

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

THEME
***Modélisation du comportement
mécanique
d'une plaque orthotrope***

Etudié par :

Monsieur : K. LEKMACHE

Promoteur :

M^{elle} : N. AMOR

Membres du jury :

Pr : S. RECHAK (président)
Mr : BELKACEMI (examinateur)
Mr : TAZI (examinateur)
M^{elle} : N. AMOR (rapporteur)

Promotion : 2000

تهدف هذه الدراسة إلى تحليل السلوك الميكانيكي لصفحة غير متماثلة الخصائص في المستوي بطريقتين:
- الطريقة التحليلية المعتمدة على نشر سلاسل فورييه (Fourier) لصفحة معرضة للانثناء
- طريقة العناصر المنتهية لتحليل السلوك المستوي لصفحة خاضعة لإجهادات عمودية

RESUME :

Le but de ce travail consiste à analyser le comportement mécanique d'une plaque orthotrope avec deux méthodes :

La méthode analytique basée sur le développement en séries de Fourier a été adoptée pour une plaque orthotrope en flexion.

La méthode des éléments finis pour analyser le comportement en membrane d'une plaque chargée transversalement.

MOTS CLES :

Plaque orthotrope ; Membrane ; Flexion ; Méthode des éléments finis ; Méthode analytique.

ABSTRACT :

The aim of this study consists to analysing the mechanical behaviour of a orthotrope-plate with two methods:

The analytic method based on the development in sets of Fourier to been adopted for a plate orthotrope in bending.

The finite element method to analyse the behaviour transversely in membrane of a loaded plate.

Dédicaces

A mes parents, envers qui j'éprouve la plus sincère reconnaissance et la plus grande estime

A mes frères et sœurs, qui ont été toujours à mes côtés et spécialement à mon petit frère « Arezki » à qui je souhaite un prompt rétablissement

A ma grande sœur et à son mari Kamid

A mes amis de toujours, Noureddine, Samir, Ayes, Samir, Sid-Ali, Abdessalam, Mohamed et Khalel ainsi qu'à leurs familles respectives

A tous ceux que j'aime

Je dédie ce travail

Karim

Remerciements

Je tiens à remercier ma promotrice M^{lle} N. AMOR pour son aide et son suivi.

Je remercie également M^r F. BELBLIDIA pour ces conseils précieux et pour la documentation qu'il m'a envoyée à travers l'INTERNET.

Mes remerciements les plus vifs à M^r H. FERDJANI de l'université de BLIDA pour sa gentillesse et son aide.

Je n'omettrai pas d'exprimer ma gratitude à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail et spécialement :

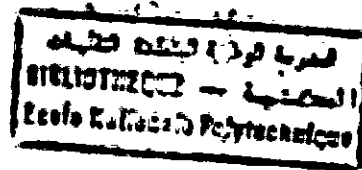
Mon ami Nouredine qui s'est sacrifié pendant des semaines afin de m'aider.

Mes amis : Hakim, Mokrane, Hadj-amar, Farouk, Lotfi de l'ENP.

Au collectif de MASTER-SERVICE ; mohamed et samir

Au personnel de la bibliothèque centrale de l'ENP.

SOMMAIRE :



Introduction

Préambule	01
Objectifs et définitions	02

Chapitre I : Généralités sur la théorie des stratifiés

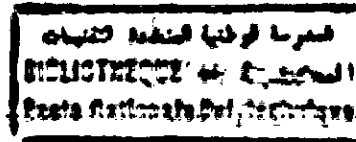
I.1 Champ des déplacements	03
I.1.1 Expressions générales	03
I.1.2 Déformation d'une normale	04
I.1.3 Schémas du premier degré	05
I.2 Champ des déformations	07
I.2.1 Expressions générales	07
I.2.2 Schéma du premier degré	08
I.3 Champ des contraintes	09
I.3.1 Simplification dans le cadre de la théorie des plaques	09
I.4 Résultantes et moments	11
I.5 Relations fondamentales des plaques dans le cas d'un schéma du premier degré	12
I.5.1 Relations fondamentales de la mécanique des matériaux	12
I.5.2 Relations fondamentales relatives au résultats en membrane	12
I.5.3 Relation fondamentales relatives aux moments	15
I.5.4 Résumé des relations fondamentales	17
I.5.5 Problème de statique	19

Chapitre II : Théorie classique des stratifiés

II.1 Champ des déformations	20
II.1.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés	20
II.1.2 Expression du champ des déformations	20
II.2 Champ des contraintes	23
II.2.1 Forme du champ des contraintes	23
II.2.2 Expression des contraintes	23
II.3 Expression des résultantes en moments	24
II.3.1 Résultantes en membrane	24
II.3.2 Résultantes en moment	25
II.3.3 Différents types de stratifiés	27
II.3.3.1 Stratifié symétrique	27
II.3.3.2 Stratifiés antisymétrique	28
II.3.3.3 Stratifiés croisés	29

Chapitre III : Comportement élastique d'un matériau composite orthotrope

III.1 loi de Hooke pour un composite orthotrope	35
III.1.1 Composite orthotrope	35
III.1.2 Matrices de rigidité et de souplesse	35



III.2 Modules de l'ingénieur	37
III.2.1 Traction dans le sens chaîne	37
III.2.2 Traction dans le sens trame	37
III.2.3 Traction transversal	38
III.2.4 relation entre module d'Young et coefficients de Poisson	38
III.2.5 Essai de cisaillement	38
III.3 Expression des constantes de rigidités et de souplesse en fonction des modules de l'ingénieur	40
III.3.1 Constantes de souplesse	40
III.3.2 Constantes de rigidité	40
III.3.3 Restriction sur les coefficients d'élasticité	41
III.4 Comportement anisotrope à deux dimensions	43
III.4.1 Plaque orthotrope rapportée à ses axes	43
III.4.2 Plaque orthotrope non rapportée à ses axes	44
III.4.2.1 Variation des modules technologiques en fonction de l'angle θ	46

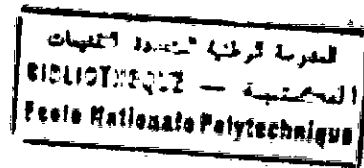
Chapitre IV : Approche analytique d'une plaque en flexion

IV.1 Flexion des plaques stratifiés orthotropes	49
IV.1.1 Introduction	49
IV.1.2 Plaques rectangulaires en appuis simples	49
IV.2 Application (cas d'une charge uniforme)	53
IV.3 Résultats et commentaires	57

Chapitre V : Formulation par la méthode des éléments finis

Introduction	71
V.1 Rappel des théorèmes fondamentaux	72
V.1.1 Equation d'équilibre à deux dimensions	73
V.1.2 Relation déformation-déplacement en bidimensionnel	73
V.1.3 Lois de comportement d'une plaque orthotrope	73
V.1.3.1 Plaque orthotrope rapportée à ses axes	75
V.1.3.2 Plaque orthotrope non rapportée à ses axes	75
V.2 Plaque rectangulaire	75
V.2.1 L'élément plaque rectangulaire à 8ddl	76
V.2.1.1 Les fonctions déplacements	77
V.2.1.2 Les relations déformations-déplacements	77
V.2.1.3 Les relations éformations-contraintes	78
V.2.1.4 La matrice de rigidité par la méthode de l'énergie	80
V.3 Résultats	
Conclusion	
Annexe	
Liste des figures	
Références bibliographiques	

Liste des figures :



Chapitre I :

Fig. 1.1 : Elément de stratifié.

Fig. 1.2 : Déformée d'une normale (prise en compte du gauchissement)

Fig. 1.3 : Déformation dans le cas d'un schéma du 1^{er} degré

Fig. 1.4 : Caractérisation de la déformée en un point en l'absence de cisaillement transverse.

Fig. 1.5 : Schématisation des résultats en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié.

Chapitre II :

Fig. II.1 : Stratifié croisés symétrique et antisymétrique.

Chapitre III :

Fig. III.1 : Couche de matériau composite orthotrope

Fig. III.2 : Rotation des axes de référence

Fig. III.3 : La variation des constantes élastiques en fonction de l'angle θ

Chapitre IV :

Fig. IV.1 : Plaque rectangulaire soumise à une charge répartie

Fig. IV.2 : Plaque orthotrope en appuis simples

Chapitre V :

Fig. V.1 : Contraintes agissant sur un élément de plaque

Fig. V.2 : élément rectangulaire à 8 ddl

Introduction

Préambule :

Un matériau composite est constitué de deux ou plusieurs matériaux différents et possède des propriétés mécaniques meilleures que celles de chacun de ces constituants (Universalis, Vol.10, p.616).

Les composites constitués de deux phases principales sont en fait les plus nombreux ; l'une des phases se présente généralement sous une forme fibreuse, continue ou discontinue, disposée d'une façon judicieuse à l'intérieur de la deuxième phase dénommée matrice.

Les filaments jouent, en principe, un rôle de renfort : leurs mission est de supporter la plus grande partie des efforts appliqués sur le composite ; pour ce faire, il est nécessaire que leurs modules d'élasticité et leurs résistance soient nettement plus élevés que ceux de la matrice. Pour les composites verre-résine, le rapport entre les modules du renfort et celui de la matrice est de l'ordre de 25 ; pour les résistance, ce rapport varie de 40 à 60.

Une troisième phase peut être ajoutée aux deux précédentes (microbilles ou microsphères de verre, charges minérales...) pour obtenir certaines propriétés particulières, ou bien pour faciliter la fabrication même du matériau composite.

Lorsqu'une matrice est renforcée simultanément par des filaments de nature différente, verre et carbone par exemple, la composite ainsi obtenu porte le nom spécifique d'*hybride*.

Cette association entre fibres et matrice permet de bénéficier simultanément des avantages de chacune des deux phases : forte résistance et fort module pour les fibres, faible densité et bonne résistance aux agents chimiques des matrices. De plus, leurs méthodes de fabrication exigent généralement des investissements inférieurs à ceux nécessaires aux matériaux métalliques[2], pour des pièces ou structures ayant à assumer des fonctions comparables.

Ces qualités particulières de forte résistance, associées à une faible densité, font que les premières utilisations des composites, en tant que *matériau de structure*, se sont produites dans le domaine aérospace. Actuellement, leur domaine d'applications comme matériaux de structure s'est considérablement élargi, et atteint pratiquement tous les grands domaines de l'industrie, bâtiment, aéronautique, construction navale...etc.

Objectifs et définitions :

Cette étude n'a pas la prétention de cerner tout le domaine des matériaux composites qui est vaste et dont les problèmes présentent un grand degré de complexité, de ce fait, nous avons axé notre travail sur les stratifiés composés de couches orthotropes afin de réduire cette complexité

Nous allons, à travers ce document présenter de façon explicite la théorie du comportement mécanique d'un matériaux orthotrope, ensuite nous présenterons une approche analytique pour une plaque en flexion pour différents cas :

- une plaque constituée de trois couches orthotropes orthogonales ($0^\circ-90^\circ-0^\circ$)
- une plaque constituée d'une couche orthotrope à 0° .
- Une plaque constituée d'une couche orthotrope à 90° .

Pour les contraintes planes on a établi un code de calcul par la méthode des éléments finis qui permet de déterminer les déplacements en chaque nœud de la structure.

Matériau orthotrope :

Matériau élastique présentant en tout points deux symétrie de comportement mécanique chacune par rapport à un plan, les deux plans étant orthogonaux.

Matériau anisotrope :

Matériau dont la relation du comportement dépend de la direction envisagée

Matériau hétérogène :

Matériau dont la relation du comportement dépend du point étudié.

Chapitre I
Généralités
sur la théorie
des stratifiés

1. Champ des déplacements :

1.1 Expressions générales :

L'hypothèse de base de la théorie générale des plaques réside dans l'expression des déplacements en tout point M d'une plaque, de coordonnées (x, y, z)

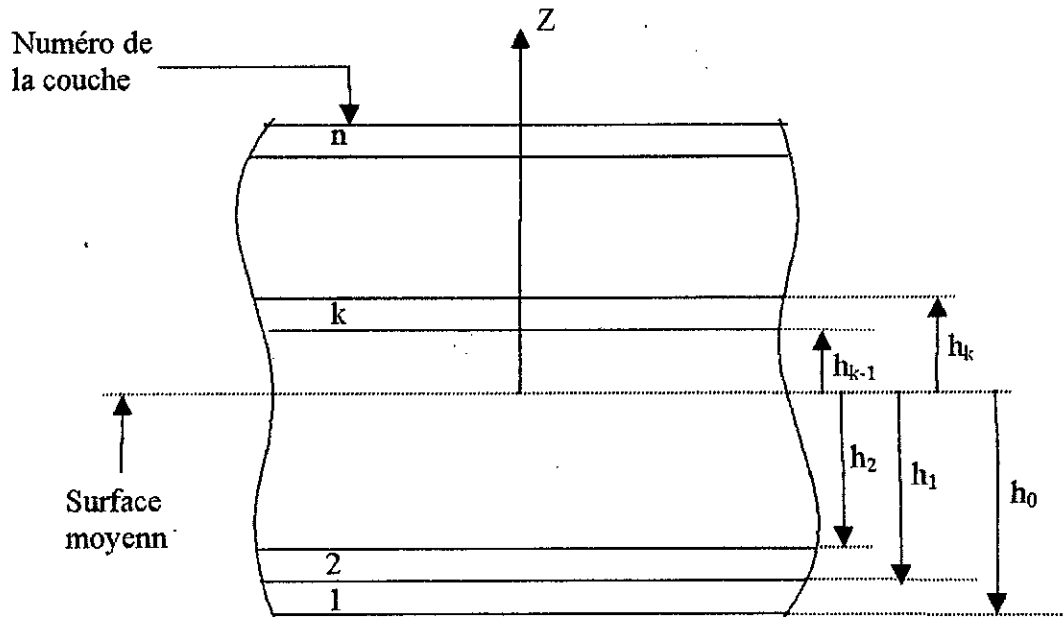


Fig.1. Élément de stratifié

sous la forme de polynômes en z , généralement limités au degré 3, et de coefficients dépendant de (x, y) . Le champ des déplacements est alors écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z \varphi_x(x, y) + z^2 \psi_x(x, y) + z^3 \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z \varphi_y(x, y) + z^2 \psi_y(x, y) + z^3 \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) + z \varphi_z(x, y) + z^2 \psi_z(x, y) \end{aligned} \quad (I.1)$$

Cette forme du champ des déplacements répond aux conditions de compatibilité des déformations [RB], et permet de prendre en compte un gauchissement éventuel de la section droite des plaques lors de la déformation. Dans le cas de problèmes de dynamique, le facteur temps doit être introduit dans la relation (I.1).

Le déplacement d'un point quelconque $M(x, y, z)$ est donc développé, suivant (1), en série de la variable z à coefficient en (x, y) , à partir du point de référence $M_0(x, y, 0)$ du plan (O, x, y) . Le champ de déplacement du point M_0 sera noté par la suite suivant l'une des notations :

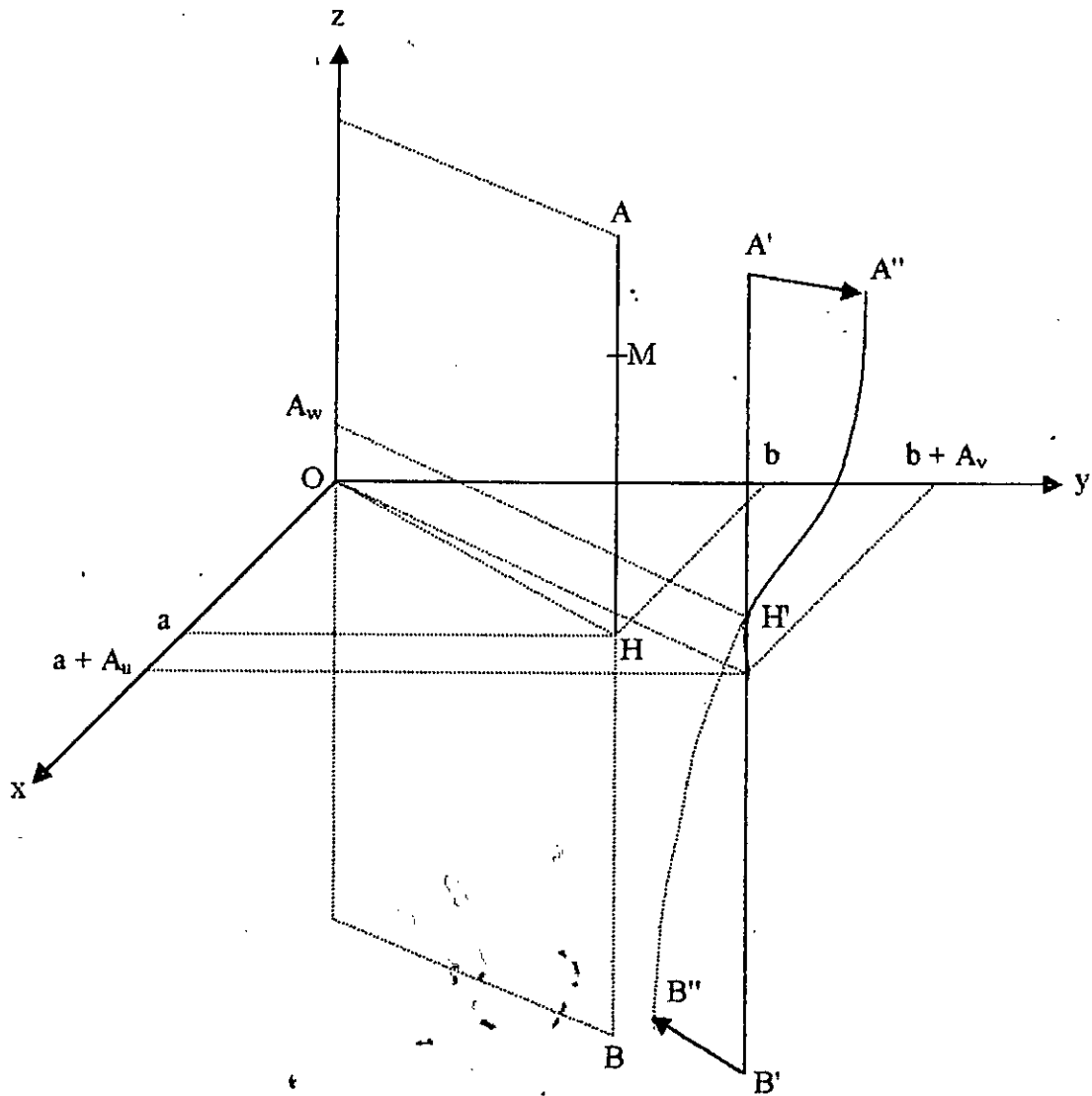


Fig. I.2 Déformée d'une normale AB au plan moyen. Prise en compte du gauchissement

1.3 Schémas du premier degré :

Les schémas les plus simples et les plus utilisés (par exemple schéma de Hencky-mindLin, schéma de Kirchhoff) [1] se réduisent à des schémas du premier degré de la forme :

$$\begin{aligned}
 u(x,y,z) &= u(x,y,0) + z \varphi_x(x,y) \\
 v(x,y,z) &= v(x,y,0) + z \varphi_y(x,y) \\
 w(x,y,z) &= w(x,y,0)
 \end{aligned}
 \tag{I.5}$$

$$\begin{aligned}
 u_0 &= u_0(x,y) = u(x,y,0) \\
 v_0 &= v_0(x,y) = v(x,y,0) \\
 w_0 &= w_0(x,y) = w(x,y,0)
 \end{aligned}
 \tag{I.2}$$

1.2 Déformation d'une normale :

Cherchons la déformée d'une normale A au plan de la plaque, définie par $(x = a, y = b)$ (fig. I. 2). Tout point M appartenant à la normale AB a pour coordonnées (a,b,z) et son déplacement s'écrit d'après (1) :

$$\begin{aligned}
 u(a,b,z) &= u(a,b,0) + z \varphi_x(x,y) + z^2 \psi_x(a,b) + z^3 \phi_x(a,b) \\
 v(a,b,z) &= v(a,b,0) + z \varphi_y(a,b) + z^2 \psi_y(a,b) + z^3 \phi_y(a,b) \\
 w(a,b,z) &= w(a,b,0) + z \varphi_z(a,b) + z^2 \psi_z(a,b)
 \end{aligned}
 \tag{I.3}$$

l'équation de la déformée de la normale AB s'écrit donc, avec des notations évidentes, sous la forme polynomiale en z :

$$\begin{aligned}
 u(a,b,z) &= A_u + B_u z + C_u z^2 + D_u z^3 \\
 v(a,b,z) &= A_v + B_v z + C_v z^2 + D_v z^3 \\
 w(a,b,z) &= A_w + B_w z + C_w z^2
 \end{aligned}
 \tag{I.4}$$

Lors de la déformation de la plaque, la normale AB subit donc :

- Une translation sans déformation suivant A'B', composé d'une translation $[A_u = u(a,b,0), A_v = v(a,b,0)]$ dans le plan (O,x,y) et d'une translation $[A_w = w(a,b,0)]$ suivant l'axe \vec{Oz}
- Puis une déformation suivant A''B'', exprimée par les termes en z et dont la forme dépend du degré z. Dans le cas général, la courbe obtenue est une courbe gauche.

Le champ des déplacements (I.1) prend donc en compte un gauchissement éventuel des normales lors de la déformation de la plaque [1].

ou

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z \varphi_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z \varphi_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \quad (I.6)$$

Dans un schéma du premier degré, la déformée d'une normale AB est donnée par :

$$\begin{aligned} u(a,b,z) &= A_u + B_u z \\ v(a,b,z) &= A_v + B_v z \\ w(a,b,z) &= A_w \end{aligned} \quad (I.7)$$

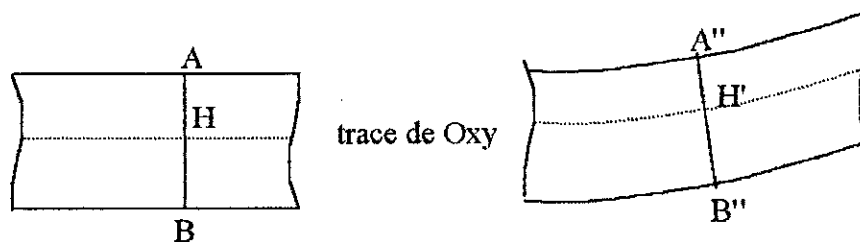


Fig. 1.3 Déformation dans le cas d'un schéma du premier degré, en l'absence de cisaillement transverse

La déformée A''B'' reste dans ce cas un segment de droite. D'où la propriété :

Les points situés sur une normale au plan moyen (Oxy) avant déformation restent sur un segment de droite au cours de la déformation.

De plus, dans le cas où le cisaillement transverse n'est pas pris en compte [1] les angles ne sont pas modifiés lors de la déformation et la déformée de AB reste normale à la déformée du plan moyen (fig.4). Dans ce cas, la déformée en H (déformée du plan (Oxy) et déformée de la normale AB) pourra être caractérisée (fig. 1.4) par :

- Les déplacements du point H : déplacement dans le plan (Oxy) :
 $[u(a,b,0) = A_u, v(a,b,0) = A_v]$ et déplacement transverse : $[w(a,b,0) = A_w]$;
- Les rotations θ_x et θ_y autour des directions \vec{i} et \vec{j} .

Dans la pratique, il est plus usuel de caractériser la rotation par les angles β_x et β_y (fig.5) reliés à θ_x et θ_y par :

$$\beta_x = \theta_y \quad \text{et} \quad \beta_y = -\theta_x \quad (I.8)$$

Les schémas du premier degré permettent de résoudre la plus part des problèmes élémentaires. Dans le cas où un schéma du premier degré ne permettrait pas d'approcher

convenablement un problème donné, il sera alors nécessaire de passer au 2^{ème} ordre, voire au 3^{ème} ordre.

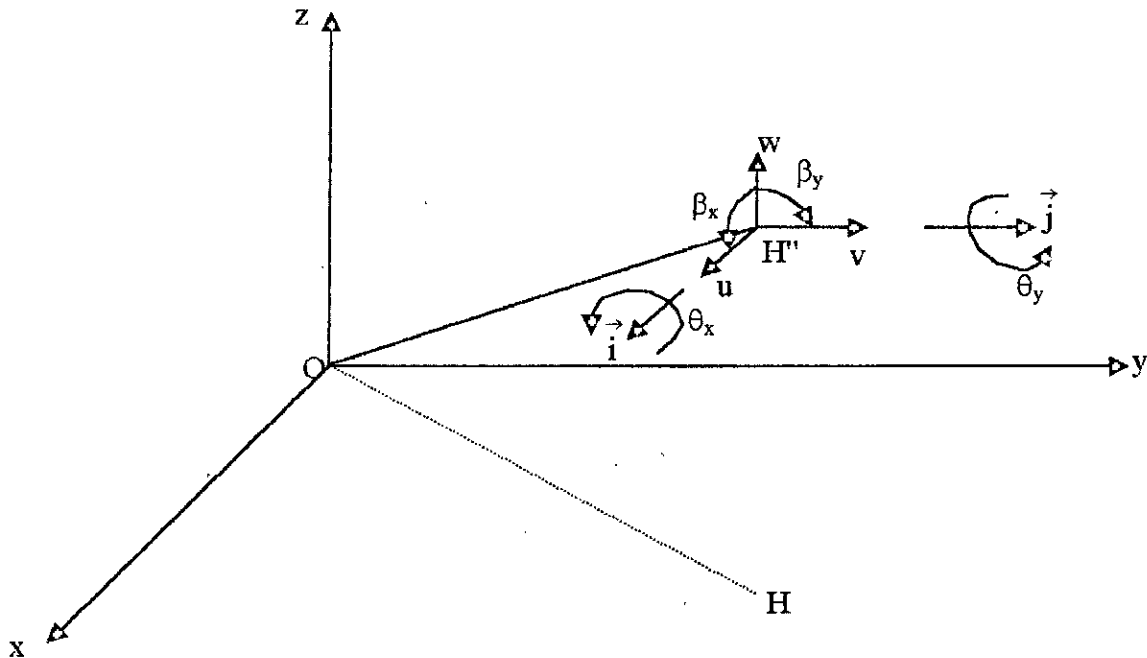


Fig. 1.4 Caractérisation de la déformée en un point, en l'absence de cisaillement transverse

2. Champs des déformations :

2.1 Expressions générales :

Le champ des déformations se déduit du champ (I.1) des déplacements, soit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + z^2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \phi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + z^2 \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + z^3 \frac{\partial \phi_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \varphi_z(x, y) + 2z \psi_z(x, y)$$

(I.9)

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + z^2 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varphi_x \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} + 2\psi_x \right) + z^2 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + 3\phi_x \right)\end{aligned}\quad (I.10)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \varphi_y \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + 2\psi_y \right) + z^2 \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + 3\phi_y \right)\end{aligned}$$

Ces expressions montrent que la troncature utilisée dans les expressions (I.1) du déplacement est consistante, dans le sens que les déformations en cisaillement transverse résultant des déplacements dans le plan sont du même ordre en z que les déformations déterminées par le déplacement transverse w .

2.2 Schéma du premier degré :

Dans le cas d'un schéma du premier degré, le champ des déformations se déduit simplement des relations (I.9) et (I.10) et s'écrit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0\end{aligned}\quad (I.11)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y\end{aligned}\quad (I.12)$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du 1^{er} degré avec cisaillement transverse.

3. Champ des contraintes

3.1 Expression générale :

L'état des contraintes des contraintes en un point M du stratifié s'exprime en fonction du champ des déformations par la relation (I.11) et (I.12). si le point M appartient à la couche K du stratifié, le champ des contraintes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

où C_{ij} sont les coefficients de rigidité de la couche k.

Dans le cas général, le champ des déformations est donné par les expressions (I.11) et (I.12). Il en résulte que les contraintes dans la couche k sont des polynômes en z. La théorie des plaques a pour objet de simplifier le problème à trois dimensions (x,y,z) en un problème à deux dimensions (x,y). La réduction du problème est obtenue par intégration des contraintes suivant l'épaisseur. Cette intégration conduit à introduire les résultantes et moments qui seront définis ultérieurement [6].

3.2 Simplification dans le cadre de la théorie des plaques :

La théorie élémentaire des plaques fait l'hypothèse que les contraintes normales σ_{zz} sont négligeables dans le volume de la plaque, par rapport aux autres composantes σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{xy} . Cette hypothèse est étendue à la théorie des stratifiés, soit :

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (\text{I.14})$$

Cette hypothèse est généralement vérifiée dans la pratique. Si ce n'est pas le cas, la théorie élémentaire des plaques ne peut plus être utilisée.

Avec l'hypothèse précédente, la relation (I.13) contraintes-déformations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

Cette relation peut être réécrite en séparant les contraintes et déformations de cisaillement transverse suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{26} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{36} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{I.16})$$

L'état des contraintes σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} et des déformations ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , γ_{xy} correspond à l'état de contraintes planes. Les contraintes dans une couche k s'expriment à l'aide des coefficients de rigidité Q_{ij} suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{I.17})$$

avec :

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{C_{33}} (C_{13} \varepsilon_{xx} + C_{23} \varepsilon_{yy} + C_{36} \gamma_{xy}) \quad (13)$$

Les coefficients Q_{ij} de la matrice de rigidité réduite de la couche k seront ultérieurement introduit. Par la suite, ils seront notés suivant des notations Q_{ij}^k . La discontinuité de la matrice de rigidité d'une couche à l'autre implique la discontinuité des contraintes au passage d'une couche à l'autre [1].

4. Résultantes et moments

4.1 Résultante en membrane :

Le champ des résultantes en membrane, noté $N(x, y)$, est défini par :

$$N(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k(M) dz \quad (I.19)$$

où $\sigma_k(M)$ est la matrice des contraintes en membrane $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ dans la couche k , soit :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (I.20)$$

N_x, N_y, N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur, respectivement des contraintes normales (suivant x et suivant y) et des contraintes de cisaillement, dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées symboliquement sur la figure (I.5).

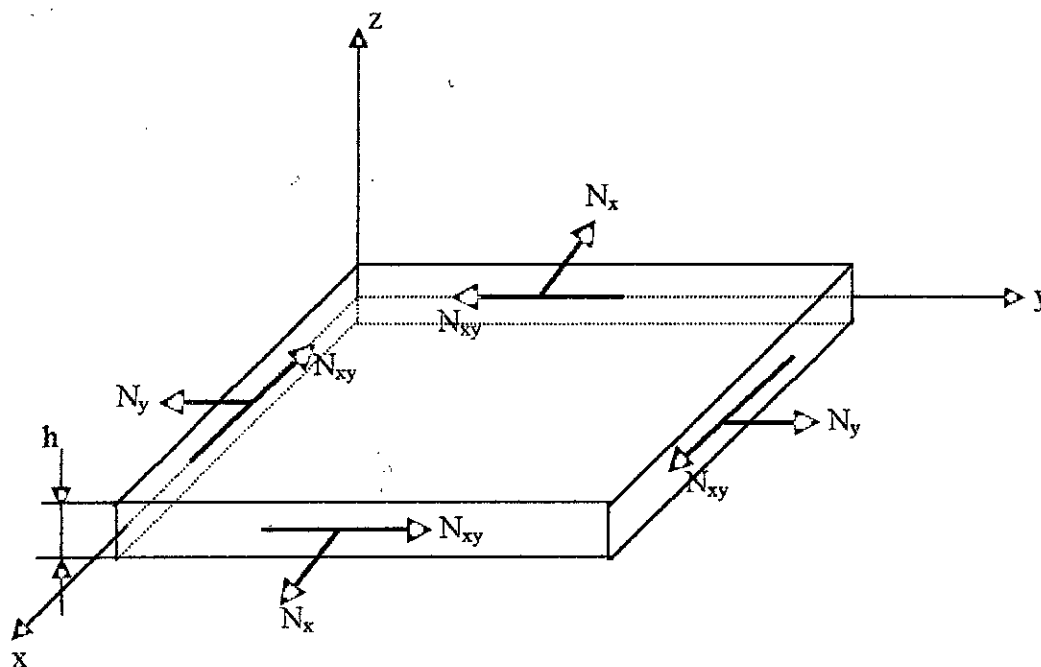


Fig. I.5 Schématisation des résultantes en membrane des actions exercées sur un élément de stratifié

Il faut bien noter que ces résultantes sont relatives à l'unité de longueur de section droite du stratifié. Ceci signifie que, par exemple, la résultante de l'action exercée sur un élément de surface normal à la direction \vec{i} et de longueur dy (fig. I.5) est la superposition de :

- La résultante normale $dR_x = N_x dy$
- La résultante de cisaillement $dR_{xy} = N_{xy} dy$

(I.21)

La discontinuité des contraintes en passant d'une couche à l'autre conduit à réécrire la relation (I.20) sous la forme :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k dz \quad (I.22)$$

5. Relations fondamentales des plaques dans le cas d'un schéma du premier

degré :

5.1 Relations fondamentales de la mécanique des matériaux :

Les relations fondamentales des plaques tirées de la relation fondamentale pour un problème en dynamique sont sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} + f_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} + f_z &= \rho a_z \end{aligned} \quad (I.23)$$

où f_x, f_y, f_z sont les composantes des forces volumiques exercées au point M du matériau.

a_x, a_y, a_z sont les composantes du vecteur accélération du point M, et ρ est la masse volumique au point M.

L'objet de ce paragraphe est de déduire de ces relations les relations fondamentales des plaques dans le cas d'un schéma du premier degré.

5.2 Relations fondamentales relatives aux résultantes de membrane :

L'intégration des relations (I.23), suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales d'un élément de plaque, relatives aux résultantes. L'intégration des deux

premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane. Par exemple, l'intégration de la première équation s'écrit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz \quad (I.24)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (I.25)$$

De même :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz = \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \quad (I.26)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right)$$

où $\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right)$ et $\sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right)$ sont les contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces supérieure et inférieure du stratifié. Ces contraintes sont généralement nulles. Nous les noterons :

$$\tau_{1x} = \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) \quad ; \quad \tau_{2x} = \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \quad (I.27)$$

D'où

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \tau_{1x} - \tau_{2x} \quad (I.28)$$

Enfin, nous poserons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = F_x \quad (I.29)$$

L'intégration du second membre nécessite les expressions des déplacements en fonction de x , y , z et du temps t . Dans un schéma du 1^{er} ordre, elles sont obtenues en introduisant le temps dans les expressions (I.6), soit :

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z \varphi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z \varphi_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \quad (I.30)$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,y,z) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \end{aligned} \quad (I.31)$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (I.32)$$

en posant :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \quad (I.33)$$

la masse surfacique du stratifié au point (x,y) ;

$$R = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz \quad (I.34)$$

L'intégration de la première équation de (I.23) conduit donc finalement à :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (I.35)$$

De même, l'intégration de la deuxième équation de (20) mène à :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (I.36)$$

où τ_{1y} et τ_{2y} tiennent compte des contraintes éventuelles de cisaillement exercées sur les faces :

$$\begin{aligned}\tau_{1y} &= \sigma_y \left(\frac{h}{2} \right) \\ \tau_{2y} &= \sigma_y \left(-\frac{h}{2} \right)\end{aligned}\tag{I.37}$$

et

$$F_y = \int_{-h/2}^{h/2} f_y dz\tag{I.38}$$

5.3 Relations fondamentales relatives aux moments :

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par z les deux premières équations de (I.23), puis en intégrant suivant l'épaisseur, par exemple, la première conduit à :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz\tag{I.39}$$

En intégrant par parties, nous avons :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = [z \sigma_{xz}]_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \frac{h}{2} \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) - Q_x$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = \frac{h}{2} (\tau_{1x} - \tau_{2x}) - Q_x\tag{I.40}$$

Le second membre s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho z \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz + \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz\end{aligned}$$

Soit :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_z dz = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{I.41})$$

en posant :

$$I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz \quad (\text{I.42})$$

I_{xy} est le moment d'inertie par rapport au plan moyen (Oxy) de l'élément de plaque localisé au point (x,y) et ayant des côtés unité.

La première relation des moments s'écrit donc :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2} (\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (\text{I.43})$$

en posant :

$$P_x = \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz \quad (\text{I.44})$$

De même la deuxième équation de (20) conduit à :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2} (\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \quad (\text{I.45})$$

avec :

$$P_y = \int_{-h/2}^{h/2} z f_y dz$$

5.4 Résumé des relations fondamentales :

Les relations fondamentales des plaques sont donc constituées des expressions (I.35), (I.36) (I.43) et (I.45). Soit en les regroupant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{h}{2}(\tau_{1x} + \tau_{2x}) + P_x - Q_x &= R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{h}{2}(\tau_{1y} + \tau_{2y}) + P_y - Q_y &= R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (I.46)$$

avec :

$$\rho_s, R, I_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} (I, Z, Z^2) \rho \, dz$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir une relation indépendante des résultantes de cisaillement suivant :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \quad (I.47)$$

Les équations (I.46) et (I.47) constituent les équations de mouvement de la théorie classique des plaques. Elles sont applicables aussi bien à des plaques homogènes qu'à des plaques stratifiées. Les deux premières équations de (I.46), associées à (I.47), constituent les équations fondamentales des plaques en l'absence de cisaillement transverse, soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x + \tau_{1x} - \tau_{2x} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + F_y + \tau_{1y} - \tau_{2y} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + R \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + I_{xy} \left(\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \varphi_y}{\partial y \partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (I.48)$$

Les grandeurs ρ_s , R , I_{xy} se calculent sans difficulté dans le cas où la plaque est constituée de n couches, la couche k ayant une masse volumique ρ_k . Nous avons :

$$\rho_s = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k \, dz$$

soit :

$$\rho_s = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}) \quad (I.49)$$

de même :

$$R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (I.50)$$

$$I_{xy} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (I.51)$$

Dans la plupart des cas, les termes d'inertie de rotation peuvent être négligés et, en l'absence de forces volumiques et de contraintes de cisaillement sur les faces, les équations des plaques se simplifient suivant :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}$$

(I.52)

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

Ces relations peuvent également être écrites en éliminant les résultantes de cisaillement, suivant une forme analogue à (I.48), soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (I.53)$$

5.5 Problèmes de statique :

Dans le cas de problèmes de statique, les déplacements sont indépendants du temps et les relations fondamentales des plaques se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (I.54)$$

ou en éliminant les résultantes de cisaillement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q &= 0 \end{aligned} \quad (I.55)$$

Dans le cadre de cette étude, il est souhaitable de préciser que notre intérêt majeur à été porté sur ce dernier cas.

Chapitre II
Théorie classique
des stratifiés

1. Champ des déformations :

1.1 Hypothèses de la théorie classique des stratifiés :

La théorie classique des stratifiés utilise un schéma de déformation du premier degré (§ 1.2). Elle fait ensuite une hypothèse supplémentaire qui consiste à négliger le cisaillement transverse. Dans ce schéma, les déformations en cisaillement transverse sont nulles, soit :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Cette hypothèse implique d'après (13.7) :

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Le champ des déplacements s'écrit alors, d'après (13.4) :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

La déformée de la normale au plan moyen (Oxy) est alors un segment de droite normale à la déformée du plan moyen (voir fig. I.3).

1.2 Expression du champ des déformations :

Le champ des déformations s'écrit, d'après (I.11) et en tenant compte de (II.2) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{zz} &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} &= 0 \\ \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Le tenseur des déformations en un point M est :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

et la matrice des déformations se réduit à trois composantes non nulles :

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Le champ des déformations est la superposition :

➤ *des déformations en membrane :*

$$\varepsilon_m(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

s'exprimant exclusivement en fonction des déplacements (u_0 , v_0) dans le plan (Oxy) des points de ce plan ;

➤ *des déformations en flexion et en torsion :*

$$\varepsilon_f(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^f \\ \varepsilon_{yy}^f \\ \varepsilon_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

s'exprimant en fonction des angles de rotation de la déformée du plan moyen et de la cote z du point M. Généralement, les déformations en flexion et torsion s'expriment suivant la relation :

$$\varepsilon_f(m) = z K(x,y) \quad (\text{II.9})$$

en posant :

$$K(x, y) = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

La matrice $K(x, y)$ est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion.

Les angles de rotation de la déformée du plan moyen au point $H(x, y, 0)$ s'expriment en fonction du déplacement transversal $w_0(x, y)$ de ce point par :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ suivant la direction } \vec{i} \\ \theta_y &= \frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ suivant la direction } \vec{j} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Le champ des déplacements (3) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \theta_y \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \theta_x \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_m(M) + \varepsilon_f(M) \quad (\text{II.13})$$

ou :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) & \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}(x, y) & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y) & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(x, y) & \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Sous forme abrégée, le champ des déformations s'écrit donc :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon(x,y,z) = \varepsilon_m(x,y) + z \kappa(x,y) \quad (\text{II.16})$$

Les fonctions $\varepsilon_m(x,y)$ et $\kappa(x,y)$ ne dépendent que des coordonnées (x,y) du point H du plan moyen du stratifié.

2. Champ des contraintes

2.1 Forme du champ des contraintes :

Le champ des contraintes est obtenu à l'aide de la relation (I.17). Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés, nous obtenons, pour la couche k :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Q_{11} \varepsilon_{xx} + Q_{12} \varepsilon_{yy} + Q_{16} \gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} &= Q_{12} \varepsilon_{xx} + Q_{22} \varepsilon_{yy} + Q_{26} \gamma_{xy} \\ \sigma_{xy} &= Q_{16} \varepsilon_{xx} + Q_{26} \varepsilon_{yy} + Q_{66} \gamma_{xy} \\ \sigma_{yz} &= 0 \\ \sigma_{xz} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Le tenseur de contrainte en M est donc de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

Le champ des contraintes se réduit aux seules contraintes en membrane : σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} .

2.2 Expression des contraintes :

Les relations (17) montrent que les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = Q_k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

avec :

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_k$$

où Q_k est la matrice de rigidité réduite de la couche k et dont les termes sont exprimés en fonction des modules, leurs expressions seront explicitées dans le chapitre suivant. En tenant compte de (II.14), les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

ou

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q_k \varepsilon_m(x, y) + z Q_k \kappa(x, y) \quad (\text{II.21})$$

$\sigma_K(M)$ représente la matrice des contraintes dans la couche k : $h_{k-1} \leq z \leq h_k$. La matrice de rigidité réduite Q_K varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc une discontinuité du champ des contraintes entre couches successives.

3. Expression des résultantes et moments

3.1 Résultantes en membrane :

L'expression (I.22) associée à la relation (II.20) ou (II.21) conduit à l'expression des résultantes en membrane, dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. Nous obtenons :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q_k \varepsilon_m(x, y) + z Q_k \kappa(x, y)] dz$$

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^n \left[Q_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^n \left[Q_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \quad (\text{II.22})$$

$$N(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_k \right] \kappa(x, y)$$

Finalement :

$$N(x,y) = A \varepsilon_m(x,y) + B \kappa(x,y) \quad (\text{II.23})$$

En introduisant les matrices :

$$A = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) Q_k \quad (\text{II.24})$$

$$A = [A_{ij}] \text{ avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) (Q_{ij})_k$$

$$B = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q_k \quad (\text{II.25})$$

$$B = [B_{ij}] \text{ avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q_{ij})_k$$

L'expression développée des résultantes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Ces équations montre que dans le cas d'un stratifié, les résultantes en membrane (N_x, N_y, N_{xy}) ne sont pas seulement fonctions des déformations en membrane ($\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0$) (comme dans le cas des plaques homogènes), mais sont également fonctions des courbures en flexion et en torsion $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$.

3.2 Résultantes en moment :

Aux sollicitations N_x, N_y, T_{xy} s'ajoutent par unité d'envergure :

M_x : moment fléchissant d'axe y, dû aux contraintes σ_x par unité de largeur suivant la direction y :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad (\text{II.27a})$$

M_y : moment fléchissant d'axe x, dû aux contraintes σ_y par unité de largeur suivant la direction x :

$$M_y = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz \quad (\text{II.27b})$$

M_{xy} : moment de torsion d'axe x, dû aux contraintes τ_{xy} :

$$M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \quad (\text{II.27c})$$

Comme pour le comportement en membrane, on discrétise par couche et on obtient :

$$[M] = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\sigma] z dz \quad (\text{II.28a})$$

On introduit la relation de comportement et on obtient :

$$[M] = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}] [\varepsilon_0] z dz + [\bar{Q}] [K] z^2 dz \quad (\text{II.28b})$$

En calculant les intégrales suivant z, [M] devient :

$$[M] = [B] [\varepsilon_0] + [D] [K] \quad (\text{II.28c})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \text{ traction / flexion} \quad (\text{II.28d})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \text{ flexion}$$

L'expression générale reliant les contraintes et déformations globales qui représente l'équation constitutive s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ k \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Inversons cette relation :

$$[\varepsilon_0] = [A^{-1}][N] - [A^{-1}][B][k] \quad (\text{II.30})$$

$$\text{d'où : } [M] = [B][A^{-1}][N] + (-[B][A^{-1}][B][k] + [D][k]) \quad (\text{II.31})$$

$$\text{alors : } [k] = [D^{-1*}][M] - [D^{-1*}][C^*][N] \quad (\text{II.32})$$

$$\text{On obtient finalement : } [\varepsilon_0] = [B][D^{-1*}][M][A^*] - [B][D^{-1*}][C^*][N] \quad (\text{II.33})$$

Ce qui permet d'obtenir une autre équation fondamentale des stratifiés est qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ B' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Avec :

$$\begin{aligned} [A'] &= [A^*] - [B^*][D^{*-1}][C] \\ [B'] &= [B^*][D^{*-1}] \\ [C'] &= [D^{*-1}][C^*] \\ [D'] &= [D^{*-1}] \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

et

$$[A^*] = [A^{-1}], \quad [B^*] = [A^{-1}][B], \quad [C^*] = [B][A^{-1}], \quad [D^*] = [D] - [B][A^{-1}][B] \quad (\text{II.36})$$

De façon générale, un stratifié quelconque soumis à de la traction subira des déformations non seulement normales mais aussi de la flexion, ce qui n'était pas le cas avec des matériaux homogènes isotrope.

3.3 Différents types de stratifiés :

3.3.1 Stratifiés symétriques :

Un stratifié est symétrique si le plan moyen est plan de symétrie. Deux couches symétriques ont :

- La même matrice de rigidité réduite $[Q_{ij}]_k$,
- La même épaisseur e_k ,
- Des cotes opposées z_k et $-z_k$.

Il en résulte que les coefficients B_{ij} de la matrice de rigidité du stratifié sont nuls. L'équation constitutive est de la forme générale :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

3.3.2 Stratifiés antisymétriques :

Les stratifiés symétriques sont utilisés afin d'éliminer le couplage entre membrane et flexion, par contre, certaines applications nécessitent l'utilisation de stratifiés non symétriques. Par exemple, le couplage membrane-flexion est nécessaire dans la conception de turbine à ailettes ayant un profil gauche. Egalement, dans le cas où une meilleure rigidité en cisaillement est recherchée. Il est nécessaire d'avoir des couches possédant différentes orientations.

Un stratifié antisymétrique est constitué de couches en nombre pair, dont la répartition des épaisseurs est symétrique, et celle des orientations des axes antisymétriques par rapport au plan moyen. Deux couches de cotes symétriques ont donc :

- des cotes opposées z_k et $-z_k$,
- la même épaisseur e_k ,
- des orientations θ et $-\theta$ par rapport aux axes de référence du stratifié.

L'équation constitutive d'un stratifié antisymétrique s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

3.3.3 Stratifiés croisés :

➤ Cas général :

Un stratifié croisé est constitué de couches dont les directions principales sont orientées alternativement à 0° ou 90° des directions de référence du stratifié.

Les coefficients de rigidité A_{ij} , B_{ij} et D_{ij} pour un stratifié croisé sont reporté dans le tableau II.1. Compte tenu de ces résultats, l'équation constitutive d'un stratifié croisé est donc de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Tableau II.1 : Expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11} e_0 + Q_{22} e_{90} & A_{12} &= Q_{12} e & A_{16} &= 0 \\ A_{22} &= Q_{22} e_0 + Q_{11} e_{90} & A_{26} &= 0 & A_{66} &= Q_{66} e \end{aligned}$$

Avec :

 e_0 = épaisseur cumulée des couches à 0° e_{90} = épaisseur cumulée des couches à 90° e = épaisseur du stratifié $e = e_0 + e_{90}$

$$\begin{aligned} B_{11} &= Q_{11} b_0 + Q_{22} b_{90} & B_{12} &= Q_{12} b & B_{16} &= 0 \\ B_{22} &= Q_{22} b_0 + Q_{11} b_{90} & B_{26} &= 0 & B_{66} &= Q_{66} b \end{aligned}$$

Avec :

$$b_0 = \sum_{\text{couches à } 0^\circ} e_p z_p \quad b_{90} = \sum_{\text{couches à } 90^\circ} e_p z_p$$

$$b = \sum_{K=1}^n e_K z_K = b_0 + b_{90}$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= Q_{11} d_0 + Q_{22} d_{90} & D_{12} &= Q_{12} d & D_{16} &= 0 \\ D_{22} &= Q_{22} d_0 + Q_{11} d_{90} & D_{26} &= 0 & D_{66} &= Q_{66} d \end{aligned}$$

Avec :

$$d_0 = \sum_{\text{couches à } 0^\circ} \left(\frac{e_p^3}{12} + e_p z_p^2 \right)$$

$$d_{90} = \sum_{\text{couches à } 90^\circ} \left(\frac{e_q^3}{12} + e_q z_q^2 \right)$$

$$d = \sum_{K=1}^n \left(\frac{e_K^3}{12} + e_K z_K^2 \right) = d_0 + d_{90}$$

➤ Cas particuliers pratiques :

Un cas particulier mais de grande importance est le cas où les couches à 0° ont même épaisseur, les couches à 90° ayant également la même épaisseur mais pas nécessairement d'épaisseur identique à celle des couches à 0°. Il est toujours possible de choisir l'axe x de la plaque de manière qu'il coïncide avec la direction 0° de la couche inférieure du stratifié. Il en résulte que les couches à 0° coïncident avec les couches impaires et les couches à 90° avec les couches paires. Si le nombre total de couches est impair, le stratifié est symétrique. Si le nombre total de couches est pair, le stratifié est dit antisymétrique. Un stratifié croisé est caractérisé par le nombre total n de couches et par le rapport entre l'épaisseur totale des couches à 0° et l'épaisseur totale des couches à 90°.

$$R_e = \frac{e_0}{e_{90}} \tag{II.40}$$

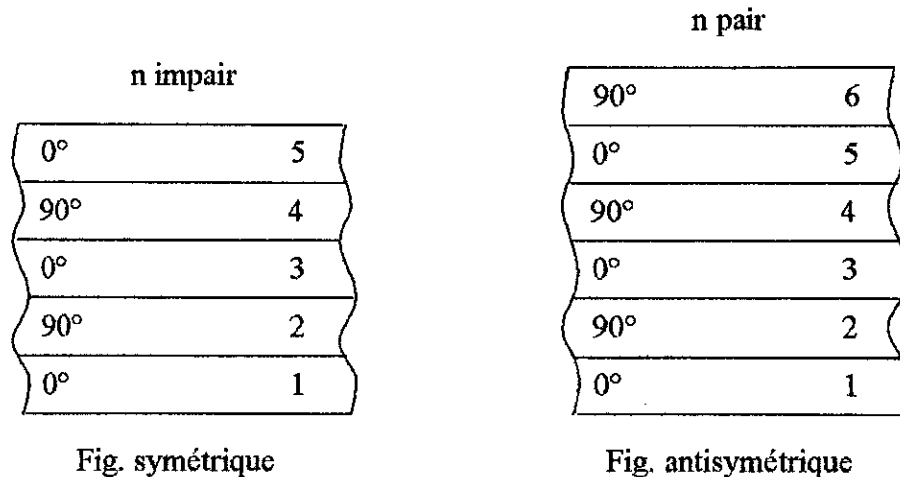


Fig. II.1. Stratifiés croisés symétrique et antisymétrique

Dans le cas où les épaisseurs des couches sont identiques : $R_e = 1$, les coefficients de rigidité peuvent alors être exprimés en fonction de n, R_e et du rapport entre les modules :

$$R_Q = \frac{Q_{22}}{Q_{11}} = \frac{E_T}{E_L} \tag{II.41}$$

➤ **Stratifié croisés symétriques :**

Dans le cas d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches). Les termes B_{ij} sont nuls conformément aux propriétés des stratifiés symétriques. L'équation constitutive des stratifiés croisés symétriques est :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.42})$$

A l'absence de couplage membrane-flexion/ torsion des stratifiés symétriques s'ajoute l'absence des couplages traction-cisaillement et flexion-torsion. Le comportement d'un stratifié croisé symétrique est donc identique au comportement d'une plaque orthotrope rapportée à ses axes principaux [1].

L'expression des coefficients de rigidité en fonction du nombre de couche n , de R_e et R_Q est reportée dans le tableau II.2.

Tableau II.2 expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches)

$$A_{11} = \frac{1}{1 + R_e} (R_e + R_Q) Q_{11} e \quad A_{12} = Q_{12} e \quad A_{16} = 0$$

$$A_{22} = \frac{1}{1 + R_e} (1 + R_e R_Q) Q_{11} e = \frac{1 + R_e R_Q}{R_e + R_Q} A_{11}$$

$$A_{26} = 0 \quad A_{66} = Q_{66} e$$

$$B_{ij} = 0$$

$$D_{11} = [(R_Q - 1)\alpha + 1] \frac{Q_{11} e^3}{12} = [(R_Q - 1)\alpha + 1] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}$$

$$D_{12} = \frac{Q_{12} e^3}{12} \quad D_{16} = 0$$

$$D_{22} = [(1 - R_Q)\alpha + R_Q] \frac{Q_{11} e^3}{12} = [(1 - R_Q)\alpha + R_Q] \frac{1 + R_e}{R_e + R_Q} \frac{A_{11} e^2}{12}$$

$$D_{26} = 0 \quad D_{66} = \frac{Q_{66} e^3}{12}$$

Avec :

$$\alpha = \frac{1}{(1 + R_e)^3} + \frac{R_e (n - 3) [R_e (n - 1) + 2(n + 1)]}{(n^2 - 1)(1 + R_e)^3}$$

➤ **Stratifiés croisés antisymétriques :**

Dans le cas d'un stratifié croisé antisymétrique (nombre pair de couche), les coefficients de rigidité exprimés en fonction de n , de R_e et de R_Q sont reportés dans le tableau II.3. Les résultats de ce tableau montrent que l'équation constitutive est alors de la forme :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{xx}^0 \\ \mathcal{E}_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

dans le cas où les couches à 0° et 90° ont la même épaisseur $R_e = 1$, et dans ce cas :

$$A_{22} = A_{11} \quad ; \quad D_{22} = D_{11}$$

L'équation constitutive (II.43) montre qu'il existe uniquement un couplage traction-flexion.

Tableau II.3 expression des coefficients de rigidité d'un stratifié croisé symétrique (nombre impair de couches)

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{1}{1+R_e}(R_e+R_Q)Q_{11}e & A_{12} &= Q_{12}e & A_{16} &= 0 \\
 A_{22} &= \frac{1}{1+R_e}(1+R_eR_Q)Q_{11}e = \frac{1+R_eR_Q}{R_e+R_Q}A_{11} \\
 A_{26} &= 0 & A_{66} &= Q_{66}e \\
 B_{11} &= \frac{R_e(R_Q-1)}{n(1+R_e)^2}Q_{11}e^2 = \frac{R_e(R_Q-1)}{n(1+R_e)(R_e+R_Q)}A_{11}e \\
 B_{12} &= B_{16} = 0, & B_{22} &= -B_{11}, & B_{26} &= B_{66} = 0 \\
 D_{12} &= \frac{Q_{12}e^3}{12} & D_{16} &= 0 \\
 D_{11} &= [(R_Q-1)\beta + 1]\frac{Q_{11}e^3}{12} = [(R_Q-1)\beta + 1]\frac{1+R_e}{R_e+R_Q}\frac{A_{11}e^2}{12} \\
 D_{16} &= 0 & D_{12} &= \frac{Q_{12}e^3}{12} \\
 D_{22} &= [(1-R_Q)\beta + R_Q]\frac{Q_{11}e^3}{12} = [(1-R_Q)\beta + R_Q]\frac{1+R_e}{R_e+R_Q}\frac{A_{11}e^2}{12} \\
 D_{26} &= 0 & D_{66} &= \frac{Q_{66}e^3}{12}
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\alpha = \frac{1}{1+R_e} + \frac{8R_e(R_e-1)}{n^2(1+R_e)^3}$$

Dans le cas où toutes les couches ont la même épaisseur :

$$R_e = 1 \quad \beta = \frac{1}{2}$$

Chapitre III
Comportement
élastique
d'un matériau composite
orthotrope

1. Loi de Hooke pour un composite orthotrope :

1.1 Composite orthotrope :

Les stratifiés sont constitués de couches de matériaux composites unidirectionnels ou de composite à base de tissu. Généralement, les tissus sont constitués de fils unidirectionnels croisés à 90° : l'un dans le sens chaîne, l'autre dans le sens trame. Ces couches possèdent trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, et se comportent de point de vue élastique comme un matériau orthotrope. Les directions principales (1,2) seront prises respectivement suivant la direction chaîne et la direction trame ; ces directions seront également notées L et T (fig.). La direction 3 orthogonale au plan de la couche sera également notée T' .

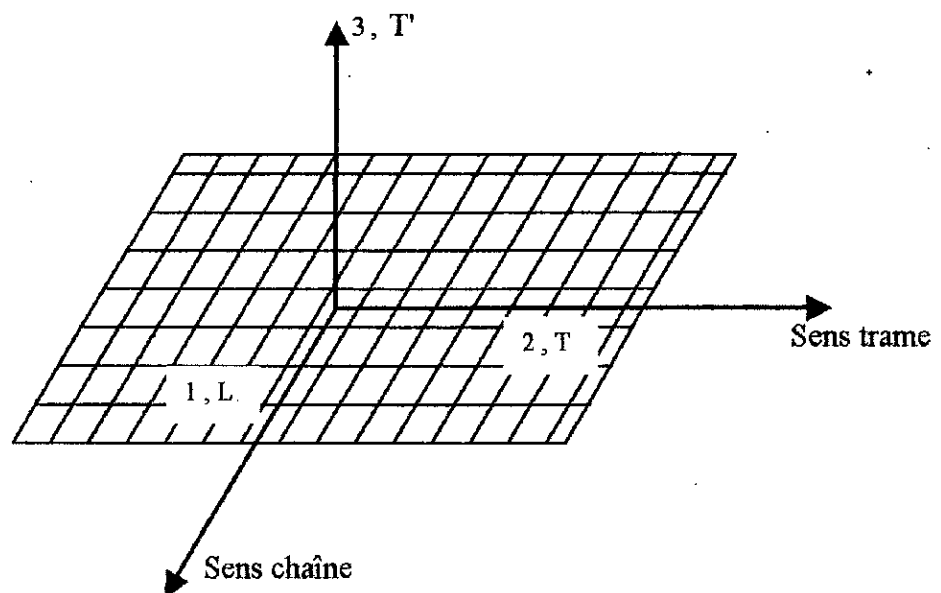


Fig. III.1 Couche de matériau composite orthotrope

1.2 Matrices de rigidité et de souplesse :

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est décrit en introduisant soit les constantes de rigidité C_{ij} , soit les constantes de souplesse S_{ij} . La loi de Hooke s'écrit suivant l'une des formes matricielles :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope est donc caractérisé par 9 coefficients indépendants :

$C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66}$ ou $S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{22}, S_{23}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66}$

Les matrices de rigidité et de souplesse étant inverses l'une de l'autre, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22} S_{23} - S_{23}^2}{\Delta S} & C_{12} &= \frac{S_{13} S_{23} - S_{12} S_{33}}{\Delta S} \\ C_{22} &= \frac{S_{33} S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S} & C_{13} &= \frac{S_{12} S_{23} - S_{13} S_{22}}{\Delta S} \\ C_{33} &= \frac{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S} & C_{23} &= \frac{S_{12} S_{13} - S_{23} S_{11}}{\Delta S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}} & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Avec :

$$\Delta S = S_{11} S_{22} S_{33} - S_{11} S_{23}^2 - S_{22} S_{13}^2 - S_{33} S_{12}^2 + 2 S_{12} S_{23} S_{13}$$

Les relations inverses donnant les coefficients de souplesse en fonction des coefficients de rigidité sont obtenues en intervertissant les rôles de C_{ij} et S_{ij} .

Le composite unidirectionnel est un cas particulier de matériau orthotrope dit *orthotrope de révolution*, pour lequel :

$$\begin{aligned} \{ C_{13} = C_{12} ; C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) ; C_{33} = C_{22} ; C_{55} = C_{66} \} \\ \{ S_{13} = S_{12} ; S_{44} = 2(S_{22} - S_{23}) ; S_{33} = S_{22} ; S_{55} = S_{66} \} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

2 Modules de l'ingénieur :

Les modules usuels de l'ingénieur (module d'Young, coefficients de Poisson, modules de cisaillement) s'expriment simplement en fonction des coefficients de souplesse.

2.1 Traction dans le sens chaîne :

Dans un essai de traction dans le sens chaîne, toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte σ_1 :

$$\{ \sigma_1 \neq 0 ; \sigma_i = 0 \quad i = 2 \dots 6 \} \quad (\text{III.5})$$

En fonction des constantes de souplesse, les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\{ \varepsilon_1 = S_{11} \sigma_1 ; \varepsilon_2 = S_{12} \sigma_1 ; \varepsilon_3 = S_{13} \sigma_1 ; \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \} \quad (\text{III.6})$$

soit :

$$\{ \sigma_1 = \frac{1}{S_{11}} \varepsilon_1 ; \varepsilon_2 = \frac{S_{12}}{S_{11}} \varepsilon_1 ; \varepsilon_3 = \frac{S_{13}}{S_{11}} \varepsilon_1 \} \quad (\text{III.7})$$

Nous en déduisant le module de Young et les coefficients de Poisson, mesurés dans un essai de traction suivant le sens chaîne :

$$\{ E_{ch} = E_L = E_1 = \frac{1}{S_{11}} ; \nu_{LT} = \nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} ; \nu_{LT'} = \nu_{13} = -\frac{S_{13}}{S_{11}} \} \quad (\text{III.8})$$

2.2 Traction dans le sens trame :

Dans un essai de traction dans le sens trame, seule la contrainte σ_2 n'est pas nulle:

$$\{ \sigma_2 \neq 0 ; \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 2 \} \quad (\text{III.9})$$

Les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\{ \varepsilon_1 = S_{12} \sigma_2 ; \varepsilon_2 = S_{22} \sigma_2 ; \varepsilon_3 = S_{23} \sigma_2 ; \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \} \quad (\text{III.10})$$

soit :

$$\left\{ \sigma_2 = \frac{1}{S_{22}} \varepsilon_2 \quad ; \quad \varepsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}} \varepsilon_2 \quad ; \quad \varepsilon_3 = \frac{S_{23}}{S_{22}} \varepsilon_2 \right\} \quad (\text{III.11})$$

D'où le module d'Young et les coefficients de Poisson, mesurés dans un essai de traction suivant le sens trame :

$$\left\{ E_{\text{tr}} = E_T = E_2 = \frac{1}{S_{22}} \quad ; \quad \nu_{\text{TL}} = \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \quad ; \quad \nu_{\text{TT}'} = \nu_{23} = -\frac{S_{23}}{S_{22}} \right\} \quad (\text{III.12})$$

2.3 Traction transversale :

Nous appelons traction transversale une traction effectuée dans une direction normale au plan de la couche :

$$\left\{ \sigma_3 \neq 0 \quad ; \quad \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 3 \right\} \quad (\text{III.13})$$

Nous obtenons ainsi le module d'Young transversal et les coefficients de poisson correspondants :

$$\left\{ E_T = E_3 = \frac{1}{S_{33}} \quad ; \quad \nu_{\text{T}'\text{L}} = \nu_{31} = -\frac{S_{13}}{S_{33}} \quad ; \quad \nu_{\text{T}'\text{T}} = \nu_{32} = -\frac{S_{32}}{S_{33}} \right\} \quad (\text{III.14})$$

2.4 Relations entre modules d'Young et coefficients de Poisson :

La comparaison des diverses relations établies (9) (13) (15) permet d'écrire :

$$\left\{ \frac{E_L}{\nu_{\text{LT}}} = \frac{E_T}{\nu_{\text{TL}}} \quad ; \quad \frac{E_L}{\nu_{\text{LT}'}} = \frac{E_{\text{T}'}}{\nu_{\text{T}'\text{L}}} \quad ; \quad \frac{E_T}{\nu_{\text{TT}'}} = \frac{E_{\text{T}'}}{\nu_{\text{T}'\text{T}}} \right\} \quad (\text{III.15})$$

relations qui s'écrivent sous la forme condensée :

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}} \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ ou } L, T, \text{T}' \quad (\text{III.16})$$

2.5 Essai de cisaillement :

Un essai de cisaillement dans le plan de la couche correspond à un état de contrainte :

$$\left\{ \sigma_6 \neq 0 \quad ; \quad \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 6 \right\} \quad (\text{III.17})$$

Soit

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0 \quad ; \quad \sigma_6 = C_{66} \varepsilon_6 \quad (\text{III.18})$$

Nous en déduisons le module de cisaillement dans le plan de la couche :

$$G_{12} = G_{LT} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (\text{III.19})$$

De même, nous trouvons les modules de cisaillement dans les essais transversaux :

➤ suivant le sens chaîne :

$$G_{13} = G_{LT'} = C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \quad (\text{III.20})$$

➤ suivant le sens trame :

$$G_{23} = G_{TT'} = C_{44} = \frac{1}{S_{44}} \quad (\text{III.21})$$

Conclusion :

La relation d'élasticité (III.2) s'écrit, en introduisant les modules de l'ingénieur, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope peut être décrit par les 9 modules indépendants :

3 modules de Young : E_1, E_2, E_3 ($E_L, E_T, E_{T'}$).

3 coefficients de Poisson : $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ ($\nu_{LT}, \nu_{LT'}, \nu_{TT'}$).

3 modules de cisaillement : G_{12}, G_{13}, G_{23} ($G_{LT}, G_{LT'}, G_{TT'}$).

Les trois autres coefficients de Poisson sont déterminés à l'aide de la relation (III.16).

3. Expression des constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules de l'ingénieur :

3.1 Constantes de souplesse :

Les expressions de constantes de souplesse s'obtiennent sans difficulté à partir des expressions établies au paragraphe précédent, soit :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\
 S_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}
 \end{aligned} \tag{III.17}$$

3.2 Constantes de rigidité :

Les expressions des constantes de rigidité en fonction des modules de l'ingénieur s'obtiennent à partir des relations (3) et (25), soit :

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\
 C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
 C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
 C_{44} &= G_{23} & ; & C_{55} = G_{13} & ; & C_{66} = G_{12}
 \end{aligned} \tag{III.18}$$

Avec :

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

3.3 Restriction sur les coefficients d'élasticité :

Si une seule contrainte suivant un axe principal est appliquée au matériau, la déformation suivant cette direction est de même signe que la contrainte. Il en résulte que :

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0 \quad (\text{III.20})$$

ou en terme de modules d'ingénieur :

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12} > 0 \quad (\text{III.21})$$

De même, si on impose au matériau une seule déformation suivant un axe principal, la contrainte qui en résulte dans cette direction a le même signe que la déformation imposée. Il en résulte que :

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0 \quad (\text{III.22})$$

et compte tenu de 26 :

$$1 - \nu_{23} \nu_{32}, 1 - \nu_{13} \nu_{31}, 1 - \nu_{12} \nu_{21} > 0 \quad (\text{III.23})$$

et

$$1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13} > 0 \quad (\text{III.24})$$

puisque la matrice S est définie positivement (déterminant positif), le travail thermodynamique étant positif. Cette même propriété associée aux relations (III.18) implique également :

$$|S_{23}| < \sqrt{S_{22} S_{33}}$$

$$|S_{13}| < \sqrt{S_{11} S_{33}} \quad (\text{III.25})$$

$$|S_{12}| < \sqrt{S_{11} S_{22}}$$

En utilisant les relations de symétrie (III.16), les conditions (III.23) peuvent également s'écrire :

$$\begin{aligned} |v_{21}| &< \sqrt{E_2/E_1} & |v_{12}| &< \sqrt{E_1/E_2} \\ |v_{32}| &< \sqrt{E_3/E_2} & |v_{23}| &< \sqrt{E_2/E_3} \\ |v_{13}| &< \sqrt{E_1/E_3} & |v_{31}| &< \sqrt{E_3/E_1} \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

De même en reportant les relations de symétrie dans la condition (III.24), nous obtenons :

$$2 v_{21} v_{32} v_{13} < 1 - v_{21}^2 \frac{E_1}{E_2} - v_{32}^2 \frac{E_2}{E_3} - v_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} < 1 \quad (\text{III.27})$$

Les deux dernières conditions peuvent être groupées pour obtenir :

$$\left(1 - v_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right) \left(1 - v_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right) - \left(v_{21} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + v_{32} v_{13} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right)^2 > 0 \quad (\text{III.28})$$

Enfin, la condition précédente peut être réarrangée de manière à obtenir des bornes sur le coefficient de Poisson v_{21} :

$$\begin{aligned} - \left[v_{32} v_{13} \frac{E_2}{E_1} + \left(1 - v_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - v_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right] \\ - \left[v_{32} v_{13} \frac{E_2}{E_1} - \left(1 - v_{32}^2 \frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \left(1 - v_{13}^2 \frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

4. Comportement anisotrope à deux dimensions

4.1 Plaque orthotrope rapportée à ses axes :

Pour une plaque orthotrope d'épaisseur e dont les axes principaux (L,T) sont confondus avec les axes de référence (x,y), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L} ; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L} \quad (III.30)$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} ; \quad Q_{66} = G_{LT}$$

D'où les coefficients de rigidité :

$$A_{11} = Q_{11} e \quad D_{11} = Q_{11} \frac{e^3}{12}$$

$$A_{12} = Q_{12} e \quad D_{12} = Q_{12} \frac{e^3}{12}$$

$$A_{22} = Q_{22} e \quad D_{22} = Q_{22} \frac{e^3}{12}$$

$$B_{ij} = 0$$

$$A_{16} = A_{26} = 0 \quad D_{16} = D_{26} = 0$$

$$A_{66} = Q_{66} e \quad D_{66} = Q_{66} \frac{e^3}{12}$$

Avec :

$$D_{ij} = A_{ij} \frac{e^2}{12}$$

L'équation constitutive de la plaque s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

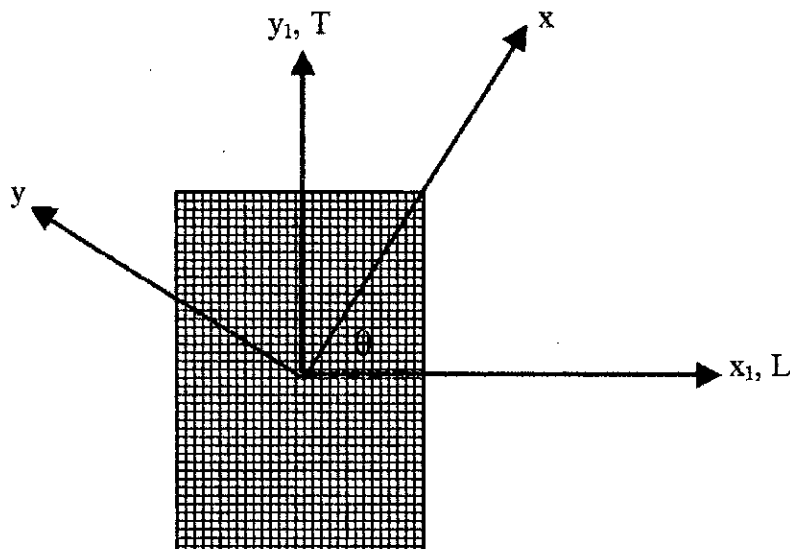
Comme dans le cas d'un matériau isotrope, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations de membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

4.2 Plaque orthotrope non rapportée à ses axes :

Dans le cas où les axes principaux de la couche orthotrope ne coïncideraient pas avec les axes de référence des contraintes -fig.-, la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Déterminons les relations reliant les coefficients \bar{Q}_{ij} aux coefficients Q_{ij} .



FigIII.2. Rotation des axes de référence par rapport aux axes principaux

Adoptons comme notation des axes principaux (x_1, y_1) au lieu de (L, T) pour faciliter l'écriture matricielle, on aura :

$$[\sigma_1] = [Q][\varepsilon_1] \quad (\text{III.33})$$

On exprime les relations contraintes-déformations dans un système d'axes (x, y) faisant un angle θ avec les axes principaux (x_1, y_1) de la manière suivante :

$$[\sigma_x] = [\bar{Q}][\varepsilon_x] \quad (\text{III.34})$$

Avec :

$$[\sigma_x] = [T_\sigma]^{-1}[\sigma_1] \quad (\text{III.35})$$

où :

$[T_\sigma]$ est la matrice de passage du repère (x_1, y_1, z_1) au repère (x, y, z) [5]

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

$$\begin{cases} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{cases} \quad (\text{III.36a})$$

et comme :

$$[\sigma_1] = [Q][\varepsilon_1] \quad (\text{III.37})$$

on aura :

$$[\sigma_x] = [T_\sigma]^{-1}[Q][\varepsilon_1] \quad (\text{III.38})$$

et puisque :

$$[\varepsilon_1] = [T_\sigma][\varepsilon_x] \quad (\text{III.39})$$

on aboutira à :

$$[\sigma_x] = [T_\sigma]^{-1}[Q][T_\sigma][\varepsilon_x] \quad (\text{III.40})$$

par identification entre (III.40) et (III.38) on aura :

$$[\bar{Q}] = [T_\sigma]^{-1}[Q][T_\sigma] \quad (\text{III.41})$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} c^4 + 2(Q_{12} + Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} s^4 \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} + 4Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{12} (s^4 + c^4) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{22} c^4 \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s c^3 + (Q_{12} + Q_{22} + 2Q_{66}) s^3 c \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) s^3 c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) s c^3 \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) s^2 c^2 + Q_{66} (s^4 + c^4)
 \end{aligned}
 \tag{III.42}$$

Cas particuliers :

$$\text{Pour } \theta = 0^\circ \quad [\bar{Q}] = [Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}
 \tag{III.43}$$

$$\text{Pour } \theta = 90^\circ \quad [\bar{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}
 \tag{III.44}$$

4.2.1 Variation des modules technologiques en fonction de l'angle θ :

Les modules technologiques sont les constantes pratiques qu'utilise usuellement un ingénieur pour décrire le comportement mécanique d'un matériau. Ces modules sont déterminés dans des essais particuliers, ces modules varient suivant l'angle θ . Leurs nouvelles expressions sont données par :

$$E_x(\theta) = \frac{1}{\frac{c^4}{E_L} + \frac{s^4}{E_T} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{LT} - 2 \frac{V_{LT}}{E_T}} \right)}$$

$$E_y(\theta) = \frac{1}{\frac{s^4}{E_L} + \frac{c^4}{E_T} + c^2 s^2 \left(\frac{1}{G_{LT} - 2 \frac{V_{LT}}{E_T}} \right)}$$

(III.45)

$$G_{xy}(\theta) = \frac{1}{4c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + 2 \frac{V_{LT}}{E_T} \right) + \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{LT}}}$$

$$\frac{V_{yx}}{E_y}(\theta) = \frac{V_{TL}}{E_T} (c^4 + s^4) - c^2 s^2 \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} \right)$$

Cas particuliers :

$$\text{Pour } \theta = 0^\circ \quad \begin{cases} E_x = E_L \\ E_y = E_T \\ G_{xy} = G_{LT} \\ \frac{V_{yx}}{E_y} = \frac{V_{TL}}{E_T} \end{cases} \quad \text{(III.46)}$$

$$\text{Pour } \theta = 90^\circ \quad \begin{cases} E_x = E_T \\ E_y = E_L \\ G_{xy} = G_{LT} \\ \frac{V_{yx}}{E_y} = \frac{V_{TL}}{E_T} \end{cases} \quad \text{(III.47)}$$

Les formulations des modules technologiques en fonction de l'angle θ permettent une programmation plus lucide que l'utilisation de la matrice $[\bar{Q}]$.

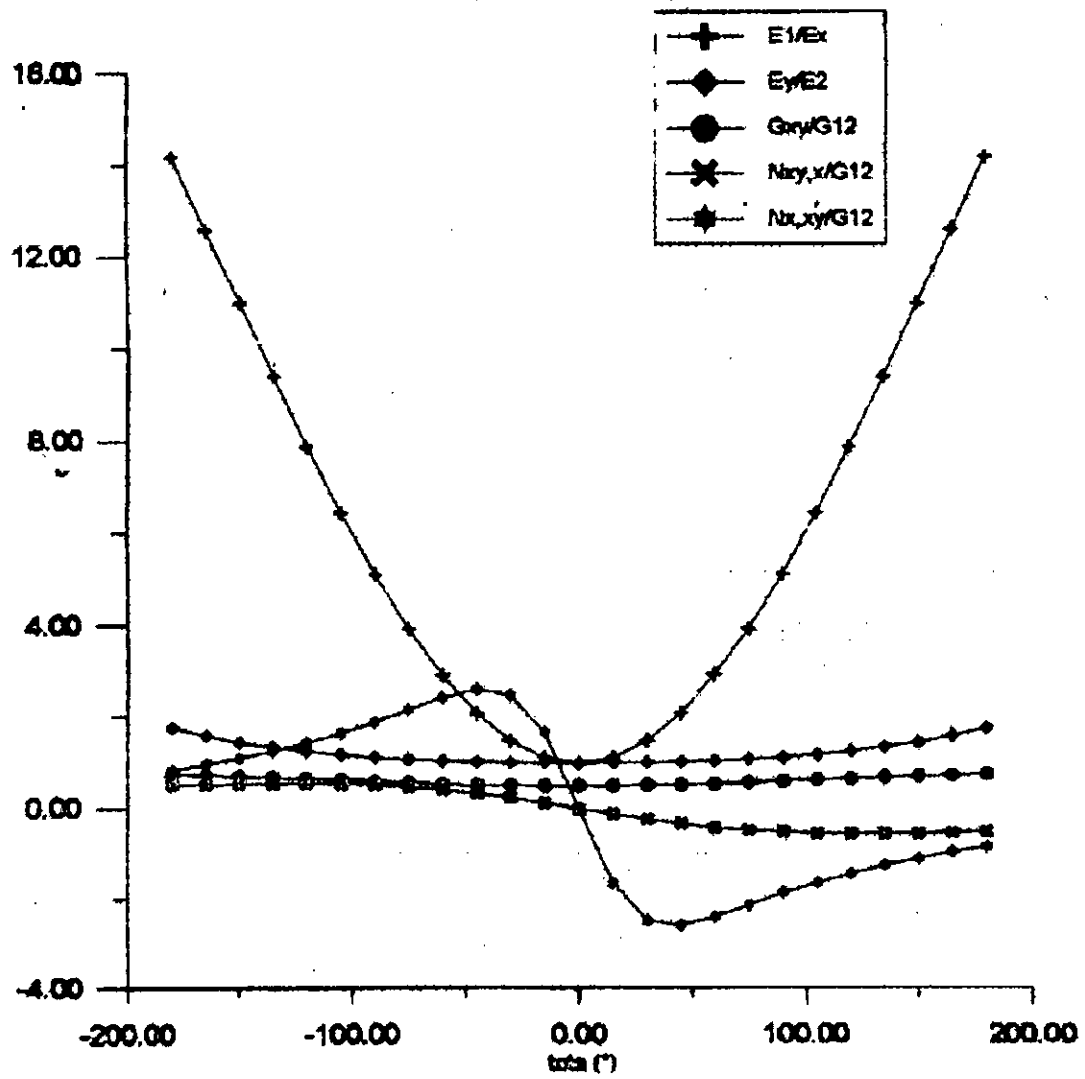


Figure 9: La variation des constantes élastiques en fonction de l'angle. (°)

Chapitre IV
Approche analytique
d'une
plaque en flexion

1. Flexion des plaques stratifiées orthotropes

1.1 Introduction

L'analyse des plaques en matériaux stratifiés ou matériaux sandwichs présente divers degrés de complexité. La flexion cylindrique et la flexion des poutres, ramenées à des analyses en une dimension, constituent les problèmes les plus faciles à analyser.

Dans le cas de l'étude des plaques en flexion, l'analyse la plus complexe est celle des stratifiés constitués d'un empilement quelconque, présentant des couplages membrane-flexion, membrane-torsion et flexion-torsion. Une première simplification de l'analyse de la flexion des plaques en stratifiés consiste en l'étude de stratifiés symétriques, pour lesquels il n'existe pas de couplages membrane-flexion/torsion : les termes B_{ij} sont nuls ($B_{ij}=0$). Une simplification supplémentaire est apportée dans le cas où il n'existe pas de couplage flexion-torsion : Les termes D_{16} et D_{26} sont nuls ($D_{16}=D_{26}=0$). Les stratifiés symétriques ($B_{ij}=0$), pour lesquels il n'existe pas de couplage flexion-torsion ($D_{16}=D_{26}=0$) sont appelés *stratifiés orthotropes*. Ce type de stratifiés est obtenu soit à partir d'une seule couche de matériau orthotrope, soit à partir d'un stratifié symétrique constitué de couches orthotropes dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence du stratifié, cas des stratifiés croisés par exemple.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons donc à l'analyse de la flexion des plaques en stratifiés orthotropes.

1.2 Plaques rectangulaires en appuis simples :

1.2.1 Expressions générales

En injectant l'équation constitutive (II.29) dans les relations (I.55), on aboutira aux relations fondamentales de la théorie classique des stratifiés en l'absence de cisaillement transverse.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{11}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

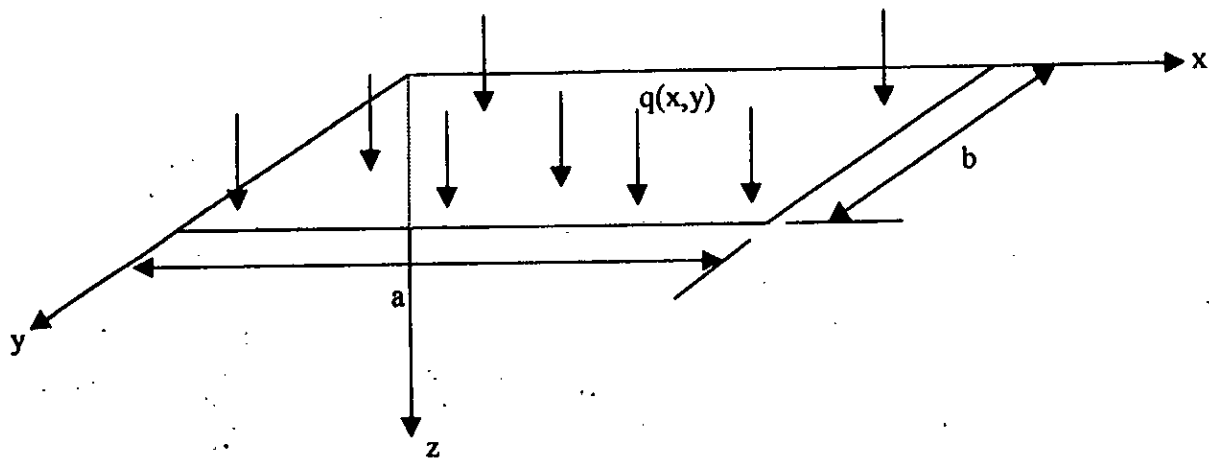


Fig.IV.1 Plaque rectangulaire soumise à une charge répartie

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0 \quad (IV.2)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q(x,y) \quad (IV.3)$$

Pour une plaque en appuis simple sur les quatre côtés, les conditions aux frontières s'écrivent :

$$\triangleright \text{Appuis } x = 0, x = a \quad w_0 = 0 \quad M_x = 0 \quad (IV.4)$$

$$\triangleright \text{Appuis } y = 0, y = b \quad w_0 = 0 \quad M_y = 0 \quad (IV.5)$$

D'après l'équation constitutive (II.29), les conditions sur les moments de flexion aux appuis s'écrivent :

$$\triangleright \text{Appuis } x = 0, x = a \quad M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (IV.6)$$

$$\triangleright \text{Appuis } y = 0, y = b \quad M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (IV.7)$$

Les appuis étant simples, il n'y a pas de conditions imposées sur u_0 et v_0 .

Dans le cas général, la charge transverse peut être développée suivant une double série de Fourier :

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{nm} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (IV.8)$$

Où les coefficients q_{mn} sont exprimés par :

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (IV.9)$$

Les solutions au problème de flexion peuvent alors être recherchées en écrivant les déplacements sous forme de série double de Fourier, satisfaisant aux conditions aux frontières.

Par exemple :

$$u_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (IV.10)$$

$$v_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (IV.11)$$

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (IV.12)$$

Les expressions de u_0 et v_0 reportées dans les relations (IV.1) et (IV.2) impliquent que $A_{mn} = 0$ et $B_{mn} = 0$. Les déplacements en membrane sont identiquement nuls : $u_0 = 0$, $v_0 = 0$. Ce résultat est prévisible dans le cas des stratifiés ne comportant pas de couplage membrane-flexion et chargés transversalement.

L'expression du coefficient C_{mn} est obtenue en reportant l'expression (IV.12) de w_0 dans (IV.3) et en exprimant $q(x,y)$ à l'aide de (IV.8). Nous obtenons :

$$C_{mn} = \frac{\frac{q_{mn}}{\pi^4}}{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4} \quad (IV.13)$$

La flèche au point (x,y) s'écrit donc :

$$w_0(x,y) = \frac{-a^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (IV.14)$$

Où :

$$D_{mn} = D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(mnR)^2 + D_{22}(nR)^4 \quad (IV.15)$$

On introduisant le rapport longueur sur la largeur : $R = a/b$.

Les expressions des moments sont ensuite obtenues en reportant l'équation (21.14) dans l'équation constitutive (14.29) :

$$M_x = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} (m^2 D_{11} + n^2 R^2 D_{12}) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{IV.16})$$

$$M_y = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} (m^2 D_{12} + n^2 R^2 D_{22}) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{IV.17})$$

$$M_{xy} = -2 \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 R D_{66} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn q_{mn}}{D_{mn}} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{IV.18})$$

Les contraintes en membrane sont déduites des expressions (14.20), soit :

$$\sigma_{xx}^K = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} (Q_{11}^K m^2 + Q_{12}^K n^2 R^2) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{IV.19})$$

$$\sigma_{yy}^K = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{D_{mn}} (Q_{12}^K m^2 + Q_{22}^K n^2 R^2) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{IV.20})$$

$$\sigma_{xy}^K = -2 \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 R Q_{66}^K z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{q_{mn}}{D_{mn}} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{IV.21})$$

Les contraintes en cisaillement transverse σ_{xz}^K et σ_{yz}^K peuvent être déterminées ensuite en portant les équations (IV.19) et (IV.21) dans les relations fondamentales en dynamique, et en intégrant suivant z . les constantes d'intégrations sont déterminées en exprimant la continuité des contraintes de cisaillement entre les couches, et leur nullité sur la face inférieure (ou supérieure).

Les expressions (IV.14) et (IV.18) montre que pour un stratifié où $D_{22} = D_{11}$, le champ des déplacements et le champ des moments sont inchangés, lorsque R est chargé en $\frac{1}{R}$, donc lorsque longueur et largeur sont interverties.

2. Application (Cas d'une charge uniforme) :

Dans le cas d'une charge uniforme $q(x,y) = \text{cte} = q_0$, l'expression (IV.9) conduit à :

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \frac{16q_0}{\pi^2 mn} && \text{si } m, n \text{ sont impairs} \\ q_{mn} &= 0 && \text{si } m \text{ ou } n \text{ sont pairs} \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

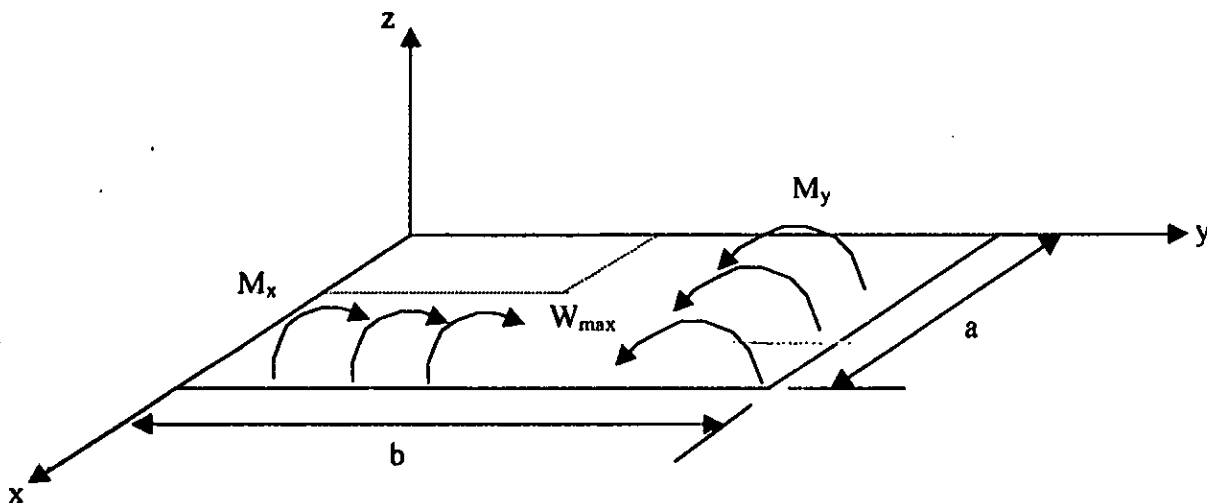


Fig. Plaque orthotrope en appuis simples : axes et dimensions

La solution proposée par Ashton et Whitney (1970) constitue une généralisation de la solution de Navier pour les plaques isotropes [2].

La charge q_0 peut être décomposée en série trigonométrique double :

$$q(x,y) = \frac{16q_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{IV.23})$$

L'équation à résoudre est alors :

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (\text{IV.24})$$

On cherche les solutions de la forme :

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{IV.25})$$

qui présente les quelques caractéristiques suivantes :

- Les dérivées partielles paires par rapport aux variables ne contiennent, elle aussi, que des sinus, que l'on pourra mettre en facteur dans les signes Σ .
- La flèche est nulle pour tout le pourtour, puisque chaque terme de la somme y est nul (pour $x = 0$ et $x = a$ et pour $y = 0$ et $y = b$).
- La même remarque s'applique aux dérivées secondes $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, et par conséquent aux

moments de flexion :

$$\begin{aligned} M_x &= -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_y &= -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

En vertu de (IV.1), (IV.2) et (IV.3) la forme (IV.24) satisfait donc aux conditions aux limites.

Il ne reste plus qu'à reporter (IV.25) et (IV.23) dans (IV.24) et à identifier terme à terme, pour trouver :

$$A_{mn} = \frac{16 q_0}{\pi^6} \frac{1}{mn \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]} \quad (\text{IV.27})$$

Pour m et n impaire, $A_{mn} = 0$ dans tous les autres cas.

La flèche est maximale au centre de la plaque, soit pour $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$. Les numérateurs de

(IV.25) valent alors :

$$\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \quad (\text{IV.28})$$

et

$$w_{\max} = \frac{16 q_0}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]} \quad (\text{IV.29})$$

Cette série est très rapidement convergente (elle est en puissance sixième de m ou n au dénominateur) et l'on peut bien souvent se contenter du premier terme.

On peut donner également quelques indications sur le calcul des contraintes.

Les moments de flexion sont calculés par l'équation caractéristique et on obtient :

$$\begin{aligned} M_x(x, y) &= \frac{16 q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(D_{11} \frac{m^2}{a^2} + D_{12} \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]} \\ M_y(x, y) &= \frac{16 q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(D_{12} \frac{m^2}{a^2} + D_{22} \frac{n^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]} \\ M_{xy}(x, y) &= \frac{32 q_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{+ D_{66} \frac{mn}{ab} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]} \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Les moments M_x et M_y sont alors maximum au centre de la plaque, alors que M_{xy} y est nul. Les expressions de ces moments en ce point se déduisent directement de (IV.30), à l'aide de (IV.28).

Si l'on dispose d'un programme complet de calcul de stratifiés, on peut, à partir de ce moment, déduire les courbures κ_x , κ_y et par conséquent les allongements en un point de cote z de la plaque, par :

$$\varepsilon_x = z \kappa_x \text{ et } \varepsilon_y = z \kappa_y.$$

Les contraintes s'obtiennent alors à partir de la loi de Hooke généralisée locale, c'est à dire dans la couche considérée.

Si l'on ne dispose pas d'un tel programme, on a plutôt intérêt à sauter l'étape de calcul des moments de flexion, et se reportant aux expressions (II.10) pour les calculs des courbures.

On va d'abord, dans un premier temps, modifier légèrement les expressions (IV.29) et (IV.30) pour faire sortir le côté a de la plaque (celui aligné le long de l'axe des x , ou de D_{11} si l'on préfère) et faire apparaître le rapport $\eta = \frac{b}{a} = \frac{1}{R}$. On calculera alors les flèches et les moments

de flexion. On peut en effet écrire au centre de la plaque :

$$\begin{aligned} w &= \frac{16 q_0 a^4}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left[D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mn}{\eta} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{\eta} \right)^4 \right]} \\ M_x &= \frac{16 q_0 a^4}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \left[D_{11} m^2 + D_{12} \left(\frac{n}{\eta} \right)^2 \right]}{mn \left[D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mn}{\eta} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{\eta} \right)^4 \right]} \\ M_y &= \frac{16 q_0 a^4}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1} \left[D_{12} m^2 + D_{22} \left(\frac{n}{\eta} \right)^2 \right]}{mn \left[D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mn}{\eta} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{\eta} \right)^4 \right]} \end{aligned} \quad (IV.31)$$

Sous cette forme, ces expressions présentent l'avantage d'être plus indépendantes des dimensions physiques de la plaque.

3. Résultats et commentaires :

Les résultats obtenus montrent que la flèche est maximale au centre de la plaque, pour ce qui est des moments on remarque que le moment de torsion M_{xy} diminue progressivement en partant des cotés de la plaque jusqu'au voisinage de zéro au centre de la plaque ce qui est conforme avec la théorie.

Pour ce qui est des moments de flexion M_x et M_y ils atteignent leurs maximum au centre de la plaque.

La valeur maximale des flèches maximale est atteinte pour un rapport de largeur sur longueur avoisinant 1 i.e pour une plaque carrée.

L'influence de la charge q_0 était prévisible ; l'augmentation de sa valeur augmente systématiquement la flèche et les moments et cela pour différents rapports de largeur sur longueur.

Données technologique :

➤ **Plaque rectangulaire :**

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2830 \text{ mm} \\ b = 707 \text{ mm} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} E_L = 38 \text{ GPa} \\ E_T = 9 \text{ GPa} \\ G_{LT} = 3,6 \text{ GPa} \\ \nu_{LT} = 0,32 \end{array} \right.$$

➤ **Plaque carrée :**

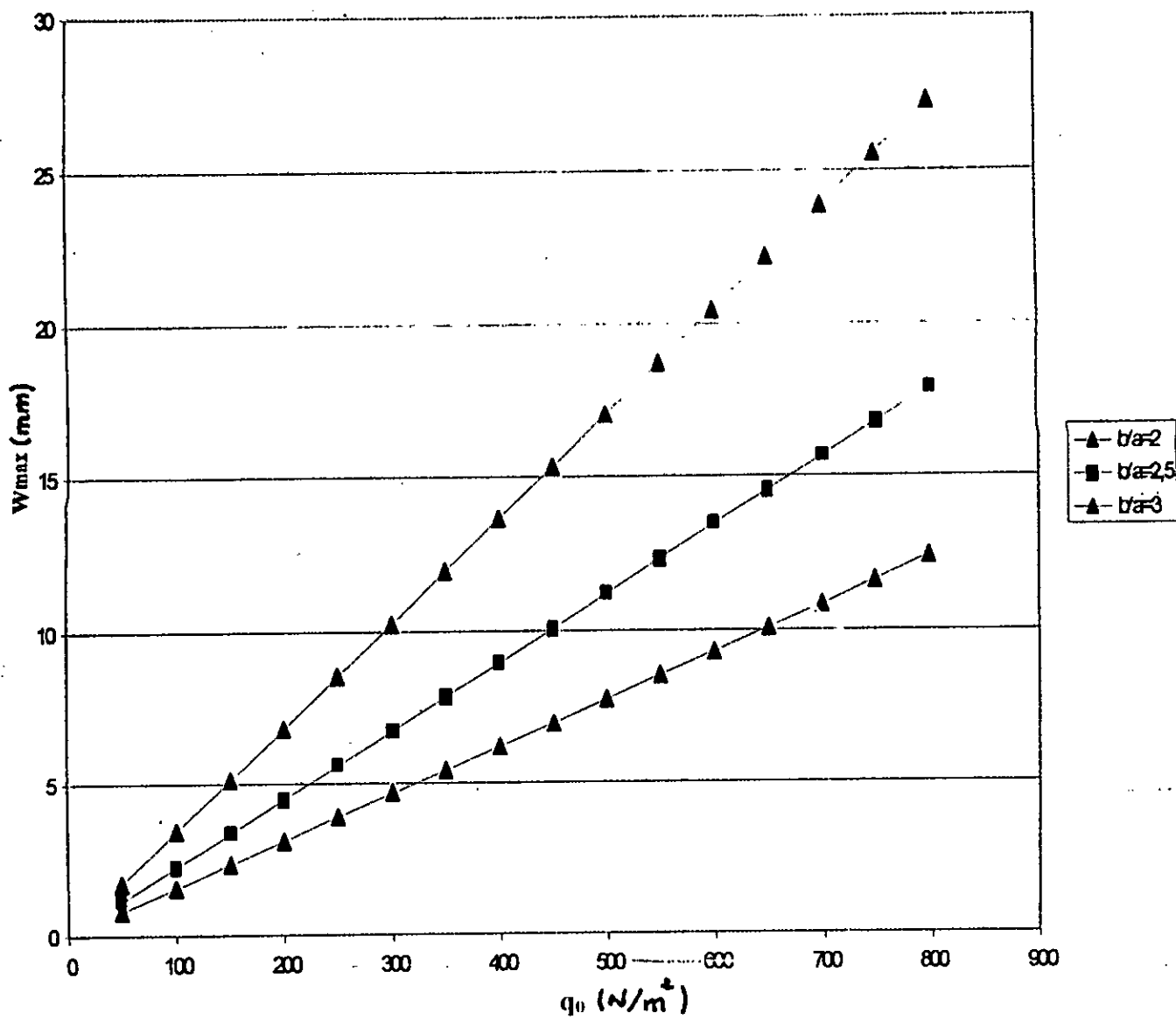
$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1414 \text{ mm} \\ b = 1414 \text{ mm} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} E_L = 25 \text{ GPa} \\ E_T = 1 \text{ GPa} \\ G_{LT} = 0,8 \text{ GPa} \\ \nu_{LT} = 0,25 \end{array} \right.$$

Les résultats obtenus sont représentés sur les graphes suivants :

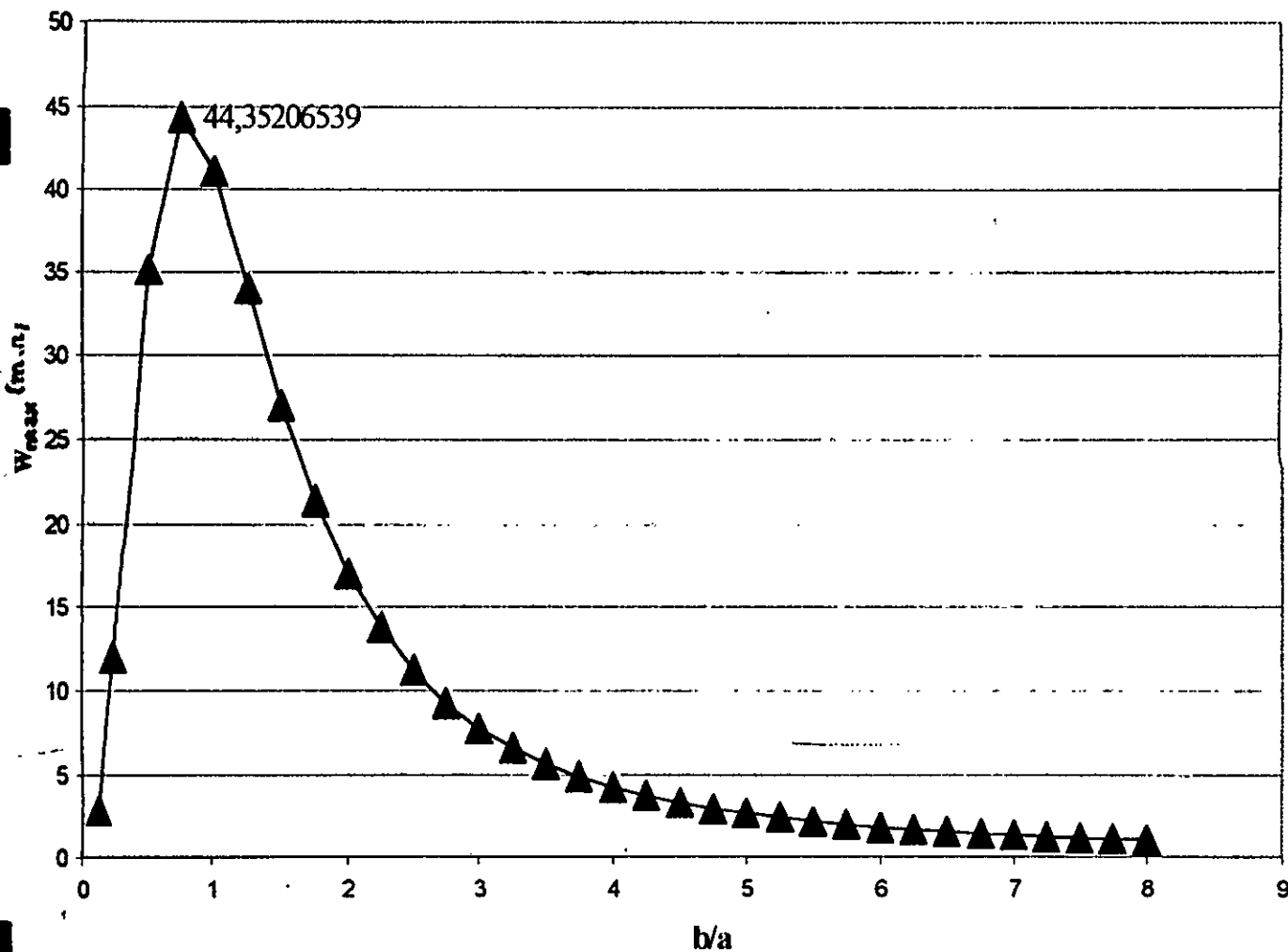
Les moments sont donnés en N. M et la flèche en mm.

Multicouche croisé orthogonal 0°

Influence de la charge sur la flèche maximale

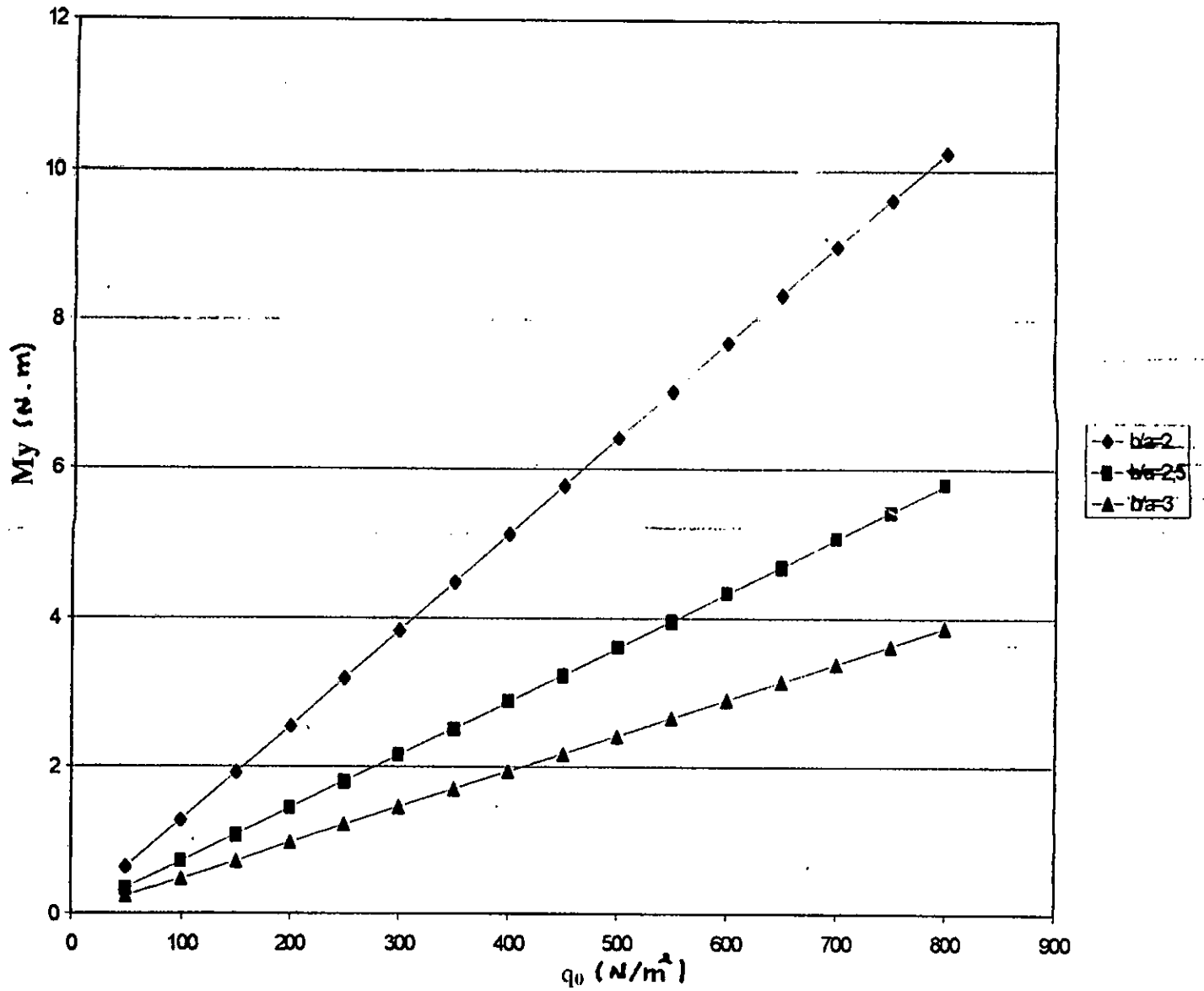


Influence du rapport b/a sur la flèche maximale



Plaques 0°

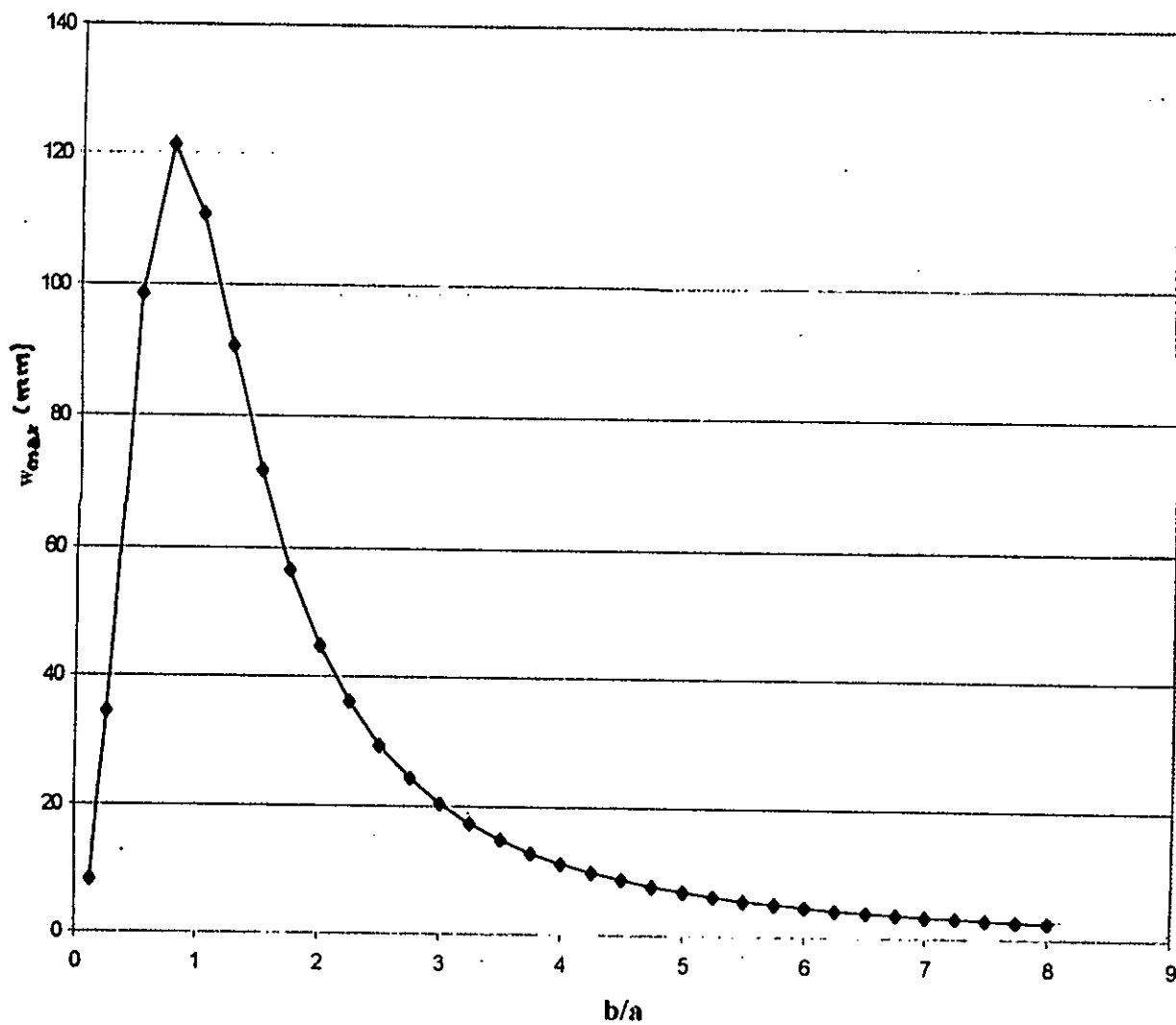
Influence de la charge sur le moment M_y



Influence de la charge sur M_x

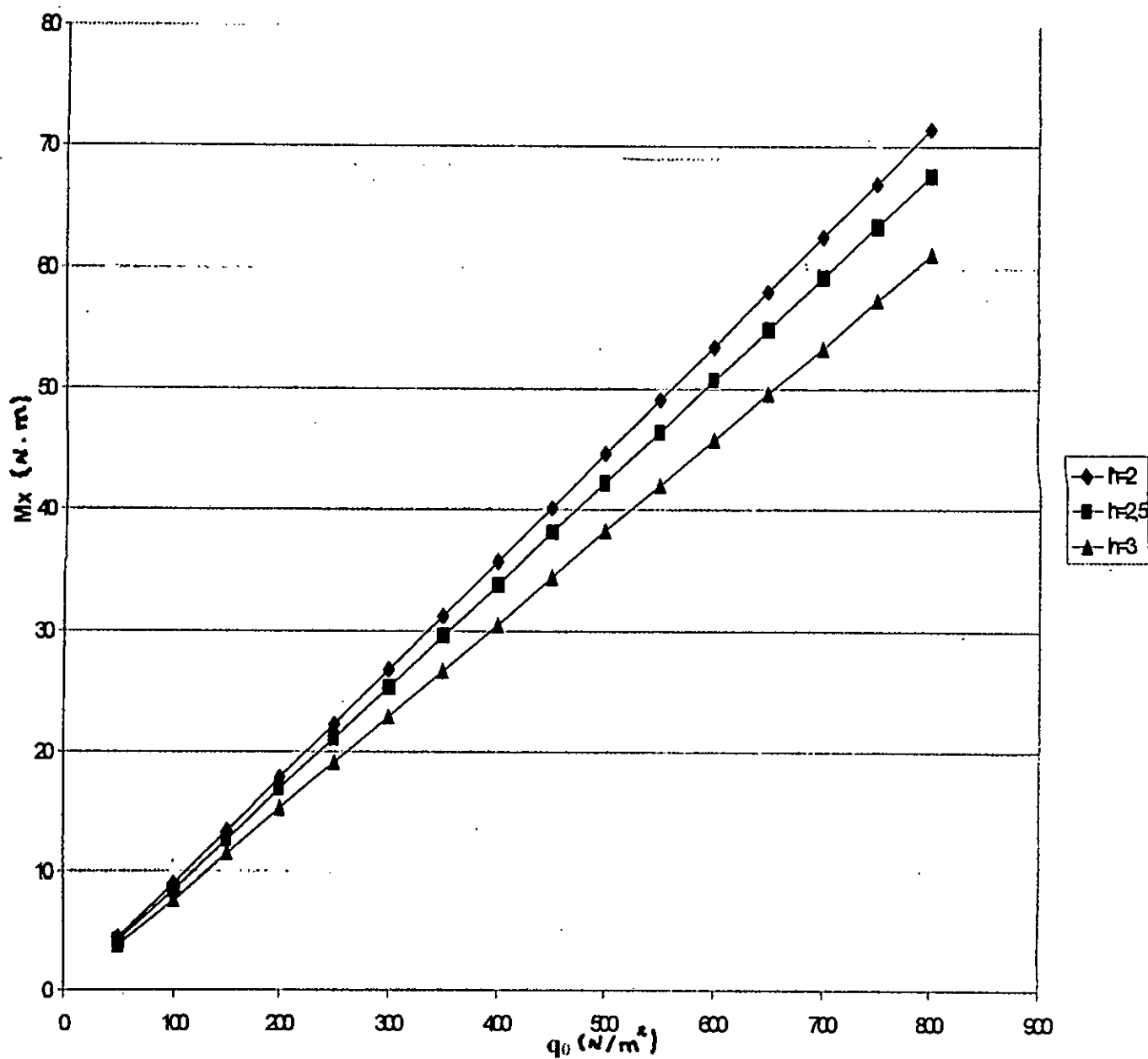
Plaques 0°

Influence du rapport b/a sur la flèche maximale



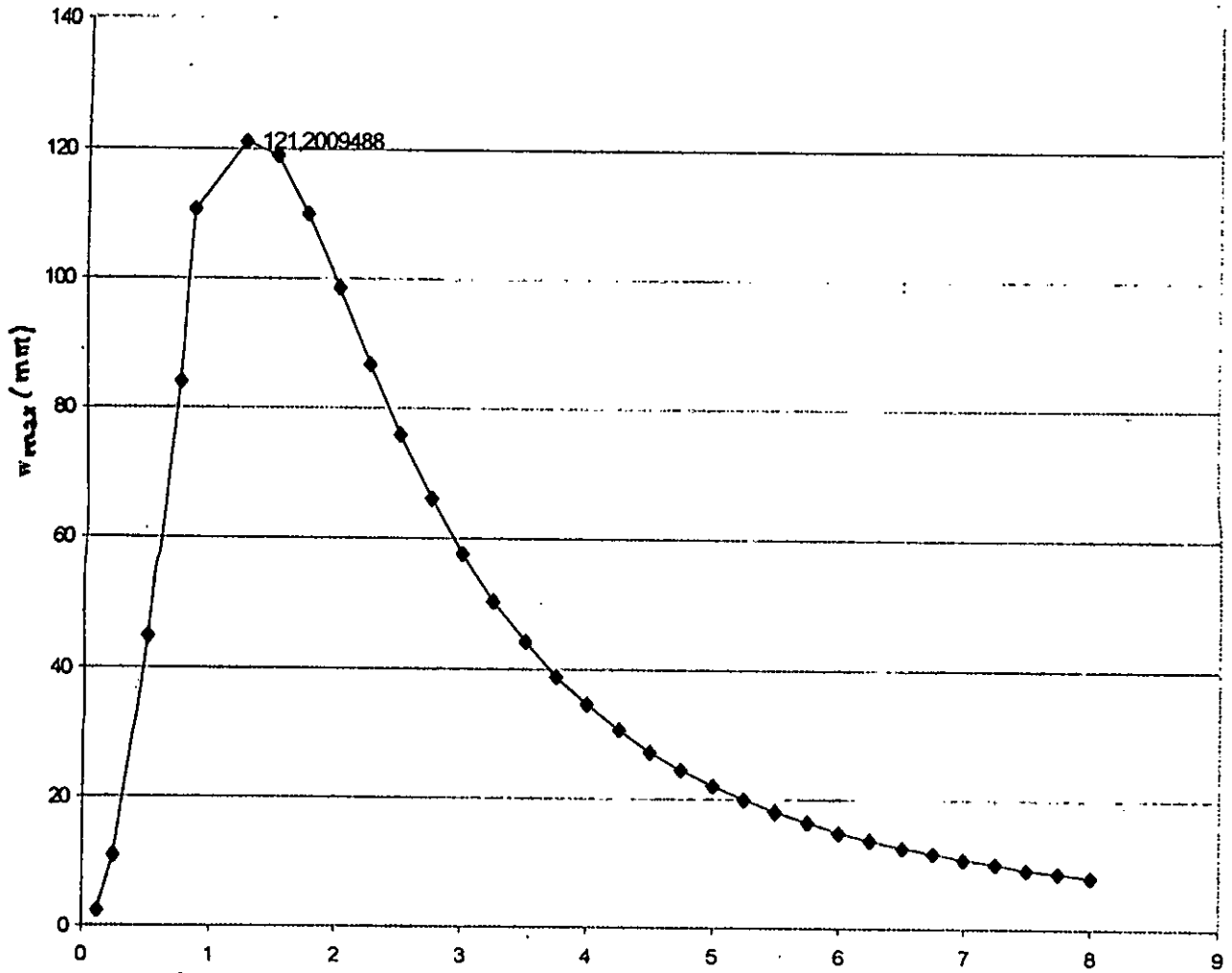
Plaque 90°

Influence de la charge sur le moment M_x



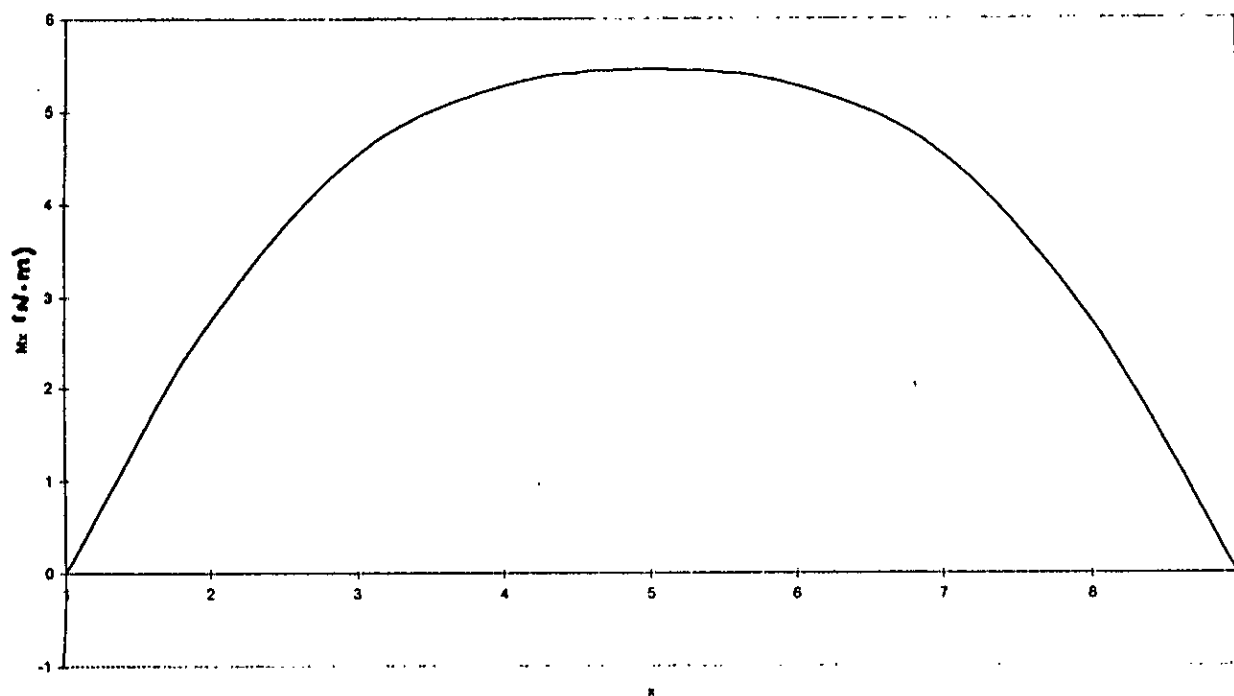
Plaque 90°

Influence du rapport b/a sur la flèche maximale



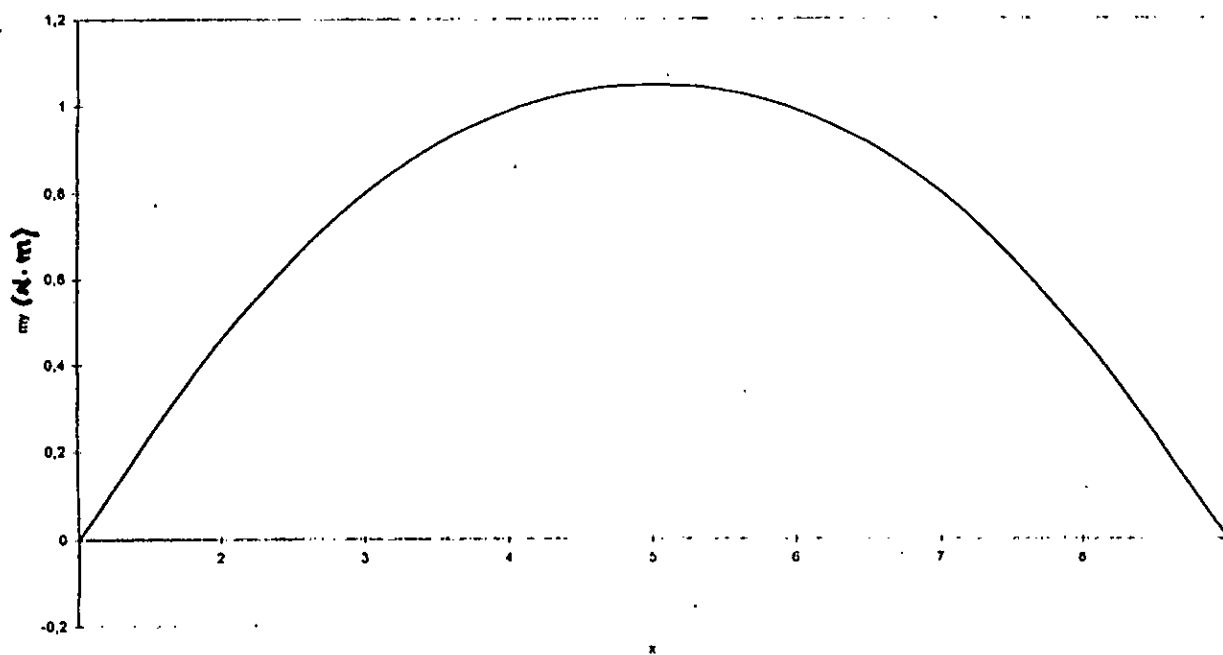
Variation de M_x suivant x

M_x

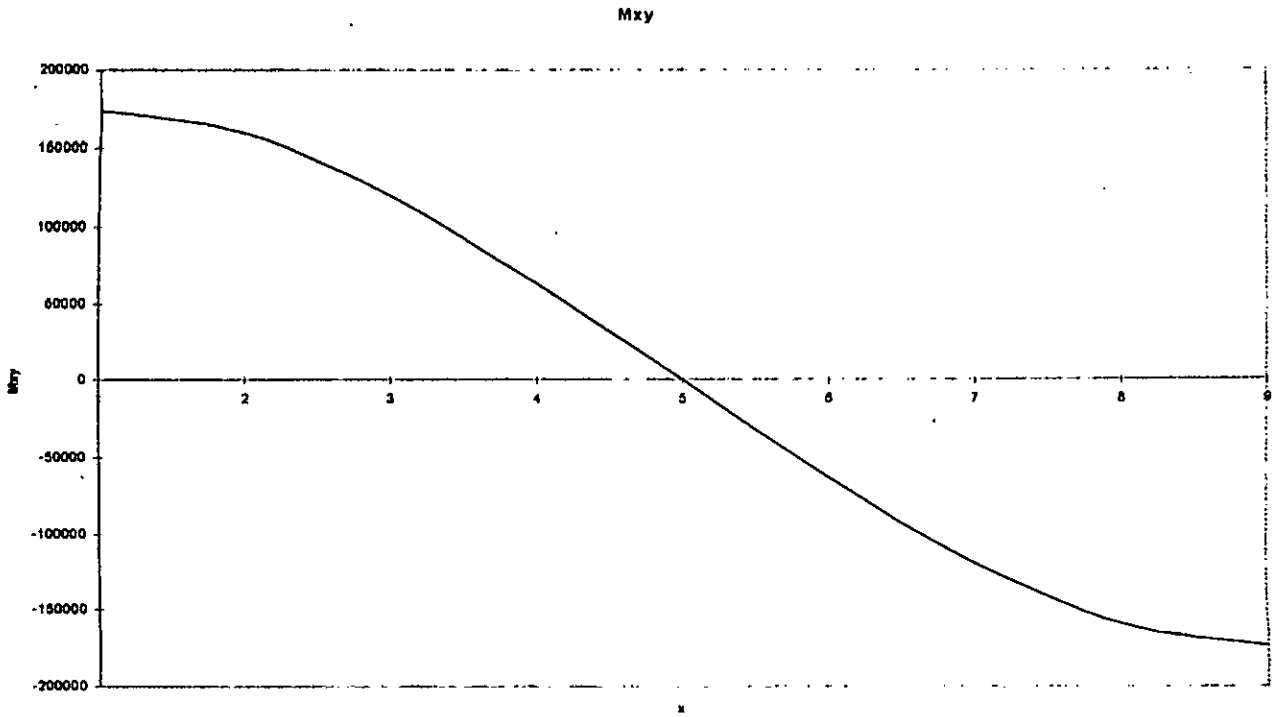


Variation de M_y suivant x

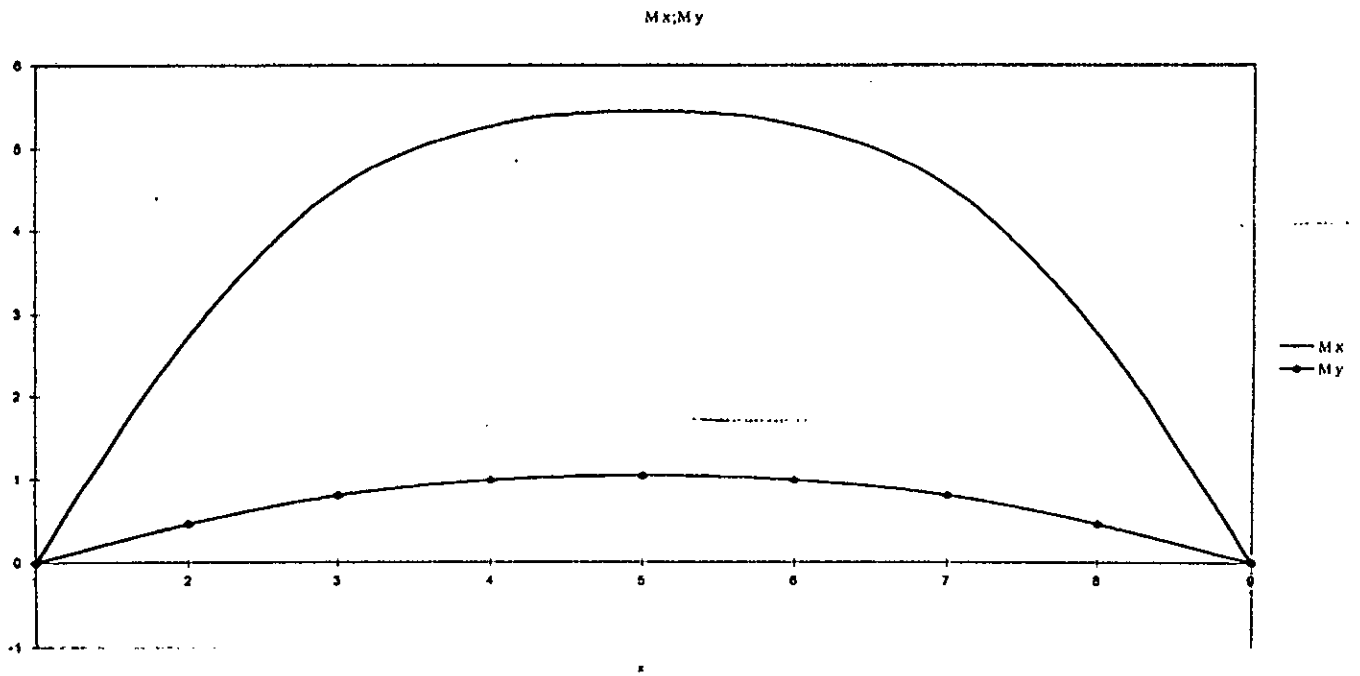
m_y



Variation de M_{xy} suivant x

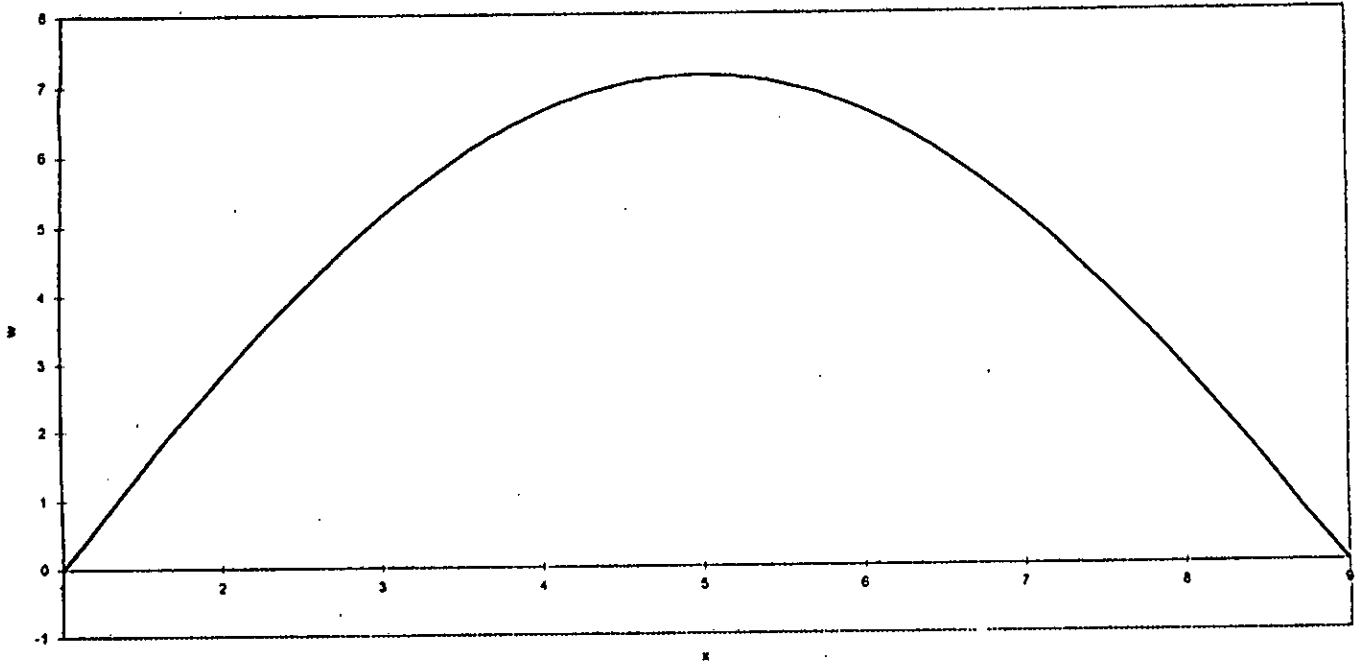


Variation de M_x, M_y suivant x

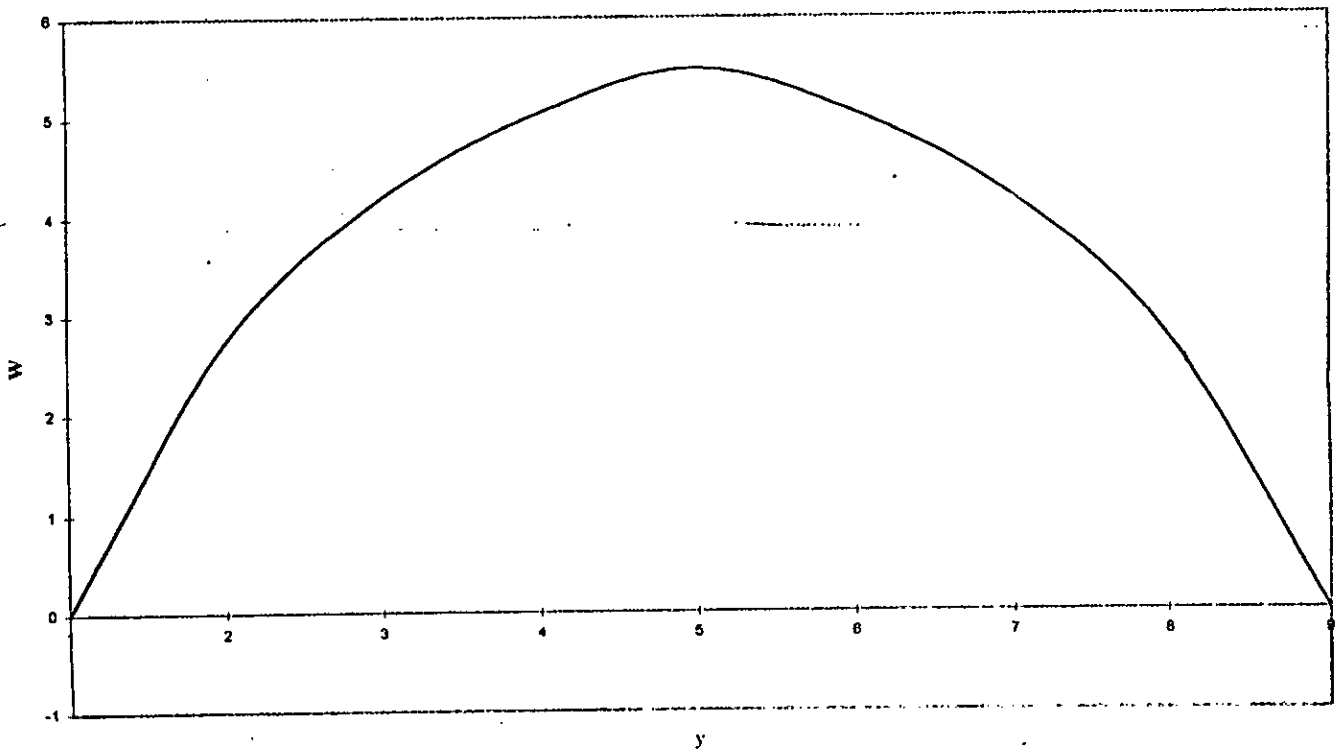


Variation de w suivant x

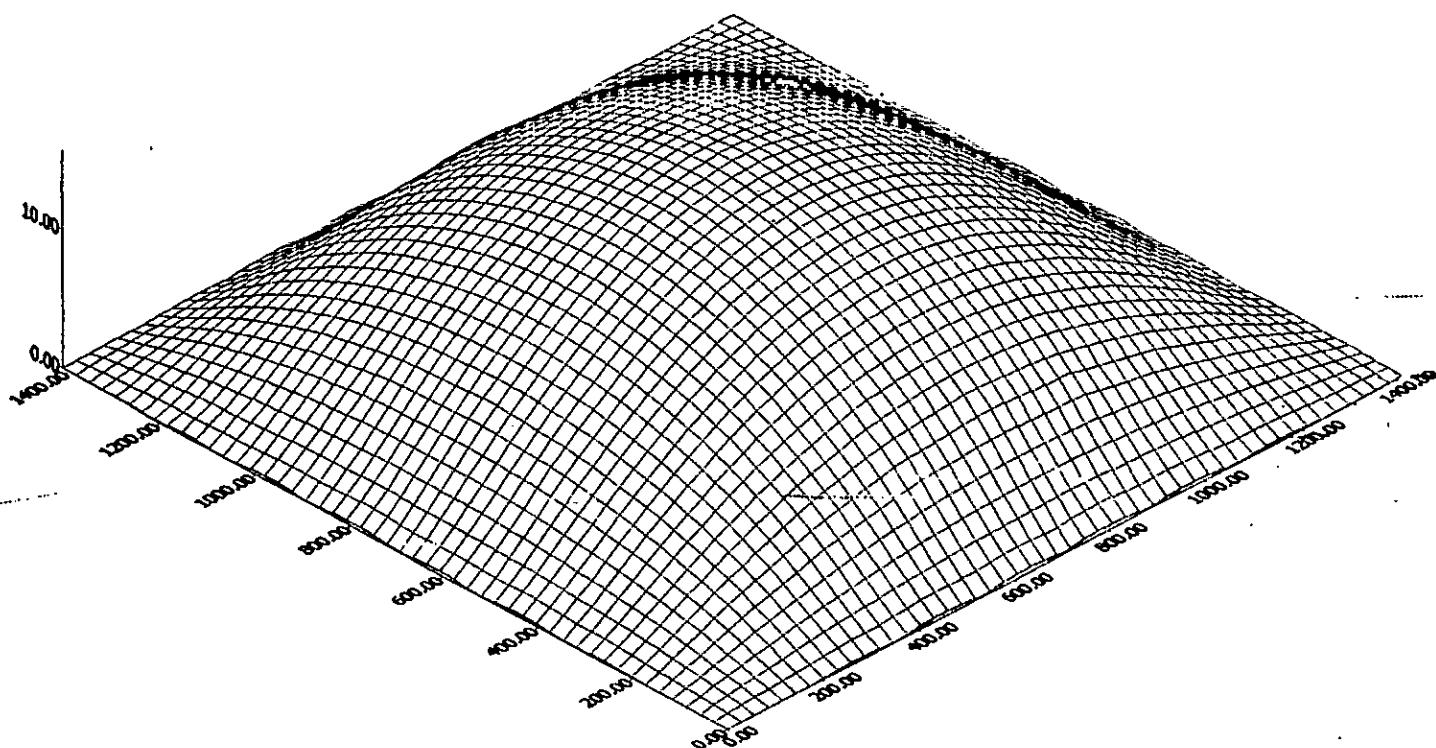
w (mm)



Variation de w en fonction de y

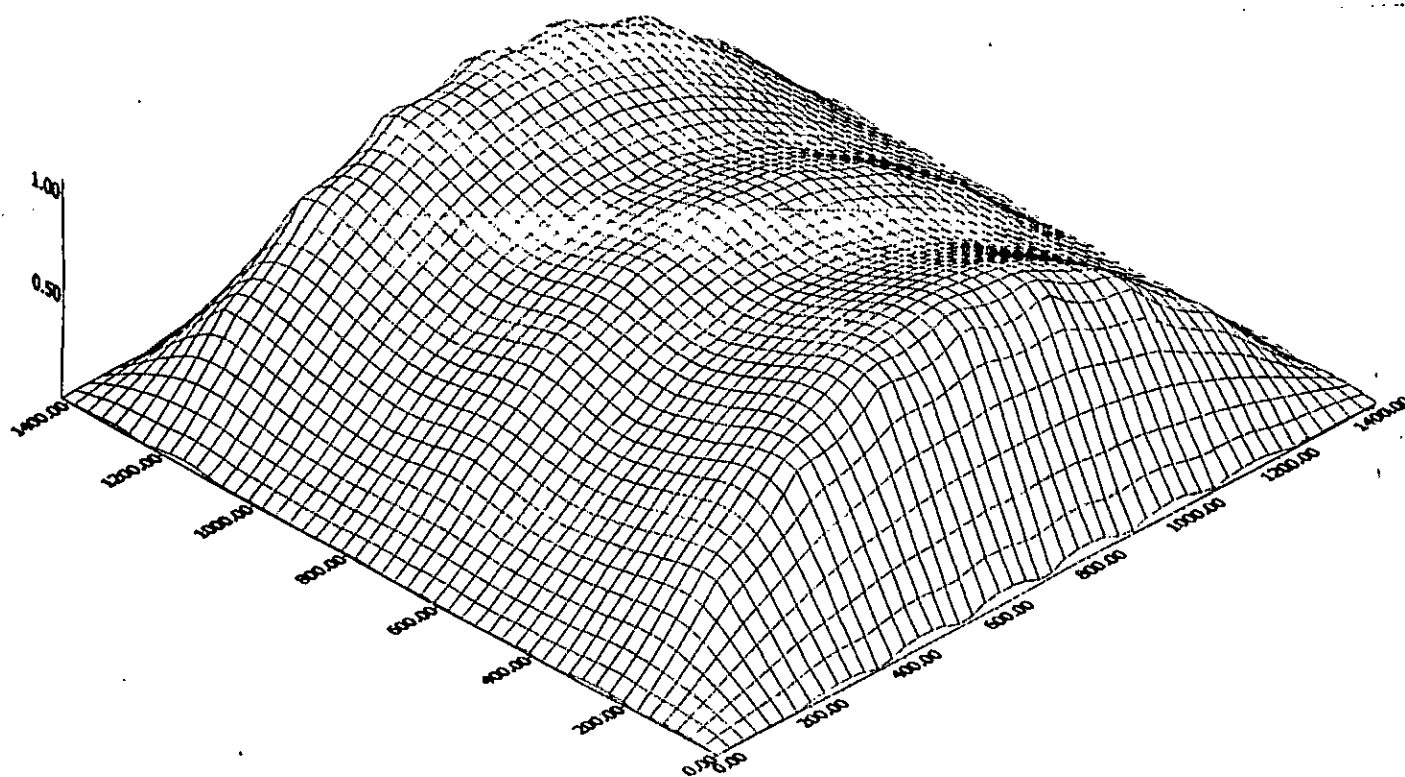


Plaque carrée ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$)
Variation bidimensionnelle de la flèche

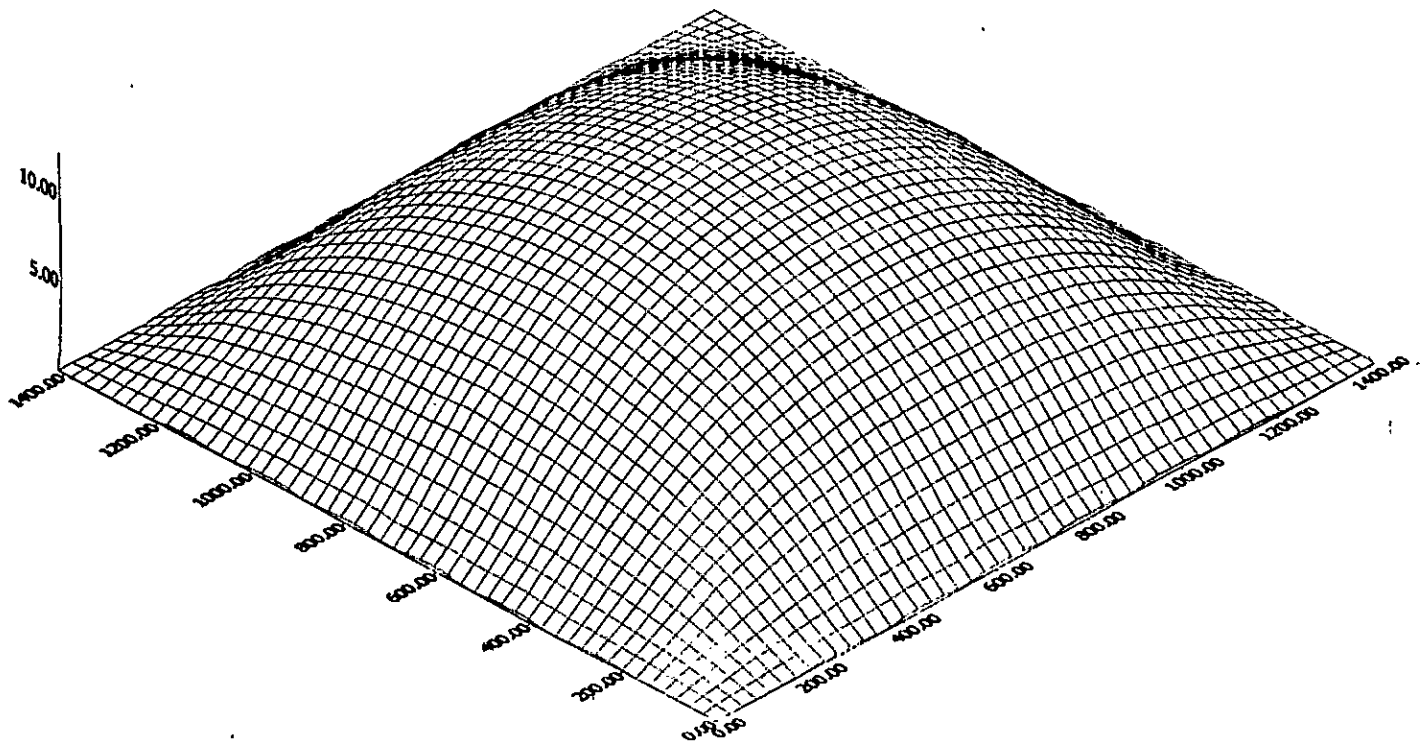


Plaque carrée ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$)

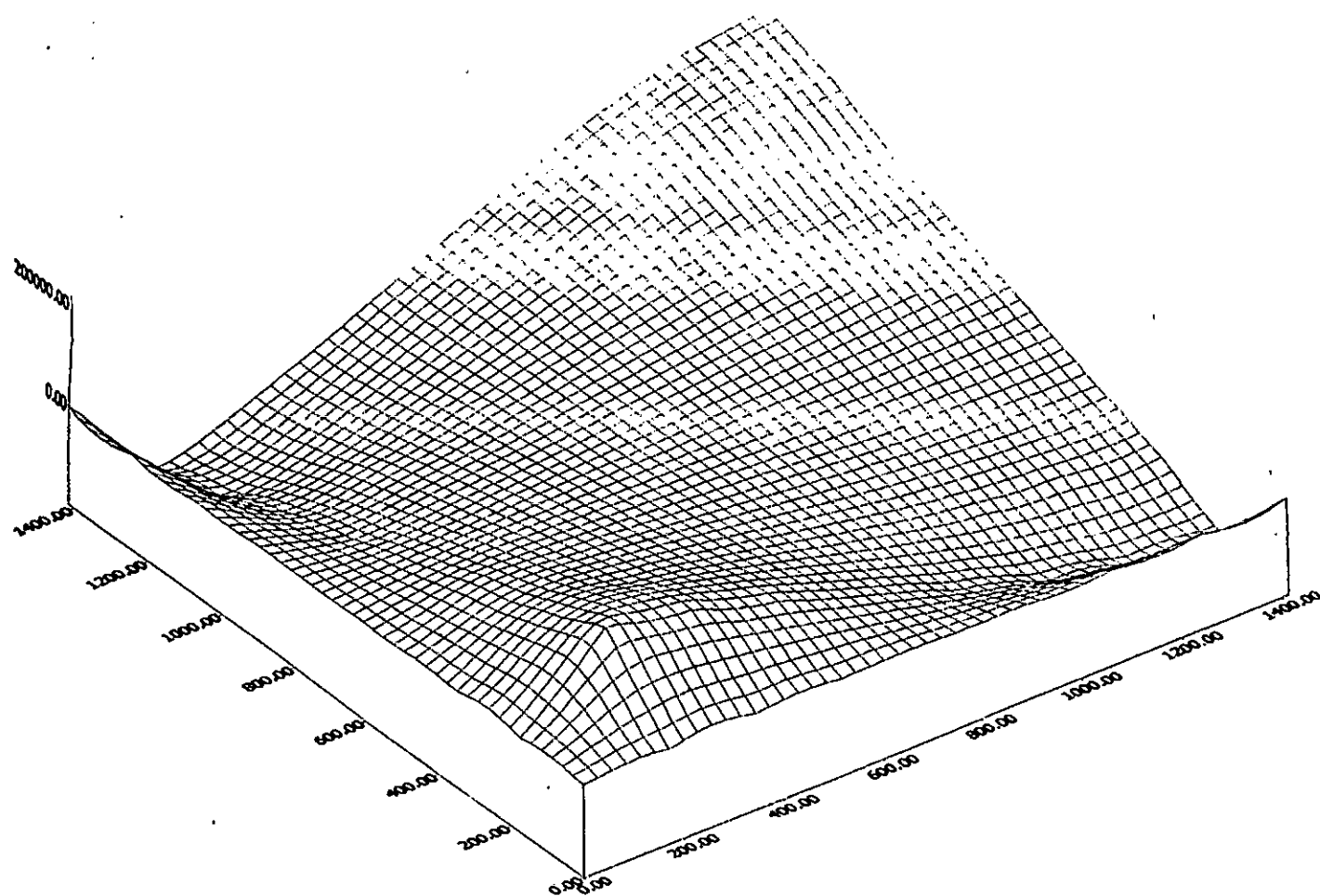
Variation bidimensionnelle de M_{xy}



Plaque carrée ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$)
Variation bidimensionnelle de M_x



Plaque carrée ($0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$)
Variation bidimensionnelle de M_{xy}

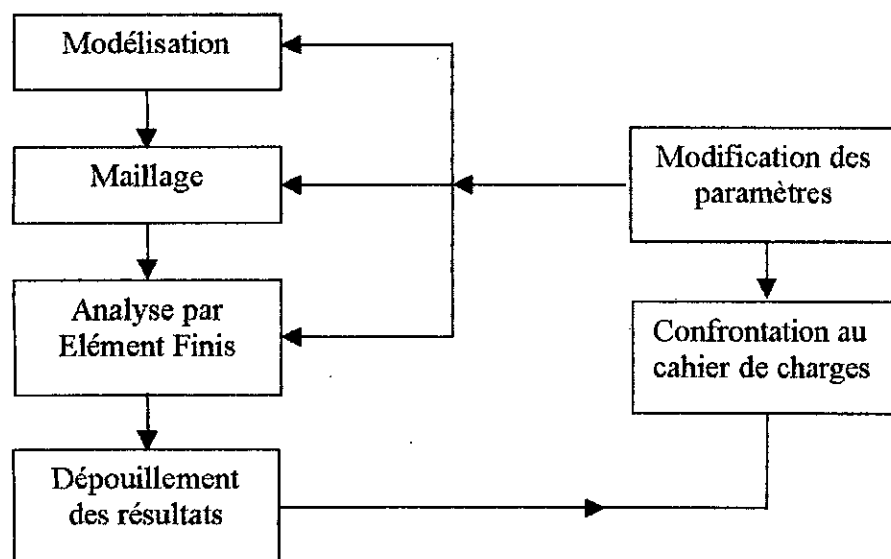


Chapitre V

Formulation par la méthode des éléments finis

Introduction :

L'analyse d'une structure par la méthode des éléments finis consiste à découper la structure considérée en éléments et à établir aux nœuds sommets des éléments les relations forces-déplacements, en tenant compte des conditions de charges et d'appuis imposées à la structure. On obtient alors un système d'équations linéaires de grande dimension, dont la résolution numérique conduit à la valeur du déplacement en chaque nœud. Le champ des contraintes est ensuite déterminé à partir du champ des déplacements. L'analyse par la méthode des éléments finis nécessite le découpage préalable de la structure en éléments. Cette fonction de découpage est assurée par un processus dit de maillage de la structure permettant à l'opérateur d'obtenir un découpage automatisé de la structure. Le maillage peut être effectué directement dans le cas de structures simples. Dans le cas de structures complexes, le maillage ne peut être effectué aisément qu'après modification géométrique de la structure. L'analyse par la méthode des éléments finis apparaît ainsi comme l'une des étapes intégrée dans un système de conception (assistée par ordinateur) partant de la définition de la structure (modélisation géométrique) pour aboutir à son prédimensionnement par la méthode des éléments finis. Le processus de conception est alors schématisé sur l'organigramme suivant :



1. Rappel des théorèmes fondamentaux :

1.1 Equation d'équilibre en deux dimensions :

Les contraintes sont définies en fonction d'une force ΔF appliquée sur une aire ΔA :

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (\text{V.1})$$

Dans le cas bidimensionnel, toutes les contraintes suivant l'axe z sont nulles, d'où :

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \quad (\text{V.2})$$

L'équation d'équilibre est donnée par la formule suivante :

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{yx} dx = 0$$

En considérant les restrictions citées auparavant l'équation d'équilibre sous forme finale suivant l'axe x sera :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (\text{V.3})$$

Similairement, l'équation d'équilibre dans la direction y sera :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.4})$$

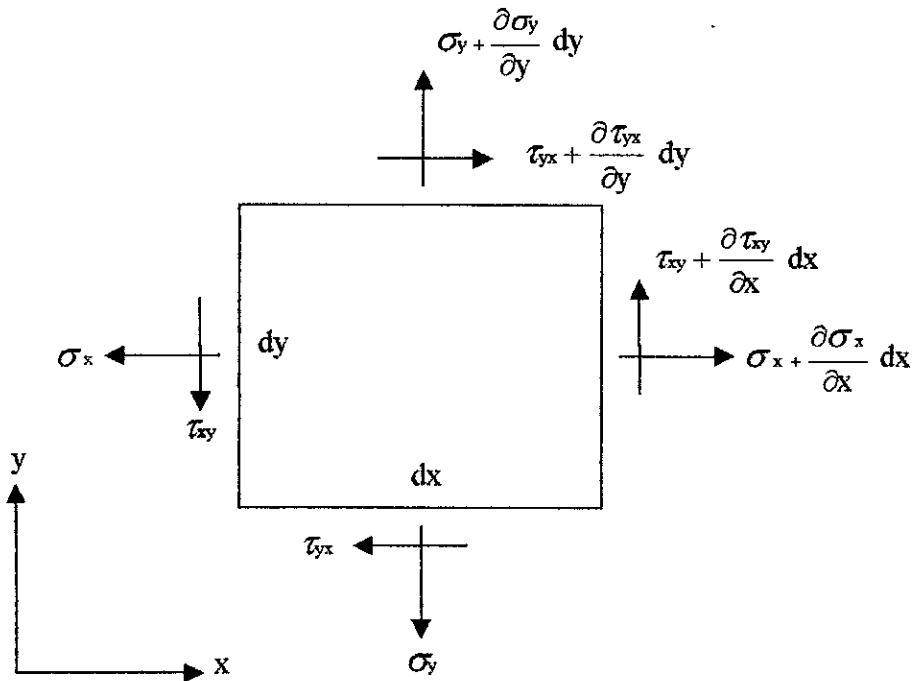


Fig. V.1 contraintes agissant sur un élément de plaque

1.2 Relations déformations-déplacements en bidimensionnel :

Les relations déformations-déplacements dans ce cas sont définies par les termes :

$$\sigma_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{V.5a})$$

$$\sigma_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{V.5b})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{V.5c})$$

Les autres termes étant nuls.

1.3 Lois de comportement d'une plaque orthotrope :

1.3.1 Plaque orthotrope rapportée à ses axes :

Pour une plaque orthotrope d'épaisseur e dont les axes principaux (L,T) sont confondus avec les axes de référence (x,y), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{V.6})$$

avec :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L} ; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{LT} E_T}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L} \quad (\text{V.7})$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2} \frac{E_T}{E_L} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} ; \quad Q_{66} = G_{LT}$$

Le champ des déformations s'écrit, d'après (I.11) et en tenant compte de (II.2) :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

(V.8)

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0$$

Ce champ est valable en l'absence du cisaillement transverse. De plus pour un stratifié orthogonal symétrique il n'y aura pas de couplage membrane-torsion, membrane-flexion. Ce qui permet d'écrire

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (V.9)$$

L'expression développée des résultantes s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (V.10)$$

1.3.2 Plaque orthotrope non rapportée à ses axes :

Dans le cas où les axes principaux de la couche orthotrope ne coïncideraient pas avec les axes de référence des contraintes, la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{V.10a})$$

Les relations reliant les coefficients \bar{Q}_{ij} aux coefficients Q_{ij} sont explicités par les relations (III.42)

2. Plaque rectangulaire :

2.1 L'élément plaque rectangulaire à huit degrés de libertés :

Un élément rectangulaire en déformation plane est illustré par la figure (V.2), cet élément est d'une longueur a , largeur b et épaisseur constante h .

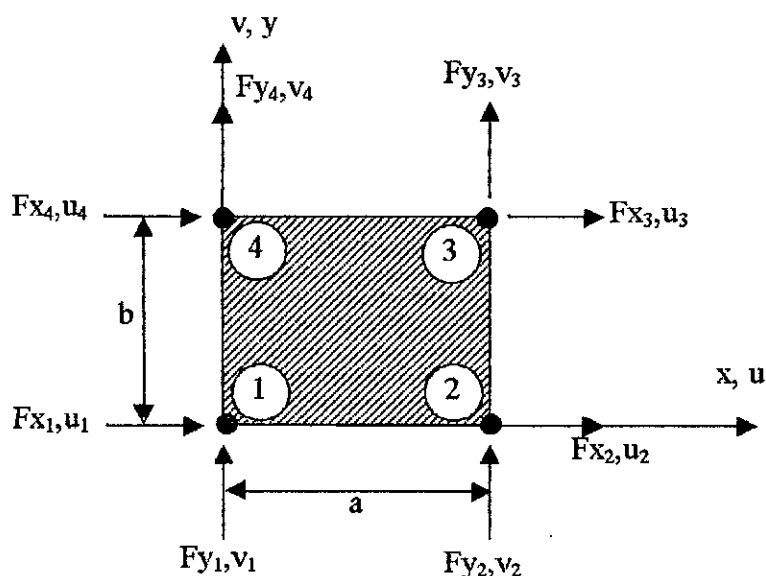


Fig. V.2 élément rectangulaire à huit ddl en contraintes planes ou déformations planes

Chaque nœud comporte deux degrés de libertés, déplacements u et v dans les directions x et y respectivement. Chaque nœud peut être sollicité par deux forces F_x et F_y dans les directions x et y respectivement.

2.1.1 Fonctions déplacements:

Les fonctions d'interpolation pour les déplacements u et v sont supposées avoir la forme simple suivante:

$$\begin{cases} u(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \\ v(x, y) = c_5 + c_6x + c_7y + c_8xy \end{cases} \quad (\text{V.11})$$

Pour déterminer les constantes c_i , on applique les conditions sur les déplacements nodaux suivantes:

$$\begin{cases} u = u_1 \text{ et } v = v_1 & \text{à } (0, 0) \\ u = u_2 \text{ et } v = v_2 & \text{à } (a, 0) \\ u = u_3 \text{ et } v = v_3 & \text{à } (a, b) \\ u = u_4 \text{ et } v = v_4 & \text{à } (0, b) \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

Après application des conditions (V.12) dans l'équation (V.11) et réarrangement des termes, on obtient:

$$\begin{cases} u(x, y) = f_1(x, y)u_1 + f_2(x, y)u_2 + f_3(x, y)u_3 + f_4(x, y)u_4 \\ v(x, y) = f_5(x, y)v_1 + f_6(x, y)v_2 + f_7(x, y)v_3 + f_8(x, y)v_4 \end{cases} \quad (\text{V.13})$$

Avec les quatre fonctions $f(x, y)$, dites *fonctions de forme* exprimées explicitement :

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ f_2(x, y) = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ f_3(x, y) = \frac{xy}{ab} \\ f_4(x, y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

l'examen des relations (V.13) et (V.14) nous renseigne que la distribution des déplacements u et v est linéaire le long d'un côté quelconque et elle ne dépend que des déplacements des deux nœuds de connexion. Ce qui nous permet de déduire que la compatibilité des déplacements aux frontières est satisfaite [3].

2.1.2 Relations déformations-déplacements :

L'équation (V.5) et après l'incorporation de l'équation (V.14) nous permet d'aboutir à la formulation (V.15) suivante:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a}(1-\frac{y}{b}) & 0 & \frac{1}{a}(1-\frac{y}{b}) & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b}(1-\frac{x}{a}) & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b}(1-\frac{x}{a}) \\ -\frac{1}{b}(1-\frac{x}{a}) & -\frac{1}{a}(1-\frac{y}{b}) & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a}(1-\frac{y}{b}) & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b}(1-\frac{x}{a}) & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

ou symboliquement:

$$[\varepsilon] = [A][q] \tag{V.15a}$$

on voit à travers l'équation (V.15) que la contrainte ε_x est constante par rapport à l'axe x et varie linéairement par rapport à l'axe y et la contrainte ε_y réagit inversement à ε_x . quand γ_{xy} elle varie linéairement suivant les deux directions x et y.

2.1.3 Relations déformations contraintes :

La relation contrainte-déformation pour un corps anisotrope est exprimée de la manière suivante [4]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E_2}{1-n\nu_2^2} \begin{bmatrix} N & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

avec :

$$n = \frac{E_1}{E_2}, \quad m = \frac{G_2}{E_2} \tag{V.16}$$

Or dans le cas de déformation plane elle est donnée par la relation (V.17) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & 1-\nu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

symboliquement les équations (V.16) et (V.17) sont écrites:

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \tag{V.18}$$

2.1.4 Matrice de rigidité par la méthode de l'énergie :

Les éléments de rigidité peuvent être établis en respectant le théorème de CASTIGLIANO après dérivation de l'énergie de déformation, l'énergie de déformation est de la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^h [\varepsilon]^T \cdot [\sigma] dz dy dx \quad (\text{V.19})$$

où :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{V.19a})$$

En transposant l'équation (V.15a) on aura :

$$[\varepsilon]^T = [q]^T [A]^T \quad (\text{V.20})$$

A partir des équations (V.18) et (V.15a) ;

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] = [C][A][q] \quad (\text{V.21})$$

En substituant l'équation (V.21) et l'équation (V.20) dans l'équation (V.19) et en supposant que l'épaisseur t est constante :

$$U = \frac{h}{2} [q]^T \left[\int_0^a \int_0^b [A]^T \cdot [C][A] dx dy \right] [q] \quad (\text{V.22})$$

Le théorème de CASTIGLIANO indique que :

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (\text{V.23})$$

L'application de l'équation (V.23) pour chaque degré de liberté nous obtenons finalement :

$$[F] = [K][q] \quad (\text{V.24})$$

avec:

$$[F] = [F_{x1} \ F_{y1} \ F_{x2} \ F_{y2} \ F_{x3} \ F_{y3} \ F_{x4} \ F_{y4}] \quad (\text{V.24a})$$

$$[q] = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4] \quad (\text{V.24b})$$

et

$$[K] = h \iint_{\text{aire}} [A]^T [C][A] dx dy \quad (\text{V.25})$$

Ce qui nous permet d'écrire l'équation de rigidité correspondante à l'élément rectangulaire à 8 ddl en contraintes planes sous la forme explicite suivante :

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & & & & & & & & \\ C_2 & C_3 & & & & & & & \\ C_4 & -C_5 & C_1 & & & & & & \\ C_5 & C_6 & -C_2 & C_3 & & & & & \\ -\frac{C_1}{2} & -C_2 & C_7 & -C_5 & C_1 & & & & \\ -C_2 & -\frac{C_3}{2} & C_5 & C_8 & C_2 & C_3 & & & \\ C_7 & C_5 & -\frac{C_1}{2} & C_2 & C_4 & -C_5 & C_1 & & \\ -C_5 & C_8 & C_2 & -\frac{C_3}{2} & C_5 & C_6 & -C_2 & C_3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad \text{Symétrique} \quad (\text{V.26})$$

Avec :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{h}{3} \left(Q_{11} \frac{b}{a} + Q_{33} \frac{a}{b} \right) \\ C_2 &= \frac{h}{4} (Q_{12} + Q_{33}) \\ C_3 &= \frac{h}{3} \left(Q_{22} \frac{a}{b} + Q_{33} \frac{b}{a} \right) \\ C_4 &= \frac{h}{6} \left(Q_{33} \frac{a}{b} - 2 Q_{11} \frac{b}{a} \right) \\ C_5 &= \frac{h}{4} (Q_{12} - Q_{33}) \\ C_6 &= \frac{h}{6} \left(Q_{22} \frac{a}{b} - 2 Q_{33} \frac{b}{a} \right) \\ C_7 &= \frac{h}{6} \left(Q_{11} \frac{b}{a} - 2 Q_{33} \frac{a}{b} \right) \\ C_8 &= \frac{h}{6} \left(Q_{33} \frac{b}{a} - 2 Q_{22} \frac{a}{b} \right) \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

Où les éléments de réduction Q_{ij} sont données par les relations (III.30).

3 Résultats :

$$\begin{cases} E_L = 38 \text{ GPa} \\ E_T = 9 \text{ GPa} \\ G_{L,T} = 3,6 \text{ GPa} \\ \nu_{L,T} = 0,32 \end{cases}$$

Nœud	Déplacement x	Déplacement y
1	0,000000 E+00	0,000000 E+00
2	886,287600	0,000000 E+00
3	1353,824000	2049,101000
4	0,000000 E+00	-427,042500
5	-50,426670	0,000000 E+00
6	-298,564300	2197,061000
7	0,000000 E+00	378,678500
8	-1289,526000	736,265400
9	-1838,440000	2468,139000

La déformation de chaque élément est :

ϵ_{xx}	417,930500	109,699600	-1289,526000	-548,913600
ϵ_{yy}	0,000000 E+00	-950,569900	213,521200	-1331,124000
ϵ_{xy}	-229,622600	943,752000	382,800300	3594,421000

Les contraintes internes dans chaque élément sont :

σ_{xx}	8,548577 E+08	8346905,000000	-2,589139 E+09	-1,425306 E+09
σ_{yy}	9,498420 E+07	-1,919416 E+09	1,426738 E+08	-2,847507 E+09
σ_{xy}	-2,087478 E+08	8,579564 E+08	3,480003 E+08	3,267656 E+09

$$\begin{cases} E_L = 25 \text{ GPa} \\ E_T = 1 \text{ GPa} \\ G_{L,T} = 0,8 \text{ GPa} \\ \nu_{L,T} = 0,25 \end{cases}$$

Nœud	Déplacement x	Déplacement y
1	0,000000 E+00	0,000000 E+00
2	717,991600	0,000000 E+00
3	1137,379000	1638,740000
4	0,000000 E+00	-209,247400
5	-192,711600	0,000000 E+00
6	-437,315600	2389,718000
7	0,000000 E+00	2085,907000
8	-1103,312000	2749,242000
9	-1780,427000	3914,066000

La déformation de chaque élément est :

ϵ_{xx}	262,640000	87,391640	-1103,312000	-677,114700
ϵ_{yy}	0,000000 E+00	-488,880900	104,623700	-1807,306000
ϵ_{xy}	-254,372100	1214,364000	759,690500	3044,009000

Les contraintes internes dans chaque élément sont :

σ_{xx}	5,372182 E+08	6,764633 E+07	-2,232997 E+09	-1,795759 E+09
σ_{yy}	5,969092 E+07	-9,801218 E+08	-3,674974 E+07	-3,850652 E+09
σ_{xy}	-2,312474 E+08	1,103967 E+09	6,906277 E+08	2,767281 E+09

Conclusion

Conclusion :

Cette étude nous a permis d'aborder un domaine scientifique très intéressant et relativement récent, la large utilisation des matériaux composites pour leurs performances mécaniques indéniables nécessite l'étude de leur comportement mécanique sous différents angles.

Dans la partie analytique on a étudié le comportement mécanique d'une plaque orthotrope flexionnelle en appuis simple soumise à une charge uniformément répartie constante q_0 , les résultats obtenus ont été concordants (surtout pour la déflexion w).

Le comportement en membrane a été étudié avec la méthode des éléments finis, le programme établi a été exécuté pour différentes plaques orthotropes. Faute de valeurs de référence on a pu vérifier la validité de ce programme en injectant des données technologiques qui permettent de comparer nos résultats à ceux obtenus pour une plaque isotrope, les résultats ont été très satisfaisants.

Une approche similaire a été entreprise pour une plaque flexionnelle, le programme est en cours d'élaboration, sa validité peut être vérifiée en comparant les résultats obtenus à ceux de la méthode analytique pour une plaque en appuis simples.

Il est à noter que cette étude est la première en la matière dans le cadre d'un projet de fin d'étude, elle sera sans doute suivie d'autres.

Annexe

Cette annexe présente la marche à suivre pour un calcul des stratifiés avec l'aide d'une petite calculatrice.

1. Entrée des données par nature :

1.1 Si la couche est orthotrope :

Entrée de E_L , E_T , ν_{LT} , G_{LT}

Calcul :

$$A = 1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}$$

$$Q_{11} = \frac{E_L}{A}$$

$$Q_{12} = \frac{E_T \nu_{LT}}{A}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{A}$$

$$Q_{33} = G_{LT} \quad \text{FIN}$$

1.2 Si la couche est isotrope :

Entrée de E , ν

Calcul :

$$A = 1 - \nu^2 \rightarrow A$$

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{A}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E}{A}$$

$$Q_{33} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{FIN}$$

On peut stocker ces données sous cette forme.

2. Entrée par couches :

2.1 Entrée du nombre de couches.

2.2 Couche n°1 : angle α (1), nature (1), cote inférieure par rapport au plan moyen H_1 (1), cote supérieure H_2 (2).

2.3 Couches suivantes n° (k) : angle α (k), nature (k), cote supérieure H_2 (2), $[H_2(k-1) \rightarrow H_1(k)]$.

On peut stocker ces informations. Si la capacité de la machine est faible, on peut insérer couche par couche les calculs qui suivent.

2.4 Former 3 matrices :

Matrices 3×3 nulles :

$$[A] = [B] = [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si la capacité de la machine est faible et la structure symétrique, on peut ne pas former B.

2.5 Former :

➤ Pour chaque couche :

$$2.5.1 : C = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

2.5.2 : $R = C \cdot Q$

$$2.5.3 : C' = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

2.5.4 : $[\bar{Q}] = R \cdot C' = C \cdot Q \cdot C'$

Si la structure est toujours orthogonale, et que les directions principales des matériaux coïncident avec celles de la structure, on peut se contenter de $\bar{Q} = Q$ pour les matériaux orientés selon l'axe 1 de la structure et :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}$$

dans le cas contraire.

➤ Pour le multicouches :

2.5.5 : les trois matrices de comportement $[A][B][D]$ par cumul successif.

2.5.6 : la matrice 6×6 de comportement par juxtaposition :

$$\begin{aligned} [A] &= [A] + [\bar{Q}][H_2(k) - H_1(k)] \\ [B] &= [B] + \frac{1}{2}[\bar{Q}][H_2^2(k) - H_1^2(k)] \\ [D] &= [D] + \frac{1}{3}[\bar{Q}][H_2^2(k) - H_1^2(k)] \\ P &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

si la capacité de la machine est faible et la structure symétrique, on ne forme pas $[B]$. On peut éditer ces termes.

3. Entrée des charges :

Effort résultants $N_1, N_2, N_{12} \rightarrow [N]$

(3 valeurs)

Moment résultants $M_1, M_2, M_{12} \rightarrow [M]$

(3 valeurs)

4. Calculs :

4.1 calcul des allongements du plan moyen et des courbures :

(6 valeurs) par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{bmatrix} = [P^{-1}] \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$$

La plupart des constructeurs proposent un programme d'inversion de matrices ou de résolution de système linéaire qui convient très bien.

De la même façon, si la structure est symétrique, on peut calculer en deux temps par :

$$\begin{aligned} [\varepsilon^0] &= [A^{-1}][N] \\ [k] &= [D^{-1}][M] \end{aligned}$$

qui décompose en deux systèmes 3×3 .

4.2 Calcul des allongements et des contraintes dans les directions du renfort :

4.2.1 : introduire la cote z à la quelle on veut ces résultats.

4.2.2 : calculer l'allongement local par :

(3 valeurs)

$$[\mathcal{E}] = [\mathcal{E}^0] + z [k]$$

4.2.3 : former la matrice de torsion d'axe pour revenir dans les axes du renfort ; retrouver l'angle α (k) de la couche (k) où l'on se trouve, ou éventuellement l'introduire ; former :

$$C'' = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

4.2.4 : calculer : $[\mathcal{E}_{LT}] = [C''] [\mathcal{E}]$

sortir ce résultat.

4.2.5 : introduire (ou récupérer) la matrice Q formée en 1, de la couche considérée ; calculer :

$$[\sigma_{LT}] = [Q] [\mathcal{E}]$$

sortir ce résultat.

Si la machine est assez puissante, les opérations 4.2.2 à 4.2.5 peuvent être répétées automatiquement pour toutes les couches de constitution, en haut et en bas de chaque couche, c'est à dire pour $z = H_1(k)$ et $z = H_2(k)$.

Références bibliographiques :

- [1] J.M BERTHELOT: Matériaux composites édition : Masson 1992
- [2] M. MANERA : Manuel de calcul des composites verre-résine . édition : Pluralis 1988.
- [3] T.Y YANG : Finite element structural analysis édition : Prentice hall 1986
- [4] O.C ZIENKIEWICZ – R.L TAYLOR : The finit element méthode 4^{ème} édition
Mcgraw-hill 1989