

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE-CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

THESE DE MAGISTER

Présentée par :
Abdallah YAHIAOUI
Ingénieur d'Etat diplômé de l'E.N.P.

ANALYSE STATIQUE ET DYNAMIQUE DES SYSTEMES FLUIDES-COQUES CYLINDRIQUES

Soutenue le 01 juillet 1995 devant le Jury composé de :

M. BERRAH	Maître de Conférence à l'E.N.P.	Président
B. TILIOUINE	Professeur à L' E. N. P.	Directeur de thèse
M. DEMIDEM	Chargé de cours à L'E.N.P.	Examineur
M. HAMOUTENE	Chargé de cours à L'E.N.P.	Examineur
S. BELKACEMI	Maître de Conférence à L'E.N.P.	Examineur

دعاء

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

اللهم آت نفسي تقواها وزكها أنت خير من زكاها
وأنت وليها ومولاها

اللهم إني أعوذ بك من شر ما عملت ومن شر ما لم أعمل
واغفر لي فطيتي وجهلي وإسرافي في أمري وما أنت أعلم به مني

الإهداء

إلى روح أجدادي
إلى التي حملتني وهنأ على وهنأ
إلى والدي الكرم الذي ما فتى يشجعني ويخصني بالعناية
إلى اخوتي وأخواتي
إلى عائلتي
إلى أصدقائي وأساتذتي
إلى الذين آمنوا بألح وصبروا في سبيله
إلى كل هؤلاء ...

أهدي ثمرة جهدي

عبد الله يحيى أوي

REMERCIEMENTS



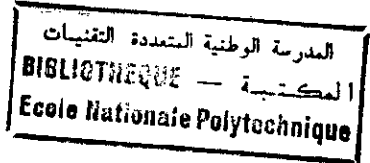
Je voudrais saisir la présente occasion pour adresser, tout d'abord, mes chaleureux remerciements à mon directeur de thèse, B. TILIOUINE, Professeur à l'E. N. P., pour avoir bien voulu m'introduire à un sujet d'actualité aussi complexe que celui de l'étude du comportement sismique des systèmes fluides-coques cylindriques. Il m'est particulièrement agréable de lui exprimer ma profonde gratitude pour ses encouragements permanents, sa serviabilité et ses précieux conseils sur les plans scientifique et technique.

Je tiens également à témoigner ma profonde reconnaissance à Monsieur M.K. BERRAH, Maître de Recherche à l'E.N.P., pour avoir bien voulu examiner cette thèse et me faire l'honneur d'en présider le Jury de soutenance.

Je suis tout particulièrement reconnaissant envers Messieurs M. DEMIDEM et M. HAMOUTENE, chargés de recherche à l'E.N.P., et S. BELKACEMI, Maître de Conférences à l'E.N.P., pour l'aide précieuse et sincère qu'ils m'ont apportée; ainsi que pour avoir bien voulu examiner cette thèse et y apporter leurs critiques constructives. Je les remercie vivement pour le temps qu'ils ont consacré à ce travail et pour leur participation au jury de thèse.

Enfin, je ne saurai terminer sans exprimer ma sincère gratitude à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à ma formation, ainsi qu'à l'ensemble du personnels du Centre de Calcul et de la Bibliothèque de l'E.N.P., pour leurs serviabilités exemplaires.

SOMMAIRE



Introduction Générale 1

PREMIERE PARTIE ANALYSE STATIQUE DES RESERVOIRS CYLINDRIQUES

- Généralités	3
CHAPITRE I : THEORIE DES COQUES CYLINDRIQUES.	4
I.1- Définition.	4
I.2- Hypothèses fondamentales.	5
I.3- Théorie membranaire.	5
I.4- Théorie flexionnelle.	9
CHAPITRE II: METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AUX COQUES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES	17
II.1- Introduction.	17
II.2- Développement de l'élément de coque cylindrique.	18
II.3- Développement du vecteur des chargements nodaux.	28
CHAPITRE III: METHODE MATRICIELLE APPLIQUEE AUX COQUES MINCES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES.	30
III.1- Introduction.	30
III.2- Procédure	31
III.3- Interaction entre coques de géométries variables.	31
III.4- Tables.	35
CHAPITRE IV : PROGRAMMATION.	37
IV-1- Programmation de la méthode des éléments finis	37
1-1 Programme principal.	37
1-2 Sous programmes	38
1-3 Organigramme	40
IV-2- Programmation de la méthode matricielle.	41
2-1 Programme principal.	41
2-2 Sous programmes	41
2-3 Organigramme	42
CHAPITRE V : ETUDE COMPARATIVE DE DIFFERENTES METHODES APPLIQUEES A DES RESERVOIRS A EPAISSEUR CONSTANTES OU VARIABLES.	43
- Introduction.	43
V.1- Comparaison avec les résultats de Timoshenko.	44
V.2- Comparaison avec les résultats de Flugge.	49
V.3- Comparaison avec les résultats de Thevandran.	53
- Conclusions.	63
Conclusion	
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES DE LA PREMIERE PARTIE	65

DEUXIEME PARTIE
ANALYSE DYNAMIQUE DES RESERVOIRS CYLINDRIQUES

- Généralités	66
CHAPITRE VI : ANALYSE DES RESERVOIRS A PAROIS RIGIDES	68
- Introduction.	68
VI.1- Théorie négligeant les pressions d'oscillation du liquide.	70
VI.2- Théorie tenant compte des pressions d'impulsion et d'oscillation du liquide.	72
VI.3- Modèle de Housner.	74
VI.4- Modèle de Housner-Epstein	85
VI.5- Modèle d'Abramson.	98
VI.6- Comparaisons et conclusions.	105
CHAPITRE VII: ANALYSE DES RESERVOIRS A PAROIS FLEXIBLES	118
- Introduction.	118
VII.1- Modèle de Housner modifié.	122
VII.2- Modèle de Haroun et Ellaithy.	125
VII.3- Modèle de Tedesco et Al.	130
VII.4- Comparaisons et conclusions	138
CHAPITRE VIII: EXEMPLES D'APPLICATIONS.	154
- Introduction.	154
VIII.1- Réservoirs à parois rigides.	155
1-1 Cas d'un réservoir profond (RI)	
1-2 Cas d'un réservoir peu profond (RII)	
VIII.2- Réservoirs à parois flexibles.	162
2-1 Cas d'un réservoir profond (RI)	
2-2 Cas d'un réservoir peu profond (RII)	
-Conclusions	170
Conclusions Générales et Recommandations	172
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES DE LA DEUXIEME PARTIE	176
ANNEXE A : METHODE COMBINEE DE RANGE-KUTTA ET ROSENBROCK.	180
ANNEXE B : CALCUL DE LA HAUTEUR MAXIMALE DES VAGUES	185
ANNEXE C : CALCUL DES PRESSIONS HYDRODYNAMIQUES ET DES EFFORTS RESULTANTS	188

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction générale

Les performances des réservoirs sous l'action des séismes sont relativement bien documentés dans la littérature spécialisée [33,34,35]. Une importance spéciale est réservée à ce sujet en raison des sérieux dégâts engendrés par la destruction et le non fonctionnement des réservoirs de stockage fréquemment rencontrés dans les systèmes d'approvisionnement en eau potable, dans l'industrie pétrolière, ainsi que dans les installations nucléaires. Ainsi des foyers d'incendie pourraient se propager de manière incontrôlée si l'alimentation en eau était coupée. Les fuites possibles de combustibles, ou de produits chimiques toxiques pourraient avoir des conséquences dramatiques aussi bien pour les habitants résidant au voisinage immédiat du site de construction que pour les populations avoisinantes. En outre la destruction des réservoirs et de leurs systèmes secondaires ainsi que le déversement possible des fluides stockés pourraient conduire à des pertes économiques considérables.

Les réservoirs cylindriques circulaires construits en acier et en béton armé (ou précontraint) constituent des structures de stockage très répandues du fait de leurs facilités d'exécution et de leurs efficacités dans la résistance aux pressions hydrostatiques et aux surpressions hydrodynamiques.

Les dégâts survenus aux réservoirs cylindriques soumis aux effets des séismes ont révélé différents modes de ruine. Pour les réservoirs en acier le mode de ruine le plus fréquemment observé, est le flambement des parois sous l'effet des contraintes compressives excessives causées par le moment de renversement, par suite des surpressions hydrosismiques induites. En ce qui concerne les réservoirs en béton, la fissuration représente le mode de ruine observé le plus préjudiciable. Elle est produite essentiellement par les contraintes circonférentielles de traction. Enfin, l'endommagement de la couverture du réservoir, fixée ou flottante, peut survenir si l'espace libre situé au dessus de la surface du liquide, ne peut accommoder la hauteur maximale des vagues.

La performance des systèmes coques-fluides durant les séismes d'Alaska (1964), Los Angeles (1971), Niigata (1971), Mont Diablo (1980) et Coalinga (1983) [31,33,34,35] notamment ont mis en évidence un comportement structural plus complexe de ces systèmes

que prévu initialement. Bien que la méthode des éléments finis ait apporté des réponses relativement précises à un certain nombre de problème lié à la complexité du comportement sismique observé, le fait demeure que la méthode des éléments finis en tant que méthode d'analyse n'est pas toujours utilisée en pratique pour les problèmes dynamiques en raison des formulations variationnelles complexes, de la préparation laborieuse des données, d'espace mémoire important et du coût parfois considérable qu'elle implique. De plus malgré des recherches soutenues et l'utilisation de modélisations sophistiquées d'éléments finis tridimensionnels [36,37] couplés à des investigations expérimentales [15,16,38,39,40], l'état des connaissances du comportement dynamique des systèmes coques-fluides en zone de forte sismicité semble encore loin d'avoir atteint son apogée.

La prédiction précise des pressions hydrodynamique et l'évaluation par des modèles physiques précis des moments de flexion et de renversement, et de l'effort tranchant généré par les surpressions hydrodynamiques d'une part ainsi que l'importance du spectre de réponse en tant que mode de représentation du chargement sismique et outil de calcul couramment utilisé dans les bureaux d'études d'autre part ont constitué la motivation essentielle pour la méthodologie adoptée dans le présent travail.

L'avantage indéniable de telle approche par rapport à celle se basant sur une approche discrète du traitement du problème d'interaction des systèmes coques-fluides par la méthodes des éléments finis tridimensionnels en dynamique, est la possibilité de fournir à l'ingénieur un outil de conception et de calcul pratique, simple, rapide et fiable pour la résolution d'un problème éminemment complexe représentant un coût parfois prohibitif.

C'est pourquoi dans la présente recherche après un exposé théorique des diverses méthodes de calcul des coques sous pression hydrostatique d'abord et sous l'action des surpressions hydrodynamiques ensuite, on a eu le souci d'indiquer les moyens pratiques de calcul et de montrer par des exemples d'application les démarches à suivre pour le traitement de l'interaction fluide-structure dans les réservoirs circulaires à parois aussi bien rigides que déformables sous l'effet des séismes.

Première Partie

*Analyse statique des réservoirs
cylindriques*

Généralités

GENERALITES

Les coques constituent l'un des types de structures les plus difficiles à analyser. Pour notre part, nous considérons uniquement le cas particulier des coques cylindriques circulaires qui nous permet un traitement simplifié adapté à cette géométrie.

En réalité c'est leur grande utilisation qui nous a poussé à étudier ce genre de structure, ce sont des réservoirs contenant différents liquides, allant de l'eau jusqu'aux hydrocarbures.

On peut aisément étudier ce genre de problèmes par "la méthode des éléments finis". Cette méthode a été développée pour faciliter l'analyse des structures complexes, telles que les coques axisymétriques, qui sont trop compliquées pour être traitées par les techniques classiques de l'ingénieur comme l'approche de la mécanique des milieux continus.

Cette méthode est basée sur le concept que la structure réelle peut être idéalisée par un ensemble d'éléments finis, connectés entre eux par des points nodaux, dont le comportement peut être aisément compris.

Comme on peut aussi les étudier par la méthode matricielle.

Cette méthode propose une solution qui représente la superposition d'une solution dite primaire (régie par la théorie membranaire) et d'une solution secondaire (régie par la théorie flexionnelle pour un chargement corrigé appliqué aux bordures).

Chapitre I

Théorie des coques cylindriques circulaires

I-THEORIE DES COQUES CYLINDRIQUES DE REVOLUTION

I-1 Définition

Une coque est un solide dont la géométrie est entièrement définie par la spécification de la forme de sa surface moyenne et de son épaisseur en chaque point.

Pour décrire la forme de la surface moyenne, il est nécessaire de présenter quelques propriétés géométriques importantes de la surface, une de ces propriétés peut être la symétrie axiale, on parle alors de surface de révolution.

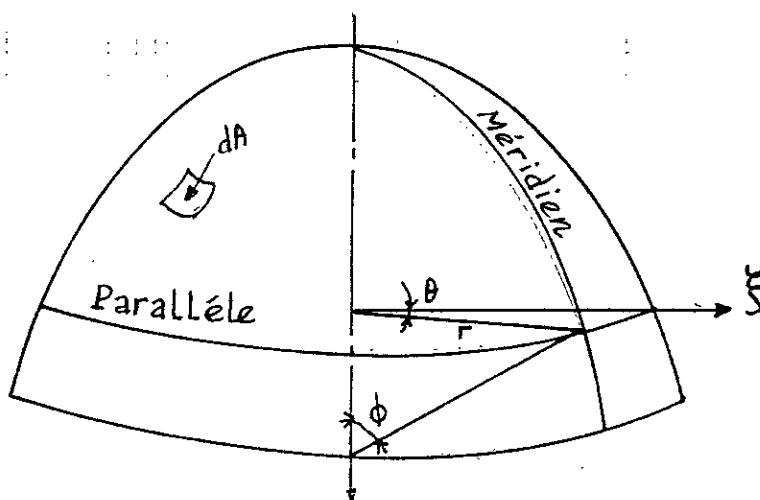


Figure I-1

Une surface de révolution est obtenue par rotation d'une courbe plane autour d'un axe situé dans le plan de cette courbe, cette dernière est appelée le méridien et son plan, le plan méridien. L'intersection de la surface avec des plans perpendiculaires à l'axe de révolution forme des cercles parallèles qu'on appelle les parallèles. Une coque cylindrique circulaire est un réservoir circulaire.

Un réservoir est une enveloppe contenant un liquide. Ce liquide peut être soit de l'eau potable (réservoir d'eau des distributions publiques), usée (eau d'égouts) soit d'autres liquides tels que le lait, les hydrocarbures (Tanks), etc. . .

I-2 Hypothèses fondamentales

Des hypothèses simplificatrices sont en général introduites dans le calcul des coques minces:

- 1- Le matériau constructif est supposé continu, homogène, isotrope et élastique.
- 2- Les déformations sont petites par rapport à l'épaisseur de la coque. On introduit aussi les hypothèses de Love qui sont la transposition des hypothèses de Bernouilli relatives aux poutres et celles de Kirchoff relatives aux plaques et qui sont:
- 3- Les points situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une normale à la surface moyenne déformée.
- 4- Les dilatations normales à la surface moyenne sont négligées.
- 5- Les contraintes normales agissant sur des facettes parallèles à la surface moyenne sont négligées .

I-3 Théorie membranaire

I-3-1 Equations d'équilibres :

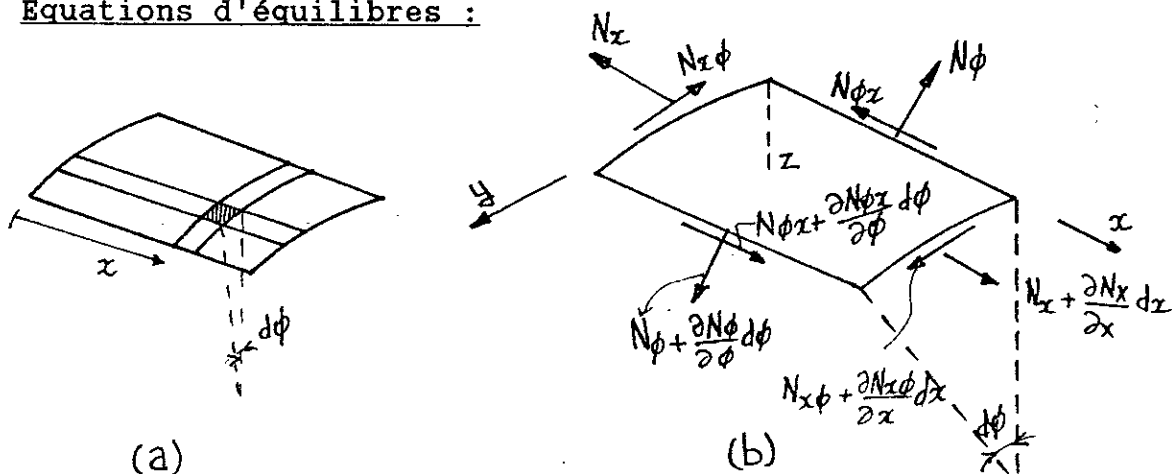


Figure I-3

Dans l'étude d'une coque cylindrique fig(I-3)a , on suppose que la génératrice de la coque est horizontale et parallèle à l'axe x . On découpe un élément de cette coque par deux génératrices adjacentes et deux plans transversaux perpendiculaires à l'axe x , sa position est définie par l'abscisse x et l'angle ϕ . Les forces agissant sur les côtés de l'élément sont indiquées sur la figure (b). De plus, une charge est répartie sur la surface de l'élément, les composantes de l'intensité de cette charge sont X , Y et Z .

Considérons l'élément en équilibre et sommions les forces suivant x, On obtient:

$$\frac{(\partial N_x)}{(\partial x)} R d\phi dx + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} d\phi dx + X R d\phi dx = 0 \quad (a)$$

De même, les forces suivant la tangente à la section droite, c'est à dire suivant y, donnent l'équation d'équilibre:

$$\frac{\partial N_{\phi x}}{\partial x} R d\phi dx + \frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} d\phi dx + Y R d\phi dx = 0 \quad (b)$$

Les forces suivant la normale à la coque, c'est à dire suivant z, donnent:

$$N_{\phi} d\phi dx + Z R d\phi dx = 0 \quad (c)$$

Après simplification, les trois équations d'équilibre s'écrivent:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} = -X$$

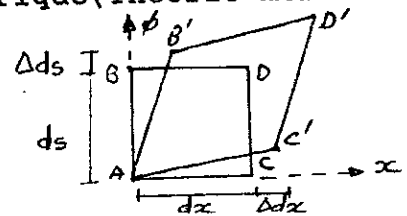
$$\frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} = -Y \quad \text{I-3-1}$$

$$N_{\phi} = -Z R$$

équation d'équilibre d'une coque cylindrique (Théorie membranaire)

3-2 Déformation

Figure I-3-2 : Plissement d'élément de coque cylindrique



Partant de la figure (I-3-2) qui représente un élément de coque avant et après la déformation, nous définirons:

$$e_{\phi} = \frac{(\Delta ds)}{ds}$$

$$e_x = \frac{(\Delta dx)}{dx}$$

$$\gamma_{(x,\phi)} = \widehat{BAC} - \widehat{B'AC'}$$

où ϵ_ϕ , ϵ_x et $\gamma_{\phi x}$ représentent respectivement la dilatation annulaire, la dilatation axiale et le glissement .

Nous désignons par u , v , w les trois déplacements, où on compte positivement : u dans le sens des x , v dans le sens des ϕ et w normalement à la coque vers l'extérieur. Visiblement la dilatation longitudinale ϵ_x provient seulement de ce que le bord droit de l'élément de ligne dx de la génératrice a reçu un déplacement supérieur de

$\Delta dx = \delta u/dx$ au déplacement du bord gauche :

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x} \quad (a)$$

De la même manière $(1/r) \cdot (\delta v/v)$ fournit son apport à la dilatation annulaire, mais ce n'est pas le seul car par le déplacement w le rayon r de la coque s'agrandit de r à $r+w$ et le périmètre croît aussi proportionnellement. Si l'on divise cet accroissement $2\pi w$ par la précédente valeur $2\pi r$ on obtient la deuxième contribution à la dilatation annulaire, soit au total

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{R} \cdot \frac{\delta v}{\delta \phi} + \frac{w}{R} \quad (b)$$

Le glissement s'obtient par la rotation du rebord BA d'un angle $\delta u/r \delta \phi$ et par la rotation de CA de l'angle $\delta v/\delta x$:

$$\gamma_{x\phi} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{1}{R} \frac{\delta u}{\delta \phi} \quad (c)$$

3-3 Application aux coques cylindriques circulaires

Dans le cas d'un réservoir, c'est à dire une coque cylindrique circulaire chargée symétriquement par rapport à l'axe de révolution on aura :

$$v = 0 \quad \text{et} \quad \delta / \delta \phi = 0$$

ce qui conduit à :

$$\epsilon_x = \delta u / \delta x \quad \text{et} \quad \epsilon_\phi = w/r \quad (\gamma_{x\phi} = 0)$$

-La loi de l'élasticité nous donne:

$$N_x = \frac{Et}{(1-\nu^2)} (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_\phi)$$

$$N_\phi = \frac{Et}{(1-\nu^2)} (\epsilon_\phi + \nu \cdot \epsilon_x)$$

On détermine les efforts à l'aide des équations d'équilibres qui sont : $N_x = 0$ et $N_\phi = \gamma \cdot r \cdot (L-x)$ (figure I-3-3) et pour les déformations à l'aide de la loi de l'élasticité et enfin les déplacements à l'aide des relations déformations et déplacements, en résumé on aura :

$$N_x = 0$$

$$N_\phi = \gamma R (L-x)$$

$$w = \gamma \cdot \frac{R^2}{Et} \cdot (L-x)$$

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial x} = -\gamma \cdot \frac{R^2}{Et}$$

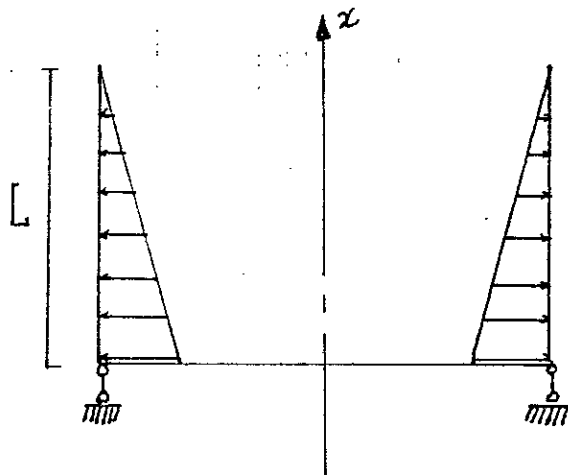


Figure I-3-3

Les conditions aux limites sont compatibles avec les hypothèses de la théorie des membranes. Ce sont des appuis simples qui permettent aux bordures des coques de se dilater librement sans apparition de moment de flexion ou d'effort tranchant dans la coque, et les réactions des appuis sont tangentielles aux méridiens.

Pour de tels appuis, les contraintes calculées par la théorie des membranes représentent avec une grande exactitude les contraintes réelles de la coque, mais les appuis qu'on utilise, en général, ne vérifient pas ces conditions.

I-4 Théorie générale des coques cylindriques chargées symétriquement par rapport à son axe

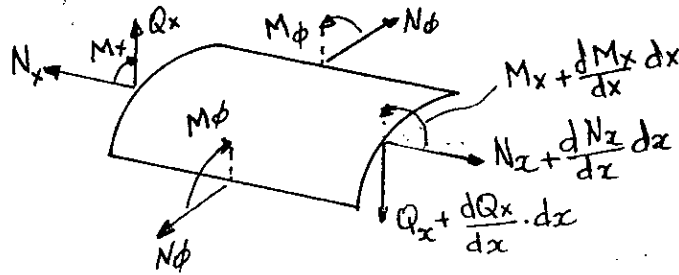


Figure I-4-1

La figure ci-dessus montre un élément différentiel d'une coque cylindrique chargée symétriquement.

Du fait de la symétrie du chargement on a :

$$N_{\phi x} = N_{x\phi} = M_{x\phi} = M_{\phi x} = Q_{\phi} = 0$$

et M_{ϕ} et N_{ϕ} sont indépendants de ϕ ainsi que N_x , M_x et Q_x

Les équations d'équilibre de cet élément prennent la forme suivante :

$$\frac{dN_x}{dx} \cdot r \, dx \, d\phi = 0$$

$$\frac{dQ_x}{dx} r \, dx \, d\phi + N_{\phi} \, dx \, d\phi + p_r r \, dx \, d\phi = 0 \quad \text{I-4-1}$$

$$\frac{dM_x}{dx} r \, dx \, d\phi - Q_x r \, dx \, d\phi = 0$$

La première équation indique que la force N_x est constante, on la prend égale à 0 dans la suite du raisonnement. Si elle est différente de 0, la déformation et la contrainte correspondante à de telles forces se calculent facilement et se superposent aux déformations et contraintes dues aux autres efforts. Les deux autres équations s'écrivent sous la forme simplifiée :

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{r} N_{\phi} = -p_r$$

$$\frac{dM_x}{dx} + Q_x = 0 \quad \text{I-4-2}$$

Ces deux équations comportent trois inconnues donc on a recours aux

relations déformations-déplacements suivantes:

$$e_x = du/dx \quad \text{et} \quad e_\phi = -w/r \quad \text{I-4-3}$$

En appliquant la loi de Hook, on obtient :

$$N_x = \frac{Et}{(1-\nu^2)} (e_x + \nu \cdot e_\phi) = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left(\frac{du}{dx} - \nu \cdot \frac{w}{r} \right) = 0$$

$$N_\phi = \frac{Et}{(1-\nu^2)} (e_\phi + \nu e_x) = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left(-\frac{w}{r} + \nu \cdot \frac{du}{dx} \right) \quad \text{I-4-4}$$

De la première de ces équations, on obtient : $du/dx = \nu \cdot w/r$

et la seconde équation donne : $N_\phi = (-Et \cdot w / r)$

Les moments sont donnés par : $M_\phi = \gamma M_x$ et $M_x = -D \cdot d^2x/dz^2$

où $D = (E \cdot t^3 / 12(1-\nu^2))$ rigidité à la flexion de la coque.

En éliminant Q_x du système I-4-1, on obtient:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{1}{R} N_\phi = -p_z \quad \text{I-4-5}$$

ce qui conduit, en remplaçant M_x et N_ϕ par leurs expressions (w):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Et}{R^2} w = p_z \quad \text{I-4-6}$$

Quand l'épaisseur est constante, on a l'équation suivante:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \beta^4 w = \frac{p_z}{D} \quad \text{I-4-7}$$

avec

$$\beta^4 = \frac{Et}{4R^2 D} = 3 \frac{(1-\nu^2)}{R^2 t^2}$$

La solution de cette équation est:

$$w = e^{\beta x} \cdot (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) + e^{-\beta x} \cdot (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)) \quad \text{I-4-8}$$

où $f(x)$ est la solution particulière de l'équation différentielle.

Et C_1, \dots, C_4 sont les constantes d'intégration dépendant des conditions aux limites de la coque cylindrique.

Application 1 : Coque cylindrique longue soumise à des moments de flexion M_0 et des efforts tranchants Q_0 uniformément répartis sur la bordure ($x = 0$)

Dans ce cas il n'existe pas de pression radiale sur la coque. Puisque l'effet des forces appliquées est local et s'estompe à mesure que la distance x s'accroît, le premier terme du seconde membre doit s'annuler c'est à dire $c_1 = c_2 = 0$ et donc on aura:

$$w = e^{-\beta x} \cdot (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x))$$

$$Q_{x(x=0)} = \frac{dM_x}{dx} = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0$$

Au niveau de l'extrémité, on a :

Il vient que:

$$C_3 = -\frac{1}{2D\beta^3} \cdot (Q_0 + \beta M_0)$$

$$C_4 = \frac{1}{2D\beta^2} \cdot M_0$$

L'expression finale de w est:

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2D\beta^3} \cdot (\beta M_0 (\sin(\beta x) - \cos(\beta x)) - Q_0 \cos(\beta x))$$

La déformation est maximum à l'extrémité chargée où

$$w_{(x=0)} = -\frac{1}{2D\beta^3} \cdot (\beta M_0 + Q_0)$$

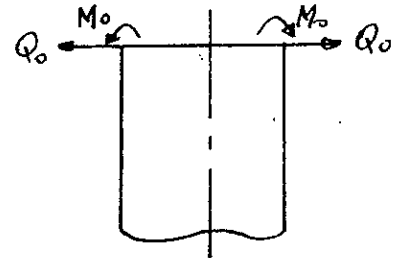
Cette déformation est négative parce que le sens de w a été pris positif vers l'axe du cylindre.

La pente à l'extrémité chargée s'obtient en différenciant w .

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{(x=0)} = \frac{1}{(2D\beta^2)} \cdot (2\beta M_0 + Q_0)$$

Quant aux moments de flexion:

$$M_x = -D(d^2 w / dz^2) \quad \text{et} \quad M_\phi = \nu M_x$$



Figure(I-4-2)

Application 2: Coque cylindrique à paroi d'épaisseur uniforme

La charge extérieure est ici donnée par:

$$p_z = -\gamma(d-x) \quad \text{I-4-9}$$

où γ est le poids par unité de volume du liquide

L'équation I-4-7 deviendra :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \beta^4 w = -\gamma \frac{(d-x)}{D}$$

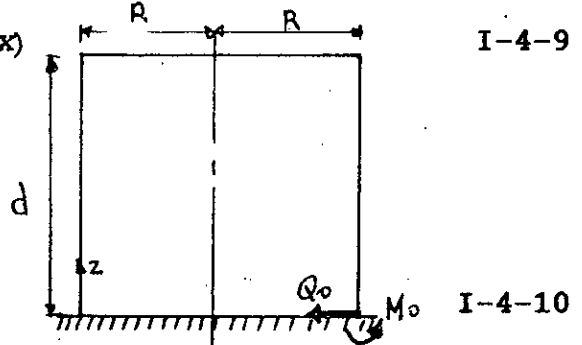


Figure I-4-3

La solution particulière de cette équation est:

$$w_1 = -\gamma \frac{(d-x)}{(4D\beta^4)} = -\gamma \frac{(d-x)}{(Et)} R^2 \quad \text{I-4-11}$$

On obtient comme solution complète :

$$w = e^{\beta x} \cdot (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) + e^{-\beta x} \cdot (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)) - \gamma \frac{(d-x)}{(Et)} R^2 \quad \text{I-4-12}$$

En considérant la coque infiniment longue, la solution se simplifie :

$$w = e^{-\beta x} \cdot (C_3 \cos(\beta x) + C_4 \sin(\beta x)) - \gamma \frac{(d-x)}{(Et)} R^2 \quad \text{I-4-13}$$

C_3 et C_4 sont déterminées à partir des conditions aux limites.

En supposant le réservoir encastrement à la base on a :

$$w_{(x=0)} = C_3 - \frac{(\gamma R^2 L)}{(Et)} = 0$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{(x=0)} = \beta(C_3 - C_4) + \frac{(\gamma R^2)}{(Et)} = 0$$

ce qui donne:

$$C_3 = \frac{\gamma R^2}{E \cdot t} \cdot d \quad \text{et} \quad C_4 = \frac{(\gamma R^2)}{\left(d - \frac{1}{\beta}\right)}$$

et l'expression de w devient : (I-4-14)

$$w = -\gamma \frac{I^2}{(Et)} \left(d-x - e^{(-\beta x)} \left(d \cos(\beta x) + \left(d - \frac{1}{\beta} \right) \sin(\beta x) \right) \right) \quad \text{I-4-14}$$

A partir de cette expression, on calcule facilement la flèche en tout point. De même pour les autres valeurs des efforts de réduction.

$$N_{\phi} = -\frac{E t w}{R}$$

$$M_x = -D \frac{dw^2}{dx^2}$$

ce qui donne:

$$N_{\phi} = \gamma R d \left(1 - \frac{x}{d} - \theta(\beta x) - \left(1 - \frac{1}{\beta d} \right) \xi(\beta x) \right) \quad \text{I-4-15}$$

$$M_x = \frac{\gamma R d t}{\sqrt{(12(1-\nu^2))}} \cdot \left(-\xi(\beta x) + \left(1 - \frac{1}{\beta d} \right) \cdot \theta(\beta x) \right) \quad \text{I-4-16}$$

où

$$\theta(\beta x) = e^{(-\beta x)} \cdot \cos(\beta x)$$

$$\xi(\beta x) = e^{(-\beta x)} \cdot \sin(\beta x)$$

La valeur maximum du moment de flexion se situe sur le fond, où elle est égale à:

$$(M_x)_{(x=0)} = M_0 = \left(1 - \frac{1}{\beta \cdot d} \right) \cdot \frac{(\gamma \cdot R \cdot d \cdot t)}{(\sqrt{(12(1-\nu^2))})} \quad \text{I-4-17}$$

et pour l'effort tranchant:

$$Q_0 = -\frac{(\gamma \cdot R \cdot d \cdot t)}{(\sqrt{(12(1-\nu^2))})} \cdot \left(2\beta - \frac{1}{d} \right) \quad \text{I-4-18}$$

Application 3 : Coque cylindrique circulaire à paroi d'épaisseur non uniforme

Dans ce cas la résolution du problème s'effectue par l'intégration de l'équation (I-4-6), en considérant la rigidité à la flexion D et l'épaisseur t comme fonction de x . Considérons par exemple, le cas où l'épaisseur de la paroi est une fonction linéaire de x . Prenons l'origine des coordonnées comme indiqué sur la figure ci dessous, on obtient pour l'épaisseur de la paroi et la rigidité à la flexion:

$$t = \alpha x \quad \text{et} \quad D = ((E\alpha^3)/(12(1-\nu^2))) \cdot x^3 \quad (a)$$

L'équation devient : (équation différentielle du 4^{ème} ordre à coefficients variables):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{dw^2}{dx^2} \right) + 12 \frac{(1-\nu^2)}{(\alpha^2 a^2)} \cdot x \cdot w = -12(1-\nu^2) \gamma \frac{(x-x_0)}{(E\alpha^3)} \quad (b)$$

La solution particulière de cette équation est:

$$w_1 = -\gamma \frac{R^2}{(E\alpha)} \cdot \frac{(x-x_0)}{x} \quad (c)$$

Le moment de flexion correspondant est:

$$M_x = -D \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\frac{\gamma \alpha^2 r^2 x_0}{6(1-\nu^2)} \quad \text{I-4-19}$$

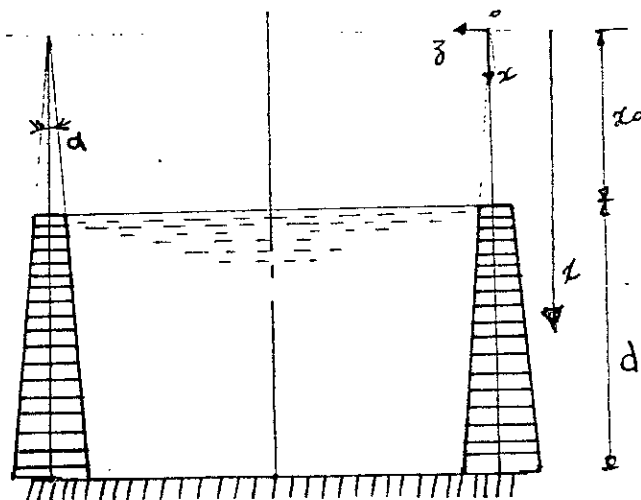


Figure I-4-5

Pour obtenir la solution complète de (b), il faut ajouter la solution particulière (c) à la solution de l'équation homogène

$$\frac{d^2}{dx^2} \cdot \left(x^3 \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + 12 \cdot \frac{(1-v^2)}{(\alpha^2 \cdot R^2)} \cdot x \cdot w = 0 \quad \text{I-4-20}$$

qui, divisée par x, s'écrit: (e)

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + 12 \frac{(1-v^2)}{(\alpha^2 R^2)} w = 0 \quad \text{(e)}$$

La solution de cette équation du 4^{ième} ordre se réduit à celle de deux équations du 2^{ième} ordre, si l'on observe que:

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dw}{dx} \right) \right) \right) \quad \text{I-4-21}$$

Pour simplifier, on introduit les symboles suivants :

$$L(w) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dw}{dx} \right)$$

$$\rho^4 = 12 \frac{(1-v^2)}{(\alpha^2 R^2)}$$

L'équation (e) devient:

$$L[L(w)] + \rho^4 w = 0 \quad \text{I-4-22. h}$$

et se réécrit sous les deux formes: (i)

$$L[L(w) + i\rho^2 w] - i\rho^2 [L(w) + i\rho^2 w] = 0 \quad \text{(i)}$$

$$L[L(w) - i\rho^2 w] + i\rho^2 [L(w) - i\rho^2 w] = 0 \quad \text{(i)}$$

où: $i = \sqrt{-1}$

L'équation (h) est satisfaite par les solutions des équations du 2^{ième} ordre (j) et (k) respectivement

$$L(w) + i\rho^2 w = 0 \quad (j)$$

$$L(w) - i\rho^2 w = 0 \quad (k)$$

Supposons que : $w_1 = \phi_1 + i\phi_2$ et $w_2 = \phi_3 + i\phi_4$ (l)
sont deux équations linéaires indépendantes de (j), on obtient :

$$w_3 = \phi_1 - i\phi_2 \quad \text{et} \quad w_4 = \phi_3 - i\phi_4 \quad (m)$$

qui sont solution de (k). Les quatre équations (l) et (m) représentent le système complet de solutions indépendantes de (h).
A l'aide de la somme et la différence des solutions (l) et (m), la solution générale de (h) s'écrit :

$$w = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + C_3\phi_3 + C_4\phi_4 \quad \text{I-4-23}$$

où C_i ($i=1,4$) sont des constantes arbitraires.

Le problème se réduit donc à la détermination des quatre fonctions ϕ_1, \dots, ϕ_4 que l'on obtient si la solution complète de (j) et (k) est connue .

Chapitre II

*La méthode des éléments finis appliquée
aux coques cylindriques circulaires*

II LA METHODES DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEES AUX COQUES AXISYMETRIQUES

II-1 Introduction

La méthode des éléments finis est basée sur le concept, que la structure réelle, ou le milieu continu, peut être idéalisé par un ensemble d'éléments finis, connectés entre eux par des points nodaux situés sur leurs frontières ceci pour simplifier l'analyse de la structure, qui ne peut être analysée par les techniques simples de l'ingénieur.

Les déplacements de ces points nodaux seront les inconnus de base du problème.

Pour pouvoir approximer de façon satisfaisante le comportement de la structure réelle, on choisit des fonctions, permettant de définir de manière unique, le champ des déplacements à l'intérieur de chaque élément, c'est à dire que les déplacements et les déformations en un point quelconque de l'élément seront exprimés en fonction des déplacements nodaux à l'aide de ces fonctions, qui sont appelées fonctions de forme.

Ces déformations définissent maintenant, en tenant compte des propriétés élastiques du matériau, en tout point de l'élément, le champ de contrainte et par conséquent sur ses frontières.

Le chargement réel de la structure est remplacé par un ensemble de charges équivalentes aux noeuds, (équivalentes dans le sens où le travail effectué par ces charges en un point quelconque de la structure est égal au travail du chargement réel).

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis il faut vérifier les deux conditions suivantes:

1- La compatibilité des déplacements:

Après déformation, les éléments ayant des noeuds en commun doivent toujours se rencontrer en ces noeuds.

2- L'équilibre:

En chaque noeud les forces internes doivent équilibrer les forces externes.

Les principales particularités qui résident dans l'utilisation de la méthode des éléments finis pour les structures en coques de révolutions sont:

1- Les point nodaux sont remplacés par des lignes nodales, qui sont représentées par des cercles.

2- Les déplacements de la coque peuvent être approximés par trois composantes de déplacement (deux translations et une rotation) en chaque noeud.

3- Les charges équivalentes correspondantes (deux forces et un moment) sont exprimées par unité de longueur.

Le premier avantage de cette modification, prenant avantage de la symétrie axiale, est le remplacement d'un très grand nombre de points nodaux ayant chacun généralement six degrés de liberté, par un nombre relativement petit de cercles nodaux ayant chacun trois degrés de liberté. La diminution de la taille des matrices et des vecteurs à manipuler est évidente.

Nous utiliserons l'élément "tronc-conique" avec $\phi=0$ (donc un élément cylindrique).

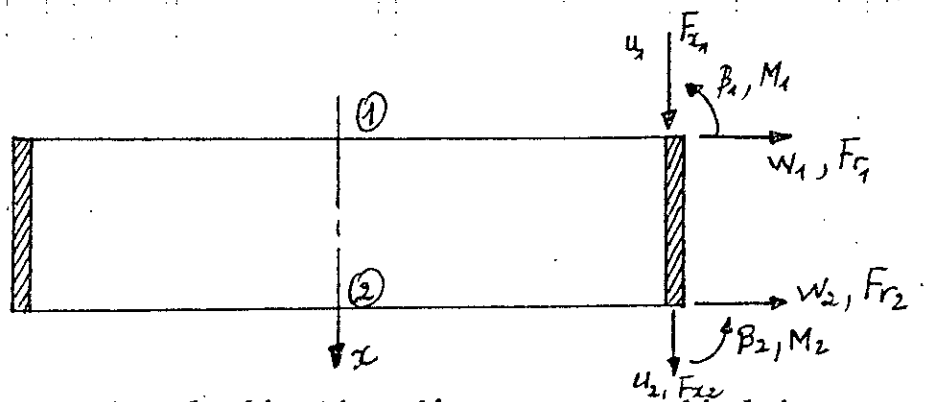


Figure II-1 Idéalisation d'une coque cylindrique

II-2 Développement de l'élément de coque cylindrique

Dans ce paragraphe tel que son titre l'indique nous aborderons les étapes de développement de ce type d'élément, de sa matrice des raideurs, de sa matrice contrainte et du vecteur de chargement extérieur.

2-1 Etape de calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Les différentes étapes à suivre pour déterminer la matrice des raideurs élémentaires sont:

2-1-1 Choisir un système de coordonnées et numéroté les noeuds:

Il est commode d'utiliser des coordonnées cylindriques (r, z) et en considérant le noeud 1 figure II-2-1, on peut écrire le vecteur déplacement de la façon suivante:

$$\{\delta_1\} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{\beta}_1 \end{bmatrix}$$

II-2-1

où u est le déplacement axial et w le déplacement radial dans le système de coordonnées global et β la rotation.

Les forces correspondantes au noeud 1 sont:

$$\{F_1\} = \begin{bmatrix} F_{z1} \\ F_{r1} \\ M_1 \end{bmatrix}$$

II-2-2

où F_z , F_r et M représentent respectivement la force axiale, la force radiale et le moment méridien.

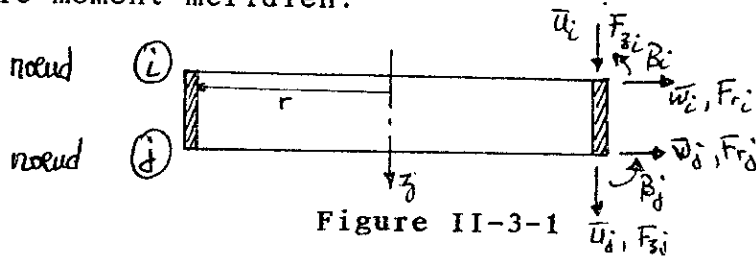


Figure II-3-1

Les vecteurs complets pour les déplacements et les forces pour l'élément s'écrivent:

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{\beta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

II-2-3

$$\text{et } [F^e] = [\{F_1\} \{F_2\}]^t = [F_{z1} \ F_{r1} \ M_1 \ F_{z2} \ F_{r2} \ M_2]$$

Ainsi chaque élément de coque axisymétrique à six degrés de liberté et donc la matrice complète des raideurs de l'élément $[k]$ sera une matrice carrée d'ordre six.

$$\{F^e\} = [k^e] \cdot \{\delta^e\}$$

II-2-4

2-1-2 Choix d'une fonction de déplacement $f(r,z)$ qui définit le déplacement $\{\delta(r,z)\}$ en chaque point de l'élément:

On sait que dans chaque élément l'angle ϕ ne varie pas, alors il est plus commode d'écrire la fonction de déplacement de l'élément en fonction de ces coordonnées locales (r,z) où u : déplacement dans le plan et w : déplacement normal au plan. Puisqu'il y a six degrés de liberté par élément on doit prendre six coefficients inconnus dans les polynômes représentant le modèle de déplacement permis.

Le système suivant donne un ensemble convenable de relations dans lesquelles la fonction u varie linéairement en s et où w est une fonction cubique de s .

$$u = a_1 + a_2 \cdot s$$

$$w = a_3 + a_4 \cdot s + a_5 \cdot s^2 + a_6 \cdot s^3$$

II-2-5

$$dw/ds = a_4 + 2 \cdot a_5 \cdot s + 3 \cdot a_6 \cdot s^2$$

ou sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ dw/dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2s & 3s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

II-2-6

ou encore : $\{\delta(r,s)\} = [f(r,s)]\{a\}$

2-1-3 Exprimer l'état des déplacements $\{\delta(r,s)\}$ dans l'élément en fonction des déplacements nodaux $\{\delta\}$.

Cette étape s'accomplit en remplaçant les coordonnées nodales (r,z) par les valeurs données par (II-2-6), et en résolvant cette dernière, on obtient la relation qui relie les coefficients (a_i) aux déplacements nodaux.

Par exemple au noeud 1, $s = 0$ on a: $u_1 = a_1$, $w_1 = a_3$, $(dw/ds)_1 = a_4$

au noeud 2, $s = L$ on a: $u_2 = a_1 + a_2 \cdot L$, $w_2 = a_3 + a_4 \cdot L + a_5 \cdot L^2 + a_6 \cdot L^3$

$$(dw/ds)_2 = a_4 + 2 \cdot a_5 \cdot L + 3 \cdot a_6 \cdot L^2$$

Et on aura ainsi l'expression matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ (dw/ds)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ (dw/ds)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L^2 & 3L^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

II-2-7

Pour obtenir {a} en fonction des déplacements nodaux, on doit simplement inverser la matrice carrée d'ordre six (6), on aura:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/L^2 & -2/L^2 & 0 & 3/L^2 & -1/L \\ 0 & 2/L^3 & 1/L^2 & 0 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ (dw/ds)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ (dw/ds)_2 \end{bmatrix}$$

II-2-8

On exprime alors les déplacements u et w de chaque point de l'élément, en fonction des coefficients {a}, à l'aide du système suivant:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

II-2-9

Ainsi en combinant les équations (II-2-5) et (II-2-8), on peut exprimer les déplacements u_i , w_i et $(dw/ds)_i$, avec $i=1,2$.

Cependant, les déplacements nodaux sont exprimés en fonction des coordonnées locales de l'élément (r,s) et doivent être transformés en coordonnées globales (r,z) et en déformations globales u, w, β puisque la géométrie et la charge de la structure sont définies dans ce système de coordonnées.

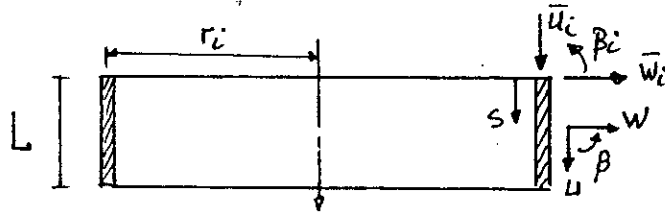


Figure II-2-2

Ce qui donne une matrice de transformation identité. Il est maintenant possible d'écrire l'équation donnant les déplacements locaux de l'élément u et w en fonction de la déformation nodale globale de l'élément. Cela se fait en remplaçant (a_i) par sa valeur (II-2-8) dans l'équation (II-2-5) ce qui donne:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = [\Gamma(s)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta^e\}$$

ou encore:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/L^2 & -2/L^2 & 0 & 3/L^2 & -1/L \\ 0 & 2/L^3 & 1/L^2 & 0 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad 2-10$$

Après multiplication on obtient:

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-3p^2 & L(p-2p^2) & 0 & 3p^2-2p^3 & L(p^2+p^3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \beta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

avec $p = s/L$

2-1-4 Relier les déformations $\epsilon(r,s)$ en chaque point de l'élément aux déplacements et donc aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$

Pour simplifier les calculs il est plus commode d'exprimer les équations générales en coordonnées locales de l'élément (fig. (II-2-2)) ce qui donne les relations déformations-déplacements suivantes:

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} du/ds \\ w/r \\ dw^2/ds^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{II-2-12}$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\{\epsilon(r,s)\} = \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/ds & 0 \\ 0 & 1/r \\ 0 & -d^2/ds^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \quad \text{II-2-13}$$

En remplaçant u et w par leur valeur à partir de l'équation (II-2-11) et en calculant les différenciations par l'équation (II-2-13) nous obtenons alors la matrice reliant les déformations aux déplacements nodaux, que nous appellerons $[B]$ et alors $\{\epsilon(r,s)\} = [B] \cdot \{\delta^e\}$

On remarque que, puisque $p=s/L$ on aura: $ds=L \cdot dp$ et $1/ds = 1/L + 1/dp$ la matrice $[B]$ se présente sous la forme suivante:

$$[B] = \begin{bmatrix} -1/L & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 \\ 0 & (1-3p^2+2p^3)/r & L/r(p-2p^2+3p^3) & 0 & (3p^2-2p^3)/r & L(-p^2+p) \\ 0 & (6-12p)/L^2 & (4-6p)/r & 0 & (-6+12p)/L^2 & (2-6p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II-2-14

2-1-5 Relier les contraintes internes $[\sigma(r,s)]$ aux déformations $[\epsilon(r,s)]$ et aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$.

Les relations entre les déformations et les efforts (contraintes) sont données par la loi de Hook (loi de l'élasticité):

$$N_s = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \cdot (\epsilon_s + \nu\epsilon_\theta) \quad M_s = -D(\chi_s + \nu\chi_\theta)$$

$$N_\theta = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \cdot (\epsilon_\theta + \nu\epsilon_s) \quad M_\theta = -D(\chi_\theta + \nu\chi_s)$$

Avec t , ν et E représentant respectivement l'épaisseur, le coefficient de poisson et le module de Young.
où encore sous forme matricielle:

$$\{\{\sigma(r,s)\}\} = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2/12 & \nu t^2/12 \\ 0 & 0 & \nu t^2/12 & t^2/12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} \quad \text{II-2-16}$$

ou bien $\{\{\sigma(r,s)\}\} = [D] \cdot \{\{e(r,s)\}\}$

2-1-6 Remplacer les contraintes $\{\{\sigma(r,s)\}\}$ par des forces nodales statiquement équivalentes (F^e), relier ces forces nodales aux déplacements nodaux $\{\{\delta^e\}\}$.

On utilise le principe des travaux virtuels pour déterminer l'ensemble des charges nodales équivalentes aux contraintes internes. La condition d'équivalence s'écrit comme suit:

Durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes.

On choisit un ensemble arbitraire de déplacements nodaux représenté par le vecteur $\{\{\delta^e\}\}$ où:

$$(\{\{\delta^{e^*}\}\}) = [\{\{\delta_1^e\}\} \cdot \{\{\delta_2^e\}\} \cdot \{\{\delta_3^e\}\} \dots \{\{\delta_n^e\}\}]$$

Le travail extérieur W_{ext} des forces nodales est donné par:

$$W_{ext} = \{\{\delta^{e^*}\}\}^T \cdot \{F^e\}$$

Si les déplacements arbitrairement imposés produisent des déformations $\{\{\epsilon(r,s)^e\}\}$ aux points de l'élément où les contraintes réelles sont les $\{\{\sigma(r,s)\}\}$, alors le travail interne par unité de volume est donné par:

$$W_{int} = \{\{\epsilon(r,s)^e\}\}^T \cdot \{\{e(r,s)\}\}$$

$$(dw_{int} = \sigma \cdot e \cdot dv)$$

et le travail interne total est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément c'est à dire :

$$\int_v W_{int} \cdot d(vol) = \int_v \{e(r,s)\}^T \cdot \{\sigma(r,s)\} d(vol)$$

On sait par l'équation (II-2-15) que les déformations en chaque point de l'élément sont exprimés en fonction des déplacements nodaux par:

$$\{e(r,s)\} = [B] \cdot \{\delta^e\}$$

D'où les déplacements virtuels étant imposés, les déformations correspondantes s'expriment par:

$$\{e(r,s)\}^* = [B] \cdot \{\delta^{*e}\}$$

De plus, l'équation reliant les contraintes réelles dans l'élément aux déplacements nodaux est:

$$\{\sigma(r,s)\} = [D][B]\{\delta^e\}$$

Donc on peut remplacer par leurs valeurs ces expressions dans l'équation des travaux virtuels par le travail interne et on obtient:

$$\int_v W_{int} d(vol) = \int_v [B]^T \cdot \{\delta^{*e}\} \cdot [D] \cdot [B] \cdot \delta^e d(vol)^*$$

$$\text{et } W_{ext} = \{\delta^{*e}\}^T \cdot \{F^e\}$$

Finalement on égale W_{ext} et W_{int} . Puisque le principe de base des déplacements virtuels est valable pour n'importe quel système de déplacement appliqué, on peut choisir ce dernier comme on veut.

Dans le cas présent, il est commode de supposer les déplacements nodaux égaux à l'unité.

On obtient alors:

$$\{F^e\} = \int_v [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d(vol) \cdot \{\delta^e\}$$

Comme $\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\}$, l'expression de $[K_e]$ est :

$$[k^e] = \int_v [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d(vol) \quad \text{II-2-17}$$

L'intégration sera prise sur la surface de l'élément, son épaisseur t , n'entre pas en compte ici, car les contraintes sont exprimées en résultantes (force et moment par unité de longueur)

Donc la matrice des raideurs élémentaires est donnée par:

$$[K^e] = \int_{\text{aire}} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d(\text{aire})$$

En se rapportant à la figure (II-2-2) pour un élément:

aire = $2\pi \cdot r \cdot s$ ce qui donne $d(\text{aire}) = 2\pi \cdot r \cdot ds = 2\pi \cdot r \cdot L \cdot dp$.

Puisque "s" varie de 0 à L donc p variera de 0 à 1 et $[k^e]$ devient:

$$[k^e] = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot r \cdot \int_0^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dp$$

La matrice $[K^e]$ est donnée ci dessous après le calcul de la matrice $[H]$.

2-1-7 Etablir la matrice "contrainte" reliant les contraintes et les déplacements nodaux.

L'étape finale est la détermination des contraintes en chaque point de l'élément à partir de ses déplacements nodaux, cela est réalisé par la relation suivante:

$$\{\sigma(r,s)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^e\}$$

$$\text{où } \{\sigma(r,s)\} = [H] \cdot \{\delta^e\} \text{ d'où } [H] = [D] \cdot [B] \quad \text{II-2-18}$$

Le produit $[D] \cdot [B]$ nous donne:

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} \end{bmatrix} \cdot \frac{Et}{(1-\nu^2)}$$

avec:

$$H_{11} = -1/L, \quad H_{12} = (\nu/r)(1-3p^2+2p^3), \quad H_{13} = (\nu L/r)(p-2p^2+p^3)$$

$$H_{14} = 1/L, \quad H_{15} = (\nu/r)(3p^2-2p^3), \quad H_{16} = (L\nu/r)(-p^2+p^3)$$

$$H_{21} = -\nu/L, \quad H_{22} = (1-3p^2+2p^3)/r, \quad H_{23} = (L/r)(p-2p^2+p^3)$$

$$H_{24} = \nu/L, \quad H_{25} = (1/r)(3p^2-2p^3), \quad H_{26} = (L/r)(-p^2+p^3)$$

$$H_{31} = 0, \quad H_{32} = (-r^2/12)(-6+12p)/L^2, \quad H_{33} = (-r^2/12)(-4+6p)/L$$

$$H_{34} = 0, \quad H_{35} = (-r^2/12)(6-12p)/L^2, \quad H_{36} = (-r^2/12)(-2+6p)/L$$

$$H_{41} = 0, \quad H_{42} = (-\nu r^2/12)(-6+12p)/L^2, \quad H_{43} = (-\nu r^2/12)(-4+6p)/L$$

$$H_{44} = 0, \quad H_{45} = (-\nu r^2/12)(6-12p)/L^2, \quad H_{46} = (-\nu r^2/12)(-2+6p)/L$$

avec $p = s/L$

Donc les expressions des contraintes nodales sont:

au noeud 1: $s = 0$ donc $p = 0$ et au noeud 2: $s = L$ donc $p = 1$

$$\{ N_{s1} \ N_{\theta1} \ M_{s1} \ M_{\theta1} \}^T = ((E.t)/(1-\nu^2)).[H]_{p=0} \{ \delta^e \} \quad \text{noeud 1}$$

$$\{ N_{s1} \ N_{\theta1} \ M_{s1} \ M_{\theta1} \}^T = ((E.t)/(1-\nu^2)).[H]_{p=1} \{ \delta^e \} \quad \text{noeud 2}$$

Le produit $[B]^T.[H] = [B]^T.[D].[B]$ est égale à :

$$B_{11} = 1/L^2, \quad B_{12} = -\nu(1-3p^2+2p^3)/(r.L), \quad B_{13} = -\nu(p-2p^2+3p^3)/r$$

$$B_{14} = -1/L^2, \quad B_{15} = -\nu(3p^2-2p^3)/(L.r), \quad B_{16} = -\nu(-p^2+p^3)/r$$

$$B_{22} = ((1-3p^2+2p^3)^2/r^2) + (T(-6+12p)^2/L^4$$

$$B_{23} = (L(p-2p^2+p^3)(1-3p^2+2p^3)/r^2) + (T(6-12p)/4-6p)/L^3$$

$$B_{24} = \nu(1-3p^2+2p^3)/(L.r)$$

$$B_{25} = (1-3p^2+2p^3)(3p^2-2p^3)/r^2 + T(12p-6)(6-12p)/L^4$$

$$B_{26} = L(1-3p^2+2p^3)(-p^2+p^3)/r^2 + T(6-12p)(2-6p)/L^3$$

$$B_{33} = L^2[(p-2p^2+p^3)/r^2 + T(4-6p)^2/L^2], \quad B_{34} = \nu(p-2p^2+p^3)/r$$

$$B_{35} = L(p-2p^2+p^3)(3p^2-2p^3)/r^2 + T(4-6p)(12p-6)/L^3$$

$$B_{36} = L^2(p-2p^2+p^3)(p^3-p^2)/r^2 + T(4-6p)(2-6p)/L^2, \quad B_{44} = 1/L^2$$

$$B_{45} = \nu(3p^2-2p^3)/(L.r), \quad B_{46} = \nu(p^3-p^2)/r$$

$$B_{55} = (3p^2-2p^3)^2/r^2 + T(6-12p)^2/L^4$$

$$B_{56} = L(p^3-p^2)(3p^2-2p^3)/r^2 + T(4-6p)(2-6p)/L^3$$

$$B_{66} = L^2(p^3-p^2)/r^2 + T(2-6p)^2/L^2$$

où $T = t^2/12$

Calcul de la matrice de raideur élémentaire $[K^e]$:

$$[k]^e = 2.\pi.r.L.\int_0^1 [B]^t.[D].[B].dp$$

On aura:

$$[K]^e = 2\pi.((E.t)/(1-\nu^2)).[K]$$

Les éléments de $[K]$ sont:

$$k_{11} = r/L, \quad k_{12} = -\nu/2, \quad k_{13} = -\nu L/12, \quad k_{14} = -r/L, \quad k_{15} = -\nu/2$$

$$k_{16} = \nu L/12, \quad k_{22} = (13/22)(L/r) + (rt^2/L^3)$$

$$k_{23} = (11L^2/210r) + (rt^2/2L^2), \quad k_{24} = \nu/2, \quad k_{25} = (9/70)(L/r) - (rt^2/L^3)$$

$$k_{26} = (13/420)(L^2/r) + (rt^2/2L^2), \quad k_{33} = (1/105)(L^3/r) + (1/3)(rt^2/L)$$

$$k_{34} = \nu L/12, \quad k_{35} = (13/420)(L^2/r) - (1/2)(rt^2/L^2)$$

$$k_{36} = (-1/140)(L^3/r) + (1/6)(rt^2/L), \quad k_{44} = r/L, \quad k_{45} = \nu/2$$

$$k_{46} = -\nu L/12, \quad k_{55} = (13/35)(L/r) + (rt^2/L^3),$$

$$k_{56} = (-11/210)(L^2/r) - (rt^2/2L^2), \quad k_{66} = (L^3/(r.150)) + (1/3)(rt^2/L)$$

II-3 Développement du vecteur des charges nodaux:

Les sollicitations extérieures sont de deux natures:

- sollicitations concentrées (généralement nodales)
- sollicitations réparties

Pour le premier genre, le vecteur charge est simple à déterminer. On fait correspondre à chaque degré de liberté la charge qui lui est appliquée.

Alors que le deuxième type de chargement, on le remplace par des charges ponctuelles équivalentes appliquées aux noeuds. Pour cela il est utile d'appliquer le théorème des travaux virtuels selon lequel:

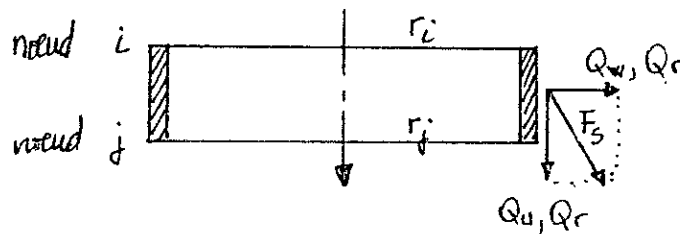
"le travail du chargement réel = au travail des forces nodales équivalentes (appliquées aux noeuds)

On distinguera deux types de chargements répartis:

- charges surfaciques.
- charges volumiques.

On ne considèrera que les charges surfaciques puisque, dans notre cas les chargements volumiques sont égaux aux chargements surfaciques multiplié par l'épaisseur. (intégrale sur le volume est égale à l'intégrale sur la surface multiplié par l'épaisseur).

Soit une charge de surface $\{F_s\}$ de composantes Q_u et Q_w dans le repère local, et Q_1 et Q_r dans le repère global, comme le montre la figure ci-dessous:



$$r = r_i = r_j = \text{cst et } p = s/t$$

$$\{F_s\} = \{Q_r, Q_r\}$$

Le travail dû à un déplacement virtuel sera:

$$W(r, z) = (Q_r \cdot du + Q_r \cdot dw) ds$$

On intègre sur la surface où la charge est répartie on aura:

$$W(r, z) = \{du, dw\} \cdot \{F_s\} \cdot ds$$

Et le travail des forces nodales équivalentes: $\{F_e^e\}$ est:

$$W(F_{eq}) = \{d\delta\}^t \cdot \{F^e\}$$

L'égalisation des deux travaux donne:

$$[F_s] = 2 \pi \int_0^L \begin{bmatrix} Q_z(1-p) \\ Q_r(1-3p^2+2p^3) \\ Q_r L(p-2p^2+p^3) \\ Q_z p \\ Q_r(3p^2-2p^3) \\ Q_r L(-p^2+p^3) \end{bmatrix}$$

Nous étudierons deux cas de charges réparties:

- uniformément réparties
- charge triangulaire (pression d'eau).

a) charge répartie uniformément:

On pose: $s = L.p \Rightarrow ds = L.dp$ et $r = r_1 = r_2$

$$[F_s^e] = 2\pi L \begin{bmatrix} Q_z r/2 \\ Q_r r/2 \\ Q_r Lr/12 \\ Q_z r/2 \\ Q_r r/2 \\ Q_r Lr/12 \end{bmatrix}$$

b) charge triangulaire:

$$[F_s^e] = 2 \pi L \begin{bmatrix} Q_z(z_1.r/2+L.r/6) \\ Q_r(z_1.r/2+3L.r/20) \\ Q_r(z_1.L.r/12+L^2/30) \\ Q_z(z_1r/2+L.r/3) \\ Q_r(z_1r/2+L.r.7/20) \\ Q_r(z_1.L.r/12+L^2.r/20) \end{bmatrix}$$

où z_1 est la hauteur du premier noeud de l'élément (coordonnée verticale).

Dans le cas où l'une des charges Q_u et Q_v est uniforme, il suffit de combiner convenablement les deux vecteurs donnés ci-dessus.

Chapitre III

Méthode Matricielle

III-METHODE MATRICIELLE APPLIQUEE AUX COQUES MINCES AXISYMETRIQUES

III-1 Introduction

La théorie membranaire a une limitation significative alors que la théorie de flexion est exacte, mais présente des difficultés dans la résolution des équations.

Les deux théories peuvent être néanmoins combinées dans une méthode pratique d'engineering. Celle-ci permet d'éliminer les limitations que présentent les deux théories et rend possible l'analyse de coques compliquées dans un temps plus court.

Cette méthode propose une solution qui représente la superposition d'une solution dite primaire (régie par la théorie membranaire) et d'une solution secondaire (régie par la théorie flexionnelle pour un chargement corrigé appliqué aux bordures).

La solution primaire est une solution membranaire de la coque chargée où les conditions aux limites sont compatibles avec la théorie membranaire .

La solution secondaire est une solution généralement flexionnelle de la coque soumise à un chargement uniformément concentré le long de la bordure de la coque, cette dernière étant libre.

Le chargement étant pris d'intensité unitaire, et est représenté généralement par (un moment, une charge horizontale, et une charge verticale).

La solution membranaire ne respecte pas les conditions aux limites de la coque et introduit au niveau de la bordure un déplacement non nul; Cette discontinuité est éliminée par l'introduction de chargement unitaire uniformément concentré aux bordures et qui est multiplié par un certain facteur, de telle façon que le chargement résultant permet de ramener les déplacements des bordures aux valeurs imposées par les conditions aux limites.

La superposition des deux solutions primaire et secondaire donne une solution presque identique à celle obtenue par la théorie de flexion.

III-2 Procédure de la méthode

a/ Supposer la coque comme étant une membrane libre, et établir la solution pour cette membrane soumise au chargement donné. Noter les contraintes et déplacements de la bordure au niveau des points qui représentent un intérêt. C'est la solution primaire qui est généralement obtenue par la théorie membranaire et qui est tabulé pour différents cas de coques.

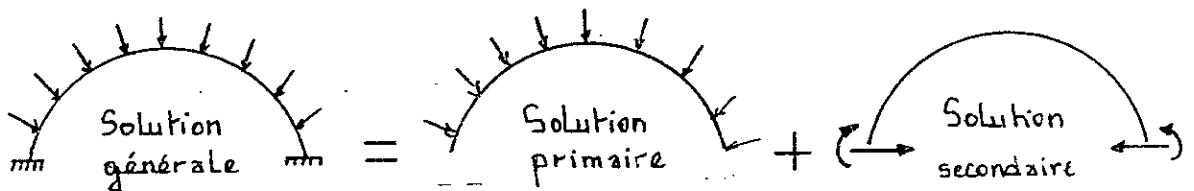
Dans des cas exceptionnels, la solution est obtenue par des méthodes autres que la théorie membranaire.

b/ Appliquer le long de la bordure : un moment; un effort horizontal; et un effort vertical de valeurs unitaires. Les déplacements et contraintes dus à chaque chargement constituent la solution secondaire et sont tabulés pour différents cas de coques.

c/ Les charges correctives M, H, et V sont déterminées par la procédure d'interaction.

d/ Les déplacements et contraintes dus aux efforts correctifs sont alors déterminés.

e/ La superposition des contraintes et déplacements obtenus par la solution primaire et ceux obtenus pour les charges de bordure correctives donnent la solution finale.



III-3 Interaction entre coques de géométries variables

On étudie, l'exemple d'interaction entre deux coques : l'une sphérique, l'autre cylindrique. Cette coque composée étant soumise à une pression interne uniforme. La théorie des membranes donne les déplacements et contraintes de chaque coque à part.

Soit :

δ_c : Déplacement radial du cylindre le long de la ligne de discontinuité :

β_c : Rotation du cylindre le long de la ligne de discontinuité.

δ_d : Déplacement radial du dôme le long de la ligne de discontinuité.

β_d : Rotation du dôme le long de la ligne de discontinuité.

Les deux coques étant prises indépendamment l'une de l'autre, on a :

$$\delta_c \neq \delta_d \quad \text{et} \quad \beta_c \neq \beta_d$$

Par conséquent, il existe une discontinuité :

1- Dans le déplacement : $\delta_c - \delta_d$

2- Dans la rotation : $\beta_c - \beta_d$

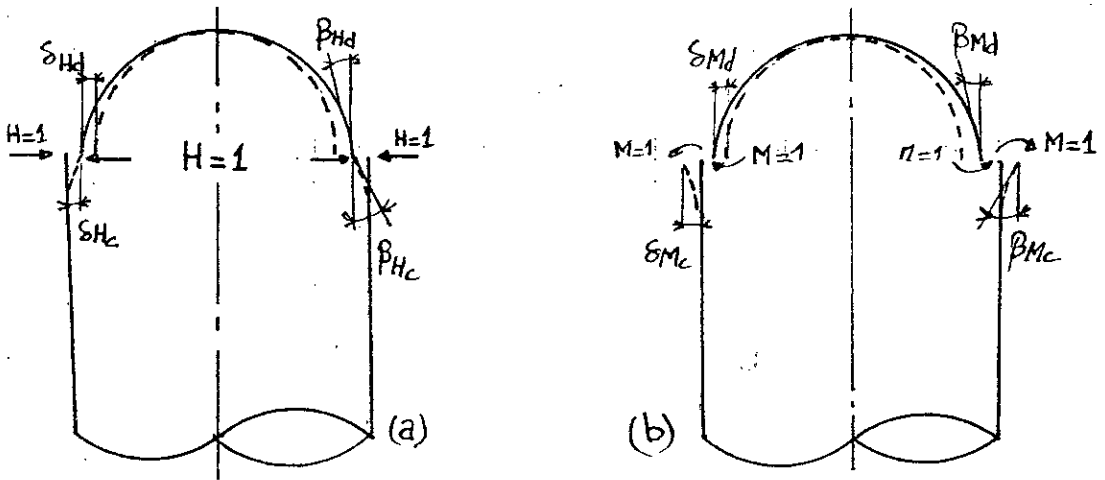


Figure III-3-1

Les charges unitaires H et M produisent les déplacements suivants: δ_{Hd} , β_{Hd} et δ_{Md} , β_{Md} : Déplacement et rotation de la bordure du dôme.
 δ_{Hc} , β_{Hc} et δ_{Mc} , β_{Mc} : Déplacement et rotation de la bordure du cylindre.
 δ et β sont les déplacements et rotations des différentes coques sous le chargement existant, avec des conditions d'appuis compatibles à la théorie de membrane. Pour éliminer la discontinuité entre les deux coques, on établit les équations suivantes:

$$\delta_d + \delta_{Hd} \cdot H + \delta_{Md} \cdot M = \delta_c - \delta_{Hc} \cdot H + \delta_{Mc} \cdot M$$

$$\beta_d + \beta_{Hd} \cdot H + \beta_{Md} \cdot M = \beta_c - \beta_{Hc} \cdot H + \beta_{Mc} \cdot M$$

Tous les coefficients δ et β sont généralement connus et tabulés pour différents cas de coques et de chargement.

En utilisant les notations suivantes:

$$\begin{array}{l} \delta_{Hc} + \delta_{Hd} = \delta_H \\ \delta_{Mc} - \delta_{Md} = \delta_M \\ \delta_c - \delta_d = \delta \end{array} \quad \begin{array}{l} \beta_{Hc} - \beta_{Hd} = \beta_H \\ -\beta_{Mc} - \beta_{Md} = \beta_M \\ \beta_c - \beta_d = \beta \end{array}$$

Et en sachant que : $\beta_c = 0$, $\beta_d = 0$, on obtient le système suivant:

$$\begin{array}{l} \delta_H \cdot H + \delta_M \cdot M = \delta \\ \beta_H \cdot H + \beta_M \cdot M = \beta \end{array} \quad \text{III-3-1}$$

Dont la résolution donne les valeurs des charges de bordure corrigées. En tout point on peut maintenant déterminer les déplacements et contraintes membranaires et les déplacements et contraintes dus aux charges de bordure correctives H et M, la superposition nous donne les déplacements et les contraintes totaux en tout point de la structure.

En tout point i, on pourra écrire:

$$\bar{\alpha}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot P_j + \alpha_{i0}$$

Avec: α_i : déplacement généralisé global

α_{i0} : déplacements généralisés primaires (obtenus par la théorie membranaire)

α_{ij} : déplacements généralisés secondaires dus à $P_j = 1$.

ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\alpha}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\alpha}_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\alpha}_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\alpha}_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \bar{\alpha}_{1n} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\alpha}_{in} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

résultat = seconde solution + première solution

$[\alpha_{ij}]$: étant appelé, matrice de flexibilité.

Similairement, on détermine les contraintes en tout point par la relation matricielle suivante:

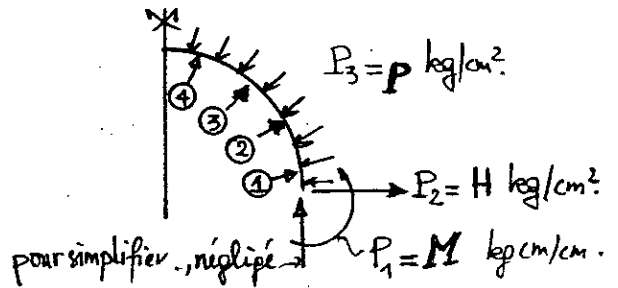
$$\{N\} = [\beta_{ij}] \cdot \{P_j\} + \{N_{i0}\}$$

$$\text{ou } \{N\} = \{N_\phi, N_\theta, M_\phi, M_\theta\}$$

$[N_{i0}]$ et $[\beta_{ij}]$ représentent le vecteur des contraintes obtenues par la solution membranaire et le vecteur des contraintes aux points i dues à une charge $P_i = 1$ respectivement.

Exemple:

Figure III-3-2



Soit un dôme sphérique soumis à une pression normale.

Détermination des déplacements (β : rotation ; δ : translation horizontale) provoqués par P_i , $i = 1, 2, 3$ dans les points (1), (2), (3), et (4)

On a :

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \delta_{11} & \delta_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \delta_{10} \end{bmatrix} \text{ pour le point (1)}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{21} & \beta_{22} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H \\ M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{20} \\ \delta_{20} \end{bmatrix} \text{ pour le point (2)}$$

Similairement, pour les points (3) et (4)

L'expression matricielle de ce système est comme suit:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \\ \beta_3 \\ \delta_3 \\ \beta_4 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \delta_{11} & \delta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \\ \delta_{31} & \delta_{32} \\ \beta_{41} & \beta_{42} \\ \delta_{41} & \delta_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1=H \\ P_2=M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \delta_{10} \\ \beta_{20} \\ \delta_{20} \\ \beta_{30} \\ \delta_{30} \\ \beta_{40} \\ \delta_{40} \end{bmatrix}$$

III-4 Table de cylindre hydrostatique :

a) Epaisseur uniforme:

4-1 Solution primaire

	N_x	0
	$N\theta$	$\gamma.R.(L-x)$
	U	$1/(E.t).(-\nu.\gamma.L.R.x.(1(x/L)))$
	V	0
	W	$1/(E.t).(\gamma.R^2.(L-x))$
	β	$-\gamma.R^2/(E.t)$

4-2 Solution secondaire

N_θ	$-M.2.k^2.R.F_1(e)$	$H.2.k.R.F_1(e)$
M_x	$M-M.F_1(e)$	$H.F_2(e)/k$
Q_x	$-M.2.k.F_2(e)$	$-H.F_4(e)$
$\delta_{,ij}$	$-M/(2.D.k^2).F_1(e)$	$H/(2.D.k^3).F_1(e)$
$\beta_{,ij}$	$M/(D.k^2).F_1(e)$	$-H/(2.D.k^2).F_1(e)$

Où $e = x/L$, $k = (3(1-\nu^2))^{.25}/\sqrt{(R.t)}$, $D = (E.t)/(12(1-\nu^2))$
 et

$$F_1(e) = \exp[-kLe].[\cos(kLe)]$$

$$F_2(e) = \exp[-kLe].[\sin(kLe)]$$

$$F_3(e) = \exp[-kLe].[(\cos(kLe) + \sin(kLe))]$$

$$F_4(e) = \exp[-kLe].[(\cos(kLe) - \sin(kLe))]$$

N.B : Le cas étudié est celui d'un cylindre long, avec la relation qui le vérifie :

$$k.L \geq 4 \text{ ou } L \geq 3,1 . \sqrt{(R.t)}$$

b) Epaisseur variable linéairement

4-3 Solution primaire

	N_1	0
	$N\theta$	$\gamma.R.(x-x_0)$
	U	$1/(E.\alpha).(-\nu.\gamma.L.R.(x-x_0.\log x))$
	V	0
	W	$-\gamma.R^2/E\alpha x).(x-x_0)$
	β	$(-\gamma.R^2/(E.\alpha))(x_0/x^2)$

4-4 Solution secondaire

N_{ij}	$Rap.(C_{1h}.\Psi_1'(e)+C_{2h}.\Psi_2'(e))$	$Rap(C_{1h}.\Psi_1'(e)+C_{2h}.\Psi_2'(e))$
M_{ij}	$M.\sqrt{x}.(C_{1h}.M_1(e)-C_{2h}.M_2(e))$	$M.\sqrt{x}.(C_{1h}.M_1(e)-C_{2h}.M_2(e))$
Q_{ij}	$Q.\sqrt{x}.(C_{1h}.Q_1(e)+C_{2h}.Q_2(e))$	$Q.\sqrt{x}.(C_{1h}.M_1(e)+C_{2h}.M_2(e))$
δ_{ij}	$1/\sqrt{x}(C_{1h}.\Psi_1'(e)+C_{2h}.\Psi_2'(e))$	$1/\sqrt{x}(C_{1h}.\Psi_1'(e)+C_{2h}.\Psi_2'(e))$
β_{ij}	$X'.(C_{1h}.\beta_1(e)-C_{2h}.\beta_2(e))$	$X'.(C_{1h}.\beta_1(e)-C_{2h}.\beta_2(e))$

NB: $Rap = -E\alpha(\sqrt{x}/R)$, $X' = x^{-3/2}$, $R^* = 1/(Q_2(e)\sqrt{(x_0+d)})$

avec $e = 2\rho\sqrt{x}$, $\rho = 12(1-\nu^2)/(\alpha^2.R^2)$

et $C_{1h} = M_2(e_1)/(DN(e_1)\sqrt{(x_0+d)})$; $C_{2h} = \{1/Q - M_2(e_2)/[Q_1(e_1)DN(e_1)]\}R^*$

$C_{1a} = Q_2(e_1)/(DN(e_1)\sqrt{(x_0+d)})$; $C_{2a} = Q_1(e_1)/(DN(e_1)\sqrt{(x_0+d)})$

$e_1 = 2\rho\sqrt{(x_0+d)}$ où $DN(e) = Q_2(e).M_1(e).M + M_2(e).Q_1(e).Q$

$Q_1(e) = \beta_2(e) = e.\Psi_1'(e) + 2.\Psi_2'(e)$, $M = -E\alpha^3/48(1-\nu^2)$

$Q_2(e) = \beta_1(e) = e.\Psi_2'(e) - 2.\Psi_1'(e)$

$M_1(e) = e^2\Psi_2'(e) - 4.e^2\Psi_2(e) + 8.\Psi_1'(e)$, $Q = E\alpha^3\rho^2/24(1-\nu^2)$

$M_2(e) = e^2\Psi_1'(e) - 4.e^2\Psi_1(e) + 8.\Psi_2'(e)$

$\Psi_1(e) = [e^0/\sqrt{(2\pi e)}].\cos(\sigma - z/8)$

$\Psi_2(e) = [e^0/\sqrt{(2\pi e)}].\sin(\sigma - z/8)$ où $\sigma = x/\sqrt{2}$

$\Psi_1'(e) = [e^0/\sqrt{(2\pi e)}].\cos(\sigma + z/8)$

$\Psi_2'(e) = [e^0/\sqrt{(2\pi e)}].\sin(\sigma + z/8)$

Chapitre IV

Programmation

IV- PROGRAMMATION

IV.1: Programmation de la méthode des éléments finis

La formulation systématique de la méthodes des éléments finis se prête aisément à sa programmation sur ordinateur permettant ainsi de résoudre efficacement et pratiquement tous les problèmes liés à l'analyse des coques à épaisseur constante ou variable sous chargement extérieur quelconque. La logique du programme général développé est fondée sur la formulation de l'élément de coque cylindrique, objet du chapitre II. L'architecture du logiciel développé repose sur un programme principale tel qu'illustrer par l'organigramme présenté dans le paragraphe 1.3.

1-1 Programme principal:

Il est utilisé pour l'introduction des données et l'impression de celles-ci, fait appel aux différents sous programmes, lit les sollicitations nodales surfaciques et les conditions aux limites. On a utilisé ici la méthode du terme diagonal dominant, qui consiste à additionner aux termes diagonaux de la matrice, des raideurs [K] correspondantes aux déplacements fixes (U_i), un grand nombre (x) égal à 10 puissance 30 c'est à dire remplacer k_{ii} par $k_{ii} + x$ et F_i par $x.U_i$ nous avons :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1f} & \dots & K_{1n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ K_{ii} & \dots & K_{ii}+X & \dots & K_{in} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ K_{ni} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ XU_i \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix}$$

Comme $K_{ii} \ll$ devant x on peut dire que $U_i = U_i$ ce qui n'est

valable que si $x.U_i \gg \gg$ devant la somme $K_{ij}.U_j$

1-2 Sous programmes

1-2-1 S.P: GRILLE

Ce S.P consiste à lire le nombre total d'élément et le vecteur de coordonnées des noeuds, qui sont stockées dans le vecteur CORG et qu'il imprimera ensuite pour vérification (Dans le cas d'un maillage plus raffiné en bas).

Dans le cas où le maillage est uniforme, ça se fait automatiquement. Il suffit de rentrer le nombre total d'éléments. Pour cette élément on n'a pas besoin d'une table de connectivité, qui définit chaque élément par la liste des numéros de ces noeuds, puisque pour l'élément i les deux numéros de ces noeuds sont i et $i+1$.

1-2-2 S.P: ELEM

Utiliser pour le calcul de la matrice de raideur élémentaire, et le calcul du vecteur force correspondant aux charges réparties.

1-2-3 S.P: ASSEM

Ce programme a pour fonction d'assembler et de construire $[K]$ global, et le vecteur charge global à partir de $[K^e]$ et $[F^e]$, avec la localisation automatique des degrés de liberté

1-2-4 S.P: RESOL

Dans ce sous programme les résultats obtenus par les sous programmes précédents sont exploités pour résoudre le système:

$$[K].\{U\} = \{F\}$$

La matrice des raideurs $[K]$ est ici une matrice bande

relativement petite. En conséquence la méthode adoptée pour la résolution sera celle de Gauss par bande symétrique, car celle-ci procure un gain d'espace mémoire considérable et un temps de résolution réduit.

Nous avons une matrice de raideur globale ayant la structure ci-dessous:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} \dots \dots \dots & K_{1j} & 0 \dots \dots \dots & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
 K_{i1} \dots \dots \dots & K_{ii} \dots \dots \dots & \dots & K_{in} \\
 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 \dots \dots \dots 0 & K_{ni} \dots \dots \dots & \dots & K_{nn}
 \end{bmatrix} \quad \text{d'ordre } n \times n$$

Au cours de l'assemblage cette matrice est redressée et stockée dans une table rectangulaire de la manière suivante :

$$[VK] = \begin{matrix} i \\ \begin{bmatrix}
 \dots \dots \dots \\
 \dots \dots \dots \\
 K_{ij} \dots \dots \dots \\
 \dots \dots \dots 0 \\
 \dots \dots 0 \dots 0 \\
 0 \dots \dots \dots 0
 \end{bmatrix} \\ b+1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} n \\ b \\ \text{d'ordre } n \times b \end{matrix}$$

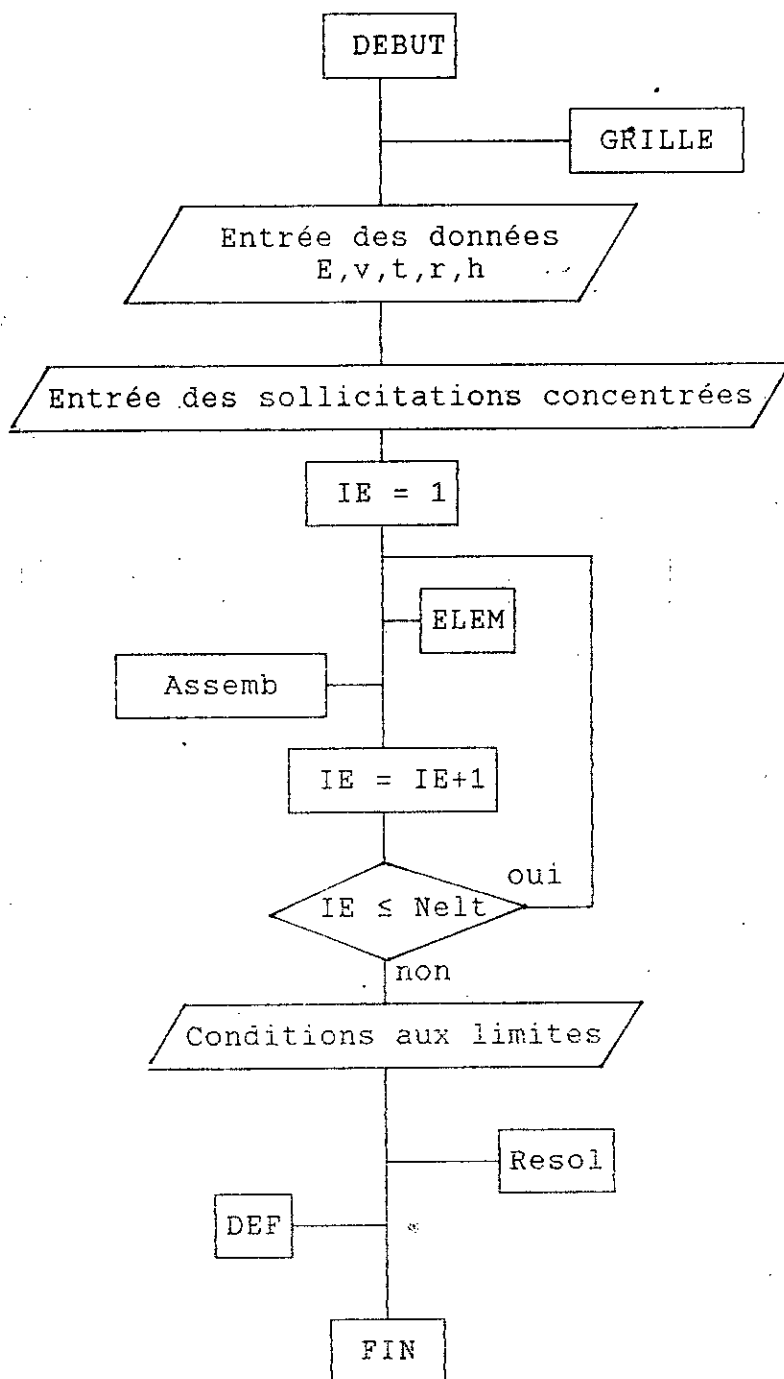
Avec $K_{ij} = VK_{ij}$ si $i=I$, $j = I-J+1$ et $j \geq I$

Ensuite la résolution se fait par le procédé de triangularisation de Gauss, tout en tenant compte que la matrice est redressée.

2-6 S.P: DEF

Il intervient après résolution du système $[K].\{U\}=\{F\}$; et calcul les déformations et efforts à partir des déplacements déjà calculés.

1.3- Organigramme



IV-2- Programmation de la Méthode Matricielle

La programmation de cette méthode est beaucoup plus simple que celle de la M.E.F. Elle se base principalement sur la résolution d'un système d'équations linéaires de la forme $A.x = B$ qui est élaboré à partir de la formulation présentée dans le chapitre III. Il est organisé de la manière suivante:

2-1- Programme principal

C'est à partir de ce dernier qu'on fait appel à un ensemble de sous-programmes et fonctions, la lecture des caractéristiques mécaniques et géométriques de la coque, et la détermination des déplacements et efforts membranaires et flexionnels.

2-2- Sous-programmes

2-2-1 S.P: Resol

Dans ce programme on résout un système d'équations linéaires simple, où on détermine les inconnues H et M, les efforts uniformément répartis le long de la bordure.

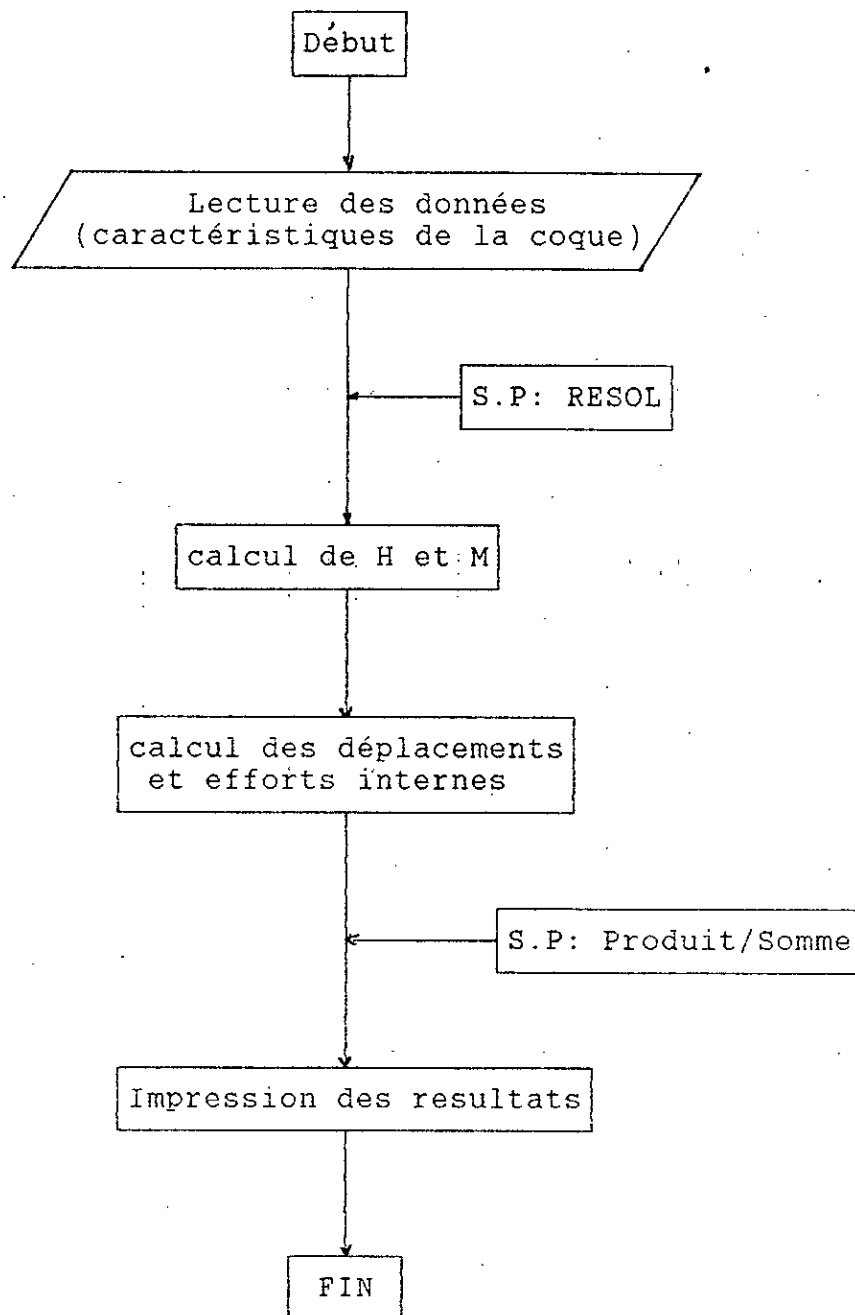
2-2-2 S.P: Produit et somme

Enfin, après avoir déterminé les inconnues H et M, on calcule les déplacements totaux et les efforts totaux en différents points de la coque étudiée.

2-2-3 Fonctions:

Après avoir lu les différentes caractéristiques de la coque, on fait appel aux fonctions où on a les expressions des déplacements et des efforts de réductions (membranaires et flexionnels) en fonction de H et M et des caractéristiques géométriques et mécaniques de la coque .

2.3- Organigramme



Chapitre V

*Etude comparative
des différentes méthodes*

V - ETUDE COMPARATIVE DE DIFFERENTS METHODES APPLIQUEES A DES RESERVOIRS A EPAISSEURS CONSTANTES OU VARIABLES :

Introduction :

Dans ce chapitre la méthode des éléments finis et la méthode matricielle décrites dans les chapitres II et III respectivement, sont appliquées à plusieurs exemples déjà traités dans la littérature spécialisée. Les comparaisons sont établies sur la base des résultats obtenus pour sept exemples d'applications relatifs à des coques cylindriques à épaisseurs aussi bien constantes que variables résumés comme suit :

1-Timoshenko :

- Exemple 1 : Epaisseur constante.
- Exemple 2 : Epaisseur variant linéairement.

2-Flugge :

- Exemple 3 : Epaisseur constante.
- Exemple 4 : Epaisseur variant linéairement.

3-Thevandran :

- Exemple 5 : Epaisseur constante.
- Exemple 6 : Epaisseur variant linéairement.
- Exemple 7 : Epaisseur et rayon variant linéairement.

Des graphes sont présentés pour la comparaison des résultats obtenus pour chaque méthode d'analyse.

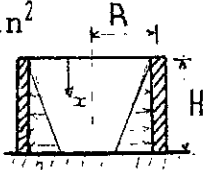
Des tableaux donnant l'erreur relative et le temps d'exécution pour la détermination des déformations et des efforts sont également présentés pour chaque méthode de calcul.

V-1 : Comparaison avec les résultats de Timoshenko

Exemple 1 : : Epaisseur constante

1.1- Caracteristiques:

MODULE DE YOUNG (E) = 2249,78 E4 lbf/in²
 COEFFICIENT DE POISSON (V) = 0,250
 RAYON (R) = 360,00 in
 HAUTEUR (H) = 312,00 in
 EPAISSEUR (t) = 14,000 in
 SOLLICITATION SURFACIQUE (Q_r) = 0,03613 lbf/in²



1.2 Solution par la M E F:

Nombre l'éléments : N E L
 W(200): déplacement radial à 112. in de profondeur (in)
 Mxmax : moment méridien maximal au fond (lbf.in/in)

N E L	W(200) (1E - 03)	ERREUR (%)	Mxmax (1E - 02)	ERREUR (%)	C P U time
05	2,8269	-00,07	14395,11	-03,10	0:00:00.72
11	2,8029	-00,10	13978,45	-00,10	0:00:00.92
25	2,8050	-00,05	13961,38	-00,07	0:00:01.59
THEORIQUE	2,8054	00.00	13962,35	00.00	-

1.3 - Solution par la méthode matricielle:

Nombre de lignes de "discontinuités" : 15
 W(200.57) : déplacement radial à 111.43 in de profondeur(in)
 Mxmax : moment méridien maximal au fond (lbf.in/in)

Solution	w(200.57)x1E-03(in)	Mxmax(lbf.in/in)
M M	2,80413	13962,35
THEORIQUE	2,80413	13962,35
ERREUR	00,0000	00,0000

C P U time: 0:00:01.02

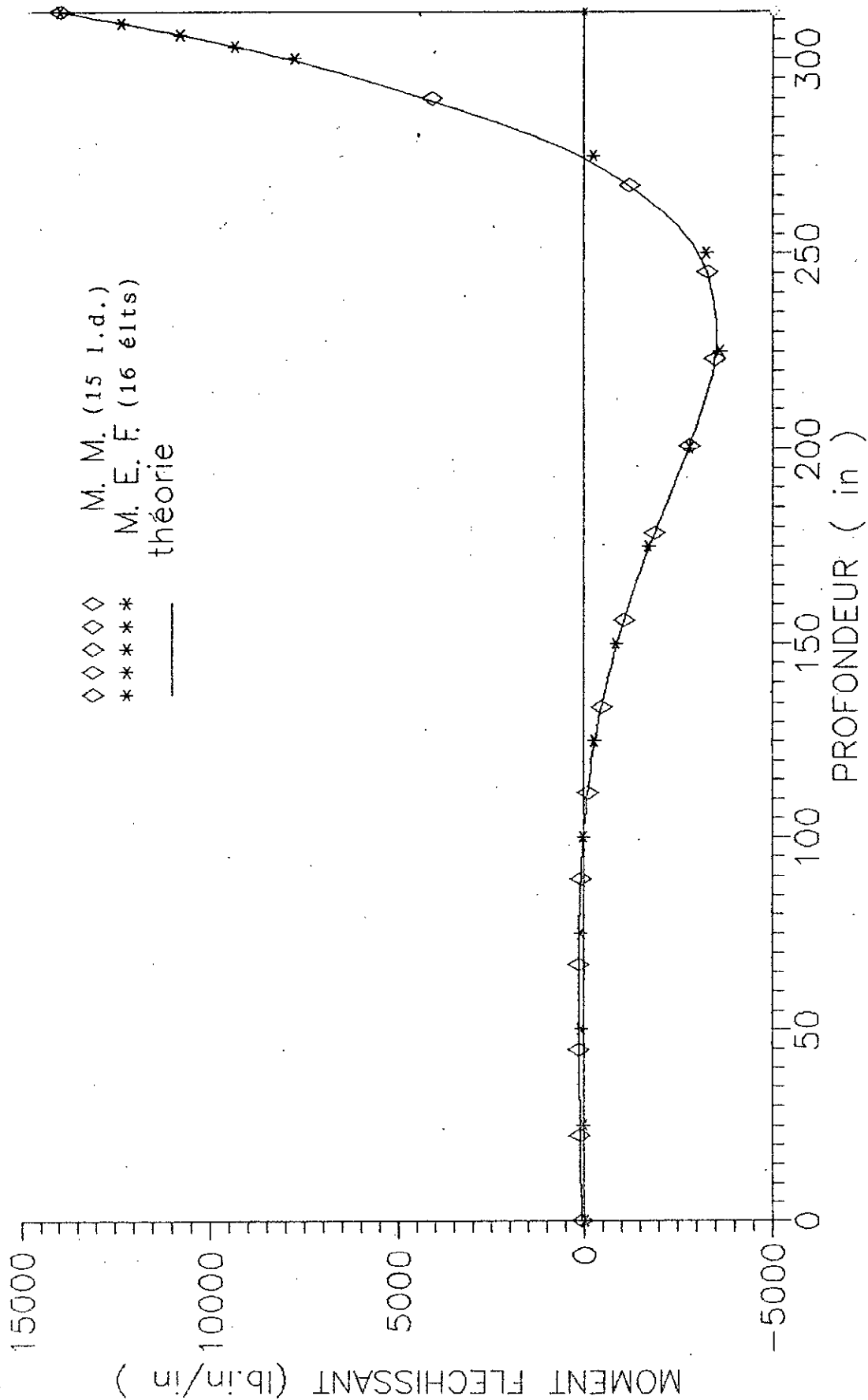


FIG.v-1: Variation du moment méridien d'un réservoir
exemple de TIMOSHENKO

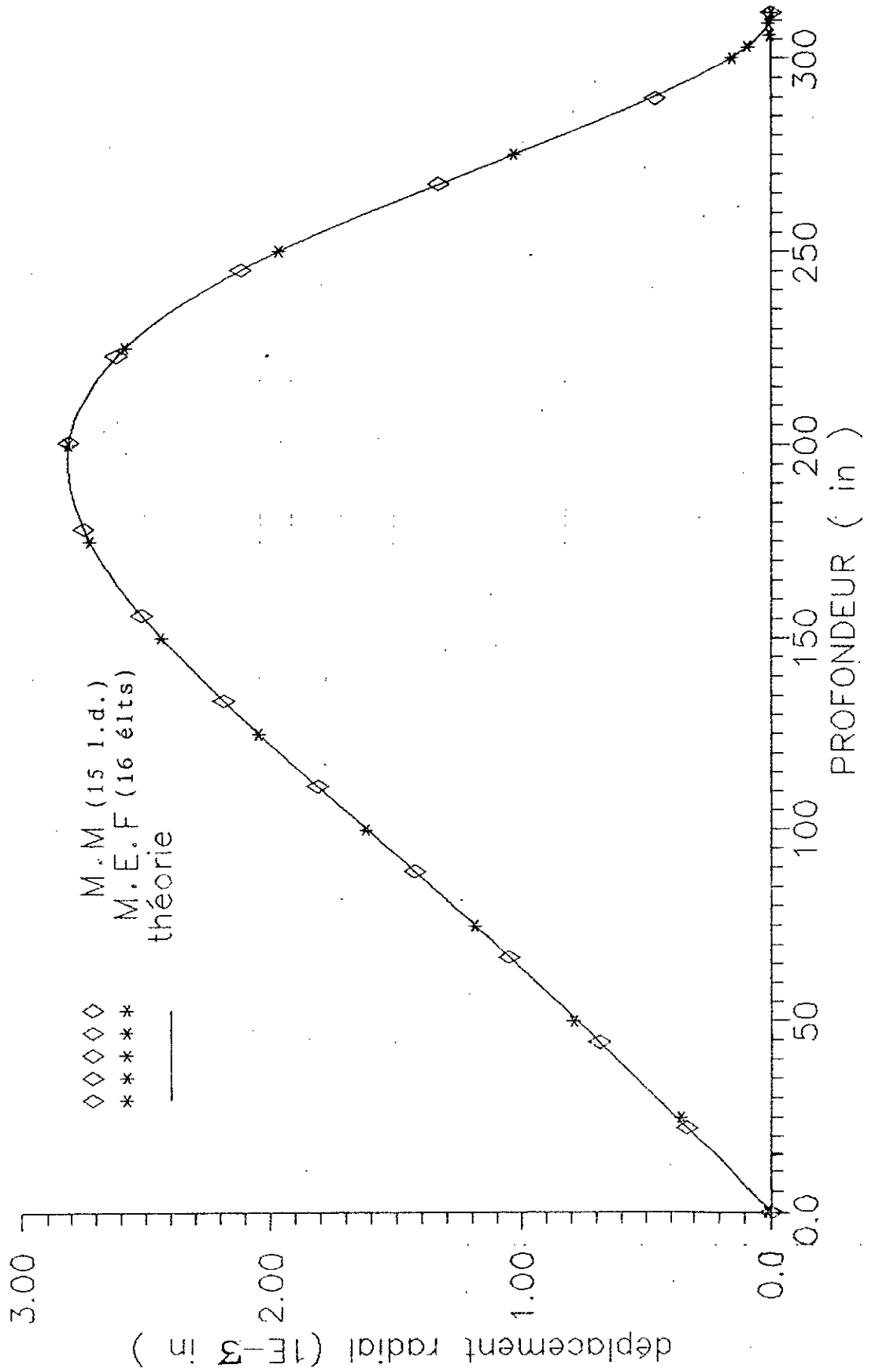
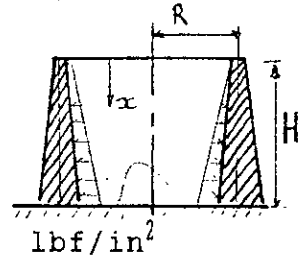


FIG. v-2: Déformée de l'exemple de TIMOSHENKO

Exemple 2 : Epaisseur variant linéairement

2.1- Caracteristiques:

MODULE DE YOUNG (E) = 2249,78 E+4 lbf/in²
 COEFFICIENT DE POISSON (ν) = 0,250
 RAYON (R) = 360,00 in
 HAUTEUR (H) = 312,00 in
 EPAISSEUR en haut (t_{max}) = 14,0 in
 EPAISSEUR en bas (t_{min}) = 3,5 in
 SOLLICITATION SURFACIQUE (Q_r) = 0,03613 lbf/in²



2.2 Solution par la M E F:

Nombre d'éléments : N E L

W(200): déplacement radial à 112. in de profondeur (in)

M_{xmax} : moment meridien maximal au fond (lbf.in/in)

N E L	W(200) (1E - 03)	ERREUR (%)	Mxmax (max)	ERREUR (%)	ERREUR / Thevandran
10	4,0158	00,12	14224,6	01,17	02,20
24	4,0047	00,40	14454,4	02,80	00,60
47	4,0024	00,45	14523,1	03,30	00,15
71	4,0018	00,47	14540,8	03,40	00,03
96	4,0018	00,47	14541,0	03,41	00,02
THEORIQUE TIMOSHENKO	4,0206	00,00	14060,4	00,00	Valeur_Thev. 14545,00

- Temps d'exécution:

N E L	C P U time
10	0:00:00.89
24	0:00:01.49
47	0:00:02.50
71	0:00:03.50
96	0:00:05.10

2.3 -Solution par la méthode matricielle :

Nombre de lignes de "discontinuités" : 15

w(224.8): déplacement radial à 187.2 in de profondeur (in)

Mxmax : moment méridien maximal au fond (lbf.in/in)

Solution	w(224.8)x1E03in	Mxmax (lbf.in/in)
M M	4.1186	14060.4
Théorique	4.1186	14060.4
Erreur	0.0000	00000.0

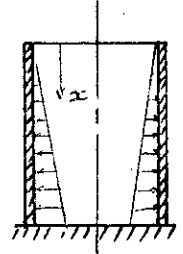
C.P.U Time: 0:00:01.03

V-2 : Comparaison avec les résultats de flügge

Exemple 3 : Epaisseur constante

3.1-2 Caracteristiques:

MODULE DE YOUNG (E) = 2.1 E+11 Kg/m²
 COEFFICIENT DE POISSON (V) = 0,250
 RAYON (R) = 3,00 m
 HAUTEUR (H) = 5,5 m
 EPAISSEUR (t) = 0,28 m
 SOLLECITATION SURFACIQUE (Q_r) = 1,0 t/m²



3.2 Solution par la M E F:

Nombre d'éléments : N E L

W(4.) : déplacement radial à 1,5 m de profondeur (m)

Mxmax : moment meridien maximal au fond (m.Kg/m)

N E L	W(4.0) (1E - 06)	ERREUR (%)	Mxmax (1E - 02)	ERREUR (%)	C P U time
06	0,5896	00,03	1180,22	01,66	0:00:00.77
12	0,5894	00,07	1193,95	00,50	0:00:01.07
30	0,5897	00,02	1199,05	00,03	0:00:01.78
THEORIQUE	0,5898	00,00	1200,175	00,00	-

3.3 - Solution par la méthode matricielle:

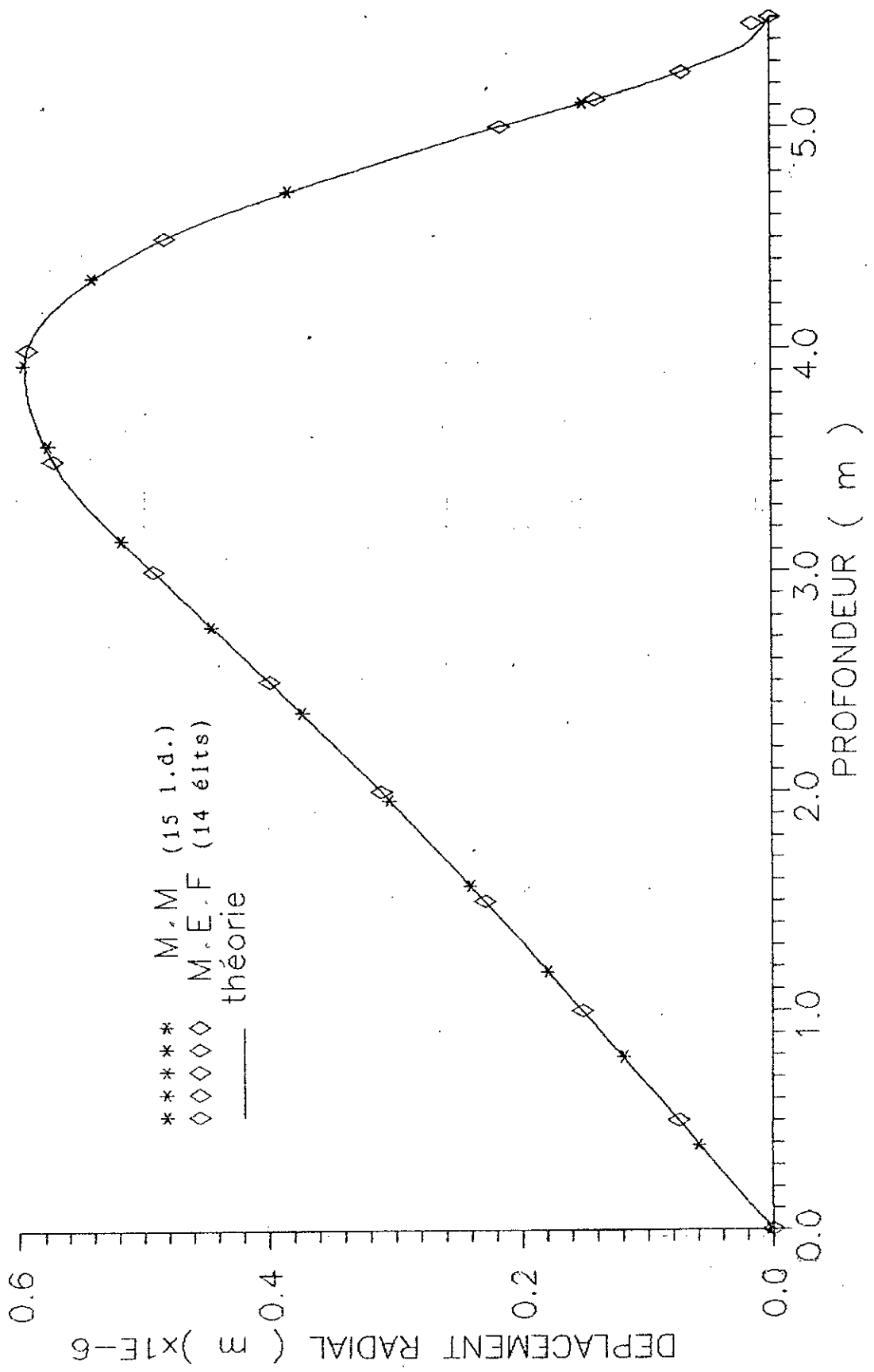
Nombre de lignes de "discontinuiés": 15

W(3.93) : déplacement radial à 1,57 m de profondeur (m)

Mxmax : moment méridien maximal au fond (m.Kg/m²)

Solution	w(3.93)x1E-06(m)	Mmax (m.Kg/m)
M M	0,5932	1200,175
THEORIQUE	0,5932	1200,175
ERREUR	00,0000	0000,000

C P U time: 0:00:01.07



FIGy-3: Déformée de L'exemple de FLÜGGE

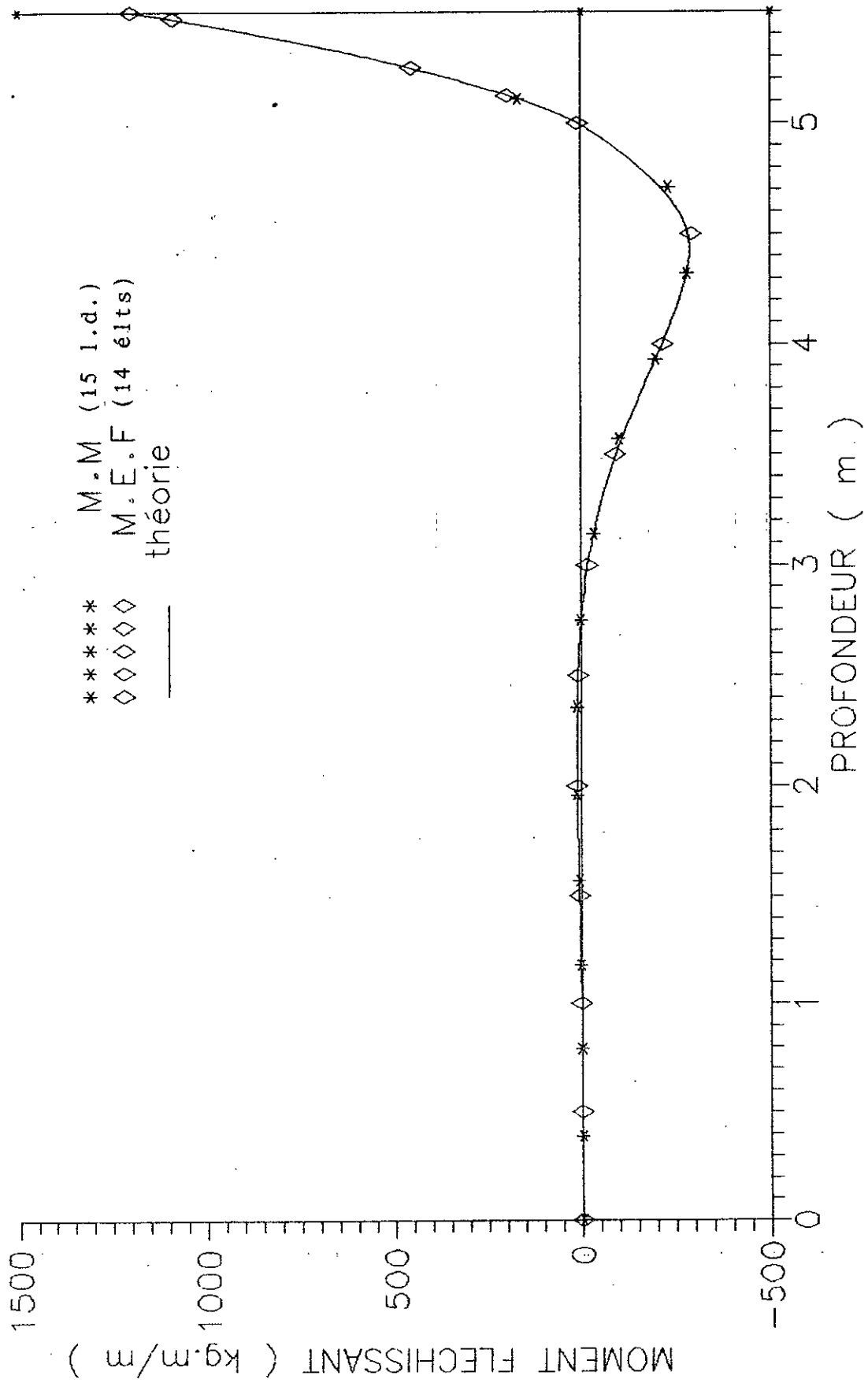
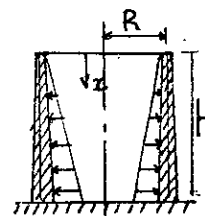


FIG v₄: Variation du moment méridien d'un réservoir
exemple de FLÜGGE

Exemple 4 : Epaisseur variant linéairement

4.1- Caractéristiques:

MODULE DE YOUNG (E) = 2.1 E+11 Kg/m²
 COEFFICIENT DE POISSON (V) = 0,250
 RAYON (R) = 4,00 m
 HAUTEUR (H) = 5,00 m
 EPAISSEUR en haut (tmax) = 0,35 m
 EPAISSEUR en bas (tmin) = 0,10 m
 SOLLICITATION SURFACIQUE (Q_r) = 1,0 t/m²



4.2 - Solution par la M.E.F.:

Nombre d'éléments : N E L

W(5,0) : déplacement radial à 2,0 m de profondeur (m)

Mxmax : moment méridien maximal au fond (m.Kg/m²)

N E L	W(5.) (1E-03)	ERREUR (%)	Mxmax	ERREUR (%)	C P U time
06	0,80888	00,45	1663,1	02,50	0:00:00.79
12	0,81141	00,13	1746,5	02,40	0:00:01.09
24	0,811911	00,08	1769,5	03,70	0:00:01.50
48	0,81203	00,06	1775,0	04,10	0:00:02.30
THEORIQUE TIMOSHENKO	0,81253	00,00	1705,6	00,00	-

4.3 -Solution par la méthode matricielle :

Nombre de lignes de discontinuités" : 15

w(5.) : déplacement radial à 2.0 m de profondeur (m)

Mxmax : moment méridien maximal au fond (Kg.m/m)

Solution	w(5.)x1E-03 mm	Mxmax (Kg.m/m)
M M	0.81253	1705.6
Théorique	0.81253	1705.6
Erreur	0.00000	0000.0

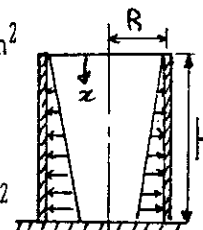
C.P.U Time: 0:00:01.01

V-3 : Comparaison avec les résultats de Thevandran

Exemple 5 : Epaisseur constante

5.1- Caractéristiques:

MODULE DE YOUNG (E) = 28,0 E06 KN/m²
 COEFFICIENT DE POISSON (V) = 0,250
 RAYON (R) = 9,144 m
 HAUTEUR (H) = 7,925 m
 EPAISSEUR en haut (tmax) = 0,356 m
 SOLLECITATION SURFACIQUE (Q_r) = 9,81 KN/m²



5.2- Variation du moment méridien le long de la hauteur (KN.m/m)

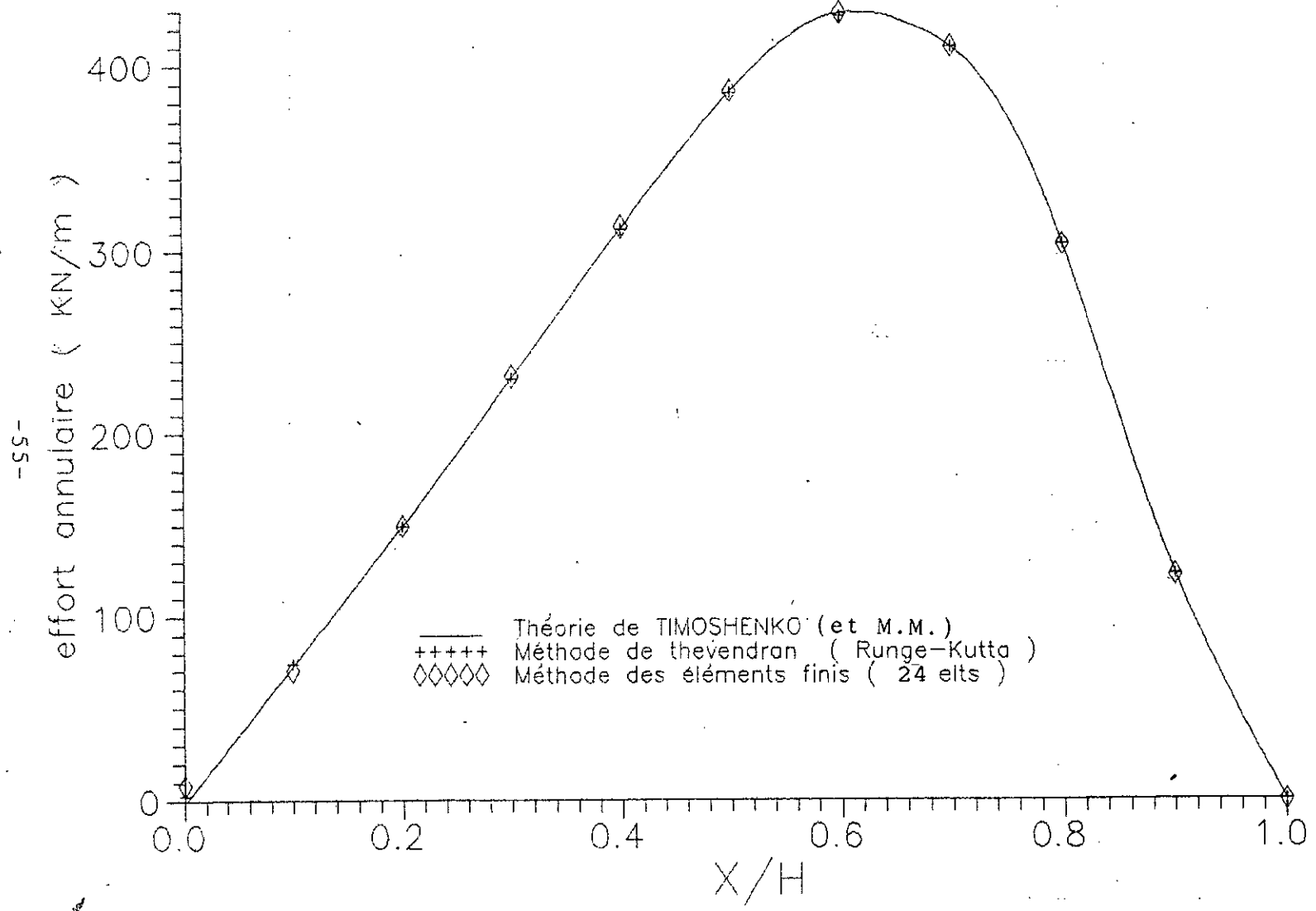
Tab. 5-1 : Résultats de l'exemple 5 : Comparaison de M_x

x/H	Théorie	Méthode Matri.	Méthode THEVENDRAN		Méthode des élts finis	
	TIMO.		FI	FII	12 élts	24 élts
1.0	62,2	62,2	62,2	62,2	62,1	62,2
0.9	06,7	06,7	06,7	06,7	06,3	06,6
0.8	-13,6	-13,6	-13,6	-13,6	-14,0	-13,6
0.7	-15,1	-15,1	-15,1	-15,1	-15,2	-15,1
0.6	-10,0	-10,0	-10,0	-10,0	-10,0	-10,0
0.5	-04,8	-04,8	-04,8	-04,7	-04,7	-04,7
0.4	-01,3	-01,3	-01,3	-01,3	-01,3	-01,3
0.3	00,3	00,3	00,3	00,1	00,2	00,2
0.2	00,7	00,7	00,8	00,4	00,4	00,4
0.1	00,6	00,6	00,8	00,2	00,2	00,2
0.0	00,3	00,3	00,6	00,0	00,0	00,0
CPU	-	01,0	00,6	01,5	01,0	01,6

5.3- Variation de l'effort annulaire le long de la hauteur(KN/m)

Tab. 5-2 : Résultats de l'exemple 5 : Comparaison de N(phi)

x/H	Théorie TIMO	Méthode Matri.	Méthode THEVENDRAN		Méthode des élts finis	
			FI	FII	12 élts	24 élts
1.0	000,0	000,0	000,0	000,0	000,0	000,0
0.9	122,0	122,0	122,0	122,0	120,9	122,2
0.8	302,6	302,6	302,6	302,6	302,8	302,6
0.7	409,7	409,7	409,7	409,8	410,0	409,8
0.6	428,0	428,0	427,1	428,2	428,3	428,2
0.5	385,0	385,0	384,8	385,5	385,5	385,4
0.4	312,1	312,1	311,6	312,8	312,8	312,8
0.3	230,3	230,3	229,7	231,0	231,0	213,0
0.2	149,5	149,5	149,2	149,5	149,4	149,4
0.1	072,6	072,6	073,6	070,2	070,3	070,3
0.0	000,9	000,9	002,8	-08,0	008,9	008,4
CPU	-	01,0	00,6	01,5	01,0	01,6



FIGV.5 Variation de l'effort annulaire le long de la hauteur (exp 5)

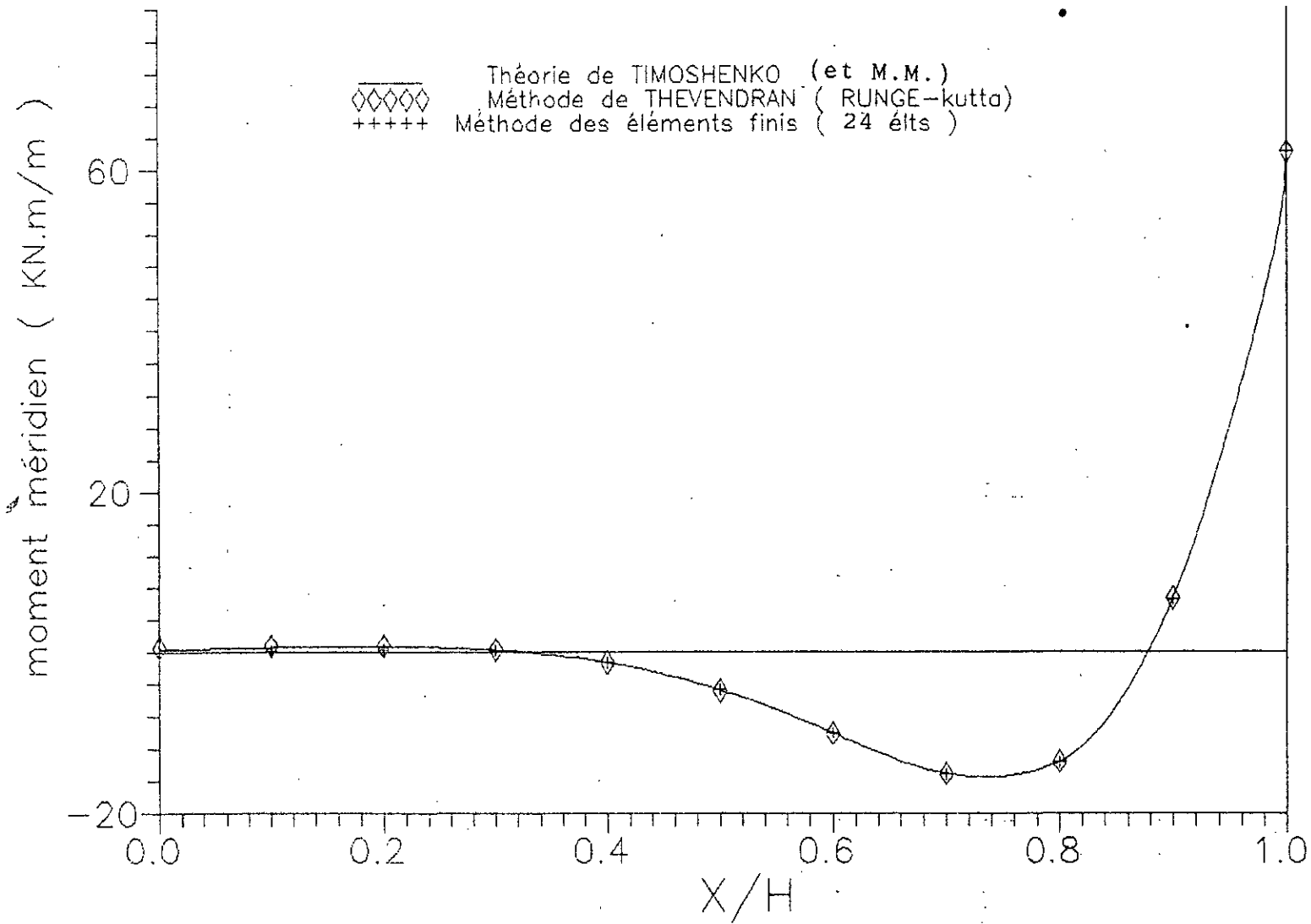
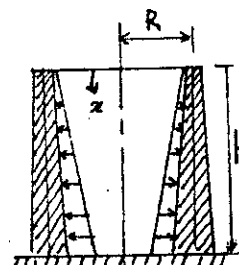


FIG.V-6: Variation du moment méridien le long de la hauteur (exp 5)

Exemple 6 : Epaisseur variant linéairement

6.1- Caractéristiques:

MODULE DE YOUNG (E) = 28,0 E06 KN/m²
 COEFFICIENT DE POISSON (V) = 0,250
 RAYON (R) = 9,144 m
 HAUTEUR (H) = 7,925 m
 EPAISSEUR en haut (Tmax) = 0,356 m
 EPAISSEUR en bas (Tmin) = 0,086 m
 SOLLICITATION SURFACIQUE (Q_r) = 9,81 KN/m²



6.2- Variation du moment méridien le long de la hauteur (KN.m/m)

Tab. 6-1 : Résultats de l'exemple 6 : Comparaison de M_x

x/H	Théorie	Méthode Matri.	Méthode THEVENDRAN		Méthode des élts finis	
	TIMO		FI	FII	24 élts	48 élts
1.0	62,6	62,6	64,8	64,8	64,8	64,8
0.9	10,5	10,5	11,4	11,4	11,0	11,3
0.8	-07,3	-07,3	-07,3	-07,3	-07,6	-07,3
0.7	-08,2	-08,2	-08,7	-08,7	-08,7	-08,6
0.6	-04,5	-04,5	-05,0	-05,0	-04,9	-04,9
0.5	-01,4	-01,4	-01,9	-01,9	-01,8	-01,9
0.4	-00,1	-00,1	-00,1	-00,6	-00,5	-00,5
0.3	00,2	00,2	-00,5	00,3	-00,3	-00,3
0.2	00,1	00,1	-00,6	00,3	-00,3	-00,3
0.1	00,0	00,0	00,2	-00,2	00,1	-00,2
0.0	00,0	00,0	02,1	00,0	00,0	00,0
CPU	-	01,0	00,6	01,5	01,6	02,7

6.3- Variation de l'effort annulaire le long de la hauteur (KN/m)

Tab. 6-2 : Resultats de l'exemple 6 : Comparaison de N(phi)

x/H	Theorie	Méthode Matri.	Méthode THEVENDRAN		Méthode des élts finis	
	TIMO		FI	FII	24 élts	48 élts
1.0	000,0	000,0	000,0	000,0	000,1	000,0
0.9	136,9	136,9	129,8	129,8	127,9	128,9
0.8	330,4	330,4	323,9	323,9	324,5	324,2
0.7	437,0	437,0	433,5	433,3	433,9	433,7
0.6	441,8	441,8	441,0	440,5	440,8	440,7
0.5	382,6	382,6	383,3	382,5	382,5	382,5
0.4	300,0	300,0	300,7	300,1	299,9	300,0
0.3	217,6	217,6	215,4	216,9	216,7	216,8
0.2	141,7	141,7	130,8	139,5	139,7	139,7
0.1	070,2	070,2	050,2	068,6	069,1	069,1
0.0	000,3	000,3	017,3	011,1	011,9	011,9
CPU	-	01,0	00,6	01,5	01,6	02,7

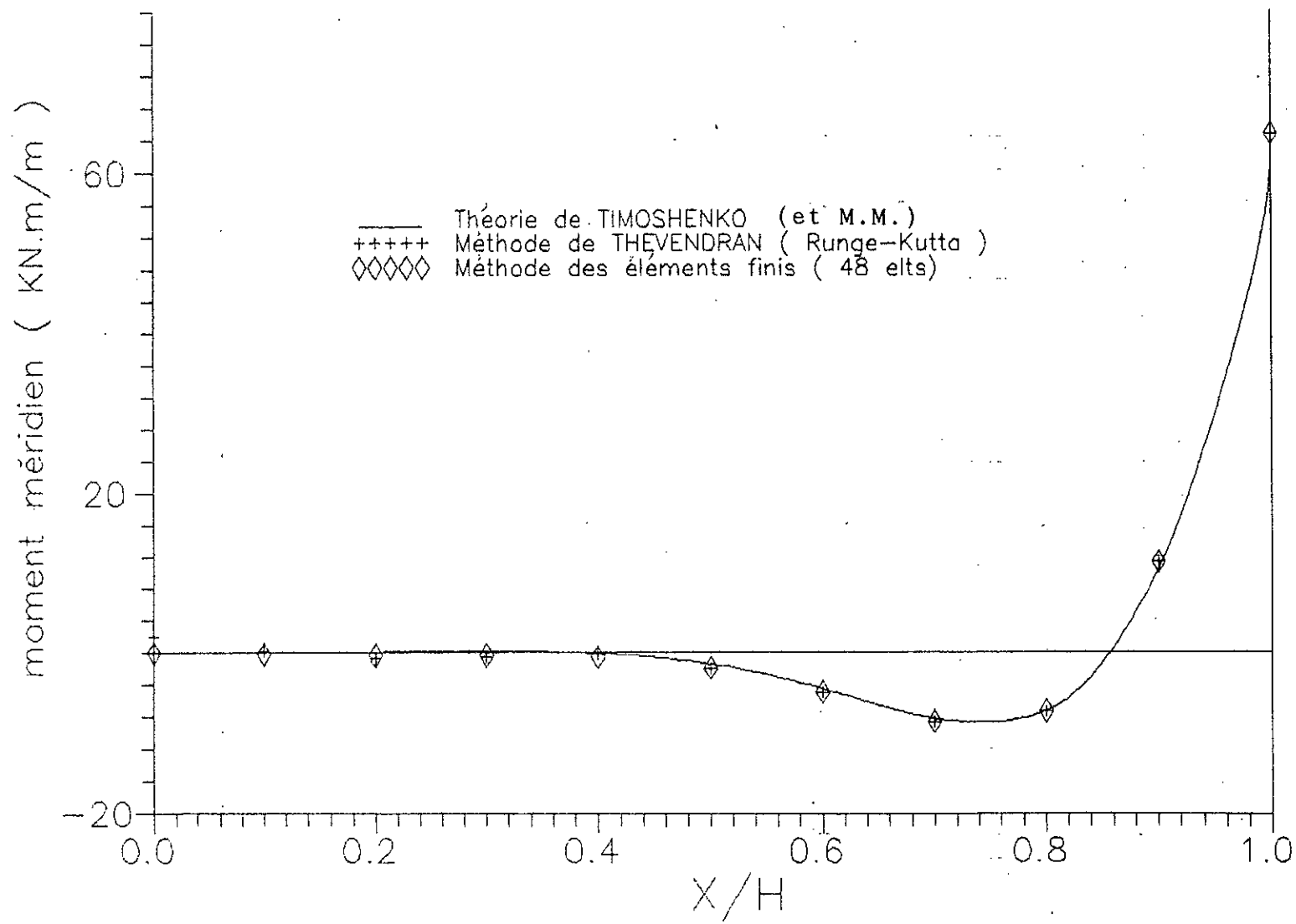


FIG 7: Variation du moment méridien (épaisseur variable:)

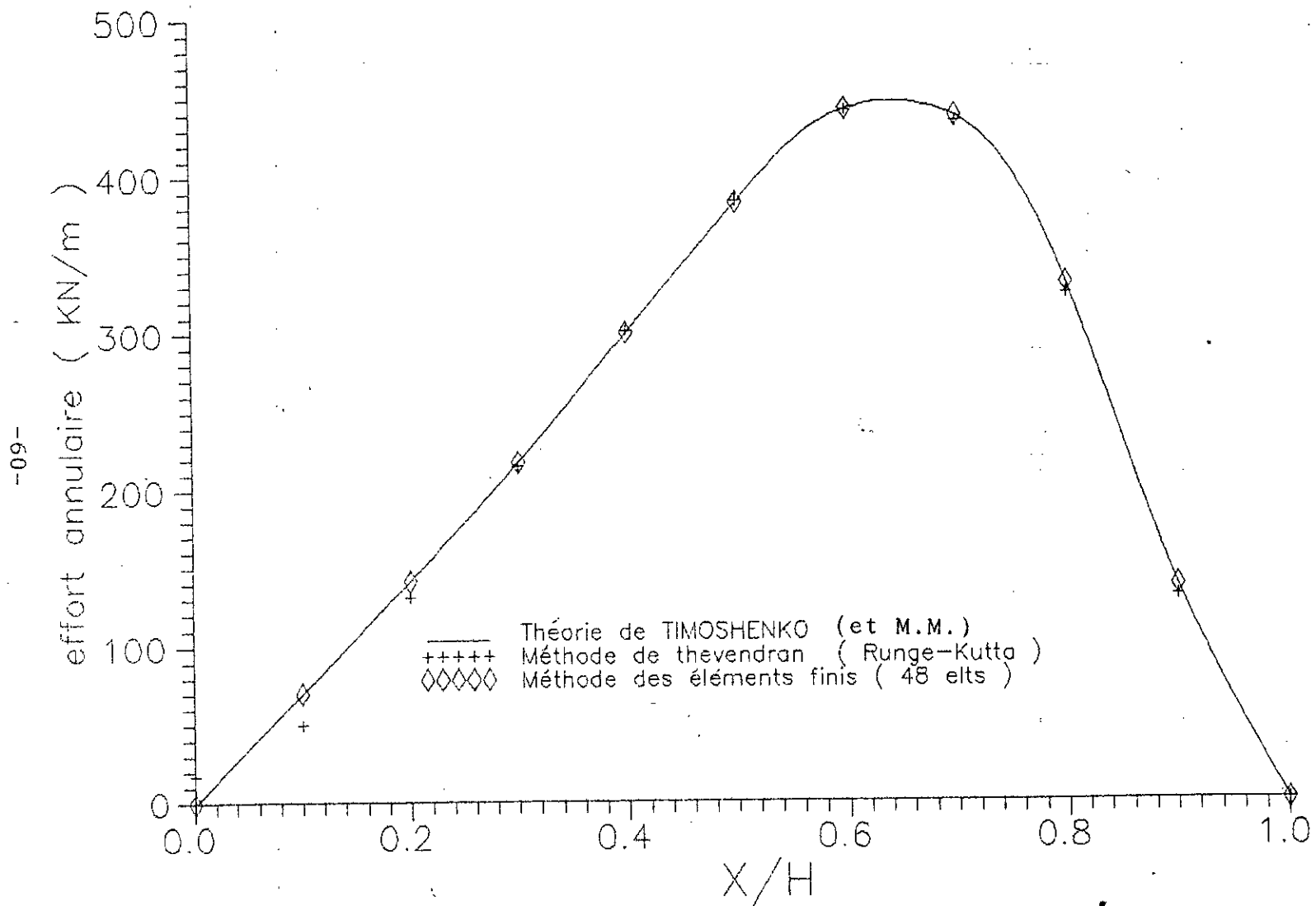
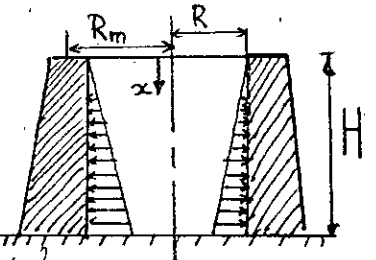


FIGURE 8: Variation de l'effort annulaire le long de la hauteur (exp 6)

Exemple 7 : Epaisseur et rayon variant linéairement .

7.1- Caractéristiques:

MODULE DE YOUNG (E) = 28,0 E06 KN/m²
 COEFFICIENT DE POISSON (V) = 0,250
 RAYON INTERIEUR (R) = 9,144 m
 HAUTEUR (H) = 7,925 m
 EPAISSEUR en bas (Tmax) = 0,356 m
 EPAISSEUR en haut (Tmin) = 0,086 m
 SOLLICITATION SURFACIQUE (Q_r) = 9,81 KN/m²



7.2- Variation du moment méridien le long de la hauteur (KN.m/m)

Tab. 7-1 : Résultats de l'exemple 7 : Comparaison de M_x

x/H	Méthode THEVENDRAN		Méthode des élts finis	
	FI	FII	24 élts	48 élts
1.0	65,7	65,8	65,6	65,7
0.9	11,7	11,8	11,4	11,8
0.8	-07,4	-07,3	-07,6	-07,3
0.7	-08,8	-08,9	-08,9	-08,9
0.6	-05,1	-05,2	-05,1	-05,2
0.5	-01,8	-02,0	-01,9	-02,0
0.4	-00,2	-00,6	-00,6	-00,6
0.3	00,0	-00,3	-00,3	-00,3
0.2	-01,0	-00,3	-00,3	-00,3
0.1	-03,4	-00,2	-00,2	-00,2
0.0	-04,6	00,0	00,0	00,0
CPU	00,6	01,5	01,6	02,7

7.3- Variation de l'effort annulaire le long de la hauteur(KN/m)

Tab. 7-2 : Résultats de l'exemple 7 : Comparaison de N(phi)

x/H	Méthode THEVENDRAN		Méthode des élts finis	
	FI	FII	24 élts	48 élts
1.0	000,0	000,0	000,1	000,0
0.9	129,7	129,8	127,4	129,2
0.8	324,9	325,2	325,8	325,1
0.7	436,1	437,0	437,5	437,0
0.6	444,4	446,0	446,0	445,5
0.5	387,1	387,6	385,0	387,6
0.4	307,5	304,0	303,8	304,0
0.3	232,5	219,2	219,0	219,5
0.2	164,8	140,7	140,9	140,9
0.1	066,5	069,0	065,5	069,6
0.0	016,9	011,1	011,9	011,7
CPU	00,6	01,5	01,6	02,7

Conclusion

Conclusion

La méthode des éléments finis s'est avéré être un outil très puissant dans l'analyse des coques. L'étude des coques de révolution par cette technique est considérablement simplifiée grâce à l'utilisation de l'élément "tronc de cône". L'utilisation de cet élément permet d'introduire le concept de lignes nodales qui se substitue avantageusement à celui des points nodaux.

Parmi les avantages de cet élément citons l'absence du problème de discontinuité aux interfaces des éléments et une diminution importante de données ainsi que celle du temps d'exécution du logiciel élaboré.

Les exemples traités montrent l'excellent accord entre la théorie et les résultats digitaux, du fait de la modélisation par élément finis tronconiques qui permet de reproduire avec une précision suffisante la géométrie de la structure réelle. Ceci permet d'obtenir des résultats très satisfaisants, avec un nombre d'éléments relativement faible dans le cas où l'épaisseur est constante. Dans le cas où l'épaisseur est variable, il convient d'affiner le maillage afin de reproduire avec précision la configuration et par suite le comportement réel de la structure.

La méthode matricielle de par sa conception fournit des résultats rigoureusement identiques à ceux de la théorie classique (épaisseur variable ou non). Les principaux avantages suivants peuvent être cités:

- Simplicité de programmation.
- Fichier de données très simplifié.

-Temps d'exécution réduit.

Dans le cas des réservoirs à épaisseurs variables les formulations exactes ne sont pas toujours disponibles. Toutefois en utilisant des formules approchées, il est possible de retrouver les résultats de la théorie classique pour laquelle les coefficients C_3 et C_4 sont en général négligés. Le cas des réservoirs "courts" à inertie variable (pour lesquels les coefficients C_3 et C_4 doivent être pris en considération) n'a pas d'application pratique dans le domaine du génie civil et ne sera par conséquent pas traité dans cette étude. A l'encontre de la méthode des éléments finis la méthode matricielle ne nécessite pas pour la détermination des déplacements ou contraintes généralisés, en un point donné, la détermination obligatoire des déplacements ou contraintes généralisés de tous les points du maillage.

Les deux méthodes sont considérées comme des méthodes matricielle. La méthode des éléments finis est ici basée sur une approche déplacement, les conditions de compatibilité des déplacements étant satisfaites à priori et les équations d'équilibre résolues pour obtenir les déplacements nodaux inconnus. Pour la méthode matricielle, les conditions d'équilibre aux noeuds sont d'abord satisfaites, et les équation exprimant la compatibilité des déplacements nodaux résolues pour obtenir les forces inconnues.

*Références bibliographiques
de la 1^{ère} partie*

Deuxième Partie

*Analyse dynamique des réservoirs
cylindriques*

REFERENCES BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE

- 1- Timoshenko S. P. and Woinowsky K. "Theory of plates and shells". McGraw Hill, New York ,pp. 466-497, 1957.
- 2- Zienkiewicz O.C. "The finite element method in engineering science." McGraw Hill, Paris , 1979.
- 3- Rocky L."Introduction à la méthode des éléments finis" Eyrolles, 1979.
- 4- Dhatt G. et Touzot G."Une présentation de la méthode des éléments finis" Deuxième édition Maloine. S.A, 1984.
- 5- Grafton P.E. and Strome D.R."Analysis of axi-symmetric shells by the direct stiffness method", AIAA J., Vol.1, N°10, 1963.
- 6- Flügge W."Statique et dynamique des coques". Eyrolles 1960.
- 7- Thevendran V."A numerical approach to the analysis of circular cylindrical water tanks" Computer and structures, Vol.23,N°3, pp 379-383, 1986.
- 8- Rosenbrock H.H."An automatic method for finding the greatest or the least value of a function".Comp.J.3,175 1960.
- 9- Press W.H."Numerical recipes" Ed (1987) chapt.15 'Integration of ordinary differenteil equation'.
- 10- Greene,B.E.,Strome,D.R., and Weigel,R.C., "Application of the stiffness method to the analysis of shell structures",Am. soc. mech. engns. Paper 61-A-V-58, 1961.

Généralités

GENERALITES

Le chargement hydrodynamique et les effets d'interactions fluide-structure doivent être considérés dans le calcul des réservoirs de fluides soumis aux excitations sismiques.

L'objectif de cette deuxième partie est de fournir un guide pour le calcul dynamique des réservoirs cylindriques à axe de symétrie vertical.

Ces structures sont couramment utilisés dans l'industrie pétrolière, dans l'industrie aérospatiale, ainsi que dans les installations nucléaires.

On peut distinguer deux classes de problèmes hydrodynamiques pour le calcul sismique de telles structures. La première concerne les études de l'effet du fluide sur la vibration des systèmes immergés dans celui-ci. La seconde, fréquemment rencontrée en pratique, concerne les études de l'effet de l'oscillation du fluide sur la réponse du système qui le contient.

C'est précisément cet effet que nous étudierons dans la partie dynamique. Le sujet est complexe car il implique l'étude des actions dynamiques réciproques qui se développent entre le fluide et la cuve qui le contient.

Dans la suite de l'exposé, il y aura lieu de différencier deux classes de réservoirs :

- Les réservoirs peu profonds " Shallow tank ", " Broad tank ", dont le taux de remplissage est tel que $\alpha(h/R) \leq 1.5$.
- Les réservoirs profonds " Tall tank ", " Slender tank ", dont le taux de remplissage est tel que $\alpha(h/R) \geq 1.5$.

Lorsqu'un réservoir couvert est entièrement plein, il n'y a naturellement pas de mouvement relatif du fluide par rapport au réservoir à la suite d'une excitation. Du point de vue dynamique, tout se passe comme si l'ensemble fluide-réservoir constituait une masse unique. Par contre, dans des réservoirs

Chapitre VI

Analyse des réservoirs à parois rigides

INTRODUCTION

La solution du problème de l'analyse dynamique des réservoirs à parois rigides consiste mathématiquement en la recherche de la solution de l'équation de Laplace satisfaisant aux conditions aux limites précises, imposées par la nature du problème étudié. la méthode dite du potentiel linéaire est souvent utilisée a cet effet.

Les hypothèses peuvent être résumées comme suit :

- les parois du réservoir sont rigides.
- les pentes et déplacements du fluide sont petits.
- le fluide est incompressible et non visqueux.

Les méthodes développées dans ce chapitre considèrent des hypothèses différentes selon la dépendance fonctionnelle de la surpression dynamique par rapport au temps :

Si on suppose que le champ de vitesse dans les réservoirs est directement proportionnel à la vitesse du sol et en négligeant l'influence du temps sur la pression, on ne considère que la surpression d'impulsion, avant que ne commence les oscillations du liquide [3]. Ceci a pour première conséquence de pouvoir évaluer la surpression sans préjuger de la forme de l'accélération $f''(t)$.

En tenant compte à la fois des phénomènes d'impulsion et d'oscillation [10], l'étude conduit à une relation entre le champ de vitesse fonction du temps et de l'accélération du sol.

Ce calcul, a l'avantage d'être plus général mais, introduit néanmoins dans les résultats une inconnue supplémentaire: l'accélération du sol.

Ainsi, à des fins de comparaison, il a fallu affecter d'une forme particulière l'accélération du réservoir. Cette méthode fait apparaître bien entendu des pressions d'oscillations tenant compte de l'ensemble des modes de vibration du fluide.

Housner [4,5] évite les équations aux dérivées partielles, les séries infinies, et présente des solutions sous formes simplifiées en séparant les deux phénomènes : impulsion et oscillation. Il décompose l'action du liquide en deux types :

- Une action passive provoquant des efforts d'impulsion.
- Une action active provoquant des efforts d'oscillation.

Il présente un modèle mécanique simple utilisé souvent dans les différents règlements [6].

Epstein [8] introduit une correction permettant une évaluation plus précise des moments de flexion et de renversement.

Abramson [11] présente une étude exhaustive du comportement dynamique des fluides dans des réservoirs mobiles.

Dans ce qui suit , un exposé de chacune des méthodes mentionnées ci-dessus sera brièvement présenté. Les détails analytiques seront, pour des raisons évidentes de clarté, présentés en annexe.

VI-1 Théorie négligeant l'oscillation du liquide

VI-1-1 Introduction :

Dans cette méthode [3], les sollicitations dynamiques induites par les oscillations des vagues d'eau sont ignorées et seuls les efforts d'impulsion sont considérés.

La forme des réservoirs étudiés dans ce chapitre est celle de la figure VI-1 où $h, H,$ et R désignent respectivement la hauteur du fluide, la hauteur et le rayon du réservoir.

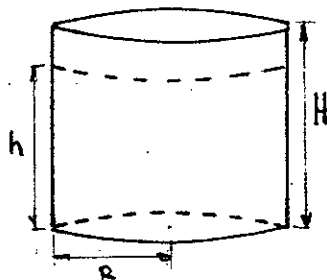


Figure (VI-1) Réservoir de forme cylindrique

VI-1-2 Champ de vitesse :

Le champ de vitesse régnant dans le réservoir permettra de déterminer la distribution des pressions.

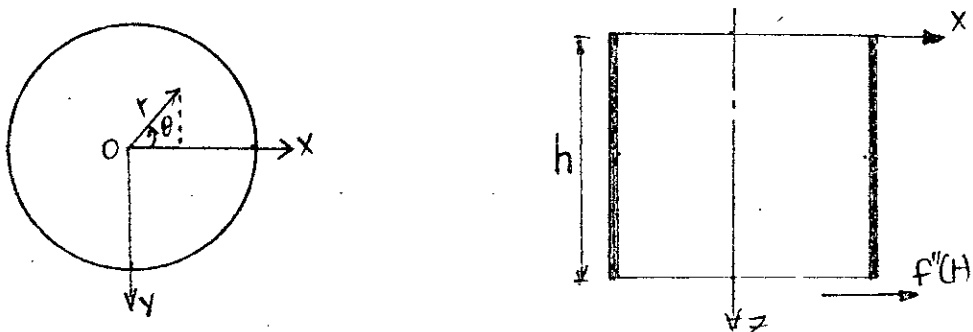


Figure (VI-2) Réservoir cylindrique soumis à une accélération horizontale $f''(t)$

Soit le réservoir de la figure (VI-2) ci-dessus soumis à une accélération $f''(t)$ le long de l'axe ox . Le champ de vitesse $\phi(r, \theta, z, t)$ dans le réservoir est donné par l'équation de Laplace:

$$\nabla^2 \phi(r, \theta, z, t) = 0 \quad (VI-1-1)$$

Les conditions aux limites peuvent être écrites comme suit :

- La composante verticale de la vitesse est nulle sur toute la base ($z = h$).
- La vitesse de translation suivant la direction X devant être égale à $f'(t)$.
- La pression est nulle sur la surface libre.

On peut alors montrer (Annexe C1) que l'expression du champ de vitesse est donnée par : (VI-1-2)

$$\phi = f'(t) \cdot \cos\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(nkz) \cdot I_1(nkr) \quad (VI-1-2)$$

avec A_n donnée par :

$$A_n = \frac{8h}{(\pi^2 n^2)} \cdot \frac{1}{I_0(nkr) - \frac{1}{nkr} \cdot I_1(nkr)} \quad (VI-1-3)$$

où n : nombre impair

$$k = \pi/2h$$

I_0 et I_1 : étant les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1

VI-1-3 Surpressions dynamiques :

On déduit du champ des vitesses la distribution de la surpression, due à la l'impulsion dynamique, par la formule :

$$p = -\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho \cdot f''(t) \cdot \cos\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(nkz) \cdot I_1(nkr) \quad (VI-1-4)$$

Les efforts résultants ainsi que le centre de pression peuvent maintenant être aisément déterminés conformément à la procédure décrite en annexe C.

VI-2 Théorie tenant compte de l'impulsion et de l'oscillation

VI-2-1 Introduction

Dans cette méthode [10], la formation des vagues et leurs actions sur les parois sont prises en compte.

D'autre part, toutes les expressions dans ce paragraphe sont d'abord données sous leurs formes adimensionnelles puis réécrites sous leurs formes physiques.

VI-2-2 Champ de vitesse:

Soit le réservoir de la figure VI-2 soumis à une accélération horizontale $a(t)$ dans la direction X et en conséquence à un champ de vitesses ϕ . Obtenu par résolution de l'équation de Laplace et les conditions aux limites modifiées suivantes:

- Condition initiale de repos du réservoir.
- Condition annulant les vitesses perpendiculaires aux parois rigides.
- Condition donnant l'équation de la surface à tout instant t.
- Condition initiale de repos de la surface libre.

On aboutit donc à une autre expression du champ de vitesse:

$$\phi(x, \theta, z, t) = \cos\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cdot \frac{(J_1(\lambda_n l) \cdot \text{ch}\lambda_n(h-z))}{(J_1(\lambda_n) \cdot \text{ch}\lambda_n h)} \quad (\text{VI-2-1})$$

expression dans laquelle les nombres λ_n représentent les racines de la première dérivée de la fonction de Bessel d'ordre 1 et de première espèce, soit:

$$J_1(\lambda_n) = 0 \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

La fonction $F_n(t)$ est donnée par l'équation :

$$F_n(t) = \frac{2}{\beta_n(1-\lambda_n^2)} \cdot \int_0^t a'(\tau) \cdot \sin \beta_n(t-\tau) d\tau \quad (\text{VI-2-2})$$

où

$$\beta_n = \sqrt{(\lambda_n \cdot t h \lambda_n h)} \quad (\text{VI-2-3})$$

VI-2-3 Suppressions dynamiques:

A partir du champ de vitesse Φ , les pressions en tout point sont données par:

$$p = z - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - x \cdot a(t) \quad (\text{VI-2-4})$$

soit:

$$p = z - [x \cdot a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cdot \frac{(J_1(\lambda_n) \cdot ch \lambda_n (h-z))}{(J_1(\lambda_n) \cdot ch \lambda_n h)} \cdot \cos \theta] \quad (\text{VI-2-6})$$

Remarque:

Le centre de pressions et les efforts résultants peuvent être déterminés conformément à la procédure décrite en annexe C. Pour obtenir les expressions physiques(*) à partir des expressions adimensionnelles de ce chapitre, il suffit de considérer les relations suivantes :

$$a(t) = a^*(t) / g$$

$$\Phi = \Phi^* / \sqrt{(gR^3)}$$

$$p = p^* / \rho g R$$

$$r = r^* / R$$

$$h = h^* / R$$

VI-3 Modèle de Housner

3-1 Introduction:

Comme on vient de le voir dans les deux méthodes précédentes, les expressions exactes des pressions hydrodynamiques sont relativement complexes, à moins de se limiter aux premiers termes des séries.

Le modèle bien connu de Housner [4,5] permet d'aboutir à des expressions des efforts résultants relativement plus simples.

L'action du liquide est décomposée en deux types :

_ Une action passive provoquant des efforts d'impulsion.

_ Une action active provoquant des efforts d'oscillation.

Les efforts d'impulsion proviennent de ce qu'une partie de la masse du fluide, dite masse passive, réagit par inertie, à la translation des parois du réservoir. Le système mécanique équivalent est obtenu en considérant une masse m_i , liée rigidement au réservoir à une hauteur h_i telle qu'elle exerce sur les parois les mêmes efforts horizontaux que la masse de liquide équivalente. La figure (VI-6-.a) définit le système équivalent des efforts d'impulsion quand on néglige les oscillations de l'eau.

Quant aux efforts d'oscillations, ils proviennent de ce qu'une partie de la masse du fluide, dite masse active, se met en mouvement d'oscillation sous l'action du séisme. Son équivalent mécanique s'obtient en considérant n masses m_{on} retenues par des ressorts de raideurs k_n à des niveaux h_{on} ou h_{on}^* , dont les oscillations horizontales exercent les mêmes efforts vibratoires que la masse active du fluide. Les raideurs mécanique k_n sont déterminées sur la base des pulsations $W_n = \sqrt{k_n/m_{on}}$ associées aux n modes d'oscillations du fluide.

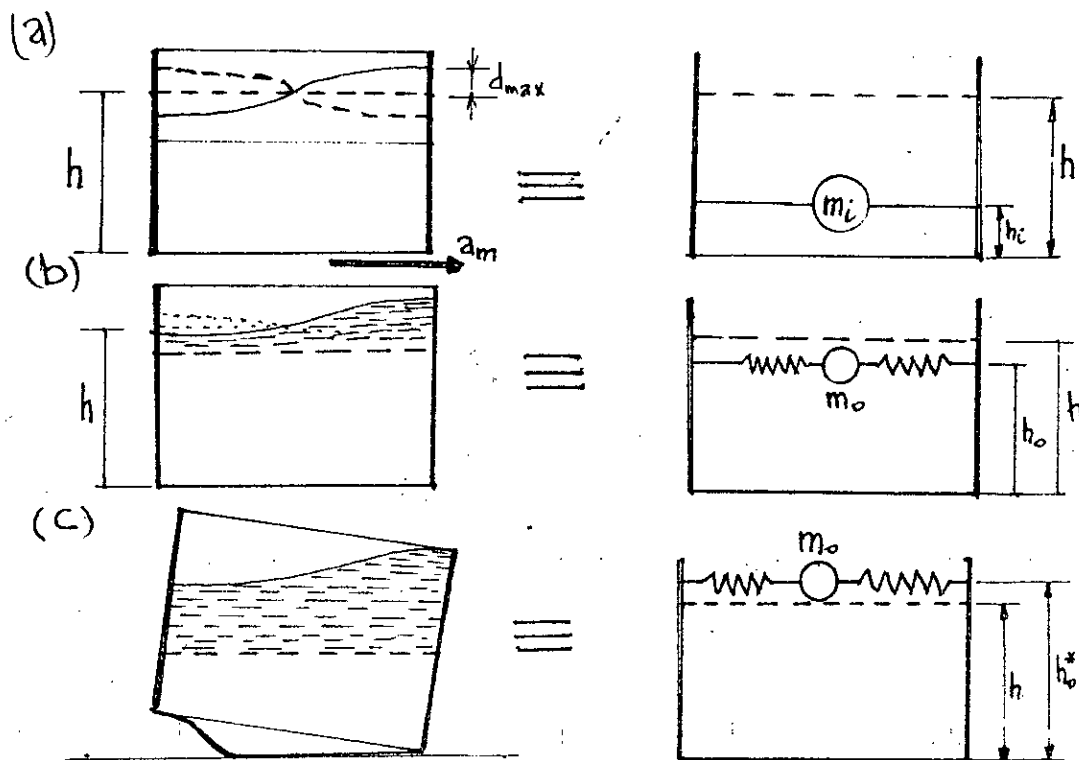


Figure VI-6: Réservoirs cylindriques. Systèmes physiques et systèmes mécaniques équivalents:

- a) Équivalent mécanique des pressions d'impulsion.
- b) Équivalent mécanique des pressions d'oscillation: actions sur les parois.
- c) Équivalent mécanique des pressions d'oscillation: actions sur les parois et sur la base.

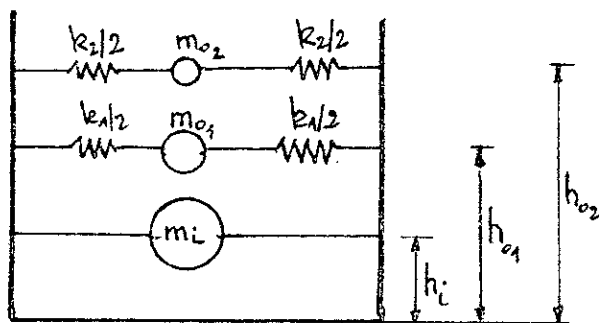


Figure VI-7: Modèle à une masse passive M_i (impulsion) et deux masses actives M_{o1} , M_{o2} (oscillation).

Pour le calcul du moment de flexion, les seules actions prises en compte sont celles exercées sur les parois, auquel cas, les masses m_{on} sont appliquées à un niveau h_{on} (figure VI-6- b).

Pour le calcul du moment de renversement l'action des surpressions sur le fond du réservoir est également prise en compte, auquel cas les masses m_{on} sont appliquées à un niveau h_{on}^* (figure VI-6- c); De sorte que le modèle simplifié retenu pour l'ensemble des deux types d'actions sera celui de la figure (VI-7)

VI-3-2 Résumé synoptique de la méthode de Housner

Un résumé synoptique de la méthode de calcul de Housner est présenté sous la forme du tableau récapitulatif suivant :

où $a = h/R$ représente le taux de remplissage du réservoir.

On voit que les calculs doivent être conduits de manière différente selon que $a < 1,5$ réservoir peu profond ou $a > 1,5$ cas de réservoir profond.

Réservoir peu profond ($a < 1,5$)	Réservoir profond ($a > 1,5$)
$T = 2 \pi \sqrt{(R/g C_1)}$ $d_{\max} = (C_2 C_3 S_{a_0} R) / (1 - C_2 S_2)$	$T = 2 \pi \sqrt{(R/g C_1)}$ $d_{\max} = (C_2 C_3 S_{a_0} R) / (1 - C_2 S_3)$
<p>Masses :</p> $m_i = C_4 m$ $m_0 = C_6 m$ $m_e = m_i + m_s$ <p>Forces :</p> $Q_i = a_n m_e$ $Q_0 = S_{a_0} m_0$ <p>Hauteurs:</p> $h_i^* = 10 C_5$ $h_i = 0,375 h$ $h_0^* = 10 C_7 h$ $h_0 = C_8 h$ <p>où</p> <p>m = masse du fluide</p> <p>m_s = masse de la coque</p>	<p>Masses :</p> $m_i = C_4 m$ $m_0 = C_6 m$ $m'_i = m/h (h - 1,5 R)$ $m_e = m_i + m_s + m'_i$ <p>Forces :</p> $Q_i = a_n m_e$ $Q_0 = S_{a_0} m_0$ <p>Hauteurs:</p> $m h_i^* = (m_i (15 C_5 R + h - 1,5 R) + m'_i (0,5 h - 0,75 R) + m_s (0,5 h))$ $m_e h_i = (m_i (0,5625 R + h - 1,5 R) + m'_i (0,5 h - 0,75 R) + m_s (0,5 h))$ $h_0^* = 10 C_7 h$ $h_i = C_8 h$

Les coefficients C_i et la signification des paramètres physiques de calcul sont illustrés ci-après, selon que le réservoir soit peu profond ou profond.

Tableau VI-1-: Tableau des coefficients C_i

Coéfficients	Expression de C_i
C_1	$1,840 \operatorname{th} \beta$
C_2	$(1,58 \operatorname{th} \beta)/g$
C_3	$0,626/ C_2 /g$
C_4	$(\operatorname{th} \beta)/\delta$
C_5	$1/2/C_4 - 1/8$
C_6	$0,318/\alpha * \operatorname{th} \beta$
C_7	$(1 - (\operatorname{ch}\beta - 2,01)/(\beta \sin\beta))$
C_8	$(1 - (\operatorname{ch}\beta - 1)/(\beta \sin\beta))$

avec:

$$\alpha = h/R$$

$$\beta = 1,48 \alpha$$

$$\delta = \sqrt{3}/\alpha$$

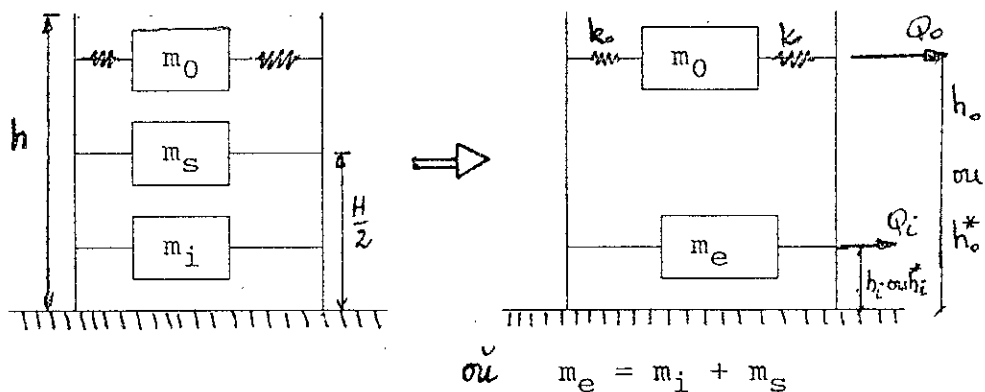
-Efforts résultants :

Effort tranchant maximal $T_{\max} = Q_i + Q_0$

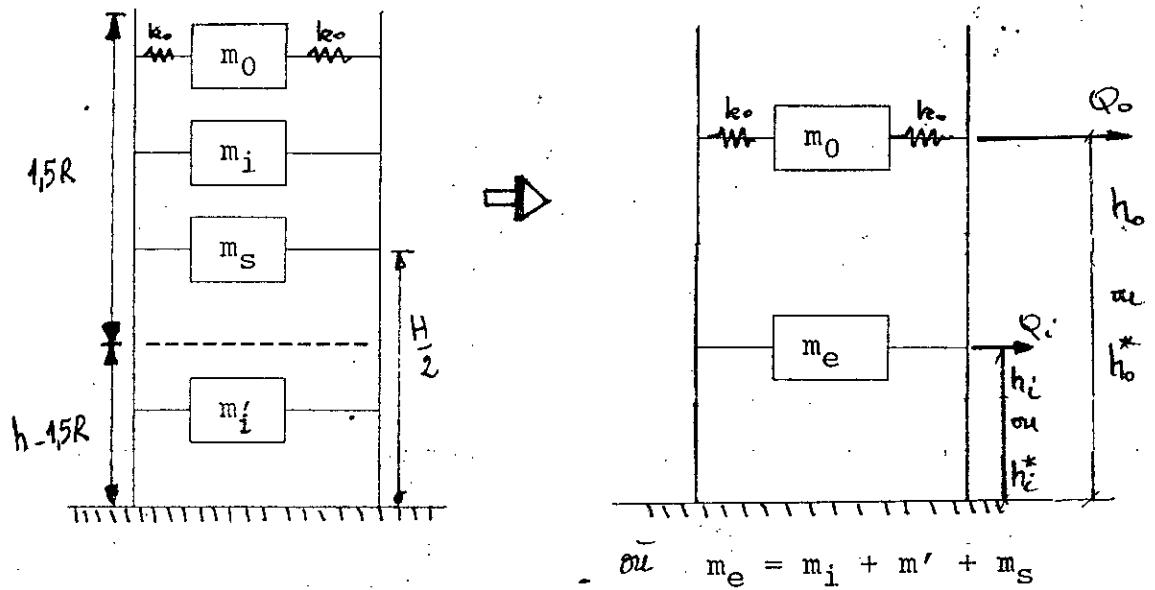
Moment maximal de renversement $M_{\max}^* = Q_i \cdot h_i^* + Q_0 \cdot h_0^*$

Moment maximal de flexion $M_{f \max} = Q_i \cdot h_i + Q_0 \cdot h_0$

-Points d'application des efforts d'impulsion et d'oscillation :



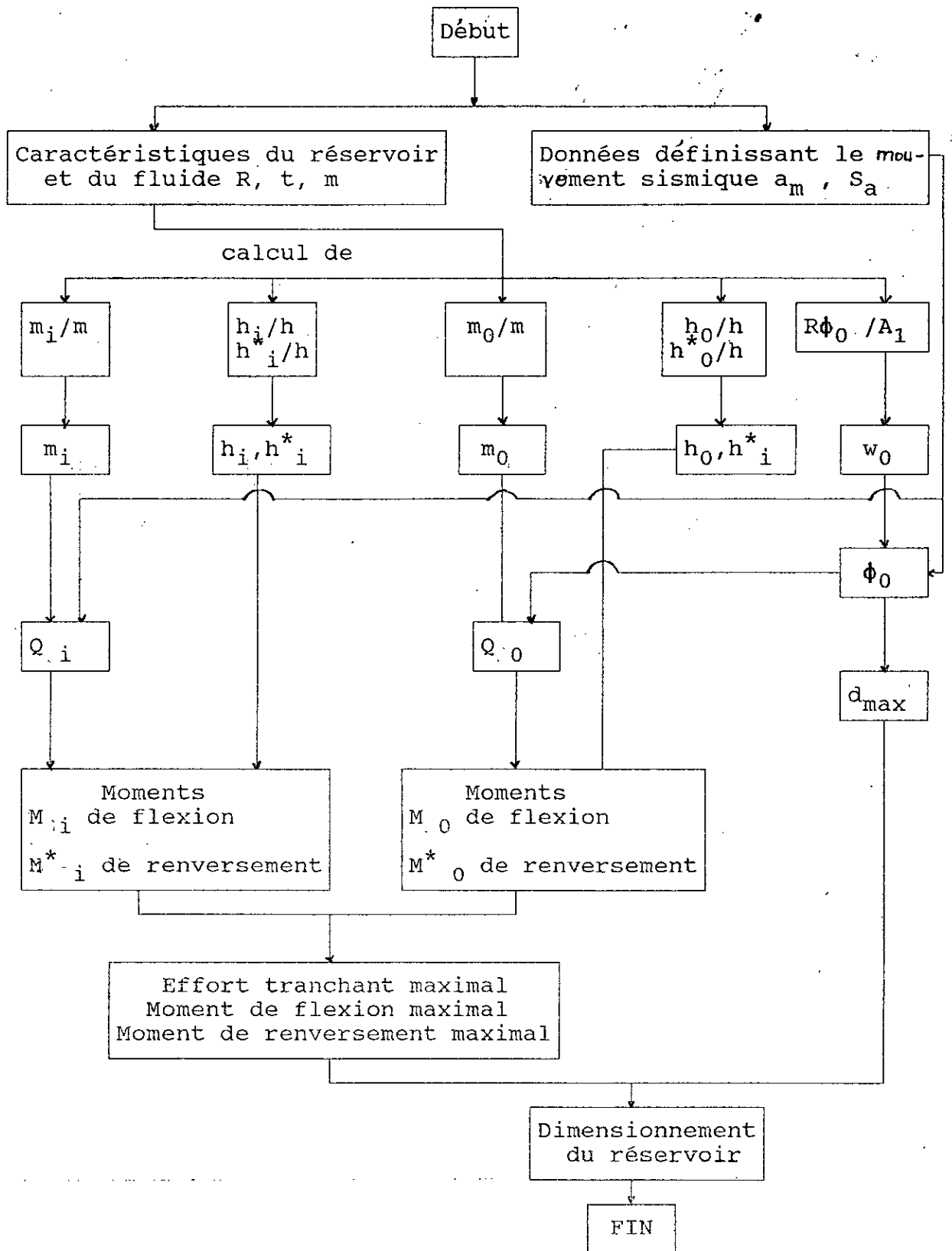
a/ Réservoir peu profond $h \leq 1,5 R$



b/Réservoir profond: $h \geq 1,5R$.

VI-3-3 Organigramme

Un programme de calcul pour la détermination des efforts résultants et de la hauteur maximale des vagues dans les réservoirs sous actions sismiques horizontales a été élaboré. Ce programme est basé sur l'organigramme de calcul présenté ci-après, pour toutes fins jugées utiles.



VI.3.4- Abaques de calcul des efforts pour le modèle de Housner.

Aux fins de faciliter le calcul des efforts résultants, les abaques suivants sont proposés pour le modèle de Housner. Ces abaques ont été développés à l'aide du programme de calcul dont les étapes principales ont été décrites dans le paragraphe précédent.

La figure 10, présente l'abaque de calcul de l'effort tranchant sans dimension (\bar{Q}) :

$$(\bar{Q}) = \frac{Q}{Q_o}$$

$$\text{où } Q_o = \rho \cdot R^3 \cdot a_m$$

et : ρ : la masse volumique du liquide
 a_m : l'accélération maximale du sol
 R : le rayon du réservoir.

La figure 11, présente l'abaque de calcul du moment de flexion sans dimension (\bar{M}_f) :

$$(\bar{M}_f) = \frac{M}{M_o}$$

$$\text{où } M_o = \rho \cdot R^4 \cdot a_m$$

Enfin la figure 12, présente l'abaque du moment de renversement sans dimension (\bar{M}_r) :

$$(\bar{M}_r) = \frac{M^*}{M_o}$$

$Q_0 = \rho \cdot R^3 \cdot a_m$
 où ρ = la masse volumique du liquide
 a_m = l'accélération maximale
 R = le rayon du réservoir

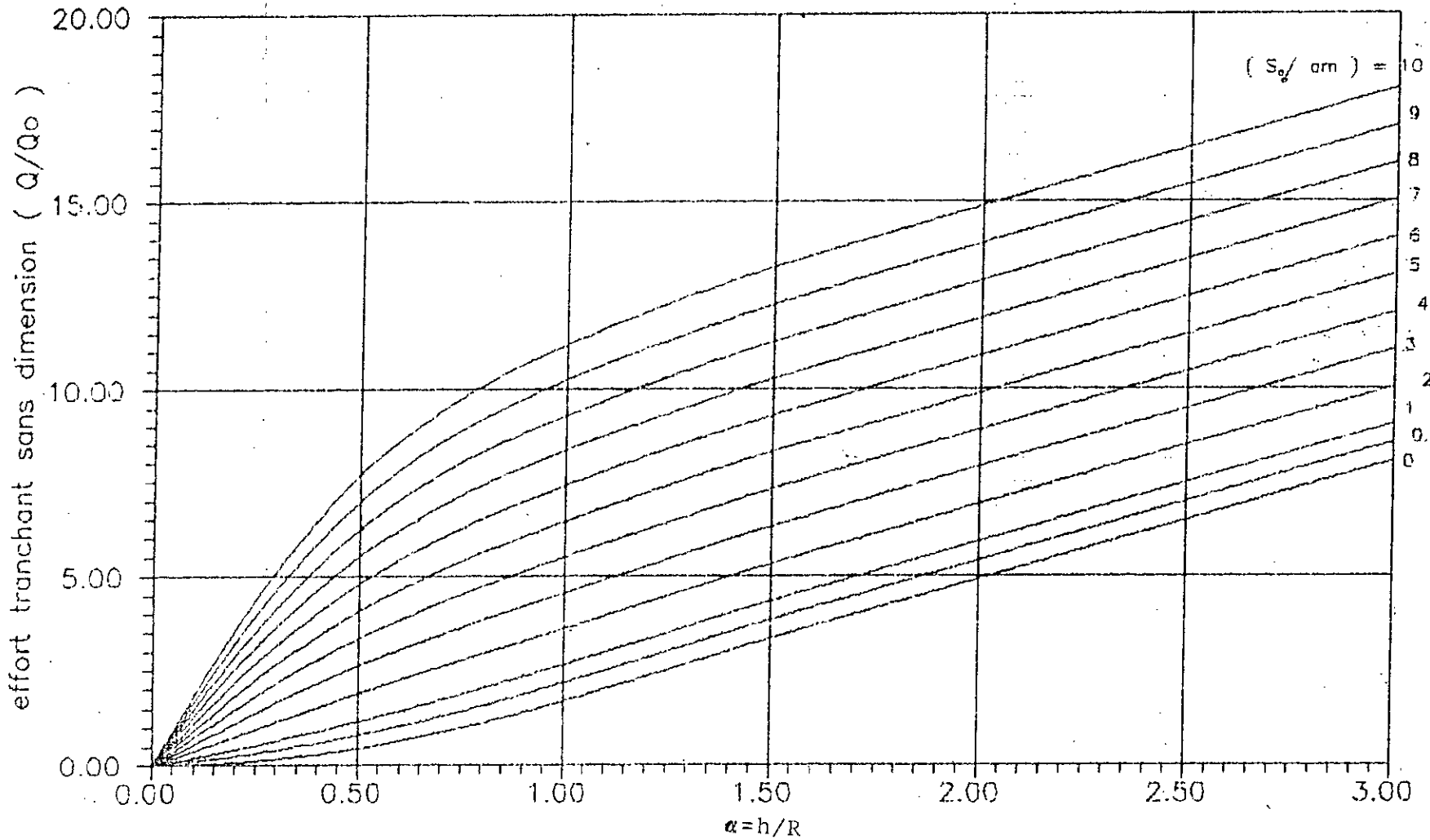
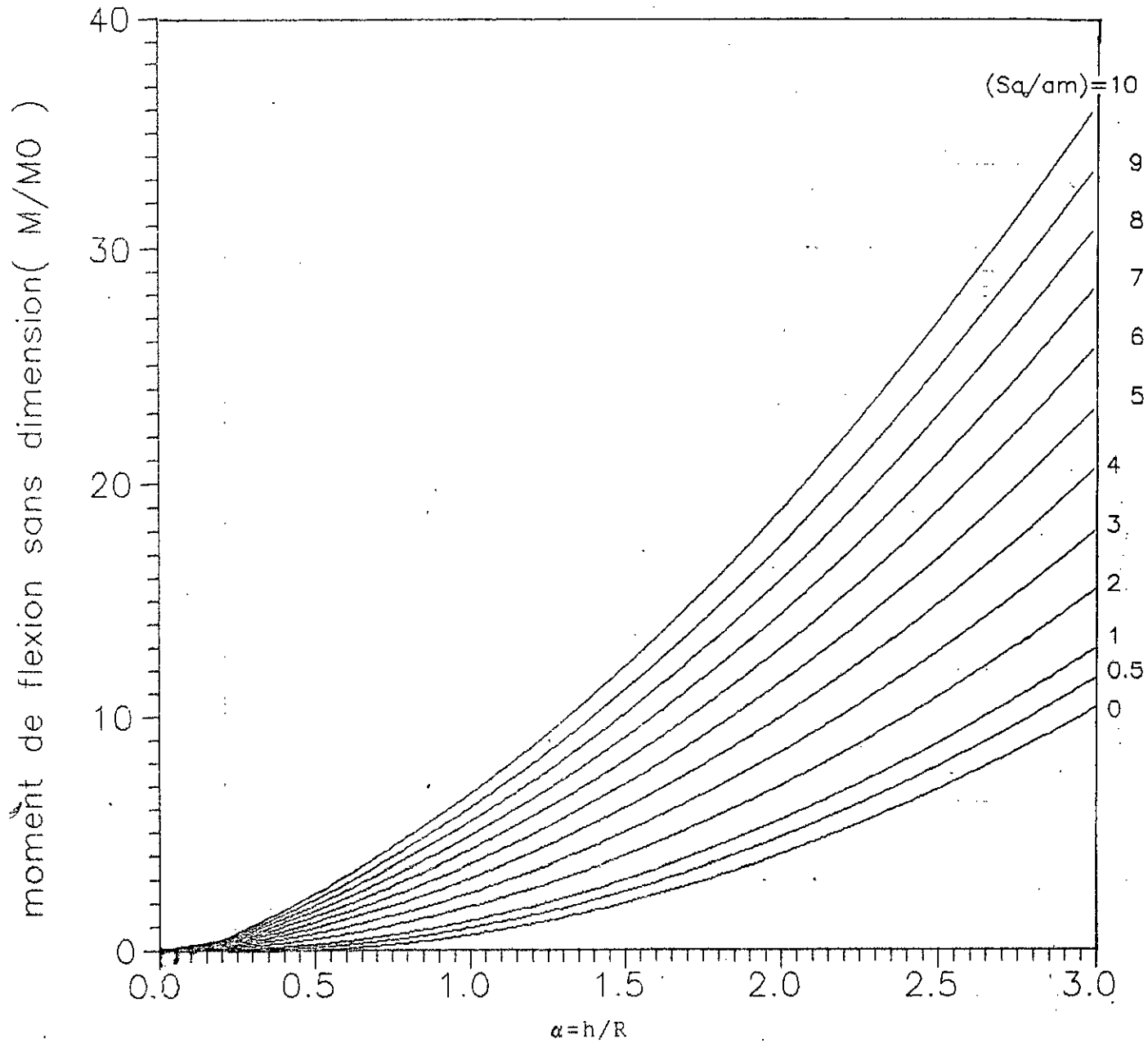
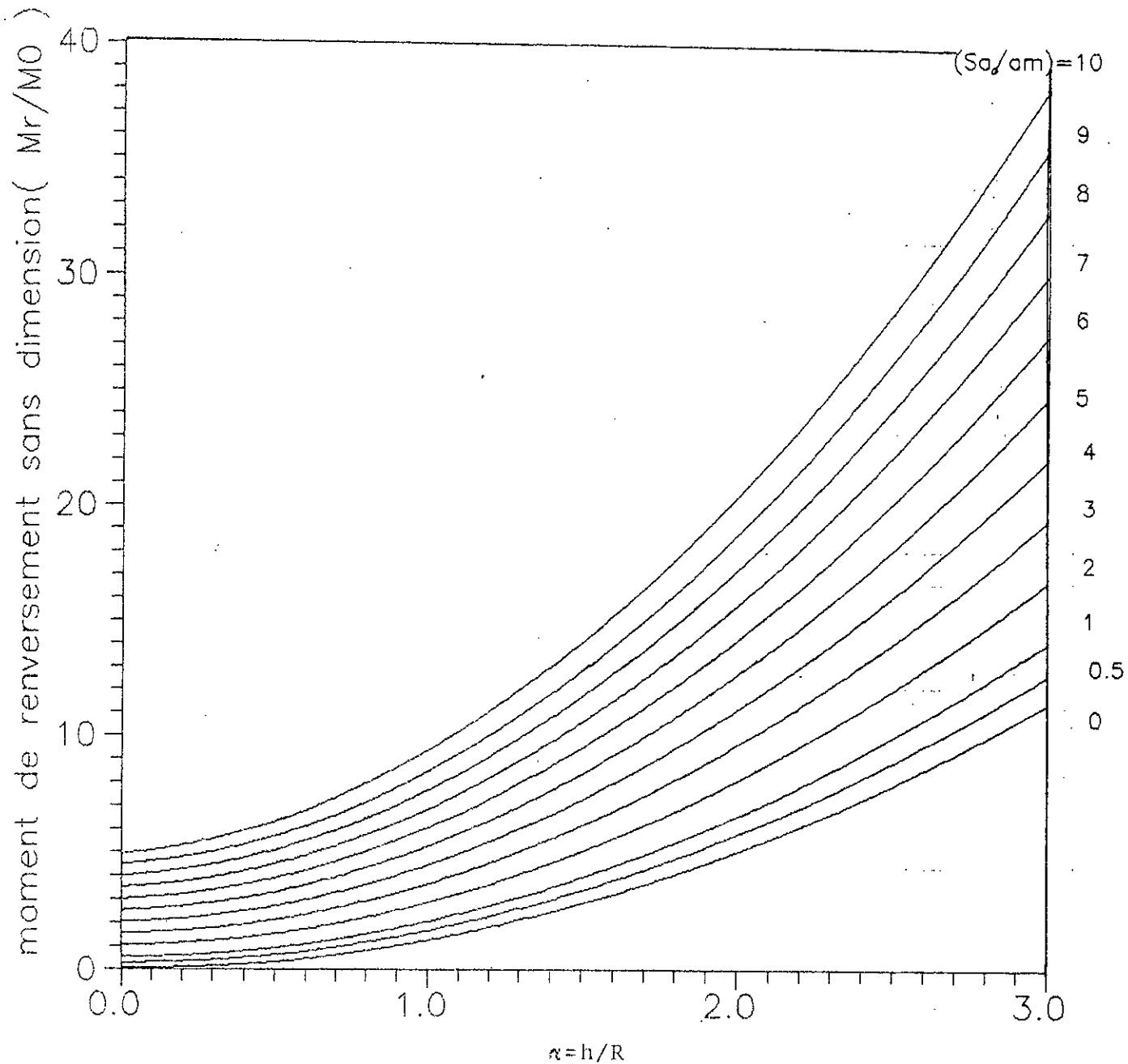


FIG 10: Abaque de l'effort tranchant (Modèle de Housner).



avec
 $M_0 = \rho \cdot R^4 \cdot a_m$
ou
 ρ : masse volumique du liquide
 R : rayon du reservoir
 S_a : spectre de l'acceleration
 a_m : acceleration maximale



avec
ou $M_0 = \rho \cdot R^4 \cdot a_m$
 ρ : masse volumique du liquide
 R : rayon du réservoir
 S_a : spectre de l'accélération
 a_m : accélération maximale

Fig 12 :Abaque du moment de renversement (Modèle de Housner)

VI-4 Modèle de Housner-Epstein

4-1 Introduction

La modèle de Housner-Epstein constitue une version corrigée du modèle mécanique original de Housner.

Dans le cas des réservoirs profonds ($\alpha \geq 1.5$) Housner considère pour l'évaluation des efforts d'oscillation la hauteur totale du liquide afin de garder les mêmes coefficients C_6 , C_7 et C_8 quelque soit la valeur du taux de remplissage α .

Epstein montre que le fait de prendre la hauteur totale du liquide revient à sous-estimer les moments de flexion (de 2%) et de renversement (de 5%), conduit à des expressions plus complexes que celles obtenues dans l'hypothèse d'une hauteur de calcul prise égale à la hauteur du liquide en mouvement ($h = 1.5 R$).

Par ailleurs, Housner donne une expression pour le calcul du déplacement vertical maximal valable seulement si celui-ci demeure inférieur à $0.2R$ (effet de non linéarité négligé).

Epstein propose une autre formule, valide pour de larges valeurs du spectre d'accélération, et conseille de prendre la valeur minimale des déplacements obtenus en utilisant les deux expressions.

Il fournit des abaques de calcul des moments de flexion et de renversement (sans dimension) pour différents valeurs de α .

4-2 Réservoirs peu profonds: $\alpha \leq 1.5$

Aucun changement n'est introduit dans la procédure de calcul des réservoirs peu profonds.

Les formules données dans le tableau VI-2 (modèle de Housner) demeurent donc valables.

4-3 Réservoirs profonds: $\alpha > 1.5$

On considère un réservoir avec un fond fictive à $1.5R$.

Soit m'' la masse du fluide contenu dans le réservoir fictive de hauteur $1.5R$ et soit m' la masse restante du fluide.

Dans ce qui suit le signe ["] désigne la valeur à $\alpha=1,5$ et le signe ['] est associé à la région où $\alpha > 1,5$.

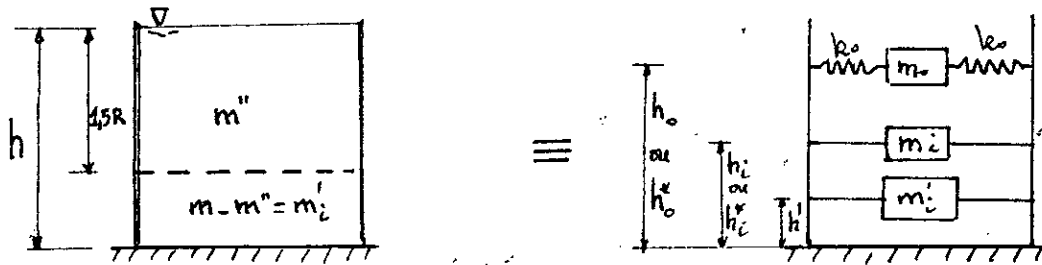


Figure VI-16

Les formules à considérer dans ce cas pour l'évaluation des actions d'oscillation sont :

-Hauteurs :

$$h_1 = (h - 1,5R) + 3/8.(1,5R) = (1 - 15/16\alpha) h$$

$$h_1^* = (h - 1,5R) + C''_5(1,5R) = (1 - 0,630/\alpha) h = C'_5 h$$

$$h_2 = (h - 1,5R) + C''_6(1,5R) = (1 - 0,479/\alpha) h = C'_6 h$$

$$h_3 = (h - 1,5R) + C''_7(1,5R) = (1 - 0,409/\alpha) h = C'_7 h$$

$$h' = 1/2 (h - 1,5R) = (1/2 - 3/4\alpha) h$$

-Masses et période fondamentale d'oscillation:

$$m_1 = C''_4.m'' = 3,34 \rho.R^3 = C'_4 m$$

$$m_2 = C''_6.m'' = 0,991.\rho.R^3 = C'_6 m$$

$$m_3 = \pi.R^2.\rho(h - 1,5R) = (1 - 3/2\alpha) m$$

$$T = T' = 2\pi(R/gC''_i)^{1/2} = 4,65.(R/g)^{1/2}$$

Les constantes C_i , C''_i et C'_i sont données par le tableau VI-3

Tableau VI-3 Coefficients C_i , C'_i et C''_i

i	C_i	C''_i	C'_i
1	1,84 th β	1,825	-----
4	(th β)/ δ	0,709	1.064 / α
5	1/(2.C ₄ -1/8)	0,589	1- 0,630/ α
6	0,318/ α th β	0,210	0,315/ α
7	$1 - \frac{ch\beta - 2,01}{\beta sh\beta}$	0,727	1- 0,409/ α
8	$1 - \frac{ch\beta - 1}{\beta sh\beta}$	0,681	1- 0,479 / α

avec $\beta = 1,84.\alpha$

$\delta = \sqrt{3/\alpha}$ et $\alpha = h/R$

-Forces:

$$Q_1 = m_1 \cdot a_m$$

$$Q_0 = m_0 \cdot S''_{a_0}$$

$$Q' = m'_0 \cdot a_m$$

-Efforts résultants :

$$T = Q_1 + Q_0 + Q'$$

$$M = Q_1 \cdot h_1 + Q_0 \cdot h_0 + Q' \cdot h'$$

$$M^* = Q_1 \cdot h_1^* + Q_0 \cdot h_0^* + Q' \cdot h'^*$$

L'erreur ainsi induite par l'utilisation de la hauteur totale dans la calcul des actions d'oscillation est illustrée par la figure VI-17

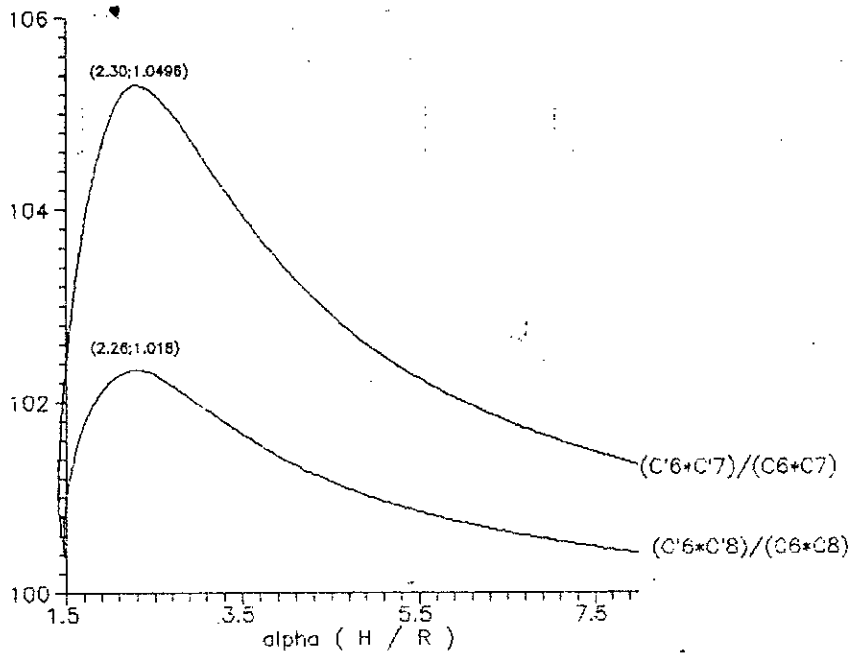


Figure -17- Erreur induite par l'utilisation de la hauteur totale du fluide. (cas où $\alpha > 1.5$)

Cette figure, montre une sous-estimation maximale de 2% pour les moments de flexion (pour $\alpha=2.30$) et de 5% pour les moments de renversement (pour $\alpha=2.26$). Les produits $C_6 C_7$ et $C_6 C_8$ sont associés aux expressions des moments d'oscillation de renversement et de flexion respectivement.

En divisant par $M_0 = \rho \cdot R^4 \cdot a_m$, on obtient aisément les expressions adimensionnelles des moments de flexion et de renversement :

- Pour $\alpha \leq 1.5$

$$(\bar{M}_f) = \frac{M \cdot g}{(\rho R^4 a_m)} = \left(3 \frac{C_4}{8} + C_6 \cdot C_8 \left(\frac{S_{a_0}}{a_m} \right) \right) \pi \alpha^2$$

$$(\bar{M}_r) = \frac{M^* \cdot g}{(\rho R^4 a_m)} = \left(C_4 \cdot C_5 + C_6 C_7 \frac{S_{a_0}}{a_m} \right) \pi \alpha^2$$

- Pour $\alpha > 1.5$

$$(\bar{M}_f) = \left(\left(1 - \frac{15}{(16\alpha)} \right) C'_4 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{(2\alpha)} \right)^2 + C'_6 \cdot C'_8 \left(\frac{S''_{a_0}}{a_m} \right) \right) \pi \alpha^2$$

$$(\bar{M}_r) = \left(C'_4 \cdot C'_5 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{(2\alpha)} \right)^2 + C'_6 \cdot C'_7 \cdot \left(\frac{S''_{a_0}}{a_m} \right) \right) \pi \alpha^2$$

Il en découle immédiatement les abaques des moments sans dimensions représentés ci-après par les figures VI-18 et VI-19.

Par un raisonnement analogue, on peut obtenir l'abaque de l'effort tranchant (\bar{Q}) adimensionnel (fig. VI-20), en divisant l'effort tranchant Q par $Q_0 = \rho \cdot R^3 \cdot a_m$. Nous obtenons tous calculs faits les expressions suivantes pour différentes valeurs du taux de remplissages :

- Pour $\alpha \leq 1.5$

$$(\bar{Q}) = \frac{T}{Q_0} = \left(C_4 + C_6 \left(\frac{S_{a_0}}{a_m} \right) \right) \pi \alpha$$

- Pour $\alpha > 1.5$

$$(\bar{Q}) = \frac{T}{Q_0} = \left(C'_4 + \left(1 - \frac{3}{(2\alpha)} \right) + C'_6 \frac{S''_{a_0}}{a_m} \right) \pi \alpha^2$$

4-5 hauteur libre

La hauteur libre correspondant au déplacement maximal de la surface libre du liquide nécessaire pour éviter l'endommagement du toit du réservoir peut être calculée par la formule d'Edwards :

$$\text{où: } S_{a_0} = S''_{a_0} \quad \text{si } \alpha > 1,5$$

$$d_{1\max} = \frac{\left(0,0626 \frac{S_a}{g} \cdot R\right)}{\left(1 - 1,58 \frac{S_a}{g} \operatorname{erf}(1,84\alpha)\right)}$$

Soit sous forme plus généralisé

$$d_{1\max} = C_2 C_3 \cdot S_a \frac{R}{(1 - C_2 \cdot S_a)}$$

Où les coefficients C_2, C_3 peuvent être obtenus à partir du tableau VI-3

Il convient de noter que cette formule (d_{\max}) n'est plus valable si d'une part la non linéarité entre en jeu (c.à.d pour $d_{\max} > 0.2 R$) et d'autre part si l'accélération verticale est importante.

Ces restrictions peuvent être évitées par l'approche suivante basée sur l'énergie du système.

Le déplacement maximum peut être trouvé en égalisant l'énergie de la réponse maximale à l'énergie du système masse-ressort.

L'énergie potentielle maximale du liquide est donnée par:

$$V_L = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^R \frac{\rho}{2} \left(d_{\max} \frac{r}{R} \cos\theta \right)^2 r \cdot dr \cdot d\theta = \frac{\pi}{8} d_{\max}^2 R^2 \rho$$

L'énergie potentielle maximale emmagasinée dans le ressort est:

$$V_s = 1/2 \cdot k \cdot (S_i)^2 \quad \text{où} \quad S_i = S_a / w^2 \quad \text{et} \quad k = w^2 \cdot m_0$$

où encore:

$$V_s = 0,0864 \pi R^4 \rho (S_a/g) \quad \text{quelque soit } a$$

En égalisant V_s et V_L on aura l'expression suivante de d_{\max} :

$$d_{2\max} = 0,831 \cdot (S_a/g) R$$

valable pour de larges valeurs du spectre d'accélération.

Epstein suggère alors de considérer le minimum des deux valeurs:

$$d_{\max} = \min (d_{1\max}, d_{2\max})$$

VI.4.6- Abaques des efforts pour le modèle de Housner - Epstein.

Dans ce qui suit, nous développons des abaques de calcul des efforts tranchants, des moments de flexion et des moments de renversement.

La figure 18, montre l'abaque du moment de flexion sans dimension.

$$(\bar{M}_f) = \frac{M}{M_o}$$

$$\text{où } M_o = \rho \cdot R \cdot a_m$$

Où ρ : la masse volumique du liquide
 S_{a0} : Réponse en accélération de l'oscillation du fluide
 a_m : l'accélération maximale du sol
 R : le rayon du réservoir.

La figure 19, présente l'abaque du moment de renversement sans dimension.

$$(\bar{M}_r) = \frac{M^*}{M_o}$$

Enfin la figure 20, fournit l'abaque de l'effort tranchant sans dimensions.

$$(\bar{Q}) = \frac{Q}{Q_o}$$

$$\text{où } Q_o = \rho \cdot R^3 \cdot a_m$$

Où ρ : la masse volumique du liquide
 a_m : l'accélération maximale du sol
 R : le rayon du réservoir.

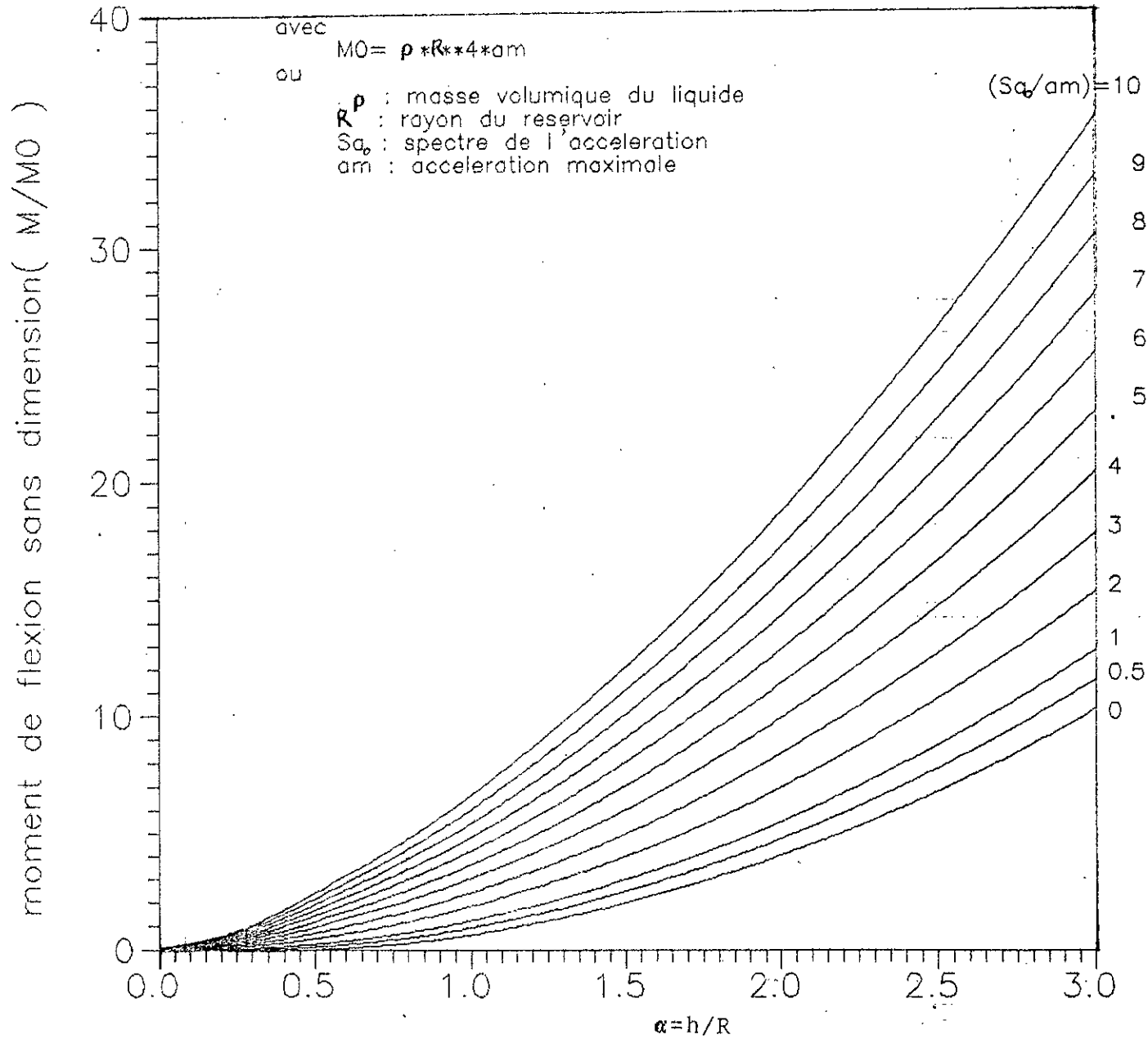
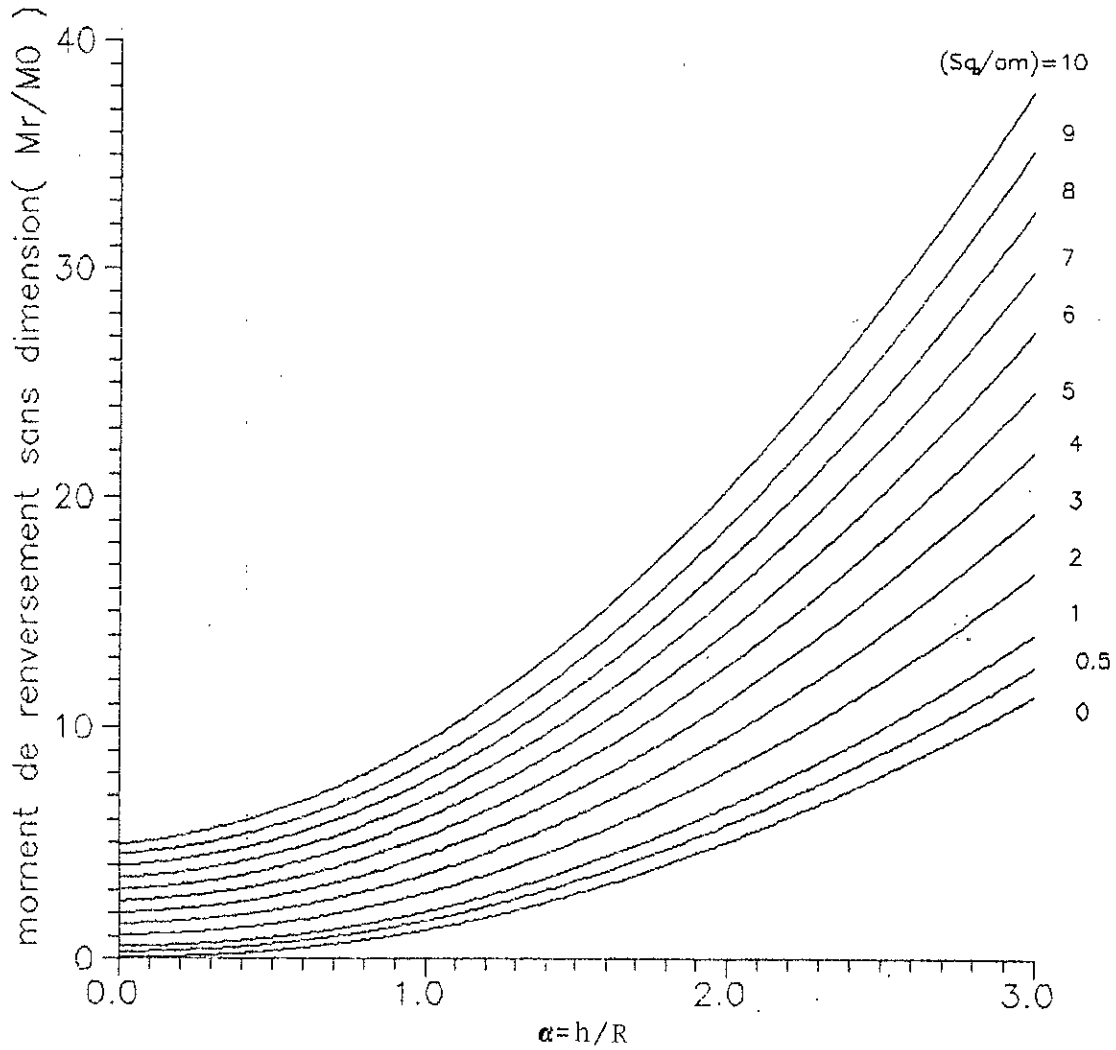


Fig 18 : Abaque de moment de flexion (Modèle de Housner-Epstein)



avec
ou $M_0 = \rho \cdot R^4 \cdot a_m$
 ρ : masse volumique du liquide
 R : rayon du reservoir
 S_q : spectre de l'acceleration
 a_m : acceleration maximale

Fig 19 :Abaque du moment de renversement (Modèle de Housner-Epstein)

$Q_0 = \rho \cdot R^3 \cdot a_m$
 Q = effort tranchant sans dimension (Q/Q_0)
 ρ = la masse volumique du liquide
 a_m = l'acceleration maximale
 R = le rayon du reservoir

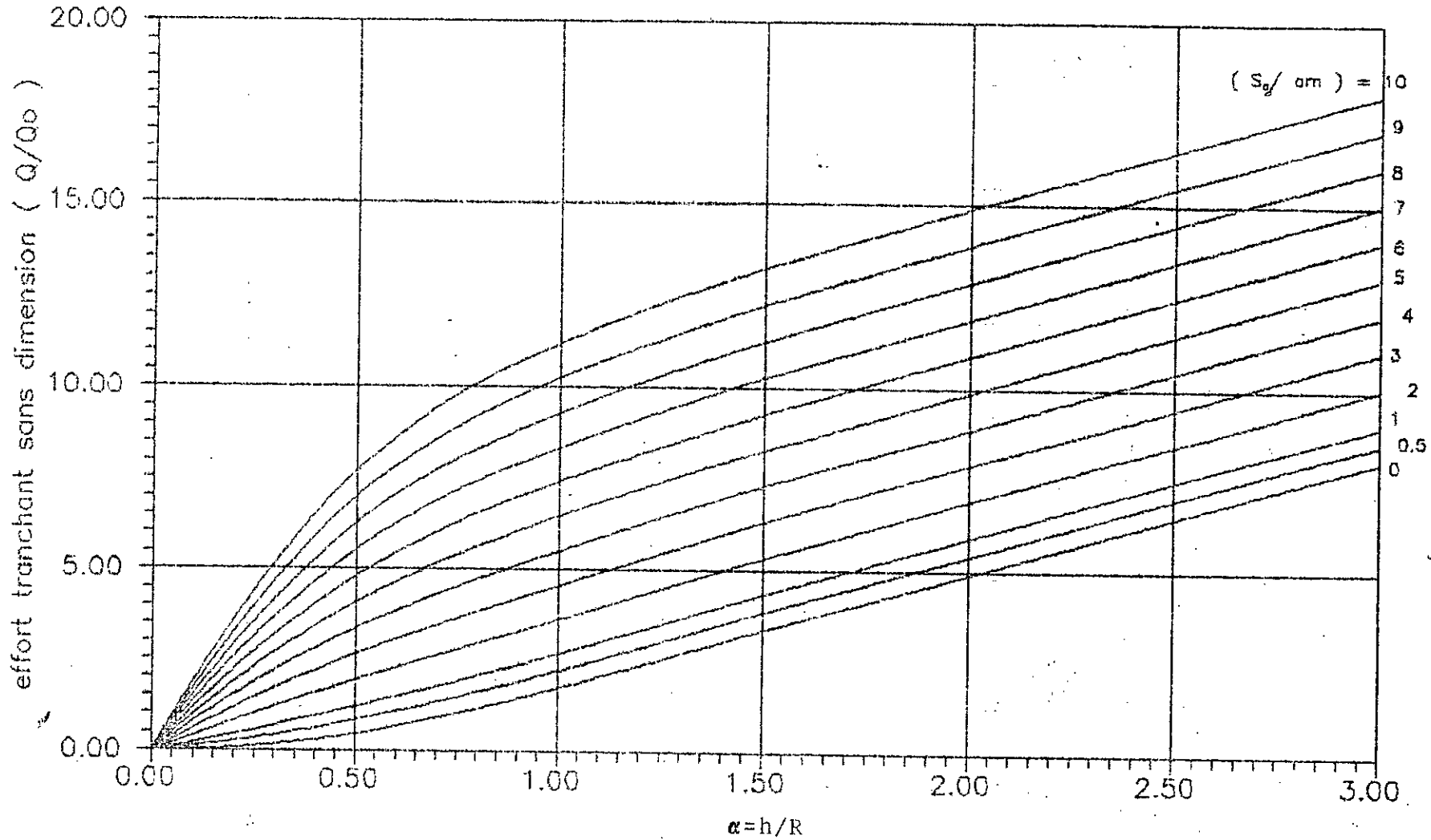


FIG 20 : Abaque de l'effort tranchant (Modèle de Housner-Epstein)

VI.4.7- Erreurs induites par l'utilisateur de la hauteur totale du liquide pour le calcul des moments totaux:

Epstein compare les valeurs des moments corrigés avec celles des moments d'oscillation résultants obtenus en utilisant la hauteur totale du liquide pour les réservoirs profonds (approximation de Housner). L'erreur maximale ainsi obtenu est de l'ordre de 2% pour le moment de flexion et de 5% pour le moment de renversement (fig VI.17).

Toutefois, la conclusion finale aurait due être basée sur des considérations liées aux efforts résultants. Nos résultats, figures a, b, et c, ont montrés que les erreurs dans ce cas ne sont que de l'ordre de 0.2% (deux pour mille) pour un rapport du spectre d'accélération de l'oscillation du liquide sur l'accélération maximale du sol (S_{a_0}/a_m) raisonnable, à l'exception des cas extrême ($S_{a_0}/a_m = 5 = 10$) où nous observons que l'erreur peut atteindre 2% pour le moment de flexion et de 4% pour le moment de renversement.

On peut conclure que l'approximation de Housner est bonne et que la méthode de Epstein n'apporte en fait pas d'amélioration significative dans l'évaluation des efforts résultants.

Dans la comparaison des méthodes ces deux méthodes seront appelées modèle de Housner (M3).

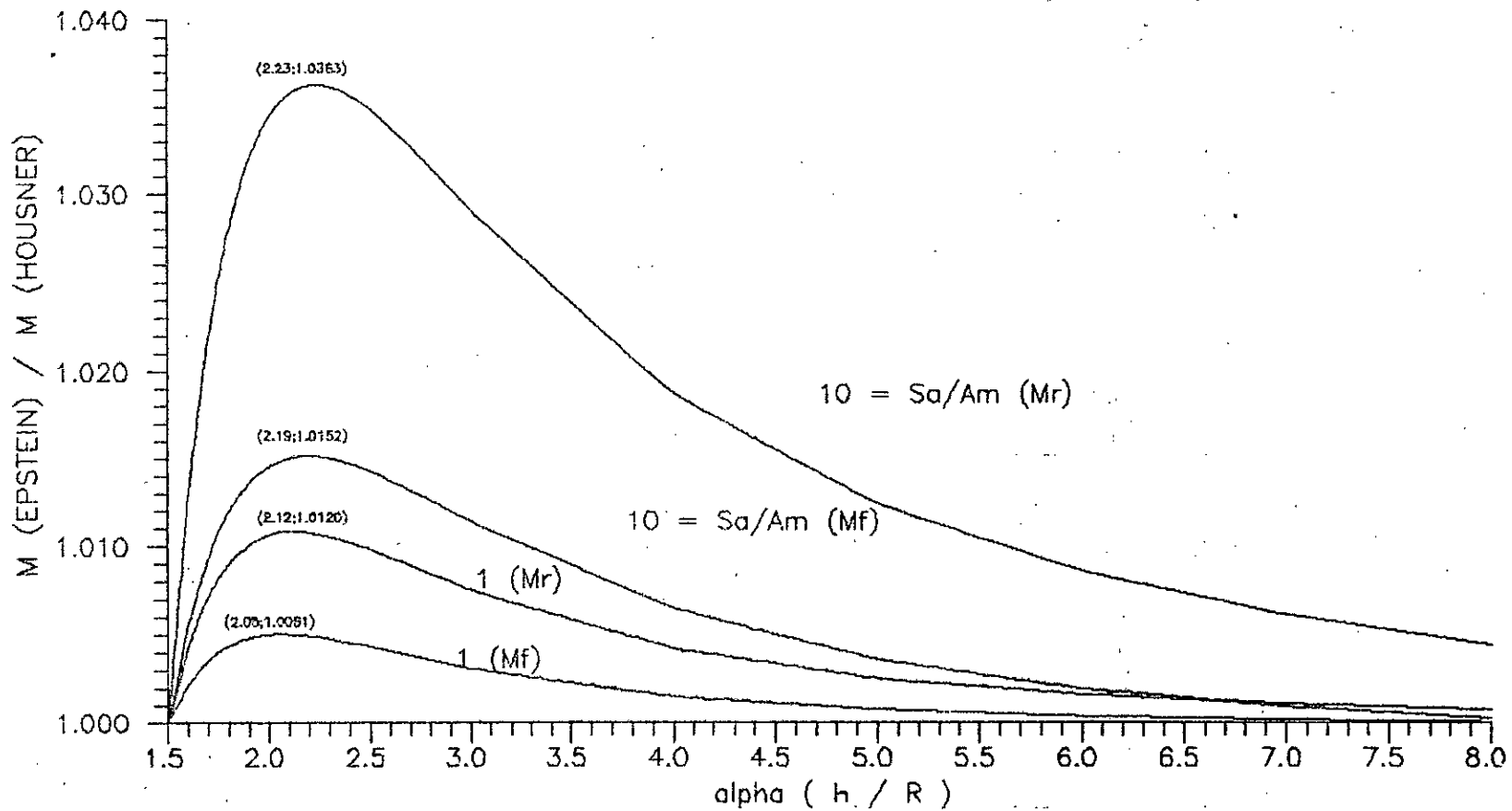


FIG 8 : Erreurs induites par l'utilisation de la hauteur totale du liquide pour le calcul des moments totaux

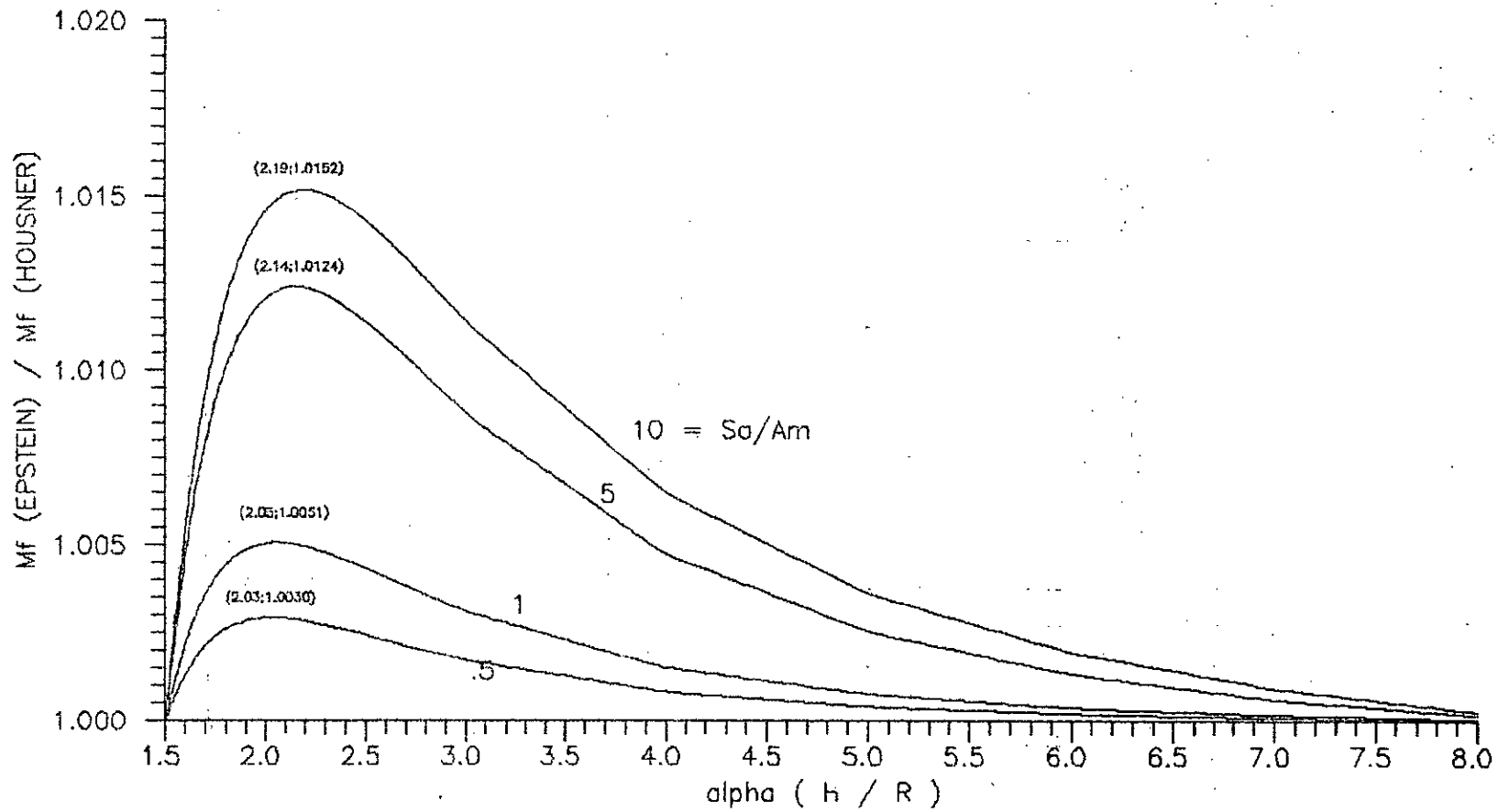


FIG b : Erreurs induites par l'utilisation de la hauteur totale du liquide pour le calcul du moment de flexion total

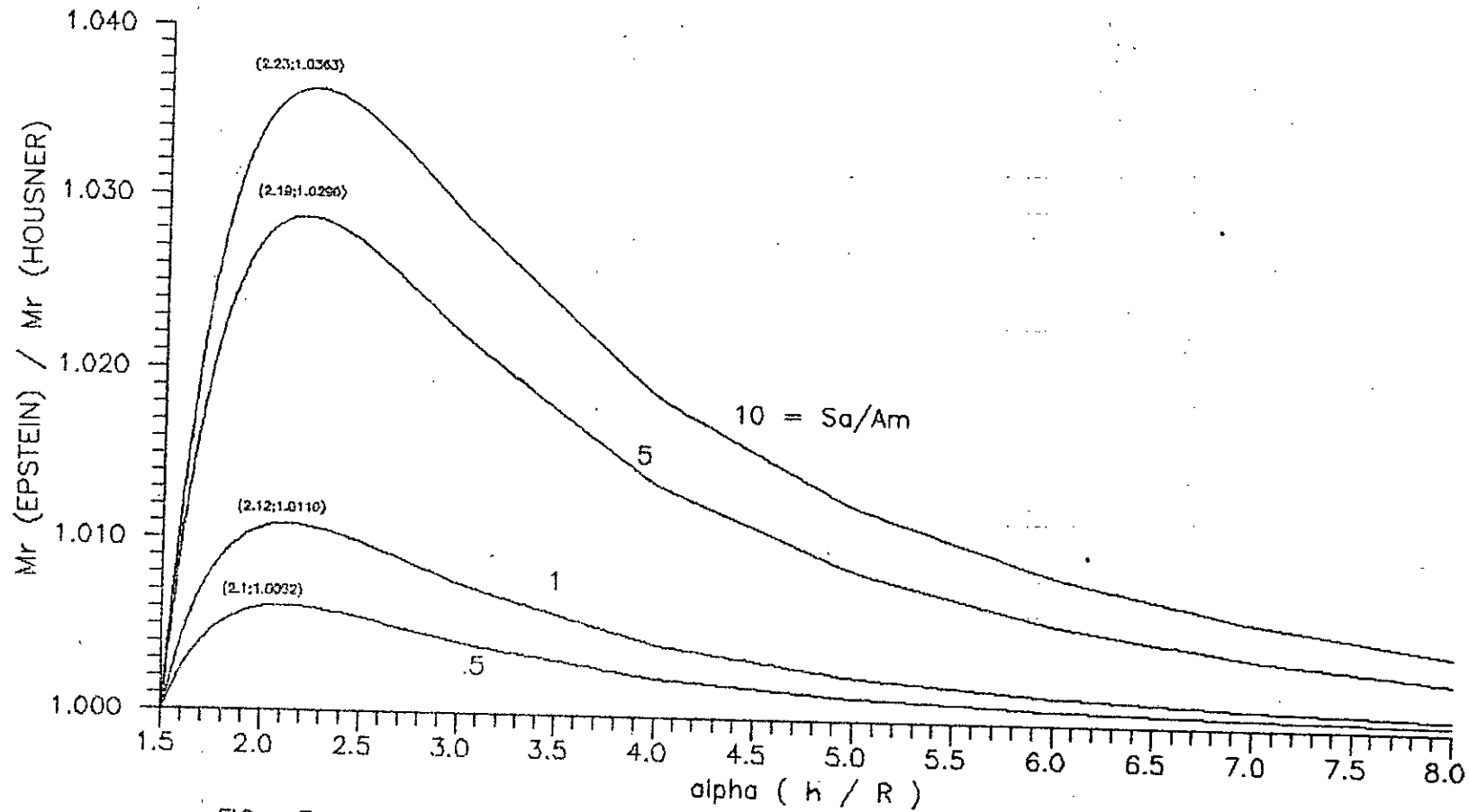


FIG c : Erreurs induites par l'utilisation de la hauteur totale du liquide pour le calcul du moment de flexion total

VI-5 Méthode d'Abramson :

VI-5-1 Introduction:

Ce modèle a été élaboré en vue d'étudier le comportement dynamique des fluides dans les véhicules spatiaux [11], avec tous les mouvements possibles de ces derniers (translations verticale et horizontales et rotations associées) .Les résultats obtenus dans le cas d'un mouvement translationnel horizontal peuvent naturellement servir de base pour l'analyse du comportement des réservoirs soumis à une accélération horizontale du sol. les études effectuées sur les plans analytique et expérimental par Abramson et ses collaborateurs [11] ont permis le développement des modèles mécaniques complexe et simplifié décrits ci-après.

VI-5-2 modèle mécanique complexe:

Un modèle complet pour l'oscillation du liquide doit incorporer une masse oscillante pour chaque mode d'oscillation du liquide. Ce modèle est appelé modèle mécanique complexe puisqu'il introduit un nombre infini de masses oscillantes (figure VI-21).

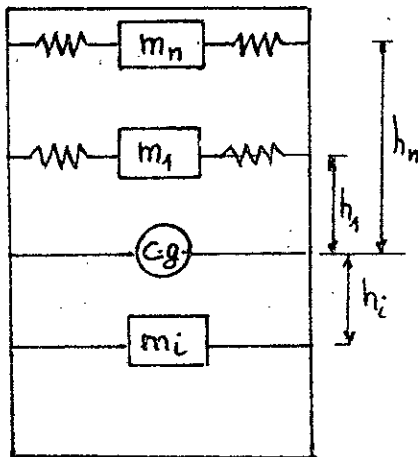


Fig VI-21

modèle mécanique complexe

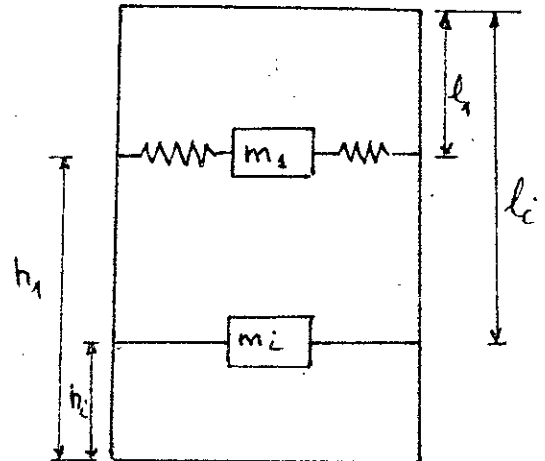


Fig VI-22

modèle mécanique simple

Il consiste en une masse m_i , rigidement attachée au réservoir à la hauteur h_i , et un nombre infini de masses m_n ($n=1,2,3...n$) attachées au réservoir aux hauteurs h_n , référenciées par rapport au centre de gravité du fluide.

Les raideurs des ressorts sont choisies de telle sorte que leurs rapports par rapport aux masses oscillantes soient égaux au carré

de la pulsation du mode considéré; d'où l'équation :

$$\frac{K_n}{m_n} = \omega_n^2 = 2\xi_n \frac{g}{d} \cdot \text{th}\left(2\xi_n \frac{h}{d}\right) \quad (\text{VI-5-1})$$

Où ξ_n sont les zéros des dérivées de fonctions de Bessel de première espèce, donc devant vérifier la relation $J'_1(\xi_n) = 0$. Dans la relation précédente h , d et g représentent respectivement la hauteur du fluide, le diamètre du réservoir et l'accélération de la pesanteur.

Pour préserver l'équilibre statique du liquide, la somme de toutes les masses oscillantes et la masse impulsive est égale à la masse totale du liquide.

$$m_i + \sum_{n=1}^{\infty} m_n = m \quad (\text{VI-5-2})$$

Pour garder le centre de gravité à sa position verticale, comme c'est le cas des petits mouvements du liquide, h_i doit satisfaire la relation:

$$h_i \cdot m_i = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot m_n \quad (\text{VI-5-3})$$

Cependant, une analyse dynamique doit être utilisée pour le calcul des paramètres inconnus restants:

m_n et h_n

Les expressions des efforts Q et M sont d'abord déterminées, puis une comparaison directe avec la théorie permet d'obtenir les résultats suivants:

-pour m_n :

$$\frac{m_n}{m} = \frac{\text{th}\left(2\xi_n \frac{h}{d}\right)}{\xi_n \frac{h}{d} (\xi_n^2 - 1)} \quad (\text{VI-5-4})$$

-pour h_n :

$$\frac{h_n}{h} = \frac{1}{2} - \frac{d}{(\xi_n h)} \text{th}\left(\xi_n \frac{h}{d}\right) \quad (\text{VI-5-5})$$

Les expressions analytiques pour déterminer les paramètres du modèle complexe sont résumées dans le tableau VI-5-1 présenté ci-après :

VI-5-3 Modèle mécanique simple

Physiquement, chaque masse dans le système mécanique correspond à une masse effective du liquide oscillant dans un mode d'oscillation particulier. Par sa valeur relative, il est possible d'estimer l'importance de chaque mode. De plus on remarque que les valeurs de ces masses d'oscillation décroissent rapidement avec l'augmentation du nombre de modes de sorte qu'il est généralement acceptable d'inclure seulement la masse associée au mode fondamental d'oscillation.

Le modèle mécanique simple est illustré sur la figure VI-22. Les expressions analytiques pour déterminer les paramètres du modèle mécanique simple sont données dans le tableau VI-5-2 suivant:

Tableau 5-1: Les paramètres du modèle complexe. Figure VI-21

$$K_n = m \left(2 \frac{g}{h(\xi_n^2 - 1)} \right) \left(\text{th} \left(2 \xi_n \frac{h}{d} \right) \right)^2$$

$$m_n = m \cdot \frac{d}{(\xi_n h (\xi_n^2 - 1))} \text{th} \left(2 \xi_n \frac{h}{d} \right)$$

$$m_i = m - \sum_{(n=1)}^{\infty} m_n$$

$$h_n = \frac{h}{2} - \frac{d}{\xi_n} \text{th} \left(\xi_n \frac{h}{d} \right)$$

$$h_i = \frac{1}{m_i} \sum_{(n=1)}^{\infty} m_n \cdot h_n$$

$$m = \pi \rho r^2 h$$

$$K_1 = m \left(\frac{g}{(1,18 \cdot h)} \right) \left(th \left(3,68 \frac{h}{d} \right) \right)^2$$

$$m_1 = m \left(\frac{d}{(4,4 \cdot h)} \right) th \left(3,68 \frac{h}{d} \right)$$

$$m_i = m - \sum_{(n=1)}^{\infty} m_n \text{ [ou } m_i = m - m_1]$$

$$h_1 = h - \frac{d}{(3,68)} th \left(3,68 \cdot \frac{h}{d} \right)$$

$$h_i = h - \frac{m}{m_i} \left[\frac{h}{2} - \frac{d^2}{(8 \cdot h)} \right] - I_1 \frac{m_1}{m_i}$$

VI.5.4- Abaques des efforts résultants pour le modèle de Abramson.

Dans ce qui suit nous développons des abaques de calcul des efforts tranchants, des moments de flexions et des moments de renversements. La figure 21 a, montre l'abaque de l'effort tranchant adimensionnel:

$$(\bar{Q}) = \frac{Q}{Q_0} \text{ où } Q_0 = \rho \cdot R^3 \cdot a_m$$

Les quantités ρ, a_m et R représentent la masse volumique du liquide, l'accélération maximal du sol, et le rayon du réservoir respectivement.

La figure 21b, présente l'abaque du moment de flexion adimensionnel:

$$(\bar{M}_f) = \frac{M}{M_0} \text{ où } M_0 = \rho \cdot R^4 \cdot a_m$$

Enfin la figure 21 c, fournit l'abaque du moment de renversement adimensionnel:

$$(\bar{M}_r) = \frac{M^*}{M_0}$$

$Q_0 = \rho * R^3 * a_m$
 ou ρ = la masse volumique du liquide
 a_m = l'accélération maximale
 R = le rayon du réservoir

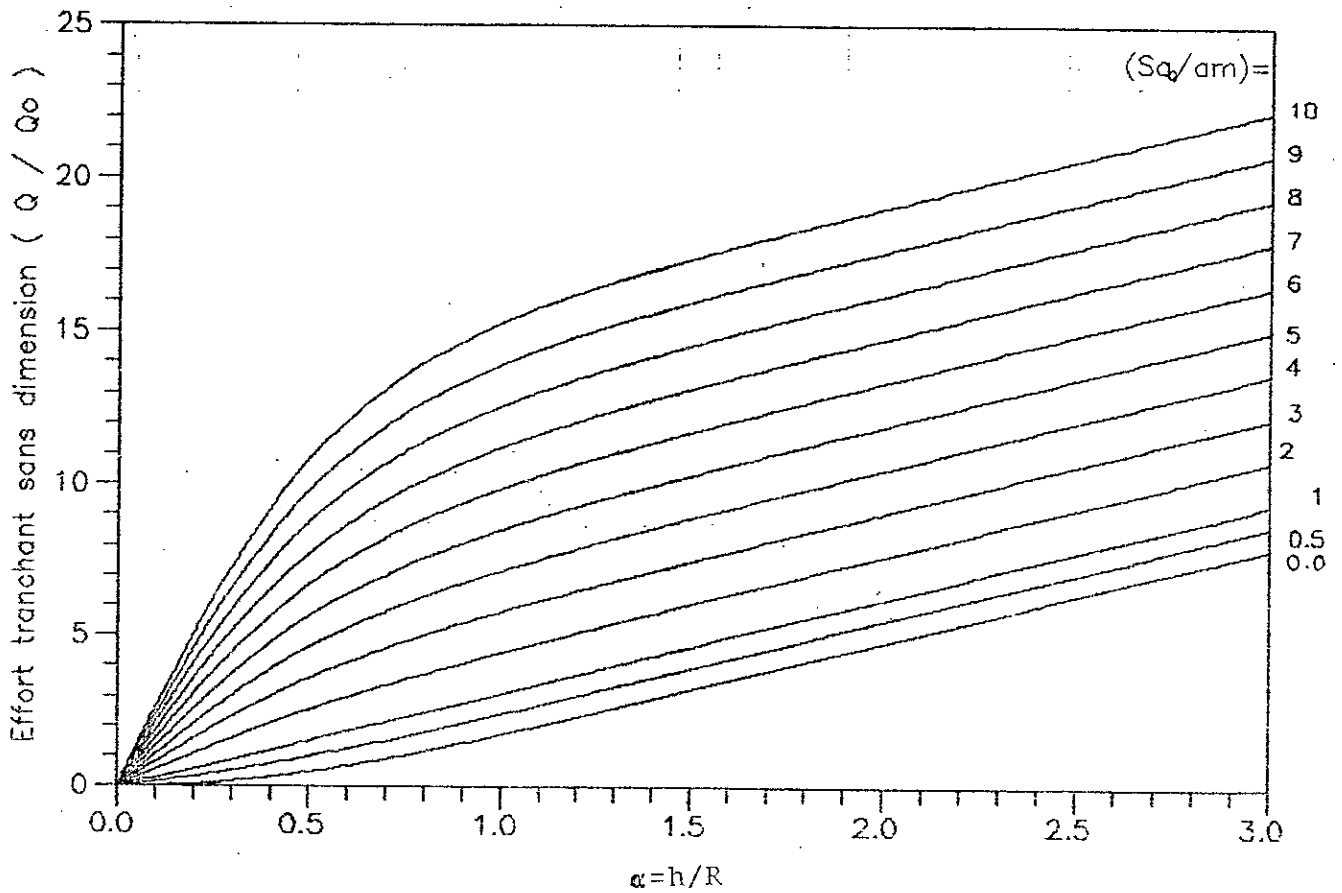


Fig. 21a : Abaque de l'effort tranchant (Modèle d'Abramson)

$M_0 = \rho * R^4 * a_m$
 ou ρ = la masse volumique du liquide
 a_m = l'acceleration maximale
 R = le rayon du reservoir

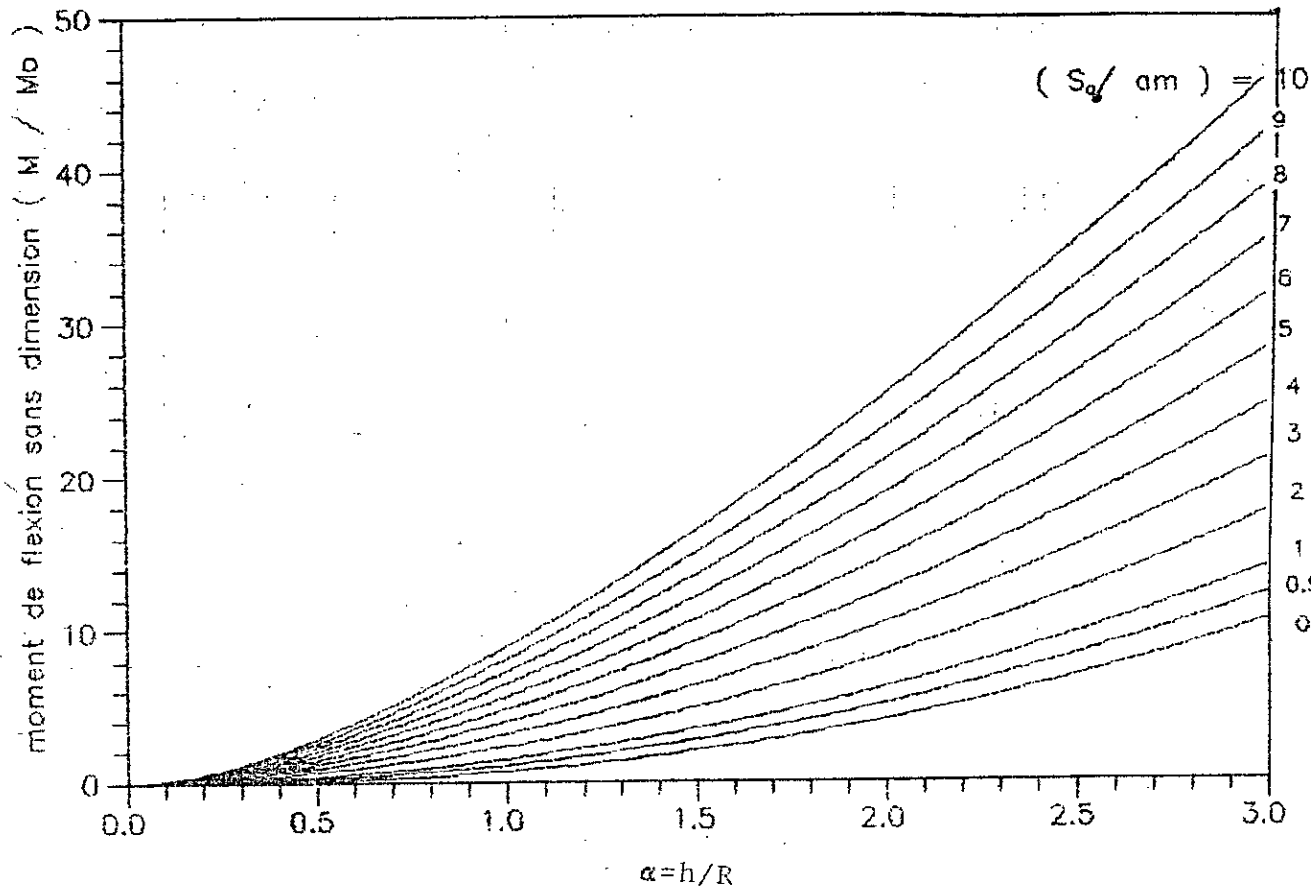


Fig: 21 b : Abaque du moment de flexion (Modèle d'Abramson)

$M_0 = \rho * R^3 * a_m$
 ou ρ = la masse volumique du liquide
 a_m = l'accélération maximale
 R = le rayon du reservoir

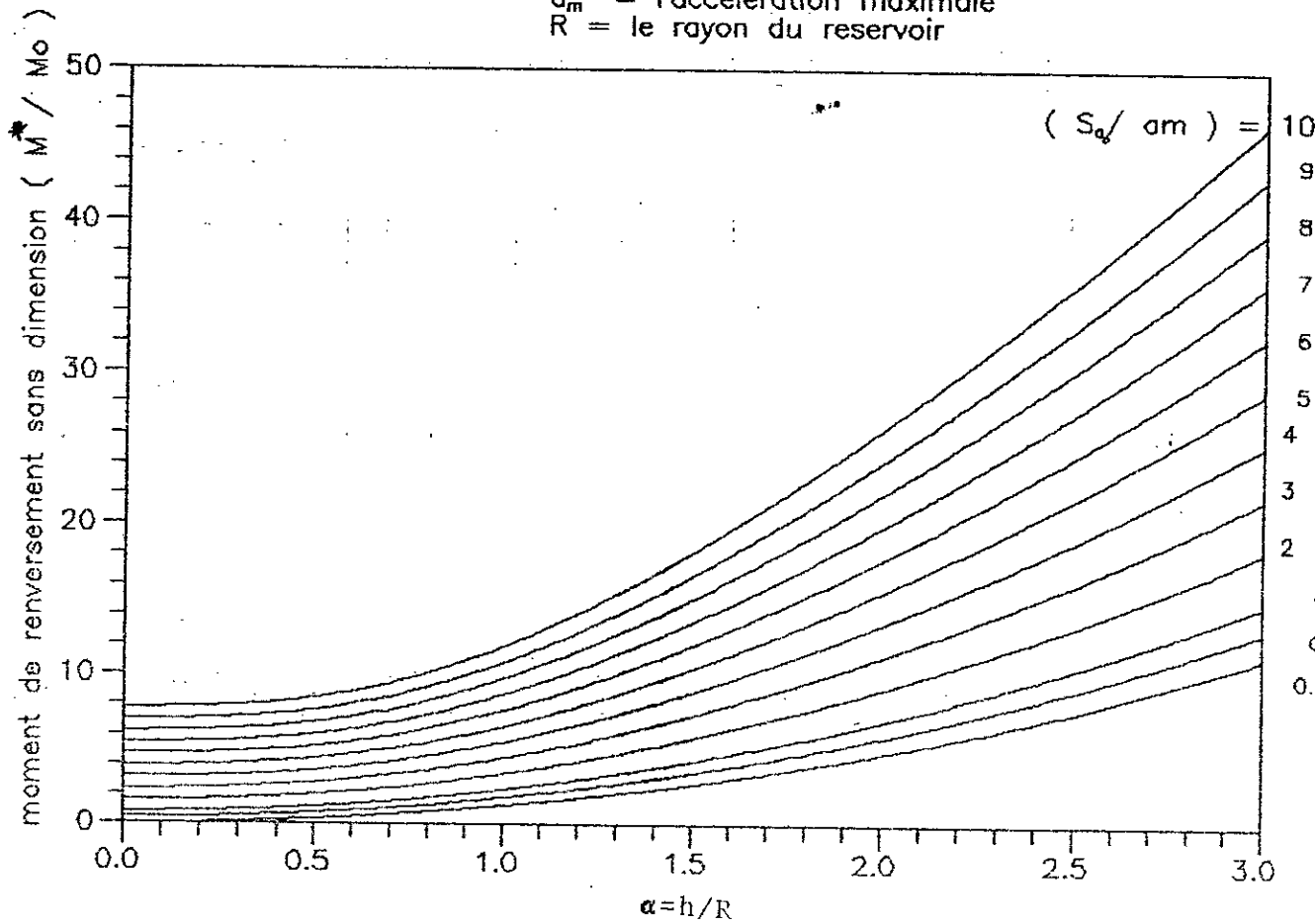


Fig: 21c : Abaque du moment de renversement
 (Modèle d'Abramson)

VI-6 Comparaisons et conclusions :

Les principaux résultats obtenus pour chaque méthode peuvent être comparés directement en examinant les variations des efforts adimensionnels (Q), (M_f) et (M_r) en fonction du rapport h/R .

La gamme de fréquence de 1 Hz à 25 Hz, utilisée dans les méthodes de calcul, est celle rencontrée dans les applications du génie sismique. Il est également rappelé que :

- Les efforts tranchants adimensionnels sont désignés par les rapports :

$$(\bar{Q}_k) = \frac{Q_k}{Q_o}$$

$$\text{où } Q_o = \rho \cdot a_m \cdot R^2 \cdot h = m \cdot a_m / \pi$$

avec $k = "i"$ pour impulsion et $"o"$ pour l'oscillation.

- Les bras de levier adimensionnels des actions de pression : (c'est à dire les hauteurs ou positions adimensionnelles des masses équivalentes) sont représentés par les rapports :

$$\frac{h_k}{h}$$

où $k = i$ ou o et h : la hauteur totale du fluide

- Les moments de flexion et de renversements adimensionnels sont désignés respectivement par les rapports :

$$(\bar{M}_f)_k = \frac{M_k}{M_o}$$

$$\text{où } M_o = \rho_o \cdot a_m \cdot R^2 \cdot h^2 = m h a_m / \pi$$

et

$$(\bar{M}_r) = \frac{M_k^*}{M_o}$$

La validité des modèles est établie par comparaison directe avec le modèle d'Abramson (Tableaux: VI-6.1 à 10)

Dans ces tableaux comparatifs les notations suivantes sont utilisées:

M1 : Méthode négligeant l'oscillation du liquide

M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion

M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein

M4 : Modèle d'Abramson.

Les principales conclusions peuvent être résumées comme suit :

VI.6.1- Modèle négligeant l'oscillation du liquide:

Modèle de Jacobson(M1):

Ce modèle ne prend pas en compte l'effet de l'oscillation du liquide de sorte que seuls les résultats obtenus pour les actions d'impulsion peuvent être comparés.

-Pour l'effort tranchant, la méthode donne d'excellents résultats (erreurs de l'ordre de 0,4%) quelque soit la valeur de $\alpha = h/R$. (Tab. VI.6.1)

-Pour le moment de flexion, l'erreur varie entre 6% et 8% pour $\alpha \leq 1,5$ et entre 5% et 9% pour $\alpha > 1,5$, soit une variation de 5% et 9% quelque soit α . (Tab VI.6.4) .

-Pour le moment de renversement, l'erreur varie entre 5% et 7% pour $\alpha \leq 1,5$ et entre 11% et 20% pour $\alpha > 1,5$ (Tab VI.6.5).

En conclusion, on peut dire qu'en raison de l'ordre élevé des erreurs dans l'évaluation des moments de renversements et en raison de la non considération de la pression oscillante, cette méthode n'est pas recommandée pour le calcul para-sismique des réservoirs.

VI.6.2- Modèle tenant compte à la fois de l'oscillation et de l'impulsion Modèle de Hunt et Priesley (M2):

Dans cette méthode, Hunt et Priestley considèrent le réservoir non amorti et la réponse transitoire comme la réponse de la partie oscillante. Toutefois s'agissant d'un problème physique, le système est évidemment amorti et la réponse transitoire s'estompe rapidement après les premiers cycles d'excitation sismique, de sorte que sa contribution dans la solution finale peut être négligée (hypothèse considérée par Abramson dans son étude théorique).

C'est pourquoi dans les tableaux VI.6.6 à 10 , il est observé des écarts substantiels dans les résultats obtenus par cette méthode comparativement à ceux d'Abramson en ce qui concerne les actions d'oscillation . La situation est tout à fait différente pour les actions d'impulsion. En effet, les tableaux (VI.6.1 à 5) indiquent clairement que les efforts maximaux quand les fréquences d'excitation sont élevées sont pratiquement les mêmes (les pressions d'oscillation étant à ces fréquences, pratiquement nulles).

VI.6.3- La modèle de Housner

VI.6.3.1- Pressions d'impulsion:

-L'erreur de l'effort tranchant varie entre 1% et 3,5% pour $\alpha \leq 1,5$ et entre 3,5% et 7% pour $\alpha > 1,5$. (Tab. VI.6.1)

-L'erreur du moment de flexion varie entre 6% et 14% pour $\alpha \leq 1,5$ et entre 0% et 7% pour $\alpha > 1,5$. (Tab. VI.6.4).

-L'erreur du moment de renversement varie entre 0% et 9% pour $\alpha \leq 1,5$ et entre 0% et 8% pour $\alpha > 1,5$. (Tab. VI.6.5).

En résumé, l'erreur sur les efforts résultants des actions d'impulsion varie entre 0% et 14% pour les réservoirs peu profonds et entre 0% et 8% pour les réservoirs profonds.

VI.6.3.2- Pressions d'oscillation:

Le rapport de la masse oscillante à la masse totale du liquide peu se mettre sous la forme suivante:

$$\frac{m_o}{m} = \epsilon_o = \frac{K}{\alpha} \text{th} (184 \alpha)$$

Housner[5] considère $K=0,318$ (dans son premier article [4] Housner proposé $K=0,38$) alors que Abramson trouve $K=0,4545$, de sorte que l'on peut affirmer que l'erreur sera de l'ordre de 30%, ce qui peut être également observé sur les tableaux VI.6.6, VI.6.8 et VI.6.9. En constate que pour les bras levier du moment de renversement l'erreur varie entre 0% et 1% pour $\alpha \leq 1,5$ et entre 0% et 6% pour $\alpha > 1,5$ (Tab VI.6.8). En résumé, l'erreur sur les efforts résultants des actions d'oscillation est de l'ordre de 30% quelque soit α , l'erreur venant du coefficient K (de la masse oscillante) ,puisque sur les bras de levier elle ne dépassent pas 6%.

En conclusion, après comparaison des efforts d'impulsion et d'oscillation, il importe de remarquer que pour les réservoir profonds ($\alpha > 1,5$) la méthode de Housner reste valable (à 8% près) si on prend $K = 0,4545$, alors que pour les réservoirs peu profond ($\alpha \leq 1,5$) l'erreur devient trop importante (14%).

Tableau VI.6.1: Comparaison des efforts Tranchants adimensionnels (Q_1)
(Actions impulsives).

R.	$\alpha=h/R$	M1	M4	M3	M2
R.	0.2	0.361	0.366	0.363	0.364
	0.3	0.553	0.557	0.544	0.555
P	0.4	0.750	0.752	0.725	0.750
E	0.5	0.942	0.945	0.905	0.944
U	0.6	1.127	1.130	1.081	1.128
	0.7	1.300	1.302	1.251	1.300
P	0.8	1.455	1.458	1.413	1.456
R	0.9	1.594	1.598	1.564	1.597
O	1.0	1.719	1.722	1.703	1.721
F	1.1	1.828	1.832	1.830	1.831
O	1.2	1.925	1.929	1.946	1.928
N	1.3	2.010	2.014	2.050	2.013
D	1.4	2.085	2.090	2.144	2.089
S	1.5	2.151	2.156	2.228	2.155
	1.6	2.210	2.215	2.284	2.215
R.	1.7	2.263	2.269	2.334	2.268
	1.8	2.310	2.316	2.379	2.315
	1.9	2.353	2.359	2.419	2.358
	2.0	2.391	2.398	2.455	2.397
P	2.1	2.426	2.433	2.488	2.432
	2.2	2.458	2.465	2.518	2.464
R	2.3	2.487	2.494	2.545	2.494
	2.4	2.514	2.521	2.570	2.521
O	2.5	2.538	2.546	2.592	2.545
	2.6	2.561	2.569	2.614	2.568
F	2.7	2.582	2.590	2.633	2.589
	2.8	2.601	2.610	2.651	2.609
O	2.9	2.619	2.628	2.668	2.628
	3.0	2.636	2.645	2.684	2.645
N	3.1	2.652	2.661	2.699	2.661
	3.2	2.666	2.676	2.713	2.676
D	3.3	2.680	2.690	2.726	2.690
	3.4	2.693	2.703	2.738	2.704
S	3.5	2.705	2.716	2.750	2.716
	3.6	2.717	2.728	2.760	2.728
	3.7	2.728	2.739	2.770	2.739
	3.8	2.738	2.750	2.781	2.750
	3.9	2.748	2.760	2.780	2.760
	4.0	2.757	2.769	2.798	2.770
	4.1	2.766	2.778	2.807	2.778
	4.2	2.774	2.789	2.815	2.787
	4.3	2.782	2.795	2.822	2.795
	4.4	2.790	2.803	2.830	2.803
	4.5	2.797	2.811	2.836	2.811
	4.6	2.804	2.818	2.843	2.818
	4.7	2.810	2.825	2.849	2.825
	4.8	2.816	2.831	2.855	2.831
	4.9	2.823	2.838	2.864	2.838
	5.0	2.828	2.844	2.867	2.844

M1 : Méthode négligeant l'oscillation du liquide
M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion
M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein
M4 : Modèle d'Abramson.

Tableau VI.6.2: Comparaison des bras de levier adimensionnels (h_i/h) de la résultante des pressions d'impulsion (Cf. moment de flexion)

	$\alpha = h/R$	M1	M4	M3	M2
R.	0.2	0.384	0.420	0.375	0.419
	0.3	0.384	0.410	0.375	0.409
P	0.4	0.384	0.405	0.375	0.405
	0.5	0.384	0.403	0.375	0.403
U	0.6	0.384	0.403	0.375	0.402
	0.7	0.385	0.403	0.375	0.402
P	0.8	0.385	0.403	0.375	0.403
	0.9	0.386	0.404	0.375	0.404
O	1.0	0.387	0.405	0.375	0.405
	1.1	0.387	0.407	0.375	0.407
F	1.2	0.388	0.408	0.375	0.408
	1.3	0.389	0.410	0.375	0.410
D	1.4	0.390	0.412	0.375	0.412
	1.5	0.391	0.414	0.375	0.414

R.	1.6	0.393	0.416	0.381	0.416
	1.7	0.394	0.417	0.387	0.417
P	1.8	0.395	0.419	0.392	0.419
	1.9	0.396	0.421	0.397	0.421
R	2.0	0.397	0.423	0.401	0.423
	2.1	0.398	0.425	0.405	0.425
O	2.2	0.399	0.427	0.409	0.426
	2.3	0.400	0.428	0.413	0.428
F	2.4	0.401	0.430	0.416	0.430
	2.5	0.402	0.432	0.419	0.432
O	2.6	0.403	0.433	0.422	0.433
	2.7	0.404	0.435	0.425	0.435
N	2.8	0.405	0.436	0.427	0.436
	2.9	0.406	0.438	0.429	0.438
D	3.0	0.407	0.439	0.432	0.439
	3.1	0.407	0.440	0.434	0.440
S	3.2	0.408	0.442	0.435	0.442
	3.3	0.409	0.443	0.437	0.443
S	3.4	0.410	0.444	0.439	0.444
	3.5	0.411	0.445	0.440	0.445
S	3.6	0.412	0.447	0.442	0.446
	3.7	0.412	0.448	0.444	0.448
S	3.8	0.413	0.449	0.445	0.449
	3.9	0.414	0.450	0.446	0.450
S	4.0	0.414	0.451	0.448	0.451
	4.1	0.415	0.452	0.449	0.452
S	4.2	0.415	0.452	0.450	0.452
	4.3	0.416	0.453	0.451	0.453
S	4.4	0.416	0.454	0.452	0.454
	4.5	0.417	0.455	0.453	0.455
S	4.6	0.417	0.458	0.454	0.456
	4.7	0.418	0.457	0.455	0.457
S	4.8	0.418	0.457	0.456	0.457
	4.9	0.419	0.458	0.457	0.458
S	5.0	0.419	0.459	0.458	0.459

M1 : Méthode négligeant l'oscillation du liquide
M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion
M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein
M4 : Modèle d'Abramson.

Tableau VI.6.3: Comparaison des bras de levier adimensionnels (h_i^*/h) de la résultante des pressions d'impulsion (Cf. moment de renversement)

	$\alpha=h/R$	M1	M4	M3	M2
R.	0.2	1.205	3.994	4.205	3.992
	0.3	1.123	2.600	2.762	2.599
P	0.4	1.046	1.882	2.041	1.883
	0.5	0.979	1.460	1.610	1.460
U	0.6	0.921	1.190	1.327	1.190
	0.7	0.871	1.010	1.130	1.009
P	0.8	0.829	0.882	0.986	0.882
	0.9	0.794	0.790	0.879	0.790
O	1.0	0.764	0.722	0.798	0.721
	1.1	0.738	0.670	0.733	0.670
F	1.2	0.716	0.630	0.682	0.630
	1.3	0.698	0.600	0.641	0.599
D	1.4	0.680	0.575	0.607	0.575
	1.5	0.666	0.555	0.580	0.555

R.	1.6	0.653	0.540	0.557	0.540
	1.7	0.642	0.527	0.539	0.527
P	1.8	0.632	0.516	0.525	0.516
	1.9	0.623	0.508	0.514	0.508
U	2.0	0.614	0.501	0.506	0.501
	2.1	0.607	0.495	0.499	0.495
P	2.2	0.601	0.490	0.493	0.490
	2.3	0.595	0.486	0.489	0.486
R	2.4	0.589	0.483	0.485	0.483
	2.5	0.584	0.480	0.482	0.480
O	2.6	0.579	0.478	0.480	0.478
	2.7	0.575	0.476	0.480	0.476
F	2.8	0.571	0.474	0.476	0.474
	2.9	0.567	0.473	0.475	0.473
O	3.0	0.564	0.472	0.473	0.472
	3.1	0.560	0.471	0.473	0.471
N	3.2	0.557	0.470	0.472	0.470
	3.3	0.554	0.470	0.472	0.470
D	3.4	0.551	0.469	0.472	0.470
	3.5	0.549	0.469	0.471	0.469
S	3.6	0.547	0.469	0.471	0.469
	3.7	0.544	0.468	0.471	0.468
	3.8	0.542	0.468	0.471	0.468
	3.9	0.540	0.468	0.471	0.468
	4.0	0.538	0.468	0.471	0.468
	4.1	0.536	0.468	0.471	0.468
	4.2	0.535	0.468	0.471	0.468
	4.3	0.533	0.469	0.471	0.468
	4.4	0.531	0.469	0.471	0.469
	4.5	0.530	0.469	0.471	0.469
	4.6	0.528	0.469	0.471	0.470
	4.7	0.527	0.469	0.471	0.470
	4.8	0.525	0.469	0.472	0.470
	4.9	0.524	0.470	0.472	0.470
	5.0	0.523	0.470	0.472	0.470

M1 : Méthode négligeant l'oscillation du liquide
M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion
M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein
M4 : Modèle d'Abramson.

**Tableau VI.6.4: Comparaison des moments de flexion adimensionnels ($M_i Y_i$)
(Actions impulsives).**

	$\alpha=h/R:$	M1	M4	M3	M2
R.	0.2	0.139	0.159	0.136	0.147
	0.3	0.213	0.232	0.204	0.223
P	0.4	0.288	0.308	0.272	0.300
	0.5	0.362	0.383	0.339	0.377
U	0.6	0.433	0.457	0.406	0.451
	0.7	0.500	0.526	0.469	0.521
P	0.8	0.560	0.589	0.530	0.585
	0.9	0.615	0.647	0.587	0.643
O	1.0	0.664	0.700	0.639	0.696
	1.1	0.708	0.746	0.687	0.743
O	1.2	0.747	0.788	0.730	0.785
	1.3	0.783	0.827	0.770	0.824
N	1.4	0.814	0.861	0.804	0.859
	1.5	0.842	0.893	0.836	0.890

R.	1.6	0.868	0.921	0.870	0.919
	1.7	0.891	0.948	0.903	0.945
P	1.8	0.912	0.972	0.933	0.970
	1.9	0.931	0.994	0.960	0.992
U	2.0	0.949	1.015	0.985	1.013
	2.1	0.966	1.034	1.009	1.032
P	2.2	0.981	1.052	1.030	1.050
	2.3	0.995	1.069	1.050	1.067
R	2.4	1.008	1.085	1.069	1.083
	2.5	1.020	1.099	1.086	1.098
O	2.6	1.032	1.113	1.103	1.111
	2.7	1.043	1.126	1.118	1.125
F	2.8	1.053	1.139	1.132	1.137
	2.9	1.063	1.151	1.145	1.149
O	3.0	1.072	1.162	1.158	1.160
	3.1	1.080	1.172	1.170	1.171
N	3.2	1.088	1.182	1.181	1.181
	3.3	1.096	1.192	1.192	1.190
D	3.4	1.103	1.201	1.202	1.200
	3.5	1.110	1.210	1.212	1.209
S	3.6	1.117	1.218	1.221	1.217
	3.7	1.123	1.226	1.229	1.225
O	3.8	1.129	1.238	1.238	1.233
	3.9	1.135	1.241	1.245	1.240
N	4.0	1.141	1.248	1.253	1.247
	4.1	1.146	1.255	1.260	1.254
D	4.2	1.151	1.261	1.267	1.260
	4.3	1.156	1.267	1.273	1.266
S	4.4	1.160	1.273	1.278	1.272
	4.5	1.165	1.279	1.286	1.278
O	4.6	1.170	1.285	1.291	1.284
	4.7	1.173	1.290	1.297	1.289
N	4.8	1.177	1.295	1.302	1.294
	4.9	1.181	1.300	1.308	1.299
S	5.0	1.185	1.305	1.312	1.304

M1 : Méthode négligeant l'oscillation du liquide
M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion
M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein
M4 : Modèle d'Abramson.

Tableau VI.6.5: Comparaison des moments de renversement adimensionnel $(M_r)_i$ (Actions impulsives).

	$\alpha=h/R$	M1	M4	M3	M2
R.	0.2	0.434	1.514	1.525	1.497
	0.3	0.621	1.470	1.503	1.458
P	0.4	0.785	1.428	1.408	1.419
	0.5	0.923	1.388	1.458	1.380
U	0.6	1.038	1.350	1.436	1.344
	0.7	1.132	1.317	1.414	1.312
P	0.8	1.206	1.288	1.394	1.284
	0.9	1.265	1.264	1.375	1.260
O	1.0	1.312	1.244	1.358	1.241
	1.1	1.349	1.229	1.342	1.226
F	1.2	1.378	1.217	1.327	1.214
	1.3	1.400	1.208	1.314	1.205
D	1.4	1.418	1.202	1.303	1.200
	1.5	1.432	1.198	1.292	1.196

R.	1.6	1.443	1.196	1.272	1.194
	1.7	1.452	1.196	1.258	1.194
P	1.8	1.459	1.197	1.250	1.195
	1.9	1.465	1.199	1.245	1.197
U	2.0	1.469	1.201	1.242	1.200
	2.1	1.473	1.205	1.242	1.203
P	2.2	1.476	1.209	1.243	1.207
	2.3	1.478	1.213	1.244	1.211
R	2.4	1.480	1.218	1.247	1.216
	2.5	1.482	1.222	1.250	1.220
O	2.6	1.483	1.228	1.255	1.226
	2.7	1.484	1.233	1.259	1.231
F	2.8	1.485	1.238	1.263	1.236
	2.9	1.485	1.243	1.268	1.242
O	3.0	1.486	1.248	1.272	1.247
	3.1	1.486	1.254	1.277	1.252
N	3.2	1.486	1.259	1.282	1.257
	3.3	1.486	1.264	1.286	1.263
D	3.4	1.486	1.269	1.291	1.268
	3.5	1.486	1.274	1.295	1.273
S	3.6	1.485	1.279	1.300	1.278
	3.7	1.485	1.283	1.304	1.282
P	3.8	1.485	1.288	1.309	1.287
	3.9	1.484	1.293	1.313	1.291
U	4.0	1.484	1.298	1.317	1.296
	4.1	1.483	1.302	1.321	1.300
P	4.2	1.483	1.306	1.325	1.305
	4.3	1.482	1.310	1.329	1.309
R	4.4	1.482	1.314	1.333	1.313
	4.5	1.482	1.318	1.336	1.317
O	4.6	1.481	1.322	1.340	1.321
	4.7	1.480	1.326	1.343	1.325
F	4.8	1.480	1.329	1.347	1.328
	4.9	1.479	1.333	1.350	1.332
D	5.0	1.478	1.336	1.353	1.335

M1 : Méthode négligeant l'oscillation du liquide
M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion
M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein
M4 : Modèle d'Abramson.

**Tableau VI.6.6: Comparaison des efforts tranchants adimensionnels (Q_0)
(Actions d'oscillation).**

	$\alpha=h/R$	M2	M4			M3
		$f=1 H_I$	$f=1 H_I$	$f=4.2 H_I$	modèle	
R.	0.2	1.596	2.464	0.054	2.515	1.759
	0.3	0.845	0.936	0.055	2.390	1.671
P	0.4	1.280	0.409	0.056	2.237	1.565
E	0.5	1.495	0.663	0.056	2.073	1.450
U	0.6	1.594	0.812	0.054	1.909	1.335
	0.7	1.618	0.889	0.052	1.752	1.226
P	0.8	1.592	0.917	0.049	1.606	1.127
R	0.9	1.536	0.911	0.046	1.475	1.033
O	1.0	1.463	0.885	0.043	1.358	0.951
F	1.1	1.384	0.849	0.040	1.254	0.878
O	1.2	1.304	0.807	0.037	1.162	0.813
N	1.3	1.227	0.764	0.035	1.080	0.756
D	1.4	1.155	0.722	0.032	1.008	0.706
S	1.5	1.088	0.682	0.030	0.940	0.661
<hr/>						
	1.6	1.026	0.645	0.029	0.888	0.622
R.	1.7	0.970	0.610	0.027	0.837	0.586
	1.8	0.919	0.579	0.026	0.791	0.554
	1.9	0.872	0.550	0.024	0.750	0.525
	2.0	0.830	0.523	0.023	0.713	0.499
P	2.1	0.791	0.499	0.022	0.679	0.476
	2.2	0.756	0.477	0.021	0.649	0.454
R	2.3	0.723	0.456	0.020	0.621	0.435
	2.4	0.693	0.438	0.019	0.595	0.417
O	2.5	0.666	0.420	0.019	0.571	0.400
	2.6	0.646	0.404	0.018	0.549	0.385
F	2.7	0.617	0.389	0.017	0.529	0.370
	2.8	0.595	0.375	0.017	0.510	0.357
O	2.9	0.574	0.362	0.016	0.492	0.345
	3.0	0.555	0.350	0.015	0.476	0.333
N	3.1	0.537	0.339	0.015	0.461	0.323
	3.2	0.520	0.329	0.015	0.446	0.312
D	3.3	0.505	0.319	0.014	0.433	0.303
	3.4	0.490	0.309	0.014	0.420	0.294
S	3.5	0.476	0.300	0.013	0.408	0.286
	3.6	0.463	0.292	0.013	0.397	0.278
	3.7	0.450	0.284	0.013	0.386	0.270
	3.8	0.438	0.277	0.012	0.376	0.263
	3.9	0.427	0.269	0.012	0.366	0.256
	4.0	0.416	0.262	0.012	0.357	0.250
	4.1	0.406	0.256	0.011	0.348	0.244
	4.2	0.397	0.250	0.011	0.340	0.238
	4.3	0.387	0.245	0.011	0.332	0.233
	4.4	0.379	0.239	0.011	0.325	0.227
	4.5	0.370	0.234	0.010	0.317	0.222
	4.6	0.362	0.229	0.010	0.310	0.217
	4.7	0.354	0.224	0.010	0.304	0.213
	4.8	0.347	0.219	0.010	0.297	0.208
	4.9	0.340	0.215	0.010	0.291	0.204
	5.0	0.333	0.210	0.009	0.286	0.200

M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion

M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein

M4 : Modèle d'Abramson.

Tableau VI.6.7: Comparaison des bras de levier adimensionnels (h_0/h) de la résultante des pressions d'oscillation (Cf. moment de flexion).

	$\alpha=h/R$	M4		M2	M3
		f=1 Hz	modèle	f= 1 Hz	
R.	0.2	5.663	0.506	0.575	0.500
	0.3	0.220	0.512	0.448	0.512
P	0.4	0.125	0.521	0.481	0.521
E	0.5	0.078	0.533	0.499	0.533
U	0.6	0.046	0.545	0.515	0.545
	0.7	0.022	0.559	0.532	0.559
P	0.8	0.004	0.574	0.548	0.574
R	0.9	0.010	0.590	0.567	0.590
O	1.0	0.020	0.605	0.582	0.605
F	1.1	0.029	0.621	0.599	0.621
O	1.2	0.036	0.637	0.615	0.637
N	1.3	0.041	0.652	0.631	0.652
D	1.4	0.046	0.667	0.646	0.667
S	1.5	0.050	0.681	0.661	0.681

R.	1.6	0.053	0.694	0.676	0.701
	1.7	0.056	0.707	0.689	0.718
	1.8	0.059	0.719	0.702	0.733
P	1.9	0.061	0.731	0.714	0.748
	2.0	0.064	0.742	0.725	0.761
R	2.1	0.066	0.752	0.736	0.772
	2.2	0.068	0.761	0.746	0.782
O	2.3	0.070	0.770	0.756	0.791
	2.4	0.071	0.779	0.764	0.800
F	2.5	0.073	0.787	0.773	0.808
	2.6	0.074	0.794	0.781	0.816
O	2.7	0.076	0.801	0.789	0.822
	2.8	0.077	0.808	0.796	0.829
N	2.9	0.078	0.814	0.803	0.835
	3.0	0.079	0.820	0.809	0.840
D	3.1	0.080	0.826	0.815	0.845
	3.2	0.081	0.831	0.820	0.850
S	3.3	0.082	0.836	0.826	0.855
	3.4	0.083	0.840	0.830	0.859
	3.5	0.084	0.845	0.835	0.863
	3.6	0.085	0.849	0.840	0.867
	3.7	0.086	0.853	0.844	0.871
	3.8	0.086	0.857	0.849	0.874
	3.9	0.087	0.860	0.852	0.877
	4.0	0.088	0.864	0.856	0.880
	4.1	0.088	0.867	0.859	0.883
	4.2	0.089	0.871	0.862	0.886
	4.3	0.090	0.874	0.866	0.889
	4.4	0.090	0.877	0.867	0.891
	4.5	0.091	0.879	0.872	0.894
	4.6	0.091	0.882	0.874	0.896
	4.7	0.092	0.884	0.877	0.898
	4.8	0.092	0.887	0.879	0.900
	4.9	0.093	0.889	0.882	0.902
	5.0	0.093	0.891	0.884	0.904

M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion

M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein

M4 : Modèle d'Abramson.

Tableau VI.6.8 : Comparaison des bras de levier adimensionnels (h_0^*/h) de la résultante des pressions d'oscillation (Cf. moment de renversement)

	$\alpha=h/R$	M4		M2	M3
		f=1 H ₂	modèle	f= 1 Hz	
R.	0.2	10.910	7.719	7.000	7.798
	0.3	0.100	3.630	5.803	3.664
P	0.4	0.013	2.209	2.694	2.228
E	0.5	0.043	1.561	1.742	1.573
U	0.6	0.053	1.219	1.299	1.227
	0.7	0.056	1.022	1.058	1.028
P	0.8	0.057	0.903	0.917	0.907
R	0.9	0.057	0.829	0.831	0.831
O	1.0	0.057	0.782	0.778	0.784
F	1.1	0.057	0.754	0.745	0.755
O	1.2	0.058	0.737	0.728	0.739
N	1.3	0.058	0.729	0.716	0.730
D	1.4	0.059	0.726	0.712	0.727
S	1.5	0.060	0.727	0.712	0.727
<hr/>					
R.	1.6	0.061	0.730	0.715	0.744
	1.7	0.063	0.735	0.720	0.759
	1.8	0.064	0.741	0.726	0.773
P	1.9	0.066	0.748	0.733	0.785
	2.0	0.067	0.755	0.740	0.795
R	2.1	0.068	0.763	0.748	0.805
	2.2	0.070	0.770	0.756	0.814
O	2.3	0.071	0.777	0.767	0.822
	2.4	0.072	0.785	0.777	0.830
F	2.5	0.074	0.791	0.778	0.836
	2.6	0.075	0.798	0.785	0.843
O	2.7	0.076	0.804	0.792	0.849
	2.8	0.077	0.810	0.798	0.854
N	2.9	0.079	0.816	0.805	0.859
	3.0	0.080	0.822	0.810	0.864
D	3.1	0.081	0.827	0.816	0.868
	3.2	0.082	0.832	0.821	0.872
S	3.3	0.083	0.837	0.826	0.876
	3.4	0.083	0.841	0.831	0.880
	3.5	0.084	0.846	0.836	0.883
	3.6	0.085	0.850	0.840	0.886
	3.7	0.086	0.854	0.844	0.889
	3.8	0.086	0.858	0.848	0.892
	3.9	0.087	0.861	0.852	0.895
	4.0	0.088	0.865	0.856	0.898
	4.1	0.088	0.868	0.859	0.900
	4.2	0.089	0.871	0.863	0.903
	4.3	0.090	0.874	0.866	0.905
	4.4	0.090	0.877	0.869	0.907
	4.5	0.091	0.879	0.872	0.909
	4.6	0.091	0.882	0.874	0.911
	4.7	0.092	0.884	0.877	0.913
	4.8	0.093	0.887	0.880	0.915
	4.9	0.093	0.889	0.882	0.917
	5.0	0.093	0.891	0.884	0.918

M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion

M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein

M4 : Modèle d'Abramson.

Tableau VI.6.9: Comparaison des moments de flexion adimensionnels (M_f)
(Actions d'oscillation)

	$\alpha=h/R$	M4		M2	M3
		f=1 Hz	modèle	f= 1 Hz	
R.	0.2	1.782	1.273	0.919	0.890
	0.3	0.560	1.226	0.377	0.856
P	0.4	0.352	1.168	0.615	0.816
E	0.5	0.222	1.105	0.744	0.772
U	0.6	0.128	1.042	0.820	0.728
	0.7	0.060	0.981	0.859	0.685
P	0.8	0.011	0.923	0.872	0.645
R	0.9	0.024	0.871	0.867	0.609
O	1.0	0.047	0.823	0.851	0.575
F	1.1	0.062	0.779	0.828	0.545
O	1.2	0.072	0.740	0.801	0.517
N	1.3	0.078	0.705	0.774	0.493
D	1.4	0.081	0.673	0.746	0.470
S	1.5	0.083	0.643	0.719	0.450

R.	1.6	0.084	0.617	0.693	0.435
	1.7	0.084	0.592	0.668	0.420
	1.8	0.083	0.570	0.645	0.406
P	1.9	0.082	0.549	0.613	0.393
	2.0	0.081	0.529	0.602	0.379
R	2.1	0.080	0.511	0.582	0.367
	2.2	0.078	0.494	0.564	0.355
O	2.3	0.077	0.479	0.547	0.344
	2.4	0.075	0.464	0.530	0.333
F	2.5	0.074	0.450	0.515	0.323
	2.6	0.073	0.437	0.500	0.313
O	2.7	0.071	0.424	0.486	0.304
	2.8	0.070	0.412	0.473	0.296
N	2.9	0.068	0.401	0.460	0.288
	3.0	0.067	0.391	0.449	0.280
D	3.1	0.066	0.381	0.438	0.273
	3.2	0.065	0.371	0.427	0.265
S	3.3	0.063	0.360	0.417	0.260
	3.4	0.062	0.353	0.407	0.252
	3.5	0.061	0.345	0.398	0.246
	3.6	0.060	0.337	0.388	0.241
	3.7	0.059	0.330	0.380	0.235
	3.8	0.058	0.322	0.372	0.230
	3.9	0.057	0.315	0.364	0.225
	4.0	0.056	0.309	0.356	0.220
	4.1	0.055	0.302	0.349	0.215
	4.2	0.054	0.296	0.342	0.211
	4.3	0.053	0.290	0.335	0.206
	4.4	0.052	0.285	0.329	0.202
	4.5	0.051	0.279	0.322	0.198
	4.6	0.050	0.274	0.316	0.195
	4.7	0.049	0.269	0.310	0.191
	4.8	0.048	0.264	0.305	0.187
	4.9	0.047	0.260	0.300	0.184
	5.0	0.047	0.255	0.295	0.181

M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion
M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein
M4 : Modèle d'Abramson.

Tableau VI.6.10: Comparaison des moments de renversement adimensionnels $(M_r)_\theta$ (Actions d'oscillation).

	$\alpha = h/R$	M4		M2	M3
		f=1 Hz	modèle	f= 1 Hz	
R.	0.2	3.434	19.436	5.875	13.720
	0.3	0.255	8.685	4.925	6.126
P	0.4	0.038	4.948	3.456	3.487
E	0.5	0.123	3.240	2.606	2.281
U	0.6	0.149	2.329	2.071	1.638
	0.7	0.153	1.792	1.712	1.259
P	0.8	0.148	1.452	1.460	1.019
R	0.9	0.139	1.223	1.276	0.858
O	1.0	0.131	1.063	1.138	0.745
F	1.1	0.123	0.946	1.030	0.663
O	1.2	0.116	0.857	0.946	0.600
N	1.3	0.110	0.788	0.878	0.551
D	1.4	0.105	0.733	0.821	0.513
S	1.5	0.100	0.687	0.774	0.480

R.	1.6	0.096	0.649	0.733	0.462
	1.7	0.093	0.616	0.698	0.445
	1.8	0.090	0.587	0.667	0.428
P	1.9	0.087	0.562	0.639	0.412
	2.0	0.085	0.539	0.614	0.397
R	2.1	0.083	0.519	0.592	0.383
	2.2	0.081	0.500	0.571	0.369
O	2.3	0.079	0.483	0.552	0.357
	2.4	0.077	0.467	0.534	0.345
F	2.5	0.075	0.452	0.518	0.334
	2.6	0.073	0.438	0.502	0.324
O	2.7	0.072	0.426	0.488	0.314
	2.8	0.070	0.414	0.475	0.305
N	2.9	0.070	0.402	0.462	0.296
	3.0	0.067	0.391	0.450	0.288
D	3.1	0.066	0.381	0.438	0.280
	3.2	0.065	0.372	0.427	0.272
S	3.3	0.064	0.362	0.417	0.265
	3.4	0.062	0.354	0.407	0.258
	3.5	0.061	0.345	0.398	0.252
	3.6	0.060	0.337	0.389	0.246
	3.7	0.059	0.330	0.380	0.240
	3.8	0.058	0.332	0.372	0.235
	3.9	0.057	0.315	0.364	0.229
	4.0	0.056	0.309	0.356	0.224
	4.1	0.055	0.302	0.349	0.219
	4.2	0.054	0.296	0.342	0.215
	4.3	0.053	0.290	0.335	0.210
	4.4	0.052	0.285	0.329	0.206
	4.5	0.051	0.279	0.322	0.202
	4.6	0.050	0.274	0.317	0.198
	4.7	0.049	0.269	0.311	0.194
	4.8	0.048	0.264	0.305	0.190
	4.9	0.048	0.259	0.300	0.187
	5.0	0.047	0.255	0.295	0.183

M2 : Méthode tenant compte de l'oscillation et de l'impulsion
M3 : Modèle de Housner et modèle de Housner-Epstein
M4 : Modèle d'Abramson.

Chapitre VII

Analyse des réservoirs à parois flexibles

Réservoirs à parois flexibles

Introduction

Le progrès de l'investigation scientifique dans le comportement dynamique des réservoirs reflète l'importance croissante de ces structures.

On les retrouve dans l'industrie pétrolière, dans la distribution d'eau potable, dans l'industrie aéronautique ainsi que dans les installations des réacteurs nucléaires. Durant les séismes d'Alaska en 1964 et de San Fernando en 1971 le comportement des réservoirs s'est avéré plus complexe que l'on croyait.

La finesse des parois continuant à augmenter, leurs rigidités dynamiques décroissent et par conséquent leur tendance à vibrer sous des excitations sismiques devient un sujet de grand intérêt. Dans ce contexte, la flexibilité des parois devient un paramètre majeur dans l'analyse sismique.

A cause de la séparation des fréquences d'oscillation du liquide ($< 0,5$ Hz) et des modes de vibrations des coques élastiques (> 2 Hz) la détermination de la réponse du liquide due uniquement à la surface oscillante peut être normalement déterminée en utilisant l'hypothèse des réservoirs à parois rigides pour cette partie du problème [21]. C'est précisément pour cette raison que l'on considérera, dans la suite, seulement le calcul de la partie impulsive.

L'effet de la flexibilité des parois a été considéré en premier lieu par Veletsos [9] en 1973 qui, se basant sur l'hypothèse que le système fluide-structure pourrait se comporter comme un oscillateur simple (extension de la méthode de Chopra [23] pour les barrages poids), détermina les masses effectives et les efforts associés à différentes déformées hypothétiques de vibration.

En 1977 Veletsos et Yang [14], utilisent la théorie des coques de Flügge dans une formulation énergétique de type - Ritz en se basant sur les modes de vibration d'une poutre cantilever uniforme. Malheureusement les expressions des efforts impulsifs ne sont pas données. Les résultats sont sous forme de graphes.

La méthode de Housner modifiée [29] est une approche du problème dont le principe est d'utiliser les formules des réservoirs à

parois rigides pour les réservoirs à parois flexibles en remplaçant l'accélération maximale par l'accélération spectrale appropriée. Le calcul de la pulsation fondamentale du système coque-fluide peut être obtenu par l'approximation de Dunkerley [9,29], ou encore par approximation polynomiale dont les coefficients ont été calculés préalablement [22].

Haroun et Ellaithy présentent un modèle mécanique pour les réservoirs flexibles. Le modèle peut être utilisé pour évaluer la réponse dynamique maximale du réservoir supposé flexible.

Dans ce cadre, le présent chapitre, consiste essentiellement à faire le point des diverses connaissances acquises récemment dans le domaine et se propose de fournir aux ingénieurs confrontés à ce délicat problème après une étude comparative approfondie de différentes méthodes de calcul, une approche rapide, et suffisamment fiable pour que les résultats de calcul d'avant projet ne soient pas remis en cause ultérieurement lors de la phase finale de vérification.

C'est pourquoi, après un exposé succinct du comportement des systèmes coques-fluides sous excitation sismique, et des principales méthodes de calcul existante nous avons jugé important d'indiquer les moyens pratiques de calcul et d'illustrer les résultats obtenus par des exemples d'applications

Comportement typique des réservoirs flexibles
sous excitation sismique:

Il est bien connu qu'une coque mince, remplie ou non de liquide, n'a certainement pas les caractéristiques d'une coque rigide mais présente plutôt une multitude de modes de vibration qui dépendent de la géométrie de la coque et de sa flexibilité.

Pour des coques cylindriques, les ondes de vibration surviennent le long de l'axe longitudinal (m) et autour de la circonférence (n).

Les modes d'oscillation du liquide surviennent généralement à de très basses fréquences (< 0,5 Hz) voir figure A ci-dessous.

L'influence du liquide peut être décomposée effectivement en deux actions distinctes (passives et actives) à condition que les modes d'oscillation du liquide et les modes structuraux de vibration les plus bas soient suffisamment séparés.

La partie active du liquide est influencée par l'oscillation de celui-ci, laquelle est excitée principalement dans les modes antisymétriques, par le mouvement horizontal du sol.

Dimension du prototype :

R = 60 ft (18,29 m)

H = 30 ft (3,14 m)

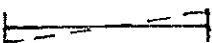
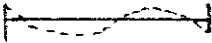
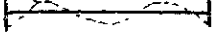
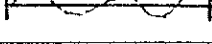
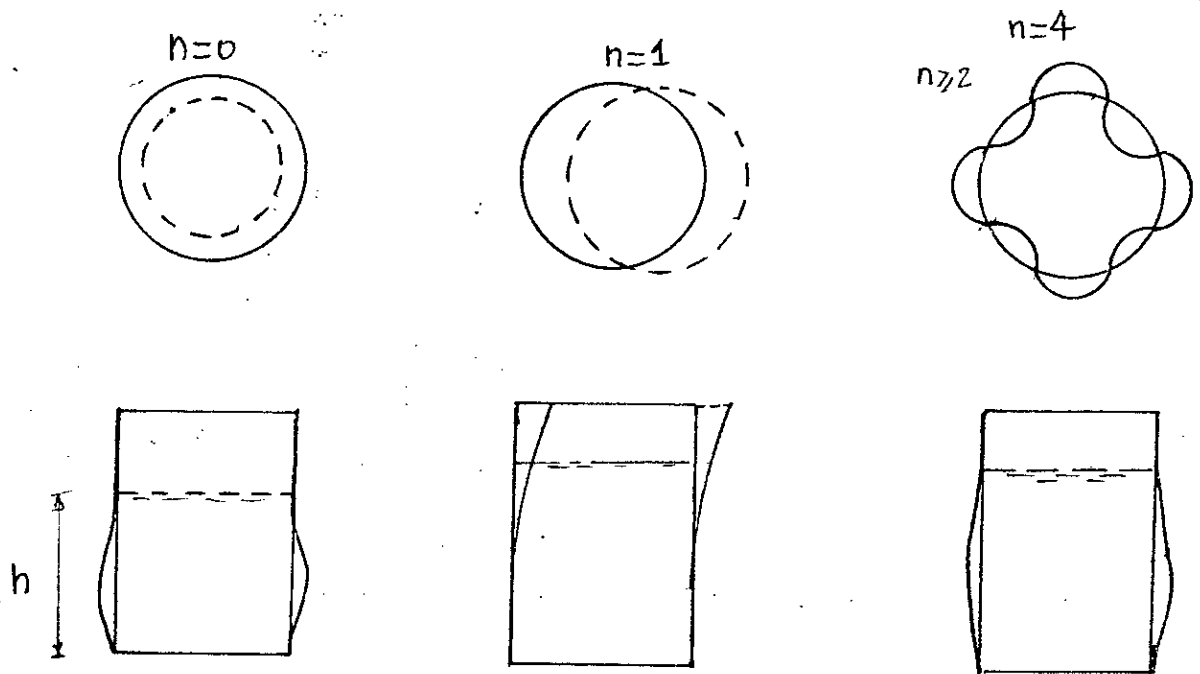
n	Fréquence de prototype (Hz)	Forme de modes
01	0,185	
02	0,268	
03	0,339	
04	0,397	

FIGURE A : Fréquence et formes de modes propres de vibration [25]

La partie basse (passive) du liquide joue comme une masse rigide, laquelle est excitée par les deux mouvements du sol (sens horizontal et sens vertical). Pour une excitation verticale, il n'y a pas d'oscillation.

Les réponses correspondant aux coques élastiques du réservoir sont indiquées sur la figure -B.



a-réponse sous forme d'un bombement à une excitation verticale

b-réponse flexionnelle à une excitation horizontale

c- réponse en modèle d'anneau (ovalling)

Figure -B Réponse modale d'un réservoir flexible.

La réponse pour $n = 0$ sous forme de bombement (Bulging-Response) correspond à un mode d'organe ouvert-fermé d'élément tube lequel est symétrique par rapport à l'axe vertical. Ce mode est excité seulement par une excitation verticale et produit des contraintes en anneau dans le réservoir (figure-B.a-).

La réponse flexionnelle ($n=1$) est excitée par une excitation horizontale au niveau de la moitié de la hauteur du réservoir. La réponse pour ce mode est beaucoup influencée par la masse impulsive du liquide.

Enfin, l'influence exacte des modes circonférentiels de vibration pour $n \geq 2$ (Ovalling) sur les contraintes n'est pas encore établie, quoique leurs effets soient le plus souvent négligés. En fait le mécanisme à travers lequel ces modes sont excités n'est pas encore bien établi. Housner et Haroun ont convenu que de telles réponses surviennent en raison des imperfections possibles de géométrie : (forme non axisymétrique du réservoir). Puisque leur influence restant indéterminée à ce jour ils ne seront pas considérés dans cette étude.

VII-1- Modèle de Housner modifié

1- Introduction

La méthode analytique simplifiée développée par Housner [4,5] est de loin la méthode de calcul la plus utilisée. Pour les réservoirs à parois flexibles, la méthode de Housner modifiée est présentée ici, avec les mêmes paramètres que ceux obtenus pour un réservoir rigide. Il s'agit d'une approche minimale au problème étudié. Pour des raisons citées en introduction, seul le calcul des actions impulsives sera exposé.

L'idéalisation du système est illustrée sur la figure VII-1-1 où la déformation élastique du réservoir est permise.

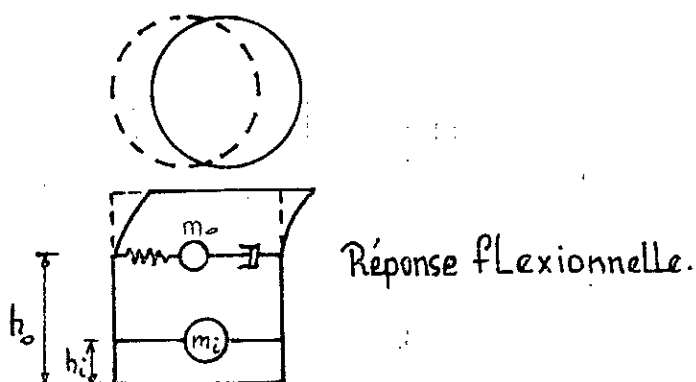


Figure VII-1-1 Modèle analytique simple pour un réservoir flexible, à base fixée

2- Mode horizontal des réservoirs élastiques:

Le réservoir est maintenant supposé répondre dans un ou plusieurs modes élastiques, et les accélérations impulsives de m_i sont donc basées sur les valeurs du spectre d'accélération plutôt que sur l'accélération maximale.

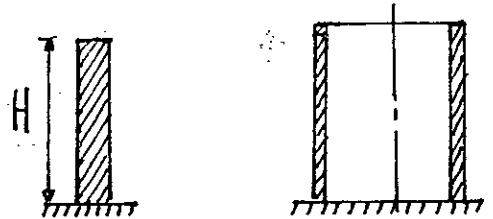
Par conséquent, une meilleure estimation doit être trouvée pour une pulsation du mode latéral du réservoir élastique avec une masse m_i attachée rigidement.

Diverses approximations pour estimer la plus petite pulsation de la réponse latérale du réservoir élastique et du liquide sont données dans la référence [14]. Nous présentons ici, une de ces approximations qui peut être aisément interprétée en termes de modèle mécanique simple.

La plus basse pulsation peut être obtenue en utilisant l'approximation de Dunkerley qui inclut les fréquences de vibrations individuelles suivantes:

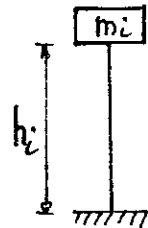
a) La pulsation fondamentale du réservoir vide uniforme de hauteur H agissant comme une poutre cantilever en flexion est obtenue par:

$$\omega_{11} = \left(\frac{1,875}{H} \right)^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{EI}{2\pi \cdot R t \rho_s} \right)} \quad \text{VII-1-1}$$



b) La pulsation de la masse m_i du liquide, fixé à l'extrémité de la poutre cantilever non pesante de longueur h_i , ayant des rigidités non négligeables à la flexion et au cisaillement est obtenue par:

$$\omega_{22} = \left(3 \cdot \frac{EI}{(m_i h_i^3)} + A_s \cdot \frac{G}{(2m_i h_i)} \right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \text{VII-1-2}$$



où

E: Module de Young

G: Module de cisaillement

$I = \pi R^3 t$: Moment d'inertie de la section transversale du réservoir.

ρ_s : Masse volumique de la coque

$A_s = 2\pi R t$: Surface de la section du réservoir.

La pulsation combinée du réservoir avec la masse concentrée m_i peut alors être obtenue par:

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} \quad \text{VII-1-3.a}$$

où encore:

$$\omega_1^2 = \frac{(\omega_{11}^2 \times \omega_{22}^2)}{(\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2)} \quad \text{VII-1-3.b}$$

On peut voir que la masse, m_i , de la partie oscillante du liquide n'influe pas sur le mode élastique du réservoir. Il est à noter aussi que les équations ci-dessus sont applicables à un réservoir d'épaisseur du mur uniforme. Elles peuvent être aussi appliquées à

un réservoir d'épaisseur variable, à condition que l'on utilise une épaisseur uniforme équivalente.

3- Réponse impulsive à une excitation horizontale ($h/R \leq 1,5$)

Pour les réservoirs à parois minces peu profonds de rapport $h/R \leq 1,5$, l'estimation raisonnable des bornes supérieures des pics de la pression d'impulsion, de l'effort tranchant et du moment à la base peut être obtenue à partir des solutions correspondant aux réservoirs à parois rigides, simplement en remplaçant l'accélération maximale du sol dans les expressions de ces quantités par la valeur du spectre d'accélération. Cette valeur doit être associée à la pulsation fondamentale d'une excitation horizontale d'un réservoir flexible (équation VII-1-3) et à un amortissement approprié de la structure.

4- Réponse impulsive pour les réservoirs profonds ($h/R > 1,5$)

L'action de la partie inférieure du fond fictif, situé à une profondeur égale à $1,5 R$ au dessous de la surface libre, est représentée par la masse réelle en dessous de $1,5 R$.

Cette masse réelle et la masse m_1 sont combinées en une seule masse m_e situé à une distance h_e au dessus du fond réel.

Pour déterminer l'effet élastique des réservoirs sur la réponse impulsive, la seule masse m_e localisée en h_e est utilisée dans l'équation (VII-1-3) pour déterminer le mode fondamental du réservoir élastique.

En résumé:

$$m_e = m_1 + m' \quad \text{où} \quad m' = m \cdot [h - 1,5R] / h$$

et
$$h_e = 1/m_e \cdot [m_1 \cdot h_1 + m' (0,5H - 0,75R)]$$

(Le poids du réservoir n'est pas considéré).

VII-2 Modèle de Haroun et Ellaithy

1- Introduction

Haroun et Ellaithy [25] développent un modèle mécanique équivalent susceptible de considérer simultanément les mouvements de la translation de la base d'un réservoir, de la rotation de sa base rigide compte tenu de la flexibilité des parois.

En se basant sur une déformée hypothétique des parois du réservoir, il développent les valeurs explicites des paramètres du modèle.

Dans ce qui suit la partie convective n'est pas considérée pour les raisons déjà citées dans l'introduction du chapitre.

2- Analyse théorique

La géométrie du réservoir étudié est montrée sur la figure VII-2-1.

2-1 Hypothèses

- Le liquide est homogène, non visqueux et incompressible.
 - Le flux est irrotationnel.
 - Le réservoir est soumis à un mouvement de translation de la base $u(t)$ et/ou à celui d'une rotation de la base rigide $\alpha(t)$ par rapport à un axé horizontal.
 - L'interaction des modes d'oscillation du fluide avec la déformation de la coque est faible.
- 5- La composante de pression de période courte due à la flexibilité des parois est prise en compte.

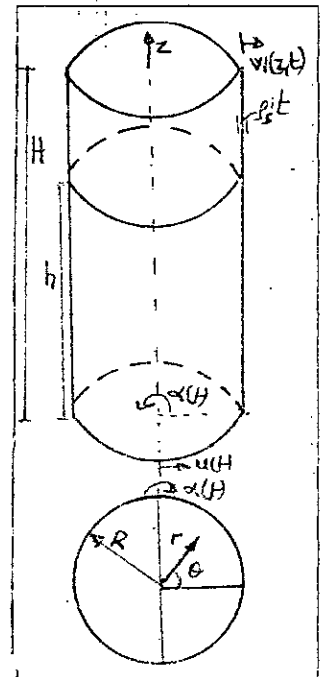


Figure VII-2-1
gémétrie du
réservoir et
de système de
coordonées

2-2 Equations de mouvement du liquide

L'analyse du mouvement du fluide nécessite

la détermination d'un potentiel de vitesse $\Phi(r, \theta, z, t)$ qui doit satisfaire l'équation de Laplace ainsi que les conditions aux limites suivantes:

- Au fond (z=0): la vitesse du liquide dans la direction verticale doit être la même que la vitesse verticale de la base rigide:

- La vitesse radiale du liquide adjacent aux parois du réservoir (r=R) est égale à celle de la coque:

-Condition de repos de la surface libre du liquide

On peut montrer (Annexe C3) que l'expression du champs de vitesse peut être donnée par:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \Phi_1(r, \theta, z, t) + \Phi_2(r, \theta, z, t) + \Phi_3(r, \theta, z, t) \quad \text{VII-2-1}$$

où Φ_1 est la composante associée au mouvement du corps rigide et est donnée par:

$$\Phi_1(r, \theta, z, t) = [\dot{u}(t) + z\dot{\alpha}(t)] \cdot r \cdot \cos\theta \quad \text{VII-2-2}$$

Φ_2 est la composante associée à la condition homogène aux parois du réservoir (vitesse radiale égale à zéro) et exprimée par:

$$\Phi_2(r, \theta, z, t) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(A_i(t) \operatorname{ch} \left(\frac{\xi_i z}{R} \right) + B_i(t) \operatorname{sh} \left(\xi_i \frac{(z-h)}{R} \right) \right) J_1' \left(\frac{\xi_i r}{R} \right) \right) \cos\theta \quad \text{VII-2-3}$$

où e_i sont les racines de $J_1'(e_i) = 0$ et J_1' désigne la dérivée de la fonction de Bessel de première espèce et de premier ordre.

$A_i(t)$ et $B_i(t)$ sont des constantes arbitraires déterminées par les conditions aux limites à $z=0$ et $z=h$ respectivement et sont données par:

$$A_i(t) = - \frac{(2R[\dot{u}(t) + h\dot{\alpha}(t)])}{([\xi_i^2 - 1] J_1(\xi_i) \operatorname{ch}(\xi_i \frac{h}{R}))} \quad \text{VII-2-4}$$

$$B_i(t) = - \frac{(4R^2 \dot{\alpha}(t))}{(\xi_i (\xi_i^2 - 1) J_1(\xi_i) \operatorname{ch}(\xi_i \frac{h}{R}))} \quad \text{VII-2-5}$$

et Φ_3 prend la forme:

$$\Phi_3 = \sum_{j=1}^{\infty} C_j(t) I_1(\lambda_j r) \cdot \cos(\lambda_j z) \cdot \cos\theta \quad \text{VII-2-6}$$

où $\lambda_j = (2j-1)\pi/2h$ et I_1 fonction de Bessel modifiée de première

espèce et de premier ordre.

Par la condition limite 2; on peut obtenir les expressions suivantes pour les $C_j(t)$:

$$C_j(t) = \frac{2}{(\lambda_j I_1(\lambda_j R) h)} \cdot \int_0^h \dot{w}(z, t) \cdot \cos(\lambda_j z) dz \quad \text{VII-2-7}$$

La pression hydrodynamique p est reliée au potentiel de vitesse par la formule:

$$p(r, \theta, z, t) = -\rho \frac{(\partial \Phi(r, \theta, z, t))}{(\partial t)} \quad \text{VII-2-8}$$

3- Modèle mécanique équivalent

Le modèle mécanique équivalent présentant un réservoir cylindrique flexible est illustré sur la figure VII-2-2 (a et b). La masse m_f qui est localisée à une hauteur h_f représente la contribution de la composante de la pression de courte période dans la vibration des parois relative à la base.

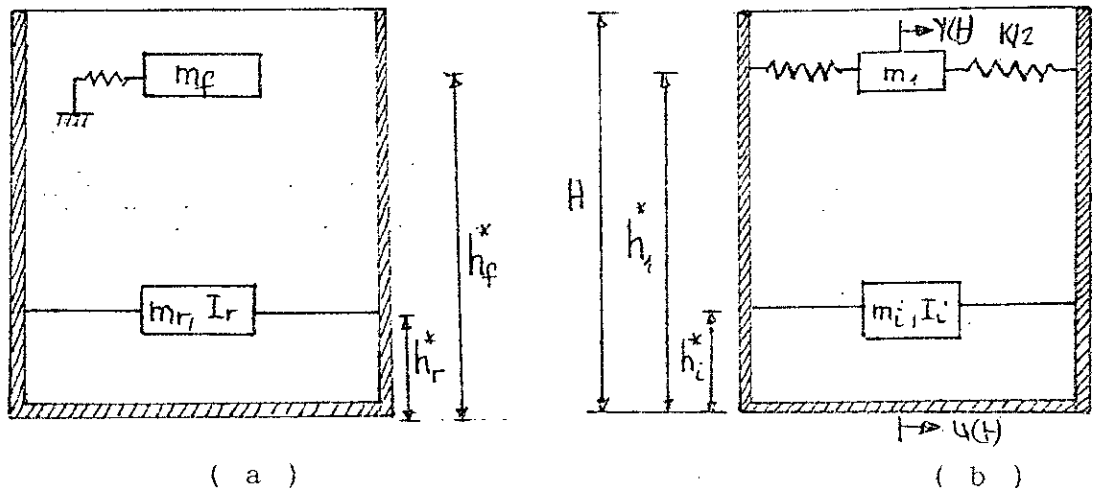


Figure VII-2-2 Modèle mécanique équivalent (réservoir flexible)

De même, la masse impulsive m_i est localisée à une hauteur h_i .

(l'exposant * indiquant que les hauteurs incluent l'effet de la variation de pression sur la base ($+M_b(t)$)).

En comparant les expressions des efforts résultants de la théorie et ceux du modèle on peut obtenir les paramètres suivants du modèle

(voir Annexe C3.) :

$$m_I = \gamma_2 m$$

$$h_I^* = \frac{\gamma_3}{\gamma_2}$$

$$m_f = \frac{\gamma_1^2}{\gamma_7} m$$

$$h_f^* = \frac{(\gamma_4 h)}{\gamma_1}$$

VII-2-9

$$m_I h_I^{*2} + I_I = \gamma_6 m h$$

où encore par les figures VII-2-3

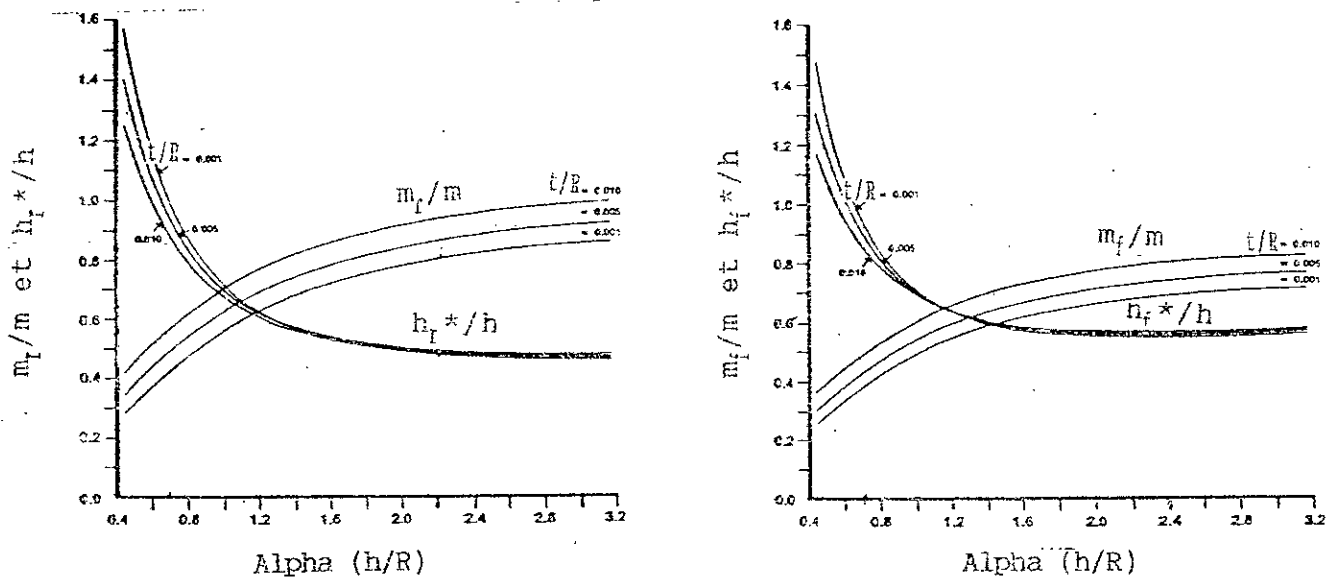


Figure VII-2-3 Paramètres du modèle de Haroun et Ellaithy [24].

Tableau VII-2-1 Valeurs des coefficients γ_i

$$\gamma_1 = \frac{1}{h} \left(\int_0^h \psi(z) dz - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch}(\beta_i)} \right) \cdot \int_0^h \psi(z) \operatorname{ch} \beta_i dz \right)$$

$$\gamma_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(2 \operatorname{th} \beta_i)}{(\beta_i (\xi_i^2 - 1))} \right)$$

$$\gamma_3 = h \left(\gamma_2 - 0,5 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(4 \operatorname{ch} \beta_i - 1)}{(\beta_i^2 (\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch} \beta_i)} \right) \right)$$

$$\gamma_4 = \left(\frac{1}{h} \right) \int_0^h z \psi(z) dz - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch} \beta_i} \right) \left(\int_0^h \psi(z) \operatorname{ch} \beta_i dz \right)$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \left(4 \frac{\left(\frac{R}{H} \right)}{(\xi_i (\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch} \beta_i)} \right) \left(\int_0^h \psi(z) \operatorname{sh} \left(\xi_i \frac{(z-h)}{R} \right) dz \right)$$

$$\gamma_5 = \frac{\gamma_3}{h}$$

$$\gamma_6 = h \left(\gamma_2 - 0,17 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(8 \operatorname{th} \beta_i)}{(\beta_i^2 (\xi_i^2 - 1))} \right) \right) - \sum_{i=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{(4 - \operatorname{ch} \beta_i)}{(\beta_i^2 (\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch} \beta_i)} \right)$$

$$\gamma_7 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(I_1(\lambda_i R))}{(R \lambda_i I_1(\lambda_i R) h^2)} \right) \left(\int_0^h \psi(z) \cos(\lambda_i x) dx \right)^2$$

où $\alpha = h/R$ et $\beta_i = \xi_i \cdot \alpha$

3-1- Introduction

Le modèle s'inspire de la méthode de Housner modifiée et le calcul de la pulsation fondamentale du système coque-masse impulsive est basée sur les expressions simplifiées, données par la référence [22]. Les expressions sont des polynômes cubiques dont la variable est le rapport hauteur sur diamètre. Ils donnent aussi des expressions simples, mais précises pour déterminer les expressions des pressions hydrodynamiques des contraintes dans la coque, des efforts tranchants et des moments de renversements.

Les réservoirs traités sont caractérisés par des rapports (H/D) hauteur sur diamètre du réservoir se trouvant dans l'intervalle [0,1 ; 1,5].

Les trois cas de figures, réservoir vide, complètement et partiellement rempli de liquide peuvent être traités.

3-2- Suppressions hydrodynamiques impulsives

L'expression de la pression impulsive s'exerçant sur les parois est donnée par [22]:

$$P_1(z, \theta) = \left(\rho_L a_m H \left(1 - \frac{z}{H} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{H} \right)^2 \sqrt{3} \operatorname{th} \left(\sqrt{3} \frac{D}{2h} \right) + \rho_L \psi \left(\frac{z}{H} \right) (S_a - a_m) H \left(1 - \left(\frac{z}{H} \right)^2 \right) \right) \cos \theta$$

où h et H représentent respectivement la hauteur du fluide et la hauteur du réservoirs.

La première partie ($\operatorname{th}(\cdot)$) de l'expression est la pression impulsive d'un réservoir rigide alors que la seconde partie représente la contribution de la flexibilité de la coque. Le terme $[1 - (z/H)^2]$ gouverne la variation de la pression le long de la hauteur. Le terme $\psi(z/H)$, qui représente la configuration de déformée du réservoir régit la variation de l'accélération le long de la paroi.

La configuration de la déformée $\psi(z/H)$ est donnée par:

Pour $0 < z/H < z_m/H$:

$$\Psi\left(\frac{z}{H}\right) = \sin\left(\frac{z}{(2 \cdot z_m)}\right) \quad \text{VII-3-2}$$

Pour $z_m/H < z/H \leq 0,1$:

$$\Psi\left(\frac{z}{H}\right) = \sin\left(\frac{\left(1,0 - \frac{z}{H}\right)}{\left(1,0 - \frac{z_m}{H}\right)}\right) \quad \text{VII-3-3}$$

où z_m/H représente la hauteur adimensionnel du réservoir où l'accélération des parois atteint sa valeur maximale. Les graphes typiques de (z_m/H) fonction de (H/D) pour les paramètres $h/H = 0,5$ et 1 sont présentés sur la Figure (VII-3-2)

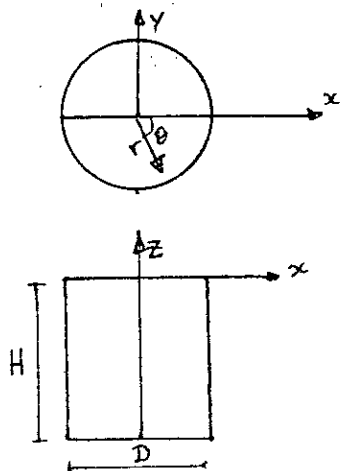


Figure VII-3-1: Système d'axe

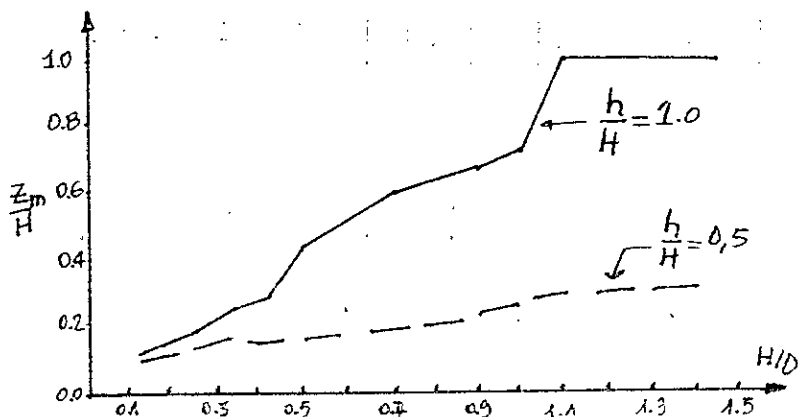


Figure VII-3-2: Localisation de l'accélération max du mur

3-3- Détermination de la pulsation fondamentale

Les expressions pour la détermination de la fréquence fondamentale (f) pour les réservoirs vides, complètement et partiellement remplis avec du liquide sont données par [19]:

Réservoir vide:

$$f = C_f \cdot \frac{\left(\bar{F}\left(\frac{H}{D}\right)\right)}{D} \cdot \sqrt{\left(\frac{(E \cdot \rho_s)}{(E_s \cdot \rho)}\right)} \quad \text{VII-3-4}$$

Réservoir complètement rempli:

$$f = C_f \cdot \frac{\left(\bar{f} \frac{H}{D}\right)}{D} \sqrt{\left(100t \cdot \frac{(\rho_s \cdot \rho_w \cdot E)}{(\rho_L \cdot \rho \cdot D \cdot E_\theta)}\right)} \quad \text{VII-3-5}$$

Réservoir partiellement rempli:

$$f = C_f \cdot \frac{\left(\bar{f} \frac{H}{D}\right)}{D} \left(\sqrt{\left(\frac{100 \cdot t \cdot \rho_s \rho_w \cdot E}{\rho_L \cdot \rho \cdot D \cdot E_\theta}\right)} + \sqrt{\left(\frac{50 \cdot \rho_w \cdot E}{\rho_L \cdot D \cdot E_\theta}\right)} \right) \quad \text{VII-3-6}$$

où f est la fréquence du système coque-m_i en Hz.

f̄(H/D) est la fréquence sans dimension donnée par:

$$\bar{f} \left(\frac{H}{D}\right) = C_1 + C_2 \left(\frac{H}{D}\right) + C_3 \left(\frac{H}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{H}{D}\right)^3 \quad \text{VII-3-7}$$

Les coefficients C_i sont présentés dans les tableaux VII-3-1, VII-3-2 et VII-3-3 respectivement pour les réservoirs vides, complètement et partiellement remplis de liquide.

- C_f = 5252,0 ft/sec est une fonction de la fréquence,
- D : Diamètre en feet (pied),
- E : Module de Young en ksi (E_s = 30000 ksi Acier),
- t : Epaisseur moyenne du réservoir en inch (pouce),
- ρ : Poids volumique des murs du réservoir en lb-sec²/in⁴,
- ρ_L : poids volumique du liquide en lb-sec²/in⁴,
- ρ_s = 0,000733 lb-sec²/in⁴ Acier
- ρ_w = 0,000094 lb-sec²/in⁴ Eau .

Tableau VII.3.1: Coefficients C_i pour les réservoirs vides

Intervalle	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
0,1 ≤ H/D ≤ 0,65	1,01233	0,262992	-4,10171	3,76038
0,65 < H/D ≤ 1,5	1,08245	-1,34536	0,686224	-0,128323

Tableau VII.3.2: Coefficients C_i pour les réservoirs partiellement remplis

Intervalle	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
0,1 ≤ H/D ≤ 0,4	1,76195	-14,0309	44,9335	-48,4143
0,4 < H/D ≤ 1,5	0,369341	-0,401425	0,215224	-0,049211

Tableau VII.2.3: Coefficients C_i pour les réservoirs complètement remplis

Intervalle	C_1	C_2	C_3	C_4
$0,1 < H/D \leq 0,4$	0,801874	-5,76702	17,4727	-17,9596
$0,4 \leq H/D \leq 1,5$	0,256054	-0,316141	0,148879	-0,02442073

3-4- Effort tranchant et moment de renversement

Pour les réservoirs flexibles remplis de liquide ayant un rapport H/D dans l'intervalle]0,1 ; 1,5], une borne supérieure de l'effort tranchant (incluant la masse du réservoir) est obtenue en remplaçant l'accélération maximale (a_g) par la valeur du spectre de l'accélération (S_g) ce qui donne:

$$Q_{i\max} = m_i \cdot S_a + [m_s \cdot S_a] \quad \text{VII-3-8}$$

où: m_i : masse du réservoir (parois).

m_s : masse impulsive (liquide).

Pour les rapports H/D plus grands que 0,5 l'équation VII-3-8 n'est pas sécuritaire. Cela vient du fait que la masse impulsive est surestimée dans cet intervalle de H/D. Une estimation plus exacte de l'effort tranchant Q_i pour H/D et h/D plus grand que 0,5 se fait par réduction de la masse impulsive. Basée sur les résultats d'une étude concernant la participation de la masse impulsive dans le mode fondamental [14] une version modifiée de l'équation VII-3-3 est proposée.

Des résultats plus précis pour l'effort tranchant impulsif (où $h/H \approx 1;0$) ayant le rapport H/D dans l'intervalle]0,5 ; 1,5] peuvent être obtenus par l'expression suivante:

$$Q_{i\max} = m_i \cdot \left(1,1 - 0,2 \left(\frac{H}{D}\right)\right) \cdot S_a + [m_s \cdot S_a] \quad \text{VII-3-9}$$

L'expression pour le moment de renversement est:

$$M_{\max}^* = \left(m_i \cdot h_i^* + m_s \cdot \frac{H}{2}\right) \cdot S_a \quad \text{VII-3-10}$$

VII.3.5-Abaques des efforts résultants pour le modèle de Tedesco:

Dans ce qui suit, nous développons des abaques de calcul des efforts tranchants, des moments de flexion et des moments de renversement.

La figure VII-3-3, fournit l'abaque de l'effort tranchant sans dimensions.

$$(\bar{Q}) = \frac{Q}{Q_0}$$

$$\text{où } Q_0 = \rho \cdot R^3 \cdot S_a$$

Les quantités ρ , S_{a0} , S_a et R représentent la masse volumique du liquide, la réponse en accélération de l'oscillation du fluide, la réponse en accélération du système fluide-coque et le rayon du réservoir.

La figure VII-3-4, montre l'abaque du moment de flexion sans dimension.

$$(\bar{M}_f) = \frac{M}{M_0}$$

$$\text{où } M_0 = \rho \cdot R \cdot S_a$$

Enfin la figure VII-3-5, présente l'abaque du moment de renversement sans dimension.

$$(\bar{M}_r) = \frac{M^*}{M_0}$$

$Q_0 = \rho * R^3 * S_0$
 ρ = Masse volumique du liquide
 S_0 = Spectre d'accélération du système coque-mi
 R = Rayon du réservoir
 S_{00} = Spectre d'accélération de l'oscillation

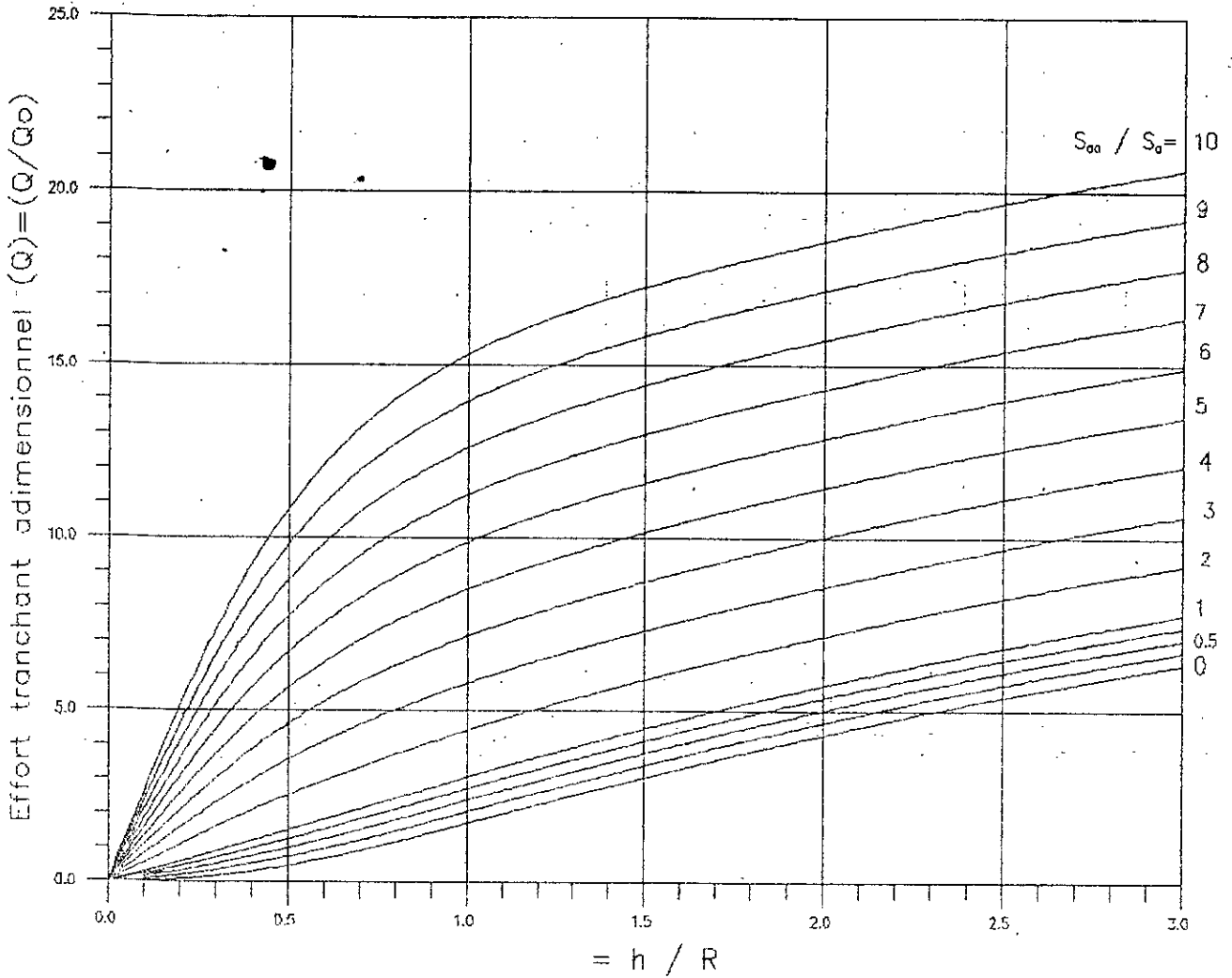


Figure VII-3-3 : Abaque de l'effort tranchant (Modèle de Tedesco)

- $M_0 = \rho \cdot R^4 \cdot S_0$
 ρ = Masse volumique du liquide
 S_0 = Spectre d'accélération du système flexible (coque- m_0)
 R = Rayon du réservoir
 S_{∞} = Spectre d'accélération de l'oscillation du liquide

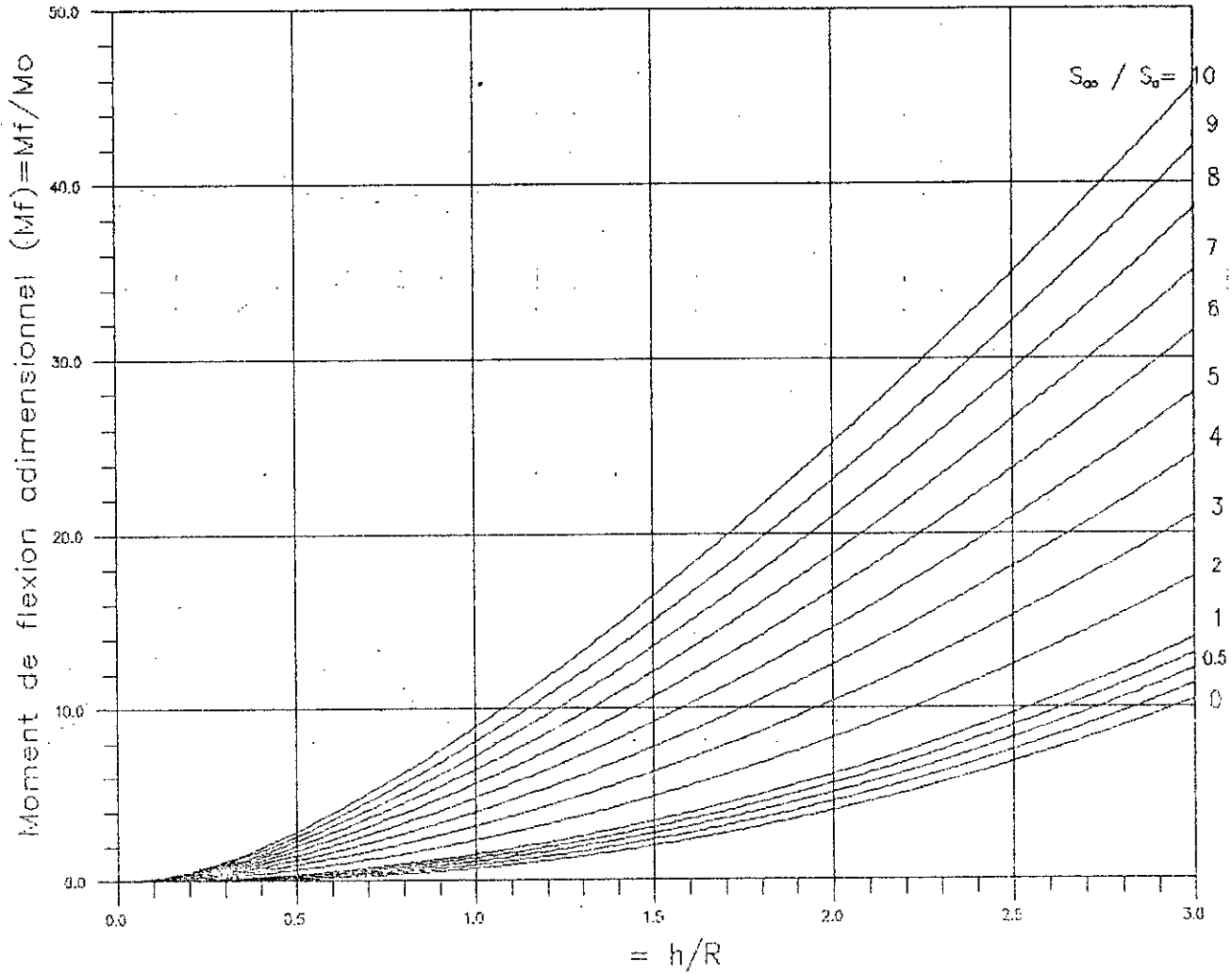


Figure VII-3-4 : Abaque du moment de flexion (Modèle de Tedesco)

- $M_0 = \rho \cdot R^4 \cdot S_0$
 ρ = Masse volumique du liquide
 S_0 = Spectre d'accélération du système flexible (coque-m₀)
 R = Rayon du réservoir
 S_{∞} = Spectre d'accélération de l'oscillation du liquide

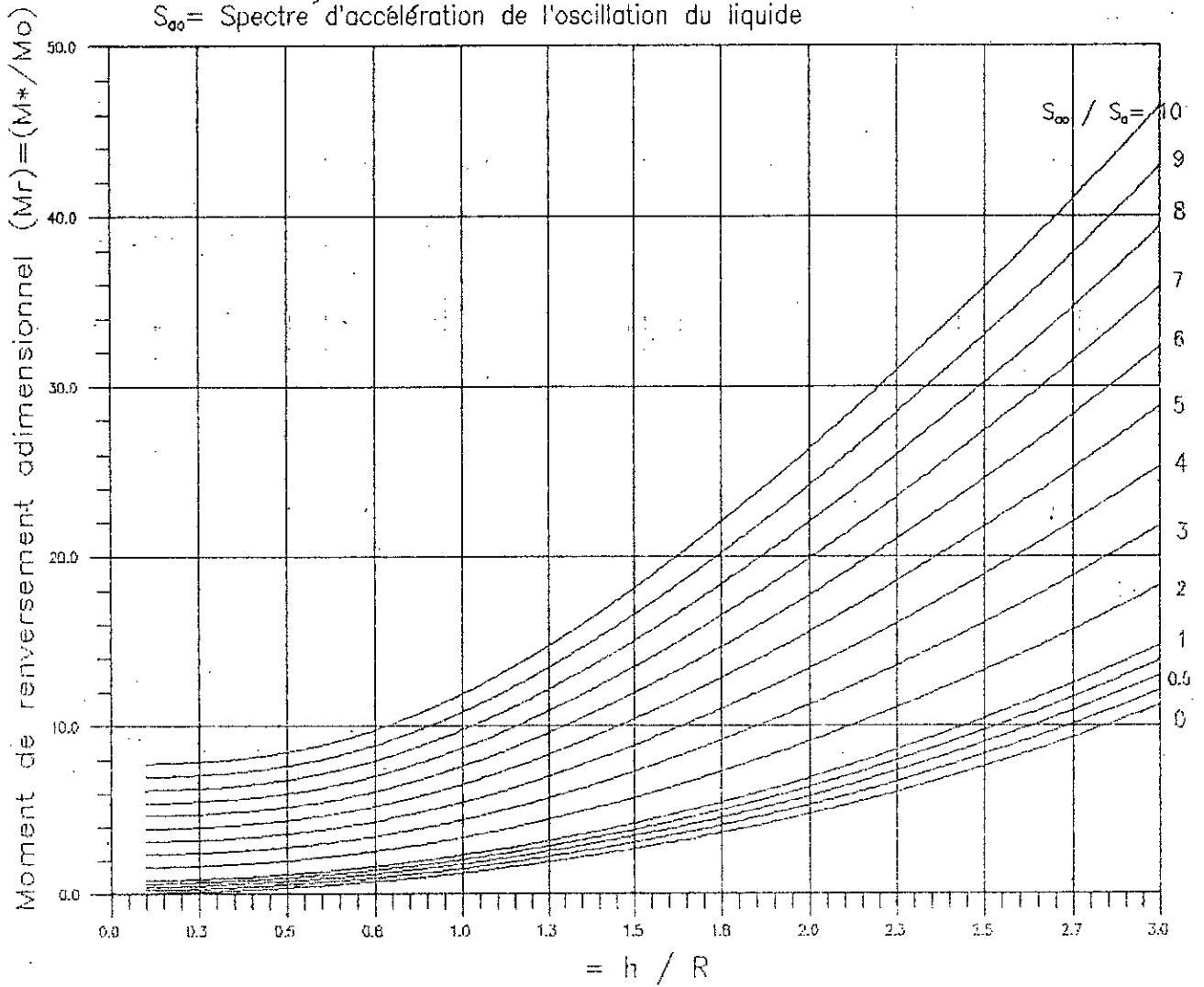


Figure VII-3-5 : Abaque du moment de renversement (Modele de Tedesco)

VII-4 Comparaisons et conclusions

Les comparaisons sont effectuées en examinant à l'instar de la méthodologie adoptée pour les réservoirs rigides, les variations des efforts adimensionnels ((Q), (M_r) et (M_f)) en fonction de α (rapport h/R), et ceci pour le cas le plus défavorable c'est à dire le cas plein (β=h/H=1) et aussi pour un rapport épaisseur rayon égale à 0.001 (t/R=.001).

-Les efforts tranchants adimensionnels sont désignés par les rapports:

$$(Q) = \frac{Q_i}{Q_0} \quad \text{où} \quad Q_0 = \frac{m S_a}{\pi}$$

l'indice i étant associé aux actions d'impulsion

-Les bras de levier adimensionnels sont donnés par les rapport: hi/h

-les moments de flexion et de renversements adimensionnels sont désignés respectivement par les relations:

$$(M_f) = \frac{M_i}{M_0} \quad \text{et} \quad (M_r) = \frac{M_i^*}{M_0}$$

Où :

$$M_0 = \frac{m \cdot h \cdot S_a}{\pi}$$

La validité des résultats obtenus pour chaque modèle est établie par comparaison directe aux résultats déduits de l'application de la méthode des éléments finis ([32],[16]), (tableaux comparatifs : VII-5-1 à 4). Les notations suivantes sont utilisées dans ces tableaux:

M5: Méthode de Housner modifiée

M6: Modèle de Tedesco et al.

M7: Modèle de Haroun et Ellaithy.

Une phase critique dans le calcul des réservoirs à parois flexibles concerne la détermination de la pulsation fondamentale permettant de déduire la réponse spectrale en accélération associée. C'est pourquoi dans ce qui suit, nous comparerons d'abord les valeurs des pulsations fondamentales (des réservoirs pleins) calculées d'après chaque modèle avec celles obtenue par application de la méthode des éléments finis [16,32]. Nous comparerons ensuite les efforts résultants avec ceux calculés en utilisant la méthode des éléments finis [16,32]. Par

ailleurs, Comme souligné précédemment la flexibilité des parois n'affectant pas les oscillations du liquide, les efforts d'oscillations peuvent normalement être calculés avec l'hypothèse de parois rigides de sorte que dans ce paragraphe seuls les efforts d'impulsion seront comparés.

VII-4-1 : Comparaison des pulsations fondamentales des réservoirs pleins

La pulsation du système coque-fluide passif calculée pour chacun des trois modèles d'interaction ainsi que celle présentée par Sakai [30] sont comparées (Tableau VII-4-1) avec celles obtenus par application de la méthode des éléments finis.

Il est aussi rappelé que la pulsation fondamentale d'un réservoir rempli de fluide donnée [30] par la formule :

$$\omega = \lambda \sqrt{\left(\frac{\pi^3 E t}{m}\right)}$$

$$\text{où : } \lambda = 0.067 \left(\frac{h}{D}\right)^2 - 0.3 \left(\frac{h}{D}\right) + 0.46$$

Les rapports ω/ω_0 où ω_0 représente la pulsation d'un réservoir plein se comportant comme une poutre cantilever en flexion et est donnée par la formule suivante:

$$\omega_0 = \frac{2.486}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_l}{\rho_s} \cdot \frac{R}{t}}} \cdot \frac{R}{h^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho_s}}$$

4-1-1 Approximation de Sakai [30] :

L'erreur relative varie entre 4% et 10% et entre 0% et 40% pour $\alpha > 1.5$.

Pour le domaine réduit $\alpha \geq 0.3$ et $\alpha \leq 4.3$ ([0.3;4.3]) l'erreur n'excède pas 7%. Il s'ensuit que la formule proposée constitue donc une bonne approximation.

4-1-2 Approximation de Dunkerley pour le modèle de Housner modifié (M5):
 L'erreur varie entre 120% et 400% pour $\alpha \leq 1,5$ et entre 120% et 250% pour $\alpha > 1,5$. Cette approximation est à écartée .

Les écarts sensibles peuvent s'expliquer par le fait que le comportement des coques ne peut être simulé seulement par celui d'une poutre cantilever, surtout notamment lorsque le réservoir est peu profond ou lorsque le mode fondamental est dominé par la déformation radiale de la coque régit essentiellement par la distorsion de la section transversale.

4-1-3 Approximation polynomiale de Tedesco et al. (M6):

L'erreur ^{varie} entre 1% et 17% pour $\alpha \leq 1,5$ et entre 0% et 20% pour $\alpha > 1,5$. Toutefois, pour le domaine plus réduit, α appartenant à $[0.3;0.7] \cup [2.5;5]$ l'erreur relative sur la pulsation ne dépasse pas 6%.

4-1-4 Approximation polynomiale de Haroun (M7)

L'erreur varie entre 70% et 140% pour $\alpha \leq 1,5$ et entre 0% et 200% pour $\alpha > 1,5$. Pour l'intervalle $[2.5;3.8]$ l'erreur ne dépasse pas 6% de sorte que l'approximation proposée n'est valable que pour un α très réduit appartenant à cet intervalle ($\alpha \in [2.6;3.8]$).

En résumé :

Les résultats obtenus montrent clairement que la formule de Sakai, valable pour des réservoirs flexibles pratiquement remplis de fluide, fournit les meilleurs approximations pour l'évaluation des fréquences propres de vibration et ce pour le domaine de validité défini par la plage de valeurs $.3 \leq \alpha \leq 4.3$ (Domaine d'application le plus courant confère figure ci-après). On pourra utilisé l'abaque de la figure VII-4-1 pour déduire la pulsation du système couplé, coque flexible-fluide passif, pour un réservoir pratiquement rempli.

————— Approximation de Sakai

----- Approximation de Tedesco et al.

===== Approximation de Haroun et Ellaithy

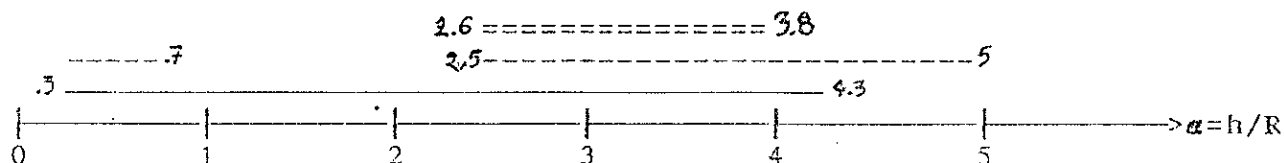


Tableau VII.4.1: Pulsations fondamentales du système coque flexible-fluide passif (w/w₀) pour t/R=.001 et β=h/H=1

$\alpha=h/R$	Ref.30	M7	M6	M5	MEF
0.2	0.035	0.078	0.038	0.292	0.032
0.3	0.062	0.136	0.060	0.378	0.057
0.4	0.092	0.198	0.080	0.451	0.089
0.5	0.124	0.263	0.105	0.515	0.116
0.6	0.157	0.326	0.141	0.574	0.149
0.7	0.192	0.388	0.185	0.629	0.183
0.8	0.226	0.447	0.239	0.682	0.215
0.9	0.260	0.502	0.282	0.734	0.247
1.0	0.294	0.553	0.325	0.787	0.279
1.1	0.328	0.600	0.366	0.839	0.312
1.2	0.360	0.641	0.406	0.892	0.340
1.3	0.392	0.677	0.443	0.946	0.372
1.4	0.422	0.708	0.478	1.000	0.407
1.5	0.451	0.733	0.510	0.47	0.435
1.6	0.479	0.754	0.540	1.000	0.447
1.7	0.506	0.769	0.567	1.054	0.472
1.8	0.531	0.780	0.591	1.110	0.496
1.9	0.555	0.786	0.613	1.166	0.520
2.0	0.578	0.789	0.632	1.223	0.544
2.1	0.600	0.788	0.650	1.281	0.568
2.2	0.602	0.785	0.665	1.340	0.591
2.3	0.640	0.779	0.679	1.400	0.615
2.4	0.658	0.771	0.691	1.761	0.638
2.5	0.675	0.762	0.703	1.523	0.661
2.6	0.692	0.753	0.714	1.585	0.683
2.7	0.708	0.745	0.725	1.679	0.705
2.8	0.723	0.738	0.736	1.717	0.726
2.9	0.738	0.733	0.748	1.779	0.747
3.0	0.752	0.732	0.760	1.876	0.767
3.1	0.767	0.734	0.774	1.913	0.787
3.2	0.781	0.742	0.788	1.982	0.806
3.3	0.796	0.755	0.803	2.052	0.824
3.4	0.811	0.776	0.820	2.122	0.841
3.5	0.827	0.804	0.838	2.194	0.857
3.6	0.843	0.843	0.858	2.267	0.872
3.7	0.861	0.892	0.878	2.341	0.886
3.8	0.880	0.952	0.898	2.416	0.899
3.9	0.900	1.025	0.919	2.492	0.910
4.0	0.922	1.113	0.940	2.569	0.921
4.1	0.946	1.215	0.959	2.678	0.930
4.2	0.973	1.335	0.977	2.727	0.940
4.3	1.001	1.473	0.992	2.808	0.945
4.4	1.033	1.630	1.002	2.890	0.950
4.5	1.068	1.808	1.008	2.973	0.955
4.6	1.106	2.008	1.007	3.057	0.958
4.7	1.147	2.231	0.997	3.134	0.960
4.8	1.193	2.480	0.977	3.229	0.961
4.9	1.242	2.756	0.945	3.317	0.961
5.0	1.296	3.060	0.898	3.407	0.960

M5 : Modèle de Housner modifiée.
M6 : Modèle de Tedesco et al.
M7 : Modèle de Haroun et Eilaithy.

Remarque :

Pour déduire la réponse spectrale en accélération, associé à la pulsation fondamentale du système coque flexible-fluide passif, il y a lieu de considérer différentes hauteur du fluide pour tomber sur la plage des périodes où la réponse spectrale en accélération est amplifiée.

4-2 Comparaison des efforts

4-2-1 Modèle de Housner modifié (M5):

L'erreur de l'effort tranchant varie entre 1% et 10% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 10% et 40% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-2).

Pour $\alpha \leq 1.3$ l'erreur ne dépasse pas 6%.

L'erreur du bras de levier du moment de flexion varie entre 4% et 8% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 7% et 30% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-3).

L'erreur du bras de levier du moment de renversement varie entre 4% et 8% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 7% et 30% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-4).

L'erreur du moment de flexion varie entre 1% et 25% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 0% et 3% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-5).

L'erreur du moment de renversement varie entre 12% et 14% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 8% et 14% pour $\alpha > 1.5$ (Tab VII-4-6).

En résumé, l'erreur sur les efforts impulsifs varie entre 12% et 25% pour les réservoirs profond et entre 8% et 40% pour les réservoirs profonds.

Comme conclusion, nous dirons que cette méthode (M6) n'est pas valable du fait de ces erreurs très élevées.

4-2-2 Modèle de Tedesco et al. (M6) :

L'erreur de l'effort tranchant varie entre 1% et 6% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 0% et 15% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-2).

Pour $\alpha \leq 3.8$ l'erreur ne dépasse pas 6%.

L'erreur du bras de levier du moment de flexion varie entre 2% et 7% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 1% et 30% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-3).

L'erreur du bras de levier du moment de renversement varie entre 0% et 2% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 1% et 25% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-4).

L'erreur du moment de flexion varie entre 0% et 40% pour $\alpha \leq 1.5$ et

entre 0% et 8% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-5).

Pour $\alpha \in [0.5 ; 1.2] \cup [2.0 ; 5]$ l'erreur du moment de flexion ne dépasse pas 6%.

L'erreur du moment de renversement varie entre 3% et 10% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 5% et 7% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-6).

Pour $\alpha \geq 0.2$ l'erreur maximale du moment de renversement est de 6%.

En résumé, l'erreur sur les efforts impulsifs varie entre 1% et 40% pour les réservoirs peu profonds et entre 1% et 15% pour les réservoirs profonds.

Comme conclusion, nous dirons que la méthode de Housner modifiée avec modification de la masse impulsive (M6) n'est valable que pour le domaine suivant de $\alpha [0.2 ; 1.2] \cup [2.0 ; 3.3]$ où l'erreur ne dépasse pas 6%.

4-2-3 Modèle de Haroun et Ellaithy (M7)

L'erreur de l'effort tranchant varie entre 4% et 15% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 0% et 50% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-2).

Pour $\alpha \in [0.3;0.7] \cup [1.7;4.2]$ l'erreur de l'effort tranchant ne dépasse pas 6%.

L'erreur du bras de levier du moment de flexion varie entre 9% et 15% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 1% et 100% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-3).

L'erreur du bras de levier du moment de renversement varie entre 2% et 35% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 1% et 850% pour $\alpha > 1.5$ (Tab. VII-4-4).

L'erreur du moment de flexion varie entre 0% et 20% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 0% et 100% pour $\alpha > 1.5$ (Tab VII-5-3).

Pour $\alpha \in [0.4;3.5]$ l'erreur du moment de flexion ne dépasse pas 6%.

L'erreur du moment de renversement varie entre 3% et 20% pour $\alpha \leq 1.5$ et entre 0% et 100% pour $\alpha > 1.5$ (Tab VII-5-4).

Pour $\alpha \in [1.2;3.3]$ l'erreur du moment de renversement ne dépasse pas 6%.

En résumé, l'erreur pour les efforts impulsifs varie entre 0% et 20% pour les réservoirs peu profonds et entre 0% et 100% pour les réservoirs profonds.

Comme conclusion, nous dirons que le modèle de Haroun et Ellaithy (M7) n'est valable que pour le domaine suivant de $\alpha \in [1.2;3.3]$ où l'erreur ne dépasse pas 6%.

Tableau VII.4.2: Comparaison des efforts tranchants adimensionnels (Q) (Actions impulsives).

	$\alpha=h/R$	M5	M6	M7	MEF
R.	0.2	0.363	0.366	0.291	0.342
	0.3	0.544	0.557	0.506	0.534
P	0.4	0.725	0.752	0.701	0.729
E	0.5	0.905	0.945	0.876	0.917
U	0.6	1.081	1.130	1.033	1.100
	0.7	1.125	1.302	1.175	1.266
P	0.8	1.413	1.458	1.301	1.420
R	0.9	1.564	1.598	1.414	1.554
O	1.0	1.703	1.722	1.514	1.675
F	1.1	1.830	1.844	1.604	1.778
O	1.2	1.976	1.890	1.683	1.863
N	1.3	2.050	1.954	1.753	1.932
D	1.4	2.144	2.006	1.816	1.989
S	1.5	2.228	2.050	1.871	2.036
<hr/>					
R.	1.6	2.284	2.082	1.920	2.070
	1.7	2.334	2.110	1.963	2.096
	1.8	2.379	2.131	2.001	2.114
	1.9	2.419	2.147	2.035	2.127
P	2.0	2.455	2.158	2.066	2.136
	2.1	2.488	2.165	2.092	2.143
R	2.2	2.518	2.169	2.117	2.146
	2.3	2.545	2.170	2.138	2.146
O	2.4	2.570	2.168	2.157	2.149
	2.5	2.592	2.164	2.174	2.149
F	2.6	2.614	2.158	2.189	2.149
	2.7	2.633	2.150	2.202	2.152
O	2.8	2.651	2.140	2.213	2.149
	2.9	2.668	2.129	2.222	2.146
N	3.0	2.684	2.116	2.229	2.146
	3.1	2.639	2.102	2.233	2.146
D	3.2	2.713	2.087	2.234	2.143
	3.3	2.726	2.071	2.233	2.143
S	3.4	2.738	2.054	2.227	2.140
	3.5	2.750	2.037	2.217	2.136
	3.6	2.760	2.019	2.203	2.130
	3.7	2.770	1.000	2.183	2.124
	3.8	2.781	1.980	2.157	2.117
	3.9	2.780	1.960	2.124	2.111
	4.0	2.798	1.938	2.083	2.104
	4.1	2.807	1.917	2.033	2.099
	4.2	2.815	1.897	1.974	2.092
	4.3	2.822	1.901	1.904	2.086
	4.4	2.380	1.850	1.821	2.080
	4.5	2.836	1.827	1.726	2.077
	4.6	2.843	1.804	1.615	2.074
	4.7	2.849	1.780	1.489	2.067
	4.8	2.855	1.755	1.346	2.061
	4.9	2.867	1.731	1.183	2.052
	5.0	2.867	1.706	1.001	2.036

M5 : Modèle de Housner modifiée.

M6 : Modèle de Tedesco et al. (Q) = Q/Q₀ où Q₀ = m.Sa/π

M7 : Modèle de Haroun et Ellaithy.

Tableau VII.4.3: Comparaisons des bras de levier adimensionnels (hi/h) de la résultante des pressions d'impulsion (Cf. moment de flexion)

	$\alpha=h/R$	M6	M5	M7	MEF
R.	0.2	0.420	0.375	0.461	0.392
	0.3	0.410	0.375	0.395	0.308
P	0.4	0.405	0.375	0.378	0.384
	0.5	0.403	0.375	0.345	0.410
E	0.6	0.403	0.375	0.417	0.415
	0.7	0.403	0.375	0.433	0.412
U	0.8	0.403	0.375	0.434	0.407
	0.9	0.404	0.375	0.431	0.403
P	1.0	0.405	0.375	0.429	0.398
	1.1	0.407	0.375	0.430	0.396
R	1.2	0.408	0.375	0.433	0.396
	1.3	0.410	0.375	0.436	0.397
O	1.4	0.412	0.375	0.438	0.400
	1.5	0.414	0.375	0.441	0.405

R.	1.6	0.416	0.381	0.443	0.411
	1.7	0.417	0.387	0.444	0.419
P	1.8	0.419	0.392	0.446	0.428
	1.9	0.421	0.397	0.448	0.437
E	2.0	0.423	0.401	0.451	0.447
	2.1	0.425	0.405	0.455	0.456
U	2.2	0.427	0.409	0.459	0.466
	2.3	0.428	0.413	0.461	0.473
R	2.4	0.430	0.416	0.470	0.484
	2.5	0.432	0.419	0.476	0.493
O	2.6	0.433	0.422	0.481	0.502
	2.7	0.435	0.425	0.486	0.509
P	2.8	0.436	0.427	0.489	0.518
	2.9	0.438	0.429	0.491	0.525
E	3.0	0.439	0.432	0.494	0.532
	3.1	0.440	0.434	0.497	0.538
U	3.2	0.442	0.435	0.505	0.545
	3.3	0.443	0.437	0.519	0.551
R	3.4	0.444	0.439	0.545	0.554
	3.5	0.445	0.440	0.591	0.558
O	3.6	0.447	0.442	0.665	0.564
	3.7	0.448	0.444	0.779	0.571
P	3.8	0.449	0.445	0.948	0.577
	3.9	0.450	0.446	1.191	0.583
E	4.0	0.451	0.448	1.528	0.589
	4.1	0.452	0.449	2.000	0.594
U	4.2	0.452	0.450	2.597	0.600
	4.3	0.453	0.451	3.400	0.604
R	4.4	0.454	0.452	4.435	0.609
	4.5	0.455	0.453	5.748	0.612
O	4.6	0.458	0.454	7.034	0.616
	4.7	0.457	0.455	9.469	0.620
P	4.8	0.457	0.456	11.99	0.625
	4.9	0.458	0.457	15.11	0.629
E	5.0	0.459	0.458	18.53	0.637

M5 : Modèle de Housner modifiée.
M6 : Modèle de Tedesco et al.
M7 : Modèle de Haroun et Ellaithy.

Tableau VII.4.4: Comparaison des bras de levier adimensionnels (h_i/h) de la résultante des pressions d'impulsion (Cf. moment de renversement)

	$e=h/R$	M6	M5	M7	MEF
R.	0.2	3.994	4.205	2.406	3.974
	0.3	2.600	2.762	1.915	2.519
P	0.4	1.882	2.041	1.549	1.820
	0.5	1.460	1.610	1.274	1.424
E	0.6	1.190	1.327	1.083	1.168
	0.7	1.010	1.130	0.930	0.998
P	0.8	0.882	0.986	0.826	0.875
	0.9	0.790	0.879	0.752	0.786
O	1.0	0.722	0.798	0.700	0.718
	1.1	0.670	0.733	0.662	0.660
O	1.2	0.630	0.682	0.635	0.627
	1.3	0.600	0.641	0.615	0.597
N	1.4	0.575	0.607	0.599	0.574
	1.5	0.555	0.580	0.586	0.555

R.	1.6	0.540	0.557	0.576	0.542
	1.7	0.527	0.539	0.600	0.533
P	1.8	0.516	0.525	0.559	0.528
	1.9	0.508	0.514	0.554	0.526
E	2.0	0.501	0.506	0.549	0.525
	2.1	0.495	0.499	0.548	0.525
R	2.2	0.490	0.493	0.547	0.527
	2.3	0.486	0.489	0.547	0.530
O	2.4	0.483	0.485	0.550	0.533
	2.5	0.480	0.482	0.551	0.537
F	2.6	0.478	0.480	0.552	0.540
	2.7	0.476	0.480	0.554	0.543
O	2.8	0.474	0.476	0.554	0.547
	2.9	0.473	0.475	0.555	0.550
N	3.0	0.472	0.473	0.555	0.552
	3.1	0.471	0.473	0.556	0.556
D	3.2	0.470	0.472	0.562	0.557
	3.3	0.470	0.472	0.574	0.559
S	3.4	0.469	0.472	0.600	0.561
	3.5	0.469	0.471	0.644	0.563
P	3.6	0.469	0.471	0.717	0.566
	3.7	0.468	0.417	0.830	0.569
E	3.8	0.468	0.471	0.999	0.572
	3.9	0.468	0.471	1.240	0.575
O	4.0	0.468	0.471	1.577	0.577
	4.1	0.468	0.471	2.035	0.582
N	4.2	0.468	0.471	2.646	0.586
	4.3	0.469	0.471	3.540	0.589
D	4.4	0.469	0.471	4.487	0.593
	4.5	0.469	0.471	5.794	0.595
S	4.6	0.469	0.471	7.430	0.597
	4.7	0.469	0.471	9.523	0.600
P	4.8	0.469	0.472	12.06	0.603
	4.9	0.470	0.472	15.17	0.607
E	5.0	0.470	0.472	18.93	0.615

M5 : Modèle de Housner modifiée.
M6 : Modèle de Tedesco et al.
M7 : Modèle de Haroun et Ellaithy.

Tableau VII.4.5: Comparaison des moments de flexion adimensionnels (M_f) (Actions impulsives).

	$\alpha=h/R_0$	M5	M6	M7	MEF
R.	0.2	0.136	0.159	0.134	0.022
	0.3	0.204	0.232	0.200	0.163
P	0.4	0.272	0.308	0.265	0.280
	0.5	0.339	0.383	0.302	0.376
E	0.6	0.406	0.457	0.431	0.456
	0.7	0.469	0.526	0.509	0.522
U	0.8	0.530	0.589	0.564	0.578
	0.9	0.587	0.647	0.609	0.626
P	1.0	0.639	0.700	0.650	0.667
	1.1	0.687	0.746	0.690	0.704
R	1.2	0.730	0.788	0.729	0.737
	1.3	0.770	0.827	0.764	0.767
O	1.4	0.804	0.861	0.796	0.796
	1.5	0.836	0.893	0.825	0.824
S	1.6	0.870	0.921	0.850	0.851
	1.7	0.903	0.948	0.872	0.878
P	1.8	0.933	0.972	0.892	0.904
	1.9	0.960	0.994	0.912	0.930
E	2.0	0.985	1.015	0.931	0.955
	2.1	1.009	1.034	0.951	0.978
U	2.2	1.030	1.052	0.972	1.000
	2.3	1.050	1.069	0.992	1.021
R	2.4	1.069	1.085	1.014	1.041
	2.5	1.086	1.099	1.034	1.060
O	2.6	1.103	1.113	1.052	1.078
	2.7	1.118	1.126	1.069	1.096
F	2.8	1.132	1.139	1.081	1.112
	2.9	1.145	1.151	1.092	1.127
O	3.0	1.158	1.162	1.101	1.142
	3.1	1.170	1.172	1.110	1.155
N	3.2	1.181	1.182	1.127	1.168
	3.3	1.192	1.192	1.158	1.180
D	3.4	1.202	1.201	1.214	1.192
	3.5	1.212	1.210	1.311	1.202
S	3.6	1.221	1.218	1.466	1.212
	3.7	1.229	1.226	1.701	1.222
	3.8	1.238	1.238	2.046	1.231
	3.9	1.245	1.241	2.529	1.239
	4.0	1.253	1.248	3.182	1.246
	4.1	1.260	1.255	4.07	1.254
	4.2	1.267	1.261	5.127	1.260
	4.3	1.273	1.267	6.473	1.266
	4.4	1.278	1.273	8.077	1.272
	4.5	1.286	1.279	9.921	1.277
	4.6	1.291	1.285	11.36	1.282
	4.7	1.297	1.290	14.10	1.287
	4.8	1.302	1.295	16.14	1.291
	4.9	1.308	1.300	17.87	1.296
S	5.0	1.312	1.305	18.35	1.299

M5 : Modèle de Housner modifiée.

M6 : Modèle de Tedesco et al. (M_f) = M/M_0 où $M_0 = mhSa/\pi$

M7 : Modèle de Haroun et Ellaithy.

Tableau VII.4.6: Comparaisons des moments de renversement adimensionnels (M_r) (Actions impulsives).

	$\alpha=h/R$	M5	M6	M7	MEF
R.	0.2	1.525	1.514	0.700	1.359
	0.3	1.503	1.470	0.969	1.345
P	0.4	1.408	1.428	1.086	1.327
E	0.5	1.458	1.388	1.116	1.306
U	0.6	1.436	1.350	1.119	1.285
	0.7	1.414	1.317	1.093	1.263
P	0.8	1.394	1.288	1.074	1.243
R	0.9	1.375	1.264	1.063	1.222
O	1.0	1.358	1.244	1.059	1.203
F	1.1	1.342	1.229	1.061	1.184
O	1.2	1.327	1.217	1.069	1.169
N	1.3	1.314	1.208	1.078	1.154
D	1.4	1.303	1.202	1.088	1.141
S	1.5	1.292	1.198	1.097	1.130

	1.6	1.272	1.196	1.105	1.122
R.	1.7	1.258	1.196	1.113	1.118
	1.8	1.250	1.197	1.119	1.117
	1.9	1.245	1.199	1.127	1.118
	2.0	1.242	1.201	1.135	1.121
P	2.1	1.242	1.205	1.146	1.125
	2.2	1.243	1.209	1.158	1.131
R	2.3	1.244	1.213	1.170	1.138
	2.4	1.247	1.218	1.184	1.146
O	2.5	1.250	1.222	1.198	1.153
	2.6	1.255	1.228	1.209	1.161
F	2.7	1.259	1.233	1.220	1.168
	2.8	1.263	1.238	1.227	1.175
O	2.9	1.268	1.243	1.232	1.180
	3.0	1.272	1.248	1.237	1.185
N	3.1	1.277	1.254	1.242	1.190
	3.2	1.282	1.259	1.255	1.194
D	3.3	1.286	1.264	1.282	1.197
	3.4	1.291	1.269	1.335	1.200
S	3.5	1.295	1.274	1.428	1.203
	3.6	1.300	1.279	1.579	1.205
	3.7	1.304	1.283	1.812	1.208
	3.8	1.309	1.288	2.154	1.211
	3.9	1.313	1.293	2.633	1.214
	4.0	1.317	1.298	3.284	1.218
	4.1	1.321	1.302	4.137	1.222
	4.2	1.325	1.306	5.224	1.226
	4.3	1.329	1.310	6.568	1.229
	4.4	1.333	1.314	8.170	1.233
	4.5	1.336	1.318	10.01	1.236
	4.6	1.340	1.322	12.05	1.239
	4.7	1.343	1.326	14.18	1.241
	4.8	1.347	1.329	16.23	1.243
	4.9	1.350	1.333	17.95	1.246
	5.0	1.353	1.336	18.93	1.252

M5 : Modèle de Housner modifiée.

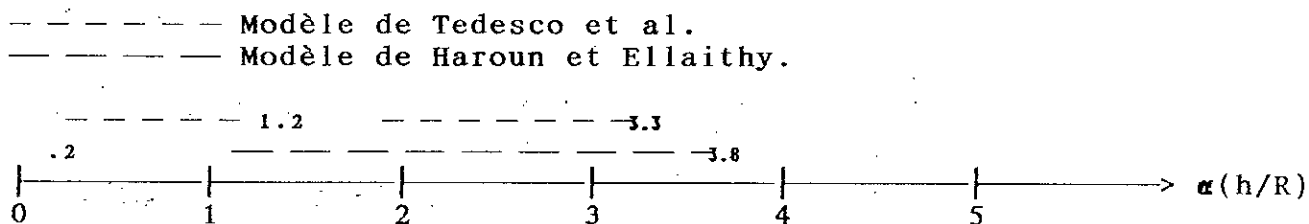
M6 : Modèle de Tedesco et al.

(Mf) = M^*/M_0 où $M_0 = mhSa/\pi$

M7 : Modèle de Haroun et Ellaithy.

Conclusion sur la comparaison des efforts :

Les résultats obtenus montrent clairement que si α appartient à l'intervalle $[.2 ; 1.2] \cup [2. ; 3.8]$ le modèle de Tedesco et al. fournit les meilleurs approximation pour l'évaluation des efforts et si α appartient à l'intervalle $[1.2 ; 3.3]$ le modèle de Haroun et Ellaithy fournit aussi de très bonnes approximations pour l'évaluation des efforts (Cf. figure ci-aprés)



En résumé, nous dirons que si α est inférieur ou égale 1.2 utilisés les abaqués du modèle de Tedesco et al. (figure VII-3-3 à VII-3-5), et si α est supérieure à 1.2 utilisés les figures du modèle de Haroun et Ellaithy (Figures VII-2-3).

VII-4-3 Comparaisons des efforts résultants des réservoirs flexibles et rigides :

Dans ce qui suit, nous allons comparé les efforts résultants des réservoirs supposé rigides et flexibles

La figure VII-4-2 montre l'effort tranchant adimensionnel :

$$(Q) = \frac{Q}{Q_0}$$

$$\text{où } Q_0 = \frac{m S_a}{\pi}$$

Les quantités m et S_a représentent la masse du fluide et le spectre d'accélération respectivement.

Dans le cas où le spectre d'accélération est proche de l'accélération du sol, nous voyons qu'à partir de α égale à un (1) la masse impulsive du réservoir flexible diminue par rapport à celle du réservoirs rigide. Dans le cas où le spectre d'accélération est amplifié l'effort tranchant est multiplié par le rapport (S_a/am).

De même les figures VII-4-3 et VII-4-4 présentent les moments de flexion et de renversement adimensionnels:

Dans ces figures les moments de flexion et de renversement des

$Q_0 = m \cdot a_m / \pi$
 m : Masse du fluide
 A_m : acceleration du sol
 π : 3.1415

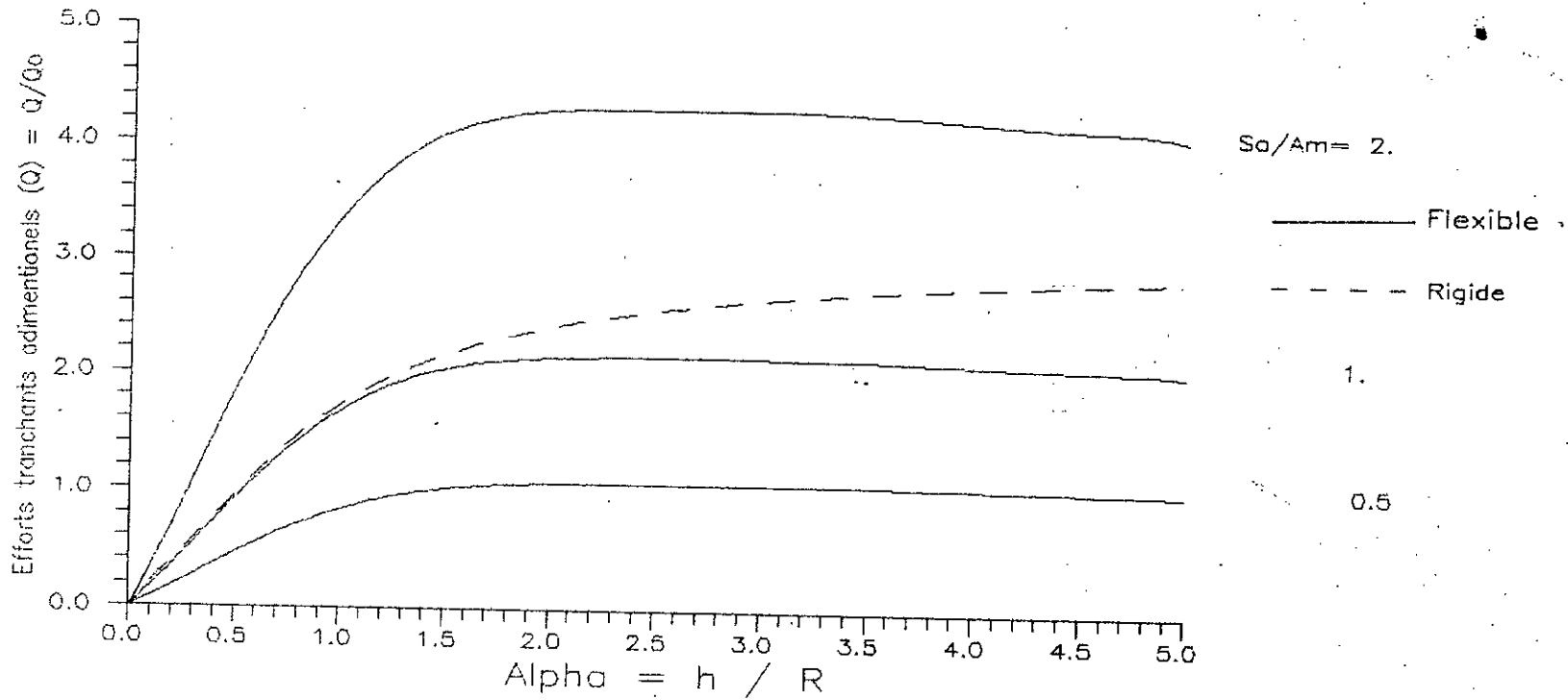


Fig VII.4.2 : Comparaison des efforts tranchants des reservoirs \tilde{a} parois rigides et flexible (Actions impulsives) pour $t/R=0.001$ et $h/H=1$.

$$(M_f)_i = \frac{M_i}{M_0} \quad \text{où} \quad M_0 = \frac{m h S_a}{\pi}$$

et

$$(M_r)_i = \frac{M^*_i}{M_0}$$

réservoirs rigides et flexibles sont comparables à 10% près si le spectre d'accélération est proche de l'accélération du sol, mais si le spectre d'accélération est amplifié les moments sont multiplié par le rapport S_a/a_m .

En résumé, les efforts résultants (sauf pour l'effort tranchant) des réservoirs flexibles sont obtenus, à 10% près, par multiplication des efforts résultants des réservoirs supposés rigides par le rapport S_a/a_m (spectre d'accélération sur l'accélération du sol).

$M_0 = m \cdot h \cdot a_m / \pi$
 m : Masse du fluide
 a_m : acceleration du sol
 π : 3,1415
 h : Hauteur du fluide

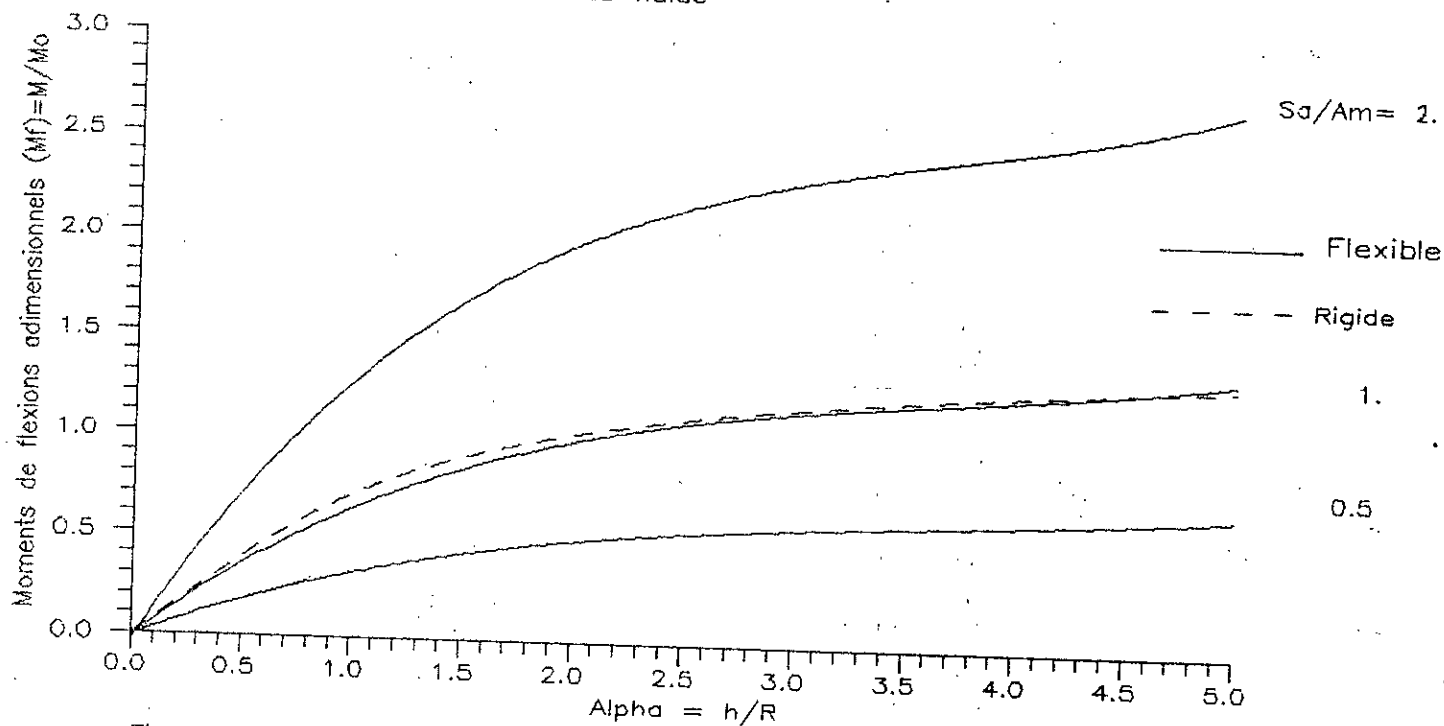


Fig VII.4.3: Comparaisons des moments de flexion des reservoirs a parois rigides et flexibles (actions d'impulsions)

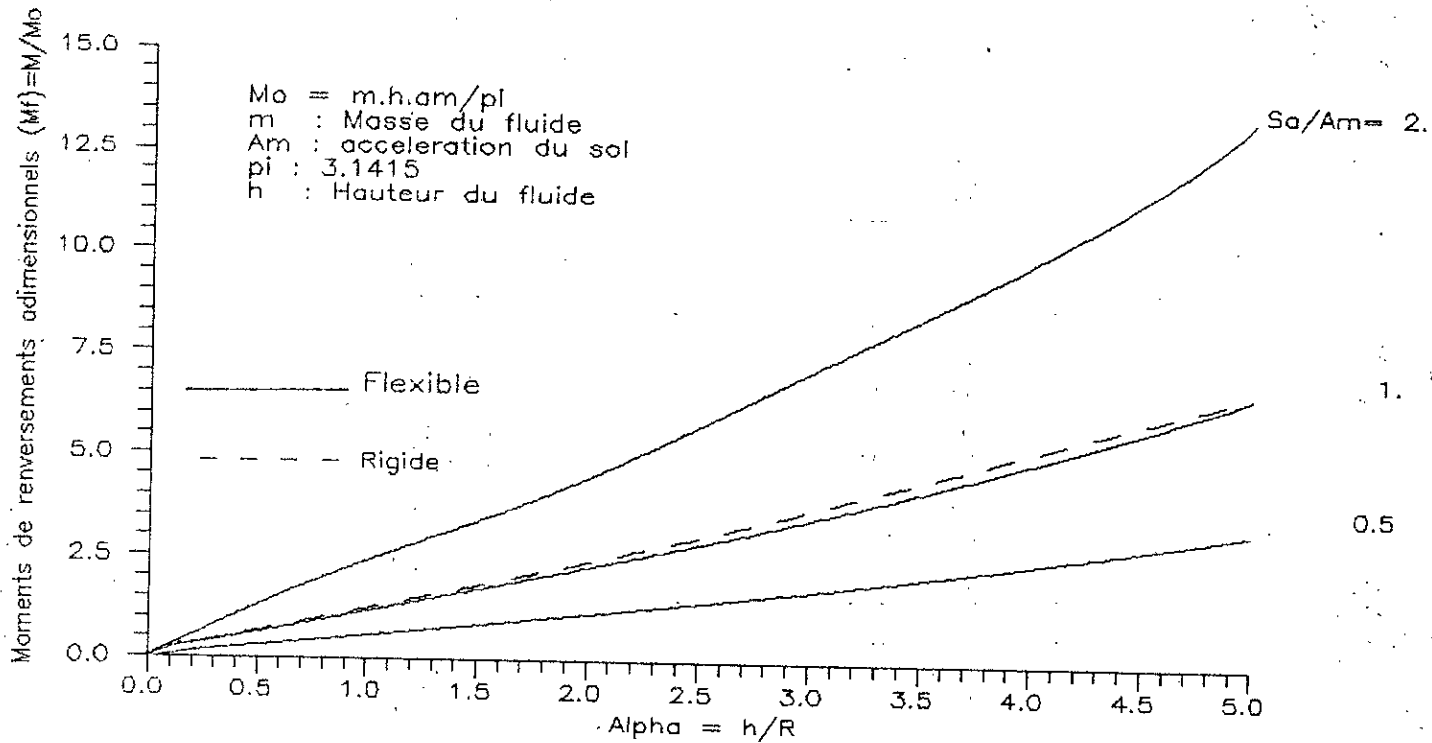


Fig VII.4.4 : Comparaison des moments de renversements des reservoirs à parois rigides et flexibles (Actions d'impulsions) pour $t/R=0.001$ et $h/H=1$.

Chapitre VIII

Exemples d'applications

EXEMPLES ET APPLICATIONS

Introduction:

Dans ce chapitre, il sera procédé à une comparaison entre les différentes méthodes de calcul décrites précédemment, appliquées à deux réservoirs excités horizontalement en utilisant deux hypothèses: Celle de parois rigides d'abord et celle de parois flexibles ensuite.

Le calcul de la hauteur de vague maximale sera également traité. Pour chaque hypothèses la comparaison se fera pour deux types de réservoirs profonds et peu profonds traités dans la littérature, et constituant en ce sens, des exemples de référence (Cf. travaux de Shaaban et Nash [15] ainsi que ceux de Haroun et Housner [27,28]).

Les caractéristiques géométriques de ces réservoirs sont résumés dans le tableau ci-dessous:

Les caractéristiques des deux réservoirs sont:

	Réservoir peu profond	Réservoir profond
Hauteur (H)	40.0 feet (12,2 m)	72.0 feet (21,96 m)
Rayon (R)	60.0 feet (18,3 m)	24.0 feet (7,32 m)
Epaisseur (t)	1.0 in (2,54 cm)	1. in (2,54 cm)

Les caractéristiques mécaniques des deux réservoirs sont:

- Parois en Acier:

$$E = 30 \cdot 10^6 \text{ Lb/in}^2 \text{ (} 20,67 \cdot 10^7 \text{ kPa).}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 0,733 \cdot 10^{-3} \text{ Lb}\cdot\text{sec}^2/\text{in}^4 \text{ (} 7,84 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{)}$$

Autres données :

- liquide: l'eau.

$$\rho_l = 0,94 \cdot 10^{-4} \text{ Lb}\cdot\text{sec}^2/\text{in}^4 \text{ (} 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{)}.$$

Accélération de gravité $g = 386 \text{ in/sec}^2$, spectre d'EL Centro avec $a_{\text{max}} = 0,348g = 134,328 \text{ in/sec}^2$ et pourcentage d'amortissement critique $\xi = 2\%$.

Les deux exemples de réservoirs choisis représentent deux réservoirs (peu profond et profond) remplis de liquide et

caractérisées donc par des rapports $h / R = 0.667$ et $h / R = 3$, respectivement.

- Enfin, il est également rappelé que les actions oscillantes (convectives) reste valable pour les réservoirs à parois flexibles, ce qui permet de ne traiter que les actions impulsives pour les réservoirs à parois flexibles.

VIII.1- Réservoirs à parois rigides ($EI = \infty$):

Les tableaux VIII.1.1 a et b montrent la variation des efforts résultants en fonction de la fréquence d'excitation.

La gamme de fréquence [1 à 20] Hz est utilisée car correspondant à celle observée en génie sismique.

On choisie des fréquences échantillonnées, de manière à représenter toutes les ondes séismiques. (on utilise une suite géométrique de raison racine de deux).

On remarque que les actions d'oscillation diminuent sensiblement avec l'augmentation de la fréquence. Les valeurs maximales sont obtenues pour la fréquence " la plus basse" 1 Hz et que les efforts d'oscillation du réservoir peu profond sont plus important que ceux du réservoir profond. Au contraire, les actions impulsives ne dependent pas de la fréquence d'excitation.

On remarque paradoxalement qu'à l'encontre des moments de flexions, que les moments de renversement sont nettement plus importants pour les réservoirs peu profonds que les réservoirs profonds. Une explication possible repose sur le fait que les moments de base (M_b) sont plus importants pour les réservoirs peu profonds que pour les réservoirs profonds.

Tableau VIII.1.1.a Efforts résultants d'impulsion et d'oscillation dans un réservoir profond (RI):

	fréquence (Hz)	Actions		Total
		Impulsives	convectives	
Q Effort tranchant x 10 ⁶ Lb (4,448 10 ⁶ N)	01,0	2,395	0,037	2,432
	01,4	2,395	0,017	2,412
	02,0	2,395	0,008	2,403
	02,8	2,395	0,004	2,399
	04,0	2,395	0,002	2,397
	05,6	2,391	0,001	2,396
	08,0	2,395	0,001	2,396
	11,3	2,395	0,000	2,395
	16,0	2,395	0,000	2,395
	22,0	2,395	0,000	2,395
	M Moment de flexion x 10 ⁸ Lb.in (0,113 10 ⁸ N.m)	01,0	9,053	0,261
01,4		9,053	0,120	9,173
02,0		9,053	0,056	9,109
02,8		9,053	0,028	9,081
04,0		9,053	0,014	9,067
05,6		9,053	0,007	9,060
08,0		9,053	0,007	9,060
11,3		9,053	0,000	9,053
16,0		9,053	0,000	9,053
22,0		9,053	0,000	9,053
M [*] Moment de mouvement x 10 ⁹ Lb.in (0,113 10 ⁹ N.m)		01,0	0,975	0,026
	01,4	0,975	0,012	0,987
	02,0	0,975	0,006	0,981
	02,8	0,975	0,003	0,978
	04,0	0,975	0,002	0,977
	05,6	0,975	0,001	0,976
	08,0	0,975	0,001	0,976
	11,3	0,975	0,000	0,975
	16,0	0,975	0,000	0,975
	22,0	0,975	0,000	0,975

Tableau VIII.1.1.b Efforts résultants d'impulsion et d'oscillation dans un réservoir peu profond (RII):

	fréquence (Hz)	Actions		Total
		Impulsives	convectives	
Q Effort tranchant $\times 10^6$ Lb ($4,448 \times 10^6$ N)	01,0	3,920	0,155	4,075
	01,4	3,920	0,075	3,995
	02,0	3,920	0,037	3,957
	02,8	3,920	0,018	3,938
	04,0	3,920	0,009	3,929
	05,6	3,920	0,005	3,925
	08,0	3,920	0,002	3,922
	11,3	3,920	0,001	3,921
	16,0	3,920	0,001	3,921
	22,0	3,920	0,000	3,920
M Moment de flexion $\times 10^8$ Lb.in ($0,113 \times 10^8$ N.m)	01,0	7,213	0,233	7,446
	01,4	7,213	0,113	7,326
	02,0	7,213	0,056	7,269
	02,8	7,213	0,027	7,240
	04,0	7,213	0,014	7,227
	05,6	7,213	0,008	7,221
	08,0	7,213	0,003	7,216
	11,3	7,213	0,002	7,215
	16,0	7,213	0,002	7,215
	22,0	7,213	0,000	7,213
M ² Moment de renversement $\times 10^5$ Lb.in ($0,113 \times 10^9$ N.m)	01,0	2,156	0,080	2,236
	01,4	2,156	0,038	2,194
	02,0	2,156	0,019	2,175
	02,8	2,156	0,009	2,165
	04,0	2,156	0,005	2,161
	05,6	2,156	0,003	2,159
	08,0	2,156	0,001	2,157
	11,3	2,156	0,001	2,157
	16,0	2,156	0,001	2,157
	22,0	2,156	0,000	2,156

La différence principale entre les méthodes de calcul pratique des réservoirs à parois rigides réside essentiellement dans le calcul des masses oscillantes m_k , c'est à dire leur nombre et leurs expressions qui peuvent varier d'un auteur à un autre.

Si l'on considère une seule masse oscillante, l'expression de celle-ci peut se mettre sous la forme générale suivante:

$$\frac{m_o}{m} = K \cdot \frac{R}{h} \tanh \left(1,84 \frac{h}{R} \right)$$

Dans un premier article, Housner [4] considère la valeur $K = 0,38$. Dans un deuxième article [5], l'auteur propose $K = 0,333$.

United States Atomic Energy Commission (U.S.A.E.C) [6] suggère d'utiliser la valeur $K = 0,318$.

Newmark et Rosenbleuth [7] suggère de prendre $K = 0,354$.

Abramson [11], développe la formule suivante:

$$\frac{m_k}{m} = \frac{2}{\lambda_k^2 - 1} \cdot \frac{R}{\lambda_k h} \tanh \left(\lambda_k \frac{h}{R} \right)$$

où les λ_k sont les zéros de $I_1'(\lambda_k) = 0$ (dérivée de la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre un)

de sorte que pour $K = 1$ on aura $\lambda_k = 1,84$ et $K = 0,4545$.

A toutes fins utiles, nous présentons dans les tableaux VIII.1.2a et b les résultats de calcul des efforts séparés et résultants par différentes méthodes pour les deux types de réservoirs profond et peu profond RI et RII respectivement. Les notations suivantes sont rappelés à cet effet:

M1 : Méthode négligeant l'oscillation du liquide [3]

M2 : Méthode considérant les deux phénomènes d'oscillation et d'impulsion [10] (valeur maximale d'impulsion à $f = 22$ Hz combinée avec la valeur maximale d'oscillation à $f = 1$ Hz)

M3 : Modèle de Housner [4,5 et 6].

M4 : Modèle de Housner-Epstein [8]

M5 : Modèle mécanique d'Abramson [11 et 14]

1) avec $m_i = m - \sum_{k=1}^5 m_k$ (modèle simple)

2) avec $m_i = m - m_1$ (modèle simple)

3) Modèle complexe avec 5 masses m_k

Les symboles algébriques " S " et " SRSS " représentent respectivement la somme des efforts et la racine carrée de la somme des carrés des efforts.

Des tableaux VIII.1.2.a et b on peut tirer les principales conclusions suivantes:

- La correction apportée par le modèle d'Epstein-Housner dans le tableau ne dépasse pas 0,1% (pour les deux exemples) ce qui est insignifiant. En fait, l'étude sur les erreurs mentionnées dans le chapitre VI montre clairement que l'erreur relative sur les moments résultants ne peut dépasser 0,2% quelque soit le rapport h/R.

- comparativement au modèle d'Abramson (M5) la méthode de Housner (M3) conduit à des efforts résultants ne dépassant guère les 10% d'erreur relative et avec la méthode considérant les deux phénomènes d'oscillation et d'impulsion (M2) les efforts d'impulsion sont les même alors que les efforts d'oscillation sont supérieur surtout pour le moment de flexion.

- Si on compare les résultats obtenus pour M5(1) et M5(3) on voit que la contribution des modes supérieurs d'oscillation du liquide dans l'évaluation des efforts résultants est faible de sorte qu'en général les calculs basés sur la prise en compte du mode fondamental sont suffisamment précis.

- Lorsqu'un calcul plus précis des efforts est nécessaire il faut alors utiliser le modèle d'Abramson M5(1) qui tient compte du couplage des phénomènes impulsifs et convectifs simultanément.

Tableau VIII.1.2a Calcul des Efforts résultants dans un réservoir profond (RI) par différentes méthodes.

	Méthodes	M1	M2	M3	M4	M5 (1)	M5 (2)	M5 (3)
Q Effort tranchant $\times 10^5$ Lb ($4,448 \cdot 10^5$ N)	Q_i	2,391	2,391	2,930	2,429	2,395	2,412	2,395
	Q_e	0,000	0,159	0,069	0,068	0,099	0,099	0,105
	S	2,391	2,520	2,499	2,497	2,494	2,511	2,500
	SRSS	2,391	2,395	2,431	2,430	2,397	2,414	2,397
M Moment de flexion $\times 10^5$ Lb.in ($0,113 \cdot 10^5$ N.m)	M_i	8,425	9,085	9,065	9,055	9,062	9,129	9,083
	M_e	0,000	0,918	0,491	0,497	0,698	0,698	0,747
	S	8,425	10,00	9,556	9,552	9,754	9,081	9,830
	SRSS	8,425	9,131	9,078	9,069	9,089	9,155	9,114
M' Moment de renversement $\times 10^7$ Lb.in ($0,113 \cdot 10^5$ N.m)	M_i'	1,170	0,975	0,995	0,995	0,976	0,983	0,909
	M_e'	0,000	0,092	0,049	0,051	0,070	0,070	0,142
	S	1,170	1,067	1,045	1,046	1,046	1,053	1,051
	SRSS	1,170	0,979	0,997	0,996	0,978	0,985	0,920

M1 : Méthode négligeant l'oscillation du liquide [3]

M2 : Méthode considérant les deux phénomènes d'oscillation et d'impulsion [10]
(valeur maximale d'impulsion à $f = 20$ Hz combinée avec la valeur maximale d'oscillation à $f = 1$ Hz)

M3 : Modèle de Housner [4,5 et 6].

M4 : Modèle de Housner-Epstein [8]

M5 : Modèle mécanique d'Abramson [11 et 14]

Tableau VIII.1.2.b Efforts résultants dans un réservoir peu profond (RII) par différentes méthodes.

	Méthodes	M1	M2	M3/M4	M5(1)	M5(2)	M5(3)
Q Effort tranchant x 10 ⁶ Lb (4,448 10 ⁶ N)	Q _i	3,910	3,927	3,757	3,928	4,200	3,928
	Q _e	0,000	0,940	0,741	1,057	1,057	1,126
	S	3,910	4,867	4,488	4,985	5,263	5,054
	RS	3,910	4,038	3,829	4,068	4,331	4,086
M moment de flexion x 10 ⁴ Lb.in (0,113 10 ⁴ N.m)	M _i	7,226	7,582	6,762	7,227	7,728	7,589
	M _e	0,000	2,599	1,971	1,591	1,591	1,703
	S	7,226	10,18	8,733	8,818	9,319	9,292
	RS	7,226	8,015	7,043	7,400	7,890	7,777
M' moment de renversement x 10 ³ Lb.in (0,113 10 ³ N.m)	M _i '	1,667	2,002	2,144	2,161	2,310	2,024
	M _e '	0,000	0,475	0,385	0,539	0,539	0,577
	S	1,667	2,477	2,529	2,700	2,849	2,601
	RS	1,667	2,058	2,178	2,227	2,372	2,105

- M1 : Méthode négligeant l'oscillation du liquide [3]
M2 : Méthode considérant les deux phénomènes d'oscillation et d'impulsion [10]
(valeur maximale d'impulsion à $f = 20\text{Hz}$ combinée avec la valeur maximale
d'oscillation à $f = 1\text{Hz}$)
M3 : Modèle de Housner [4,5 et 6].
M4 : Modèle de Housner-Epstein [8]
M5 : Modèle mécanique d'Abramson [11 et 14]

VIII.2- Réservoirs à parois flexibles:

Le calcul des efforts résultants dans les réservoirs à parois flexibles requiert la détermination préalable de la fréquence (ou de la pulsation) du système coque-fluide en vue de déduire la réponse en accélération à partir du spectre de calcul.

C'est pourquoi , il sera accordé dans ce qui suit une attention particulière au calcul des caractéristiques de vibration des systèmes coques-fluide d'abord et l'analyse des efforts résultants selon divers approches ensuite.

VIII.2.1- Effet du couplage entre le mouvement d'oscillation du liquide et les vibrations de la coque.

Il s'agit essentiellement de l'interaction dynamique entre les ondes d'oscillation du liquide et les vibrations de la coque considérée.

Quoiqu'en réalité, il est nécessaire de considérer le système coque-fluide, on peut montrer qu'en pratique le couplage peut être négligé du fait que l'intervalle des fréquences d'oscillation du fluide est de loin séparé de l'intervalle des fréquences de vibration de la coque (c-à-d $\omega_{oscil.} \ll \omega_{coque}$).

A cet effet le tableau 4 de la référence [28] est repris dans le tableau VIII.2.1 pour montrer précisément l'éloignement des deux intervalles des fréquences de vibration.

Tableau VIII.2.1- Calcul des fréquences (en Hz) pour un réservoir profond [$t = 0,43$ in (10,9 mm)]

Numéro du mode	Fréquence du système couplé (M.E.F)	Fréquence d'oscillation du fluide dans un réservoir rigide	Le système coque-masse impulsive (M.E.F)
1	0,2497	0,2500 [1]	-
2	0,4254	0,4255 [2]	-
3	0,5384	0,5384 [3]	-
4	0,6307	0,6307 [4]	-
13	3,5566	-	3,5586 (1)
14	10,433	-	10,450 (2)
15	15,515	-	15,551 (3)
16	20,006	-	20,075 (4)

[i] Les fréquences d'oscillation fluide dans un réservoir rigide.
 (i) Les fréquences du système coque - masse impulsive.

Il est évident que les basses fréquences du système couplé sont en très bon accord avec celles de l'oscillation du fluide dans un réservoir à parois rigides et ce n'est qu'aux 13^{ème}, 14^{ème} modes ... etc qu'apparaissent les fréquences du système coque - fluide passif de sorte que l'on peut conclure sans risque de se tromper que l'effet de couplage est négligeable.

Cette importante observation implique entre autre que l'interaction dynamique du système fluide-structure peut être étudiée en examinant les comportements :

- (i) Du système coque flexible - fluide passif
- (ii) De la surface libre du liquide en mouvement d'oscillation dont la pulsation est donnée par la formule bien connue [4]:

$$\omega_j^2 = g \frac{\xi_j}{R} \operatorname{th} \left(\xi \frac{h}{R} \right)$$

En résumé la fréquence du système coque - fluide passif constitue l'inconnue à déterminer pour la construction d'un modèle mécanique d'interaction fluide-structure à deux degrés de liberté.

VIII.2.2- Calcul de la pulsation du système coque - fluide passif

Aux fins, d'apprécier leur degré de précision, les fréquences du système coque - fluide passif calculées par différentes méthodes (Cf. chapitre VII) ainsi que celle présentée par Sakai [30] sont reportées dans les tableaux VIII.2.2a et b respectivement pour les réservoirs peu profond (RII) et profond (RI).

Tableau VIII.2.2.a- Calcul des fréquences (système coque - fluide impulsif) d'un réservoir peu profond (pour différents taux de remplissage $\beta = h / H$).

h/H	Méthodes des éléments finis			Approximation polynomiale			Approximation de Dunkerley [29]
	Haroun et al [27]	Shaaban et al [15]	Balendra et al [16]	Tedesco et al [19]	Haroun et al [24]	Sakai et al [30]	
0.0	34,04	34,08	-	34,29	-	-	-
0.5	09,88	10,14	09,91	09,70	16,15	-	-
1.0	06,18	06,13	06,20	06,23	13,43	6,58	23,43

Tableau VIII.2.2.b- Calcul des fréquences (système coque - fluide impulsif) d'un réservoir profond (Pour différents taux de remplissage $\beta = h / H$ et pour trois épaisseurs t)

	h/H	t(in)	Méthodes des éléments finis [27] Haroun et Housner	Approximation de Dunkerley [29]	Approximation polynomiale		
					Tedesco et al [24]	Haroun et al [24]	Sakai et al [30]
Vide	0.0						
	0.0	1.0	19,26	-	19,18	-	-
	0.0						
rempli partiellement	0.5	1.0	11,42	-	11,49	14,79	-
rempli complètement	1.0	1.000	05,31	13,19	05,43	05,22	5,35
	1.0	0.430	03,56	08,65	03,63	03,42	3,52
	1.0	0.288	02,93	07,08	02,97	02,80	2,88

Des tableaux VIII.2.2.a et b on peut tirer les principales conclusions suivantes:

- L'approximation de Dunkerley est loin des valeurs des fréquences pour les deux réservoirs profond et peu profond. Cela peut s'expliquer par le fait que le comportement d'une coque ancrée est loin d'être comparable à celui d'une poutre cantilever notamment pour les réservoirs peu profonds.
- L'approximation polynomiale de Haroun et Ellaithy ne fournit seulement des résultats approchés que les réservoirs profonds complètement remplis.
- L'approximation polynomiale de Sakai et al fournit des résultats précis pour les réservoirs complètement remplis profonds et peu profonds.
- L'approximation polynomiale de Tedesco et al est recommandée pour les deux réservoirs profond et peu profond pour les trois taux de remplissage (0.0 ; 0.5 ; 1.0).

VIII.2.3- Calcul des efforts impulsifs:

Les méthodes suivantes sont utilisées pour la comparaison des efforts impulsifs:

- M6 : Modèle de Housner modifiée avec calcul de la fréquence par approximation polynomiale de Sakai.
- M7 : Modèle de Haroun et Ellaithy. (pour réservoir peu profond la fréquence calculée par approximation de Sakai).
- M8 : Modèle de Tedesco et al.

Les valeurs des efforts résultants sont reportées dans les tableaux VIII.2.3 a et b respectivement pour les réservoirs peu profond et profond.

Les erreurs relatives sur les efforts impulsifs calculés par différentes méthodes, en référence à la méthode des éléments finis de Housner et Haroun [28] sont également reportées dans le tableau VIII.2.3.c à titre de comparaison.

Tableau VIII.2.3.a Comparaison des efforts résultants dans le cas d'un réservoir peu profond (RII) par différentes hypothèses et méthodes.

	effort résul.	Housner rigide	Haroun et Housner M.E.F	Rapport efforts (flexible/rigide)	M6	M7	M8
Q Effort tranchant $\times 10^6$ Lb ($4,448 \cdot 10^6$ N)	Q_i	3,967	8,922	2.25	09,268	9,082	9,240
	Q_0	0,741	0,741	1,00	00,741	0,741	0,741
	S	4,708	9,663	2,05	10,010	9,823	9,981
	SRSS	4,036	8,953	2,22	09,298	9,112	9,270
M Moment de flexion $\times 10^3$ Lb.in ($0,113 \cdot 10^8$ N.m)	M_i	7,264	17,400	2,40	16,970	16,82	16,937
	M_0	1,971	01,971	1,00	01,971	1,971	1,971
	S	9,235	19,371	2,10	18,941	18,80	18,909
	SRSS	7,527	17,511	2,33	17,084	16,94	17,052
M^2 Moment de flexion $\times 10^6$ Lb.in ($0.113 \cdot 10^3$ N.m)	M_i^2	2,140	4,657	2,18	5,000	4,368	5,040
	M_0^2	0,385	0,385	1,00	0,385	0,385	0,385
	S	2,525	5,042	2,00	5,385	4,753	5,425
	SRSS	2,174	4,673	2,15	5,015	4,385	5,055

M6 : Modèle de Housner modifiée avec calcul de la fréquence par approximation polynomiale de Sakai.

M7 : Modèle de Haroun et Ellaithy. (pour réservoir peu profond la fréquence calculée par approximation de Sakai).

M8 : Modèle de Tedesco et al.

Tableau VIII.2.3.b Comparaison des efforts résultants dans le cas d'un réservoir profond (RI) par différentes hypothèses et méthodes.

	effort	Housner rigide	Haroun et Housner M.E.F	Rapport efforts (flexible/rigide)	M6	M7	M8
Q Effort tranchant $\times 10^6$ Lb ($4,448 \cdot 10^6$ N)	Q_i	2,718	5,180	1,91	5,991	5,253	5,420
	Q_0	0,069	0,069	1,00	0,069	0,069	0,069
	S	2,787	5,250	1,88	6,060	5,322	5,489
	RS	2,719	5,180	1,91	5,991	5,253	5,420
M Moment de flexion $\times 10^8$ Lb.in ($0,113 \cdot 10^8$ N.m)	M_i	9,065	22,175	2,45	22,350	22,76	22,071
	M_0	0,491	0,491	1,00	0,491	4,491	0,491
	S	9,556	22,666	2,37	22,841	23,25	22,562
	RS	9,078	22,180	2,44	22,355	22,77	22,077
M^* Moment de flexion $\times 10^9$ Lb.in ($0,113 \cdot 10^9$ N.m)	M_i^*	0,995	2,463	2,40	2,453	2,557	2,520
	M_0^*	0,049	0,049	1,00	0,049	0,049	0,049
	S	1,045	2,512	2,33	2,502	2,606	2,569
	RS	0,997	2,465	2,40	2,454	2,557	2,520

M6 : Modèle de Housner modifiée avec calcul de la fréquence par approximation polynomiale de Sakai.

M7 : Modèle de Haroun et Ellaithy. (pour réservoir peu profond la fréquence calculée par approximation de Sakai).

M8 : Modèle de Tedesco et al.

Tableau.2.3.c Calcul des erreurs relatives sur les efforts résultants impulsifs:

		ERREUR %		
	Méthodes	M6	M7	M8
Réservoir profond	Q_i	+16	+01	+05
	M_i	+01	+03	-01
	M_i^*	+00	+04	+02
Réservoir peu profond	Q_i	+04	+02	+04
	M_i	-03	-03	-03
	M_i^*	+07	+06	+08

Des tableaux VIII.2.3 a, b et c on peut tirer les principales conclusions suivantes:

- L'utilisation directe de la masse impulsive déduite du modèle rigide de Housner pour le calcul de l'effort tranchant impulsif conduit à un effort élevé, (+16% d'erreur pour M6) ce qui n'est pas le cas pour les réservoirs peu profonds. Cela s'explique par le fait que la masse impulsive est influencée par la déformation dynamique du réservoir de sorte que la masse impulsive devrait être corrigée.

- Les efforts résultants pour deux types de réservoir, calculés par le modèle de Tedesco et al. M8, sont en très bon accord avec ceux de la méthode des éléments finis (l'erreur ne dépasse pas 3%), Ce qui s'explique aisément du fait de la prise en compte dans les calculs de la déformation dynamique du réservoir (masse impulsive corrigée).

- Le modèle de Haroun et Ellaithy fournit aussi de très bons résultats sous réserve d'utiliser une bonne approximation de la fréquence pour les réservoirs peu profonds.

- Les résultats montrent clairement que les amplifications des efforts dans les réservoirs à parois flexibles, peuvent atteindre des augmentations de l'ordre de 250% voire supérieures si la valeur de la réponse en accélération se trouve dans la région amplifiée du spectre de calcul.

L'effet de la hauteur du liquide sur les valeurs des efforts résultants peut dans certain cas être moins déterminant que l'effet

de la flexibilité des parois de sorte que le dimensionnement fini doit prévoir différents taux de remplissage pour un site donné.

Remarque :

Le calcul de la pulsation et des efforts reste valable si l'épaisseur de la paroi du réservoir n'est pas constante, il suffit de prendre l'épaisseur moyenne où encore l'épaisseur qui se trouve à $1/3.H$ partant du fond du réservoir [31].

CONCLUSIONS

A partir des résultats obtenus dans le cadre de cette recherche, il ressort clairement les conclusions principales suivantes :

Pour les réservoirs à parois rigides:

- En raison de l'ordre élevé des erreurs dans l'évaluation des moments de renversement et en raison de la non considération des pressions oscillantes, la méthode de Jacobsen et Ayre n'est pas recommandée pour le calcul para-sismique des réservoirs.
- La méthode de Hunt et Priestley n'est pas aussi recommandée en raison de la considération de la réponse transitoire comme la réponse de la partie d'oscillation alors que l'oscillation continue après le séisme.
- La contribution des modes supérieurs d'oscillation du liquide dans l'évaluation des efforts résultants est faible de sorte qu'en général les calculs basés sur la prise en compte du mode fondamental d'oscillation sont suffisamment précis.
- Le modèle de Housner fournit des valeurs acceptables des efforts résultants (en plus 8 % près) pour les réservoirs profonds ($\alpha > 1,5$) si on prend la masse d'oscillation du modèle d'Abramson ($k=0.4545$), alors que pour les réservoirs peu profonds ($\alpha \leq 1,5$) l'erreur devient importante (14%).
- La correction apportée par le modèle d'Epstein-Housner dans l'expression des moments pour les réservoirs profonds ne dépasse pas 0.2% quelque soit le rapport h/R .

Par conséquent, pour des réservoirs cylindriques en béton armé ou en acier, dont α est importante (réservoirs profonds $\alpha > 1.5$) on peut retenir l'approximation de Housner. A cet effet, on a donné aux paragraphes VI-3-4 les abaques permettant un calcul rapide des efforts résultants.

Pour les réservoirs dont α est faible (réservoirs peu profonds) l'approximation de Housner peut mener à un coûteux surdimensionnement et il est conseillé d'utiliser le modèle d'Abramson. A cet effet aussi, on a donné aux paragraphes VI-5-4 les abaques du modèle d'Abramson.

Pour les réservoirs flexibles

- En raison du découplage des modes d'oscillation du liquide et des modes de vibration des coques élastiques, les efforts d'oscillation pour un réservoir flexible peuvent être déterminés en utilisant l'hypothèse de réservoir à parois rigides.
 - La formule de Sakai, valable pour des réservoirs flexibles pratiquement remplis de fluide, fournit les meilleures approximations, pour l'évaluation des périodes fondamentales de vibration des systèmes coques-fluide et ce pour le domaine de validité défini par la plage des valeurs $0.3 \leq \alpha \leq 4.3$
 - Le modèle de Housner modifié n'est pas recommandé du fait des erreurs très élevées (atteignant 25% pour $\alpha > 1.5$ et 40% pour $\alpha < 1.5$) dans l'évaluation des efforts résultants.
 - Le modèle de Tedesco n'est valable que pour le domaine de α [0.2 ; 1.2] U [2.0 ; 3.8] pour lequel l'erreur n'excède pas le seuil de 6% .
 - Le modèle de Haroun et Ellaithy n'est valable que pour le domaine réduit de α [1.2 ; 3.3] pour lequel l'erreur ne dépassent pas le seuil 6 % .
- En résumé le réservoir peut être considéré comme flexible

$$\text{si } \tau < \frac{400\alpha R^2 \rho}{\lambda^2 E}$$

(où $\alpha = \frac{h}{R}$, $\tau = \frac{t}{R}$, $\lambda = 0.01675\alpha^2 - 0.15\alpha + 0.46$ et ρ : masse

volumique du liquide, E le module de Young et R rayon du réservoir). Le modèle flexible utilisé sera alors celui pour lequel α appartiendra à l'intervalle de validité. Dans le cas contraire, le réservoir considéré comme rigide, où quel cas nous, l'on pourra utiliser le modèle rigide d'Abramson.

- Les amplifications des efforts dans les réservoirs à parois flexibles (par rapport à ceux supposés à parois rigides), peuvent atteindre des augmentations de l'ordre de 250% , voire d'un ordre supérieur si la valeur de la réponse en accélération se trouve dans la région amplifiée du spectre de calcul.

Conclusions et recommandations

CONCLUSIONS GENERALES ET RECOMMANDATIONS

A partir des résultats obtenus dans le cadre de cette recherche, il ressort clairement les conclusions principales suivantes :

La méthode des éléments finis s'est avéré être un outil très puissant dans l'analyse des coques. L'étude des coques de révolution par cette technique est considérablement simplifiée grâce à l'utilisation de l'élément "tronc de cône". L'utilisation de cet élément permet d'introduire le concept de lignes nodales qui se substitue avantageusement à celui des points nodaux.

Parmi les avantages de cet élément citons l'absence du problème de discontinuité aux interfaces des éléments et une diminution importante de données ainsi que celle du temps d'exécution du logiciel élaboré.

Les exemples traités montrent l'excellent accord entre la théorie et les résultats digitaux, du fait de la modélisation par élément finis tronconiques qui permet de reproduire avec une précision suffisante la géométrie de la structure réelle. Ceci permet d'obtenir des résultats très satisfaisants, avec un nombre d'éléments relativement faible dans le cas où l'épaisseur est constante. Dans le cas où l'épaisseur est variable, il convient d'affiner le maillage afin de reproduire avec précision la configuration et par suite le comportement réel de la structure.

La méthode matricielle de par sa conception fournit des résultats rigoureusement identiques à ceux de la théorie classique (épaisseur variable ou non). Les principaux avantages suivants peuvent être cités :

- Simplicité de programmation.
- Fichier de données très simplifié.
- Temps d'exécution réduit.

Dans le cas des réservoirs à épaisseurs variables les formulations exactes ne sont pas toujours disponibles. Toute fois en utilisant des formules approchées, il est possible de retrouver les résultats de la théorie classique pour laquelle les coefficients C_3 et C_4 sont en général négligés. Le cas des réservoirs "courts" à inertie variable (pour lesquels les coefficients C_3 et C_4 doivent être pris en considération) n'a pas d'application pratique dans le domaine du génie civil étudié.

A l'encontre de la méthode des éléments finis, la méthode matricielle ne nécessite pas pour la détermination des déplacements ou contraintes généralisés, en un point donné, la détermination obligatoire des déplacements ou contraintes généralisés de tous les points du maillage.

Pour les réservoirs à parois rigides:

- En raison de l'ordre élevé des erreurs dans l'évaluation des moments de renversement et en raison de la non considération des pressions oscillantes, la méthode de Jacobsen et Ayre n'est pas recommandée pour le calcul para-sismique des réservoirs.
- La méthode de Hunt et Priestley n'est pas aussi recommandée en raison de la considération de la réponse transitoire comme la réponse de la partie d'oscillation alors que l'oscillation continue après le séisme.
- La contribution des modes supérieurs d'oscillation du liquide dans l'évaluation des efforts résultants est faible de sorte qu'en général les calculs basés sur la prise en compte du mode fondamental d'oscillation sont suffisamment précis.
- Le modèle de Housner fournit des valeurs acceptables des efforts résultants (en plus 8 % près) pour les réservoirs profonds ($\alpha > 1,5$) si on prend la masse d'oscillation du modèle d'Abramson ($k=0.4545$), alors que pour les réservoirs peu profonds ($\alpha \leq 1,5$) l'erreur devient importante (14%).
- La correction apportée par le modèle d'Epstein-Housner dans l'expression des moments pour les réservoirs profonds ne dépasse pas 0.2% quelque soit le rapport h/R .

Par conséquent, pour des réservoirs cylindriques en béton armé ou en acier, dont α est importante (réservoirs profonds $\alpha > 1,5$) on peut retenir l'approximation de Housner. A cet effet, on a donné aux paragraphes VI-3-4 les abaques permettant un calcul rapide des efforts résultants.

Pour les réservoirs dont α est faible (réservoirs peu profonds) l'approximation de Housner peut mener à un coûteux surdimensionnement et il est conseillé d'utiliser le modèle d'Abramson. A cet effet aussi, on a donné aux paragraphes VI-5-4 les abaques du modèle d'Abramson.

Pour les réservoirs flexibles:

- En raison du découplage des modes d'oscillation du liquide et des modes de vibration des coques élastiques, les efforts d'oscillation pour un réservoir flexible peuvent être déterminés en utilisant l'hypothèse de réservoir à parois rigides.

- La formule de Sakai, valable pour des réservoirs flexibles pratiquement remplis de fluide, fournit les meilleures approximations, pour l'évaluation des périodes fondamentales de vibration des systèmes coques-fluide et ce pour le domaine de validité défini par la plage des valeurs $0.3 \leq \alpha \leq 4.3$

- Le modèle de Housner modifié n'est pas recommandé du fait des erreurs très élevées (atteignant 25% pour $\alpha > 1.5$ et 40% pour $\alpha < 1.5$) dans l'évaluation des efforts résultants.

- Le modèle de Tedesco n'est valable que pour le domaine de $\alpha \in [0.2 ; 1.2] \cup [2.0 ; 3.8]$ pour lequel l'erreur n'excède pas le seuil de 6%.

- Le modèle de Haroun et Ellaithy n'est valable que pour le domaine réduit de $\alpha [1.2 ; 3.3]$ pour lequel l'erreur ne dépassent pas le seuil 6%.

En résumé le réservoir peut être considéré comme flexible

$$\text{si } \tau < \frac{4.00\alpha R^2 \rho}{\lambda^2 E}$$

(où $\alpha = \frac{h}{R}$, $\tau = \frac{t}{R}$, $\lambda = 0.01675\alpha^2 - 0.15\alpha + 0.46$ et ρ : masse

volumique du liquide, E le module de Young et R rayon du réservoir). Le modèle flexible utilisé sera alors celui pour lequel α appartiendra à l'intervalle de validité. Dans le cas contraire, le réservoir considéré comme rigide, où quel cas nous, l'on pourra utiliser le modèle rigide d'Abramson.

- Les amplifications des efforts dans les réservoirs à parois flexibles (par rapport à ceux supposés à parois rigides), peuvent atteindre des augmentations de l'ordre de 250%, voire d'un ordre supérieur si la valeur de la réponse en accélération se trouve dans la région amplifiée du spectre de calcul.

Dans le cadre de ce travail, nous avons considéré l'analyse du comportement dynamiques des réservoirs rigides et flexibles parfaitement ancrés à leurs fondations et soumis à des composantes horizontales d'accélération du sol et de section idéalement circulaire. L'analyse de l'interaction fluide-structure des pressions hydrodynamiques, et par suite des efforts résultants dans les réservoirs rigides ou flexibles, peu profond ou profond par diverses méthodes et approches de calcul permet d'illustrer toute la complexité du problème dont la solution est fondée souvent sur diverses hypothèses simplificatrices.

C'est également dire que s'il est vrai que les principaux résultats obtenus dans le cadre de cette recherche (aussi modeste soit-elle) peuvent être d'un intérêt pratique certain pour l'ingénieur de génie civil, il n'en demeure pas moins qu'un nombre de problèmes liés au comportement dynamique des systèmes coques-fluide en zones de forte sismicité. Aussi nous est-il paru utile de recommander dans le cadre de travaux futurs, l'étude entre autre des aspects suivants:

- Le phénomène d'oscillation du fluide pendant et après les séismes de forte magnitude.
- Les effets séparés et combinés de la pression hydrostatique et des composantes d'accélération horizontales et verticales sur les pressions hydrodynamiques et le comportement sismique des réservoirs.
- L'influence des modes de vibration de type cosino susceptibles d'être excités du fait des imperfections de la section transversale ou de la flexibilité de la toiture des réservoirs.
- L'étude de l'endommagement des réservoirs suite à l'instabilité dynamique de leur parois notamment les problèmes relatifs au bombement (bulging) et au flambement des parois au niveau de la base (buckling).
- Le problème de soulèvement des fondations des réservoirs partiellement encastés, phénomène complexe non maîtrisé à ce jour et nécessitant une analyse non-linéaire laborieuse.
- Et enfin l'interaction dynamique sol-structure-fluide compte tenu des composantes horizontales et verticale de l'accélération du sol.

*Références bibliographiques
de la 2^{ème} partie*

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES DE LA DEUXIEME PARTIE

- 1- Westergaard, M., "Water pressures on dams during earthquakes" Transaction of the American Society of Civil Engineers, Vol./98 , 1933.
- 2- Jacobsen, L.S. "Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of a fluid surrounding a cylindrical pier": Bull. Seism. Soc. Am., Vol./39, pp. 189-203, 1949.
- 3- Jacobsen, L.S. and Ayre, R.S. "Hydrodynamic experiments with rigid cylindrical tanks subjected to transient motions", Bull. Seism. Soc. Am., Vol./41,, pp. 313 - 346, 1951.
- 4- Housner, G.W., "Dynamic pressures on accelerated fluid containers" Bull. Seism. Soc. Am., Vol./47, 1957.
- 5- Housner, G.W., "The dynamic behavior of water tanks". Bull. Seism. Soc. Am., Vol./53, pp. 381 - 387, 1963.
- 6- Edward, N.W., TID - 25021 "Summary of current seismic design practice for nuclear reactor and facilities" 1967.
- 7- Newmark, N.M. et Rosenbleuth E. "Fundamentals of earthquake engineering". Prentice Hall Inc. 1971.
- 8- Epstein, H.J., "Seismic design of liquid storage tanks". J. of the Structural Div., Proceedings of A.S.C.E, vol./102, N° ST 9, pp. 1659 - 1673, 1976.
- 9- Veletsos, A.S. "Seismic effects in flexible liquid storage tanks". Proceedings of 5 th W.C.E.E, Vol./1, pp. 630 - 639, Rome, Italy 1974,
- 10- Hunt, B. and Priestley N., "Seismic water waves in a storage tank": B.S.S.A, Vol./68, pp. 487 - 499, 1978.
- 11- Abramson, H.N. "The dynamic behavior of liquid in moving containers", NASA SP-106, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C., 1966.

- 12- Arya, A.S., Thakkar, S.K., and Goyal, A.C., "Vibration analysis of thin cylindrical containers", J. of the Eng. Mech. Div., ASCE Vol./97, pp. 317 - 333, 1971.
- 13- Veletsos, A.S. and Yang, J.Y., "Dynamics of fixed base liquid storage tanks", Proceedings of U.S-Japan Seminar for Earthquake Engineering Research With Emphasis on Lifeline Systems, pp. 317 - 341, Tokyo, Japan, 1976.
- 14- Veletsos, A.S. and Yang, J.Y., "Earthquake response of liquid storage tanks", Advances in Civil Engineering Through Engineering Mechanics, ASCE, 1, 1977.
- 15- Shaaban, S.H. and Nash, W.A., "Finite element analysis of a seismically excited cylindrical storage tank, ground supported, and partially filled with liquid", Dept. of Civil Engineering, Univ. of Massachusetts, 1976.
- 16- Balendra, T. and Nash, W.A. "Earthquake analysis of a cylindrical liquid storage tank with a dome by finite element method". Dept. of Civil Engineering, Univ. of Massachusetts, 1978.
- 17- Sogabe, K. Shigeta T. and Shibata, H. "A fundamental study on the aseismic design of liquid storage", Report of the Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo, Vol./26, N° 7, March 1977
- 18- Carneiro de Barros, R. "Dynamic analysis of liquid storage tanks", Proc. 8th Europ. Conf. on Earth. Eng., pp. 81-88.
- 19- Tedesco, J.W., Kostem C.N., and Kalnins A., "Free vibration analysis of cylindrical liquid tanks", Comput. struct., Vol./26, pp. 957-964, 1987
- 20- Tedesco, J.W. Landis D.W. and C.N. Kostem, "Seismic analysis of cylindrical liquid storage tanks", Comput. Struct. Vol./32, pp.1165-1174, 1989.
- 21- Kalnins A. "Vibration of fluid-filled thin shells". Trans. 5th Int. Conf. Structural Mechanics in Reactor Technology, Paper B4/8, Berlin, Germany, 1978.

- 22- Tedesco, J.W. and Kostem C.N., "Vibrational characteristics and seismic analysis of cylindrical liquid storage tanks" Fritz Engineering Laboratory Report N° 433.5, Department of Civil Engineering, Lehigh University, Bethlehem, PA 1982.
- 23- Chopra, A.K., "Earthquake response of concrete gravity dams". J. of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol./96, No EM4, pp. 443 - 454, 1970.
- 24- Haroun, M.A. and Ellaithy, H.M., "Model for flexible tanks undergoing rocking", J.of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol./111 1985.
- 25- Kana, D.D. "Status and research needs for prediction of seismic response in liquid containers", Nuclear Engineering and Design, Vol./96, pp. 205-221, 1982.
- 26- V. Davidovici et A. Haddadi " Calcul pratique de réservoirs en zone sismique" Annales de l'I.T.B.T.P., N° 409, 1982.
- 27- Haroun M.A. and Housner, G.W. "Dynamic characteristics of liquid storage tanks" J.of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol./108 N° EM5, 1982.
- 28- Haroun M. A. and Housner G.W. "Complications in free vibration analysis of tanks" J.of the Eng. Mech. Div., ASCE, Vol./108 N° EM5, 1982.
- 29- "Fluid / structure interaction during seismic excitation", A report by the ASCE Committee on Seismic Analysis on Nuclear Structures and Materials, ASCE, 1984.
- 30- Sakai, F. et al "Horizontal, vertical and rocking fluid-elastic response and design of cylindrical liquid storage tanks", Proceedings of 8th W.C.C.E, Vol./V, pp.263-270, San Francisco, U.S.A., 1984.
- 31- Manos, G.C., and Clough, R.W., "Tank damage during the May 1983 Coalinga earthquake", J. Earthq. Engrg. Struct. Dyn., Vol./13, pp. 449-466, 1985.
- 32- Balendra, T., et al " Seismic design of flexible cylindrical storage tanks", J. Earthq. Engrg. Struct. Dyn., Vol./10, pp. 477-496, 1982.

- 33- Hanson, R.D. "Behavior of liquid charge tanks", The Great Alaska Earthquake of 1984, Engineering, National Academy of Sciences, Washington, D.C., pp. 331 - 339, 1973.
- 34- Rinne, J.E., "Oil storage tanks", The Prince William Sound, Alaska, Earthquake of 1964, and After Shocks, vol./II, Part A, ESSA, U.S. Coast and Geodetic Survey, Washington, Gouvernment Printing office, pp. 245 - 252, 1967.
- 35- Housner, G.W. and Jennings, P.C. "The San-Fernando California earthquake", J.Earthq. Engrg. and Struct. Dyn. vol./1 pp. 5 - 32, 1972.
- 36- Edwards, N.W. "A procedure for dynamic analysis of thin walled cylindrical liquid storage tanks subjected to lateral ground motions." Ph. D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1969.
- 37- Hsiung, H.H., and Weingerten, V.I., "Dynamic analysis of hydroelastic systems using the finite element method," Report USC CE 013, 1973.
- 38- Clough, D.P. "Experimental evaluation of seismic design methods for Broad cylindrical tanks". Report - UCB / EERC - 77/10, 1977.
- 39- Niwa, A. "Seismic behavior of tall liquid storage tanks". Report - UCB / EERC - 78 / 04, 1978.
- 40- Niwa, A. and Clough, R.W., "Buckling of cylindrical liquid - storage tanks under earthquake loading" J. Earthq. Engnrg. and Struct. Dyn., Vol./10, pp. 107 - 122, 1982.
- 41- Leeds, D.J.,ed., " Imperial county, California , earth. october 15,1979".Reconnaissance Report, Earth. Eng. Resear. Instit., Berkeley, Calif. , 1980.
- 42- Chiba, M., " Experimental studies on a nonlinear hydroelastic vibration of a clamped cylindrical tank partially filled with liquid". J.of Press. Vess. Techno., Vol./115, pp.381-388, 1993.

ANNEXES

ANNEXE : A

*Méthode combinée de
Runge - Kutta et Rosenbrock*

Méthode combinée de Range-Kutta et Rosenbrock1- Introduction

Monsieur Thevendran présente une nouvelle approche numérique pour la résolution des équations différentielles gouvernant la déformation d'un réservoir d'eau cylindrique circulaire dont l'axe longitudinal est vertical. L'épaisseur du mur est uniforme ou varie linéairement. L'approche est une combinaison de la méthode de Runge Kutta pour résoudre les équations différentielles ordinaires et des méthodes d'optimisation numérique (méthode de Rosenbrock). Il a utilisé cette méthode pour déterminer la forme optimale des murs du réservoir.

2- Equations gouvernantes

2-1 Les équations d'équilibres sont:

$$N'_x = 0 \quad (A-1) \quad \text{où } Z: \text{ la pression normale à la}$$

$$Q'_x + (1/R)N_\phi = -Z \quad (A-2) \quad \text{surface.}$$

$$M'_x - Q_x = 0 \quad (A-3)$$

2.2 Utilisant la relation contraintes - déplacements et contraintes - déformations, on aura:

$$N_\phi = - Et.(w/R) \quad (A-4) \quad \text{où } \nu: \text{ Coefficient de poisson}$$

$$M_x = -D W'' \quad (A-5) \quad E: \text{ Module de Young}$$

$$D = Et^3/12(1-\nu^2) \quad (A-6) \quad t: \text{ Epaisseur}$$

Eliminant Q_x de (2) et (3) On aura:

$$M_x'' + N_\phi/R = - Z \quad (A-7)$$

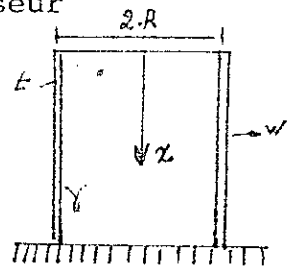


Fig-1: Système d'axe

Les équations (4) et (7) peuvent être résolues, soit par élimination de M_x et N_ϕ ce qui donnera:

$$(D W'')'' + Et.w/R^2 = Z \quad (A-8)$$

Soit par élimination de w ce qui donnera:

$$M_x - t^3/(12(1-v^2)) \cdot \{R.N_\phi/t\}' = 0 \quad (A-9)$$

$$M_x'' + N_\phi/R + Z = 0 \quad (A-10)$$

avec :

$$Z = -\tau x \quad \text{où } \tau: \text{ masse volumique de l'eau.}$$

Les conditions d'équilibres:

Le réservoir est ancre à la base et libre en haut:

à $x = d$ (à la base)

$$W(d) = 0 = W'(d) \quad (A-12a)$$

ou encore

$$N_\phi(d) = 0 = N_\phi'(d) \quad (A-12b)$$

à $x = 0$ en haut le sommet est libre alors:

$$M_x(0) = 0 = M_x'(0) = Q_x(0) \quad (A-13a)$$

ou encore

$$W''(0) = 0 = W'''(0) \quad (A-13b)$$

3- Les procédures

Les problèmes étudiés ici sont résolus soit par la formulation I c'est à dire considéré les équations différentielles (A-8) avec les conditions aux limites (A-12) et (A-13).

Soit par la formulation II c'est à dire les équations différentielles (A-9) et (A-10) avec les conditions aux limites (A-12) et (A-13).

a) Formulation I:

Les équations (A-8), (A-6) et (A-11) conduisent à :

$$(t^3 W''')'' + \{12(1-V^2)/R^2\} \cdot tW = -12(1-V^2) \cdot [\tau x/t] \quad (A-15)$$

avec les conditions aux limites:

$$W(d) = 0 = W'(d) \quad \text{et} \quad W''(0) = 0 = W'''(0)$$

Pour résoudre ce problème M^r Thevandran utilise la méthode de Runge-Kutta (dont l'algorithme est présenté au paragraphe 4).

Soit les fonctions suivantes:

$$U_1 = W, \quad U_2 = W', \quad U_3 = t^3 W''', \quad U_4 = (t^3 W''')'$$

Donc l'équation (A-15) peut être réécrite comme:

$$\begin{aligned} U_1' &= U_2 \\ U_2' &= U_3/t^3 \\ U_3' &= U_4 \\ U_4' &= -12(1-V^2) \{ [tU_1/R^2 + \tau x/E] \} \end{aligned} \quad (A-16)$$

avec

$$U_1(d) = 0 = U_2(d) \quad (A-17a)$$

$$U_3(0) = 0 = U_4(0) \quad (A-17b)$$

Pour appliquer la méthode de Runge-Kutta, on suppose que:

$$U_3(d) = v_1 \quad \text{et} \quad U_4(d) = v_2 \quad (A-18)$$

où v_1 et v_2 seront choisis de telle façon à satisfaire l'équation (A-17b). v_1 et v_2 sont connus comme variables de décision. Evidement $U_1(0)$, $U_2(0)$, $U_3(0)$ et $U_4(0)$ sont fonction de v_1 et v_2 .

La solution de l'équation (A-16) avec les conditions aux limites (A-17) peut être trouvée en considérant le problème comme le choix de v_1 et v_2 qui minimise la fonction

$$F_1(v_1, v_2) = [U_3(0)]^2 + [U_4(0)]^2 \quad (A-19)$$

F_1 atteindra sa valeur minimal zero seulement quand $U_3(0)=0=U_4(0)$

Les conditions (A-17b) sont satisfaites si $F_1(v_1, v_2)$ a atteint une valeur assez petite.

La minimisation de $F_1(v_1, v_2)$ se fait numériquement.

b) Formulation II

Les équation (A-9), (A-10) et (A-11) conduisent à :

$$M_X'' = - (N_\phi/R) + \tau x \quad (A-20)$$

$$(R \cdot N_\phi/t)'' = 12(1-v^2)M_X/t^3$$

avec les conditions aux limites:

$$N_\phi(d) = 0 = N_\phi'(d)$$

$$M_X(0) = 0 = M_X'(0)$$

Pour utilisé la méthode de Runge-Kutta, on defini les fonctions suivantes :

$$U_1 = M_X, \quad U_2 = R \cdot N_\phi/t, \quad U_3 = M_X', \quad \text{et} \quad U_4 = (R \cdot N_\phi/t)'$$

Donc les équations (A-20) peuvent être réécrites comme :

$$U_1' = U_3$$

$$U_2' = U_4$$

$$U_3' = -(tU_2/R^2) + \tau x$$

$$U_4' = 12(1-v^2) \cdot \{U_1/t^3$$

(A-21)

avec les conditions: $U_1(0) = 0 = U_3(0)$ (A-22a)

$U_2(d) = 0 = U_4(d)$ (A-22b)

On suppose que :

$$U_1(d) = v_1 \quad \text{et} \quad U_3(d) = v_2 \quad (\text{A-23})$$

où v_1 et v_2 sont choisis de telle façon à vérifier

l'équation (A-22b). Cela peut être accompli en considérant le problème comme le choix de v_1 et v_2 qui minimise la fonction

$$F_2(v_1, v_2) = [U_1(0)]^2 + [U_3(0)]^2 \quad (\text{A-24})$$

$F_2(v_1, v_2)$ atteindra sa valeur minimal zero que si le $U_1(0)=0=U_3(0)$

La condition (A-22a) est satisfaite si $F_2(v_1, v_2)$ à atteint une valeur assez petite.

La minimisation de $F_1(v_1, v_2)$ se fait numériquement.

4- L'algorithme de la Méthode de Runge-Kutta

Soit la fonction

$$Y_i' = f_i(x_i, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad \text{et} \quad \delta: \text{le pas}$$

avec $y_i(x_0) = C_i$, $i=1, 2, \dots, n$

les valeurs $y_i(x_0 + \delta)$ sont données par:

$$Y_i(x_0 + \delta) = Y_i(x_0) + [1/6] \cdot (A_{i1} + 2A_{i2} + 2A_{i3} + A_{i4});$$

où

$$A_{i1} = \delta \cdot f_i(x_0; C_1, C_2, \dots, C_n);$$

$$A_{i2} = \delta \cdot f_i(x_0 + \delta/2; C_1 + A_{i1}/2, C_2 + A_{i2}/2, \dots, C_n + A_{in1}/2);$$

$$A_{i3} = \delta \cdot f_i(x_0 + \delta/2; C_1 + A_{i2}/2, C_2 + A_{i3}/2, \dots, C_n + A_{in2}/2);$$

$$A_{i4} = \delta \cdot f_i(x_0 + \delta; C_1 + A_{i3}/2, C_2 + A_{i4}/2, \dots, C_n + A_{in3}/2);$$

ANNEXE : B

Calcul de la hauteur maximale de la vague

ANNEXE : B

Calcul de la hauteur maximale des vagues

L'excitation sismique peut endommager non seulement la coque mais aussi la toiture du réservoir s'il n'y a pas assez d'espace libre pour accommoder la hauteur maximale des vagues.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de comparer différentes méthodes de calcul de cette hauteur maximale.

Si la pression d'oscillation s'écrit sous la forme suivante:

$$(P_d)_o = \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i \left(\frac{z}{h} \right) A_i \right) \rho h \cos \omega t$$

où $C_i(z/h)$: coefficients de la pression d'oscillation $(P_d)_o$

A_i : l'amplitude du spectre d'accélération correspondant à la pulsation ω_i du mode i d'oscillation du liquide.

Alois le déplacement maximal de la surface libre dû aux trois premiers modes d'oscillation peut s'écrire comme suit:

$$d_{\max} = \frac{\rho h (C_1^2 (1.0) A_1^2 + C_2^2 (1.0) A_2^2 + C_3^2 (1.0) A_3^2)^{1/2}}{\rho g}$$

où encore :

$$d_{\max} = \frac{h}{g} \left(\sum_{i=1}^3 C_i^2 (1.0) A_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{B-1}$$

La variation des Coefficients $C_i(1.0)$ fonction de $\alpha_1 = z/h$ pour $i= 1,2$ et 3 peut être décrite par les équation suivantes :

$$C_1 (1.0) = 0,84 \alpha_1^{-0,998} \approx 0,84/\alpha_1$$

$$C_2 (1.0) = 0,075 \alpha_1^{-0,998} \approx 0,075/\alpha_1$$

$$C_3 (1.0) = 0,03 \alpha_1^{-0,998} \approx 0,03/\alpha_1$$

B-2

La substitution de (2) dans (1) donne le déplacement maximal de la vague :

$$\frac{d_3 \text{ max}}{R} = \frac{1}{g} ((0,84 A_1)^2 + (0,075 A_2)^2 + (0,03 A_3)^2)^{1/2} \quad \text{B-3}$$

Une expression similaire à celle donnée par Epstein:

$$\frac{d_2 \text{ max}}{R} = \frac{0,831}{g} A_1 \quad \text{B-4}$$

Ce qui représente la contribution du 1^{er} mode de l'équation (3). Dans le règlement japonais on utilise la formule suivante.

$$d_4 \text{ max} = 0,304 \frac{D}{T_0} \gamma_4 \quad \text{B-5}$$

où T_0 : période d'oscillation ($T_0 = 2\pi/w_0$)

et γ_4 : Coefficient de zone sismique égal à

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,70 \text{ en zone de faible sismicité} \\ 0,85 \text{ en zone de moyenne sismicité} \\ 1,00 \text{ en zone de forte sismicité} \end{array} \right.$$

L'application des trois formules précédentes aux réservoirs profonds (RI) et peu profond (RII) conduit aux résultats résumés dans le tableau B.1 ci-après

Tableau B.1- Comparaison des hauteurs maximales des vagues par différentes méthodes:

	Réservoirs		
	Peu Profond (RII)	Profond (RI)	
$d_1 \text{ max}$ (Housner)	32 in (81 cm)	16 in (41 cm)	
$d_2 \text{ max}$ (Epstein)	39 in (99 cm)	18 in (47 cm)	
$d_3 \text{ max}$ (3 modes d'oscillation)	40 in (100 cm)	19 in (48 cm)	
$d_4 \text{ max}$ pour γ_4	0,70	44 in (113 cm)	31 in (78 cm)
	0,85	54 in (137 cm)	37 in (94 cm)
	1,00	63 in (160 cm)	44 in (111 cm)

Il est à noter que les études sur l'endommagement des réservoirs durant le séisme de Coalinga de Mai 1983 [31] indiquent que les hauteurs maximales calculées par le règlement japonais semblent plus réalistes que celles déduites du règlement américain; C'est à dire qu'elles peuvent expliquer les endommagements causés aux toitures ainsi que les déversements du liquide pour les toitures flottantes.

En réalité, quand le séisme est de forte intensité, le non-linéarité entre en jeu; C'est pourquoi la hauteur maximale peut atteindre des valeurs très grandes et dépasserait ainsi l'espace libre calculé par $d_{1, \max}$.

D'après le tableau B.1 les hauteurs maximales $d_{1, \max}$ sont plus élevées même dans un cas de séisme de faible intensité.

Quand on introduit les modes supérieurs du mouvement d'oscillation il y a augmentation de $d_{1, \max}$, qui est très importante pour les réservoirs profonds, donc les modes supérieurs d'oscillation sont nécessaires dans ce cas particulier, mais elles n'atteignent pas $d_{1, \max}$.

Des études supplémentaires sont nécessaires, pour bien comprendre ce phénomène pendant et après le séisme.

ANNEXE : C

*Calcul des pressions hydrodynamiques
et des efforts résultants*

C1 Méthode négligeant l'oscillation du liquide

C1-1 Introduction

Dans cette méthode, on néglige les sollicitations produites par les oscillations des vagues d'eau pour ne s'intéresser qu'aux efforts d'impulsion.

La forme des réservoirs étudiés dans ce chapitre est celle de la figure C1-1 .

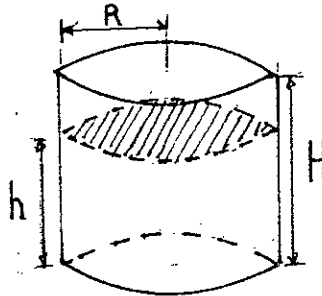


Figure (C1-1) Réservoir de forme cylindrique

C1-2 Champ de vitesse:

C'est le champ de vitesse régnant dans le réservoir qui permettra de déterminer la distribution des pressions; on suppose, pour calculer ce champ, que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- Les parois du réservoir sont rigides.
- Le réservoir se déplace à une vitesse $f'(t)$ suivant une direction horizontale.
- Petits déplacements.
- Le fluide est incompressible.
- Le fluide est non visqueux.
- Régime non turbulent (donc nombre de Reynolds suffisamment petit).

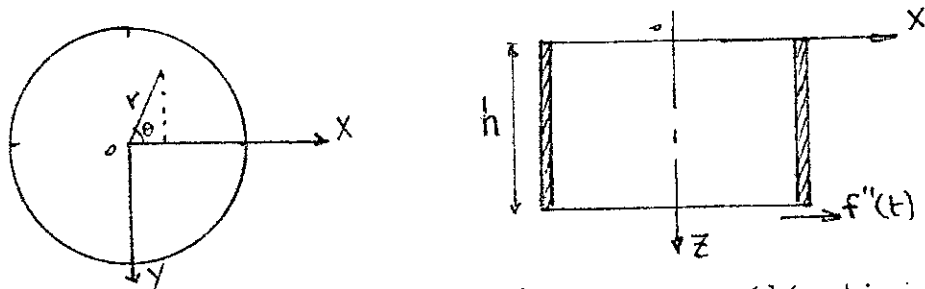


Figure (C1-2) Réservoir cylindrique soumis à une accélération horizontale $f''(t)$

Soit le réservoir de la figure (C1-2) soumis à une translation le long de l'axe ox . Le champ de vitesse $\vec{\Phi}$ dans le réservoir est

donné par l'équation de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{C1-1}$$

si on se place, en coordonnées cylindriques:

$$\frac{(\partial^2 \Phi)}{(\partial r^2)} + \frac{1}{r} \frac{(\partial \Phi)}{(\partial r)} + \frac{1}{r^2} \frac{(\partial^2 \Phi)}{(\partial \theta^2)} + \frac{(\partial^2 \Phi)}{(\partial z^2)} = 0 \quad \text{C1-2}$$

cherchons la solution sous forme de variables séparées:

$$\Phi(\theta, r, z, t) = R(r) \cdot \Phi(\theta) \cdot z(z) \cdot f'(t) \quad \text{C1-3}$$

avec les conditions aux limites suivantes:

- La composante verticale w de la vitesse est nulle sur toute la base ($z = h$).

Soit:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{(z=h)} = 0 \quad \text{C1-4}$$

- La vitesse de translation u suivant la direction X devant être égale à $f'(t)$, la composante radiale de la vitesse est donnée par:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{(r=R)} = f'(t) \cos \theta \quad \text{C1-5}$$

- La pression est nulle sur la surface libre:

$$(P)_{z=0} = 0 \quad \text{C1-6}$$

On trouve finalement l'expression du champ de vitesse.

$$\phi = f'(t) \cdot \cos \theta \cdot \sum_{(1,3,5,\dots)}^{\infty} A_n \cdot \sin(nkz) \cdot I_1(nkr) \quad \text{C1-7}$$

avec n : impaire et $k = \pi/2h$

$$A_n = \left(8 \frac{h}{(\pi^2 n^2)} \right) \cdot \left(\frac{1}{\left(I_0(nkr) - \left(\frac{1}{nkr} \cdot I_1(nkr) \right) \right)} \right) \quad \text{C1-8}$$

et I_1 : fonction de Bessel d'ordre 1 et d'argument $x = inkr$

C1-3 Suppression, forces et moments

Si on ne s'intéresse qu'à l'impulsion de pression pendant un temps Δt et qu'on néglige la suppression apportée ultérieurement par la vibration du fluide, dans la direction X, la suppression d'impulsion vérifie:

$$\frac{(\partial p)}{(\partial x)} = -\rho \frac{du}{dt} \quad \text{C1-9}$$

La vitesse u se déduit du champ de vitesse par $u = \delta\Phi/\delta x$
 $\delta p/\delta x = -\rho \delta^2\Phi/\delta t\delta x$ soit en intégrant $p = -\rho \delta\Phi/\delta t + F(t)$ C1-10

Dans le présent calcul, nous supposons que $F(t) = 0$ en admettant que pendant l'impulsion Δt , $F(t)$ est sans influencé sur p .

Donc $p = -\rho \delta\Phi/\delta t$ C1-11

Si, en plus de la condition (6), on impose la condition initiale qu'à $t = 0$ la surface libre soit au repos, on aura:

$$(\Phi)_{z=0} = 0 \quad \text{quelque soit } t > 0 \quad \text{C1-12}$$

- La pression est donnée par l'équation (C1-11):

$$p = -\rho \cdot \frac{(\delta\Phi)}{(\delta t)} = -\rho \cdot f''(t) \cdot \cos\theta \cdot \sum_{(1,3,5\dots)}^{\infty} A_n \cdot \sin(nkz) \cdot I_1(nkr) \quad \text{C1-13}$$

- La résultante de ces suppressions au niveau des parois ($r=R$) est donnée par:

$$Q = 2 \cdot \int_0^h \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (p \cdot \cos\theta \cdot d\theta \cdot dz)_{(r=R)} \quad \text{C1-14}$$

Après intégration on trouve:

$$Q_i = -\rho \cdot f''(t) \cdot h \cdot R \cdot \sum_{(1,3,5\dots)}^{\infty} A_n \cdot \frac{(I_1(nkr))}{n} \quad \text{C1-15}$$

où encore:

$$Q_i = -\rho \cdot \ddot{f}(t) \cdot h \cdot R^2 \gamma_i$$

avec

$$\gamma_i = \frac{2}{R} \cdot \sum_{(1,3,5,\dots)}^{\infty} \cdot A_n \cdot \frac{(I_1(nkR))}{n}$$

- Le point d'application de la résultante Q_i voir figure C1-3 mesure à partir de la surface libre ($z = 0$) est:

$$z = \frac{2}{Q_i} \cdot \int_0^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot (P_{(r=R)} z \cos \theta r d\theta dz)$$

l'intégrale donne :

$$z = 2 \cdot \frac{h}{\pi} \cdot \frac{\left(\sum_{(1,3,5,\dots)}^{\infty} \cdot A_n \cdot \frac{(I_1(nkR))}{n^2} \right)}{\left(\sum_{(1,3,5,\dots)}^{\infty} \cdot A_n \cdot \frac{(I_1(nkR))}{n} \right)} \quad \text{C1-15}$$

et $h_i = h - z$ C1-16

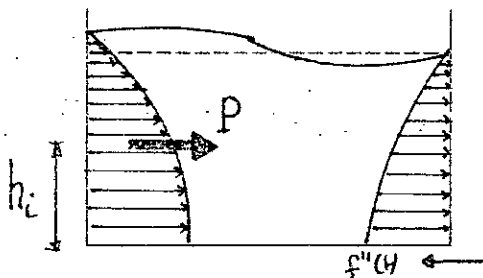


Figure C1-3

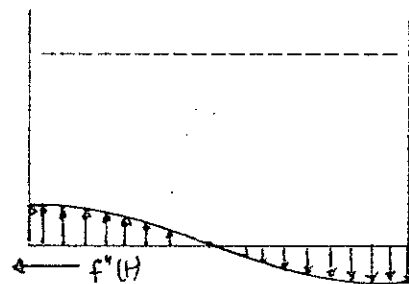


Figure C1-4

- Le moment des forces horizontales (Plan XY) est exprimé par la relation:

$$M = Q_i \cdot h_i = \rho \cdot f''(t) \cdot \frac{(4 \cdot h^2 \cdot R)}{\pi} \cdot \sum_{(1,3,5,\dots)}^{\infty} \cdot A_n \cdot \frac{(I_1(nkR))}{n^2} \quad \text{C1-17}$$

- Finalement le couple des forces agissant sur le fond $z=h$
 (Cf. figure C1-4) est :

$$M_b = 2 \cdot \int_0^R \cdot \int_{(-\pi/2)}^{(+\pi/2)} \cdot P_{(z=h)} \cdot r^2 \cdot \cos\theta \, dr \cdot d\theta$$

Après intégration on aura :

$$M_b = -2 \cdot \rho \cdot f''(t) \cdot h^2 \cdot R \cdot \sum_{(1,3,5,..)} \frac{(-1)^n \cdot A_n}{n} \cdot [I_0(nkR) - \frac{2}{(2kR)} \cdot I_1(NkR)] \quad C1-18$$

Ce couple conjugué avec le moment de flexion M précédemment déterminé exerçant sur le réservoir un moment de renversement.

C1-4 Modélisation

La modélisation de ce calcul peut se faire en calculant la masse passive correspondant à la force Q_i exercée sur les parois soit à partir de l'équation C1-14

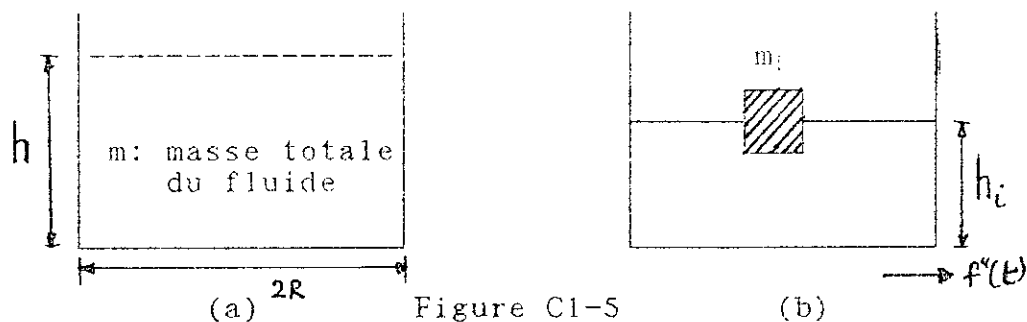
$$\frac{m_i}{m} = \frac{Q_i}{(-\rho \cdot f''(t) \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h)} = \frac{\left(-\rho \cdot f''(t) \cdot h \cdot R \cdot \sum_{(1,3,5,..)} \cdot A_n \cdot \frac{(I_1(nkR))}{n} \right)}{(-\rho \cdot f''(t) \cdot h \cdot R \cdot \pi)}$$

d'où

$$m_i = m \cdot \frac{\left(\sum_{(1,3,5,..)} \cdot A_n \cdot \frac{(I_1(nkR))}{n} \right)}{(\pi \cdot R)}$$

Elle est appliquée à une hauteur h_i définie par C1-15

La modélisation est donc celle de la figure C1-5



- Condition donnant l'équation de la surface à tout instant t:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{(z=0)} = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)_{(z=0)} + X \cdot a'(t) \quad \text{C2-4}$$

- Condition initiale de repos de la surface libre:

$$\frac{\partial\Phi(x, y, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{C2-5}$$

Pour résoudre l'équation de mouvement

$$\nabla^2\Phi = 0$$

introduisons les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , on obtient alors:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{C2-6}$$

et avec la même technique de séparation de variables que précédemment on arrive à la solution suivante:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \cos\theta \cdot \sum_{(1,3,5,..)} P(t) \cdot \frac{(J_1(\lambda_n r) \cdot \text{Ch}\lambda_n(h-z))}{(J_1(\lambda_n) \cdot \text{Ch}\lambda_n h)} \quad \text{C2-7}$$

expression dans laquelle les nombres λ_n sont les racines de la première dérivée de la fonction de Bessel d'ordre 1 et de première espèce, soit: pour $n = 1, 2, 3, \dots$

$$J_1(\lambda_n) = 0$$

soit l'équation

$$F_n(t) = \frac{2}{(\beta_n(1-\lambda_n^2))} \cdot \int_0^t a'(\tau) \cdot \sin\beta_n(t-\tau) d\tau \quad \text{C2-8}$$

avec

$$\beta_n = \sqrt{(\lambda_n \cdot \text{th}\lambda_n h)} \quad \text{C2-9}$$

C2-3 Suppression forces et moments:

- Pression dans le fluide:

A partir du champ de vitesse Φ les pression en tout points sont données par:

$$p = z - \frac{(\partial\Phi)}{(\partial t)} - x \cdot a(t)$$

soit:

$$p = z - \left[x \cdot a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cdot \frac{(J_1(\lambda_n) \cdot Ch\lambda_n(h-z))}{(J_1(\lambda_n) \cdot ch\lambda_n h)} \cdot \cos\theta \right] \quad \text{C2-10}$$

-Résultante des forces s'exerçant sur le réservoir:

Elle s'obtient par l'intégration de l'expression C2-10 sur la surface:

$$Q_2 = \pi \cdot H \cdot \left[k - \left(a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \frac{(th\lambda_n h)}{(\lambda_n h)} \right) \cdot i \right] \quad \text{C2-11}$$

expression dans laquelle apparaissent à la fois l'action du poids du fluide (k) et celle du fluide sur les parois (i)

on aura donc pour l'effort tranchant l'expression suivante:

$$Q = -\pi \cdot h \left[a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \frac{(th\lambda_n h)}{(\lambda_n h)} \right] \quad \text{C2-12}$$

La connaissance de Q est subordonnée à celle de $F_n(t)$ donc de la loi de variation de $a(t)$.

Supposons une forme sinusoïdale: $a(t) = a_r \cdot \sin(\omega t)$

alors $F_n(t)$ sera donnée par

$$F_n(t) = \left[\frac{(2 \cdot \omega^2 \cdot a(t))}{((1-\lambda_n)(\omega^2-\beta^{2n}))} \right] - \left[\frac{(2a_m \cdot \omega \beta_n \cdot \sin\beta_n t)}{((1-\lambda_n^2) \cdot (\omega^2-\beta^{2n}))} \right]$$

- Moment (calculé/0) des forces sur les surfaces du réservoir:

En intégrant l'équation C2-10 sur toute la surface, on obtient:

$$\vec{M}^* = \pi \cdot j \left[\frac{(a(t))}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - h^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(F_n(t))}{\lambda_n^2} \cdot \left(\frac{2}{(ch\lambda_n h)} - 1 \right) \right] \quad \text{C2-13}$$

qui est le moment total des forces comprenant celles s'exerçant sur la base.

Si par contre, dans l'expression C2-11 des forces, on ne s'intéresse qu'à la composante portée par (i), alors on obtient le moment sur les parois verticales.

$$\vec{M} = -\pi \vec{j} \left[\frac{a(t)}{2} \cdot h^2 + \sum_1^\infty \frac{F_n(t)}{(\lambda_n^2)} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{ch \lambda_n \cdot h} \right) \right) \right] \quad \text{C2-14}$$

Remarque:

Pour obtenir les expressions physiques(*) à partir des expressions adimensionnelles de ce chapitre, il suffit de considérer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^* / \sqrt{(gR^3)} & M &= M^* / \rho g R^4 \\ p &= p^* / \rho g R & r &= r^* / R \\ a(t) &= a^*(t) / g & \mu &= \mu^* / R \\ w &= w^* / \sqrt{(g/R)} & h &= h^* / R \\ Q &= Q^* / \rho g R^3 \end{aligned}$$

Ceci nous permet de réécrire la résultante Q sous sa valeur dimensionnelle.

$$Q_1^* = -\rho a(t) \cdot h \cdot R^2 \left[\pi + \frac{(2w^2 \pi R^2)}{h} \cdot \sum_1^\infty \frac{\left(th \left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right)}{(\lambda_n (1 - \lambda_n^2) \cdot (w^2 R - g \beta_n^2))} \right]$$

$$Q_2^* = 2\rho \cdot a_m w \pi R^3 \sqrt{(Rg)} \cdot \sum_1^\infty \frac{(\beta_n \cdot \sin \beta_n t \cdot th \left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right))}{(\lambda_n (1 - \lambda_n^2) \cdot (w^2 R - g \beta_n^2))}$$

$$Q = Q_1^* + Q_2^* \quad \text{C2-15}$$

On remarque que cette résultante C2-15 est la somme d'une résultante des pressions d'impulsions Q_i et d'une résultante des pressions d'oscillation Q_o , soit :

$$Q = Q_i + Q_o$$

$$\text{où } Q_i = \rho \cdot a_i \cdot h \cdot R^2 \cdot \delta_i$$

avec δ_i donnée par:

$$\delta_i = \left(\pi + \frac{(2\omega^2 R^2)}{h} \cdot \sum_1^{\infty} \left(\frac{\left(th \left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right)}{\left(\lambda_n (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - g \beta_n^2) \right)} \right) \right) \quad \text{C2-16}$$

- La résultante des pressions d'impulsion Q_i est appliquée à une hauteur z_i , telle que:

$z_i = h \cdot Z_i$ et Z_i est donnée par:

$$Z_i = \frac{\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{(2\omega^2 R^3)}{h^2} \right) \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\left(1 - \left(ch \left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right) \right)}{\left(\lambda_n (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - g \beta_n^2) \right)} \right)}{\left(1 + \frac{(2\omega^2 R^2)}{h} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\left(th \left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right)}{\left(\lambda_n (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - g \beta_n^2) \right)} \right)} \quad \text{C2-17}$$

- La résultante des pressions hydrodynamiques d'oscillation est définie par l'expression : $Q_0 = \rho \cdot a_t \cdot h \cdot R^2 \cdot \delta_0$
où δ_0 à pour expression

$$\delta_0 = \frac{(2\omega\pi R\sqrt{Rg})}{h} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{\left(\beta_n \cdot th \left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right)}{\left(\lambda_n (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - g \beta_n^2) \right)} \quad \text{C2-18}$$

Cette résultante est appliquée à une hauteur z_0 , définie par:

$z_0 = R \cdot Z_0$ avec Z_0 égal à:

$$Z_0 = \frac{\sum_1^{\infty} \left(\beta_n \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{\left(ch \left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right)} \right)}{\left(\lambda_n^2 (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - g \beta_n^2) \right)} \right)}{\sum_1^{\infty} \frac{\left(\beta_n th \left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right)}{\left(\lambda_n (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - g \beta_n^2) \right)}} \quad \text{C2-19}$$

- Moment des forces horizontales:

Moment de flexion pour l'impulsion

$$M_i = Q_i \cdot h_i = Q_i (h - z_i) = Q_i (h - h Z_i) = Q_i h (1 - Z_i) \quad \text{C2-20.a}$$

Moment de flexion pour l'oscillation

$$M_0 = Q_0 \cdot h_0 = Q_0 (h - z_0) = Q_0 (h - R Z_0) \quad \text{C2-20.b}$$

- Moment de renversement(*): incluant la pression à la base.

pour l'impulsion:

$$M_i^* = Q_i \cdot h_i^* = Q_i (h - z_i^*) = Q_i (h - hZ_i^*) = Q_i h (1 - Z_i^*) \quad \text{C2-21.a}$$

pour l'oscillation:

$$M_0^* = Q_i \cdot h_0^* = Q_i (h - z_0^*) = Q_i (h - RZ_0^*) \quad \text{C2-21.b}$$

où Z_i^* est donné par l'équation:

$$Z_i^* = \frac{\left(\frac{R^2}{(2h^2)} \cdot \left(1 - \frac{h^2}{R^2} \right) + 2\Omega^2 \cdot \frac{R^3}{h^2} \sum_1^\infty \frac{\left(\frac{2}{\left(ch\left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right)^{-1}} \right)}{\left(\lambda_n^2 (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - g\beta_n^2) \right)} \right)}{\left(1 + 2\omega^2 \frac{R^2}{h} \sum_1^\infty \frac{\left(th\left(\lambda_n \frac{h}{R} \right) \right)}{\left(\lambda_n (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - \beta_n^2 g) \right)} \right)} \quad \text{C2-22}$$

et Z_0^* est donné par l'équation:

$$Z_0^* = \frac{\left(\sum_1^\infty \left(\beta_n \cdot \frac{\left(\frac{2}{\left(ch\left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right)^{-1}} \right)}{\left(\lambda_n^2 (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - g\beta_n^2) \right)} \right) \right)}{\left(\sum_1^\infty \frac{\left(\beta_n th\left(\lambda_n \frac{h}{R} \right) \right)}{\left(\lambda_n (1 - \lambda_n^2) \cdot (\omega^2 R - g\beta_n^2) \right)} \right)} \quad \text{C2-23}$$

avec β_i donné par l'équation:

$$\beta_n = \sqrt{\left(\lambda_n \cdot th\left(\lambda_n \cdot \frac{h}{R} \right) \right)}$$

C3 Modèle de Haroun et Ellaithy

C3-1 Introduction

Haroun et Ellaithy [25] développent un modèle mécanique équivalent susceptible de considérer simultanément les mouvements de la translation de la base d'un réservoir, de la rotation de sa base rigide compte tenu de la flexibilité des parois.

En se basant sur une déformée hypothétique des parois du réservoir, ils développent les valeurs explicites des paramètres du modèle.

Dans ce qui suit la partie convective n'est pas considérée pour les raisons déjà citées dans l'introduction du chapitre.

C3-2 L'analyse théorique

La géométrie du réservoir étudié est montrée sur la figure C3-1. La surélévation d'un point sur la surface libre durant la vibration est désignée par η .

C3-2-1 Hypothèses

- 1- Le liquide est homogène, non visqueux et incompressible.
- 2- Le flux est irrotationnel.
- 3- Le réservoir est soumis à un mouvement de translation de la base $u(t)$ et/ou à celui d'une rotation de la base rigide $\alpha(t)$ par rapport à un axe horizontal.
- 4- L'interaction des modes d'oscillation du fluide avec la déformation de la coque est faible.
- 5- La composante de pression de courte période due à la flexibilité des parois est prise en compte.

C3-2-2 Equations de mouvement du liquide

L'analyse du mouvement du fluide nécessite la détermination d'un potentiel de vitesse $\Phi(r, \theta, z, t)$ qui doit satisfaire l'équation de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

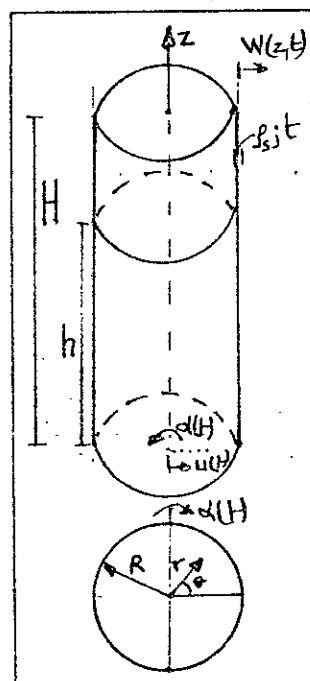


Figure C3-1
géométrie du
réservoir et
de système de
coordonées

C3-1

ainsi que les conditions aux limites suivantes:

1- Au fond ($z=0$):

la vitesse du liquide dans la direction verticale doit être la même que la vitesse verticale de la base rigide:

$$\frac{(\partial\Phi(r, \theta, 0, t))}{(\partial z)} = -r\dot{\alpha}(t)\cos\theta \quad \text{C3-2}$$

2- La vitesse radiale du liquide adjacent aux parois du réservoir ($r=R$) est égale à celle de la coque:

$$\frac{(\partial\Phi(R, \theta, z, t))}{(\partial r)} = [\dot{u}(t)+z\dot{\alpha}(t)+\dot{w}(z, t)]\cos\theta \quad \text{C3-3}$$

où $w(z, t)$ représente déplacement radial de la coque à $\theta=0$

3- A la surface libre du liquide au repos $z = h$:

$$\frac{(\partial\Phi(r, \theta, h, t))}{(\partial t)} = 0 \quad \text{C3-4}$$

C3-2-3 L'Analyse des réservoirs flexibles

Le potentiel de vitesse peut être exprimé par l'expression suivante:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \Phi_1(r, \theta, z, t) + \Phi_2(r, \theta, z, t) + \Phi_3(r, \theta, z, t) \quad \text{C3-5}$$

où Φ_1 est la composante associée au mouvement du corps rigide et est donnée par:

$$\Phi_1(r, \theta, z, t) = [\dot{u}(t)+z\dot{\alpha}(t)] \cdot r \cdot \cos\theta \quad \text{C3-6}$$

Φ_2 est la composante associée à la condition homogène aux parois du réservoir (vitesse radiale égale à zéro) et exprimée par:

$$\Phi_2(r, \theta, z, t) = \left(\sum_{(i=1)}^{\infty} \left(A_i(t) \operatorname{ch} \left(\frac{\xi_i z}{R} \right) + B_i(t) \operatorname{sh} \left(\xi_i \frac{(z-h)}{R} \right) \right) J_1 \left(\frac{\xi_i r}{R} \right) \right) \cos\theta \quad \text{C3-7}$$

où ξ_i sont les racines de $J_1'(\xi_i) = 0$ et J_1' désigne la dérivée de la fonction de Bessel de première espèce et de premier ordre.

$A_i(t)$ et $B_i(t)$ sont des constantes arbitraires déterminées par les conditions aux limites à $z=0$ et $z=h$ respectivement et sont données par:

$$A_j(t) = - \frac{(2R[\dot{u}(t) + h\dot{\alpha}(t)])}{([\xi_i^2 - 1] J_1(\xi_i) \operatorname{Ch}(\xi_i \frac{h}{R}))} \quad \text{C3-8}$$

$$B_j(t) = - \frac{(4R^2 \ddot{\alpha}(t))}{(\xi_i(\xi_i^2 - 1) J_1(\xi_i) \operatorname{Ch}(\xi_i \frac{h}{R}))} \quad \text{C3-9}$$

et Φ_3 prend la forme:

$$\Phi_3 = \sum_{(j=1)}^{\infty} C_j(t) I_1(\lambda_j r) \cdot \cos(\lambda_j z) \cdot \cos\theta \quad \text{C3-10}$$

où $\lambda_j = (2j-1)\pi/2h$ et I_1 fonction de Bessel modifiée de première espèce et de premier ordre.

Par la condition limite 2; on peut obtenir les expressions suivantes pour les $C_j(t)$:

$$C_j(t) = \frac{2}{(\lambda_j I_1(\lambda_j R) h)} \cdot \int_0^h \dot{w}(z, t) \cdot \cos(\lambda_j z) dz \quad \text{C3-11}$$

La pression hydrodynamique p est reliée au potentiel de vitesse par la formule:

$$p(r, \theta, z, t) = -\rho \frac{(\partial \Phi(r, \theta, z, t))}{(\partial t)} \quad \text{C3-12}$$

On en déduit, la force latérale $f(z, t)$ exercée sur la paroi du réservoir :

$$f(z, t) = \int_0^{2\pi} p(R, \theta, z, t) \cdot R \cos\theta \cdot d\theta \quad \text{C3-13}$$

Après intégration, on obtient:

$$f(z, t) = -D_1 [\ddot{u}(t) + z\ddot{\alpha}(t)] + \sum_{i=1}^{\infty} (D_{(2i)} [\ddot{u}(t) + h\ddot{\alpha}(t)]) \cdot \operatorname{Ch}\left(\xi_i \frac{z}{R}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} D_{(3i)} \cdot \ddot{\alpha}(t) \cdot \operatorname{sh}\left(\xi_i \frac{(z-h)}{R}\right) - \sum_{j=1}^{\infty} (D_4 j \cdot \cos(\lambda_j z)) \int_0^h \dot{w}(x, t) \cdot \cos(\lambda_j x) dx \quad \text{C3-14}$$

où

$$D_1 = \pi \rho R^2$$

$$D_{(2i)} = \frac{2\pi R^2 \rho}{(\xi_i^2 - 1) \cdot \operatorname{ch}\left(\xi_i \frac{h}{R}\right)}$$

$$D_{(3i)} = \frac{4\pi R^3 \rho}{\xi_i (\xi_i^2 - 1) \cdot \operatorname{ch}\left(\xi_i \frac{h}{R}\right)} \quad \text{C3-15}$$

$$D_{(4j)} = \frac{2\pi R \rho I_1(\lambda_j R)}{\lambda_j I_1(\lambda_j R) h}$$

Le moment à la base est calculé par:

$$M_b(t) = \int_0^R \int_0^{(2\pi)} P(r, \theta, 0, t) \cdot r^2 \cdot \cos \theta \, d\theta \, dr \quad \text{C3-16}$$

Sachant que:

$$\int_0^R r^2 J_1\left(\xi_i \frac{r}{R}\right) dr = \frac{R^3}{\xi_i^2} J_1(\xi_i)$$

$$\int_0^R r^2 I_1(\lambda_j r) dr = \frac{R^2}{\lambda_j} I_2(\lambda_j R) \quad \text{C3-17}$$

On peut arriver à l'expression suivante pour $M_b(t)$:

$$M_b(t) = -E_1 \dot{u}(t) + \sum_{(i=1)}^{\infty} (E_{(2i)} [\dot{u}(t) + h \ddot{a}(t)]) - \sum_{(i=1)}^{\infty} E_{(3i)} \ddot{a}(t)$$

$$- \sum_{(j=1)}^{\infty} E_{(4j)} \int_0^h \ddot{w}(x, t) \cdot \cos(\lambda_j x) \, dx \quad \text{C3-18}$$

où les E_i sont données par:

$$E_1 = \rho \cdot \pi \frac{R^4}{4}$$

$$E_{(2i)} = \frac{(2\rho\pi R^4)}{\left(\xi_i^2(\xi_i^2-1) \operatorname{ch}\left(\xi_i \frac{h}{R}\right)\right)}$$

$$E_{(3i)} = \frac{(4\rho\pi R^5)}{(\xi_i^2(\xi_i^2-1))} \cdot \operatorname{th}\left(\xi_i \frac{h}{R}\right) \quad \text{C3-19}$$

$$E_{(4j)} = \frac{(2\rho R^2 I_2(\lambda_j R))}{(\lambda_j^2 h I_1(\lambda_j R))}$$

Ayant la force latérale $f(z, t)$ et le moment à la base $M_b(t)$, on peut calculer l'effort tranchant $Q(t)$ et le moment de renversement $M^*(t)$ comme suit:

$$Q(t) = \int_0^h f(z, t) dz + \int_0^H m_s [\ddot{u}(t) + z\ddot{\alpha}(t) + \ddot{w}(z, t)] dz \quad \text{C3-20}$$

$$M^*(t) = \int_0^h f(z, t) z dz + M_b(t) + \int_0^H m_s [\ddot{u}(t) + z\ddot{\alpha}(t) + \ddot{w}(z, t)] z dz \quad \text{C3-21}$$

où m_s est la masse de la coque par unité de hauteur.

La déformation de la coque, $w(z, t)$ peut être décrite sous la forme suivante:

$$w(z, t) = W(t) \cdot \Psi(z) \quad \text{C3-22}$$

où $W(t)$ facteur dépendant du temps.

$\Psi(z)$ déformée hypothétique des parois.

On peut réécrire les équations C3-20 et C3-21 comme suit:

$$Q(t) = (\gamma_1 \ddot{W}(t) + \gamma_2 \ddot{u}(t) + \gamma_3 \ddot{\alpha}(t)) \cdot m \quad \text{C3-23}$$

$$M^* = (\gamma_4 \ddot{W}(t) + \gamma_5 \ddot{u}(t) + \gamma_6 \ddot{\alpha}(t)) \cdot mh \quad \text{C3-24}$$

où les coefficients γ_i sont présentés dans le tableau C3-1

Tableau C3-1 Valeurs des coefficients γ_i

$$\gamma_1 = \frac{1}{h} \left(\int_0^h \psi(z) dz - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch}(\beta_i)} \right) \cdot \int_0^h \psi(z) \operatorname{ch} \beta_i dz \right)$$

$$\gamma_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(2 \operatorname{th} \beta_i)}{(\beta_i (\xi_i^2 - 1))} \right)$$

$$\gamma_3 = h \left(\gamma_2 - 0,5 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(4 \operatorname{ch} \beta_i - 1)}{(\beta_i^2 (\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch} \beta_i)} \right) \right)$$

$$\gamma_4 = \left(\frac{1}{h} \right) \int_0^h z \psi(z) dz - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch} \beta_i} \right) \left(\int_0^h \psi(z) \operatorname{ch} \beta_i dz \right)$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \left(4 \frac{\left(\frac{R}{H} \right)}{(\xi_i (\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch} \beta_i)} \right) \left(\int_0^h \psi(z) \operatorname{sh} \left(\xi_i \frac{(z-h)}{R} \right) dz \right)$$

$$\gamma_5 = \frac{\gamma_3}{h}$$

$$\gamma_6 = h \left(\gamma_2 - 0,17 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(8 \operatorname{th} \beta_i)}{(\beta_i^2 (\xi_i^2 - 1))} \right) \right) - \sum_{i=1}^{\infty} \left(2 \cdot \frac{(4 - \operatorname{ch} \beta_i)}{(\beta_i^2 (\xi_i^2 - 1) \operatorname{ch} \beta_i)} \right)$$

$$\gamma_7 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(I_1(\lambda_i R))}{(R \lambda_i I_1'(\lambda_i R) h^2)} \right) \left(\int_0^h \psi(z) \cos(\lambda_i x) dx \right)^2$$

où $\alpha = h/R$ et $\beta_i = \xi_i \cdot \alpha \dots$

3- Modèle mécanique équivalent

Le modèle mécanique équivalent présentant un réservoir cylindrique flexible est illustré sur la figure C3-2 (a et b). La masse m_i qui est localisée à une hauteur h_i représente la contribution de la composante de la pression de courte période dans la vibration des parois relative à la base.

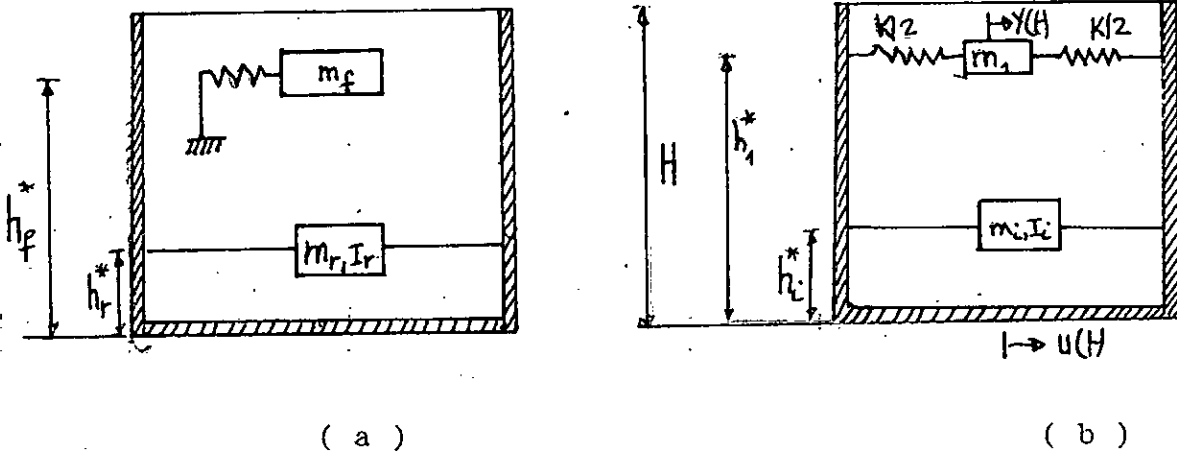


Figure C3-2 Modèle mécanique équivalent (réservoir flexible)

De même, la masse impulsive m_r est localisée à une hauteur h_r .

(l'exposant * indiquant que les hauteurs incluent l'effet de la variation de pression sur la base (+ $M_b(t)$)).

L'effort tranchant Q et le moment de renversement peuvent être exprimés par:

$$Q(t) = m_f \ddot{y}(t) + m_r \ddot{u}(t) + m_r h_r^* \ddot{\alpha}(t) \quad \text{C3-25}$$

$$M^*(t) = m_f \cdot h_f^* \cdot \ddot{y}(t) + m_r h_r^* \ddot{u}(t) + (m_r (h_r^*)^2 + I_r) \ddot{\alpha}(t) \quad \text{C3-26}$$

où I_r est le moment d'inertie de la masse m_r .

Pour exprimer $y(t)$ en fonction de $W(t)$, l'énergie cinétique du réservoir doit égaler à celle du modèle donc:

$$m_f \dot{y}^2(t) = \gamma_7 \dot{W}(t) \quad \text{C3-27}$$

$$\gamma_7 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(I_1(\lambda_i R))}{(R \lambda_i I_1'(\lambda_i R) h^2)} \right) \left(\int_0^h \Phi(z) \cos(\lambda_i x) dx \right)^2 \quad \text{C3-28}$$

La relation entre $y(t)$ et $\dot{W}(t)$ prend la forme:

$$\dot{W}(t) = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_4} \right) \cdot \dot{y}(t) \quad \text{C3-29}$$

et donc les équations C3-23 et C3-24 deviennent:

$$Q(t) = m \frac{(\gamma_1^2)}{(\gamma_7)} \ddot{y}(t) + m\gamma_2 \ddot{u}(t) + m\gamma_3 \ddot{\alpha}(t) \quad \text{C3-30}$$

$$M^*(t) = mh \frac{(\gamma_1 \gamma_4)}{(\gamma_7)} \ddot{y}(t) + mh\gamma_5 \ddot{u}(t) + mh\gamma_6 \ddot{\alpha}(t) \quad \text{C3-41}$$

En comparant les équations C3-25 et C3-26 avec les équations C3-30 et C3-31 respectivement on peut obtenir les paramètres du modèle:

$$m_r = \gamma_2 m$$

$$h_r^* = \frac{\gamma_3}{\gamma_2}$$

$$m_f = \frac{\gamma_1^2}{\gamma_7} \cdot m$$

$$h_f^* = \frac{(\gamma_4 h)}{\gamma_1} \quad \text{C3-32}$$

$$m_r h_r^{*2} + I_r = \gamma_6 m h$$

C3-4 Effet de la masse de la coque m_s sur les paramètres du modèle
 Pour un réservoir cylindrique circulaire rempli construit en acier l'épaisseur t est petite devant le rayon R de sorte que l'influence de m_s sur les paramètres du modèle est faible.

Pour les réservoirs partiellement remplis ou vides l'effet de m_s doit être considéré. Il est aussi recommandé pour les réservoirs construits en béton armé (où t/R est relativement grand) de considérer la masse de la coque m_s .

Les valeurs des γ_i peuvent être modifiées pour prendre en compte m_s . Les valeurs modifiées sont données par:

$$\hat{\gamma}_1 = \gamma_1 + \frac{1}{(\pi R^2 h \rho_s)} \left(\int_0^H m_s \Psi(z) dz \right)$$

$$\hat{\gamma}_2 = \gamma_2 + \frac{(\rho_s H^2 t)}{(\rho h^2 R)}$$

$$\hat{\gamma}_3 = \gamma_3 + \frac{(2 \rho_s H t)}{(\rho h R)}$$

$$\hat{\gamma}_4 = \gamma_4 + \int_0^H \left(\frac{m_s}{(\pi R^2 \rho h)} \right) z \cdot \Psi(z) dz$$

C3-33

$$\hat{\gamma}_5 = \frac{\hat{\gamma}_3}{h}$$

$$\hat{\gamma}_6 = \gamma_6 + \frac{(2 \rho_s t H^3)}{(3 \rho R h^3)}$$

$$\hat{\gamma}_7 = \gamma_7 + \frac{1}{(\pi R^2 \rho h)} \left(\int_0^H m_s \Psi^2(z) dz \right)$$

Les paramètres modifiés du modèle mécanique sont obtenus en remplaçant les γ_i dans les équations C3-32 par les valeurs correspondantes de $\hat{\gamma}_i$.

5- Valeurs explicites pour les paramètres du modèle

Considérons la déformée hypothétique :

$$\psi(z) = \sin\left(\pi \frac{z}{2h}\right)$$

Cette hypothèse permet d'obtenir des valeurs précises pour les paramètres du modèle, spécialement dans le cas de réservoir où h/r est modéré. Les paramètres incluant l'effet de la masse sont donnés par le tableau C3-2.

Comme les forces associées à m_i sont proportionnelles à l'accélération relative ($S_i - a_i$), la masse m_i peut être interprétée comme une portion de m_r qui participe dans la vibration des parois flexibles, d'où le fait que m_i est toujours inférieur à m_r .

Par conséquent les paramètres m_i , m_i , h_i^* , h_i^* et I_i doivent être remplacés par m_i , m_i , h_i^* , h_i^* et I_i (Fig C3-2.b).

Cela peut se faire par introduction des relations suivantes:

$$m_i = m_i$$

$$m_i = m_r - m_i$$

$$h_i^* = h_i^*$$

$$m_r \cdot h_i^* = m_i \cdot h_i^* + m_i \cdot h_i^*$$

$$\text{et } m_r \cdot (h_i^*)^2 + I_r = m_i \cdot (h_i^*)^2 + m_i \cdot (h_i^*)^2 + I_i$$

Le seul paramètre qui reste à considérer est $K (=K_i)$.

Dans la pratique courante, les raideurs d'une poutre cantilever en cisaillement ou en flexion sont utilisées pour le calcul de la pulsation fondamentale des réservoirs respectivement peu profonds et profonds. Bien que cette procédure donne des valeurs raisonnables pour les réservoirs profonds, pour les réservoirs peu profonds les pulsations sont très grandes.

Par conséquent, le calcul des pulsations doit être basé sur la théorie de la coque.

Haroun et Ellaithy présente la pulsation sous cette forme

$$\omega_f^2 = \frac{K_f}{m_f} = \frac{(4\pi^5 Et)}{m} \left(0,01205 \left(\frac{h}{R} \right)^2 - 0,08466 \left(\frac{h}{R} \right) + 0,17042 \right)^2$$

Tableau C3-2 Paramètres du modèle pour $\psi(z) = \sin(\pi z/2h)$

$$m_x = m \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2th\beta_i}{(\beta_i(\xi_i^2-1))} \right) + \frac{(2\rho_s Ht)}{(\rho hR)} \right)$$

$$h_x^* = h \frac{\left(0,5 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2th\beta_i}{(\beta_i(\xi_i^2-1))} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4(ch\beta_i-1)}{(\beta_i^2(\xi_i^2-1)ch\beta_i)} \right) + \frac{(\rho_s H^2 t)}{(\rho h^2 R)} \right)}{\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2th\beta_i}{(\beta_i(\xi_i^2-1))} \right) + \frac{(2\rho_s Ht)}{(\rho hR)} \right)}$$

$$m_f = m \frac{\left(\frac{2}{\pi} - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(\beta_i sh\beta_i + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\xi_i^2-1\right)ch\beta_i\left(\beta_i^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)} \right) + \frac{(2t\rho_s)}{(R\rho)} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{h}{H} - 1 \right) \right)^2}{\left(\frac{4}{\left(\frac{R}{h} \cdot \pi^3\right)} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(I_1(\lambda_i R))}{(I_1(\lambda_i R)(2i-1))} + \frac{(I_1(\lambda_{(i+1)} R))}{(I_1(\lambda_{(i+1)} R)(2i+1))} \right) \left(\frac{1}{i^2} \right) + \frac{(2t\rho_s)}{(R\rho)} \left(\frac{H-1}{h} - \frac{1}{2} \right) \right)}$$

$$h_f^* = h \frac{\left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^2 - \sum_{(i=1)}^{\infty} \left(2 \frac{\left(\beta_i sh\beta_i + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\xi_i^2-1\right)ch\beta_i\left(\beta_i^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)} \right) - \sum_{(i=1)}^{\infty} \left(\frac{4\left(\beta_i - \frac{\pi}{2} sh\beta_i\right)}{\left(\beta_i(\xi_i^2-1)ch\beta_i\left(\beta_i^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right)} \right) \right) + \frac{(2t\rho_s)}{(R\rho)} \left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{H^2}{(2h^2)} - \frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{2}{\pi} - \sum_{(i=1)}^{\infty} \left(\frac{2\left(\beta_i sh\beta_i + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\xi_i^2-1\right)ch\beta_i\left(\beta_i^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)} \right) + \frac{(2t\rho_s)}{(R\rho)} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{H}{h} - 1 \right) \right)}$$

$$m_x(h_x^*)^2 + I_x = mh^2 \left(0,33 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2th\beta_i}{(\beta_i(\xi_i^2-1))} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{8th\beta_i}{(\beta_i^3(\xi_i^2-1))} \right) \right)$$

$$- mh^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2(4-ch\beta_i)}{(\beta_i^2(\xi_i^2-1)ch\beta_i)} \right) + \frac{(2\rho_s tH^3)}{(3\rho Rh^3)} \right)$$

où $\beta_i = \xi_i \quad h/R$; $\xi_1 = 1,8412$; $\xi_2 = 5,3314$; $\xi_3 = 8,5363$

$\xi_4 = 11,706$ et $\xi_5 = 14,864$