nous avons développé dans cette étude une procédure permettant d'employer de grands incréments de chargement. Celle-ci est inspirée des recherches précédentes, notamment de:

- 1) La description corotationnelle totale, qui consiste à éliminer la rotation rigide des déplacements totaux et à calculer les efforts internes par rapport à la configuration déformée.
- 2) La technique incrémentale de Hsiao [19] présentée dans le chapitre un, qui consiste à soustraire la rotation rigide de l'incrément de déplacement.
- 3) Les lois de la mécanique: sous un mouvement de corps rigide les contraintes internes tournent et se translatent avec ce mouvement. Cependant, leurs grandeurs et leurs orientations restent les mêmes par rapport au repère continuellement attaché au corps. Aussi on conçoit le même comportement pour les forces nodales équivalentes aux contraintes internes.

Cette procédure est constituée des étapes suivantes:

a) A partir de l'incrément de déplacement obtenu par rapport à la configuration à l'instant t , on calcule les rotations de corps rigide:

$$\mu_z = \arctan\left(\frac{{}^tU_{yB} - {}^tU_{yA}}{{}^tI + {}^tU_{xB} - {}^tU_{xA}}\right) \quad \mu_y = \arctan\left(\frac{{}^tU_{zB} - {}^tU_{zA}}{{}^tI + {}^tU_{xB} - {}^tU_{xA}}\right)$$

b) on détermine l'incrément de déplacement par rapport à la configuration à l'instant $t+\Delta t$. Ceci est effectué en trois étapes:

i) calcul des incréments de rotation nodale à l'instant $t+\Delta t$:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\varphi_{za} &= {}^t\varphi_{za} - \mu_z & {}^{t+\Delta t}\varphi_{zb} &= {}^t\varphi_{zb} - \mu_z \\ {}^{t+\Delta t}\varphi_{ya} &= {}^t\varphi_{ya} + \mu_y & {}^{t+\Delta t}\varphi_{yb} &= {}^t\varphi_{yb} + \mu_y \end{aligned}$$

ii) détermination de l'allongement entre les configurations aux instants t et $t+\Delta t$.

$$\delta = {}^{t+\Delta t}l - {}^t l$$

Pour avoir une meilleure précision, l'allongement est calculé à partir de la relation suivante:

$$\delta = \left(\frac{{}^{t+\Delta t}l^2 - {}^t l^2}{{}^{t+\Delta t}l + {}^t l} \right)$$

où

$$\begin{aligned} {}^t l &= \sqrt{({}^0l + {}^tU_{xb} - {}^tU_{xa})^2 + ({}^tU_{yb} - {}^tU_{ya})^2 + ({}^tU_{zb} - {}^tU_{za})^2} \\ {}^{t+\Delta t}l &= \sqrt{({}^0l + {}^{t+\Delta t}U_{xb} - {}^{t+\Delta t}U_{xa})^2 + ({}^{t+\Delta t}U_{yb} - {}^{t+\Delta t}U_{ya})^2 + ({}^{t+\Delta t}U_{zb} - {}^{t+\Delta t}U_{za})^2} \end{aligned}$$

dans ces expressions, 0l , ${}^t l$ et ${}^{t+\Delta t}l$ sont respectivement, les longueurs de l'élément aux instants $\tau=0$, $\tau=t$ et $\tau=t+\Delta t$.

iii) calcul de l'angle de rotation de torsion:

$${}^{t+\Delta t}\varphi_x = {}^t\varphi_{xB} - {}^t\varphi_{xA}$$

c) On déduit l'incrément des forces internes, par la relation:

$${}_{t+\Delta t}\bar{F} = \bar{K} {}_{t+\Delta t}\bar{U}$$

où \bar{K} est la matrice de rigidité élémentaire locale et \bar{U} l'incrément de déplacement, exprimé comme suit:

$${}_{t+\Delta t}\bar{U} = (0, 0, 0, {}_{t+\Delta t}\varphi_{ya}, {}_{t+\Delta t}\varphi_{za}, 0, {}_{t+\Delta t}\theta_a, \delta, 0, 0, {}_{t+\Delta t}\varphi_{yb}, {}_{t+\Delta t}\varphi_{zb}, {}_{t+\Delta t}\varphi_x)$$

d) On ajoute cet incrément aux forces internes cumulées:

$${}_{t+\Delta t}\bar{F} = {}_t\bar{F} + {}_{t+\Delta t}\bar{F}$$

e) On transforme ce vecteur vers le repère global par l'intermédiaire de la matrice de rotation totale.

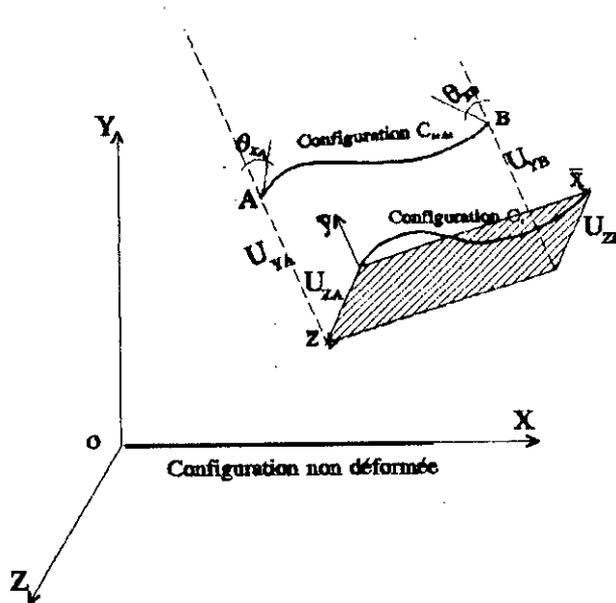


Figure (6-7a): Mouvement d'un élément dans l'espace

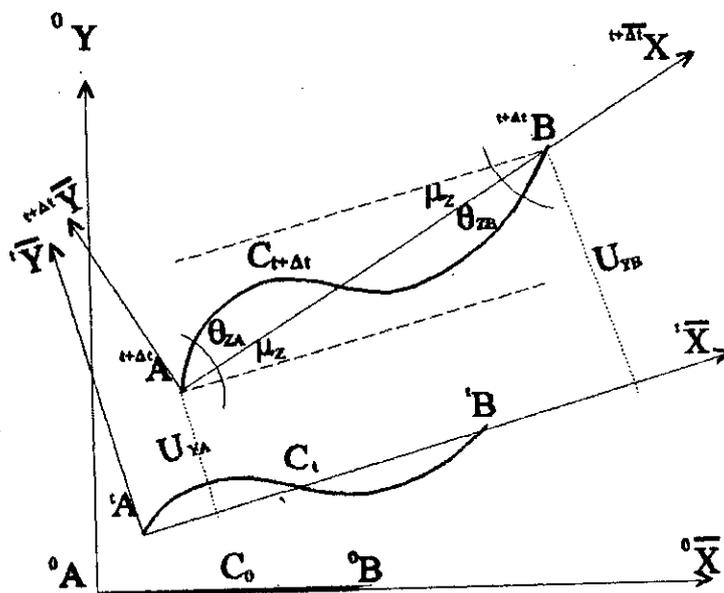


Figure (6-7b): Déformation d'un élément dans le plan (XY)

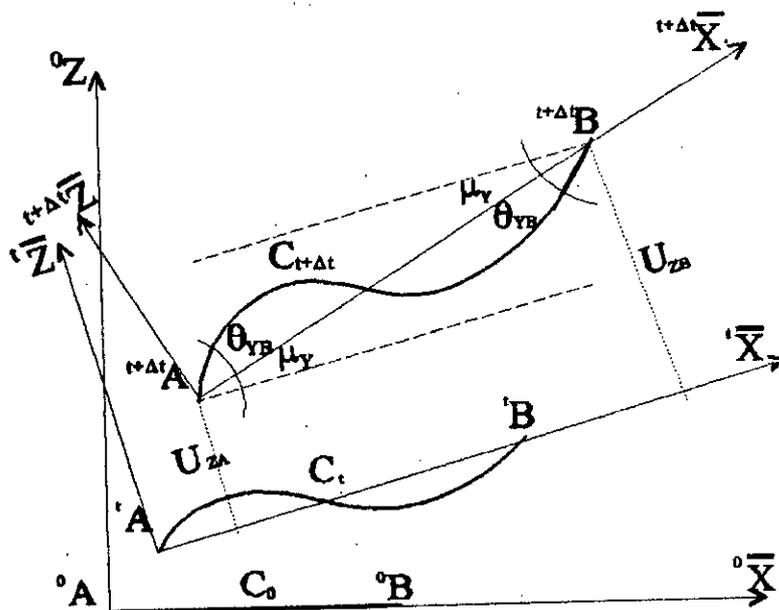


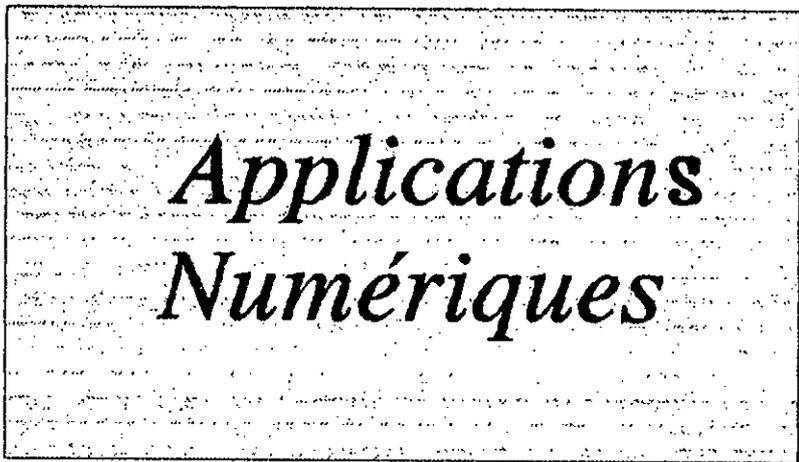
Figure (6-7C): Déformation d'un élément dans le plan (XZ)

6.6) CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre un modèle capable de décrire le comportement élasto-plastique en grands déplacements. Ce modèle est basé sur l'emploi d'une matrice de rigidité géométrique qui incorpore l'effet de toutes les forces initiales, et sur l'élimination des rotations rigides de l'incrément de déplacements. Ce dernier point permet d'éliminer les inconvénients de la formulation Lagrangienne actualisée. Ainsi, il permet d'utiliser de grands incréments de chargement.

Par ailleurs, nous avons développé les principales matrices de transformation qui permettent de prendre en compte l'effet du couplage de la torsion et de la flexion, l'excentricité des connexions entre les éléments et l'inclinaison des axes principaux d'inertie.

Chapitre 7



*Applications
Numériques*

Chapitre 7.

APPLICATION NUMERIQUE

7.1) PRESENTATION DU PROGRAMME

7.1.2) Introduction

Le programme développé dans cette étude est inspiré du code de calcul MEF de Dhatt et Touzout présenté dans l'ouvrage [85].

Le code MEF est un programme général de complexité moyenne. Il est constitué d'un ensemble de sous-programmes, conçus chacun pour réaliser une ou, au plus, un nombre limité de fonctions de base. Ces différents sous-programmes sont exécutés à la demande de l'utilisateur par l'intermédiaire de macro-commandes. L'organisation générale de ce programme est représentée dans la figure(7-1). Cette organisation modulaire offre au programme la possibilité d'inclure un large éventail d'algorithmes de résolution. Ceci donne au programme un grand rayon d'action.

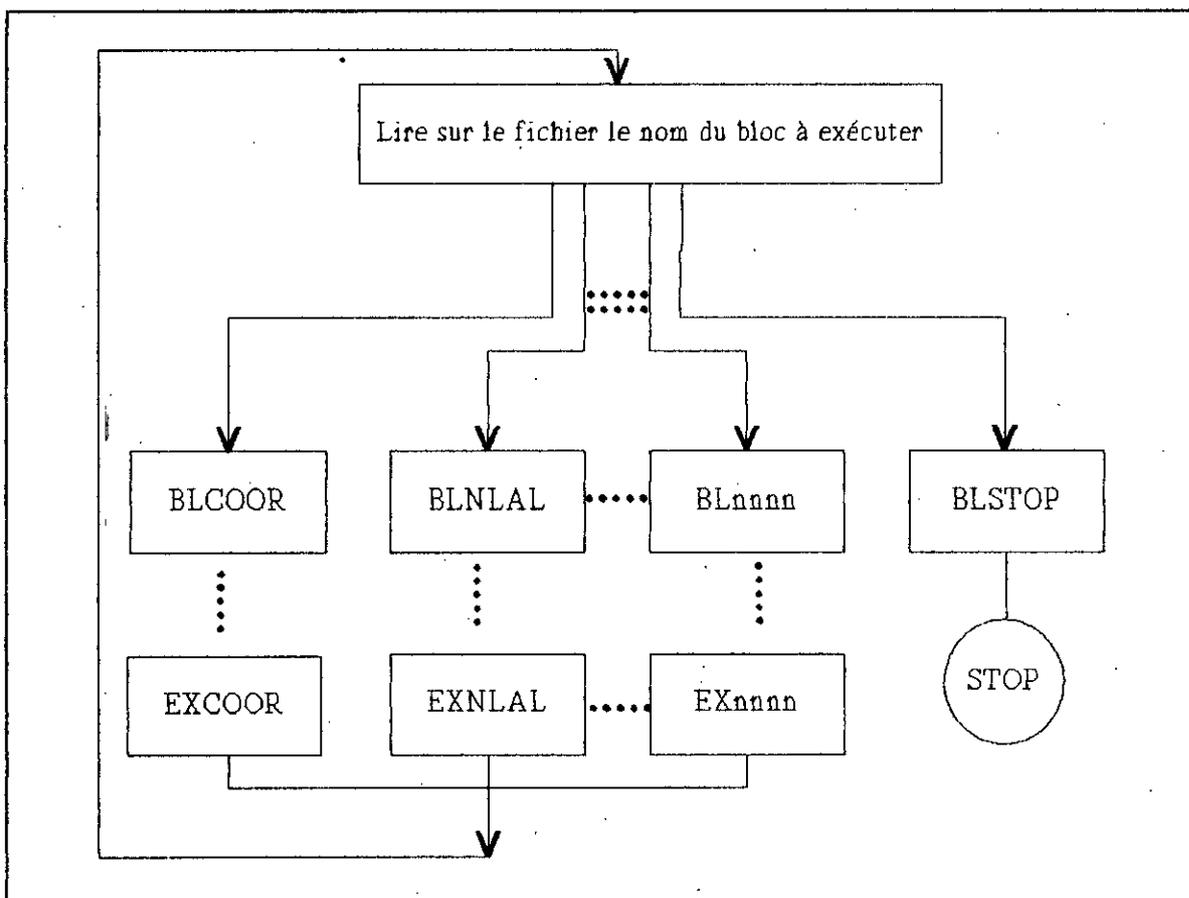


Figure (7-1): Organisation générale du programme MEF

Par ailleurs, le programme MEF utilise la technique d'allocation de mémoire pseudo-dynamique. Elle consiste à partager un seul vecteur VA entre tous les tableaux du programme. Ainsi, tout tableau reçoit une dimension variable égale à la valeur exacte nécessaire pour chaque problème, par l'utilisation d'un jeu d'indices calculés dans le programme principal. De cette façon, il n'y a aucun gaspillage au cours de la mémorisation des données et un maximum de place reste attribué aux tableaux globaux.

Pour améliorer ses performances, ce programme emploie la technique ligne de ciel pour le stockage de la matrice de rigidité globale (symétrique ou non). Cette technique permet un gain important de place mémoire. En outre, elle peut réduire le volume des calculs jusqu'à 4% de ce qu'il serait si la matrice était pleine.

Pour accroître sa capacité à traiter les problèmes volumineux, le programme MEF dispose d'un module de segmentation sur disque de la matrice de rigidité globale. Ce module partage la matrice de rigidité en blocs stockés sur disque. La capacité

de ce dernier étant illimitée, les problèmes de grandes dimensions peuvent être résolus avec une grande efficacité.

Dans ce chapitre, nous limiterons la description au sous programme NLIN développé dans cette étude. Mais, pour plus de détails, le lecteur peut se référer à l'ouvrage [85].

7.1.2) Description du bloc non linéaire

Ce bloc traite le comportement géométrique et matériel non linéaires des structures spatiales par le biais de la technique Arclength. A ce propos, deux algorithmes de résolution non linéaires sont développés. Il s'agit de:

- L'algorithme de Newton-Raphson décrit dans le sous programme EXNLAT. Cet algorithme est utilisé dans les applications non linéaires géométriques élastiques.

- L'algorithme de résolution sécant pour les problèmes non linéaire élasto-plastique.

L'algorithme tangent est très performant dans les problèmes élastiques. Il permet l'emploi de grands incréments de chargement. L'algorithme sécant par contre nécessite de petits incréments de chargement. Toutefois, il permet d'éviter les problèmes d'un déchargement numérique fictif durant les itérations d'équilibre.

a) Sous programme EXNLAS: Il met en oeuvre l'algorithme non linéaire sécant. Il lit les Variables DPASO, NPAS, NITER, NITERD, RKSIT (voir tableau (7-1)), puis exécute la méthode de Newton-Raphson modifiée combinée à la technique ArcLength.

b) Sous programme EXNLAT: Il met en oeuvre l'algorithme non linéaire tangent. Il lit les Variables DPASO, NPAS, NITERM, NITERD, RKSIT, puis appelle le sous programme NEWTON qui exécute la méthode standard de Newton-Raphson ou la méthode de Newton-Raphson modifiée combinée à la technique Arclength.

c) Sous programme NEWTON: Il exécute les opérations de la méthode de Newton-Raphson modifiée (présentée dans le Chapitre 5). Il appelle les sous-programmes ASSEL et ELEM04.

- d) Sous programme PASINC: Il calcule le facteur incrément de chargement (DPAS) et la longueur d'arc (LARC) à partir de la résolution de l'équation Arclength développée dans le chapitre 5.
- e) Sous programme ASNEW: Il assemble le vecteur des résidus ou les matrices de rigidité élémentaires.
- f) Sous programme ELEM04: Il calcule la matrice de rigidité tangente élémentaire d'un élément poutre spatiale à deux noeuds avec sept degrés de liberté par noeud. Par ailleurs, il effectue le calcul de la matrice de rotation (Rott), l'élimination des rotations de corps rigide et le calcul des efforts internes.
- g) Sous programme ROTT: Il calcule la matrice de rotation totale. Les étapes de calcul de cette matrice sont présentées dans le paragraphe quatre du sixième chapitre.
- h) Sous programme COROT: Il transforme le vecteur incrément de déplacements sécants élémentaire du repère global vers le repère local. Puis, il élimine les rotations de corps rigide, ensuite il calcule le vecteur incrément de déplacement décrit dans le cinquième paragraphe du chapitre 6.
- i) Sous programme MTANG: Il récupère les forces internes de l'incrément précédent, puis calcule la matrice de rigidité tangente élémentaire dans le repère local.
- j) Sous programme PLAST: Il actualise les propriétés mécaniques et géométriques de l'élément et met à jour les contraintes actuelles et les contraintes critiques suivant l'algorithme présenté dans le chapitre quatre.
- k) Sous programme SOL: Il résout le système d'équations $KU=F$ avec la méthode LDL^T .
- l) Sous programme NORF: Calcul de la norme des forces résiduelles.

Le schéma représentatif de l'enchaînement des différents sous-programmes est montré sur la figure (7-2). Le détail des différents sous programmes est présenté dans l'annexe 5.

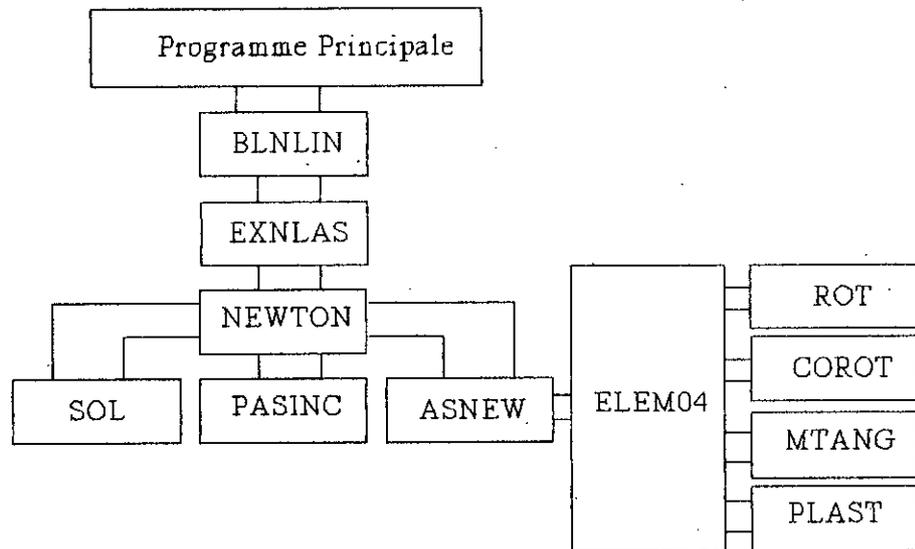


Figure (7-2): Enchaînement des différents sous programmes du bloc Non linéaire

Variable	Description
NPAS	Nombre maximum de pas de chargement
FRED	Facteur de réduction
IND	Type d'analyse effectuée: 0: analyse géométrique élastique 1: analyse géométrique élasto-plastique
NITER	Nombre maximum d'itérations
ITER	Numéro de l'itération actuelle
IPAS	Numéro du pas de chargement actuel
DELTA	$B^2 - 4 * A * C$ (voir chapitre 5)
RKSIT	Erreur admissible sur la norme des forces
XNORF	Norme des forces {R}
XNORM	Norme des déplacements {U}
NITERD	Nombre d'itérations désiré
NITERP	Nombre d'itérations effectuées durant le pas de chargement précédent
TRAV	Travail durant l'incrément de chargement
NEQ	Nombre d'équations
DPASO	Facteur incrément de chargement initial
DPAS	Facteur incrément de chargement durant les itérations d'équilibre(i>1)
XPAS	Facteur chargement total
DET	Déterminant de la matrice de rigidité tangente
LARC	Longueur d'arc (voir chapitre 5)
NELT	Nombre total d'éléments
NDLE	Nombre de degrés de liberté par élément

Tableau (7-1): Description des principales variables employées dans le Bloc NLIN

Variable	Description
VDGP(NEQ)	Vecteur incrément de déplacement global sécant correspondant à (i-1) ^{ème} itération
VDGS (NEQ)	Vecteur incrément actuel de déplacement global sécant
VDLG (NEQ)	Vecteur total de déplacement global
VDGT (NEQ)	Vecteur incrément de déplacement tangent
VRES (NEQ)	Vecteur des résidus
VFG (NDLE)	Vecteur global des sollicitations
VINDS (NDLE)	Vecteur incrément de déplacement sécant élémentaire
VDLE (NDLE)	Vecteur incrément de déplacement total élémentaire
VFE (NDLE)	Vecteur élémentaire des sollicitations
VFINT(NDLE)	Vecteur élémentaire total des forces internes
VDFIN(NDLE)	Vecteur incrément des forces internes
VKE(NDLE*(NDLE+1)/2	Matrice de rigidité tangente locale
VKGS	Vecteur contenant la partie triangulaire supérieure hors diagonale de la matrice de rigidité globale
VKGD(NEQ)	Vecteur contenant les éléments diagonaux de la matrice de rigidité globale
VROTT (6x6)	Matrice de rotation totale

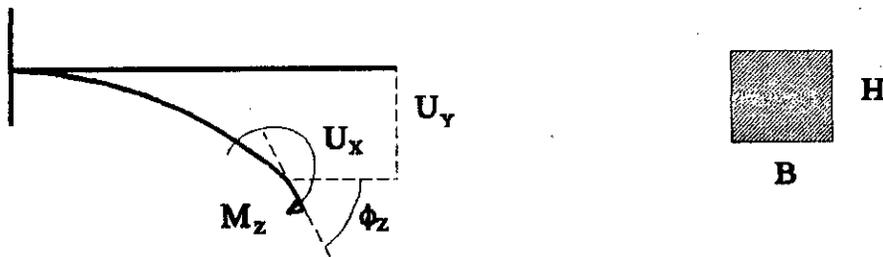
Tableau (7-2): Description des principales tables employées dans le bloc NLIN

7.2) EXPERIMENTATION NUMERIQUE

Pour mieux apprécier les performances, la précision et les limites du programme et de la formulation développée dans cette étude, plusieurs comparaisons entre différents résultats disponibles dans la littérature et ceux prédits par notre programme sont présentées dans cette partie.

7.2.1)- POUTRE CONSOLE SOUMISE A UNE FLEXION PURE

Dans ce paragraphe, nous avons choisi l'exemple de la poutre console montrée sur la figure (7-3a) pour démontrer la précision et la performance de notre formulation à s'accommoder à de grands déplacements et de larges rotations.



$L = 254 \text{ cm}$
 $H = 25,4 \text{ cm}$
 $B = 25,4 \text{ cm}$
 $E = 82,718 \text{ MPa}$

Figure (7-3a): Poutre console soumise à une flexion pure

Le problème de la poutre console chargée par un moment à son extrémité, a été étudié par de nombreux chercheurs.

En 1977 Ramm [86] utilise 5 éléments courbes pour modéliser la poutre console.

En 1979, Bathe et Boulourchi [12] emploient la formulation Lagrangienne actualisée pour étudier cette structure. Ils utilisent 20 éléments pour la discrétisée avec 90 incréments de chargement non équilibrés.

En 1989, Surana [15] emploie le champ d'interpolation non linéaire avec l'algorithme de résolution de Newton-Raphson standard. Il modélise la structure avec 4 éléments isoparamétriques à trois noeuds avec 9 incréments de chargement. Le nombre d'itérations moyen par incrément est de 8.

Récemment, pour réduire le nombre d'éléments par barre, Albermar et Kitipornchai [87] incorporent dans leur étude une matrice de déformation K_D en plus de la matrice de rigidité élastique linéaire K_E et la matrice géométrique K_G . Celle-ci prend en compte le couplage entre les déformations axiales, les déformations transversales et la rotation de torsion. Pour modéliser la poutre, ils emploient deux éléments. Toutefois, ni les nombres d'incrément de chargement et d'itérations, ni le nombre d'actualisations de la matrice de rigidité par incrément n'ont été précisés.

Dans cette analyse, nous employons aussi 2 éléments pour discrétiser la poutre avec 14 incréments de chargement. La matrice de rigidité est actualisée seulement durant les deux premières itérations de chaque incrément de chargement.

Le tableau (7-3) montre, le chargement, les déplacements U_x et U_y et le nombre d'itérations nécessaires.

La comparaison des résultats obtenus dans cette analyse avec ceux des références [86,12,87] montrés sur les figures (7-3b) et (7-3c), est très satisfaisante. Elle démontre ainsi, l'efficacité, la vitesse de convergence et la bonne précision de notre formulation à s'accommoder à de grandes translations et de larges rotations avec des incréments moyens de chargement et un nombre très réduit d'éléments.

Afin de confirmer l'efficacité de notre programme, nous avons traité cet exemple avec l'algorithme standard de Newton-Raphson couplé à la technique Arclength. Comme on peut le voir sur le tableau (7-4), seulement 5 incréments de chargement ont été suffisants pour tracer toute la réponse. Le nombre moyen d'itérations par incrément est de 7.

Chapitre 7: Application numérique

A titre d'exemple de comparaison entre la formulation Lagrangienne actualisée et la description mixte développée dans cette étude, nous avons présenté dans la figure (7-3d) les résultats des deux descriptions. Comme on peut le remarquer, la description développée dans cette étude est très précise même en employant de grands incréments de chargement. Par ailleurs, on peut constater que pour la formulation Lagrangienne actualisée, plus l'incrément de chargement est petit, plus la solution s'approche de la solution analytique. Ceci implique que le concepteur doit réaliser de nombreuses et coûteuses expérimentations avant de trouver celle qui s'approche de la solution cherchée.

Tableau (7-3): Résultats d'analyse de la poutre console soumise à une flexion pure avec la méthode de Newton-Raphson modifiée

Incréments	Moment (N.m)	Déplacements		Nombre d'itérations
		$U_x \cdot 10^{-2} \text{ m}$	$U_y \cdot 10^{-2} \text{ m}$	
1	7535.30	0.486	4.840	5
2	18276.39	2.796	11.317	8
3	30505.60	7.437	17.435	12
4	41988.54	13.204	21.397	12
5	52865.69	19.297	23.254	8
6	65678.46	26.384	23.004	15
7	73318.54	30.176	21.701	8
8	82286.55	33.915	19.266	8
9	92971.52	37.073	15.451	15
10	101220.61	38.413	12.149	8
11	111051.38	38.725	8.215	11
12	121065.27	37.702	4.640	11
13	131183.69	35.540	1.882	15
14	139487.26	3.172	0.489	8

Tableau(7-4): Résultats d'analyse de la poutre console soumise à une flexion pure avec la méthode standard de Newton-Raphson

incrément	Moment (N.m)	Déplacement $U_y \cdot 10^{-2} \text{ m}$	Nombre d'itérations
1	66966.030	4.857	4
2	173830.037	11.999	5
3	329410.696	19.498	5
4	64199.615	21.476	7
5	103484.260	9.177	9

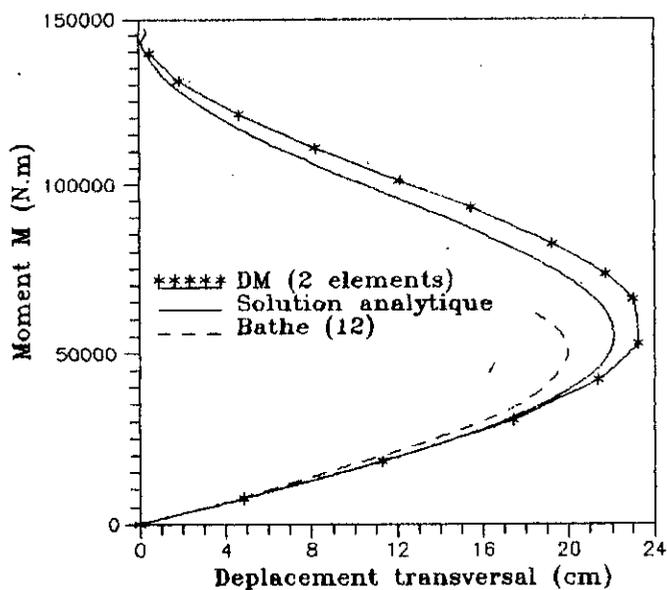


Figure (7-3b) Courbe chargement-déplacement transversal d'une poutre console soumise a une flexion pure

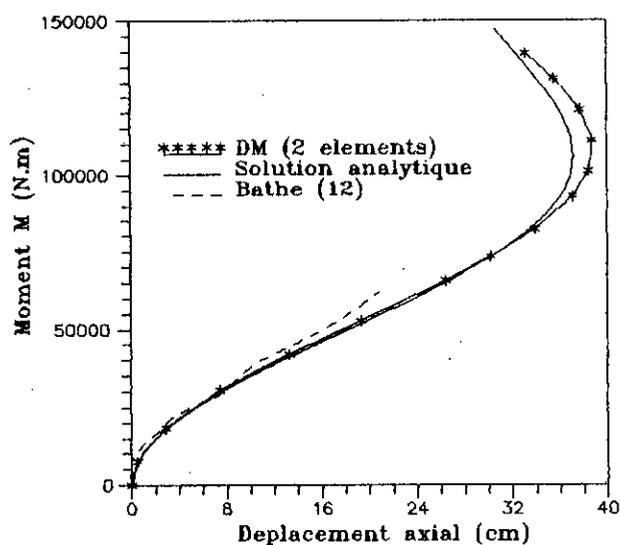


Figure (7-3c) Courbe chargement-déplacement longitudinal d'une poutre console soumise a une flexion pure

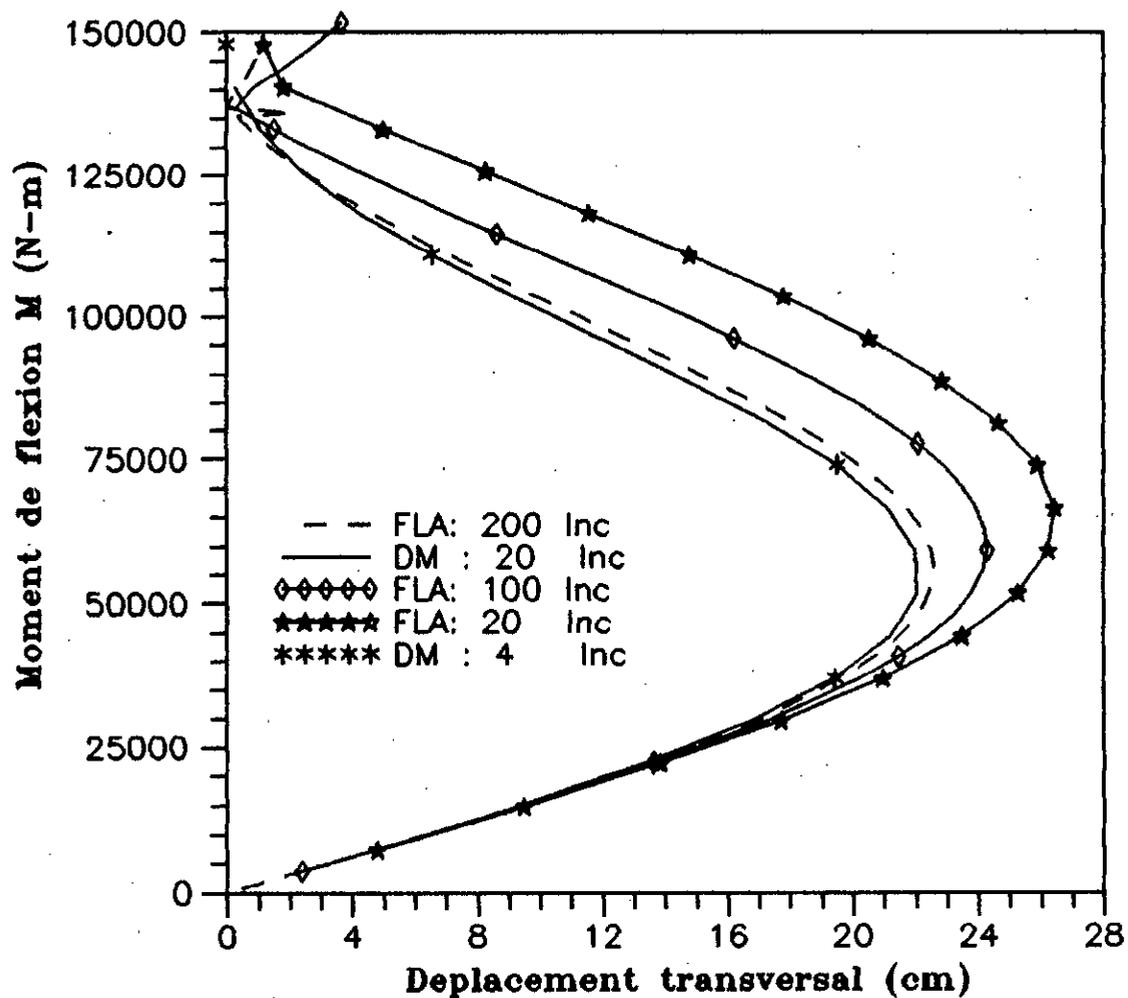


Figure (7-3d): Courbes de Comparaison entre la formulation Lagrangienne (FLA) et la description Mixte (DM) poutre console

7.4.2) STRUCTURE DE WILIAMS

Dans ce paragraphe, on propose d'analyser la structure de Williams [88] montrée sur la figure (7-4a). Elle est composée de deux barres et est chargée par une force concentré P.

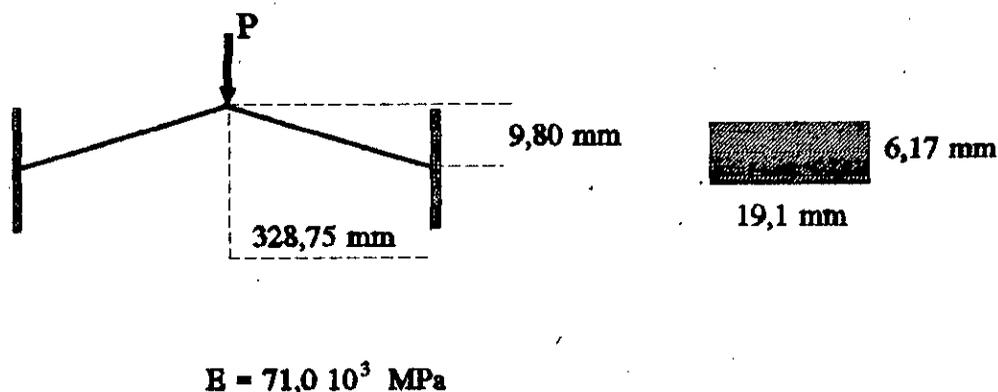


Figure (7-8a): Structure de WILIAMS

Cette structure a été traitée expérimentalement et analytiquement pour la première fois par Williams [88], en 1964. Par la suite, elle est devenue un exemple de référence pour tester la capacité d'une méthode (d'un algorithme) à suivre la réponse dans les zones post-critiques (problème de Benchmark). A ce propos, elle a été testée par plusieurs chercheurs, comme Wood et Ziewkiewicz [89] en 1977 qui ont utilisé 5 éléments par barre. En 1987, Yang et Chiou [11] modélisent la structure par 10 éléments. Le nombre d'incrément de chargement et le nombre d'itérations n'ont pas été précisés. En 1988, Adman [80] modélise la structure avec 8 éléments.

Dans notre analyse, chaque barre est discrétisée par 3 éléments. Le nombre d'incrément de chargement et le nombre d'itérations pour chaque niveau sont, respectivement, 11 et 9. La matrice de rigidité est actualisée seulement durant les deux premières itérations.

La figure (7-4b) montre la courbe de chargement-déplacement obtenue avec notre formulation en utilisant la méthode Arclength, ainsi que les courbes obtenues à partir d'autres études [88,89]. Comme on peut le constater, les résultats obtenus dans cette présente étude sont en bon accord avec les solutions obtenues par d'autres analyses [88,89,80], en utilisant seulement 3 éléments par barre.

Tableau (7-5): Résultats d'analyse de la structure de Williams
3 éléments par barre, tolérance 10^{-3}

Incrément	Chargement (N)	Déplacement U_y (cm)	Nombre d'itérations
1	58.995	0.1066	6
2	112.250	0.2439	7
3	148.118	0.4076	10
4	161.134	0.5710	14
5	160.462	0.7091	12
6	154.968	0.8353	9
7	148.360	0.9686	7
8	144.987	1.1283	10
9	152.819	1.2886	8
10	182.428	1.4685	5
11	276.965	1.7244	8

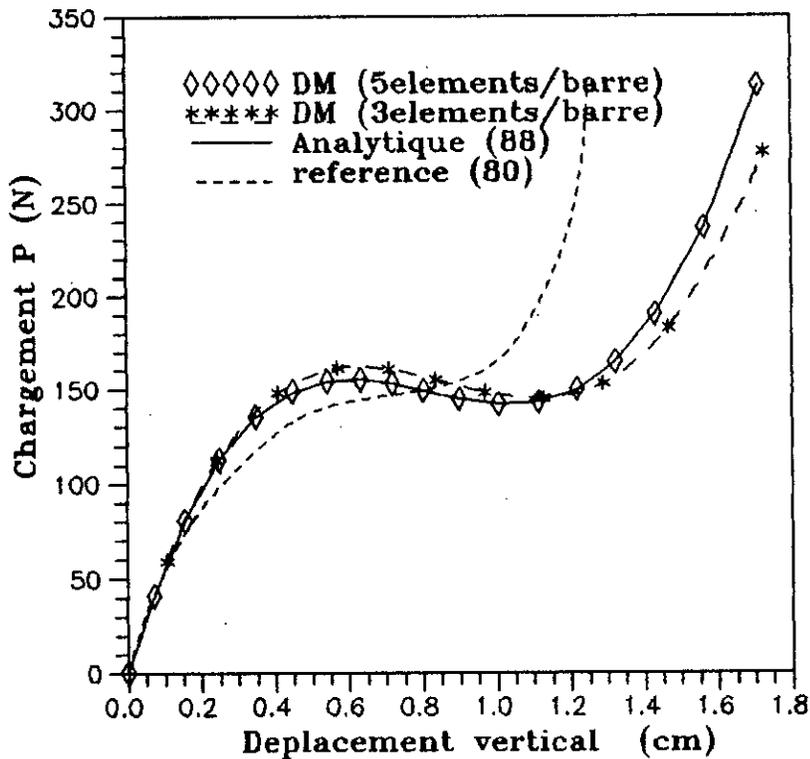
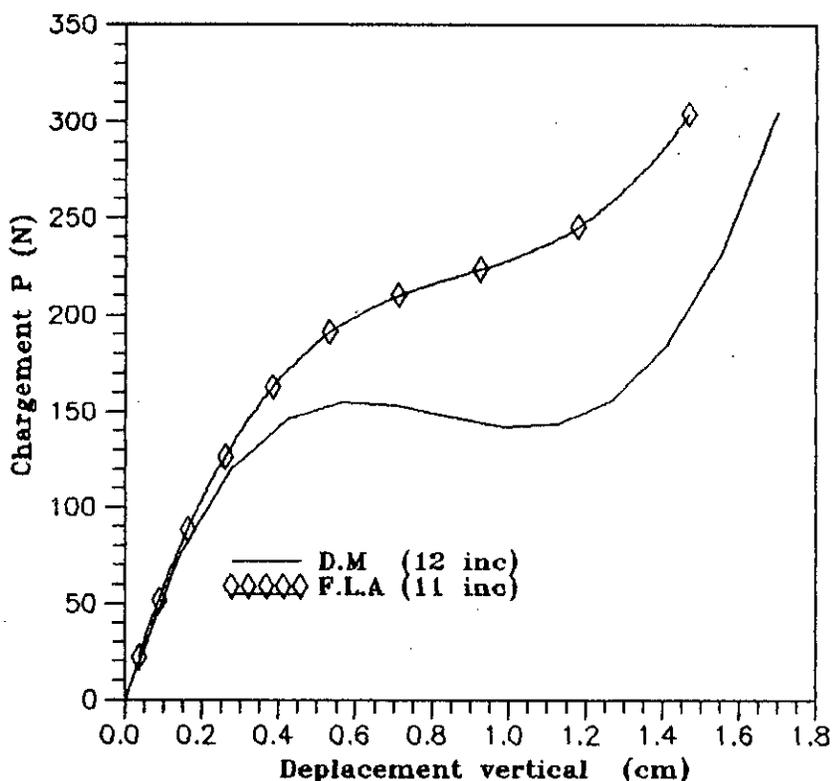


Figure (7-4b) Courbe de chargement-déplacement structure de Williams

La comparaison des résultats obtenus avec la formulation Lagrangienne actualisée (F.L.A) et la description mixte (D.M) développée dans cette étude, est représentée sur la figure (7-4c). Comme on peut le constater, la réponse prédite avec la F.L.A est très différente de celle obtenue expérimentalement ou de la solution prédite par la description Mixte. Ceci confirme l'effet néfaste induit par la rotation de corps rigide résultant de la négligence des termes d'ordres supérieurs du tenseur des déformations de Green-Lagrange.



Figure(7-4c): Courbes de comparaison entre la F.L.A et la D.M structure de Williams

7.2.3) COUPOLE SPATIALE

la structure spatiale composée de 18 barres montrée sur la figure(7-5a) a été analysée par Papadrakakis et Ghionis [90] en 1986 en utilisant, pour modéliser la structure, 3 éléments par barre, soit 48 éléments et 222 degrés de liberté actifs pour toute la structure.

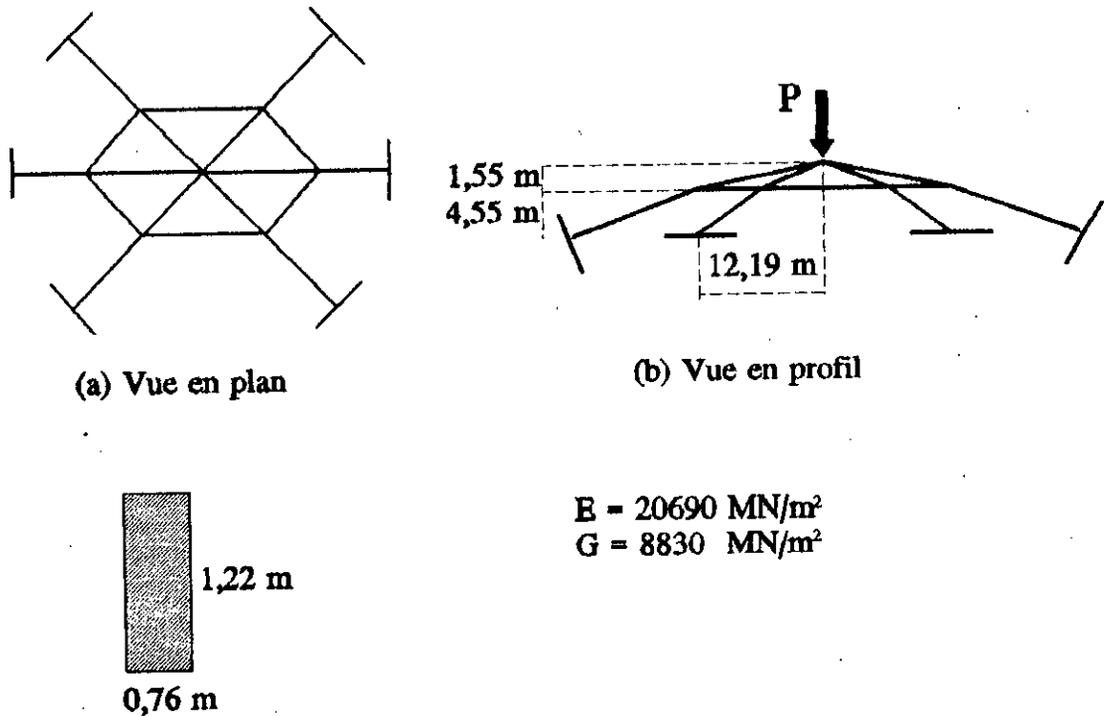


Figure (7-5a): Coupole spatiale

Cet exemple a été aussi traité par Al-Bermani et Kitipornchai [87] en utilisant un élément par barre et en incorporant dans leur approche, la matrice de déformation K_D en plus de la matrice géométrique K_G et de la matrice linéaire K_E . Ni le nombre d'incrément de chargement ni le nombre d'itérations n'ont été indiqués.

Dans cette présente étude, chaque barre est modélisée par un élément. La matrice de rigidité tangente est actualisée durant seulement les deux premières itérations de chaque incrément de chargement. Le nombre d'incrément de chargement employé et le nombre moyen d'itérations par incrément sont, respectivement; 7 et 8. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau (7-6).

On peut voir sur la figure (7-5b) que les résultats recueillis dans cette étude sont en parfait agrément avec ceux des références [90,87] citées plus haut. Ceci confirme les performances de notre formulation qui utilise seulement un élément pour modéliser la barre entre deux noeuds structuraux, là où les autres analyses emploient 2 à 3 fois plus, et sans recourir à la matrice de déformation développée par Al-Bermani et Kitipornchai [87].

Tableau(7-6): Résultats d'analyse de la coupole spatiale

Incrément	Chargement (MN)	Déplacement vertical (m)	Nombre d'itérations
1	41.023	0.3591	7
2	67.520	0.7903	10
3	76.798	1.2222	12
4	77.913	1.5636	9
5	77.930	1.9218	7
6	81.154	2.3765	4
7	94.160	2.8996	6

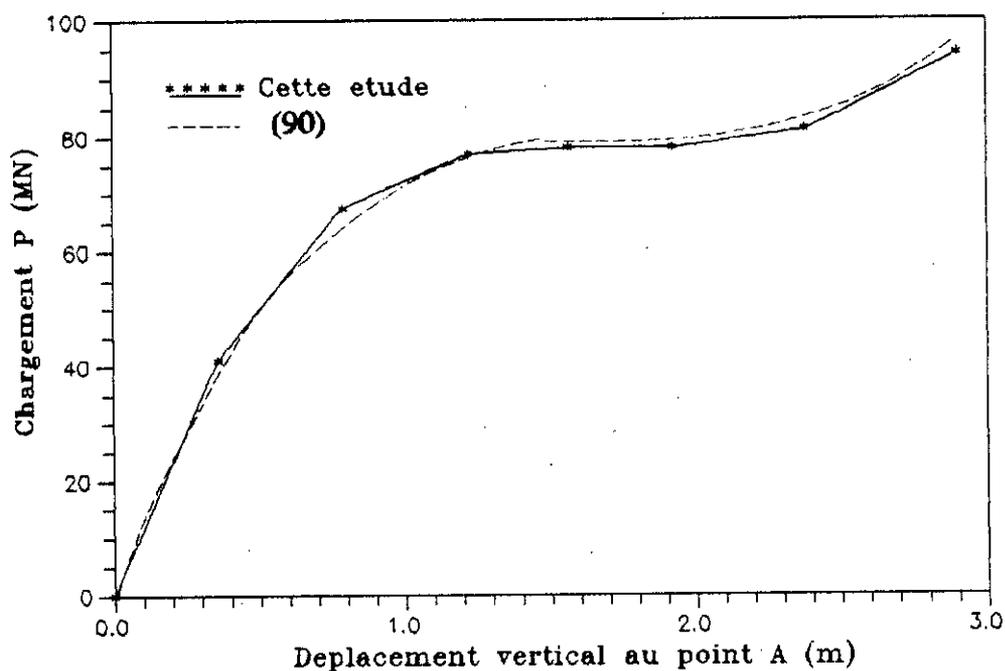


Figure (7 - 5b) Courbes chargement-déplacement Coupole Spatiale

De même que pour les exemples précédents, nous avons analysé cet exemple avec la formulation Lagrangienne actualisée. Les résultats obtenus et ceux recueillis par la description mixte développée dans cette étude sont montrés ensembles sur la figure (7-5c). Il est intéressant de constater la surestimation de la formulation Lagrangienne actualisée à la capacité de chargement. Ceci revient sans doute aux efforts internes imaginaires induits par la négligence des termes d'ordres supérieurs du tenseur des déformations de Green-Lagrange. En effet, le fait d'éliminer la rotation de corps rigide des rotations totales améliore sensiblement la réponse de la structure.

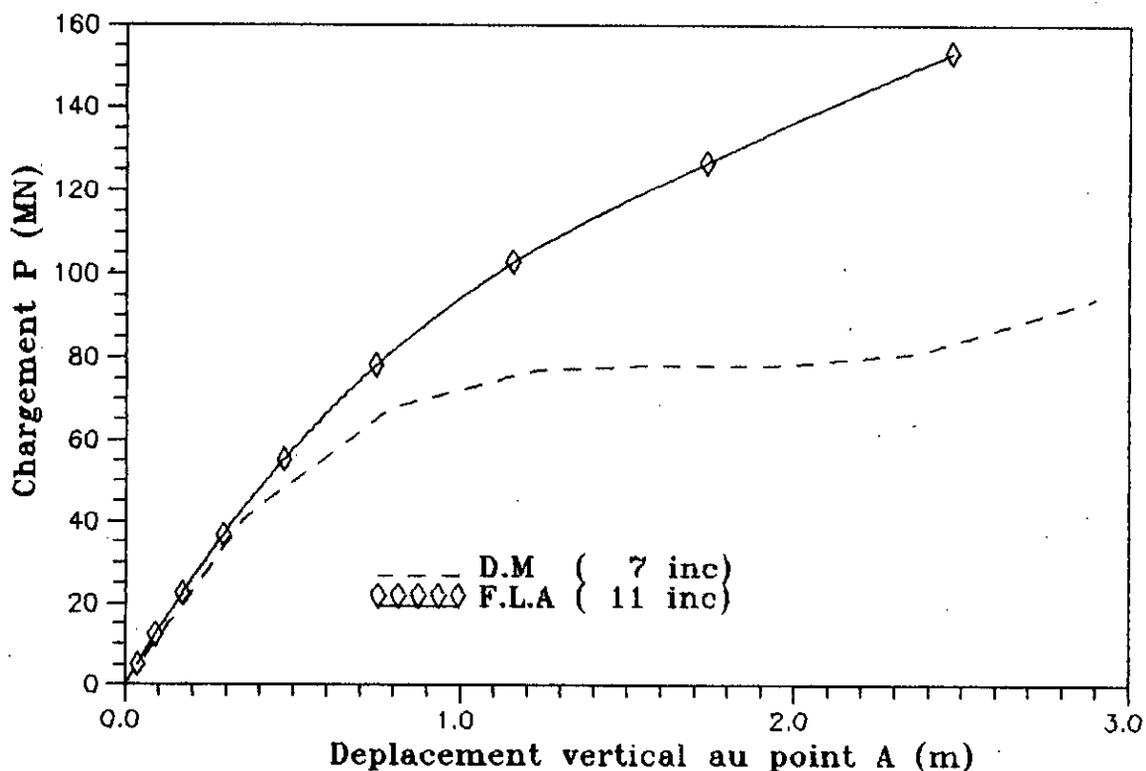
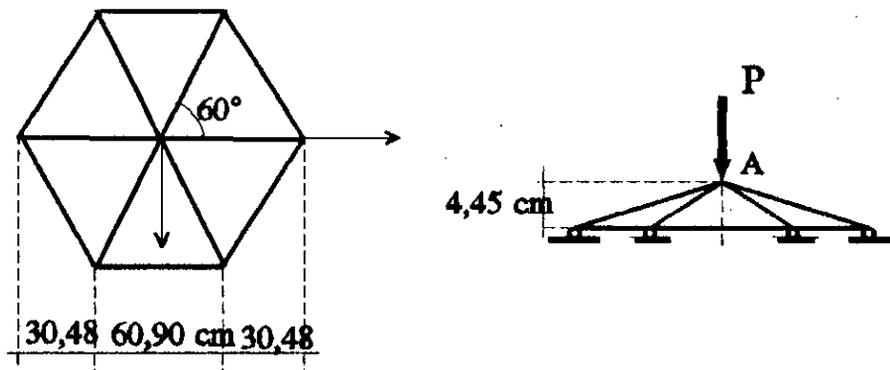


Figure (7-5c): Courbes de comparaison entre la F.L.A et la D.M
Coupole Spatiale

7.2.4) STRUCTURE HEXAGONALE

La structure hexagonale représentée sur la figure(7-6a) soumise à un chargement concentré à son sommet A, est analysée. Cette structure est modélisée par 36 éléments égaux, soit 3 éléments par barre. Elle a été traitée expérimentalement par Griggs [95] en 1966. Par la suite, plusieurs chercheurs l'ont analysée comme Meek et Tan [93], Papadrakakis [92].



- A = 3,187 cm²
- I = 0,832 cm⁴
- J = 1,378 cm⁴
- E = 3031,63 Mpa
- G = 1096,02 Mpa

Figure (7-6a): Structure HEXAGONALE

Dans cette étude chaque barre est modélisée par 3 éléments. Comme il est montré sur le tableau(7-7), nous avons employé 12 incréments de chargement avec en moyenne 9 itérations par incrément.

Les résultats obtenus figure (7-6b), sont en parfait agrément avec ceux recueillis par Papadrakakis qui eux sont en très bon accord avec les résultats obtenus par Griggs [95]. Cependant, on remarque une légère différence avec les résultats obtenus par Meek et Tan [93]. Ceci revient sans doute parce que le nombre d'éléments utilisé par Meek et Tan [93] pour modéliser la structure est insuffisant (le nombre d'éléments n'a pas été mentionné).

Tableau (7-7): Résultats d'analyse de la structure Hexagonale

Incrément	Chargement P (N)	Déplacement U_y (cm)	Nombre d'itérations
1	184.41	0.4023	6
2	319.26	0.8631	7
3	370.71	1.3320	8
4	345.19	1.8197	9
5	279.50	2.3787	8
6	187.76	3.0914	8
7	84.48	4.0074	10
8	3.62	5.0594	10
9	13.46	6.0310	13
10	57.97	6.9728	9
11	313.58	8.0381	6
12	1095.66	9.4323	9

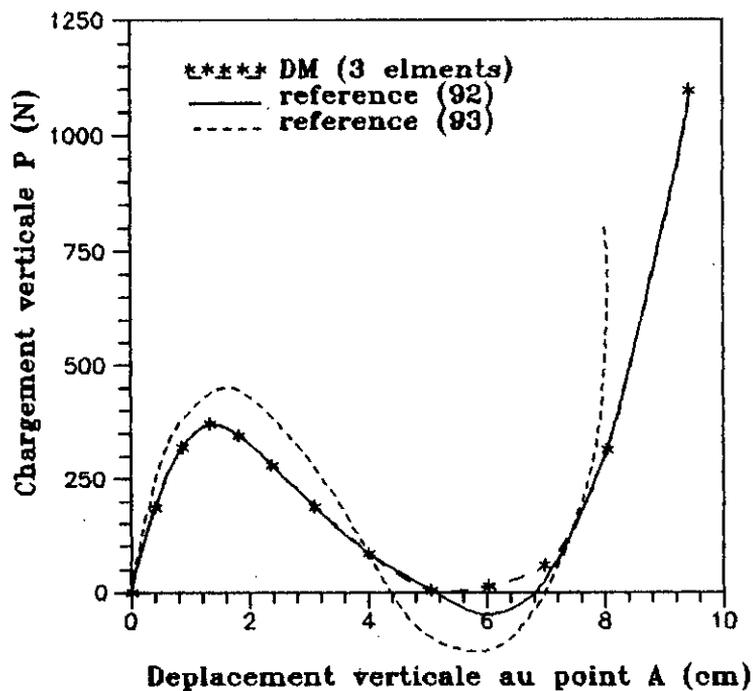


Figure (7-6b) Courbe chargement-déplacement structure Hexagonale

La comparaison entre la formulation Lagrangienne actualisée et la description mixte est représentée sur la figure (7-6c). Comme on peut le constater la charge de bifurcation est environ 40% superieur à la charge réelle. Cet exemple traduit bien les problèmes que peut rencontrer un concepteur lorsqu'il utilise la description Lagrangienne.

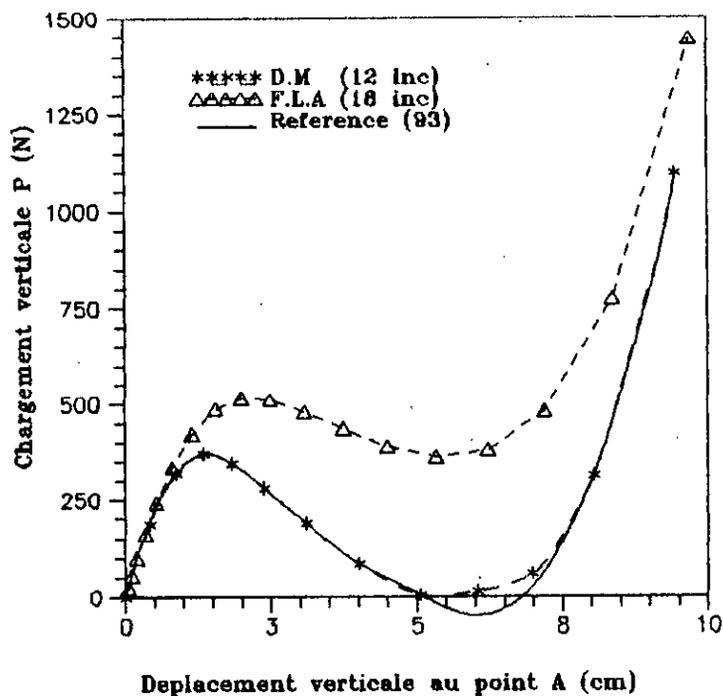


Figure (7-6c): Courbes de comparaison entre la F.L.A et la D.M structure Hexagonale

7.2.5) STRUCTURE DE LEE

Cet exemple est choisi pour tester notre algorithme à traiter le problème du "snap through" et du "snap-back". La structure montrée sur la figure(7-7a) a été étudiée analytiquement par Lee[94].

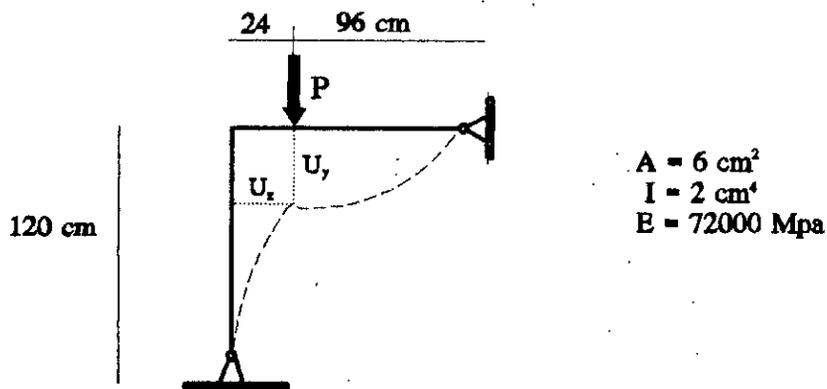


Figure (7-7a) : Structure de LEE

Dans cette étude, cette structure est discrétisée par 20 éléments avec 39 incréments de chargement. Le nombre moyen d'itérations par incrémente est de 13.

Les résultats obtenus, montrés sur les figures (7-7b) et (7-7c), sont satisfaisants en comparaison avec ceux obtenus par Lee [94].

Pour cet exemple la comparaison avec la formulation Lagrangienne actualisée est impossible à effectuer à cause de la rupture dans la procédure de résolution Arclength.

Tableau (7-8): Résultats d'analyse de la structure de Williams
3 éléments par barre, tolérance 10^{-3}

Incrément	Chargement (t)	Déplacements		Nombre d'itérations
		U_y (cm)	U_z (cm)	
1	0.9545	1.6261	9.7660	15
2	1.3113	4.6471	18.6370	10
3	1.5531	8.9741	27.7636	9
4	1.7383	14.8619	36.8267	10
5	1.8455	21.8032	44.5804	9
6	1.8590	29.7763	50.9297	11
7	1.7841	37.6725	55.3494	11
8	1.6494	45.3496	58.3403	11
9	1.4734	52.7592	60.2171	8
10	1.2213	61.0567	61.1129	11
11	0.9053	68.7023	60.3520	16
12	0.5814	74.0853	58.1751	18
13	0.2900	77.2659	55.5862	15
14	0.0255	79.0989	53.2251	20
15	-0.1683	80.0184	51.8353	20
16	-0.3037	80.6012	51.1985	19
17	-0.3989	81.0633	50.9702	17
18	-0.4690	81.4682	50.9335	15
19	-0.5239	81.8397	50.9883	13
20	-0.5698	82.1945	51.0928	12
21	-0.6100	82.5472	51.2325	10
22	-0.6481	82.9186	51.4077	9
23	-0.6858	83.3240	51.6260	9
24	-0.7231	83.7762	51.8939	8
25	-0.7615	84.2934	52.2304	8
26	-0.8007	84.9214	52.6606	5
27	-0.8476	85.7498	53.3158	8
28	-0.8902	86.7169	54.1463	7
29	-0.9273	87.8536	55.2452	6
30	-0.9546	89.2483	56.8113	7
31	-0.9607	90.7635	58.8663	8
32	-0.9395	92.1931	61.3412	8
33	-0.8897	93.4136	64.2553	8
34	-0.8110	94.2764	67.6072	7
35	-0.6943	94.6226	71.6342	7
36	-0.5271	94.1146	76.3390	8
37	-0.2927	92.5055	81.3200	8
38	0.9806	89.7195	86.4060	8
39	0.9986	86.6926	91.0276	15

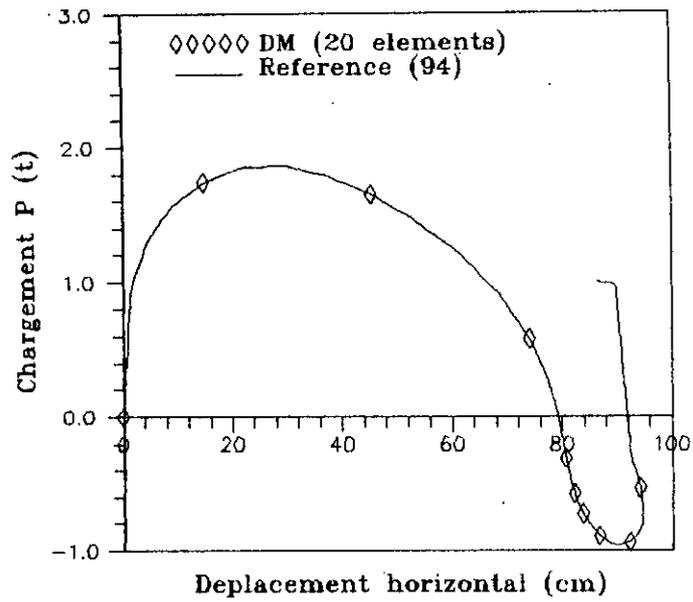


Figure (7-7b): Courbes chargement-déplacement
Structure de Lee

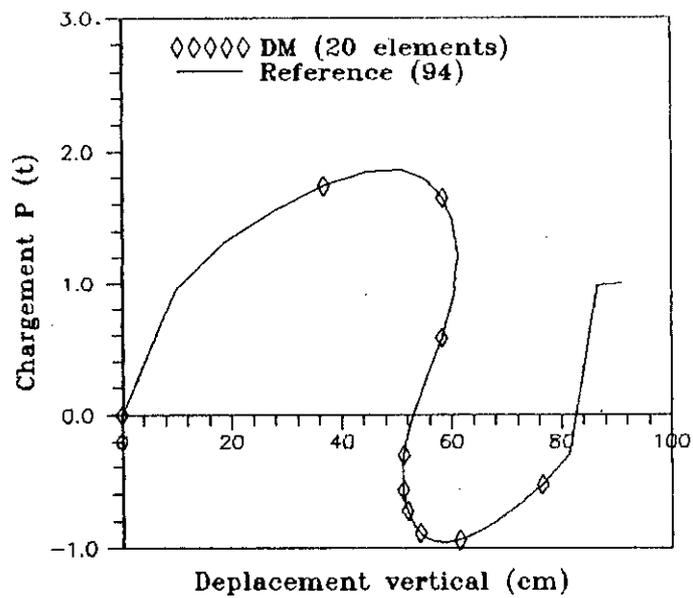


Figure (7-7c): Courbes chargement-déplacement
Structure de Lee

7.2.6) Console soumise à une force axiale excentrée

Ici, nous considérons la poutre console à section en cornière soumise à son extrémité à une force axiale excentrée, comme est montré sur la figure(7-8a).

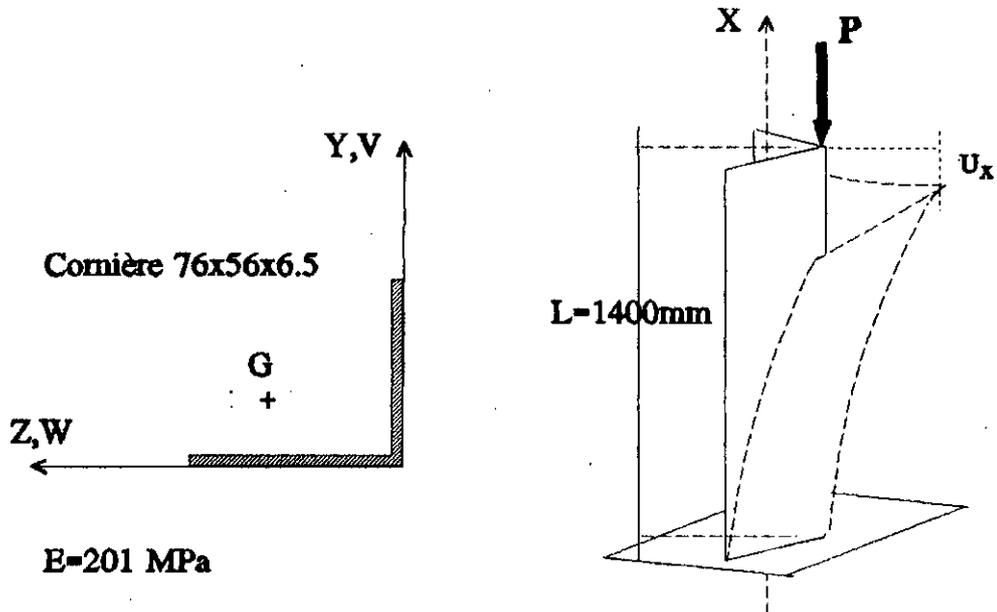


Figure (7-8a): Poutre console soumise à une force axiale excentrée

Cette poutre est idéalisée avec 3 éléments égaux. L'actualisation de la matrice de rigidité est effectuée durant les 3 premières itérations de chaque incrément de chargement. Seulement 13 incréments de chargement sont employés dans cette analyse pour tracer toute la réponse non linéaire. Le nombre moyen d'itérations par incrément est de 9. L'incrément de chargement, déplacements et nombre d'itérations par incrément sont présentés dans le tableau (7-9).

Les figures (7-8b) à (7-8d) montrent les courbes des déplacements en fonction du chargement ensemble avec les solutions données par Chan et Kitipornchai [18] qui ont utilisé 6 éléments. Un très bon accord entre ces deux solutions est observé. Ceci confirme encore les performances de notre programme qui emploie un nombre réduit d'éléments pour modéliser la structure.

Tableau (7-9): résultats d'analyse de la cornière soumise à une charge axiale excentrée

Incrément	Chargement P (KN)	Déplacements		
		U (mm)	V (mm)	W (mm)
1	0.0	0.00	0.000	0.010
2	2.010	0.110	0.110	2.040
3	4.050	0.123	0.121	4.020
4	6.020	0.147	0.312	6.120
5	8.201	0.165	0.502	8.014
6	10.020	0.504	0.832	9.750
7	12.091	0.809	1.818	11.702
8	14.102	1.050	2.753	13.756
9	16.201	2.030	4.902	15.757
10	18.090	5.140	8.304	17.203
11	19.520	10.020	13.621	17.565
12	19.983	15.030	19.216	17.701
13	20.356	20.010	24.184	17.756

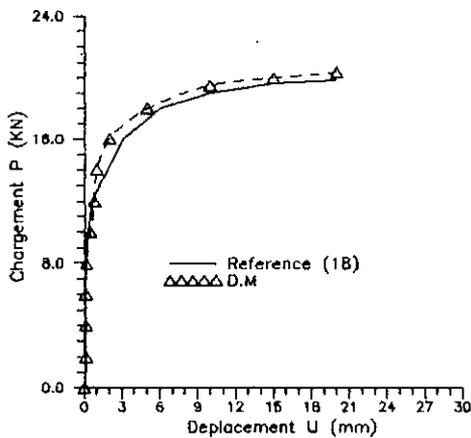


Figure (7-8b): Chargement--déplacement d'une cornière soumise à une charge excentree

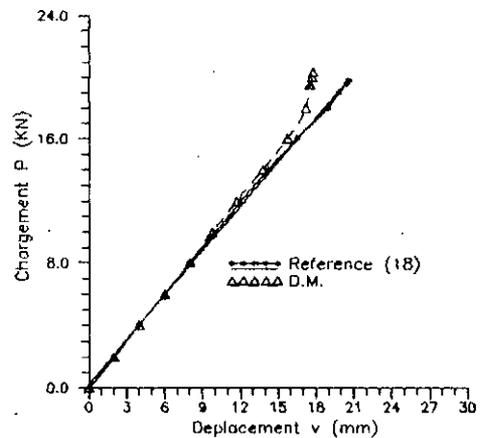


Figure (7-8c): Chargement--déplacement d'une cornière soumise à une charge excentree

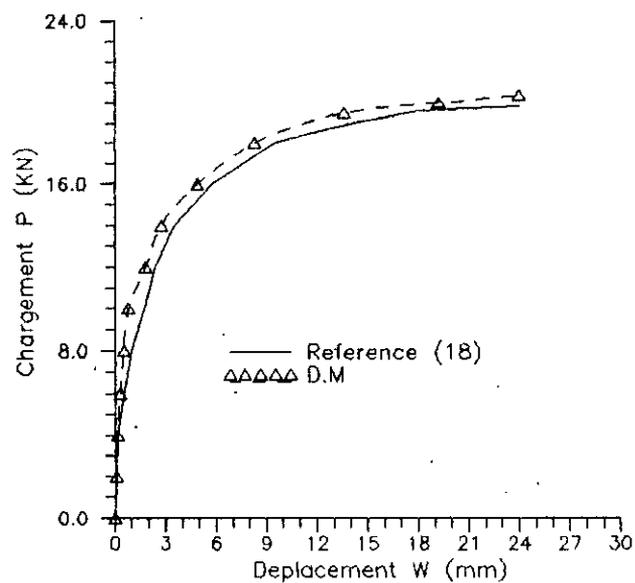


Figure (7-8d): Chargement-déplacement d'une cornière soumise à une charge excentrée

7.2.7) Analyse du comportement élasto-plastique d'une poutre console

Nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier le comportement élasto-plastique de la poutre console montrée sur la figure (7-9a). Cette poutre est soumise à une force axiale P et une charge latérale $P/100$. Cette dernière est appliquée pour amplifier le phénomène d'instabilité latéral.

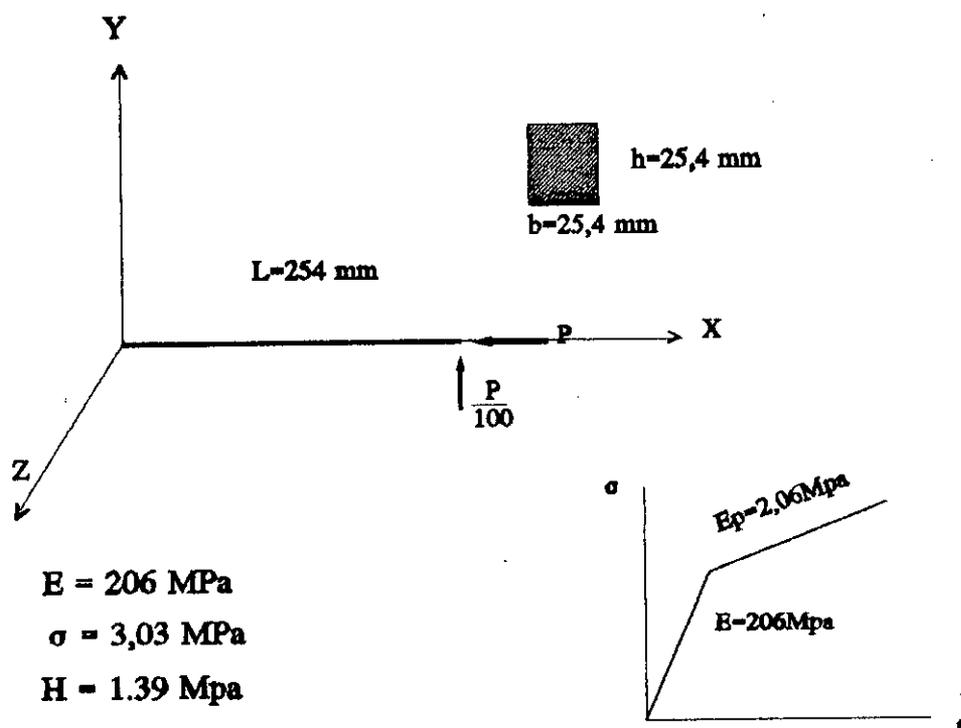


Figure (7-9a): Poutre console Soumise à une charge excentrée

Il est intéressant de signaler que cette structure a été analysée en 1980 par Bathe et Boulourchi [96] avec 25 éléments bidimensionnels isoparamétriques à 8 noeuds et 7 incréments de chargement. En 1987, Kani et Connell [97] emploient 4 éléments poutres. 20 incréments de chargement ont été nécessaires pour étudier la réponse. Le nombre d'itérations par incrément n'a pas été spécifié.

Dans cette étude, la poutre console est modélisée, respectivement, avec 5 et 2 éléments. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux (7-10a) et (7-10b), respectivement.

On peut constater sur la figure (7-9b) une bonne concordance entre cette analyse et les références [96,97] pour le cas où la poutre est modélisée avec 5 éléments. 6 incréments de chargement ont été suffisants pour atteindre une déformation de

l'ordre de 6.3%. Le nombre moyen d'itérations par incrément est de 6.

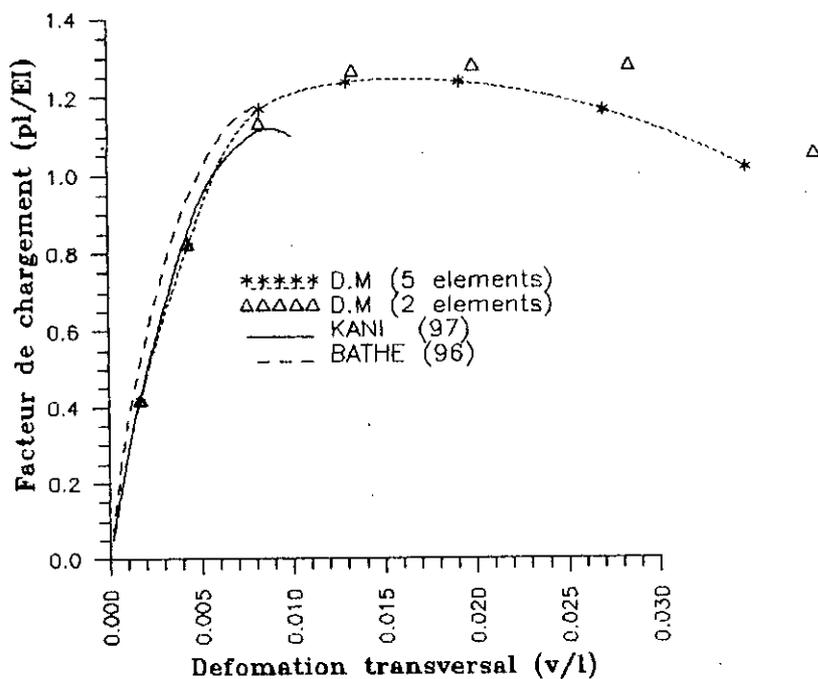
Dans le cas où la structure est modélisée avec 2 éléments, nous distinguons une légère différence avec la réponse prédite avec 5 éléments. Ceci est dû principalement à la manière dont sont calculées les déformations. En effet, dans cette étude et comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 4, la déformation calculée est la déformation moyenne. Aussi, si la variation des courbures entre les deux extrémités de l'élément est grande, celle-ci peut engendrer des erreurs dans la réponse de la structure.

Tableau (7-10a): résultats d'analyse géométrique non linéaire élasto-plastique de la poutre console modélisée avec 5 éléments

Facteur de Chargement $\frac{P L^2}{EI}$	Déformation transversal $\frac{U_y}{l}$	Nombre d'itérations
0.4178	0.00173	3
0.8209	0.00436	3
1.1693	0.00831	7
1.2376	0.01301	6
1.2383	0.01917	6
1.1657	0.02701	9
1.0168	0.03475	14

Tableau (7-10b): résultats d'analyse géométrique non linéaire élasto-plastique de la poutre console modélisée avec 2 éléments

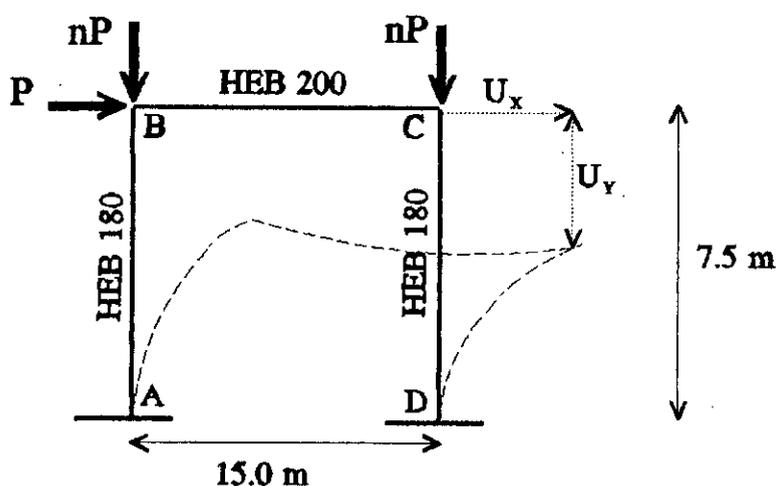
Facteur de Chargement $\frac{P l^2}{EI}$	Déformation transversal $\frac{U_y}{l}$	Nombre d'itérations
0.4185	0.00171	3
0.8265	0.00432	3
1.1351	0.00825	6
1.2676	0.01333	6
1.2810	0.01989	6
1.2798	0.02841	7
1.0531	0.03847	14



Figure(7-9b): courbes de chargement-déformation de la poutre console

7.2.8) Portique plan

Nous traitons dans cet exemple, le comportement géométrique non linéaire élasto-plastique du portique plan représenté sur la figure (7-10a). Cette structure a fait l'objet d'une analyse élasto-plastique au premier ordre par J.M Aribert et P.Jouve [98] en 1972. Elle est reprise ensuite par Adman en 1988 dans une analyse élasto-plastique au second ordre.



$$E = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\sigma = 25,24 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$H = 0$$

Figure (7-10a) : Structure portique plan

Dans cette étude et dans le but de voir l'influence du nombre d'éléments sur la réponse de la structure, ce portique est modélisé avec 9 et 25 éléments. Les résultats obtenus sont montrés sur les tableaux (7-11a) et (7-11b), respectivement.

La figure (7-10b) représente les résultats obtenus dans cette étude (analyse géométrique et matérielle non linéaire) confrontés à ceux recueillis par les auteurs cités ci-dessus. Comme on peut le constater, ils ne correspondent pas aux résultats des références cités ci-dessus. En effet, notre programme prévoit une charge de ruine beaucoup plus petite, de presque la moitié de celle donnée par Adman ou Aribert et Jouve. Cette différence était inattendue surtout que, d'un côté l'analyse effectuée par Adman était au second ordre, et d'un autre

côté, notre programme a déjà fait ses preuves dans les exemples précédents. Après réflexion, nous avons réalisé une seconde expérience numérique. Cette fois-ci, nous avons supprimé l'actualisation de la géométrie de la structure. Les résultats obtenus présentés ensembles sur la figure (7-10b) avec ceux recueillis par les références [80,98] sont en bon accord.

Par ailleurs, on peut voir sur la figure(7-10c) une légère différence entre la réponse de l'analyse réalisée avec 9 éléments et celle de l'étude effectuée avec 25 éléments. Cette différence est due aux erreurs induites lors du calcul des déformations.

Cet exemple mis en évidence l'importance de la prise en compte de la non linéarité géométrique lors de la conception d'une structure.

Tableau (7-11a): résultats d'analyse du comportement élasto-plastique non linéaire du portique plan modélisé avec 9 éléments

Incrément	Chargement P (N)	Déplacement transverse(cm)	Nombre d'itérations
1	999	0.978	4
2	2446	2.445	5
3	4394	4.521	5
4	6971	7.458	5
5	10295	11.613	6
6	14115	16.979	6
7	18399	23.912	6
8	21532	32.767	11
9	22817	41.099	11
10	23143	48.961	11
11	22896	56.398	10
12	22375	63.853	12
13	21716	70.615	13
14	21039	76.569	13

Tableau (7-11b): résultats d'analyse du comportement élasto-plastique non linéaire du portique plan (2) modélisé avec 25 éléments

Incrément	Chargement P (N)	Déplacement transverse (cm)	Nombre d'itérations
1	995	0.951	4
2	2440	2.378	5
3	4391	4.397	5
4	6979	7.252	5
5	10335	11.292	6
6	14213	16.510	6
7	18280	23.236	9
8	20396	30.240	10
9	21143	37.176	10
10	21366	44.101	10
11	21042	51.026	10
12	20459	57.881	13
13	19901	63.943	11
14	19321	69.741	11
15	18757	75.219	16
16	18324	79.562	13
17	17947	83.392	10
18	17575	87.221	10

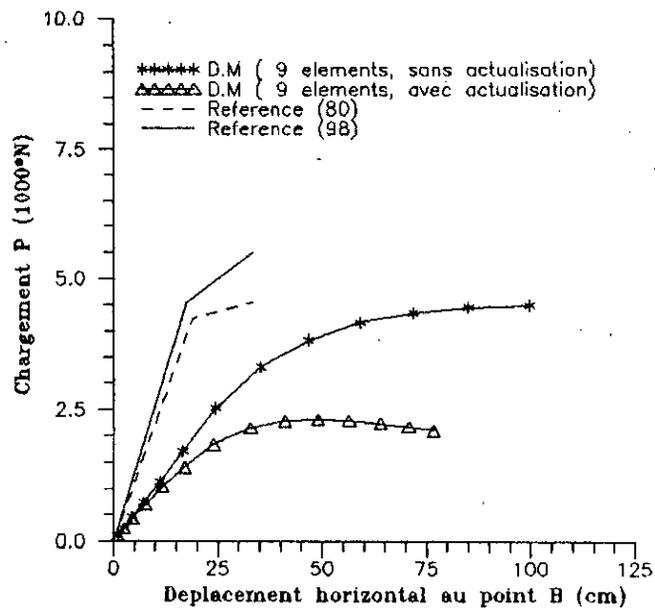


Figure (7-10b): Courbes Chargement-déplacement du comportement geometrique non lineaire elasto-plastique du portique plan

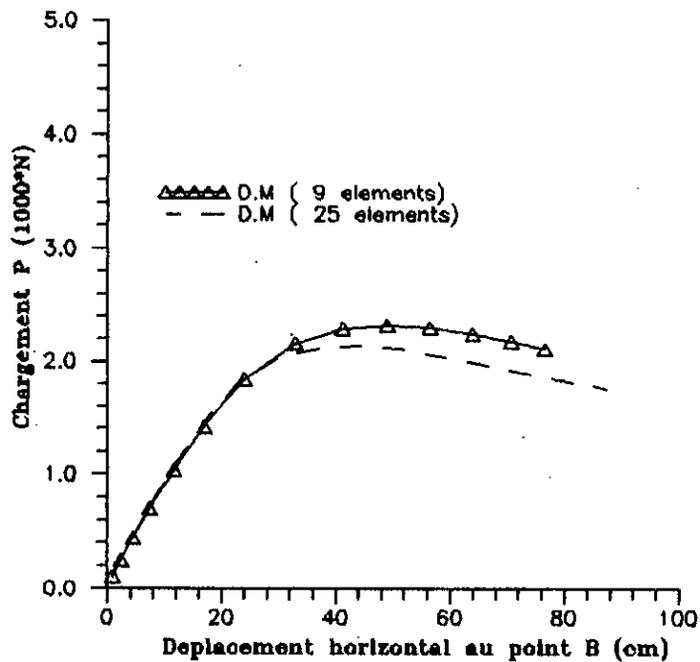


Figure (7-10c): Courbes Chargement-déplacement du comportement geometrique non lineaire elasto-plastique du portique plan

7.3) CONCLUSION

L'expérimentation numérique réalisée dans ce chapitre montre clairement l'incapacité de la formulation Lagrangienne à prédire une réponse proche de la solution réelle.

Par ailleurs, nous constatons l'efficacité, la vitesse de convergence et la bonne précision de la description développée dans cette étude à s'accommoder à de grandes translations et à de larges rotations. De plus notre formulation permet d'employer de grands incréments de chargement et un nombre réduit d'éléments. Ces derniers permettent un gain appréciable en espace mémoire et en temps machine.

Chapitre 8

Conclusions Générales

CONCLUSIONS GENERALES

8.1) OBJECTIFS

Durant ces deux dernières décennies, les analyses non linéaires se sont beaucoup intensifiées. Ces analyses permettent de fournir, pour une structure donnée, la charge critique d'instabilité et/ou le comportement à la ruine et donc de donner une évaluation de la sécurité effective. Cependant, ces analyses ne sont analytiquement valables que pour certaines structures simples. Pour des structures complexes, s'il est nécessaire de recourir à des méthodes numériques.

Dans ce sens, les formulations Lagrangiennes sont employées pour la prédiction de la réponse dans régions précritiques et post-critiques avec un comportement élastique ou élasto-plastiques. Cependant, ces formulations sont restreintes à de petits incréments de déplacement (infinitésimaux pour être exact) entre deux niveaux successifs de chargement et à un nombre important d'éléments. Pour remédier à ce problème, quelques travaux ont ajouté de nouvelles matrices de rigidité dans les équations de mouvement obtenues à partir de la formulation Lagrangienne actualisée. Toutefois, ces travaux ne sont applicables que pour des structures planes ou bien pour des structures spatiales avec des sections symétriques.

Dans cette présente étude nous nous sommes proposé:

-d'étudier l'effet implicite de la troncature des termes d'ordres supérieurs du tenseur des déformations de Green-Lagrange sur la précision de la réponse.

-de suggérer un modèle numérique élasto-plastique en grands déplacements, permettant l'emploi de grands incréments de chargement et un nombre réduit d'éléments avec un taux de précision acceptable.

-d'élaborer un logiciel de calcul des structures tridimensionnelles en comportement élasto-plastique avec de grands incréments de déplacement.

-d'étudier l'applicabilité du modèle proposé.

8.2) METHODOLOGIE

La consultation des documents de référence a permis de constater notamment l'inefficacité de la formulation Lagrangienne à prédire avec précision la réponse en grands déplacements, et de réunir les informations nécessaires à la constitution d'une méthodologie appropriée permettant d'aborder rationnellement le problème et d'aboutir ainsi à des résultats intéressants.

Ce travail comporte quatre axes bien distincts:

I) Détermination d'une matrice de rigidité capable de traduire les effets relatifs à:

- la dissymétrie de la section
- l'analyse du second ordre
- la connexion excentrée.

II) Construction d'un modèle élasto-plastique basé sur le modèle fibre, et d'un algorithme de calcul capable de prendre en considération l'influence d'un déchargement élastique du matériau.

III) Développement d'une description cinématique mixte inspirée de la formulation Lagrangienne actualisée et de la description corotationnelle totale. Cette description consiste à employer les développements de la formulation Lagrangienne actualisée avec élimination des rotations de corps rigide.

IV) Elaboration d'un programme de calcul basé sur la méthode des éléments finis qui intègre un algorithme de résolution non linéaire capable de tracer toute la réponse de la structure. Ainsi, il permet de nous renseigner sur la capacité de la structure à s'accommoder aux grands déplacements.

Pour étudier l'applicabilité du modèle, diverses structures sont expérimentées en grands déplacements.

8.3) RESULTATS ET RECOMMANDATIONS

Les conclusions auxquelles cette étude a permis d'aboutir sont:

1) La formulation Lagrangienne a l'avantage de faire appel à des développements théoriques simples, mais nécessite beaucoup d'éléments pour la discrétisation du milieu à étudier. Par ailleurs, elle est restreinte à des incréments de déplacements infinitésimaux entre deux niveaux de chargement, à cause de l'effet néfaste induit par la négligence des termes d'ordres supérieurs du tenseur des déformations de Green-Lagrange. Par conséquent, l'utilisation de cette formulation demande un important outil informatique (en espace de stockage) avec un énorme temps de calcul.

2) Malgré la troncature des termes d'ordres supérieurs du tenseur de Green-Lagrange, l'élimination des rotations de corps rigide permet d'obtenir les mêmes résultats que si tous les termes avaient été gardés. De plus, cette élimination avec le calcul des efforts internes par rapport à la configuration déformée a permis de discrétiser les structures avec beaucoup moins d'éléments; deux suffisent là où la formulation Lagrangienne nécessite deux à trois fois plus.

4) La technique Arclength permet de suivre toute la réponse non linéaire. Elle permet d'éviter la surestimation ou la sous estimation de la capacité réelle de chargement engendrée par une divergence numérique durant les itérations d'équilibre.

D'une manière plus générale, les résultats obtenus par le biais de la description mixte développée dans cette étude sont très satisfaisants. Néanmoins, certaines améliorations peuvent être apportées concernant:

- * L'étude de la transmission du gauchissement

- * Le développement d'une matrice de rigidité par rapport à un point fixe incluant les effets des déformations de cisaillement, la distorsion de la section et l'instabilité locale. En effet pour le cas des poutres minces et à section dissymétrique, la rigidité à la torsion est si faible que les déformations de

cisaillement dues à la torsion peuvent influencer le comportement à la ruine de l'élément.

* L'élaboration d'un élément fini parabolique (isoparamétrique) combiné avec la description mixte. Celui-ci permettrait de traiter avec une grande efficacité les structures courbes.

* La prise en considération des déformations à des points distincts le long de l'élément dans le modèle élasto-plastique.

* L'utilisation de la technique Arclength avec la méthode de Quasi-Newton. Cette combinaison augmenterait les performances de la description développée dans cette étude. En effet, l'actualisation de l'inverse de la matrice de rigidité au lieu de la matrice de rigidité elle-même, permet un gain considérable en temps de calcul, surtout si le nombre de degrés de liberté nécessaire à la discrétisation de la structure à étudier est important.

Par ailleurs, l'extension au chargement statique cyclique et/ou dynamique non linéaire serait intéressant, d'autant plus que la formulation employée dans cette étude est tout à fait adaptée à l'incorporation de cette analyse.

*Références
Bibliographiques*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Abou-Elkhier, G.Ae.Oravast and M.A.Dokannish
" A Consistant Eulerian Formulation for Large Deformation Analysis With Reference to Metal Extrusion Process".
Int. J. Non Linear Mechanics, Vol 23, N°1, pp37-52, 1988.
- [2] R. M. McMeeking and J. R. Rice
" Finite Element Formulation for Problem of Large Elastic Plastic Deformation".
Int. Jou. Solids Structures, Vol 11, pp 601-616, 1975.
- [3] Z.P. Bazant, M.El-Nimeiri
" Large Deflection Spatial Buckling of Thin Walled Beams and Frames".
Jou. Engrg. Mech. Div., Vol 99, N° 6, December 1973.
- X [4] P. Sharifi and E.P. Popov
" Non Linear Buckling Analysis of Sandwich Arches".
Jou. Engrg. Mech. Div., Vol 97, N° 5, October 1971.
- ✓ [5] K.J. Bathe, E. Ramm and E.L. Wilson
" Finite Element Formulation for Large Dynamic Analysis".
Int. Jou. Nume. Meth. Engng, Vol99, pp 353-386, 1975.
- [6] R.D. Vanluchene
" Large Scale Finite Element Analysis on a Vector Proccessor".
Computers and Structures, Vol124, pp 625-655, 1986.
- X [7] M. Gattas
" Large Displacement, Interactive-Adaptive Dynamic Analysis of Frames".
Thesis presented to Cornell University, in Ithaca, N.R, in partial fulfillment of the requierments for degree of doctor of philosophy, 1982.
- X [8] Y.B. Yang and W. McGuire
" Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis".
Jou. Struc. Engrg., ASCE, Vol 112, N° 4, pp 853-877, 1986.
- X [9] Y.B. Yang and W. McGuire
" Joint Rotation and Geometric Nonlinear Analysis".
Jou. Struc. Engrg., ASCE, Vol 112, N° 4, pp 879-905, 1986.
- X [10] L.J. Leu and Y.B. Yang
" Effets of Rigid Body and Stretching on Nonlinear Analysis of Trusses".
Jou. Struc. Engrg., Vol 116, N° 10, October 1990.

- ✓ [11] Y.B. Yang and H.T. Chiou
" Rigid body Motion Test for Nonlinear Analysis With Beam Element".
Jou. Engrg. Mech., Vol 113, N°9, September 1987.
- ✓ [12] K.J. Bathe and S. Boulourchi
" Large Displacement Analysis of Three Dimensional Beam Structures".
Int. Jou. Num. Meth. Engng., Vol 114, pp 961-986, 1979.
- [13] D.S. Jaganathan, H.I. Epstein and P. Chrishano
" Fictious Strain due to Rigid Rotation".
Jou. Struc. Engrg. Div., ASCE, Vol 101, N° 11, pp 2472-2476, 1975.
- [14] F.L. Porter and G.H. Powell
" Static and Dynamic Analysis of Inelastic Frame Structures".
Report N. EERC 71-3, Earthquake Engineering Research Center, University of
California, Berkley, Calif.
- ✓ [15] K.S. Surana and R.M. Sorem
" Geometrically Nonlinear Formulation for Three Dimensional Curved Beam Elements
With Large Rotations".
Int. Jou. Nume. Meth. Engng, Vol 28, pp 43-73, 1989.
- ✓ [16] J.H. Argyris, S. Kelsey and H. Kamel
" Matrix Methods of Structural Analysis; a Precis of Recent Developments".
In Matrix Methods of Structural Analysis, AGADO-Graph 72 (Edited by B.F. de
Veubeke), pp 1-165, Pergamon Press, London 1964.
- ✓ [17] T. Belytscho and B.J. Hseih
" Nonlinear Transient Finite Element Analysis With Convected Coordinates".
Int. J. Nume. Meth. Engng., Vol 9, N° 2, pp353-386, 1973.
- ✓ [18] S.L. Chan and S. Kitipornchai
" Geometric Nonlinear Analysis of Asymetric Thin Walled Beam-Columns".
Engrg. Struct., Vol 9, N° 4, pp 243-254, 1987.
- ✓ [19] K.M. Hsiao and F.Y. Hou
" Nonlinear Finite Element Analysis of Elastic Frames".
Computers and Structures, Vol 26, pp 693-701, 1987.
- [20] C. Oran
" Tangent Stiffness in Plan Frames".
Jou. Struc. Div., ASCE 99, ST6, pp973-987, June 1973.
- [21] C. Oran
" Tangent Stiffness in Space Frames".
Jou. Struc. Engng. Div., ASCE, Vol 99, pp987-1061, 1973.
- [22] J.L. Meek and S. Loganathan
" Geometrically Nonlinear Behaviour of Spaces Frames Structures".
Computers and Structures, Vol 31, N° 1, pp 35-45, 1989.

- [23] T.Y. Yang
" Matrix Displacement Solution to Elastica Problem of Beams and Frames".
Int. Jou. Solids Struct., Vol 9, pp 829-842, 1973.
- [24] K. Tanaka and S.N. Alturi
" An Explicit Expression for Tangent Stiffness of a Finetly Deformed 3-D Beam and its use in the Analysis of Space Frames".
Computers and Structures, Vol 24, N° 2, pp 253-273, 1986.
- [25] H.M. Attard and I.J. Somerville
"Nonlinear Analysis of Thin Walled Open-Beams".
Computers and Strucutres, Vol 25, N° 3, pp 437-445, 1987.
- [26] R. Sziland
"An Energy Balancing Strategy for Solution of Combined Geometrical and Material non Linearity Problems".
Computers and Structures, Vol 23, N° 2, pp 147-163, 1986.
- [27] S. Kitipornchai and S.L. Chan
" Nonlinear Finite Element Analysis of Angle and tee Beam-Columns".
Jour. Struc. Engng., Vol 118, N° 4, pp721-739, April 1987.
- [28] V. de ville de Goyet
" Etude du Comportement à la Ruine des Structures Spatiales Composées de Poutres à Section non Symetrique".
Construction Metalique, N° 4, pp 41-56, 1987.
- [29] C. Truesdell
" The Element of Continuum Mechanics".
New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1965.
- [30] L.E. Malvern
" Introduction to the mechanics of a continious medium".
Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1969)
- [31] K.J. Bathe
" Finite Element Procedures in Engineering Analysis".
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ(1982).
- [32] AEK. Chelghoum
"Dynamics of structures including fluid interaction ".
Thesis submitted for degree of Doctor of Philosophy in the Faculty of Engineering of the University of London, 1986.
- [33] K. Washizu
" Variational Methods in Elasticity and Plasticity".
Third Edition, Pergamon press, 1982.
- [34] S.P. Timoshenko and J.M. Gere
"Theory of elastic stability".
2nd ed. McGraw-Hill Book Corp, Inc, New York, N.Y, 1961.

- [35] V.Z. Vlasov
"Thin Walled Elastic beams".
2nd ed. National Science Foundation, Washington, D.C, 1961.
- [36] P. Waldron
"Sectorial properties of straight thin-walled beams".
Computers and Structures, Vol 24, N° 1, pp 147-156, 1986.
- [37] Johnson
"Engineering plasticity".
John Wiley, New-York 1988.
- [38] V. Feodossiev
" Résistance des matériaux".
3rd édition, Edition Mir Moscou, 1976.
- [39] S. Rajasekaran et D.W. Murray
" Finite Element Solution Inelastic Beam Equations".
Jour. Struc. Div., ASCE, Vol 99, pp1025-1041, June 1973.
- [40] S. Rajasekaran
" Finite Element Analysis of Thin-walled Members of Open Section".
Structural Engineering Report N° .34, Departement of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, September 1971.
- [41] M. Epstein, D. Nixon and D.W. Murray
" Large Displacement Inelastic Analysis of Beam-Columns".
Jour. Struc. Div., ASCE, Vol 104, pp841-853, 1978.
- [42] T.Y. Yang and S. Saigal
" A Simple Element for Static and Dynamic Response of Beams with Material and Geometric non Linearities".
Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol 20, pp851-867, 1984.
- [43] A.F. Saleeb and W.F. Chen
" Elastic-Plastic Large Displacement Analysis of Pipes".
J. Struc. Div., ASCE, Vol 107, N° ST4, pp605-626, April 1981.
- [44] S.L. Chan and S. Kitipornchai
" Inelastic Post-Buckling Behavior of Tubular Struts"
J. Struc. Engrg., ASCE, Vol 114, N° 5, pp1091-1105, May 1988.
- [45] S. Kitipornchai, F.G.A. Al-Bermani, S.L. Chan
" Geometric and Material Nonlinear Analysis of Structures Comprising Rectangular Hollow Sections".
Engrg, Struct, Vol10, pp13-23, 1988.
- [46] S. Kitipornchai, F.G.A. Al-Bermani, S.L. Chan
" Elasto-Plastic Finite Element Models for Angle Steel Frames".
Jou. Struct. Engrg, ASCE, Vol 116, N° 10, pp2567-2581, 1990.

- [47] N.C. Negan
"Yielding in Framed Structures Under Dynamic Loads".
Jou. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol 96, N° 5, pp687-709, 1970.
- [48] F.L. Porter and G.H. Powell
" Static and Dynamic Analysis of Inelastic Frames Structures".
Dept. No, EERC71-3, Earthquake Engng. Res. Center, University of California,
Berkeley, CA, 1971.
- [49] J.G. Oribson, W. McGuire and J.F. Abel
" Yield Surface Applications in Nonlinear Steel Frames Analysis".
Compt. Meth. App. Mech. Engng., Vol 33, pp557-573, 1982.
- [50] Y. Ueda and P. Yao
" The Plastic Mode Method: a new Method of Plastic Analysis".
Compt. Meth. App. Mech. Engng, Vol 34, pp1089-1104, 1982.
- [51] F.G.A. Al-Bermani and S.Kitipornchai
" Elasto-Plastic Large Deformation Analysis of Thin-walled Structures".
Engng. Struct. Vol 12, pp28-36, 1990.
- [52] D.R.J. Owen and E. Hinton
" Finite Element in Plasticity Theory and Practice".
Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.
- [53] W. Murray (ed)
" Numerical Methods for Unconstrained Optimization".
Academie Press, New York, 1972.
- [54] O.C Ziewkiewicz et R.L. Taylor
" The Finite Element Method".
Fourth Edition, Mc Graw Hill, 1991.
- [55] Jr. Denis
" A Brief Survey of Convergence Results For Quasi-Newton Method".
SIAM-AMS proceeding, Vol 9, pp185-200, 1976.
- [56] H. Mathies and G. Strang
" The Solution of Nonlinear Finite Element Equation".
Int. Jou. Numer. Meth. Engng., Vol 14, pp1613-1626, 1976.
- [57] J.L. Batoz and G. Dhatt
" Incremental Displacement Algorithm for Nonlinear Problems".
Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol14, pp1262-1267, 1979.
- [58] O.C. Ziewkiewicz
" Incremental Displacement in Nonlinear Analysis".
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol 3, pp587-588, 1971.

[59] P. Sharifi

" Nonlinear Analysis of Sandwich Structures".

Dissertation presented to the Structural Engineering and Structural Mechanics Department. University of California at Berkeley, Calif, in oct 1970, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

[60] P. Sharifi AND E.P. Popov

" Nonlinear Buckling Analysis of Sandwich Arches".

Jou. Engng. Mech. Div., Vol 97, N° 5, pp1397-1411, 1971.

[61] E. Ricks

"The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability".

J. Appl. Mech., Vol 39, pp1060-1066, 1972.

[62] G.A Wempner

" Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids".

Int. Jou. Solids Struct., Vol 7, pp1581-1599, 1971.

[63] M.A Crisfield

"A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through".

Computers and Structures, Vol 13, pp55-62, 1981.

[64] W.R Forde et S.F. Stiemer

" Improved Arclength Orthogonality Method for Nonlinear Finite Element Analysis".

Computers and Structures, Vol 27, N° 5, pp625-630, 1987.

[65] P. Jeusette, G. Laschet and S. Idelsohn

" An Effective Automatic Incremental/Iterative Method for Static Nonlinear Structural Analysis".

Computers And Structures, Vol 32, N° 1, pp125-135, 1989.

[66] K.H. Schweizerhof and P. Wriggers

" Consistant Linearization for Path Following Methods in Nonlinear Finite Element".

Compt. Meth. Appl. Meth. Engng., pp261-279. 1986.

[67] P. X. Bellini and A. Chulya

" An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear finite Element Equations".

Computers and Structures, Vol 26, N° 112, pp99-110, 1987.

[68] C. Park

" A Family of Solution Algorithms for Nonlinear Structural Analysis Based on Relaxation Equations".

Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol 18, pp1337-1347, 1982.

[69] K.J. Bathe AND E.N Dvorkin

" On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations".

Computers and Structures, Vol 17, N° 5-6, pp817-879, 1983.

[70] P.G. Duxbury, M.A Crisfield and W. Hunt

"Benchtests for Geometric Nonlinearity".

Computers and Structures, Vol 33, N° 1, pp21-29, 1989.

- [71] J.G. Teng and J.M. Rotter
" Elastic-Plastic Large Deflection Analysis of Axisymmetric Shells".
Computers and Structures, Vol 31, N° 2, pp211-233, 1989.
- [72] E. Ramm
" Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points".
In Non Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (Edited W. Wunderlich, E. Stein, and K.J. Bathe), pp63-89, Springer, New-York 1981.
- [73] E. Ricks
" Progress in Collapse Analysis".
J. Pressure Vessel Tech., Vol 109, N° 1, pp33-41, 1987.
- [74] R. Barsoum and R.H. Gallagher
" Finite Element Analysis of Torsional and Flexural Stability Problems".
Int. Jou. Num. Meth. Engng., Vol 2, N° 3, 1970, pp335-352.
- [75] G. Powell and R. Kligner
" Elastic Lateral Buckling of Steel Beams".
Jou. Struc. Div., ASCE, Vol 96, N° 9, pp1919-1932, SEPT. 1970.
- [76] C. Mei
" Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Section Using The Finite Element Method".
Int. Jou. Mech. Sci., Vol 12, pp983-891, 1970.
- [77] D. Krajcinovic
" A Consistent Discrete Elements Technique for Thin-Walled Assemblages".
Int. Jou. Solids. Struc., Vol 5, pp639-662, 1969.
- [78] C. Mei
" Reply to Krajcinovic's Discussion".
Int. Jou. Mech. Scie., Vol 13, pp739-740, 1971.
- [79] A. Pittalga
" Recent Developpements in the Theory of Thin-Walled Beams.
Computers and Structures., Vol 9, pp 69-79, 1978.
- [80] R. Adman
" Analyse des Ossatures en Phase Elasto-Plastique au II^{eme} Ordre par Rigidites Sécantes".
Thèse de Magister, Institut de Génie-Civil, Uni. Scie. Téc. Houari Boumediene, 1988.
- [81] J.M Gere and Weaver
" Analysis of Framed Structure".
Van Nostrand Reinhold, New-York: 1965
- [82] P. Vacharajittiphan and N.S. Trahair
"Warping and Distortion of I-Section joints".
J. Struct. Div., ASCE, Vol 100, N° 3, pp547-560, 1974.

[83] P.W. Sharman

"Analysis of Structures with Thin-Walled Open Sections".
Int. J. Mech. Sci., Vol 27, N° 10, pp655-665, 1985.

[84] P.J.B. Morrell

"The Influence of Joint Detail on the Torsional Behaviour of Thin-Walled Structures Having an Axial Discontinuity".
Proc. Int. Conf. Thin-Walled Struc. Univ of StrathClyde 1979.

[85] G. Dhatt et Touzout

"Une Présentation de la Méthodes des Eléments Finis".
Edition Maloine, 2^{ème} édition, Paris 1984.

[86] E. Ramm

"A Plate/Shell Element for Large Deflection and Rotations".
Formulation and Computational Algorithms in Finite Element Analysis. K.J.Bathe, J.T. Oden and W.Wunderlich, Eds. MIT Press, Cambridge, Mass.

[87] F.G.A Al-Bermani AND S. Kitipornchai

"Non Linear Analysis of Thin-Walled Structures Using Least Element/Member".
Jou. Struct. Engng., ASCE, Vol 16, N° 1, pp215-235, 1990.

[88] F.W. Williams

"An Approach to the Nonlinear Behaviour of a Rigid Jointed Plane Framework With Finite Deflections".
Qua. J. Mech. Appl. Math., Vol 17, pp451-469, 1964.

[89] R.D. Wood and O.C. Zienkiewicz

"Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells".
Computers and Structures, Vol 7, pp725-735, 1977.

[90] M. Papadrakakis AND P. Ghionis

"Conjugate Gradient Algorithm in Nonlinear Structural Analysis Problems".
Compt. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol 59, PP11-27, 1986.

[91] C. Oran and A. Kassimali

"Large deformation of Frames Structures Under Static and Dynamic Loads".
Computers And Structures, Vol 6, pp539-547, 1976.

[92] M. Papadrakakis

"Post-buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Iteration Methods".
Computers and Structures, Vol 14, pp393-402, 1981.

[93] J.L. Meek and H.S. Tan

"Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique".
Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol 47, pp261-282, 1984.

[94] S.L. Lee, F.S. Manuel and E.C. Rossow
"Large Deflections and Stability of Elastic Frames".
J. Engrg. Mech. Div., ASCE, pp521-547, 1968.

[95] H.P. Griggs
"Experimental Study of Instability in Elements of Shallow Space Frames".
Research Report, Dept of Civil Engineering, MIT, Cambridge, MA. 1966.

[96] K.J. Bathe and S. Boulourchi
"A Geometric and Material non Linear Plate and Shell Element".
Computers and Structures, Vol 11, pp23-48, 1980.

[97] M. Kani and R.E. McConnel
"A Simple and Efficient Beam Element for Combined Nonlinear Analysis of Frame
Work".
Computers and Structures, Vol 25, N=3, pp457-462, 1987.