

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat en Electronique

Thème :

**COMPRESSION DU SIGNAL
ELECTROCARDIOGRAPHIQUE (ECG) PAR
MODELISATIONS POLYNOMIALES DES SIGNAUX**

Encadré par :

Mr ZERGUI Rachid

Réalisé par :

MAOUCHE Youcef

Promotion : Juin 2013

Remerciements

Nous tenons, avant tout, à remercier notre DIEU, tout clément, tout puissant, de nous avoir donné la force de réaliser notre travail.

Nos remerciements vont exceptionnellement à Monsieur R.ZERGUI pour son aide, son suivi, ses conseils et directives et pour son dévouement et ainsi pour la confiance qu'il nous a toujours témoignée.

Nous tenons à remercier Monsieur A.BELOUHRANI, d'avoir accepté de présider le jury.

Nos remerciements vont aussi à Monsieur M.ADNANE, d'avoir bien voulu accepter d'examiner notre travail.

Nous remercions tous les enseignants de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, spécialement ceux des départements des Sciences Fondamentales et d'Electronique, pour leur apport en savoir.

Nos remerciements, vont au personnel de l'Ecole et à toute personne dévouée au service de l'Ecole Nationale Polytechnique.

Enfin, nos remerciements vont à toute personne ayant contribué, de près ou de loin, à réaliser ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire, aux personnes qui me sont les plus chères :

****A mes parents qui m'ont énormément soutenu dans les moments les plus difficiles, partagé mes joies et mes peines, qui se sont toujours sacrifiés à mes dépends.***

****A mes frères: Khaled ,Saif eldinne , Abd elslam .***

****Je dédie, aussi, ce travail à mes grands parents, et à toute ma famille pour leur soutien.***

****Lamine,Tarik, Nour eldinne,Amine ,Ahmed, Moussab, Chems eldinne ,Zinne elabidinne ,Abd elnour,Hichem, Redwan, Karim.***

****Je dédie ce travail à tous mes amis pour leur soutien tout au long de mon parcours.***

****Enfin je dédie ce travail à ma chère et très spéciale promotion.***

Youcef

ملخص :

يتمثل عملنا هذا في المقارنة بين ثلاث طرق لتقليص إشارات تخطيط القلب بالتحويل في الفضاء المعرف بكثيرات الحدود استعملنا كثير حدود شيببشاف صنف 1 وصنف 2 وكذا كثير حدود ليجاندر. النتائج المحصل عليها عبارة عن معاملات تمثل إشارة في فضاء الإسقاط. من أجل استرجاع الإشارة يكفي اختيار المعاملات الكبيرة هذا يعني المعاملات ذات الطاقة الكبيرة أن طريقة السبلان التكعيبية تعطي نتائج حسنة لكن طريقة التحويل الجيبية تبقى أفضل في حالة الإشارة المشوشة. انتشار المعاملات يأخذ منحي تنازلي بدلالة المؤشرات. إذن يكفي أخذ K معامل. معامل التقليص يصبح K/N إذا كان عدد مؤشرات الإشارة الأصلي هو N . المقارنة مبنية على معايير موضوعية وهي نسبة التقليص ونسبة الخطأ و الوقت اللازم لجراء عملية التقليص. كلمات مفتاحية: إشارة نبض القلب - التقليص - حدود شيببشاف صنف 1 وصنف 2 - كثير حدود ليجاندر

Résumé :

Notre travail est une étude comparative entre trois techniques irréversibles de compression par transformée dans des espaces définis par des bases polynomiales, nous avons utilisé les polynômes de Tchebychev de 1^{ère} espèce Tchebychev 2^{ème} espèce et Legendre, les résultats sont des coefficients qui représentent le signal dans l'espace de la projection, pour la reconstruction il suffit de choisir les coefficients de grande valeur, cela veut dire avoir une grande quantité d'énergie du signal, la distribution des coefficients est décroissante en fonction de leurs indices, donc il suffit de prendre les K premiers coefficients, le taux de compression $CR=N/K$ si le signal original est de N échantillons, les critères de la comparaison entre les méthodes sont le pourcentage de la puissance d'erreur PRD et le temps d'exécution des programmes de la compression.

Mots clés : compression du signal, électrocardiogramme (ECG), polynômes de Tchebychev de 1^{ère} espèce, Tchebychev 2^{ème} espèce, polynôme Legendre.

Abstract:

Our work is a comparative study between three irreversible techniques of compression with transformation in spaces defines by polynomial bases, we used the polynomials of Tchebychev 1st Tchebychev 2nd and polynomial of Legendre, the results are coefficients which represent the signal in the space of projection, for the rebuilding, it is enough to choose the coefficients of great value, that wants to say to have a great quantity of energy of the signal, the distribution of the coefficients is decreasing according to their indices, therefore it is enough to take K first coefficients, then the compression ratio $CR=N/K$. If the original signal is of N samples, the comparison criterions between methods are compression ratio "CR" and Percentage of Root mean squared Difference "PRD" and the execution time of the programs of compression.

Keys words: signal compression, electrocardiogram (ECG), polynomials of Tchebychev 1st Tchebychev 2nd, polynomial of Legendre.

SOMMAIRE

Liste des figures.....	1
List des tableaux.....	2
Liste des abréviations.....	3
Introduction générale.....	4

Chapitre I : Généralité sur l'ECG

I. Introduction.....	7
I.2. Anatomie du cœur humain.....	7
I.3. Activité mécanique cardiaque.....	8
I.4. Electrophysiologie cellulaire.....	10
I-5- Origines physiologiques.....	11
I.6. Système de dérivations de l'ECG.....	13
1.7.1. L'électrocardiographie et l'électrocardiogramme.....	16
1.7.2. Interprétation d'un ECG normale.....	17
Conclusion.....	18

Chapitre II : la théorie de l'information et les techniques de compression

II.1. Introduction.....	22
II-2 Notions fondamentales sur la théorie de l'information.....	22
II-3 Compression de données.....	24
II-3-1 Les méthodes de compression.....	24
II-4. Quantification vectorielle.....	34
II-5. Critères de performance de la compression.....	35
Conclusion.....	36

Chapitre III : LA THEORIE DES POLYNOMES ORTHOGONAUX

III-1 INTRODUCTION.....	38
III-2-1 Orthogonalité des fonctions.....	38
III-2-2 Familles de polynômes orthogonaux.....	39
III-3 PROPRIETES COMMUNES AUX POLYNOMES ORTHOGONAUX.....	40

III-4 DEVELOPPEMENT EN SERIES DE POLYNOMES ORTHOGONAUX.....	41
III-4-1 Notions de séries de Fourier dans les espaces de Hilbert.....	41
III-4-2 Cas des polynômes orthogonaux.....	42
III-5 : CARACTERISTIQUES DE QUELQUES POLYNOMES ORTHOGONAUX	42
III-5-1 Caractéristiques des polynômes de Jacobi $P_k^{(\alpha,\beta)}(t)$	43
III-6 CONCLUSION.....	46
CHAPITRE IV : APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS	
IV.1.Introduction.....	48
IV.2. Présentation de la base de données MIT/BIH.....	48
IV.3. Présentation de l’algorithme de compression.....	48
IV.4 Application.....	50
IV.4.1 signal sans bruit.....	50
IV.4.2 signal avec bruit.....	56
IV.5.Discussion des résultats.....	61
Conclusion.....	62
CONCLUSION GENERALE.....	65
Bibliographie.....	66

LISTE DES FIGURES et TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

Chapitre I : Généralité sur l'ECG

Figure 1.1. : Schéma fonctionnel du cœur.....	7
Figure 1.2. : Schéma du circuit sanguin.....	8
Figure 1.3. : Potentiel d'action d'une cellule myocarde.....	10
Figure 1.4. : Le vecteur cardiaque.....	11
Figure 1.5.:Circuits de conduction des excitations électriques dans le cœur	12
Figure I.6. : Ondes caractéristiques d'un signal ECG normal.	13
Figure 1.7. : Dérivations bipolaires et triangle d'Einthoven.....	14
Figure 1.8. : Dérivations unipolaires augmentées.....	15
Figure 1.9. : Dérivations précordiales (V1 à V6).....	16
Figure 1.10. : Interférence secteur 50 Hz.....	19
Figure 1.11 : 11 Bruit dû aux mouvements des électrodes.....	19

Chapitre II : La théorie de l'information et les techniques de compression

Figure 2.1. : Le quantificateur	21
Figure 2.2. : Le débit/ en fonction de la distorsion pour une source discrète.....	22
Figure 2.3. : Exemple de Shannon-Fano.....	24
Figure 2.4. : Interpolation par spline.....	25
Figure 2.5. : Fonction de Walsh.....	27
Figure 2.6. : La transformée en ondelettes.....	28
Figure 2.7. : Décomposition en ondelette.....	32
Figure 2.8. : Principe de la quantification vectorielle.....	35

Chapitre III : LA THEORIE DES POLYNOMES ORTHOGONAUX

Figure3.1. Les premiers polynômes de Tchebychev de première espèce	45
Figure3.2. Les premiers polynômes de Tchebychev de seconde espèce.....	45
Figure3.3. Polynômes de Legendre.....	46

Chapitre IV: APPLICATION ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

Figure 4.1 : Signal réel.....	50
Figure 4.2 : les coefficients des polynômes de Tchebychev 1 ^{ère} espèce.....	50
Figure 4.3.(a,b,c,d) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 1 ^{ère} espèce	51
Figure 4.4 : les coefficients des polynômes de Tchebychev 2 ^{ème} espèce.....	52
Figure 4.5 (a,b,c,d) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 2 ^{ème} espèce	52
Figure 4.6 : les coefficients des polynômes de Legendre.....	53
Figure 4.7.(a,b,c,d) : signal compressé avec le polynôme Legendre.....	54
Figure 4.8 : la variation de l'erreur PRD % en fonction de la compression.....	54
Figure 4.9 : la variation du temps de compression en fonction de la compression CR.....	57

LISTE DES FIGURES et TABLEAUX

Figure 4.10 : Signal fortement bruité.....	58
Figure 4.11.(a,b,c,d) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 1 ^{ère} espèce..	59
Figure 4.12.(a,b,c,d) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 2 ^{ième} espèce.	60
Figure 4.13.(a,b,c,d) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Legendre.....	62
Figure 4.14: la variation de l'erreur PRD % en fonction de la compression (signal fortement bruité)	63

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 : Caractéristiques principales des polynômes de Jacobi.....	44
Tableau 4.1 : la variation de l'erreur PRD % en fonction de la compression.....	54
Tableau 4.2 : la variation de temps de compression en fonction de la compression CR.....	57
Tableau 4.3: la variation de l'erreur PRD % en fonction de la compression (signal fortement bruité).	63

Liste des abréviations

Liste des abréviations

ECG: électrocardiogramme.

AV : Auriculo-Ventricule

DI: Dérivation I.

DII: Dérivation II.

DIII: Dérivation III.

WCT: Wilson Centrale Terminal.

LA: Left Arm.

LL: Left Leg.

RA: Right Arm.

aVF : augmented voltage foot.

aVL : augmented voltageleft arm.

aVR : augmented voltageright arm.

VLC: Variable Lenght Codes.

RLE: Run Lenght Encoding.

LZW: Lempel Ziv Welch.

ZOI : Interpolation d'ordre zéro.

FOI : interpolation d'ordre un.

KLT: Transformée de Karhunen Loèv.

TFD: transformée de Fourier Discrete.

STFT :Short Time Fourier Transform.

DCT: transformée discrète en cosinus.

CWT :Continuous Wavelets Transform.

DWT: Discrete Wavetels Transform.

CR : Compression Ratio.

PRD: Percentage of Root mean squared Difference.

Introduction générale

De nos jours une grande quantité de données sont produites. Il se pose alors non seulement le problème de mémoire pour le stockage de ces données, mais aussi celui du temps pour les traiter par le calculateur. La compression des données ou des signaux propose des solutions à ces problèmes en cherchant à réduire les redondances contenues dans les signaux ou messages. Les techniques de compression sont d'usage courant en traitement d'image, en traitement des signaux audio, des signaux vidéo et des signaux biomédicaux. Donc, la compression est un traitement sur une donnée qui a pour but de diminuer sa taille et donc de faciliter son stockage.

Tous les types de données peuvent être compressés, les signaux, les textes, les images, la vidéo, l'audio... La compression du signal fait l'objet de nombreuses études qui portent sur l'amélioration des algorithmes de compression ainsi que la mise au point de nouvelles techniques et formats de compression.

L'ECG est un signal de nature électro physiologique dont le tracé matérialise les activités électriques du cœur. Depuis quatre décennies, la compression des signaux ECG a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. La compression des signaux ECG trouve aujourd'hui un nouvel intérêt à cause de la télémédecine. En effet, il faut minimiser la durée et les coûts de transmission des signaux à travers les canaux de télécommunication.

Donc, la compression des signaux et leur traitement numérique jouent un rôle important de nos jours, dans différents domaines, surtout si nous désirons transmettre des informations ou les stocker.

Ce document comporte quatre chapitres, dans le premier on présentera l'anatomie du cœur suivi de toutes les notions fondamentales sur l'électrocardiographie nécessaires pour arriver à acquérir le signal ECG et pourvoir l'interpréter correctement.

Dans le second chapitre, nous allons rappeler les bases de la théorie d'information et par la suite, nous allons exposer de façon générale les différentes techniques de compression des signaux ECG, et à la fin de ce chapitre, on citera les critères d'évaluation des performances d'une méthode de compression.

Le troisième chapitre nous avons donné des généralités sur la théorie des polynômes orthogonaux.

Le quatrième chapitre est l'application des polynômes orthogonaux sur la compression d'un signal ECG et discussion des résultats.

Chapitre I

Généralité sur l'ECG

I.1 Introduction :

Nous présentons dans ce chapitre le fonctionnement général du système cardiovasculaire. Puis l'électrocardiographie, qui permet d'obtenir une image de l'activité électrique cardiaque.

I.2. Anatomie du cœur humain :

Le cœur est un organe creux et musculaire comparable à une pompe qui assure la circulation du sang dans les veines et les artères. Dans le corps humain, le cœur se situe un peu à gauche du centre du thorax, en arrière du sternum. Il est l'élément central du système cardiovasculaire. Il est connecté au reste de l'organisme par le biais de vaisseaux associés : les deux veines caves (inférieure et supérieure), les artères pulmonaires et l'artère aorte comme l'illustre la figure 1.1.[1]

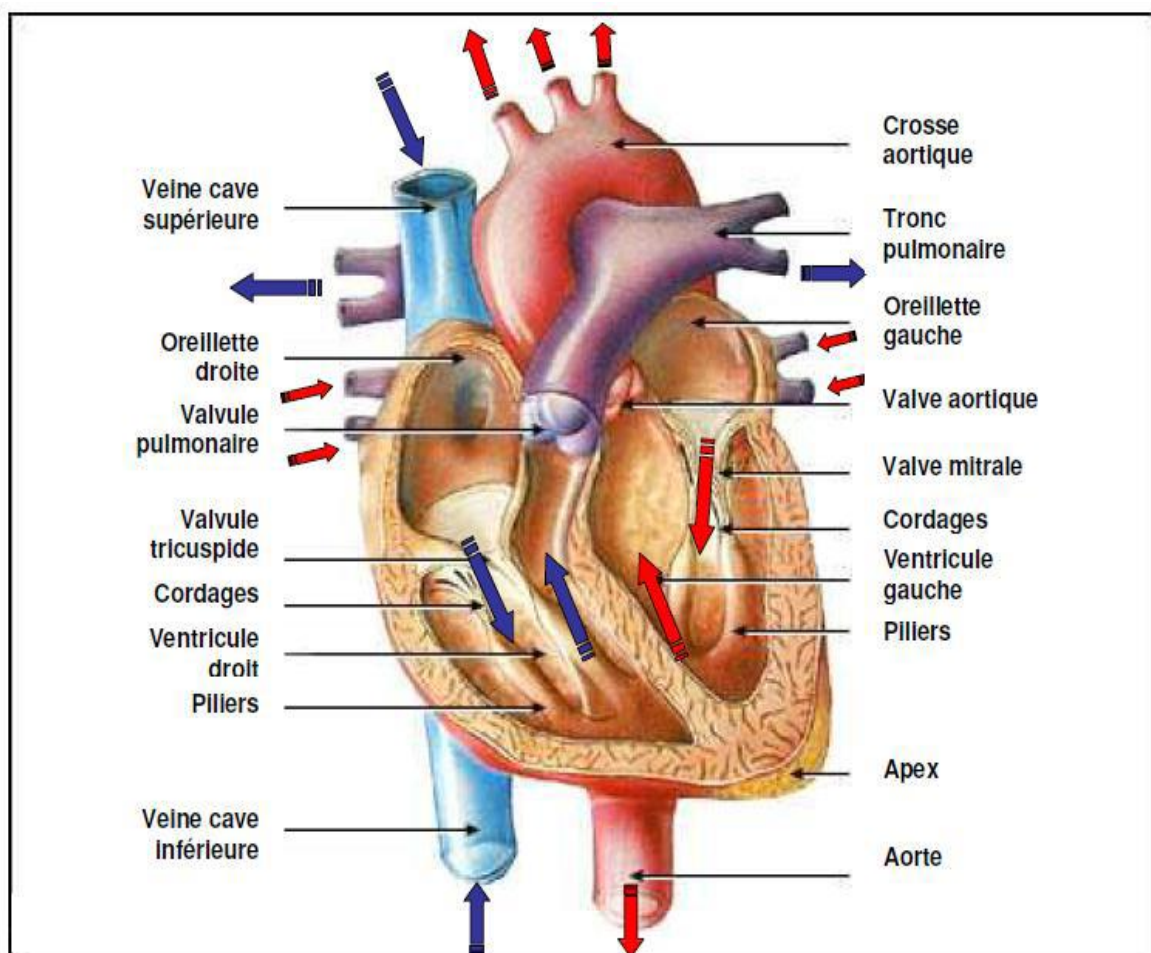


Fig. 1.1 – Schéma fonctionnel du cœur. [1]

Donc le cœur est un muscle strié creux séparé en deux moitiés indépendantes (droite et gauche). Sa partie droite contient du sang pauvre en oxygène et assure la circulation

pulmonaire; sa partie gauche renferme du sang riche en oxygène et le propulse dans tous les tissus. Chacune des moitiés comporte une oreillette et un ventricule qui communiquent par des valves d'admission qui à l'état normal, laissent passer le sang uniquement de l'oreillette vers le ventricule. Il existe aussi des valves d'échappement qui assurent la communication entre le ventricule droit et l'artère pulmonaire (valve pulmonaire), ainsi qu'entre le ventricule gauche et l'artère aorte (valve aortique). Ces deux valves se trouvent à l'entrée de l'aorte et de l'artère pulmonaire respectivement. Nous pouvons voir l'anatomie du cœur et des vaisseaux associés. Les parois du cœur sont constituées par le muscle cardiaque, appelé myocarde.

I.3. Activité mécanique cardiaque

Le cœur d'un adulte pèse de 300 à 350 grammes. Il se décompose en quatre chambres : Les oreillettes en haut, et les ventricules en bas. Une cloison musculaire épaisse, le septum, divise le cœur en deux morceaux. Chaque côté, droit et gauche, est composé de deux cavités : l'oreillette et le ventricule, reliés entre eux par une valve qui assure, à l'état normal, un passage unidirectionnel du sang. Comme l'illustre la figure 1.2

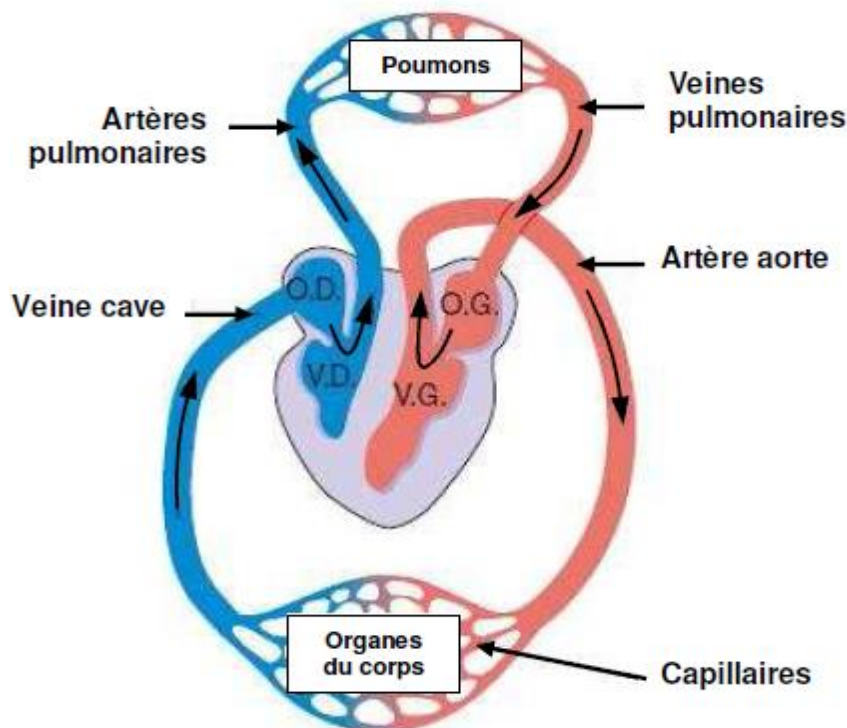


Fig. 1.2 – Schéma du circuit sanguin. La couleur bleue indique que le sang est pauvre en oxygène tandis que la couleur rouge correspond au sang chargé en oxygène. [1]

Le cycle de la circulation sanguine se répète constamment et se divise en deux périodes: la systole et la diastole. La systole est la période correspondant à l'éjection du sang

dans la grande et petite circulation. Elle se décompose en trois phases: la systole auriculaire, la contraction ventriculaire iso volumique et la systole ventriculaire

- La systole auriculaire est la contraction des oreillettes lorsque celles-ci sont remplies de sang.
- La contraction ventriculaire iso volumique commence lorsque les cellules musculaires du myocarde ventriculaire se contractent.
- La systole ventriculaire commence lorsque les pressions dans les ventricules dépassent les pressions dans l'artère pulmonaire et l'aorte.

La diastole est la phase de relaxation du cœur pendant laquelle il se remplit de sang. Cette période est composée de deux phases: la relaxation ventriculaire isométrique et la phase de repos.

- La relaxation ventriculaire fait suite à la systole. Les ventricules se relâchent, la pression chute jusqu'à être inférieure à celle exercée dans l'aorte et l'artère pulmonaire.
- La phase de repos est celle pendant laquelle le sang des veines caves et pulmonaires s'écoule librement dans les ventricules via les oreillettes. [1]

I.4. Electrophysiologie cellulaire

Les cellules cardiaques sont entourées d'une membrane siège de mécanismes actifs de passage de différents ions aboutissant à des différences de concentration ionique de part et d'autre de la membrane cellulaire. Les différences de concentration de ces particules chargées électriquement aboutissent à des différences de potentiel entre l'intérieur et l'extérieur de la membrane cellulaire. Au repos, l'intérieur de la cellule est chargé négativement et sa surface positivement réalisant une différence de potentiel de -90mV qui est le potentiel transmembranaire de repos.

Lorsque la cellule est excitée par un stimulus mécanique, chimique ou électrique alors la surface de la cellule par un jeu de mouvements ioniques (entrée de sodium et calcium, sortie de potassium) devient négative : c'est la dépolarisation. Ce changement de polarité rapide (de l'ordre de la milliseconde) constitue la phase 0 du potentiel d'action à laquelle se succèdent :

- * La phase 1 de repolarisation initiale.
- * La phase 2 de dépolarisation maintenue ou plateau.
- * La phase 3 de repolarisation où la cellule redevient positive à sa surface.

* La phase 4 de polarisation stable (sauf pour les cellules automatiques). [22]

L'ensemble de ces phases constituent le potentiel d'action permettant la contraction de la cellule, ce potentiel est schématisé dans la figure 1.3.

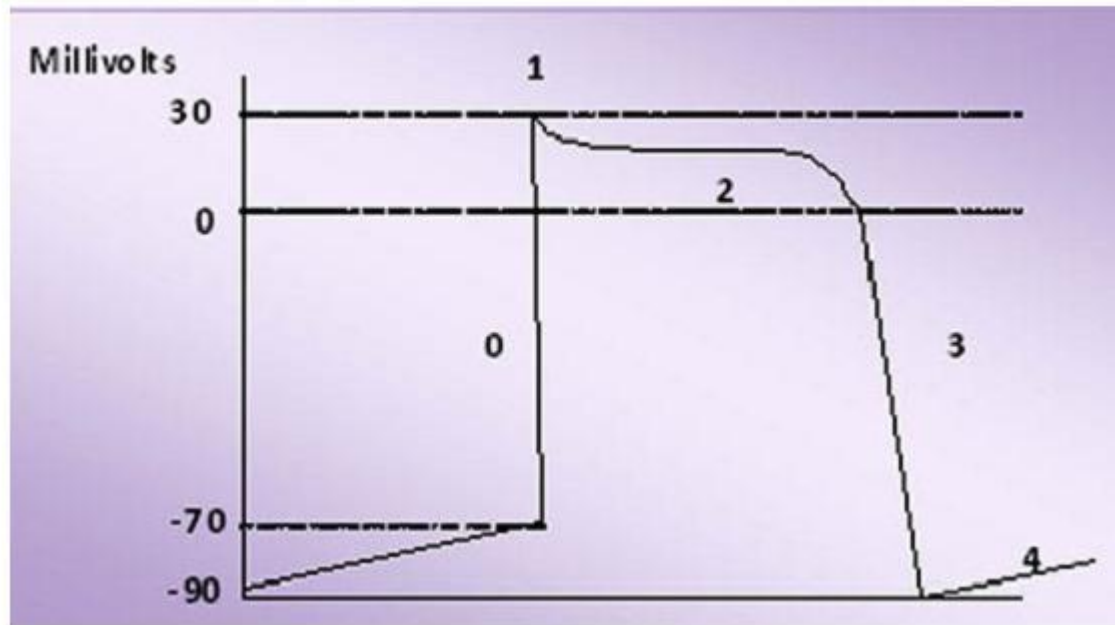


Fig1.3. Potentiel d'action d'une cellule myocarde.

I-5- Origines physiologiques

La génération et la propagation de l'excitation dans les différentes parties du cœur peuvent être étudiées non seulement par la mesure des potentiels électriques des cellules ou la mesure des potentiels électriques à la surface du cœur, mais aussi par l'enregistrement de l'activité cardiaque au niveau de la peau. En effet, avec le développement de différence de potentiel entre les zones excitées et non excitées du cœur, les forces électriques différentielles se propagent dans le corps entier. Des tracés reflétant les oscillations de ces potentiels peuvent donc être enregistrés en appliquant des électrodes à certains points du corps. En modèle simplifié, le cœur qui est la source des signaux est un générateur représenté par un dipôle électrique localisé dans le thorax (figure 1.4).

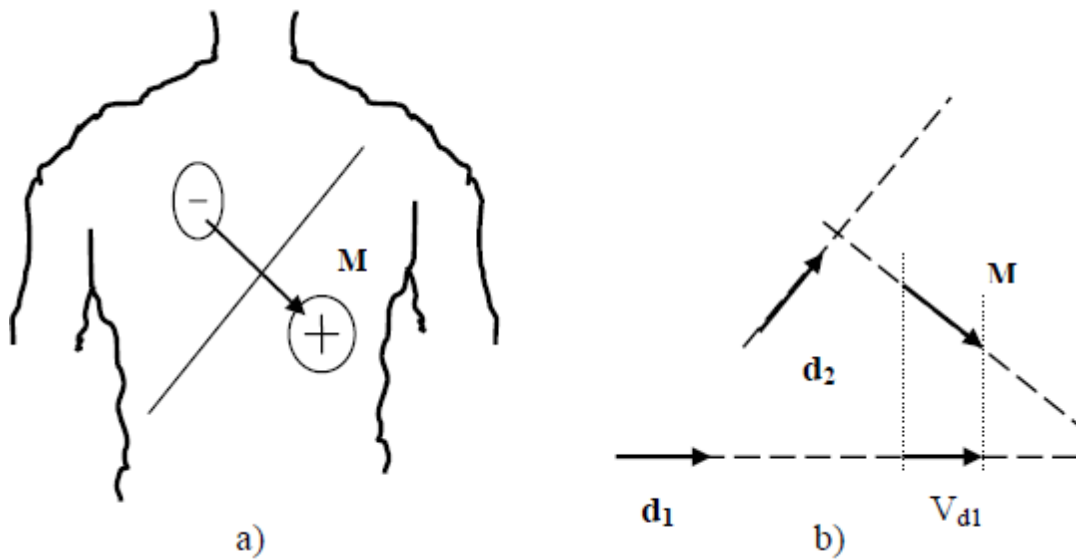


Fig 1-4 : Le vecteur cardiaque.[3]

a) Le dipôle résulte des charges positives et négatives séparées les unes des autres ; le vecteur moment est représenté par \mathbf{M} .

b) La tension mesurée dans une dérivation représentée par le vecteur $\mathbf{d1}$ est tout simplement le produit scalaire $V_{d1} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{d1}$; c'est le module de la projection de \mathbf{M} dans la direction $\mathbf{d1}$

En électrocardiographie, on ne s'intéresse pas aux lignes de champ de ce dipôle, mais on utilise plutôt le dipôle moment qu'on appelle vecteur cardiaque. C'est un vecteur dirigé des charges négatives vers les charges positives et dont le module est proportionnel à la quantité de charges multipliée par la distance de séparation des 2 types de charges, il est représenté par \mathbf{M} sur la figure 1-4. Au cours d'un cycle cardiaque, l'amplitude et la direction de ce vecteur varient. La différence de potentiel mesurée par 2 électrodes représente le module de la projection du vecteur cardiaque sur la droite qui relie ces deux électrodes.

Par convention, une impulsion électrique qui se propage vers l'électrode est représentée sur l'enregistrement de l'électrocardiogramme par une déflexion qui se dirige vers le haut du tracé. Si, au contraire, l'activité électrique fuit l'électrode, une déflexion orientée vers le bas du tracé est observée. La figure 1-3 montre les trajets empruntés par les impulsions électriques dans le cœur. [3]

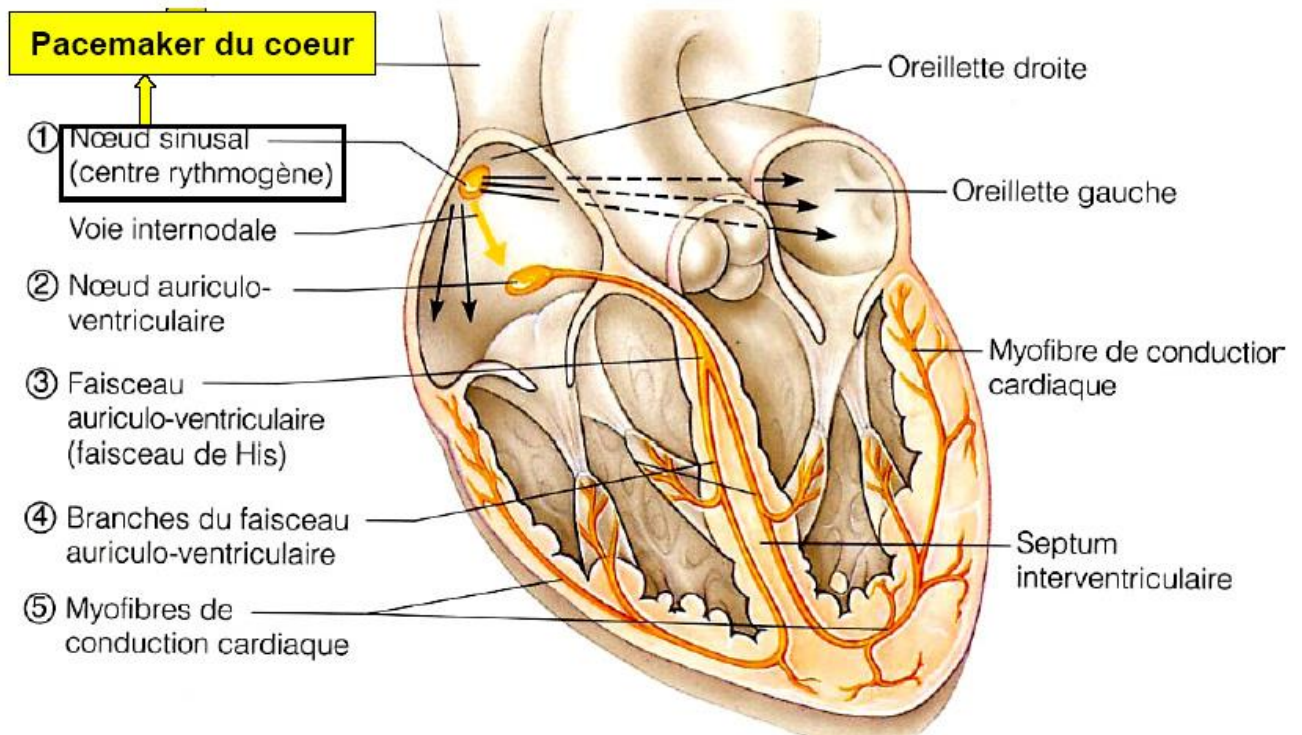


Figure 1-5 : Circuits de conduction des excitations électriques dans le cœur

La formation des déflexions enregistrées est intimement liée à l'activation et à la repolarisation subséquentes des oreillettes et des ventricules. L'activité électrique peut être décrite par les étapes suivantes :

- 1°) Formation de l'impulsion de stimulation dans le nœud sino-auriculaire (nœud SA).
- 2°) Activation des oreillettes, l'électrocardiogramme enregistre une petite onde, dite onde P
- 3°) Activation du nœud auriculo-ventriculaire et du faisceau de His, l'électrocardiogramme revient à la ligne isoélectrique.
- 4°) Activation des ventricules (excitation des branches suivie de celle des parois internes) ; l'électrocardiogramme enregistre plusieurs déflexions formant le complexe QRS.
- 5°) Lorsque toutes les parties du myocarde sont activées, l'électrocardiogramme enregistre de nouveau une ligne isoélectrique : le segment ST.
- 6°) Lors de la repolarisation ventriculaire, l'électrocardiogramme enregistre une onde T
- 7°) Pendant la repolarisation tardive de quelques régions du myocarde, l'électrocardiogramme pourrait enregistrer une petite onde U.

L'ECG normal est donc caractérisé par 3 ondes principales: P, QRS et T (figure 1-4). L'onde P représente la dépolarisation auriculaire. Le complexe QRS caractérise la dépolarisation des ventricules. L'onde T traduit la repolarisation ventriculaire. Les manifestations de la

repolarisation auriculaire sont masquées par le complexe QRS. Les segments P-Q et S-T sont normalement au potentiel zéro.

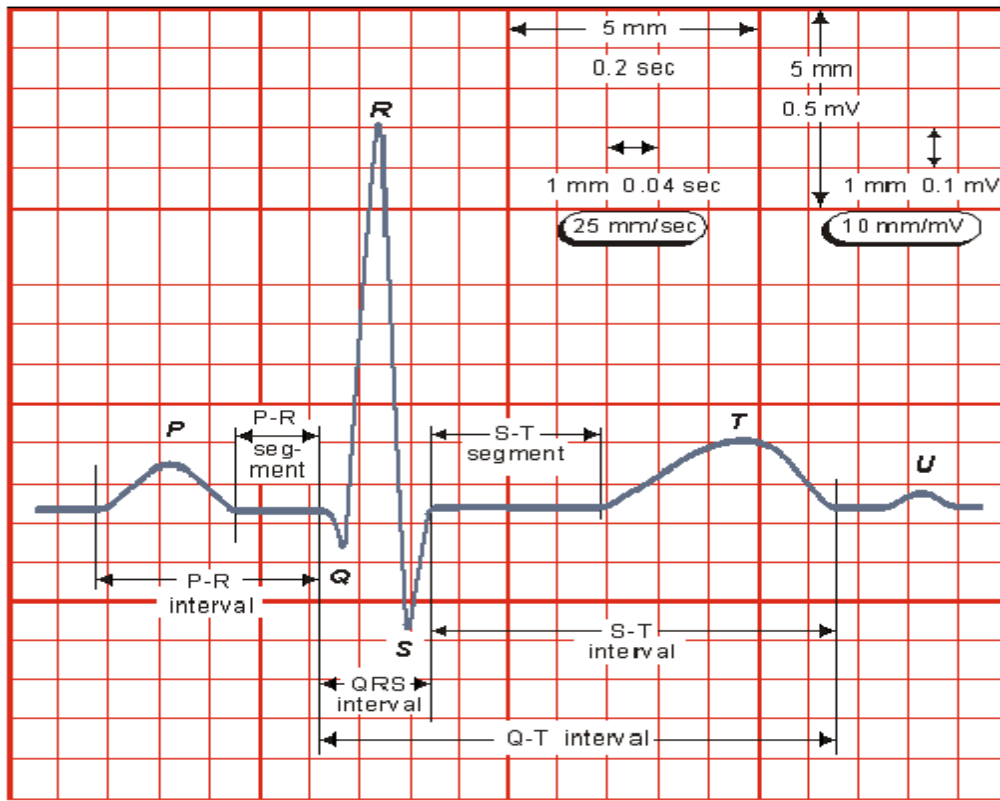


Fig 1-6: Ondes caractéristiques d'un signal ECG normal. [23]

I.6. Système de dérivations de l'ECG

Généralement les appareils électrocardiographiques peuvent enregistrer plusieurs différences de potentiel en même temps selon l'emplacement et le nombre d'électrodes réparties sur le thorax et les membres. Chaque mesure de ces potentiels correspond à une dérivation de l'ECG. Un système de dérivations consiste en un ensemble cohérent de dérivations, chacune étant définie par la disposition des électrodes sur le corps du patient. L'emplacement des électrodes est choisi de façon à explorer la quasi-totalité du champ électrique cardiaque. [4]

Si on mesure le vecteur cardiaque dans une seule direction, on ne sera pas en mesure de le caractériser entièrement. Il est donc important d'avoir un standard de positionnement des électrodes (dérivations) pour l'évaluation clinique du signal ECG. En pratique, douze dérivations sont utilisées dans les plans frontal et transversal pour explorer l'activité électrique du cœur. [4] On distingue :

I.6.1. Dérivations bipolaires (dérivations standard)

Einthoven a proposé trois dérivations appelées dérivations bipolaires car le potentiel est mesuré entre deux électrodes : DI, DII et DIII. Elles sont obtenues à partir des potentiels du bras gauche (L), du bras droit (R) et de la jambe gauche (F) de la manière suivante :

$$DI = VL - VR \quad (1.1)$$

$$DII = VF - VR \quad (1.2)$$

$$DIII = VF - VL \quad (1.3)$$

$$DI + DIII = DII \quad (1.4)$$

avec :

VR correspond au potentiel au bras droit, VL correspond au potentiel au bras gauche, et VF correspond au potentiel dans la jambe gauche. Ce système de référence est schématisé par un triangle équilatéral appelé triangle d'Einthoven dont les sommets représentent les localisations des électrodes comme elle est montrée dans la figure 1.7. Ces dérivations explorent l'activité cardiaque dans le plan frontal. [2]

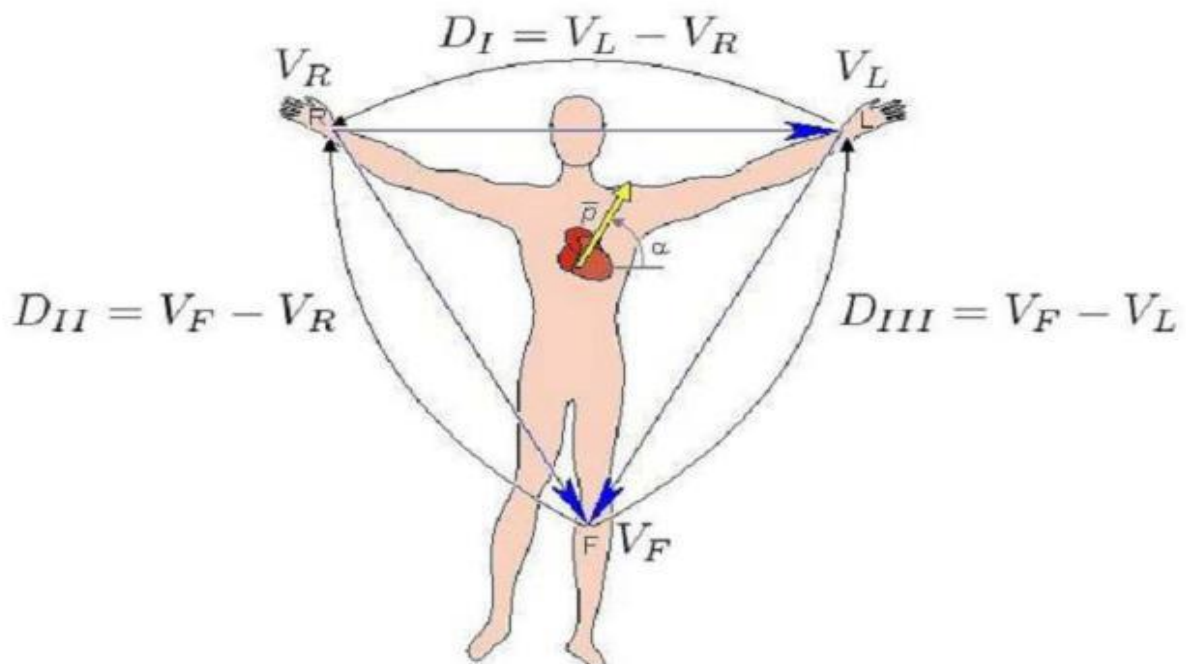


Fig 1.7. Dérivations bipolaires et triangle d'Einthoven

1.6.2. Les dérivations unipolaires

Une électrode exploratrice est placée à la surface du corps, elle est reliée au pôle positif de l'électrocardiographe et le pôle négatif de l'électrocardiographe est relié à une électrode neutre ou indifférente (borne centrale de WILSON). donc la ligne de chacune de ces trois dérivations passe par un des sommets du triangle et son centre géométrique (figure 1.7).

- aVR = bras droit borne centrale
- aVL = bras gauche borne centrale
- aVF = jambe gauche borne centrale.

$$aVR = VR - (VL - VF) / 2 = 3 \times VR / 2 \quad (1.5)$$

$$aVL = VL - (VF - VR) / 2 = 3 \times VL / 2 \quad (1.6)$$

$$aVF = VF - (VR - VL) / 2 = 3 \times VF / 2 \quad (1.7)$$

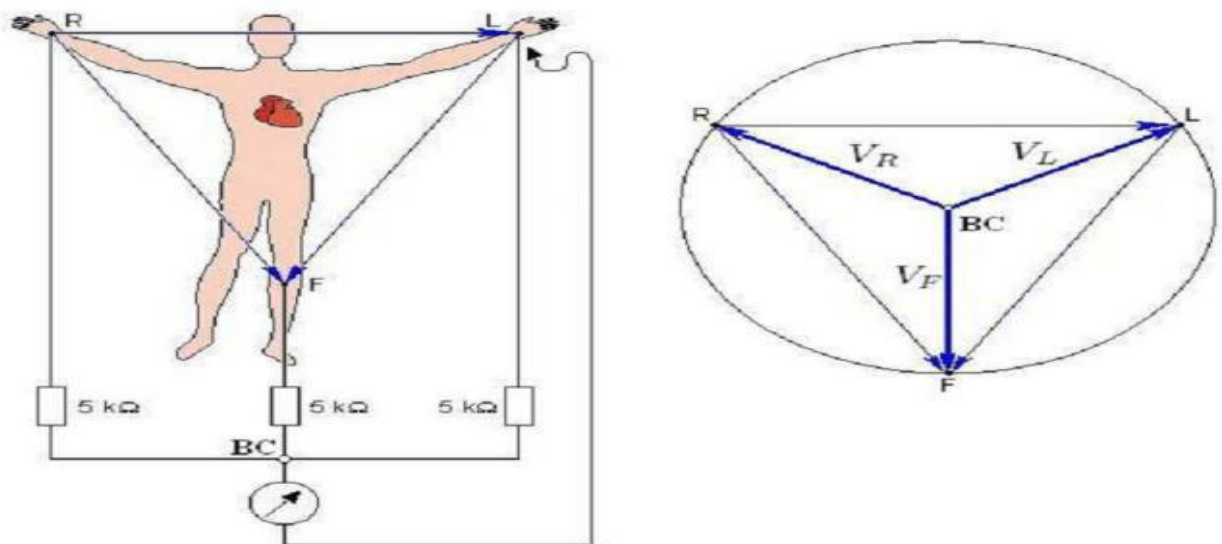


Fig 1.8 : Dérivations unipolaires augmentées.

1.6.3. Les dérivations unipolaires précordiales

Elles explorent l'activité électrique cardiaque dans un plan horizontale et correspondent aux mesures de différences de potentiel entre chaque électrode et la borne centrale de Wilson. Les électrodes sont situées en 12 points mais souvent seules les 6 premières sont mises en place. Elles sont repérées anatomiquement sur l'hémi thorax gauche comme l'illustre la figure 1.8.

- V1 : 4ème espace intercostal droit au bord droit du sternum

- V2 : 4ème espace intercostal gauche au bord gauche du sternum
- V3 : à mi-distance entre V2 et V4
- V4 : 5ème espace intercostal gauche au niveau de la ligne médio-claviculaire gauche
- V5 : sur la ligne axillaire antérieure à la hauteur de V4
- V6 : sur la ligne axillaire moyenne à la hauteur de V4

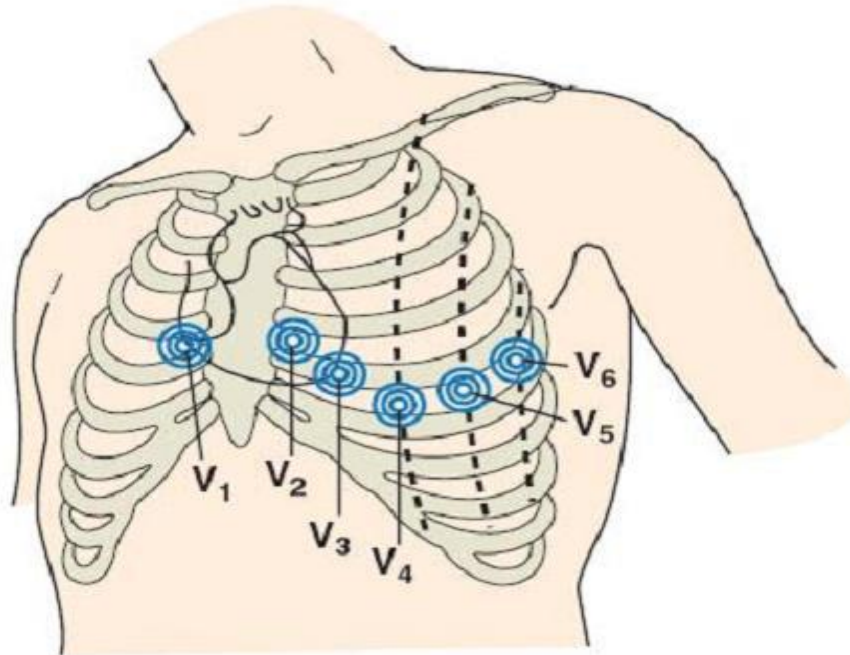


Fig 1.9. Dérivations précordiales (V1 à V6).

1.7.1.L'électrocardiographie et l'électrocardiogramme

Le cœur étant un muscle, il a besoin pour se contracter d'une stimulation électrique. Ces influx électriques sont en quelque sorte le reflet de sa bonne santé. C'est un très bon outil diagnostique de pathologies cardiaques rythmiques, musculaires et de problèmes extra cardiaques métaboliques, médicamenteux, hémodynamiques,....

L'électrocardiographie est la représentation graphique du potentiel électrique qui commande l'activité musculaire du cœur sous forme d'électrocardiogramme.

L'électrocardiogramme (ECG) c'est l'enregistrement sur un support papier standard de la stimulation électrique que le cœur reçoit pour pouvoir se contracter.

L'ECG n'est qu'un enregistrement de surface de l'activité électrique du cœur.

I.7.2. Interprétation d'un ECG normale

Chaque cycle de dépolarisation/repolarisation du cœur correspond au passage du courant électrique des oreillettes vers les ventricules qui se contractent dans le même ordre. Sur le plan électrocardiographique, cela se traduit par l'enregistrement toujours dans le même ordre des différentes ondes : P, Q, R, S, T, et U.

* **L'onde P** : Elle représente la dépolarisation auriculaire. Cette onde peut être positive ou négative avec une durée de l'ordre de 90 ms. Généralement son observation est difficile spécialement dans des conditions bruitées. Il faut noter que la repolarisation auriculaire n'est pas visible sur l'ECG car elle coïncide avec le complexe QRS d'amplitude plus importante. [4]

* **Le complexe QRS** :

Il correspond à la dépolarisation des ventricules et de grande amplitude (signal de quelques millivolts) car la masse des ventricules est très supérieure à celle des oreillettes. Il est constitué de trois ondes consécutives : l'onde Q qui est négative, l'onde R qui est positive dans un ECG normal et l'onde S qui est négative, Sa durée normale vaut entre 85 et 95 ms.

* **L'onde T** :

Elle correspond à la repolarisation des ventricules et d'amplitude normalement plus faible que le complexe QRS.

* **L'onde U**

Inconstante, qui traduirait la repolarisation du réseau de Purkinje.

L'ECG est aussi caractérisé par plusieurs intervalles comme on peut voir sur la Figure (1.7):

* **L'intervalle RR:**

Il est délimité par les sommets de deux ondes R consécutives et d'où est évaluée la fréquence cardiaque instantanée. Cet intervalle est utilisé pour la détection des arythmies ainsi que pour l'étude de la variabilité de la fréquence cardiaque.

* **Le segment ST:**

Il représente l'intervalle durant lequel les ventricules restent dans un état de dépolarisation actif. Il est aussi défini comme la durée entre la fin de l'onde S et le début de l'onde T.

* **L'intervalle PQ:**

Il représente l'intervalle de temps entre le début de la dépolarisation des oreillettes et le début de la dépolarisation ventriculaire. Il représente le temps nécessaire à l'impulsion électrique de la dépolarisation ventriculaire. Il représente le temps nécessaire à l'impulsion électrique pour se propager du nœud sinusal jusqu'aux ventricules et il est mesuré entre le début de l'onde P et le début du complexe QRS.

*** L'intervalle QT:**

Il représente la durée entre le début du complexe QRS et la fin de l'onde T. Cet intervalle reflète la durée de la dépolarisation et repolarisation ventriculaire. En effet sa dynamique peut être associée à des risques d'arythmie ventriculaire et de mort cardiaque soudaine. [4]

Toutes ces ondes et ces intervalles sont représentés dans la figure 1.6

I.8. Artefacts visibles sur l'électrocardiogramme

Sur tout enregistrement électrocardiographique il peut apparaître des événements indésirables pouvant brouiller le tracé et parfois induire en erreur le diagnostic final. Ces bruits sont reconnaissables par l'œil expérimenté qui les identifie avant d'effectuer son diagnostic. Les effets indésirables peuvent avoir plusieurs sources: techniques, physiques ou pathologiques. Nous allons surtout développer l'aspect technique et physique des bruits et artefacts présents sur les tracés électrocardiographiques notamment sur les tracés Holter. En partant du principe que les bruits fréquents en électrocardiographie sont des bruits additifs, les caractéristiques de ces bruits auxquelles nous allons nous attacher sont l'amplitude, la périodicité et la bande spectrale. Les artefacts prennent une place particulière, ils induisent des modifications sur les performances des algorithmes d'analyse automatique de l'électrocardiogramme.

I.8.1 Bruits techniques

Le matériel utilisé lors de l'enregistrement doit être manipulé avec précaution car il peut être source de bruits lors de l'enregistrement. Les plus courants sont présentes ci-dessous.

- Bruit dû au secteur

Le réseau de distribution électrique peut parfois brouiller le signal électrocardiographique avec une onde dont l'harmonique principale est à 50 Hz comme montré sur la Figure (1.10).

Ce type de bruit apparaît sur tout l'enregistrement et peut être assez fort mais il s'élimine facilement avec un filtre sélectif car c'est un bruit haute fréquence à bande étroite.

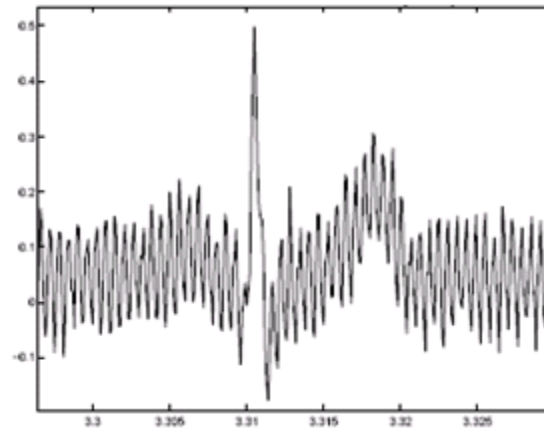


Fig 1.10 Interférence secteur 50 Hz.

Bruit dû aux mouvements d'électrodes

Lorsque les électrodes sont connectées incorrectement, des sauts brusques de la ligne de base apparaissent. L'effet sur le tracé peut aller de la simple diminution d'amplitude à l'apparition de pics lorsque les électrodes sont en contact intermittent avec la peau. Ces pics peuvent parfois être confondus avec les ondes du tracé normal comme le montre sur la figure (1.11). Ce type de bruit intermittent à bande spectrale large s'élimine difficilement car son énergie se trouve dans la même gamme de fréquence que le complexe QRS.

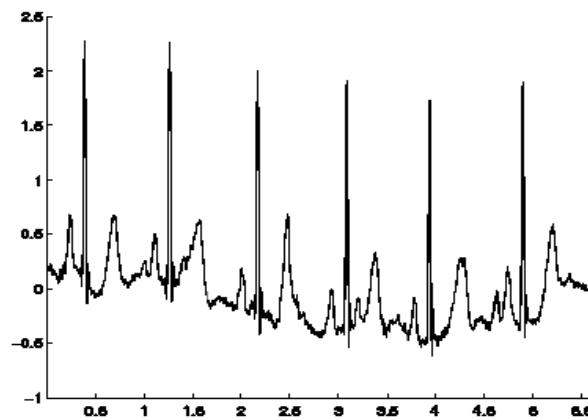


Fig 1.11 Bruit dû aux mouvements des électrodes.

Conclusion

Le cœur est l'élément central du système cardiovasculaire qui permet l'alimentation en oxygène et en nutriments des organes. Il est principalement composé de quatre cavités : deux oreillettes et deux ventricules. A chaque battement, leurs contractions successives peuvent être suivies depuis l'extérieur du corps par des électrodes, collées à la surface de la peau, qui mesurent l'activité électrique des fibres musculaires cardiaques.

Les bases de l'activité électrique, allant de la genèse du potentiel d'action aux caractéristiques de l'ECG, ont été abordées. L'analyse de ces enregistrements permet, à elle seule, de diagnostiquer un grand nombre de pathologies et de les localiser. En effet, chaque couple de cavités (les oreillettes et les ventricules) possède sa propre signature électrique :

- onde P : systole auriculaire,
- ondes Q, R et S : systole ventriculaire,
- onde T : repolarisation ventriculaire.

Chapitre II :

Codage et compression

II-1 Introduction :

La compression est le procédé utilisé pour réduire la taille d'un bloc d'information. En compressant les données, on peut placer plus d'informations dans le même espace de stockage et utiliser moins de temps pour le transfert à travers un réseau téléinformatique. Généralement les signaux occupent une place importante et la compression est devenue parti intégrante des données. On rencontre souvent la compression de données comme étant une partie de l'encodage de données au même titre que le cryptage de données et la transmission des données.

Ce chapitre est divisé en trois parties essentielles :

La première partie concerne des notions fondamentales sur la théorie de l'information : entropie, quantification, distorsion...

La seconde partie concerne les différentes techniques de compression des signaux ECG.

La troisième partie concerne les critères d'évaluation de ces techniques de compression qui permettent de les évaluer.

II-2 Notions fondamentales sur la théorie de l'information :

II-2-1 L'information:

L'information présente un caractère essentiellement aléatoire, un événement aléatoire est par définition incertain, cette incertitude est prise comme mesure de l'information. Une information sera donc définie par sa probabilité, autrement dit l'information est la mesure de l'incertitude calculée à partir de la probabilité de l'événement. Donc plus une information est incertaine plus elle est intéressante et un événement certain ne contient aucune information. De là, on peut définir la quantité d'information $I(x_i)$ comme suit :

$$I(x_i) = -\log_2 p(x_i) \quad (2.1)$$

P_x = probabilité d'information.

x_i = échantillons de l'information.

La notion d'information d'après *Claude Shannon* est nécessairement associée à la notion de redondance et à celle de bruit :

-Il y a des lettres voire des syllabes dans un mot qui sont inutiles, la théorie de Shannon appelle cela redondance.

-L'information chemine à travers un canal rencontre du bruit, ce dernier est constitué par des perturbations aléatoires de toutes sortes qui tendent à brouiller le message.

II-2-2 Entropie :

L'entropie est une grandeur qui caractérise la quantité d'information moyenne d'un ensemble d'événements. Pour une variable aléatoire discrète X, avec n états possibles 1..n, l'entropie notée H est définie comme suit :

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i) \text{ bits/symbole (2.2)}$$

P(X_i) = probabilité d'apparition.

Cette définition est utilisée pour numériser une source, elle sert à connaître sur combien de bits au minimum on peut coder un fichier, ce qui est très utile pour savoir quelle limite peuvent espérer atteindre les algorithmes de compression qui ne perdent pas d'information.

II-2-3 La quantification :

Un quantificateur compare les valeurs d'entrée avec les niveaux de son dictionnaire (DECO - ou code book) en effectuant à chaque entrée le niveau du dictionnaire donnant la plus petite distance euclidienne (min d(x_i, y_i)).

Il existe deux types de quantifications :

On parle de *quantification scalaire* lorsque le dictionnaire est de dimension 1, c'est-à-dire ses Valeurs sont des scalaires ; c'est la forme la plus simple de quantification.

Le cas où le dictionnaire est un espace de dimension supérieure à 1 (multidimensionnel) est appelé la *quantification vectorielle*.

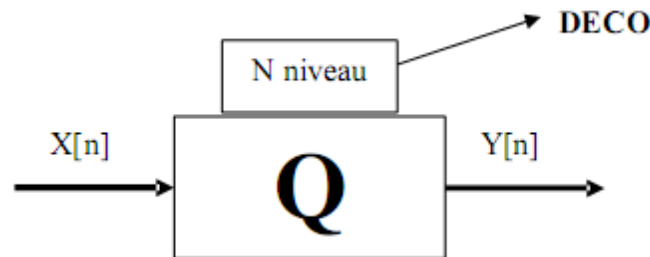


Fig (2.1) : Le quantificateur.

II-2-4 La distorsion :

La quantification dans un codage de source entraîne des pertes d'informations et comme la représentation décodée n'est pas nécessairement identique à l'originale, on caractérise cette dégradation par une mesure qu'on nomme distorsion, cette dernière sert donc à mesurer la qualité ou la fiabilité de la reconstruction.

La distorsion D, est représentée par la mesure du carré de la distance euclidienne entre la valeur d'entrée et celle de sortie du quantificateur afin de juger la performance d'un système.

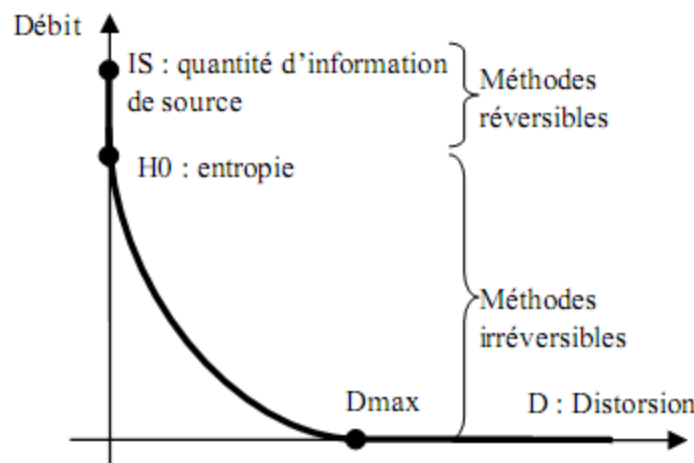
$$D(x, y) = (|x_i - y_i|^2). \quad (2.3)$$

On associe à la représentation encodée un débit (R) qui indique les ressources nécessaires à sa représentation, pour un vecteur X de k échantillons on définit le débit par échantillon :

$$R = \log_2(N)/k \text{ bits}. \quad (2.4)$$

tel que : N est le nombre lettre (niveaux) de quantification.

En théorie de l'information le but du concepteur d'un système de codage de source est de réaliser la plus grande compression (R petit) tout en garantissant une bonne fiabilité (D petite) il y a donc un compromis entre le débit et la distorsion, et qui se traduit par la courbe R(D).



Fig(2.2) : Le débit/ en fonction de la distorsion pour une source discrète [4].

II-3 Compression de données :

La compression de données est une opération de codage c'est-à-dire changé la représentation de l'information en utilisant un algorithme particulier dans le but de rendre la représentation compressée écrite en diminuant le nombre de bits par rapport à l'originale.

II-3-1 Les méthodes de compression :

La plupart des méthodes de compression visent à enlever la redondance présente dans l'information, de manière à diminuer le nombre de bits nécessaires à sa représentation. Et à partir de la courbe débit/distorsion précédente, on distingue deux méthodes de compression :

II-3-1-1 La compression réversible (sans distorsion) :

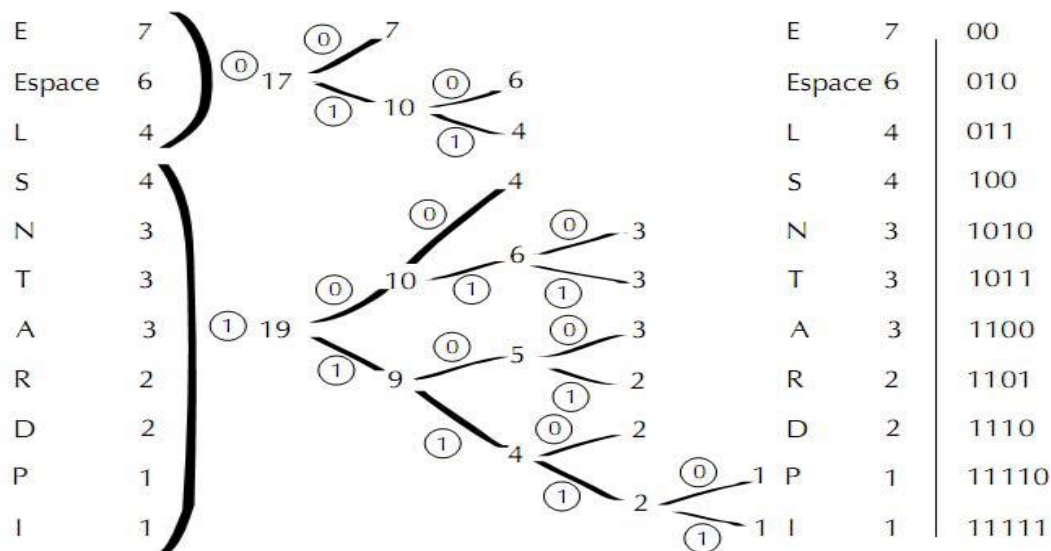
Représentée par le segment confondu avec l'axe des ordonnées c'est-à-dire $D=0$, pour les débits supérieurs à H_0 (fig2.1). Ce type de compression est dit réversible car il y a autant d'information après la compression qu'avant, elle est seulement réécrite de manière à prendre moins de place ; elle est donc sans perte d'information.

Nous présentons ici quelques techniques :

a-Algorithmme de Shannon-Fano :

L’algorithmme de shanon-fano est un algorithmme statique ,il utilise un code à longueur variable, son principe est d’affecter le code le plus long à la valeur la moins fréquente. La technique d’algorithmme est la suivante :

1. Construire une table des fréquences d’apparition des symboles triés par ordre décroissant.
2. Diviser cette table en deux parties. Ces deux parties doivent avoir une somme de fréquences d’apparition égale (ou pratiquement égale).
3. affecter le chiffre binaire « 1 » à la moitié inférieure et la moitié supérieure prend la valeur « 0 ».
4. Répéter les opérations 2 et 3 aux deux parties, jusqu’à ce que chaque symbole ne représente plus qu’une partie de la table.



Fig(2.3) : Exemple de Shannon-Fano.[28]

b-Codage de Huffman :

Cette méthode est introduite par David Huffman qui en 1952 publie le résultat de ses recherches. Le codage de Huffman permet de réaliser un codage optimal à longueur variable à partir d'un alphabet dont la fréquence d'apparition des lettres est connue. [5]

La technique est la suivante :

1. A chaque étape, les nœuds sont rangés par ordre de probabilités décroissantes.
2. Les deux nœuds du bas qui ont les probabilités les plus faibles sont associés pour donner un noeud "père". Celui-ci se voit attribuer comme probabilité la somme des probabilités de ses deux "fils".

3. on attribue le code « 1 » à la branche du poids faible et le code « 0 » à la branche du poids élevé.

4. Nous avons un nouvel ensemble de nœuds ayant un élément en moins (remplacement des deux "fils" par le "père") et nous reprenons l'étape 1 et 2 et 3 jusqu'à l'arrivée au sommet de l'arbre.

c-Méthode RLE (RunLengthEncoding):

Cette méthode de compression consiste à trouver et à éliminer les redondances des données. Dans un ensemble de données on trouve souvent des éléments identiques répétés plusieurs fois, il est donc plus efficace de coder cet élément et sa redondance que de coder unitairement chaque élément, c'est le principe de la RLE, par exemple la séquence « 00001111111111 » et codée par « 0 /4. 1/9 ».

Cette technique présente l'avantage d'être peu difficile à mettre en œuvre et elle est efficace pour des données contenant peu de valeurs différentes et de longues répétitions, par contre elle est moins intéressante pour des données textuelles [6].

d-Méthode Lempel-Ziv-Welch (LZW):

Elle est introduite par Jacob Ziv et Abraham Lempel en 1977 et développée par Welch dans les années 80 mettant au point une technique de compression encore plus sophistiquée.[10] Cette méthode exploitant un dictionnaire mobile, son principe est assez simple à comprendre:

1. Nous disposons d'un dictionnaire initial de 256 caractères ASCII numérotés de 0 à 255.
2. Au fur et à mesure de l'apparition de blocs de caractères « octet », ceux-ci sont ajoutés au dictionnaire.
3. Si elle est déjà dans le dictionnaire, alors un nouvel octet est introduit dans le tampon et on cherche à nouveau si cette séquence existe ou non dans le dictionnaire.
4. Si la séquence d'octet ne figure pas dans le dictionnaire, alors elle sera ajoutée à celui-ci et elle reçoit un nouvel indice. Le premier octet de chaque séquence qui se trouve dans le tampon est supprimé et son indice écrit dans le fichier qui reçoit les résultats de la compression. [8]

II-3-1-2 La compression irréversible (avec distorsion) :

Représenté par la surface où le débit est inférieur à l'entropie; ce type de compression est dit irréversible car il dégrade l'information et nous ne permet pas de retrouver le signal original exact.

Ces techniques se divisent en trois groupes :

i-Méthodes directes :

Ces méthodes opèrent dans le domaine temporel dont voici quelques-unes :

***La prédiction linéaire :**

La compression par prédiction consiste à éliminer les échantillons redondants et qui peuvent être déduit, le principe donc est d'estimer l'échantillon actuel en fonction des échantillons précédents, sous une forme linéaire :

$$x_p[n] = \sum_{i=0}^n a_i * x[n - i] \quad (2.5)$$

où les a_i sont les coefficients de prédiction, ils minimisent l'erreur de prédiction :

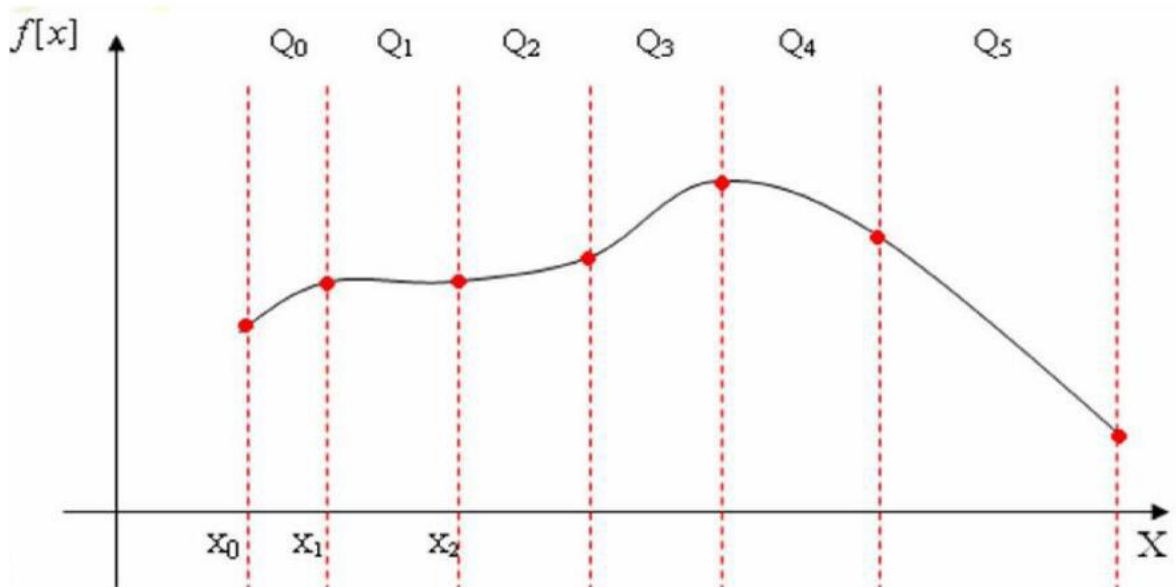
$$E_p = x - x_p \quad (2.6)$$

**** L'interpolation polynomiale :**

Cette technique de compression utilise des algorithmes qui décident qu'une information est redondante ou non par l'utilisation des valeurs précédentes et futures de l'information. Parmi ces techniques on a la méthode de spline.

-Méthode de spline:

Dans cette méthode le signal est divisé en plusieurs intervalles avec un pas h et chaque intervalle est représenté par une fonction $S(x)$ généralement de degré inférieur à 3. $x_{(i+1)}$ et x_i sont les positions des échantillons i et $i+1$ (respectivement).



Fig(2.4) : Interpolation par spline.

ii-Méthodes indirectes (par transformée):

L’approche par transformation appliquée aux signaux permet de passer du domaine temporel à un autre domaine où la redondance a fortement diminué, voire disparue.

Les méthodes indirectes où par transformées ramènent les échantillons corrélés du signal original dans un espace où les données sont moins corrélées, ceci à travers la décomposition dans une base de fonctions orthogonales.

Le principe de cette compression consiste alors à une quantification qui s’applique sur des coefficients d’une transformée linéaire.

-Transformée de Karhunen Loève(transformée optimale):

La transformée de KarhunenLoève est optimale dans le sens où l’on obtient la plus grande distribution de variances sur les axes et que l’énergie du signal est entièrement conservée, son principe consiste à minimiser l’erreur quadratique moyenne.

L’idée de la transformation est donc de réaliser un changement de base pour obtenir de nouveaux axes où l’information y est contenue de façon optimale.

Voici le principe de la KLT :

Soit deux vecteurs aléatoires $X=\{x(0),\dots,x(N)\}$ et $Y=\{y(0),\dots,y(N)\}$ dont les composantes sont des variables aléatoires ; les composantes de X sont corrélées entre elles et ceux de Y sont orthogonales(décorrélées et à valeur moyenne nulle).

Posons $Y=U^T X$ (ou $X=UY$), et $R_X=E [XX^T]$ est la matrice d’autocorrélation engendrée par X, et qui est symétrique.

La matrice de KL réduisant R_X à sa forme diagonale, s’exprime par $U=(u_1 \dots u_k)$, où les vecteurs U_i sont les vecteurs propres normalisés de la matrice R_x .

$$E[YY^T]=E[U^T XX^T U]=U^T E[XX^T] U=U^T R_X U= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Les λ_1 sont égales aux variances des composantes transformées.

Les composantes du vecteur transformé Y sont orthogonales car la matrice $E[YY^T]$ se réduit à une matrice diagonale d'éléments λ_i .

La transformée KLT dépend des statistiques du signal (si on ignore le modèle stochastique du signal on ne peut pas l'utiliser), aussi elle ne se prête pas à un calcul rapide et qui est très coûteux ; cela a fait que cette transformée reste réservée uniquement aux études théoriques[9].

-Transformées spectrales (quasi-optimales) :

Ce type de transformée nous permet d'observer la répartition fréquentielle d'un signal; et de remarquer que l'énergie des coefficients transformés décroît rapidement avec leur rang ; par exemple pour un signal concentré autour d'une fréquence f , tous les coefficients de cette transformée qui représentent la partie proche de cette fréquence sont forts et ils diminuent au fur et à mesure que l'on s'éloigne de cette fréquence donc toute l'énergie de ce signal est concentrée dans ces coefficients ; d'où l'appellation de transformations quasi-optimales c'est en terme de concentration d'énergie sur un nombre réduit de coefficients et de forte décorrélation de ces derniers.

Étant donné que ce sont les premiers harmoniques qui contiennent la quasi-totalité de l'énergie, il est donc possible d'éliminer les plus petits coefficients en les remplaçant par des zéros.

-Transformation Discrète de Fourier (TFD) :

La transformée de Fourier est parmi les premières transformations utilisées pour l'étude du signal dans le domaine fréquentiel, elle permet de le décomposer en sommation de fonctions ou d'éléments de sinusoidales à plusieurs fréquences.

Elle est définie par :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2n\pi k/N} \quad (2.8)$$

Et la transformée inverse s'écrit :

$$X(K) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{j2n\pi k/N} \quad (2.9)$$

Les coefficients obtenus sont seuillés, c'est-à-dire on met à zéro ceux qui sont inférieurs à un seuil choisi.

Les coefficients de Fourier de hautes fréquences (mis à zéro) sont rejetés, et ce sont les coefficients de basses fréquences qui sont utilisés pour la reconstruction.

Mais cette transformée présente certains inconvénients :

- Les coefficients sont complexes.
- La perte d'information dans le domaine temporel.

Afin de corriger ces problèmes, il est possible de se limiter à une petite section du signal en temps, donc faire un fenêtrage, cette technique est appelée Transformée de Fourier à fenêtre glissante ou Short-Time Fourier Transform STFT.

Cette dernière a l'avantage de fournir des informations sur les deux domaines temporel et fréquentiel; mais la précision est limitée par la taille fixe de la fenêtre utilisée.

-Transformation Discrète en cosinus (DCT):

La transformée DCT provient d'une TFD modifiée, elle décompose le signal en une sommation de cosinus à différentes fréquences discrètes, elle permet d'obtenir des coefficients plus petits que ceux obtenus avec une TFD; et ses coefficients sont réels.

La TCD d'un vecteur x de longueur N donne un autre vecteur y de N coefficients, elle est définie pour $k=1,2,\dots,N$ par :

$$y(k) = w(k) \sum_{n=1}^N x(n) \cos[\pi(2n - 1)(k - 1)/2N] \quad (2.10)$$

La Transformée en Cosinus Discret est utilisée fréquemment grâce à ses performances proches de celles de la transformée de Karhunen-Loève; La technique consiste en les étapes suivantes:

- Effectuer le développement en TCD du signal et retenir les coefficients prépondérants.
- Réaliser la TCD inverse à partir des coefficients retenus.

A la reconstruction, on ignore les coefficients inférieurs à un seuil donné.

- Transformées quasi spectrales :

Ces transformations ne sont pas optimales au sens de la concentration de l'énergie du signal dans une faible proportion de coefficients, mais elles ont l'avantage de la simplicité des calculs ; la compression par ces transformées consiste à utiliser des fonctions comme base orthogonale de décomposition ; parmi ces fonctions on a celles de Walsh.

Ces dernières ne prennent que deux valeurs 1 ou -1 et changeant de signe k fois dans un intervalle ouvert $0 < t < T$, donc pour transformer le signal, il suffit d'additionner ou de soustraire des échantillons selon une suite particulière [8].

Les fonctions de Walsh sont décrites par l'expression algébrique suivante :

$$w(k, t) = \prod_{i=0}^{r-1} \text{sign}[\cos^{k_i}(2^i \pi)t] \quad (2.11)$$

Avec : $r = \text{Partie Réelle}(\log_2(k) + 1)$, $k = l$ 'indice de la fonction de Walsh, $k_i =$ le i ème bit du nombre k écrit en binaire.

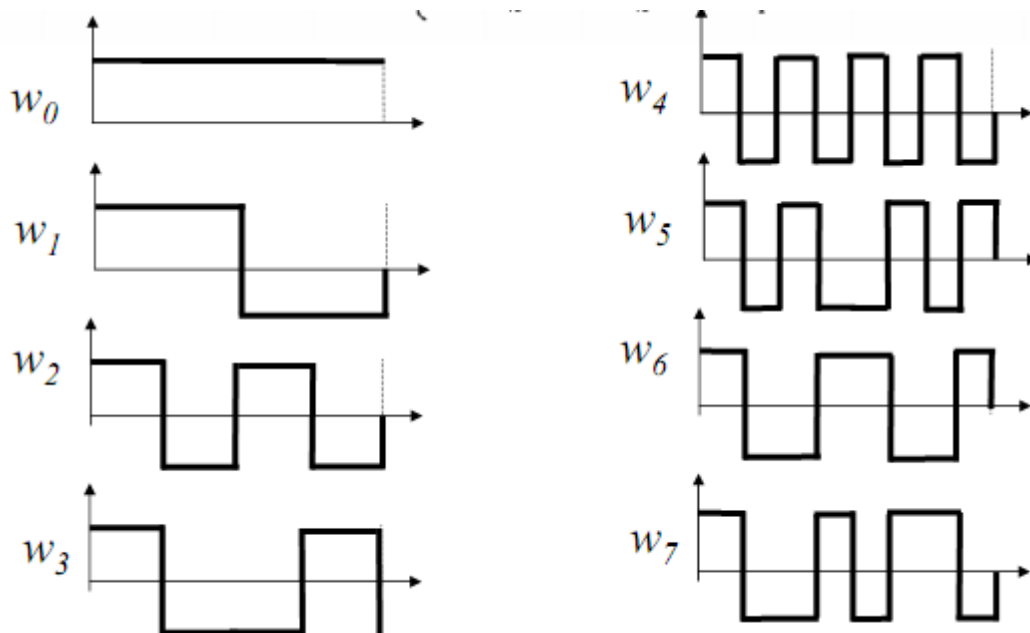
Les coefficients de Walsh sont obtenus par :

$$c(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \text{Wal}(k, n) \quad (2.12)$$

Avec $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

N : est le nombre d'échantillons contenus dans le signal

$s(n)$: sont les valeurs des échantillons du signal.



Fig(2.5) : Fonction de Walsh.

- Transformée par ondelettes :

La transformée par ondelettes est une technique qui utilise un fenêtrage avec des dimensions variables, elle permet l'utilisation de longs intervalles de temps quand on veut plus de précision sur l'information basse fréquence, et de petits intervalles pour l'information haute

fréquence : c'est l'approche multi-résolutionnelle, mais elle utilise le domaine temps-échelle; cette technique consiste alors à décomposer le signal en plusieurs sous-bandes.

Cette décomposition a pour but de représenter le signal à l'aide des composantes spectrales moins corrélées que les échantillons du signal eux-mêmes, et d'autre part de concentrer l'énergie du signal sur un petit nombre de composantes [8] .



Fig(2.6) : La transformée en ondelettes

Une ondelette est donc une onde avec une durée limitée qui partage le signal en des versions décalées et réduites de l'ondelette mère.

Il existe deux types de transformée par ondelettes : continue et discrète.

-Transformée en ondelettes continue CWT:

La transformée en ondelette continue est la somme continue sur tout l'intervalle du temps du signal $x(t)$ multiplié par les versions de la fonction mère $\psi(\tau,a)(t)$:

$$CWT(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{a,b}(t) dt \quad (2.13)$$

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Où : 'a' détermine le facteur d'échelle. et 'b' détermine le temps.

Le facteur d'échelle 'a' exprime la compression de l'ondelette, si 'a' est petit alors l'ondelette sera de plus en plus compressée et la portion à comparer avec le signal sera petite (hautes fréquences), et inversement, si a est grand la portion du signal à étudier sera grande (basses fréquences).

-Transformée en ondelettes discrète DWT :

La DWT utilise des filtres miroirs en quadrature passe-bas et passe-haut en cascade; le principe consiste à décomposer le signal d'entrée à chaque étape en deux composants : Basses fréquences qui sont l'allure générale du signal, et hautes fréquences qui représentent les détails de ce signal



Fig(2.7) : Décomposition en ondelette

- Transformation polynomiale

La transformation polynomiale est faite en trois étapes :

- 1- Segmentation : division du signal en plusieurs segments, donc c'est le fenêtrage.
- 2-Décomposition : on décompose les fenêtres obtenues de la segmentation dans une base polynomiale des fonctions orthogonales.
- 3-Compression : chaque segment est représenté par le minimum de coefficients produits par la décomposition, c'est la compression.

II-4. Quantification vectorielle

La quantification est un processus irréversible qui entraîne une perte d'information. Dans toute technique de codage, on cherche donc à ne garder que l'information utile à la reconstitution du signal original. Il faut par conséquent introduire une mesure de précision, parfois appelée critère de fidélité ou de proximité liée à une notion de distance sur l'espace.

On voit alors apparaître l'objectif primordial et le problème fondamental de la quantification: la conception d'un quantificateur efficace qui pour un débit fixé minimise la distorsion totale calculée selon un critère déterminé.

Donc, la quantification vectorielle (VQ) consiste à représenter tout vecteur x de dimension k par un autre vecteur y de même dimension mais ce dernier appartenant à un ensemble fini Ψ de L vecteurs. Les vecteurs y_i sont appelés vecteurs représentants, vecteurs de reproduction ou code-vecteurs. Ψ est le dictionnaire ou le catalogue des formes.

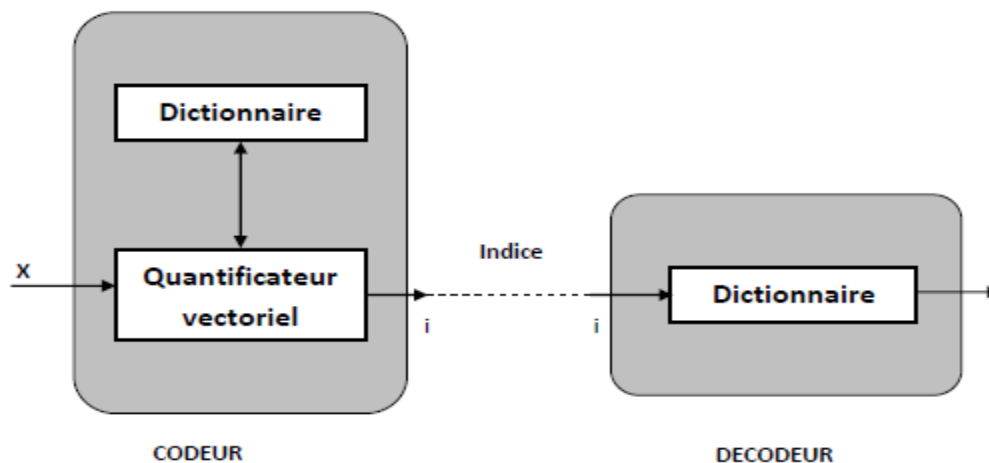
La quantification vectorielle offre la combinaison des opérations de codage et de décodage.

Codage

La procédure d'encodage consiste pour tout vecteur x du signal d'entrée à rechercher dans le dictionnaire Ψ le code-vecteur y_i le « plus proche » de x en choisissant la distance euclidienne la plus petite entre y_i et x . En pratique, dans plusieurs systèmes de communication, seul l'indice « i » de la séquence choisie y_i est transmis au décodeur qui choisit alors la séquence correspondante à cette valeur de l'indice.

Décodage

Le décodeur est considéré comme un récepteur chargé de la reconstruction du signal, pour cela il doit disposer d'une copie identique du dictionnaire qu'il consulte afin de restituer le code vecteur source correspondant à l'index qu'il reçoit. Le décodeur réalise l'opération de décompression.



Fig(2.8)Principe de la quantification vectorielle.

II-5. Critères de performance de la compression

II-5.1. L'inspection visuelle

Le premier critère d'évaluation du signal ECG reconstruit après compression est l'inspection visuelle. Le cardiologue qui est le principal utilisateur des électrocardiogrammes n'a que ses yeux pour apprécier le signal lors d'un diagnostic. Cette validation visuelle du signal compressé et reconstruit est donc soumise à beaucoup de subjectivité. Il existe tout de même des formules théoriques de calcul des distorsions du signal reconstruit

II-5.2. Le taux de compression (CR)

Il est défini comme étant le rapport entre le nombre de bits utilisés pour représenter le signal original et le nombre de bits nécessaires pour représenter le signal compressé.

$$CR = \frac{\text{Nbr de bits du signal original}}{\text{Nbr de bits signal compressé}} \quad (2.14)$$

II-5.3. Le pourcentage de la puissance d'erreur (PRD)

C'est la mesure de distorsion entre le signal original et le signal compressé. Il représente le pourcentage de l'erreur de compression.

$$PRD = 100 \times \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^N (x_i)^2}} \quad (2.15)$$

tel que :

x_i : les échantillons du signal original.

y_i : les échantillons après la reconstitution.

N : le nombre des échantillons dans le signal.

Conclusion :

L'enregistrement, le stockage et la transmission des signaux ECG sont des procédures complexes ; c'est pour cela que de nombreuses méthodes de traitement du signal ont été mises en œuvre spécifiquement pour l'ECG.

Dans ce chapitre, nous avons expliqué l'utilité et le besoin de l'une de ces méthodes de traitement de l'ECG, qui est la compression ; ce qui nous a mené à explorer, ne serait-ce que brièvement les multiples méthodes de compression.

Nous avons distingué, selon une catégorisation compacte, les méthodes de compression sans perte et celles avec perte.

Dans la catégorie des méthodes de compression sans perte, les données sont restaurées sans aucune altération. Ce type de compression est évidemment le plus désiré, mais les taux de décompression associés sont toujours modestes.

Dans la seconde catégorie, une marge de tolérance associée à l'erreur de reconstruction est précisée ; ce mode de compression est accepté par une large gamme de données, tels que les signaux biomédicaux.

Finalement nous avons vu que plus des critères généraux d'évaluation des algorithmes de compression, l'inspection visuelle du signal ECG reconstruit est indispensable afin de s'assurer de sa validité clinique.

Chapitre III:

LA THEORIE DES POLYNOMES

ORTHOGONAUX

III-1 INTRODUCTION

Un signal est représenté par une fonction mathématique d'une ou de plusieurs variables. On peut citer comme exemple une fonction de la variable temps dans le domaine temporel et une fonction de la variable fréquence dans le domaine spectral. L'analyse fonctionnelle est la branche des mathématiques qui étudie les espaces des fonctions. De nombreuses théories élaborées en analyse fonctionnelle sont exploitées dans le cadre du traitement de signal.

Les systèmes de fonctions orthogonales sont très utilisés en traitement de signal. C'est le cas des fonctions sinusoïdales qui sont à la base de la transformation de Fourier, des fonctions binaires orthogonales (fonctions de Walsh, fonctions de Haar, et aussi des bases orthogonales d'ondelettes. Les systèmes de polynômes orthogonaux n'ont pas connu beaucoup d'intérêt en traitement du signal, mais trouvent plus d'applications en physique : les polynômes de Legendre par exemple servent à résoudre l'équation de Laplace dans la sphère alors que les polynômes d'Hermite et les polynômes de Laguerre permettent de déterminer des solutions pour des cas particuliers des équations de Schrödinger.

Nous proposons d'étudier les polynômes orthogonaux dans ce chapitre du mémoire. Nous estimons qu'il faut bien connaître ces fonctions et leurs propriétés avant d'envisager leur utilisation pour la modélisation et la compression des signaux ECG.

III-2-1 Orthogonalité des fonctions

Soient deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ définies sur un intervalle réel ou complexe $[a, b]$, on définit leur produit scalaire par :

$$\langle g, h \rangle = \int_a^b g(x) \bar{h}(x) dx \quad (3.1)$$

Les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont orthogonales si leur produit scalaire est nul. De même, une famille de fonction $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ avec n fini ou infini, constitue une famille orthogonale Si

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_l(x)} dx = 0 \quad \text{si } k \neq l \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, n; \quad (3.2)$$

Par extension, soit μ une mesure de Borel (mesure non négative) sur un intervalle réel $[a, b]$, on définit le produit scalaire de deux fonction $g(x)$ et $h(x)$ suivant la distribution $d\mu$ par :

$$\langle g, h \rangle = \int_a^b g(x) \overline{h(x)} d\mu(x) \quad (3.3)$$

Nous rappelons que l'espace $L^2_\mu [a, b]$ est constitué des fonctions $f(x)$ telles que :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \quad (3.4)$$

Deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ éléments de $L^2_\mu [a, b]$ sont orthogonales si leur produit scalaire est nul. Très souvent, la distribution $d\mu(x)$, est déterminée à travers une fonction poids $\omega(x)$:

$$d\mu(x) = \omega(x)dx \quad (3.5)$$

Une famille de fonctions libre et infinie $\{f_k\}$ se laisse orthogonaliser en une autre famille $\{\varphi_k\}$. La méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt se résume par les étapes suivantes:

- prendre $\varphi_1 = f_1$,

- faire $\varphi_2 = f_2 - \lambda_{21}\varphi_1$. ; λ_{21} est choisi de telle sorte que $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$, donc

$$\langle f_2 - \lambda_{21}\varphi_1, \varphi_1 \rangle = 0, \text{ d'ou } \lambda_{21} = \frac{\langle f_2, \varphi_1 \rangle}{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle} \quad (3.6)$$

- par récurrence, on détermine :

$$\varphi_k = f_k - \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{kl}\varphi_l \quad (3.7)$$

$$\text{Avec } \lambda_{kl} = \frac{\langle f_k, \varphi_l \rangle}{\langle \varphi_l, \varphi_l \rangle} \quad (3.8)$$

Avec le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on peut construire à partir de toute famille libre de fonctions $g_0(x), g_1(x), \dots, g_n(x)$, une famille orthogonale de fonctions $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$. On démontre que :

$$\varphi_k(x) = (D_{k-1}D_k)^{-\frac{1}{2}}D_k \text{ pour } k \geq 1; \quad (3.9)$$

Les déterminants D_k sont définis positifs. Leur expression est donnée ci-après :

$$D_k = \begin{bmatrix} \langle g_0, g_0 \rangle & \cdots & \langle g_0, g_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_0(x) & \cdots & g_k(x) \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } D_{-1} = 1 \text{ et } D_0(x) = g_0(x) \quad (3.10)$$

III-2-2 Familles de polynômes orthogonaux

Considérons une fois de plus l'espace $L^2_\mu[a, b]$ des fonctions telles que $\int_a^b |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty$ où μ une mesure de Borel (non négative) sur l'intervalle $[a, b]$ telle que $\mu[a, b] < \infty$. $d\mu$ est une distribution et, si les moments $C_k = \int_a^b x^k d\mu(x)$ existent, alors l'orthogonalisation de la famille des polynômes : $1, X, X^2, \dots, X^k, \dots$ par le procédé de Schmidt conduit à la famille de polynômes : $p_0(x), p_1(x), \dots, p_k(x), \dots$ déterminée de façon univoque par les conditions suivantes :

- $p_k(x)$ est un polynôme de degré k dont le coefficient du monôme x^k est positif

- le système $\{p_k(x)\}$ est orthogonal $\int_a^b p_k(x)p_l(x) d\mu(x) = 0$ si $k \neq l$

L'existence des moments traduit le fait que les monômes X^k appartiennent à $L^1_\mu[a, b]$. Cette définition des polynômes orthogonaux reste valable si la distribution est du type $\omega(x)dx$. Dans ce cas, $\omega(x)$ est une fonction non négative: C'est la fonction poids. Avec une distribution de type $\omega(x)dx$, le système $\{[\omega(x)]^{1/2}p_k(x)\}$ est orthonormé. On détermine les expressions analytiques des polynômes orthogonaux $p_k(x)$ avec :

$$p_k(x) = (D_{k-1}D_k)^{-1/2} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{k+1} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \dots & c_0 \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^k \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Par exemple, on construit les polynômes orthogonaux classiques par l'orthogonalisation de la famille des polynômes : $1, x, x^2, \dots, x^k, \dots$ dans les conditions suivantes :

-polynômes de Jacobi $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$:

$$A=-1, b=1, \omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \text{ avec } \alpha > -1 \text{ et } \beta > -1$$

-polynômes de Laguerre $L_k^\alpha(x)$:

$$a = 0, b=+\infty, \omega(x) = e^{-x}x^\alpha, \text{ avec } \alpha > -1,$$

-Polynômes d'Hermite $H_k(x)$,

$$\text{An } a=-\infty, b=+\infty, \text{ et } \omega(x) = e^{-x^2}$$

III-3 PROPRIETES COMMUNES AUX POLYNOMES ORTHOGONAUX

III-3-1 Relations de récurrence et formule de Darboux-Christoffel

Trois polynômes orthogonaux d'une même famille quelconque, de degrés successifs, sont liés par une relation de récurrence :

$$tp_n(t) = a_n p_{n+1}(t) + b_n p_n(t) + c_n p_{n-1}(t)$$

$$\text{Si } p_n(t) = j_n t^n + k_n t^{n-1} + \dots; \quad (3.12)$$

C'est-à-dire que j_n et k_n sont respectivement les coefficients de t^n et t^{n-1} , on détermine les coefficients de la relation de récurrence par :

$$a_n = \frac{j_n}{j_{n+1}}, \quad b_n = \frac{k_n}{j_n} - \frac{k_{n+1}}{j_{n+1}}, \quad c_n = \frac{j_{n-1}}{j_n} \cdot \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}$$

De la relation de récurrence découle la formule de Darboux-Christoffel qui est très importante en théorie des polynômes orthogonaux:

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(t)p_k(\xi)}{\|p_k\|^2} = \frac{a_n}{\|p_n\|^2} \frac{p_{n+1}(t)p_n(\xi) - p_n(t)p_{n+1}(\xi)}{t-\xi} \quad (3.13)$$

III-4 DEVELOPPEMENT EN SERIES DE POLYNOMES ORTHOGONAUX

III-4-1 Notions de séries de Fourier dans les espaces de Hilbert

Soit un espace E de dimension infinie muni d'un produit scalaire. Si l'on considère une famille orthogonale $\{\varphi_k\}_{k=1,2, \dots}$, on peut toujours mettre un élément quelconque x de E sous forme d'une combinaison linéaire des éléments de $\{\varphi_k\}$:

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k \quad (3.14)$$

La relation est le développement de x en série de Fourier suivant la famille $\{\varphi_k\}$. C'est l'équivalent en géométrie, de la décomposition d'un vecteur en ses coordonnées suivant les vecteurs de la base. La détermination des coefficients de Fourier c_k est très simple, en effet, prenons le produit scalaire :

$$\langle X, \varphi_k \rangle = \langle \sum_{l=1}^{\infty} C_l \varphi_l, \varphi_k \rangle = \sum_{l=1}^{\infty} C_l \langle \varphi_l, \varphi_k \rangle = C_k \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle \quad (3.15)$$

puisque $\langle \varphi_l, \varphi_k \rangle = 0$ pour $k \neq l$, on détermine alors C_k :

$$C_k = \frac{\langle X, \varphi_k \rangle}{\|\varphi_k\|^2}$$

Le polynôme $\sum_{k=1}^n C_k \varphi_k$ qui est une somme partielle de la série de Fourier est appelé polynôme de Fourier de x .

Soit L_n un sous-espace de E engendré par les vecteurs $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$; la distance $d_n = \rho(x, L_n)$ avec $x \in E$ se définit par les égalités suivantes :

$$d_n = \left\| X - \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k \right\|$$

$$d_n^2 = \|X\|^2 - \sum_{k=1}^n |C_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \quad (3.16)$$

C_k sont des coefficients de Fourier suivant $\{\varphi_k\}$

Comme $d_{n \geq 0}^2$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^n |C_k|^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \|X\|^2$$

Le premier membre de cette inégalité est une somme partielle de la série numérique à termes positifs $\sum_{k=1}^{\infty} C_k \phi_k$. La majoration reste vraie pour n quelconque, d'où :

$$\sum_{k=1}^n |C_k|^2 \|\phi_k\|^2 \leq \|X\|^2$$

Nous obtenons l'inégalité de Bessel, qui reste vraie pour toute famille orthogonale dans n'importe quel espace de dimension infinie muni de produit scalaire.

III-4-2 Cas des polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux constituent des familles libres des espaces $L^2_{\mu}[a, b]$ avec $d\mu(x) = \omega(x)dx$. Pour qu'une fonction arbitraire quelconque $g(t)$ puisse être développée en série de Fourier suivant une famille de polynômes orthogonaux, il faut donc que

$$g(t) \in L^2_{\mu}[a, b] \text{ soit } \int_a^b |g(t)|^2 \omega(t) dt < \infty$$

Si $g(t)$ satisfait la condition précédente, on dit que c'est une fonction de carré intégrable ; en théorie du signal, $g(t)$ correspond à un signal à énergie finie.

Lorsque ce premier critère est respecté, il reste à vérifier si les séries de Fourier suivant les familles de polynômes orthogonaux convergent ; il faut donc rechercher les conditions sous lesquelles les polynômes orthogonaux constituent des bases orthogonales.

La relation :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[g(t) - \sum_{k=0}^n C_k p_k(t) \right]^2 \omega(t) dt = 0$$

est vérifiée pour $g(t)$ de carré intégrable lorsque le système $\{p_k(t)\}$ est complet. Tout système de fonctions complet doit être nécessairement fermé ; cela signifie que :

Si $\int_a^b g(t) p_k(t) \omega(t) dt = 0$ alors $g(t) = 0$ pour $t \in]a, b[$

III-5 : CARACTERISTIQUES DE QUELQUES POLYNOMES ORTHOGONAUX

III-5-1 Caractéristiques des polynômes de Jacobi $P_k^{(\alpha, \beta)}(t)$:

Les polynômes de Jacobi de degré 0 et de degré 1 sont respectivement :

$$P_0^{(\alpha, \beta)}(t) = 1 \text{ et } P_1^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{\alpha + \beta + 2}{2} t + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Les coefficients de la relation de récurrence sont :

$$a_n = \frac{2(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 2)}$$

$$b_n = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 2)}$$

$$c_n = \frac{2(n + \alpha)(n + \beta)}{(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 1)}$$

L'expression de la norme est :

$$\|P_n^{(\alpha, \beta)}\|^2 = \frac{2^{(\alpha+\beta+1)}\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{n!(2n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$$

Ou $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ est la fonction gamma.

-Les polynômes de Tchebychev de 1ère espèce :

$$T_n(t) = \frac{n!}{(\frac{1}{2})_n} P_n^{(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})}(t) = \cos n\theta$$

Avec $\theta = \cos(\arccos(t))$, et la notation $(\frac{1}{2})_n$ signifie:

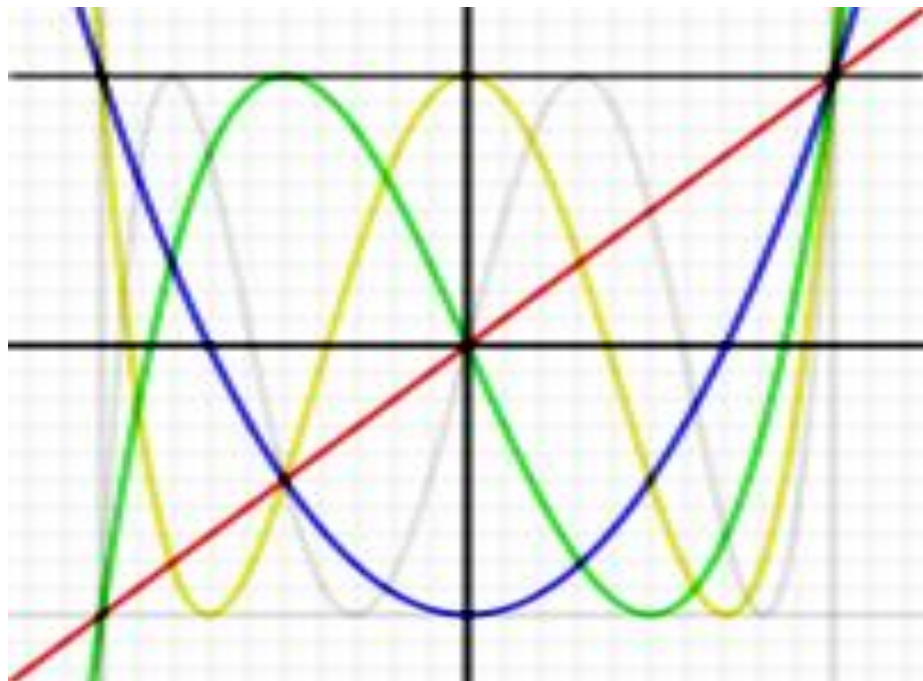
$$(\frac{1}{2})_n = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 2\right) \dots \left(\frac{1}{2} + n - 1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

La figure 2-2 présente les allures de quelques polynômes de Tchebychev. Les polynômes de Tchebychev sont très utilisés pour l'approximation des fonctions. Le tableau 3-1 récapitule les caractéristiques essentielles des polynômes de Jacobi en général et celles des polynômes de Legendre et de Tchebychev en particulier.

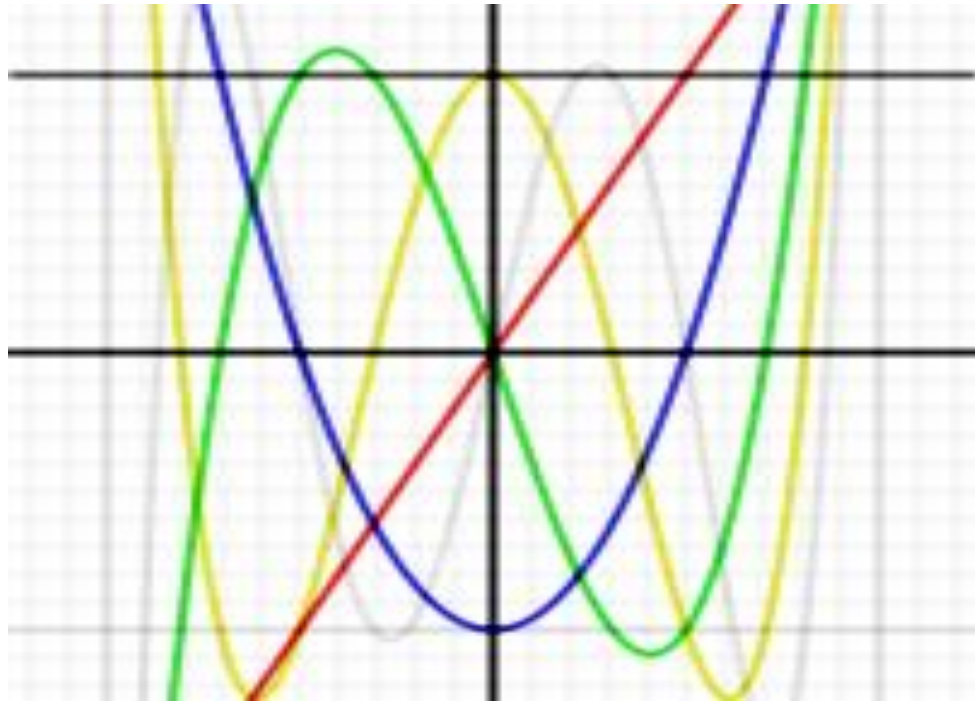
$y_n(t)$	Cas général $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$	Polynômes de Legendre $P_n(t) = P_n^{(0,0)}(t)$	Polynômes de Tchebychev 1 $T_n(t) = -$ $\frac{n!}{(\frac{1}{2})_n} P_n^{(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})}(t)$
Intervalle d'étude	$] -1, +1[.$	$[-1, +1]$	$] -1, +1[.$
Fonction poids	$\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ $\alpha > -1$ et $\beta > -1$	$\omega(x) = 1.$	$\omega(x) = (1 - X^2)^{-\frac{1}{2}}$
la norme	$\ P_n^{(\alpha, \beta)}\ ^2 =$ $\frac{2^{(\alpha+\beta+1)}\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{n!(2n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$	$h_n = \frac{2}{2n + 1}$	$h_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n \neq 0 \\ \pi & n = 0 \end{cases}$

Formule de récurrence	$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (2n+\alpha+\beta+1)[(\alpha^2-\beta^2) + (2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ $P_0^{(\alpha,\beta)}(x)=1$ $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = (1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta))x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$	$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$ $P_0=1$ $P_1= x$	$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}$ $T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$
-----------------------	--	--	--

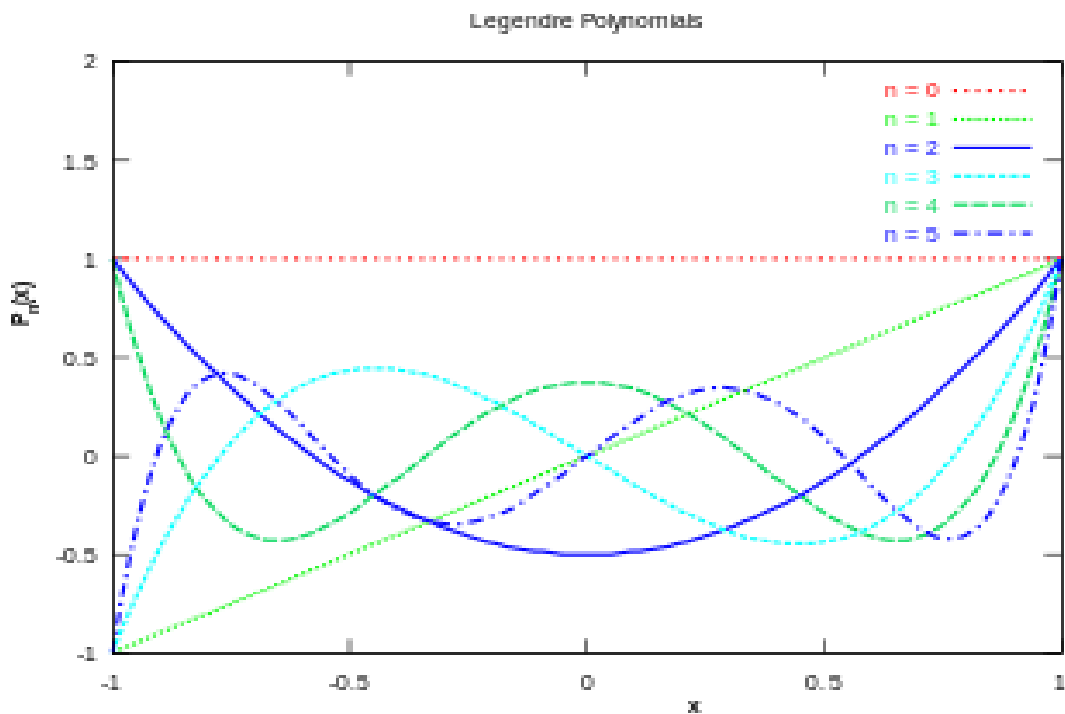
Tableau 3-1 : Caractéristiques principales des polynômes de Jacobi



Fig(3.1) :Les premiers polynômes de Tchebychev de première espèce sur le domaine $-1/4 < x < 1/4, -1/4 < y < 1/4$; la fonction constante T_0 , et T_1, T_2, T_3, T_4 et T_5 .



Fig(3.2) :Les premiers polynômes de Tchebychev de seconde espèce sur le domaine $-1/4 < x < 1/4$, $-1/4 < y < 1/4$; la fonction constante U_0 , et U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5



Fig(3.3) :Polynômes de Legendre.

III-6 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons vu et étudié les principaux résultats qui caractérisent les polynômes orthogonaux. Nous n'avons pas détaillés certaines démonstrations assez abstraites. Au contraire, nous avons insisté sur les aspects applicatifs des polynômes orthogonaux. C'est ainsi qu'après avoir identifié les fonctions qui forment les familles de polynômes orthogonaux, nous avons présenté directement leurs propriétés communes et leurs caractéristiques essentielles.

Chapitre IV:

APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

IV.1.Introduction

Après avoir étudié l'anatomie du cœur et le signal ECG dans le premier chapitre, et aussi donner des généralités sur la théorie de l'information et les méthodes de compression dans le deuxième chapitre, nous avons vu l'essentiel sur les transformations et les polynômes orthogonaux dans le troisième chapitre, dans ce dernier chapitre nous allons procéder à l'application de nos méthodes étudiées au paravant, pour cela nous allons utiliser trois polynômes (Legendre et Tchebychev $1et2$), et nous termineront par les discussions des résultats, sur la base de données MIT/BIH.

IV.2. Présentation de la base de données MIT/BIH

La base de données physiologiques MIT/ BIH est le fruit d'une collaboration entre le Massachusset Institute of technology et un hôpital. Elle a été réalisée entre 1975 et 1979 et distribuée en 1980. La source de l'ECG inclus dans la base de données d'arythmies MIT/BIH est un ensemble de 48 enregistrements échantillonnés à une fréquence de 360 Hz. Chaque enregistrement comporte deux dérivations différentes du signal ECG. La base de données contient 23 enregistrements numérotés entre 100 et 124 pour le premier groupe; et de 25 enregistrements numérotés entre 200 et 234 pour le deuxième groupe. La durée de chacun des 48 enregistrements est de 30 minutes. Le premier groupe est prévu pour servir d'échantillon représentatif de variété de formes d'ondes qu'un détecteur d'arythmie pourrait rencontrer dans l'utilisation clinique courante; tandis que le deuxième groupe est choisi pour inclure une variété de cas pathologiques. Les sujets étaient 25 hommes âgés de 32 à 89 ans, et 22 femmes âgées de 23 à 89 ans. Les enregistrements de MIT/BIH sont tous annotés; ce qui veut dire que chaque battement (complexe QRS) est décrit par une étiquette (annotation). Typiquement, un fichier d'annotation pour un enregistrement MIT/BIH contient environ 2000 annotations. [10]

IV.3. Présentation de l'algorithme de compression

L'algorithme de compression est par transformée dans des espaces définis par une base polynomiale, les résultats sont des coefficients qui représentent le signal dans l'espace de la projection, pour la reconstruction il suffit de choisir les coefficients de grande valeur, cela veut dire avoir une grande quantité d'énergie du signal, la distribution des coefficients est décroissante en fonction de leurs indices, donc il suffit de prendre les K premiers coefficients, est le taux de compression $CR=N/K$ si le signal original est de N échantillons, les critères

Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

de la comparaison entre les méthodes sont le pourcentage de la puissance d'erreur PRD et le temps d'exécution des programmes de la compression.

Si l'ordinateur représente les coefficients et les échantillons du signal dans le même format, c'est-à-dire qu'il utilise le même nombre de bits par échantillon que le même nombre de bits par coefficient, le taux de compression revient simplement au rapport du nombre d'échantillons contenus dans le signal sur le nombre de coefficients utilisés pour représenter ce signal.

Nous allons utiliser le fichier 100.txt qui était prélevé de la base de donnée MIT-BIH Arrhythmia mais nous allons utiliser seulement les N premiers échantillons qui sont échantillonnés à la fréquence de 360 Hz, puis la génération des polynômes orthogonaux jusqu'à un ordre déterminer, pour cela on utilise formule de récurrence exemple :

Tchebychev 1 : $T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}$, avec $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$.

$T_0(x) = 1 ; \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots T_k(x) \dots$

Après avoir terminé la génération des polynômes orthogonaux nous allons passer à la normalisation, c'est-à-dire construire une base orthogonale normé $\varphi_k = \frac{p_k}{\sqrt{E_k}}$

φ_k : La base orthogonale normée d'ordre k.

p_k : Le polynôme orthogonal d'ordre k.

E_k : L'énergie du polynôme.

L'étape suivante est la projection de notre signal avec le produit scalaire entre le signal et les bases le résultat est un ensemble $\{c_k\}$ $k=1 \dots dpm$,

Avec : $c_k = \int_a^b s(x) \varphi_k(x) dx$

φ_k : La base orthogonale normée d'ordre k.

$s(x)$: Le signal originel.

c_k : Le coefficient de polynôme.

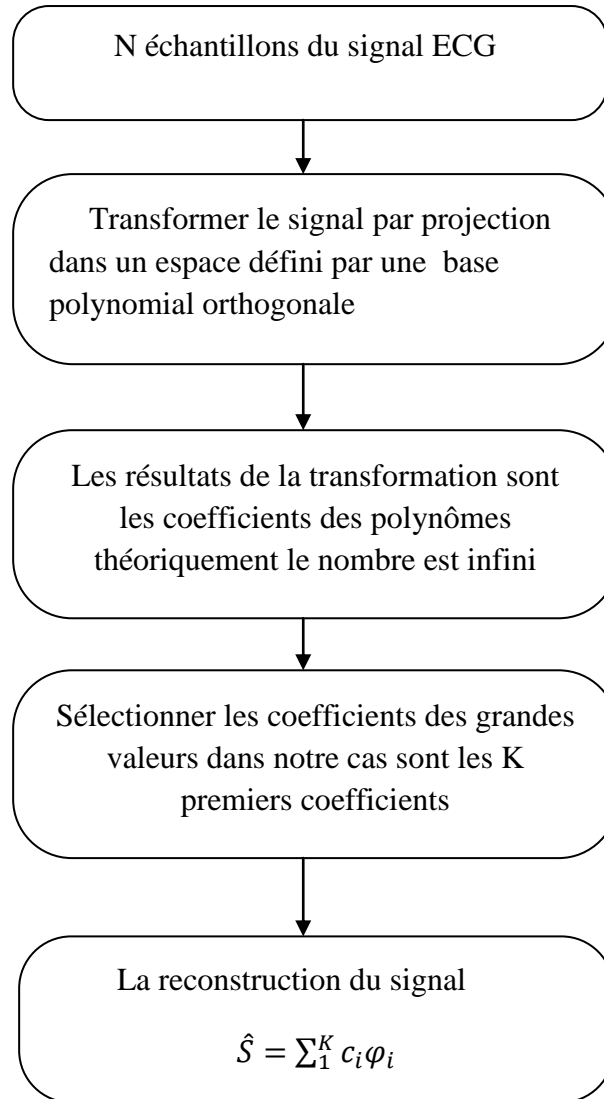
dpm : le degré maximum de polynôme de la base.

Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

Le signal reconstruit

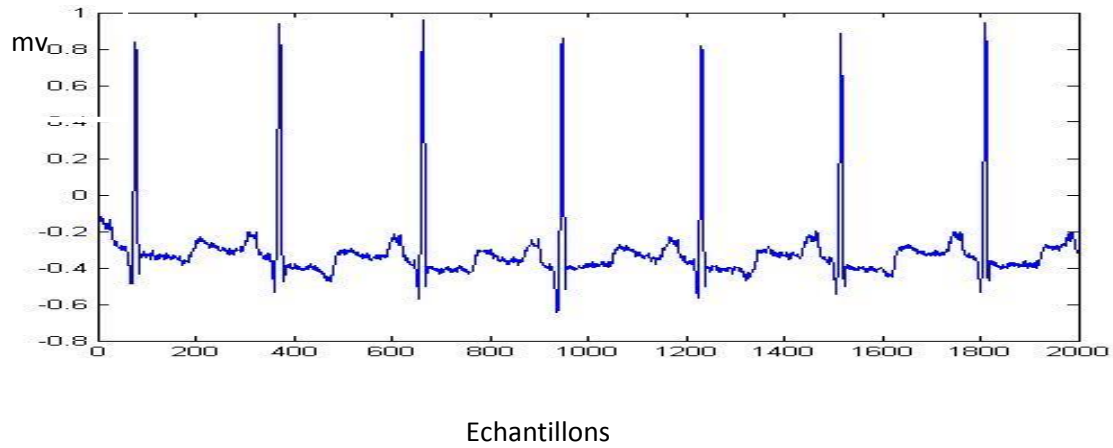
$$\hat{S} = \sum_1^{dpm} c_k \varphi_k$$

Organigramme



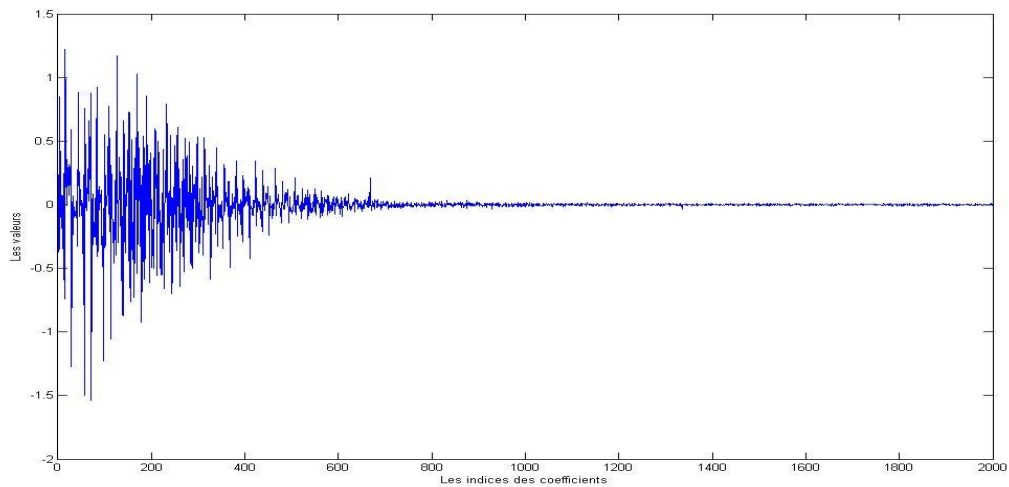
IV.4 Application

IV.4.1 signal sans bruit



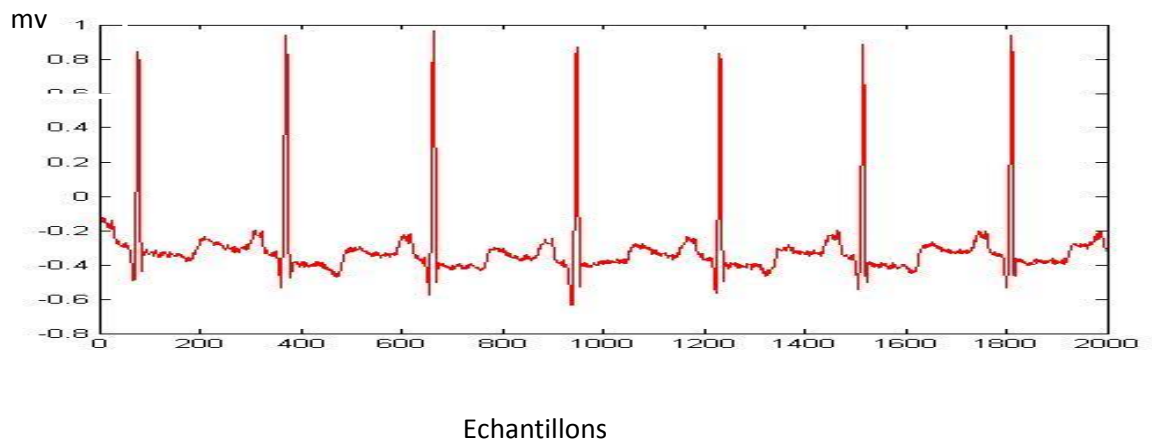
Fig(4.1) : Signal réel

-Signal compressé par la méthode de Tchebychev 1^{er} espèce

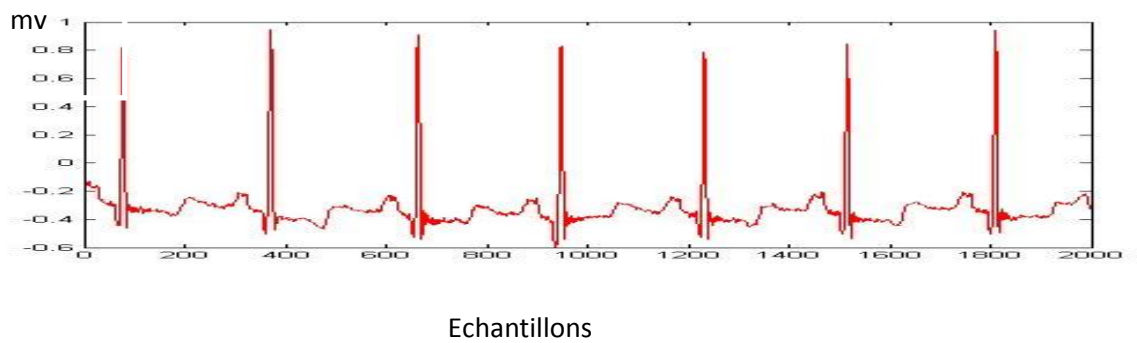


Fig(4.2) : les coefficients des polynômes de Tchebychev 1^{ière} espèce

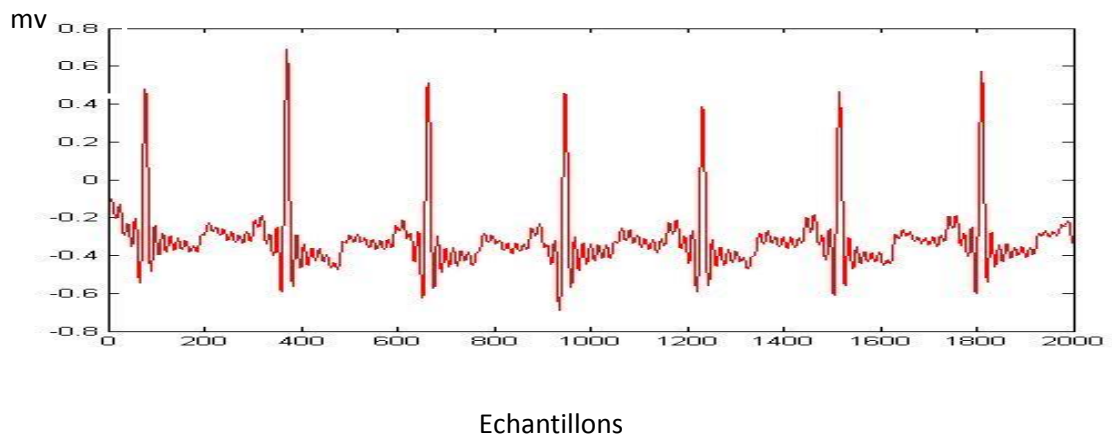
Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS



Fig(4.3.a) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 1 (CR=2 , PRD=2.07%)



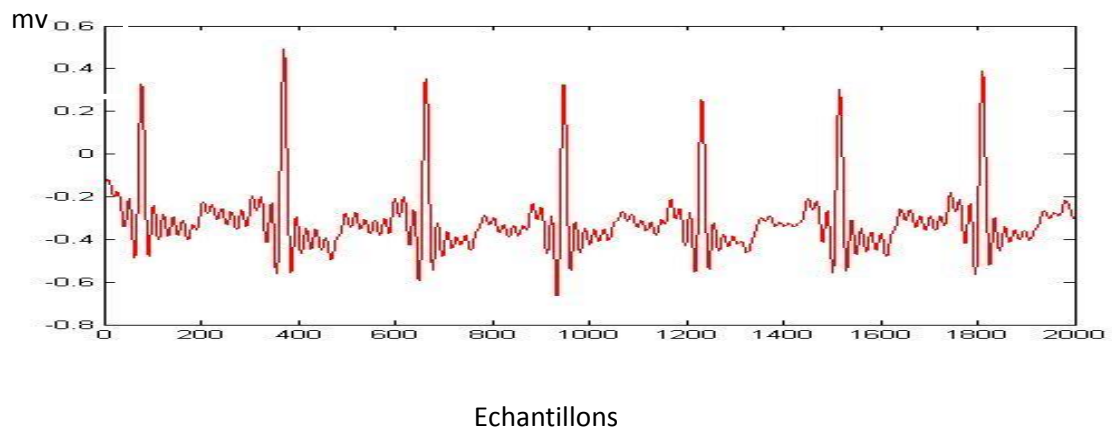
Fig(4.3.b) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 1 (CR=4 , PRD=4.88%)



Fig(4.3.c) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 1 (CR=8 , PRD=23.76%)

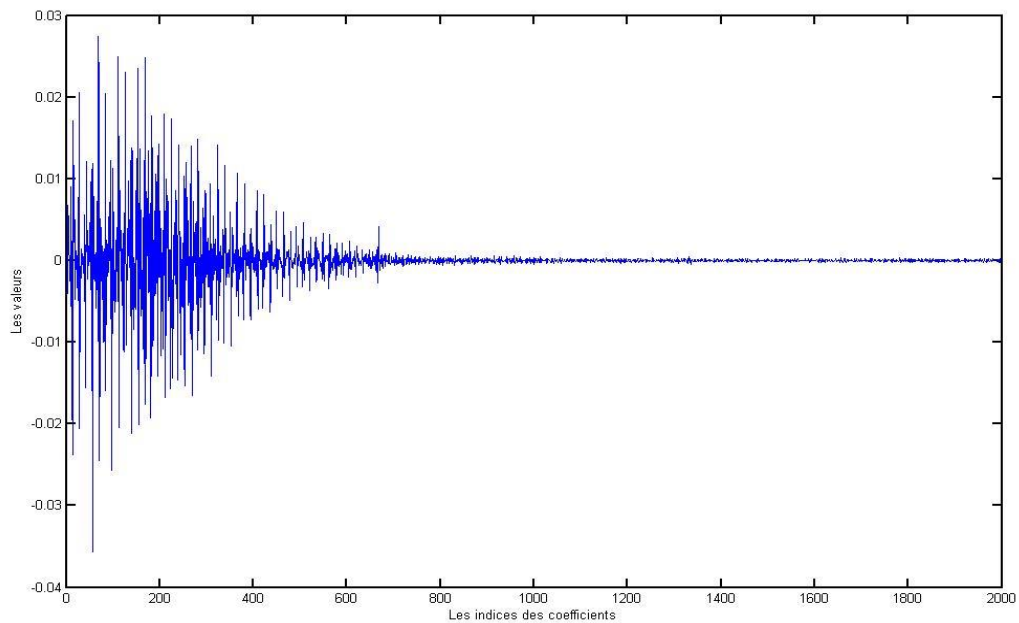
mv

Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS



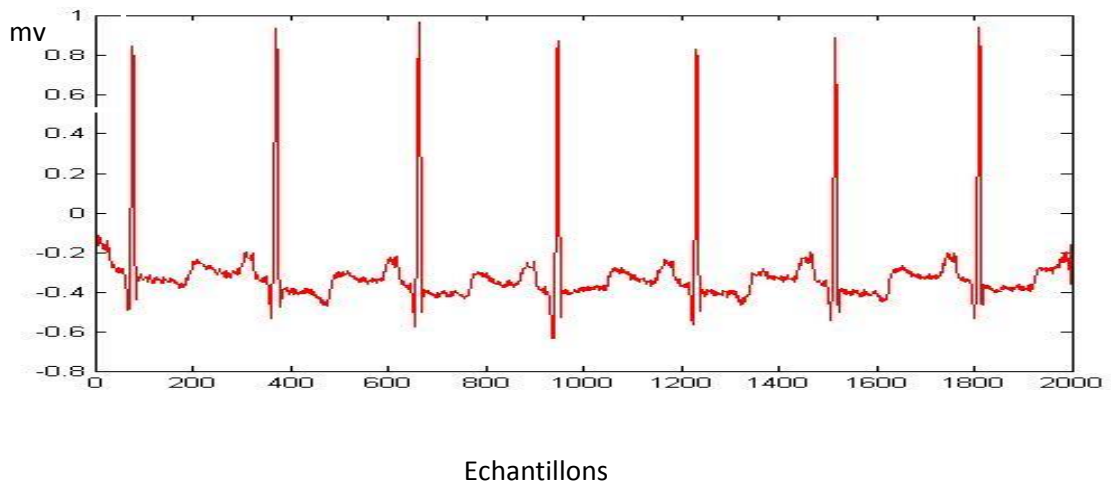
Fig(4.3.d) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 1 (CR=10 , PRD=31.39%)

-Signal compressé par la méthode de Tchebychev 2^{ième} espèce

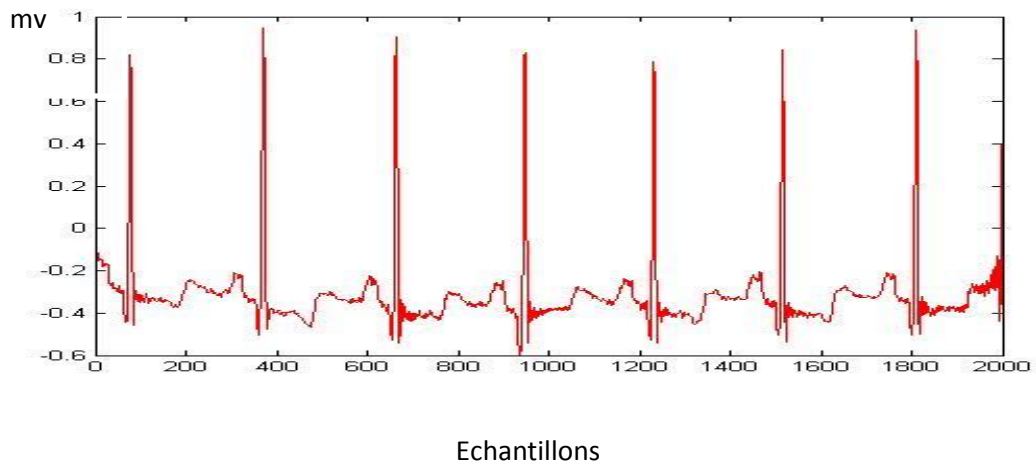


Fig(4.4) :les coefficients des polynômes de Tchebychev 2^{ième} espèce

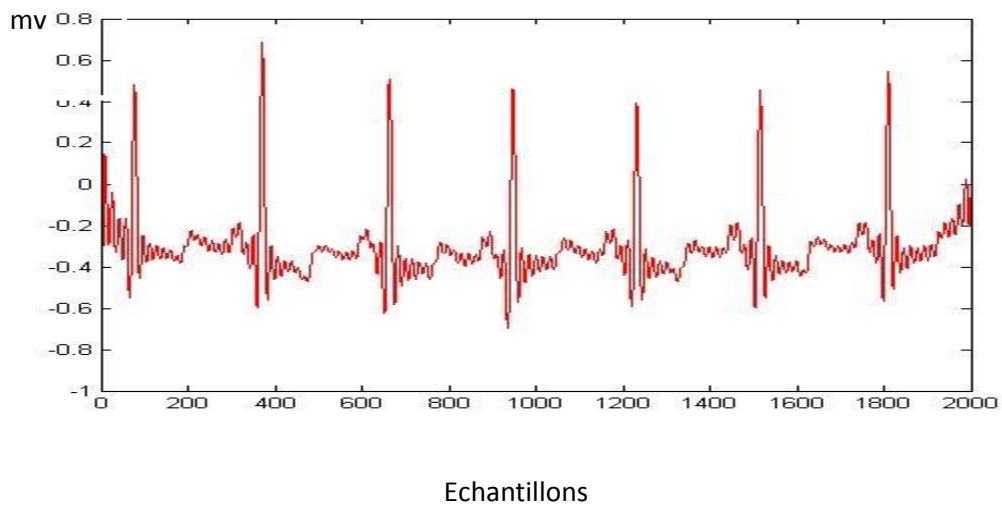
Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS



Fig(4.5.a) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 2 (CR=2 , PRD=6.13)

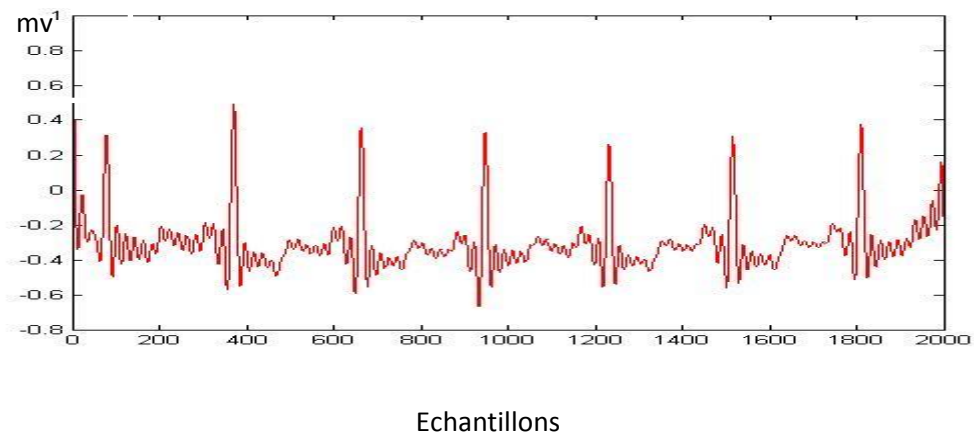


Fig(4.5.b) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 2 (CR=4 , PRD=37.25)



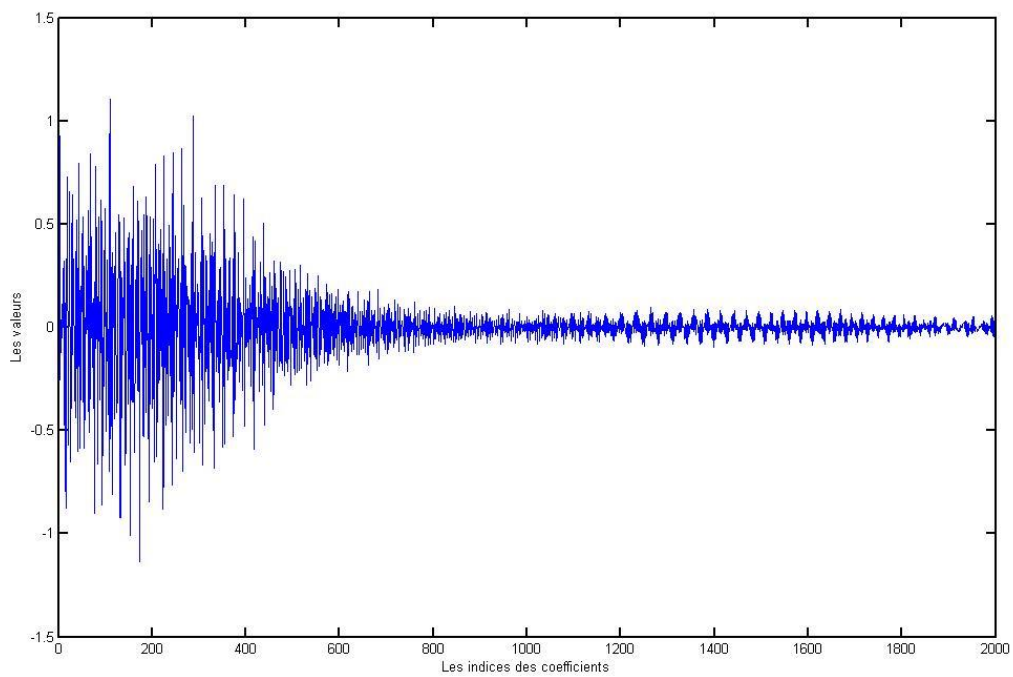
Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

Fig(4.5.c) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 2 (CR=8 , PRD=22.08)



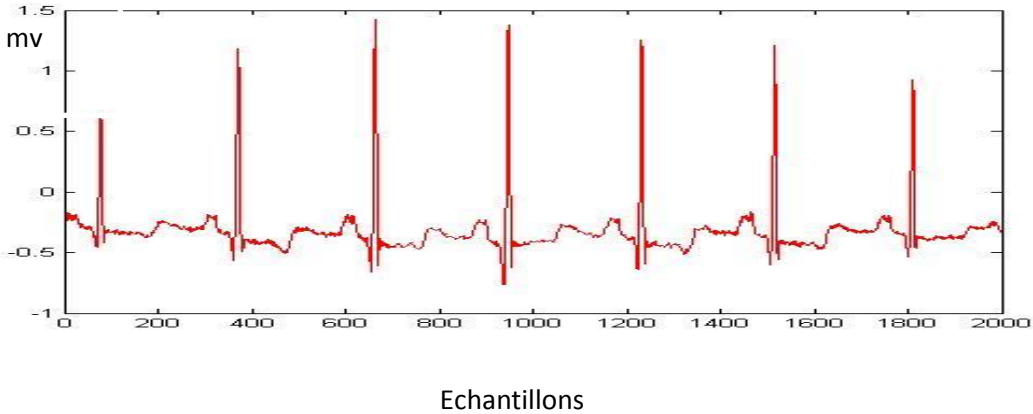
Fig(4.5.d) : signal compressé avec le polynôme Tchebychev 2 (CR=10, PRD=37.25)

-Signal compressé par la méthode de Legendre

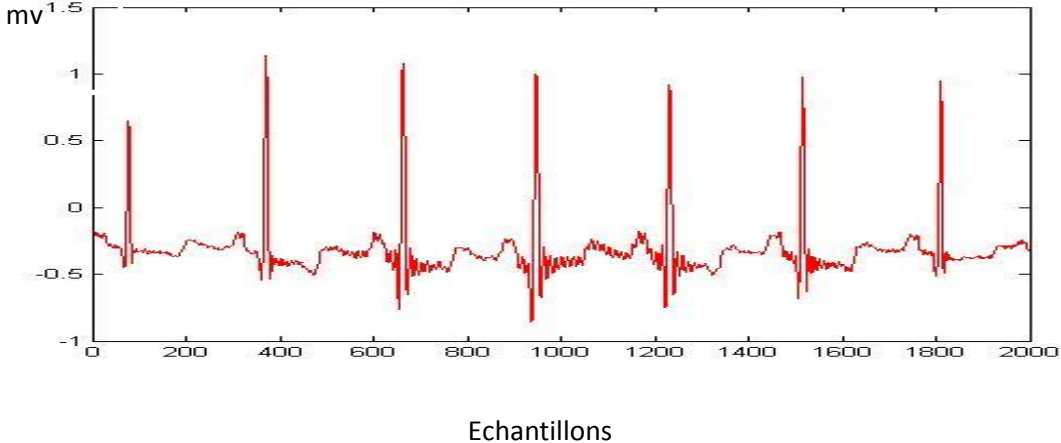


Fig(4.6) : les coefficients des polynômes de Legendre

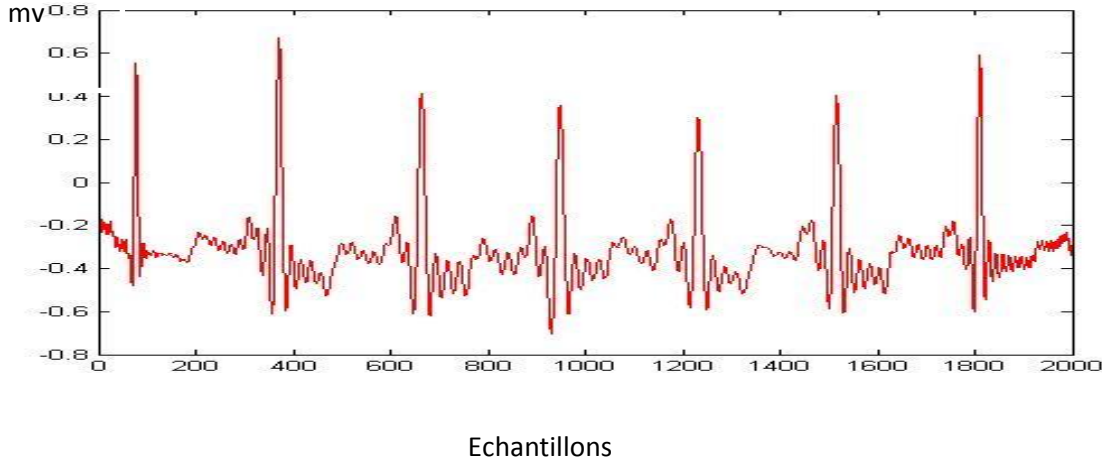
Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS



Fig(4.7.a) : signal compressé avec le polynôme Legendre (CR=2, PRD=30%)

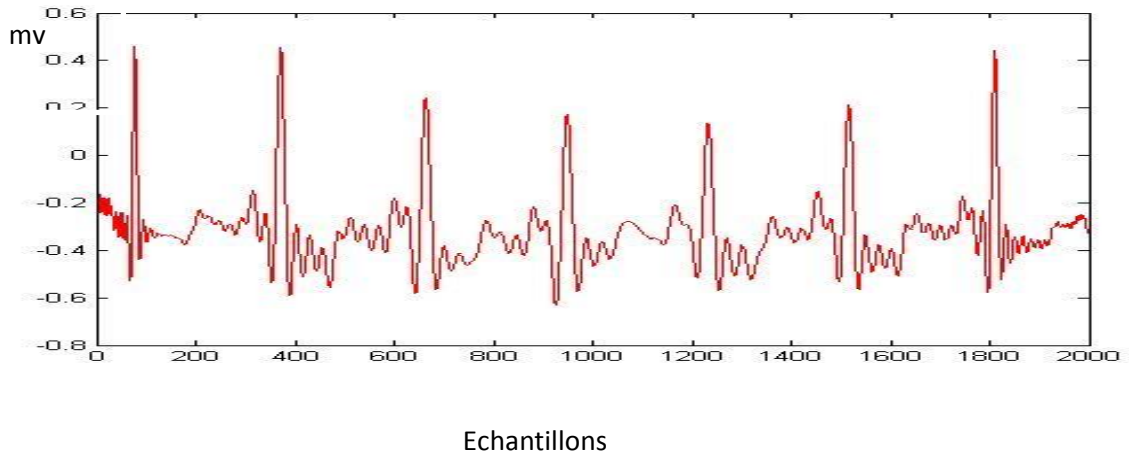


Fig(4.7.b) : signal compressé avec le polynôme Legendre (CR=4, PRD=37.25%)



Fig(4.7.c) : signal compressé avec le polynôme Legendre (CR=8, PRD=47.07%)

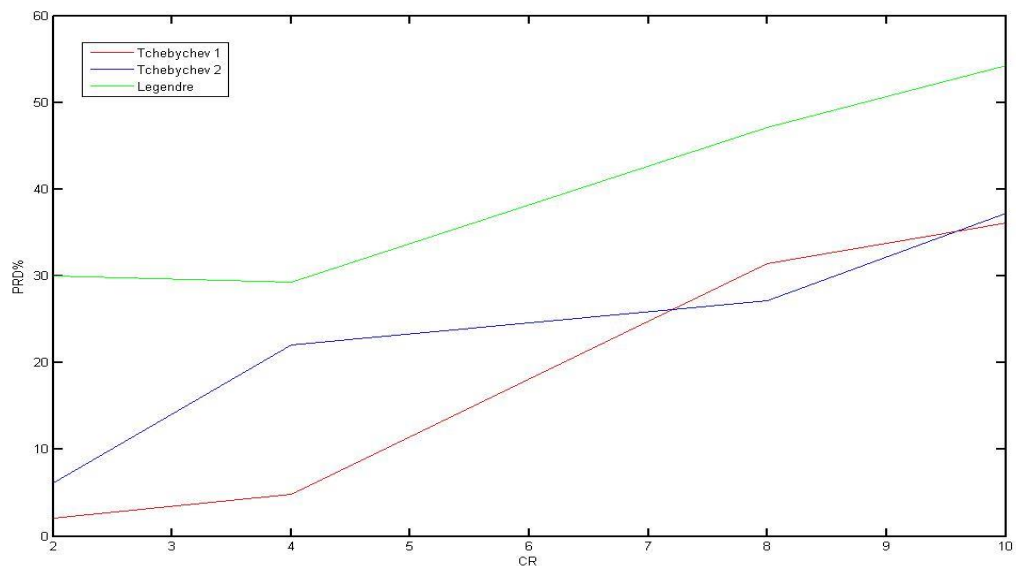
Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS



Fig(4.7.d) : signal compressé avec le polynôme Legendre (CR=10, PRD=54.24%)

CR	Tchebychev 1 PRD%	Tchebychev 2 PRD%	Legendre PRD%
2	2.07	6.13	30.01
4	4.88	22.06	29.29
8	31.46	27.12	47.07
10	36.10	37.25	54.24

Tableau (4.1) : la variation de l'erreur PRD % en fonction de la compression CR

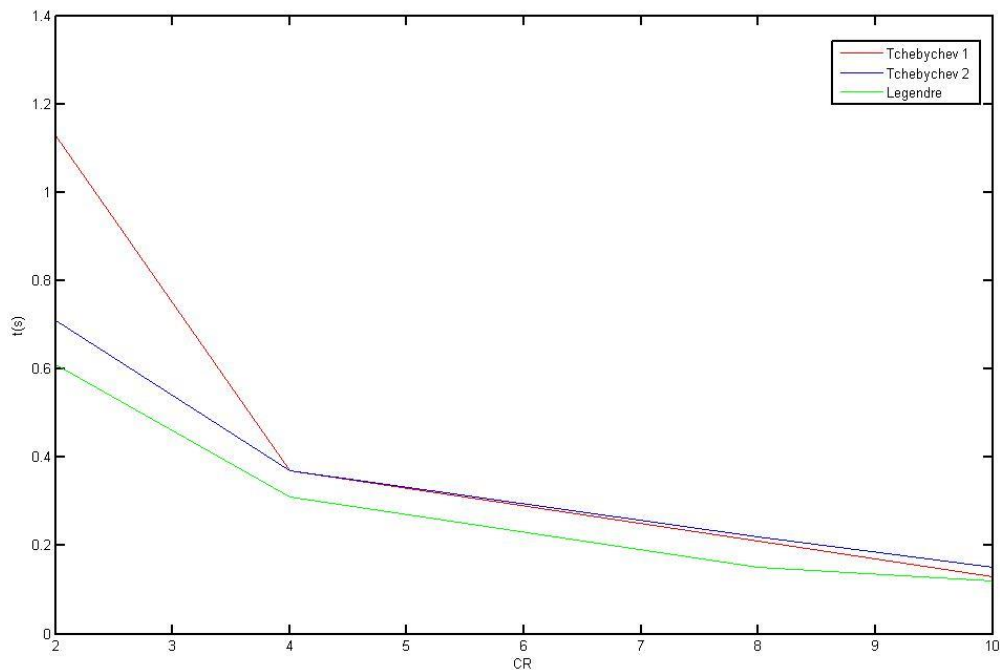


Fig(4.8) : la variation de l'erreur PRD % en fonction de la compression CR

Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

CR	Tchebychev 1 t(s)	Tchebychev 2 t(s)	Legendre t(s)
2	1.13	0.71	0.61
4	0.37	0.37	0.31
8	0.21	0.22	0.15
10	0.13	0.15	0.12

Tableau (4.2) :la variation de temps de compression en fonction de la compression CR



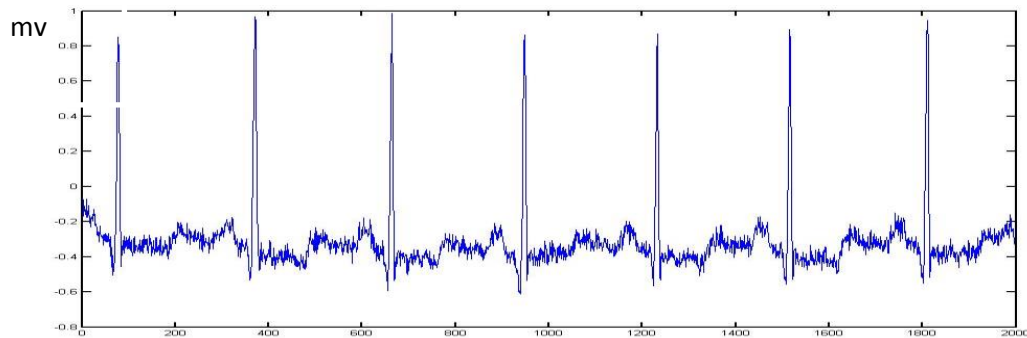
Fig(4.9) : la variation du temps de compression en fonction de la compression CR

IV.4.2 signal avec bruit

En pratique, les signaux collectés sont souvent contaminés par des bruits tels que le bruit de fond au niveau des capteurs. C'est pourquoi, le test de la réponse des algorithmes de traitement aux signaux bruités est très important. Dans cette section, on excite nos algorithmes par un signal ECG bruité et on présente les résultats sous forme des courbes

Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

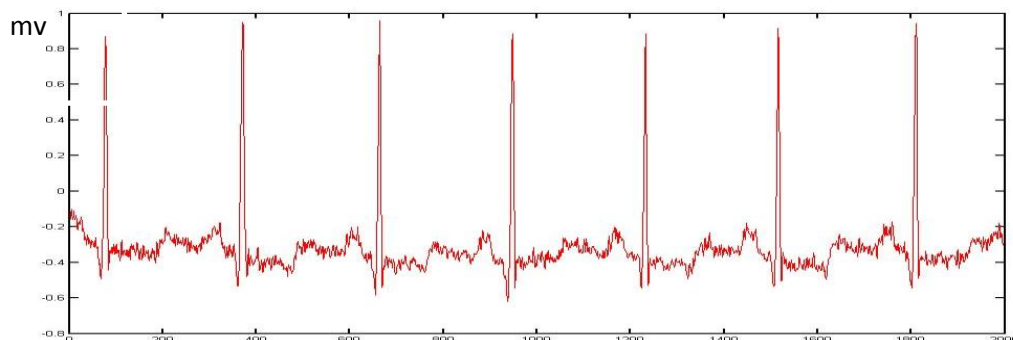
(signal reconstruit), ainsi que les critères objectifs (rapport de compression: CR, et le pourcentage d'erreur: PRD).



Echantillons

Fig(4.10) : Signal fortement bruité

- -Signal compressé par la méthode de Tchebychev 1^{er} espèce

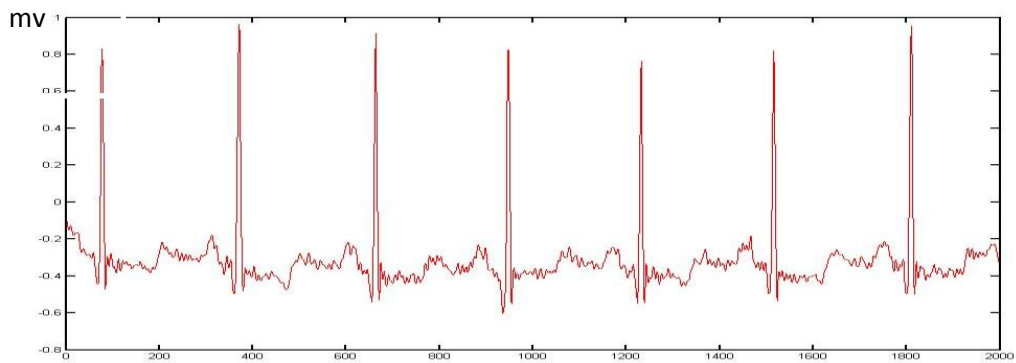


Echantillons

Fig(4.11.a) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 1 (CR=2, PRD=2.69%)

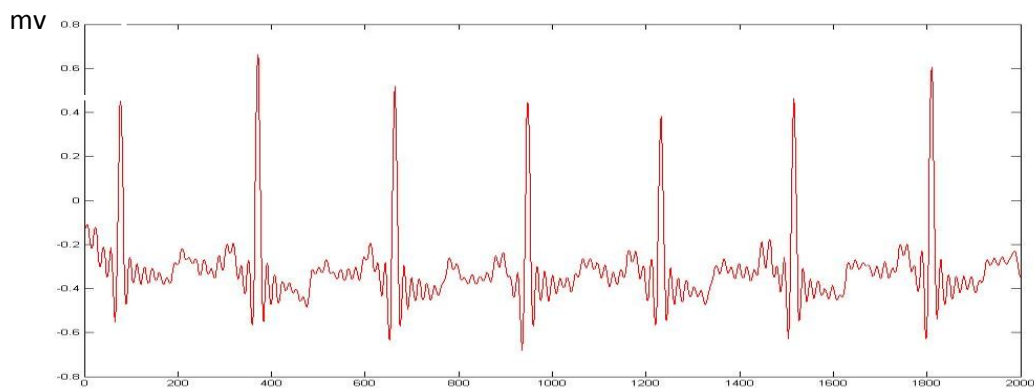
mv

Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS



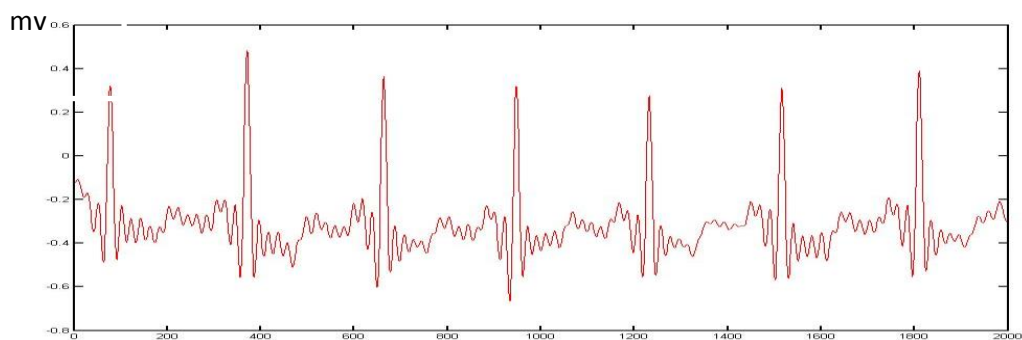
Echantillons

Fig(4.11.b) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 1 (CR=4 , PRD=7.01%)



Echantillons

Fig(4.11.c) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 1 (CR=8 , PRD=24.21%)

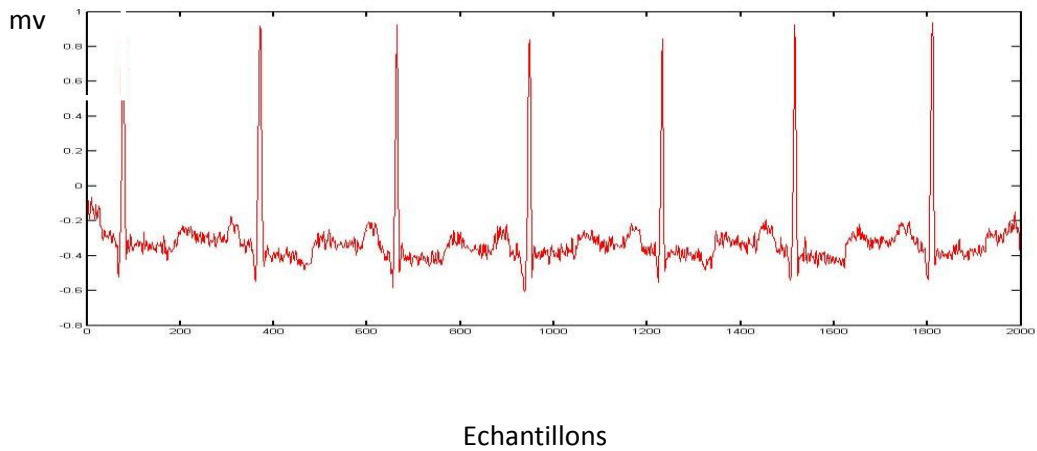


Echantillons

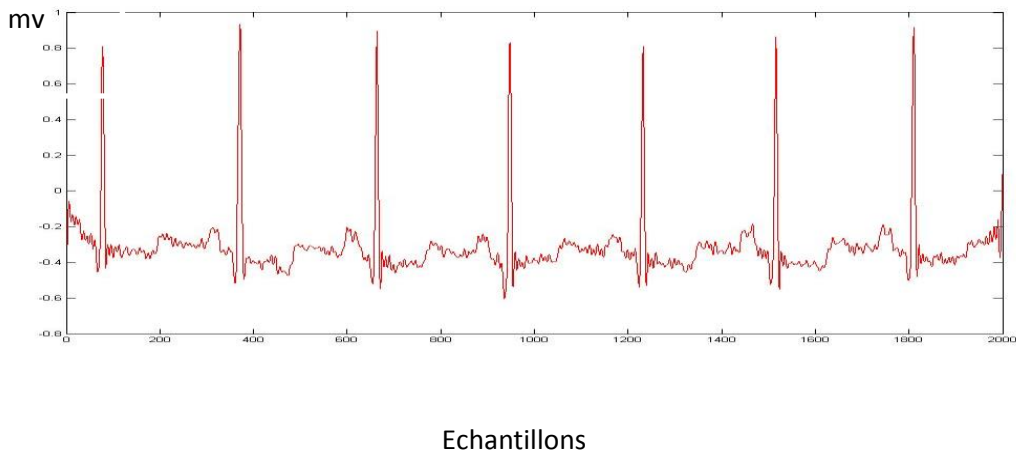
Fig(4.11.d) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 1 (CR=10 , PRD=31.507%)

Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

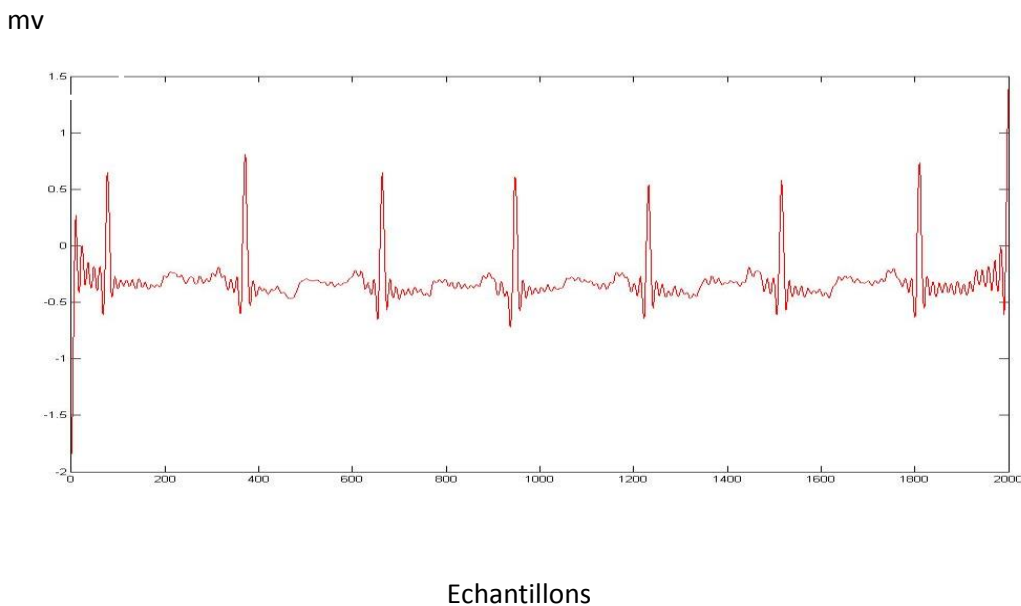
-Signal compressé par la méthode de Tchebychev 2^{ième} espèce



Fig(4.12.a) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 2 (CR=2 , PRD=8.13)

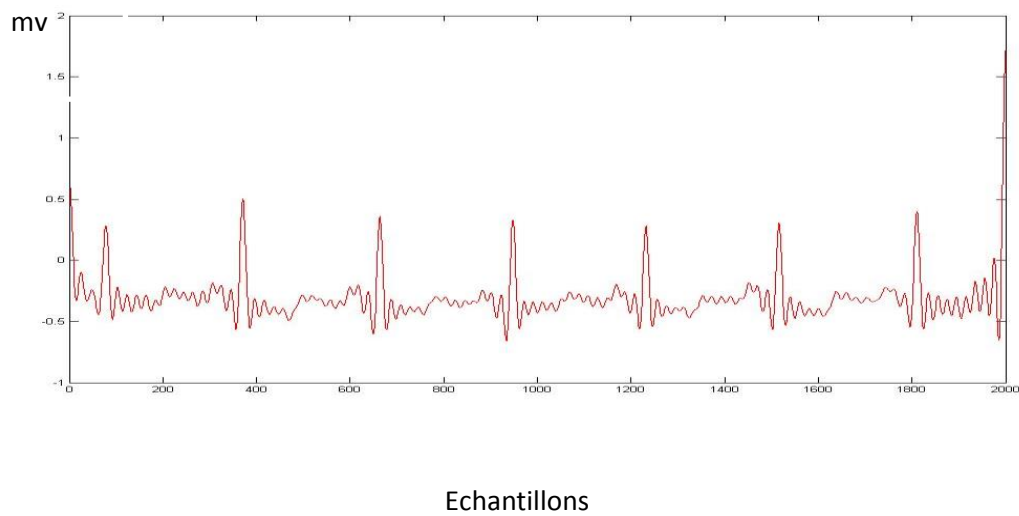


Fig(4.12.b) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 2 (CR=4 , PRD=14.99)



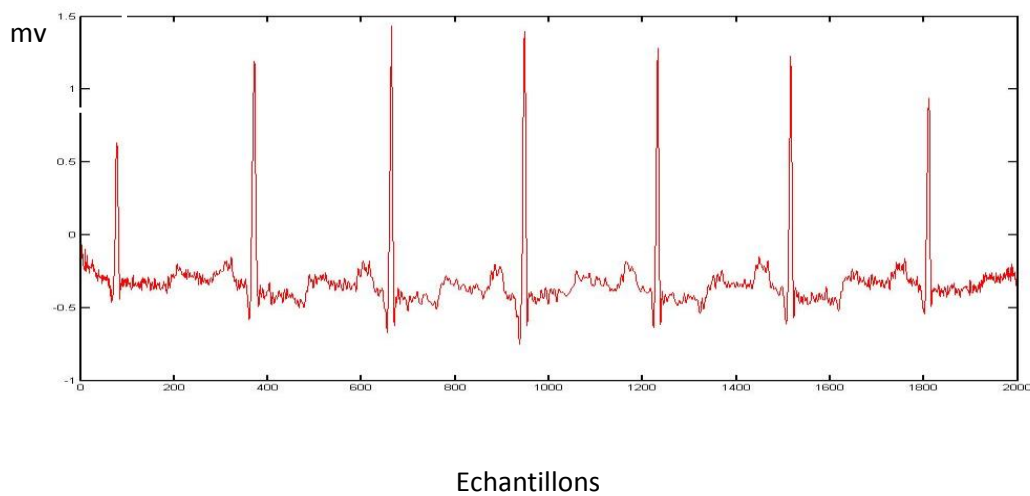
Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

Fig(4.12.c) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 2 (CR=8 , PRD=63.97)



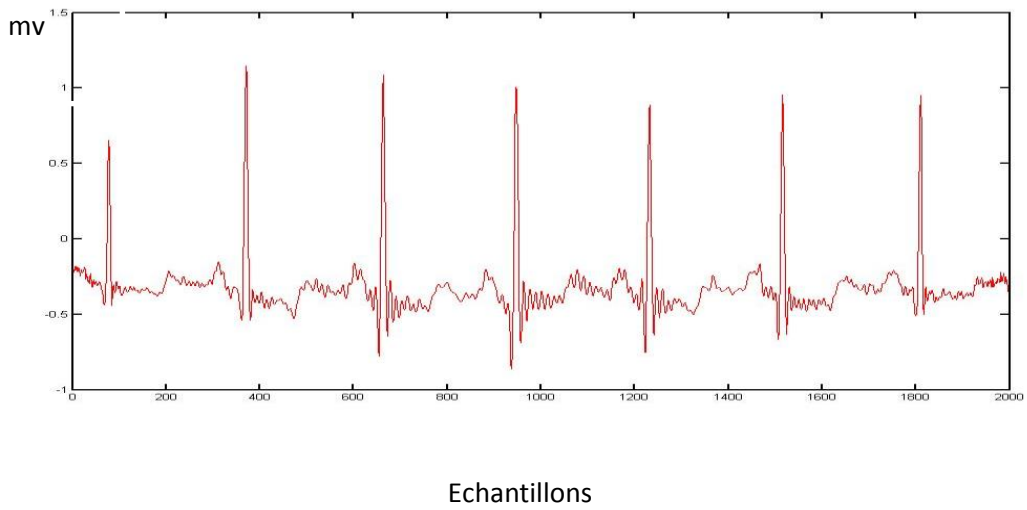
Fig(4.12.d) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Tchebychev 2 (CR=10 , PRD=71.6)

-Signal compressé par la méthode de Legendre

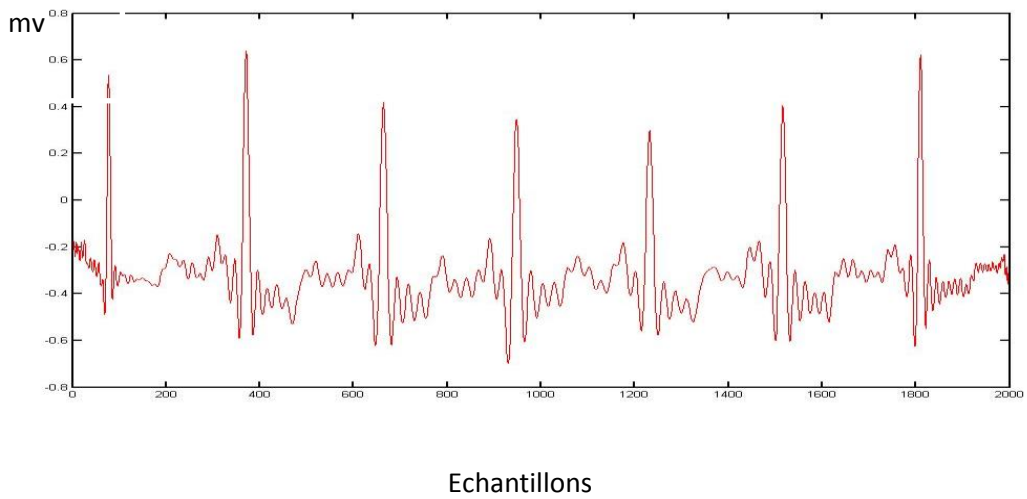


Fig(4.13.a) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Legendre (CR=2 , PRD=30%)

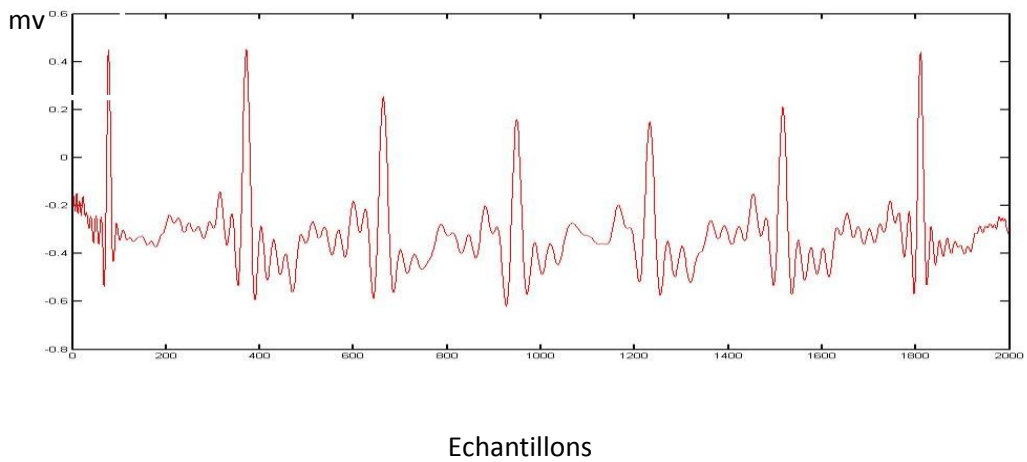
Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS



Fig(4.13.b) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Legendre (CR=4, PRD=30.15%)



Fig(4.13.c) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Legendre (CR=8, PRD=29.36%)

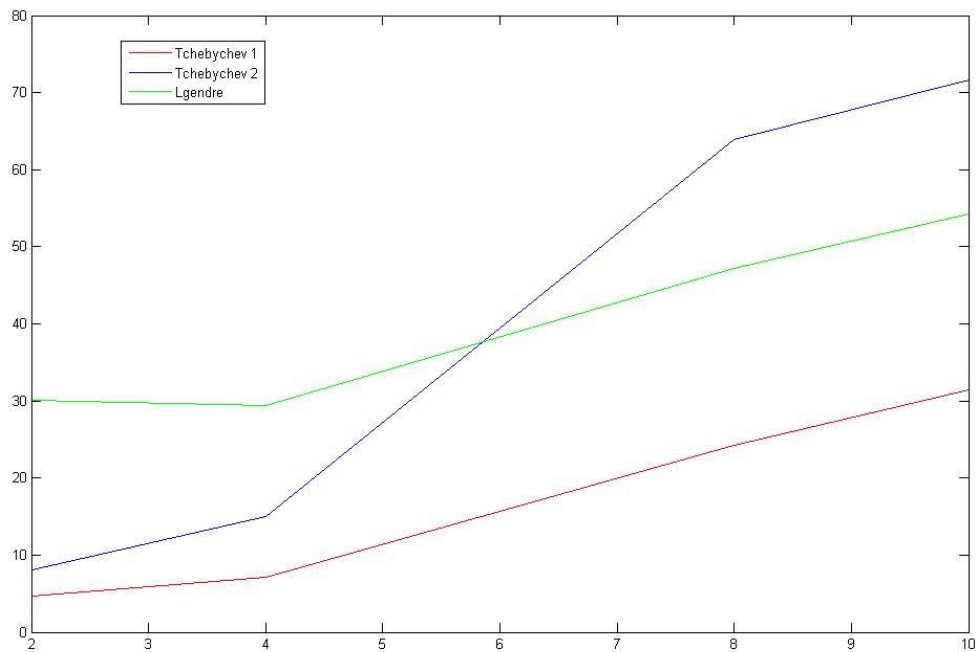


Fig(4.13.d) : signal fortement bruité compressé avec le polynôme Legendre (CR=10, PRD=54.28%)

Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

CR	Tchebychev 1 PRD%	Tchebychev 2 PRD%	Legendre PRD%
2	4.69	8.13	30.15
4	7.1	14.99	29.36
8	24.21	63.97	47.18
10	31.50	71.6	54.28

Tableau (4.3) : la variation de l'erreur PRD % en fonction de la compression (signal fortement bruité)



Fig(4.14) : la variation de l'erreur PRD % en fonction de la compression CR (signal ECG plus bruit)

IV.5.Discussion des résultats

Les résultats des programmes se présentent sous forme de courbes du signal reconstitué, d'après les résultats obtenus (Tableau (4.1) et figure (4.8)), nous remarquons que la variation de l'erreur PRD% est proportionnelle avec les variations des compressions pour

Chapitre IV:APPLICATIONS ET DISCUSSIONS DES RESULTATS

les trois polynômes, dans la figure (4.5) on remarque que l'erreur de polynôme de Legendre est très grande par rapport à celle de polynômes de Tchebychev,

Nous constatons que la valeur du PRD% de la courbe en rouge (Tchebychev 1) est très petite pour des compressions relativement faibles, alors que pour même taux de compression, la courbe en bleu présente un taux nettement plus grand (Tchebychev 2).

Lorsqu'on applique un signal bruité à un algorithme de compression, il est clair que le rapport de compression est dégradé autant que la puissance du bruit est élevée. Les résultats des tests montrent que le polynôme de Tchebychev 1^{ère} espèce est meilleur vis-à-vis les signaux bruités.

Nous remarquons que le temps de compression diminue quand le taux de compression augmente pour les trois méthodes figure (4.9), c'est logique parce que si le nombre des coefficients augmente le temps de traitement augmente.

La compression par le polynôme de Tchebychev 1^{ère} espèce est un peu lente par rapport aux autres méthodes pour des compressions avec un taux de compression petit.

Conclusion

L'application du modèle polynômial à la compression du signal ECG donne des résultats acceptables pour les polynômes de Tchebychev de 1^{ère} espèce selon les critères des performances de la compression avec des taux de compression entre 2 et 5 les pourcentages d'erreur est inférieur à 10%, et de même les polynômes de Tchebychev de 2^{ième} espèce mais seulement avec un taux de compression CR=2, le polynôme de Legendre n'est pas approprié pour la compression des signaux ECG .

Conclusion générale

Nous avons décrit le signal ECG au chapitre 1, c'est un signal de nature électro-physiologique qui donne une information essentielle dans le diagnostic des anomalies cardiaques. L'enregistrement, le stockage et la transmission des signaux ECG sont des processus complexes. Nous. La compression des signaux ECG se justifie par la nécessité de réduire les coûts de stockage et de transmission de ces signaux à travers les canaux de communication modernes.

Les aspects théoriques et fondamentaux des polynômes orthogonaux ont été abordés au niveau du troisième chapitre. Ces polynômes orthogonaux constituent le principal outil mathématique que nous utilisons pour les modélisations et la compression des signaux ECG. Il était donc de première importance de bien comprendre ces fonctions et d'étudier avec minutie leurs propriétés. Nous avons surtout établi les conditions sous lesquelles les différentes familles de polynômes orthogonaux constituent des bases dans les espaces de Hilbert. Dans ces cas, on peut décomposer un signal à énergie finie dans ces bases polynomiales (développement en séries).

Il a été établi à l'issue de ces expériences que les polynômes de Legendre, les polynômes de Tchebychev, et d'une manière générale les polynômes de Jacobi permettent de réaliser une bonne modélisation des signaux ECG.

L'interprétation physique de la nature des coefficients après décomposition d'un signal dans des bases polynomiales est une préoccupation de première importance. Nous avons considéré tout au long de ce mémoire que ces coefficients détiennent individuellement une quantité de l'énergie du signal. Il reste tout de même à déterminer la relation exacte qui lie l'énergie contenue dans un coefficient et la valeur de ce coefficient ainsi que le degré du polynôme correspondant. L'analyse spectrale des polynômes orthogonaux à travers leurs transformations de Fourier.

L'interprétation physique des coefficients des polynômes orthogonaux pourrait aussi permettre d'établir des corrélations entre ces coefficients et certaines pathologies cardiaques, ce qui constitue une issue pour de nouvelles méthodes de classification automatique des signaux ECG.

Bibliographie

- [1] Aline CABASSON : Estimation et Analyse des Intervalles Cardiaques THÈSE doctorat de l'Université de Nice - Sophia Antipolis
- [2] R. HOUGHTON et D. GRAY. « Maîtriser l'ECG de la théorie à la clinique» article, Editions MASSON 2003
- [3]THÈSE *Présentée pour l'obtention du titre de Docteur* de l'Institut Polytechnique de Lorraine Spécialité : Automatique et Traitement du Signal *par* Daniel TCHIOTSOP « MODELISATIONS POLYNOMIALES DES SIGNAUX ECG. APPLICATIONS A LA COMPRESSION »
- [4]M.L.TALBI «analyse et traitement du signal électrocardiographique (ECG) » Thèse de doctorat 2011.
- [5] R.SYLVAIN, “Compresser les images“, *séminaire*, Palais des Congrès - Paris ,2000.
- [6] F.GARGNE, C.KNOFF et G.LECOURTOIS, “Codage, compression et cryptologie“, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, 2005.
- [7]http://www.ulb.ac.be/cours/acohe/travaux_2006_infodoc/CompressionNumerique/SansPerteLZW.htm#LZW.
- [8]COMPRESSION D'UN SIGNAL. APPLICATION EN BIOMÉDICAL AU SIGNAL ÉLECTROCARDIOGRAMME << Présenté par : **RAHMOUNE LAMIA** et **HAFFACI KHALED**>> a l'ENP
- [9] P. COURTELLEMONT, “Traitement de l'Information. Application à la compression“, *Master*, 2005.
- [10] <http://www.physionet.org/physiobank/database>. MIT-BIH Arrhythmia Data base.