

11/98

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de Fin d'étude

Construction des Surfaces Complexes par La Méthode B-Spline

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme

D'Ingénieur d'état en Génie Mécanique

Proposé par :
M. Bouaziz

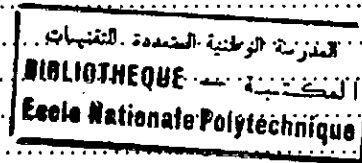
Etudié par :
S. Saihi
Sofiane

Dirigé par :
M. Bouaziz

Département de Génie Mécanique
Ecole Nationale Polytechnique
10 Avenue Hassen Badi, El Harrach, Alger 16200, Algérie

Septembre 1998

INTRODUCTION.....	1
I-MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE	2
I-1 Naissance de la Machine à mesurer tridimensionnelle.....	2
I-2 Description et fonctionnement de la M.M.T.....	2
I-3 Système de palpé.....	2
A) Palpeur à bille.....	3
B) Palpeur sans contact.....	4
I-4 Utilisation de la M.M.T.....	4
a) Pour contrôle des surfaces connues.....	4
b) Pour contrôle des surfaces inconnues.....	4
II- METHODE DE CONSTRUCTION DES SURFACES.....	6
II-1 Décomposition en carreaux et raccordement.....	6
II-2 Etude de principales techniques de construction.....	7
II-2.1 Construction à partir de données issues de digitalisation.....	7
II-2.1 Construction lors d'une phase de conception d'un objet.....	7
II-3. Procédure de construction de courbes et de carreaux.....	10
II-3.1 Construction de courbes.....	10
II-3.2 Construction de carreaux.....	11
III- COURBES B-SPLINE.....	12
III-1. Introduction.....	12
III-2. Notion de nœuds et de multiplicité.....	13
III-2.2 Ordre de multiplicité d'un nœuds.....	13
III-3 Courbe B-spline : Equation.....	13
III-4. Propriétés des courbes B-spline et des fonction de bases.....	14
III-4.1. Equation des fonctions de base.....	16
III-4.2 Propriétés des fonctions de base.....	17
III-4.3. Relation de récurrence.....	17
III-4.4. Séquence nodale et fonction B-spline.....	17
III-4.5. Séquence nodale et invariance d'une courbe.....	19
III-4.6 Réversibilité d'une courbe B-spline.....	19
III-4.7 Dérivation des fonction de base.....	20
III-4.8. Relation entre polygone caractéristique et courbe B-spline.....	20
III-4.9. Influence des sommets du polygone caractéristique sur la forme d'une courbe.....	21
III-4.10. Polygone associé à une courbe B-spline.....	21
III-5 Algorithme de construction des courbes B-spline.....	22
III-5.1 Algorithme et interprétation géométrique.....	23
III-6. Construction des courbes à partir des contraintes Géométriques.....	25
III-6.1 Construction des courbes B-splines non uniformes par interpolation.....	25
III-7. Algorithme d'insertion des nœuds.....	27
III-8. Calcul des courbes offset planes.....	28
III-8.1 Méthode de polygonisation.....	29
III-8.2 Méthode d'approximation par des courbes de même type.....	29
III-8.2.1 Méthode de polygone caractéristique parallèle (Méthode de Tiller et Hanson).....	29
IV- CARREAUX B-SPLINE.....	31
IV- Carreaux B-spline :Equation.....	31
IV- Relation géométrique entre réseau caractéristique et surface.....	32



IV-3 Lignes isoparamétriques.....	32
IV- Calcul d'un point courant d'un carreaux B-spline.....	33
IV-5 Construction des carreaux par interpolation.....	33
IV-6.Calcul des normales à la surface.....	34
IV-7.Comportement aux frontières/Raccordement.....	34
Application et résultats.....	37
conclusion et perspectives.....	47
Annexe.....	48
bibliographie.....	56

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACE

A mes parents - qui ont toujours aimé me voir réussir- en signe d'amour, de reconnaissance et de respect.

A mes frères et sœurs.

A mon cher frère Souhail et à sa fiancée Nora.

A toute la famille.

Et à tous mes amis.



REMERMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

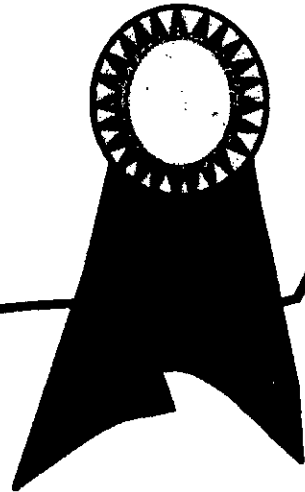
Je tiens à remercier mon promoteur Mr Bouaziz pour son soutien et son suivi le long de ce travail. Ma profonde gratitude à mes enseignants qui ont contribué à ma formation et aux membres du jury qui ont accepté de siéger ce travail.

Ma profonde reconnaissance à Badrou et Souhail qui, chacun à sa façon, m'ont prodigué, conseils, soutien et humour.

Enfin à ma tante Djamila qui, le long de mon séjour à Alger, a été pour moi comme une mère; qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction



INTRODUCTION :

L'évolution des techniques de fabrication mécanique (qui a permis d'obtenir des surfaces relativement complexes) et la nécessité de contrôler la qualité des pièces afin d'augmenter leur précision, rendent les appareils de mesure conventionnels inadaptés ou nécessitent des accessoires onéreux et coûteux, ce qui a poussé les industriels à créer des machines qui donnent des résultats à la hauteur des exigences.

Les machines à mesurer tridimensionnelles ont apporté une profonde transformation à la connaissance de la géométrie des pièces mécaniques. En effet il est désormais banal de mesurer dans un intervalle de plusieurs mètres cube, la position tridimensionnelle d'un palpeur mécanique avec un intervalle de tolérance inférieur au centième de millimètre.

Les machines à mesurer tridimensionnelles en réalité ne donnent pas les coordonnées du point appartenant à la surface mesurée mais elles donnent ceux du centre du palpeur, alors l'intégration de leur programmation à des logiciels de CAO et à des logiciels d'évaluation de la géométrie des pièces offrira une véritable amélioration.

La méthode B-SPLINE est l'une des méthodes de modélisation des surfaces complexes, elle est à la base des logiciels utilisés en CAO et CFAO. A partir de certains points mesurés appartenant à la surface, par un maillage paramétrique approprié, on détermine par interpolation n'importe quel autre point de la surface, en approchant l'expression $f(x,y) = z$ par l'expression $p(u,v) = s$.



Chapitre 1

**Machine à mesurer
tridimensionnelle**

I-MACHINE A MESURER TRIDIMENSIONNELLE :

I- 1 Naissance De La Machine a Mesurer Tridimensionnelle :

La machine à mesurer a été construite pour la première fois en ITALIE à la fin 1962, puis en 1973 apparaît une machine qui contient les deux éléments fondamentaux qui définissent une machine à mesurer tridimensionnelle moderne, le palpeur universel et le calculateur. Le palpeur universel est un capteur caractérisé par le fait qu'il permet de faire des mesures sur n'importe quel type de surface. Le calculateur permet de développer des algorithmes complexes et des méthodes de traitement des résultats de mesure, depuis, les machines à mesurer tridimensionnelles ne cessent de se développer au fur et à mesure que l'industrie se développe.

I-2 DESCRIPTION ET FONCTIONNEMENT DE LA MMT :

Une machine à mesurer tridimensionnelle est un système permettant le déplacement orthogonal d'un palpeur capable de repérer des points à la surface d'un solide ; un calculateur de base traite les résultats de mesure. Sa structure de base comprends trois guidages en translation orthogonaux deux à deux, leur commande peut être manuelle, motorisée sans automatisme ou alors avec commande numérique, qui est onéreuse mais améliore la qualité des mesures et permet le contrôle des surfaces complexes qui ne sont mesurables que sur machines à commande numérique.

I-3 SYSTEME DE PALPAGE :

Le palpeur est le point de passage obligé de toutes les mesures, en conséquence une machine ne saurait être plus précise que son système de palpation. On distingue 2 catégories de palpeurs : les palpeurs à contact à bille et les palpeurs sans contact.

A) Palpeur à bille :

Le contact ponctuel surface-bille permet de diversifier les surfaces à palper tout en gardant le même palpeur, le plus important est de déterminer l'instant où il y a contact sans déformation ni du palpeur ni de la pièce, le contact doit être franc mais assez faible. nous sommes en présence de deux concepts :

- Concept du palpéage statique :

Dans ce cas la bille est positionner sur la pièce et la machine à mesurer s'arrête. En l'absence de frottement, l'effort au contact bille-pièce est normal à la matière, et la mesure est effectuée avec précision de l'ordre de $0.1\mu\text{m}$. Enfin les palpeurs statiques permettent le palpéage continu.

- Concept du palpéage dynamique :

Il consiste à venir toucher la pièce avec la bille en maintenant la machine en mouvement avec une vitesse constante de l'ordre de $0.5\text{m}/\text{min}$, ce qui fait que l'accélération du mouvement sera nulle, ce qui provoque l'annulation des forces d'inertie. Un palpeur dynamique (ou à déclenchement) fonctionne comme un simple interrupteur qui donne le signale nécessaire à la lecture des trois règles de contrôle des déplacements, il est caractérisé par un faible encombrement de la tête et le coût modéré du système, en revanche les mesures données sont moins précises que celle données pour les palpeurs statiques.

les palpeurs dynamiques sont les plus utilisés sur les machines à mesurer et couramment sur les **M.M.T** de moyenne précision (incertitude globale $0.5\mu\text{m}$)

B) palpeurs sans contact :

les palpeurs sans contact sont utilisés pour mesurer des pièces très flexibles ou en matière peu résistante pour ne pas causer des déformations, on distingue 2 types :

➤ Palpeurs à laser :

son principe consiste à envoyer un rayon lumineux laser en direction de la pièce sur le point à mesurer et à récupérer sons spot sur une photodiode sensible.

➤ Palpeurs à camera **c c d** :

Les points sont saisis grâce à des techniques de recherche de contraste.

I-4 UTILISATION DE LA MMT :

I- 4.1) POUR CONTROLE DES SURFACES CONNUES :

On suppose que M est située sur la normale que celle du point théorique Mth

$$\vec{OC} = \vec{OM} + r \vec{n} \quad (\text{OC saisi par la machine})$$

$$\Rightarrow OM = OC - r N$$

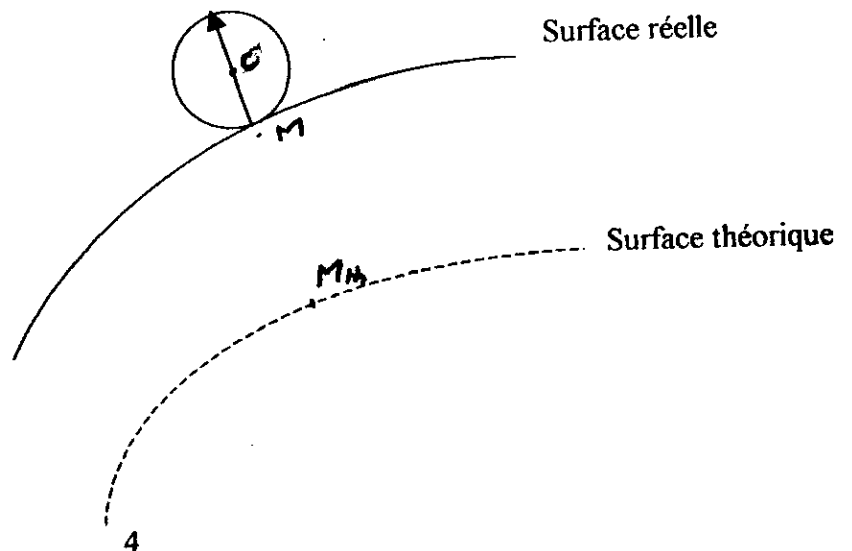
$$\epsilon = MthM = \text{erreur}$$

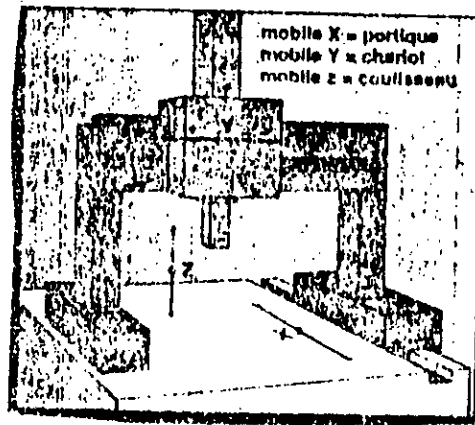
$$\epsilon n = \text{erreur suivant la normale} : \quad \epsilon n = \epsilon \cdot n$$

b) POUR CONTROLE DES SURFACES INCONNUES:

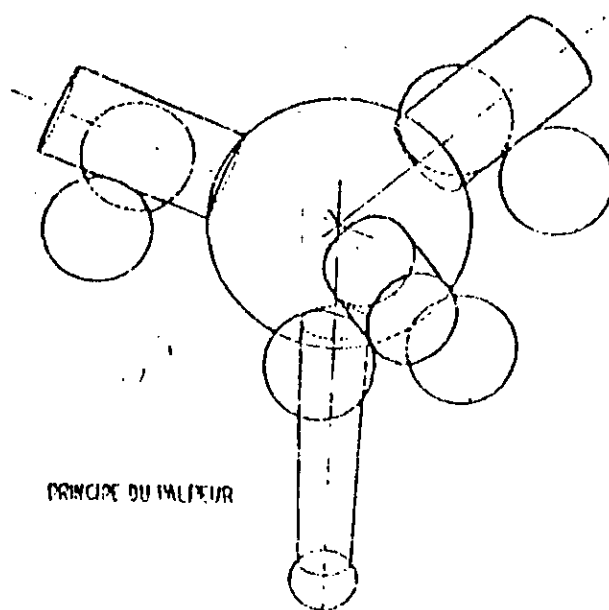
La machine fournit les points c appartenant à la surface parallèle à la surface réelle, la distance entre ces 2 surfaces est égale au rayon du palpeur, on recherche la normale par méthode B-SPLINE.

La mémorisation des coordonnées (x,y,z) des points mesurés de la première pièce de la série de fabrication (pièce mastere), permettra à la machine de faire la comparaison entre la pièce mastere et les autres pièces de la série(on revient au cas d'une surface connue).





Schema de la M.M.T



PRINCIPE DU PALPEUR



Chapitre 2

**Méthode
de construction
des surfaces**

II- METHODE DE CONSTRUCTION DES SURFACES

Au cours de ce chapitre, les concepts de construction de surfaces gauches sont mis en places. On procède dans un premier temps, à une analyse des démarches actuelles de construction des surfaces en fonctions de diverses situations initiales. A partir des principes ainsi dégagés, un recensement de différentes fonctions de construction est établi.

Pour les modeleurs surfaciques ayant la mécanique pour secteur d'application, on est confronté à des situations très diverses entre deux situations extrêmes caractérisées par :

- a) Toutes les données constituées essentiellement de points, sont issues d'un processus de digitalisation de la surface.
- b) La majorité des données est produite par l'utilisation durant la construction de la surface. La modélisation est réalisée grâce à la connaissance dont dispose le concepteur concernant la fonction de l'objet.

II-1. Décomposition en carreaux et raccordement

Les surfaces des objets sont décomposées en carreaux. Un carreau est, au sens géométrique, une surface définie sur un domaine fermé et borné qui approche le mieux, localement, la surface de l'objet que l'on souhaite construire.

Les carreaux sont limités par quatre courbes. Cependant, certaines d'entre elles peuvent être réduites à un point, produisant ainsi un carreau ramené à trois, deux ou aucune courbes frontières.

Les conditions de raccordement sont établies à partir des principes suivants :

- La continuité d'ordre 0, c'est à dire lorsque les courbes frontières des carreaux adjacentes coïncident, reflète fidèlement le modèle physique que l'on construit.
- La continuité d'ordre 1, correspondant à une évolution continue de l'orientation de la normale à la surface lorsque l'on traverse la frontière commune de deux carreaux adjacents.
- La continuité d'ordre 2, traduisant la conservation de la continuité de la courbure au passage entre carreaux adjacents.

II-2. Etude de principales techniques de construction

II-2.1. constructions à partir de données issues de digitalisation

Le passage des points digitalisés à la construction de carreaux s'appuie sur une étape intermédiaire de construction de courbe dont le rôle est de lier la décomposition de la surface à carreaux à la digitalisation .

A ce stade, l'utilisateur peut effectuer le choix :

- Du degré de forme polynomiale et de la position des nœuds ou points de raccordement des polynômes (cas de la méthode B-Spline).
- De la nature de la méthode d'approximation : interpolation ou lissage.

La construction de courbes doit intégrer les contraintes de continuité compatibles avec celles des carreaux.

L'étape suivante est la construction de carreaux au fur et à mesure, des ajustements ou modifications de formes susceptibles de prendre place pour satisfaire les contraintes de la continuité et de la qualité de la surface, pourront être réalisées.

La démarche de construction présentée séquentiellement s'apparente dans les faits à un processus itératif. Autant la construction de courbes et de carreaux s'effectue par essais successifs jusqu'à l'accomplissement des objectifs de qualité.

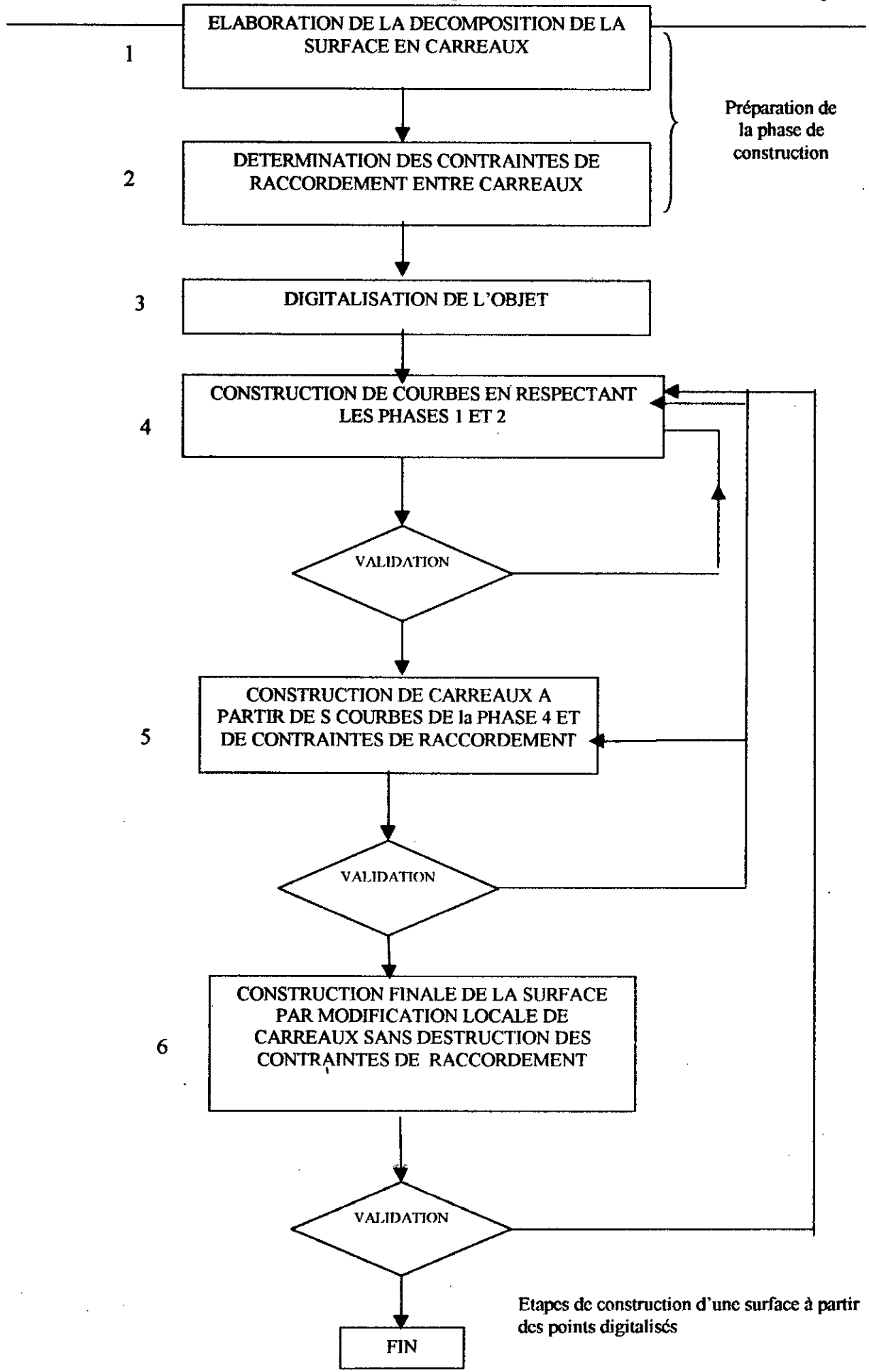
II-2.2 Construction lors d'une phase de conception d'un objet

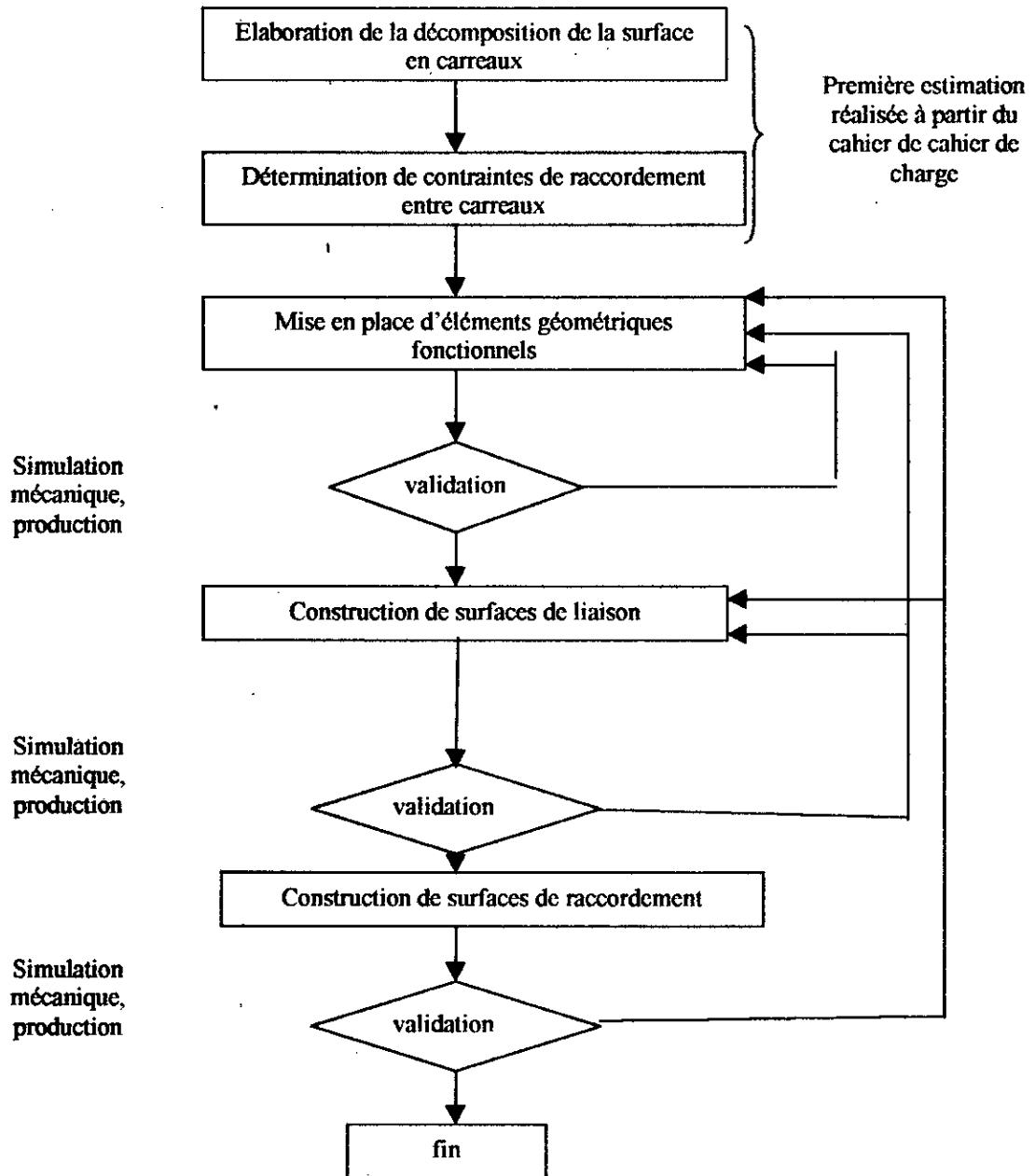
La démarche de construction est moins séquentielle. L'approche point, courbe, carreaux caractéristiques de la méthode basée sur la digitalisation s'explique par le fait que les seuls supports de l'information initiale sont les points. Maintenant, les informations dont dispose l'utilisateur sont en étroites relations avec sa démarche de conception. Ainsi il peut être amené à construire points, courbe et carreaux avec un ordre tout à fait différent.

Lors de la conception de l'objet, la construction est liée :

- Au dimensionnement par les approches basées sur la résistance des matériaux et/ou le calcul par éléments finis

Chapitre 2 : Méthode de construction des surfaces





Étapes de construction d'une surface à partir des critères fonctionnels

- Aux techniques de production qui imposent certaines formes de l'objet par des règles de tracé pour la fonderie et l'estompage.

II-3. Procédures de construction de courbes et de carreaux

II-3.1. Construction de courbes :

Parmi les fonctions de modélisation, une première catégorie concerne la construction d'une courbe à partir d'un ensemble de points de l'espace et d'éventuelles contraintes d'orientation du vecteur tangent : ce sont les techniques d'interpolation et du lissage.

Dans les cas d'interpolation, la courbe passe exactement par les points satisfaisant les orientations imposées au vecteur tangent.

Le lissage quant à lui, consiste à définir une courbe passant au milieu des points selon un critère souvent basé sur la minimisation des écarts entre la courbe et les données initiales.

II-3.1.1 Redéfinition de l'intervalle utile

Au cours des démarches de construction, il s'avère quelque fois utile de restreindre l'intervalle utile d'une courbe. On construit alors une nouvelle courbe C_n , correspondant exactement à la courbe initiale mais uniquement sur une partie de son intervalle de définition.

II-3.1.2. Courbe définie sur une surface

Les courbes peuvent être construites à partir de points appartenant à la surface, donc définies par leurs coordonnées paramétriques. Ces points peuvent être issus de solutions numériques d'équations différentielles ou de constructions géométriques.

II-3.1.3. Courbes parallèles

Lors de la construction d'un modèle géométrique, pour matérialiser des épaisseurs constantes, ou bien simuler l'évolution d'une forme par étapes successives, il est intéressant de pouvoir disposer d'une fonction de construction de courbes parallèles.

II-3.2. Construction de carreaux

II-3.2.1 Interpolation et lissage de points de courbes

On réalise la construction de carreaux à partir de courbes situées dans les plans parallèles ou proche de cette configuration. Le carreau peut être astreint à passer exactement par les courbes (interpolation) ou bien approximativement (lissage).

Π-3.2.2. Surfaces de révolution

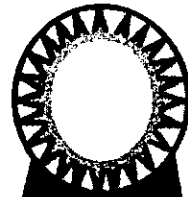
Cette catégorie de surfaces suppose la connaissance d'un axe de rotation et d'une courbe, en général plane et contenue dans un plan passant par l'axe de rotation.

Π-3.2.3. Construction d'un ensemble de carreaux s'appuyant sur un réseau de courbes

Cette fonction peut conduire à la création d'un carreau lorsque l'on dispose initialement de trois ou quatre courbes et de contraintes de continuité avec les carreaux adjacents. On dispose ainsi d'une rapide méthode de construction de carreaux surtout applicable à des phases de modélisation à l'issue d'étapes de digitalisation.

Chapitre 3

**Courbes
B-splines**



III- Courbes B-SPLINES :

III- 1. Introduction

Les nombreux travaux de recherche concernant les courbes splines, sous différentes formulations ou expressions, regroupent une multitude de publications. Les noms de SCHOENBERG, BOOR, BOHEM, REISENFELD, BARSKY ont particulièrement contribué au développement de la théorie des splines dans le cadre de la modélisation géométrique de la CAO et de la CFAO.

Ainsi dispose-t-on de terminologie qualifiant de, ν spline, de β spline, de Box spline, de B-Spline.... la diversité des termes employés révèle à la fois la généralité du modèle spline et l'existence de formulations particulières bénéficiant de propriétés suffisamment nombreuses pour justifier d'une désignation propre.

Les travaux de C DE BOOR, HOILIG, et de RAMSHAW ont permis d'approcher le modèle B-spline (en Anglais basis-spline) qui se distingue par des développements mathématiques plus ou moins complexes.

III- 2. NOTION DE NOEUD ET DE MULTIPLICITE :

III-2-1. NOEUDS ET SEQUENCE NODALE:

Une courbe B-spline n'est autre qu'une forme paramétrique polynomiale par morceaux, c'est à dire qu'elle est construite à partir d'une succession de polynômes de degré m se raccordant entre eux à des abscisses u_i de façon telle que la continuité en ces points soit au maximum de nature C^{m-1} . Les abscisses u_i des points de raccordement des polynômes sont appelées les nœuds et l'ensemble des nœuds associés à une courbe B-spline sera nommé séquence nodale.

On distingue deux types de séquences nodales :

a) $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+p}$ tel que $u_i \leq u_{i+1} \leq u_{i+2} \leq \dots \leq u_{i+p}$ qui peut donner lieu à des situations de plusieurs nœuds correspondant à la même valeur.

b) $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+p}$ tel que $u_i < u_{i+1} < u_{i+2} < \dots < u_{i+p}$

III-2-2. ORDRE DE MULTIPLICITE DUN NOEUDS :

Il caractérise le nombre de fois qu'un nœud de valeur numérique u^* apparaît dans une même séquence nodale. Un nœud sera dit de multiplicité k ou d'ordre de multiplicité K lorsque K nœuds $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k-1}$, possèdent une valeur numérique u^* :

$$u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+k-1} \Leftrightarrow u^* \text{ est de multiplicité } k$$

III-3. COURBE B-SPLINE : EQUATION:

Soit un polygone caractéristique PG_n défini dans un repère d'origine O et d'axes X, Y, Z , une courbe B-spline de degré m de séquence nodale $u_j, j \in \{0, 1, 2, \dots, (n+m+1)\}$ répond à l'équation :

$$P(u) = \sum_{i=0}^n S_i N_{i,m}(u) \quad n \geq m \quad \text{III.3.1}$$

u est un paramètre $\in [u_0, u_{n+m+1}]$

- Le degré m des fonctions de base $N_{i,m}$ n'est pas imposé par le nombre de sommets liés au polygone caractéristique PG_n
- Les fonctions de base $N_{i,m}$ sont des spline de degré m définies sur l'intervalle $[u_0, u_{n+m+1}]$

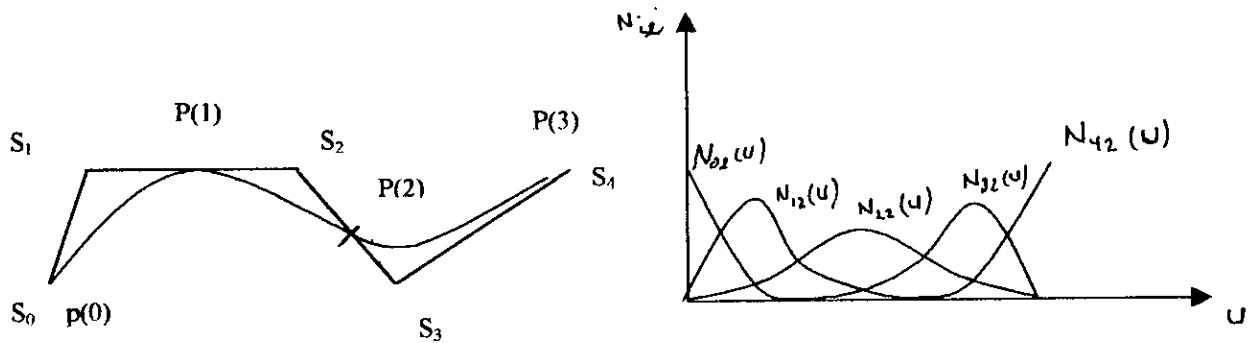


Figure 3.1 Courbe B-spline quadratique associée à une séquence nodale (0,0,0,1,2,3,3,3)

III.-4 . PROPRIETES DES COURBES B-SPLINE ET DES FONCTIONS DE BASE

III- 4.1. Equations des fonctions de Bases:

Les fonctions de bases $N_{i,m}$ sont obtenues à partir des notions purement mathématiques qu'il est nécessaire de voir et qui sont:

- Notion de fonction puissance tronquée
- Notion des différences fractionnées

III-4.1 .1) Fonction puissance tronquée:

- **Définition:** On appelle fonction puissance tronquée et on note :

$$t(u) = (u-u_0)_+^m \quad u \in]-\infty, +\infty[$$

une fonction tel que : $t(u) \equiv 0 \quad \forall u \in]-\infty, u_0[$

$$t(u) = (u-u_0)^m \text{ si } u \in [u_0, +\infty[$$

c'est à dire que $t(u)$ est identiquement nulle pour toute valeur de u telle que la quantité entre () est négative. Pour toutes les autres valeurs $t(u)$ coïncide avec la fonction $(u - u_0)^m$.

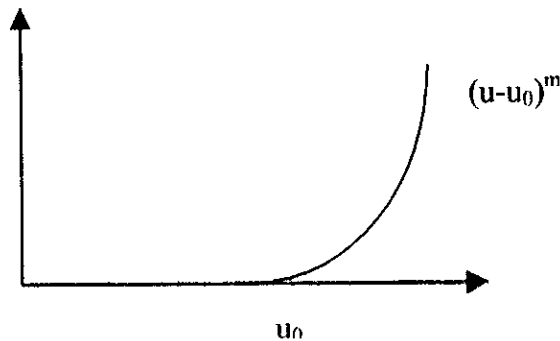


Figure 3.2 Graphe d'une fonction puissance

III-4.1.2) Différences fractionnées :

La différence fractionnée d'ordre 1 d'une fonction $f(u)$, calculée pour les abscisses u_i et u_{i+1} et notée $[u_i, u_{i+1}]f$, a pour expression :

$$[u_i, u_{i+1}]f = \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i} \quad \text{avec } u_i \neq u_{i+1}$$

Par extension la différence fractionnée d'ordre 2 de $f(u)$ pour la séquence u_i, u_{i+1}, u_{i+2} s'exprime en fonction des différences fractionnées d'ordre 1 sous la forme :

$$[u_i, u_{i+1}, u_{i+2}]f = \frac{[u_{i+1}, u_{i+2}]f - [u_i, u_{i+1}]f}{u_{i+2} - u_i}, \quad u_i \neq u_{i+1} \neq u_{i+2}$$

La généralisation, à l'ordre k , de la différence fractionnée d'une $f(u)$ pour une séquence d'abscisses $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}$ s'écrit à partir des différences fractionnées d'ordre inférieur :

$$[u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}]f = \frac{[u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+k}]f - [u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k-1}]f}{[u_{i+k} - u_i]}$$

Avec $u_i \neq u_{i+1} \neq \dots, u_{i+k}$

Pour faciliter l'interprétation de cette notion on peut énoncer les propriétés suivantes :

• P1 :

Pour une différence fractionnée d'ordre k telle que $u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+k}$

Alors
$$[u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}]f = \left[\frac{d^k f}{du^k} \right]_{u=u_i}$$

• P2 :

La différence fractionnée d'une fonction ne change pas de valeur pour toute permutation des abscisses $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+k}$ donc :

$$[u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}]f = [u_{i+1}, u_i, \dots, u_{i+k}]f = [u_{i+k}, u_{i+k-1}, \dots, u_i]f$$

La différence fractionnée d'ordre k est une forme symétrique par rapport aux abscisses $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+k}$

III-4.1.3 Fonction de base $N_{im}(u)$:

A partir des deux notions, fonction puissance tronquée et différence fractionnée, les fonctions de base s'expriment sous la forme :

$$N_{im}(u) = (u_{i+m+1} - u_i) \left\{ [u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m+1}] (\xi - u)_+^m \right\} \quad \forall u \in R \quad \text{III-4-1}$$

La fonction de base N_{im} représente la différence fractionnée d'ordre $(m+1)$ de la fonction $F(U) = (U-u)_+^m$ par rapport aux abscisses $U_i, U_{i+1}, U_{i+2}, \dots, U_{i+k}$. $f(U)$ est la fonction puissance tronquée d'ordre m par rapport au paramètre U . U est un paramètre muet de $N_{im}(U)$

L'équation (III-4-1) montre que $(m+2)$ nœuds définissent une fonction de base de degré m , donc une séquence nodale de $(n+m+2)$ nœuds permet, a priori de construire $(n+1)$ fonctions de base $N_{0m}(u), N_{1m}(u), \dots, N_{nm}(u)$.

III-4.2. Propriétés des fonctions de base

Les propriétés énoncées donnent au modèle B-spline sont intérêt car le comportement de ces courbes est directement influencé par ce qui suit :

- **P1 :**

Une fonction de base $N_{im}(u)$ est identiquement nulle en dehors de l'intervalle $u \in [u_i, u_{i+m+1}]$ soit $N_{im}(u) \equiv 0$, $\forall u \in]-\infty, u_i] \cup]u_{i+m+1}, +\infty[$

De cette propriété on déduit qu'une séquence nodale $u_j, j \in \{0, \dots, p\}$ $p > (m+1)$ permettant de construire $(p-m)$ fonctions de base de degré m est telle que sur chaque intervalle $[u_j, u_{j+1}]$, au plus $(m+1)$ fonctions sont non nulles entre les deux nœuds consécutifs.

- **P2 :**

Lorsque sur un intervalle $u \in [u_j, u_{j+1}]$, $(m+1)$ fonction sont non nulles, leur somme est

égale à 1.
$$\sum_{i=j-m}^j N_{im}(u) = 1 \quad \forall u \in]u_j, u_{j+1}[$$

Il devient important de pouvoir mettre au point des fonctions $N_{im}(u)$ qui jouissent de cette propriété sur l'intervalle de définition de la courbe.

- **P3 :**

L'influence de l'ordre de multiplicité d'un nœud sur la forme d'une fonction de base s'exprime à l'aide de la propriété suivante, applicable à chaque nœud :
nb de conditions de continuité + ordre de multiplicité = (m+1). III-4-2

$$C^{m-k} + k = (m+1)$$

III-4.3. RELATION DE RECURENCE :

L'équation des fonctions de base fait appel à la notion de différence fractionnée dont l'évolution récurrente est numériquement difficile à obtenir. Les travaux de COX et DE BOOR ont permis d'écartier ce problème en utilisant les relations suivantes.

$$N_{im}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+m} - u_i} N_{i,m-1}(u) \quad u \leq u_{i+1} \quad \text{III-4-3-1}$$

$$N_{im}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+m} - u_i} N_{i,m-1}(u) + \frac{u_{i+m+1} - u}{u_{i+m+1} - u_{i+1}} N_{i+1,m-1}(u) \quad u_{i+1} < u < u_{i+m} \quad \text{III-4-3-2}$$

$$N_{im}(u) = \frac{u_{i+m+1} - u}{u_{i+m+1} - u_{i+1}} N_{i+1,m-1}(u) \quad u \geq u_{i+m} \quad \text{III-4-3-3}$$

avec $N_{j0} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{j+1} \\ 0 & \text{partout} \end{cases}$

III-4.4. Séquence nodale et fonctions B-Splines

Trois types de séquences nodales présentent un intérêt pour la modélisation géométrique, chacun d'entre eux conduisant à une dénomination particulière des courbes construites à partir de ces séquences. Ainsi on parle de B-Splines :

- Uniformes
- Périodiques
- Non uniformes.

III-4.4.1 Fonctions B-Splines uniformes :

Les fonctions B-Splines sont dites uniformes lorsque la séquence nodale définissant l'ensemble des fonctions de bases est constitué de nœuds possédant tous une multiplicité d'ordre 1, et distants les uns des autres d'une valeur constante.

Pour une séquence $u_j \quad j \in \{0, \dots, p\}$ $u_i = \bar{u}_j$ et $u_{j+2} - u_j = \alpha$

Et permettent la construction de $(p-m)$ fonctions de base.

Alors les fonctions de bases se déduisent les unes des autres par translation d'amplitude α .

Le principe avantage des B-Splines uniformes réside dans la possibilité de produire une forme explicite des formes de fonctions de base.

$$N_{im} = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m+1} \begin{bmatrix} m+1 \\ j \end{bmatrix} (-1)^{m+j+1} (i+j-u)_+^m \quad \text{III-4-4-1}$$

tel que $\begin{bmatrix} m+1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{m!}{(m-i)!i!}$ coefficient du binôme de Newton

III-4.4.2 Fonctions B-splines périodiques :

La caractéristique de la séquence nodale de ces fonctions est la nature périodique des fonctions de base. Les nœuds ne sont pas nécessairement équidistants et la périodicité est fixée par la dimension du polygone caractéristique souhaitée. L'avantages des B-Splines

périodiques est de permettre de construire des courbes fermées possédant une continuité élevée sur tout leur intervalle de définition.

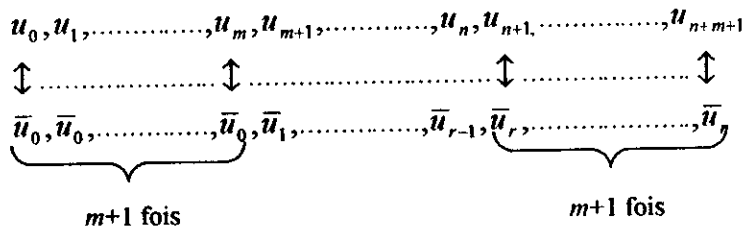
III-4.4.3. Fonctions B-splines non uniformes :

La simplicité des B-splines uniformes se heurte à un manque de souplesse pour certaines manipulations géométrique du fait de l'équidistance des nœuds. Les courbes B-Splines uniformes incorporent une difficulté qui apparaît au moment de la détermination des sommets du polygone caractéristique d'une courbe en fonctions des contraintes géométriques car certains sommets sont libres et des équations arbitraires doivent être ajoutées pour être en mesure de déterminer complètement le polygone caractéristique.

Les B-Splines non uniformes, pour s'affranchir de ces équations complémentaires et offrir une grande souplesse de traitement, doivent être construites d'une séquence nodale telle que :

$$\sum_{i=0}^n N_{im}(u) = 1 \quad \forall u \in [u_0, u_{n+m+1}]$$

En fixant une multiplicité de $(m+1)$ pour les premier et dernier de la séquence nodale, la condition précédente sera satisfaite entre u_0 et u_{n+m+1} alors $(n+1)$ fonctions de base de degré m , seront construites à partir de cette séquence; ceci se traduit par :



Le nombre d'intervalles délimités par des nœuds intermédiaires \bar{u}_k $k \in \{1, \dots, r-1\}$ représente le nombre de polygones constituant une courbe B-Spline comportera un intervalle, elle sera représentée par une séquence nodale :

$$\underbrace{\bar{u}_0, \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_0}_{(m+1) \text{ fois}} \quad \underbrace{\bar{u}_1, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_1}_{(m+1) \text{ fois}}$$

III-4.5. Séquence nodale et invariance d'une courbe :

Une courbe B-Spline, quelle que soit sa nature : uniforme, périodique, ou non uniforme, définie par un polygone caractéristique PG_n et une séquence nodale

$u_i \in \{0, 1, \dots, m+n+1\}$ déterminant des fonctions de base de degré m , ne change pas de forme lorsque la séquence nodale est soumise à une transformation linéaire.

$$P(u) = \sum_{i=0}^n S_i N_{im}(u) \quad u \in [u_0, u_{n+m+1}]$$

La transformation linéaire s'écrit :

$$u' = \alpha u + \beta \quad \alpha > 0$$

La nouvelle séquence nodale u'_i s'exprime en fonction de l'ancienne par

$$u'_i = \alpha u_i + \beta \quad \text{on obtient alors une nouvelle courbe :}$$

$$P'(u') = \sum_{i=0}^n S_i N_{im}(u') \quad u' \in [u'_0, u'_{n+m+1}]$$

La transformation linéaire appliquée à u n'affecte ni le polygone caractéristique ni la forme.

III-4.6. Réversibilité d'une courbe B-Spline :

Une courbe B-Spline de degré m , construite à partir d'un polygone caractéristique et une séquence nodale $u_i \in \{0, 1, \dots, m+n+1\}$, ne change pas de forme lorsqu'elle est décrite à partir du polygone caractéristique :

$$S_n, S_{n-1}, \dots, S_1, S_0$$

Si la séquence nodale est symétrique par rapport à $u_0 + \frac{u_{m+n+1} - u_0}{2}$ alors

$$P(u) = P'(u_{n+m+1} - (u - u_0))$$

et $P'(u)$ décrit $P(u)$ au sens inverse. Ceci s'applique directement aux courbes B-splines non uniformes pour lesquelles la condition de symétrie de la séquence nodale s'écrit

$$u_i - u_0 = u_{n+m+1} - u_{n+m+1-i} \quad i \in \{1, 2, \dots, p\}$$

$$p = (m+n+1)/2 \quad \text{si } (m+n) \text{ impair}$$

$$p = (m+n)/2 \quad \text{si } (m+n) \text{ pair}$$

Si les conditions de symétrie nodale ne sont pas satisfaites, il convient d'ajouter une nouvelle séquence nodale $u'_i \quad i \in \{0, \dots, m+n+1\}$ déduite de u_i par :

$$u'_0 = u_0$$

$$u'_i = u_0 + u_{n+m+1} - u_{m+n+1-i} \quad \text{alors } p'(u') \text{ construite avec } u' \text{ coïncide avec } p(u)$$

III-4.7. Dérivation de fonctions de base :

La particularité du modèle B-Spline de ne pas exploiter de relations explicites des fonctions de base impose la mise en place d'une relation entre la dérivée des fonctions $N_{i,m-1}(u)$. La dérivée première d'une fonction de base $N_{im}(u)$, construite à partir de la séquence nodale $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m+1}$ s'exprime par :

$$\frac{dN_{im}(u)}{du} = -m \frac{N_{i+1,m-1}(u)}{u_{i+m} - u_{i+1}} \quad u \leq u_{i+1} \quad \text{III-4-1}$$

$$\frac{dN_{im}(u)}{du} = \left[\frac{N_{i,m-1}(u)}{u_{i+m} - u_i} - \frac{N_{i+1,m-1}(u)}{u_{i+m+1} - u_i} \right] \quad u_{i+1} < u < u_{i+m} \quad \text{III-4-2}$$

$$\frac{dN_{im}(u)}{du} = -m \frac{N_{i+1,m-1}(u)}{u_{i+m+1} - u_{i+1}} \quad u \geq u_{i+m} \quad \text{III-4-3}$$

III-4.8. Relations entre polygone caractéristiques et courbes b-splines :

Pour une courbe B-spline $p(u)$ de degré m , $(m+1)$ fonctions de base $N_{im}(u)$ sont non nulles sur l'intervalle $u \in [u_i, u_{i+1}]$ alors :

$$P(u) = \sum_{j=i-m}^i s_j N_{jm}(u) \quad u \in [u_i, u_{i+1}]$$

L'équation montre que la forme de la courbe sur cet intervalle ne dépend que de la position des $(m+1)$ sommets du polygone caractéristique, cette propriété est une caractéristique fondamentale des courbes B-splines dont la forme dépend, sur un intervalle donné, d'une partie seulement des sommets de **PGn**.

III-4.9 Influence des sommets du polygone caractéristique sur la forme d'une courbe B-spline :

Le modèle B-spline met en évidence de nouvelles possibilité pour les relations entre une courbe et son polygone caractéristique, aussi cette section s'attache à caractériser autant que possible, l'influence du déplacement d'un sommet de **PGn** sur la courbe $P(u)$.

Choissant un sommet s_i , l'utilisateur lui-même impose un déplacement δ dans le cadre d'une recherche d'un compromis entre les critères esthétiques ou dimensionnels par exemple la modification de la courbe est décrite par :

- La déformation de la courbe est localisée sur l'intervalle $u \in [u_i, u_{i+1}]$.
- Le déplacement de chaque point de la courbe s'effectue dans la direction δ et atteint un maximum pour la valeur u^* telle que :

$$\frac{dN_{im}(u)}{du} = 0$$

- Au borne de l'intervalle concerné par la déformation la continuité de la courbe respecte la relation III-4-2 appliquée à la séquence nodale $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m+1}$

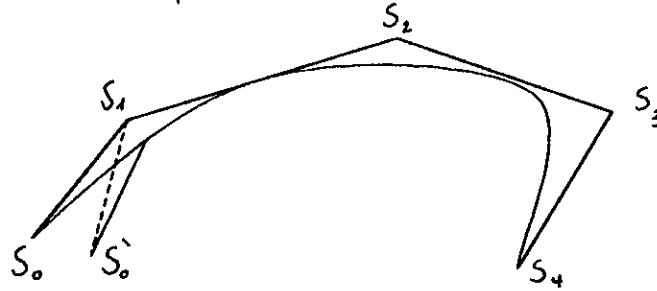


Fig 3.3 Influence des sommets du polygone sur la forme de la courbe.

La déformation locale subie par une courbe B-spline représente un autre atout de ce modèle, pour faciliter la modification de la forme d'une courbe, comportant parfois de nombreux détails sans altérer les conditions de continuité imposées par la séquence nodale ni l'indépendance entre divers parties de la courbe dont les fonctions mécaniques peuvent être de nature différentes

III-4.-10 –Polygone associé à une courbe B-spline

Sur un intervalle $u \in [u_j, u_{j+1}]$, $(m+1)$ sommets de PG_n définissent la forme d'une courbe B-spline $p(u)$ quelle qu'en soit sa nature, alors tous les points $p(u)$ de la courbe appartenant à cet intervalle sont situés à l'intérieur du polygone convexe associé aux sommets S_{j-m}, S_{j-m+1}, S_j par la suite, l'intégralité de la courbe s'inscrit dans un polygone dont le contour est obtenu en réalisant l'union des contours des polygones convexes associés à chaque intervalle. Si on note P_{ci} le polygone convexe pour l'intervalle $u \in [u_j, u_{j+1}]$ et PC le polygone circonscrivant la courbe $P(u)$, il vient :

$$PC = \bigcup_{j=0}^{\mu} P_{ci} \quad , \quad \text{avec } \mu = n+m+1 \text{ pour les courbes ouvertes et } \mu = n+1 \text{ pour les courbes fermées}$$

Pour un polygone PG_n on fait varier simultanément le degré m et la séquence nodale. on remarque les situations suivantes :

- $m = 1$: le polygone coïncide exactement avec la courbe $p(u)$
- $m = n$ le polygone PC est convexe car $PC=PC_0$

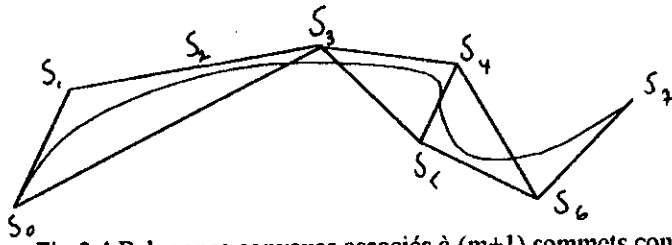


Fig 3.4 Polygones convexes associés à $(m+1)$ sommets consécutifs Pour $(u_0, u_0, u_0, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_6, u_6, u_6)$

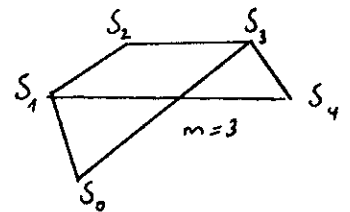
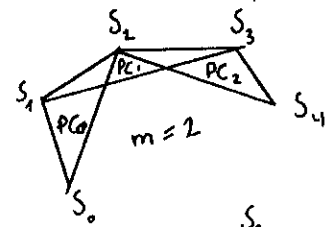
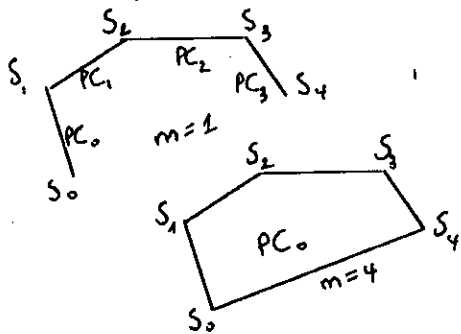


Fig 3.5 Polygones circonscrivant des B-spline de degré $m \leq n$, associées à un polygone PG_n

III-5 Algorithme de construction des courbes B-spline :

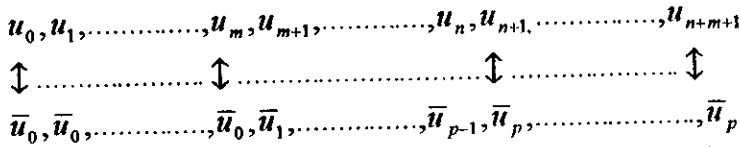
La visualisation d'une courbe ou, plus généralement, le calcul d'un point courant de $p(u)$ sont parmi les opérations de base d'un logiciel de modélisation géométrique, le modèle B-spline laisse peu de choix quant à la représentation des courbes car basé uniquement sur l'emploi des fonction de base $N_{im}(u)$ pour les B-spline non uniformes .

La technique de calcul d'un point de $p(u)$ est issue des travaux de C. DE BOOR et de M.J COX et est destinée aux formes générales des B-spline.

Pour le cas particulier de B-spline uniforme la relation III-4-4-1 répond tout à fait aux problèmes donc ce qui suit est dédié aux B-splines non uniformes qu'elles soient périodiques ou non .

III.5.1 Algorithme et interprétation géométrique :

Etant donné un polygone caractéristique **PG_n** et séquence nodale $u_i \ i \in \{0, 1, \dots, n+m+1\}$ la courbe B-spline non uniforme de degré m est complètement définie. La séquence nodale \overline{u}_j étant la séquence associée à u_i ,



Le calcul de la position d'un point de **p(u)** se déroule selon l'algorithme suivant :

Déterminer l'intervalle tel que $u \in]u_j, u_{j+1}[$, $j \in \{0, 1, \dots, n+m+1\}$

Faire pour $k = 1$ jusqu'à $k = m$

Faire pour $i = j$ jusqu'à $i = (j-m+k)$

Calculer la position des $(m+1-k)$ sommets pour la $k^{\text{ème}}$ itération à l'aide de la

relation :

$$S_i^{[k]} = S_i^{[k-1]} \left(\frac{u - u_i}{u_{i+m+k-1} - u_i} \right) + S_{i-1}^{[k-1]} \left(\frac{u_{i+m+1-k} - u}{u_{i+m+1-k} - u_i} \right) \quad \text{III.5.1}$$

FIN Faire

FIN Faire

Le point **P(u)** cherché coïncide avec le sommet $S_j^{[m]}$ donc :

$$\mathbf{P}(u) = S_j^{[m]} \quad u \in [u_j, u_{j+1}] \quad \text{III.5.2}$$

Les sommets $S_j^{[0]}$, $i \in \{(j-m), \dots, j\}$ sont ceux du polygone caractéristique **PG_n**

La dernière itération possède l'interprétation suivante :

$$\frac{dP}{du} = \frac{m}{u_{j+1} - u_j} (S_j^{[m-1]} - S_{j-1}^{[m-1]}) \quad , \quad u \in]u_j, u_{j+1}[\quad \text{III.5.3}$$

Cette version d'algorithme est limitée à des valeurs de u distinctes des valeurs des nœuds u_i de la séquence nodale, la version suivante est la plus générale :

La courbe **P(u)** est définie par son polygone caractéristique **PG_n** et les séquences nodales u_i et \overline{u}_j selon la correspondance suivante :

$$\begin{array}{cccc} \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, & \bar{u}_{t-1}, & \bar{u}_t, \dots, & \bar{u}_t, \\ \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_m, \bar{u}_{m+1}, \dots & \bar{u}_l, & \bar{u}_{l+1}, \dots, & \bar{u}_{l+r}, \\ \bar{u}_{t+1}, \dots, \bar{u}_{p-1}, & \bar{u}_p, \dots, & \bar{u}_p, & \\ \bar{u}_{l+r+1}, \dots, \bar{u}_n, & \bar{u}_{n+1}, \dots, & \bar{u}_{n+m+1}, & \end{array}$$

ou le nœud \bar{u}_t est de multiplicité $1 \leq r \leq (m+1)$. Les étapes sont alors les suivantes :

Déterminer l'intervalle tel que $u \in [\bar{u}_q, \bar{u}_{q+1}]$, $q \in \{0, 1, \dots, (p-1)\}$,

Si $u \in [\bar{u}_q, \bar{u}_{q+1}]$, on fixe j à l'indice maximum du nœud $u = \bar{u}_q$ et $k_{\max} = m$, $r=0$ (pour la séquence nodale de $P(u)$, on aura: $j=1$ si $q=t-1$, $j=l+r$ si $q=t$).

Si $u = \bar{u}_q$, on fixe j à l'indice maximum du nœud u_i tel que $u_i = \bar{u}_q$ et $k_{\max} = m - r$, ou r est l'ordre de multiplicité du nœud \bar{u}_q .

Si $u = \bar{u}_{q+1}$, on fixe j à l'indice maximum du nœud u_i tel que $u_i = \bar{u}_q$ et $k_{\max} = m - r$ tel que r est l'ordre de multiplicité du nœud \bar{u}_{q+1} .

Faire pour $k = 1$ jusqu'à $k = k_{\max}$.

Si $u \in [\bar{u}_q, \bar{u}_{q+1}]$ alors

Faire pour $i = j - r$ jusqu'à $i = (j - m + k)$

Calculer la position des $(m+1-k-r)$ sommets

pour la k^{me} itération à l'aide de la relation :

$$S_i^{[k]} = S_i^{[k-1]} \left(\frac{u - u_i}{u_{i+m+1-k} - u_i} \right) + S_{i-1}^{[k-1]} \left(\frac{u_{i+m+1-k} - u}{u_{i+m+1-k} - u_i} \right) \quad \text{III.5.4}$$

$$P(u) = S_{j-r}^{[k_{\max}]} = S_{j-r}^{[m-r]} \quad \text{III.5.5}$$

Sinon si $u = \bar{u}_{q+1}$ alors

faire pour $i = j$ jusqu'à $i = (j - m + k + 1)$

Calculer la position des sommets de l'itération k selon III.5.4

Fin faire

$$P(u) = S_j^{[k_{\max}]} = S_j^{[m-r]} \quad \text{III.5.6}$$

Fin si

Fin faire

Si $k_{\max} = 0$ (nœud de multiplicité m) ou bien si le nœud est de multiplicité $(m+1)$ alors

$$\text{Si } u = \bar{u}_q : P(u) = S_{j-m}^{[0]} = S_{j-m}$$

Si $u = \bar{u}_{q+1} : P(u) = S_j^{[0]} = S_j$

Fin si

L'évaluation de la dérivée de $P(u)$ en nœud u_j se traduit par la relation :

$$\frac{dP}{du}(u_j) = \frac{m}{u_{j+1} - u_{j-r}} (S_{j-r}^{[m-r-1]} - S_{j-r-1}^{[m-r-1]}) \quad , \quad r \leq (m-1) \quad \text{III.5.7}$$

III. 6. Construction de courbes à partir de contraintes géométriques :

La diversité du modèle B-Spline (uniforme ou non , périodique) produit un large éventail de formulation de problèmes d'identification dont l'objet est de déterminer le polygone caractéristique et éventuellement, la séquence nodale de la courbe B-Spline la plus adaptée à un ensemble de contraintes géométriques dont la nature est choisie parmi :

- Passer exactement (par ou au voisinage d'un point.
- Respecter, ou s'approcher d'une direction donnée.

III. 6. 1. Construction des courbes B-Splines non uniformes par interpolation :

Deux approches sont possibles :

- La séquence nodale est fixée et le paramétrage de la courbe se trouve imposé,
- La position des nœuds est déterminée de manière à prendre en compte la distance entre les points de passage à la courbe.

Pour la première approche, on dispose de $(p+1)$ points P_i a fait choix d'un degré m . Ensuite, il fixe $(p-m+2)$ valeurs numériques pour définir la séquence nodale lorsque tous les nœuds intermédiaires sont de multiplicité 1.

$\bar{u}_i \quad i \in \{0, 1, \dots, (p-m+1)\}$. la séquence nodale attribuée à $P(u)$ est

$\bar{u}_0, \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{p-m}, \bar{u}_{p-m+1}, \dots, \bar{u}_{p-m+1}$

$u_0, u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+m+1}$

et le paramétrage $P(u)$ est établi par la relation $P_i = P(\mu_i) \quad i \in \{0, 1, \dots, p\}$ (III-6.1)

$$\text{avec } \mu_i = \frac{1}{m} (u_{i+1} + \dots + u_{i+m})$$

Avec la seconde approche, la première étape consiste à déterminer les $(p+m+2)$ valeurs numériques \bar{u}_i , en tenant compte de la répartition des points P_i dans l'espace avec la relation :

$$\bar{u}_i - \bar{u}_{i-1} = \frac{\sum_{j=i-1}^{m+i-2} \|P_{j+1} - P_j\|}{\sum_{k=1}^{p-m+1} \sum_{j=k-1}^{m+k-2} \|P_{j+1} - P_j\|}, \quad i \in \{1, \dots, p-m+1\} \quad \text{(III-6.2)}$$

ou \bar{u}_0 est arbitrairement fixé .

On détermine le paramétrage de $P(u)$ selon la relation (III-6.1), à la suite les sommets S_i du polygone caractéristique PGp de $P(u)$ sont déterminée à partir du système linéaire suivant :

$$p(\mu_i) = p_i \quad i \in \{0, 1, \dots, p\}$$

$$\sum_{j=k-m}^k s_j N_{jm}(\mu_i) = p_i \quad u_k \leq \mu_i \leq u_{k+1} \quad i \in \{0, 1, \dots, p\}$$

sous forme matricielle la solution du système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_p \end{bmatrix} = [N_{mp}]^{-1} \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_p \end{bmatrix} \quad \text{eq III. 6. 3.}$$

L'introduction des contraintes d'orientation de la tangente à $p(u)$, en certains points, sera réalisée sous la forme :

$$\frac{dP}{du}(\mu_i) = d_i \quad i \in \{0, 1, \dots, q\}$$

$$\sum_{j=k+m}^{k-1} \left(\frac{S_{j+1} - S_j}{\bar{u}_{j+1, m+1} - \bar{u}_{j+1}} \right) N_{j+1, m-1}(\mu_i) = d_i \quad u_k \leq \mu_i \leq u_{k+1} \quad \text{qui s'ajouteront aux équations. Les}$$

paramètres μ_i et à séquence nodale de $P(u)$ seront déterminés sur la $(p+q+2)$ contraintes.

III. 7. Algorithme d'insertion des nœuds :

Le problème est de déterminer le polygone caractéristique d'une courbe (u) après avoir modifier la séquence nodale en y ajoutant un ou plusieurs nœuds tout en laissant la forme et le paramétrage inchangés .

Soit une courbe initiale de degré m définie par le polygone PG_n et la séquence nodale u_i , $i \in \{0,1,\dots,(n+m+1)\}$, on insère un nœud \bar{u} de multiplicité r , entre u_0 et u_{n+m+1} . A l'aide de la correspondance u_i et \bar{u}_k .

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{u}_0, & \dots, & \bar{u}_0, \bar{u}_1, & \dots, & \bar{u}_q, \bar{u}_{q+1}, & \dots, & \bar{u}_{p-1}, \bar{u}_p, \dots, \bar{u}_p \\ u_0, & \dots, & u_m, u_{m+1}, & \dots, & u_j, u_{j+1}, & \dots, & u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m+1} \end{array}$$

L'algorithme d'insertion de nœuds se décompose selon les étapes :

Déterminer l'intervalle tel que $\bar{u} \in [\bar{u}_q, \bar{u}_{q+1}]$, $q \in \{0,1,\dots,(p-1)\}$

Si $\bar{u} \in]\bar{u}_q, \bar{u}_{q+1}[$ et $1 \leq r \leq m$, fixer l'indice j à l'indice maximum de u_i tel que $u_{j-1} = u_j = \bar{u}_q$;

$u_{j+1} = \bar{u}_{q+1}$ et $k_{MAX} = r$, $r_q = 0$.

Si $\bar{u} = \bar{u}_q$ et $1 \leq r \leq m - r_q$, ou r_q est l'ordre de multiplicité de \bar{u}_q ; fixer j à l'indice maximum du nœud u_i tel que $u_i = \bar{u}_q$ et $k_{MAX} = r$.

Si $\bar{u} = \bar{u}_{q+1}$ et $1 \leq r \leq m - r_{q+1}$, avec r_{q+1} : multiplicité de \bar{u}_{q+1} ; fixer j à l'indice maximum du nœud u_i tel que $u_i = \bar{u}_q$ et $k_{MAX} = r$.

Faire pour $k = 1$ jusqu'à $k = k_{MAX}$

Si $\bar{u} \in]\bar{u}_q, \bar{u}_{q+1}[$ alors

Faire pour $i = j - r$, jusqu'à $i = (j - m + k)$

Calculer la position des $(m + 1 - k - r_q)$ sommets

Pour la $k^{ème}$ itération à l'aide de la relation :

$$s_i^{[k]} = s_i^{[k-1]} \left(\frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+m+1-k} - u_i} \right) + s_{i-1}^{[k-1]} \left(\frac{u_{i+m+1-k} - \bar{u}}{u_{i+m+1-k} - u_i} \right) \quad (III-7.1)$$

Fin Faire

Les sommets s_i , $i \in \{(j-m), \dots, j\}$ de PG_n sont remplacés par :

$$s_{j-m}, s_{j-m+1}^{[1]}, s_{j-m+2}^{[2]}, \dots, s_{j-r_q}^{[r]}, s_{j-r_q}^{[r-1]}, \dots, s_{j-r_q}^{[1]}, s_{j-r_q}, s_{j-r_q+1}, \dots, s_j$$

Sinon si $\bar{u} = u_{q+1}$ alors

Faire pour $i=j$ jusqu'à $i=(j-m+k+r_{q+1})$

Calculer la position des sommets de l'itération k selon (III-7.1)

Fin Faire

Les sommets $s_i, i \in \{(j-m), \dots, j\}$ de \mathbf{PGn} sont remplacés par :

$$s_{j-m}, s_{j-m+1}, \dots, s_{j-m+r_{q+1}}, s_{j-m+r_{q+1}}^{[1]}, \dots, s_{j-1}^{[r-1]}, s_j^{[r]}, \dots, s_j^{[1]}, s_j$$

Fin Si

Fin Faire.

III. 8. Calcul des courbes offset planes

Le calcul des courbes parallèles (ou courbes et surfaces offset) trouve des applications dans plusieurs domaines comme la génération des trajectoires d'outil pour les machines-outils à commande numérique, la programmation des poignets de robots, la détermination de l'épaisseur d'un objet en conception, ...

Soit une courbe plane $(C') = \mathbf{P}'(u)$ parallèle à la courbe plane $(C) = \mathbf{P}(u)$ à une distance d constante. L'expression de $\mathbf{P}'(u)$ est donnée par :

$$\mathbf{P}'(u) = \mathbf{P}(u) + d \frac{z \wedge \frac{d}{du} \mathbf{P}(u)}{\left\| z \wedge \frac{d}{du} \mathbf{P}(u) \right\|} \quad (\text{III.8.1})$$

$$\text{ou} \quad \frac{z \wedge \frac{d}{du} \mathbf{P}(u)}{\left\| z \wedge \frac{d}{du} \mathbf{P}(u) \right\|} = n$$

Représente le vecteur normal unitaire de (C) au point $\mathbf{P}(u)$.

Comme on peut le constater dans l'expression (III.8.1) la courbe offset d'une courbe polynomiale ne peut être, généralement, définie par une autre courbe exacte de même nature. Ainsi, une courbe offset exact d'une courbe B-spline n'est plus une courbe B-spline. Or l'exigence d'usage d'une procédure unique de décalage des profils, ainsi que le souci de sauvegarder l'homogénéité de la base de données nous oblige à trouver une solution à ce problème.

La solution adoptée souvent consiste à approximer les formes offset ; les approches utilisées sont classées en trois catégories : les méthodes de polygonisation, les méthodes de discrétisation-conversion et les méthodes d'approximation de courbes de même type.

III.8.1. Méthode de polygonisation :

On calcule par l'expression (III.8.1) un ensemble de points sur la courbe parallèle. Ces points sont répartis selon un critère de conception et/ou de fabrication (tolérance, erreur de flèche...) défini par l'utilisateur. les points ainsi calculés sont ensuite reliés pour former un polygone. Le procédé est itératif et ne permet pas de connaître le nombre de points (donc de segments)nécessaire qu'à la fin du processus.

Dans le cas de courbes à pôles l'évaluation de l'expression (III.8.1) est relativement rapide du fait que les valeurs des dérivées partielles nécessaires pour le calcul de la normale n peuvent être obtenues comme un « sous - produit » pendant le calcul du point $P(u)$.

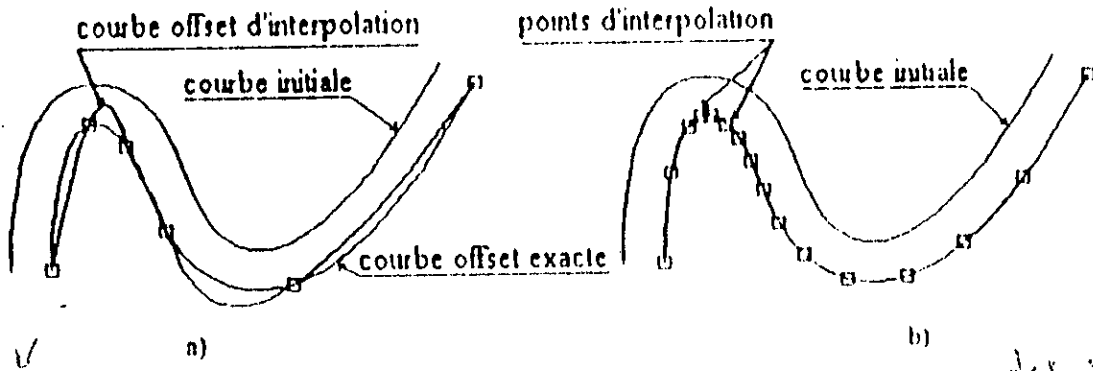
III.8.2. Méthode d'approximation par des courbes de même type:

Dans cette méthode l'offset d'un polygone sera un polygone, l'offset d'un arc sera un arc de cercle sera un arc de cercle et l'offset d'une courbe dit être une courbe de même type(même modèle mathématique. Ainsi l'homogénéité de la base de données du logiciel sera pleinement conservée.

III.8.2.1Méthode de polygone caractéristique parallèle(Méthode de Tiller et Hanson)

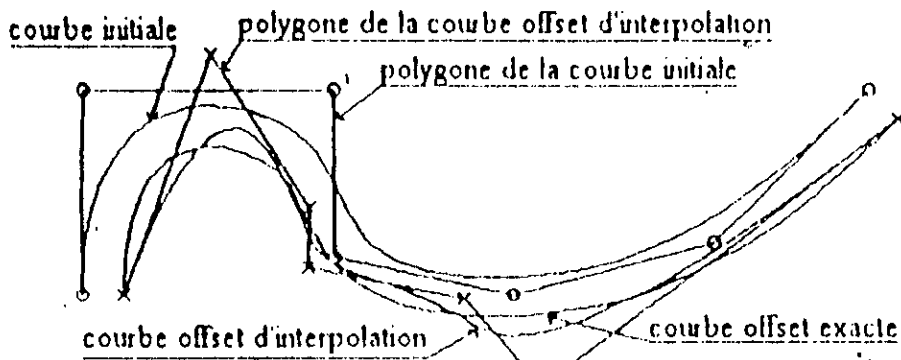
Cette a été proposé par Tiller et Hanson, c'est une méthode itérative d'approximation des courbes offset planes. La démarche d'approximation s'effectue selon les étapes suivantes :

1. La première itération consiste à construire un polygone $P^{[k-1]}$; parallèle au polygone initial P_i $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$, à la distance de décalage d pour obtenir une courbe offset $P^{[k-1]}(u)$
2. On compare alors la courbe $P^{[k]}$ à la courbe parallèle théorique en un certain nombre de points(plus généralement au milieu des intervalles nodaux).
3. Si l'écart mesuré dépasse la tolérance imposée, on affine la courbe par insertion des nœuds dans le vecteur nodal de la courbe $P(u)$.
4. On construit alors le nouveau polygone $P^{[k+1]}$; décalé de d et on revient à l'étape 2.
5. On arrête le processus dès qu'on obtient une courbe parallèle située à l'intérieur de l'intervalle de tolérance.



En fait, il s'agit d'une autre courbe de même nombre de pôles et de degré variable variable que la courbe initiale.

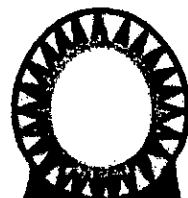
Augmentation du nombre de points d'interpolation.



oscillations sur la courbe offset d'interpolation

Chapitre 4

**Carreaux
B-splines**



IV- CARREAUX B-SPLINE

IV. 1. Carreaux B-Spline : Equations

Les carreaux B-Spline sont des éléments de base à partir des quels une surface est élaborée, leur construction se fait en dernière étape avant d'aboutir à la représentation complète d'une surface. Une surface peut être considérée comme le lieu géométrique d'une courbe P_{int} subissant un déplacement et une déformation, au cours de ce déplacement chaque sommet s_i de PG_n décrit une trajectoire appelée directrice, représentée par une courbe B-Spline de degré n . Le paramètre descripteur d'une trajectoire P_i est noté v et son polygone caractéristique PG_{ln} .

Soit PG_n et $u_i, i \in \{0, 1, \dots, (n+m+1)\}$ le polygone caractéristique et la séquence nodale définissant la courbe B-Spline non uniforme P_{int} de degré m , et d'équation :

$$P_{int}(u) = \sum_{i=0}^n S_i N_{im}(u) \quad u \in [u_0, u_{n+m+1}]$$

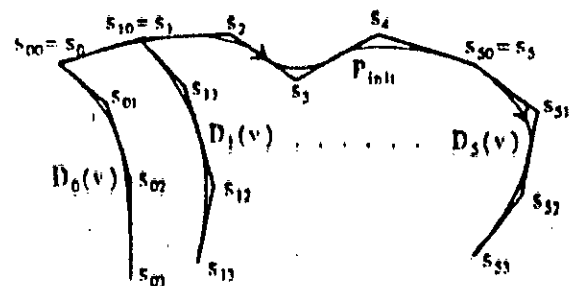
Les directrices D_i sont toutes représentées par des courbes B-Spline du même degré et de même séquence nodale $v_j, j \in \{0, 1, \dots, (l+1)\}$.

$$\text{Donc } D_i(v) = \sum_{j=0}^l S_{ij} N_{jn}(v) \quad v \in [v_0, v_{l+1}] \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Au point $v = v_0$ chaque directrice $D_i(v)$ coïncide avec le sommet S_i de $P_{int}(u)$. L'expression du carreau B-Spline non uniforme $P(u, v)$ est représentée par : (voir figure)

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n D_i(v) N_{im}(u)$$

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^l S_{ij} N_{im}(u) N_{jn}(v)$$



avec $u \in [u_0, u_{n+m+1}]$ $v \in [v_0, v_{l+1}]$. Eq IV.1 Construction d'un carreau B-spline non uniforme par déplacement et déformation de P_{int} selon des directrices D_i .

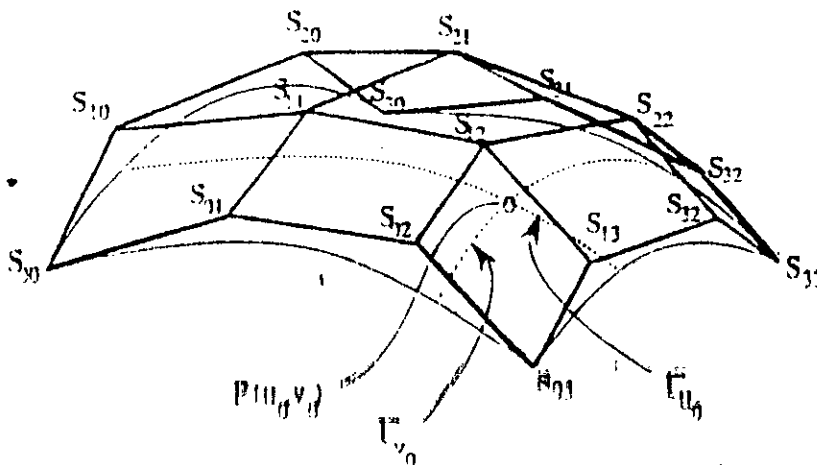
Les sommets $s_{ij}, i \in \{0, 1, \dots, n\}, j \in \{0, 1, \dots, l\}$ constituent le réseau caractéristique RS_m du carreau.

IV.2. Relation géométrique entre réseaux caractéristiques et surfaces :

On considère en premier un réseau RS_{nt} associé à des séquences nodales non uniformes $u_i, i \in \{0, \dots, m+1\} \forall j \in \{0, \dots, r+1\}$ alors l'équation (IV.1) évaluée au points $P(u_0, v_0), P(u_{m+1}, v_0), P(u_0, v_{r+1})$ et $P(u_{m+1}, v_{r+1})$ montre que $P(u, v)$ coïncide en ces points avec les sommets $S_{00}, S_{n0}, S_{0r}, S_{nr}$ de RS_{nt} indépendamment de la combinaison des séquences nodales utilisées, le comportement d'un carreau est toujours défini localement par un ensemble de $(m+1) \times (r+1)$ sommets du réseau caractéristique RS_{nt} lorsque le carreau est de degré m et r suivant u et v respectivement.

IV-3 Lignes isoparamétriques

Supposons que l'on fixe $u = u_0$ et que l'on fasse varier v_0 le point $p(u_0, v)$ va se déplacer le long d'une ligne Γ_{u_0} tracée sur la surface et appelée « isoparamétrique ». On peut de même tracer pour une valeur quelconque $v_0 \in [0, v_{max}]$ une isoparamétrique $\Gamma_{v_0} = \{p(u, v_0), u \in [0, u_{max}]\}$. Ces lignes isoparamétriques constituent un moyen très commode pour parcourir l'ensemble ou une partie de la surface, afin d'y rechercher les points particuliers ou définir par exemple la trajectoire de l'outil qui devra générer cette surface.



IV-4- Calcul d'un point courant d'un carreau B-spline :

L'interprétation géométrique et le traitement numérique du calcul d'un point courant d'un carreau sont la généralisation de l'algorithme de Cox- de Boor décrit pour les courbes, lorsque il s'agit donc de carreaux non uniformes, donc :

$$P(u, v) = S_{ij}^{[m-r_u][m-r_v]}$$

$$u \in [\bar{u}_f, \bar{u}_{f+1}] , \quad v \in [\bar{v}_g, \bar{v}_{g+1}] , \quad \bar{u}_f = u_i , \quad \bar{v}_g = v_j$$

$$S_{kl}^{[q]} = S_{kl}^{[q-1]} \left(\frac{u - u_k}{u_{k+m+1-q} - u_k} \right) + S_{k-1}^{[q-1]} \left(\frac{u_{k+m+1-q} - u}{u_{k+m+1-q} - u_k} \right)$$

$$S_{ij}^{[m-r_u][q]} = S_{ij}^{[m-r_u][q-1]} \left(\frac{v - v_l}{v_{l+r+1-q} - v_l} \right) + S_{i,l-1}^{[m-r_u][q-1]} \left(\frac{v_{l+r+1-q} - v}{v_{l+r+1-q} - v_l} \right)$$

pour un carreau de degré m et r respectivement selon u et v , les paramètres r_u et r_v représente l'ordre de multiplicité des nœuds \bar{u}_f et \bar{v}_g . Les dérivées par rapport à u et v sont donnée par

$$\frac{\partial P}{\partial u}(u, v) = \frac{m}{u_{j+1} - u_j} (S_{i,j-1}^{[m][n]} - S_{j-1,j-1}^{[m-1][n]})$$

$$\frac{\partial P}{\partial v}(u, v) = \frac{n}{v_{j+1} - v_j} (S_{i-1,j}^{[m][n-1]} - S_{i-1,i-1}^{[m][n-1]})$$

Et Alyson Han ne produit pas
tous les dérivées partielles au point
considéré et doit être complète fait.

IV-5- Construction des carreaux par interpolation :

La construction des carreaux par interpolation, se heurte à la difficulté du paramétrage et au problème convexe de détermination des directions u et v du carreau B-spline.

Les systèmes linaires permettant la détermination, par interpolation des courbes $P_j(u)$ du réseau caractéristique $RS_{m,n}$ du carreau $P(u, v)$ s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} s_{0j} \\ s_{1j} \\ \vdots \\ s_{mj} \end{bmatrix} = [N_{m,n}]^{-1} \begin{bmatrix} s_j^0 \\ s_j^1 \\ \vdots \\ s_j^n \end{bmatrix} \quad j \in \{0, 1, \dots, t\}$$

ou les sommets s_j^i sont les sommets du polygone caractéristique des courbes $P_j(u)$ et la matrice $[N_{m,n}]$ est conforme à (III. 6. 1.).

IV-5- Calcul des normales à la surface

Le plan tangent à une surface gauche est défini par les vecteurs tangents aux isoparamétriques u et v , $\frac{\partial P}{\partial u}$ et $\frac{\partial P}{\partial v}$ qui s'ils ne sont pas colinéaires forment une base. Lorsque le plan tangent existe au point considéré le vecteur normal en ce point est défini par :

$$N = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\|}$$

IV-6 Comportement aux frontières / Raccordement :

Un problème courant à résoudre est le raccordement de deux surfaces en assurant un certain ordre de continuité

Considérons deux surfaces $P(u, v)$ et $P'(u', v')$ de réseaux caractéristiques S_{ij} et S'_{ij} , que l'on veut raccorder le long de la ligne $P(u, v_{max})$ et $P'(u', 0)$.

La première condition à remplir est la continuité géométrique de la surface finale, les deux courbes $P(u, v_{max})$ et $P'(u', 0)$ devant être confondues. Celles-ci étant définies par les polygones $(S_{i,m})$ et $(S'_{i,0})$, ce qui permet d'obtenir $\forall u \quad P(u, v_{max}) = P'(u, 0)$ on aura donc :

$$\frac{\partial P(u, v_{max})}{\partial u} = \frac{\partial P'(u, 0)}{\partial u'} \quad \text{continuité de la dérivée partielle en } u$$

Pour assurer la continuité du plan tangent, il suffit de vérifier :

$$\frac{\partial P(u, v_{max})}{\partial v} = \frac{\partial P'(u, 0)}{\partial v'} \quad \forall u$$

En poursuivant ce raisonnement, si l'on calcul aussi les dérivées secondes $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}, \dots \right)$ et que l'on envisage raccorder les surfaces d'ordre 2, on arrivera à la conclusion suivante :

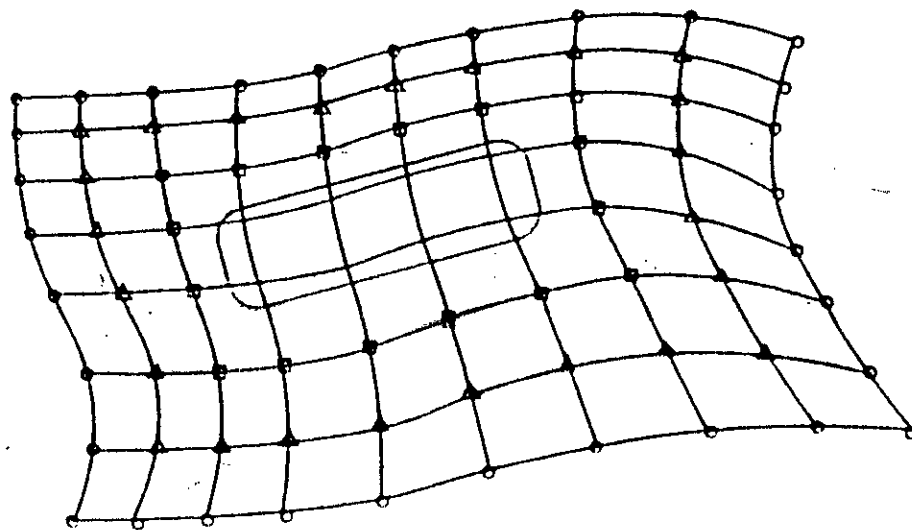
Soient E_0 l'ensemble des sommets appartenant aux bords du réseau

E_1 l'ensemble des sommets immédiatement intérieurs à E_0

E_2 l'ensemble des sommets immédiatement intérieurs à E_1

E_0 détermine la forme du bord de la surface, E_1 , E_2 déterminent les plans tangents sur les bords de la surface E_0 , E_1 , E_2 déterminent la courbure sur les bords de la surface.

Si l'on désire déformer la surface tout en respectant les conditions de raccordement du 2^{ème} ordre, on ne pourra agir que sur les sommets strictement intérieurs à E_2

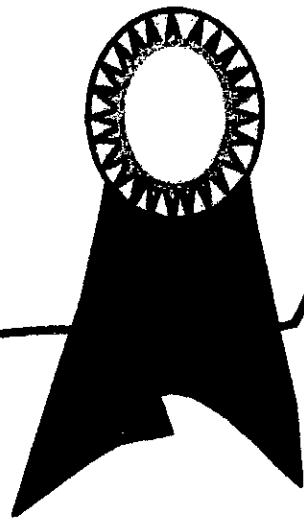


○ E_0 △ E_1 □ E_2



Sommets modifiables sans dégradation des raccordements.

**APPLICATION
ET
RESULTATS**



Application :

Les données sont les coordonnées du centre du palpeur de la M.M.T pour un engrenage conique et cela pour une pièce mastere (première pièce de la série) puis pour d'autres pièces de la série.

on calcul les écarts entre les points de la pièce mastere et les points théoriques , puis entre la pièce mastere et les autres pièces de la série.

Calcul de l'écart d'un points mesuré par rapport au profil théorique :

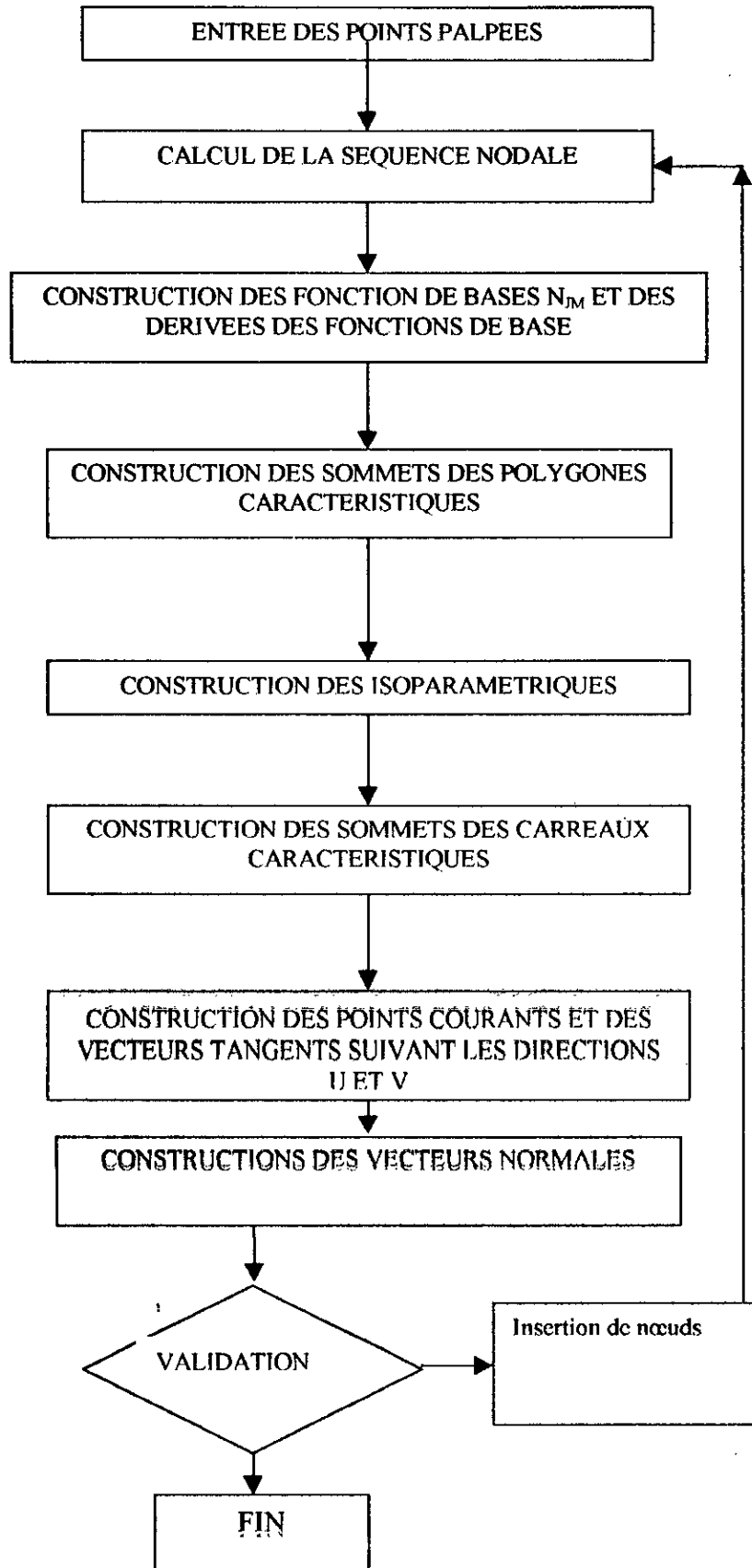
Le contrôle d'une surface se fait sur une M.M.T, cette surface est modélisée par un ensemble de points $p(u,v)$ et un ensemble de normales $N(u,v)$.

La mesure des points s'effectue en les relevant à l'aide du palpeur de la M.M.T suivant la normale sortante à la matière. La M.M.T enregistre des coordonnées de la bille du palpeur et élimine l'effet du rayon palpeur de cette bille au cour de la mesure.(pour les surfaces connues seulement)

Soit P_p le point touché par le palpeur et P_{th} le point visé (c.a.d sauvegarder sur la machine), l'écart E suivant la normal entre le profil théorique et le profil réel qui qualifie le manque ou l'excée de matière, est donné par :

$$E = (X_{th} - X_p).N_x + (Y_{th} - Y_p).N_y + (Z_{th} - Z_p).N_z$$

ORGANIGRAMME DE LA METHODE



**Points de la surface réelle de la pièce maitre
(flan 1)**

N° pt	X	Y	Z
1	42.968910	-6.174465	66.599450
2	42.513550	-5.720833	66.932140
3	41.975030	-5.222538	67.311180
4	41.306310	-4.676991	67.763860
5	40.501420	-4.094850	68.286390
6	39.563610	-3.493108	68.867530
7	38.557260	-2.974457	69.462880
8	37.473550	-2.548333	70.070440
9	46.115250	-6.804440	71.073910
10	45.609840	-6.291988	71.447940
11	45.005360	-5.720663	71.877430
12	44.255570	-5.093691	72.385320
13	43.355950	-4.426454	72.971810
14	42.309330	-3.746520	73.624980
15	41.187890	-3.152976	74.284160
16	39.996520	-2.684011	74.947170
17	49.247550	-7.436283	75.550230
18	48.702130	-6.864795	75.964540
19	48.032130	-6.221020	76.445520
20	47.194840	-5.526453	77.015420
21	46.202610	-4.776989	77.669130
22	45.051760	-4.005894	78.383710
23	43.811040	-3.357480	79.111960
24	42.522720	-2.867725	79.830690
25	52.340270	-8.074706	80.061450
26	51.787880	-7.442260	80.481920
27	51.054520	-6.722527	81.012080
28	50.132520	-5.959915	81.647190
29	49.049810	-5.111123	82.350630
30	47.789440	-4.272391	83.142410
31	46.429840	-3.572180	83.938560
32	45.040680	-3.045187	84.712210
33	55.448220	-8.728699	84.558650
34	54.863900	-8.033151	85.007700
35	54.066670	-7.239668	85.587820
36	53.070450	-6.390559	86.278280
37	51.873050	-5.496651	87.055860
38	50.520350	-4.556384	87.908210
39	49.042360	-3.811457	88.772960
40	47.555300	-3.249566	89.600110

**Normales de la surface réelle de la pièce maîtresse
(flan 1)**

N°pt	N _x	N _y	N _z
1	5.653350E-01	7.726744E-01	-2.887397E-01
2	5.604074E-01	7.772933E-01	-2.859349E-01
3	5.313517E-01	8.046890E-01	-2.648417E-01
4	4.987727E-01	8.318872E-01	-2.432891E-01
5	4.614118E-01	8.594034E-01	-2.202837E-01
6	4.228515E-01	8.845426E-01	-1.969286E-01
7	3.329253E-01	9.313987E-01	-1.471638E-01
8	2.888003E-01	9.494569E-01	-1.229883E-01
9	5.702074E-01	7.684172E-01	-2.905139E-01
10	5.607655E-01	7.772480E-01	-2.853553E-01
11	5.317359E-01	8.046504E-01	-2.641868E-01
12	5.006808E-01	8.316652E-01	-2.401077E-01
13	4.634585E-01	8.592014E-01	-2.167466E-01
14	4.234665E-01	8.844920E-01	-1.958318E-01
15	3.353589E-01	9.312097E-01	-1.427683E-01
16	2.917204E-01	9.495446E-01	-1.151702E-01
17	5.817047E-01	7.595412E-01	-2.910613E-01
18	5.614902E-01	7.771477E-01	-2.842008E-01
19	5.319937E-01	8.046283E-01	-2.637349E-01
20	5.008271E-01	8.316609E-01	-2.398174E-01
21	4.617759E-01	8.594106E-01	-2.194913E-01
22	4.242103E-01	8.844256E-01	-1.945173E-01
23	3.363054E-01	9.311301E-01	-1.410506E-01
24	2.820373E-01	9.529802E-01	-1.108323E-01
25	6.084149E-01	7.286602E-01	-3.144606E-01
26	5.632594E-01	7.768878E-01	-2.813967E-01
27	5.339315E-01	8.043756E-01	-2.605703E-01
28	5.005613E-01	8.317071E-01	-2.402117E-01
29	4.673172E-01	8.587779E-01	-2.100355E-01
30	4.259848E-01	8.842515E-01	-1.914060E-01
31	3.385900E-01	9.309219E-01	-1.368988E-01
32	2.844217E-01	9.527673E-01	-1.064842E-01
33	6.191395E-01	7.153760E-01	-3.238882E-01
34	5.632545E-01	7.768928E-01	-2.813928E-01
35	5.339205E-01	8.043857E-01	-2.605619E-01
36	5.005429E-01	8.317219E-01	-2.401987E-01
37	4.672855E-01	8.588004E-01	-2.100147E-01
38	4.259750E-01	8.842576E-01	-1.914000E-01
39	3.385900E-01	9.309219E-01	-1.368988E-01
40	2.852184E-01	9.524817E-01	-1.069062E-01

**Ecart entre pièce maîtresse et pièce de la série
(Flan 1)**

N°pt	E
1	-1.351115E-03
2	-2.769121E-03
3	-3.280188E-03
4	-3.443507E-03
5	-2.117581E-03
6	-1.818549E-03
7	-8.626376E-04
8	-3.151296E-03
9	-3.836148E-03
10	-1.914882E-03
11	-3.743881E-03
12	-2.708314E-03
13	-2.531952E-03
14	9.061802E-04
15	-2.138605E-03
16	-3.959340E-03
17	-2.037122E-03
18	-6.034671E-03
19	-1.058880E-03
20	-4.889779E-03
21	-3.096541E-03
22	-3.228977E-03
23	-3.291685E-03
24	-5.110528E-03
25	-3.394500E-03
26	-2.255650E-03
27	-3.997137E-03
28	-7.157960E-04
29	-3.721236E-03
30	-3.715688E-03
31	-1.840277E-04
32	-3.162434E-03
33	-3.037447E-03
34	4.907267E-04
35	-3.536456E-03
36	-4.998030E-03
37	-2.358646E-03
38	-1.984046E-03
39	-4.402329E-03
40	-3.900298E-03

**Ecart entre résultats obtenus et les valeurs théoriques
de la pièce maîtresse (Plan 1)**

N°pt	E
1	-1.259940E-01
2	-1.271205E-01
3	-1.268491E-01
4	-1.076882E-01
5	-7.970604E-02
6	-5.963832E-02
7	-1.881942E-02
8	2.575832E-02
9	-1.181902E-01
10	-1.175568E-01
11	-1.177186E-01
12	-1.012316E-01
13	-7.748324E-02
14	-5.840438E-02
15	-2.938774E-02
16	1.231278E-02
17	-1.029259E-01
18	-1.061196E-01
19	-1.056719E-01
20	-7.501445E-02
21	-5.299776E-02
22	-5.025633E-02
23	-1.242268E-02
24	4.382849E-02
25	-5.002132E-02
26	-8.868626E-02
27	-9.176373E-02
28	-4.756428E-02
29	-4.635056E-02
30	-3.378697E-02
31	1.527218E-02
32	7.139120E-02
33	1.390008E-04
34	-5.426490E-02
35	-5.827195E-02
36	-2.318818E-02
37	2.044560E-02
38	2.382037E-03
39	6.894080E-02
40	1.259705E-01

**Points de la surface réelle de la pièce maîtresse
(flan 2)**

N°pt	X	Y	Z
1	37.491210	2.682083	70.052020
2	38.595360	3.044262	69.438450
3	39.513920	3.546173	68.892970
4	40.482100	4.176967	68.299160
5	41.273410	4.756869	67.776880
6	41.893290	5.310048	67.358490
7	42.448830	5.841102	66.964560
8	42.927300	6.287280	66.613040
9	40.022830	2.845619	74.935060
10	41.226130	3.227176	74.263040
11	42.260050	3.801451	73.653150
12	43.350590	4.481202	72.975850
13	44.221870	5.176894	72.402340
14	44.929070	5.798966	71.922580
15	45.554630	6.401425	71.481400
16	46.063820	6.903076	71.107890
14	42.540960	2.993733	79.821600
18	43.854840	3.420173	79.090130
19	45.006910	4.049531	78.407840
20	46.205830	4.812885	77.665370
21	47.168560	5.598452	77.030490
22	47.962220	6.288405	76.486960
23	48.668630	6.941180	75.984090
24	49.228580	7.498710	75.565000
25	45.064250	3.150975	84.701830
26	46.484390	3.615109	83.918240
27	47.748620	4.313936	83.171130
28	49.058280	5.144565	82.352410
29	50.116760	6.013854	81.655930
30	50.992230	6.781652	81.054660
31	51.769410	7.496916	80.492790
32	52.355620	8.113208	80.054150
33	47.600200	3.335389	89.579280
34	49.116180	3.804754	88.744090
35	50.494470	4.566854	87.929950
36	51.902420	5.493028	87.047520
37	53.062930	6.431211	86.282940
38	54.023270	7.271058	85.620830
39	54.858360	8.070099	85.011920
40	55.497060	8.749488	84.530290

**Points de la surface réelle de la pièce maîtresse
(flan 2)**

N°pt	X	Y	Z
1	37.491210	2.682083	70.052020
2	38.595360	3.044262	69.438450
3	39.513920	3.546173	68.892970
4	40.482100	4.176967	68.299160
5	41.273410	4.756869	67.776880
6	41.893290	5.310048	67.358490
7	42.448830	5.841102	66.964560
8	42.927300	6.287280	66.613040
9	40.022830	2.845619	74.935060
10	41.226130	3.227176	74.263040
11	42.260050	3.801451	73.653150
12	43.350590	4.481202	72.975850
13	44.221870	5.176894	72.402340
14	44.929070	5.798966	71.922580
15	45.554630	6.401425	71.481400
16	46.063820	6.903076	71.107890
14	42.540960	2.993733	79.821600
18	43.854840	3.420173	79.090130
19	45.006910	4.049531	78.407840
20	46.205830	4.812885	77.665370
21	47.168560	5.598452	77.030490
22	47.962220	6.288405	76.486960
23	48.668630	6.941180	75.984090
24	49.228580	7.498710	75.565000
25	45.064250	3.150975	84.701830
26	46.484390	3.615109	83.918240
27	47.748620	4.313936	83.171130
28	49.058280	5.144565	82.352410
29	50.116760	6.013854	81.655930
30	50.992230	6.781652	81.054660
31	51.769410	7.496916	80.492790
32	52.355620	8.113208	80.054150
33	47.600200	3.335389	89.579280
34	49.116180	3.804754	88.744090
35	50.494470	4.566854	87.929950
36	51.902420	5.493028	87.047520
37	53.062930	6.431211	86.282940
38	54.023270	7.271058	85.620830
39	54.858360	8.070099	85.011920
40	55.497060	8.749488	84.530290

Normales de la surface réelle de la pièce maîtresse
(Plan 2)

N°pt	N _x	N _y	N _z
1	2.366732E-01	-9.673851E-01	-9.028713E-02
2	2.760080E-01	-9.543325E-01	-1.143207E-01
3	4.415745E-01	-8.727970E-01	-2.079364E-01
4	4.371192E-01	-8.711928E-01	-2.142658E-01
5	4.879412E-01	-8.407344E-01	-2.346893E-01
6	5.454788E-01	-7.906314E-01	-2.781276E-01
7	5.477487E-01	-7.888315E-01	-2.787761E-01
8	5.408186E-01	-7.972870E-01	-2.680460E-01
9	2.245399E-01	-9.706375E-01	-8.628223E-02
10	2.767737E-01	-9.543190E-01	-1.125680E-01
11	4.408770E-01	-8.728573E-01	-2.091589E-01
12	4.447168E-01	-8.709047E-01	-2.091699E-01
13	4.881855E-01	-8.407168E-01	-2.342438E-01
14	5.456625E-01	-7.906095E-01	-2.778292E-01
15	5.453485E-01	-7.891498E-01	-2.825555E-01
16	5.550097E-01	-7.797033E-01	-2.898741E-01
17	2.323243E-01	-9.685659E-01	-8.891207E-02
18	2.767987E-01	-9.543525E-01	-1.122218E-01
19	4.425358E-01	-8.727041E-01	-2.062757E-01
20	4.447736E-01	-8.709043E-01	-2.090508E-01
21	4.875506E-01	-8.408049E-01	-2.352477E-01
22	5.461998E-01	-7.905440E-01	-2.769585E-01
23	5.474434E-01	-7.888732E-01	-2.792575E-01
24	5.638315E-01	-7.745615E-01	-2.866158E-01
25	2.354848E-01	-9.680826E-01	-8.580820E-02
26	2.761677E-01	-9.544315E-01	-1.131016E-01
27	4.413834E-01	-8.728088E-01	-2.082921E-01
28	4.465978E-01	-8.707191E-01	-2.059096E-01
29	4.878184E-01	-8.407825E-01	-2.347723E-01
30	5.458152E-01	-7.905924E-01	-2.775779E-01
31	5.496874E-01	-7.885604E-01	-2.757106E-01
32	5.828551E-01	-7.544456E-01	-3.018141E-01
33	2.218348E-01	-9.719097E-01	-7.861792E-02
34	2.760769E-01	-9.544638E-01	-1.130508E-01
35	4.413866E-01	-8.728066E-01	-2.082940E-01
36	4.465896E-01	-8.707246E-01	-2.059042E-01
37	4.878078E-01	-8.407907E-01	-2.347648E-01
38	5.458151E-01	-7.905924E-01	-2.775779E-01
39	5.496874E-01	-7.885604E-01	-2.757106E-01
40	5.837284E-01	-7.534684E-01	-3.025664E-01

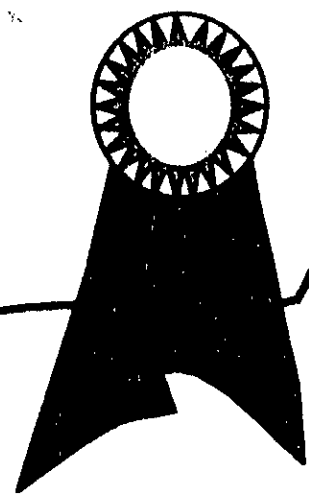
Ecart entre pièce maîtresse et pièce de la série
(flan 2)

N°pt	E
1	7.029467E-03
2	5.856986E-03
3	2.657317E-03
4	1.568796E-03
5	-5.639092E-02
6	1.413345E-03
7	-1.963213E-03
8	-4.832439E-05
9	2.912748E-03
10	3.454189E-03
11	2.021739E-03
12	3.296972E-03
13	-7.990720E-04
14	3.289717E-03
15	3.090943E-03
16	3.362674E-03
17	1.901129E-03
18	5.017821E-03
19	2.801127E-03
20	2.996241E-03
21	3.791277E-03
22	3.668502E-03
23	3.233041E-03
24	4.429894E-03
25	1.355100E-03
26	4.071136E-03
27	1.107480E-03
28	4.160597E-03
29	2.787740E-03
30	1.101739E-03
31	1.696267E-03
32	7.652072E-04
33	4.526815E-03
34	5.474853E-03
35	1.538601E-03
36	6.047907E-04
37	2.537988E-03
38	-1.843910E-03
39	1.866091E-04
40	2.115152E-03

**Écart entre résultats obtenus et les valeurs théoriques
de la pièce maîtresse (flan 2)**

N°pt	E
1	1.485831E-01
2	3.700706E-02
3	1.388407E-02
4	3.459274E-03
5	-2.117701E-02
6	-4.549313E-05
7	1.212322E-02
8	-9.245499E-03
9	1.609296E-01
10	3.083989E-02
11	1.711383E-02
12	-2.614476E-02
13	-1.050771E-02
14	-1.971487E-03
15	8.420715E-03
16	-2.613225E-03
17	1.601369E-01
18	3.496315E-02
19	1.258644E-02
20	-2.345117E-02
21	2.280778E-03
22	-3.236873E-03
23	-2.185931E-02
24	-3.941843E-02
25	1.663626E-01
26	4.067312E-02
27	2.634933E-02
28	-2.018456E-02
29	7.993812E-03
30	1.125779E-04
31	-3.211642E-02
32	-3.326082E-02
33	1.960302E-01
34	4.034178E-02
35	2.732808E-02
36	2.926716E-03
37	1.626976E-02
38	-1.404473E-03
39	-2.050379E-02
40	-2.362258E-02

**CONCLUSION
ET
PERSPECTIVES**



Conclusion et perspectives

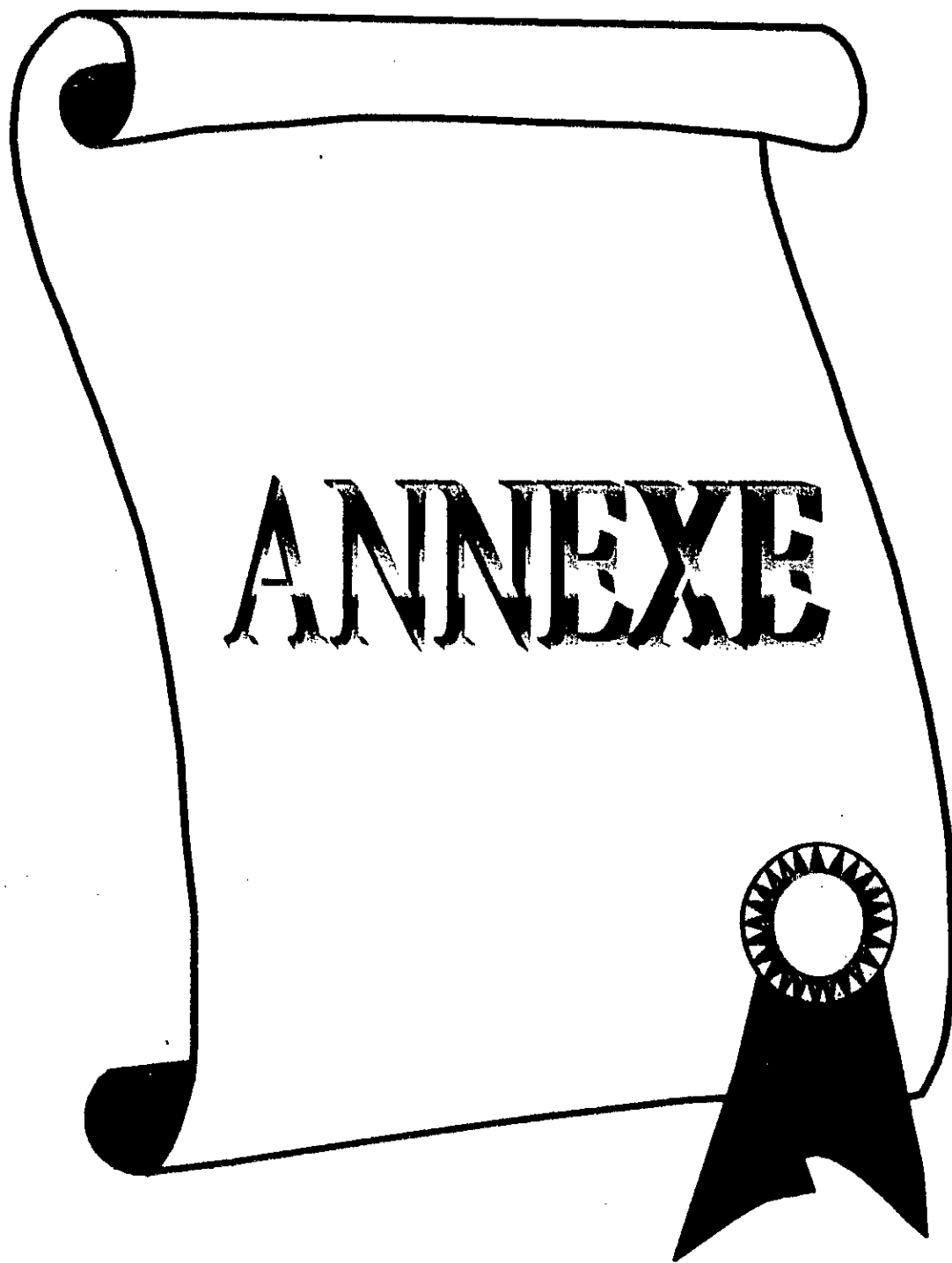
L'utilisation du modèle B-spline possède des propriétés géométriques intéressantes dues à la qualité des fonctions de bases, ainsi qu'à la forme de récurrence de Cox DE Boor. La courbe suit généralement l'allure de son polygone caractéristique ; ce dernier représente l'approximation linéaire de la courbe. Cette approximation peut être affinée par l'insertion de noeuds et la subdivision.

L'un des avantages que possède les B-splines est la modification locale : le support local des fonctions de Bases limite l'influence de chaque pôle.

L'algorithme de Cox DE Boor qui est utilisé pour le calcul des points courants permet aussi d'avoir les dérivées partielles ce qui offre la rapidité du calcul des vecteurs normaux à la surface.

L'utilisation de la méthode B-spline pour contrôle sur machines à mesurer tridimensionnelles nécessite la maîtrise du calcul des courbes offset, la méthode qu'on a utilisé est l'approximation par des courbes de même type, par interpolation ; nous souhaitons que notre travail soit complété par l'utilisation d'autres méthodes d'approximation des courbes offset (méthode de Tiller et Hanson, de Coquillart, de Klass..)ou, on considère d'autres applications telle que la détermination de la trajectoire d'un outil (traitement des singularité..) ou encore, la construction des surfaces à partir des critères fonctionnelles (construction d'une culasse..).

Notre travail peut être complété par l'application de la méthode des " Nurbs" qui, de nos jours, est la plus adaptée dans plusieurs domaines tel que le calcul par éléments finis.



ANNEXE

**Points centre bille sur la pièce mastère
(flan 1)**

N°pt	X	Y	Z
1	43.531414	-5.405654	66.312157
2	43.071156	-4.947426	66.647629
3	42.503727	-4.421873	67.047661
4	41.802593	-3.849263	67.521790
5	40.960522	-3.239743	68.067207
6	39.984352	-2.612988	68.671585
7	38.888519	-2.047715	69.316444
8	37.760902	-1.603623	69.948067
9	46.682610	-6.039865	70.784843
10	46.167801	-5.518626	71.164017
11	45.534439	-4.920036	71.614571
12	44.753742	-4.266184	72.146416
13	43.817085	-3.571548	72.756149
14	42.730682	-2.866450	73.430122
15	41.521576	-2.226422	74.142113
16	40.286785	-1.739214	74.832581
17	49.826347	-6.680539	75.260628
18	49.260807	-6.091533	75.681755
19	48.561462	-5.420415	76.183105
20	47.693157	-4.698951	76.776802
21	46.662083	-3.921876	77.450737
22	45.473850	-3.125890	78.190163
23	44.145660	-2.431005	78.971619
24	42.803345	-1.919510	79.720413
25	52.945648	-7.349689	79.748566
26	52.348328	-6.669256	80.201927
27	51.585785	-5.922173	80.752815
28	50.630577	-5.132366	81.408180
29	49.514793	-4.256639	82.141647
30	48.213299	-3.392561	82.951958
31	46.766743	-2.645913	83.802345
32	45.323681	-2.097183	84.606262
33	56.064262	-8.016900	84.236382
34	55.424343	-7.260143	84.727715
35	54.597916	-6.439305	85.328560
36	53.568485	-5.562996	86.039284
37	52.338001	-4.642144	86.846901
38	50.944195	-3.676548	87.717766
39	49.379261	-2.885190	88.636749
40	47.839088	-2.301847	89.493744

**Points centre bille sur la pièce mastère
(flan 2)**

N°pt	X	Y	Z
1	37.726704	1.719535	69.962181
2	38.869987	2.094701	69.324699
3	39.953289	2.677740	68.686081
4	40.921623	3.310140	68.085960
5	41.758915	3.920338	67.543365
6	42.436043	4.523370	67.081757
7	42.993839	5.056215	66.687180
8	43.465416	5.493979	66.346329
9	40.246243	1.879835	74.849205
10	41.501518	2.277629	74.151031
11	42.698723	2.932958	73.445038
12	43.793087	3.614652	72.767731
13	44.707619	4.340381	72.169266
14	45.472000	5.012310	71.646133
15	46.097248	5.616221	71.200256
16	46.616051	6.127271	70.819466
17	42.772125	2.030010	79.733131
18	44.130249	2.470592	78.978470
19	45.447235	3.181190	78.202591
20	46.648376	3.946335	77.457367
21	47.653667	4.761851	76.796417
22	48.505684	5.501814	76.211388
23	49.213333	6.156251	75.706230
24	49.789597	6.728021	75.279823
25	45.298553	2.187733	84.616447
26	46.759178	2.665450	83.805702
27	48.187790	3.445491	82.963875
28	49.502647	4.278199	82.147530
29	50.602135	5.177275	81.422333
30	51.535320	5.995013	80.778465
31	52.316349	6.712299	80.218460
32	52.935562	7.362534	79.753845
33	47.820930	2.368339	89.501060
34	49.390873	2.855063	88.631599
35	50.933647	3.698412	87.722694
36	52.346771	4.626657	86.842651
37	53.548302	5.594624	86.049347
38	54.566360	6.484418	85.344635
39	55.405304	7.285481	84.737587
40	56.077866	7.999787	84.229233

**Points théoriques de la pièce mastère
(Plan 1)**

N°pt	X	Y	Z
1	42.890440	-6.263448	66.644050
2	42.447876	-5.824408	66.966440
3	41.904275	-5.320804	67.349616
4	41.243611	-4.758869	67.797992
5	40.454274	-4.155906	68.311274
6	39.537223	-3.545082	68.880261
7	38.521157	-2.979024	69.480183
8	37.488464	-2.527023	70.060540
9	46.039306	-6.884659	71.119504
10	45.543647	-6.382023	71.484586
11	44.934401	-5.806792	71.917875
12	44.193714	-5.167044	72.423872
13	43.309162	-4.483922	73.001445
14	42.283480	-3.797090	73.638913
15	41.152595	-3.168431	74.306292
16	40.016239	-2.677544	74.943521
17	49.186180	-7.507633	75.595008
18	48.637791	-6.940832	76.002896
19	47.963257	-6.293414	76.486397
20	47.142888	-5.575373	77.050071
21	46.163464	-4.811808	77.691898
22	45.029593	-4.049020	78.397648
23	43.784679	-3.358265	79.132003
24	42.546275	-2.829346	79.825179
25	52.331443	-8.132066	80.070529
26	51.730629	-7.500637	80.521317
27	50.991104	-6.780572	81.055112
28	50.091329	-5.983843	81.676511
29	49.017307	-5.139599	82.382572
30	47.775594	-4.300891	83.156449
31	46.417273	-3.548433	83.957403
32	45.078103	-2.982145	84.705793
33	55.475384	-8.757721	84.546047
34	54.822403	-8.061280	85.039814
35	54.018134	-7.268186	85.623972
36	53.039182	-6.392442	86.303139
37	51.870784	-5.467318	87.073418
38	50.521506	-4.552713	87.915301
39	49.050274	-3.738868	88.782552
40	47.611376	-3.135735	89.585568

**Points théoriques de la pièce mastère
(Plan 2)**

N°pt	X	Y	Z
1	37.488464	2.527023	70.060540
2	38.521157	2.979024	69.480183
3	39.537223	3.545082	68.880261
4	40.454274	4.155906	68.311274
5	41.243611	4.758869	67.797992
6	41.904275	5.320804	67.349616
7	42.447876	5.824408	66.966440
8	42.890440	6.263448	66.644050
9	40.016239	2.677544	74.943521
10	41.152595	3.168431	74.306292
11	42.283480	3.797090	73.638913
12	43.309162	4.483922	73.001445
13	44.193714	5.167044	72.423872
14	44.934401	5.806792	71.917875
15	45.543647	6.382023	71.484586
16	46.039306	6.884659	71.119504
17	42.546275	2.829346	79.825179
18	43.784679	3.358265	79.132003
19	45.029593	4.049020	78.397648
20	46.163464	4.811808	77.691898
21	47.142888	5.575373	77.050071
22	47.963257	6.293414	76.486397
23	48.637791	6.940832	76.002896
24	49.186180	7.507633	75.595008
25	45.078103	2.982145	84.705793
26	46.417273	3.548433	83.957403
27	47.775594	4.300891	83.156449
28	49.017307	5.139599	82.382572
29	50.091329	5.983843	81.676511
30	50.991104	6.780572	81.055112
31	51.730629	7.500637	80.521317
32	52.331443	8.132066	80.070529
33	47.611376	3.135735	89.585568
34	49.050274	3.738868	88.782552
35	50.521506	4.552713	87.915301
36	51.870784	5.467318	87.073418
37	53.039182	6.392442	86.303139
38	54.018134	7.268186	85.623972
39	54.822403	8.061280	85.039814
40	55.475384	8.757721	84.546047

**Normales des points théoriques de la pièce maîtère
(flan 1)**

N°pt	N _x	N _y	N _z
1	0.570754	0.766252	-0.295125
2	0.554598	0.782392	-0.283344
3	0.533682	0.801900	-0.268589
4	0.506459	0.825195	-0.250105
5	0.470831	0.852537	-0.226935
6	0.423953	0.883807	-0.197860
7	0.361952	0.918138	-0.161289
8	0.279237	0.953324	-0.114895
9	0.576764	0.759988	-0.299603
10	0.560114	0.776992	-0.287326
11	0.538508	0.797530	-0.271948
12	0.510315	0.822029	-0.252679
13	0.473318	0.850735	-0.228519
14	0.424516	0.883460	-0.198202
15	0.359805	0.919197	-0.160054
16	0.273221	0.955455	-0.111602
17	0.581900	0.754518	-0.303473
18	0.564837	0.772278	-0.290769
19	0.542650	0.793717	-0.274852
20	0.513637	0.819268	-0.254907
21	0.475470	0.849163	-0.229894
22	0.425006	0.883158	-0.198499
23	0.357944	0.920109	-0.158985
24	0.267971	0.957271	-0.108737
25	0.586340	0.749697	-0.306854
26	0.568928	0.768126	-0.293775
27	0.546249	0.790358	-0.277391
28	0.516524	0.816841	-0.256853
29	0.477342	0.847785	-0.231093
30	0.425431	0.882896	-0.198756
31	0.356319	0.920900	-0.158053
32	0.263359	0.958832	-0.106225
33	0.590217	0.745418	-0.309833
34	0.572507	0.764440	-0.296425
35	0.549400	0.787381	-0.279627
36	0.519061	0.814689	-0.258569
37	0.478993	0.846564	-0.232152
38	0.425804	0.882665	-0.198982
39	0.354877	0.921598	-0.157226
40	0.259281	0.960185	-0.104009

Normales des points théoriques de la pièce mastère
(Plan 2)

N°pt	N _x	N _y	N _z
1	0.281070	-0.952646	-0.116036
2	0.362133	-0.918045	-0.161411
3	0.423961	-0.883802	-0.197866
4	0.471015	-0.852396	-0.227080
5	0.506885	-0.824827	-0.250457
6	0.534332	-0.801278	-0.269153
7	0.555437	-0.781522	-0.284101
8	0.571748	-0.765152	-0.296051
9	0.275273	-0.954717	-0.112873
10	0.360002	-0.919096	-0.160188
11	0.424527	-0.883454	-0.198209
12	0.473521	-0.850579	-0.228679
13	0.510773	-0.821628	-0.253059
14	0.539202	-0.796854	-0.272554
15	0.561005	-0.776047	-0.288138
16	0.577817	-0.758795	-0.300596
17	0.270245	-0.956471	-0.110138
18	0.358157	-0.920001	-0.159129
19	0.425016	-0.883152	-0.198506
20	0.475683	-0.848998	-0.230062
21	0.514118	-0.818840	-0.255310
22	0.543382	-0.792993	-0.275496
23	0.565774	-0.771266	-0.291631
24	0.583003	-0.753241	-0.304526
25	0.265842	-0.957976	-0.107747
26	0.356542	-0.920788	-0.158203
27	0.425444	-0.882887	-0.198765
28	0.477568	-0.847610	-0.231271
29	0.517029	-0.816388	-0.257278
30	0.547011	-0.789593	-0.278067
31	0.569905	-0.767053	-0.294682
32	0.587487	-0.748345	-0.307959
33	0.261952	-0.959282	-0.105640
34	0.355116	-0.921478	-0.157387
35	0.425820	-0.882654	-0.198994
36	0.479227	-0.846381	-0.232338
37	0.519586	-0.814213	-0.259012
38	0.550191	-0.786576	-0.280334
39	0.573519	-0.763313	-0.297372
40	0.591403	-0.743997	-0.310985

**Points théorique d'une pièce de la série
(Plan 1)**

N°pt	X	Y	Z
1	42.966484	-6.172868	66.603653
2	42.520775	-5.730988	66.928375
3	41.973106	-5.224275	67.314430
4	41.298138	-4.674212	67.770767
5	40.491508	-4.090243	68.293221
6	39.561817	-3.494030	68.868774
7	38.527962	-2.962663	69.477112
8	37.482323	-2.555310	70.062805
9	46.110920	-6.803534	71.081017
10	45.612976	-6.296672	71.448051
11	44.999096	-5.718832	71.884575
12	44.245968	-5.087603	72.397667
13	43.345352	-4.420644	72.983864
14	42.308712	-3.744725	73.627121
15	41.162773	-3.143535	74.301720
16	40.014126	-2.693966	74.944061
17	49.251232	-7.438197	75.559593
18	48.699501	-6.868661	75.970009
19	48.023808	-6.213727	76.454994
20	47.181229	-5.519745	77.030647
21	46.188084	-4.770047	77.679855
22	45.049671	-4.007544	78.388252
23	43.788391	-3.350057	79.130302
24	42.535728	-2.877122	79.829102
25	52.365593	-8.105032	80.050964
26	51.785587	-7.439964	80.491684
27	51.043381	-6.715036	81.027718
28	50.118137	-5.947632	81.662727
29	49.038628	-5.104121	82.372101
30	47.788433	-4.274369	83.150444
31	46.412346	-3.562934	83.959511
32	45.061275	-3.054657	84.712189
33	55.480885	-8.769088	84.541260
34	54.860168	-8.025777	85.018845
35	54.053005	-7.229340	85.605278
36	53.051563	-6.379954	86.296455
37	51.861000	-5.487430	87.077988
38	50.519630	-4.556555	87.916183
39	49.024818	-3.806748	88.793755
40	47.580841	-3.261617	89.597366

**Points théoriques d'une pièce de la série
(Plan 2)**

N°pt	X	Y	Z
1	37.450859	2.662729	70.075752
2	38.510132	3.007893	69.485054
3	39.532543	3.555059	68.882439
4	40.454094	4.157991	68.311249
5	41.227516	4.789277	67.805641
6	41.907883	5.322278	67.347260
7	42.444061	5.839215	66.967575
8	42.900776	6.261082	66.637627
9	39.975388	2.829436	74.959885
10	41.143070	3.193871	74.310478
11	42.277126	3.810463	73.641869
12	43.323830	4.459332	72.994255
13	44.200661	5.160582	72.420097
14	44.940483	5.805637	71.914169
15	45.545292	6.390563	71.482773
16	46.048496	6.885788	71.113449
17	42.506451	2.981714	79.840981
18	43.774364	3.386118	79.136536
19	45.025524	4.057723	78.399536
20	46.176952	4.789926	77.685242
21	47.146004	5.575928	77.048126
22	47.970703	6.291401	76.481895
23	48.657230	6.926455	75.991768
24	49.218185	7.481048	75.576828
25	45.037479	3.141294	84.721786
26	46.404766	3.582515	83.962875
27	47.764896	4.323211	83.161438
28	49.029919	5.119587	82.376312
29	50.091270	5.990121	81.676086
30	50.995880	6.783767	81.051842
31	51.755753	7.480246	80.507088
32	52.358452	8.114161	80.054703
33	47.564892	3.320691	89.603767
34	49.038445	3.771366	88.787712
35	50.510506	4.575468	87.920448
36	51.870831	5.470055	87.073219
37	53.035019	6.405923	86.304703
38	54.022583	7.272938	85.620766
39	54.840775	8.051671	85.028885
40	55.498383	8.746989	84.532074

Bibliographie

- [1] J. Léo : Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO
- [2] P. Showeiser : Infographie II
ed 1989
- [3] M. Bouaziz : Thèse de doctorat 1997
ENP d'Alger
- [4] T. Coorevits, J.M. David : Le contrôle tridimensionnel
Renishaw/Techno-Natan ed 1991
- [5] M. Boumahrath, J. Gourdin : Méthode numériques appliquées au Fortran 77
ed 1992