

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

8/96

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'études

**ELABORATION D'UN LOGICIEL D'ÉCOULEMENT RADIAL**  
**PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Proposé par  
M. Boudjema

Étudié par  
M. Khalil DAOU'DI  
M. Liès ZOUANI

Dirigé par  
M. Boudjema

PROMOTION  
JUN 1996

E.N.P 10, Avenue Hassen Badi - El Harrach - Alger

## Remerciement

Nous tenons, au début de ce mémoire, à exprimer notre profonde gratitude a tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à notre formation .

Et, nous remercions notre promoteur Mr Boudjemaa, pour nous avoir dirigé dans notre travail, ainsi que Mr Ammiche qui nous a été de très bon conseil .

Nous tenons, aussi a remercier vivement Mr Bahira Abdellah pour son aimable collaboration .

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail à:

Mes parents ;

Mes frères et soeurs ;

ma tante Houria et Didi Amar ;

La mémoire de mes grands parents ;

La mémoire de ma grand mère ;

La mémoire de notre ami Missoum ;

Tous mes collègues de la promotion 95/96 de génie mécanique .

Zouani Lies

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste document à Mes parents , ainsi  
qu'à mes grands parents .

Daoudi Khalil

## RESUME

Ce travail consiste à faire une étude comparative des performances de turbo réacteurs en un point de fonctionnement nominal et en régime hors adaptation. Et ce en élaborant un programme qui permet de calculer ces performances.

## ABSTRACT

This work consists in to make a comparatif survey of the performances of reactors in a point of nominal working and in regime out adaptation. For it formulating a program who allows to calculate these performances.

## ملخص

تدرس في هذا العمل السيلان بين سطحين لهما نفس المحور، وهذه السألة مسبوقة بتعادلات نفيس وستوكس، وهدفنا من هذه العادلات باستعمال طريقة العناصر المنتهية.

# Sommaire



Introduction.....	1
Historique de l'étude.....	4
1. Etude expérimentale.....	5
2. Etude analytique.....	6
2.1. Méthode d'intégrale de VAN-KARMAN .....	6
2.2. Méthode des expansions en séries .....	7
3. Etude numérique .....	8
PREMIERE PARTIE: Equations générales régissant le problème.....	11
Premier chapitre: notions fondamentales de la mécanique des fluides ..	12
I.1. Les équations de base .....	12
I.1.1. L'équation de continuité.....	12
I.1.2. Les équations de mouvement.....	14
I.2 Propriétés du fluide.....	17
I.2.1 Viscosité.....	17
I.2.1.1. Formule de Barr .....	18
I.2.1.2. Formule de Hugel et Clairbois .....	18
I.2.1.3. Formule de Mac Coull et Walther .....	19
I.2.2.4. Formule de Sutherland.....	20
I.2.2 Densité.....	20
Deuxième chapitre: Présentation de la méthode des éléments finis.....	21
II.1. Généralités.....	21
II.2. Méthode des éléments finis .....	22
II.2.1. Généralités.....	22
II.2.2. Méthode des résidus pondérés .....	24
II.2.2.1. Résidus.....	24
II.2.2.2. Formulation intégrale .....	25
II.2.2.3. Discrétisation de la forme intégrale .....	25
II.2.2.4. Méthode de Galerkin .....	27
II.2.3. Fonctionnelles.....	28
II.2.3.1. Généralités .....	28
II.2.3.2. Première variation .....	28
II.2.3.3. Principe de stationnarité.....	29
II.3. Choix des paramètres numériques.....	30
II.3.1. Choix de l'élément.....	30
II.3.2. Propriétés de l'élément .....	30

II.3.3.singularité de la matrice jacobienne.....	31
II.3.4.Le maillage.....	32
II.3.5.Intégration numérique.....	33
II.3.5.1.Méthode produit de Gauss.....	33
II.3.5.2.Précision de l'intégration.....	34
Résumé 1.....	35
DEUXIEME PARTIE.....	36
Troisième chapitre: Mise en équation du problème.....	38
III.1.Généralités.....	38
III.2.Equations de mouvement.....	39
III.3.Conditions aux limites.....	41
III.3.1.Traitement des conditions aux limites.....	42
III.3.1.1.Généralités.....	42
Quatrième chapitre: Discrétisation du problème selon la méthode des éléments finis	
IV.1.concepts de base des écoulement visqueux.....	48
IV.2.Relations de comportement.....	50
IV.3.Equation de continuité.....	51
IV.4.Discrétisation des équations de mouvement et de continuité.....	52
Annexe.....	62

## INTRODUCTION

Depuis longtemps la mécanique des fluides a sollicité l'étude des écoulements entre deux profils coaxiaux avec débit axiale .

La connaissance du champs d'écoulement qui en résulte permet des applications pratiques très utile dans la conception de divers appareils industriels tels que les paliers à air, les paliers hydrostatiques, les comparateurs pneumatiques ainsi que l'écoulement à l'intérieur des turbomachines . L'intérêt de ce genre d'étude se manifeste aussi dans les études de la lubrification et du refroidissement des pièces rotatives .

D'ailleurs, l'intérêt de ce genre d'écoulement ne repose pas seulement sur des applications pratiques mais aussi sur des intérêt théoriques . Il suffit de penser qu'avec de telles études qu'on peut avoir des traitements plus profond, et même simplifier la solution des équations de Navier-Stockes qui, depuis longtemps, constitue un problème sur lequel plusieurs chercheurs se sont penchés.

En effet, la solution de ses équations gouvernantes à toujours été une tache relativement fastidieuse . Même de nos jours, avec la disponibilité des divers moyens informatiques et méthodes numériques avancées, il demeure que des solutions réalistes pour les problèmes soulevés sont loin d'être garanties .

Aussi, avant d'étudier en détails les travaux antérieurs relatifs à se sujet, proposons quelque commentaires généraux à propos de l'historique de ces études.

Par le faite que la solution des équations de NAVIERS-STOCKES est difficile à approcher, et numériquement très instable, on est amené à faire un certains nombres hypothèses simplificatrices afin d'approcher au mieux la solution réelle .



Il faut noter que lors des premiers travaux, il n'existait pratiquement pas de moyens informatiques capable de solutionner l'ensemble des équations gouvernantes sans l'utilisation d'hypothèses simplificatrices.

C'est pourquoi THEODORE VON-KARMAN, qui s'est intéressé à ce genre de problèmes, et qui, voulant simplifier les équations de NAVIERS-STOCKES, propose une hypothèse de similitude. Selon cette hypothèse, la composante axiale de la vitesse est considérée indépendante de la coordonnée radiale. C'est-à-dire, que cette composante de vitesse était seulement fonction de la coordonnée axiale. A partir de là, il lui a été possible de réduire les équations gouvernantes en un système d'équations différentielles dans lequel il existait seulement une variable spatiale. Un tel système était, évidemment, bien plus simple à résoudre.

Cependant, l'adoption de cette hypothèse limite les auteurs à prendre en considération les profils de dimensions infinies. Pour certaines configurations des profils, cette hypothèse a été pendant longtemps vérifiée et adoptée par plusieurs auteurs elle est encore très utilisée dans les études de l'écoulement entre profils de dimensions infinies avec débit axial.

Dans les études des écoulements entre profils, avec soufflage axial, à partir d'une injection centrale, l'hypothèse émise par VON KARMAN n'est plus valide.

En effet, l'écoulement entrant dans la zone centrale fait que la similitude n'existe plus, du moins dans la région à proximité du centre d'injection, surtout lorsqu'il y a présence de la rotation, car dans ce cas l'écoulement sortant dû au soufflage rencontre l'écoulement entrant dû à la rotation, ce qui produit un décollement près du disque fixe.

L'étude du présent travail se porte sur l'écoulement laminaire et stationnaire d'un fluide visqueux incompressible et isotherme entre profils de dimensions finis. Pour la résolution du problème, on utilise la méthode des éléments finis.

En effet, La mécanique des fluides permet de décrire le comportement du système considéré grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces

équations . Ce n'est que récemment que la mécanique des fluides à été appliquée systématiquement à différents type de problèmes de mécanique des fluides , bien que plusieurs ouvrages aient déjà été publié sur le sujet , il n'en demeure pas moins que la mécanique des fluides s'affirme comme un instrument très puissant de résolution numérique ; son développement est actuellement très rapide et dispose désormais d'un bon nombre de techniques utiles et efficaces .

Elle est un méthode numérique largement utilisée de nos jours car elle représente un excellent outils de modélisation des différents phénomènes physiques . Tout fois, la conception d'un modèle numérique (conception de l'élément ) reste extrêmement délicate du fait qu'elle exige une parfaite connaissances des équations mathématiques régissant ces même phénomènes . Elle nécessite l'utilisation intensive de moyens de calculs . C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorités des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions . De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique .

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques .

Notre intérêt porte sur l'élaboration d'une formulation en éléments finis qui permet de modéliser l'écoulement d'un fluide à l'intérieur de profils coaxiaux . pour cela on choisit un élément quadrilatéral à huit noeuds , c'est l'élément qui donne le plus de satisfaction dans ces applications en mécanique des fluides . Un patch test sanctionnera le travail établis et nous permettra, par la suite, d'avoir une appréciation précise de l'élément

Mais que fut les études entreprises par les différents auteurs dans l'histoire ?

## HISTORIQUE DE L'ETUDE

Au cours des années, plusieurs auteurs se sont intéressés aux problèmes des écoulements entre profils avec soufflage axiale. Tel qu'il a été mentionné précédemment, l'hypothèse de similitude de VON-KARMAN, utilisée dans le cas des profils de dimensions infinies, n'est plus applicable. Bien qu'il est maintenant possible de solutionner les équations gouvernantes sans hypothèses simplificatrices, ce n'était pas le cas il y a quelques décennies.

Les recherches portant sur les écoulements entre profils parallèles avec injection centrale se subdivisent en trois catégories distinctes :

- Des travaux qui reposent sur des données expérimentales.
- Des recherches qui développent, d'une part, des principes analytiques et se limitent, d'autre part, à des hypothèses simplificatrices.
- Des travaux qui ont fait leurs apparitions plus récemment, et qui s'inspirent de résultats d'analyse numérique.

On développera dans ce qui suit les différentes méthodes déjà citées ci-dessous.

## 1. ETUDES EXPERIMENTALES :

Les premières études portant sur les écoulements entre profils coaxiaux avec injection centrale étaient surtout de type expérimental, pour cela on essaiera d'esquisser cette étude bibliographique, on donnant l'apport expérimental dans l'étude de ce phénomène .

### J.McGINN(1956):

Il fut l'un des premiers à faire des étude dans ce sens . En effet, il étudia l'écoulement radial de l'eau, entre deux plaques parallèles stationnaires en utilisant des méthodes de visualisation des lignes de courant par injection de colorant ainsi qu'avec des mesures de la pression pariétale . Il observa qu'à des taux de débits relativement faibles, il y avait formation d'une zone de recirculation près du centre d'injection . Il remarqua aussi qu'avec une augmentation dans les taux de débit une deuxième zone de recirculation se formait plus loin en aval sur la parois du disque opposé .

### MORGAN et SAUDERS (1960)

Ils ont utilisé de l'air dans leurs étude, ils ont aboutit à des résultats, qu'on exposera postérieurement, qui concordent bien avec ceux de LIVESY .

### COOMBS et DOWSON (1965)

Dans le cas des écoulements entre deux profils coaxiaux avec injection centrale, dont l'un est en rotation, COOMBS et DOWSON ont étudié expérimentalement les effet de la rotation sur l'écoulement à l'intérieur d'un palier hydrostatique . Pour ce faire, ils ont étudiés les effets de cette rotation sur le rapport de pression moyenne entre une section donnée et celle à l'entrée . Pour les faible taux de rotation, les résultats démontrent une diminution monotone de pression le long de la direction radiale jusqu'à la section de sortie ou la pression de référence est nulle . Par contre, lorsque le taux de rotation est augmenté, la pression diminue de façon monotone jusqu'à ce qu'elle atteint un minimum négatif du a

la rotation du profil supérieur pour ensuite augmenter vers la pression nulle à la section de sortie .

## 2. ETUDES ANALYTIQUES :

Pour solutionner le problème de l'écoulement laminaire entre deux profils axiaux avec débit axial, certains auteurs utilisaient la méthode d'intégrale de VON KARMAN, d'autres, s'inspiraient de la méthode des expansions en séries .

part ailleurs, la plupart des études théoriques effectuées sur ce genre d'écoulement portaient habituellement sur le cas sans rotation et, tel qu'il a été mentionné précédemment, les hypothèses simplificatrices étaient généralement basées sur celle de PRANDTL dans la couche limite stipulant que la pression n'était fonction que de la coordonnée radiale (la pression ne varie pas selon la direction axiale), ce qui était généralement vérifiée dans une région assez loin du centre des profils . Pour que ce genre d'hypothèse soit applicable, on supposait que la distance entre les profils était très petite en comparaison avec la distance  $Z$  (Le rayon maximal du profil ) .

La plupart de auteurs traitent les cas ayant de faible nombre de Reynolds, et ce surtout lorsqu'ils négligent les forces d'inerties devant les forces de viscosités .

### 2.1. Méthode d'intégrale de Von Karman :

#### LIVESEY (1960) :

En ce qui concerne LIVESEY, il suppose que les forces d'inerties ne devraient pas être négligées, même dans le cas ayant des faibles taux de soufflage . Il élabore une relation analytique pour la distribution de la pression en utilisant un profil de vitesse parabolique à la section de référence près de l'axe de révolution des deux profils .

HAGIWARA(1962) :

HAGIWARA, de son coté, en utilisant un profil de vitesse constant à la section de référence près du centre des profils, et en se servant de l'hypothèse de PRANDLT concernant la répartition de la pression dans la direction axiale, il développe des relations analytiques calculant, entre autres, la position du point où l'établissement d'un profil parabolique se produit .

*2.2. La méthode des expansions en séries :*

SAVAGE (1964):

Il stipule qu'à l'exception des cas où l'écoulement peut être considéré comme étant à dominance visqueuse, l'utilisation d'hypothèses imposant des profils de vitesses constantes à la section centrale n'est pas acceptable .

IL démontre que sa solution est très comparable avec les résultats expérimentaux de Moller(1963) et ce, à l'exception d'une zone très près de la section d'entrée . Dans le même travail, Savage compare ses résultats avec ceux de Livesey qui, rappelons, le avait imposé un profil de vitesse parabolique à la section d'entrée et remarque une meilleure concordance entre ses résultats et ceux de Moller .

JACKSON et SYMMONS (1965) :

Ils ont trouvé une expression pour la distribution de pression . Ils incluent les effets de l'inertie et comparent leurs résultats avec ceux de LIVESEY obtenus par la méthode d'intégrale de VON KARMAN . Ils constatent qu'il existe un écart important de l'ordre de 23% entre les résultats . Ils démontrent également que les mêmes résultats peuvent être obtenus en utilisant une simple analyse de l'écoulement unidimensionnel .

### 3. ETUDES NUMERIQUES

Dans les premières études utilisant des méthodes d'analyse numériques, on retrouve, entre autres, les travaux de MULLER et VO-NGOC . Ils s'intéressent tous les deux au cas des écoulements entre profils coaxiaux, dont l'un est fixe et l'autre est en rotation, avec injection centrale .

#### MULLER (1971) :

Dans son cas, il utilise l'hypothèse de PRANDTL afin de permettre la linéarisation des équations du mouvement pour, ensuite, les intégrer à partir d'une certaine section du domaine où la solution est supposée connue . lorsque la conservation de débit n'est plus vérifiée de façon appropriée, l'intégration est arrêtée . Cette méthode a quelques avantages mais engendre des inconvénients .

En effet, bien qu'elle soit relativement simple dans sa programmation, on remarque que le temps de résolution numérique est considérable . Ceci est attribuable au fait que le maillage utilisé doit être très fin en raison de cette linéarisation . De même, cette méthode ne peut être utilisée pour la résolution du problème instationnaire et finalement, la nature des simplifications aux équations gouvernantes ne permet pas d'étudier l'écoulement près du centre d'injection .

#### VO-NGOC (1975):

Dans son cas, il utilise la méthode de perturbation des équations qui fait appel aux formules de différences finies habituelles . Cette méthode numérique nécessite un système de conditions aux limites sur le contour du domaine . L'utilisation de cette méthode lui a non seulement permis d'étudier l'écoulement à partir de l'origine du soufflage mais aussi de vérifier les hypothèses simplificatrices utilisées dans les travaux antérieurs . Effectivement, il a trouvé que la composante axiale de la vitesse était indépendante de la coordonnée radiale pour une large zone dans l'espace entre profils, ce qui vérifie l'hypothèse émise par VON KARMAN plusieurs années auparavant . Il a aussi

trouvé que l'hypothèse de PRANDTL telle qu'utilisée par HAGIWARA, entre autres, semble aussi être vérifiée, surtout lorsque la distance entre les profils est petite .

Par contre, il est à remarqué qu'avec cette méthode numérique, seules des solutions pour des cas ayant de faibles nombres de Reynolds ont été trouvées en raison de problèmes de convergence .

Avec l'arrivée des ordinateurs plus puissants, les études ont pris un nouveau départ dans la résolution numérique des équations de NAVIERS-STOCKES sans aucune hypothèse simplificatrice . Plus récemment, la méthode des éléments finis et celle d'intégrale locale sur des volumes finis (souvent appelé méthode Simpler) ont été utilisées par plusieurs auteurs pour différents cas aux nombre de Reynolds plus élevé .

En effet, PARAKASH (1984) , pour sa part, s'est servis de la méthode Simpler, on considérant non seulement le cas du disque tournant, mais aussi le transfert thermique dans l'écoulement . Dans le même sens MOUSSA (1991) à considéré les disques de dimensions finis avec aspiration uniforme à travers l'un des disques . Les résultats obtenus ont démontré que la structure de l'écoulement est très complexe et dépend non seulement des paramètre caractéristiques d'aspiration et de rotation mais aussi de la distance séparant les disques .

Finalement, on note, d'une part, que ces deux auteurs se sont limités à une hypothèse simplificatrice, imposée à la périphérie stipulant que l'écoulement provenant de l'extérieure soit purement radiale .

D'autre part, PARAKASH et MOUSSA démontrent, aux faibles taux d'aspiration, que hypothèse de VON-KARMAN utilisée dans le cas des disques infinis peut encore être valide dans une zone limitée entre les deux disques .

La méthode des éléments finis à aussi fait preuve d'une plus grande précision quant aux résultats qu'elle fournit . En effet, ADAMS et SZERI (1978) ont obtenus, par le biais de la méthode des éléments finis, des résultats qui concordent bien avec ceux trouvés, expérimentalement, par COOMBS et DOWSON dans le cas avec rotation .



Toujours, et dans le cadre des même travaux, ils observent en 1982, que le nombre de zones de recirculations augmentent avec le nombre de Reynolds de rotation .

On note, finalement, que les résultats obtenus ne sont valide que pour des nombres de Reynolds relativement faible .

Après ce bref historique, nous nous proposons de développer l'objet de notre sujet . Il est structuré en trois parties :

La première partie présente les équations générale régissant le problème .

La deuxième partie expose la Formulation du problème .

Enfin les interprétations et les Résultats numériques sont traités dans la troisième partie .

# Premiere partie

**Equations générales régissant le problème**

**Premier chapitre**

**Notions fondamentales de la mécanique des fluides**

**deuxième chapitre**

**Présentation de la méthode des éléments finis**

## PREMIER CHAPITRE

### NOTIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES

#### I.1. LES EQUATIONS DE BASES

Dans ce chapitre, deux lois de base de la physique sont appliquées pour l'écoulement des fluides. Ils s'agit du principe de conservation de la masse, et la troisième loi de Newton. On suppose en développant ces deux lois que le fluide est continu, et qu'il est divisé en petits éléments.

##### *1.1.1. L'équation de continuité*

Le principe de conservation de la masse est l'un des principes de base de la mécanique. Il énonce que la masse ne peut être créée ou détruite.

Pour obtenir l'équation de continuité, on applique le principe de la conservation de la masse pour un petit élément de volume à travers lequel s'écoule un fluide.

On choisit dans notre développement les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , et pour raison de simplicité, on traite un écoulement bidimensionnel comme indiqué sur la figure (2.1).

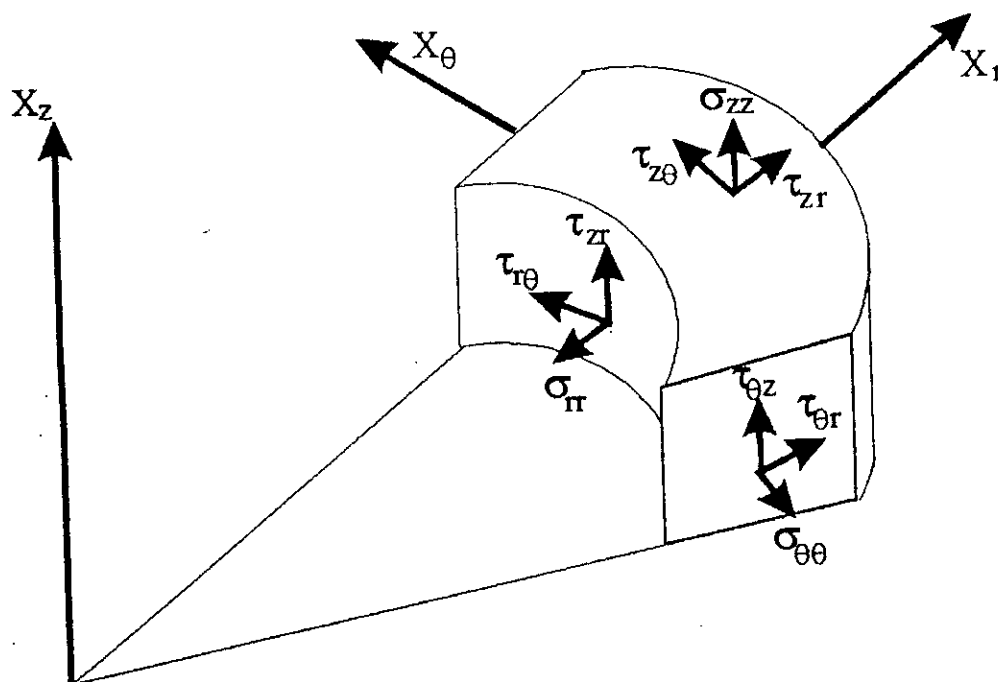
L'équation (1.3) est appelée, équation de continuité.

En coordonnées cylindriques, et pour une variation volumique, l'équation de continuité s'écrit :

$$\partial \rho / \partial t + 1/r \cdot \partial (\rho r u) / \partial r + 1/r \cdot \partial (\rho v) / \partial \theta + \partial (\rho w) / \partial z = 0 \quad (1.4)$$

### 1.1.2. Les équations de mouvement

pour un fluide visqueux, le système de contraintes agissant sur un élément de surface est visualisé en montrant en détail les contraintes agissantes sur un petit élément de volume.



En général, les contraintes changent d'un point à un autre, c'est pourquoi il y a élévation des forces nettes appliquées sur les surfaces de l'élément de fluide en lui procurant une accélération.

L'équation de mouvement suivant  $r$  :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \rho f_r = \rho \frac{Du}{Dt} \quad (1.5)$$

L'équation de mouvement suivant  $\theta$  :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \rho f_{\theta} = \rho \frac{Dv}{Dt} \quad (1.6)$$

L'équation de mouvement suivant  $z$  :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \rho f_z = \rho \frac{Dw}{Dt} \quad (1.7)$$

Pour un fluide isotropique et incompressible, les relations entre les contraintes et les dérivées de la vitesse sont :

$$\sigma' = D\varepsilon \quad (1.8)$$

tel que

$D$  : matrice viscosité

$\varepsilon$  : vecteur taux de déformation.

D'autre part :

$$\varepsilon = L_2 \cdot U \quad (1.9)$$

et

$$\sigma' = \sigma + mP \quad (1.10)$$

$$P = -1/3 (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \quad (1.11)$$

$$m^T = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} \quad \text{Donc :}$$

$$\sigma_{rr} = \mu \frac{\partial u}{\partial r} - P$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) - P$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - P \quad (1.12)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - P$$

$$\sigma_{\theta z} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - P$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) - P$$

En général, les fluides ont une viscosité qui dépend très largement de la température. Cette variation qui, au voisinage de 20°C est de 2.5% par degré pour l'eau, peut atteindre 10 à 15% par degré pour les huiles minérales.

Cette variation est décroissante, la viscosité chute très rapidement aux basses températures puis plus lentement aux températures élevées.

Différentes formules ont été proposées pour décrire cette variation de la viscosité avec la température.

#### 1.2.1.1. Formule de BARR :

Elle s'exprime sous la forme :

$$\left[ \log \left( \frac{\mu}{\rho} + 0.8 \right) \right]^3 = A + \frac{B}{T} \quad (1.14)$$

Dans cette formule, T est la température absolue ( $T = T^{\circ}\text{C} + 273$ ), A et B sont des constantes spécifiques de l'huile et  $\nu$  est la viscosité cinématique en centistokes ( $\text{mm}^2/\text{s}$ ).

#### 1.2.1.2. Formule de HUGEL et CLAIRBOIS :

Elle s'écrit :

$$\text{Log}(\mu+a)(T+b)=c \quad (1.15)$$

Dans cette formule,  $\mu$  est la viscosité dynamique en millipoiseuille (mPl ou mPa.s), T est la température absolue, a, b et c sont des constantes caractéristiques de l'huile.

**I.2.1.3. Formule de MAC COULL et WALTHER :**

Elle s'exprime sous la forme :

$$\text{LogLog}(v+a)=m\text{Log } T +n \quad (1.16)$$

Dans cette formule  $v$  est la viscosité cinématique en centistokes ( $\text{mm}^2 / \text{s}$ ),  $T$  est la température absolue et  $m$ ,  $n$  sont des constantes spécifiques de l'huile. La constante  $a$  ajoutée à la viscosité cinématique prend la valeur 0,6 pour toutes les huiles de viscosité supérieure à 1,5 centistokes pour des huiles de viscosité inférieure, elle prend les valeurs :

0,65 entre 1 et 1,5 centistokes

0,65 entre 0,7 et 1 centistokes

0,75 entre 0,4 et 0,7 centistokes

C'est cette formule qui a été retenue par l'ASTM (American society for testing materials), car si l'on porte sur un graphe en abscisse le logarithme népérien de la température et en ordonnée le Log de la viscosité cinématique, la courbe représentative de la variation de la viscosité avec la température est une droite. Ainsi, connaissant la viscosité d'une huile à deux températures, il est facile d'en déduire la viscosité à toutes températures.

L'extrapolation n'est valable qu'entre  $0^\circ\text{C}$  et  $130^\circ\text{C}$ . Au delà de ces températures, les mesures deviennent nécessaires.

Si l'on veut prendre en compte de façon très précise ces variations, il est souhaitable de disposer d'un prélèvement expérimental de la viscosité en fonction de la température pour la plage de température dans laquelle on désire utiliser l'huile.



#### I.2.1.4. Formule de SUTHERLAND:

SUTHERLAND a établi la formule suivante déduite de la théorie cinétique des gaz, qui énonce que  $\mu$  est à peu près proportionnel à  $T^{\frac{5}{2}}$  (T température absolue), et qui est très bien vérifiée expérimentalement :

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{K_0 T^{\frac{5}{2}}}{1 + \frac{C}{T}} \quad (1.17)$$

Le coefficient C est une constante qui dépend du gaz

#### I.2.2. Densité:

la densité augmente avec le poids moléculaire. Pour les lubrifiants, une relation a été établie, qui permet de calculer la variation de densité avec la température, elle s'écrit:

$$d_T = d_0 - aT \quad (1.18)$$

Dans cette formule,  $d_0$  est la densité à la température de  $0^\circ\text{C}$ , T est la température en  $^\circ\text{C}$  et a un paramètre qui selon la nature de l'huile varie entre 0.00064 et 0.00066

## DEUXIEME CHAPITRE

### PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

#### II.1. GENERALITES

Dans le premier chapitre nous avons introduit des notions de mécanique des fluides qui nous ont permis d'obtenir les équations gouvernantes de l'écoulement d'un fluide, ainsi que ces propriétés physiques . Nous avons, en particulier, développer les équations de NAVIER-STOCKES (équations de la dynamique des fluides visqueux) en coordonnées cylindriques . Dans ce second chapitre nous présenterons, brièvement, les méthodes susceptibles de résoudre le système d'équations du mouvement, particulièrement, la méthode des éléments finis, qui fera l'objet de ce qui suit .

La résolution du système d'équations gouvernantes peut être faite par l'entremise de plusieurs méthodes ; entre autres les méthodes des différences finis, d'intégrale locale sur des volumes finis et celle des éléments finis . Ces méthodes différent, d'une part, par la nature du maillage et la technique d'interpolation, ce qui s'avère cruciale pour l'efficacité de la mise en oeuvre et la vitesse d'exécution . D'autre part, chaque méthode offre des avantages très distincts .

Les grilles des différences finies sont très structurées, avec une numérotation régulière des points et une structure locale identique en chaque points . La méthode

Simpler, pour sa part, autorise des Reynolds élevés . Enfin la méthode des éléments finis est conçue pour aplanir le problème en permettant une plus grande flexibilité pour discrétiser des géométrie complexe et pour raffiner le maillage localement . Cette souplesse permet, par exemple, une même précision de l'approximation qu'en différences finies, avec moins de points dans le maillage .

Cette dernière méthode est celle retenue pour les simulations présentées dans ce travail . Dans les pages qui suivent la méthode des éléments finis sera brièvement décrite . Le choix des paramètre numériques sera également entrepris dans ce chapitre .

## *II.2. La méthode des éléments finis*

### *II.2.1. généralités*

La Méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques .

Différentes approches sont utilisées dans le but de l'obtention de ces équations . Nous ne citons dans ce contexte que les trois les plus connues

#### *a. Approche directe*

A l'origine cette approche à été utilisée pour développer la méthode des éléments finis dans la construction aéronautique . Elle utilise des éléments connus dans l'analyse structurale .

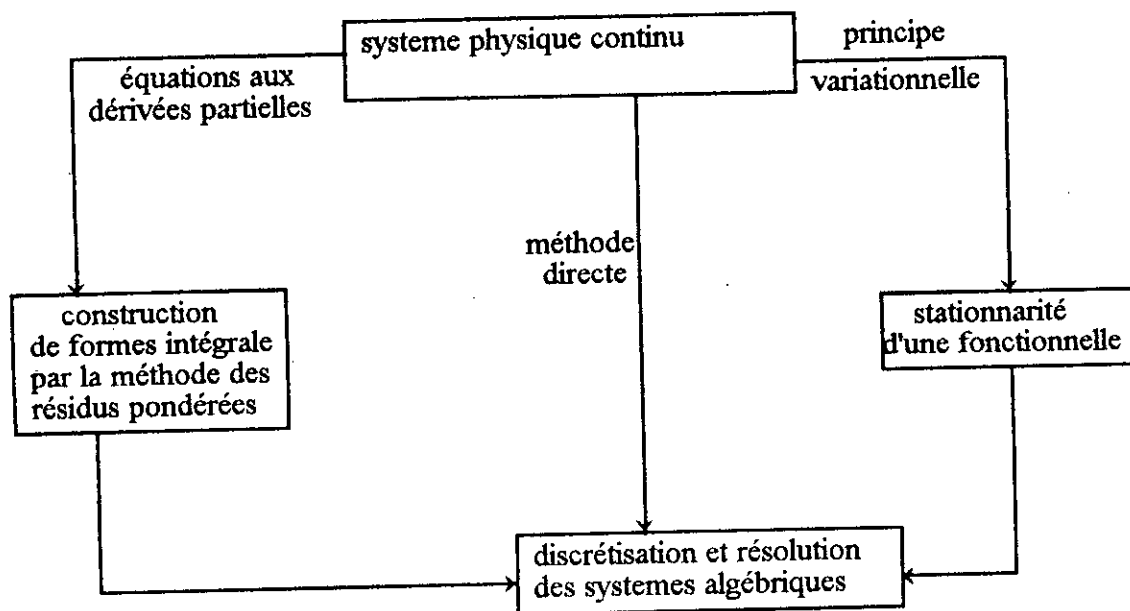
b. Approche variationnelle

La méthode des éléments finis a été reformulée à partir de considérations énergétiques et variationnelles. Cette méthode utilise le principe de stationnarité d'une quantité appelée fonctionnelle.

c. Approche résiduelle

C'est l'approche la plus utilisée. Elle s'applique directement aux équations aux dérivées partielles qui gouvernent le problème physique. Elle représente un cas particulier de la méthode des résidus pondérés.

La figure (2.1) résume la classification des différentes approches que nous venons de présenter.



figure(2.1): classification des différentes approches en éléments finis

On se propose dans ce qui suit de développer ces deux dernière méthode qui feront l'objet de l'approche adoptée , utilisées dans le chapitre suivant pour la discrétisation du problème traité .

## II.2.2. METHODE DES RESIDUS PONDERES

la méthode des résidus pondérés, qui, en utilisant des fonctions de pondérations permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une forme intégrale , des équations de comportement de système physique continu . La méthode des éléments finis discrétise, ensuite, la formulation intégrale pour conduire à un système d'équations algébriques, qui pour sa part, fournit une solution approchée du problème

### II.2.2.1. Résidus:

Considérons un système physique continu et stationnaire, dont le comportement est représenté par un système d'équations aux dérivées partielles linéaire ou non linéaire

$$L(u) + f_v = 0 \quad \text{sur le domaine} \quad (2.1)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$C(u) = f_s \quad \text{sur la frontière du domaine} \quad (2.2)$$

Nous appelons résidus la quantité  $R(u)$  définis par :

$$R(u) = L(u) + f_v \quad (2.3)$$

Qui s'annule évidemment quand  $u$  est une solution du problème .

La méthode des éléments finis utilise une formulation intégrale (ou variationnelle)  
On se propose de construire différentes formes intégrales correspondants à différentes équations aux dérivées partielles .

### *II.2.2.2. Formulation intégrale*

La méthode des résidus pondérées consiste à rechercher des fonctions  $U$  qui annulent la forme intégrale :

$$W(u) = \int \langle \Psi \rangle \{ R(u) \} dv = 0 \quad (2.4)$$

Pour toute fonction de pondération

#### Remarque:

1- Toute solution  $U$  qui vérifie (2.1), vérifie, nécessairement, l'équation (2.4); Par contre si  $U$  est une solution de l'équation (2.4), elle est une solution approché de l'équation (2.1) et, par conséquent, du problème physique considéré .

2- Toute solution qui vérifie les équations (2.1) et (2.2), vérifie nécessairement, l'équation (2.4) quelque soit la fonction de pondération

### *II.2.2.3. Discrétisation de la forme intégrale*

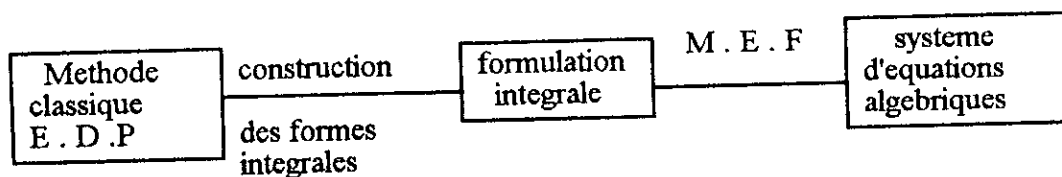


figure (2.2)

Dans ce qui à précéder, nous avons remplacé la résolution des équations aux dérivées partielles, par la recherche des fonctions  $U$  qui annulent la forme intégrale  $W$ , pour toutes fonctions de pondérations .

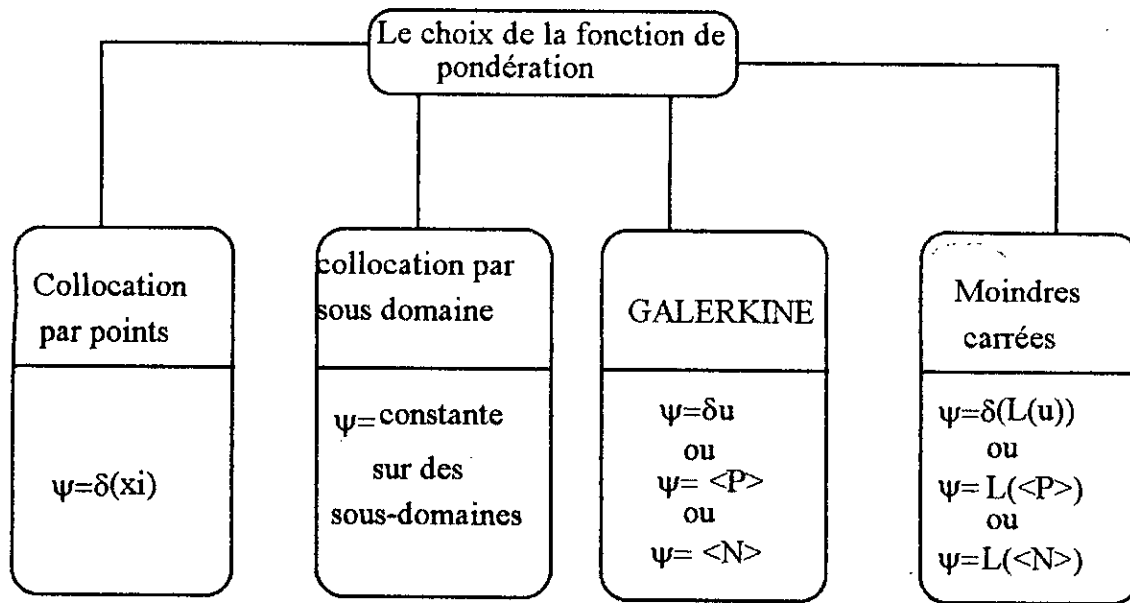
Pour construire une solution approché  $U$ , nous discrétisons en deux étapes :

1.  $U=U( a_1 , a_2 , \dots , a_n )$

2. choisissons un ensemble de  $n$  fonctions de pondérations  $\Psi$  indépendantes .

Le nombre de fonctions de pondérations doit être égale au nombre de paramètres d'approximations .

Le choix du type des fonctions  $\Psi$  conduit à plusieurs méthodes, comme on peut le voir sur la figure (2.3)



figure(2.3)

Dans ce travail, on optera pour la méthode de GALERKINE, qui est d'ailleurs la plus répondue, et qu'on se propose de détailler dans ce qui suit .

**II.2.2.4.Méthode de GALERKINE**

Les fonctions Ψ sont constituées par l'ensemble des variations δU des fonctions U

$$\Psi = \delta U = \langle P \rangle \{ \delta a \} \text{ Pour tout } \{ \delta a \} \tag{2.5}$$

Ou { δa } sont les variations des paramètres d'approximations { a }

L'équation (2.4) devient :

$$W = \int \delta U ( L(u) + \mathbf{f}_v ) dV = 0 \tag{2.6}$$

$$W = \langle \delta a \rangle \int \{ P \} ( L(\langle P \rangle \{ a \} ) + \mathbf{f}_v ) dV = 0 \tag{2.7}$$



comme  $W$  doit s'annuler pour tout  $\{\delta a\}$ , la relation précédente est équivalente aux  $n$  équations algébriques :

$$W_1 = \langle \delta a \rangle \int \{P_1\} (L(\langle P \rangle \{a\}) + f_v) dV = 0$$

(2.8)

$$W_n = \langle \delta a \rangle \int \{P_n\} (L(\langle P \rangle \{a\}) + f_v) dV = 0$$

### II.2.3. FONCTIONNELLES

#### *II.2.3.1. Généralités*

En mécanique des fluides, la notion fonctionnelle est souvent utilisée pour construire, directement, une formulation intégrale, en utilisant le principe de stationnarité de la fonctionnelle d'énergie. Rendre stationnaire une fonctionnelle est parfaitement équivalent à la méthode des résidus pondérés, déjà exposé ci-dessus.

Rendre stationnaire une fonctionnelle, permet d'obtenir directement la formulation intégrale, ce qui est utile lorsque la fonctionnelle est plus simple à exprimer que les équations aux dérivées partielles.

#### *II.2.3.2. première variation*

On définit une fonctionnelle  $\pi$  comme étant une fonction d'un ensemble de plusieurs fonctions et de leurs dérivées.

$$\pi = \pi \left( U, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \right) \quad (2.9)$$

$$\delta \pi = \frac{\partial \pi}{\partial u} \cdot \delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial \pi}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} \cdot \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \dots \quad (2.10)$$

$\delta$  est un opérateur mathématique .

$\delta u$  et  $\delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  sont , respectivement , des variations quelconque de  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$

### II.2.3.3. Principe de stationnarité

soit un système physique continu régis par le système d'équations aux dérivées partielles

(2.1) et (2.2) . Il est possible, dans certains cas, ( le système est dit conservatif ), de construire une fonctionnelle qui vérifie la relation .

$$\delta \pi = W = 0 \quad (2.11)$$

Ou  $W$  est la formulation intégrale obtenue par la méthode des résidus pondérés du type GALERKINE (  $\Psi = \delta u$  )

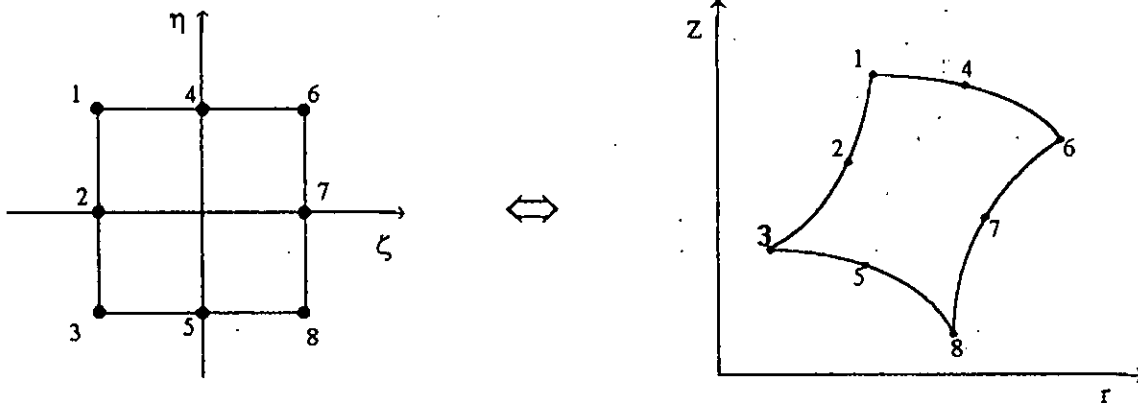
Une solution  $U$  qui annule  $W$ , rend stationnaire la fonctionnelle  $\pi$  . Comme on peut le remarquer la relation (2.11) n'est rien d'autre que la condition de stationnarité de la fonctionnelle  $\pi$  . Et, ainsi, on peut énoncé le principe de stationnarité comme suit :

Toute fonction  $U$  qui vérifie les équations (2.1) et (2.2) rend la fonctionnelle  $\pi$  stationnaire .

### II.3. LE CHOIX DES PARAMETRES NUMERIQUES

#### II.3.1. Le choix de l'élément :

L'élément choisi dans le cadre de ce travail est l'élément isoparamétrique quadratique à huit noeuds . L'élément de référence et l'élément réel sont représentés avec la numérotation des noeuds :



figure(2.4) : Représentation de l'élément de référence et de l'élément réel isoparamétrique à huit noeuds .

Cet élément assure une interpolation de la valeur de  $U$  par un polynôme qui prend les même valeurs que  $U$  aux points géométriques : C'est donc un élément Lagrangien .

Sa base polynomiale est :  $\langle 1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \zeta\eta \quad \eta^2 \quad \zeta^2\eta \quad \zeta\eta^2 \rangle$  (2.12)

#### II.3.2. Propriétés mathématique de l'élément :

- L'élément choisis est de classe  $C^0$  (fonction continue) et non de classe  $C^1$  (fonction continue et dérivable).
- L'élément choisis est conforme, c'est-à-dire qu'il assure la convergence de l'approximation éléments finis vers la solution réelle pour le problème associé.
- L'élément est qualifié isoparamétrique, par ce que les fonctions de transformations géométriques sont identiques aux fonctions d'interpolations. Ceci implique que les noeuds géométriques sont confondus avec les noeuds d'interpolations.

$$Z = \sum_{i=1}^8 Z_i N_i(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^8 Z_i \bar{N}_i(\zeta, \eta)$$

$$r = \sum_{i=1}^8 r_i N_i(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^8 r_i \bar{N}_i(\zeta, \eta) \quad (2.13)$$

### ***II.3.3. Singularité de la matrice Jacobienne :***

La singularité de  $[J]$  en un point de l'élément de référence implique que la transformation isoparamétrique n'est pas bijective.

Cette singularité apparaît lorsque l'on déforme beaucoup l'élément de référence. Il est prudent de vérifier que le déterminant de  $J$  garde un signe constant en tout les points de l'élément de référence.

Pour éviter la singularité dans un élément à huit noeuds, ZIENKIEWICZ propose les conditions suivantes :

1. Les quatre angles sont inférieurs à 180.
2. Les noeuds du milieu sont situés dans le tiers central de chaque côtés

La figure (2.5) illustre les suggestions de ZIENCKEWICZ.

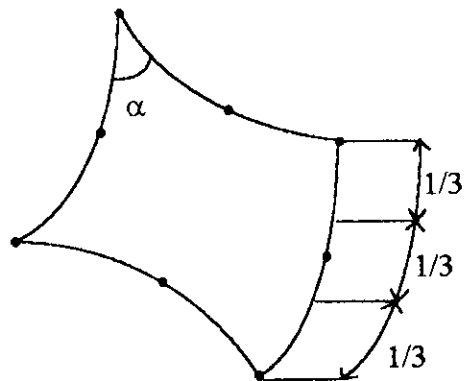


figure (2.5)

#### II.3.4. Le Maillage

La partition du domaine  $V$  en éléments  $V^e$  (rectangulaire) doit respecter les deux règles suivantes :

1. deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leurs frontière commune, si elle existe . Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments .
2. L'ensemble de tout les éléments  $V^e$  doit constitués un domaine aussi proche que possible du domaine  $V$  donné .

Nous excluons, en particulier, les trous entre éléments .

### II.3.5. Intégration numérique :

Le calcul de la matrice de rigidité [k] et du vecteur force {F} reviennent à effectuer des intégrations doubles sur le carré  $(-1,+1) * (-1,+1)$  bien que les intégrations soient celles de polynômes à deux variables de degrés inférieurs ou égale à 6 .

L'intégration formelle n'est pas aisée à cause du calcul des coefficients de ces polynômes . Les méthodes d'intégrations numériques seront donc employées .

#### II.3.5.1. Méthode produit de GAUSS:

Pour l'élément de référence carré, la méthode produit est souvent la plus utilisée .Elle peut exprimer :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} Y(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \sum_{i=1}^{r1} \sum_{j=1}^{r2} W_i W_j Y(\zeta_i, \eta_j) \quad (2.14)$$

ou :

**r1, r2** sont les points d'intégrations .

**W<sub>i</sub> , W<sub>j</sub>** sont les coefficients de pondérations correspondants .

**ζ<sub>i</sub>, η<sub>j</sub>** sont les coordonnées des points d'intégration correspondants .

**II.3.5.2. Précision de l'intégration :**

Par la méthode d'intégration de GAUSS il faut 3\*3 points pour intégrer exactement la matrice de rigidité {K} . Cependant, cette méthode est un peu trop précise puisqu'elle intègre des termes  $\zeta_i, \eta_j ; i \leq 5, j \leq 5$

Très souvent, on utilise une intégration à 2\*2 points pour l'élément quadratique à huit noeuds ; celle-ci donne d'excellents résultats . L'intégration est dite réduite .

Pour le vecteur force {F}, il faut utilisé 2\*2 points de GAUSS où une méthode directe du troisième ordre pour intégrer exactement .

On résume les coordonnées et les poids des points d'intégrations adoptés dans le cadre de notre travail dans le tableau et la figure suivants:

	$\zeta_i$	$\eta_j$	$W_i$
	$+1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	1
	$-1/\sqrt{3}$	$+1/\sqrt{3}$	1
	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1

	$+1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
--	---------------	---------------	---

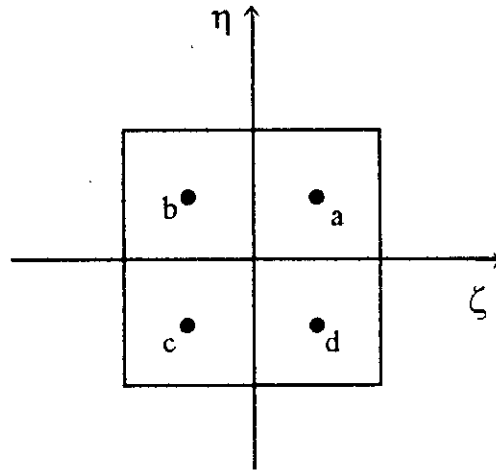


figure (2.6) : Méthode produit de GAUSS à 2\*2 points .

### Résumé 1

Une introduction à la MDF a été entreprise à l'intérieure de se document . En effet, au premier chapitre, on a développé les équations de NAVIERS-STOCKES en coordonnées cylindriques, on a introduit des connaissances de base sur les propriétés des fluides, entre autres, la masse volumique ainsi et la viscosité .

Pour la suite, et en vu de la résolution des équations aux dérivées partielles une présentation de quelques notions de la méthode des éléments finis s'est avérée nécessaire dans le but de l'élaboration du programme qui calcul le champs de vitesse et le champs de pression à l'intérieur du domaine considéré .



Les différentes approches utilisées dans ce sens ont été brièvement présentées, notamment celle des résidus pondérées, ainsi que la méthode variationnelle (elle utilise le principe de stationnarité d'une quantité appelé fonctionnelle ).

Le choix de l'élément de discrétisation a été discuté dans cette partie.

En enfin, on tient à souligné l'intérêt que présente la formulation en éléments finis du problème en coordonnées cylindriques, qui sera développée dans la partie postérieure intitulée Formulation du problème

# **Deuxième partie**

**Formulation du problème**

**Troisième chapitre**

**Mise en équations du problème**

**Quatrième chapitre**

**discrétisation du problème selon la méthode  
des éléments finis**

## TROISIEME CHAPITRE

### MISE EN EQUATIONS DU PROBLEME

#### III.1.GENERALITES

On se propose de considérer dans cette étude l'écoulement entre deux profils coaxiaux .

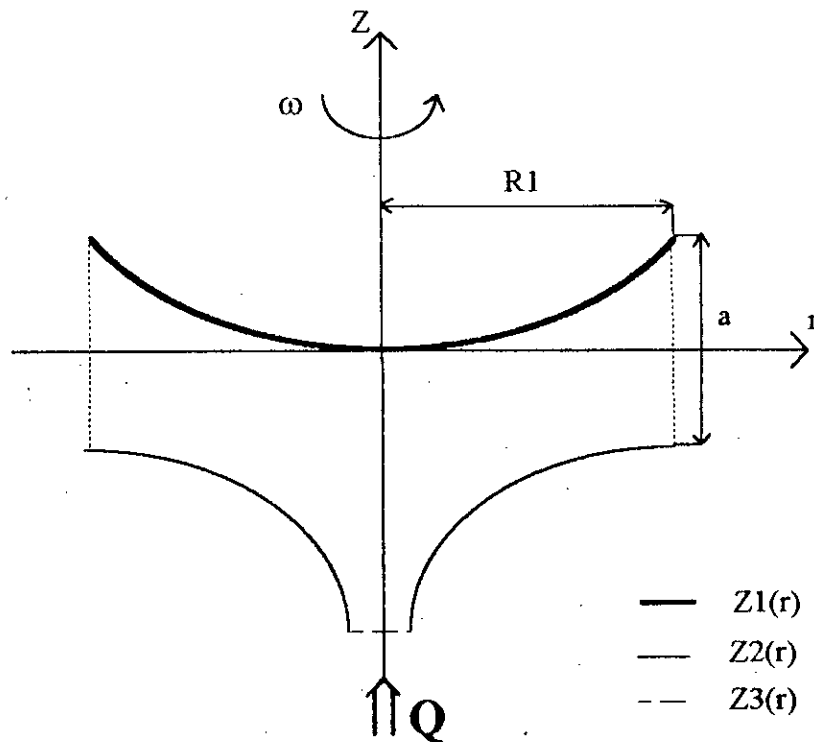


figure (3.1) : Configuration du problème

Comme l'illustre la figure (3.1), les deux profils sont délimitées par la distance  $R_1$ , suivant la coordonnées radiale ils sont distants de  $A(z)$  fonction de la coordonnée axiale  $z$  et qui atteint son minimum à la sortie du domaine noté  $a$ .

Le profil inférieur est fixe à travers lequel un débit axial  $Q$  est injecté. Ce débit est introduit au centre du profil, par l'intermédiaire, d'un orifice de rayon  $R_0$ .

Le profil supérieur tourne à une vitesse angulaire  $\omega$ , qui peut être nulle pour le cas ou l'on désire étudier le cas de l'écoulement purement radiale (disques stationnaires).

### III.2. EQUATIONS DU MOUVEMENT

Tel que mentionner dans l'introduction, les écoulements radiaux, laminaire d'un fluide isotherme visqueux de ce genre sont régis par les équations aux dérivées partielles de NAVIERS-STOCKES. Ces équations couplées avec l'équation de continuité, forment le système d'équations gouvernantes.

Dans le présent cas, ces équations sont écrites en coordonnées cylindriques comme suit :

L'équation de conservation de quantité de mouvement selon la coordonnée radiale :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = F_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left( \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (3.1)$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement selon la coordonnée tangentielle :

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{vu}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = F_{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (3.2)$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement selon la coordonnée axiale :

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu (\nabla^2 w) \quad (3.3)$$

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0 \quad (3.4)$$

ou , dans les équations (3.1) à (3.3), l'opérateur Laplacien est définis à l'équation (3.5)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.5)$$

Dans la présente étude, le fluide est supposé comme étant de masse volumique  $\rho$  constante . D'autre part, seul le régime stationnaire sera considéré dans ce travail, par conséquent les termes temporels peuvent être éliminés des équations (3.1) à (3.4) . En tenant compte de ces considérations, ainsi que de la symétrie de révolution et en négligeant les forces extérieures exercées sur le domaine, les équations gouvernantes (3.1) à (3.4) peuvent se réduire et prendre la forme des équations (3.6) à (3.9) suivantes :

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.7)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

### III.3. CONDITIONS AUX LIMITES

Afin de paramètre la résolution des équations gouvernantes, la connaissance des conditions aux limites est essentielle . Celle utilisées dans ce travail découlent des conditions d'adhérence sur les parois du domaine ainsi que celle de la symétrie de révolution au centre des disques . Ces conditions, et également celles aux sections d'entrée et de sortie peuvent être résumées de la façon suivante :

$$\text{à } z = z3(r) \text{ et } 0 \leq r \leq R0 : u = v = 0 \text{ et } w = f(r)$$

$$\text{à } z = z2(r) \text{ et } R0 \leq r \leq R1 : u = v = w = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{à } z = z1(r) \text{ et } 0 \leq r \leq R1 : u = w = 0 \text{ et } v = \omega * r$$

$$\text{à } r = R1 \text{ et } z2(r) \leq z \leq z1(r) : u = g1(z) , v = g2(z) ; w = g3(z)$$

Les fonctions  $f(r)$  et  $g_i(z)$  sont supposées connues et représentent les conditions aux limites à l'entrée et à la sortie du domaine d'étude . Ces conditions sont difficile à modéliser, ceci est attribuable au fait que les conditions du milieu extérieur du domaine ne sont pas connues . La procédure utilisée pour les simuler sera élaborée dans ce qui suit .

### III.3.1. Traitement des conditions aux limites

#### III.3.1.1. Généralités:

Il a été mentionné dans la section précédente que les conditions aux limites aux sections d'entrée et de sortie sont plus difficile à simuler en raison des conditions inconnues à l'extérieur du domaine d'étude. En retournant sur les conditions aux limites détaillées antérieurement (équation 3.10), les fonction  $f(r)$  et  $g(z)$  doivent être définies. Ces fonctions représentent les répartitions des vitesses aux sections d'entrée et de sortie. Evidemment, elles doivent permettre la vérification de la conservation de masse dans le domaine comme le stipule l'équation (3.11) :

$$Q = \int_0^{R_0} 2\pi r f(r) dr = \int_{-L/2}^{+L/2} 2\pi R_1 g(z) dz \quad (3.11)$$

Les valeurs choisies pour ces fonctions peuvent être tout à fait arbitraire. En effet, n'importe quelle fonction qui représente une situation physiquement réaliste pourrait être utilisée. Afin d'éclaircir ce choix, le cas avec et sans rotation seront traités séparément dans ce qui suit.

#### a. Cas sans rotation

Dans le cas sans rotation du disque supérieur, il est supposé que la vitesse à la périphérie des profils est purement radiale. C'est-à-dire que les composantes tangentielle et axiale de la vitesse sont supposées nulles à la périphérie des profils (3.12). Cette hypothèse suppose que le rayon des disques est suffisamment grand pour permettre un écoulement bien établi à cette section de sortie.

$$g_2(z) = g_3(z) = 0 \quad (3.12)$$

Dans la présente étude, les fonctions  $f(r)$  et  $g(z)$  sont choisies de façon à donner des profils ayant des formes paraboliques afin de simuler, le mieux que possible, des écoulements bien établis .

La fonction  $f(r)$  représente, en réalité, la répartition de la vitesse axiale  $w(r)$  à la section d'entrée comme il est montré dans l'équation (3.13) .

$$w(r) = c_1 (R_0^2 - r^2) \quad (3.13)$$

Dans cette équation ,  $c_1$  est une constante qu'on déterminera .

Avec l'aide des équations (3.11) et (3.13), le débit à l'entrée peut être exprimé comme suit :

$$Q_e = \frac{\pi C_1 R_0^4}{2} \quad (3.14)$$

Il est évident que la valeur de la constante  $c_1$  peut être déterminée connaissant la valeur du débit . En utilisant l'équation (3.14), on aboutit à

$$C_1 = \frac{2Q_e}{\pi R_0^4} \quad (3.15)$$

De la même façon,  $g(z)$  représente la vitesse radiale  $u(z)$  à la sortie et est représentée par l'équation suivante :

$$u(z) = c_2 z(a - z) \quad (3.16)$$



De même que précédemment, Le débit à la sortie peut être exprimé avec la relation suivante

$$Q_2 = \frac{\pi R_1 C_2 a^3}{3} \quad (3.17)$$

En égalisant les équations (3.14) et (3.17), on obtient une relation entre les deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  (3.18). Cette relation permet la conservation de masse sur le domaine considéré.

$$C_2 = \frac{3R_0^4}{2R_1 a^3} C_1 \quad (3.18)$$

Il serait possible d'utiliser différents profils au lieu d'un profil parabolique. Les équations (3.13) et (3.16) devraient être changées en conséquence pour représenter le genre de profils désiré.

b. Cas avec rotation:

Dans le cas avec rotation, une approche un peu différente est utilisée. Les conditions à la section d'entrée des profils sont les mêmes que dans le cas sans rotation. Cependant, pour approximer les effets de la rotation à la périphérie des profils une superposition de la distribution radiale imposée dans le cas sans rotation avec la solution des profils infinis avec rotation est effectuée comme le montre les relations (3.19-3.21). Cette superposition permet de satisfaire, en même temps, les effets du débit (cas sans rotation) ainsi que ceux de la rotation (solution des profils infinis).

$$u(z) = g_1(z) = u(z)_{nr} + u(z)_{sr} \quad (3.19)$$

$$v(z) = g_2(z) = v(z)_{nr} + v(z)_{sr} \quad (3.20)$$

$$w(z) = g3(z) = w(z)_{sr} + w(z)_{ar} \quad (3.21)$$

Dans ces équations, les indices 's.r' et 'a.r' signifient respectivement 'sans rotation' et 'avec rotation'. La composante de vitesse radiale sans rotation,  $u(z)$  est tout simplement la même que développée précédemment, c'est-à-dire que sa distribution prend une forme parabolique. De la même façon, les composantes de la vitesse tangentielle et axiale pour le cas sans rotation sont supposées nulles à la sorties du domaine étudié, c'est-à-dire :

$$v(z)_{sr} = w(z)_{sr} = 0 \quad (3.22)$$

Pour les composantes avec rotation, les valeurs sont tirées directement des solutions obtenues par VO-NGOC dans ses travaux avec les profils de dimensions infinies. L'hypothèse de similitude de VONKARMAN a été utilisée dans ces études et par conséquent, l'allure des profils des composantes de vitesses ne varient pas en fonction du rayon des profils. En effet, seulement les valeurs numériques changent en fonction de la position radiale. Les valeurs des composantes de vitesse sont exprimées comme suit

$$w(z)_{ar} = h1(z) \quad (3.23)$$

$$u(z)_{ar} = h2(z) \quad (3.24)$$

$$v(z)_{ar} = h3(z) \quad (3.25)$$

Dans les équations (3.23)-(3.25), on note que  $h_i(z)$  sont les fonctions de similitude représentant respectivement les composante axiale, radiale et tangentielle la vitesse dans la solution des profils de dimensions infinies de VO-NGOC

La figures (3.2) illustre , de façon générale , les conditions aux limites à la périphérie des profils pour le cas avec rotation . Les profils utilisés découlent directement des relations utilisées dans les équations (3.23)-(3.25) représentant, respectivement, les vitesses axiales, radiales et tangentiellles . Evidement, puisque ces conditions s'appliquent à la section de sortie des profils, ces fonctions sont prises à la section  $r=R1$ .

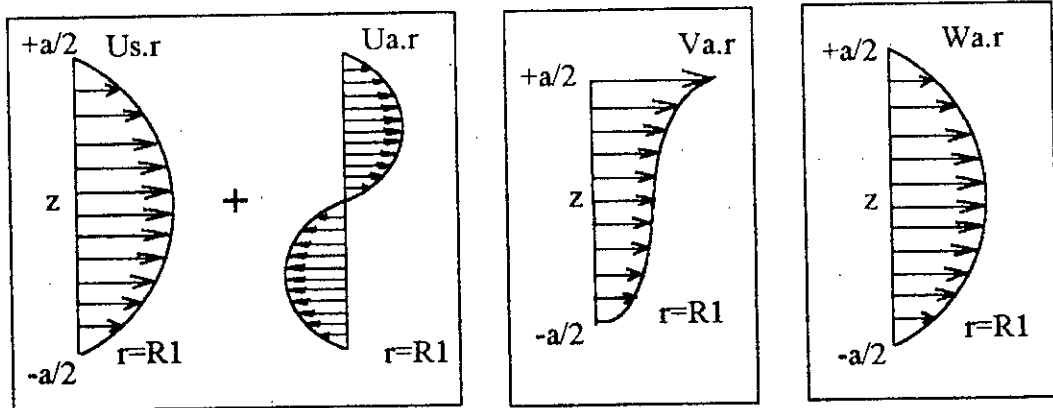
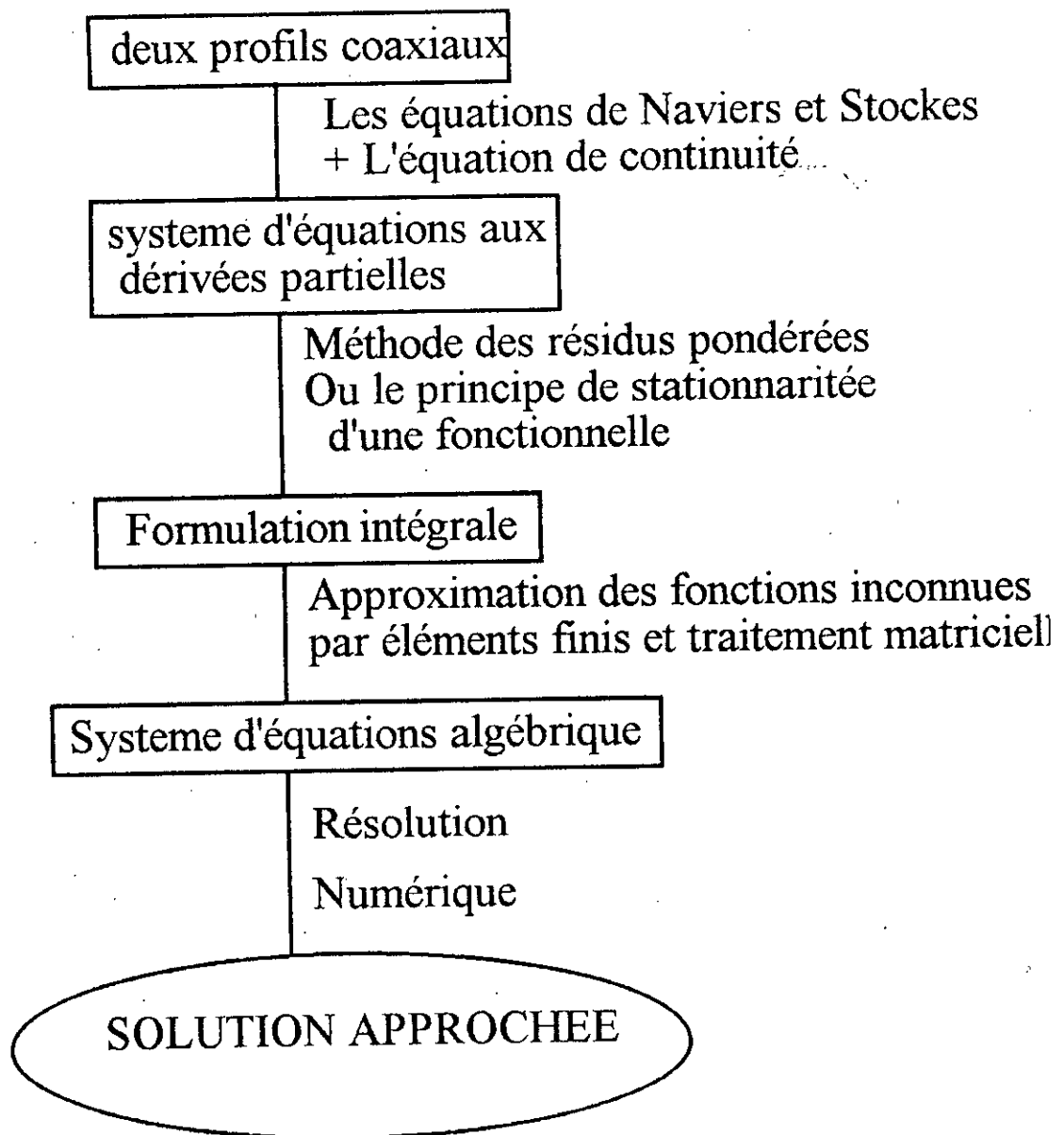


figure (3.2)

La figure (3.3) résume la démarche adopter en vu de la résolution du problème traiter jusqu'à l'obtention de la solution approchée



## QUATRIEME CHAPITRE

### DISCRETISATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

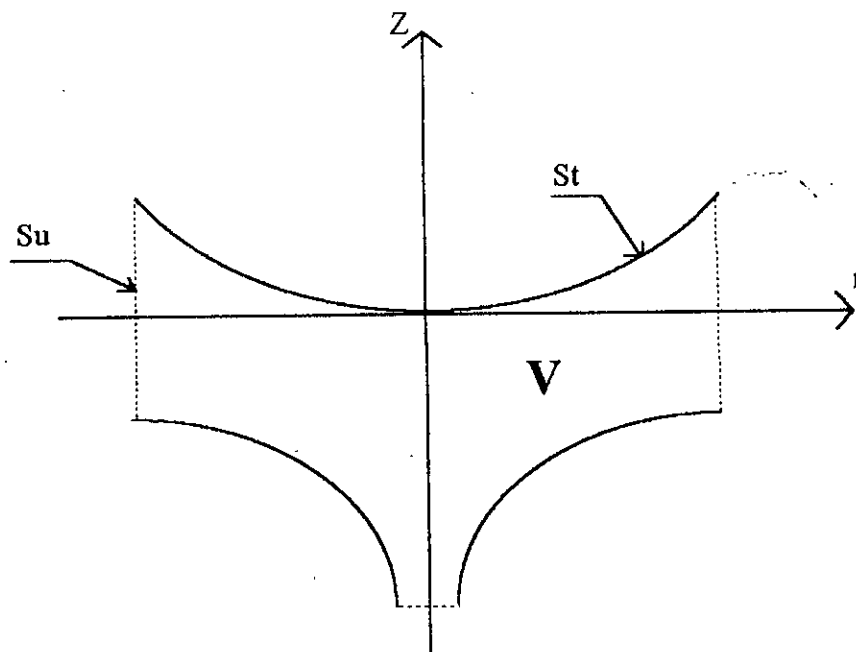
#### *IV.1. CONCEPTS DE BASE DES ECOULEMENTS VISQUEUX:*

Si, à un instant donné, l'on considère un volume isolé de fluide, les contraintes  $\sigma$  doivent être en équilibre avec les forces d'accélération. De plus, sur les surfaces extérieures, les contraintes doivent équilibrer les tractions appliquées  $t$ . ainsi les équations d'équilibre sont identiques à celles d'un solide.

$$\int_V \sigma + F = 0 \quad (4.1)$$

$$\sigma \cdot n = t \quad (4.2)$$

ou  $V$  désigne le domaine occupé par le fluide,  $S_t$  la partie de la frontière de  $V$  où les contraintes sont imposées, et  $S_u$  la partie de la frontière de  $V$  où les vitesses sont imposées



En appliquant le principe du travail virtuel, pour ce domaine du fluide on a:

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dv - \int_V \delta U^T b dv - \int_{S_t} \delta U^T t ds = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{ou } \delta \dot{\varepsilon} = L_2 \delta U \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon} = L_2 U \quad (4.4)$$

définissent le taux de déformation virtuelle.

Les forces de volumes F peuvent s'écrire en faisant appel au principe d'Alembert:

$$F = F_0 - \rho C \quad (4.5)$$

ou C est le vecteur accélération agissant sur chaque particule et  $\rho$  est la densité.

Comme on a défini la vitesse  $U$  en un point géométriques de l'espace plutôt qu'en un point matériel, la dérivé de  $U$  par rapport au temps ne suffit pas pour définir l'accélération. Celle-ci est donnée par la dérivée totale de  $U$ .

Le vecteur accélération totale s'écrit:

$$C = \partial U / \partial t + (\nabla U^T)^T U + AU \quad (4.6)$$

Même si l'écoulement est stationnaire, c'est à dire si  $\partial u / \partial t = 0$ , l'accélération existe. De plus l'expression de l'accélération est non-linéaire en  $U$  et le problème est immédiatement de nature non linéaire.

#### IV.2. Relations de comportement:

Dans un fluide, par définition, les contraintes correspondants au déviateur du tenseur de contraintes ne peuvent être équilibrées que si il y a mouvement. On peut donc affirmer de façon tout à fait générale que le déviateur des contraintes est une fonction du tenseur des taux des déformations  $\epsilon$ .

On définit la pression  $P$  par :

$$P = -\sigma_m = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) / 3 \quad (4.6a)$$

On peut écrire une relation linéaire très générale entre le déviateur des contraintes  $\sigma$  et le tenseur des taux de déformation selon :

$$\sigma' = \sigma + m.P = D.\epsilon \quad (4.7)$$

avec :

$$m^T = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$$

Pour un fluide isotrope incompressible, la matrice D est définie complètement à l'aide d'une constante  $\mu$  qui représente la viscosité du fluide.

#### IV.2. Equation de continuité :

Considérons un volume infinitésimal de l'espace : nous pouvons affirmer que le débit massique net entrant est égal au taux d'accumulation de masse. Soit :

$$\partial \rho / \partial t + 1/r \partial(\rho r u) / \partial r + 1/r \partial(\rho v) / \partial \theta + \partial(\rho w) / \partial z \equiv \nabla^T (\rho \cdot U) + \partial \rho / \partial t = 0 \quad (4.8)$$

Si cependant, les variations de densité sont faibles, la relation de continuité se simplifie et devient :

$$\nabla^T (U) \equiv \dot{\epsilon}_v = 0 \quad (4.9)$$

Cette relation exprime le fait que le taux de dilatation volumique est identiquement nul.

Il est intéressant de poser explicitement les équations gouvernantes du problème, qui sont connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes.

Ainsi si on élimine  $\sigma$  de la relation (4.1) en utilisant les relations (4.4) à (4.7), on obtient l'équation générale de Navier-Stokes.



$$\rho \left[ \frac{\partial U}{\partial t} + (\nabla U^T)^T \cdot U \right] = -L_1 \cdot m \cdot P + L_1 \cdot D \cdot L_2 \cdot U + F_0 \quad (4.10)$$

#### IV.4. Discrétisation des équations :

On va discrétiser ici la vitesse et la pression au moyen de paramètres indépendants

$$U = N^u U_I \quad p = N^p P_I \quad (4.11)$$

En utilisant le principe des travaux virtuels (4.3) avec

$$\delta U = N^u \delta U_I \quad \delta \dot{\epsilon} = (L_2 N^u) \delta U_I = B_2 \delta U_I \quad (4.12)$$

On peut écrire :

$$\delta U_I^T \left[ \int_V B_1^T \sigma dv - \int_V N^{uT} F dv - \int_{S_T} N^{uT} t ds \right] = 0 \quad (4.13)$$

En notant que ceci est vrai pour toutes les variations, on obtient, en introduisant les relations (4.4) à (4.7)

$$[K]U_I + [\bar{K}]U_I + [\bar{\bar{K}}]U_I + [K^p]P_I + [M] \frac{dU_I}{dt} + F = 0 \quad (4.14)$$

Où les matrices élémentaires sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 [k] &= \int_V B_1^T D B_1 dv \\
 [\bar{k}] &= \int_V \rho (N^u)^T (\nabla (N^u U_1)) N^u dv \\
 [\bar{\bar{k}}] &= \int_V \rho (N^u)^T A N^u dv \\
 [k^p] &= \int_V B_1 m N^p dv \\
 [M] &= \int_V (N^u)^T \rho N^u dv \\
 \{f\} &= - \int_V (N^u)^T f_0 dv - \int_{S_T} (N^u)^T t ds
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Pour obtenir la deuxième relation nécessaire correspondant à l'équation de liaison, on utilise la méthode de Galerkin en pré-multipliant l'équation de continuité (4.9) par  $(\delta P)^T$  et en l'intégrant sur le domaine dans le cas d'une incompressibilité totale. On obtient ainsi

$$(\delta P_1)^T \int_V (N^p)^T \dot{\epsilon}_v dv = 0
 \tag{4.16}$$

En notant que ceci est vrai pour tout  $\delta P_1$  et en écrivant que

$$\dot{\epsilon}_v = m^T L_2 U = m^T L_2 N^u U_1 = m^T B_2 U_1
 \tag{4.17}$$

On obtient alors l'équation

$$[\bar{K}^p] U_1 = 0
 \tag{4.18}$$

Les systèmes d'équations (4.14) et (4.18) peuvent s'écrire selon :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} + \bar{\mathbf{K}} + \overline{\mathbf{K}}, \mathbf{K}^P \\ \mathbf{K}^P & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \mathbf{P}_I \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}, \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \mathbf{P}_I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

On remarque que le système précédent est non symétrique et non linéaire.

#### IV.5.Principe et méthode de résolution :

Le calcul et l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires puis la résolution du système d'équations algébriques est une étape importante dans l'analyse par éléments finis.

Pour le calcul intégral des différents termes des matrices élémentaires nous avons utilisé la méthode de Gauss ensuite l'assemblage de ces matrices s'est fait par addition après expansion.

La méthode de résolution se résume ainsi :

Après résolution du système d'équations algébriques résultant de l'équation de continuité, on injecte

Les valeurs du champ dans les matrices du système d'équations algébriques résultant des équations de Navier-Stokes et on résout ce dernier système pour obtenir le champ de vitesse et champ de pression.

##### IV.5.1.Algorithme :

Entrée : champ de vitesse initial.

Résolution des deux systèmes

$$[\bar{K}^p]\{U_I\} = 0 \quad (4.20)$$

$$[K]\{U_I\} + [\bar{K}]\{U_I\} + [\bar{K}]\{U_I\} + [K^p]\{P_I\} = 0 \quad (4.21)$$

Après résolution du système ( 4.20 ) on aura les valeurs du champ de vitesse suivant la direction ( r ) aux noeuds au sommet

En construisant les matrices [ K ],  $[\bar{K}]$  et  $[\bar{K}^p]$  sur la base des résultats du système ( 4.20 ) et du champ de vitesse initial , et en introduisant ces résultats dans le système ( 4.21) on aura

$$\{ [K] + [\bar{K}] + [\bar{K}^p] \} \{X\} = \{F\} \quad (4.22)$$

où :  $\{X\}$  est le vecteur qui comprend les inconnues de vitesse et de pression.

$\{f\}$  : le vecteur résultant de l'entrée des valeurs trouvées après résolution du système (4.20).

Après résolution du système (4.22) on a les champs de vitesse et de pression pour l'itération i :  $U^i, P^i$ .

Le processus itératif est arrêté lorsque la différence entre les vitesses obtenues pour deux itérations successives est inférieure à 0,001

L'algorithme correspondant à notre analyse est donné à la figure (4.2).

Donner un champ de vitesse initial

$I=1,2,\dots$ (pour chaque itération)

Pour chaque élément

Calculer  $[\bar{K}^P]$ ,  $[K^P]$ ,  $[K(U^{i-1})]$ ,  $[\bar{K}(U^{i-1})]$ ,  $[\bar{\bar{K}}(U^{i-1})]$

Assembler  $[\bar{K}^P]$  dans  $[\bar{K}^P]$

Entrée des conditions aux limites

Résoudre  $[\bar{K}^P]\{U^i\} = \{0\}$

Assembler  $[K^P]$  dans  $[K^P]$

Assembler  $[K(U^{i-1})]$  dans  $[K(U^{i-1})]$

Assembler  $[\bar{K}(U^{i-1})]$  dans  $[\bar{K}(U^{i-1})]$

Assembler  $[K(U^{i-1})]$  dans  $[K(U^{i-1})]$

Sommer les matrices  $[K]$ ,  $[K]$ ,  $[K]$

$$K_1 = K + \bar{K} + \bar{\bar{K}}$$

Le système à résoudre est alors :

$$[K_1] \{U\} + [K^P] \{P\} = 0.$$

En entrant les valeurs de  $U^i$  suivant la direction  $r$  des noeuds aux sommets  
trouvées

en ( I ); et en annulant les termes de la matrice correspondant à ces valeurs,  
et à la

fin on somme les deux matrices  $[K_1]$  et  $[K^P]$  on aura :

$$K_2 = K_1 + K^P$$

Et le système

$$[K_2] \{X\} = 0.$$

Résoudre ce système comme dans un problème linéaire.

En réaménageant les résultats de (1) et (2) on a :

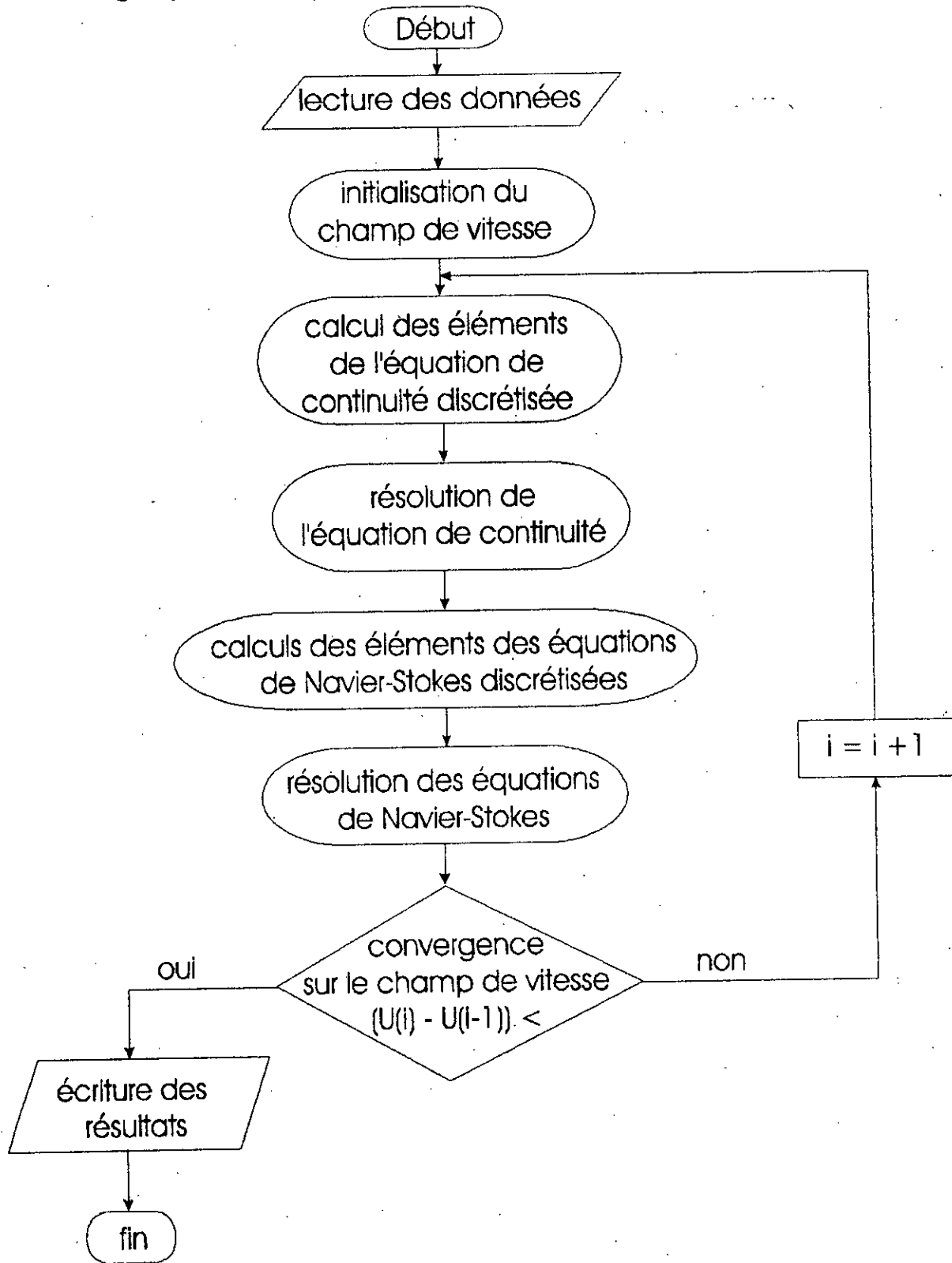
$$\{U^t\} \text{ et } \{P^t\}$$

Calculer :

$$\{U^t\} - \{U^{t-1}\}.$$

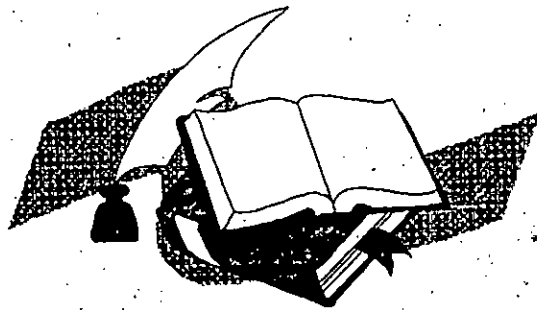
tester la convergence

### IV.5.2. Organigramme





# Conclusion



Nous tenons à mettre en évidence que le présent travail nous a permis de faire un développement qui nous a conduit à discrétiser les équations de NAVIERS-STOCKES en coordonnées cylindriques, présentant alors, un outil numérique qui peut approcher tout modèle physique gouverner par les équations de NAVIERS-STOCKES en coordonnées cylindriques.

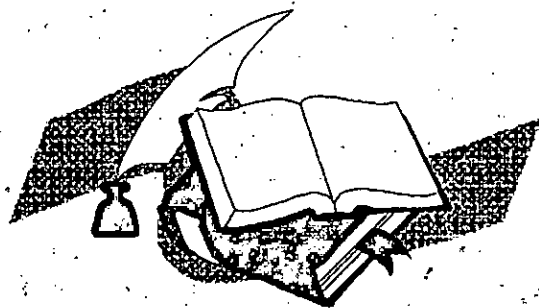
Dans ce travail on a essayé de résoudre les équations de NAVIERS-STOCKES par la méthode des éléments finis (On introduit les données numériques du problème, on les injecte dans le programme principale qui repose sur un principe itératif, puis on fait la validation des résultats). Les résultats n'ont pu donner satisfaction, leurs divergence apparaît dès que le processus d'itération est activé (Il présentaient des croissances exponentielles).

Ceci peut être attribuer, d'une part, au choix de l'élément, le patch test rejettera l'élément de discrétisation choisis. part ailleurs, Le nombre d'éléments choisis peut être une source de divergence, cette alternative à été levé dans la mesure où le nombre d'éléments choisis durant les derniers essais était important : la taille de [K] était de (300\*300), ce qui a limité la source de divergence au choix de l'élément.

Pour cela on est tenu de faire les recommandations suivantes :

- Elaborer un autre élément qui prendra en considération les spécificité des variables du problème. On conseil alors d'utiliser un élément quadrilatéral cubique. Sinon d'augmenter l'ordre d'interpolation jusqu'à la convergence.
- changer l'approche de la variable pression qui a été choisie de façon linéaire selon la recommandation de ZIENCKEWICZ, en un autre type d'interpolation qui approche au mieux les variables réelles du profil de pression.

# Annexe



Equations d'équilibre

Equation de continuité

Relation taux de déformation-vitesse

**I. Equation d'équilibre:**

$$L_1 \sigma + F = 0$$

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_z \\ \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad L_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

**II. Equation de continuité:**

$$\nabla U = 0$$

tel que  $\nabla$  représente l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques:

$$\nabla = (1/r + \partial/\partial r, \partial/\partial \theta, \partial/\partial z)$$

En tenant compte de l'axisymétrie:

$$\nabla = (1/r + \partial/\partial r, 0, \partial/\partial z)$$

**III. Relation taux de déformation-vitesse:**

$$\dot{\epsilon} = L_2 U$$

tel que

$$L_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}$$

et en tenant compte de l'axisymétrie

$$L_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}$$

La matrice de viscosité:

$$D = \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice des fonctions de forme pour le vecteur vitesse:

$$N^v = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_s & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_s & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_s \end{bmatrix}$$

Le vecteur ligne des fonctions de forme pour le vecteur pression:

$$N^P = [N_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

La matrice  $B_1$  est:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} + \frac{N_1}{r} & -\frac{N_1}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} + \frac{N_1}{r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial N_s}{\partial r} + \frac{N_s}{r} & -\frac{N_s}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial r} & \frac{\partial N_s}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial r} + \frac{N_s}{r} \end{bmatrix}$$

La matrice  $B_2$  est:

$$B_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & 0 \dots \dots \dots & \frac{\partial N_s}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & 0 \dots \dots \dots & \frac{N_s}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \dots \dots \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} - \frac{N_1}{r} & 0 \dots \dots \dots & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial r} - \frac{N_s}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 \dots \dots \dots & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} \dots \dots \dots & \frac{\partial N_s}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_s}{\partial r} \end{bmatrix}$$

La matrice  $[A]$  est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v}{r} & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur ligne  $\{ m^T \}$  est :  
 $m^T = \{ 1, 1, 1, 0, 0, 0 \}$

**LES FONCTIONS DE FORME ET LEURS DERIVEES**

*Elements quadrilatérale ) huit noeuds*

noeud $i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\xi$	-1	0	1	1	1	0	-1	-1
$\eta$	-1	-1	-1	0	1	1	1	0

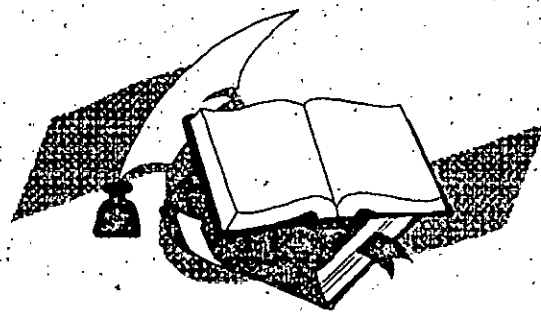
et les fonctions de forme ainsi que leurs dérivées  $\partial N_i / \partial \xi$ ,  $\partial N_i / \partial \eta$

Noeud $i$	$\{N\}$	$\{\partial N / \partial \xi\}$	$\{\partial N / \partial \eta\}$
1	$-1/4(1-\xi)(1-\eta)(1+\eta+\xi)$	$1/4(1-\eta)(2\xi+\eta)$	$1/4(1-\xi)(2\eta+\xi)$

2	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-(1-\eta)\xi$	$-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
3	$-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)(\xi-2\eta)$
4	$\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$	$\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
5	$-\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta)$
6	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-(1+\xi)\xi$	$\frac{1}{2}(1-\xi^2)$
7	$-\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)(\xi-2\eta)$
8	$\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$



# Bibliographie



[1] R.COMOLET: "Mecanique Experimentale Des Fluides"

1963

MASSON & Cie

[2] R.SABERSKY-A.ACOSTA-E.HAUPTMANN:" A First Course In Fluid Mecanics"

JHON WILEY

[3] O.C.ZIENKIEWICZ:"The Finit Element Method"

HILL1989

Mc.GRAW-

[4] G.DHATT & TOUZOT : "Présentation de la méthode des éléments finis"

MAROINE .ED 1984

[5] J.F.IMBERT : "Analyse des structures par éléments finis"

EDITION .CEPADUES 1984

[6] O.RAHMANI & S.KEBDANI : "Introduction à la méthode des éléments finis"

OPU.

[7] H.MESSAOUDI & O.SALAHOUELHADJ:" Etude Et Appllication d'un Element fini Dans Un écoulement Quasi-tridimensionnel "

1994

[8]S.DJOUDI & S.ZERARKA : "Etude D'un Ecoulement Quasi-tridimensionnel Dans uneroue De Turbomachine Par La Méthode des Eléments Finis"

1995