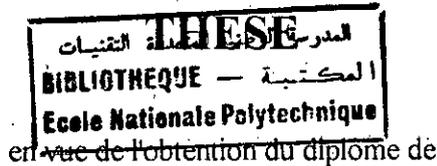


MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE



MAGISTER EN AUTOMATIQUE

Présentée par

Abdelkrim MOUSSAOUI

Ingénieur d'Etat en Automatique de l'Université de Annaba

**ANALYSE ET REDUCTION OPTIMALE DE LA
SENSIBILITE D'UNE COMMANDE PRE-INFORMEE:
APPLICATION A UN SYSTEME DE SUSPENSION
ACTIVE POUR VEHICULES**

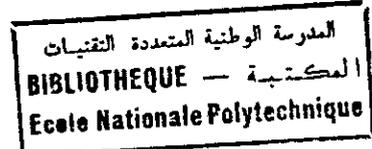
Soutenue publiquement le **Mardi 17 Janvier 1995** devant la commission d'examen:

MM. **B. DERRAS** ----- Président
N. LOUAM ----- Rapporteur
M.S. BOUCHERIT ----- Examineur
F. BOUDJEMA ----- Examineur
M.C. SOUAMI ----- Examineur
R. ILLOUL ----- Invité

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A MA MERE
A MON PERE
A MA FAMILLE

AVANT-PROPOS



Le travail présenté dans ce mémoire est effectué au laboratoire d'Automatique du département de Génie Electrique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

Je tiens à remercier Monsieur N. LOUAM, Maitre de Conférence au département d'Electronique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, qui a assuré la direction scientifique de mes travaux, pour ses critiques et ses conseils.

Je tiens à exprimer ma vive gratitude à Monsieur B. DERRAS, Maitre de Conférence au département d'Electronique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury de thèse.

Que Messieurs M.S. BOUCHERIT et F. BOUDJEMA Chargés de Cours au département de Génie Electrique de l'ENP et M.C. SOUAMI Maître Assistant au département de Génie Electrique de l'ENP, veuillent bien trouver ici, l'assurance de ma sincère reconnaissance de n'avoir ménagé aucun effort pour m'aider et d'avoir accepté de faire partie du jury.

Ma reconnaissance va également à Monsieur R. ILLOUL, chargé de cours à l'ENP pour ses critiques et pour sa présence parmi les membres de jury en tant qu'invité.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à mes collègues de l'INIM, de l'INMC et de l'INHC ainsi qu'à mes amis A. BOUTTABA, M. LOUDINI, A. SMASSEL, F. KHENE, K. MESSADEK, N. MOKHTARI, M. BOUDOUR, A. LAIFA et B. FIÁLA pour leurs encouragements et l'aide constante et amicale qu'ils m'ont apportée.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Page

NOTATIONS ET SYMBOLES

Chapitre 0	INTRODUCTION GENERALE	2
Chapitre 1	FORMULATION DU PROBLEME DE LA SENSIBILITE DE LA COMMANDE PRE-INFORMEE	
1.1	FORMULATION DU PROBLEME STANDARD DE POURSUITE	6
1.2	COMMANDE PRE-INFORMEE CONTINUE	8
1.2.1	Commande pré-informée à horizon infini	8
1.2.2	Commande pré-informée à horizon fini	10
1.3	CONCLUSION	11
Chapitre 2	CONCEPTS DE BASE DE L'ANALYSE DE SENSIBILITE	
2.1	DEFINITIONS DES DIFFERENTS TYPES DE FONCTIONS DE SENSIBILITE	14
2.1.1	Fonction de sensibilité du 1 ^{er} ordre	14
2.1.2	Fonction de sensibilité du 2 ^{ème} ordre	15
2.1.3	Fonction de pourcentage de sensibilité du 1 ^{er} ordre	16
2.1.4	Fonction de sensibilité logarithmique du 1 ^{er} ordre	16
2.1.5	Mesure générale de sensibilité	17

2.2	ELEMENTS THEORIQUES DE L'ANALYSE DE SENSIBILITE	17
2.2.1	Analyse de la sensibilité dans le domaine temporel	17
2.2.1.a	Cas non linéaire	17
2.2.1.b	Cas linéaire	19
2.2.2	Analyse de la sensibilité dans le domaine fréquentiel	20
2.2.3	Analyse de la sensibilité des systèmes discrets	21
2.3	CONCLUSION	23
Chapitre 3	ANALYSE ET REDUCTION DE LA SENSIBILITE DE LA COMMANDE PRE-INFORMEE	
3.1	FORMULATION DU PROBLEME	25
3.2	ELABORATION DU MODELE DE SENSIBILITE	26
3.3	DETERMINATION DU CRITERE DE SENSIBILITE	27
3.4	REFORMULATION DU PROBLEME	28
3.5	ELABORATION DE LA SOLUTION OPTIMALE	29
3.6	CONCLUSION	34
Chapitre 4	FORMULATION DU PROBLEME DU VEHICULE	
4.1	MODELISATION DU SYSTEME	37
4.2	CRITERE DE PERFORMANCE	43
4.2.1	Sélection des facteurs de pondération relatifs au critère de performance	45
4.3	ELABORATION DU MODELE DE SENSIBILITE	46
4.4	DETERMINATION DU CRITERE DE SENSIBILITE	47
4.4.1	Sélection des facteurs de pondération relatifs au critère de sensibilité	49
4.5	FORMULATION DU PROBLEME DU VEHICULE	49
4.6	CONCLUSION	51

Chapitre 5	SIMULATION DES RESULTATS DE L'APPLICATION PRATIQUE	
5.1	SOLUTION AU PROBLEME DU VEHICULE	53
5.2	ANALYSE DES RESULTATS DE SIMULATION	54
5.2.1	Evaluation du critère global	54
5.2.2	Réponses verticales des essieux et du châssis	59
5.2.2.a	Utilisation de la fonction de sensibilité standard du 1 ^{er} ordre	60
5.2.2.b	Utilisation de la fonction de pourcentage de sensibilité du 1 ^{er} ordre	62
5.2.2.c	Mesure générale de sensibilité	65
5.2.3	Effet de la variation de la masse du (châssis/véhicule) et des matrices de pondérations du critère de sensibilité	67
5.2.4	Association d'une commande intégrale au problème du véhicule	70
5.3	CONCLUSION	78
Chapitre 6	CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	81

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

NOTATIONS ET SYMBOLES

NOTATIONS ET SYMBOLES

La liste et la description des symboles utilisés à travers le présent travail est donnée ci-dessous. Sachant que la description d'autres symboles est donnée explicitement dans le texte.

Symboles	Description
α	Paramètre du système.
A	Matrice d'évolution du système nominal.
A_s	Matrice d'évolution du système augmenté.
A_{sc}	Matrice d'évolution en boucle fermée du système augmenté.
B	Matrice d'entrée du système nominal.
B_s	Matrice d'entrée du système augmenté.
C	Matrice de sortie du système nominal.
col	Vecteur colonne.
D	Matrice des coefficients de perturbation du système nominal.
D_s	Matrice des coefficients de perturbation du système augmenté.
e	Opérateur exponentiel.
I_m	Matrice identité de dimension (mxm).
J	Moment d'inertie du châssis du véhicule.
h_1, h_3	Coefficients de raideurs des pneus avant et arrière du véhicule.
M	Masse du châssis du véhicule.
M_1, M_3	Masses des essieux avant et arrière du véhicule.

Q, R	Matrices de pondération relatives au critère de performance.
Q_s, R_s	Matrices de pondération relatives au critère de sensibilité.
\bar{Q}, \bar{R}	Matrices de pondération relatives au critère global.
t	Variable du temps.
t_f	Temps final de contrôle.
T_k	Période d'échantillonnage.
u	Vecteur de commande du système nominal.
u_s	Vecteur de commande du système augmenté.
w	Perturbation extérieure.
x	Variable d'état du système nominal.
X_s	Variable d'état du système augmenté.
y	Variable de sortie du système nominal.
Z	Rebondissement du châssis du véhicule.
β	Angle de tangage du châssis du véhicule.
η	Trajectoire de référence dans le problème initial de poursuite.
Γ	Trajectoire de référence dans le problème de poursuite modifié.
Φ	Force généralisée.
Π	Critère de performance.
Π_s	Critère de sensibilité.
$\bar{\Pi}$	Critère global.
τ	Temps de pré-information.
ξ	Variable d'intégration.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE 0

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Dans la commande des systèmes réels, les perturbations extérieures et les variations des paramètres des systèmes sont souvent présentes.

Ainsi, les stratégies de commande sont toujours élaborées afin de rendre le système global sensible aux signaux de commande mais surtout insensible aux perturbations extérieures et aux variations paramétriques.

En général, les structures de commande qui sont conçues seulement avec des boucles de contre-réaction "feedback", peuvent à la limite faire face aux effets des variations paramétriques et satisfaire les exigences de stabilité. Cependant en réalité, souvent les schémas de commande incluent aussi des boucles d'anticipation "feedforward", pour prendre en charge les effets des entrées exogènes [Friedland, 87][Anderson and Moore, 71] [Anderson and Moore, 89][Kuo,91].

Parmi les structures de commande qui utilisent explicitement l'action des boucles d'anticipation, on trouve entre autre la commande avec poursuite d'un modèle de référence et en particulier la commande pré-informée ou " Preview control " [Jezequel, 92][Louam, 94]. Cette dernière dérive à partir du problème standard de poursuite.

Pour faire face aux problèmes de stabilité, de robustesse et de sensibilité aux variations paramétriques, elle compte essentiellement sur ses gains de feedback qui sont conçus particulièrement constants pour n'importe quel horizon de pré-information ou "preview".

Par ailleurs, c'est cette dernière caractéristique qui rend la commande pré-informée essentiellement différente de la commande adaptative ou encore la commande prédictive [Clarke, 87].

Avec les gains de boucle de retour figés, la loi de commande pré-informée suppose aussi que les paramètres du système ne varient pas pour pouvoir assurer une poursuite correcte et fiable des cibles fuyantes. Ces derniers peuvent être soumis à des variations à cause du changement des conditions de fonctionnement (vieillesse, usure ou dégradation du système).

De même, il est connu en général qu'un système incorporant une action d'anticipation est susceptible à une variation de ses paramètres du fait que celle-ci est appliquée à l'extérieur de la boucle de retour [Kuo, 91]. Par conséquent, la conception d'une telle stratégie de commande ne peut être complète que lorsqu'une analyse approfondie de la sensibilité du système, par rapport à la variation des paramètres, est considérée.

Dans ses premiers développements, l'analyse de la sensibilité fut l'objet surtout d'applications théoriques, notamment, dans la recherche de l'effet de la variation des paramètres sur la solution d'un système d'équations différentielles [Nalecz, 89].

La sensibilité par rapport à la variation des paramètres d'un système physique a été introduite pour la première fois dans [Bode, 45]. Et avec le développement de la théorie de la commande moderne ainsi que ses applications, l'analyse de la sensibilité a commencé à être prise en considération lors de la conception des systèmes de commande [Tomovic, 63][Frank, 78][Bryton, 84].

En effet, l'analyse de la sensibilité peut être examinée soit dans le domaine fréquentiel [Cruz, 64][Kuo, 91], soit dans le domaine temporel [Sage, 68][Nalecz, 89], ou dans un contexte d'optimisation [Siljak et al, 65] [Sage, 69] [Fleming, 73] [Graupe, 74] [Fleming, 77] [Gopal, 84].

C'est dans ce dernier contexte que nous envisageons d'entreprendre notre travail qui consiste à mettre en oeuvre une approche unifiée et optimale d'analyse et éventuellement de réduction de la sensibilité du contrôleur pré-informé en présence de variations paramétriques.

Cette nouvelle approche est appliquée sur un système de suspension active pour les véhicules [Bender, 68][Tomizuka, 76] [Tompson, 80][Kawagoe, 85][Louam, 90].

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres.

Le but du premier chapitre est la formulation mathématique du problème de la sensibilité de la commande pré-informée. Le deuxième chapitre regroupe un ensemble de définitions et quelques éléments théoriques concernant l'analyse de la sensibilité aux variations paramétriques.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse et la réduction de la sensibilité du contrôleur pré-informé. Une formulation mathématique unifiée est donnée pour la résolution simultanée du double problème de la synthèse du contrôleur pré-informé optimal et la réduction optimale de la sensibilité par rapport aux variations paramétriques.

Le quatrième chapitre est consacré à la description et la modélisation du système physique sur lequel les résultats théoriques développés au chapitre 3 seront appliqués. Pour ce fait, le problème relatif à l'application considérée est formulé sous une forme similaire à la formulation théorique donnée au chapitre 3.

La solution au problème posé au chapitre 4 est élaborée au cinquième chapitre à travers une étude par simulation. Le dernier chapitre contient nos conclusions et nos recommandations pour continuer d'effectuer éventuellement des travaux dans le même axe de recherche.

CHAPITRE 1

**FORMULATION DU PROBLEME DE LA
SENSIBILITE DE LA COMMANDE
PRE-INFORMEE**

**FORMULATION DU PROBLEME DE LA SENSIBILITE
DE LA COMMANDE PRE-INFORMEE**

Dans le présent chapitre, le problème standard de poursuite quadratique optimale est considéré. Dans la section 1.2, la technique d'optimisation au sens "overtaking" [Louam, 92] est utilisée pour résoudre le problème de poursuite optimale, quand le temps final de contrôle t_f est infini. Les principales conclusions de ce chapitre sont résumées dans la section 1.3.

1.1. FORMULATION DU PROBLEME STANDARD DE POURSUITE

Considérant un problème standard de poursuite quadratique optimale défini par:

a) les équations différentielles linéaires suivantes:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + D w(t), x(0) = 0, \quad (1.1)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (1.2)$$

b) le critère de performance quadratique:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [u^T(t) R u(t) + (x(t) - \eta(t))^T Q (x(t) - \eta(t))] dt \quad (1.3)$$

où

x est un vecteur d'état de dimension n ,

u est un vecteur de commande de dimension m ,

w est un vecteur des perturbations extérieures de dimension p ,

A représente la matrice d'évolution du système, $(n \times n)$,

B est la matrice associée au vecteur de commande, $(n \times m)$,

D est la matrice associée aux perturbation extérieures, $(n \times p)$.

Dans (1.3), T symbolise la transposée d'un vecteur (matrice) et $\eta(t)$ représente la trajectoire à poursuivre qui est supposée connue.

Aussi, il est supposé que les matrices R et Q sont constantes et, respectivement, définie positive et définie non négative.

Si l'intervalle de temps $[0, t_f]$ est fini, c-à-d, t_f est spécifié et si le système est asymptotiquement stable ou bien il est à la fois commandable et observable, il est fort établi dans [Athans and Falb, 66] qu'une solution unique, au problème de poursuite posé, existe et le critère de performance (1.3) a une valeur finie.

Cependant, quand t_f tend vers l'infini, il est clair que le critère (1.3) n'aura jamais de valeur finie et ce quelque soit le choix de la commande $u(t)$.

Par conséquent, il ne sera pas possible, comme dans le cas classique, de pouvoir identifier la commande optimale $u(t)$, seulement à travers l'évaluation du critère de performance (1.3).

Une approche nouvelle du problème a été récemment envisagée dans la littérature [Arstein and Leizarowitz, 85][Louam, 94].

Dans cette approche on recourt à l'identification de la commande optimale $u(t)$ non pas à travers la valeur minimale du critère de performance (toujours infini) mais plutôt à travers l'allure de divergence minimale de ce dernier.

Cette approche dénommée méthode de dépassement ou "overtaking" en anglais [Leizarowitz, 86][Louam, 92] a permis en particulier l'élaboration de la solution optimale au problème de poursuite défini par (1.1), (1.2) et (1.3). Celle-ci est développée dans la section suivante.

1.2. COMMANDE PRE-INFORMEE CONTINUE

1.2.1. Commande pré-informée à horizon infini

La solution au problème défini par (1.1) et (1.3) est donnée, d'après [Louam, 90], par:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T[K x(t) - g(t)] \quad (1.4)$$

où K est la matrice constante, symétrique définie positive, solution de l'équation algébrique de Riccati en régime établi:

$$0 = KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + Q, \quad \dot{K}(\infty) = 0 \quad (1.5)$$

et le vecteur auxiliaire $g(t)$ est la fonction d'anticipation donnée par:

$$g(t) = \int_t^{\infty} e^{(\xi-t)A_C^T} M(\xi) d\xi, \quad t \geq 0 \quad (1.6)$$

où la matrice d'évolution du système en boucle fermée A_C est donnée par:

$$A_C = A - BR^{-1}B^TK \quad (1.7)$$

et

$$M(t) = Q \eta(t) - K D w(t) \quad (1.8)$$

Finalement, la trajectoire d'état optimale au sens "overtaking", en réponse à (1.4), est donnée par:

$$\dot{x}^*(t) = A_C x^*(t) + B R^{-1}B^Tg(t) + D w(t). \quad (1.9)$$

Il est à noter au passage que cette solution a une caractéristique particulière exprimée par (1.6), et qui consiste à connaître au préalable toutes les données futures $M(t)$ liées à la trajectoire à poursuivre pour pouvoir calculer $g(t)$.

Le vecteur d'anticipation $g(t)$ peut être calculé, depuis sa valeur nulle à l'instant final jusqu'à l'instant initial t , en considérant l'équation:

$$\dot{g}(t) = A_c^T g(t) + M(t) \quad (1.10)$$

avec la condition initiale:

$$g(0) = \int_0^{\infty} e^{A_c^T \xi} M(\xi) d\xi \quad (1.11)$$

Bien que la forme de l'expression (1.4) est très connue dans la résolution des problèmes quadratiques linéaires de poursuite [Athans and Falb, 66], il n'en demeure pas moins qu'ici elle ressort avec une différence remarquable caractérisée, d'après [Louam, 94], par:

- Une matrice K constante, du fait que t_f tend vers l'infini,
- Un vecteur d'anticipation restant toujours borné, dû au choix particulier de la condition initiale (1.11).

Nous remarquons que le calcul de $g(t)$ dans (1.6) exige la connaissance au préalable des informations déterministes contenues dans le vecteur $w(t)$ depuis l'instant t jusqu'à l'infini. Ceci conduit au concept de "Preview" [Bender, 68] ou de pré-information en français [Jezequel, 92].

Il est évident que cette pré-information est requise théoriquement sur un horizon infini. C'est une exigence de la solution optimale [Louam, 90].

Cependant, cette solution n'est pas réaliste, du fait que la trajectoire à poursuivre ne peut être connue sur un horizon infini.

En effet, il est clair qu'en pratique dans certaines situations de poursuite de trajectoires, une décision adéquate ne nécessite pas forcément des données sur un horizon infini.

Aussi, il est établi [Leizarowitz, 86][Louam, 94] que souvent en pratique, le calcul de $g(t)$ ne s'effectue réellement que pour un horizon de pré-information fini, c-à-d, sur $[t, t+\tau]$ avec τ fixé au lieu de $[t, \infty)$. Ceci conduit à la notion de la commande pré-informée à horizon fini [Louam, 94].

1.2.2. Commande pré-informée à horizon fini

Dans cette section, nous avons à résoudre le problème de poursuite à horizon infini donné par (1.1) et (1.3). Mais au lieu que toutes les données futures représentant la perturbation extérieure $w(t)$ soient connues au préalable, comme il a été le cas pour le schéma de commande pré-informée (1.4) à (1.6), seulement, une information limitée sur la perturbation extérieure est maintenant considérée disponible, soit sur $[t, t + \tau]$. C'est le problème de la commande pré-informée à horizon fini, pour lequel il existe une solution.

En effet, il est montré dans [Louam et al, 92] qu'avec la condition de commandabilité de la paire $[A, B]$ et d'observabilité de la paire $[A, Q]$, si on considère un temps de pré-information fini, défini par une fenêtre de durée τ , alors on peut générer une solution sous optimale, comme suit:

$$u_{\tau}(t) = -R^{-1}B^T[K x_{\tau}(t) - g_{\tau}(t)] \quad (1.12)$$

où la fonction auxiliaire $g_{\tau}(t)$ est donnée par:

$$g_{\tau}(t) = \int_t^{t+\tau} e^{(\xi-t)A_C^T} M(\xi) d\xi, \quad t \geq 0 \quad (1.13)$$

et la matrice symétrique définie positive K est la solution de (1.5).

La trajectoire d'état sous-optimale au sens "overtaking", en réponse à la loi de commande (1.12), est donnée par:

$$\dot{x}_{\tau}(t) = A_C x_{\tau}(t) + B R^{-1}B^T g_{\tau}(t) + D w(t). \quad (1.14)$$

Notons que le terme de forçage $Dw(t)$ dans (1.09) et (1.14) n'a pas d'influence sur la quantité:

$$| x^*(t) - x_{\tau}(t) | \quad (1.15)$$

Donc, la trajectoire d'état approximative (1.14) converge vers celle donnée par (1.9) pour un temps de pré-information suffisamment grand. Ce dernier ne peut être choisi qu'empiriquement [Louam et al, 92]. Cependant, une approximation raisonnable de celui-ci peut être donnée par cinq fois la constante de temps associée au pôle dominant du système en boucle fermée [Anderson and Moore, 89].

Il faut signaler que dans les résultats de la commande pré-informée à horizon fini, il est supposé que la matrice A_c de la boucle fermée reste constante comme dans le cas de l'horizon infini car K est supposée encore calculée à partir de (1.5).

Ainsi, avec cette approximation particulière, la robustesse et la fiabilité des résultats de la commande pré-informée à horizon fini (en particulier) ne sont pas a priori garantis.

Certainement elles le seront encore moins si certaines variations paramétriques sont envisageables et ce à cause du changement des conditions de fonctionnement (par exemple l'usure, la dégradation, le vieillissement, l'échauffement, etc...).

En vue d'apporter quelques éléments de réponses à ce problème particulier, nous proposons dans le présent travail une étude détaillée d'un modèle optimal d'analyse de sensibilité pour la commande pré-informée. Les résultats de cette étude seront par la suite appliqués, dans le cadre d'une simulation sur ordinateur, au cas pratique lié à la conception et la commande d'une suspension active d'un véhicule mobile.

1.3. CONCLUSION

Une solution au problème de poursuite optimale à horizon infini, compliqué par la présence d'une perturbation extérieure à l'entrée du système, est présentée dans le présent chapitre. Elle est traduite par une formulation mathématique claire.

Cette loi de commande, donnée sous le nom de commande pré-informée, est en particulier caractérisée par:

- Un gain de contre réaction d'état constant.
- Un vecteur d'anticipation $g(t)$ restant toujours borné sur $[0, \infty)$.
- Une trajectoire du vecteur d'état stable tout le long du temps de contrôle,

Cette loi de commande n'est considérée optimale que lorsque le temps de pré-information est infini ou lorsque les paramètres du système sont supposés être fixes. Une analyse de sensibilité, dans un contexte unifié et optimal, de cette loi de commande est développée dans le chapitre 3.

CHAPITRE 2

CONCEPTS DE BASE DE L'ANALYSE

DE LA SENSIBILITE

CONCEPTS DE BASE DE L'ANALYSE DE LA SENSIBILITE

Dans la conception d'une stratégie de commande, l'objectif est de déterminer le régulateur qui assure au procédé régulé les performances fixées par le concepteur, conformément à un compromis entre ses exigences et les limites physiques du procédé. La synthèse du régulateur ainsi adapté au procédé est effectuée à partir d'un état paramétrique nominal du système. Une modification de cet état, non accompagnée d'une reparamétrisation du régulateur (cas d'un régulateur fixe), se traduit par une désadaptation du régulateur au procédé. Il en résulte une modification des performances de la commande, traduisant ainsi leur "sensibilité" à un écart paramétrique du procédé. Par conséquent, la connaissance de l'influence de la variation des paramètres décrivant le procédé sur ses performances peut être utile pour optimiser la conception du système. De plus, cette analyse permet de faire un choix judicieux des paramètres du procédé.

Dans la section suivante, on donne les définitions des différents types de fonctions de sensibilité. Après cela, quelques éléments théoriques relatifs à l'analyse de la sensibilité sont développés.

2.1. DEFINITIONS DES DIFFERENTS TYPES DE FONCTIONS DE SENSIBILITE

Soit un paramètre α dont la valeur nominale est désignée en toute généralité par α_0 . En supposant que ce paramètre varie de manière continue, les principaux types de fonctions de sensibilité relatives à la variation de ce paramètre sont donnés comme suit.

2.1.1. Fonction de sensibilité standard du 1^{er} ordre

la fonction de sensibilité standard du 1^{er} ordre, dénotée S dans ce qui suit, représente la dérivée partielle d'une variable $V(\alpha)$ par rapport à un état paramétrique α du système au point de fonctionnement nominal α_0 .

Elle est exprimée mathématiquement, d'après [Nalecz, 89][Redfield and Karnopp, 89][Gopal et al, 84], par

$$S = \left. \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \quad (2.1)$$

Cette fonction de sensibilité est donc égale à la pente de la variable $V(\alpha)$ au point nominal α_0 .

Elle donne ainsi une information locale sur l'allure de la variable $V(\alpha)$ pour des petites variations de α autour du point de fonctionnement nominal α_0 du système.

Il faut noter que ces petites variations représentent conventionnellement une augmentation d'une unité de mesure du paramètre nominal α_0 du système [Nalecz, 89]. Par exemple, si l'unité de $V(\alpha)$ est le mètre, la fonction de sensibilité (2.1) est donnée pour une variation paramétrique d'un mètre par rapport à la valeur nominale.

Ce type de fonction de sensibilité est souvent employé pour la détermination de l'influence d'un paramètre particulier sur une variable particulière du système [Nalecz, 89]. De même, il est très utile pour la comparaison de l'influence de différents paramètres, ayant les mêmes unités de mesure, sur une variable particulière du système.

2.1.2. Fonction de sensibilité standard du 2^{ième} ordre

La fonction de sensibilité standard du 2^{ième} ordre représente la deuxième dérivée partielle d'une variable $V(\alpha)$ d'un système par rapport à un paramètre α du système au point de fonctionnement nominal α_0 .

Elle est donnée, d'après [Vanderplaats, 84], par:

$$S = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_0} \quad (2.2)$$

Elle est employée pour nous renseigner sur le taux de variation de $V(\alpha)$ par rapport à α au point nominal α_0 . Elle est souvent utilisée quand les paramètres du système sont du même ordre de grandeur, en vue de l'amélioration de l'analyse [Nalecz, 89].

2.1.3. Fonction de pourcentage de sensibilité du 1^{er} ordre

Cette fonction de sensibilité représente la variation d'une variable $V(\alpha)$ par rapport à la variation d'un paramètre α d'un certain pourcentage spécifié. Elle est donnée, d'après [Cruz and Prekins, 64] [Nalecz, 89] [Kuo, 91], par:

$$S = \frac{\partial V}{\partial \alpha} \Delta \alpha \quad (2.3)$$

où $\Delta \alpha$ dénote le pourcentage de variation de α .

Cette fonction de sensibilité ne dépend que de l'unité de la variable $V(\alpha)$, et de ce fait elle est souvent utilisée pour la comparaison de l'influence d'un ensemble de paramètres différents du système sur la variable $V(\alpha)$ [Nalecz, 89].

2.1.4. Fonction de sensibilité logarithmique du 1^{er} ordre

Elle est donnée, d'après [Nalecz, 89] [Kuo, 91], par:

$$S = \frac{\partial V(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{V(\alpha)} = \frac{\partial \ln(V(\alpha))}{\partial \ln(\alpha)} \quad (2.4)$$

où \ln dénote le logarithme népérien.

C'est une fonction de sensibilité sans dimension. Cela rend son utilisation bien appropriée pour la comparaison et la classification de l'influence des différents paramètres sur les variables du système.

Il faut cependant noter que la variation de cette fonction de sensibilité dépend, à la fois, de la réponse et de la sensibilité du système, ce qui rend quelques fois, dans le domaine temporel, l'interprétation du comportement de cette fonction de sensibilité difficile [Nalecz, 89].

De même, il faut signaler que la fonction de sensibilité logarithmique du 1^{er} ordre permet de fournir l'information sur l'influence des paramètres du système sur la valeur absolue d'une variable du système au lieu de sur sa valeur réelle [Nalecz, 89].

2.1.5. Mesure générale de sensibilité

La mesure générale de sensibilité détermine l'effet global de tous les paramètres sur une variable $V(\alpha)$ d'un système. Elle est donnée, d'après [Nalecz, 89], par:

$$G_S = \sqrt{\sum_{i=1}^l S_i^2} \quad (2.5)$$

où S_i est la fonction de sensibilité relative à la variation du $i^{\text{ème}}$ paramètre α_i et l représente le nombre de paramètres considérés.

Les types les plus utilisés pour la mesure générale de la sensibilité sont la fonction de pourcentage de sensibilité du 1^{er} ordre et la fonction de sensibilité logarithmique du 1^{er} ordre parce qu'elles possèdent des unités compatibles [Nalecz, 89].

La mesure générale de sensibilité est souvent utilisée pour l'analyse de l'effet global et simultané de la variation d'un ensemble de paramètres α_i du système.

Il faut signaler que Les paramètres α caractérisant un système de commande peuvent être par exemple des constantes de temps, des facteurs de transfert, des pulsations propres, d'amortissement dans le cas des systèmes oscillants ou de période d'échantillonnage dans le cas des systèmes discrets.

Si ces paramètres varient, ils possèdent alors une influence sur le comportement statique et dynamique du système de commande [Bühler, 84].

2.2. ELEMENTS THEORIQUES DE L'ANALYSE DE LA SENSIBILITE

2.2.1. Analyse de la sensibilité dans le domaine temporel

2.2.1.a: Cas non linéaire

Soit le modèle mathématique d'un système dynamique donné par:

$$F(\dot{x}, \ddot{x}, x, \alpha, t) = 0 \quad (2.6)$$

où α est un coefficient du système.

Pour une perturbation paramétrique $\Delta\alpha$, le système (2.6) devient:

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, \alpha + \Delta\alpha, t) = 0. \quad (2.7)$$

La fonction de sensibilité de 1^{er} ordre relative à la trajectoire d'état est donnée par:

$$S(t, \alpha_0) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{x(t, \alpha_0 + \Delta\alpha) - x(t, \alpha_0)}{\Delta\alpha} = \left. \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = \alpha_0} \quad (2.8)$$

On définit l'équation de sensibilité comme étant la dérivée partielle du premier ordre de l'équation (2.6) par rapport au paramètre α . Elle est donnée, d'après [Sage, 68], par:

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \quad (2.9)$$

En posant

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = v \quad (2.10)$$

le modèle de sensibilité peut être obtenu comme suit:

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}} \ddot{v} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{v} + \frac{\partial F}{\partial x} v = - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad (2.11)$$

Ce modèle de sensibilité est une équation différentielle linéaire dont la résolution donne la fonction de sensibilité $v(\alpha, t)$.

Sachant que cette solution nécessite la résolution simultanée du modèle du système (2.6) et du modèle de sensibilité (2.11).

2.2.1.b. Cas linéaire

Soit un système dynamique, linéaire donné par la représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \alpha) &= A(\alpha)x(t, \alpha) + B(\alpha)u(t, \alpha), & x(t_0, \alpha) &= x^0(\alpha) \\ y(t, \alpha) &= Cx(t, \alpha). \end{aligned} \quad (2.12)$$

En supposant que le système est continûment dérivable par rapport à un état paramétrique α , la fonction de sensibilité relative à la trajectoire d'état peut être obtenue comme suit:

$$\frac{\partial \dot{x}(t, \alpha)}{\partial \alpha} = A(\alpha_0) \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} + A_\alpha x(t, \alpha) + B(\alpha_0) \frac{\partial u(t, \alpha)}{\partial \alpha} + B_\alpha u(t, \alpha) \quad (2.13)$$

où

$$A_\alpha = \left. \frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}, \quad B_\alpha = \left. \frac{\partial B(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}$$

et α_0 est la valeur nominale de α .

En supposant que les conditions initiales sont nulles, la solution générale en boucle ouverte du modèle de sensibilité décrit par l'équation (2.13) est, alors, donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} &= \int_{t_0}^t \left(\exp[A(\alpha_0)(t-\tau)] \left[\frac{\partial A(\alpha)}{\partial \alpha} x(\tau, \alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial B(\alpha)}{\partial \alpha} u(\tau, \alpha) + B(\alpha_0) \frac{\partial u(\tau, \alpha)}{\partial \alpha} \right] \right) d\tau \end{aligned} \quad (2.14)$$

Il faut noter, cependant, que l'analyse de sensibilité dans le domaine temporel dépend essentiellement de la forme du signal d'entrée, ce qui peut rendre son examen parfois difficile [Nalecz, 89].

Dans ce cas, l'analyse de la sensibilité dans le domaine fréquentiel peut être plus bénéfique, puisque les fonctions de sensibilité dans le domaine fréquentiel sont définies en fonction de la structure du système et non pas en fonction du signal d'entrée.

2.2.2. Analyse de la sensibilité dans le domaine fréquentiel

La matrice de transfert en boucle ouverte du système dynamique décrit par l'équation dynamique (1.12) est donnée, d'après [Anderson and Moore, 89], par:

$$G(s, \alpha) = C[sI - A(\alpha)]^{-1}B(\alpha) \quad (2.15)$$

où C est la matrice de sortie du système, I est une matrice identité ayant la même dimension que la matrice d'évolution du système A et s est l'opérateur de Laplace.

Comme la fonction de sensibilité logarithmique du 1^{er} ordre possède des coefficients normalisés (sans unité), elle est alors la plus utilisée pour l'analyse de la sensibilité dans le domaine fréquentiel [Nalecz and Wicher, 88]. Donc, si $G_{k,l}(s, \alpha)$ représente le (k,l)^{ième} élément de la matrice de transfert (1.15), la fonction de sensibilité logarithmique du 1^{er} ordre est alors donnée par:

$$S_{k,l} = \frac{\partial G_{k,l}(s, \alpha)}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{G_{k,l}(s, \alpha)} = \frac{\partial \ln[G_{k,l}(s, \alpha)]}{\partial \ln[\alpha]} \quad (2.16)$$

où ln dénote le logarithme népérien.

Pour des considérations pratiques, il est souvent utile de déterminer les fonctions de sensibilité relatives au module et à la phase du (k,l)^{ième} élément de la matrice de transfert $G(s, \alpha)$.

Soient $|G_{k,l}|$ et $\varphi_{k,l}$ respectivement le module et la phase du (k,l)^{ième} élément de la matrice de transfert $G(s, \alpha)$.

Par conséquent les fonctions de sensibilité logarithmique du 1^{er} ordre correspondantes sont données, d'après [Nalecz, 88],

comme suit:

$$S_{k,l}^{|G_{k,l}|} = \text{Re}[S_{k,l}] \quad (2.17)$$

$$S_{k,l}^{\varphi_{k,l}} = \frac{1}{\varphi_{k,l}} \text{Im}[S_{k,l}] \quad (2.18)$$

où **Re** et **Im** dénotent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du (k,l) ^{ème} élément de la matrice de transfert $G(s,\alpha)$.

2.2.3. Analyse de la sensibilité des systèmes discrets

Les systèmes discrets sont souvent sensibles à la variation de la période d'échantillonnage [Kuo, 80][Aström et al, 89]. Par conséquent, la connaissance de la sensibilité par rapport à la période d'échantillonnage doit être très utile lorsque l'analyse ou la synthèse d'un contrôleur discret est à envisager.

Soit un système non linéaire discret donné par la représentation mathématique suivante:

$$x(k) = f [x(k-1), u(k-1), \alpha, t_{k-1}, t_k] \quad (2.19)$$

où $x(k)$ est un vecteur d'état discret de dimension n , $u(k)$ est un vecteur de commande discret de dimension m et α est un scalaire caractérisant un des paramètres du système.

La période d'échantillonnage T_k est le temps entre deux instants d'échantillonnage

$$T_k = t_{k+1} - t_k \quad (2.20)$$

Si celle-ci est constante entre deux instants d'échantillonnage, nous définissons alors la fonction de sensibilité de 1^{er} ordre par rapport à la période d'échantillonnage, d'après [Sage, 68] comme étant:

$$S_T(k) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{x[k(T+\Delta T)] - x[k(T)]}{\Delta T} \quad (2.21)$$

Cette expression nous permet de discerner le changement dans la variable d'état $x(k)$ au $k^{\text{ième}}$ instant d'échantillonnage si chaque période d'échantillonnage subit une variation ΔT .

Si le vecteur d'état $x(k)$ est une fonction continue de T , l'équation (2.21) peut être écrite alors comme suit:

$$S_T(k) = \frac{\partial x(k)}{\partial T} \quad (2.22)$$

L'équation de sensibilité discrète pour $S_T(k)$ peut être donnée, en dérivant l'équation (2.19) par rapport à T , par:

$$\frac{\partial x(k)}{\partial T} = \left[\frac{\partial f(k-1)}{\partial x(k-1)} \right] \frac{\partial x(k-1)}{\partial T} + \left[\frac{\partial f(k-1)}{\partial u(k-1)} \right] \frac{\partial u(k-1)}{\partial T} + \frac{\partial f(k-1)}{\partial T} \quad (2.23)$$

En tenant compte des équations (2.22) et (2.23), l'équation de sensibilité par rapport à la période d'échantillonnage est donnée alors par:

$$S_T(k) = \left[\frac{\partial f(k-1)}{\partial x(k-1)} \right] S_T(k-1) + \left[\frac{\partial f(k-1)}{\partial u(k-1)} \right] \frac{\partial u(k-1)}{\partial T} + \frac{\partial f(k-1)}{\partial T} \quad (2.24)$$

avec la condition initiale nulle: $S_T(0)=0$.

Si le système est linéaire, l'équation de sensibilité peut être écrite comme suit:

$$S_T(k) = A(k-1)S_T(k-1) + \frac{\partial A(k-1)}{\partial T}x(k-1) + \frac{\partial B(k-1)}{\partial T}u(k-1) + B(k-1)\frac{\partial u(k-1)}{\partial T} \quad (2.25)$$

Le vecteur de sensibilité S_T de dimension n doit avoir un ensemble de valeurs pour chaque période d'échantillonnage. La $i^{\text{ième}}$ composante de $S_T(k)$ doit indiquer l'effet de la variation dans chaque période d'échantillonnage sur la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur d'état discret $x(k)$ à l'instant d'échantillonnage k .

Pour de petites valeurs de ΔT , nous obtenons les premiers deux termes du développement en série de Taylor de l'équation du système:

$$x[k(T+\Delta T)] = x(kT) + S_T(k)\Delta T \quad (2.26)$$

Il est évident que la précision de cette approximation doit se détériorer quand la valeur de ΔT augmente [Bekey et al, 66].

De même il faut signaler que la détermination de S_T nécessite la résolution simultanée de l'équation du système et de l'équation de la sensibilité [Sage, 68].

Remarquons que les développements de la section 2.2, effectués avec la fonction de sensibilité particulière de 1^{er} ordre, peuvent être repris avec les autres types de fonctions de sensibilité, mais avec un peu plus de complexité.

2.3. CONCLUSION

Les types de fonctions de sensibilité les plus employés dans l'analyse et la synthèse des systèmes de commande ont été introduits. En particulier, on a montré comment ces fonctions peuvent être utilisées dans un développement théorique, selon que le système est linéaire ou non, linéaire ou discret et selon que le système est exprimé dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Pour les systèmes discrets, l'analyse de la sensibilité par rapport à la période d'échantillonnage est vivement recommandée.

CHAPITRE 3

ANALYSE ET REDUCTION OPTIMALE DE

LA SENSIBILITE DE LA COMMANDE

PRE-INFORMEE

ANALYSE ET REDUCTION OPTIMALE DE LA SENSIBILITE DE LA COMMANDE PRE-INFORMEE

Souvent, l'analyse de la sensibilité des systèmes dynamiques n'est entreprise qu'après la conception et l'optimisation de la structure globale du système de commande [Cruz and Perkins, 64] [Nalecz, 89][Redfield and Karnopp, 89][Kuo, 91].

Dans le présent chapitre, une approche unifiée est considérée pour la résolution du double problème d'optimisation et de la réduction optimale de la sensibilité du contrôleur pré-informé donné dans le chapitre 1. Cette approche se base sur la théorie de la commande optimale quadratique et la technique d'élaboration des modèles augmentés [Moussaoui and Louam, 94].

3.1. FORMULATION DU PROBLEME

Le problème de poursuite optimale défini dans le premier chapitre peut être formulé de la façon suivante.

Soit un système dynamique donné par:

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(\alpha)x(t, \alpha) + B(\alpha)u(t, \alpha) + D(\alpha)w(t), \quad (3.1)$$

$$y(t, \alpha) = Cx(t, \alpha). \quad (3.2)$$

dans lequel $w(t)$ est un vecteur représentant une perturbation extérieure mesurable et α est un scalaire caractérisant un des paramètres du système.

Le problème de la poursuite quadratique optimale consiste à déterminer la commande $u^*(t, \alpha)$ dans (3.1) qui minimise le critère de performance suivant:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [(x(t, \alpha) - \eta(t))^T Q (x(t, \alpha) - \eta(t)) + u^T(t, \alpha) R u(t, \alpha)] dt \quad (3.3)$$

où (T) symbolise la transposée d'un vecteur (matrice) et $\eta(t)$ représente la trajectoire à poursuivre supposée connue.

Il est à noter que pour la simplification des expressions et sans perte de généralité, le critère de performance est considéré sans coût final.

Les équations (3.1) et (3.3) représentent un problème standard de poursuite optimale quadratique compliquée par la présence du terme $D(\alpha)w(t)$ dans (3.1).

Une solution à ce problème, quand les paramètres du système sont supposés être fixes, est développée dans le chapitre 1. Une telle solution nécessite la connaissance parfaite des paramètres du système.

Cependant en pratique, il est clair que l'état du système pour lequel est calculée la loi de commande ne correspond que très rarement au véritable état paramétrique. Il y a souvent des changements dans les conditions de fonctionnement.

Nous proposons alors dans ce chapitre d'effectuer une analyse de la sensibilité du contrôleur pré-informé par rapport à la variation des paramètres du système. Pour ce fait, une reformulation du problème donné par (3.1) et (3.3) est indispensable.

En premier, il est judicieux d'élaborer le modèle de sensibilité relatif à (3.1) et de définir le critère de sensibilité relatif à (3.3) en utilisant les éléments théoriques donnés dans le chapitre 2.

3.2. ELABORATION DU MODELE DE SENSIBILITE

En supposant que le système défini dans (3.1) est soumis à une variation paramétrique $\delta\alpha$, le modèle de sensibilité correspondant est alors donné, d'après [Nalecz, 89], par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}(t, \alpha)}{\partial \alpha} &= A(\alpha_0) \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} + A_\alpha x(t, \alpha_0) + B(\alpha_0) \frac{\partial u(t, \alpha)}{\partial \alpha} \\ &+ B_\alpha u(t, \alpha_0) + D_\alpha w(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Avec

$$A_\alpha = \frac{\partial A}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad B_\alpha = \frac{\partial B}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad D_\alpha = \frac{\partial D}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}$$

où α_0 est la valeur nominale du paramètre α .

Posons

$$z(t, \alpha) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad v(t, \alpha) = \frac{\partial u(t, \alpha)}{\partial \alpha} \quad (3.6)$$

où z et v sont, respectivement, les fonctions de sensibilité relatives à la trajectoire d'état et à la commande.

En utilisant (3.6), l'équation (3.5) devient alors:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & A(\alpha_0)z(t, \alpha) + A_\alpha x(t, \alpha_0) + B(\alpha_0)v(t, \alpha) \\ & + B_\alpha u(t, \alpha_0) + D_\alpha w(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Comme la perturbation $w(t)$ est indépendante des paramètres du système, sa fonction de sensibilité est par conséquent nulle.

3.3. DETERMINATION DU CRITERE DE SENSIBILITE

En tenant compte de (3.6), le critère de sensibilité relatif au critère de performance (3.3) est défini comme suit:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [z^T(t, \alpha) Q_s z(t, \alpha) + v^T(t, \alpha) R_s v(t, \alpha)] dt, \quad (3.8)$$

où Q_s et R_s sont respectivement des matrices définie non négative et définie positive.

En se référant à (3.3), il faut signaler que

$$\frac{\partial[x(t,\alpha)-\eta(t)]}{\partial\alpha} = z(t,\alpha),$$

du fait que la trajectoire à poursuivre $\eta(t)$ est indépendante des paramètres du système.

De même, il faut noter que la réduction optimale de la sensibilité dépend essentiellement du choix de Q_s et R_s .

3.4. REFORMULATION DU PROBLEME

La reformulation du problème donné par (3.1) et (3.3), en vue de l'analyse et la réduction de la sensibilité du contrôleur pré-informé, est effectuée comme suit. On forme deux nouveaux vecteurs

$$X_s(t,\alpha) = \begin{pmatrix} x(t,\alpha) \\ \text{-----} \\ z(t,\alpha) \end{pmatrix}, \quad u_s(t,\alpha) = \begin{pmatrix} u(t,\alpha) \\ \text{-----} \\ v(t,\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

En tenant compte de (3.1), (3.7) et (3.9), le système augmenté correspondant aux nouvelles variables X_s et u_s peut être exprimé par:

$$\dot{X}_s = A_s(\alpha)X_s(t,\alpha) + B_s(\alpha)u_s(t,\alpha) + D_s(\alpha)w(t) \quad (3.10)$$

avec

$$A_s = \begin{pmatrix} A & [0] \\ A_\alpha & A \end{pmatrix}, \quad B_s = \begin{pmatrix} B & [0] \\ B_\alpha & B \end{pmatrix}, \quad D_s = \begin{pmatrix} D \\ \text{---} \\ D_\alpha \end{pmatrix}$$

où $[0]$ sont des matrices nulles de dimensions appropriées.

Pour trouver la solution optimale, la modification du critère de performance (3.3) est alors indispensable. En fait, la modification est assurée en additionnant le critère de performance (3.3) au critère de sensibilité (3.8) [Krindler, 69][Fleming, 73][Fleming, 77][Subbayyan et al, 77][Gopal et al, 84].

Cette modification permet à la fois d'optimiser la conception du contrôleur pré-informé et de minimiser sa sensibilité par rapport à des variations paramétriques.

Par conséquent, le nouveau critère de performance relatif au système (3.10) est donné par:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = & \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [(x(t,\alpha) - \eta(t))^T Q (x(t,\alpha) - \eta(t)) + u^T(t,\alpha) R u(t,\alpha) \\ & + z^T(t,\alpha) Q_s z(t,\alpha) + v^T(t,\alpha) R_s v(t,\alpha)] dt \end{aligned} \quad (3.11)$$

En fonction des nouvelles variables (3.9), l'expression (3.11) peut être donnée sous une forme compacte équivalente par:

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [(X_s(t,\alpha) - \Gamma(t))^T \bar{Q} (X_s(t,\alpha) - \Gamma(t)) + u_s^T(t,\alpha) \bar{R} u_s(t,\alpha)] dt \quad (3.12)$$

où

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} Q & [0] \\ [0] & Q_s \end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} R & [0] \\ [0] & R_s \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \eta \\ - \\ [0] \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le problème donné par (3.10) et (3.12) est exprimé sous la même forme standard que celle du problème donné par (3.1) et (3.3).

Par conséquent, la technique d'optimisation développée dans le Chapitre 1 peut lui être appliquée.

3.5. ELABORATION DE LA SOLUTION OPTIMALE

En supposant que la nouvelle paire (A_s, B_s) est commandable, la nouvelle paire (A_s, \bar{Q}) est observable et la trajectoire à poursuivre Γ est uniformément continue et bornée sur $(0, \infty)$, une solution au problème exprimé par (3.10) et (3.12) pour un temps de pré-information infini est alors donnée, conformément aux résultats du chapitre 1,

par:

$$u_s(t, \alpha) = -\bar{R}^{-1} B_s^T [K_s X_s(t, \alpha) - g_s(t, \alpha)] \quad (3.13)$$

où la matrice K_s est une matrice symétrique définie positive solution de l'équation algébrique de Riccati en régime établi:

$$0 = K_s A_s + A_s^T K_s - K_s B_s \bar{R}^{-1} B_s^T K_s + \bar{Q} \quad (3.14)$$

et le vecteur $g_s(t, \alpha)$ est la fonction d'anticipation donnée par:

$$g_s(t, \alpha) = \int_t^{\infty} e^{(\xi-t)A_{s_c}^T} M_s(\xi, \alpha) d\xi, \quad t \geq 0 \quad (3.15)$$

avec

$$A_{s_c} = A_s - B_s \bar{R}^{-1} B_s^T K_s,$$

$$M_s(t, \alpha) = \bar{Q} \Gamma(t) - K_s D_s w(t).$$

La trajectoire d'état optimale, en réponse à la loi de commande (3.13), est alors donnée par:

$$\dot{X}_s(t, \alpha) = A_{s_c} X_s(t, \alpha) + B_s \bar{R}^{-1} B_s^T g_s(t, \alpha) + D_s w(t). \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) peut être exprimée, en fonction des variables du système (3.1) ainsi que de leurs fonctions de sensibilité respectives (3.6), comme suit:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t, \alpha) \\ \text{-----} \\ \dot{z}(t, \alpha) \end{bmatrix} = A_{s_c} \begin{bmatrix} x(t, \alpha) \\ \text{-----} \\ z(t, \alpha) \end{bmatrix} + B_s \bar{R}^{-1} B_s^T \begin{bmatrix} g(t, \alpha) \\ \text{-----} \\ g_\alpha(t, \alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ \text{---} \\ D_\alpha \end{bmatrix} w(t). \quad (3.17)$$

où $g_\alpha(t, \alpha)$ est la fonction de sensibilité relative à la fonction d'anticipation $g(t, \alpha)$.

En présence de variations paramétriques, la loi de commande $u(t, \alpha)$ peut être déterminée à l'aide d'une décomposition de l'expression (3.13) comme suit:

$$\begin{bmatrix} u(t, \alpha) \\ \text{-----} \\ v(t, \alpha) \end{bmatrix} = -\bar{R}^{-1} B_s^T K_s \begin{bmatrix} x(t, \alpha) \\ \text{-----} \\ z(t, \alpha) \end{bmatrix} + \bar{R}^{-1} B_s^T \begin{bmatrix} g(t, \alpha) \\ \text{-----} \\ g_\alpha(t, \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

où la matrice K_s , solution de (3.14), peut être partitionner comme suit:

$$K_s = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

de telle sorte qu'on a:

$$\begin{bmatrix} u(t, \alpha) \\ \text{-----} \\ v(t, \alpha) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R^{-1} B^T K_{11} + R^{-1} B_\alpha^T K_{12} & R^{-1} B^T K_{12} + R^{-1} B_\alpha^T K_{22} \\ R_s^{-1} B^T K_{12} & R_s^{-1} B^T K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t, \alpha) \\ \text{-----} \\ z(t, \alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R^{-1} B^T & R^{-1} B_\alpha^T \\ [0] & R_s^{-1} B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t, \alpha) \\ \text{-----} \\ g_\alpha(t, \alpha) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Par conséquent, la loi de commande $u(t, \alpha)$ est donnée en tenant compte de (3.20) par:

$$\begin{aligned} u(t, \alpha) = & - (R^{-1} B^T K_{11} + R^{-1} B_\alpha^T K_{12}) x(t, \alpha) - (R^{-1} B^T K_{12} + R^{-1} B_\alpha^T K_{22}) z(t, \alpha) \\ & + R^{-1} B^T g(t, \alpha) + R^{-1} B_\alpha^T g_\alpha(t, \alpha) \end{aligned} \quad (3.21)$$

La fonction de sensibilité $v(t, \alpha)$ peut être donnée, à partir de (3.20), par:

$$v(t, \alpha) = - R_s^{-1} B^T K_{12} x(t, \alpha) - R_s^{-1} B^T K_{22} z(t, \alpha) + R_s^{-1} B^T g_\alpha(t, \alpha) \quad (3.22)$$

Comme dans le chapitre 1, le vecteur d'anticipation $g(t, \alpha)$ et sa fonction de sensibilité $g_\alpha(t, \alpha)$ peuvent être donnés à partir de l'équation différentielle suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{g}(t, \alpha) \\ \dot{g}_\alpha(t, \alpha) \end{bmatrix} = A_{s_c}^T \begin{bmatrix} g(t, \alpha) \\ g_\alpha(t, \alpha) \end{bmatrix} + M_s(t, \alpha) \quad (3.23)$$

où

$$M_s = \bar{Q} \Gamma - K_s D_s w(t) = \begin{bmatrix} Q \eta(t) - (K_{11} D + K_{12} D_\alpha) w(t) \\ -(K_{12} D + K_{22} D_\alpha) w(t) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

et

$$A_{s_c} = A_s - B_s \bar{R}^{-1} B_s^T K_s = \begin{bmatrix} A_{s_{c11}} & A_{s_{c12}} \\ A_{s_{c21}} & A_{s_{c22}} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

avec

$$A_{s_{c11}} = A - BR^{-1}B^TK_{11} - BR^{-1}B_\alpha^TK_{12}$$

$$A_{s_{c12}} = -BR^{-1}B^TK_{12} - BR^{-1}B_\alpha^TK_{22}$$

$$A_{s_{c21}} = A_\alpha - B_\alpha R^{-1} B^T K_{11} - BR_s^{-1} B^T K_{12} - B_\alpha R^{-1} B_\alpha^T K_{12}$$

$$A_{s_{c22}} = A - B_\alpha R^{-1} B^T K_{12} - BR_s^{-1} B^T K_{22} - B_\alpha R^{-1} B_\alpha^T K_{22}$$

En décomposant l'expression (3.17), la trajectoire d'état optimale $x(t, \alpha)$, en réponse à la loi de commande (3.20), peut être donnée en tenant compte des expressions

(3.18) à (3.25) par:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, \alpha) = & A_{s_{c11}} x(t, \alpha) + A_{s_{c12}} z(t, \alpha) + BR^{-1}B^T g(t, \alpha) \\ & + BR^{-1}B_{\alpha}^T g_{\alpha}(t, \alpha) + Dw(t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

La fonction de sensibilité relative à (3.26) est donnée, à partir de (3.17), par:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t, \alpha) = & A_{s_{c21}} x(t, \alpha) + A_{s_{c22}} z(t, \alpha) + B_{\alpha}R^{-1}B^T g(t, \alpha) \\ & + [B_{\alpha}R^{-1}B_{\alpha}^T + BR_s^{-1}B^T] g_{\alpha}(t, \alpha) + D_{\alpha}w(t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Il faut signaler que la réduction optimale de la fonction de sensibilité (3.27) dépend du choix des matrices Q_s et R_s .

De même, il faut noter que lorsque le système (3.10) n'est pas soumis à des variations paramétriques, les matrices A_{α} , B_{α} , D_{α} et K_{12} deviennent nulles. Il en est de même pour les fonctions de sensibilité relatives à la trajectoire d'état et au vecteur de commande. Par conséquent, si les perturbations paramétriques ne sont pas considérées, les expressions (3.21), (3.23) et (3.26) seront alors similaires aux expressions (1.3), (1.6) et (1.9) du chapitre 1.

Comme dans le cas du chapitre 1, et d'une façon similaire à ce qu'on a vu précédemment, nous présenterons brièvement dans ce qui suit la solution au problème donné par (3.10) et (3.12), du cas où la pré-information est finie.

Donc, en supposant que la paire (A_s, B_s) est commandable, la paire (A_s, \bar{Q}) est observable et la trajectoire à poursuivre Γ est uniformément continue et bornée sur $(0, \infty)$, mais seulement connue sur un horizon fini $[t, t + \tau]$ à chaque instant $t \geq 0$, pour $\tau > 0$, une solution au problème, exprimé par (3.10) et (3.12) pour un temps de pré-information fini (τ), est alors donnée par:

$$u_{s_{\tau}}(t, \alpha) = -\bar{R}^{-1}B_s [K_s X_{s_{\tau}}(t, \alpha) - g_{s_{\tau}}(t, \alpha)] \quad (3.28)$$

où la matrice K_s est la solution de l'équation algébrique de Riccati (3.14) et le vecteur $g_{s_\tau}(t, \alpha)$ est la fonction auxiliaire donnée par:

$$g_{s_\tau}(t, \alpha) = \int_t^{t+\tau} e^{(\xi-t)A_{s_c}^T} M_s(\xi, \alpha) d\xi, \quad t > 0 \quad (3.29)$$

avec

$$\begin{aligned} g_{s_\tau}(t+\tau, \alpha) &= 0, \\ A_{s_c} &= A_s - B_s \bar{R}^{-1} B_s^T K_s, \\ M_s &= \bar{Q} \Gamma(t) - K_s D_s w(t). \end{aligned}$$

La trajectoire d'état sous optimale, en réponse à la loi de commande (3.28), est alors exprimée par

$$\dot{X}_{s_\tau}(t, \alpha) = A_{s_c} X_{s_\tau}(t, \alpha) + B_s \bar{R}^{-1} B_s^T g_{s_\tau}(t, \alpha) + D_s w(t). \quad (3.30)$$

3.6. CONCLUSION

Une formulation analytique standard pour la résolution simultanée du double problème d'optimisation et de réduction optimale de la sensibilité du contrôleur pré-informé, est élaborée pour le cas des temps de pré-information fini ou infini.

La technique utilisée est basée sur la théorie de la commande optimale linéaire quadratique et l'élaboration d'un modèle augmenté incorporant le modèle du système et le modèle de sensibilité.

L'élaboration du modèle de sensibilité et la modification du critère de performance sont opérées sans aucune restriction sur le problème initiale.

Le modèle de sensibilité élaboré n'est pas limité à l'emploi de la fonction de sensibilité particulière du 1^{er} ordre.

D'autres types de fonctions de sensibilité, tel que celle du pourcentage de sensibilité ou de la mesure générale de sensibilité, peuvent être aussi utilisées.

L'exploitation des résultats analytiques et optimaux élaborés dans le cadre de ce chapitre sur un problème concret (avec des données numériques) nous permettra de juger qualitativement la sensibilité particulière de la commande pré-informée, objet de la présente investigation.

Elle permettra aussi, d'une manière générale, l'appréciation du rôle et de l'importance de l'étude et de l'analyse des modèles de sensibilité dans la conception des stratégies de commandes particulières.

CHAPITRE 4

FORMULATION DU PROBLEME

DU VEHICULE

FORMULATION DU PROBLEME DU VEHICULE

Dans le domaine de l'industrie automobile, les effets des variations paramétriques sur les réponses dynamiques des véhicules ont fait l'objet d'études pendant plusieurs années [Nalecz, 89].

Ceci se justifie par le fait que l'analyse de la sensibilité permet de donner des informations très utiles durant l'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques complexes, en déterminant à la fois l'effet de la variation simultanée de tous les paramètres sur la réponse dynamique de ces systèmes sans tenir compte de la complexité du modèle ou de la manoeuvre exécutée [Nalecz, 89].

Dans le présent chapitre, nous présenterons le modèle du véhicule à étudier et le critère de performance à utiliser.

En supposant que le système est soumis à des variations paramétriques, on définit aussi le modèle et le critère de sensibilité en vue d'une analyse et éventuellement une réduction de la sensibilité aux variations paramétriques du système.

4.1 MODELISATION DU SYSTEME

Le schéma considéré dans la figure 4.01 représente un modèle linéaire de la moitié d'un véhicule mobile doté d'un système de suspension active.

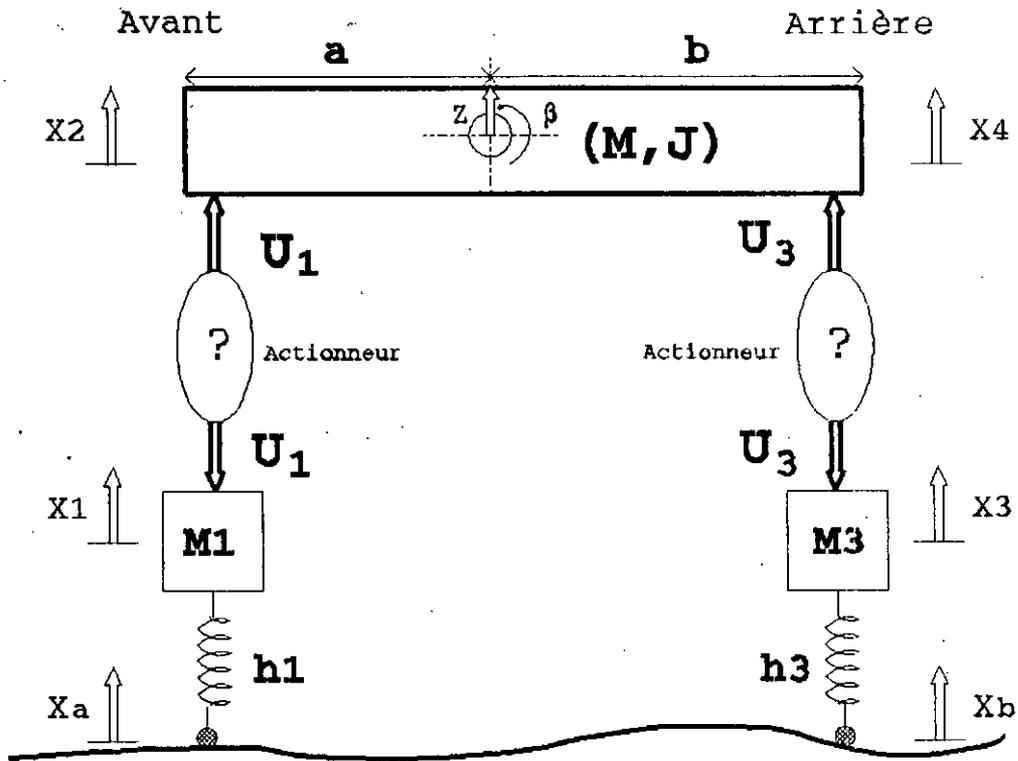


Figure 4.01 Schéma représentatif du modèle de la moitié d'un véhicule doté d'une suspension active.

Les deux côtés latéraux du véhicule ont été condensés en un plan central de symétrie, tel que M est la moitié de la masse du véhicule et J est le moment d'inertie du châssis par rapport au centre de gravité.

L'essieu et la roue avant sont représentés par une seule masse M_1 , de même que l'essieu et la roue arrière sont représentés par une seule masse M_3 . Les deux masses M_1 et M_3 sont reliées à la masse M à travers des actionneurs ayant une dynamique supposée idéale. Ils développent des forces u_1 et u_3 supposées être appliquées, avec la même intensité mais de sens opposé, au châssis et aux essieux.

Les pneus avant et arrière sont représentés par des ressorts linéaires de raideurs radiales h_1 à l'avant et h_3 à l'arrière. Tous les deux sont supposés assurer un contact ferme avec la route afin de satisfaire l'exigence de sécurité.

Sous l'excitation des composantes verticales de la surface de la route, x_a à l'avant et x_b à l'arrière, nous supposons que les masses M_1 et M_3 peuvent effectuer seulement des déplacements verticaux respectivement x_1 et x_3 , à partir des positions initiales d'équilibre. Ainsi, la masse M ne peut effectuer que des rebondissements verticaux Z et des mouvements de tangage décrits par l'angle β , à partir de la position initiale d'équilibre.

En utilisant les équations de Lagrange [Friedland, 87], les équations du mouvement du système peuvent être établies comme suit.

Pour les coordonnées généralisées:

$$p_1 = x_1, \quad p_2 = x_2, \quad p_3 = Z, \quad p_4 = \beta, \quad (4.1)$$

l'énergie cinétique totale du système est donnée par:

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_3 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} M \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\beta}^2. \quad (4.2)$$

L'énergie potentielle totale, emmagasinée dans les pneus avant et arrière, est définie par:

$$V = \frac{1}{2} h_1 (x_a - x_1)^2 + \frac{1}{2} h_3 (x_b - x_3)^2. \quad (4.3)$$

D'où l'on peut donner le Lagrangien L comme étant:

$$L = T - V. \quad (4.4)$$

Donc, l'équation de Lagrange, pour la $i^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée p_i , est définie par:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = \Phi_i, \quad (4.5)$$

où Φ_i représente la $i^{\text{ème}}$ force généralisée.

En considérant chacune des coordonnées généralisées données dans (4.1), les équations de Lagrange qui définissent la dynamique du système sont alors données, en utilisant (4.2), (4.3) et (4.5), par:

$$M_1 \ddot{x}_1 + h_1 (x_a - x_1) = \Phi_1, \quad (4.6)$$

$$M_3 \ddot{x}_3 + h_3 (x_b - x_3) = \Phi_2, \quad (4.7)$$

$$M \ddot{Z} = \Phi_3, \quad (4.8)$$

$$J \ddot{\beta} = \Phi_4. \quad (4.9)$$

Où, pour un déplacement élémentaire des p_i (coordonnées généralisées) les Φ_i forces généralisées sont données par:

$$\Phi_1 = -u_1, \quad (4.10)$$

$$\Phi_2 = -u_3, \quad (4.11)$$

$$\Phi_3 = u_1 + u_3, \quad (4.12)$$

$$\Phi_4 = au_1 - bu_3. \quad (4.13)$$

Pour un angle de tangage faible ($\beta \approx \tan \beta$), les déplacements de la masse du châssis, x_2 à l'avant et x_4 à l'arrière, sont donnés, en fonction de Z et β , comme suit:

$$x_2 = Z + a\beta, \quad (4.14)$$

$$x_4 = Z - b\beta. \quad (4.15)$$

a et b sont liés par la relation:

$$L_c = a + b,$$

où L_c représente la longueur du châssis.

Finalement, en utilisant (4.14) et (4.15), les équations dynamiques qui définissent le mouvement du système sont données par:

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{h_1}{M_1} (x_a(t) - x_1(t)) - \frac{1}{M_1} u_1(t), \quad (4.16)$$

$$\ddot{x}_3(t) = \frac{h_3}{M_3} (x_b(t) - x_3(t)) - \frac{1}{M_3} u_3(t), \quad (4.17)$$

$$\ddot{x}_2(t) = \left(\frac{1}{M} + \frac{a^2}{J} \right) u_1(t) + \left(\frac{1}{M} - \frac{ab}{J} \right) u_3(t), \quad (4.18)$$

$$\ddot{x}_4(t) = \left(\frac{1}{M} - \frac{ab}{J} \right) u_1(t) + \left(\frac{1}{M} + \frac{b^2}{J} \right) u_3(t). \quad (2.19)$$

En utilisant les équations (4.16) à (4.19) et en procédant à la notation, sous la forme de variables d'état, on a:

$$\dot{x}_1(t) = x_5(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_6(t), \quad \dot{x}_3(t) = x_7(t), \quad \dot{x}_4(t) = x_8(t), \quad (4.20)$$

L'équation dynamique linéaire qui décrit le mouvement du système peut être écrite sous une forme matricielle comme étant:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + D w(t), \quad (4.21)$$

avec

$$x = \text{col}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8],$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}, \quad w(t) = \begin{pmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \end{pmatrix}.$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état du système, $w(t)$ est le vecteur de perturbation et $u(t)$ est le vecteur de commande.

Les matrices A, B et D sont données par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{h_1}{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h_3}{M_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{M_1} & 0 \\ \left(\frac{1}{M} + \frac{a^2}{J}\right) & \left(\frac{1}{M} - \frac{ab}{J}\right) \\ 0 & -\frac{1}{M_3} \\ \left(\frac{1}{M} - \frac{ab}{J}\right) & \left(\frac{1}{M} + \frac{b^2}{J}\right) \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{h_1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{M_3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Toutes les variables d'état (x_1 à x_8) étant supposées à leur position d'équilibre, c-à-d, nulles à l'instant initial.

Le vecteur de sortie est supposé formé des quatre mesures, $y_1(t)=x_1(t)$, $y_2(t)=x_2(t)$, $y_3(t)=x_3(t)$ et $y_4(t)=x_4(t)$.

Sous une représentation matricielle, l'équation de sortie ou d'observation est alors donnée par:

$$y(t) = C x(t), \quad (4.22)$$

où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les masses M_1 , M_3 et M , le moment d'inertie J et les raideurs radiales h_1 et h_3 sont supposés invariants dans le temps. Par conséquent, l'ensemble des équations (4.21) et (4.22) représente le modèle d'un système linéaire invariant dans le temps.

4.2. CRITERE DE PERFORMANCE

Lors de la conception d'une suspension active pour automobiles, deux principaux critères sont souvent considérés:

- Le confort,
- La tenue de route (la sécurité de conduite).

Une indication du confort peut être obtenue à partir des accélérations verticales (\ddot{x}_2 et \ddot{x}_4) de la masse M [Louam, 90].

Notons que si M est maintenue constante alors les accélérations \ddot{x}_2 et \ddot{x}_4 sont proportionnelles aux forces u_1 et u_3 .

Pour la sécurité et la tenue de route, on peut prendre comme indication les mesures des décollements dynamiques des roues, c-à-d, (x_1-x_u) et (x_3-x_b) [Thompson and Pearce, 79].

En vue d'obtenir un compromis entre ces deux exigences dynamiques, le critère de performance quadratique suivant est considéré [Louam, 90]:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [& q_1(x_1(t)-x_a(t))^2 + q_2(x_1(t)-x_2(t))^2 + q_3(x_3(t)-x_b(t))^2 \\ & + q_4(x_3(t)-x_4(t))^2 + \rho_1 u_1^2(t) + \rho_3 u_3^2(t)] dt, \end{aligned} \quad (4.23)$$

où ρ_1 , ρ_2 et q_1 à q_4 sont des facteurs de pondération qui reste à fixer sur la base de considérations pratiques qu'on examinera dans la section 4.2.1.

Ce critère de performance exprime les contraintes posées sur les commandes u_1 et u_2 , c-à-d, sur les accélérations (\ddot{x}_2 et \ddot{x}_4) aux points de support du châssis, sur les décollements dynamiques des roues (x_1-x_a) et (x_3-x_b) et sur les espaces de fonctionnement (x_1-x_2) et (x_3-x_4).

En utilisant la notation matricielle donnée dans la section 4.1, le critère de performance peut être réécrit:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [(x(t)-\eta(t))^T Q (x(t)-\eta(t)) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad (4.24)$$

où la trajectoire désirée η est donnée par:

$$\eta = \text{col}[x_a, x_a, x_b, x_b, 0, 0, 0, 0],$$

qui peut être écrite aussi:

$$\eta(t) = N w(t) \quad (4.25)$$

où

$$Q = C^T Q_1 C, \quad R = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_3 \end{pmatrix}$$

avec

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 & -q_2 & 0 & 0 \\ -q_2 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 + q_4 & -q_4 \\ 0 & 0 & -q_4 & q_4 \end{pmatrix}$$

et

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2.1. Sélection des facteurs de pondération relatifs au critère de performance

D'après des considérations pratiques admises dans la littérature [Thompson, 84], on définit les décollements statiques avant δ_{af} et arrière δ_{ar} , respectivement en fonction des coefficients de raideur des pneumatiques h_1 et h_3 et en tenant compte de la charge admissible.

Les limites admissibles des espaces de fonctionnement avant et arrière, à partir de la position d'équilibre en charge, sont respectivement données par δ_{wf} et δ_{wr} .

Sans perte de généralité, les facteurs de pondération q_2 et q_4 sont pris égaux à l'unité [Thompson, 84].

En effet, pour empêcher la perte de contact des roues avec la route durant la conduite, il faut satisfaire, d'après [Thompson, 84], les inégalités suivantes:

$$\sigma_{wf} < \delta_{wf} \quad , \quad \sigma_{wr} < \delta_{wr} \quad (4.26)$$

$$\sigma_{af} < \delta_{af} \quad , \quad \sigma_{ar} < \delta_{ar} \quad (4.27)$$

où σ_{wf} , σ_{wr} , σ_{tf} et σ_{tr} sont respectivement les valeurs des espaces de fonctionnement et des décollements dynamiques des roues. Par conséquent, l'estimation convenable des facteurs de pondération q_1 et q_3 est, d'après [Thompson, 84], donnée par:

$$q_1 = \left(\frac{\delta_{wf}}{\delta_{tf}} \right)^2, \quad q_3 = \left(\frac{\delta_{wr}}{\delta_{tr}} \right)^2 \quad (4.28)$$

Enfin, les facteurs de pondération ρ_1 et ρ_3 sont choisis empiriquement de telle sorte à minimiser la durée des pics transitoires des forces u_1 et u_3 et d'amortir les accélérations du châssis qui sont proportionnelles aux forces u_1 et u_3 .

Il faut noter que le système dynamique (4.21) et le critère de performance (4.24) sont définis en supposant que les paramètres caractérisant le système sont fixes. Or, en pratique, ces derniers sont soumis à des variations (par exemple, l'usure des pneus, l'augmentation de la masse du châssis en charge, etc...). Par conséquent, il est judicieux de déterminer le modèle de sensibilité relatif à (4.21) et de définir le critère de sensibilité relatif à (4.24), en vue d'une analyse de la sensibilité par rapport à la variation des paramètres.

4.3. ELABORATION DU MODELE DE SENSIBILITE

En supposant que le système défini dans (4.21) est soumis à une variation paramétrique $\delta\alpha$ d'un paramètre quelconque α du système, le modèle de sensibilité correspondant est alors donné, en se référant au chapitre 2, par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}(t, \alpha)}{\partial \alpha} &= A(\alpha_0) \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} + A_\alpha x(t, \alpha_0) + B(\alpha_0) \frac{\partial u(t, \alpha)}{\partial \alpha} \\ &+ B_\alpha u(t, \alpha_0) + D_\alpha w(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Avec

$$A_\alpha = \left. \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}, \quad B_\alpha = \left. \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}, \quad D_\alpha = \left. \frac{\partial D}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0}$$

où α_0 est la valeur nominale du paramètre α .

Posons

$$z(t, \alpha) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha}, \quad v(t, \alpha) = \frac{\partial u(t, \alpha)}{\partial \alpha} \quad (4.30)$$

où z et v sont respectivement les fonctions de sensibilité relatives à la trajectoire d'état et à la commande. L'équation (4.29) devient alors:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(\alpha_0)z(t, \alpha) + A_\alpha x(t, \alpha_0) + B(\alpha_0)v(t, \alpha) \\ &+ B_\alpha u(t, \alpha_0) + D_\alpha w(t). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Comme la perturbation $w(t)$ est indépendante des paramètres du système sa fonction de sensibilité est prise égale à zéro.

4.4. DETERMINATION DU CRITERE DE SENSIBILITE

Les fonctions de sensibilité relatives aux déplacements dynamiques des roues avant et arrière du véhicule, $(x_1(t, \alpha) - x_a(t))$ et $(x_3(t, \alpha) - x_b(t))$, sont données respectivement par:

$$\frac{\partial(x_1(t, \alpha) - x_a(t))}{\partial \alpha} = \frac{\partial x_1(t, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_a(t)}{\partial \alpha} = z_1(t, \alpha), \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial(x_3(t, \alpha) - x_b(t))}{\partial \alpha} = \frac{\partial x_3(t, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_b(t)}{\partial \alpha} = z_3(t, \alpha) \quad (4.33)$$

où les fonctions de sensibilité relatives à $x_a(t)$ et $x_b(t)$ sont nulles à cause de leur indépendance des paramètres du système.

De même, les fonctions de sensibilité relatives aux espaces de fonctionnement $(x_1(t, \alpha) - x_2(t, \alpha))$ et $(x_3(t, \alpha) - x_4(t, \alpha))$ sont données par:

$$\frac{\partial(x_1(t, \alpha) - x_2(t, \alpha))}{\partial \alpha} = z_1(t, \alpha) - z_2(t, \alpha), \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial(x_3(t, \alpha) - x_4(t, \alpha))}{\partial \alpha} = z_3(t, \alpha) - z_4(t, \alpha) \quad (4.35)$$

Les fonctions de sensibilité relatives aux forces $u_1(t, \alpha)$ et $u_3(t, \alpha)$ sont données par:

$$\frac{\partial u_1(t, \alpha)}{\partial \alpha} = v_1(t, \alpha), \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial u_3(t, \alpha)}{\partial \alpha} = v_3(t, \alpha). \quad (4.37)$$

Par conséquent, si on considère la réduction de la sensibilité du système de suspension active donnée par (4.22), par rapport à la variation du paramètre α , il faut chercher à minimiser les fonctions de sensibilité relatives aux accélérations verticales et aux décollements dynamiques des roues, sous les contraintes imposées par les fonctions de sensibilité relatives aux espaces de fonctionnement. Cela revient à minimiser les quantités $v_1(t, \alpha)$, $v_3(t, \alpha)$, $z_1(t, \alpha)$, $z_3(t, \alpha)$, $(z_1(t, \alpha) - z_2(t, \alpha))$ et $(z_3(t, \alpha) - z_4(t, \alpha))$.

Pour minimiser toutes ces quantités simultanément, nous considérons la minimisation d'un seul critère quadratique de sensibilité de la forme:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\sigma_1 v_1^2 + \sigma_3 v_3^2 + \bar{q}_1 z_1^2 + \bar{q}_2 (z_1 - z_2)^2 + \bar{q}_3 z_3^2 + \bar{q}_4 (z_3 - z_4)^2] dt, \quad (4.38)$$

où σ_1 , σ_3 , \bar{q}_1 à \bar{q}_4 sont des facteurs de pondération qui seront fixés ultérieurement, de telle sorte à réduire (d'une manière optimale) la sensibilité du système aux variations des paramètres.

Sous une forme matricielle l'expression (4.38) peut être écrite comme suit:

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [z^T(t, \alpha) Q_s z(t, \alpha) + v^T(t, \alpha) R_s v(t, \alpha)] dt, \quad (4.39)$$

où

$$Q_s = C^T Q_s C, \quad R_s = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

avec

$$Q_{s_1} = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 + \bar{q}_2 & -\bar{q}_2 & 0 & 0 \\ -\bar{q}_2 & \bar{q}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{q}_3 + \bar{q}_4 & -\bar{q}_4 \\ 0 & 0 & -\bar{q}_4 & \bar{q}_4 \end{pmatrix}$$

4.4.1. Sélection des facteurs de pondération relatifs au critère de sensibilité

En procédant de la même manière que dans la section 4.3.1, les valeurs approximatives des coefficients \bar{q}_1 et \bar{q}_3 sont données par:

$$\bar{q}_1 = \left(\frac{\bar{\delta}_{wf}}{\bar{\delta}_{tf}} \right)^2, \quad \bar{q}_3 = \left(\frac{\bar{\delta}_{wr}}{\bar{\delta}_{tr}} \right)^2 \quad (4.40)$$

où $\bar{\delta}_{wf}$, $\bar{\delta}_{wr}$, $\bar{\delta}_{tf}$ et $\bar{\delta}_{tr}$ sont respectivement les variations des limites admissibles des espaces de fonctionnement et des déplacements statiques des roues, par rapport aux variations paramétriques.

Les facteurs de pondération σ_1 et σ_3 sont choisis empiriquement de telle sorte à minimiser la durée des pics transitoires des fonctions de sensibilité v_1 et v_3 et de minimiser les fonctions de sensibilité relatives aux accélérations du châssis. Enfin, \bar{q}_2 et \bar{q}_4 sont pris égaux à l'unité.

Dans la prochaine section une reformulation du problème, donné par (4.1) et (4.3), est effectuée en vue de réaliser un schéma de contrôle qui considère la synthèse du contrôleur pré-informé et la réduction optimale de la sensibilité du système.

4.5. FORMULATION DU PROBLEME DU VEHICULE

On forme deux nouveaux vecteurs:

$$X_s = \begin{pmatrix} x \\ - \\ z \end{pmatrix}, \quad u_s = \begin{pmatrix} u \\ - \\ v \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

En tenant compte de (4.21) et (4.31), le système augmenté correspondant aux nouvelles variables X_s et u_s peut être écrit comme suit:

$$\dot{X}_s = A_s(\alpha)X_s(t,\alpha) + B_s(\alpha)u_s(t,\alpha) + D_s(\alpha)w(t) \quad (4.42)$$

où

$$A_s = \begin{pmatrix} A & [0] \\ A_\alpha & A \end{pmatrix}, \quad B_s = \begin{pmatrix} B & [0] \\ B_\alpha & B \end{pmatrix}, \quad D_s = \begin{pmatrix} D \\ - \\ D_\alpha \end{pmatrix}$$

où $[0]$ est une matrice nulle de dimension appropriée.

En se référant au chapitre 3, le critère global relatif aux nouvelles variables X_s et u_s est exprimé par:

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[(X_s(t,\alpha) - \Gamma(t))^T \bar{Q} (X_s(t,\alpha) - \Gamma(t)) + u_s^T(t,\alpha) \bar{R} u_s(t,\alpha) \right] dt \quad (4.43)$$

où

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} Q & [0] \\ [0] & Q_s \end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} R & [0] \\ [0] & R_s \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \eta \\ - \\ [0] \end{pmatrix}$$

sachant que la nouvelle trajectoire Γ représentant le profil de la route à poursuivre peut être exprimée par:

$$\Gamma(t) = N_s w(t) \quad (4.44)$$

où

$$N_s = \begin{bmatrix} N \\ - \\ [0] \end{bmatrix}$$

Par conséquent le problème du véhicule peut être exprimé comme suit.

Pour le système dynamique donné par (4.42), dans lequel $w(t)$ est un vecteur contenant l'entrée extérieure représentant la surface de la route à poursuivre et α est un scalaire caractérisant un des paramètres du système, on cherche à trouver une loi de commande optimale $u_s(t, \alpha)$ permettant de minimiser le critère global (4.43).

Le problème donné par (4.42) et (4.43) est exprimé sous la même forme que celle du problème standard donné par (3.10) et (3.12) du chapitre 3. Par conséquent, la technique développée dans le chapitre 3 peut lui être appliquée. Ce qui est l'objet du chapitre 5.

4.6. CONCLUSION

Le modèle d'un véhicule doté d'un système de suspension active a été considéré. Il est supposé être linéaire et invariant dans le temps.

Les actionneurs considérés sont supposés de dynamiques négligeables, c-à-d, ayant des temps de réponse nuls.

Les performances du système ont été définies en tenant compte du confort, de la sécurité et de la tenue de route sous les contraintes imposées par les espaces de fonctionnement.

En vue d'une analyse et une réduction de la sensibilité du système aux variations paramétriques, le modèle et le critère de sensibilité ont été définis.

Enfin, le problème de la conception d'une suspension active pour véhicules a été formulé sous la forme d'un problème linéaire d'optimisation quadratique. Celui-ci considère la minimisation simultanée d'un critère global incorporant les performances et la sensibilité du système, sans aucune restriction sur le système initial.

CHAPITRE 5

SIMULATION DES RESULTATS

DE

L'APPLICATION PRATIQUE

SIMULATION DES RESULTATS DE L'APPLICATION PRATIQUE

Parmi les problèmes pratiques où la commande pré-informée est souvent utilisée on trouve celui du véhicule. Dans ce dernier on cherche en particulier à améliorer les performances de la suspension active à l'aide de la pré-information sur la route.

Dans le présent chapitre, on considère le problème du véhicule défini mathématiquement dans le chapitre 4. Le système étant supposé complètement observable et le profil de la route à poursuivre parfaitement connu à priori.

La solution à ce problème est résumée dans la section suivante en utilisant les résultats du chapitre 3.

La section 5.2 sera consacrée à la simulation numérique et l'analyse des résultats de l'étude de la sensibilité de la commande pré-informée.

5.1. SOLUTION AU PROBLEME DU VEHICULE

La solution théorique du problème du véhicule exprimé dans le chapitre 4 révèle le cas d'une commande pré-informée. Celle-ci peut être envisagée soit sur un horizon fini (τ fixe) ou infini.

Dans le cadre de la simulation pratique τ infini peut être assimilé à la valeur qui avoisine cinq fois la constante du temps prépondérante du système [Anderson and Moore, 89].

La simulation numérique sera entreprise dans ce chapitre sur la base des données de l'annexe A et des résultats théoriques suivant relatifs à la solution du problème du véhicule.

A savoir:

$$u_{s\tau}(t, \alpha) = -\bar{R}^{-1} B_S [K_S X_{s\tau}(t, \alpha) - g_{s\tau}(t, \alpha)] \quad (5.1)$$

où la matrice K_s est la solution de l'équation algébrique de Riccati (3.14) et le vecteur $g_{s\tau}(t, \alpha)$ est la fonction d'anticipation donnée par:

$$g_{s\tau}(t, \alpha) = \int_t^{t+\tau} e^{(\xi-t)A_{s_c}^T} Y_s w(\xi) d\xi, \quad t > 0 \quad (5.2)$$

avec

$$\begin{aligned} g_{s\tau}(t+\tau, \alpha) &= 0, \\ A_{s_c} &= A_s - B_s \bar{R}^{-1} B_s^T K_s, \\ Y_s &= \bar{Q} N_s - K_s D_s. \end{aligned}$$

La trajectoire d'état sous optimale, en réponse à la loi de commande (5.1), est alors exprimée par:

$$\dot{X}_{s\tau}(t, \alpha) = A_{s_c} X_{s\tau}(t, \alpha) + B_s \bar{R}^{-1} B_s^T g_{s\tau}(t, \alpha) + D_s w(t). \quad (5.3)$$

Le vecteur d'anticipation $g_{s\tau}(t, \alpha)$ peut être calculé, depuis l'instant final $t+\tau$ jusqu'à l'instant t , en considérant le système adjoint:

$$\dot{g}_{s\tau}(t, \alpha) = A_{s_c}^T g_{s\tau}(t, \alpha) + Y_s w(t). \quad (5.4)$$

Notons que le cas optimal sera celui qui correspond à τ très grand (cinq fois la constante du temps associée au pôle dominant du système au minimum).

5.2. ANALYSE DES RESULTATS DE SIMULATION

5.2.1. Evaluation du critère global

En utilisant un élément d'analyse de sensibilité se basant sur la fonction de pourcentage de sensibilité (annexe B), une évaluation de la variation du critère global (4.43) en fonction du temps de pré-information est donnée dans les figures 5.1 et 5.3. Ces dernières sont données respectivement pour des perturbations de type échelon unitaire et une bosse de 0.5s de durée qui représente une alternance positive d'une onde sinusoïdale.

Dans ce cas, on considère une variation de 50% dans les paramètres h et M qui caractérisent respectivement la raideur des essieux et la masse du châssis.

La vitesse du déplacement du véhicule est maintenue constante à 10 m/s.

Notons qu'une variation dans les paramètres h et M peut être interprétée physiquement par exemple par l'usure des pneus (pour h) et la variation de la masse du véhicule (pour M) due à une descente ou à une montée des passagers.

Les pourcentages de sensibilité relatifs aux critères globaux des figures 5.01 et 5.03, sont donnés respectivement dans les figures 5.02 et 5.04. Du fait qu'on a utilisé la l'approche analytique présentée dans le chapitre 3, il est constaté, d'après les figures 5.01 et 5.03, que particulièrement, dans la région optimale, c-à-d, pour de longues durées de pré-information les performances du système (soumis à des variations paramétriques) sont pratiquement les mêmes que celles du système sans variations utilisé dans [Louam et al, 92].

Cependant, pour des petits temps de pré-information les figures montrent une certaine dégradation dans le critère global, en présence de variations paramétrique.

Ce fait est en effet attendu à cause de la constatation d'une présence de pics pour ($\tau < 0.1s$) sur les figures caractérisant les réductions du critère en fonction du temps de la pré-information dans [Louam et al, 92].

Ainsi nous constatons que la réduction de la sensibilité dépend essentiellement du choix du temps de pré-information.

Mais, il faut souligner que celui-ci dépend du problème considéré, il ne peut être déterminé qu'empiriquement [Louam, 90].

Pour une variation de 50% du paramètre M et en tenant compte du changement de la vitesse, les pourcentages de sensibilité du critère global (4.43) sont donnés dans les figures 5.05 et 5.06 respectivement pour une perturbation échelon et une bosse de 0.5s de durée. Dans la région optimale, il est montré que le système (4.42) offre de bonnes performances et une insensibilité par rapport au changement de la vitesse, avec une réduction optimale de l'effet de la variation de 50% de la masse M . Ceci est dû essentiellement à l'utilisation de la technique développée au chapitre 3. Celle-ci permet en particulier de préserver les performances du système en présence de variations paramétriques.

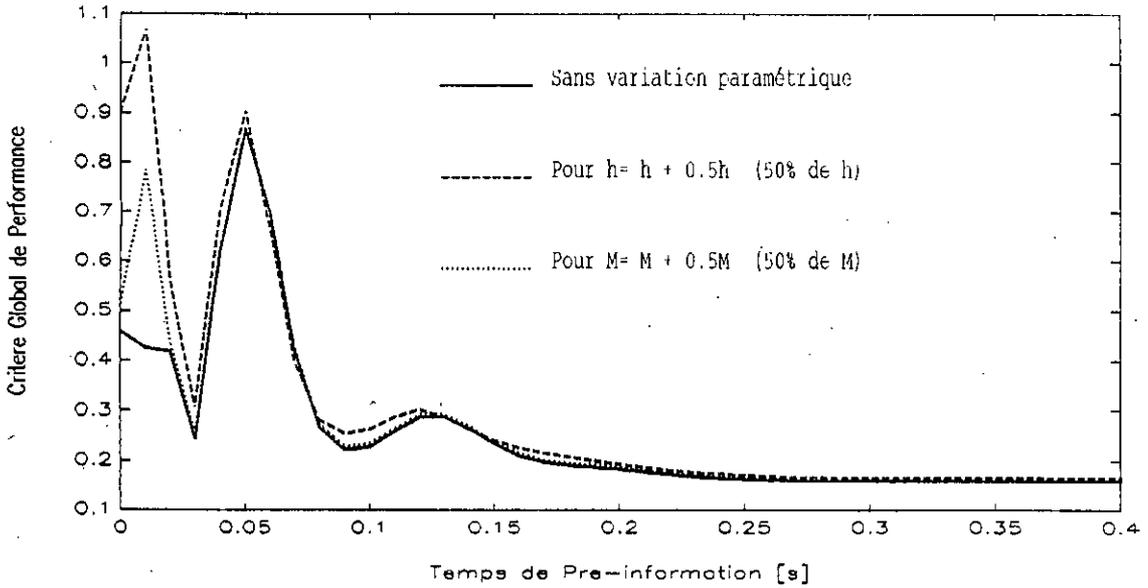


Figure 5.01 Variations du critère de performance global en fonction du temps de pré-information pour une variation de 50% des paramètres h et M et pour un échelon de perturbation.

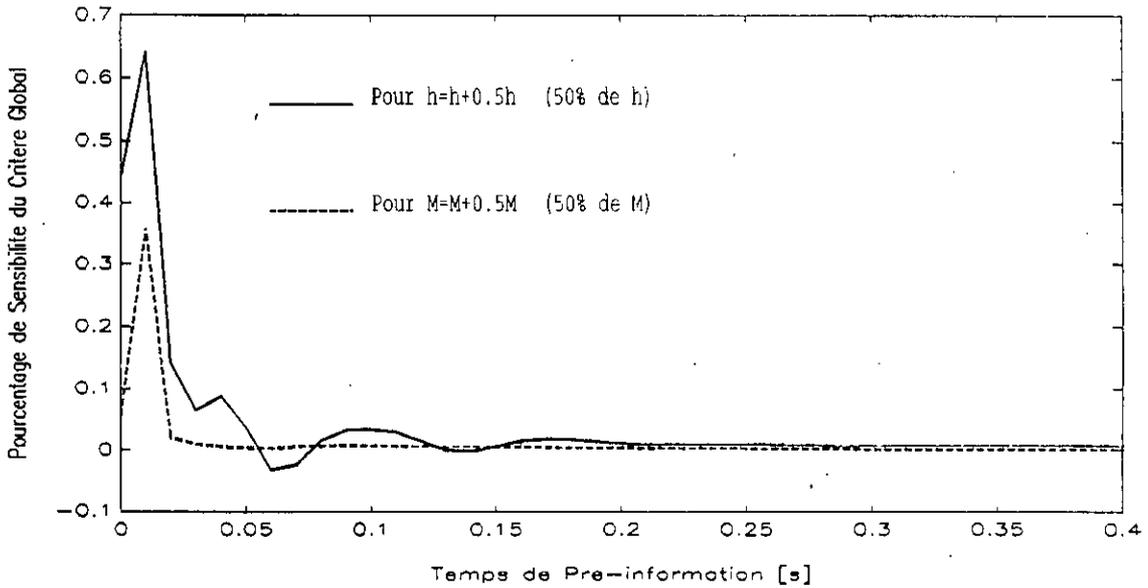


Figure 5.02 Variation du pourcentage de sensibilité relatif au critère global de performance en fonction du temps de pré-information pour un échelon de perturbation et une variation de 50% des paramètres h et M.

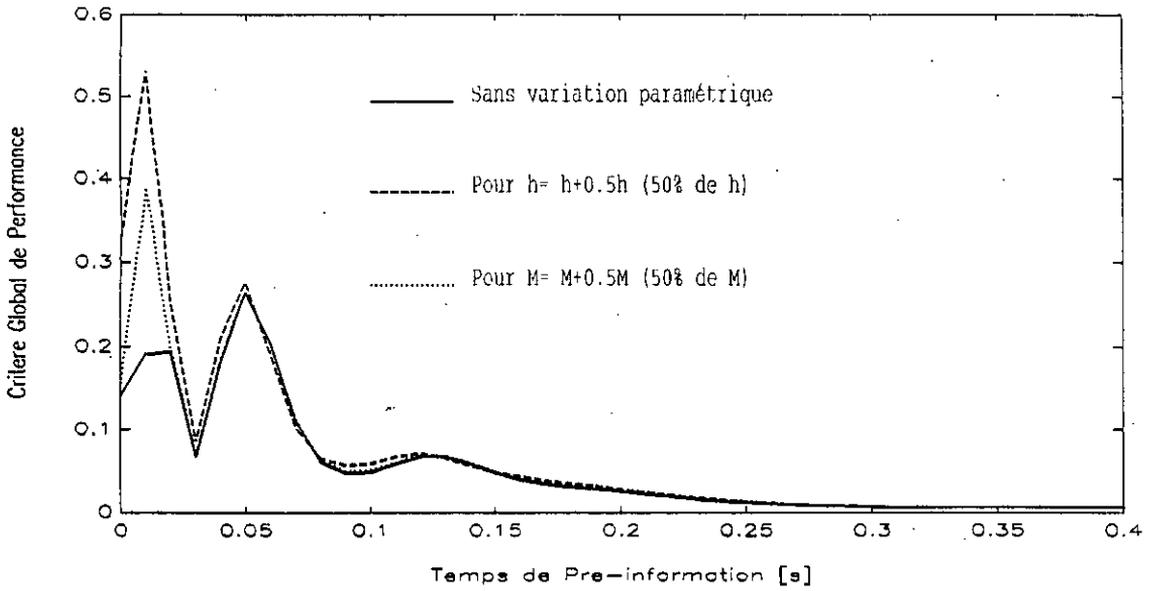


Figure 5.03 Variations du critère global de performance en fonction du temps de pré-information pour une perturbation de type (bosse de 0.5s de durée) et une variation de 50% des paramètres h et M.

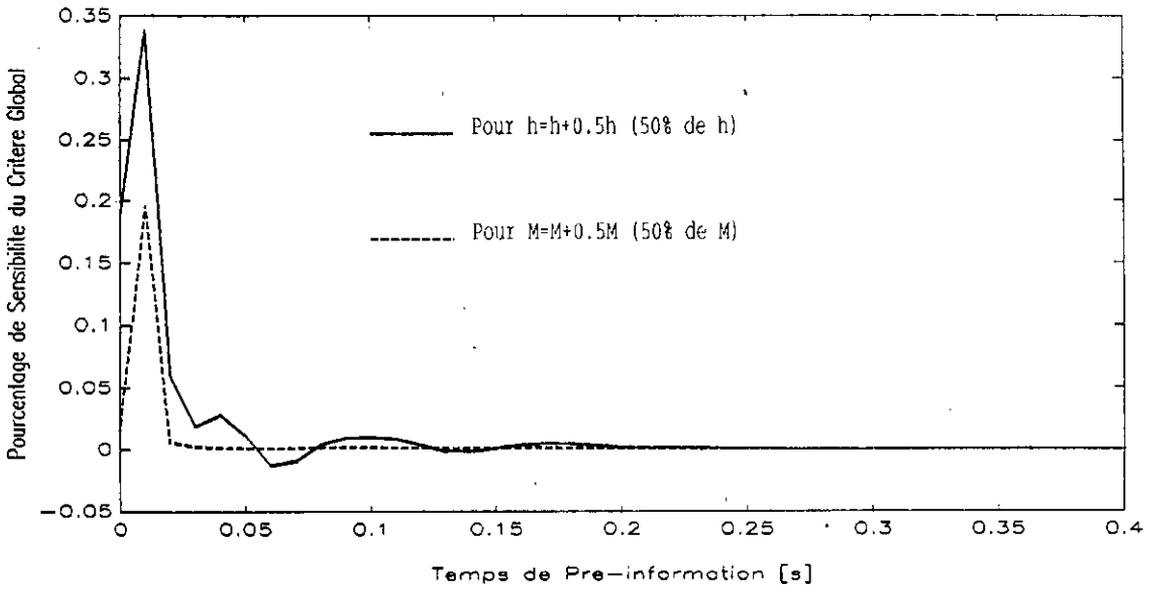


Figure 5.04 Variation du pourcentage de sensibilité relatif au critère global de performance pour une perturbation de type (bosse de 0.5s de durée) et une variation de 50% des paramètres h et M.

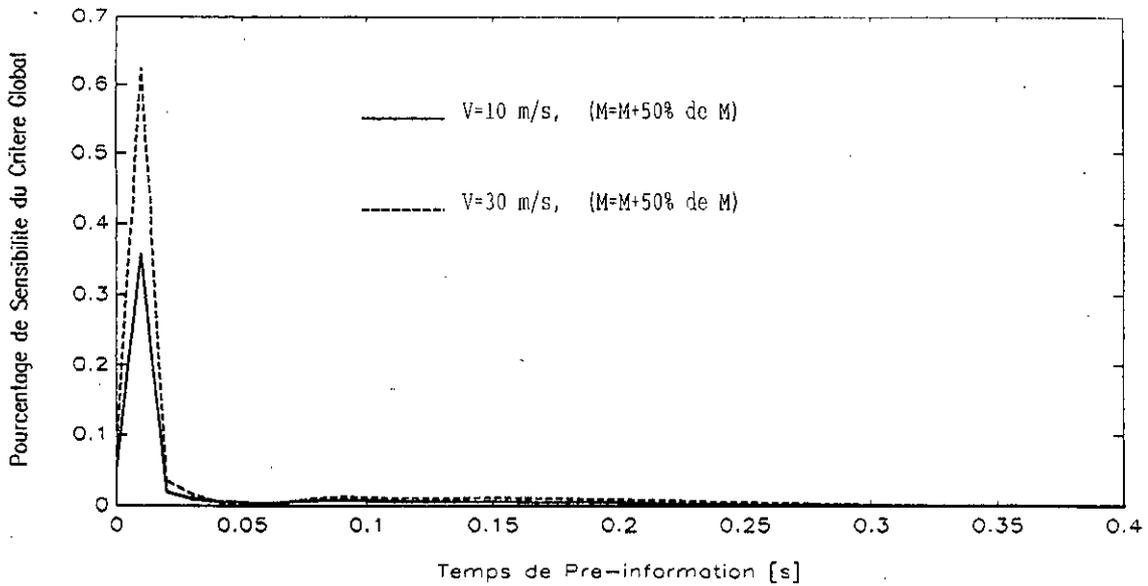


Figure 5.05 Variation du critère de sensibilité en fonction du temps de temps de pré-information et la vitesse de déplacement pour une perturbation échelon et une variation de 50% du paramètre M.

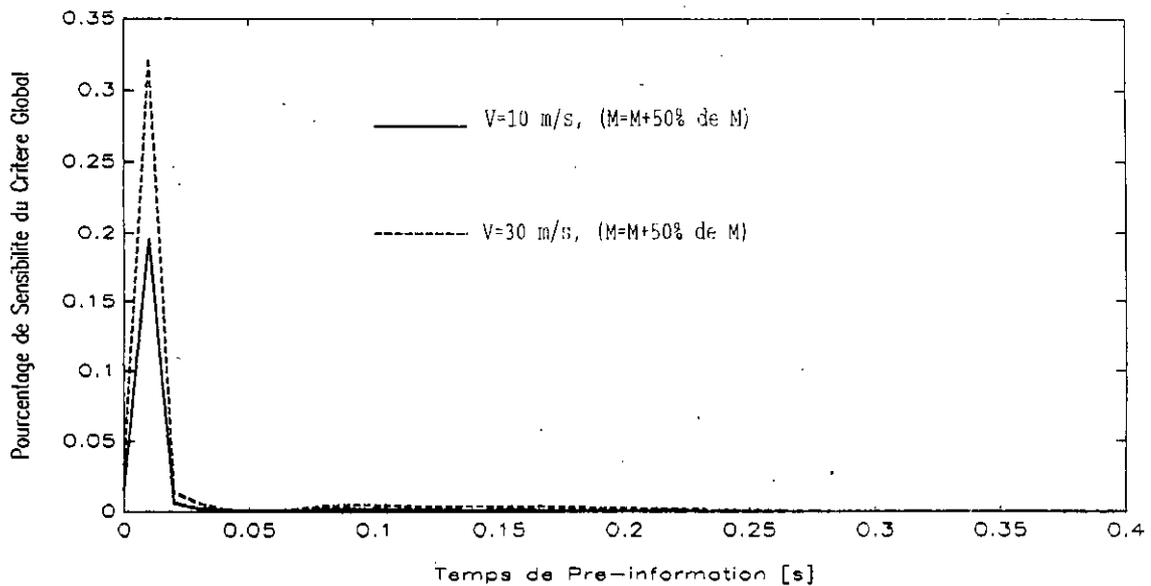


Figure 5.06 Variation du critère de sensibilité en fonction du temps de pré-information et de la vitesse de déplacement, pour une perturbation de type (bosse de 0.5s de durée) et une variation de 50% du paramètre M.

5.2.2 Réponses verticales des essieux et du châssis

Sans la considération de variations paramétriques, les déplacements verticaux du véhicule ainsi que les commandes correspondantes (u_1 et u_3), en réponse à un échelon de perturbation, pour une vitesse de 10 m/s et un temps de pré-information de 0.2s sont donnés respectivement dans les figures 5.07 (a) et 5.07 (b).

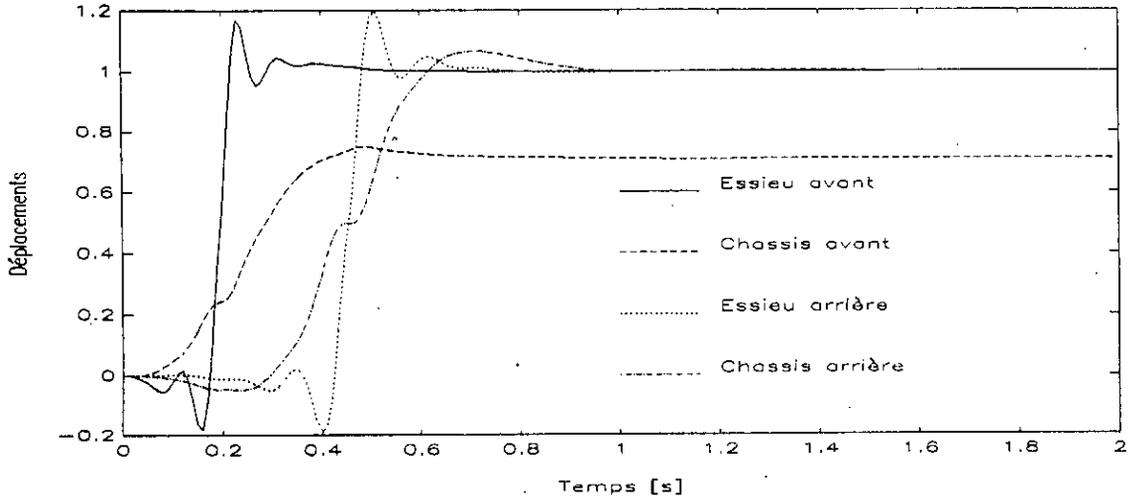


Figure 5.07 (a) Déplacements verticaux des essieux et du châssis, pour une perturbation échelon, un temps de pré-information de 0.2s et une vitesse de 10 m/s (Sans la considération des variations paramétriques).

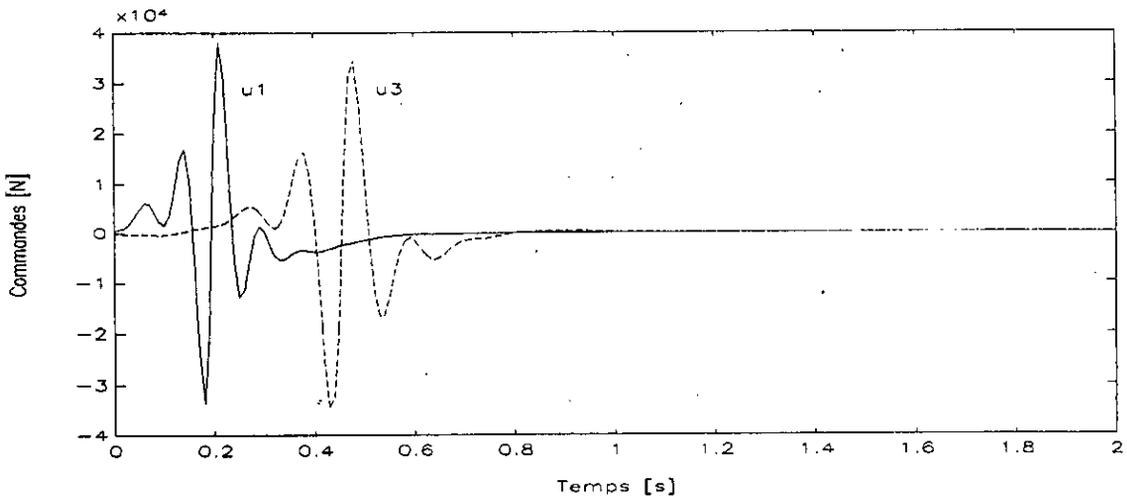
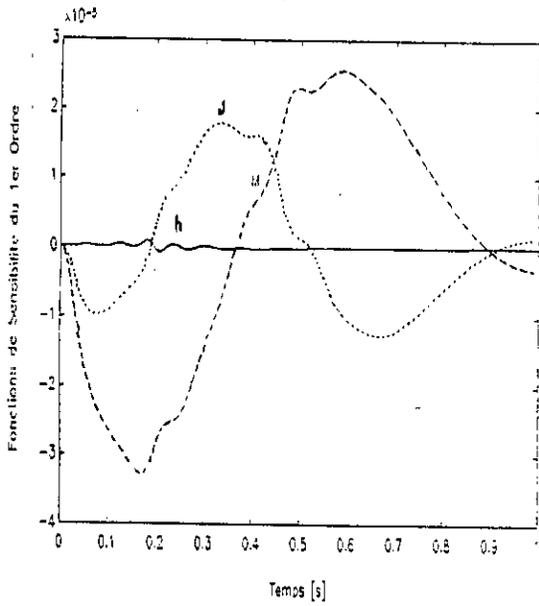


Figure 5.07 (b) Commandes appliquées aux essieux et au châssis, en réponse à une perturbation échelon, pour un temps de pré-information de 0.2s, une vitesse de 10 m/s (Sans la considération des variations paramétriques).

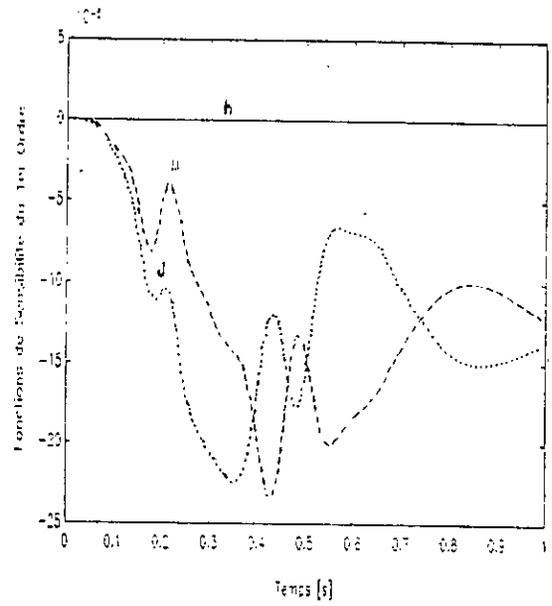
5.2.2.a. Utilisation de la fonction de sensibilité standard du 1^{er} ordre

Pour un échelon de perturbation et un temps de pré-information de 0.2s, les fonctions de sensibilité correspondantes à l'augmentation d'une unité des paramètres h , M et J sont données dans la figure 5.08. Il faut noter que cette augmentation se traduit, en terme de pourcentage, respectivement par $6.4E-4\%$, 0.2% et 0.15% des valeurs nominales. Il est évident que ces variations paramétriques sont pratiquement négligeables. De même, il faut signaler qu'avec la fonction de sensibilité du 1^{er} ordre la comparaison des fonctions de sensibilité relatives aux déplacements avants et arrières du véhicule ne peut pas être établie puisque celles-ci possèdent des unités différentes. De plus, la détermination du paramètre pour lequel le système est le plus sensible n'est pas possible car les paramètres h , M et J n'ont pas les mêmes unités et les mêmes pourcentages de variation.

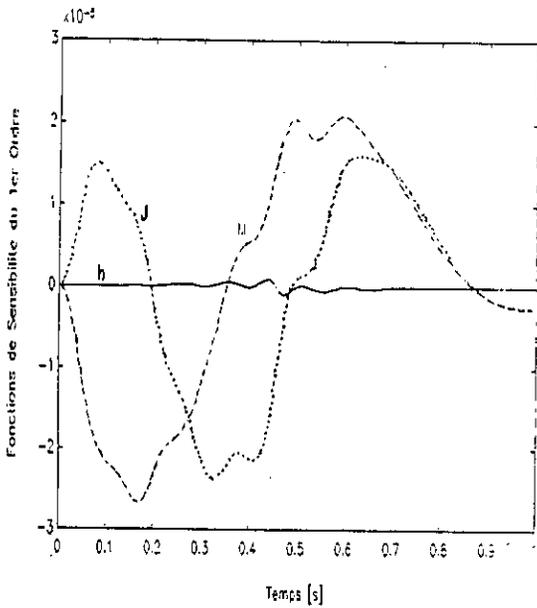
Ceci nous conduit à un autre outil permettant de donner plus d'informations sur la sensibilité du système en tenant compte de la réduction de celle-ci.



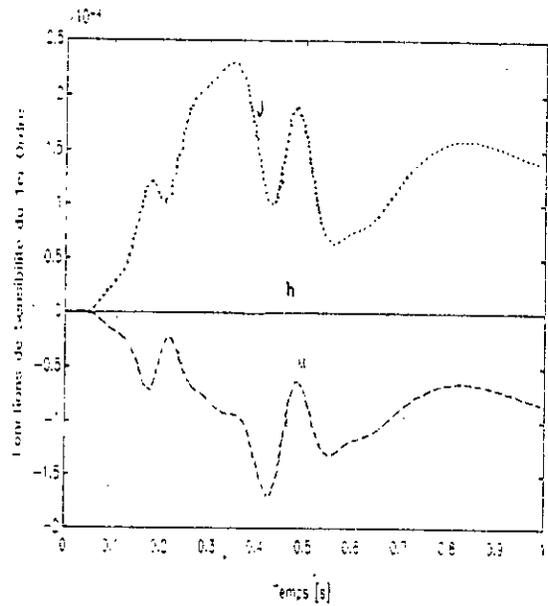
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 5.08 Fonctions de sensibilité standards du 1^{er} ordre relatives au déplacement de l'essieu avant (a) et arrière (c) et au déplacement de l'avant et de l'arrière du châssis (b) et (d), en réponse à un échelon de perturbation, pour une pré-information de 0.2s et une variation d'une unité de mesure des paramètres h, M et J.

5.2.2.b Utilisation de la fonction de pourcentage de sensibilité du 1^{er} ordre

Pour les conditions suivantes:

- une variation de 50% des paramètres h , M et J ,
- un échelon de perturbation,
- un temps de pré-information de 0.2s et
- une vitesse de 10 m/s,

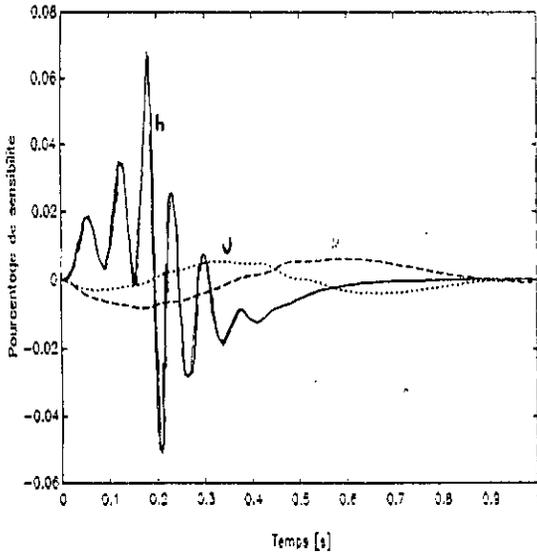
les fonctions de pourcentage de sensibilité relatives aux déplacements verticaux à l'avant et à l'arrière du véhicule sont données dans la figure 5.09.

Il est constaté que la variation du paramètre h influe sur les déplacements des essieux avant et arrière. Par contre, on note que les variations des paramètres M et J touchent les déplacements avant et arrière du châssis. Cette influence est surtout constatée au moment de l'intervention de la perturbation extérieure.

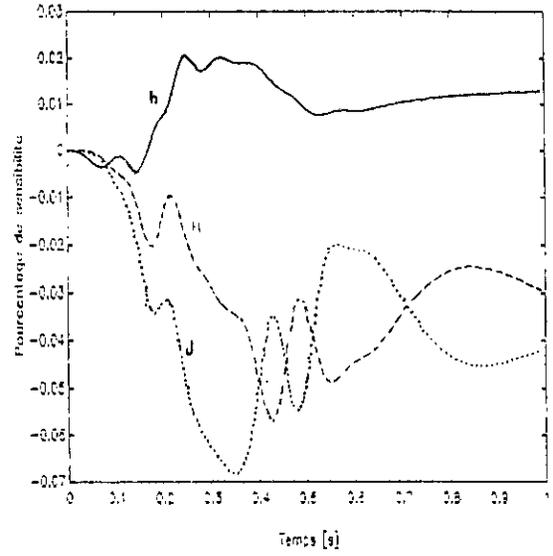
Toute fois, il faut signaler qu'après ce moment, les déplacements verticaux des essieux avant et arrière du système augmenté (4.42) deviennent les mêmes que celles du système nominal du fait que les fonctions de pourcentage correspondantes, données respectivement les figures 5.09 (a) et 5.09 (c), s'annulent en régime établi. Ceci se justifie par le fait que les roues avant et arrière sont obligées, par conception, à garder un contact ferme avec le profil de la route afin de satisfaire l'exigence de la sécurité. Par contre, les déplacements nominaux avant et arrière du châssis sont modifiés en régime établi à cause de la présence d'erreurs statiques dans les fonctions de pourcentage de sensibilité correspondantes données dans les figures 5.09 (b) et 5.09 (d).

Ceci est dû essentiellement au temps de pré-information court de 0.2s. L'annulation de ces erreurs statiques est considérée dans la section 5.2.4.

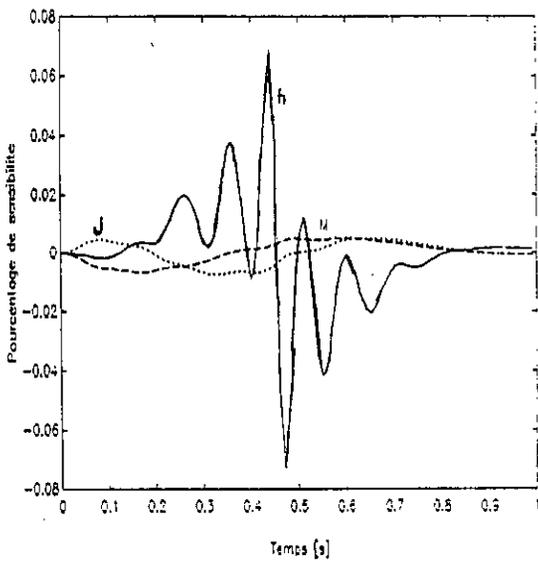
Pour un pourcentage de variation de 50% dans les paramètres h , M et J et sans l'application de la technique développée au chapitre 3, les fonctions de pourcentage de sensibilité relatives aux déplacements verticaux respectivement à l'avant et à l'arrière du véhicule sont données dans la figure 5.10. La comparaison de ces dernières avec celles données dans la figure 5.09 respectivement, montre que la sensibilité du système est réduite à la moitié, lorsque la technique de réduction optimale de la sensibilité est utilisée.



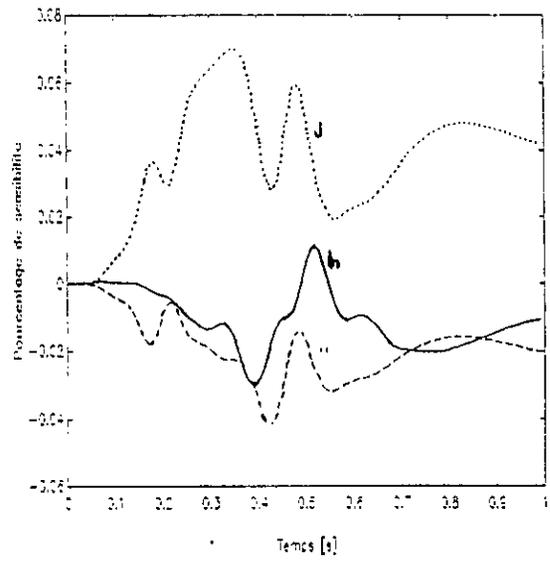
(a)



(b)

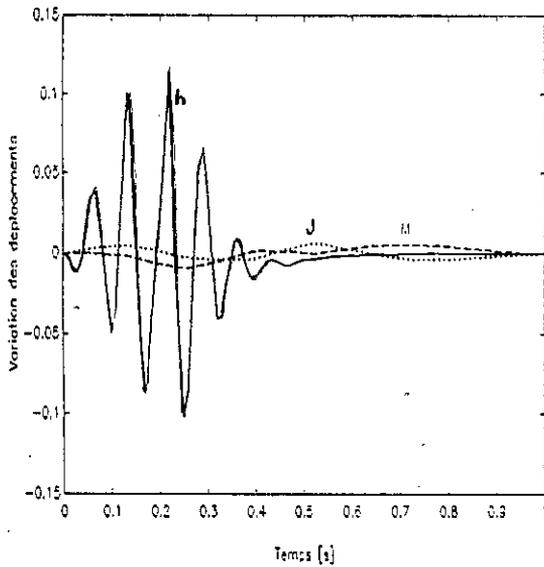


(c)

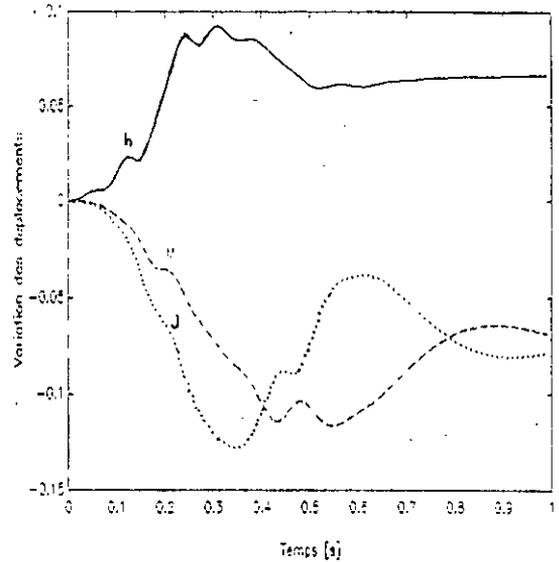


(d)

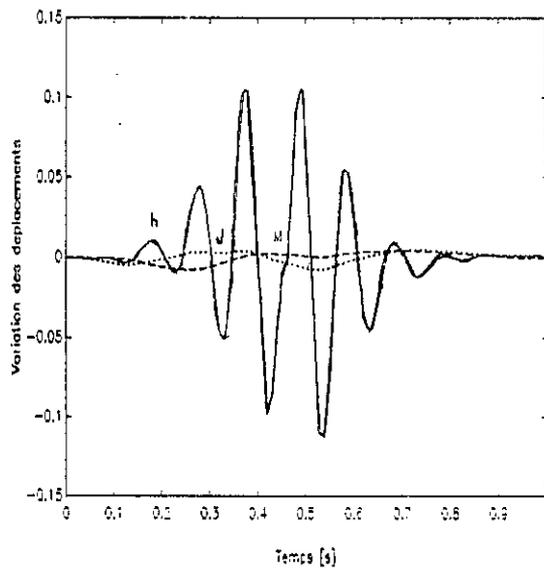
Figure 5.09 Fonctions de pourcentage de sensibilité du 1^{er} ordre relatives au déplacement de l'essieu avant (a) et arrière (c) et au déplacement de l'avant et de l'arrière du châssis (b) et (d), en réponse à un échelon de perturbation, pour une pré-information de 0.2s et une variation de 50% des paramètres h, M et J (avec l'utilisation de la technique de réduction de la sensibilité).



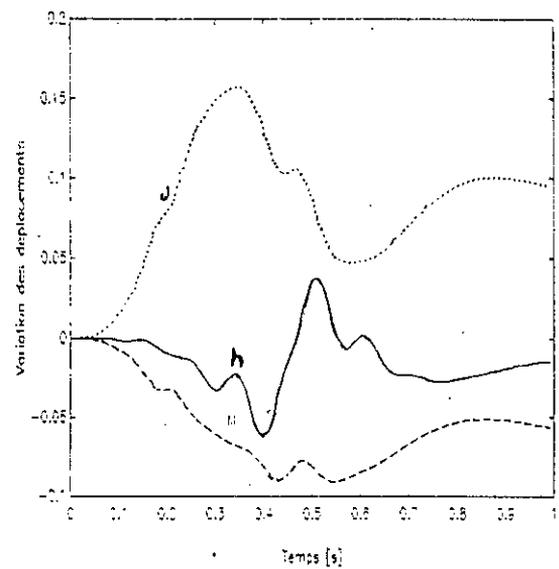
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 5.10 Fonctions de pourcentage de sensibilité du 1^{er} ordre relatives au déplacement de l'essieu avant (a) et arrière (c) et au déplacement de l'avant et de l'arrière du châssis (b) et (d), en réponse à un échelon de perturbation, pour une pré-information de 0.2s et une variation de 50% des paramètres h, M et J (sans l'utilisation de la technique de réduction de la sensibilité).

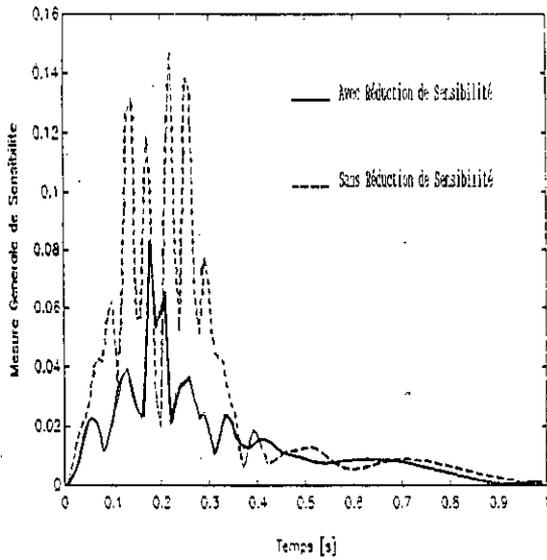
Ceci montre clairement l'avantage de la technique optimale de réduction de sensibilité présentée au chapitre 3. Il est évident que cette technique ne considère que la variation d'un seul paramètre à la fois. Cependant, en pratique souvent plusieurs paramètres peuvent varier en même temps d'où la préférence d'utiliser une mesure générale de sensibilité.

5.2.2.c Mesure générale de sensibilité

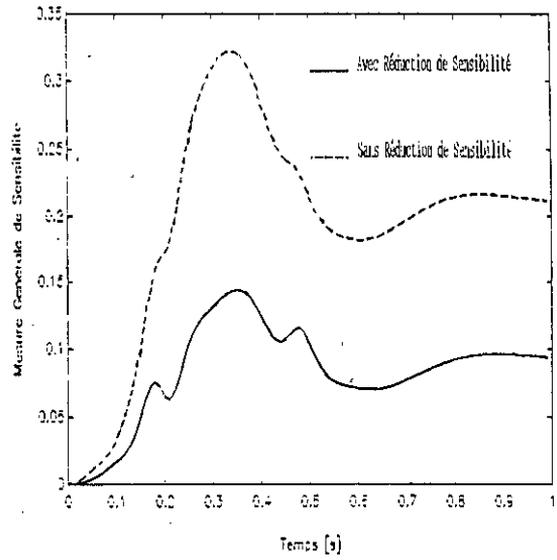
En utilisant la fonction de pourcentage de sensibilité et en appliquant la définition mathématique de la mesure générale de sensibilité donnée dans l'annexe B, l'effet de la variation simultanée de 50% de tous les paramètres du système sur les déplacements avant et arrière du véhicule est montré dans la figure 5.11.

En effet, il est montré dans les figures 5.11 (a) et 5.11 (c) que la mesure générale de sensibilité relative aux déplacements des essieux avant et arrière est réduite respectivement de 14% et 14.5% à 8% et 9% par rapport à l'unité, en utilisant la technique optimale de réduction de la sensibilité. Toutefois, il faut noter que dans les deux cas, la sensibilité générale relative aux déplacements des essieux s'annule en régime établi à cause de la cessation de perturbations.

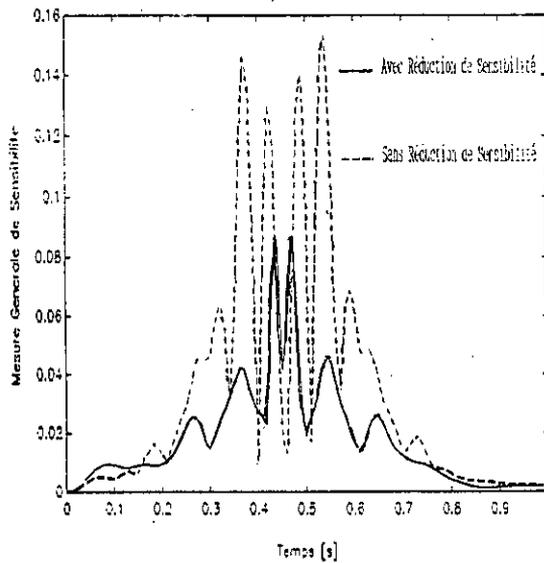
De même, il est montré dans les figures 5.11 (b) et 5.11 (d) que la mesure générale de sensibilité relative aux déplacements avant et arrière du châssis est réduite respectivement à la moitié, à l'aide de la technique optimale de réduction de la sensibilité. Cependant, dans les deux cas les erreurs statiques ne sont pas annulées à cause du temps de pré-information court de 0.2s.



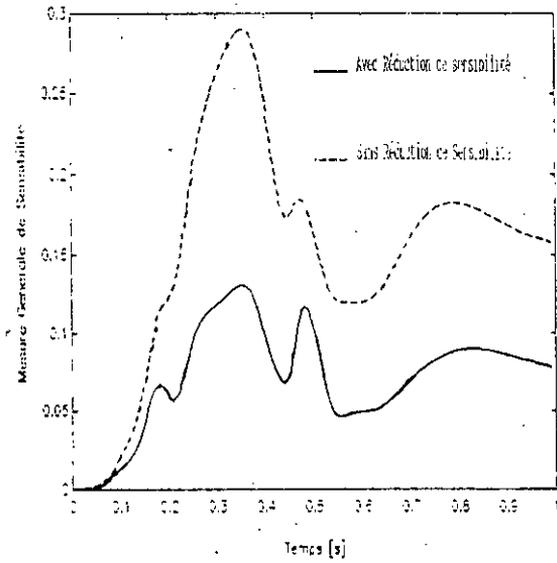
(a)



(b)



(c)



(d)

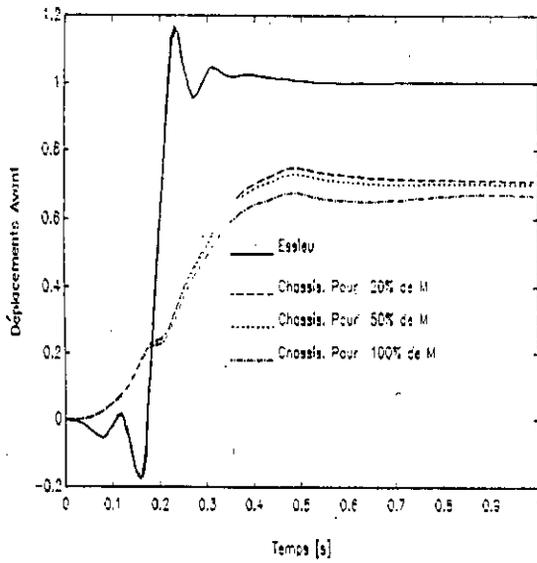
Figure 5.11 Mesures générales de sensibilité relatives au déplacement de l'essieu avant (a) et arrière (c) et au déplacement de l'avant et de l'arrière du châssis (b) et (d), en réponse à un échelon de perturbation, pour une pré-information de 0.2s et une variation simultanée de 50% de tous les paramètres du système (Avec et sans l'utilisation de la technique de réduction de la sensibilité).

5.2.3 Effet de la variation de la masse du (châssis/véhicule) et des matrices de pondération du critère de sensibilité

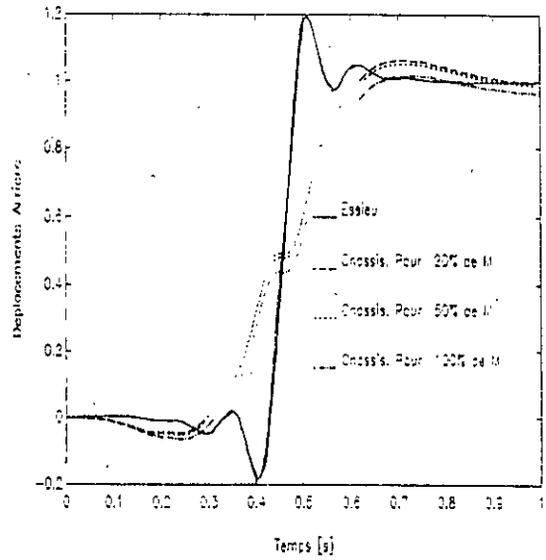
En pratique la valeur de la masse du (châssis/véhicule) est constamment soumise à des variations dues généralement à la descente et à la montée des passagers. Pour ce fait, l'effet de la variation de ce paramètre particulier sur les déplacements avant et arrière du châssis est montré sur la figure 5.12.

Ainsi, pour différents pourcentages de variations de la masse du châssis M , les pourcentages de sensibilité relatifs aux déplacements avant et arrière du châssis sont donnés respectivement dans les figures 5.12 (c) et 5.12 (d). Celles-ci montrent clairement que l'augmentation de M (de 100%) introduit un pourcentage de variation de -10.5% relativement au déplacement avant du châssis et -7.5% relativement à celui de l'arrière.

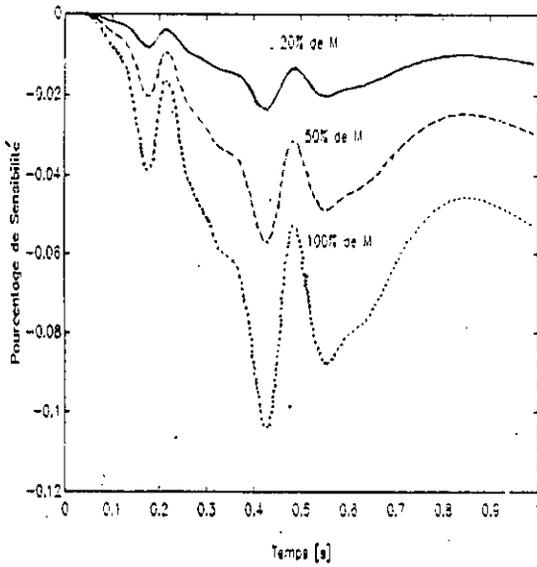
Il faut noter que les résultats établis sont satisfaisants si les matrices de pondérations relatives au critère de sensibilité (4.39) sont égales à celles du critère de performance (4.24). L'effet de la variation de celles-ci est montré dans la figure 5.13, pour un temps de pré-information de 0.2s , un échelon de perturbation et une variation de 50% du paramètre M .



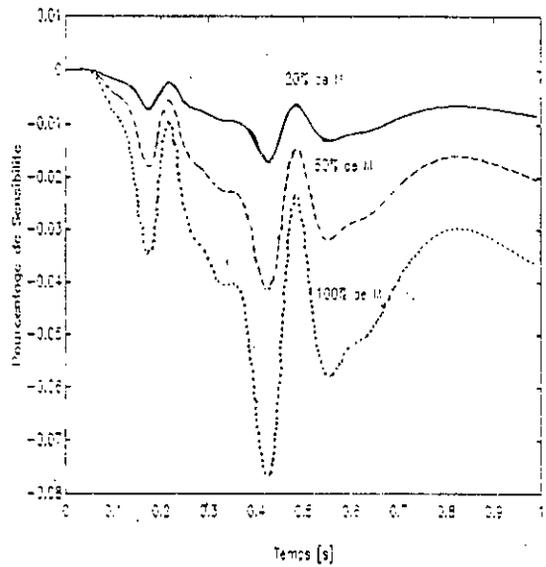
(a)



(b)

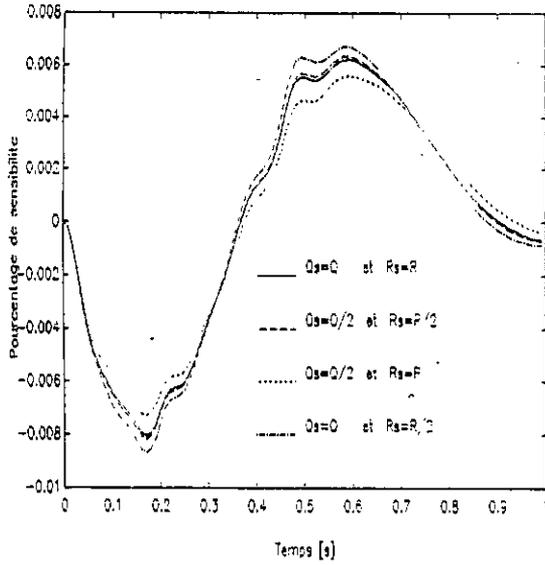


(c)

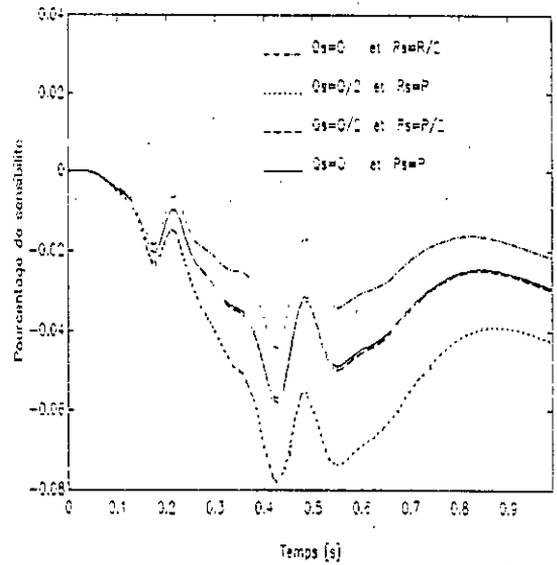


(d)

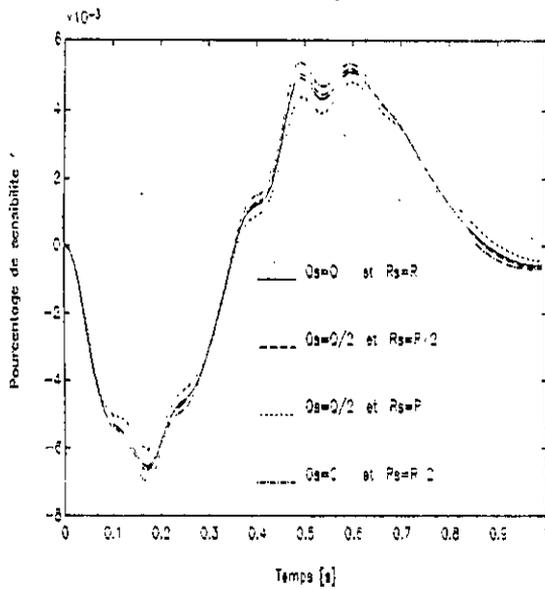
Figure 5.12 Déplacements avant et arrière des essieux et du châssis (a) et (b) ainsi que les pourcentages de sensibilité relatifs aux déplacements avant et arrière du châssis (c) et (d), en réponse à un échelon de perturbation, pour un pré-information de 0.2s et des variations de 20%, 50% et 100% du paramètre M.



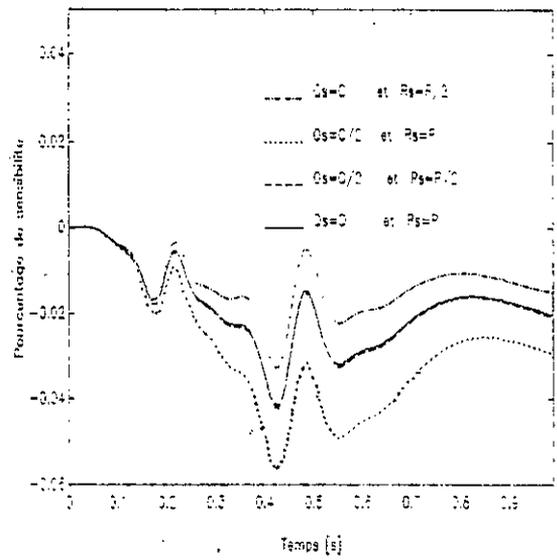
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 5.13 Variation, en fonction des matrices de pondération Q_s et R_s , des fonctions de pourcentage de sensibilité relatives au déplacement de l'essieu avant (a) et arrière (c) et au déplacement de l'avant et de l'arrière du châssis (b) et (d), en réponse à un échelon de perturbation, pour un pré-information de 0.2s et une variation de 50% du paramètre M.

5.2.4. Association d'une commande intégrale au problème du véhicule

L'utilisation d'un temps de pré-information inférieur à cinq fois la constante du temps associée au pôle dominant du système en boucle fermée, provoque la présence d'une erreur statique entre les déplacements des essieux et du châssis ainsi qu'entre leurs fonctions de sensibilité respectives, en réponse à un échelon de perturbation [Louam, 90] (Cf Figure 5.12).

Sans la considération de perturbations paramétriques, et à partir des valeurs propres de la matrice d'évolution nominale du système en boucle fermée:

$$\begin{matrix} -26.3029 \pm 78.2704i & -6.4965 \pm 7.8652i \\ -19.2075 \pm 56.5951i & -7.8514 \pm 9.6223i \end{matrix} \quad (5.5)$$

la constante du temps associée au pôle dominant est alors sensiblement égale, d'après (5.5), à 0.154s.

Lorsqu'une variation de 20%, 50% et 100% des valeurs des paramètres du système est considérée, les constantes de temps associées au pôle dominant du système augmenté (4.42) sont alors données dans le tableau ci-dessous:

Paramètres du système	Constantes de temps associées au pôle dominant		
	20 %	50 %	100 %
h	0.1581	0.1648	0.1764
M1	0.1540	0.1541	0.1542
M3	0.1539	0.1540	0.1540
M	0.1606	0.1714	0.1898
J	0.1554	0.1592	0.1702
a	0.1588	0.1685	0.1869
b	0.1556	0.1582	0.1710

Tableau 5.01. Variation des constantes de temps associées au pôle dominant en fonction de la variation des paramètres du système.

Le tableau 5.01 montre clairement que la constante de temps relative à la variation du paramètre M est plus grande que toutes les constantes de temps relatives à la variation des autres paramètres du système. Ceci justifie notre particulière considération du paramètre M lors de l'élaboration des résultats de simulation précédents ainsi que ceux qui vont être donnés dans la présente section.

De même, il a été indiqué dans [Davis and Thompson, 88] qu'en appliquant la théorie de la commande optimale à la conception des systèmes de suspension active pour les véhicules, ces systèmes présentent aussi une erreur statique entre les déplacements des essieux et ceux du châssis, en réponse à des forces statiques ou à des rampes.

Dans cette section, on montre comment éliminer ou diminuer les erreurs statiques non désirables dans le cas d'un échelon de perturbation, lorsque les variations paramétriques sont considérées. Pour ce fait, nous envisageons l'emploi d'une commande intégrale comme à l'accoutumance [Ray, 81] [Moussaoui and Louam, 93]. Dans le but d'adapter une telle action à notre système, les expressions (4.42) et (4.43) doivent être reformulées comme suit:

$$\dot{x}_{17} = x_1 - x_2, \quad (5.6)$$

$$\dot{x}_{18} = x_3 - x_4, \quad (5.7)$$

$$\dot{x}_{19} = z_1 - z_2, \quad (5.8)$$

$$\dot{x}_{20} = z_3 - z_4. \quad (5.9)$$

Ces quatre nouvelles variables contiennent les variables d'état et leurs fonctions de sensibilité respectives pour lesquelles une action intégrale est désirable.

En tenant compte des expressions (5.6) à (5.9), l'équation du système (4.42) est modifiée comme suit:

$$\dot{\tilde{x}}_s(t, \alpha) = \tilde{A}_s(\alpha) \tilde{x}_s(t, \alpha) + \tilde{B}_s(\alpha) u_s(t, \alpha) + \tilde{D}_s(\alpha) w(t), \quad (5.10)$$

Ainsi, en satisfaisant les mêmes conditions que celles données dans la section 5.1, pour les nouvelles matrices ($\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}$ et $\tilde{\Gamma}$), la solution au problème du véhicule exprimé par (5.10) et (5.13), pour un temps de pré-information fini, est alors donnée par:

$$\tilde{u}_{s_t}(t, \alpha) = -\tilde{R}^{-1} \tilde{B}_s [\tilde{K}_s \tilde{x}_{s_t}(t, \alpha) - \tilde{g}_{s_t}(t, \alpha)], \quad (5.14)$$

où la matrice \tilde{K}_s est la solution de l'équation algébrique de Riccati:

$$0 = \tilde{K}_s \tilde{A}_s + \tilde{A}_s^T \tilde{K}_s - \tilde{K}_s \tilde{B}_s \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_s^T \tilde{K}_s + \tilde{Q} \quad (5.15)$$

et $\tilde{g}_{s_t}(t, \alpha)$ est le vecteur d'anticipation donné par:

$$\tilde{g}_{s_t}(t, \alpha) = \int_t^{t+\tau} e^{(\xi-t)\tilde{A}_{s_c}^T} \tilde{Y}_s w(\xi) d\xi, \quad t > 0 \quad (5.16)$$

avec

$$\tilde{g}_{s_t}(t+\tau, \alpha) = 0,$$

$$\tilde{A}_{s_c} = \tilde{A}_s - \tilde{B}_s \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_s^T \tilde{K}_s,$$

$$\tilde{Y}_s = \tilde{Q} \tilde{N}_s - \tilde{K}_s \tilde{D}_s,$$

où

$$\tilde{N}_s = \begin{pmatrix} N_s \\ - & - & - \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La trajectoire d'état optimale, en réponse à la loi de commande (5.14), est alors donnée par:

$$\dot{\tilde{x}}_{s_t}(t, \alpha) = \tilde{A}_{s_c} \tilde{x}_{s_t}(t, \alpha) + \tilde{B}_s \tilde{R}^{-1} \tilde{B}_s^T \tilde{g}_{s_t}(t, \alpha) + \tilde{D}_s w(t). \quad (5.17)$$

Les résultats d'une simulation numérique de durée de 1s et sous des perturbations de type échelons unitaires sont donnés dans ce qui suit.

Avec une variation de 20% et de 100% du paramètre caractérisant la masse du véhicule M , les réponses indicielles, pour une vitesse de déplacement de 10m/s et un temps de pré-information de 0.2s, sont données dans les figures 5.14 et 5.16.

Celles-ci montrent clairement comment les écarts entre les déplacements des essieux et du châssis sont éliminés, en ajoutant deux actions intégrales respectivement à l'avant et à l'arrière du véhicule (pour $q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = 10$).

Les fonctions de pourcentage de sensibilité relatives aux déplacements avant et arrière du véhicule sont données respectivement dans les figures 5.15 et 5.17. Celles-ci ne représentent que les déplacements du châssis du fait que les déplacements des essieux ne sont pas visiblement altérés par les actions intégrales.

En se référant à la figure 5.15, on constate que l'association d'une commande intégrale fait diminuer le pourcentage de sensibilité maximal relatif au déplacement avant du châssis de 10.5% à 7.8%, pour une variation de 100% du paramètre M . De même, on montre à partir des figures 5.15 et 5.17, que les écarts statiques sont éliminés en régime établi, même si le système est soumis à une variation de 100% du paramètre M . Cependant, il faut noter que pour les actions intégrales considérées, l'élimination de l'écart statique, pour une augmentation de 20% de la masse du châssis M , est plus rapide que dans le cas où le système est soumis à une variation de 100% du paramètre M .

Notons que ces résultats ne sont établis qu'à l'aide d'une énergie supplémentaire, d'où l'augmentation de la valeur globale du critère de performance, avec ou sans modèle de sensibilité.

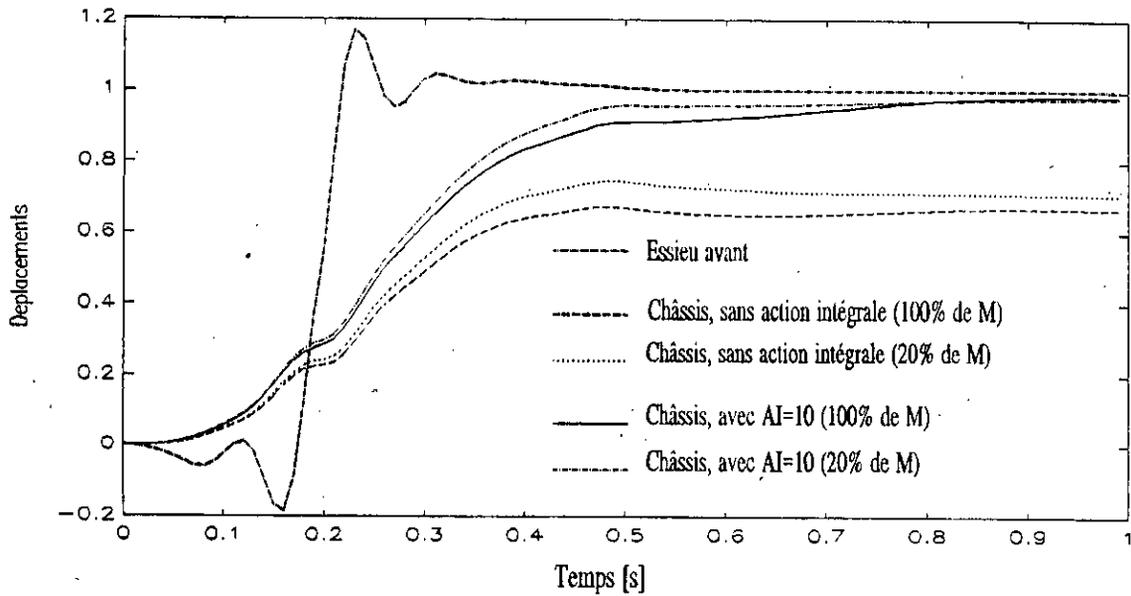


Figure 5.14 Déplacements verticaux avants du véhicule, en réponse à un échelon de perturbation pour un $\tau=0.2s$ et des variations de 20% et 100% de M , avec $q_5 = q_6 = q_8 = q_9 = AI = 10$.

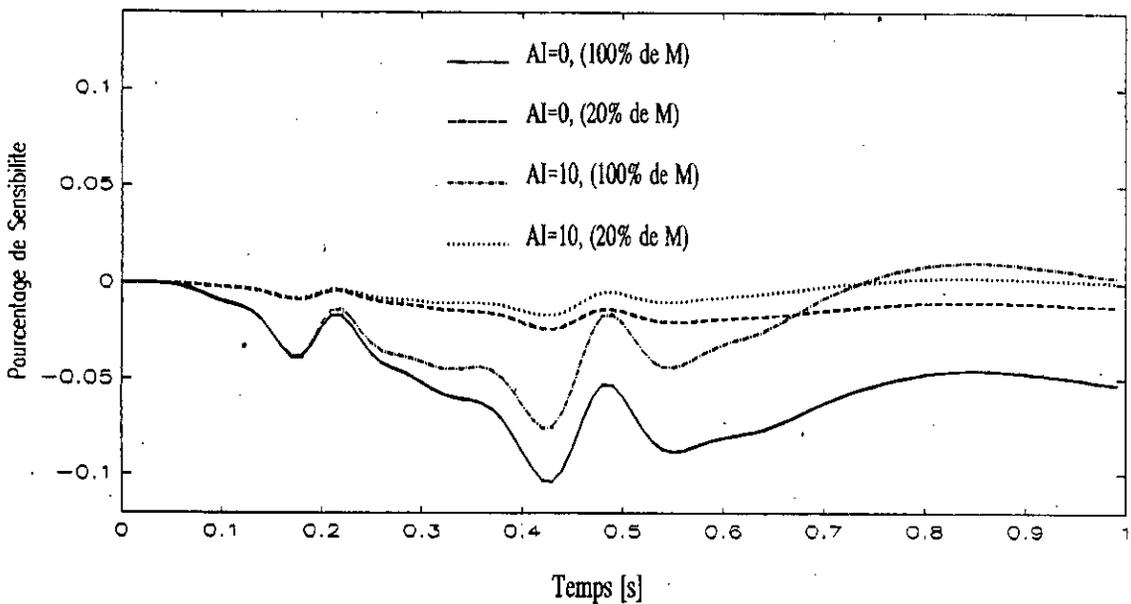


Figure 5.15 Pourcentages de sensibilité relatifs aux déplacements avants du châssis pour des variations de 20% et 100% de M et un $\tau = 0.2s$, avec $q_5 = q_6 = q_7 = q_8 = AI = 10$.

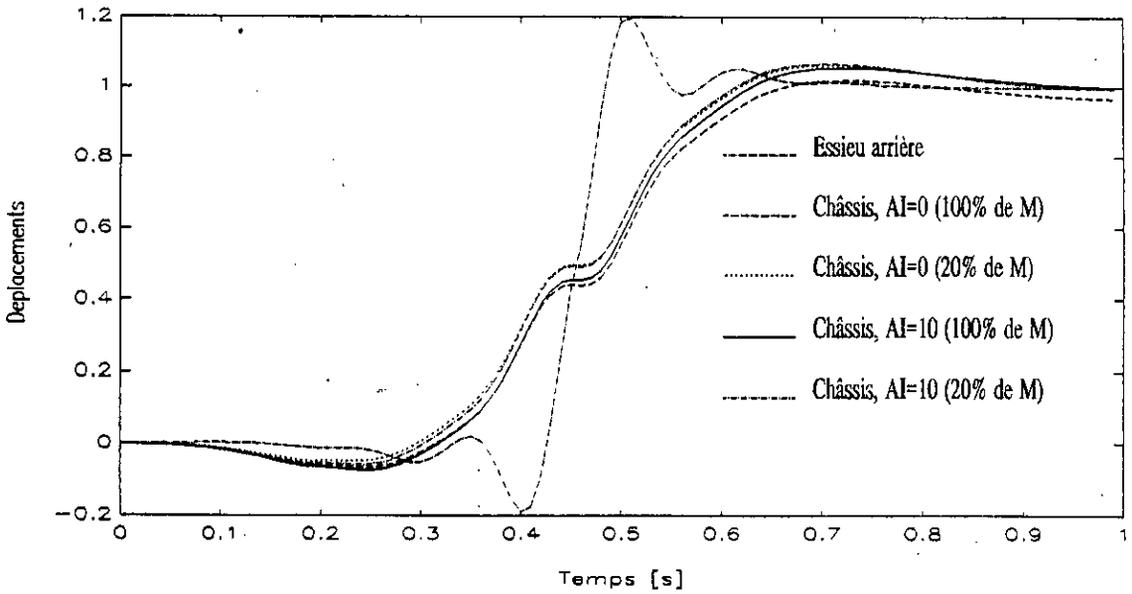


Figure 5.16 Déplacements verticaux arrière, en réponse à un échelon de perturbation, pour $\tau=0.2s$ et des variations de 20% et 100% du paramètre M, avec $q_5=q_6=q_7=q_8=AI=10$.

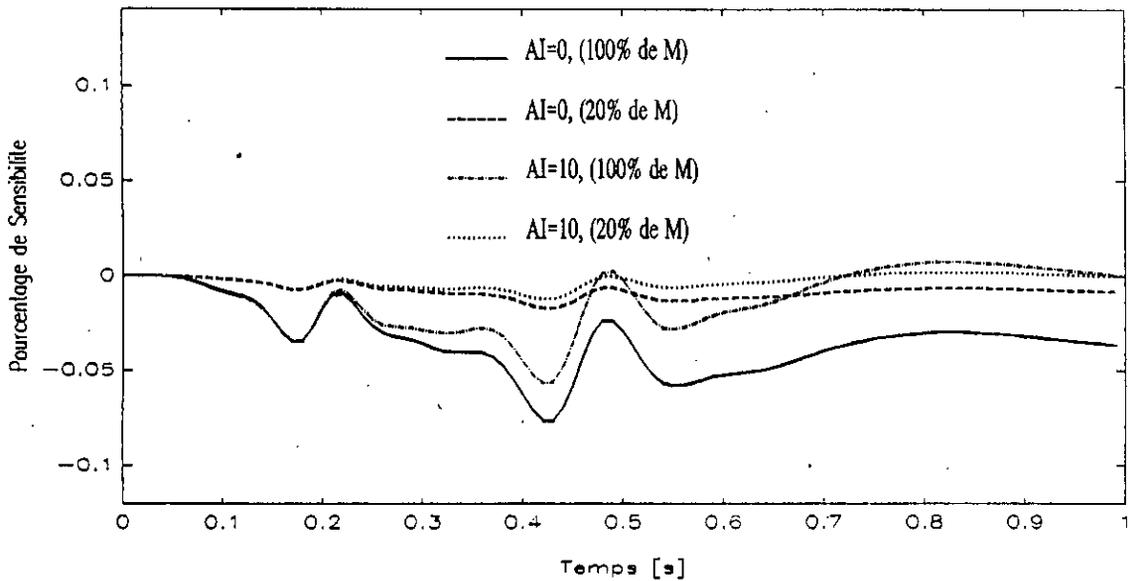


Figure 5.17 Pourcentages de sensibilité relatifs aux déplacements verticaux arrière du châssis pour $\tau=0.2s$, des variation de 20% et 100% de M et $q_5=q_6=q_7=q_8=AI=10$.

5.3. CONCLUSION

Une application des résultats développés dans le troisième chapitre a été considérée dans le présent chapitre. Le système considéré est un système linéaire de suspension active pour les véhicules. Le profil de la route représentant la perturbation extérieure à poursuivre est supposé borné et continu et aucune restriction n'a été posée sur la vitesse de déplacement du véhicule.

Une bonne performance et une réduction optimale de la sensibilité par rapport à la variation des paramètres ne peuvent être garanties, que si le temps de pré-information est assez grand.

En effet, dans la région optimale le schéma de contrôle appliqué dans ce chapitre offre de bonnes performances et une insensibilité par rapport aux variations paramétriques, même si celles-ci sont relativement élevées. Ceci est valable pour les deux extrémités du véhicule (avant et arrière).

L'importance de l'utilisation de différents types de fonctions de sensibilité est bien mise à l'évidence. En effet, il est montré que la fonction de sensibilité standard du 1^{ère} ordre est à utiliser, surtout lorsqu'une variation paramétrique d'une unité de mesure est considérée. Lorsqu'un pourcentage spécifié de variation paramétrique est considéré, il est plus judicieux d'appliquer la fonction de pourcentage de sensibilité. Enfin, une mesure générale de la sensibilité est effectuée pour mettre en évidence l'effet de la variation simultanée de tous les paramètres du système.

Dans le cas où le temps de pré-information est court, il est montré qu'une action intégrale peut être ajoutée au schéma de commande sans complications majeurs du système considéré et, en particulier, cette commande pourrait être adéquate pour l'élimination de l'erreur statique existant entre le déplacement des essieux et ceux du châssis ainsi qu'entre leurs fonctions de sensibilité respectives, en réponse à un échelon de perturbation.

Dans le cas de notre système et les perturbations paramétriques considérées, comme dans [Louam, 90], un temps de pré-information de 0.3s a été montré suffisant pour la satisfaction de bonnes performances du système avec une réduction optimale de la sensibilité par rapport aux variations paramétriques.

Ceci montre bien l'avantage de la technique développée dans le chapitre 3.

En conclusion, l'exploitation des résultats de simulation effectué sur notre système particulier montre bien que la commande pré-informée et pour des temps de preview non très courts, on peut garder suffisamment des avantages de la commande optimale linéaire quadratique classique, notamment en ce qui concerne la robustesse et l'insensibilité aux variations paramétriques.

D'autre part, la considération d'un seul cadre unifié pour l'optimisation des performances d'un système et la réduction de sa sensibilité, s'est avérée très concluante et bénéfique.

CHAPITRE 6

**CONCLUSION GENERALE
ET
PERSPECTIVES**

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

L'étude de l'effet de la variation des paramètres sur les réponses dynamiques des systèmes physiques a été et demeure la préoccupation de plusieurs chercheurs en particulier dans le domaine industriel.

Cependant, cette étude n'a été généralement considérée qu'après la conception et l'optimisation des performances globales des systèmes physiques.

Les résultats obtenus dans cette thèse ont montré l'utilité de l'emploi d'une nouvelle méthodologie concernant l'étude de la sensibilité des systèmes dynamiques, par rapport à la variation de leurs paramètres, dans un contexte unifié et optimal.

Cette nouvelle méthodologie est basée sur l'augmentation du modèle d'un système dynamique par un modèle de sensibilité et la modification du critère de performance en lui ajoutant un critère de sensibilité.

Il est alors montré que cette nouvelle formulation permet de considérer simultanément le problème d'optimisation des performances du système ainsi que l'analyse de sa sensibilité.

Aussi, il est montré que celle-ci permet de réduire, d'une manière optimale, la sensibilité du système aux variations paramétriques. De plus, l'élaboration de la solution relative au nouveau problème est opérée sans aucune restriction sur le problème initial.

Ainsi, il est montré qu'avec l'application de cette nouvelle approche, la robustesse du contrôleur pré-informé est préservée en présence de variations paramétriques.

Afin de palier à certains problèmes qui restent en suspens, de nombreuses études ultérieures peuvent être entreprises.

En particulier, si l'on désire appliquer l'approche développée dans ce présent travail à d'autres stratégies de commandes telles les stratégies de commandes non linéaires.

De plus, une réduction du modèle augmenté pourrait être envisagée en vue de la synthèse d'un contrôleur pré-informé optimal réduit.

De même, l'étude de l'influence de la dynamique des actionneurs sur les performances du contrôleur pré-informé optimal est indispensable en vue de sa mise en oeuvre pratique.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

Anderson B.D.O and Moore J.B. (1971), " Linear Optimal Control ", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey:

Anderson B.D.O and Moore J.B. (1989), " Linear Optimal Control-Quadratic Methods", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Arstein Z. and Leizarowitz A. (1985), " Tracking Periodic Signals with the Overtaking Criterion ", IEEE Transactions on Automatic Control (Tech. Notes and Correp.), AC-30(11), pp.1123-1126.

Aström K.J. and Wittenmark B. (1989), " Computer Controlled Systems-Theory and Design ", Prentice Hall Inc., 2ndÉdition, Englewood Cliffs, New Jersey.

Athans M. and Falb P.L. (1966), " Optimal Control - An Introduction to the Theory and its Applications ", McGraw-Hill Book Company, New York.

Bekey G.A. and Tomovic R. (1966), " Sensitivity of Discrete Systems to Variation of Sampling Interval ", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-(11), pp.284-287.

Bender. E.K. (1968), " Optimum Linear Preview Control with Application to Vehicle Suspension ", Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, 90(2), pp.213-221.

Bode W.H. (1945), " Network Analysis and Feedback Amplifier Design", D. Van Nostrand Co., Inc., New York, N.Y.

Bryton R.K. and Spence R. (1980), " Sensitivity and Optimization ", Elsevier, New York.

Bühler H. (1984), " Conception des Systèmes Automatiques ", Presses Polytechniques Romandes.

- Clarke D.W, Mohtadi C. and Tuffs P.S. (1987), " Generalised Predictive Control. Part I: The Basic Algorithm. Part 2: Extensions and Interpretations ", *Automatica*, Vol. 23, No.2.
- Cruz G.B. Jr. and Perkins W.R. (1964), " A New Approach to the Sensitivity Problem In Multivariable Feedback System Design ", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-(9), pp.216-223.
- Davis B.R. and Thompson A.G. (1988), " Optimal Linear Active Suspensions with Inegral Constraints ", *Vehicle System Dynamics*, 17(6), pp.357-366.
- Fleming P.J. and Newmann M.M. (1973), " Trajectory Sensitivity Reduction in the Optimal Linear Regulator ", *Recent Mathematical Developments*, Bell I.J, pp.137-151.
- Fleming P.J. and Newmann M.M. (1977), " Comments and Corrections to Optimization with Trajectory Sensitivity Consideration ", *IEEE Transactions on Automatic Control (Tech. Notes and Correp.)*, Vol. AC-(22), pp.151.
- Frank P.M. (1978), " Introduction to system Sensitivity Theory ", Academic Press, New York.
- Friedland B. (1987), " Control System design (An Introduction to State Space Methods) ", McGraw-Hill Book Company, New York.
- Gopal M. and Pratapachandran Nair P. (1984), " Sensitivity Reduced Optimal Linear Regulator with Prescribed Closed Loop Eigenvalues ", *IEEE Transactions on Automatic Control (Tech. Notes and Correp.)*, Vol. AC-(29), No. 7, pp.661-664.
- Graupe D. (1974), " Optimal Linear Control Subject to Sensitivity Constraints ", *IEEE Transactions on Automatic Control (Tech. Notes and Correp.)*, Vol. AC-(), pp.593-594.
- Jezequel L. and Roberti V. (1992), " Comportement d'une Suspension Semi-Active Pré-informée ", *Mécanique Matériaux Électricité*, Revue No.445.
- Kawagoe K. and iguchi M. (1985), " Semi-Active Control and Optimum Preview Control Applications to Vehicle Suspension ", *Japan Society of A. Eng. Review*, pp.24-31.
- Krindler E. (1969), " Formulation of the Minimum Trajectory Sensitivity Problem ", *IEEE Transactions on Automatic Control (Tech. Notes and Correp.)*, Vol. AC-(14), pp.206-207.

Kuo B.C. (1980), " Digital Control Systems ", Holt-Saunders International Editions.

Kuo B.C. (1991), " Automatic Control Systems ", Sixth Edition, Printice-Hall International Editions.

Kwon W.H. and Byun D.G. (1989), " Receding Horizon Tracking Control As a Predictive Control and its Stability Properties ", Int. Journal of Control, Vol. 50, No. 5, pp.1807-1824.

Leizarowitz A. (1986), " Tracking Nonperiodic Trajectories with the Overtaking Criterion", Applied Mathematics and Optimization, Springer-Verlag, New York, 14, pp.155-171.

Louam N. (1990), " The Application of the Linear Optimal Control Theory to the Design of Active Automotive Suspensions ", Ph.D Thesis, Leeds University, UK.

Louam N., Wilson D.A. and Sharp R.S. (1992), " Optimization and Performance Enhancement of Active Suspensions for Automobiles under Preview of the Road ", Vehicule System Dynamics, 21(1), pp.39-63.

Louam N. (1992), " Overtaking Optimality Approach for Solving the Linear Infinite-Time Tracking Problem with External Inputs ", Colloque Sur les Méthodes et Outils d'Aide à la Décision, MOAD'92, University de Béjaia, Algérie.

Louam N. (1994), " Commande Pré-informée ", Algerian Journal of Technology, Series B et C, Vol.(10), No.1, Ecole Nationale Polytechnique Publications, pp.17-28.

Moussaoui A. and Louam N. (1993), " Application of the Linear Optimum Proportional-Plus - Integral Preview Control in the Design of an Active Automotive Suspension ", Proceedings of the Maghreb Conference on Automatics and Industrial Electronics, COMAEI'93, INES Djelfa, Algeria, Vol.I, pp.63-69.

Moussaoui A. and Louam N. (1994), " Sensitivity Model Derivation In the Design of Linear Optimum Preview Control Scheme. Application to an Active Automotive Suspension ", Proceedings of the Conference on Modelling and Simulation of Electrical Systems, CMSES'94, ENSET Skikda, Algeria, pp.251-257.

Nalacz A.G. and Wicher J. (1988), " Design Sensitivity Analysis of Mechanical Systems in Frequency Domain ", Journal of sound and Vibration, Vol.120, No.3, pp.517-526.

- Nalecz A.G. (1988)**, " Sensitivity Analysis of Vehicle Design Attributes in Frequency Domain ", *Vehicle System Dynamics*, Vol.17, No.3, pp.141-163.
- Nalecz A.G. (1989)**, " Application of Sensitivity Methods to Analysis and Synthesis of Vehicle Dynamic Systems ", *Vehicle System Dynamics*, Vol.18, pp.1-44.
- Ray W.H. (1981)**, " Advanced process Control ", McGraw-Hill Book Company, New York.
- Redfield R.C and Karnopp D.C. (1989)**, " Performance Sensitivity of an Actively Damped Vehicle Suspension to Feedback Variation ", *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 111(3), pp.51-60.
- Sage A.P. (1968)**, " Optimum Systems Control ", Printice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Sasaki M., Kamiya J. and Shimogo T. (1976)**, " Optimal Preview Control of Vehicle Suspension ", *Bulletin of JSME*, 19(129), pp.265-273.
- Siljak D.D. and Dorf R.C. (1965)**, " On the Minimization of Sensitivity in Optimal Control Systems ", *Proc. Third Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, University of Illinois, pp.225-229.
- Subbayan R., Sarma V.V.S. and Vaithilingam M.C. (1977)**, " Trajectory Sensitivity Modification In Optimal Linear Systems ", *IEEE Transactions on Automatic Control (Tech. Notes and Correp.)*, Vol. AC-(22), pp.657-659.
- Thompson A.G. and Pearce C.E.M. (1979)**, " An Optimal Suspension for an Automobile on a Random Road ", *Society of Automotive Engineers Inc., Paper No.790478*.
- Thompson A.G., Davis B.R. and Pearce C.E.M. (1980)**, " An Optimal Linear Active Suspension with Finite Road Preview ", *Society of Automotive Engineers Inc., Paper No.800520*.
- Thompson A.G. (1984)**, " Optimal and Suboptimal Linear Active Suspensions for Road Vehicles ", *Vehicle System Dynamics*, 13, pp.61-72.
- Tomizuka M. (1976)**, " Optimum Linear Preview Control with Application to Vehicle Suspension - Revisited ", *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 98(3), pp.309-315.

Tomovic R. (1963), " Sensitivity Analysis of Dynamic Systems ", McGraw-Hill, Inc., New York.

Vanderplaats G.N. and Yoshida N. (1984), " Efficient Calculation of Optimum Design Sensitivity ", AIAA Paper 84-0855.

ANNEXES

ANNEXE. A

LISTE DES PARAMETRES DU SYSTEME

PARAMETRES	UNITE	VALEURS NOMINALES
Masse du châssis	Kg	$M = 505.10$
Masse des roues	Kg	$M_1 = 28.58, M_3 = 54.43$
Pondérations		$r_1 = r_3 = 8e-10$
Pondérations		$q_1 = q_3 = 10$
Pondérations		$q_2 = q_4 = 1$
Raideurs des pneus	N/m	$h_1 = h_3 = 155900$
Moment d'inertie	Kg.m ²	$J = 651.00$
Empattement	m	$L = 2.5654$
a	m	$a = 1.0978$
b	m	$b = 1.4676$
Décollements statiques des roues	m	$\delta_{tr} = \delta_{tr} = 0.02$
Limites admissibles des espaces de fonctionnement	m	$\delta_{wf} = \delta_{wr} = 0.063$

ANNEXE. B

DIFFERENTS TYPES DE FONCTIONS DE SENSIBILITE

Type de sensibilité	Expression analytique	Expression numérique	Unité
Standard du 1 ^{er} ordre	$\frac{\partial V}{\partial \alpha}$	$\frac{\Delta V}{\Delta \alpha}$	$\frac{V}{\alpha}$
Standard du 2 ^{ième} ordre	$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}$	$\frac{\Delta \left(\frac{\Delta V}{\Delta \alpha} \right)}{\Delta \alpha}$	$\frac{V}{\alpha^2}$
Pourcentage du 1 ^{er} ordre	$\frac{\partial V}{\partial \alpha} \Delta \alpha$	ΔV	V
Logarithmique du 1 ^{er} ordre	$\frac{\partial V}{\partial \alpha} \frac{\alpha}{V}$	$\frac{\Delta V}{\Delta \alpha} \frac{\alpha}{V}$	
Mesure générale de sensibilité	$GS_v = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_{iv}^2}$		