

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

BIBLIOTHEQUE — المكتبة

Ecole Nationale Polytechnique

En vue d'obtention du diplôme
d'ingénieur d'état en génie mécanique

SUJET

Application de la méthode des
singularités pour des
écoulements en turbomachines

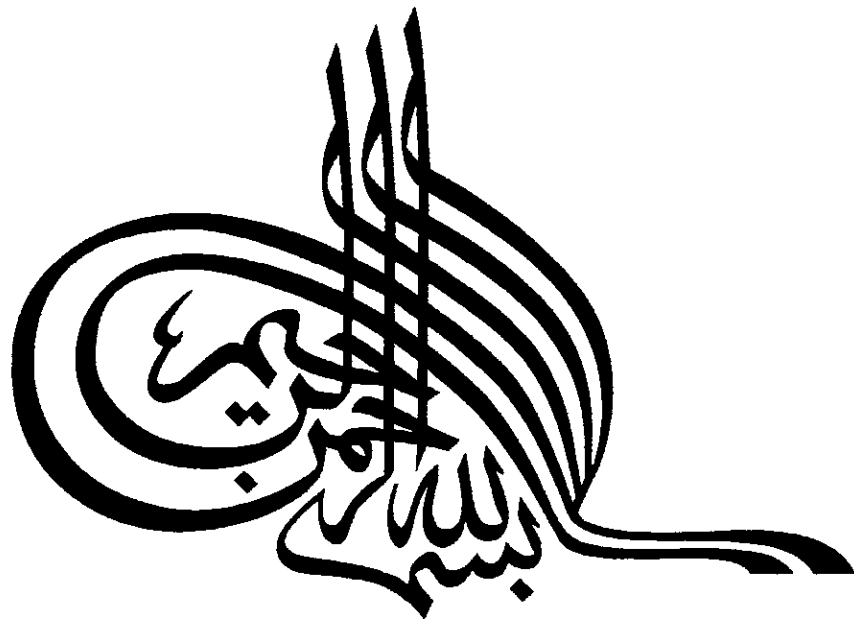
Proposé et dirigé par :
Mr : M. BOUDJEMAA

Etudié par :
A. LAAROUÏ
L. MANSOUR OUAHCHIA



Promotion 1997
E.N.P 10, Avenue Hassen Badi, 16200 El-Harrech, Alger

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



Remerciements

Nous remercions Dieu de nous avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver à la finalité de ce modeste travail.

Nous tenons à remercier tout également notre promoteur Mr: M. Boudjamâa pour sa confiance , ses encouragements , son suivie et pour les conseils qu'il a apporté pour l'achèvement de ce projet .

*Nos remerciements vont aussi à l'encontre de
Monsieur le président et Messieurs les membres du jury
L'ensemble des enseignants qui ont contribués à notre formation
Sans oublier tous nos amis et aussi tout le personnel de la bibliothèque*



ملخص :

في هذه الدراسة، قمنا بتوسيع مجال تطبيق طريقة الأحاديات على حاجز معزول، الى طابق محرك توربيني محوري (وجود حواجز متحركة، الشيء الذي أدى إلى عدم إستقرار الإنسياب).

Abstract :

In this present study, the application of the singularities method around an isolated obstacle; was widen to an axial turbomachine floor (presence of movable obstacle, hence, the instationnarity of the flow).

Résumé :

Dans cette présente étude, on a élargi le domaine d'application de la méthode des singularités autour d'un obstacle isolé, à un étage d'une turbomachine axiale (présence d'ostacles mobiles d'où l'instationnarité de l'écoulement).

BIBLIOGRAPHIE
LISTE DES SYMBOLES
LISTE DES FIGURES
INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE .I

I. GENERALITES	01
<i>I.1 Définitions et propriétés des lignes de courants</i>	01
• <i>Description Lagrangienne</i>	01
• <i>Description Eulerienne</i>	01
• <i>Définition de la ligne de courant</i>	02
<i>I.2 Equation de continuité</i>	02
<i>I.3 Ecoulement irrotationnel et fonction potentielle</i>	03
<i>I.4 Circulation sur vecteur vitesse</i>	04
II. POTENTIEL COMPLEXE	04
<i>II.1 Introduction</i>	04
<i>II.2 Propriété de la fonction complexe</i>	05
III. SINGULARITES ELEMENTAIRES	06
<i>III.1 Ecoulement uniforme</i>	06
<i>III.2 Ecoulement de type source ou puits</i>	07
• <i>Champs des vitesses</i>	07
• <i>Débit</i>	07
<i>III.3 Ecoulement tourbillonnaire</i>	08
• <i>Vitesse locale</i>	08
IV. SUPERPOSITION DES ECOULEMENTS ELEMENTAIRES	10
<i>IV.1 Principe de superposition</i>	10
<i>IV.2 Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source</i>	11
<i>IV.3 Superposition d'une source et d'une vortex centrée en O</i>	12

CHAPITRE .II

I. DEFINITION DU PROFIL D'AILE	14
II. APPLICATION DE LA METHODE A UN PROFIL ISOLE	14
<i>II.1 Discrétisation du profil</i>	14
<i>II.2 Choix de la distribution</i>	14
<i>II.3 Champs de vitesse autour du profil</i>	15
<i>II.4 Mise en équation</i>	16
III. CALCUL DES CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT	19
<i>III.1 Calcul de la vitesse tangentielle</i>	19
<i>III.2 Calcul des coefficients de pression</i>	20
<i>III.3 Calcul et tracé des lignes de courant et des potentiels des vitesses</i>	21
• <i>Première approche</i>	21
• <i>Deuxième approche</i>	22

IV. PRESENTATION DES RESULTATS.....	23
<i>IV.1 Les coefficients de pression.....</i>	<i>23</i>
<i>IV.2 Etablissement d'un maillage autour du profil.....</i>	<i>25</i>
<i>IV.2.1 Les lignes de courant</i>	<i>25</i>
<i>IV.2.2 Les équipotentiels</i>	<i>25</i>
<i>IV.2.3 Lignes de courant au voisinage du profil.....</i>	<i>26</i>
<i>IV.2.4 Etude comparative des deux approches de tracé.....</i>	<i>27</i>
Conclusion.....	29

CHAPITRE .III

I. THEORIE DES GRILLES PLANES.....	30
<i>I. 1 Création d'une grille rectilignes.....</i>	<i>30</i>
<i>I. 2 Définition géométrique des profils en grille.....</i>	<i>30</i>
<i>I. 3 Considération cinématique.....</i>	<i>32</i>
<i>I. 4 Angle d'incidence optimal.....</i>	<i>32</i>
<i>I. 5 Fonctionnement nominal d'une grille.....</i>	<i>33</i>
<i>I. 6 Coefficient de traînée.....</i>	<i>33</i>
<i>I. 7 Coefficient de portance.....</i>	<i>34</i>
II. APPLICATION DE LA METHODE A UNE GRILLE RECTILIGNE.....	35
<i>II. 1 Champ de vitesse dans la grille.....</i>	<i>35</i>
<i>II. 2 Mise en équation.....</i>	<i>38</i>
<i>II. 2.1 Condition de glissement.....</i>	<i>38</i>
<i>II. 2.2 Etablissement des fonctions d'influence.....</i>	<i>38</i>
<i>II. 2.3 Condition de KUTTA-JOUKOWSKI.....</i>	<i>39</i>
III. CALCUL DES CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT EN GRILLE.....	40
<i>III. 1 Calcul de la vitesse tangentielle.....</i>	<i>40</i>
<i>III. 2 L'écoulement à l'infini amont.....</i>	<i>41</i>
<i>III. 3 L'écoulement à l'infini aval.....</i>	<i>42</i>
<i>III. 4 Calcul de la déflexion.....</i>	<i>43</i>
<i>III. 5 Calcul de la portance.....</i>	<i>43</i>
<i>III. 6 Tracé les lignes de courant et les équipotentiels.....</i>	<i>44</i>
IV. PRESENTATION DES RESULTATS.....	46
<i>IV. 1 Les vorticités.....</i>	<i>46</i>
<i>IV. 2 Les coefficients de pression.....</i>	<i>47</i>
<i>IV. 3 Déflexion.....</i>	<i>49</i>
<i>IV. 4 Les lignes de courant et les équipotentiels.....</i>	<i>49</i>

CHAPITRE .VI

I. CREATION D'UN ETAGE DE TURBOMACHINE.....	53
II. APPLICATION DE LA METHODE A UNE ETAGE DE TURBOMACHINE.....	54
<i>II. 1 Discrétisation des obstacles.....</i>	<i>54</i>
<i>II. 2 Champs de vitesse dans l'étage.....</i>	<i>54</i>
<i>II. 3 Mise en équation.....</i>	<i>56</i>
<i>II. 3.1 Condition de glissement.....</i>	<i>56</i>
<i>II. 3.2 Condition de KUTTA.....</i>	<i>58</i>

III. CALCUL DES CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT EN ETAGE.....	60
<i>III. 1 Calcul des coefficients de pression.....</i>	<i>60</i>
<i>III. 1.1 Sur stator.....</i>	<i>60</i>
<i>III. 1.2 Sur rotor.....</i>	<i>60</i>
IV. PRESENTATION DES RESULTATS.....	62
<i>IV. 1 Comportement en profils isolé.....</i>	<i>62</i>
<i>IV. 2 Evolution des coefficients de pression dans un étage de turbomachine.....</i>	<i>62</i>
<i>IV. 2.1 En régime stationnaire.....</i>	<i>62</i>
<i>IV.2.2 En régime instationnaire.....</i>	<i>63</i>
<i>Conclusion.....</i>	<i>64</i>
CONCLUSION GENERALE	
ANNEXE [A]	
ANNEXE [B]	
ANNEXE [C]	

Bibliographie

- [01] H. SCHLICHTING *Boundary layer theory*
Mac Graw-Hill Book Company, Inc
Sixth edition
- [02] M. SÉDILLE *Turbomachines Hydrauliques et Thermiques T2*
Masson : Paris 1966
(collection du conservatoire national des arts et métiers)
- [03] R. COMOLET *Mécanique Expérimentale des Fluides T1 et T2*
Masson 1985 - 1986 Edition 4
- [04] M. BOUMAHRAT *Méthodes Numériques Appliquées*
- [05] J. BOUSQUET AERODYNAMIQUE : *Méthode des Singularités*
- [06] P. SHWIESIR *Infographie*
Lausannes (Presses Polytechniques romande 1987)
- [07] P. REBUFFET *Aérodynamique Expérimentale*
Paris : Dunod , 1966 - 1969
- [08] R. RABIA
N. NOUIOUA *Etude Comparative de la Méthode des Singularités Distribuées*
autour d'Obstacles
E N P Alger 1993
- [09] K. LYAZIDI
M. MESSAOUDI *Elaboration d'un Mailleur dans les Canaux des Turbomachines*
par la Méthode des singularités
U S T H B Alger 1995
- [10] A. CHABBI
N. DEROUICHE *Etude Comparative de Chargement par la Méthode des*
Singularités sur des Obstacles Portants
E N P Alger 1995
- [11] T. BELAMRI *Code d'Analyse des Ecoulements Internes par la Méthode des Singularités*
Rapport d'Avancement Septembre 1994 - Juillet 1995
E N S A M . Paris
- [12] R. REY
R. NOGUERA *Cours de Dimensionnement des Turbomachine*
E N S A M Paris 1995
- [13] G. DHATT
R. TOUZOT *Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis*
Edition 2
Collection Universitaire de COMPIEGNE

CHAPITRE I

α	Direction de l'écoulement par rapport à l'axe ox
C	Vitesse complexe.
C'	Vitesse complexe conjuguée.
F	Potentiel complexe.
Γ	Circulation du vecteur vitesse.
ϕ	Potentiel des vitesses.
ψ	Fonction de courant.
Q_s	Débit d'une source.
r	Module de z .
θ	Argument de z .
u	Composante de la vitesse suivant ox .
v	Composante de la vitesse suivant oy .
z	Affixe complexe d'un point.

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

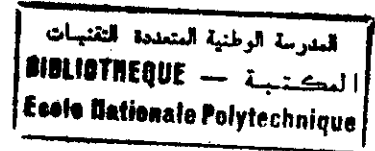
CHAPITRE II

$A(i,j)$	matrice d'influence
$B(i)$	Vecteur du système linéaire.
α	Direction de l'écoulement avec l'axe ox .
C	Vitesse complexe.
C'	Vitesse complexe conjuguée.
C_∞	Vitesse de l'écoulement à l'infini.
C_p	Coefficient de pression.
δ_j	Angle d'inclinaison du panneau j .
l_j	longueur du panneau j .
$\gamma(s)$	Distribution de vorticités
γ_j	Vorticité au sommet j .
p	Pression
s_j	abscisse curviligne.
ρ	masse volumique.
u	composante de la vitesse suivant ox .
v	composante de la vitesse suivant oy .
$x(j)$	ordonnée du point de contrôle j .
$y(j)$	abscisse du point de contrôle j .
$x_s(j)$	ordonnée du sommet j .
$y_s(j)$	abscisse du sommet j .
$G(i,j)$; $F(i,j)$	Fonctions d'influence.

CHAPITRE III ET IV

$A(i,j)$	Matrice d'influence
α_m	Angle moyen de la vitesse moyenne.
$B(i)$	Vecteur du système d'équation.
b	Envergure du profil.
l	Corde du profil.
ϕ	Potentiel complexe.
C'	Vitesse complexe.
C_m	Vitesse moyenne du fluide.
C_p	Coefficient de pression.

C_z	Coefficient de portance.
δ_j	Angle d'inclinaison du panneau. J
l_j	Longueur du panneau j .
F_z	La portance.
t	Pas de la grille.
h	Pas du stator.
σ	Serrage du profil.
U	Vitesse de rotation du rotor.
W	Vitesse relative.
ϕ	Fonction potentiel.



CHAPITRE I

- Fig I.1 Définition du tube de courant
- Fig I.2 Flux surfaces du volume de contrôle
- Fig I.3 Circulation
- Fig I.4 Représentation dans le plan complexe
- Fig I.5 Écoulement uniforme parallèle à l'axe x .
- Fig I.6 Source et puits de même débit.
- Fig I.7 Écoulement tourbillonnaire
- Fig I.8 Écoulement autour d'un obstacle (SOLIDE DE RANKINE)
- Fig I.9 Superposition d'une source et d'un vortex.

CHAPITRE II

- Fig II.1 Discrétisation du profil
- Fig II.2 Les coefficients de pression pour $\alpha = 2^\circ$
- Fig II.3 Comparaison des coefficients de pression pour $\alpha = 0^\circ$ théoriques et $\alpha = 16^\circ$ expérimentaux
- Fig II.4 Les coefficients de pression pour $\alpha = 16^\circ$.
- Fig II.5 Les lignes de courant pour $\alpha = 0^\circ$.
- Fig II.6 Les lignes de courant pour $\alpha = 16^\circ$
- Fig II.7 Écoulement au voisinage du profil.
- Fig II.8 Comparaison entre les deux approches (lignes de courant)
- Fig II.9 Comparaison entre les deux approches (lignes équipotentielles)
- Fig II.10 Les lignes de courant pour $\alpha = 16^\circ$.

CHAPITRE III

- Fig III.1 Définition d'une grille plane
- Fig III.2 Triangles des vitesses
- Fig III.3 Evolution du point de fonctionnement nominal avec la géométrie de la grille.
- Fig III.4 Les efforts aérodynamiques
- Fig III.5 L'influence de la discrétisation
- Fig III.6.a.b comparaison des coefficients de pression entre le profil isolé et le profil en grille
- Fig III.7 Distribution des coefficients de pression pour différents types de profil en grille
- Fig III.8 Comportement en aube isolée
- Fig III.9 Evolution de la déflexion en fonction de α_1
- Fig III.10 Présentation du maillage de l'écoulement dans la grille fixe pour NACA 3916.
- Fig III.11 Présentation du maillage de l'écoulement dans la grille fixe pour NACA 4412

CHAPITRE IV

- Fig IV.1 Etage d'une turbomachine
- Fig IV.2 Comportement en profil isolé
- Fig IV.3 Evolution des coefficients de pression NACA 4412
- Fig IV.4 Evolution des coefficients de pression sur les aubages d'une machine existante
- Fig IV.5 Evolution des coefficients de pression en régime instationnaire

Introduction

INTRODUCTION

Il est bien connu que l'écoulement dans une roue de turbomachine est extrêmement complexe vu son aspect instationnaire .

Devant cette complexité, les ingénieurs chargés d'appliquer les connaissances de la mécanique des fluides, qui constitue depuis un siècle un vaste champ d'application des mathématiques et de la physique, ont subis une grande mutation en introduisant des méthodes numériques permettant un traitement conjoint des équations cinématique et dynamiques.

En général un concepteur est ramené à résoudre l'un des deux problèmes; problème direct ou le problème inverse dans notre étude on traitera le problème directe.

Problème directe : Pour un profil isolé ou une grille immergée dans un écoulement défini en amont de l'obstacle, quelle seront les caractéristiques de l'écoulement.

C'est le problème traitant l'évaluation des performances d'une machine existante.

Dans ce but, on va utiliser la méthode des singularités distribuées suivant les chapitres s.

Chapitre .I

Dans lequel en a rassemblé toutes les notions et les principes qu'on utilisera durant le développement de la méthode.

Chapitre .II

Application de la méthode à un profil isolé et validation des résultats obtenus en les comparant aux résultats expérimentaux disponibles. Une illustration des problèmes rencontrés durant cette application sera mise en évidence.

Chapitre .III

Développement de la méthode pour le cas d'une grille d'aubes plane, et introduction de la notion des l'obstacles mobiles(repère relatif).

Chapitre .IV

Représente le but de ce travail, le traitement d'un étage de turbomachine par la méthode de singularités en faisant introduire le concept d'instationnarité.

En fin une conclusion générale résumant les applications faites et les perspectives envisagé.

Chapitre .I :

Généralités

CHAPITRE I :**GENERALITES**

Dans ce chapitre, on va essayer de regrouper toutes les notions, les principes et les définitions jugés utiles durant cette étude, ainsi que le potentiel complexe, la vitesse conjuguée, les écoulements élémentaires (écoulement uniforme, source-puits et, vortex) et, le principe de superposition.

I. GÉNÉRALITÉS :**I. 1 Définition et propriétés des lignes de courants :**

Dans les turbomachines, la plupart des écoulements, sont traités en coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou cylindriques (r, θ, z) .

$$\text{repères } \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} r & \text{direction radiale} \\ \theta & \text{direction tangentielle} \\ z & \text{direction axiale} \end{cases}$$

donc la vitesse \vec{C} en un point quelconque M aura pour composantes :

$$\vec{C} = \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} \\ w = \frac{dz}{dt} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{C} = \begin{cases} cr = \frac{dr}{dt} \\ cu = \frac{rd\theta}{dt} \\ ca = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

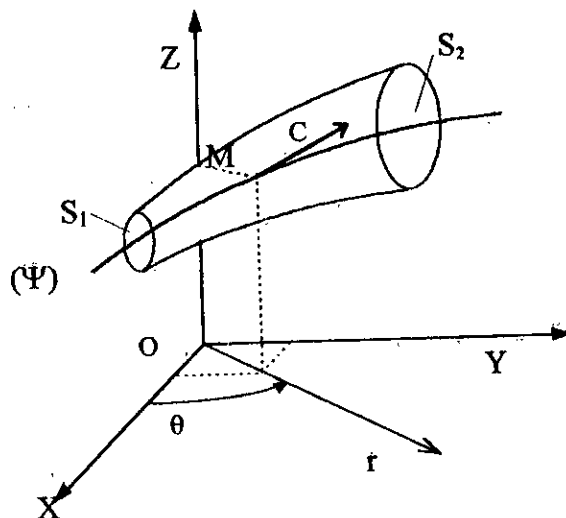


Fig. (I.1). Définition du tube de courant

Pour décrire un écoulement, on choisit entre 2 types de descriptions :

- **Description Lagrangienne** : consiste à observer le déplacement d'une particule fluide identifiée en fonction du temps, cette particule suit une trajectoire bien précise.
- **Description Eulerienne** : consiste à se placer en un point de l'écoulement et observer les variations de la vitesse en fonction du temps, si l'on observe au même instant tous les points de l'écoulement pendant une durée assez courte (*photographie*), on peut définir les lignes de courant.

• **définition de la ligne de courant :**

La courbe (ψ) est une ligne de courant, si en tout point M appartenant à (ψ), la vitesse \vec{C} est tangente à (ψ), ce qui veut dire que :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \text{ tels que : } u, v, w \text{ composantes de } \vec{C}$$

u, v, w : dépendent à la fois des coordonnées du point M et du temps .

Lorsque l'écoulement est permanent, les trajectoires et les lignes de courant se confondent .

I. 2 Equation de continuité :

Cette équation exprime la conservation de la masse contenue dans un volume élémentaire dv (Lagrange) ou pour un élément fixe (Euler), c'est-à-dire que la diminution de masse contenue dans le volume dv , est égale à la masse ayant traversé la surface extérieure de l'élément (débit sortant).

Pour cette dernière configuration, on aura :

$\rho (u dy dz + v dx dz + w dy dx) dt$: masse entrant dans un volume de contrôle ($dx dy dz$) au même instant la masse sortant :

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right) dy dz dt + \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy\right) dx dz dt + \left(\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz\right) dx dy dt$$

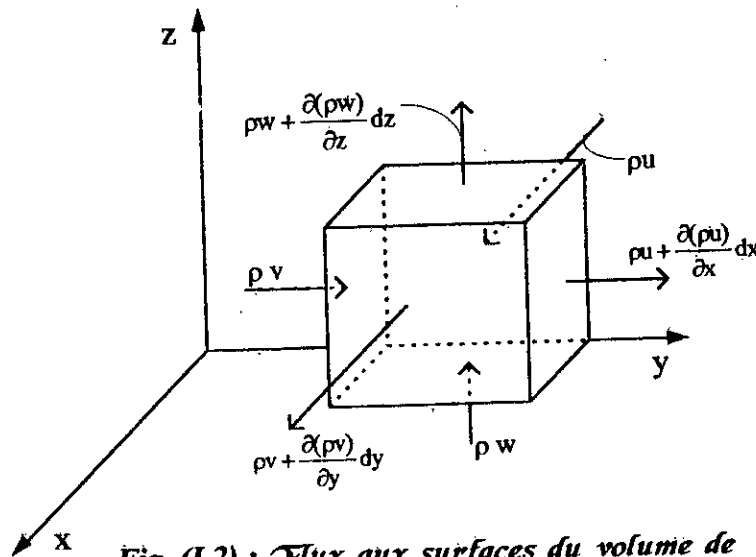


Fig. (I.2) : Flux aux surfaces du volume de contrôle.

L'écart entre la masse sortant et la masse entrant :

$$dm = \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

La variation de la masse à l'intérieur du volume de contrôle pendant la durée dt :

$$dm = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$$

En égalant les deux valeurs de dm , on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\text{d'où } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{C}) = 0 \quad [I.1]$$

En écoulement permanent : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ donc $\text{div}(\rho \vec{C}) = 0$

Si le fluide est incompressible on aura : $\text{div}(\vec{C}) = 0$ [I.2]

I.3 Ecoulement irrotationnel et fonction potentielle :

L'écoulement est à potentiel des vitesses si le champ des vitesses dérive d'un potentiel, c'est à dire :

$$\vec{C} = \vec{\text{grad}} \phi \quad \phi : \text{potentiel des vitesses}$$

$$\vec{C} = \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \quad \text{en coordonnées cylindriques : } \vec{C} = \begin{cases} Cr = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ Cu = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \\ Ca = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

L'écoulement à potentiel des vitesses vérifie la relation :

$$\text{Rot}(\vec{C}) = \vec{0}$$

donc
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad \text{écoulement irrotationnel}$$

Propriétés de l'écoulement irrotationnel :

- Il n'est siège d'aucun vecteur tourbillon
- En tout point de cet écoulement, l'énergie est constante
- Ne peut pas être utilisé pour la description des écoulements en fluide réel avec :
 - une forte incidence (désadaptation)
 - des grandes variations de direction ou de section de passage

Cet écoulement est vérifié par l'introduction de la fonction potentiel ϕ sous la forme d'une différentielle totale.

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = u dx + v dy + w dz$$

Si on utilise cette fonction dans l'équation de continuité pour ($\rho = \text{cte}$), on obtiendra l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad [I.3]$$

I. 4 Circulation du vecteur vitesse :

La circulation Γ du vecteur vitesse \vec{C} de A à B le long de la courbe (C) est donnée par :

$$\Gamma = \int_{AB} \vec{C} \cdot \vec{ds} = \int_{AB} C \cdot \cos \alpha \cdot ds \quad \text{avec} \quad \vec{ds} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

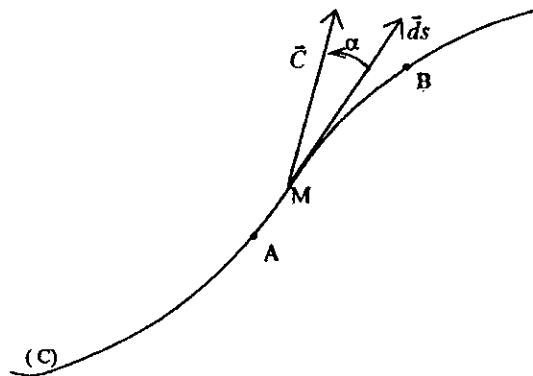


Fig. (I.3) : Circulation

Le produit scalaire $\vec{C} \cdot \vec{ds}$ permet de calculer Γ

$$\Gamma = \int_{AB} (u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz) \quad [I.4]$$

En général, Γ dépend de AB et du chemin suivi, par contre, dans le cas de l'écoulement irrotationnelle, Γ ne dépend que de A et B

$$\Gamma = \int_{AB} d\phi = \phi_B - \phi_A$$

Ce qui veut dire que la circulation est nulle le long d'une courbe fermée.

II. POTENTIEL COMPLEXE :

II. 1 Introduction :

L'étude des écoulements plans à potentiel des vitesses est facilitée par l'introduction des fonctions complexes.

On peut définir dans le plan d'écoulement un certain nombre de propriétés permettant d'accéder à la définition précise des champs de vitesses y compris dans les zones à fortes courbures comme les bords d'attaque.

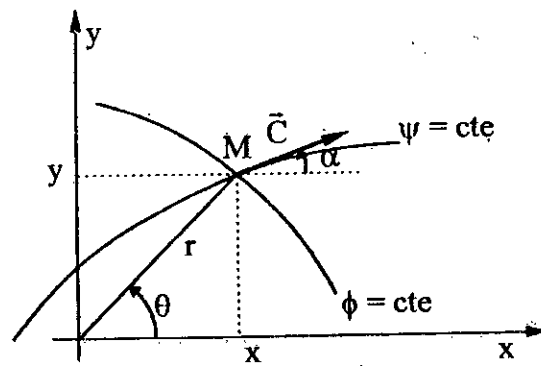


Fig. (I.4) : Représentation dans le plan complexe

Au point "M" de coordonnées (x, y) , représenté sur la figure (I.4), on fait correspondre une affixe complexe z telle que:

$$z = x + i.y = r(\cos\theta + i \sin\theta) = r \exp(i\theta)$$

$$\text{avec } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg(y/x) \end{cases}$$

On peut aussi écrire la vitesse sous forme vectorielle complexe :

$$\vec{C} = u + i v = C (\cos \alpha + i \sin \alpha) = C \exp(i \alpha)$$

Nous avons vu également que la fonction de courant ψ et la fonction potentiel ϕ , peuvent être introduites à partir des composantes de la vitesse \vec{C} , l'une satisfaisant l'équation de continuité, l'autre l'irrotationnalité de l'écoulement.

$$\vec{C} \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right. \quad \text{[I. 5]}$$

Dans le cadre de l'étude analytique, on introduit ϕ et Ψ par l'intermédiaire de la fonction potentiel complexe $F(z)$:

$$F(z) = \phi + i \Psi \quad \text{[I. 6]}$$

II. 2 propriétés de la fonction potentiel complexe :

La fonction potentiel complexe possède une dérivée unique en un point M quelconque .

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - i v$$

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{i \partial y} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = u - i v$$

donc la dérivée de F par rapport à Z est une vitesse complexe C' , appelée vitesse conjuguée de la vitesse \vec{C} .

$$C' = \frac{dF}{dz} = u - i v \quad \text{[I. 7]}$$

III. SINGULARITÉS ELEMENTAIRES :

On utilise les fonctions analytiques pour représenter des écoulements simples, sachant que certains écoulements plus complexes pourront être obtenus par la superposition d'un nombre d'écoulements élémentaires .

III.1 Ecoulement uniforme :

Le potentiel complexe de l'écoulement uniforme est défini par :

$$F(z) = C_0 z = C_0 (x + i.y) \quad [I. 8]$$

Par identification à la définition [I. 6], on aura l'équation des équipotentiels et des lignes de courant :

$$\phi = C_0.x \quad \text{et} \quad \psi = C_0.y$$

qu'on utilise pour tracer un réseau maillé la figure (I.5)

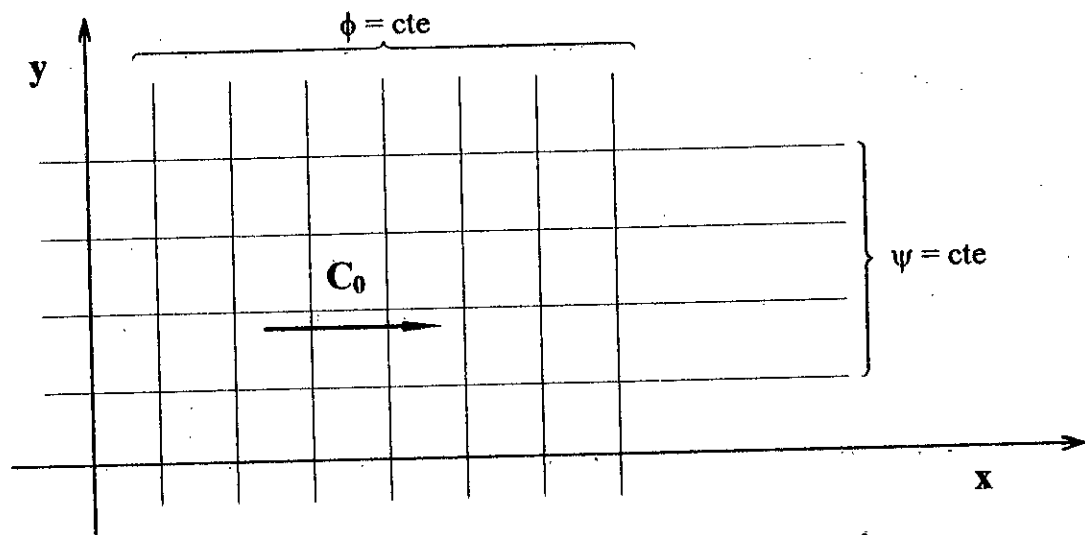


Fig. (I.5) : Ecoulement uniforme parallèle à x

La vitesse locale est calculable à partir de :

$$\bar{C} \quad \left| \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = C_0 \\ v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

◆ Remarques :

- La vitesse d'écoulement est donc uniforme en grandeur et en direction en tout point du plan.
- Si l'écoulement forme un angle α avec l'axe Ox, les équations seront les suivantes :

$$F(z) = C_0 z \exp(-i\alpha) = C_0 r \exp(i\theta) \exp(-i\alpha)$$

$$F(z) = C_0 r \exp[i(\theta - \alpha)] = C_0 r [\cos(\theta - \alpha) + i \sin(\theta - \alpha)]$$

$$F(z) = C_0 [(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + i(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)]$$

L'opérateur $\exp(-i\alpha)$ correspond à une rotation d'angle α dans le sens trigonométrique.

$$\phi = C_0 (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \quad [\text{I. 9. a}]$$

Soit :

$$\psi = C_0 (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \quad [\text{I. 9. b}]$$

$$\bar{C} \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = C_0 \cos \alpha \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = C_0 \sin \alpha \end{array} \right. \quad [\text{I. 10}]$$

On accède plus rapidement à ce résultat en utilisant la relation [I. 7]

$$C' = \frac{dF}{dz} = C_0 \exp(-i\alpha) = C_0 (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

III. 2 Ecoulement de type source ou puits :

Le potentiel complexe crée en un point M d'affixe Z par une source de débit q_v est :

$$F(z) = \pm \frac{q_v}{2\pi} \ln z \quad [\text{I. 11}]$$

On traite ce cas plus facilement en coordonnées polaires

$$\text{Cas de la source (signe +)} : \quad F(z) = \frac{q_v}{2\pi} \ln [r \exp(i\theta)]$$

après identification avec l'équation [I. 6], on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \frac{q_v}{2\pi} \ln r = \frac{q_v}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ \psi = \frac{q_v}{2\pi} \theta = \frac{q_v}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{array} \right. \quad [\text{I. 12. a}]$$

$$[\text{I. 12. b}]$$

Les équipotentielles sont des cercles centrés sur la source ($r = \text{cte}$) et les lignes de courant des droites passant par l'origine ($y/x = \text{cte}$).

◆ Champ des vitesses :

La vitesse locale \bar{C} induite en un point quelconque est :

$$\bar{C} \left\{ \begin{array}{l} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C_0}{r} \\ C_u = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = 0 \end{array} \right. \quad [\text{I. 13}]$$

◆ Remarque :

La vitesse \bar{C} est toujours radiale et varie en raison inverse du rayon.

◆ Débit :

Le débit volume est calculé sur un rayon quelconque :

$$q_v = 2\pi r h C_r = 2\pi C_0$$

avec h : épaisseur de l'écoulement prise égale à l'unité

$$\text{soit finalement :} \quad C_0 = \frac{q_v}{2\pi}$$

$$C = C_r = \frac{q_v}{2\pi r} \quad [\text{I. 14}]$$

Dans le cas d'un puits, la vitesse d'écoulement est de sens opposé.

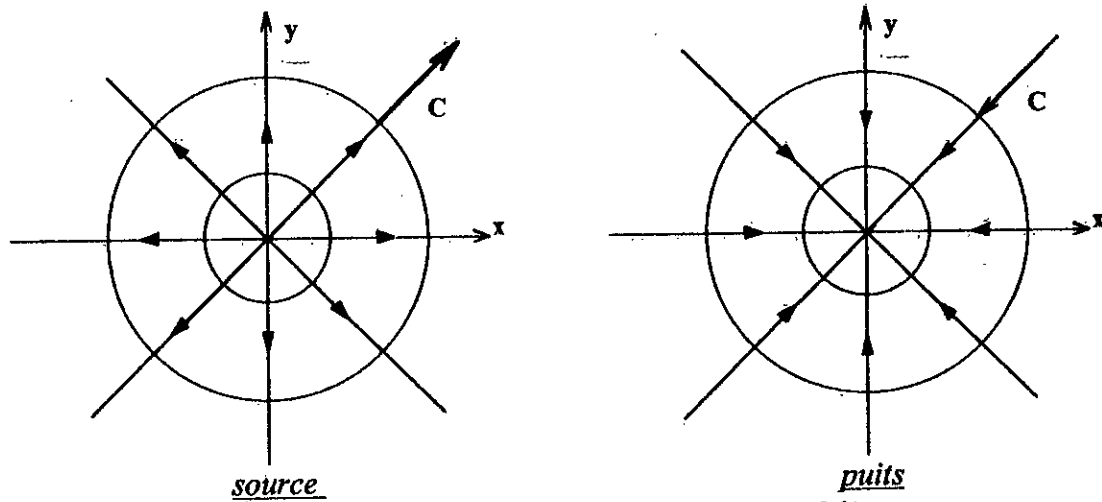


Fig. (I.6) : Source et puits de même débit

Si la source ou le puits sont décentrés de l'affixe z_0 , ils seront définis par la relation :

$$F(z) = \pm C_0 \ln(z-z_0)$$

III. 3 Ecoulement tourbillonnaire :

$$F(z) = \pm i C_0 \ln z \tag{I. 15}$$

Traitons le cas positif, en développant la fonction $F(z)$:

$$F(z) = i C_0 \ln[r \exp(i\theta)]$$

$$F(z) = i C_0 \ln r - C_0 \theta$$

D'où on obtient :

$$\phi = -C_0 \cdot \theta = -C_0 \cdot \text{arctg} \frac{y}{x} \tag{I. 16 . a}$$

$$\psi = C_0 \cdot \ln r = C_0 \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \tag{I. 16 . b}$$

Les lignes de courant sont cette fois des cercles concentriques, tandis que les équipotentielles forment un faisceau de droites centré sur l'origine.

♦ vitesse locale :

$$\vec{C} \left| \begin{array}{l} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \\ C_u = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{C_0}{r} \end{array} \right. \tag{I. 17}$$

La vitesse radiale est nulle, la vitesse circonférentielle est inversement proportionnelle à r . il s'agit de l'écoulement tourbillonnaire centré en O désigné par *vortex libre*.

Le signe + de la relation [I.15] correspond à une rotation inverse du sens trigonométrique, le signe - de la même relation correspond au sens trigonométrique.

L'écoulement tourbillonnaire est caractérisé par la circulation du vecteur vitesse :

$$\Gamma = \int_{(\psi)} \vec{C} \cdot \vec{ds} \tag{I. 18}$$

avec des abscisses curvilignes le long du cercle de rayon r formant une ligne de courant :
 $ds = -r.d\theta$

$$C = Cu = -\frac{C_0}{r}$$

$$\Gamma = \int_{(\psi)} \frac{C_0}{r} \cdot r \cdot d\theta = 2\pi \cdot C_0$$

Quel que soit le cercle retenu, la circulation est une constante, d'où expression de la vitesse \vec{C} :

$$C = Cu = -\frac{\Gamma}{2\pi \cdot r} \quad [\text{I. 19}]$$

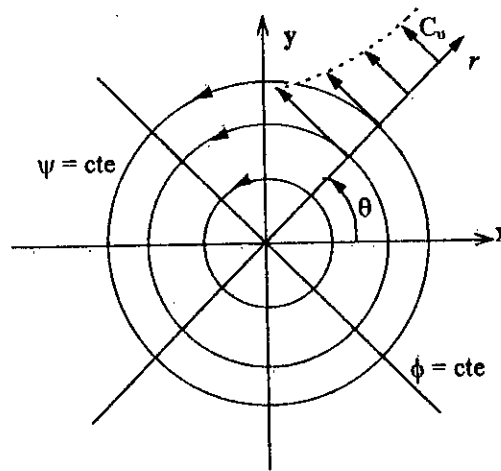


Fig. (I.7): Écoulement tourbillonnaire (ou vortex libre)

◆ Remarque :

Compte tenu de la relation [I. 15], l'écoulement tourbillonnaire sera représenté par :

$$F(z) = i \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} \phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \theta & [\text{I. 20 . a}] \\ \psi = +\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r & [\text{I. 20 . b}] \end{cases}$$

Pour un tourbillon, décentré par rapport au centre du repère de l'affixe z_0 , on écrira :

$$F(z) = i \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad [\text{I. 21}]$$

La vitesse conjuguée :

$$C' = \frac{dF}{dz} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z - z_0} \right) = u - iv$$

En coordonnées cartésiennes :

$$C' = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{(y - y_0) + i(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right)$$

On peut tracer le tableau récapitulatif suivant pour les trois cas précédent .

	F(z)	C'
ÉCOULEMENT UNIFORME	$C_0 Z \text{Exp}(-i\alpha)$	$C_0 \text{Exp}(-i\alpha)$
PUITS	$-\frac{q_v}{2\pi} \ln(z - z_0)$	$-\frac{C_0 \{(x - x_0) - i(y - y_0)\}}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$
VORTEX	$-\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$	$-\frac{i C_0 \{(x - x_0) - i(y - y_0)\}}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

IV. SUPERPOSITION D'ÉCOULEMENTS ÉLÉMENTAIRES :

IV. 1 Principe de superposition :

Le principe de superposition des écoulements se traduit par l'addition des fonctions potentiels complexes et par conséquent par l'addition des fonctions de courant ψ et des fonctions potentiels ϕ .

Si l'on a, pour deux écoulements distincts :

$$F_1(z) = \phi_1 + i \psi_1$$

$$F_2(z) = \phi_2 + i \psi_2$$

La superposition de ces deux écoulements aura comme potentiel complexe :

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) = \phi + i \psi$$

avec :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

et

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

Les vitesses s'additionnent vectoriellement.

On démontre ci-dessous que les composantes exprimées dans le même repère, possèdent la propriété d'additivité :

$$\left| \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = u_1 + u_2 \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial(\phi_1 + \phi_2)}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = v_1 + v_2 \end{array} \right.$$

Nous proposons maintenant quelques-unes des superpositions les plus significatives et des plus utiles en mécanique des fluides.

IV. 2 Superposition d'un écoulement uniforme et d'une source :

La superposition de ces deux écoulements donnera :

$$F(z) = C_0 z + \frac{qv}{2\pi} \ln z = \phi + i \psi$$

D'où l'on tire :

$$\phi = C_0 x + \frac{qv}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

et
$$\psi = C_0 y + \frac{qv}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

La ligne de courant $\psi = 0$ est obtenue pour $y = 0$ et $y_0 = -\frac{qv}{2\pi C_0} \theta$ correspondant à la courbe en trait fort (figure 1.8). C'est une courbe à deux asymptotes distantes de $\frac{qv}{C_0}$ et obtenues pour $\theta = -\pi$ et $+\pi$.

Les fonctions ϕ et ψ permettent de calculer les composantes de la vitesse locale :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = C_0 + \frac{qv}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{qv}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Le point A est le point d'arrêt de l'écoulement correspondant à l'annulation conjointe de u et de v . Les coordonnées de ce point sont les suivantes :

$$A \left(\begin{matrix} x_A = -\frac{qv}{2\pi C_0} \\ y_A = 0 \end{matrix} \right)$$

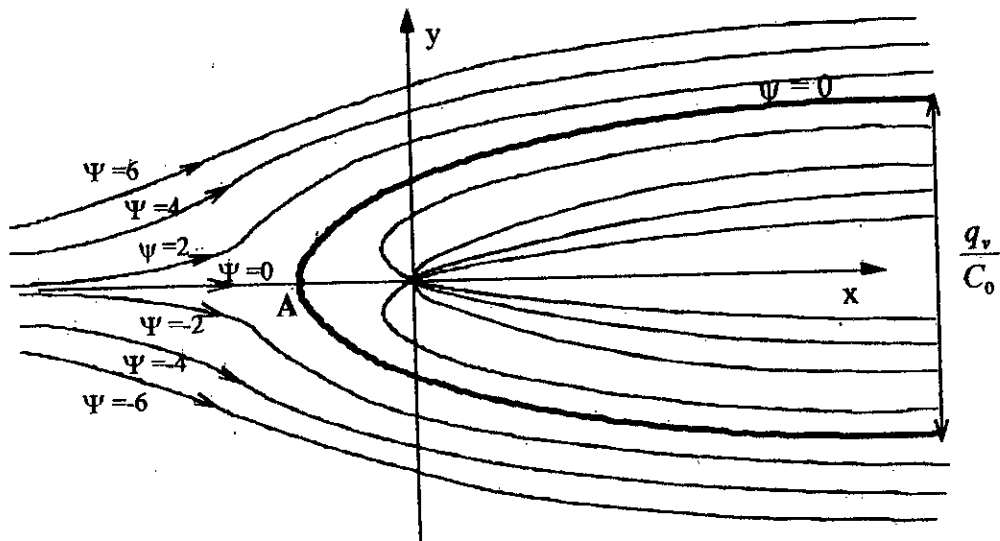


Fig. (1.8) : Écoulement autour d'un obstacle (solide de Rankine).

Lorsque x tend vers l'infini, v tend vers zéro et u tend vers C_0 , vitesse de l'écoulement uniforme.

Ce principe de superposition permet donc de représenter l'écoulement autour d'un obstacle (correspondant notamment à $\psi = 0$).

On peut en principe obtenir n'importe quelle forme d'obstacle en disposant dans le plan un nombre suffisant de sources et de puits.

IV. 3 Superposition d'une source et d'un vortex centrés en O :

Le potentiel complexe correspondant est donné par :

$$F(z) = \frac{qv}{2\pi} \ln z + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

En retenant les coordonnées polaires et en remplaçant z par $r \exp(i\theta)$, on obtient :

$$F(z) = \frac{qv}{2\pi} (\ln r + i\theta) + i \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\theta)$$

donnant :

$$\begin{cases} \phi = \frac{qv}{2\pi} \ln r - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi = \frac{qv}{2\pi} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{cases}$$

ainsi que le champ de vitesse :

$$\begin{cases} C_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{qv}{2\pi r} \\ C_u = \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

L'angle β formé entre la direction radiale et la tangente à la ligne de courant est donnée par (figure 1.9).

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{C_u}{C_r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

L'angle β est donc constant quel que soit le rayon proposé. Les lignes de courant sont des spirales logarithmiques d'équation :

$$r = \exp\left[\frac{2\pi\psi}{\Gamma}\right] \cdot \exp\left(-\frac{\theta}{\operatorname{tg} \beta}\right)$$

L'écoulement est axisymétrique puisque l'on observe simultanément :

$$\frac{\partial C_r}{\partial \theta} = \frac{\partial C_u}{\partial r} = 0$$

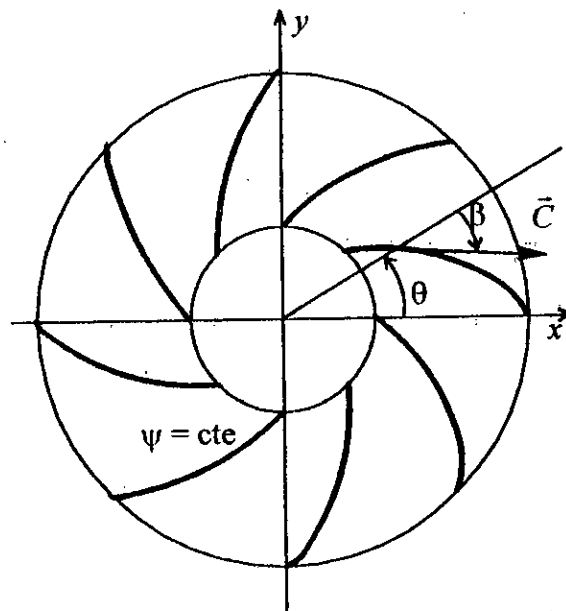


Fig. (I.9) : Superposition d'une source et d'un vortex

Il s'agit de l'écoulement relatif simplifié produit par une roue centrifuge équipée d'aubages en forme de spirales logarithmiques. On démontre que l'écoulement n'est véritablement axisymétrique que dans le cas d'un nombre infini d'aubages (hypothèse d'Euler).

Chapitre .II :

*Application à un
profil isolé*

CHAPITRE II : APPLICATION DE LA METHODE DES SINGULARITES A UN PROFIL ISOLE (NACA 4412).

Ce chapitre a comme but, de définir les coefficients de pression, les équipotentiels et les lignes de courant autour d'un profil isolé, par l'application de la méthode des singularités, en utilisant la propriété de superposition. On obtient le système d'équation linéaire après avoir discrétisé le profil, et appliqué les conditions aux limites (condition de glissement, KUTTA-JOKOWSKI).

I. DEFINITION DU PROFIL D'AILE :

C'est une forme profilée avec deux bord l'un arrondi (en subsonique) appelé bord d'attaque et l'autre anguleux appelé bord de fuite. Chaque gamme de profils est destinée à un domaine d'application bien précis.

II. APPLICATION DE LA METHODE A UN PROFIL ISOLE :

II. 1 Discrétisation du profil :

On discrétise le profil en un nombre fini n de points (*sommets*) de coordonnées $(x_s(j), y_s(j))$, reliés par des segments droits (*panneaux*), pour former ainsi un polygone de n côtés. Au milieu de chaque panneau, on place un point de contrôle $(x(i), y(i))$.

$$x(i) = \frac{x_s(i) + x_s(i-1)}{2}$$

$$y(i) = \frac{y_s(i) + y_s(i-1)}{2}$$

Pour chaque panneau j , on associe un axe de coordonnées curvilignes S_j tel que, pour le point $(x_s(j-1), y_s(j-1))$ $S_j = 0$ et pour le point $(x_s(j), y_s(j))$ $S_j = L_j$ (L_j longueur du panneau j). Donc les coordonnées $(x(j), y(j))$ d'un point appartenant au panneau j s'écrivent :

$$x(j) = x_s(j-1) + s_j \cdot \cos(\delta_j)$$

$$y(j) = y_s(j-1) + s_j \cdot \sin(\delta_j)$$

Avec : δ_j : représente l'angle d'inclinaison du panneau (j).

II. 2 Choix de la distribution :

D'après la référence [10], l'étude comparative a démontré que, la distribution linéaire possède une précision très proche de la distribution parabolique mais, elle a une formulation plus simple et un temps de calcul plus réduit.

On répartie le long de chaque panneau une charge constitué d'une distribution linéaire de vortex .

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} s_j$$

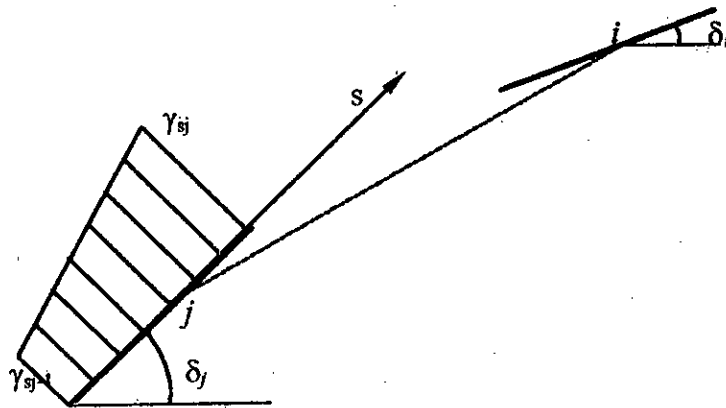


Fig.(II. 1) : Discretisation du profil

II. 3 Champs de vitesse autour du profil :

Le potentiel complexe induit par un point du panneau " j ", d'affixe Z_j , en un point quelconque z d'affixe Z est :

$$F(z) = \frac{-i}{2\pi} \gamma_j \ln(z - z_j)$$

L'intégration le long du panneau, nous permet de déterminer l'effet total de cette distribution.

$$F(z) = \frac{-i}{2\pi} \int_{l_j} \gamma(j) \ln(z - z_j) ds_j$$

d'où la vitesse conjuguée est :

$$C' = \frac{dF}{dz} = \frac{-i}{2\pi} \int_{l_j} \gamma_j \frac{1}{z - z_j} ds_j$$

$$C' = \frac{-i}{2\pi} \int_{l_j} \gamma_j \frac{(x - x_j) - i(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j$$

$$C' = \frac{-1}{2\pi} \left[\int_{l_j} \gamma_j \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j + i \int_{l_j} \gamma_j \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j \right]$$

Pour n panneaux : on somme les influences de tous les panneaux

$$C' = \frac{-1}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j + i \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j \right]$$

En superposant à ces vortex un écoulement uniforme .

$$C'_{eclt unif} = C_0 \exp(-i\alpha) = C_0 [\cos(\alpha) - i \cdot \sin(\alpha)]$$

la vitesse conjuguée d'un point (x , y) de l'écoulement, en tenant compte de la présence de l'obstacle s'écrit :

$$C' = C_0 \cos\alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(y - y_j) ds_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} - i \left(C_0 \sin\alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(x - x_j) \cdot ds_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \right)$$

donc le vecteur vitesse est :

$$\vec{C} \begin{cases} u = C_0 \cos\alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(y - y_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} ds_j \\ v = C_0 \sin\alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \cdot ds_j \end{cases} \quad [II.1]$$

On calcul les composantes de la vitesse dans chaque point de contrôle (x_i , y_i).

$$x_i = \frac{xs(i) + xs(i-1)}{2}$$

$$y_i = \frac{ys(i) + ys(i-1)}{2}$$

$$\vec{C}_i \begin{cases} u_i = C_0 \cos\alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos\delta_i \\ v_i = C_0 \sin\alpha + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \cdot ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin\delta_i \end{cases}$$

$\frac{\gamma_m}{2}$ Représente l'influence du panneau sur lui-même et est égale à (*) :

$$\frac{\gamma_m}{2} = \frac{\gamma_j \left(\frac{l_j}{2}\right)}{2} = \frac{\gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} l_j / 2}{2} = \frac{\gamma_s(j) + \gamma_s(j-1)}{4} \quad [II.2]$$

II. 4 Mise en équation :

La distribution des vorticités γ_s doit répondre à un certain nombre de conditions aux limites traduisant la réalité physique de l'écoulement.

(*) Le calcul de $\frac{\gamma_m}{2}$ sera détaillé dans l'annexe[A].

II. 4.1 Condition de glissement :

Pour traduire l'imperméabilité du profil on pose une condition aux limites appelée *condition de glissement*, qui impose que la vitesse sur la surface du profil, soit tangente à ce dernier, donc la vitesse en chaque point de contrôle est tangente au panneau.

donc :

$$\frac{v_i}{u_i} = \operatorname{tg} \delta_i \Rightarrow v_i \cos \delta_i = u_i \sin \delta_i$$

$$C_0 \sin \alpha \cdot \cos \delta_i - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(x_i - x_j) \cdot \cos \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin \delta_i \cdot \cos \delta_i =$$

$$C_0 \cos \alpha \cdot \sin \delta_i - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j \frac{(y_i - y_j) \sin \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin \delta_i \cdot \cos \delta_i$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j \left[\frac{(x_i - x_j) \cdot \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{2\pi [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \right] ds_j = C_0 [\cos \alpha \cdot \sin \delta_i - \sin \alpha \cdot \cos \delta_i] \quad \text{[II.3]}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x_j = x_s(j-1) + s_j \cos \delta_j \\ y_j = y_s(j-1) + s_j \sin \delta_j \end{cases} \quad \text{et } \gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} s_j$$

en remplaçant dans l'équation [II.2], on trouve :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \left(\gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} s_j \right) \left[\frac{(x_i - x_j) \cdot \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{2\pi [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]} \right] ds_j = C_0 \sin(\delta_i - \alpha)$$

II. 4.2 Etablissement des fonctions d'influence :

Les fonctions d'influence {G,F}, qui représentent les caractéristiques géométriques de l'obstacle, peuvent être écrites comme suit :

$$G(i, j) = \int_{l_j} \left[\frac{(x_i - x_j) \cdot \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right] ds_j$$

$$F(i, j) = \int_{l_j} \left[\frac{(x_i - x_j) \cdot \cos \delta_i + (y_i - y_j) \sin \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right] s_j ds_j$$

d'où

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[G(i, j) \cdot \gamma_s(j-1) + F(i, j) \cdot \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] = 2\pi C_0 \sin(\delta_i - \alpha)$$

On remarque que l'intensité de singularité pour $j = 1$ n'est pas définie, donc on fait la sommation de $j = 2$ à $j = n+1$, puis on confond le point $j = n+1$ avec le point 1, on aura

$$G(i, n+1) = G(i, 1)$$

$$F(i, n+1) = F(i, 1)$$

On remarque maintenant, qu'on dispose de n équations alors, qu'on a $n+1$ inconnues, pour remédier à cet inconvénient, on dispose d'une condition supplémentaire (**CONDITION DE KUTTA**).

II. 4.3 Condition de KUTTA-JOKOWSKI :

Selon la géométrie du profil, la condition de K U T T A s'écrit de deux façons :

- Pour un profil se terminant par un dièdre, le bord de fuite est un point d'arrêt.
- Pour un profil se terminant par un point de rebroussement la vitesse à l'extrados et à l'intrados au niveau du bord de fuite a la même valeur finie.

Dans notre application la condition de K U T T A, impose que la vitesse à l'extrados et à l'intrados, au bord de fuite, a la même valeur finie, donc il n'y a pas de glissement entre les couches fluide en ce point, alors la vorticité est nulle, ce qui est traduit par ($\gamma_{n+1} = -\gamma_1$).

En fin on accédera à un système linéaire de n équations à n inconnues.

Le vecteur $[B]$: représente les caractéristiques de l'écoulement libre et sa direction par rapport à chaque panneau.

La matrice $[A]$ est une combinaison linéaire des éléments des matrices d'influence $\{G, F\}$, donc elle représente les caractéristiques géométriques du profil.

$$\left\{ \begin{array}{l} B(i) = 2\pi C_0 \sin(\delta_i - \alpha) \\ A(i,1) = G(i,2) - \frac{F(i,2)}{l_2} - \frac{F(i,1)}{l_1} \\ A(i,j) = G(i,j+1) - \frac{F(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i,j)}{l_j} \\ A(i,n) = G(i,1) + \frac{F(i,n)}{l_n} - \frac{F(i,1)}{l_1} \end{array} \right. \quad \text{[II.4]}$$

La résolution du système linéaire [II.4] ci dessus permet de déterminer ($\gamma_s(j)$, $j = 1, n$). On obtient ainsi un réglage des paramètres $\gamma_s(j)$ qui détermine une approximation numérique de l'écoulement autour du corps. On peut alors calculer facilement les paramètres de l'écoulement (vitesse, lignes de courant, coefficients de pression ...etc).

III. CALCUL DES CARACTÉRISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT :

III. 1 Calcul de la vitesse tangentielle :

Une fois les solutions γ_s calculées, on les injecte pour calculer les C_i telle que :

$$C_i = -(u_i \cos \delta_i + v_i \sin \delta_i)$$

En remplaçant u_i , v_i de l'équation [II.1], l'expression de C_i devient :

$$C_i = - \left[C_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \int \gamma_j \frac{(x_i - x_j) \cdot \sin \delta_i \cdot ds_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \int \gamma_j \frac{(y_i - y_j) \cos \delta_i \cdot ds_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - \frac{\gamma_m}{2} \right]$$

$$C_i = -C_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n \int \gamma_j \frac{[(y_i - y_j) \cos \delta_i - (x_i - x_j) \cdot \sin \delta_i] \cdot ds_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + \frac{\gamma_m}{2}$$

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} s_j$$

En introduisant les fonctions d'influence (G, F) telles que :

$$G(i, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_j} \left[\frac{(y_i - y_j) \cos \delta_i - (x_i - x_j) \cdot \sin \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right] ds_j$$

$$F(i, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_j} \left[\frac{(y_i - y_j) \cos \delta_i - (x_i - x_j) \cdot \sin \delta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right] s_j ds_j$$

L'expression de C_i se simplifiera à :

$$C_i = -C_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[G(i, j) \gamma_s(j-1) + F(i, j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] + \frac{\gamma_m}{2} \quad \text{[II.5]}$$

On remplace l'expression de $\frac{\gamma_m}{2}$ de l'équation [II.2] on trouve :

$$C_i = -C_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[G(i, j) \gamma_s(j-1) + F(i, j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] + \frac{\gamma_s(j) + \gamma_s(j-1)}{4}$$

Pour linéariser la forme de l'expression de C_i , on entraîne l'expression [II.2] de $\frac{\gamma_m}{2}$ entre les parenthèses, on aura :

$$C_i = -C_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[G(i, j) \cdot \gamma_s(j-1) + F(i, j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] + \underbrace{\left[\pi \cdot \gamma_s(j-1) + \frac{\pi}{2} l_j \frac{\gamma_s(j) + \gamma_s(j-1)}{l_j} \right]}_{\text{pour } i=j} \right\}$$

donc les valeurs de G et F pour $i = j$ seront :

$$\begin{cases} G(i, j) = \pi \\ F(i, j) = \frac{\pi \cdot l_j}{2} \end{cases}$$

et la matrice d'influence sera :

$$\begin{cases} A(i, 1) = G(i, 2) - \frac{F(i, 2)}{l_2} - \frac{F(i, 1)}{l_1} \\ A(i, j) = G(i, j+1) - \frac{F(i, j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i, j)}{l_j} \\ A(i, n) = G(i, 1) + \frac{F(i, n)}{l_n} - \frac{F(i, 1)}{l_1} \end{cases}$$

et en fin l'expression vectorielle finale de C_i devient

$$C_i = -C_0 \sin(\alpha - \delta_i) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} A(i, j) \cdot \gamma_s(j)$$

III. 2 Calcul des coefficients de pression :

On applique l'équation de BERNOULLI entre deux points, le premier à l'infini amont et le deuxième, sur l'obstacle i tel que :

$$\begin{aligned} p_\infty + \frac{1}{2} \rho C_0^2 &= p_i + \frac{1}{2} \rho C_i^2 \\ p_i - p_\infty &= \frac{1}{2} \rho C_0^2 \left(1 - \left(\frac{C_i}{C_0} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

On définit le coefficient de pression comme :

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho C_0^2} = 1 - \left(\frac{C_i}{C_0} \right)^2$$

III. 3 Calcul et tracé des lignes de courant et des potentiel des vitesse :

Il y a deux approches pour le calcul et le tracé des lignes de courant.

• **Première approche :**

D'après l'équation [I.20. a]*, la fonction de courant induite par un vortex ponctuel (γ_j) en un point distants de r_j est :

$$\psi_j = -\frac{\gamma_j}{2\pi} \ln r_j$$

Alors pour calculer la fonction de courant induite par une distribution de tourbillons, sur un panneau, on intègre l'expression précédente le long de ce panneau .

$$\psi_j = -\int_{l_j} \frac{\gamma_j}{2\pi} \ln r_j ds_j$$

Donc, la fonction de courant en un point quelconque est calculée par la superposition des fonctions de courant induites par tous les panneaux, y compris celle résultant de l'écoulement uniforme.

$$\psi = \psi_{\text{ecoul unif}} + \sum_{j=1}^n \psi_j(x, y)$$

où ψ_j est la fonction de courant induite par le panneau j .

Pour le tracé d'une ligne de courant, on choisira un point (x_0, y_0) à l'infini amont, et on cherchera à relier tous les points ayant la même valeur de ψ , pour cela on procédera par la méthode de dichotomie, avec les étapes suivantes :

1. Choix d'un point 0 de coordonnées (x_0, y_0) ;
2. calcul de la fonction de courant ψ_0 en ce point;
3. repérer les points situés sur un cercle de rayon h donné et de centre (x_0, y_0) . Ces points seront repérés par un angle θ tel que :

$$x = x_0 + h \cos\theta$$

$$y = y_0 + h \sin\theta$$

4. repérer les deux sommet du cercle A et B tel que $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_B = -\frac{\pi}{2}$ et donc

$$x_A = x_0 + h \cos\theta_A$$

$$x_B = x_0 + h \cos\theta_B$$

et

$$y_A = y_0 + h \sin\theta_A$$

$$y_B = y_0 + h \sin\theta_B$$

5. Calculer la fonction de courant ψ aux points A et B

6. repérer le point C tel que $\theta_C = \frac{\theta_A + \theta_B}{2}$ et donc

$$x_C = x_0 + h \cos\theta_C$$

$$y_C = y_0 + h \sin\theta_C$$

7. Calculer la fonction de courant au point C .

* Pour le calcul et le tracé des équipotentiels, la même démarche est suivie quoique, l'expression de ϕ est donnée par l'équation [I.20. b].

8. Calculer $\psi_1 = (\psi_A - \psi_0)(\psi_C - \psi_0)$. Si $\psi_1 < 0$ alors il existe un point appartenant au cercle et compris entre A et C telle que la valeur de la fonction ψ soit égale à ψ_0 , on remplace donc l'arc AB par AC. Dans le cas contraire, on remplace l'arc AB par CB.

9. Revenir à l'étape 5 cette opération se répétera jusqu'à atteindre le point ayant la même valeur ψ_0 à une erreur ϵ .

après avoir trouvé le point C tel que $\psi_C = \psi_0$, on refait toute cette procédure de puis l'étape 3 en remplaçant le point C par 0.

Cette méthode présente deux inconvénients majeurs :

♦ La non compatibilité au bord d'attaque surtout pour les grandes incidences où il y a des variations brusques de grandes amplitudes .

♦ Le temps de calcul très important, de l'ordre d'une minute pour le tracé d'une seule ligne .

Tenant compte de ces deux inconvénients, on a adopté une nouvelle approche pour le tracé des lignes de courant, qui est très compatible avec les grandes incidences et, qui permet un temps calcul très réduit (moins de la moitié du temps consommé par la première approche).

• Deuxième approche :

Du fait que, la vitesse des particules appartenant à la même ligne de courant, est tangente à cette dernière, on peut tracer une ligne de courant en suivant les étapes suivantes :

1. Calcul des composantes (u , v) de la vitesse en un point (x_0 , y_0).

2. Calcul de l'angle $\alpha = \text{Atan}\left(\frac{v}{u}\right)$

3. on recalcule les composantes de la vitesse (u , v) en un autre point (x , y) tel que :

$$x = x_0 + r \cos \alpha \qquad y = y_0 + r \sin \alpha$$

ce qui vérifie la condition de tangence entre la ligne de courant et la vitesse.

r : représente le pas, il devrait être le plus petit possible, pour refléter, le plus fidèlement possible, la condition de tangence .

4. On retourne à l'étape 2 ,et ainsi de suite⁽¹⁾ .

Pour valider cette deuxième approche, on a fait une étude comparative dont les résultats sont présentés dans les figures (fig. II.8; fig. II.9; fig. II.10).

⁽¹⁾ Pour le tracé des équipotentiels, on suit la même démarche mais au lieu de vérifier la tangence on vérifie la perpendicularité.

IV. PRESENTATION DES RESULTATS :

IV. 1 Les coefficients de pression :

Pour $\alpha = 2^\circ$: On voit bien que le bord d'attaque est un point de stagnation, alors qu'on observe la création d'une dépression assez importante sur l'extrados qui s'éteint en s'approchant du bord de fuite, sur l'intrados la variation des coefficients de pression est très uniforme, l'importance de différence de la dépression sur l'extrados et celle sur l'intrados génère la portance, le bord de fuite vérifie d'une manière très fidèle la condition de K U T T A

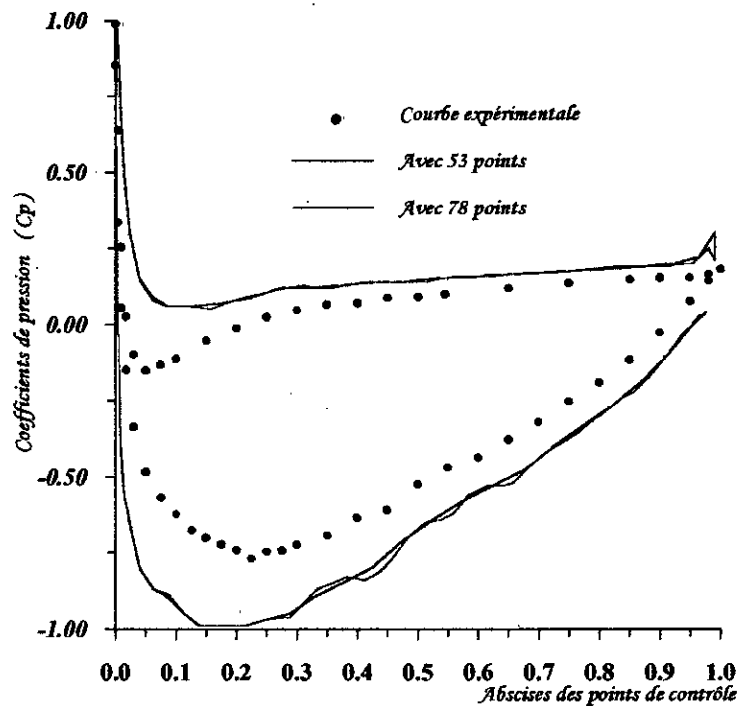


Fig. (II.2) : Les coefficients de pression pour $\alpha = 2^\circ$

Remarques :

- La portance est créée essentiellement par la dépression sur l'extrados.
- L'écart entre l'expérience et la méthode des singularités est essentiellement dû à l'effet de la couche limite, qu'on n'a pas tenu compte dans la méthode des singularités.
- La recherche d'un meilleur résultat exige l'application de la condition de glissement sur toute la surface du profil (maximum de points de contrôle), on a essayé de raffiner le profil (par la méthode d'interpolation *cubic spline*)⁽⁴⁾, mais d'après fig (II .2), on constate une légère fluctuation de Cp de la courbe raffinée, donc le raffinement dans ce stade est inutile (son importance apparaîtra dans les chapitres suivants).
- D'après fig(II.3), les coefficients de pression obtenus par la méthode des singularités $\alpha = 0^\circ$ plus proches des résultats expérimentaux que celles de $\alpha = 2^\circ$, on peut donc considérer les résultats de $\alpha = 0^\circ$ comme une correction par incidence de $\alpha = 2^\circ$.

⁽⁴⁾ Ce raffinement conduit à un lissage du profil (réduction des pics entre panneaux)

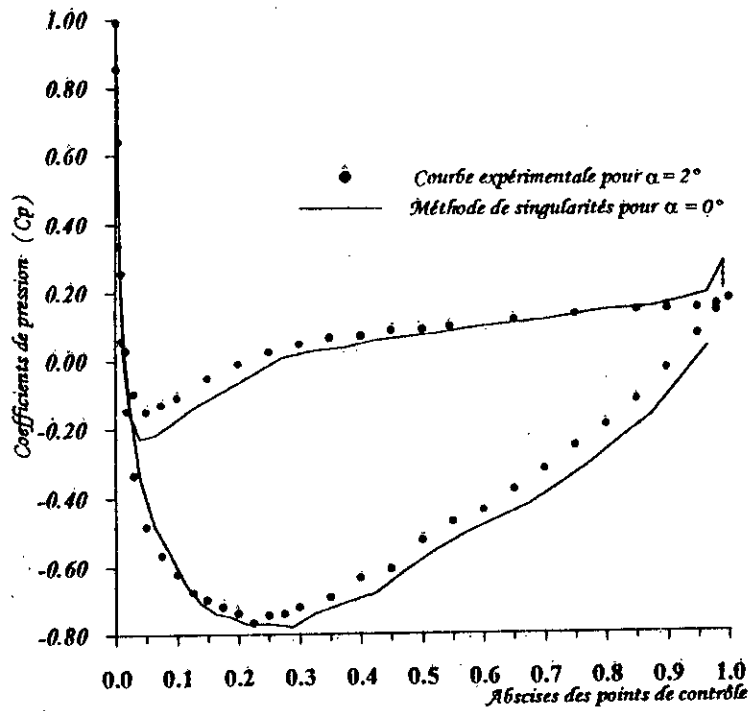


Fig. (II.3) : Comparaison des coefficients pression pour $\alpha = 0^\circ$ théorique et $\alpha = 2^\circ$ expérimentaux

Pour $\alpha = 16^\circ$: Le point de stagnation s'est déplacé sur l'intrados, à cause du changement de l'angle d'attaque, la dépression sur l'extrados reste plus importante que celle de l'intrados, donc le profil reste porteur. Au bord de fuite la condition de K U T T A reste toujours vérifiée.

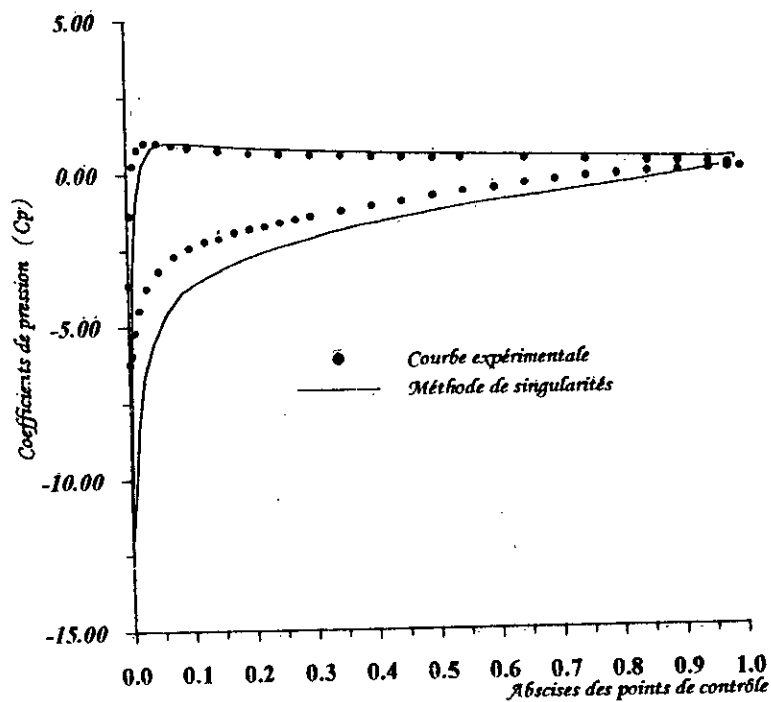


Fig. (II.4) : Les coefficients de pression pour $\alpha = 16^\circ$

IV. 2 ETABLISSEMENT D'UN MAILLAGE AUTOUR DU PROFIL :

IV. 2.1 Les lignes de courant :

Plus loin du profil, les lignes de courant sont tracées d'une manière assez performante (ressemble à l'écoulement réel), *Fig.(II. 5)* et *Fig.(II. 6)*. Le point de stagnation se déplace par rapport au bord d'attaque suivant l'angle d'incidence.

☞ Pour $\alpha = 0^\circ$: Le profil se situe entre deux valeurs négatives de ψ , contrairement au cas des obstacles non portant ($\psi = 0$). La variation de la distance entre deux lignes dans la zone voisine de l'obstacle par rapport à la distance dans l'infini amont est légère ce qui signifie que la vitesse varie suivant v .

☞ Pour $\alpha = 16^\circ$: On constate que le raffinement (réduction de la distance entre lignes de courant) apparaît au début de l'extrados, donc une grande accélération de l'écoulement ce qui apparaît clairement sur le graphe des coefficients de pression.

IV. 2.2 Les équipotentiels :

☞ Pour $\alpha = 0^\circ$: Dans ce cas le tracé des équipotentiels ne nous a posé aucun problème (les propriétés cinématique de ϕ sont respectées).

☞ Pour $\alpha = 16^\circ$: La propriété essentielle de cette fonction (*orthogonalité avec ψ*) n'est pas respectée sur tout au voisinage de l'abscisse $x = 0$, c'est un problème qu'on traitera ultérieurement (exige une étude comparative).

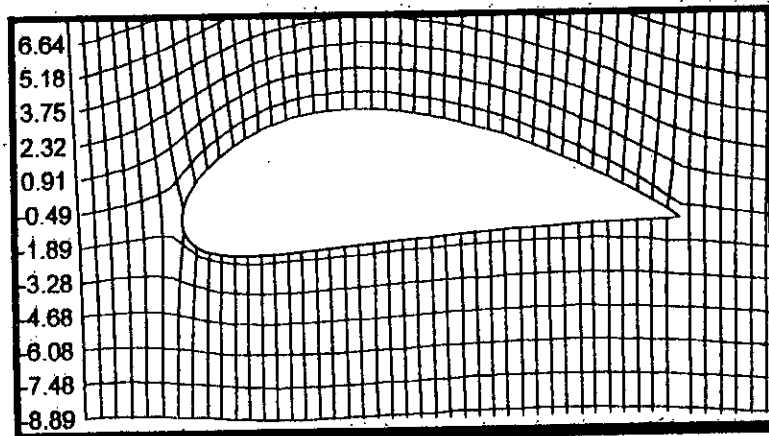


Fig. (II.5) : Lignes de courant pour $\alpha = 0^\circ$

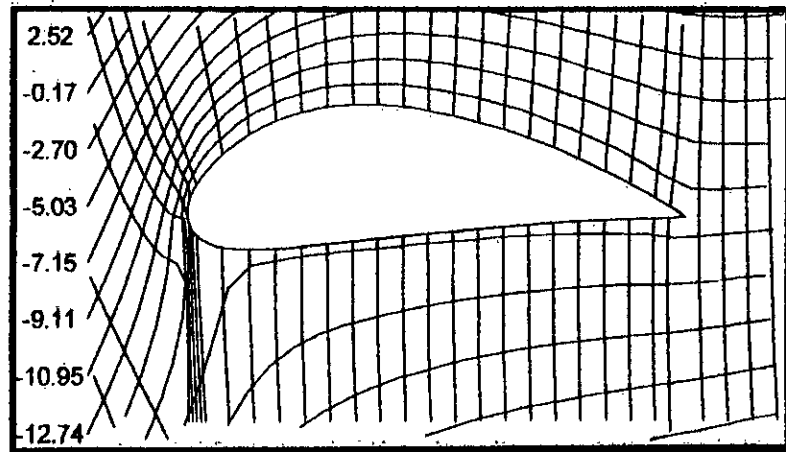


Fig. (II.6) : Lignes de courant pour $\alpha = 16^\circ$

Remarque : Les deux figures précédentes sont tracés par le premier modèle.

IV. 2.3 Lignes de courant au voisinage du profil :

Pendant la tentative de la recherche des deux lignes de courant les plus proches de profil (la ligne d'au dessus et la ligne d'au dessous), pour vérifier leur coïncidence au bord de fuite (condition de K U T T A), on était choqué par l'apparition d'une pénétration des lignes de courant dans l'extrados du profil, qui sortent de l'intrados (apparition d'un *écoulement secondaire*).

De point de vue du modèle imposé, la pénétration de l'écoulement ne présente aucune contradiction, car le profil est un obstacle purement théorique, et son effet sur l'écoulement dépend essentiellement des conditions aux limites imposées, et comme on a posé ces conditions sur points discrets alors que les autres points appartenant à la surface du profil ne vérifie pas obligatoirement ces conditions, ce qui donne la possibilité de non-tangence de la vitesse à la surface, donc la pénétration.

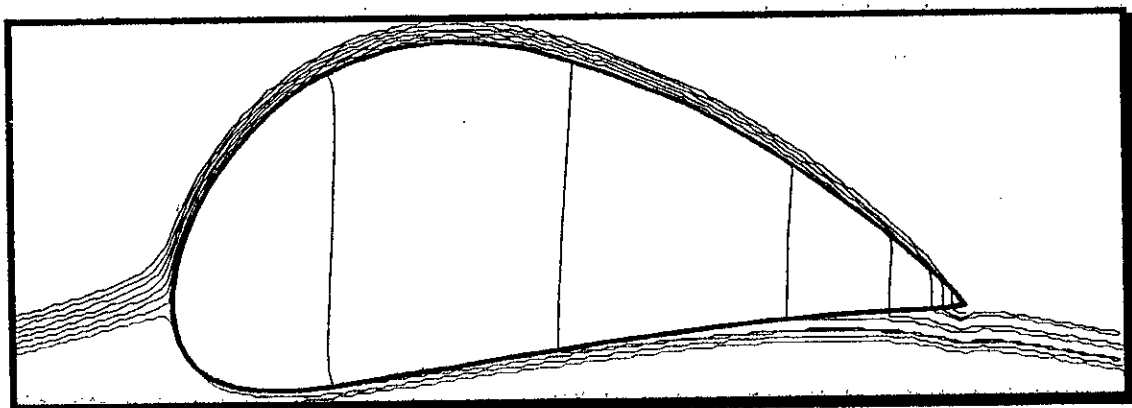
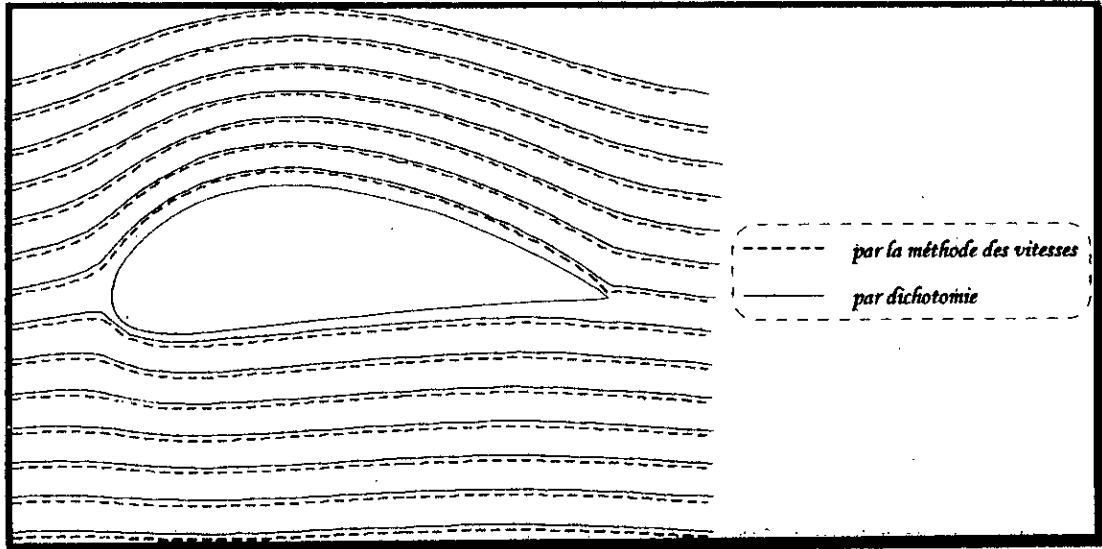


Fig. (II.7) : Ecoulement au voisinage du profil.

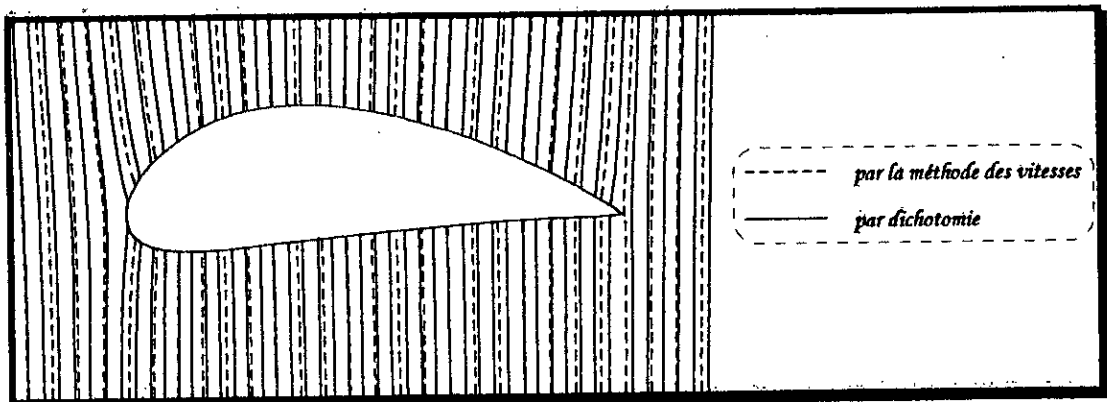
IV. 2.4 Etude comparative des deux approches de tracé :

- ◆ **Les lignes de courant** : les lignes de courant tracés par les deux approches sont de même qualité, quoique le deuxième approche nous permet un gain de temps de calcul.



*Fig. (II.8) : Comparaison entre les deux approches
(lignes de courant)*

- ◆ **Les équipotentiels** :
 - Pour $\alpha = 0^\circ$: même remarque que les lignes de courant.



*Fig. (II.9) : Comparaison entre les deux approches
(les équipotentiels)*

- Pour $\alpha = 16^\circ$: Le problème de l'orthogonalité est résolu par cette approche de tracé.
 Pour résoudre le problème des équipotentiels (dans la première approche), on a joué sur les valeurs des bornes de l'intervalle de variation de θ (de l'équation I.20.a), on a trouvé :
 - * Non orthogonalité de ϕ pour $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2]$
 - * La décroissance de la valeur de ϕ , pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ ou $\theta \in [0, 2\pi]$, en fonction de x (dans la zone de pénétration citée précédemment), qui est mathématiquement inacceptable (écoulement de retour).

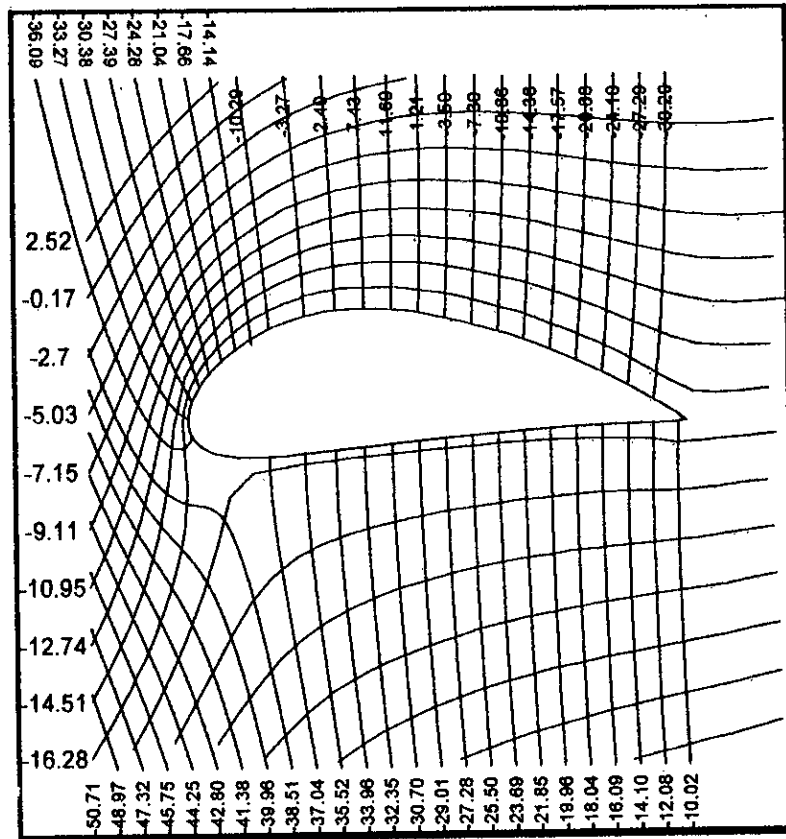


Fig. (II.10) : Lignes de courant pour $\alpha = 16^\circ$

CONCLUSION

Malgré que la méthode est basée sur des principes et des hypothèses purement théoriques, elle nous a donnés de très bons résultats surtout dans le calcul des coefficients de pression mais, comme chaque méthode numérique présente des inconvénients qui, limitent son domaine d'application, cette méthode pose aussi des problèmes majeurs dans les zones citées précédemment.

Ce chapitre nous a servi comme introduction aux chapitres qui suivent, il nous a permis de contourner tous les problèmes que rencontre l'utilisateur de cette méthode pour le cas d'un obstacle isolé (cas le plus simple), et de prévoir les différents problèmes, qu'on rencontre ultérieurement, et qui nous servira comme base sur laquelle on choisit la stratégie de travail, qui sera suivie dans le cas des turbomachines (le cas le plus complexe).

Chapitre .III :

*Application à une
grille*

CHAPITRE III :
CRÉATION D'UNE GRILLE RECTILIGNE FORMÉE D'AUBES D'ENVERGURE
CONSTANTE PAR LA METHODE DES SINGULARITES

La grille d'aubes plane, point de départ du calcul des turbomachines axiales a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales. Dans la section suivante, on essayera de rassembler tous les résultats conduisant au choix des paramètres nominaux, minimisant l'écart entre la théorie (singularités) et l'expérience. La nouveauté de ce chapitre se situe à l'introduction des obstacles mobile.

I. THEORIE DES GRILLES PLANES :

I. 1 Création d'une grille rectiligne :

Une grille rectiligne est un ensemble de profils identiques alignés suivant l'axe (oy) avec un pas constant, comme le nombre de profils étant infini l'écoulement devient *périodique* et toutes les singularités sont répétées selon l'axe (oy) avec l'intervalle correspondant au pas de la grille.

I. 2 Définition géométrique des profils en grille :

On étudie ici le cas d'une grille plane infinie (*fig. III.1*) exposée à un écoulement plan infini, uniforme et permanent. L'angle d'incidence de l'écoulement est toujours repéré entre la corde des profils et la vitesse incidence (repère lié au profil). La vitesse d'entrée C_1 et la vitesse de sortie C_2 sont repérées par rapport à l'axe d'écoulement perpendiculaire au font de grille par les angles α_1 et α_2 .

La grille est définie par 3 paramètres géométriques principaux :

- γ : L'angle de calage des profils donnant lieu à une première relation géométrique :

$$\gamma = \alpha_1 - i$$

- σ : Serrage des profils, rapport entre la corde et le pas

$$\sigma = \frac{l}{t}$$

- $C_{z=0}$: Cambrure des profils, identifie les profils mis en grille.

Sous l'effet de ces paramètres géométriques, l'écoulement subit en bloc une déflexion ou déviation caractérisée par :

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \quad \text{[III.1]}$$

A l'inverse du profil isolé, ce ne sont plus les efforts aérodynamiques qui importent, mais plutôt la déflexion.

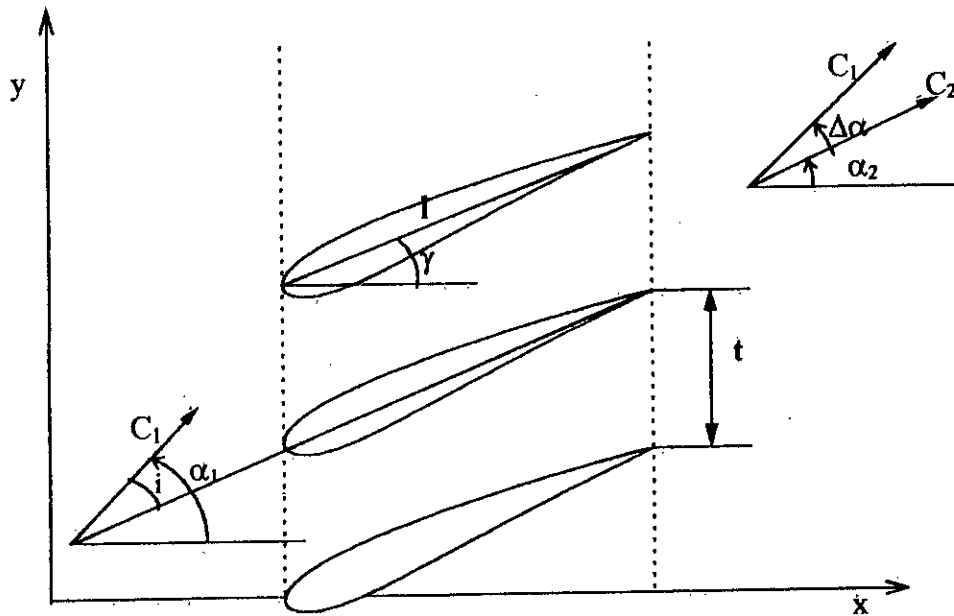


Fig. III .1 : Définition d'une grille plane

Pour les turbomachines axiales, La série N.A.C.A 65 est la plus répandue, pour cette série, les lois de cambrure et d'épaisseur sont établies sous forme des tableaux numériques comme ceux ci-après.

x_1/l (en %)	y_1/l (en %)	dy/dx
0.00	0.000	*****
0.50	0.250	0.42120
0.75	0.350	0.38875
1.25	0.535	0.34770
2.50	0.930	0.29155
5.00	1.580	0.23430
7.50	2.120	0.19995
10.0	2.585	0.17485
15.0	3.365	0.13805
20.0	3.980	0.11030
25.0	4.475	0.08745
30.0	4.860	0.06745
35.0	5.150	0.04925
40.0	5.355	0.03225
45.0	5.475	0.01595
50.0	5.515	0.00000
55.0	5.475	-0.01595
60.0	5.355	-0.03225
65.0	5.150	-0.04925
70.0	4.860	-0.06745
75.0	4.475	-0.08745
80.0	3.980	-0.11030
85.0	3.365	-0.13805
90.0	2.585	-0.17485
95.0	1.580	-0.23430
100.	0.000	*****

x_1/l (en %)	y_2/l
0.00	0.000
0.50	0.772
0.75	0.932
1.25	1.169
2.50	1.574
5.00	2.177
7.50	2.647
10.0	3.040
15.0	3.666
20.0	4.143
25.0	4.503
30.0	4.760
35.0	4.924
40.0	4.996
45.0	4.963
50.0	4.812
55.0	4.530
60.0	4.146
65.0	3.682
70.0	3.156
75.0	2.584
80.0	1.987
85.0	1.385
90.0	0.810
95.0	0.306
100.	0

Pour des valeurs différentes de C_{z00} , multiplier y_1/l et dy_1/dx_1 par C_{z00} , pour d'autre épaisseurs relatives, multiplier y_2/l par le rapport :

I. 3 Considérations cinématique :

Pour cette grille l'équation de continuité s'écrit :

$$qm_1 = qm_2$$

$$\rho_1 qv_1 = \rho_2 qv_2$$

En fluide incompressible : $\rho_1 = \rho_2$

$$S_1 C_1 \cos(\alpha_1) = S_2 C_2 \cos(\alpha_2)$$

Et pour une envergure de profil uniforme :

$$\begin{cases} S_1 = S_2 \\ Ca_1 = Ca_2 = Ca \end{cases}$$

Ca : Projection axiale des vitesses ou encore vitesse débitante.

Cette projection axiale commune donne lieu aux triangles de vitesses de la grille (fig. III .2)

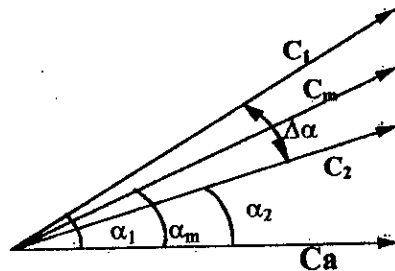


fig. III .2 : Triangles des vitesses

A partir de ces triangles de vitesses, sont définis l'angle moyen α_m et la vitesse moyenne C_m donnée par la relation vectorielle :

$$\vec{C}_m = \frac{\vec{C}_1 + \vec{C}_2}{2}$$

Conduisant à la définition de α_m :

$$\operatorname{tg}(\alpha_m) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1) + \operatorname{tg}(\alpha_2)}{2}$$

I. 4 Angle d'incidence optimal :

Suivant les auteurs (Carter, Keller, Lieblein, Mellor, ...), l'angle d'incidence optimal sera choisi selon critères suivants :

- * correspondant aux pertes minimales.
- * maximum de finesse (ε minimum)
- * correspondant à 80% de la déflexion maximale.
- * correspond à la répartition de pression extrados présentant les plus faibles variations (c'est le critère que nous retiendrons). Ce critère est particulièrement adapté pour les constructions de machines silencieuses et dans le cas particulier des pompes à des machines de forte capacité d'aspiration.

• $\frac{1}{\operatorname{tg}(\varepsilon)} = \frac{C_z}{C_x}$: la finesse du profil dont les valeurs varient de 40 à 60 dans les meilleures conditions d'utilisations.

Remarque :

Pour les profils en grille, la direction moyenne sert au repérage des efforts aérodynamiques F_z et F_x , contrairement à l'aubage isolé où ils sont repérés par rapport à la direction de la vitesse incidente.

I. 5 Fonctionnement nominal d'une grille :

Le choix de l'incidence de fonctionnement de la grille se situe dans la région des pertes minimales, mais les critères de ce choix varie d'un auteur à un autre (§ précédent), dans notre cas, on retiendra l'incidence correspondant à la répartition de pression sur l'extrados la plus continue possible. On peut déterminer ce point, d'après les abaques des essais N A C A, représentés ci-dessous (fig. III.3), ces abaques évaluent le point (incidence) de fonctionnement en fonction de la géométrie de la grille (cambrure $C_{z\infty}$, serrage σ).

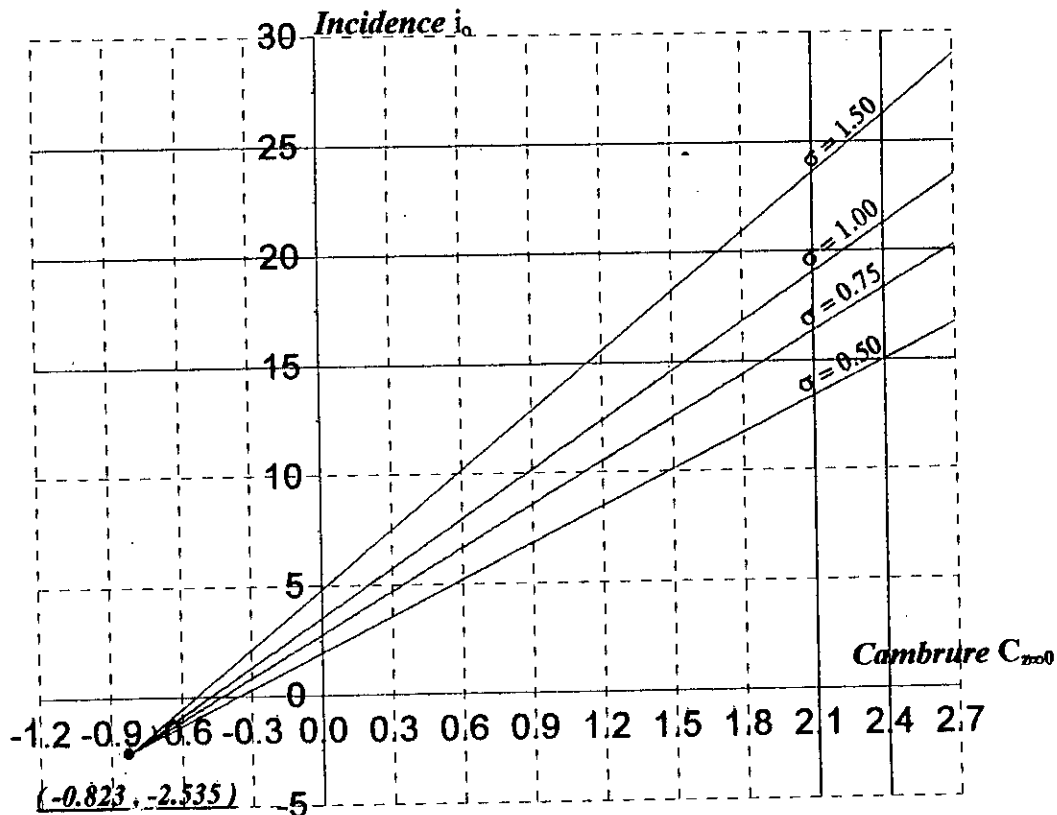


fig. III .3 : Evolution du point nominal avec la géométrie de la grille.

I. 6 Coefficient de traînée :

Par analogie avec l'hydraulique, on peut suggérer des pertes de grille de la forme :

$$C_d = C_{d0} + C_{dc}$$

- C_d est le drag coefficient qui est égal à la somme des pertes par chocs et par frottements .
- C_{d0} : pertes par frottement à l'incidence $i = i_0$.
 $C_{d0} = 0.003733 C_{z\infty} + 0.01093^{(*)}$
- C_{dc} : perte par choc (ou perte de désadaptation).
 $C_{dc} = K (i - i_0)^n$ avec :
 $K = -25 \cdot 10^{-6} + (1.91 - 0.4 C_{z\infty}^{1.4}) (\alpha_1 + 21) \cdot 10^{-6}$
 $n = 2 + \alpha_1 [0.46 + 0.0339 \cdot \exp (1.953 \cdot C_{z\infty})] 10^{-2}$

^(*)d'après les essais du N.A.C.A

On situe la zone d'opération de la grille entre deux incidences i_A et i_B , où les angles i_A et i_B représentent l'incidence pour laquelle la perte atteint le double de sa valeur minimale.

$$2 C_{d0} = C_{d0} + K (i - i_0)^n$$

d'où les valeurs de i_A et i_B :

$$i_A = i_0 - \left[\frac{C_{d0}}{K} \right]^{1/n}$$

$$i_B = i_0 + \left[\frac{C_{d0}}{K} \right]^{1/n}$$

le coefficient de traînée est défini par la relation suivante :

$$C_x = Cd \left[\frac{\cos(\alpha_m)}{\cos(\alpha_1)} \right]^2$$

I. 7 Coefficient de portance :

Le coefficient de portance se calcule en fonction des données géométriques et cinématique par l'application du théorème des quantités des mouvements sur l'espace fluide ABCD de la (fig. III.4).

$$\rho q_v (\bar{C}_2 - \bar{C}_1) = -\bar{F} + P_1 \bar{S}_1 - P_2 \bar{S}_2$$

Si on projette suivant les directions axiale et tangentielle, on trouve :

$$\rho q_v (C_{u_2} - C_{u_1}) = -T = \frac{-F}{\cos(\varepsilon)} + \cos(\alpha_m - \varepsilon)$$

$$\rho q_v (C_{a_2} - C_{a_1}) = 0 = -N + P_1 S_1 - P_2 S_2$$

D'après le triangle des vitesses, on aura :

$$\rho C a^2 t b (tg(\alpha_2) - tg(\alpha_1)) = \frac{-F}{\cos(\varepsilon)} + \cos(\alpha_m - \varepsilon)$$

donc :

$$C_z = \frac{2 \cos(\varepsilon)}{\sigma} \frac{\cos^2(\alpha_m)}{\cos(\alpha_m - \varepsilon)} (tg(\alpha_1) - tg(\alpha_2))$$

ε : angle de porte dans le cas d'un fluide parfait.

$$\varepsilon = 0$$

$$C_z = \frac{2 \cos(\alpha_m)}{\sigma} (tg(\alpha_1) - tg(\alpha_2))$$

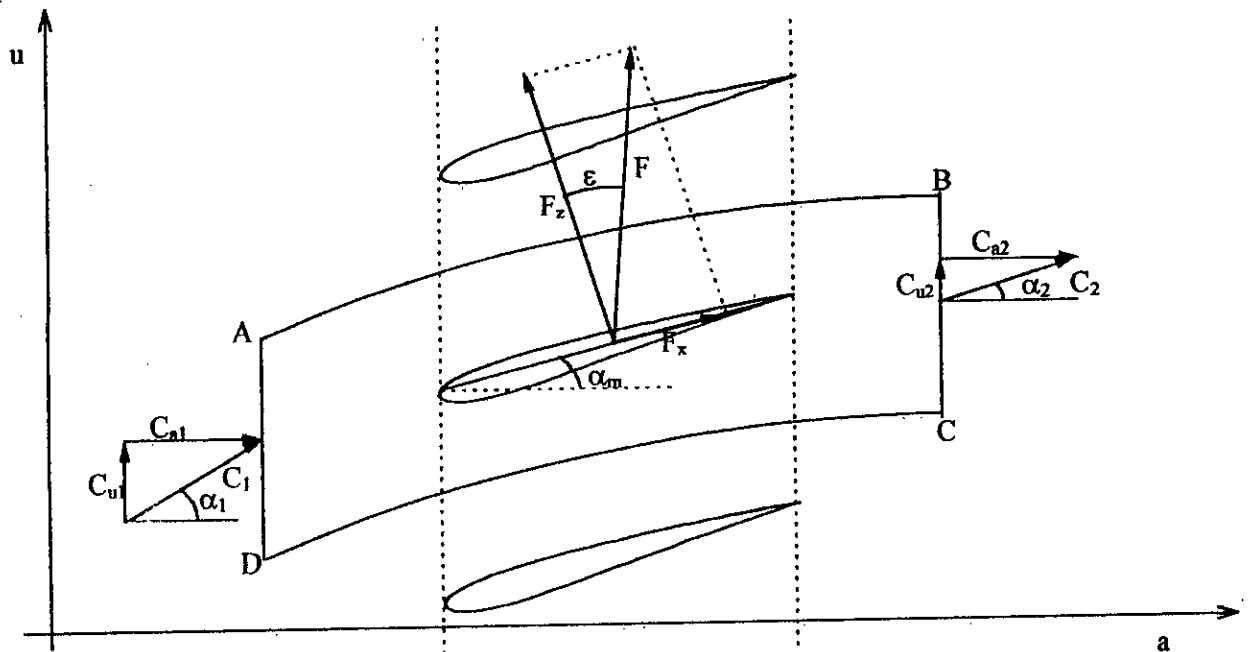


Fig. III.4 : Les efforts aérodynamiques

II. APPLICATION DE LA METHODE A UNE GRILLE RECTILIGNE :

Comme précédemment, on fera appel à la méthode des singularités et à la superposition des écoulements, décrites au chapitre précédent, que nous reprenons ici en détaille.

II. 1 Champ de vitesse dans la grille :

Pour la discrétisation et le choix de la distribution, on suit la même démarche qu'au chapitre deux. Sur chaque panneau de chaque aube de la grille, on dispose d'une distribution linéaire de vortex :

$$\gamma_j = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} s_j$$

Donc l'influence de la grille en chaque point de l'écoulement est trouvée par la superposition des influences créées par tous les panneaux de chaque profil, et comme on a un nombre infini de profil dans une grille, la sommation se fait de $-\infty$ à $+\infty$, alors le potentiel complexe induit en un point (x_0, y_0) de l'écoulement s'écrira :

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) ds_j \tag{III.2}$$

La vitesse conjuguée est calculée, en dérivant le potentiel complexe par rapport à l'affixe z :

$$C' = \frac{dF(z)}{dz} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \frac{ds_j}{z_0 - z_j}$$

Notons que les affixes z_0 et z_j s'écrivent sous la forme :

$$z_j = x_j + i(y_j - kt)$$

k varie de $-\infty$ à $+\infty$

$$z_0 = x_0 + i y_0$$

L'expression de la vitesse conjuguée devient :

$$C' = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1, \dots, n} \int \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) + ikt}$$

On écrit l'équation précédente sous forme d'une série, en faisant sortir le terme t de la sommation ($t = \text{cte}$), et en faisant entrer π , on trouve :

$$C' = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1, \dots, n} \int \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{\frac{\pi}{t} \left\{ (x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) \right\} + i\pi k}$$

On remarque bien que l'expression : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{t} \left\{ (x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) \right\} + i\pi k}$ est un développement limité de la fonction : $\coth \left(\frac{\pi}{t} \left\{ (x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) \right\} \right)$.

Ce résultat nous a permis d'éviter l'épineux problème de la sommation infinie qui n'était pas numériquement calculable.

Alors l'expression de la vitesse conjuguée induite par toutes les singularités distribuées sur toutes les aubes de la grille s'écrit :

$$C'_i = -\frac{i}{2t} \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} \int \gamma_j(s) \coth \left(\frac{\pi}{t} \left\{ (x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) \right\} \right) ds_j$$

La vitesse de l'écoulement dans le point de contrôle de coordonnées (x_i, y_i) est :

$$C'_i = -\frac{i}{2t} \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} \int \gamma_j(s) \coth \left(\frac{\pi}{t} \left\{ (x_i - x_j) + i(y_i - y_j) \right\} \right) ds_j - \underbrace{\frac{\gamma_m}{2} \text{Exp}(-i\delta_i)}_{\text{pour } i=j}$$

On propose le changement de variable suivant :

$$\left. \begin{aligned} X_{ij} &= \frac{\pi}{t} (x_i - x_j) \\ Y_{ij} &= \frac{\pi}{t} (y_i - y_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{ij} = X_{ij} + i Y_{ij}$$

Mais on a aussi un résultat très important, qui est le suivant :

$$i \text{Coth}(Z_{ij}) = \frac{\sin(2Y_{ij}) + i \text{sh}(2X_{ij})}{\text{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})}$$

Ce changement de variable sert à la séparation des deux parties imaginaire et réelle

$$C'_i = -\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} \int \frac{\sin(2Y_{ij}) + i \text{sh}(2X_{ij})}{\text{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \text{exp}(-i\delta_i)$$

Les composantes induites par la grille seront :

$$\bar{C}_i \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(C'_i) = -\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int \frac{\sin(2Y_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ -\operatorname{Im}(C'_i) = \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int \frac{\operatorname{sh}(2X_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{array} \right.$$

L'écoulement dans la grille peut être modélisé par la superposition de toutes les singularités et de l'écoulement uniforme de direction α_m et de module C_m .

$$\bar{C}_i \left\{ \begin{array}{l} u_i = C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int \frac{\sin(2Y_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v_i = C_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int \frac{\operatorname{sh}(2X_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{array} \right. \quad \text{[III.3]}$$

$\frac{\gamma_m}{2}$ représente l'influence d'un panneau sur lui même, issue de l'équation [II.2].

\bar{C}_i : le vecteur vitesse absolue d'une grille fixe, dans le cas d'une grille mobile, on calcule le vecteur \bar{W} de la vitesse relative.

• **Grille mobile :**

La grille se déplace à la vitesse d'entraînement U (parallèlement à (oy) et de sens inverse), ayant comme composantes :

$$\bar{U} \begin{bmatrix} 0 \\ -U \end{bmatrix}$$

D'après l'équation vectorielle principale du mouvement relatif :

$$\bar{C} = \bar{U} + \bar{W} \Rightarrow \bar{W} = \bar{C} - \bar{U}$$

d'où les composantes de la vitesse relative W :

$$\bar{W} \begin{bmatrix} u \\ v + U \end{bmatrix}$$

Alors l'expression finale du vecteur vitesse créé par la grille mobile au niveau des points de contrôles est :

$$\bar{W} \left\{ \begin{array}{l} u = C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int \frac{\sin(2Y_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v = U + C_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int \frac{\operatorname{sh}(2X_{ij})}{\operatorname{ch}(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{array} \right.$$

II. 2 Mise en équation :

Comme au chapitre précédent, la distribution de vorticités doit répondre au conditions aux limites, qui nous approchent le plus possible de la réalité physique de l'écoulement.

II. 2. 1 Condition de glissement :

Cette condition aux limites, est une condition cinématique correspondant au glissement des couches fluides à la surface de chaque aube de la grille, c'est à dire que la vitesse est tangente en tout point à cette surface :

$$tg(\delta_i) = \frac{v_i + \lambda \cdot U}{u_i} \quad \begin{matrix} \lambda = 1 \rightarrow \text{Grille mobile} \\ \lambda = 0 \rightarrow \text{Grille fixe} \end{matrix}$$

$$tg(\delta_i) = \frac{C_m \sin(\delta_m) + \lambda \cdot U + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{sh(2X_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i)}{C_m \cos(\delta_m) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i)}$$

$$C_m \sin(\alpha_m) \cos(\delta_i) + \lambda \cdot U \cos(\delta_i) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{sh(2X_{ij}) \cos(\delta_i)}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \cos(\delta_i)$$

$$= C_m \cos(\alpha_m) \sin(\delta_i) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \frac{\sin(2Y_{ij}) \sin(\delta_i)}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \sin(\delta_i)$$

$$C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) = \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \left(\frac{\sin(2Y_{ij}) \sin(\delta_i)}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} + \frac{sh(2X_{ij}) \cos(\delta_i)}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \right) \gamma_j(s) ds_j$$

II. 2. 2 Etablissement des fonctions d'influence :

L'établissement des fonctions d'influence se fait par l'introduction d'un certain nombre de changement de variable :

soient :

$$\left\{ \begin{matrix} f_x = \frac{\sin(2Y_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \\ f_y = \frac{sh(2X_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})} \end{matrix} \right.$$

d'où l'expression de la vitesse devient :

$$C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) = \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \int_{l_j} \gamma_j [f_x \sin(\delta_i) + f_y \cos(\delta_i)] ds_j$$

Pour simplifier d'avantage cette équation, on propose le changement de variable :

$$f = [f_x \sin(\delta_i) + f_y \cos(\delta_i)]$$

alors :

$$C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) = \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j f ds_j$$

En remplaçant par l'expression de γ_j , on aboutit à :

$$C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) = \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \left[\gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] f ds_j$$

Soient maintenant les fonctions d'influence { G , F }

$$G = \int_{l_j} f ds_j$$

$$F = \int_{l_j} f s_j ds_j$$

donc :

$$C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) = \frac{1}{2t} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G(i, j) \gamma_s(j-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F(i, j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right]$$

Si on examine l'équation précédente, il apparaît que l'intensité de la singularité au niveau $j = 1$ n'est pas définie. Pour surmonter ce problème, on doit incrémenter de $j = 2$ à $j = n+1$, et pour éviter une redistribution sur le panneau 1, on confondra le point $n+1$ avec le point 1 ce qui ajoute la condition suivante :

$$G(i, n+1) = G(i, 1)$$

$$F(i, n+1) = F(i, 1)$$

Nous avons obtenu alors un système d'équations linéaire à n équations et $n+1$ inconnues. Les lois de l'aérodynamique nous fournissent une condition supplémentaire, c'est la condition de KUTTA-JOUKOWSKI.

II. 2. 3 Condition de K U T T A-JOUKOWSKI :

La vitesse doit vérifier le critère de la charge nulle au bord de fuite, s'il s'agit d'un point anguleux, ce critère se traduit par l'égalité du module de la vitesse côté intrados et côté extrados au niveau du bord de fuite. Pour garantir cette égalité, on imposera la condition suivante :

$$\gamma_s(n+1) = -\gamma_s(1)$$

En fin, on aboutira à un système linéaire de n équations et n inconnues.

Le vecteur [B] : représente les caractéristiques de l'écoulement libre et sa direction par rapport à chaque panneau.

La matrice [A] est une combinaison linéaire des éléments des matrices d'influence {G, F}, donc elle représente les caractéristiques géométriques du profil .

$$\left[\begin{array}{l} B(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i) \\ A(i,1) = \frac{1}{2t} \left[G(i,2) - \frac{F(i,2)}{l_2} - \frac{F(i,1)}{l_1} \right] \\ A(i,j) = \frac{1}{2t} \left[G(i,j+1) - \frac{F(i,j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i,j)}{l_j} \right] \\ A(i,n) = \frac{1}{2t} \left[G(i,1) + \frac{F(i,n)}{l_n} - \frac{F(i,1)}{l_1} \right] \end{array} \right] \quad \text{[III.4]}$$

La résolution de ce système nous permet de calculer les vorticités (γ_j), $j=1,n$). De ce résultat, on peut calculer les caractéristiques de l'écoulement dans la grille et de ses performances.

III. CALCUL DES CARACTERISTIQUES DE L'ECOULEMENT EN GRILLE :

III. 1 Calcul de la vitesse tangentielle :

D'après le chapitre précédent, les vitesses tangentielles sont écrites comme suit :

$$C_i = -(u_i \cos(\delta_i) + v_i \sin(\delta_i))$$

remplaçons u_i et v_i dans l'équation [III.3], C_i devient :

$$C_i = - \left[C_m \cos(\alpha_m) \cos(\delta_i) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_x \cos(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos^2(\delta_i) \right. \\ \left. + C_m \sin(\alpha_m) \sin(\delta_i) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_y \sin(\delta_i) \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin^2(\delta_i) \right]$$

$$C_i = - \left[C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) + \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \left(-f_x \cos(\delta_i) + f_y \sin(\delta_i) \right) \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \right]$$

En introduisant les fonctions d'influences définies par :

$$G(i,j) = \int_{l_j} \left(f_x \cos(\delta_i) - f_y \sin(\delta_i) \right) ds_j$$

$$F(i,j) = \int_{l_j} \left(f_x \cos(\delta_i) + f_y \sin(\delta_i) \right) ds_j$$

$$C_i = -C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) + \frac{1}{2t} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G(i, j) \gamma_s(j-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F(i, j) \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l_j} \right] + \frac{\gamma_m}{2} \quad \text{[III.5]}$$

En suivant la même démarche qu'au précédent on obtient :

$$\begin{cases} G(i, j) = t \\ F(i, j) = \frac{t l_j}{2} \end{cases}$$

alors :

$$\begin{cases} A(i, 1) = \frac{1}{2t} \left[G(i, 2) - \frac{F(i, 2)}{l_2} - \frac{F(i, 1)}{l_1} \right] \\ A(i, j) = \frac{1}{2t} \left[G(i, j+1) - \frac{F(i, j+1)}{l_{j+1}} + \frac{F(i, j)}{l_j} \right] \\ A(i, n) = \frac{1}{2t} \left[G(i, 1) + \frac{F(i, n)}{l_n} - \frac{F(i, 1)}{l_1} \right] \end{cases}$$

Finalement l'expression de la vitesse tangentielle au point de contrôle :

$$C_i = -C_m \cos(\alpha_m - \delta_i) + \sum_{j=1}^n A(i, j) \gamma_s(j).$$

III. 2 L'écoulement à l'infini amont :

L'influence de la présence de la grille sur l'écoulement à l'infini amont peut être obtenue en faisant tendre x , dans l'équation de la vitesse conjuguée, vers $(-\infty)$:

$$C_i' = \lim_{x \rightarrow -\infty} (u - i v) = \frac{-i}{2t} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sum_{j=1}^n \int \coth \left\{ \frac{\pi}{t} [(x - x_j) + i(y - y_j)] \right\} \gamma_j(s) ds_j + C_m \text{Exp}(-i\alpha_m)$$

on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} i \coth \left\{ \frac{\pi}{t} [(x - x_j) + i(y - y_j)] \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left[\sin \left[\frac{2\pi}{t} (y - y_j) \right] + i \operatorname{sh} \left[\frac{2\pi}{t} (x - x_j) \right] \right]}{\left[\operatorname{ch} \left[\frac{2\pi}{t} (x - x_j) \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{t} (y - y_j) \right] \right]}$$

on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch} \left[\frac{2\pi}{t} (x - x_j) \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} \left[\frac{2\pi}{t} (x - x_j) \right] = -\infty$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin \left(\frac{2\pi}{t} (y - y_j) \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{2\pi}{t} (x - x_j) \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{t} (y - y_j) \right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{sh\left(\frac{2.\pi}{t}(x - x_j)\right)}{ch\left(\frac{2.\pi}{t}(x - x_j)\right) - \cos\left(\frac{2.\pi}{t}(y - y_j)\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{sh(x)}{ch(x)} = -1$$

donc :

$$C_1' = (u_1 - i v_1) = -\frac{i}{2.t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} -\gamma_j(s) ds_j + C_m \text{Exp}(-i\alpha_m)$$

$$C_1' = (u_1 - i v_1) = C_m \cos(\alpha_m) - i \left(C_m \sin(\alpha_m) - \frac{1}{2.t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) ds_j \right)$$

Soit Γ la circulation induite par la présence de chaque obstacle :

$$C_1' = (u_1 - i v_1) = C_m \cos(\alpha_m) - i \left(C_m \sin(\alpha_m) - \frac{\Gamma}{2.t} \right)$$

donc les composantes du vecteur vitesse à l'infini amont seront :

$$\begin{cases} u_1 = C_m \cos(\alpha_m) \\ v_1 = C_m \sin(\alpha_m) - \frac{\Gamma}{2.t} \end{cases} \quad \text{[III.6]}$$

III. 3 L'écoulement à l'infini aval:

On obtient cette influence de la même façon que précédemment quoique x , cette fois-ci, tend vers $(+\infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ch\left[\frac{2.\pi}{t}(x - x_j)\right] = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} sh\left[\frac{2.\pi}{t}(x - x_j)\right] = +\infty$$

alors qu'on a aussi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{sh\left[\frac{2.\pi}{t}(x - x_j)\right]}{ch\left[\frac{2.\pi}{t}(x - x_j)\right]} = 1$$

donc :

$$C_2' = (u_2 - i v_2) = C_m \cos(\alpha_m) - i \left(C_m \sin(\alpha_m) + \frac{\Gamma}{2.t} \right)$$

donc les composantes du vecteur vitesse à l'infini amont seront :

$$\begin{cases} u_2 = C_m \cos(\alpha_m) \\ v_2 = C_m \sin(\alpha_m) + \frac{\Gamma}{2.t} \end{cases} \quad \text{[III.7]}$$

Ces deux principaux résultats donnent accès aux triangles des vitesses dont les caractéristiques géométriques suivants :

$$tg(\alpha_1) = \frac{C_m \sin(\alpha_m) - \Gamma/2.t}{C_m \cos(\alpha_m)} \quad \text{[III.8]}$$

$$tg(\alpha_2) = \frac{C_m \sin(\alpha_m) + \Gamma/2.t}{C_m \cos(\alpha_m)} \quad \text{[III.9]}$$

En sommant les deux équations [III.8] et [III.9], on aura :

$$tg(\alpha_1) + tg(\alpha_2) = \frac{2.C_m \sin(\alpha_m)}{C_m \cos(\alpha_m)} = tg(\alpha_m)$$

d'où :

$$tg(\alpha_m) = \frac{tg(\alpha_1) + tg(\alpha_2)}{2}$$

Alors α_m est l'angle moyen des angles entrée-sortie de la grille.

On a aussi :

$$\frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}{2} = \begin{cases} \frac{u_1 + u_2}{2} = C_m \cos(\alpha_m) \\ \frac{v_1 + v_2}{2} = C_m \sin(\alpha_m) \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}{2} = \bar{C}_m$$

donc C_m est la moyenne vectorielle des vecteurs entrée- sortie C_1, C_2 .

III. 4 Calcul de la déflexion :

Après avoir déterminé les valeurs des angles d'entrée et de sortie de la grille, et en bénéficiant des résultats de l'influence à l'infini amont et aval, on peut calculer la déflexion $\Delta\alpha$ correspondant, d'après la définition [III.1], à la déviation de l'écoulement lors du passage dans la grille.

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

remarque : La déflexion est alors liée directement à la circulation de chaque profil et au pas de la grille.

III. 5 Calcul de la portance :

L'effort de portance est calculable d'après la relation de [JOUKOWSKI] :

$$F_z = \Gamma \rho C_m \quad \text{[III.10]}$$

Les triangles des vitesses nous fournissent la relation suivante :

$$tg(\alpha_1) - tg(\alpha_2) = \frac{\Gamma}{t C_m \cos(\alpha_m)}$$

Si on remplace Γ par son expression dans l'équation [III.10], on aura :

$$F_z = \rho C_m^2 [tg(\alpha_1) - tg(\alpha_2)] t \cos(\alpha_m) \quad \text{[III.11]}$$

C'est la relation générale, qui calcule la portance dans le cas d'un fluide parfait.

Pour généraliser le calcul, on introduit le nombre adimensionnel C_z (coefficient de portance), qui est le rapport de l'effort de portance ramené au produit de la pression dynamique par la surface portante ($L.b$) [l : la corde, b : envergure].

En calculant, pour une envergure unité, et en remplaçant F_z par son expression [III.8], on trouve :

$$C_z = 2 [tg(\alpha_1) - tg(\alpha_2)] t \cos(\alpha_m)$$

III. 6 Tracé des lignes de courant et équipotentiels :

Première méthode : Dans cette méthode, on a essayé d'utiliser les expressions explicites de ψ et ϕ pour tracer les lignes de courant et les lignes équipotentiels. Pour le faire, on a l'expression du potentiel complexe $F(z)$ donnée par :

$$F(z) = \frac{-i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) ds_j$$

suivant la définition du potentiel complexe :

$$F(z) = \phi + i \psi$$

donc il faut séparer les parties imaginaire et réelle de $F(z)$. pour cela, on est obligé de passer à un système en coordonnées polaires :

$$F(z) = \frac{-i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int \gamma_j(s) \ln(r \text{Exp}(i\theta)) ds_j$$

alors :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \left[\int -i \gamma_j(s) \ln(r) ds_j + \int \theta \gamma_j(s) ds_j \right]$$

d'où

$$\begin{cases} \psi = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int \gamma_j(s) \ln(r) ds_j \\ \phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \int \theta \gamma_j(s) ds_j \end{cases}$$

Comme c'est illustré dans les équation ci-dessus, il y a une sommation de $(-\infty)$ à $(+\infty)$, qui est numériquement incalculable. Ce qui nous a amenés à la recherche d'une autre méthode.

Le problème précédent est résolu en ce qui concerne le calcul des vitesses, alors on peut calculer ϕ et ψ à partir de la vitesse et en utilisant les définitions de ψ et de ϕ [I.16.a] et [I.16.b].

Deuxième méthode : D'après l'équation [I.5], la différentielle totale de ψ est :

$$d\psi = -v dx + u dy$$

l'intégration de cette expression nous donne :

$$\Delta\psi = -\int v dx + \int u dy$$

en remplaçant u , v par leurs expressions [], on obtient :

$$\Delta\psi = -\left[\int \left(C_m \sin(\alpha_m) + U + \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int f_{y_j} \gamma_j(s) ds_j \right) dx \right] + \left[\int \left(C_m \cos(\alpha_m) + \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int f_{x_j} \gamma_j(s) ds_j \right) dy \right]$$

ce qui nous donne :

$$\Delta\psi = -(C_m \sin(\alpha_m) + U) x + C_m \cos(\alpha_m) y - \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int \int f_{y_j} \gamma_j(s) ds_j dx + \frac{1}{2t} \sum_{j=1}^n \int \int f_{x_j} \gamma_j(s) ds_j dy$$

Donc le calcul de $\Delta\psi$ nécessite le calcul d'une intégrale double, alors qu'il n'existe pas une intégrale analytique à cette expression. Ce qui exige une solution numérique. Pour le faire, on a utilisé la méthode de Gauss, citée à la référence [13] page(291), mais cette méthode présente un inconvénient majeur, (temps de calcul très grand).

Donc il nous resté de travailler avec la deuxième approche développée dans le chapitre précédent, et qui s'impose de nouveau.

Remarque : Tous ce qui est dit concernant ψ concerne aussi ϕ , sauf que les équations qui changent.

IV. PRESENTATION DES RESULTATS :

IV. 1 Les vorticités :

- On remarque bien que la distribution des vorticités, sur l'intrados et l'extrados, ont des signes opposés, ce qui est très logique, car sur l'extrados il y a une accélération de l'écoulement alors que sur l'intrados, il y a un amortissement de celui-ci.
- L'évolution des vorticités est uniforme (sur les deux côté), ce qui nous confère une stabilité des coefficients de pression.
- La condition de K U T T A imposée au bord de fuite est vérifiée, du faite de l'opposition des signes de γ (intrados et extrados) à ce niveau.
- Pour la courbe obtenue avec 53 points, il y a des fluctuations intenses des γ , a fin de remédier à ce problème , on a tenté d'adapter un lissage, qui consiste à guider la solution dans la région perturbée, en adoptant que la circulation suit une lois parabolique depuis l'amont de la fluctuation jusqu'au bord de fuite où, elle s'annule pour vérifier la condition de K U T T A, mais ce lissage a une difficulté de contrôle, car le début de la fluctuation se déplace en changeant l'incidence. Face à cet inconvénient nous étions amenés à l'augmentation du nombre de points (nombre de panneaux)jusqu'à 78, ce qui a donné les résultats satisfaisants présenté sur la figure(III. 5).

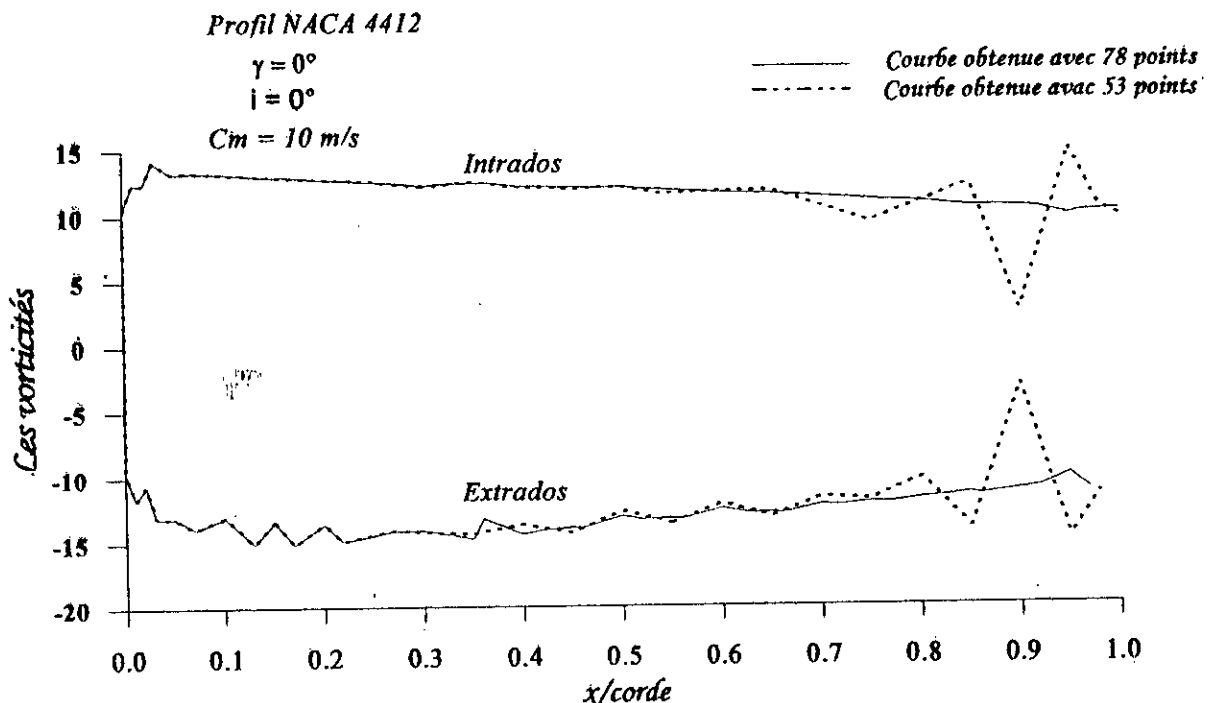


Fig. (III.5) Influence de la discrétisation

Remarque : La légère fluctuation des γ , observée sur l'extrados (région de grand courbure) et qui n'apparaît pas sur l'intrados, est due a la présence des piques de panneaux dans cette région.

IV. 2 Les coefficients de pression :

Pour $\alpha_m = 2^\circ$:

◆ On observe bien, que les deux courbes ont la même allure, mais la présence des autres aubes, dans le cas de la grille, diminue la section de passage entre les canaux, ce qui augmente la vitesse, d'où la diminution des coefficients de pression. L'effet de cette accélération se manifeste clairement sur l'intrados.

◆ On observe aussi que le point de stagnation ne s'est pas déplacé (bord d'attaque).

◆ la diminution de l'écart entre les coefficients de pression intrados et extrados, fait diminuer la portance par profil.

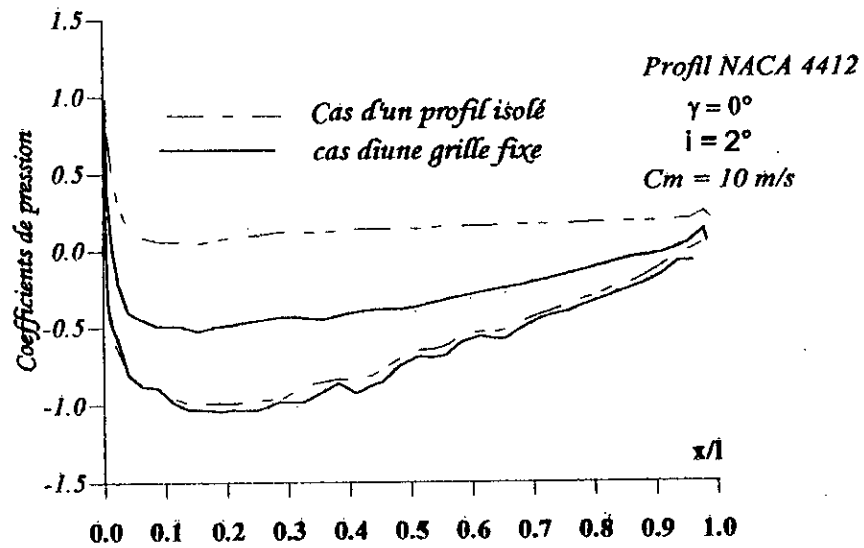


Fig. (III.6.a) : Comparaison des coefficients de pression entre le profil isolé et le profil en grille.

Pour $\alpha_m = 16^\circ$: Les coefficients de pression de l'intrados et de l'extrados se sont approchés (diminution de la portance), c'est à dire que cet angle n'est pas un bon angle de fonctionnement.

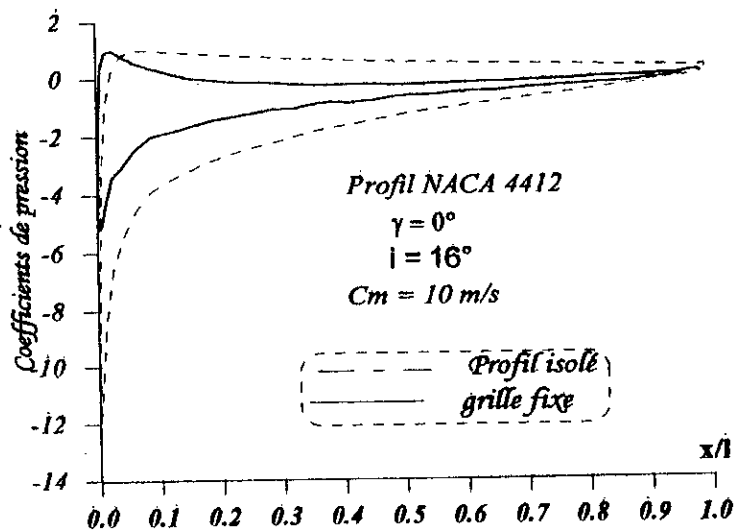


Fig. (III.6.b) : Comparaison des coefficients de pression entre le profil isolé et le profil en grille

Pour $\gamma \neq 0^\circ$: Ce cas (angle de calage différent de 0), est le cas qu'on désire étudier (utilisé en expériences).

- la courbe de NACA 4412 comparée à celle obtenue pour angle de calage nulle et $\alpha_m = 2^\circ$ ne présente pas de grande différence sauf qu'au début de l'intrados, il y a une dépression plus grande.
- le profil NACA 3916 plus avantageux que l'autre profil, de point de vue que les coefficients de pression sont plus uniformes et, la portance est plus importante.

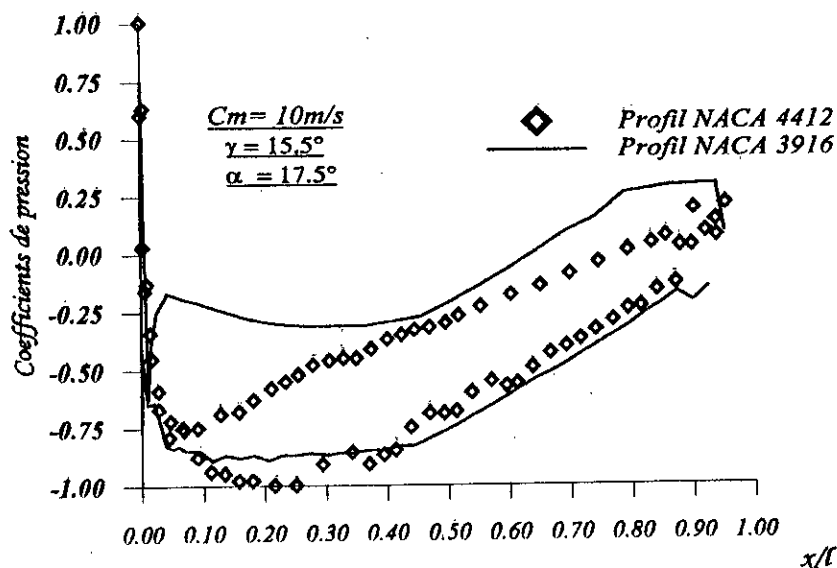


Fig. (III.7) Distribution des coefficients de pression pour différents type de profil en grille

Comportement de la grillé en aube isolée :

Dans la grille, la grandeur de l'influence de la présence des autres aubes sur une d'elles, dépend essentiellement du serrage (distance interaube). Cette influence sera négligée après une certaine limite, qui est présentée dans la figure ci après.

On a estimé la limite de ($t = 3,7 \times \text{Corde}$), une augmentation au dessus de cette limite, n'entraîne aucune variation remarquable.

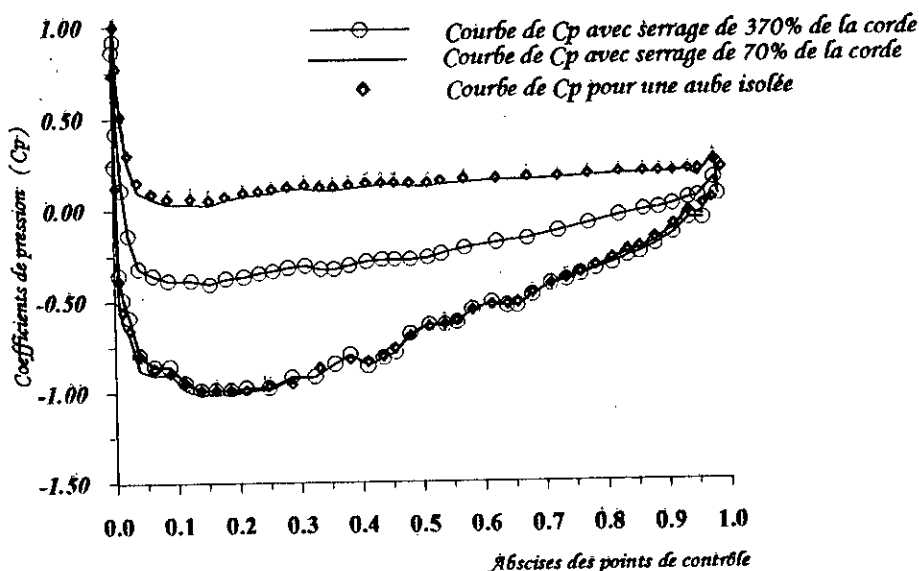


Fig. (III.8) Comportement en aube isolée

IV. 3 Déflexion :

La déflexion comme étant le paramètre qui caractérise la performance d'une grille, il est très intéressant de représenter leur variation, surtout en fonction de l'angle d'entrée (paramètre contrôlé facilement par les constructeurs).

- La déflexion augmente presque linéairement en fonction de α_1 , pour les deux profils.
- La variation de la déflexion pour NACA 3916 est plus rapide (grande pente) que pour NACA 4412 .
- Pour les mêmes valeurs de α_1 , la déflexion provoquée par NACA 3916 est plus grande que celle provoquée par NACA 4412.

En fin, de point de vue dynamique (portance), la série NACA-65 est la plus adaptée dans les turbomachines.

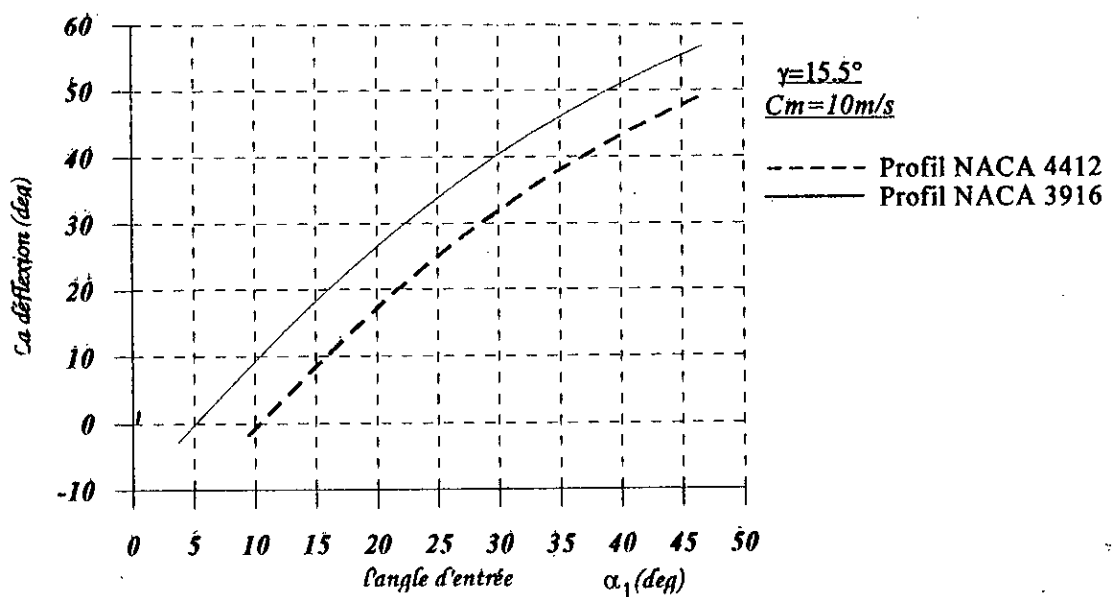
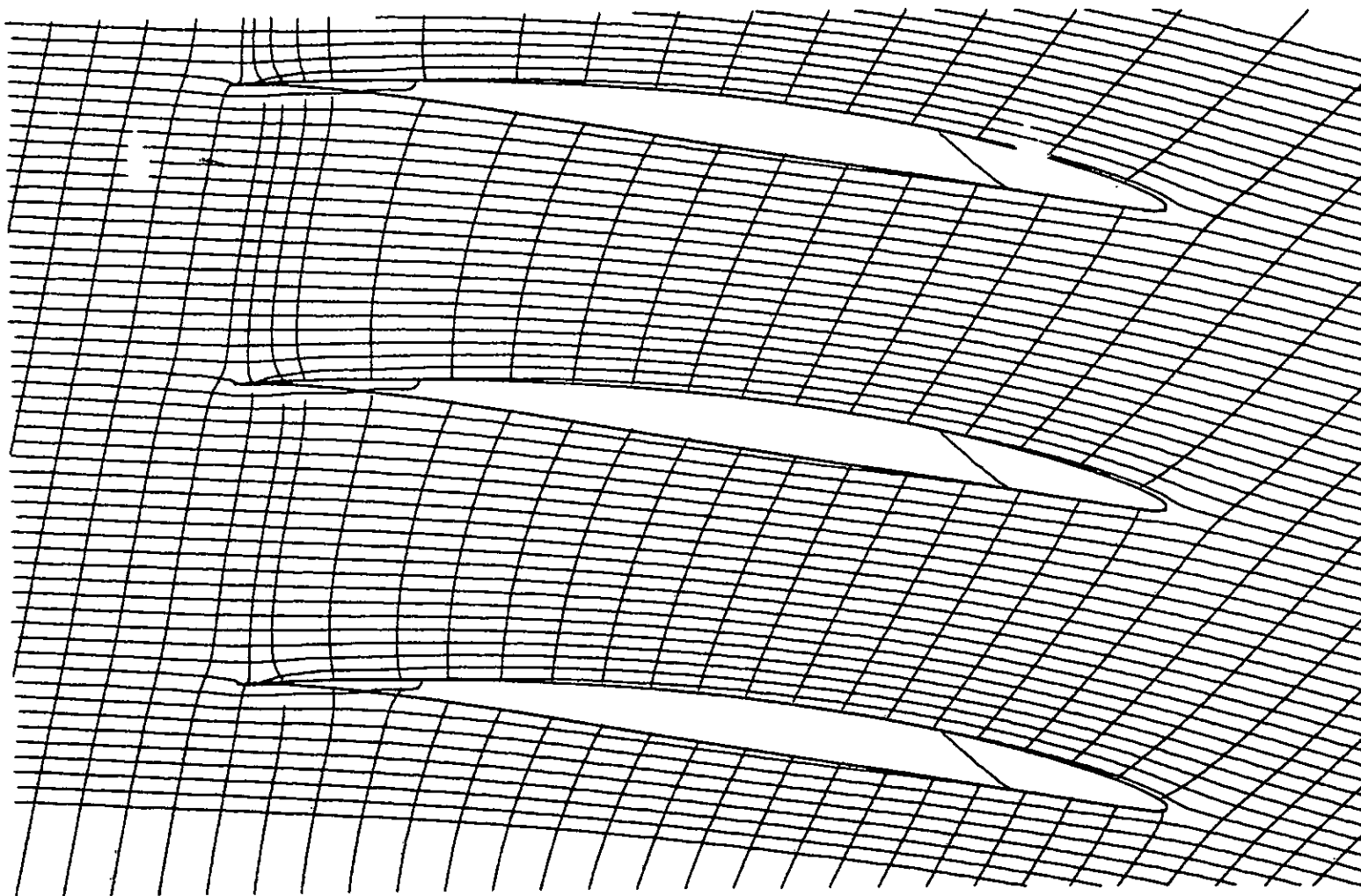


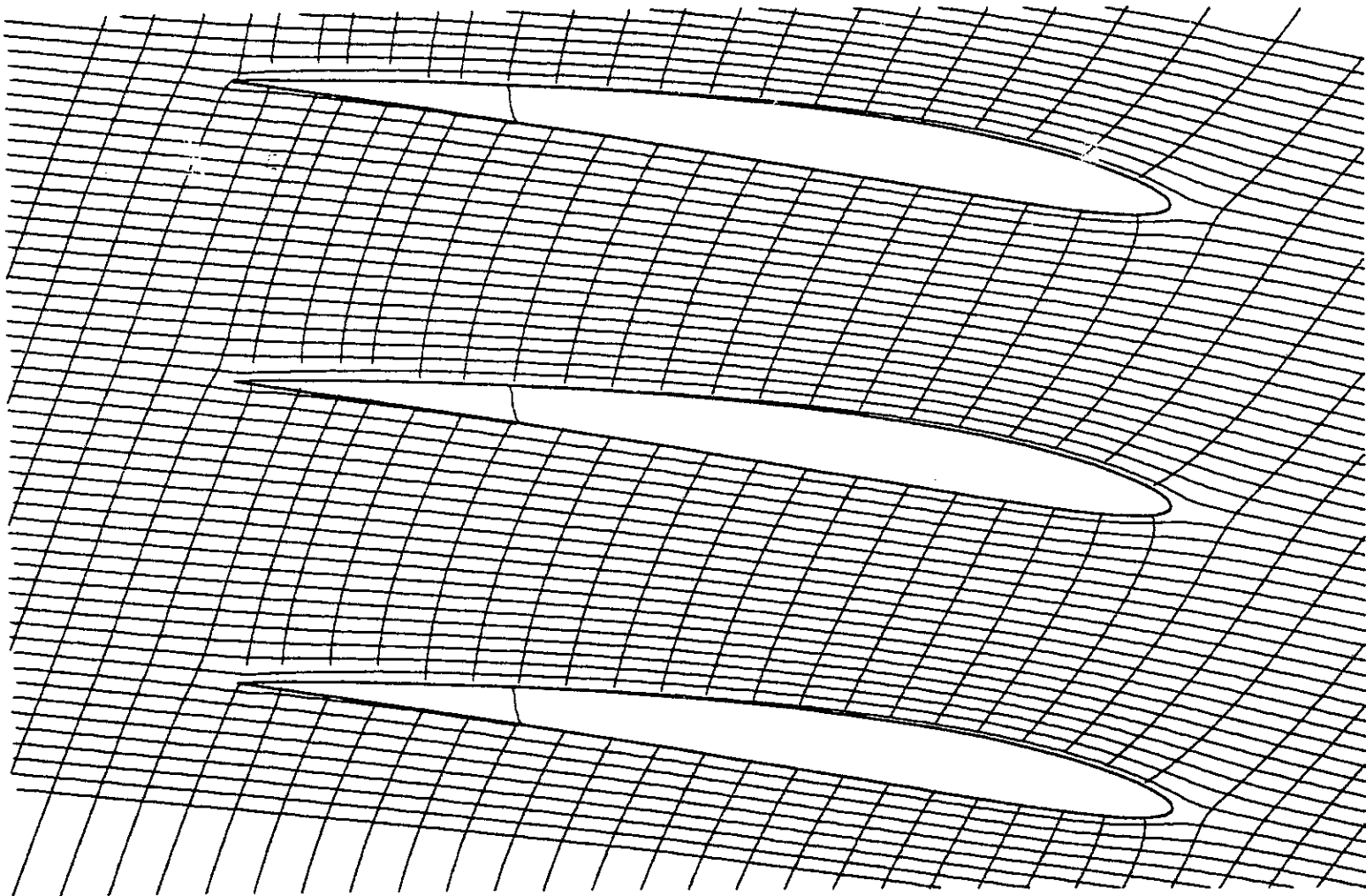
Fig. (III.9) Evolution de la déflexion en fonction de α_1 .

IV. 4 Les lignes de courant et les équipotentiels :

- L'hypothèse de périodicité est très respectée, ce qui est présenté sur les figures (III.10) et (III.11).
- Les lignes de courant traduisent parfaitement la réalité physique de l'écoulement, ainsi que l'orthogonalité, qui est vérifiée d'une manière assez précise (n'apparaît pas très bien sur les figures à cause de l'échelle).
- Le phénomène de pénétration, observé dans le chapitre précédent, existe toujours et se répète d'une manière périodique sur chaque profil de la grille.
 - Lignes de courant et des équipotentiels se comportent mal au niveau du bord de fuite.
 - Compte tenu de ce qui a été cité en début de ce chapitre, le profil NACA 3916 est le profil le plus répondu dans les turbomachines, alors que dans notre cas ce profil ne présente aucun avantage (surtout de point de vue cinématique) comparé au profil NACA 4412, car la construction et le choix du NACA 3916 sont basés sur des considérations expérimentales (optimisation de l'écoulement, décollement de la couche limite, le sillage, adaptation, ...etc), alors que dans notre stade (fluide parfait), ces problèmes ne sont pas pris en considération.



*Fig. (III.10) : Présentation du maillage de l'écoulement
dans la grille fixe pour : Profil : NACA 3916
Angle de calage 15.5°
Angle moyen d'entrée 17.5°
Vitesse moyenne 10 m/s*



*Fig. (III.11) : Présentation du maillage de l'écoulement
dans la grille fixe pour : Profil : NACA 4412
Angle de calage 15.5°
Angle moyen d'entrée 17.5°
Vitesse moyenne 10 m/s*

CONCLUSION

Dans cette section nous avons pu élargir le domaine d'application de la méthode des singularités (grille rectiligne), ce qui a donné des résultats très encourageants, mais nous tenons à souligner que la modélisation de l'écoulement au bord de fuite nécessite un traitement particulier et que l'augmentation du nombre de panneaux améliore les résultats à une limite près (la précision de la méthode d'interpolation).

Ce chapitre nous a, aussi, permis d'effectuer un choix de la série des profils présentant des performances lui qualifiant d'être utilisée dans les turbomachines.

Chapitre .IV :

*Application à un
étage*

CHAPITRE IV: ETUDE GENERALE D'UN ETAGE D'UNE POMPE FORME DE DEUX GRILLES PLANES

Au même titre que le chapitre précédent, ce chapitre mis en œuvre la méthode des singularités dans le cas d'un étage de turbomachine, en s'approchant de l'écoulement réel par l'introduction de la notion d'instationnarité.

I. CREATION D'UN ETAGE DE TURBOMACHINE :

La figure ci-dessous établit la morphologie d'un étage de compression ainsi que les triangles de vitesses, dans les aubages du rotor et du stator.

Le rotor est entraîné à la vitesse de translation U et les aubages du stator sont disposés de manière à redresser l'écoulement vers l'axe (α_3 faible ou idéalement nul).

En mouvement relatif (*rotor*), les vitesses sont repérées par les angles β ($\beta_1, \beta_2, \beta_m$) et en mouvement absolu (*stator*) par les angles α ($\alpha_2, \alpha_3, \alpha_m$).

La détermination locale de l'étage nécessite la résolution de deux problèmes inverses* sur la base de la déflexion rotorique $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$ et la déflexion statorique $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_3$.

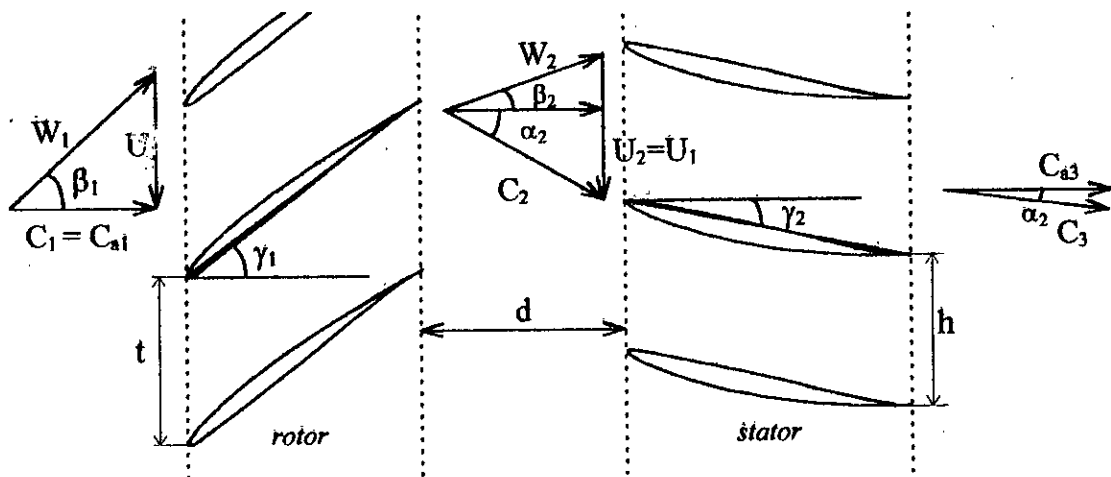


Fig. IV. 1 : Etage d'une turbomachine

La figure précédente, donne les principales relations des triangles des vitesses :

$$\operatorname{tg}(\beta_m) = \frac{\operatorname{tg}(\beta_1) + \operatorname{tg}(\beta_2)}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_m) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2) + \operatorname{tg}(\alpha_3)}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1) = \operatorname{tg}(\beta_2) + \operatorname{tg}(\alpha_2)$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1) = \operatorname{tg}(\alpha_m) + \operatorname{tg}(\beta_m)$$

* **Problème inverse** : pour une cinématique d'écoulement définie à l'avance (distribution de vitesse), quelle est la géométrie du ou des profils correspondants ? (notre cas, il s'agit de traiter le problème direct)

II. APPLICATION DE LA METHODE A UN ETAGE DE TURBOMACHINE :

II. 1 Discrétisation des obstacles :

On adopte la même série des profils pour le stator et le rotor, quoique la cambrure et l'angle de calage seront changés. On conserve la démarche de discrétisation précédente pour le rotor, mais pour le stator, on doit introduire la distance "d" stator-rotor et inverser le stator pour qu'il soit capable de redresser l'écoulement sortant perturbé du rotor.

$$x_s(i) = x_r(i) + l_r \cos(\delta_r) + d$$

$$y_s(i) = -y_r(i)$$

II. 2 Champ de vitesse dans l'étage :

La superposition des potentiels complexes induits par le rotor et ceux induits par le stator, nous donne :

$$F(z) = F_r(z) + F_s(z)$$

F_r : le potentiel complexe induit par le rotor ;

F_s : le potentiel complexe induit par le stator.

En explicitant les expressions des potentiels complexes obtenues au chapitre précédent, on trouve :

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1, n}^n \int \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) ds_j - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=n+1, 1,}^{2n} \int \gamma_j(s) \ln(z_0 - z_j) ds_j$$

La vitesse conjuguée est calculée, en dérivant le potentiel complexe par rapport à l'affixe z :

$$C' = \frac{dF}{dz} = \frac{dF_r}{dz} + \frac{dF_s}{dz}$$

$$C' = \frac{dF(z)}{dz} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1, n}^n \int \gamma_j(s) \frac{ds_j}{z_0 - z_j} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=n+1, 1,}^{2n} \int \gamma_j(s) \frac{ds_j}{z_0 - z_j}$$

Notons que les affixes z_0 et z_j s'écrivent sous la forme :

pour le rotor $j = 1, n$	$z_j = x_j + i(y_j + k t)$	k varie de $-\infty$ à $+\infty$
pour le stator $j = n + 1, 2n$	$z_j = x_j + i(y_j + k h)$	
	$z_0 = x_0 + i y_0$	

L'expression de la vitesse conjuguée devient :

$$C' = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1, n}^n \int \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) + ikt} - \frac{i}{2\pi} \sum_{j=n+1, 1,}^{2n} \int \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{(x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) + iht}$$

On écrit l'équation précédente sous forme d'une série, en faisant sortir les termes t et h des deux sommations, et en faisant rentrer π , on trouve :

$$C' = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{\pi \left\{ (x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) \right\} + i\pi k} -$$

$$\frac{i}{2h} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ds_j}{\frac{\pi}{h} \left\{ (x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) \right\} + i\pi k}$$

En bénéficiant du résultat simplifiant la sommation de $(-\infty)$ à $(+\infty)$ explicité dans le chapitre précédent, l'expression de la vitesse conjuguée induite par toutes les singularités distribuées sur toutes les aubes de l'étage s'écrit :

$$C'_i = -\frac{i}{2t} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{t} \left\{ (x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) \right\}\right) ds_j -$$

$$\frac{i}{2h} \sum_{j=n+1}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{h} \left\{ (x_0 - x_j) + i(y_0 - y_j) \right\}\right) ds_j$$

La vitesse de l'écoulement dans le point de contrôle de coordonnées (x_i, y_i) est :

$$C'_i = -\frac{i}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{t} \left\{ (x_i - x_j) + i(y_i - y_j) \right\}\right) ds_j -$$

$$\frac{i}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} \gamma_j(s) \coth\left(\frac{\pi}{h} \left\{ (x_i - x_j) + i(y_i - y_j) \right\}\right) ds_j \pm \frac{\gamma_m}{2} \text{Exp}(-i\delta_i)$$

On propose les changements de variables suivants :

$$\left. \begin{aligned} X_{sij} &= \frac{\pi}{h} (x_i - x_j) \\ Y_{sij} &= \frac{\pi}{h} (y_i - y_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{sij} = X_{sij} + i \cdot Y_{sij}$$

$$\left. \begin{aligned} X_{rij} &= \frac{\pi}{t} (x_i - x_j) \\ Y_{rij} &= \frac{\pi}{t} (y_i - y_j) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Z_{rij} = X_{rij} + i \cdot Y_{rij}$$

Mais on a aussi un résultat très important, qui est le suivant :

$$i \text{Coth}(Z_{ij}) = \frac{\sin(2Y_{ij}) + ish(2X_{ij})}{ch(2X_{ij}) - \cos(2Y_{ij})}$$

Ce changement de variable nous permet de séparer les deux parties imaginaire et réelle de la vitesse conjuguée

$$C'_i = -\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int \frac{\sin(2Y_{rij}) + i \operatorname{sh}(2X_{rij})}{\operatorname{ch}(2X_{rij}) - \cos(2Y_{rij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int \frac{\sin(2Y_{sij}) + i \operatorname{sh}(2X_{sij})}{\operatorname{ch}(2X_{sij}) - \cos(2Y_{sij})} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \exp(-i\delta_i)$$

En introduisant les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} \text{pour stator: } f_{sx} &= \frac{\sin(2Y_{sij})}{\operatorname{ch}(2X_{sij}) - \cos(2Y_{sij})}; & f_{sy} &= \frac{\operatorname{sh}(2X_{sij})}{\operatorname{ch}(2X_{sij}) - \cos(2Y_{sij})} \\ \text{pour rotor: } f_{rx} &= \frac{\sin(2Y_{rij})}{\operatorname{ch}(2X_{rij}) - \cos(2Y_{rij})}; & f_{ry} &= \frac{\operatorname{sh}(2X_{rij})}{\operatorname{ch}(2X_{rij}) - \cos(2Y_{rij})} \end{aligned}$$

Les composantes de la vitesse induite par l'étage seront :

$$\bar{C}_i \begin{cases} \operatorname{Re}(C'_i) = -\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int f_{rx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int f_{sx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ -\operatorname{Im}(C'_i) = \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int f_{ry} \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int f_{sy} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases}$$

Pour modéliser l'écoulement dans l'étage, on superpose l'ensemble des singularités induites par l'étage et un écoulement uniforme de module C_m et de direction α_m :

$$\bar{C}_i \begin{cases} u_i = C_m \cos(\alpha_m) - \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int f_{rx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int f_{sx} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \cos(\delta_i) \\ v_i = C_m \sin(\alpha_m) + \frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int f_{ry} \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int f_{sy} \gamma_j(s) ds_j - \frac{\gamma_m}{2} \sin(\delta_i) \end{cases}$$

C'est l'expression générale de la vitesse dans un point quelconque de l'étage.

II. 3 Mise en équation :

Les conditions aux limites restent les mêmes, que celles imposées au chapitre précédent (KUTTA et glissement), mais c'est la manière de poser chaque condition qui change, sur le rotor et sur stator.

II. 3. 1 Condition de glissement :

La distribution de vorticité sera définie comme précédemment par application de la

condition de glissement en $(2n)$ points de contrôle ; cependant, dans le cas du rotor, c'est la vitesse relative qui doit satisfaire les conditions de glissement :

Celle-ci s'écrira : ♦ pour rotor : $tg(\delta_i) = \frac{v_i + U}{u_i} \quad i = 1, n$

♦ pour stator : $tg(\delta_i) = \frac{v_i}{u_i} \quad i = n+1, 2n$

Après simplification :

$$\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} (f_{ry} \cos(\delta_i) + f_{rx} \sin(\delta_i)) \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} (f_{sy} \cos(\delta_i) + f_{sx} \sin(\delta_i)) \gamma_j(s) ds_j$$

$$= C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i)$$

avec : $\lambda = 1$ pour $j < n$
 $\lambda = 0$ pour $j > n$

Soit le changement de variable :

$$\begin{cases} f_r = [f_{rx} \sin(\delta_i) + f_{ry} \cos(\delta_i)] \\ f_s = [f_{sx} \sin(\delta_i) + f_{sy} \cos(\delta_i)] \end{cases}$$

alors :

$$\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} f_r \gamma_j(s) ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} f_s \gamma_j(s) ds_j = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i)$$

Comme γ_j est répartie linéairement, on aboutit à :

$$\frac{1}{2t} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{l_j} \left(\gamma(j-1) + \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} s_j \right) f_r ds_j + \frac{1}{2h} \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_{l_j} \left(\gamma(j-1) + \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} s_j \right) f_s ds_j$$

$$= C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i)$$

pour rotor : $G_r(i, j) = \int_{l_j} f_r ds_j \quad ; \quad F_r(i, j) = \int_{l_j} f_r s_j ds_j$

pour stator : $G_s(i, j) = \int_{l_j} f_s ds_j \quad ; \quad F_s(i, j) = \int_{l_j} f_s s_j ds_j$

donc :

$$\frac{1}{2t} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G_r(i, j) \gamma(j-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_r(i, j) \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} \right] + \frac{1}{2h} \left[\sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} G_s(i, j) \gamma(j-1) + \sum_{\substack{j=n+1 \\ j \neq i}}^{2n} F_s(i, j) \frac{\gamma(j) - \gamma(j-1)}{l_j} \right]$$

$$= C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - \lambda U \cos(\delta_i)$$

D'après l'équation finale, on remarque que la première intensité et l'intensité $(n+1)$ ne sont

pas définies, pour résoudre ce problème, on doit incrémenter sur le rotor depuis $2 \rightarrow n+1$, et on confond la distribution $(n+1)$ avec la distribution 1, et sur le stator, on incrémente de $n+2 \rightarrow 2n+1$ et on confond la distribution $2n+1$ avec la distribution $n+1$

$$\begin{aligned} G_r(i, n+1) &= G_r(i, 1) \\ F_r(i, n+1) &= F_r(i, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_s(i, 2n+1) &= G_s(i, n+1) \\ F_s(i, 2n+1) &= F_s(i, n+1) \end{aligned}$$

Ce qui engendre un système d'équations linéaire à $2n$ équations et $2n+2$ inconnues. On doit donc, imposer les deux conditions de KUTTA, l'une sur rotor et l'autre sur stator.

II. 3. 2 Condition de K U T T A:

Au bord de fuite de chaque aube, la vitesse doit vérifier cette condition, qui traduit l'identité en module de la vitesse sur l'extrados et l'intrados.

- sur rotor : identité de la vitesse relative.
- sur stator : identité de la vitesse absolue.

Pour satisfaire cette condition, on impose :

- sur rotor $\gamma(n+1) = -\gamma(1)$
- sur stator $\gamma(2n+1) = -\gamma(n+1)$

En fin, on aboutera à un système linéaire de $2n$ équations à $2n$ inconnues.

● Pour rotor : $i = 1, n$

$$B(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m) - U \cos(\delta_i)$$

☞ $j = 1, n$

$$\text{Influence du rotor sur lui-même : } \begin{cases} A(i, 1) = \frac{1}{2t} \left(G_r(i, 2) - \frac{F_r(i, 2)}{l_r(2)} - \frac{F_r(i, 1)}{l_r(1)} \right) \\ A(i, n) = \frac{1}{2t} \left(G_r(i, 1) - \frac{F_r(i, 1)}{l_r(1)} + \frac{F_r(i, n)}{l_r(n)} \right) \\ A(i, j) = \frac{1}{2t} \left(G_r(i, j+1) - \frac{F_r(i, j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{F_r(i, j)}{l_r(j)} \right) \end{cases}$$

☞ $j = n+1, 2n$

$$\text{Influence du stator sur le rotor : } \begin{cases} A(i, n+1) = \frac{1}{2h} \left(G_s(i, n+2) - \frac{F_s(i, n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{F_s(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right) \\ A(i, 2n) = \frac{1}{2h} \left(G_s(i, n+1) - \frac{F_s(i, n+1)}{l_s(n+1)} + \frac{F_s(i, 2n)}{l_s(2n)} \right) \\ A(i, j) = \frac{1}{2h} \left(G_s(i, j+1) - \frac{F_s(i, j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{F_s(i, j)}{l_s(j)} \right) \end{cases}$$

② Pour stator : $i = n+1, 2n$

$$B(i) = C_m \sin(\delta_i - \alpha_m)$$

⊕ $j = 1, n$

$$\text{Influence du rotor sur stator : } \begin{cases} A(i, 1) = \frac{1}{2t} \left(G_r(i, 2) - \frac{F_r(i, n+2)}{l_r(n+2)} - \frac{F_r(i, n+1)}{l_r(n+1)} \right) \\ A(i, n) = \frac{1}{2t} \left(G_r(i, 1) - \frac{F_r(i, 1)}{l_r(1)} + \frac{F_r(i, n)}{l_r(n)} \right) \\ A(i, j) = \frac{1}{2t} \left(G_r(i, j+1) - \frac{F_r(i, j+1)}{l_r(j+1)} + \frac{F_r(i, j)}{l_r(j)} \right) \end{cases}$$

⊕ $j = n+1, 2n$

$$\text{Influence du stator sur lui-même : } \begin{cases} A(i, n+1) = \frac{1}{2h} \left(G_s(i, n+2) - \frac{F_s(i, n+2)}{l_s(n+2)} - \frac{F_s(i, n+1)}{l_s(n+1)} \right) \\ A(i, 2n) = \frac{1}{2h} \left(G_s(i, n+1) - \frac{F_s(i, n+1)}{l_s(n+1)} + \frac{F_s(i, 2n)}{l_s(2n)} \right) \\ A(i, j) = \frac{1}{2h} \left(G_s(i, j+1) - \frac{F_s(i, j+1)}{l_s(j+1)} + \frac{F_s(i, j)}{l_s(j)} \right) \end{cases}$$

Soit finalement une matrice d'influence globale :

$$A = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{sr} \\ A_{rs} & A_{ss} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_r \\ B_s \end{bmatrix}$$

Avec :

A_{rr} : représente l'influence du rotor sur lui-même.

A_{sr} : représente l'influence du stator sur le rotor.

A_{rs} : représente l'influence du rotor sur le stator.

A_{ss} : représente l'influence du stator sur lui-même.

Le vecteur $[B]$: représente les caractéristiques de l'écoulement libre et sa direction par rapport à chaque panneau.

La résolution de ce système, nous permet de calculer les vorticités ($\gamma_s(j)$, $j = 1, 2n$). Qui nous donnent l'accès au calcul des paramètres de l'écoulement dans l'étage.

III. CALCUL DES CARACTÉRISTIQUES DE L'ÉCOULEMENT EN ÉTAGE :

III. 1 Calcul des coefficients de pression :

III. 1.1 Sur stator :

L'expression générale de la pression d'un fluide parfait et incompressible s'écrit, dans un repère fixe [Annexé. C] :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = \text{cte}(t).$$

Cte(t) : constante caractérisant l'écoulement à l'instant (t), généralement prise égale à la pression totale du fluide à l'instant (t).

D'où l'expression de la pression devient :

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}(C_0^2 - C^2) - \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\text{D'où } \frac{p - p_0}{\frac{\rho C_0^2}{2}} = 1 - \left(\frac{C}{C_0}\right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

donc l'expression générale des coefficients de pression est :

$$C_p = 1 - \left(\frac{C}{C_0}\right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

III. 1.2 Sur rotor :

On aura d'après [Annexé. C] :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = \text{Cte}(t).$$

$$\text{avec : } \text{Cte}(t) = \frac{p_0}{\rho} + \frac{C_0^2}{2}$$

donc l'expression générale des coefficients de pression sur rotor est :

$$C_p = 1 - \left(\frac{W}{C_0}\right)^2 + \left(\frac{U}{C_0}\right)^2 - \frac{2}{\rho C_0^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

- En régime stationnaire :

C'est une hypothèse qui simplifie le calcul en mettant $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$.

- En régime instationnaire :

la connaissance de l'évolution des coefficients de pression, nécessite l'évaluation du terme $\frac{\partial\phi}{\partial t}$, pour le faire, on discrétise le temps de la manière suivante :

En partant de la définition du potentiel des vitesses en un point quelconque j , on a :

$$\Delta\phi)_j = C_j l_j$$

où C_j : est la vitesse au point j ;
 l_j : la longueur du panneau.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t})_j = \frac{C_j l_j}{\Delta t}$$

Δt : est l'intervalle du temps entre deux positions successives du rotor par rapport au stator.
 Si n est le nombre de positions prises par le rotor, t le pas des profils du rotor, et U sa vitesse de rotation, on a :

$$\frac{t}{n} = U \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{t}{nU}$$

En fin :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t})_j = \frac{nU}{t} C_j l_j$$

IV. PRESENTATION DES RESULTATS :

IV. 1 Comportement en profils isolé :

Comme, on ne possède pas de résultats expérimentaux pour comparer les résultats obtenus par la méthode des singularités et dans le but de la validation du modèle. On a considéré les résultats obtenus dans le cas du profil isolé comme référence, et pour cela on donne des grandes valeurs aux distances interaubes (t et h), et la distance rotor-stator.

D'après la figure (Fig. IV. 2) obtenue pour un rotor immobile et des angles de calage nuls, on a :

le comportement des coefficients de pression sur le rotor et le stator sont identiques et ont la même allure que celle du profil isolé, car l'effet du stator le rotor est négligé et vis ver ça, ce qui confirme la validité du modèle adopté.

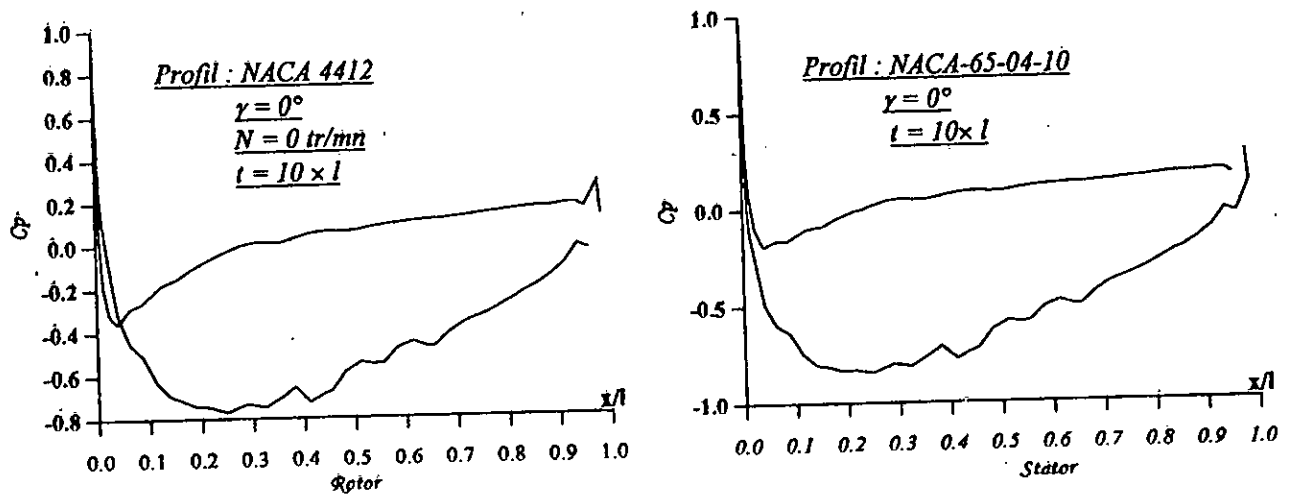


Fig. IV. 2: Comportement en profils isolé

IV. 2 Evolution des coefficients de pression dans un étage de turbomachine :

IV. 2.1 En régime stationnaire :

il apparaît clairement que les coefficients de pression ne s'annulent pas aux bords de fuite des aubes du rotor, contrairement aux stators, ce qui ne contredit pas la condition de KUTTA, car les coefficients de pression sur le rotor sont calculés en mouvement relative (repère mobile).

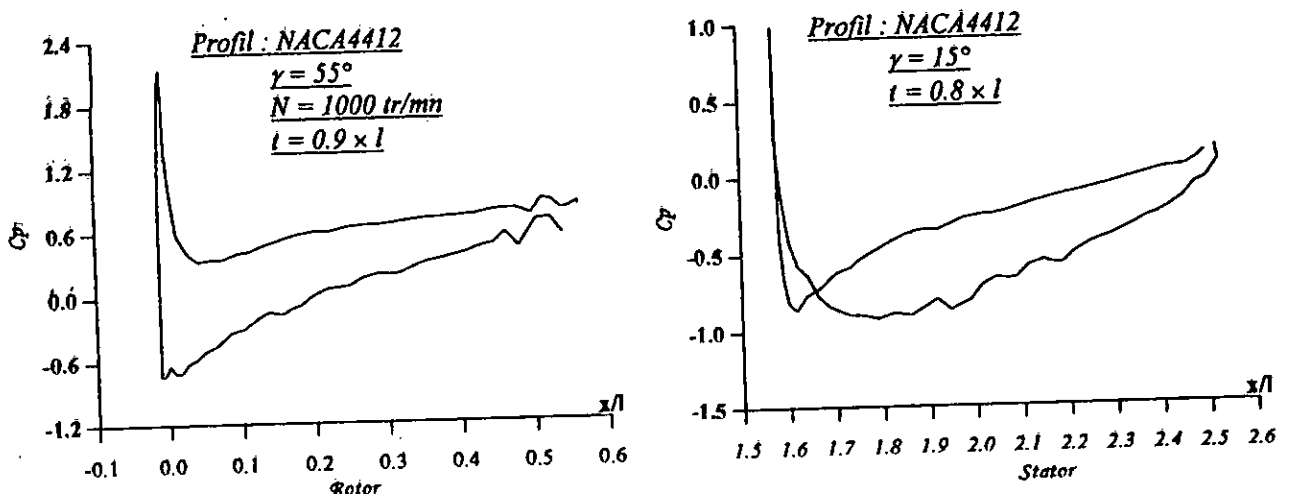


Fig. IV. 3: Evolution des coefficients de pression

Pour donner un aspect pratique à notre travail, on a extrait les paramètres d'une pompe de la référence [12], ce qui a donné les résultats présentés à (Fig. IV. 4) qui sont très significatifs.

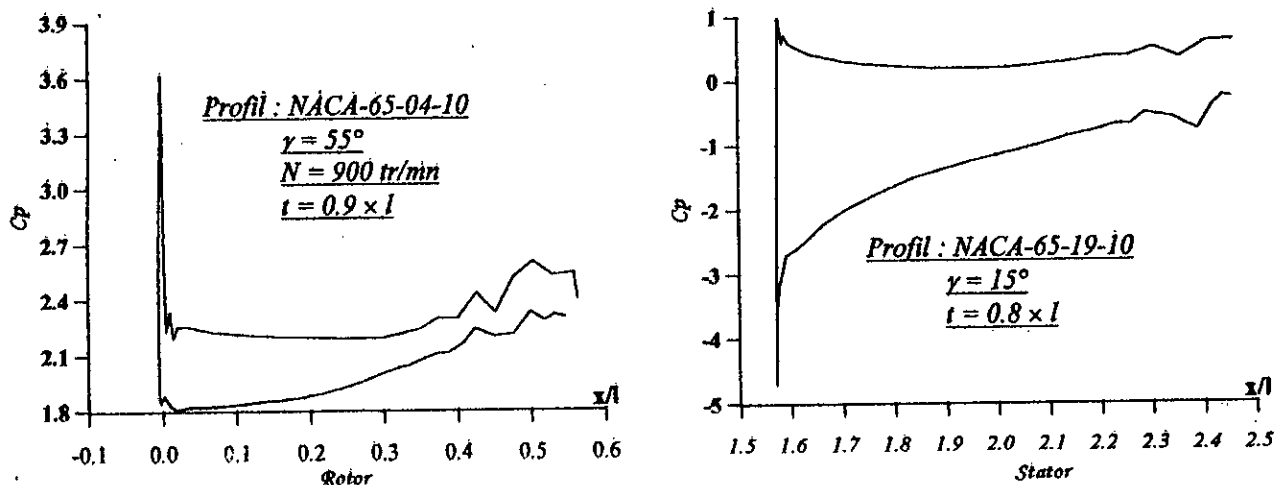


Fig. IV. 4: Evolution des coefficients de pression sur les aubages d'une machine existante

IV. 2.2 En régime instationnaire :

Comme cette étude est très importante, on a tenté de l'entamer, mais dans notre cas (nombre de points sur le profil est limité) ne permet pas d'obtenir de bons résultats(Fig. IV.5).

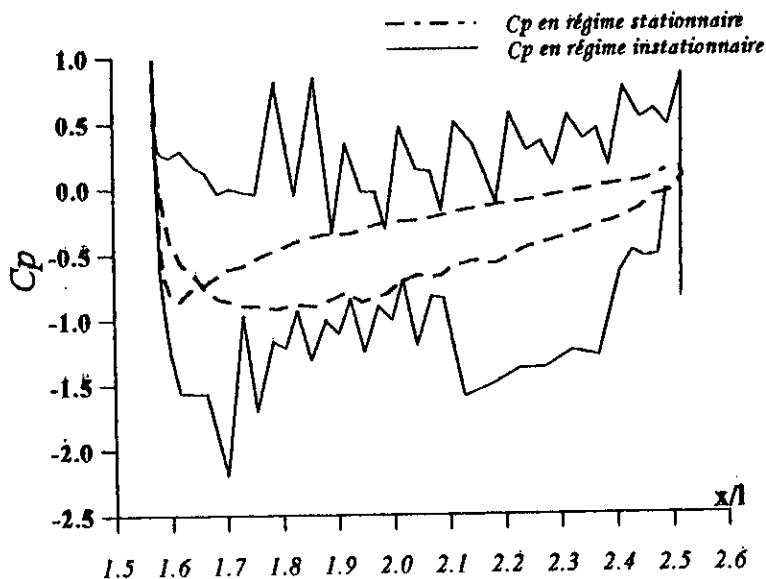


Fig. IV. 5: Evolution des coefficients de pression en régime instationnaire

Il apparaît dans la zone du bord d'attaque, où il y a un nombre relativement important de panneaux (l_j petit), une allure plus au moins stable, en dehors de cette zone (l_j important), il apparaît une intense fluctuation autour d'une courbe moyenne presque parallèle à la courbe obtenue en régime stationnaire, alors la perturbation est due essentiellement à la grandeur de la longueur l_j qui doit être très petite.

CONCLUSION

Dans ce chapitre on a mis en évidence la façon qui rend la méthode des singularités applicable à un cas plus large. Tenant de l'hypothèse simplificatrice (stationnarité de l'écoulement) on a pu obtenu des résultats satisfaisants.

Pour mieux élargir le domaine d'application (introduction de l'instationnarité de l'écoulement), on a aboutit à des résultats, qui sont améliorables, si on tient compte des indications citées ultérieurement.

Conclusion

CONCLUSION GENERALE

Dans cette présente étude nous avons exposé une des manières dont la méthode des singularités peut être formulée en vu de son utilisation dans les calculs des écoulements stationnaires et instationnaires autour d'un profil isolé, une grille rectiligne ou mobile et dans un étage de pompe axiale.

L'application de la méthode nous a démontré une grande souplesse, avec une formulation relativement simple et une approche très poussée vers la solution du problème direct.

La méthode des singularités donne des meilleurs résultats dans les zones d'écoulement régulier, et présente une instabilité remarquable dans les zones critiques où les phénomènes réels sont prépondérants (bord de fuite, et zone critique de l'extrados).

Nous proposons comme travaux ultérieurs, d'approfondir cette l'étude, en régime instationnaire (en utilisant des données plus raffinées), et de faire une approche de l'écoulement réel en associant à ce modèle de calcul, une étude adaptée de la couche limite.

D'après le tableau présenté au chapitre I, l'expression de la vitesse conjuguée présente un problème d'indétermination lors du calcul de cette grandeur au point (x_0, y_0) , pour résoudre ce problème, on fait un développement au voisinage de ce vortex. On considère un volume de contrôle très petit tel qu'on peut considérer les deux vitesses, tangente et égale à C , de ce fait l'égalité du flux nous impose que :

$$\gamma \Delta x = 2 C \Delta x \quad \text{[A.I]}$$

Alors

$$C = \frac{\gamma}{2} \quad \text{[A.II]}$$

Si on considère un panneau j , γ sera remplacée par $\gamma_m = \frac{\gamma_{j+1} + \gamma_j}{2}$; donc la vitesse induite par l'influence de ce panneau sur lui même s'écrit comme suit :

$$C' = -\frac{\gamma_m}{2} \text{Exp}(-i \delta_i) \quad \text{[A.III]}$$

δ_i : inclinaison du panneau i .

Le signe moins provient du fait que les calculs se font dans un repère intrinsèque (repère orthonormé directe avec l'axe normal sortant du profil).

D'après la définition de la fonction de courant ψ :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

et comme $d\psi$ est une différentielle totale exacte, et ψ est une fonction dépendant des deux variables x et y

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad [\text{B.I}]$$

Sur une ligne de courant ψ constante, alors $d\psi = 0$ et l'équation [B.I] devient :

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad [\text{B.II}]$$

En remplaçant $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ par leurs valeurs, on trouve :

$$-v dx + u dy = 0$$

Ce qui signifie que :

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \quad [\text{B.III}]$$

De cette équation, on peut tracer les lignes de courant en remplaçant les symboles des dérivées par "d" par des écarts relativement petits " Δ " :

$$\frac{v}{u} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad [\text{B.IV}]$$

L'équation [B.IV] représente, pour des variations assez petites, le coefficient directeur de la tangente à la ligne de courant au point de coordonnées (x, y) .

Alors, si on a la valeur de la vitesse en un point de départ et ses coordonnées, on peut calculer les coordonnées de tous les points appartenant à une même ligne de courant.

Soit :

$$r = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2}$$

et

$$\begin{cases} \Delta x_{\psi} = r \cos \alpha \\ \Delta y_{\psi} = r \sin \alpha \end{cases} \quad [\text{B.V}]$$

On ce qui concerne les équipotentiels, on vérifie l'orthogonalité de ϕ avec ψ et comme la vitesse est tangente à cette dernière dans la perpendicularité de ϕ avec le vecteur vitesse donc ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \Delta x_{\phi} = -r \sin \alpha \\ \Delta y_{\phi} = r \cos \alpha \end{cases} \quad [\text{B.VI}]$$

La loi fondamentale de la dynamique peut se résumer dans l'équation vectorielle suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} (C^2) + \text{rot} (\vec{C}) \wedge \vec{C} \right) = - \text{grad} p + \rho \vec{F} + \nu \Delta \vec{C} + (\nu + \eta) \text{grad} (\text{div} \vec{C}) \quad [\text{C.I}]$$

où :

- \vec{C} : la vitesse absolue de la particule fluide.
- \vec{F} : le champ des forces extérieures.
- p, ρ, ν, η : respectivement la pression, la masse volumique, la viscosité dynamique et le deuxième coefficient de viscosité.

Le vecteur $\Delta \vec{C}$ ayant pour expression :

$$\Delta \vec{C} = \text{grad} (\text{div} \vec{C}) - \text{rot} (\text{rot} \vec{C}) \quad [\text{C.II}]$$

Les hypothèses de fluide parfait et incompressible se traduisent par les deux relations :

$$\nu = 0$$

$$\text{div} \vec{C} = 0$$

et conduisant à l'équation de Helmholtz :

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} + \text{rot} \vec{C} \wedge \vec{C} = - \text{grad} \left(H + \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} \right) \quad [\text{C.III}]$$

où - H est le potentiel dont dérivent les forces extérieures \vec{F}
dans le cas qui nous intéresse l'écoulement est irrotationnel soit :

$$\text{rot} \vec{C} = \vec{0} \Rightarrow \vec{C} = \text{grad} \phi$$

nous obtenons alors l'équation de Bernoulli :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{C^2}{2} = \text{cte}(t) \quad [\text{C.IV}]$$

$\text{cte}(t)$ est une constante dépendant du temps, caractérisant l'écoulement à l'instant t_0 .

L'application de cette formule reste limitée au cas de repère absolu (fixé). Mais son application pour un point entraîne dans un repère mobile, s'avère délicate, nous allons donc la transformer pour faciliter son utilisation en repère mobile.

Soit (F) repère fixe, (M) repère mobile : alors

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_F = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_M - \vec{U} \cdot \text{grad} \phi \quad [\text{C.V}]$$

comme de plus on a :

$$C^2 = W^2 - U^2 + 2 \cdot \vec{U} \cdot \text{grad} \phi \quad [\text{C.VII}]$$

On obtient l'expression finale :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_M + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + H = \text{cte}(t) \quad [\text{C.VIII}]$$