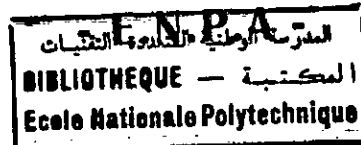


13/96

République Algérienne Démocratique Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique d'Alger



# MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En Vue de l'Obtention du Diplôme  
**D'INGENIEUR D'ETAT**  
En  
**GENIE MECANIQUE**

Thème

ETUDE AEROELASTIQUE  
PAR LA METHODE  
DES ELEMENTS FINIS

Réalisé Par  
**S. KIRAM**  
**K. LACHIBI**

Proposé Par  
**M. BOUDJEMAA**

Devant le Jury

Mr **BENKOUSSAS**  
Mr **RIACHE**  
Mr **LATRECHE**

Président  
Examineur  
Examineur

Année Universitaire

1995/1996

## DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*A mes très chers parents ...*

*A mes frères et à ma soeur ...*

*A toute ma famille ...*

*A tous ceux qui me sont chers ...*

*Je dédie ce modeste travail.*

*Sofiane,*

*A mes parents, ...*

*A mes frères et soeurs, ...*

*A la mémoire de Missoum, ...*

*A tous mes amis, en particulier Sofiane (KIRAM), Samia,  
Sofiane (TEFFOUIN), Sofiane (KOALA), Nabil (NLD),  
Toufik, Réda, Noureddine, Khaled, ...*

*A toute la promotion 5ème année Génie Mécanique, ...*

*Kamel,*

## REMERCIEMENTS

*M*ous remercions le Bon Dieu pour son aide et pour nous avoir permis de mener à bien ce travail.

*M*os remerciements les plus chaleureux et notre gratitude vont à Monsieur M. BOUDJEMAA, notre promoteur, pour son suivi et pour tous les conseils qu'il nous a prodigué.

*Q*u'il trouve ici, l'expression de notre profonde gratitude pour l'honneur qu'il nous a fait en nous proposant ce sujet.

*S*oient remerciés messieurs BENKOUSSAS et RIACHE, président et examinateur, pour nous avoir fait l'honneur de juger ce modeste travail.

*M*os vifs remerciements vont également à la société Tiger Computer Services (T.C.S), pour son équipe dynamique et son ambiance *magnétique*. Nous citerons: *Fouad, Elias, Mourad, Mohamed, Leïla, Assia*.

## ملخص

في هذه الدراسة استعملنا طريقة العناصر المنتهية للتأكد من المقاومة السكونية و الديناميكية لمقطع جناح طائرة. لقد قمنا بإنجاز برنامج معلوماتي لتقدير الإجهادات و الإنتقالات باستعمال عنصر ذي شكل مستطيل يحتوي على ثمانية (08) عقد لتجسيد المسألة.

## Résumé

Dans cette étude, nous avons utilisé la Méthode des Eléments Finis pour vérifier la résistance statique et dynamique d'un profil d'aile. Un code de calcul a été élaboré pour la détermination des contraintes et des déplacements en utilisant l'élément isoparamétrique à huit (08) noeuds.

## Abstract

In this study, the finite element method was used to verify the static and dynamic resistance of wings profile of aircraft. Computer program was elaborated to compute straiiss and displacements by using isoparametric elment of eight (08) joints.

## SOMMAIRE

	Pages
Introduction Générale	1
<b>I. GENERALITES ET DEFINITIONS</b>	
Généralité	4
Définition d'un profil d'aile	5
<i>Etude aérodynamique</i>	
<i>Profil d'aile</i>	
<i>Désignation d'un profil d'aile</i>	6
<i>Aile en écoulement incompressible</i>	
<i>Écoulement théorique</i>	
<b>II. UNE PRESENTATION DE LA M.E.F.</b>	
Introduction	15
<i>formulation déplacements</i>	
<i>formulation contraintes ou d'équilibre</i>	
<i>les formulations hybrides</i>	
<i>les formulations mixtes</i>	
Formulation de la méthode	16
<i>force d'inertie</i>	20
<i>force de résistance par frottement</i>	
Propriétés des éléments de type déplacement	22
<i>Introduction</i>	
<i>complétude</i>	
<i>compatibilité</i>	
<i>convergence</i>	23
<b>III. ELEMENTS QUADRILATERALS A 8 NOEUDS</b>	
Introduction	25
Formulation	
<i>Fonctions d'interpolation</i>	
<i>Construction des matrices élémentaires</i>	27

Etapes de calcul de [K] et [M]

Modélisation des charges

*Forces volumiques*

34

*Forces surfaciques*

Maillage de l'aile

39

#### IV. ETUDES STATIQUE ET DYNAMIQUE

Résolution non stationnaire des systèmes

41

Resolution des systèmes du second ordre par  
 le calcul des valeurs et vecteurs propres

43

*Résolution des systèmes non stationnaire  
 du premier et du second ordre*

Methode de Jacobi

44

#### V. PRESENTATION DU PROGRAMME

Introduction

50

Choix du nombre de points d'intégration

51

Les sous programmes

Calcul des contraintes

52

organigramme du logiciel

53

Tests du programme

54

Affichage des Résultats

57

Interprétation des résultats

75

#### VI. CONCLUSION

ANNEXES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# *Introduction Générale*



*Les êtres ont toujours essayé de surmonter les problèmes complexes auxquels ils se heurtent en subdivisant l'ensemble en composants plus faciles à traiter.*

*La méthode des éléments finis constitue un exemple de cette règle. Ainsi, l'ingénieur devant un système complexe rencontré dans la pratique, utilise la méthode des éléments finis pour le discréditer en éléments simples, faciles à traiter, et propose donc une solution non pas exacte, mais satisfaisant les exigences pratiques.*

*Dans le domaine de la mécanique des solides, Mc Henry, Hrenikoff et Newmark ont montré, dès les années quarante, que l'on pouvait obtenir d'assez bon résultats aux problèmes continus par des arrangements de simples barres élastiques [1]. Turner, Clough, Martin et Top introduisent en 1956 le concept d'éléments finis [2]. Ce n'est qu'à partir de 1960 que la méthode des éléments finis a connu un progrès considérable.*

*C'est le large domaine d'application qui fait la grande importance de la méthode des éléments finis. En effet, que ce soit en mécanique des structures, électricité, magnétisme, mécanique des fluides, ou en aéronautique, la méthode des éléments finis est un outil puissant pour la résolution des problèmes linéaires ou non linéaires, stationnaires ou non stationnaires, dans des milieux continus aux géométries complexes.*



Les profils d'ailes font partie de cette catégorie. En effet, on porte une attention particulière lors de la conception d'une aile d'avion ; une attention bien particulière est donnée au calcul de vibrations après le choix du profil d'aile, (celle-ci doit satisfaire aux conditions de résistance mécanique). Sachant que la section transversale de l'aile, le moment d'inertie et d'autres caractéristiques ne peuvent être représentées analytiquement, donc dans ce cas, le calcul numérique est indispensable.

L'objet du présent travail consiste en l'utilisation de la méthode des éléments finis pour la vérification statique et dynamique d'un profil d'aile d'avion.

# *Chapitre I*

*Généralités & Définitions*



## I. GENERALITES

L'aérodynamique des profils d'ailes a été édifiée dans le cas du mouvement plan, en écoulement irrotationnel, fluide incompressible, par KUTTA (1902), sur des profils squelettes, et Jonkowski (1905), sur des profils présentant de l'épaisseur. *squelettiques · joukowski · Profils épais*

Ces profils étaient obtenus par la transformation conforme d'un cercle en un contour fermé avec un arrondi à l'avant et une pointe à l'arrière.

La théorie de Jonkowski, en mouvement plan, dite la théorie de l'aile d'envergure infinie, marque le début de l'aéronautique et l'aérodynamique moderne.

Un nouveau pas fut fait par Prandtl qui édifia en 1917-18, la théorie de l'aile d'envergure limitée. Cette théorie et l'utilisation des souffleries ont donné un nouvel essor à l'aérodynamique, les théories de Joukowski et de Prandtl furent les points de départ de nombreux travaux théoriques et expérimentaux.

En définissant le profil, par des fonctions de transformation plus générales que celle de Joukowski, on a pu obtenir des profils variés, répondant mieux que les profils de Joukowski aux besoins de la technique.

De nombreux travaux théoriques ont été effectués et se sont vus consolider par des résultats expérimentaux. Ces travaux ont remis à l'ordre du jour le tracé des profils d'ailes, dont la géométrie a évolué nettement depuis 1940. En même temps que certains problèmes techniques, résolus sur les profils antérieurs (hypersustentation, efficacité des gouvernes aux grandes incidences, ...).

Les résultats des études aérodynamiques de l'aile s'appliquent non seulement à l'aile d'avion et à l'hélice mais aussi aux compresseurs axiaux et aux turbines qui utilisent des grilles d'ailes. La méthode et la technique de ces machines tournantes ont été renouvelées par l'application des méthodes qui ont vu le jour dans le domaine de l'aérodynamique de l'aile.

## 1. Définition d'un profil d'aile

C'est un obstacle de forme aérodynamique qui, placé dans un écoulement de fluide, modifie les vitesses faisant apparaître un effort portant.

### 1.1. Etude aérodynamique

#### 1.1.1. Profil d'aile

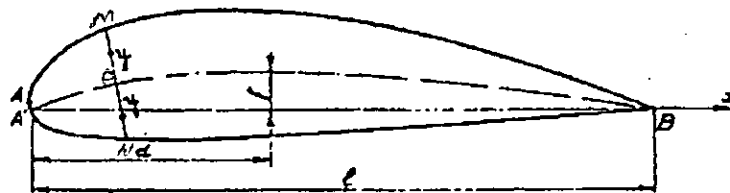


Figure I.1 Profil d'aile

A	bord d'attaque,
B	bord de fuite,
AB	corde du profil ou profondeur (L),
AMB	extrados,
ANB	intrados,
AOB	squelette,
f	flèche maximum,
MN'	épaisseur (e) maximum du profil.

La flèche maximum  $f$  (ou flèche) est la plus grande ordonnée de la ligne moyenne comptée perpendiculairement à  $AB$ . Sa position est définie par  $d/L$ .  $f/L$  est définie en pourcentage (%) de la plus grande corde du profil ;  $e/L$  est l'épaisseur relative, une caractéristique importante du profil est le rayon du bord d'attaque  $r$ .

### 1.1.2. Désignation d'un profil d'aile

Les profil les plus étudiés et les plus utilisés sont les profils *NACA* (National Advisory Commity for Aeronautics).

Les profils *NACA* sont désignés par quatre ou cinq chiffres dont la composition permet de déduire les principales caractéristiques géométriques.

*Exemple* *NACA* 2412 et *NACA* 23012.

- ♦ Le 1<sup>er</sup> chiffre (2) représente la courbure relative  $c = f / e = 0.02 = 2 \%$ .
- ♦ Le 2<sup>ème</sup> chiffre (si 4 chiffres) (4) représente nombre de dizaine de l'abscisse  $d$  de la corde maximum  $d/e = 40 \%$ .
- ♦ Le 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> chiffres (si 5 chiffres) représente le double de l'abscisse ( $d$ ) de la flèche maximum  $d / e = 15 \%$ .
- ♦ Le dernier chiffre représente l'épaisseur relative  $e = h / l = 12 \%$ .

## 1.2. Aile en écoulement incompressible

### 1.2.1. Ecoulement théorique

On considère l'écoulement autour d'un cylindre de longueur infinie, à base circulaire, rayon  $a$ , en superposant deux potentiels de vitesse :

$$\varphi_1 = -V_0 \cos\theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \quad (\text{Translation}) \quad (I.1)$$

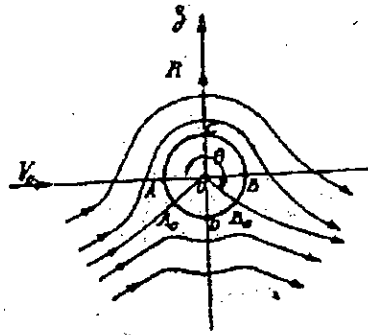
et

$$\varphi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (I.2)$$

(champ dû à un tourbillon de circulation  $\Gamma$ ).

La vitesse tangente au cylindre, a pour expression :

$$V = 2V_0 \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (1.3)$$



*Shien a pas clair*

Figure 1.2

Les vitesses des deux écoulements sont de même sens pour  $\theta$  compris entre 0 et  $\pi$  et de sens contraire pour  $\theta$  compris entre  $\pi$  et  $2\pi$ .

Si  $\Gamma < 4\pi a V_0$ , il y a deux points de vitesse nulle  $A_0$  et  $B_0$  situés sur le cylindre et définis par les angles  $\theta$  et  $\pi - \theta$ .

$$\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi a V_0}$$

avec  $\Gamma = 4\pi a V_0$  les points de vitesse nulle se confondent en D.

Si  $\Gamma > 4\pi a V_0$  les points de vitesse nulle ne sont plus sur le cylindre.

Le champ de vitesse et les lignes de courants se calculent aisément ; ces dernières ont l'allure de la (figure 1.2) quand  $\Gamma < 4\pi a V_0$ .

D'après le théorème de Bernoulli, on voit que les pressions sur le contour ACB sont inférieures à celles développées sur le contour ADB, par suite, l'écoulement donne lieu à une résultante R dirigée de D vers C et ayant DC comme ligne d'action. Du théorème de Bernoulli, on tire :

$$P = P_0 + \frac{\rho_0}{2} \left[ V_0^2 - \left( 2V \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \right] \quad (I.4)$$

Sur une bande de longueur  $dS = a d\theta$  de longueur  $L$ , la force de pression est  $pLdS$ , d'où :

$$dR = -PaL \sin\theta d\theta, \quad R = - \int_0^{2\pi} PaL \sin\theta d\theta \quad (I.5)$$

Les intégrales définies où figurent les puissances impaires de  $\sin\theta$  sont nulles d'où finalement :

$$R = \rho_0 L V_0 \Gamma \quad (I.6)$$

L'écoulement théorique bidimensionnel autour d'un profil se déduit, par le procédé de la transformation conforme de l'écoulement autour d'un cercle en introduisant une fonction  $f(z)$  de la variable complexe  $z = x+iy$ , dont la partie réelle est le potentiel de vitesse et dont la partie imaginaire est la fonction du courant.

$$f(z) = \varphi + i\psi \quad (I.7)$$

$f(z)$  est appelé potentiel complexe de l'écoulement.

On a vu que le point de vitesse nulle aval  $B_0$  est défini par :

$$\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi a V_0} \quad \text{ou} \quad \sin\beta = \frac{\Gamma}{4\pi a V_0} \quad (I.8)$$

Si la vitesse  $V$  fait un angle  $\beta_0$  avec  $AB$ , à la même position  $B_0$  correspond une nouvelle circulation donnée par :

$$\sin(\beta + \beta_0) = \frac{\Gamma}{4\pi a V_0} = \sin\alpha \quad (I.9)$$

et une nouvelle résultante  $R_2$  toujours perpendiculaire à  $V_0$ .

Si  $\beta + \beta_0 = 0$ ,  $\Gamma$  est nul sur le cercle et sur le profil (la transformation conforme conserve la circulation) et également, la vitesse est alors dirigée selon OB, cette direction dans le plan du profil s'appelle « axe de sustentation nulle » ou premier axe du profil.

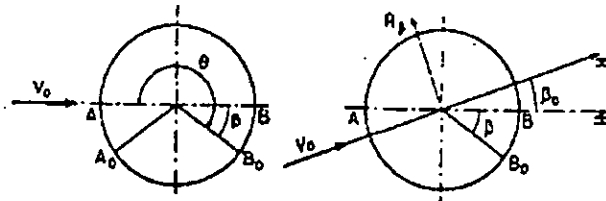


Figure 1.3

l'angle d'incidence  $\alpha$  est l'angle de  $V_0$  avec l'axe de sustentation nulle, d'où :

$$\Gamma = 4\pi a V_0 \sin\alpha \quad (I.10)$$

et pour les petits angles :

$$\Gamma = 4\pi a V_0 \alpha \quad (\text{en radians}) \quad (I.10')$$

est l'incidence aérodynamique vraie, on mesure souvent l'incidence à partir d'une direction de référence différente de l'axe de sustentation nulle, mais facile à matérialiser, nous désignerons par  $i$  cette incidence.

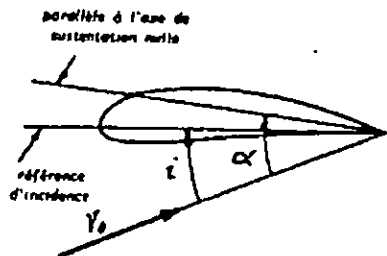


Figure 1.4



On appelle déflexion à un point  $p$  ; l'angle  $\varepsilon$  que fait la vitesse  $V$  en ce point avec la vitesse à l'infini  $V_0$  on compte conventionnellement  $\varepsilon > 0$  quand  $v$  est déviées dans le sens opposé à la sustentation positive  $C_z > 0$ .

$V$  est obtenue en composant  $\vec{V}_0$  (vitesse à l'infini) est  $\vec{W}_\infty$  (vitesse induite par le système tourbillonnaire auquel l'aile est équivalente).

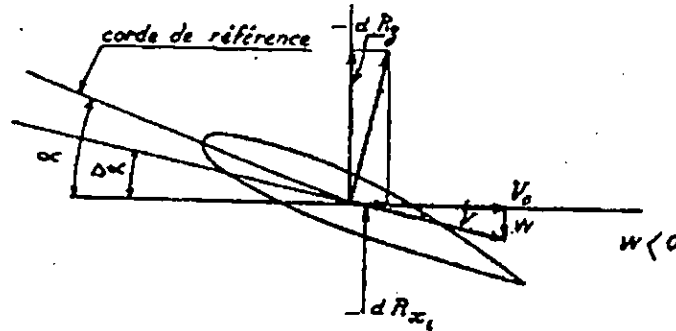


Figure I.5

Etant donnée la vitesse induite  $W$  (dirigée vers le bas), l'incidence aérodynamique est diminuée en valeur absolue.

L'incidence effective est algébriquement :

$$\alpha + \Delta \alpha = \alpha \arctg \frac{W}{V_0} \cong \alpha + \frac{W}{V_0} \quad (I.11)$$

L'angle  $\Delta \alpha = \frac{W}{V_0}$  est l'angle induit dans la section considérée.

Le théorème de Joukowski s'applique encore bien que l'écoulement ne soit pas rigoureusement plant (dans le cas d'une aile à envergure limitée), d'où une résultante élémentaire  $\rho_0 \Gamma V dy$  sur la tranche  $dy$  de l'aile de circulation  $\Gamma$ ,  $V$  désignant la vitesse résultante.

Cette résultante est perpendiculaire à  $V$  et a deux composantes :

-  $dR_{xi}$  et  $-dR_z$  suivant  $V_0$  et la direction perpendiculaire.

$$-dR_z = \rho_0 V \Gamma dy \cos \Delta \alpha = \rho V_0 \Gamma dy \quad (I.12)$$

$$-dR_{xi} = -\rho_0 V \Gamma dy \sin \Delta \alpha = -\rho w \Gamma dy = \frac{W}{V_0} dR_z \quad (I.13)$$

Même en fluide parfait, une résistance apparaît quant la sustentation est positive ( $-dR_z > 0$ ),  $w$  est négatif et  $-dR_{xi}$  qui est positif est une traînée.

Sur l'aile entière :

$$-R_z = \rho_0 V_0 \int_{-b}^b \Gamma(y) dy \quad (\text{Portance}) \quad (\text{I.14})$$

$$-R_{xi} = -\rho \int_{-b}^b w(y) \Gamma(y) dy \quad (\text{Traînée}) \quad (\text{I.15})$$

$\Gamma(y)$  est donnée par l'équation (I.8) où nous remplaçons  $\alpha$  par l'incidence effective et introduisant la vitesse résultante  $V$ .

$$\Gamma(y) = 4\pi a V \sin\left(\alpha + \frac{w(y)}{V_0}\right) \cong 4\pi a V \left(\alpha + \frac{w(y)}{V_0}\right) \quad (\text{I.16})$$

on peut confondre  $V$  avec  $V_0$  :

$$V = V_0 \sqrt{1 + \left(\frac{w}{V_0}\right)^2} \quad (\text{I.17})$$

c'est à dire négliger  $\left(\frac{w}{V_0}\right)$  devant 1 :

d'où

$$\Gamma(y) = 4\pi a V_0 \left(\alpha + \frac{w(y)}{V_0}\right) \quad (\text{I.18})$$

On a et  $\alpha$  sont dans le cas général, des fonctions  $y$ . Cette expression fondamentale porte le nom « d'équation integro-différentielle de Prandtl ». Elle s'écrit encore en introduisant le coefficient  $K$ .

$$\Gamma(y) = K L V_0 \left(\alpha + \frac{1}{4\pi V_0} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma(y')}{y-y'}\right) \quad (\text{I.19})$$

Se donner les lois  $L(y)$  et  $\alpha(y)$  revient à définir les paramètres géométrique de l'aile.

Des méthodes de calcul numériques permettent de calculer la loi de circulation, d'où la sustentation et les traînée élémentaire.

Pour une aile présentant un plan de symétrie, Prandtl a démontré que la traînée est minimum, pour une sustentation donnée, quand la circulation autour des différentes sections de l'aile varie suivant une loi elliptique

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (I.20)$$

$\Gamma_0$  est la circulation dans le plans de symétrie .

On démontre que la vitesse induite  $w$  est constante sur toute l'envergure de l'aile et égale à :

$$w = -\frac{\Gamma_0}{2b} \quad (I.21)$$

Remplaçant  $\Gamma$  dans les formules précédentes, il vient :

$$-R_z = \frac{\pi b}{2} \rho_0 V_0 \Gamma_0 \quad (I.22)$$

$$-R_x = \frac{R_z^2}{2\pi b^2 \rho_0 V_0^2} \quad (I.23)$$

d'où, s'étant sur la surface de référence :

$$C_z = \frac{\pi b \Gamma_0}{S V_0} \quad (I.24)$$

coefficient de portance

$$C_x = \frac{C_z^2}{4\pi b^2} = \frac{C_z^2}{\pi \lambda} \quad (I.25)$$

coefficient de traînée.

L'incidence effective aérodynamique est :

$$\alpha + \frac{w}{V_0} = \alpha - \frac{\Gamma_0}{4bV} = \alpha - \frac{C_z}{\pi\lambda} \quad (I.26)$$

L'angle induit est  $\frac{C_z}{\pi\lambda}$  (radians),

b est l'envergure.

Pour une aile dont les profils des différentes sections sont semblables et calés au même angle, l'incidence effective est constante, par suite :

$$\Gamma = KL V_0 \left( \alpha + \frac{w}{V_0} \right) \quad (I.27)$$

pour  $\Gamma_0$  nous avons :

$$\Gamma_0 = kL_0 V_0 \sin\left(\alpha + \frac{w}{V_0}\right) \quad (I.28)$$

Où  $L_0$  est la corde du profil situé dans le plan de symétrie, et le maximum théorique de  $C_z$  est :

$$C_{z_{\max}} = \frac{\pi KL_0 b}{S} \quad (I.29)$$

# *Chapitre II*

*Représentation la M.E.F*



## I. INTRODUCTION

Le principe de base de la M.E.F. consiste à subdiviser la structure en sous-domaines de forme relativement simple appelés éléments finis. On définit une approximation de la solution (déplacements et/ou contraintes) pour chacun des éléments constitutifs de la structure puis résoudre le problème en faisant un assemblage pour tous les éléments.

En mécanique des structures, il y a plusieurs sortes de formulations d'éléments finis.

### 1) *Formulation déplacements*

Dans laquelle on se donne une approximation du champ de déplacements, le critère variationnel étant celui de l'énergie potentielle totale.

### 2) *Formulation contraintes ou d'équilibre*

Dans laquelle on se donne une approximation soit sous forme d'un champ des contraintes en équilibre soit sous la forme d'une fonction de contraintes. Le critère variationnel utilisé est celui de l'énergie potentielle complémentaire.

### 3) *Les formulations hybrides*

Dans lesquelles le plus souvent on définit la solution en termes d'approximation d'une part du champ de contraintes internes en équilibre, d'autres part des déplacements sur la frontière de l'élément. Le critère variationnel utilisé est une variante de l'énergie potentielle complémentaire.

### 4) *Les formulations mixtes*

Dans lesquelles on définit la solution en termes d'approximation de champ indépendants généralement le champ des déplacements et celui des contraintes. Le critère variationnel utilisé est alors généralement basé sur la fonctionnelle de Reissner.

La M.E.F. peut-être également appliquée avec succès à d'autres domaines de la physique (thermique, électromagnétisme, MDF,...).

## II. FORMULATION DE LA METHODE

Dans la démarche fondamentale de la M.E.F., il faut distinguer trois aspects dans le cas des modèles déplacements :

- la discrétisation de la structure en éléments ;
- le choix d'une approximation pour chaque élément ;
- le choix de coordination généralisées (physiques) pour chaque élément soit l'ensemble d'équation différentielles du système suivant :

$$A(U) = \begin{Bmatrix} A_1(U) \\ A_2(U) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

U : étant l'ensemble des variables à chercher et qui doivent vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$B(U) = \begin{Bmatrix} B_1(U) \\ B_2(U) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{II.2})$$

La méthode des éléments finis propose comme solution approchée :

$$U = \sum_{i=1}^n N_i a_i = N a \quad (\text{II.3})$$

où

$a_i$  = Paramètre inconnues.

$N_i$  = Fonctions de forme définies à l'aide de variables indépendantes.

Vu que l'équation (II.1) est vérifiée sur tout le domaine physique étudié, on peut écrire :

$$W^T A(U) = 0 \quad (\text{II.4})$$

$w$  = Vecteur composé de fonctions quelconques au nombre des équations différentielles régissant le problème :

de même

$$\int W^T A(U) d\Omega = 0 \quad \text{et} \quad U = N a$$

$$\int W^T A(N a) d\Omega = 0 \quad (\text{II.5})$$

Le même raisonnement sur la frontière conduit à écrire :

$$\int \bar{W}^T B(N a) d\Gamma = 0 \quad (\text{II.6})$$

où  $\Gamma$  : frontière de  $\Omega$ .

De (II.5) et (II.6), on a :

$$\int W^T A(N a) d\Omega + \int \bar{W}^T B(N a) d\Gamma = 0 \quad (\text{II.7})$$

$A(Na)$  et  $B(Na)$  sont les erreurs ou résidus résultants du remplacement de  $U$  par  $Na$ , d'où l'appellation de la méthode 'Méthode des résidus pondérés' (pondéré par  $w$ ).

Galerkin suggère :  $w = N$ .

Si de plus les équations (II.1) sont linéaires i.e.:

$A(U) = LU + P = 0$  et en ne considèrent que (II.5) on aura :



$$\int W^T A(Na) d\Omega = \int N^T (LN a + P) d\Omega = 0$$

$$\Rightarrow \int N^T LN a d\Omega + \int N^T P d\Omega = 0$$

$$Ka + F = 0$$

$$K = \int [N]^T [L][N] d\Omega \quad (\text{II.8})$$

avec

$$F = \int [N]^T P d\Omega \quad (\text{II.9})$$

### Cas des structures élastiques

Dans ce cas la fonction approximée est généralement la fonction de déplacement (formulation déplacement) :

$$U = \sum N_i a_i = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_i & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Les fonctions "N" sont appelées fonctions de forme

Les déplacements s'écrivent :

$$\xi = LU \quad (\text{II.11})$$

où

L : opérateur linéaire approprié qui varie suivant la nature du problème.

Donc

$$\xi = LN a \Rightarrow \xi = Ba \quad (\text{II.12})$$

avec  $B = LN$

et les contraintes s'écrivent :

$$\sigma = D \xi \quad (\text{II.13})$$

où D : Matrice d'élasticité dépendant des propriétés du matériau

ou "q" représente le vecteur des forces appliquées on peut écrire :

$$\delta a^T q = \int \delta \varepsilon^T \sigma dV \quad (\text{II.14})$$

Relation exprimant l'égalité du travail virtuel des forces extérieures au travail des forces intérieures totales (dans tout le volume).

Or :

$$\delta \varepsilon^T = \delta a^T B^T \quad (\text{II.15})$$

donc :

$$\delta a^T q = \delta a^T \int B^T D \varepsilon dV \quad (\text{II.16})$$

$$\Rightarrow q = \int B^T D B a dV \Rightarrow q = \left[ \int B^T D B dV \right] \quad (\text{II.17})$$

$$q = [K] a \quad (\text{II.18})$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (\text{II.19})$$

avec

[K] matrice de rigidité.

Dans le cas de la dynamique des structures deux forces prennent naissance en plus de la force statique.

**1) Force d'inertie**

$$-\rho \ddot{U} = -\rho \frac{d^2 U}{dt^2} = -\rho N \frac{d^2 a}{dt^2} \quad (\text{II.20})$$

$\rho$  : Masse volumique du matériau.

**2) Force de résistance par frottement**

On ne considère que la résistance linéaire

$$\begin{aligned} -\mu \dot{U} &= -C \frac{dU}{dt} \\ &= -C N \frac{da}{dt} \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

$C$  : coefficient d'amortissement

Le travail virtuel correspond à ces deux forces est :

$$\begin{aligned} -\int \delta U^T \rho \ddot{U} dV - \int \delta U^T \mu \dot{U} dV &= -\int \delta a^T N^T \rho \ddot{U} dV - \int \delta a^T N^T C \dot{U} dV \\ &= -\delta a^T \left[ \int N^T \rho N \ddot{a} dV - \int N^T C N \dot{a} dV \right] \\ &= -\delta a^T [M \ddot{a} + C \dot{a}] \end{aligned}$$

$$\text{avec } M = \int N^T \rho N dV \quad : \text{ Matrice masse} \quad (\text{II.22})$$

$$C = \int N^T C N dV \quad : \text{ Matrice amortissement} \quad (\text{II.23})$$

En ajoutant ce travail au terme gauche de la relation suivante :

$$[K]a = F \quad (\text{II.24})$$

on aura

$$[M]\ddot{a} + [c]\dot{a} + [K]a = F \quad (\text{II.25})$$

La solution de ce système peut s'obtenir à partir de l'étude des vibrations libres, i.e. par la superposition de solutions du système sans second membre, soit :

$$M\ddot{a} + C\dot{a} + ka = 0 \quad (\text{II.26})$$

On appelle modes, les solutions propres du système sans second membre. Dans le cas général, ces modes au nombre de  $n$  sont complexes et leur interprétation physique n'est pas évidente. On évite cet inconvénient en étudiant les vibrations libres des structures sans amortissement c'est-à-dire en cherchant les solutions du système :

$$M\ddot{a} + ka = 0 \quad (\text{II.27})$$

Les solutions de cette équation sont harmoniques du type

$a = xe^{i\omega t}$ , d'où les équations modales :

$$\omega^2 MX = Kx \quad (\text{II.28})$$

Cette approche par modes réels est utilisée dans la plupart des problèmes pratiques. Les modes réels sont des intermédiaires de calcul simples et intéressants ; ils constituent par ailleurs une très bonne approximation des modes pour les structures faiblement amorties ce qui est très souvent le cas des structures aérospatiales.

### III. PROPRIETES DES ELEMENTS DE TYPE DEPLACEMENT

#### 1. Introduction

Il y a des conditions qui sont nécessaires ou tout au moins suffisantes (souhaitables) au niveau élémentaire afin d'obtenir de « bonne » solutions (acceptables) au niveau de la structure complète. En particulier, les conditions de convergence de la M.E.F qui sont la complétude et compatibilité.

#### 2. Complétude

Un élément fini est complet ou vérifie la condition de complétude s'il permet la définition d'un champ de déplacements complet, c'est à dire quand l'approximation de la solution dans l'élément permet de représenter à la limite n'importe quelle valeur des déformations (ou des courbures dans le cas d'un problème en flexion) quand on diminue la taille de l'élément.

Donc un élément est complet si :

- ♦ Le déplacement et sa première dérivée sont continus à la frontière (pour les éléments de classe  $c^0$ ).
- ♦ Le déplacement et ses deux premières dérivées sont continus à la frontière (pour les éléments de classe  $c^1$ ).

#### 3. Compatibilité

Un élément est dit compatible ou vérifie la condition de compatibilité, quand il permet la définition d'un champ compatible c'est à dire avec une continuité  $c^0$  (déplacement continu) pour les problèmes d'élasticité ( $m=1$ ) et une continuité  $c^1$  (déplacement et dérivée première continus) pour les problèmes de flexion ( $m=2$ ). De par le principe même de la M.E.F., cette condition de continuité s'applique à l'intérieur des éléments et aux interfaces inter-éléments.

La continuité des déplacements à l'intérieur des éléments ne pose pas de problèmes particuliers.

La compatibilité inter-éléments s'explique très simplement par le caractère physique des modèles de déplacement. En effet, en élasticité plane par exemple, la violation de ce critère entraînerait des modèles de déplacement inadmissibles d'un simple point de vue physique, à cause de l'apparition d'ouvertures entre éléments au cours du chargement, d'où pour qu'un élément fini soit compatible il faut que :

- ◆ Le déplacement soit continu dans l'élément (pour les éléments de classe  $C^0$ ).
- ◆ Le déplacement et sa première dérivée soient continus dans l'élément (pour les éléments de classe  $C^1$ ).

#### 4. convergence

Les éléments finis de type déplacement convergent s'ils satisfont les conditions de complétude et de compatibilité. De tels éléments sont appelés « éléments conformes ». Certains éléments ne satisfont pas toutes les conditions de complétude ou de compatibilité. De tels éléments sont dit « non-conformes ». Parmi ces éléments non-conformes, certains d'entre eux ne convergent pas, mais d'autres convergent. Pour s'assurer de leur convergence, on leur fait passer un test dit « PATCH TEST ».

# *Chapitre III*

*Elément quadrilatéral à 8 noeuds*



## I. INTRODUCTION

Au début de cette étude, nous avons opté pour la discrétisation du profil de l'aile en élément plan. Cette discrétisation convient très bien à la géométrie du profil. Cet élément est utilisé souvent sous sa forme isopara-métrique, et comporte 8 noeuds situés sur la frontière.

## II. FORMULATION

### 1. Fonction d'interpolation

Dans la méthode des éléments finis (Méthode de déplacements ) on interpole deux entités :

#### a. Les déplacements de l'élément

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

$[N]$  : fonction de forme

$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$  : déplacements noeudaux

#### b. Les géométries de l'élément

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

$[N]$  fonction de forme.

$\begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix}$  coordonnées des noeuds géométriques de l'élément.



- Si les noeuds d'interpolation et les noeuds géométriques sont confondus ( $[N]=[\bar{N}]$ ), l'élément est dit isoparamétrique (c'est notre cas).
- Si le nombre de noeuds d'interpolation est supérieur au nombre de noeuds géométriques (degré  $[N]$  supérieur au degré de  $[\bar{N}]$ ), l'élément est dit sub-paramétrique. Dans le cas contraire, l'élément est dit super-paramétrique.

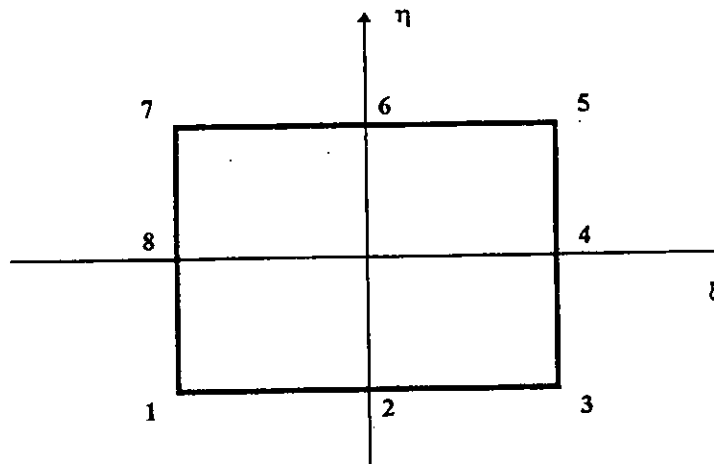


Figure III.1 Elément de référence

pour l'élément de la figure III.1, les coordonnées des noeuds sont données dans le tableau III.1.

Tableau III.1

noeud $i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\xi$	-1	0	1	1	1	0	-1	-1
$\eta$	-1	-1	-1	0	1	1	1	0

et les fonctions de forme, ainsi que leurs dérivées  $\partial N_i / \partial \xi$ ,  $\partial N_i / \partial \eta$  sont données dans le tableau III.2.

Tableau III.2

Noeud $i$	$\{N\}$	$\{\partial N / \partial \xi\}$	$\{\partial N / \partial \eta\}$
1	$-1/4 (1-\xi)(1-\eta) (1+\eta+\xi)$	$1/4 (1-\eta)(2\xi+\eta)$	$1/4 (1-\xi)(2\eta+\xi)$
2	$1/2 (1-\xi^2)(1-\eta)$	$-(1-\eta)\xi$	$-1/2 (1-\xi^2)$
3	$-1/4 (1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$	$1/4 (1-\eta)(2\xi-\eta)$	$-1/4 (1+\xi)(\xi-2\eta)$
4	$1/2 (1+\xi)(1-\eta^2)$	$1/2 (1-\eta^2)$	$-(1+\xi)\eta$
5	$-1/4 (1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$	$1/4 (1+\eta)(2\xi+\eta)$	$1/4 (1+\xi)(\xi+2\eta)$
6	$1/2 (1-\xi^2)(1+\eta)$	$-(1+\xi)\xi$	$1/2 (1-\xi^2)$
7	$-1/4 (1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$	$1/4 (1+\eta)(2\xi-\eta)$	$-1/4 (1-\xi)(\xi-2\eta)$
8	$1/2 (1-\xi)(1-\eta^2)$	$-1/2 (1-\eta^2)$	$-(1-\xi)\eta$

**Construction des matrices élémentaires**

La construction des matrices élémentaires nécessite l'intégration de fonctions complexes sur des domaines géométriquement complexes.

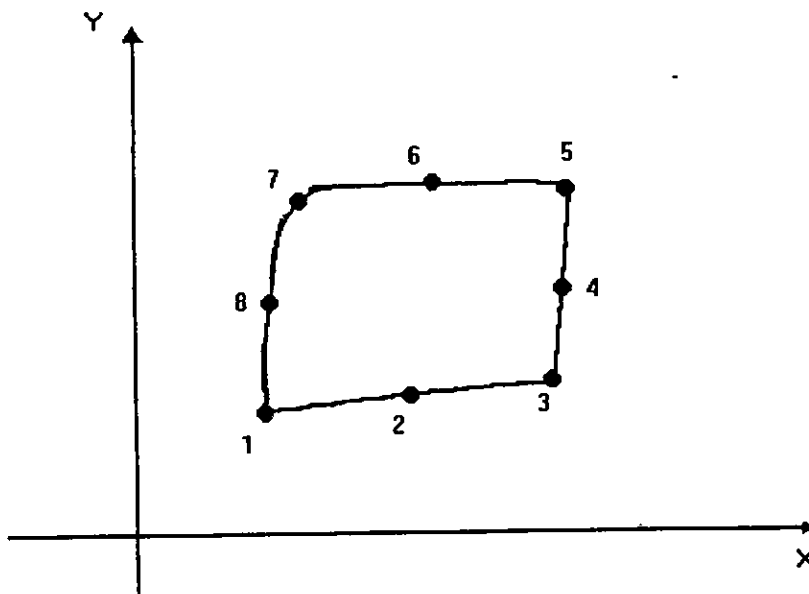


Figure III.2 Élément réel

Dans la majorité des applications ces intégrales sont calculées numériquement. De plus les fonctions d'interpolation  $[N]$  ainsi que leurs dérivées intervenant dans ce calcul sont définies sur l'élément de référence. Ceci nous oblige à définir une transformation bijective entre l'élément réel et l'élément de référence.

### Matrice Jacobienne

La relation (III.2) définit une transformation « bijective ».

$$\tau : \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [\bar{N}(\xi, \eta)] \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

pour une fonction  $f$  quelconque, continue et dérivable, on sait que :

$$\partial f / \partial \xi = \partial f / \partial x * \partial x / \partial \xi + \partial f / \partial y * \partial y / \partial \xi \quad (\text{III.4})$$

Les dérivées par rapport  $\xi$  et  $\eta$  s'écrivent donc en fonction des dérivées par rapport à  $X$  et  $Y$  comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

$$\text{On pose } [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

La matrice  $[J]$  est appelée matrice Jacobienne.

Mais pratiquement, on n'utilise que l'inverse de [J] notée [J]<sup>-1</sup>, car on cherche à exprimer les dérivées en X et Y (élément réel) à partir de ceux par rapport à ζ et η (élément de référence).

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (III.7)$$

D'après (III.1, III.2 et III.6, la matrice Jacobienne, s'écrit :

$$[J] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} [X \quad Y] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ X_8 & Y_8 \end{bmatrix} \quad (III.8)$$

Le changement de variables précédent permet le passage de l'intégration d'une fonction f sur l'élément réel à une intégration plus simple sur l'élément de référence.

$$\int_{V_e} f(x) dx dy = \int_{V_r} f(x(\xi)) \det j d\xi d\eta \quad (III.9)$$

det j : étant le déterminant de la matrice Jacobienne [J].

*Intégration des méthodes élémentaires*

L'expression de la matrice élémentaire de l'élément quadrilatéral à 8 noeuds, d'après l'équation (II.19), devient :

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det j \, d\xi \, d\eta \quad (III.10)$$

De même pour la matrice masse d'après (II.23) devient :

$$[M] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \rho [N] \det j \, d\xi \, d\eta \quad (III.11)$$

Ces intégrales sont difficiles à calculer explicitement, alors on utilise une intégration numérique qui dans le cas général s'écrit :

$$\int_{-1}^1 f(r) \, dr = \sum_{i=1}^k w_i \, f(r_i) \quad (III.12)$$

(Méthode de Gauss)

k = nombre de points de gauss.

w<sub>i</sub> = poids du point de l'intégration i.

On pose :

$$F(\xi, \eta) = [B]^T [D] [B] \det J \quad (III.13)$$

alors [K] devient :

$$[K] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \quad (III.14)$$

Si on intègre tout d'abord par rapport à  $\xi$ , ensuite par rapport à  $\eta$ , et utilisant la relation (III.12), on obtient :

$$[K] = \int_{-1}^1 \left( \sum_i w_i \, F(\xi_i, \eta) \right) d\eta = \sum_j w_j \sum_i w_i \, F(\xi_i, \eta_j)$$

d'où

$$[K] = \sum_i \sum_j w_i \, w_j \, F(\xi_i, \eta_j) \quad (III.15)$$

En appliquant la relation (III.2) pour l'élément quadrilatéral à 8 noeuds, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ U_8 \\ V_8 \end{Bmatrix} \quad (III.16)$$

Dans le cas d'analyse bidimensionnelle des contraintes, l'équation générale s'écrit :

$$\{\xi\} = \begin{Bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (III.17)$$

ou bien

$$\{\xi\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} \quad (III.18)$$

En utilisant (III.2), on aura :

$$\{\xi\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ U_8 \\ V_8 \end{Bmatrix} \quad (III.19)$$

$$= [B] \cdot \{a\}$$

$$\text{tel que } [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Pour un matériau isotrope, la matrice [D] est donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)} & \frac{\nu E(1-\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)(1-\alpha\nu)} & 0 \\ \frac{\nu E(1-\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)(1-\alpha\nu)} & \frac{E(1-\alpha\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

E : module de Young.

$\nu$  : coefficient de poisson.

$\alpha = \begin{cases} \rightarrow 1 = \text{contrainte plane} \\ \rightarrow 0 = \text{déformation plane} \end{cases}$

Ainsi, les éléments de calcul des matrices élémentaires sont réunis, il suffit d'exprimer les dérivées en X et Y, et les fonctions [N] à partir des dérivées en  $\xi$  et  $\eta$ , et de faire une intégration numérique.

**Etapes de calcul de [K] et [M]**

Le calcul des matrices élémentaires s'effectue comme suit :

- a- Initialisation de [K] et [M] à zéro.
- b- Pour chaque point d'intégration :
- Calculer les fonctions [N] et leurs dérivées en  $\xi$  et  $\eta$  aux points d'intégrations.
  - Calculer la matrice Jacobienne [J] (III.6), ainsi que son inverse et son déterminant.
  - Calculer les dérivées des fonctions [N] en X et Y, à partir des dérivées en  $\xi$  et  $\eta$  (III.7).
  - Construire la matrice [B] (III.20).
  - Accumuler dans [K] le produit  $[B]^T [D] [B] \det J$  (III.15).
  - Accumuler dans [M] le produit  $[N]^T \rho [N] \det J$  (III.15).

**Modélisation des charges**

Dans l'application de la M.E.F. et dans le cas des structures élastiques, les charges appliquées à la structures sont données par :

$$\{q\} = \iiint [N]^T f_v dV + \iint [N]^T f_s dS \quad (III.22)$$

$f_v$  : charge par unité de volume.

$f_s$  : charge par unité de surface.

[N] : fonction de forme.

Ces intégrales sont calculées sur l'élément réel, il faut donc les transformer en intégrales sur l'élément de référence, L'équation (III.22) comprend deux charges :

$$\iiint [N]^T f_v dV \quad \text{charges volumiques.}$$

$$\iint [N]^T f_s dS \quad \text{charges surfaciques.}$$



- **Charges volumiques**

En passant de l'intégration sur l'élément réel à l'intégration sur l'élément de référence, les charges volumiques s'écrivent :

$$\{q\} = \iiint [N]^T f_v \cdot \det J \, dV \quad (\text{III.23})$$

On voit donc que le calcul de  $\{q_v\}$  est presque identique à celui de  $[M]$ . Pour le cas du profil d'aile étudié, la force volumique qui entre en jeu est le poids :

$$f_v = -\rho$$

donc,

$$\{q_v\} = \int_V [N]^T \rho \cdot \det J \, dV \quad (\text{III.24})$$

- **Charges surfacique**

Pour les charges surfaciques, on a choisi de prendre les résultats de distribution de pression le long du profil d'aile [4].

Pour notre application, on a considéré un vol à Mach 0.3, et à une altitude de 10.000 m, ce qui donne :

$$\rho_\infty = 0.4127 \text{ Kg/m}^3, \quad V_\infty = 90 \text{ m/s}$$

La répartition des charges, pour trois angles d'incidence ( $2^\circ$ ,  $8^\circ$ ,  $16^\circ$ ) pour un profil *NACA 4412*, est résumée dans les tableaux suivants :

Tableau (III.1) Profil NACA 4412

(coordonnée en % de la corde)

INTRADOS		EXTRADOS	
X	Y	X	Y
00.00	00.00	00.00	00.00
01.25	02.44	01.25	-01.44
02.50	03.39	02.50	-01.95
05.00	04.73	05.00	-02.46
07.50	05.70	07.50	-02.74
10.00	06.59	10.00	-02.86
15.00	07.89	15.00	-02.88
20.00	08.80	20.00	-02.74
25.00	09.41	25.00	-02.50
30.00	09.76	30.00	-02.26
40.00	09.80	40.00	-01.81
50.00	09.19	50.00	-01.40
60.00	08.14	60.00	-01.00
70.00	06.69	70.00	-00.65
80.00	04.89	80.00	-0039
90.00	02.72	90.00	-00.22
95.00	01.47	95.00	-00.13
99.99	00.13	99.99	-00.13

Tableau (III.2) Distribution de pression pour  $\alpha = 2^\circ$

(X en % de la corde, charge (Pa))

INTRADOS		EXTRADOS	
X	Charge	X	Charge
0.0	1427.4055	0.0	1653.0492
0.4	1397.3196	0.4	1068.0469
0.93	91.9289	0.93	424.5444
1.68	-247.3723	1.68	46.8001
2.93	-561.6021	2.93	-163.8006
4.92	-810.64	4.92	-250.7151
7.72	-949.3750	7.72	-218.9579
9.96	-1041.3040	9.96	-185.5292
14.93	-1170.0045	14.93	-88.5860
19.97	-1236.8619	19.97	-18.3857
24.91	-1246.8905	24.91	41.7858
29.97	-1206.7760	29.97	80.2288
34.92	-1158.3044	34.92	110.3147
39.94	1061.3612	39.94	118.6719
44.85	1007.8753	44.85	147.0862
49.95	-877.5033	49.95	152.1005
54.70	-787.2458	54.70	167.1435
64.92	-631.8024	64.92	200.5722
74.91	869.1462	74.91	227.3151
84.90	193.8864	84.90	247.3723
89.90	43.4573	89.90	254.0581
94.90	127.0290	94.90	257.4001
98.00	239.0152	98.00	274.1153

Tableau (III.3) Distribution de pression pour  $\alpha = 8^\circ$ 

(X en % de la corde, charge (Pa))

INTRADOS		EXTRADOS	
X	Charge	X	Charge
0.0	626.4152	0.0	-1671.435
0.40	1512.6486	0.40	-2908.2969
0.90	1693.1636	0.90	-2996.8829
1.70	1531.0344	1.70	-2913.3112
2.90	1250.2333	2.90	-2752.8534
4.90	949.3750	4.90	-2324.9660
10.00	671.9168	10.00	-2186.2369
14.90	576.645	14.90	-2070.9079
20.00	536.5360	20.00	-2070.9079
29.90	489.7304	29.90	-1788.9354
40.00	442.9302	40.00	-1470.8626
50.00	421.2016	50.00	-1153.2901
64.90	407.8301	64.90	-762.1743
74.90	386.1014	74.90	-417.8587
89.90	339.3013	89.90	-15.0429
94.90	300.8583	94.90	136.0433
98.00	179.1296	98.00	200.5722
100.0	223.9722	100.0	223.9722

Tableau (III.4) Distribution de pression pour  $\alpha = 16^\circ$

(X en % de la corde, charge (Pa))

INTRADOS		EXTRADOS	
X	Charge	X	Charge
0.0	-10413.0400	0.0	-6114.1092
0.40	-9963.4240	0.40	-2304.9088
0.93	-8708.1763	0.93	441.2588
1.68	-7484.6854	1.68	1322.1050
2.93	-6292.9527	2.93	1659.7349
4.92	-5331.8776	4.92	1638.0063
7.72	-4527.9174	7.72	1497.6057
9.90	-4078.3014	9.90	1367.2338
14.93	-3591.9138	14.93	1191.7331
19.97	-3077.1118	19.97	1047.9897
24.91	-2741.1534	24.91	984.4752
29.97	-2403.5235	29.97	920.9606
34.94	-2121.0510	34.94	862.4604
39.94	-1836.9070	39.94	810.6459
44.85	-1606.2490	44.85	767.1886
49.95	-1313.7479	49.95	712.0313
54.70	-1084.7613	54.70	691.9740
64.92	-691.9740	64.92	625.1166
74.91	-354.3442	74.91	538.2020
84.90	-137.0576	84.90	429.5587
89.90	-71.8717	89.90	386.1014
94.90	-26.7429	94.90	299.1868
98.00	-6.6857	98.00	202.2436

### *Maillage de l'aube*

Les problèmes d'espace mémoire, de temps d'exécution ainsi que l'indisponibilité des calculateurs, ont limité notre choix du maillage. En simple précision le temps d'exécution pour le calcul statique (déplacement et contraintes), d'un exemple de 200 degrés de liberté, est de 15 minutes en moyenne (ce temps dépend du nombre des utilisateurs). Pour notre calcul, nous avons opté pour le maillage suivant :



**22 éléments**

**93 noeuds**

**186 degrés de liberté**

# *Chapitre IV*

*Etude statique & dynamique*



## I. RESOLUTION NON STATIONNAIRE DES SYSTEMES

- La descritisation en espace  $(x,y,z)$  d'un problème de propagation, par la méthode des éléments finis, conduit à un système d'équations différentielles en temps  $t$ , en général du premier ou du second ordre.

### *Premier ordre*

Il est de la forme :

$$\begin{aligned} [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} &= \{F\} \quad \text{pour } t > t_0 \\ \{U(t)\} &= \{U_0\} \end{aligned} \quad (IV.1)$$

### *Second ordre*

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} &= \{F\} \quad \text{pour } t > t_0 \\ \{U(t_0)\} &= \{U_0\} \end{aligned} \quad (IV.2)$$

Dans un système linéaire  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  et  $\{F\}$  sont indépendants de  $\{U\}$  et de ses dérivées, de plus dans de nombreux systèmes physiques, les matrices  $[M]$ ,  $[C]$  et  $[K]$  sont indépendantes du temps, ce qui suppose que les paramètres physique du système ne dépendent pas du temps.

Dans un système non linéaire  $[K]$  et plus rarement,  $[C]$  et  $[M]$  dépendent de  $\{U\}$  et de ses dérivées.

Il est possible de transformer un système du second ordre en un système du premier ordre de type (IV.1) ; cependant, cette opération est peu utilisée pour les grands systèmes car elle exige une réorganisation de grosses matrices de plus il existe des méthodes efficaces pour résoudre directement les systèmes du second ordre.



Pour la transformation d'un système différentiel du second ordre en un système du premier ordre on a :

$$\{\dot{U}\} = \{V\}$$

et d'après (IV.2) on a :

$$[M] \{\dot{V}\} + [C] \{V\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (\text{IV.3})$$

$$[I] \{\dot{U}\} - [I] \{V\} = 0 \quad (\text{IV.4})$$

soit :

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{U} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ -[I] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

$$[C'] \{\dot{U}\} + [K'] \{U\} = \{F'\} \quad (\text{IV.6})$$

où  $[I]$  est une matrice unitaire.

Le nombre d'inconnues a doublé dans cette nouvelle formulation. De plus la matrice  $[K']$  n'est pas symétrique. Résoudre le système (IV.1) et (IV.2) consiste à trouver un ensemble de fonction  $\{U(t)\}$  qui satisfait (IV.1) et (IV.2) à tout instant  $(t)$ , ainsi que les conditions initiales imposées à  $t = t_0$ . Nous représenterons deux types de méthodes, les méthodes directes et les méthodes de susperposition.

Les méthodes d'intégration directes consistent à construire numériquement à partir de  $\{U_0(t)\}$  une suite de valeurs de la solution aux instant successifs  $t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, t_0 + 3\Delta t, \dots, t_0 + n\Delta t$

$$\{U(t_0)\} \rightarrow \{U(t_0 + \Delta t)\} \rightarrow \dots \rightarrow \{U(t_0 + n\Delta t)\}$$

Ces méthodes utilisent des approximations des dérivées  $\{\dot{U}\}$  et  $\{\ddot{U}\}$ , de types différences finies, il est également possible d'utiliser une approximation par éléments finis pour descritiser l'équation différentielle en  $t$ .

## II. RESOLUTION DES SYSTEMES DU SECOND ORDRE PAR LE CALCUL DES VALEURS PROPRES ET LES VECTEURS PROPRES

En vibrations des structures, la détermination des modes de vibration d'une structure se fait en résolvant un problème de valeurs propres ce qui revient à trouver des couples  $\lambda_i$ ,  $\{X_i\}$  qui doivent satisfaire la relation suivante :

$$[K] \{X_i\} = \lambda_i [M] \{X_i\} \quad (IV.7)$$

où

$[K]$  est la matrice rigidité de la structure,

$[M]$  est la matrice masse,

$\{X_i\}$  est le vecteur des déplacements de la structure définissant le i-ème mode propre de vibration.

$\lambda_i = w_i^2$  est le carré de la pulsation correspondante .

### 1. Résolution des problèmes non stationnaires du premier et du second ordre

L'une des méthodes les plus utilisées dans la résolution des équations différentielles est la méthode de superposition modale, celle-ci nécessite le calcul des valeurs et vecteurs propres d'un système analogue a (IV.1).

Le domaine de calcul des valeurs et vecteurs propre de (IV.1) est très vaste, les ouvrages de Wilkinson [7] et plus récemment de Bathe et Wilson [8] Présentent, de manière détaillée, les méthodes disponibles, dont trois très utilisées : Jacobi, itération inverse et méthode du sous espace. Dans notre cas, nous allons utiliser les trois méthodes à la fois.

## II. METHODE DE JACOBI

La méthode générale de Jacobi permet de calculer les valeurs et vecteurs propres d'un système de dimension limitée (inférieure à cent), dont les matrices sont symétriques définies positives. Elle consiste à transformer les matrices  $[K]$  et  $[M]$  en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives :

$$\begin{aligned} [K^1] &= [K] & [M^1] &= [M] \\ [K^2] &= [Q^1]^T [K^1] [Q^1] & [M^2] &= [Q^1]^T [M^1] [Q^1] \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

$$[K^{k+1}] = [Q^k]^T [K^k] [Q^k] \quad [M^{k+1}] = [Q^k]^T [M^k] [Q^k]$$

Les matrices  $[K^{k+1}]$  et  $[M^{k+1}]$  tendent vers des matrices diagonales  $[M^d]$  et  $[K^d]$  lorsque  $k$  tend vers l'infini, les valeurs propres sont alors :

$$[\lambda] = [K^d] [M^d]^{-1} \quad \text{où} \quad \lambda_{ii} = \frac{K_{ii}^d}{M_{ii}^d}$$

$$[X] = [Q^1][Q^2] \dots [Q^k][Q^{k+1}] \begin{bmatrix} . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{M_{ii}^d}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

La matrice  $[Q^k]$  est choisie de manière à ce qu'un terme  $(i,j)$  non diagonal et non nul de  $[K^k]$  et  $[M^k]$  soit nul après la transformation (IV.8), la matrice  $[Q^k]$  a la structure suivante :

$$[Q^k] = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & a & . \\ . & . & b & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant :

$$K_{jj}^{k+1} = M_{ij}^{k+1} = 0$$

soit en supprimant par simplicité l'indice k + 1 sur les termes de chaque matrice :

$$\begin{aligned} aK_{ii} + (1+ab)K_{ij} + bK_{jj} &= 0 \\ aM_{ii} + (1+ab)M_{ij} + bM_{jj} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

Dans le cas particulier, on a :

$$\frac{K_{ii}}{M_{ii}} = \frac{K_{jj}}{M_{jj}} = \frac{K_{ij}}{M_{ij}}$$

Les valeurs de a et b sont :

$$a = 0 \quad b = -\frac{K_{ij}}{M_{jj}}$$

Dans le cas général, on a :

$$\begin{aligned} C_1 &= K_{ii} M_{ij} - K_{ij} M_{ii} \\ C_2 &= K_{jj} M_{ij} - K_{ij} M_{jj} \\ C_3 &= K_{ii} M_{jj} - K_{jj} M_{ii} \end{aligned}$$

$$d = \frac{C_3}{2} + \text{signe}(C_3) \sqrt{\left(\frac{C_3}{2}\right)^2 + C_1 C_2} \quad (\text{IV.14})$$

alors

$$a = \frac{C_2}{d} \quad b = -\frac{C_1}{d} \quad (\text{IV.15})$$

Lorsque [M] est définie positive, le coefficient  $\left(\frac{C_3}{2}\right)^2 + C_1 C_2$  est positif lorsque  $d = 0$ , a et b sont donnés par (IV.13).

### Algorithme de la méthode générale de Jacobi

Définir la précision de convergence requise  $\varepsilon$

Pour chaque cycle  $s$ .

Définir la tolérance dynamique

Pour chaque ligne  $i = 1, 2, 3 \dots n$ .

Pour chaque colonne  $j = i+1, i+2, \dots n$ .

Calculer les facteurs de couplages

$$f_k = \frac{|K_{ij}|}{\sqrt{K_{ii} K_{jj}}} \quad f_m = \frac{|M_{ij}|}{\sqrt{M_{ii} M_{jj}}}$$

Si  $f_k$  ou  $f_m > \varepsilon_s$

- Calculer  $a$  et  $b$  par (IV.15)

- Transformer la matrice  $[K]$  et  $[M]$

colonne  $i =$  colonne  $i + b$  colonne  $j$

colonne  $j = a$  colonne  $i +$  colonne  $j$

puis : ligne  $i =$  ligne  $i + b$  ligne  $j$

ligne  $j = a$  ligne  $i +$  ligne  $j$

- Modifier les vecteurs propres  $[X]$

colonne  $i =$  colonne  $i + b$  colonne  $j$

colonne  $j = a$  colonne  $j +$  colonne  $j$

Calculer les valeurs propres

$$\lambda_i = \frac{K_{ii}}{M_{ii}} \quad \text{et} \quad F_\lambda = \text{Max}_i \frac{|\lambda_i^s - \lambda_i^{s-1}|}{|\lambda_i^{s-1}|}$$

Calculer les facteurs de couplage

$$F_k = \text{Max}_{i,j} \frac{|K_{ij}|}{\sqrt{K_{ii} K_{jj}}} \quad F_\lambda = \text{Max}_{i,j} \frac{|M_{ij}|}{\sqrt{M_{ii} M_{jj}}}$$

Test de convergence :  $F_k < \varepsilon$  et  $F_M < \varepsilon$  et  $F_\lambda < \varepsilon$

*Méthode de Ritz*

La méthode de Ritz permet de transformer un problème de valeurs propres de grande dimension en un problème de dimension plus réduite. Nous pouvons alors calculer toutes les valeurs propres du système réduite par la méthode de Jacobi.

Cela se fait en contraignant chaque vecteur propre du système à s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de p vecteurs indépendants q : dits vecteurs de Ritz :

$$\{X\} = a_1 \{q_1\} + a_2 \{q_2\} + \dots + a_p \{q_p\} \tag{IV.16}$$

$$\{X\} = \left[ \begin{array}{cccc} \{q_1\} & \{q_2\} & \dots & \{q_p\} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{array} \right\} \tag{IV.17}$$

$$\{X\} = [Q] \{a\} \tag{IV.18}$$

La recherche des coefficients a : de telle manière à ce que le vecteur propre (X) du système soit aussi proche que possible du système initial. Pour cela on doit rendre le quotient de Rayleigh stationnaire.

$$R(\{X\}) = \frac{\langle X \rangle [K] \{X\}}{\langle X \rangle [M] \{X\}} = \frac{\langle a \rangle [\bar{K}] \{a\}}{\langle a \rangle [\bar{M}] \{a\}} \tag{IV.19}$$

$$[\bar{K}] = [Q^T] [K] [Q] \tag{IV.20}$$

$$[\bar{M}] = [Q^T] [M] [Q] \tag{IV.21}$$

La condition de stationnarité  $\delta R = 0$  pourtant  $\langle \delta a \rangle$  s'écrit :

$$([\overline{K}] - R[\overline{M}]) \{a\} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

Cette expression définit un problème de valeurs propres de dimension  $p$ .

### *Méthode des sous-espace*

Cette méthode est très largement utilisée pour calculer les  $p$  premières valeurs propres d'un système de grande dimension. Elle consiste à appliquer plusieurs fois la méthode de Ritz en améliorant les vecteurs de Ritz par itération inverse. La méthode de Ritz force les vecteurs propres  $\{X\}$  à rester orthogonaux entre eux, alors que l'itération inverse ajuste la base vectorielle de Ritz, de manière à assurer la convergence vers les vecteurs propres correspondants aux plus petites valeurs propres.

Son algorithme est le suivant :

a) choisir  $p$  vecteurs initiaux :

$$[X] = [\{X_1\} \quad \{X_2\} \quad \dots \quad \{X_p\}]$$

b) exécuter une itération inverse pour calculer simultanément les  $p$  vecteurs de Ritz  $\{q_i\}$  en résolvant :

$$[K] \{q_i\} = [M] \{X_i\} = \{F_i\} \quad i=1,2,\dots,p$$

$$[K] [Q] = [M] [X]$$

c) appliquer la méthode de Ritz pour chercher les vecteurs propres dans le sous-espace de Ritz.

d) Tester la convergence des valeurs propres et répéter si nécessaire les opérations b, c, d.

# *Chapitre V*

*Organisation du programme, test & résultats*



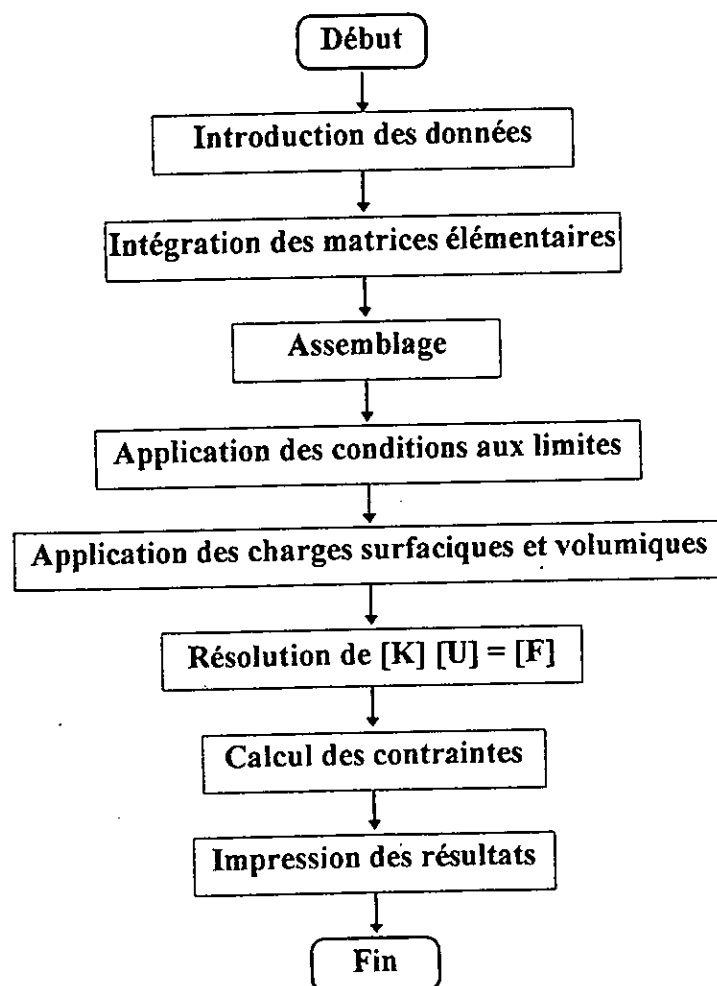


## INTRODUCTION

La programmation de la méthode des éléments finis n'est pas un but en soi, car de nos jours il existe des logiciels très performants traitant divers types d'éléments. Néanmoins, l'ingénieur doit connaître les grandes lignes de celle-ci pour qu'en cas de besoin, il puisse élaborer son propre programme.

Dans ce chapitre nous donnerons les grandes lignes du programme informatique élaboré en langage FORTRAN ainsi que son test de validation (le listing du programme se trouve en annexe).

### ORGANIGRAMME GENERAL



### *Choix de nombre de point d'intégration*

Le choix du nombre de point d'intégration optimal pour un élément fini n'est pas explicité dans les ouvrages ; ainsi pour les éléments isoparamétriques, la référence [1] suggère un nombre de points d'intégration permettant d'avoir une approximation exacte de « det j », alors que la référence [2] trouve que ce critère peut être insuffisant. Néanmoins, en règle générale, le nombre de points d'intégration doit être compris dans un interval bien déterminé.

La référence [5] suggère un nombre minimal de  $2 \times 2$  et un nombre maximal de  $3 \times 3$ , pour l'élément isoparamétrique à 8 noeuds.

En ce qui concerne notre programme nous avons opté pour un choix de  $2 \times 2$  points d'intégration (intégration réduite) ainsi que leurs poids correspondant (voir annexe « listing du programme »).

### *Les sous-programmes*

En suivant l'organigramme de la figure (V.2), on remarque que chaque étape du calcul est faite séparément pour mieux organiser le programme.

Les sous programmes utilisés sont :

- ***Subroutine Spline***

Ce sous programme permet de déterminer les ordonnées des points à interpoler par la méthode « spline cubique ».

- ***Subroutine Mailla***

Ce sous programme détermine les coordonnées de tous les noeuds et leurs numérotation.

- ***Subroutine Basset***

Il permet de calculer les fonctions de forme [N] et leurs dérivées par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ .

- **Subroutine Cornet**

Ce programme lit les coordonnées des noeuds qui lui sont transmis comme paramètres, et les connectivités (noeuds attachés à chaque élément) à partir d'un fichier de données.

- **Subroutine Contr**

Il est utilisé pour le calcul de la matrice Jacobienne, de son inverse, de son déterminant, de ses dérivées par rapport à X, Y et la matrice [B].

- **Subroutine Regid**

Ce sous-programme calcul les matrices élémentaires [KE], [ME] et [FE].

- **Subroutine Resol**

Ce sous-programme résoud le système en utilisant la décomposition L U, il nous donne les déplacements de chaque noeud.

### **Calcul des contraintes**

Le calcul des contraintes peut se faire en n'importe quel point de l'élément, il suffit pour cela de spécifier les coordonnées. Les étapes de calcul seront identiques à celles utilisées pour le calcul de la matrice [K] jusqu'à l'étape du produit  $[D] \times [B]$ , les contraintes seront déterminées par le produit :

$$[\Gamma] = [D] \times [B] \{U\}.$$

Les références [5] et [6] suggèrent de calculer les contraintes aux points d'intégrations, car c'est en ces points qu'on connaît le mieux les déformations. Mais il est plus facile de les calculer aux noeuds (nous avons opté pour ce choix) vu que l'erreur n'est pas très importante par rapport à ceux calculés aux points d'intégration.

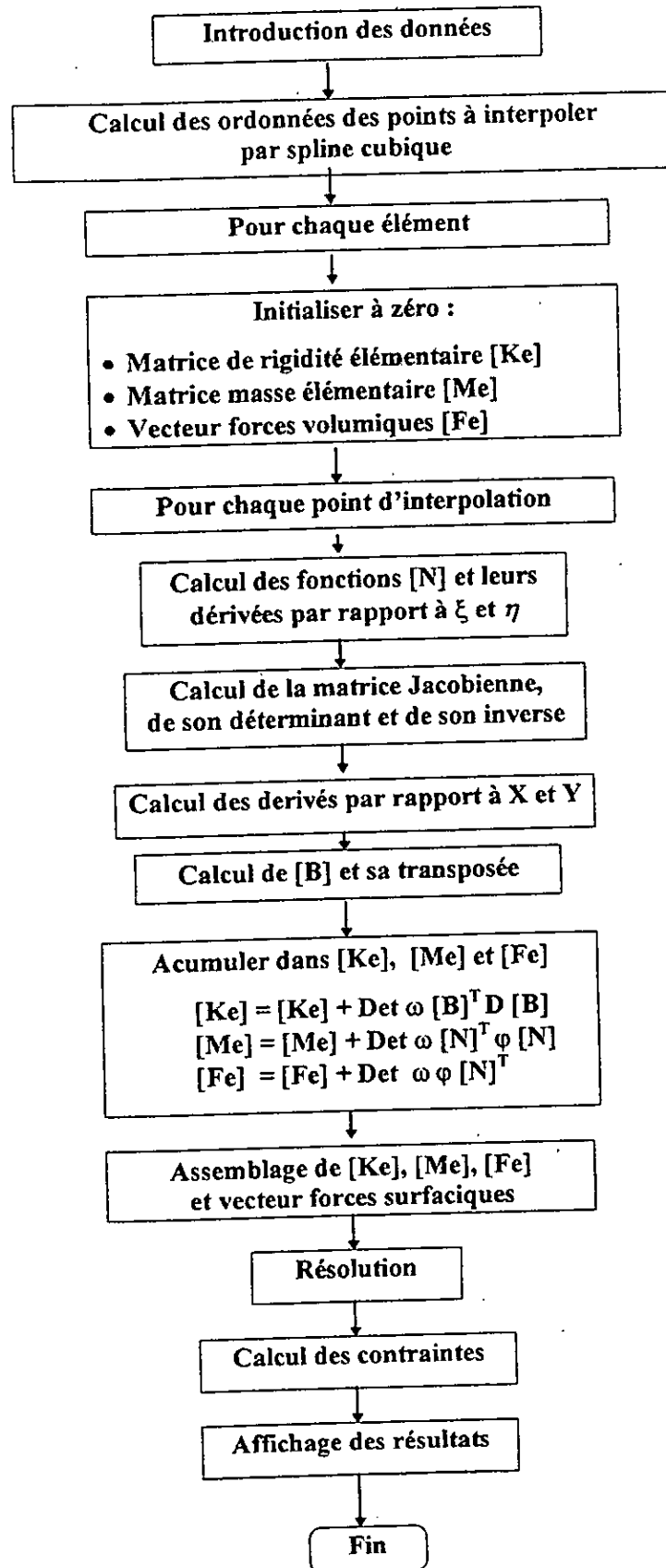
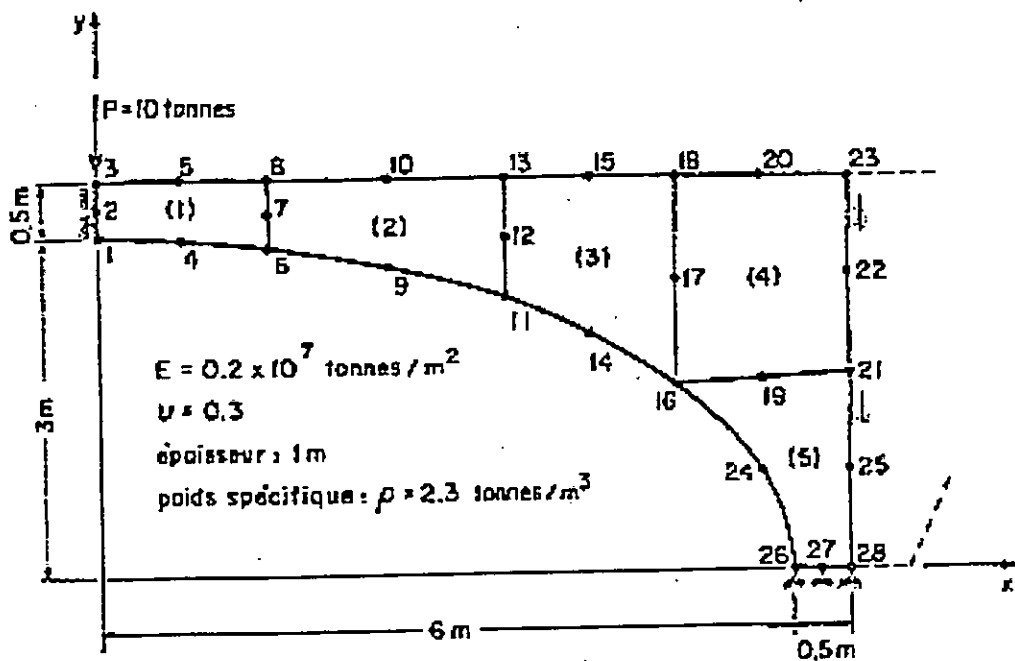


Figure V.2 Organigramme du logiciel

*Test du programme*

Le programme a été testé sur deux exemples de s références [2], [1] et a donné des résultats très satisfaisants.

Le premier exemple que nous avons traiter (exemple de la référence [2]) est celui d'une arche élliptique de pont en béton (figure V.3) traité par la référence [2] en élasticité plane (élément isoparamétrique à 8 noeuds).



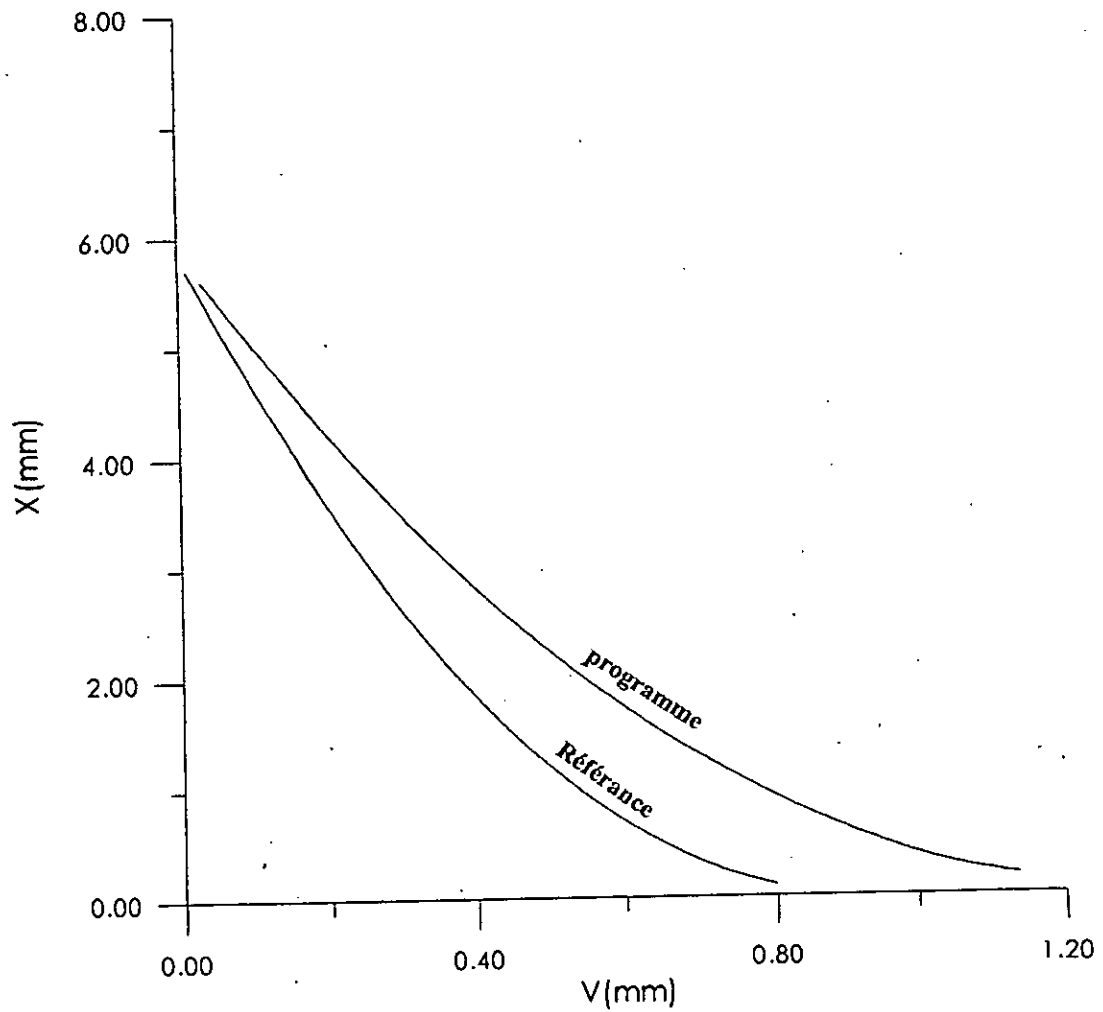
*Figure V.3 Arche élliptique*

En plus de la force concentré P, le poids propre est pris en considération.

**Remarque importante**

Lorsque nous avons changé la manière de donner les numéros de nœuds attachés à chaque élément (connectivité), nous avons constaté que les valeurs des déplacements s'approchaient de ceux données dans la référence [2].

Pour l'exemple de la référence [1], les résultats du programme sont comparés à ceux de la référence et sont représentés dans le graphe ci-dessous.



**TEST DU PROGRAMME PAR RAPPORT A LA REFERANCE**

Pour le calcul dynamique nous avons utilisé le langage *MATLAB* pour déterminer les valeurs et vecteurs propres.

Vu que l'effet des grandes valeurs propres est négligeable par rapport à celle qui sont plus petites, on a pris en considération que les 20 premières valeurs propres, puis on a résolu le système après l'avoir découplé, par la méthode de superposition modale, pour la détermination des déplacements.

Pour faire ce calcul on a eu besoin d'introduire les données suivantes :

- Matrice Rigidité et Matrice Masse calculées en Fortran par le programme.
- Nombre de valeurs propres à calculer.
- Le pas de temps.

Les résultats obtenus sont :

- Valeurs et Vecteurs propres.
- Déplacements pour chaque pas de temps.

**AFFICHAGE DES RESULTATS****■ STATIQUE**

Pour un matériau dont le module de Young est de  $E = 2E11 \text{ daN/cm}^2$ , la masse volumique  $\rho$  est de  $2.5 \text{ Kg/m}^3$  et le coefficient de Poisson est de 0.3.

Pour un angle d'attaque  $\alpha = 2^\circ$ .

**LES CONTRAINTES**

<b>ELEMENT NOEUD</b>	<b>SIGMA(X)</b>	<b>SIGMA(Y)</b>	<b>TAU(XY)</b>
01	0.111E+11	-0.331E+07	-0.975E+11
02	-0.103E+08	-0.208E+07	-0.292E+11
03	0.288E+04	-0.175E+04	-0.156E+12
04	-0.200E+04	-0.646E+10	-0.185E+11
05	0.259E+11	0.588E+03	-0.197E+11
06	-0.808E+11	-0.101E+04	-0.942E+11
07	-0.269E+12	0.763E+03	0.511E+11
08	-0.135E+11	0.770E+11	0.153E+11
09	0.268E+04	0.231E+11	0.303E+03
10	-0.259E+04	0.188E+12	-0.808E+11
11	-0.716E+11	0.855E+12	-0.269E+12
12	-0.163E+04	0.257E+12	-0.135E+11
13	0.133E+04	0.108E+13	-0.231E+12
14	-0.358E+11	0.511E+11	-0.772E+12
15	0.205E+04	0.153E+11	-0.748E+11
16	-0.191E+04	0.977E+02	0.231E+12
17	0.222E+04	-0.152E+13	0.772E+12
18	-0.808E+11	-0.456E+12	0.122E+12
19	-0.269E+12	-0.108E+13	0.694E+12
20	-0.274E+11	-.157E+12	0.231E+13
21	0.137E+04	-0.470E+11	0.453E+12
22	-0.533E+03	-0.189E+12	0.808E+11



Pour un angle d'attaque  $\alpha = 8^\circ$ .

**LES CONTRAINTES**

<i>ELEMENT NOEUD</i>	<i>SIGMA(X)</i>	<i>SIGMA(Y)</i>	<i>TAU(XY)</i>
01	0.109E+10	0.127E+08	0.210E+05
02	0.655E+08	0.138E+07	0.112E+05
03	0.217E+05	0.198E+04	0.198E+04
04	0.189E+05	0.145E+05	0.117E+05
05	0.289E+11	0.578E+04	0.398E+04
06	0.367E+05	0.267E+04	0.134E+06
07	0.334E+06	0.363E+05	0.641E+11
08	-0.145E+11	0.723E+11	0.156E+10
09	-0.591E+05	0.231E+11	0.798E+04
10	0.485E+05	0.188E+12	-0.808E+11
11	-0.713E+11	0.851E+11	0.269E+12
12	0.725E+05	0.257E+12	-0.135E+11
13	-0.690E+04	0.108E+12	-0.331E+11
14	-0.458E+11	0.518E+11	-0.772E+11
15	-0.567E+05	0.253E+10	-0.948E+10
16	0.356E+05	0.136E+04	0.254E+11
17	-0.635E+05	-0.153+12	0.772E+11
18	-0.819E+10	-0.466E+11	0.127E+11
19	-0.269E+12	-0.108E+13	0.694E+12
20	-0.114E+11	-0.157E+11	0.231E+12
21	-0.457E+05	-0.390E+10	0.477E+11
22	0.224E+05	-0.129E+11	0.818E+10

Pour un angle d'attaque  $\alpha = 16^\circ$

**LES CONTRAINTES**

<i>ELEMENT NOEUD</i>	<i>SIGMA(X)</i>	<i>SIGMA(Y)</i>	<i>TAU(XY)</i>
01	0.111E+11	0.137E+09	0.215E+05
02	0.674E+08	0.133E+08	0.212E+05
03	0.117E+05	0.198E+05	0.198E+05
04	0.140E+05	0.141E+05	0.127E+05
05	0.259E+11	0.578E+04	0.578E+04
06	0.267E+05	0.267E+05	0.134E+05
07	0.134E+05	0.389E+04	0.511E+11
08	-0.135E+11	0.770E+11	0.153E+11
09	-0.593E+05	0.231E+11	0.798E+04
10	0.485E+05	0.188E+12	-0.808E+11
11	-0.716E+11	0.855E+12	-0.269E+12
12	0.725E+05	0.257E+12	-0.135E+11
13	-0.650E+05	0.108E+13	-0.231E+12
14	-0.358E+11	0.511E+11	-0.772E+12
15	-0.557E+05	0.153E+11	-0.748E+11
16	0.556E+05	0.115E+04	0.231E+12
17	-0.535E+05	-0.152E+13	0.772E+12
18	-0.808E+11	-0.456E+12	0.122E+12
19	-0.269E+12	-0.108E+13	0.694E+12
20	-0.274E+11	-0.157E+12	0.231E+13
21	-0.657E+05	-0.470E+11	0.453E+12
22	0.124E+06	-0.189E+12	0.808E+11

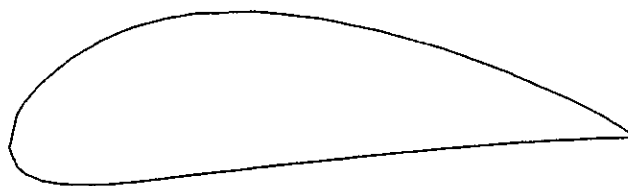
■ **DYNAMIQUE**

$$\alpha = 2^\circ$$

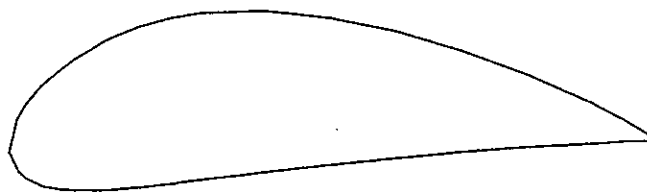
les valeurs propres pour un angle d'incidence de  $2^\circ$  sont :

$$\lambda$$

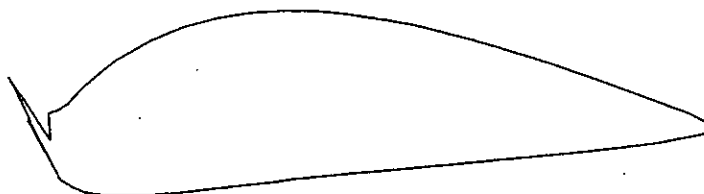
8.6390566487670800e+009  
8.6390566487670496e+009  
1.6756050544151300e+010  
1.6756050544151300e+010  
1.9215443779038800e+010  
1.3413925480343800e+010  
5.7011841248079592e+009  
9.8784167067047600e+009  
9.8784167067047808e+009  
5.7011841248079504e+009  
8.2508626069911904e+009  
2.7439742608964300e+009  
2.7439742608964300e+009  
5.9863632266541904e+009  
3.4626025127459100e+009  
2.4796522895543100e+009  
2.4796522895543100e+009  
2.0518327783597300e+007  
2.0518327783597300e+007



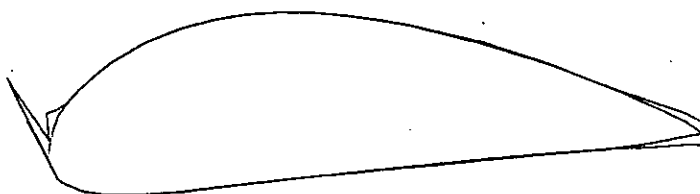
*Profil avant déformation*



*profil après déformation*



*Profil après déformation  
(Déformations amplifiées 200 fois)*



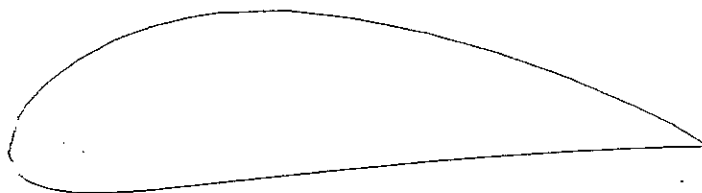
*Superposition*

**Comparaison du profil d'aile avant et après déformation  
pour un angle d'attaque de 2° et un temps de 10s**

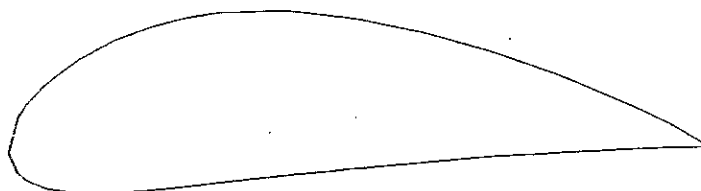
Les valeurs propres pour un angle d'incidence de  $\alpha = 8^\circ$  sont :

$\lambda$

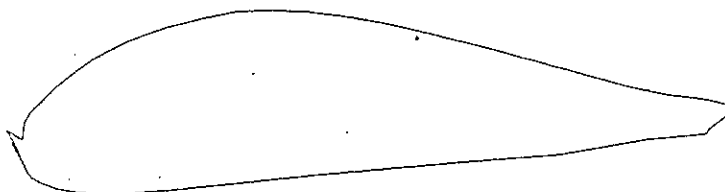
5.11784883582135e+09  
4.04045776473767e+09  
3.97869872307255e+09  
1.70375308943816e+11  
9.93137521473056e+10  
6.99037550389719e+10  
3.52938496097575e+10  
3.72233337182879e+10  
3.52938496097575e+10  
2.32007658775620e+10  
1.04016170455488e+10  
1.04016170455488e+10  
9.13998129586992e+09  
9.13998129586993e+09  
7.85720182931477e+09  
1.63486690216062e+09  
1.63486690216062e+09  
4.07696218198286e+09  
5.63209954582819e+09  
4.07696218198286e+09



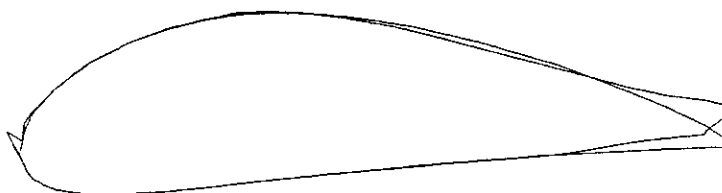
*Profil avant déformation*



*Profil après déformation*



*Profil après déformation  
(déformations amplifiées 200 fois)*



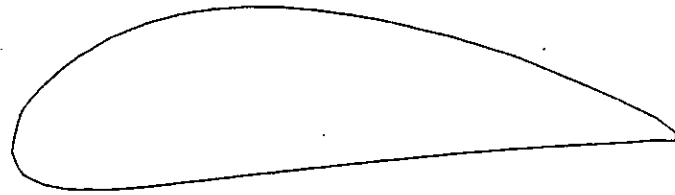
*Superposition*

**Comparaison du profil d'aile avant et après déformation  
pour un angle d'attaque de  $8^\circ$  et un temps de 10s**

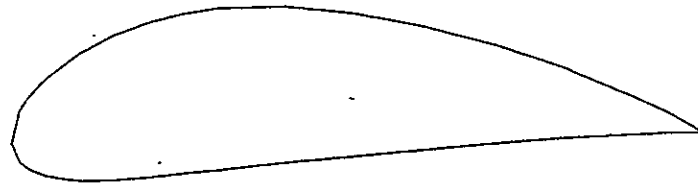
Les valeurs propres pour un angle d'incidence de  $\alpha = 16^\circ$  sont :

$\lambda$

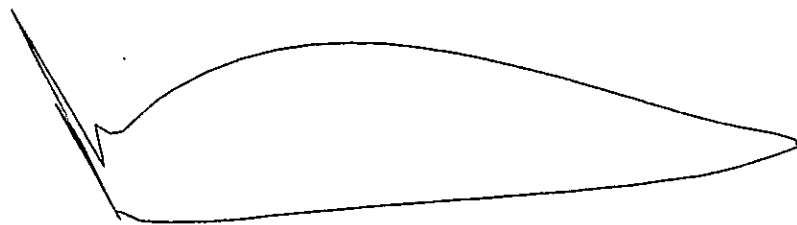
6.75577040811060e+07  
3.18857442725788e+07  
6.75577040811061e+07  
1.10880592555500e+08  
9.46762978603616e+07  
9.46762978603616e+07  
8.62739844466965e+07  
4.79497610292924e+07  
4.79497610292925e+07  
3.54868827033167e+07  
3.54868827033167e+07  
1.80527525963997e+07  
1.80527525963997e+07  
1.36804735608200e+07  
3.97060861348250e+04  
3.97060861348195e+04  
3.74395718714927e+06  
2.32005367213093e+06  
7.53350112801564e+04  
7.53350112801563e+04



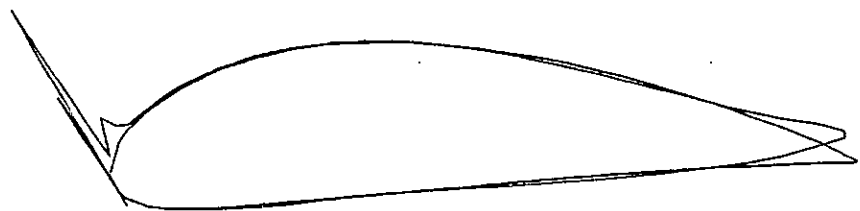
*Profil avant déformation*



*Profil après déformation*



*Profil après déformation  
(Déformations amplifiées 200 fois)*



*Superposition*

**Comparaison du profil d'aile avant et après déformation  
pour un angle d'attaque de  $16^\circ$  et un temps de 10s**



### ■ STATIQUE

Pour un matériau dont le module de Young est de  $E = 2E09\text{daN/cm}^2$ , la masse volumique  $\rho$  est de  $2.5\text{ Kg/m}^3$  et le coefficient de Poisson est de 0.3.

Angle d'attaque  $\alpha = 2^\circ$ .

#### LES CONTRAINTES

<i>ELEMENT NOEUD</i>	<i>SIGMA(X)</i>	<i>SIGMA(Y)</i>	<i>TAU(XY)</i>
01	0.954E+05	0.755E+05	0.975E+11
02	0.116E+05	0.519E+05	0.292E+11
03	0.128E+04	0.170E+04	0.156E+12
04	0.804E+03	0.646E+10	0.656E+11
05	0.359E+04	0.635E+03	0.197E+11
06	0.140E+03	0.103E+04	0.942E+11
07	0.405E+04	0.758E+03	0.511E+11
08	0.289E+03	0.770E+11	0.153E+11
09	0.273E+04	0.231E+11	0.313E+03
10	0.828E+02	0.188E+12	0.808E+11
11	0.183E+04	0.855E+12	0.269E+12
12	0.681E+02	0.257E+12	0.135E+11
13	0.135E+04	0.108E+13	0.231E+12
14	0.792E+02	0.511E+11	0.772E+12
15	0.129E+04	0.153E+11	0.748E+11
16	0.406E+01	0.956E+02	0.231E+12
17	0.221E+04	0.152E+13	0.772E+12
18	0.113E+03	0.456E+12	0.122E+12
19	0.740E+03	0.108E+13	0.694E+12
20	0.587E+02	0.157E+12	0.231E+13
21	0.818E+03	0.470E+11	0.453E+12
22	0.349E+02	0.189E+12	0.808E+11

Angle d'attaque  $\alpha = 8^\circ$ .

**LES CONTRAINTES**

<i>ELEMENT NOEUD</i>	<i>SIGMA(X)</i>	<i>SIGMA(Y)</i>	<i>TAU(XY)</i>
01	0.297E+05	0.775E+04	0.608E+11
02	0.299E+04	0.155E+05	0.182E+11
03	0.600E+03	0.252E+04	0.711E+11
04	0.399E+02	0.234E+10	0.459E+11
05	0.209E+04	0.832E+03	0.138E+11
06	0.171E+03	0.757E+03	0.675E+11
07	0.280E+04	0.302E+03	0.785E+12
08	0.545E+03	0.647E+11	0.235E+12
09	0.823E+04	0.194E+11	0.342E+04
10	0.277E+03	0.135E+12	0.785E+12
11	0.490E+04	0.677E+13	0.235E+12
12	0.263E+03	0.203E+13	0.113E+11
13	0.302E+04	0.592E+12	0.127E+12
14	0.184E+03	0.785E+12	0.423E+12
15	0.460E+03	0.235E+12	0.593E+12
16	0.163E+03	0.423E+05	0.127E+12
17	0.666E+02	0.827E+13	0.423E+12
18	0.161E+03	0.248E+13	0.384E+12

Angle d'attaque : 16°

**LES CONTRAINTES**

<i>ELEMENT NOEUD</i>	<i>SIGMA(X)</i>	<i>SIGMA(Y)</i>	<i>TAU(XY)</i>
01	0.639E+06	0.592E+06	0.975E+11
02	0.822E+05	0.461E+06	0.292E+11
03	0.441E+04	0.198E+05	0.156E+12
04	0.487E+04	0.646E+10	0.656E+11
05	0.226E+05	0.537E+04	0.197E+11
06	0.118E+04	0.699E+04	0.942E+11
07	0.210E+05	0.385E+04	0.511E+11
08	0.537E+04	0.770E+11	0.153E+11
09	0.398E+05	0.231E+11	0.817E+04
10	0.161E+03	0.188E+12	0.808E+11
11	0.669E+05	0.855E+12	0.269E+12
12	0.121E+04	0.257E+12	0.135E+11
13	0.648E+05	0.108E+13	0.231E+12
14	0.112E+04	0.511E+11	0.772E+12
15	0.558E+05	0.153E+11	0.748E+11
16	0.439E+03	0.120E+04	0.231E+12
17	0.538E+05	0.152E+13	0.772E+12
18	0.260E+04	0.456E+12	0.122E+12
19	0.179E+05	0.108E+13	0.694E+12
20	0.141E+04	0.157E+12	0.231E+13
21	0.356E+05	0.470E+11	0.453E+12
22	0.572E+04	0.189E+12	0.808E+11

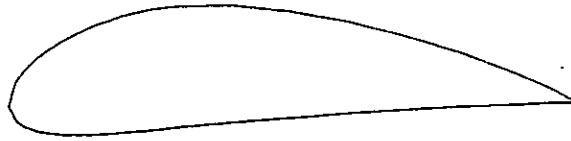
**■ DYNAMIQUE**

$$\alpha = 2^\circ$$

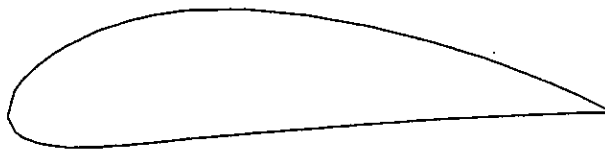
les valeurs propres pour un angle d'incidence de  $2^\circ$  sont :

$$\lambda$$

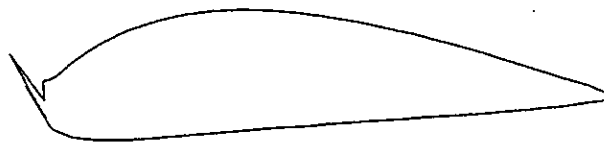
1.6756051e+010  
1.9215444e+010  
1.3413925e+010  
5.7011841e+009  
9.8784167e+009  
9.8784167e+009  
5.7011841e+009  
8.2508626e+009  
2.7439743e+009  
2.7439743e+009  
5.9863632e+009  
3.4626025e+009  
2.4796523e+009  
2.4796523e+009  
2.0518328e+007  
2.0518328e+007  
7.7416774e+007  
3.1153449e+007  
1.2656287e+007  
1.0656287e+007



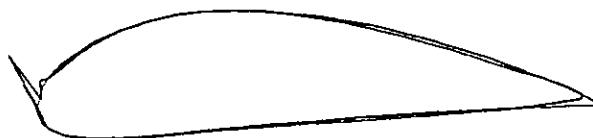
*Profil avant déformation*



*Profil après déformation*



*Profil après déformation  
(Déformations amplifiées 200 fois)*



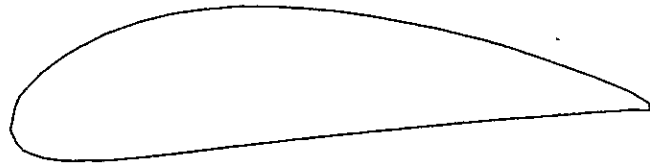
*Superposition*

**Comparaison du profil d'aile avant et après déformation  
pour un angle d'attaque de  $2^\circ$  et un temps de 10s**

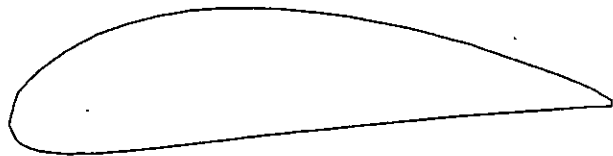
Les valeurs propres pour un angle d'incidence de  $\alpha = 8^\circ$  sont :

$\lambda$

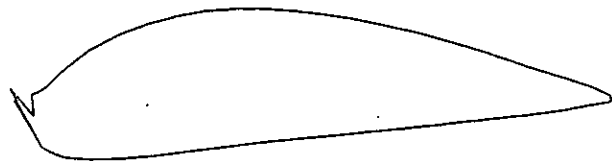
9.5792965e+009  
9.0950874e+009  
8.5885063e+009  
8.4070453e+009  
.4747411e+009  
.5009371e+009  
5.9363840e+009  
5.3349383e+009  
4.2634674e+009  
4.2634674e+009  
3.7174651e+009  
2.9250718e+009  
2.7250905e+009  
2.4842579e+009  
1.6753835e+009  
1.7862873e+009  
1.2773580e+009  
7.8711939e+008  
5.1126523e+008  
2.1862844e+008



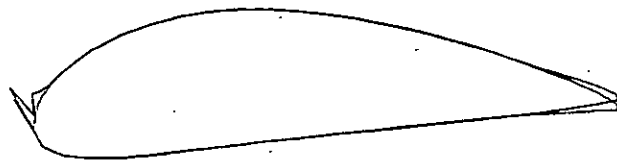
*Profil avant déformation*



*Profil après déformation*



*Profil après déformation  
(Déformations amplifiées 200 fois)*



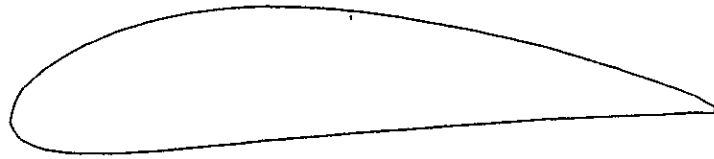
*Superposition*

**Comparaison du profil de l'aile avant et après déformation  
pour un angle d'attaque de  $8^\circ$  et un temps de 10s**

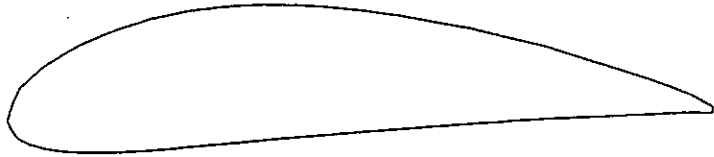
Les valeurs propres pour un angle d'incidence de  $\alpha = 16^\circ$  sont :

$\lambda$   
3.3341144e+004  
3.3341144e+004  
4.8234043e+004  
4.1770668e+004  
4.1770668e+004  
1.3750170e+004  
1.3750170e+004  
2.6541405e+004  
2.6541405e+004  
1.7014082e+004  
1.7014082e+004  
8.0580145e+003  
8.0580145e+003  
3.1689807e+003  
1.0879859e+003  
3.0143298e+002  
7.7416774e+007  
3.1153449e+007  
1.0656287e+007  
1.0656287e+007

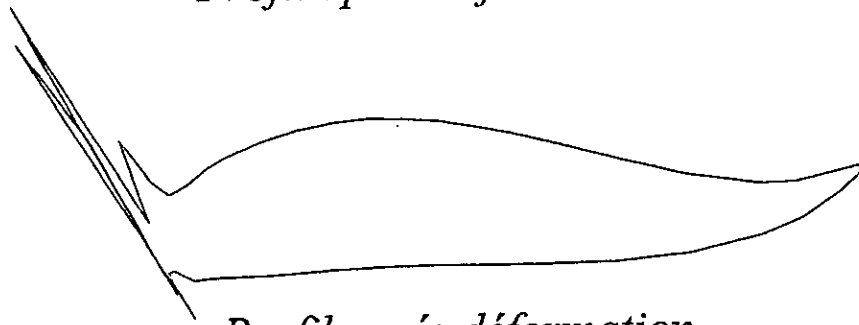




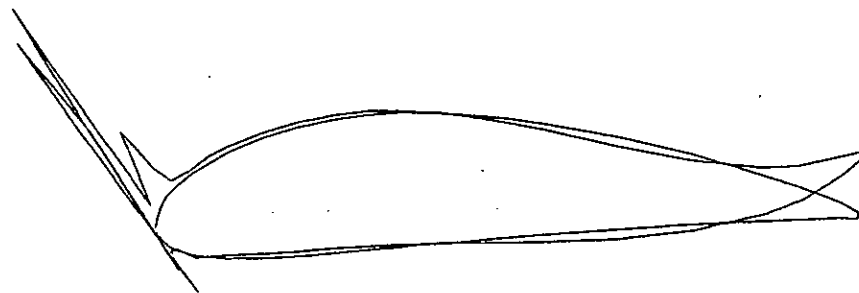
*Profil avant déformation*



*Profil après déformation*



*Profil après déformation  
(Déplacements amplifiées 200 fois)*



*Superposition*

**Comparaison du profil d'aile avant et après déformation  
pour un angle d'attaque de  $16^\circ$  et un temps de 10s**

## Interprétation des résultats

### • *Statique*

- ◆ La distribution des contraintes impose un matériau dont la limite élastique est supérieur à celle calculée par le programme.
- ◆ La contrainte maximale est localisée au bord de fuite du fait que l'épaisseur du profil est minimale.
- ◆ La variation des contraintes nous permet de choisir l'incidence la mieux adaptée à notre profil ( $\alpha=8^\circ$ ) ; la contrainte est par contre plus importante pour une incidence de ( $\alpha=16^\circ$ ).
- ◆ Les déplacements et les contraintes augmentent en diminuant le module de Young (en choisissant un rigidité du matériau moins importanté).

### • *Dynamique*

- ◆ En général, les déformations dans le cas dynamique sont largement plus importantes que dans le cas statique.
- ◆ Les déformations sont concentrées sur l'extrados (effet conjugué, l'extrados est soumis à une dépression et l'intrados à une compression).
- ◆ Le déplacement est très apparent au bord d'attaque et de fuite.
- ◆ L'intensité du déplacement au bord d'attaque engendre une déformation importante.

- ◆ La déformation au bord de fuite présente une rotation dirigée vers le haut.
- ◆ L'allure des déplacements du bord de fuite vérifie la condition du mouvement en blocs du corps solide (condition nécessaire à la convergence en éléments finis).
- ◆ Le choix des vingt (20) plus petites valeurs est entièrement satisfaisant parce qu'il nous a permis d'avoir des réponses dynamiques adaptées.
- ◆ En faisant varier l'incidence, on remarque également que l'angle d'incidence de  $8^\circ$  est toujours bien adapté à l'écoulement autour du profil étudié, alors que l'angle d'incidence de  $16^\circ$  présente le cas étudié le plus défavorable.
- ◆ La réponse dynamique devient plus importante pour un module de Young plus faible.
- ◆ Le profil est soumis à une déformation importante de l'extrados et de l'intrados, ce qui montre après amplification une forme aplatie et amincie du profil.

# *Conclusion Générale*



On sait que l'une des plus importantes étapes de la conception d'une aile d'avion est l'étude aéroélastique (effet aérodynamique sur l'élasticité).

Pour cela, on a fait une approche qui nous a permis de simuler (faire un code de calcul) les interactions, en vue d'obtenir des grandeurs « fidèles » des contraintes et des déformations.

En calcul statique, nous avons eu des résultats qui reflètent l'état des contraintes dans l'aile. En calcul dynamique, les résultats obtenus donnent une idée sur la manière avec laquelle l'aile est soumise à des vibrations.

Nous avons pris en considération les charges de pression (sur le profil) et de masse, mais une éventuelle force extérieure peut être prise pour exprimer des perturbations agissant sur l'aile (tels que les effets des trous d'air, ou un dysfonctionnement d'un moteur), et de les étalonner selon le phénomène physique simulé.

On peut étendre cette étude sur un ensemble de profils aérodynamiques formant un avion, et d'en voir l'effet des sollicitations externes, en développant une méthode de simulation aéroélastique.

# *Annexe*



## Rappel de mécanique des fluides

### *Historique*

Les équations régissant le mouvement des fluides sont difficiles à résoudre car les équations de base sont non-linéaire.

La viscosité du fluide est l'une des plus grandes difficultés connues dans la théorie classique, parce qu'elle est incapable de fournir une explication de phénomènes tels que la traînée d'un corps en mouvement et la séparation de l'écoulement autour de l'obstacle.

L'hypothèse d'un fluide idéal fut introduite par EULER qui étudiait surtout l'écoulement de l'air et de l'eau possédant un faible degré de viscosité.

En 1822 Navier présente une formulation rigoureuse de l'influence de la viscosité sur le comportement des écoulements, et puis quelques années après, Stokes obtint la même formulation par une méthode complètement différente.

En 1904 Prandtl fit un pas décisif dans l'utilisation de ces équations. Il montra par ses études que les forces engendrées par la viscosité, lorsqu'elles sont faibles par rapport aux forces de pression, ne peuvent influencer l'écoulement que dans la couche limite et dans le sillage d'un obstacle

- ◆ **Equations de base**

- ◆ **Equation de continuité** : L'équation de continuité dans un écoulement sous la forme intégrale :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$$

ou sous forme différentielle

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{V}) = 0$$

Pour un écoulement incompressible, on a :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

d'après l'équation (1-2), on obtient :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

#### ♦ Equation du quantité de mouvement

L'équation de la quantité de mouvement traduit la deuxième loi de Newton appliquée au fluide. Elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} (M \vec{V}) = \sum_i \vec{F}_i$$

La forme générale de l'équation est :

$$\int_v \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dV + \int_s (\rho \vec{V} \vec{n}) \vec{V} dS = \sum_i \vec{F}_i$$

Sous forme différentielle pour un fluide incompressible est :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

#### ♦ Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie traduit le principe de la conservation de l'énergie d'un volume de contrôle de fluide.

Dans le cas général l'équation de l'énergie s'exprime par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \rho \left[ U^2 + \frac{V^2}{2} + gz \right] dV + \int_s (\rho V) \left[ h^2 + \frac{V^2}{2} + gz \right] dS = \frac{d}{dt} (Q - W)$$



#### ♦ Trajectoire et lignes de courant

Afin de pouvoir décrire un écoulement du point de vue cinématique, on a besoin de connaître le champ de vitesse  $\vec{V}(\vec{r}, t)$ , où  $\vec{r} = (x, y, z)$  est le vecteur position. Le champ vectoriel peut être illustré par deux méthodes ou approches différentes :

##### Première méthode (approche lagrangienne)

Avec cette méthode, on peut déterminer la trajectoire d'une particule fluide dans son mouvement, en relevant l'endroit où elle se trouve lorsque le temps varie.

##### Deuxième méthode (approche eulerienne)

Elle sert à déterminer dans le champ de vitesse des lignes qui, à un instant  $t$  fixe, possèdent en chacun de leurs points une tangente parallèle au vecteur vitesse  $\vec{V}$ . Ces lignes sont les « lignes de courant ».

##### Vecteur potentiel

A partir de l'équation :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

on peut exprimer le vecteur vitesse à l'aide d'un vecteur potentiel  $A$  par la relation

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{A}$$

##### *Fonction de courant d'un écoulement plan*

Un écoulement plan est obtenu quand le vecteur vitesse  $\vec{V}$  est parallèle par exemple, au plan  $xy$  d'un système cartésien. Par conséquent, toutes les dérivées partielles par rapport à  $z$  sont nulles.

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

et  $\vec{V}$  contient les deux composantes :

$$\vec{V} = (U, V, 0)$$

Dans ce cas, le vecteur potentiel  $A$  peut être choisi si tel que  $A$  ait les composantes :

$$A = (0, 0, \psi)$$

où  $\psi$  est une composante des variables  $x, y$  pour les écoulements incompressibles, selon  $\vec{V} = \nabla \bar{A}$  et  $A = (0, 0, \psi)$ , on a :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La fonction de courant notée  $\psi$  représente le débit volumique de l'écoulement.

Elle représente les lignes de courant sous la forme  $\psi(x, y) = \text{constante}$

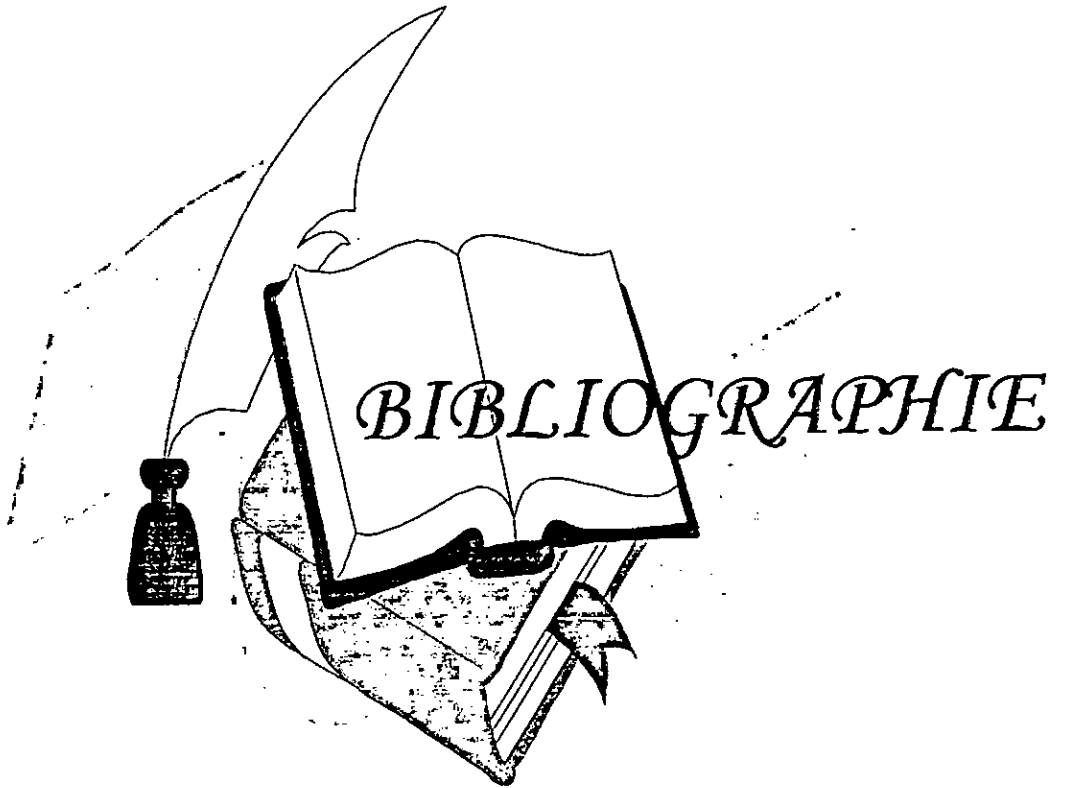
i.e. que chaque valeur différente de la constante, définit une ligne de courant.

La différentielle totale de la fonction  $\psi$  selon  $A = (0, 0, \psi)$  s'écrit :

$$d\psi = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = (-V dx + U dy)$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V}{U}$$



- [1] **O.C. ZIENKIEWICZ**  
The finite element method  
4<sup>ème</sup> édition Mac Graw-Hill ; 1989
- [2] **G.DHATT & G.TOUZOT**  
Une représentation de la méthode des éléments finis  
Maoiné S.A editeur; 1984
- [3] **P.REBUFFET**  
Aerodynamique expérimentale  
Dunod; 1969
- [4] **D.HADJOUJ & M.KOBBI**  
Etude des caractéristiques aerodynamique  
d'un profil d'aile réel par la méthode de Theodorsen.  
Thèse de P.F.E (U.S.T.H.B); 1995.
- [5] **J.F. IMBERT**  
Analyse des structures par éléments finis  
Edition Cepadues; 1984.
- [6] **J.L.BATOZ & G DHATT**  
Modélisation des structures par éléments finis  
Edition Hermes ; 1990
- [7] **BATHE & WILSON**  
Numerical method in finite element analysis
- [8] **R.D. COOK**  
Concepts and applications of finite element analysis  
John & Sons; 1974.
- [9] **G.STRANGIG.J.FIX**  
Analysis of he finite element methods  
Prentice Hall; 1973
- [10] **R.H.GALLAGHER**  
Finite element analysis fundamentals  
Prentice Hall; 1975
- [11] **W.C HURTY & M.F RUBINSTEIN**  
Dynamics of structures  
Prentice Hall; 1964
- [12] **R.W CLOUGH & J. PENZIEN**  
Dynamics of structures.  
Mac Graw-Hill; 1975.

- [13] **R.DAT**  
Détermination des modes propres d'une structure  
par essais de vibration  
*La recherche aérospatiale; 1973.*
- [14] **S. BOUBENDIR & N. CHIKHI**  
Éléments d'un code pour le calcul d'un écoulement  
dans une roue de turbomachine  
*Thèse; 1993.*
- [15] **J.P VEUILLOT**  
Calcul de l'écoulement moyen dans une roue  
de turbomachine axiale  
*Office national d'études et de recherche aérospatiales.*
- [16] **H. MITON**  
Étude théorique et expérimentale de problèmes  
aérodynamiques concernant les compresseurs transsoniques.  
*Université d'Aix-Marseille II, Thèse de doctorat; 1978*
- [17] **P.E ALLAIRE**  
Basics of finite element method, Solid mechanics,  
Heat transfer and fluid mechanics.  
*University of Virginia.*
- [18] **O.C ZIENKIEWICZ & R.L TAYLOR.**  
La méthode des éléments finis  
Formulation de base et problèmes linéaires  
*4<sup>ème</sup> édition, AFNOR.*