

16/96

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

BIBLIOTHEQUE — المكتبة

Ecole Nationale Polytechnique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Mécanique

SUJET

***SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT
DYNAMIQUE DE REDUCTEURS A ENGRENAGES
A AXES PARALLELES
SANS OU AVEC ERREURS GEOMETRIQUES***

Proposé par

Mr. H. BELHANECHÉ

Etudié par

Mr. BOUTERFAS Tahar

Dirigé par

Mr. H. BELHANECHÉ

PROMOTION

— Septembre 1996 —

E.N.P. 10, Avenue Hassen BADI - EL-Harrach - Alger

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

المكتبة
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Mécanique

SUJET

***SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT
DYNAMIQUE DE REDUCTEURS A ENGRENAGES
A AXES PARALLELES
SANS ET AVEC ERREURS GEOMETRIQUES***

Proposé par

Mr. H. BELHANECHÉ

Etudié par

Mr. BOUTERFAS Tahar

Dirigé par

Mr. H. BELHANECHÉ

PROMOTION

— Septembre 1996 —

E.N.P. 10, Avenue Hassen BADI - EL-Harrach - Alger

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

«... وقل رب زدني علما...»

من الآية ١١٠ من سورة طه

«... وأنزلنا الحديد فيه بأس شديد ومنافع

للناس...»

من الآية ٢٣ من سورة الحديد

«قالوا سبحانك لا علم لنا إلا ما علمتنا إنك

أنت العليم الحكيم»

الآية ٣٠ من سورة البقرة

DEDICACE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

JE DÉDIE CE TRAVAIL À :

❖ MES PARENTS

❖ MES SOEURS ET MES FRÈRES

❖ MA FAMILLE

❖ MES AMIS



BOUTERFAS TAHAR

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je tiens au début de ce mémoire à exprimer ma profonde gratitude envers tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin à ma formation et aux résultats aux quels je suis parvenus.

Que M.H.BELHANECHÉ qui m'a été de très bon conseil, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude et de mes remerciements les plus vifs.

Cette étude n'aurait pu être menée à bien sans Mr M.ABBA ingénieur en mécanique à l'ENP, qui m'a efficacement aidé et toujours incité à plus de clarté, je lui adresse tous mes remerciements.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du jury qui ont accepté de juger ce travail.

Ma gratitude s'adresse aussi à tous les membres du centre de calcul et de la bibliothèque de l'ENP.

Je remercie également la société RECTA et particulièrement tous les membres du bureau d'étude et le service de comptabilité ainsi que le directeur pour m'avoir accepté à effectuer des stages pratiques durant ma graduation.

Si ce travail sera un jour de quelque utilité aux étudiants qui le liront, nous nous estimons largement récompenser et soulager des soucis que nous avons assailli pendant sa rédaction.

Enfin je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

ملخص

تهدف دراستنا هذه الى انجاز برنامج عددي يسمح بمحاكاة السلوك الديناميكي لعلبة السرعات ذات العجلات ذي الاسنان المستقيمة او المائلة و الاعمدة المتوازية في حالة وجود و عدم وجود الاخطاء الهندسية باختيار النموذج كتلة-نابض مع اربع درجات حرية

ABSTRACT

The object of this study is to elaborate a calculus computer program to simulate the dynamic behavior of the gear box with helical and spur gear and parallel axes in presence and no presence of geometrical faults. The used model is mass-spring with four degrees of freedom.

RESUME

L'objet de cette étude est d'élaborer un code de calcul pour la simulation du comportement dynamique du réducteur à engrenages, à dentures droites ou hélicoïdales, à axes parallèles sans et avec erreurs géométriques, en adoptant le modèle masses-ressorts à quatre degrés de liberté.

ERRATA

- En IV.3.2.1. page 37 ,5eme ligne supprimer 'simple'.
- En IV.3.4.4. page 45 ,1ere ligne ajouter :de dissipation qui prend en compte du travail visqueuses equivalentes.
- En V.3.3.1. page 57 ,2eme ligne supprimer 'numériquement'.
 - page 58 ,4eme ligne remplacer $\Omega_1=750$ rd/s par $\Omega_1=350$ rd/s
 - 6eme ligne remplacer $\Omega_1=732,14$ rd/s par $\Omega_1=368.462$ rd/s
 - page 60 , 2eme parag. ligne 9 ajouter : moins importante de err. de trans.
- En V.4.4.2. page 72 1er parag. ligne 4 ajouter : risque de fortes efforts.
- En V.5 page 73 1er parag. ligne 6 remplacer 'de fortes amplitudes' par 'de faibles pics par rapport au cas sans erreurs'.
- En conclusion générale :
 - page 77 . 5eme. parag. 1er ligne, remplacer 'la comparaison' par ' la constatation'
 - page 78 8eme ligne supprimer 'les couples statiques'.
- En annexe :
 - dans la 1ere partie : HB doit être remplacer par HF.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	2
I.1: INTRODUCTION.....	3
I.2: DIFFERENTES APPROCHES APPLIQUEES AUX METHODES DE CALCUL.....	3
I.2.1: Approches expérimentales.....	4
I.2.2: Approches analytiques.....	5
I.2.3: Les méthodes numériques.....	6
I.3: CONCLUSION.....	6
CHAPITRE II : ETUDE CINEMATIQUE.....	8
II.1: INTRODUCTION.....	8
II.2: CINEMATIQUE DES ENGRNAGES SANS ERREURS GEOMETRIQUES.....	10
II.2.1: Vitesse du point de contact appartenant au solide (S1).....	10
II.2.2: Vitesse du point de contact appartenant au solide (S2).....	11
II.3: CINEMATIQUE DES ENGRENAGES AVEC ERREURS GEOMETRIQUES.....	12
II.3.1: Vitesse du point de contact appartenant au solide (S1).....	12
II.3.2: Vitesse du point de contact appartenant au solide (S2).....	13
II.4: CONSEQUENCES.....	14
II.4.1 : Conséquences dans le cas sans erreurs géométriques.....	14
II.4.1.1: Conséquences sur la vitesse de déplacement.....	14
II.4.1.2: Conséquences sur la vitesse de glissement.....	15
II.4.1.2.1 : Vitesse de glissement du profil de solide (1) / (2).....	15
II.4.1.2.2 : Vitesse de glissement du profil de solide (2) / (1).....	15
II.4.1.2.3 : Vitesse de glissement de point primitif des deux profils.....	15
II.4.2: Conséquences dans le cas avec erreurs géométriques.....	16
II.5: CONCLUSION.....	16

CHAPITRE III : MODELISATION DES ERREURS GEOMETRIQUES

ET LA RAIDEUR DE LIAISON

III.1: INTRODUCTION.....	18
III.2: ERREURS GEOMETRIQUES.....	18
III.3: DESCRIPTISATION DES SURFACES D'ATTAQUE.....	19
III.4: RAIDEURS D'ENGRENEMENT.....	23
III.4.1: Raideur de liaison.....	23
III.4.2: Influence du film lubrifiant.....	24
III.4.3: Présentation de la méthode de calcul de la raideur.....	27
III.5: CONCLUSION.....	30
CHAPITRE IV : ETUDE DYNAMIQUE ET SIMULATION.....	31
IV.1: INTRODUCTION.....	31
IV.2: ERREUR DE TRANSMISSION.....	32
IV.3: ETUDE DYNAMIQUE.....	35
IV.3.1: Equation du mouvement.....	35
IV.3.2: Calcul des énergies cinétiques et de déformation.....	36
IV.3.2.1 : Arbre moteur.....	36
IV.3.2.2 : Arbre récepteur.....	38
IV.3.2.3 : Moteur.....	39
IV.3.2.4 : Frein (Charge résistante).....	39
IV.3.2.5 : Engrenages.....	39
IV.3.2.6 : Réducteur.....	40
IV.3.3: Amortissement.....	41
IV.3.3.1 : Introduction de la matrice d'amortissement.....	41
IV.3.3.2 : Matrice d'amortissement visqueux équivalente.....	41
IV.3.4 : Utilisation des équations de LAGRANGE	43
IV.3.4.1 : Energie de déformation.....	43
IV.3.4.2 : Energie cinétique.....	44
IV.3.4.3 : Travail des forces extérieures.....	45
IV.3.4.4 : Energie dissipée.....	45
IV.4: CONCLUSION.....	46

CHAPITRE V : PRESENTATION DES RESULTATS ET VALIDATION

DU LOGICIEL GEAR4DOF	47
V.1: INTRODUCTION	47
V.2: DONNEES GEOMETRIQUES	47
V.3: ANALYSE DES RESULTATS SANS ERREURS GEOMETRIQUES	
V.3.1: Périodicité de la raideur d’engrènement	49
V.3.2: Etude analytique	52
V.3.3: Analyse des résultats numériques	57
V.3.3.1 : Effort dynamique	57
V.3.3.2 : Erreur de transmission	61
V.3.3.3 : Influence du coefficient d’amortissement sur l’effort dynamique	63
V.4: ANALYSE DES RESULTATS AVEC ERREURS GEOMETRIQUES	
V.4.1: Introduction des erreurs géométriques	64
V.4.2: Raideur d’engrènement	67
V.4.3: Etude analytique	67
V.4.4: Analyse des résultats numériques	71
V.4.4.1 : Erreur cinématique	71
V.4.4.2 : Effort dynamique	72
V.4.4.3 : Erreur de transmission	72
V.5 : CONCLUSION	73
 CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE	 77

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

ANNEXE I : GEOMETRIE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURE DROITE ET HELICOIDALE A PROFILS EN DEVELOPPANTE DE CERCLE

ANNEXE II : ETUDE VIBRATOIRE : METHODE DES PERTURBATIONS

**ANNEXE III : ALGORITHME DE LA METHODE IMPLICITE DE
NEWMARK : RESOLUTION PAS A PAS**

**ANNEXE IV : ANALYSE FREQUENTIEL
DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER**

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

β	: angle d'hélice de taillage
β_b	: angle d'hélice de base
C_{ϕ_i}	: amortissement modal (i ème mode)
$C_{i,2}$: couples statiques appliqués
$e_{1,2}$: erreur géométrique relative à l'engrenage 1 et 2
$er_{1,2}$: erreur géométrique dans le plan d'action relative à l'engrenage 1,2
$e_{1,2} = e_1 + e_2$: erreur géométrique totale
$Fd(t)$: effort dynamique instantané
F_s	: effort statique
$I_{1,2}$: moments d'inertie polaires des roues 1 et 2
I_m, I_f	: moments d'inertie massique du moteur et du frein
I	: point primitif
K_t	: raideur de voile
K_f	: raideur de flexion des dents
K_h	: raideur hertzienne ou de contact
K_l	: raideur du film lubrifiant
K_m	: raideur moyenne
$K(t)$: raideur d'engrènement
$K_{\phi_{1,2}}$: raideurs des arbres moteur et récepteur
K_{ϕ_i}	: raideur modale
M_{ϕ_i}	: masse modale
m_{r0}	: module réel
$m_{\alpha 0}$: module apparent
$m_{1,2}$: masse de l'engrenage 1,2
\vec{n}_1, \vec{n}_2	: normales extérieures aux profils en contact

- P_{pr} : Pas primitif réel
- P_{br} : Pas de base réel
- P_{ba} : Pas de base apparent
- $R_{b1,2}$: rayons de base des roues 1 et 2
- $R_{p1,2}$: rayons primitifs des roues 1 et 2
- $R_{t1,2}$: rayons de tête des roues 1 et 2
- $r(t)$: rapport de l'effort dynamique instantané sur l'effort statique
- R : rapport de l'effort dynamique maximal sur l'effort statique
- $T_{1,2}$: intersection du ligne d'action avec cylindre de base de la roue 1,2
- T'_1 : point début d'engrènement
- T'_2 : point fin d'engrènement
- TT : Temps mis dès le début jusqu'à la fin d'engrènement
- T_m : période d'engrènement
- T_e : période des erreurs géométriques
- \dots : dérivée première et seconde par rapport au temps
- Ω_1 : Vitesse de rotation de la roue menante
- Ω_2 : Vitesse de rotation de la roue menée
- α_0 : angle de pression de taillage
- α_r : angle de pression réel
- α_a : angle de pression apparent
- ϕ_i : i ème mode
- ε_i : Facteur d'amortissement relatif au i ème mode
- $\theta_{1,2}$: petites rotations (torsion) causées par la déformabilité des engrenages
- $\theta_{1,2}^t$: angles de rotation totaux
- θ_e : petite rotation (torsion) de l'arbre au niveau du moteur
- θ_s : petite rotation (torsion) de l'arbre au niveau du frein
- $\Delta(M)$: erreur de transmission
- $Z_{1,2}$: nombre de dents des roues 1 et 2
- ω_m : pulsation d'engrènement
- ω_e : pulsation des erreurs géométriques

- ε_α : rapport de conduite transversal
- ε_β : rapport de recouvrement
- ε_t : rapport de conduite total
- P_{ba} : pas de base apparent
- $\omega_{1,2}$: pulsations naturelles du réducteur
- α : amplitude de la variation de la raideur d'engrènement
- $\phi(t)$: fonction représentant les variations de la raideur d'engrènement

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Le développement sans cesse croissant des méthodes de calcul ont permis de résoudre des problèmes de plus en plus complexes; les engrenages ont fait l'objet de plusieurs études approfondies pour permettre l'obtention de rendement élevé et des durées de vie raisonnables. L'utilisation intensive des engrenages dans le domaine de l'industrie nécessite des études approfondies afin d'arriver à des corrélations théoriques capables de mieux traduire le comportement réel et de remplacer ainsi les corrélations empiriques qui sont avérées dans la plupart des cas insuffisantes.

Les engrenages fabriqués actuellement fonctionnent dans des conditions très sévères avec des tolérances de fabrication et de montage qui s'écartent sensiblement de celles prévues par la théorie ; de plus, la rencontre successive des dentures engendre une interaction mutuelle entre les dents qui vont nuire au fonctionnement des boîtes de transmission montées sur diverses machines.

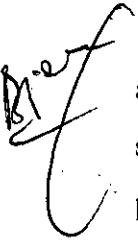
La recherche d'un fonctionnement doux et silencieux de ces engrenages conduit à réaliser des roues dentées de bonne qualité géométrique. Pour aboutir à cette exigence, les pièces devraient être taillées selon le procédé de génération de la denture théorique. Cependant, il subsiste toujours sur les dentures taillées des défauts géométriques dus à de nombreux facteurs notamment la variation des paramètres de réglage des machines de taillage.

La variation de la géométrie de la surface de denture causée par les écarts de forme entraîne par conséquent l'uniformité de la vitesse angulaire et la durée de vie de l'engrènement. Globalement, elles conduisent à un état de fonctionnement désagréable, car ces contacts constituent des liaisons de base qui contribuent au comportement global et dynamique des engrenages dans leur ensemble.

Le dimensionnement des réducteurs est lié notamment à la charge transmise par la denture. Il est cependant nécessaire de considérer le chargement réel sur les dentures et les

surcharges dynamiques dépendant entre autres de l'élasticité de la structure, des effets dynamiques et des erreurs géométriques ou de montage.

Dans un mécanisme tel qu'un réducteur, la répartition de cette charge sur les lignes de contact est notamment liée d'une part aux déformations élastiques ou aux défauts de fabrication et de montage des différents éléments constituant le mécanisme (arbre, paliers, roue, pignon...) et d'autre part à la microgéométrie des surfaces en contact.

 Le travail présenté concerne une approche globale des problèmes liés aux contacts et à leur environnement mécanique: par le développement d'un outil numérique permettant la simulation du comportement dynamique d'un réducteur à simple étage d'engrenages à axes parallèles sans ou avec défauts géométriques.

La modélisation qu'on a adoptée est de type masses-ressorts à quatre degrés de liberté de torsion, la flexion n'intervient pas car les raideurs de flexion des arbres sont supposées suffisamment grandes et les engrenages sont représentés par des disques rigides munis d'une denture souple.

Dans ce travail, nous présentons au chapitre I une étude bibliographique détaillée qui montre l'évolution de l'étude concernant les différentes modélisations du réducteur. Ainsi les expériences acquises au cours des dernières décennies.

Le chapitre II est consacré à l'étude cinématique des engrenages. Les différentes vitesses du point de contact sont déduites ainsi que l'erreur cinématique.

Au chapitre III, on expose la modélisation des erreurs géométriques et la raideur de liaison.

Au chapitre IV, nous présentons le modèle physique qu'on a adopté, ainsi que l'application des équations de **Lagrange**.

Enfin, le chapitre V sera consacré à la validation du programme numérique, réalisé grâce à la confrontation des résultats obtenus par notre programme à ceux obtenus par l'utilisation d'autres méthodes numériques.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. INTRODUCTION

La conception des organes mécaniques et ensuite, la prévision de leur comportement nécessitent des études approfondies sur l'ensemble des phénomènes qui peuvent parvenir lors de leur fonctionnement, pour permettre l'obtention de rendement élevé et de durée de vie raisonnable.

L'interaction mutuelle entre dents engendre une nuisance au fonctionnement des boîtes de transmission dans des conditions très sévères.

Avec le développement des méthodes numériques ainsi que les calculateurs qui permettent de réaliser les étapes les plus importantes et les plus compliquées, les études théoriques et expérimentales ont été développées parallèlement au cours des dernières décennies.

I.2. DIFFERENTES APPROCHES APPLIQUEES AUX METHODES DE CALCUL

Depuis le début du siècle de nombreuses études ont été menées afin d'affiner les connaissances sur les conditions de fonctionnement des engrenages à profil en développantes de cercle théorique. Dans la recherche bibliographique concernant l'analyse du comportement dynamique des engrenages, on distingue trois méthodes traditionnelles: expérimentale, analytique et numérique.

I.2.1. APPROCHES EXPERIMENTALES

Dans toute science physique, l'expérience est le couronnement de la théorie quelle doit contrôler aussi souvent qu'il est nécessaire.

Les travaux expérimentaux ont en général comme objectif l'identification des paramètres influents sur les déplacements et la résistance à la rupture des dentures, les résultats sont obtenus soit en utilisant les jauges de déformation [1] soit par photoélasticité [2] ou par la méthode holographique [3].

La flexion des dents d'engrenages a été étudiée dès 1938 par **WALKER** [4] dans le cadre de la résolution du problème de modification du profil des dents. Cette étude a été réalisée sur un appareil d'essai présenté sur la figure (I.1).

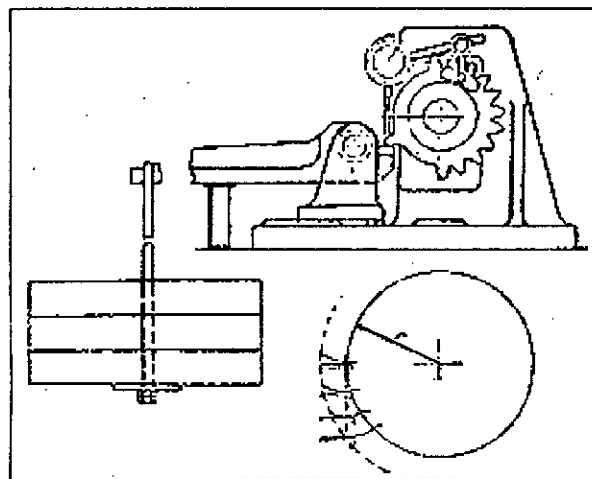


Fig.I.1: DISPOSITIF D'ESSAI

La charge appliquée à la dent à l'aide d'une dent crémaillère que l'on pouvait faire agir à différentes profondeurs, la valeur de la flexion est déterminée à l'aide d'un micromètre palpant, un galet introduit dans l'entre dent près du sommet des dents. Cet appareil permet de mesurer la flexion des dents en tout point de la ligne d'action.

WINTER [1] a étudié l'influence du rayon de raccordement sur les déformations, les contraintes et en général la résistance des dentures.

Puis le domaine expérimental a connu un développement continu avec les développements des procédés, des dispositifs de mesure et des méthodes capables de mieux traduire les phénomènes de déformation [4],[5],[6].

BELHANACHE [3] a étudié le comportement statique d'engrenages à axes parallèles à denture droite par la méthode optique de granularité « Speckle » et l'interférométrie holographique par réflexion. Il a mesuré les déplacements et a déterminé la raideur statique d'une dent, les résultats obtenus sont très proches aux résultats numériques.

Plusieurs méthodes optiques sont applicables à la mesure des déplacements des profils des dents. Elles sont apparues avec l'apparition des instruments de mesure optiques et elles sont peu utilisées dans les mesures sur des pièces réelles [7],[8]. Cependant, ces méthodes n'ont pas donné pleinement satisfaction qu'à partir de 1980 où on est arrivé à des résultats en accord avec ceux obtenus par les méthodes numériques [9],[10],[11],[12].

1.2.2. APPROCHES ANALYTIQUES

Le problème complexe de l'étude théorique des déformations des dents d'engrenages, qui nécessite d'une part l'introduction de la géométrie particulière des dents (profil en développante de cercle, raccordement, trochoïdaux,...) et d'autre part, ils résultent d'une combinaison d'effets globaux tel que la déformée au voisinage du point de contact a été largement abordé.

La plus part des travaux effectués dans la méthode analytique du problème [13], [14], [15], [16] consistent à utiliser des modèles comme des plaques, poutre, masses-ressorts, ces analyses faites en bidimensionnel en ne tenant pas compte des paramètres suivant la largeur des engrenages, ni ceux de fabrication, de montage ou de fonctionnement.

Dans le domaine dynamique, on mentionne les travaux de **LIN HUSTON** et **COY** [17] et de **CORNELL** [18], ils ont modélisé l'engrenage par des éléments composés d'une partie rigide massive qui représente la masse de l'arbre de la jante et la denture et d'une partie flexible qui traduit la flexibilité globale de l'engrenage.

CORNELL [18] a examiné l'effet de la modification de profil, des défauts de fabrication sur les contraintes.

Notons les études de **WEBER** [5] et **CORNELL** [18] qui ont traité le problème de déformation et la répartition des charges par la méthode de résistances des matériaux en bidimensionnel.

TOBE [19] a utilisé la théorie des plaques d'épaisseurs variables, mais cette méthode appliquée au calcul des engrenages reste très limitée à cause des grandes difficultés pour des structures de géométrie variables où les charges appliquées sont irrégulières.

D'autres méthodes ont été utilisées comme celle du potentiel complexe [20].

1.2.3. LES METHODES NUMERIQUES

De nombreux travaux ont été par contre effectués dans le domaine numérique surtout avec la méthode des éléments finis [9],[10],[11],[21],[22],[23],[24] et par l'application des équations intégrales (méthodes des éléments frontières) par **BREBIA** [25].

Par la suite plusieurs études sont apparues dont on peut citer celles de **WILCOX** et **COLEMAN** [10], **Ph. VELEX** [11] et **Ph. SAINSOIT** [2] qui ont utilisé la méthode mixte de résolution par couplage de deux méthodes numériques (méthode de **NEWMARK** et éléments finis d'effet global et local) avec différents types de modélisation.

1.3. CONCLUSION

Vu l'importance à l'échelle industrielle du calcul des déformations des dents d'engrenages à axes parallèles, il serait judicieux d'approfondir ce genre d'étude en tenant compte de tous les phénomènes qui peuvent parvenir que se soit en statique ou en dynamique.

En résumé, l'étude bibliographique nous a conduit à faire un bilan sur les principaux résultats.

Insuffisance des modèles analytiques révélés par les résultats expérimentaux.

- L'influence de la longueur de la modification du profil sur la charge et les déformations, est importante autant en statique qu'en dynamique.
- Les méthodes de calcul doivent donc tenir compte de la géométrie précise des dentures.
- Le souci est de ne pas aboutir à des équations différentielles, ou aux dérivées partielles impossible à résoudre par l'approche analytique, exigent une étude sur le cadre d'un problème plane

CHAPITRE II

ETUDE CINEMATIQUE

CHAPITRE II

ETUDE CINEMATIQUE

II.1. INTRODUCTION

Dans l'analyse de la cinématique des engrenages [26],[27], les corps solides définissent l'état de référence, pour lequel on peut calculer les déformations élastiques et les différentes erreurs géométriques.

Pour bien modéliser notre étude, il est nécessaire de poser quelques hypothèses au préalable.

a - L'erreur de montage (erreur d'excentricité) est négligeable donc les axes géométriques coïncident avec les axes instantanés de rotation.

b - Les paliers sont rigides (par conséquent) la flexion des arbres moteur et récepteur est négligeable.

c - Les contacts entre les profils actifs se font dans le plan d'action.

d - Les erreurs géométriques sont spatiales.

e - Les normales aux différents point de contact entre profils actifs font un angle d'hélice de base avec l'axe lié aux largeurs des dents.

Pour cette étude, on choisit les repères suivants(fig.II.1).

- On choisit un repère fixe $R_0 (P_1, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ pour lequel on calculera la vitesse du point de contact appartenant aux deux solides (1) et (2), avec l'axe $(P_1 X_0)$ passe par la ligne d'action

$\vec{P}_1 P_2$.

- On lie au solide (1) (engrenage 1) le repère $R_1 (O_1, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$.

- On lie au solide(2) (engrenage 2) le repère $R_2 (O_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$.

- Le point (M) étant le point de contact appartenant en même temps au solide (1) et (2).

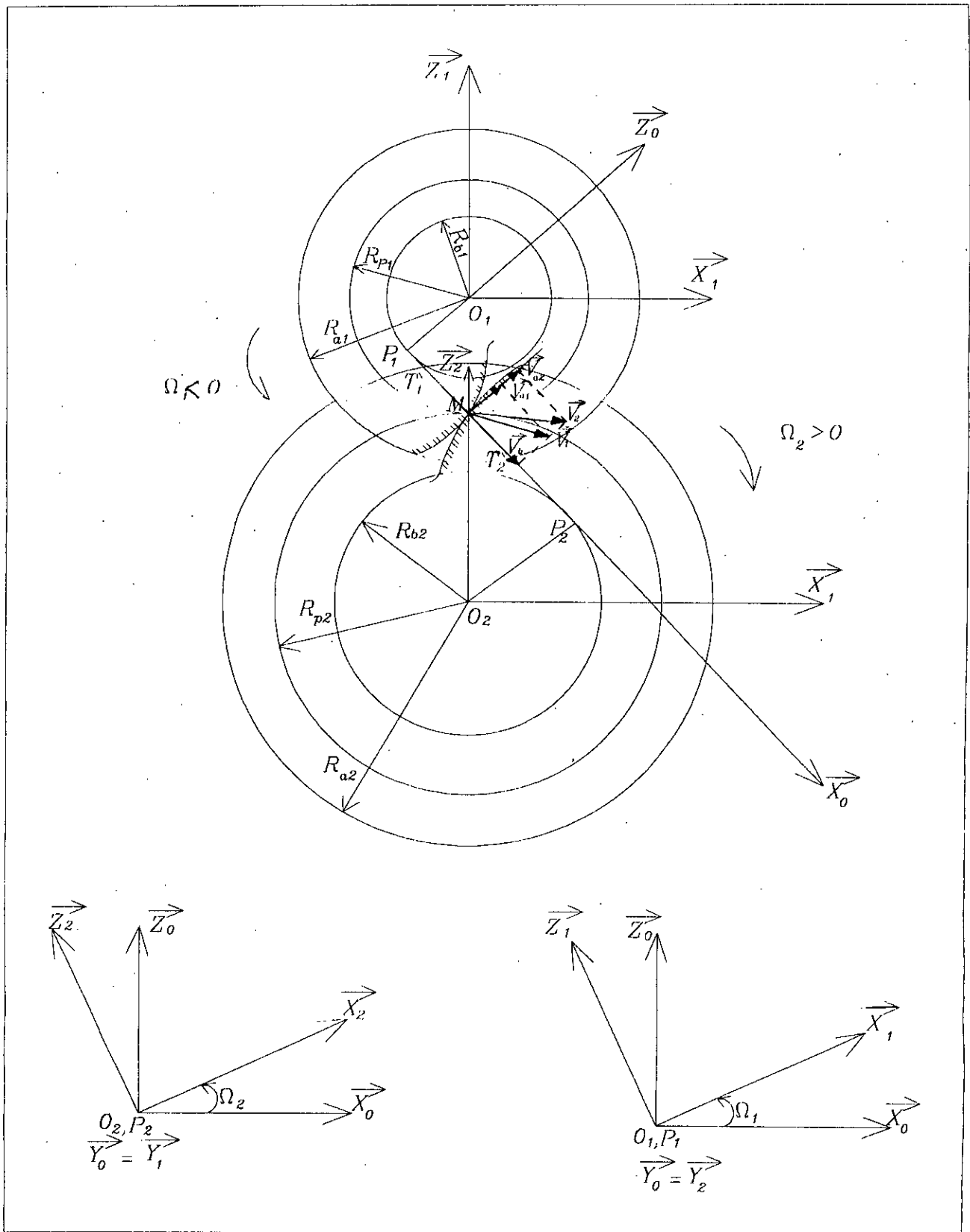


fig.II.1. SCHEMATISATION DU CONTACT ENTRE DEUX ENGRENAGES

II.2. CINEMATIQUE DES ENGRENAGES SANS ERREURS GEOMETRIQUES

II.2.1. VITESSE DU POINT DE CONTACT APPARTENANT AU SOLIDE (1)

$$\vec{V}_1^0(M) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{O}_1M$$

Le point (O_1) étant fixe d'où : $\vec{V}^0(O_1) = \vec{0}$ d'après l'hypothèse (II-1-a)

$$\vec{O}_1M = \vec{OP}_1 + \vec{P}_1M$$

$$\vec{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} ; \quad \vec{O}_1P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_{b1} \end{bmatrix}_{R_0} ; \quad \vec{P}_1M = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{bmatrix}_{R_0}$$

Le contact se fait dans le plan d'action d'où : $Z_M = 0$

$$\vec{O}_1M = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ -R_{b1} \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\text{Donc : } \vec{V}_1^0(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ -R_{b1} \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} -R_{b1}\Omega_1 \\ 0 \\ -X_M\Omega_1 \end{bmatrix}_{R_0} \quad (\text{II.1})$$

La projection de $\vec{V}_1^0(M)$ dans le plan d'action est définie par : $\vec{V}_{a1}^0(M) = -R_{b1}\Omega_1 \vec{X}_0$

La projection de $\vec{V}_1^0(M)$ sur la normale au plan d'action est définie par : $\vec{V}_{n1}^0(M) = -X_M\Omega_1 \vec{Z}_0$

$\vec{V}_{a1}^0(M)$: représente la vitesse de déplacement du point de contact M du solide (1) dans le plan d'action par rapport au repère fixe R_0

$\vec{V}_{n1}^0(M)$: représente la vitesse tangentielle aux deux profils actifs, au point (M) du solide (1) dans le repère fixe R_0 .

La normale au profil du solide (1) est donnée par : $\vec{n}_1 = \cos\beta_b \vec{X}_0 - \sin\beta_b \vec{Y}_0$

$$\vec{V}_1^0(M) \cdot \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} -R_{b1}\Omega_1 \\ 0 \\ -X_M\Omega_1 \end{bmatrix}_{R_0} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta_b \\ -\sin\beta_b \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{V}_1^0(M) \cdot \vec{n}_1 = -\cos\beta_b R_{b1}\Omega_1 \quad (\text{II.2})$$

$V_1^0(M).n_1$: représente la composante normale de la vitesse au point de contact appartenant au solide (1).

II.2.2. VITESSE DU POINT DE CONTACT APPARTENANT AU SOLIDE (2)

$$\vec{V}_2^0(M) = \vec{V}^0(O_2) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge O_2\vec{M}$$

Le point (O_2) étant fixe d'où : $\vec{V}^0(O_2) = \vec{0}$ d'après l'hypothèse (II-1-a)

$$\vec{V}_2^0(M) = \vec{\Omega}_2^0 \wedge O_2\vec{M}$$

$$O_2\vec{M} = O_2\vec{P}_2 + P_2\vec{P}_1 + P_1\vec{M}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} ; \quad O_2\vec{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_{b2} \end{bmatrix}_{R_0} ; \quad P_2\vec{P}_1 = \begin{bmatrix} -T_1T_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} ; \quad P_1\vec{M} = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\text{D'où : } V_2^0(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} X_M - T_1T_2 \\ Y_M \\ R_{b2} \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} R_{b2}\Omega_2 \\ 0 \\ -\Omega_2(X_M - T_1T_2) \end{bmatrix}_{R_0} \tag{II.3}$$

La projection de $\vec{V}_2^0(M)$ dans le plan d'action est définie par : $\vec{V}_{a2}^0(M) = +R_{b2}\Omega_2 \vec{X}_0$

La projection de $\vec{V}_2^0(M)$ sur la normale au plan d'action est définie par :

$$\vec{V}_{t2}^0(M) = -\Omega_2(X_M - T_1T_2)\vec{Z}_0$$

$\vec{V}_{a2}^0(M)$: représente la vitesse de déplacement du point de contact (M) du solide (2) dans le repère fixe R_0 .

$\vec{V}_{t2}^0(M)$: représente la vitesse tangentielle aux deux profils actifs, au point (M) du solide (2) dans le repère fixe R_0 .

La normale au profil du solide (1) est donnée par : $\vec{n}_1 = \cos\beta_b \vec{X}_0 - \sin\beta_b \vec{Y}_0$

$$V_2^0(M).n_1 = \begin{bmatrix} R_{b2}\Omega_2 \\ 0 \\ -\Omega_2(X_M - T_1T_2) \end{bmatrix}_{R_0} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta_b \\ -\sin\beta_b \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \Rightarrow V_2^0(M).n_1 = \cos\beta_b R_{b2}\Omega_2 \tag{II.4}$$

$V_2^0(M).n_1$: représente la composante normale de la vitesse au point de contact appartenant au solide (2).

II.3. CINEMATIQUE DES ENGRENAGES AVEC ERREURS GEOMETRIQUES

II.3.1. VITESSE AU POINT DE CONTACT APPARTENANT AU SOLIDE (1)

$$\vec{V}_1^0(M) = \vec{V}_1^0(O_1) + \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{O}_1M + \frac{d}{dt} \left[\vec{e}_1(M) \right]$$

$$\vec{V}_1^0(O_1) = \vec{0} \quad \text{d'après les hypothèses (II-1-a) et (II-1-b)}$$

$$\vec{V}_1^0(M) = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{O}_1M + \frac{d}{dt} \left[\vec{e}_1(M) \right]$$

$$\vec{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \quad ; \quad \vec{O}_1P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_{b1} \end{bmatrix}_{R_0} \quad ; \quad \vec{P}_1M = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{O}_1M = \vec{O}_1P_1 + \vec{P}_1M$$

$$\vec{O}_1M = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ -R_{b1} \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}_1^0(M) = \begin{bmatrix} -R_{b1}\Omega_1 + \frac{d}{dt} [e_{1X}(M)] \\ \frac{d}{dt} [e_{1Y}(M)] \\ -X_M\Omega_1 \end{bmatrix}_{R_0} \quad \text{(II.5)}$$

$e_{1X,Y}$: représentent les erreurs géométriques au point de contact (M), relatives au pignon dans le repère fixe R_0 .

$$V_1^0(M).n_1 = \begin{bmatrix} -R_{b1}\Omega_1 \\ 0 \\ -X_M\Omega_1 \end{bmatrix}_{R_0} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta_b \\ -\sin \beta_b \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} + \frac{d}{dt} \left[\vec{e}_1(M) \right] \cdot \vec{n}_1$$

$$\vec{e}_1(M).n_1 = e_1(M)$$

$e_1(M)$: représente l'écart géométrique relatif au pignon suivant la normale au point (M) du profil de solide (1).

$$\vec{V}_1(M).n_1 = -\cos\beta_b R_{b1} \Omega_1 + \dot{e}_1(M)$$

$\vec{V}_1(M).n_1$: représente la composante normale de la vitesse au point de contact du solide (1).

II.3.2. VITESSE DU POINT DE CONTACT APPARTENANT AU SOLIDE (2)

$$\vec{V}_2(M) = \vec{V}_2(O_2) + \vec{\Omega}_2 \wedge O_2M + \frac{d}{dt} \left[\vec{e}_2(M) \right]$$

$$\vec{V}_2(O_2) = \vec{0} \quad \text{d'après les hypothèses (II-1-a) et (II-1-b)}$$

$$\vec{V}_2(M) = \vec{\Omega}_2 \wedge O_2M + \frac{d}{dt} \left[\vec{e}_2(M) \right]$$

$$\vec{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} ; \quad O_2P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{b2} \end{bmatrix}_{R_0} ; \quad P_2P_1 = \begin{bmatrix} -T_1T_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} ; \quad P_1M = \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$O_2M = O_2P_2 + P_2P_1 + P_1M = \begin{bmatrix} X_M - T_1T_2 \\ Y_M \\ R_{b2} \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}_2(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} \wedge \begin{bmatrix} X_M - T_1T_2 \\ Y_M \\ R_{b2} \end{bmatrix}_{R_0} + \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} [e_{2X}(M)] \\ \frac{d}{dt} [e_{2Y}(M)] \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{V}_2(M) = \begin{bmatrix} R_{b2}\Omega_2 + \frac{d}{dt} [e_{2X}(M)] \\ \frac{d}{dt} [e_{2Y}(M)] \\ -\Omega_2(X_M - T_1T_2) \end{bmatrix}_{R_0} \tag{II.6}$$

$e_{2X,Y}$: représentent les composantes de l'écart géométrique normal au point de contact (M), relatif à la roue dans le repère fixe R_0 .

$$\vec{V}_2(M).n_1 = \begin{bmatrix} R_{b2}\Omega_2 \\ 0 \\ -\Omega_2(X_M - T_1T_2) \end{bmatrix}_{R_0} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta_b \\ -\sin\beta_b \\ 0 \end{bmatrix}_{R_0} + \frac{d}{dt} \left[\vec{e}_2(M) \right].n_1$$

$$\vec{e}_2(M).n_2 = e_2(M) = -e_2(M).n_1$$

$e_2(M)$: représente l'écart géométrique relatif à la roue suivant la normale au point (M) du profil de solide (2).

$$\vec{V}_2^0(M).n_1 = \cos\beta_b R_{b2} \Omega_2 - \dot{e}_2(M)$$

$\vec{V}_2^0(M).n_1$: représente la composante normale de la vitesse au point de contact du solide (2).

II.4. CONSEQUENCES

II.4.1. CONSEQUENCES DANS LE CAS SANS ERREURS GEOMETRIQUES

II.4.1.1. CONSEQUENCES SUR LA VITESSE DE DEPLACEMENT

D'après l'équation de compatibilité des corps rigides on a :

$$\vec{V}_2^1(M).n_1 = 0 \quad (II.7)$$

alors : $\vec{V}_2^0(M).n_1 - \vec{V}_1^0(M).n_1 = 0$

$$\cos\beta_b R_{b1} \Omega_1 + \cos\beta_b R_{b2} \Omega_2 = 0$$

D'où :

$$R_{b1} \Omega_1 + R_{b2} \Omega_2 = 0 \quad (II.8)$$

Par la suite :

$$\vec{V}_{a1}^0(M) = \vec{V}_{a2}^0(M) \quad (II.9)$$

II.4.1.2 CONSEQUENCES SUR LA VITESSE DE GLISSEMENT

II.4.1.2.1. VITESSE DE GLISSEMENT DU PROFIL DE SOLIDE (1) / AU PROFIL DE SOLIDE (2)

$$\vec{g}_1^2(M) = \vec{V}_{i2}^0(M) - \vec{V}_{i1}^0(M)$$

$$\vec{g}_1^2(M) = [(\Omega_1 - \Omega_2)X_M + T_1 T_2 \Omega_2] \vec{Z}_0 \quad (\text{II.10})$$

II.4.1.2.2. VITESSE DE GLISSEMENT DU PROFIL DE SOLIDE (2) / AU PROFIL DE SOLIDE (1)

$$\vec{g}_2^1(M) = \vec{V}_{i1}^0(M) - \vec{V}_{i2}^0(M)$$

$$\vec{g}_2^1(M) = -[(\Omega_1 - \Omega_2)X_M + T_1 T_2 \Omega_2] \vec{Z}_0 \quad (\text{II.11})$$

II.4.1.2.3. VITESSE DE GLISSEMENT DE POINT PRIMITIF DES DEUX PROFILS

Le point primitif (I) représente l'intersection des deux cercles primitifs de coordonnées

$$P_1 I = \begin{bmatrix} P_1 I \\ YI \\ 0 \end{bmatrix}_{R0} \quad \text{avec } P_1 I = \text{tg} \alpha_0 R_{b1} \quad \text{et } \text{tg} \alpha_0 = \frac{T_1 T_2}{R_{b1} + R_{b2}}$$

$$\vec{g}_1^2(I) = [(\Omega_1 - \Omega_2)P_1 I + T_1 T_2 \Omega_2] \vec{Z}_0$$

$$\begin{aligned} (\Omega_1 - \Omega_2)P_1 I + T_1 T_2 \Omega_2 &= (\Omega_2 \frac{R_{b2}}{R_{b1}} + \Omega_2) \left(\frac{T_1 T_2}{R_{b1} + R_{b2}} \right) R_{b1} + T_1 T_2 \Omega_2 \\ &= \Omega_2 (R_{b2} + R_{b1}) \left(\frac{T_1 T_2}{R_{b1} + R_{b2}} \right) - T_1 T_2 \Omega_2 = 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{g}_1^2(I) = \vec{g}_2^1(I) = \vec{0}$$

(III.12)

Au point de contact primitif, la vitesse de glissement de solide (1)/(2) ou de solide (2)/(1) est nulle.

II.4.2. CONSEQUENCES DANS LE CAS AVEC ERREURS GEOMETRIQUES

D'après l'équation de compatibilité des corps rigides, on peut écrire :

$$\vec{V}_2^1(M) \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ alors } \vec{V}_2^0(M) \cdot \vec{n}_1 - \vec{V}_1^0(M) \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\Rightarrow -R_{b1}\Omega_1 \cos \beta_b + \dot{e}_1(M) - R_{b2}\Omega_2 \cos \beta_b + \dot{e}_2(M) = 0$$

Par suite :

$$\Omega_2(t) = -\frac{R_{b1}}{R_{b2}}\Omega_1 + \frac{\dot{e}_1(M) + \dot{e}_2(M)}{R_{b2} \cos \beta_b}$$

On pose :

$$e_{12}(M) = (e_1 + e_2)(M)$$

$$\boxed{\Omega_2(t) = -\frac{R_{b1}}{R_{b2}}\Omega_1 + \frac{\dot{e}_{12}(M)}{R_{b2} \cos \beta_b}} \quad (\text{III.13})$$

$\Omega_2(t)$: la vitesse de rotation de la roue menée. La variation de Ω_2 provient de la variation de l'erreur géométrique au cours du temps.

II.5. CONCLUSION

En analysant l'expression de la vitesse de rotation de l'arbre de sortie, on constate que dans le cas où on n'a pas d'écart géométrique, le deuxième terme de l'équation disparaît et on retrouve l'expression pour l'engrenage indéformable et géométriquement parfait.

Dans le cas avec erreurs géométriques on distingue deux types d'écarts :

- Les écarts de forme sont indépendants de la position sur la développante de cercle théorique, donc du temps, par exemple les bombés ou défauts d'angle d'hélice.

Ce type d'écart de forme n'a pas d'influence sur la vitesse de rotation à la sortie, donc le rapport de transmission est conservé.

Les écarts de forme sont fonctions du temps (par exemple erreurs sinusoïdales de profils) donc Ω_2 dépend du temps. Par conséquent elle engendre une excitation supplémentaire qui perturbe le système réducteur.

CHAPITRE III

MODELISATION DES ERREURS GEOMETRIQUES ET LA RAIDEUR DE LIAISON

CHAPITRE III

MODELISATION DES ERREURS GEOMETRIQUES ET LA RAIDEUR DE LIAISON

III.1. INTRODUCTION

Les engrenages fabriqués actuellement fonctionnent dans des conditions très sévères, avec des tolérances de fabrication qui s'écartent sensiblement de celle prévue par la théorie. Il est donc indispensable de modéliser les écarts géométriques, afin de parvenir à une construction qui peut être capable de leur résister et assurer le bon fonctionnement de la sécurité aux différents usages.

Dans cette étude, on s'intéresse uniquement aux erreurs géométriques dans le plan d'action.

III.2. ERREURS GEOMETRIQUES

Les erreurs géométriques sont des écarts de forme, dans le plan d'action et dans le sens de la largeur des dents par rapport aux développantes de cercle théorique. Ce sont des erreurs variables selon le procédé de fabrication et des traitements de surface. Les analyses de mesure ont montrés que les écarts de forme sont couramment de l'ordre de 5 à 20 microns[11],[26].

Certains écarts peuvent être conseillés puisqu'ils permettent l'amélioration du comportement vibratoire du réducteur. Parmi ces écarts, on peut citer par exemple les corrections de profils et les bombés, certains d'autres sont nuisibles et provoquent des vibrations intenses, de bruit, et une durée de vie réduite du réducteur.

Le travail présenté dans cette étude permet de mettre en évidence certains aspects concernant les conditions de contacts, l'analyse de chargement réel sur les dentures et les effets de raideur.

Pour mieux définir notre étude, on est amené à discrétiser les surfaces d'attaque.

III.3. DISCRITISATION DES SURFACES D'ATTAQUE

On considère que les écarts géométriques sont tridimensionnels. Dans le repère $R_0 (P_1, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ l'écart géométrique en un point matériel $M (X_0, Y_0, Z_0)$ appartenant à la surface d'attaque d'une dent est donné par :

$$\vec{e} = e_x \vec{X}_0 + e_y \vec{Y}_0$$

avec e_x, e_y : sont les écarts géométriques suivant les directions \vec{X}_0, \vec{Y}_0 respectivement au point $M (X_0, Y_0, Z_0)$ de la surface d'attaque.

Le procédé de discrétisation consiste à partager la surface d'attaque d'une dent en petites surfaces élémentaires d'aires $\Delta s = \Delta v \cdot \Delta Z$ chaque surface élémentaire S_{ijk} est centrée en M_{ijk} (fig.III.1).

Avec :

i : indice indiquant le numéro de la dent (numéro de ligne de contact).

j : indice indiquant le numéro du segment suivant la largeur de la dent.

k : indice indiquant le numéro du segment suivant la développante de cercle.

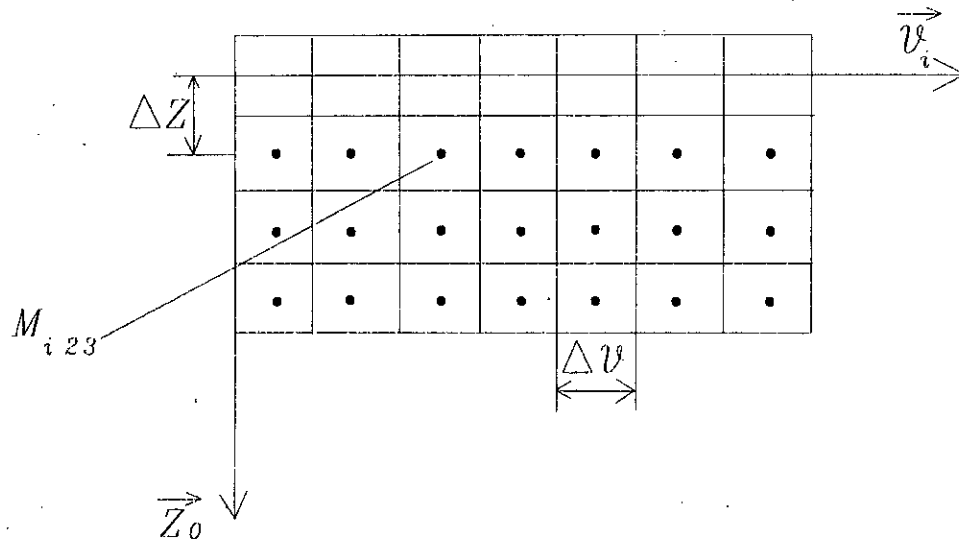


Fig. III.1: surface d'attaque de la i ème dent

Chaque surface élémentaire de la surface d'attaque est représentée par trois indices permettant sa localisation.

Donc, chaque point matériel $M(X_0, Y_0, Z_0)$ dans R_0 est défini par les trois paramètres i, j et k .

On note $M(X_0, Y_0, Z_0)$ par M_{ijk} .

Les lieux géométriques de contact (dans le plan d'action) sont définis par les deux paramètres i, j (points géométriques $M(i, j)$).

L'indépendance proposée entre les écarts géométriques suivant la largeur de la denture et les écarts géométriques par rapport à la développante de cercle permettent une séparation de variables dans l'expression de l'écart géométrique. Cette séparation conduit à écrire l'écart géométrique normal comme le produit de deux termes indépendants (Fig.III.2) et (Fig.III.3).

$$e(X_0, Y_0, Z_0) = e_r(X_0, Y_0) \cdot Z_0(t) \quad (\text{III.1})$$

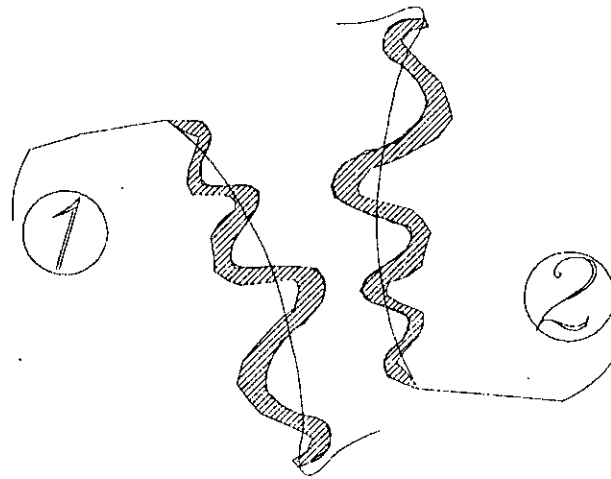


Fig.III.2: ECARTS DE PROFILS $Z_0(t)$

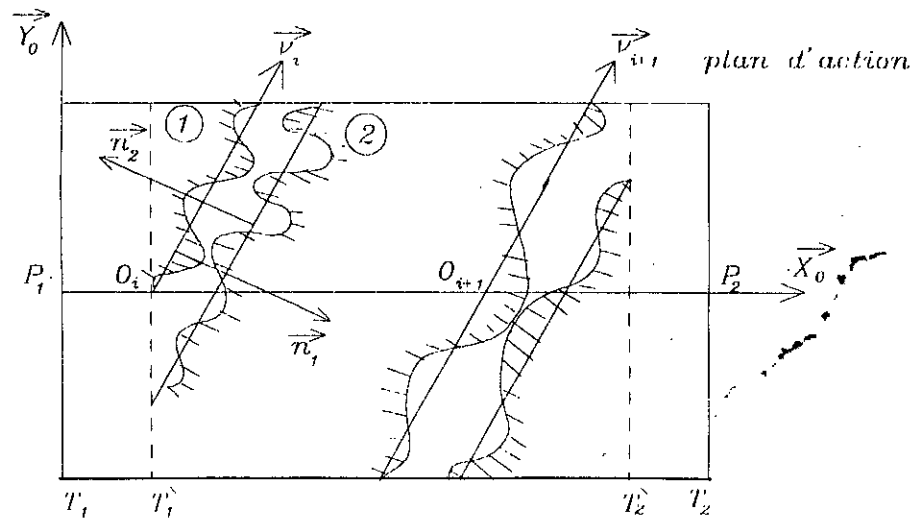


Fig.III.3: ECARTS DANS LE PLAN D'ACTION $er(X_0, Y_0)$

Le premier terme de l'équation (III.1) représente la variation normale des erreurs dans le plan d'action (dans le sens de la largeur des dents).

Le deuxième terme représente la variation normale des erreurs par rapport au profil en développantes de cercle.

L'erreur par rapport à la normale du profil en un point M_{ijk} dans le repère R_0 s'écrit :

$$\vec{e} = e_x \vec{X}_0 + e_y \vec{Y}_0 \tag{III.2}$$

$$\vec{e} = e \cdot \vec{n} \quad (III.3)$$

ou e : représente l'écart géométrique normal au point M_{ijk} .

\vec{n} : représente la normale extérieure au profil au point M_{ijk} .

Le signe de l'erreur en un point M appartenant à une ligne de contact est déterminé par les normales extérieures aux deux profils au point considéré.

Pour le pignon

\vec{n}_1 : La normale extérieure au profil (P_1) au point considéré.

L'écart géométrique normal au point (M) du pignon est donné par :

$$e_1(X_0, Y_0, t) = er_1(X_0, Y_0) \cdot Z_{01}(t) \quad (III.4)$$

Pour raison de simplification on note :

$$e_1(i, j, t) = er_1(i, j) \cdot Z_{01}(t) \quad (III.5)$$

Pour la roue

\vec{n}_2 : La normale extérieure au profil (P_2) au point considéré.

L'écart géométrique normal au point (M) de la roue est donné par :

$$e_2(X_0, Y_0, t) = er_2(X_0, Y_0) \cdot Z_{02}(t) \quad (III.6)$$

de même :

$$e_2(i, j, t) = er_2(i, j) \cdot Z_{02}(t) \quad (III.7)$$

L'erreur totale en un point (M) appartenant aux deux engrenages à l'instant t est donnée par :

$$e_{12}(i, j) = e_1(i, j) + e_2(i, j) \quad (III.8)$$

La différence d'erreur entre deux points $M(i, j)$ et M_c à un instant donné (t) :

$$\delta e_{12}(i, j) = e_{12}(i, j) - e_{12}(i_{M_c}, j_{M_c}) \quad (III.9)$$

Si M_c représente le point vérifiant, à l'instant t, la condition suivante :

$$e_{12}(i_{M_c}, j_{M_c}) = \text{Max}_{i,j} e_{12}(i, j)$$

On a alors : $\delta e_{12}(i, j) < 0$ (III.10)

C'est cette différence d'erreur qui va apparaître dans la suite de nos calculs. Théoriquement, le maximum de $e_{12}(i, j)$ peut être atteint en plusieurs points, il suffit de prendre l'un de ces points.

III.4. RAIDEUR D'ENGRENEMENT

L'étude statique a pour but principal la détermination des raideurs permettant la représentation la plus fidèle du comportement dynamique des dents d'engrenages en prises. Le calcul de ces termes de raideur passe évidemment par une analyse des déformations de dentures sous différentes charges.

Dans notre étude, la raideur d'engrènement est linéaire, elle constitue une donnée du problème.

III.4.1. RAIDEUR DE LIAISON

On suppose que les contacts entre flancs actifs ne s'effectuent que sur le plan d'action tangent aux cylindres de base. Ce plan demeure fixe au cours du mouvement. En effet la transmission des charges par l'engrènement d'un ou plusieurs couples de dents se fait dans ce plan. L'engrènement d'un ou plusieurs couples de dents entraîne une variation de la raideur au cours du temps.

Cependant, il est possible de déterminer les raideurs instantanées dans le plan d'action à partir des valeurs des déplacements normaux sous différentes charges.

Pour chaque engrènement, on peut distinguer quatre raideurs distinctes [12] (Fig. III.4).

- k_t : raideur de voile (raideur de la jante)
- k_f : raideur de flexion des dents
- k_h : raideur hertzienne ou de contact liant deux dents en prise
- k_l : raideur du film lubrifiant

La raideur équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_{t1}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_{t2}} + \frac{1}{k_{f2}} + \frac{1}{k_{t2}} \quad (\text{III.11})$$

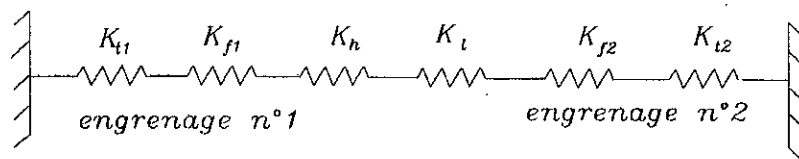


Fig.III.4 : ANALOGIE DE LA RAIDEUR DE LIAISON

III.4.2. INFLUENCE DU FILM LUBRIFIANT

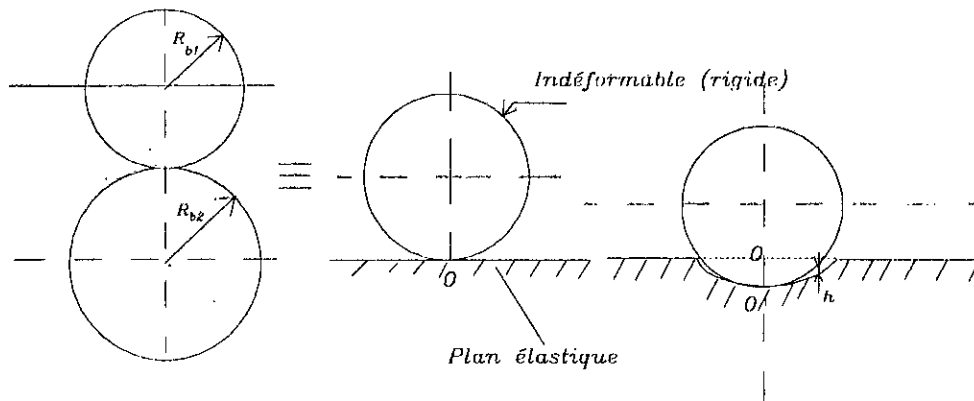
Le contact de deux corps solides élastiques en mouvement, soumis à une charge, séparé par un fluide est un problème très large sur le plan scientifique et très utile d'un point de vue industriel. Les surfaces des deux solides sont caractérisées par leur géométrie et leur cinématique dans le voisinage du contact [11],[28].

Dans ce contexte, le contact entre profils adjacents entraîne des efforts tangentiels sur les profils et des pertes de puissances conduisant à un dégagement des calories. Pour réduire le coefficient de frottement entre profils actifs et par suite diminuer les efforts tangentiels et faciliter l'évacuation de la chaleur dégagée, les contacts sont lubrifiés.

En général, le fluide utilisé est un fluide visqueux, newtonien, isotherme en régime permanent, il satisfait donc aux hypothèses de linéarité, d'homogénéité et d'isotropie.

Vu que les surfaces de contacts subissent des déformations élastiques sous l'effet de fortes pressions, on est amené à la résolution exacte de l'analyse elasto-hydrodynamique de DOWSON et HIGGINSON [28],[29],[30] pour un contact hertzien lubrifié.

De point de vue analyse mathématique, le contact entre les deux cylindres de base de rayon R_{b1} , R_{b2} peut être décrite par une équivalence galet-plan (Fig.III.5).



(a) (b) : géométrie non déformée $W=0$ (c) : géométrie déformée $W \neq 0$

Fig III.5 : SIMULATION DU CONTACT DE DEUX CYLINDRES

avec :
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{b1}} + \frac{1}{R_{b2}}$$

L'épaisseur minimale du film d'huile au centre du contact hertzien lorsque les effets de bord sont négligeables est donnée par :

$$H_m^* = 0,985 U^{*0,7} \cdot G^{*0,6} W^{*-0,13} \tag{III.12}$$

ou bien

$$H_m^* = 1,63 U^{*0,7} \cdot G^{*0,54} W^{*-0,13} \tag{III.13}$$

Les paramètres sans dimension utilisés sont :

U^* : Paramètre de vitesse = $\mu_0 \frac{(U_1 + U_2)}{ER_x L}$

G^* : Paramètre de matériaux = $\alpha \cdot E$

W^* : Paramètre de charge normale = $\frac{W}{ER_x L}$

H_m^* : Paramètre d'épaisseur du film = $\frac{h}{R_x}$

R_x : rayon de courbure au point de contact

$U_{1,2}$: vitesses tangentielles des deux surface S_1 et S_2

E : Module d'élasticité équivalent définis à partir des modules d'Young et coefficients de

$$\text{Poisson des deux matériaux : } E = \left[\left(\frac{1-\lambda_1^2}{E_1} + \frac{1-\lambda_2^2}{E_2} \right) / \pi \right]^{-1}$$

α : Coefficient de piézoviscosité $\mu = \mu_0 \exp(\alpha P)$

μ_0 : Viscosité à pression relative nulle de l'huile.

$\lambda_{1,2}$: coefficients de poisson relatifs aux matériaux 1 et 2

$E_{1,2}$: modules d'Young relatifs aux matériaux 1 et 2

W : La force normale constante appliquée au contact.

L : Largeur de contact.

H : Epaisseur du film lubrifiant

Dans les conditions où les vitesses tangentielles sont constantes et les matériaux sont les mêmes, l'épaisseur minimale du film lubrifiant est obtenue à partir d'une analyse adimensionnelle donnée par la première formule.

$$H_m^* = C_1 \cdot W^{*-0,13} \quad \text{d'où :} \quad W^* = C_2 \cdot H_m^{*-7,692} \quad (\text{III.14})$$

$C_{1,2}$: sont des constantes.

La raideur du film d'huile est donnée par :

$$K_L = \left| \frac{\partial W}{\partial H_m^*} \right| = 7,692 C_2 H_m^{*-8,692} \quad (\text{III.15})$$

L'épaisseur du film d'huile (h) peut-être calculée à partir de la théorie analytique ou numérique, elle est de l'ordre de 0.01 μm à $1 \mu m$, de même pour H_m^* .

Pour les deux valeurs limites de H_m^* , on constate que la raideur K_L est de l'ordre de 10^{32} à 10^{60} N/m d'où $K_L \gg K_1, K_2$ qui sont de l'ordre de 10^8 N/m (raideurs associées aux deux engrenages).

$$\text{D'où : } \frac{1}{K_L} \ll \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

La raideur du film est très grande donc le film est très peu déformable (fig III.6).

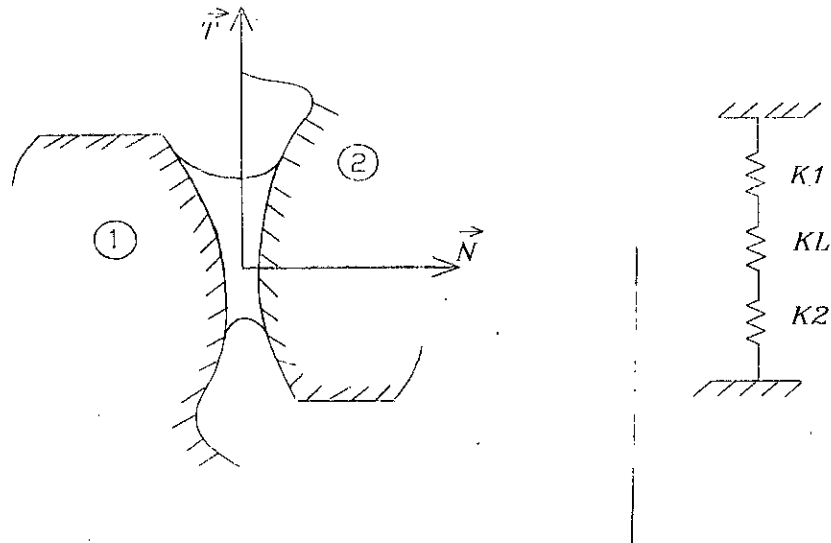


Fig.III.6: INFLUENCE DU FILM LUBRIFIANT

La raideur équivalente du système formée par les deux dents et le film d'huile est donnée par :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_2} \quad (III.16)$$

La lubrification modifie très peu la raideur de liaison, donc on peut négliger son effet sur le calcul de la raideur équivalente d'où :

$$\frac{1}{k_{eq}} \cong \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (III.17)$$

III.4.3. PRESENTATION DE LA METHODE DE CALCUL DE LA RAIDEUR

La méthode qu'on a adopté pour le calcul instantané de la raideur est d'effectuer une discrétisation des lignes de contact dans le plan d'action. Cette méthode consiste à subdiviser chaque ligne de contact en plusieurs segments possédant chacun une raideur élémentaire [11] voir (Fig.III.7).

Connaissant la valeur de la raideur moyenne d'un couple de dents en prise et le nombre de segments de la discrétisation par ligne de contact, une simple division de la raideur moyenne par le nombre des segments par ligne de contact complète donne la valeur de la raideur élémentaire.

Une augmentation du nombre de segments par ligne de contact entraîne une meilleure précision (plus continues) de la valeur instantanée de la raideur d'engrènement.

Vu que la valeur de la raideur varie d'un segment à un autre (les raideurs des segments extrêmes sont moins importantes que celles des segments milieux). Donc il est possible d'introduire une fonction permettant de moduler la répartition de la raideur le long des lignes de contact.

Pour assurer la continuité de l'engrènement, on a introduit des lignes de contact fictives, pour mieux décrire le défilement des lignes de contact dans le plan d'action.

La fenêtre d'engrènement est la surface rectangulaire appartenant au plan d'action de largeur égale à la largeur minimale des deux engrenages et de longueur $T_1'T_2'$. La fenêtre d'engrènement est donc le lieu géométrique où les différents couples de dents adjacentes entrent en engrènement [31],[32].

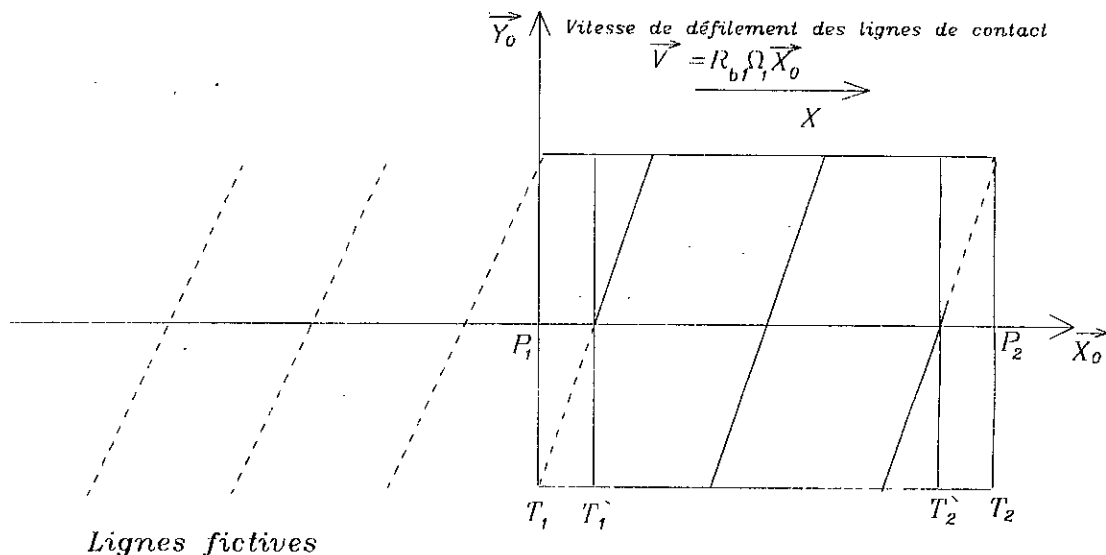


Fig.III.7:DEFILEMENT DES LIGNES DE CONTACT DANS LE PLAN D'ACTION

Pour bien permettre de décrire le défilement des lignes de contact sur le plan d'action dans notre outil numérique, nous avons introduit dans l'expression de la raideur élémentaire, un paramètre L_{ij} qui vaut 1 si le segment de la discrétisation appartient à la fenêtre d'engrènement et nulle dans le cas contraire.

Vu l'existence des erreurs géométriques (écarts de forme) par rapport au développement de cercle, le contact ne se fait pas en tous points des lignes de contact appartenant à la fenêtre d'engrènement. Pour cet effet on a introduit un nouveau paramètre P_{ij} qui vaut 1 si le segment de la discrétisation considéré est en contact, et nul dans le cas contraire :

L'expression finale des raideurs élémentaires est donnée par :

$$K(i, j) = \frac{K_m}{N} F_i(n_j) L_{ij} P_{ij} \quad (\text{III.18})$$

K_m : raideur moyenne d'un couple de dents en prise

N : nombre de segments par ligne de contact

$F_i(n_j)$: fonction associée à la i ème ligne permettant de moduler la répartition de la raideur sur la ligne de contact.

L_{ij} : Paramètre permettant de décrire le défilement des lignes de contact sur le plan d'action, donc de simuler l'engrènement par :

$$L_{ij} = 1 \quad \text{si} \quad T_1 T_1' < X_0(M_{ij}) < T_1 T_2'$$

$$L_{ij} = 0 \quad \text{dans le cas contraire}$$

P_{ij} : paramètre permettant de décrire si on a contact au segment centré au point M_{ij} , donc de simuler le contact par :

$$P_{ij} = 1 \quad \text{Si on a contact au segment considéré.}$$

$$P_{ij} = 0 \quad \text{dans le cas contraire}$$

Avec :

i : indice indiquant le numéro de la ligne de contact.

j : indice indiquant le numéro du segment de la ligne de contact.

La raideur d'engrènement (raideur globale) à l'instant (t) est la somme de toutes les raideurs élémentaires.

$$K(t) = \sum_{i,j}^N k(i, j)$$

(III.19)

III.5. CONCLUSION

Le nombre de segments existants dans la fenêtre d'engrènement varie en fonction du temps, donc la raideur globale dépend du temps, et l'augmentation des nombres de discrétisation par ligne de contact entraîne une continuité meilleure pour la raideur globale.

La condition de contact en un point **M(i,j)** causée par l'existence des erreurs géométriques dans le plan d'action peut faire intervenir les variables d'état du système, donc la raideur d'engrènement peut dépendre des variables d'état du système, dans ce cas le système devenu non linéaire et la résolution subsiste toujours difficile.

CHAPITRE II

ETUDE DYNAMIQUE ET SIMULATION

CHAPITRE IV

ETUDE DYNAMIQUE ET SIMULATION

IV.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous proposons la construction d'un modèle représentatif des différentes approches de l'analyse dynamique existantes dans la littérature[11],[12],[31],[27].

Pour une formulation exacte de notre modèle, une série d'hypothèses est retenue :

- 1- Les perturbations dans les conditions du corps rigide sont caractérisées par de petites rotations (vibrations de torsion).
- 2- Les équations développées découlent de la modélisation masses-ressorts du système mécanique.
- 3- Il n'y a pas d'erreur de montage dans les engrenages qui fonctionnent en régime lubrifié.

La formulation du problème dynamique par les équations de Lagrange sera systématiquement utilisée.

Le modèle utilisé possède quatre degrés de liberté de torsion,[33],[34],[38],[39] deux rotations instantanées des cylindres de base des deux engrenages θ_1 et θ_2 par rapport à l'état de référence et deux perturbations en torsion toujours par rapport à l'état de référence au niveau du moteur et au niveau du frein θ_e et θ_s .

IV.2. ERREUR DE TRANSMISSION

Un engrenage sans erreurs de géométrie et de montage, parfaitement rigide sur des supports indéformables transmet des mouvements de rotation uniformes[12].

En réalité, sous l'action des couples appliqués, les éléments constituant l'ensemble d'un réducteur se déforment. Ces déplacements vont perturber la cinématique de l'engrènement et introduisant des erreurs de transmission[11],[12].

L'erreur de transmission est donc un écart de rotation entre l'entrée et la sortie du réducteur par rapport à la cinématique des corps rigides.

Il s'agit donc de la valeur de l'écrasement de matière dans la direction normale au contact.

Elle est mesurée généralement comme étant l'écart linéaire, dans le plan d'action, normale aux lignes de contact. Avec les conventions de signes utilisées, l'erreur de transmission sera comptée positive lorsque le contact entre le couple de dent est maintenu (écrasement de matière) et négative si en perte de contact (séparation des deux dents adjacentes).

On définit alors, l'erreur de transmission en un point (M) appartenant aux deux solides par :

$$\Delta(M) = d^0 O_1 \vec{M} \cdot \vec{n}_1 + d^0 O_2 \vec{M} \cdot \vec{n}_2 \quad (\text{IV.1})$$

Tel que :

$d^0 O_1 \vec{M} \cdot \vec{n}_1$: représente la variation normale selon la normale \vec{n}_1 du point de contact (M) (point de référence dans la condition des corps rigides sans erreurs géométriques) appartenant au solide (S1) par rapport à l'état de référence dans le repère fixe R_0 .

$d^0 O_2 \vec{M} \cdot \vec{n}_2$: représente la variation normale selon la normale \vec{n}_2 du point de contact (M) (point de référence dans la condition des corps rigides sans erreurs géométriques) appartenant au solide (S2) par rapport à l'état de référence dans le repère fixe R_0 .

L'erreur de transmission pour chaque profil en fonction de l'angle de torsion et l'écart de forme est donnée par :

$$d^0 O_i \vec{M} \cdot \vec{n}_i = \frac{\partial^0 O_i \vec{M} \cdot \vec{n}_i}{\partial \theta_i^t} d\theta_i^t + \frac{\partial^0 O_i \vec{M} \cdot \vec{n}_i}{\partial e_i} de_i \quad \text{avec } i = 1,2 \quad (\text{IV.2})$$

et $de_i = e_i - e_{i,ref} = e_i$ car $e_{i,ref} = 0$ avec $i = 1,2$

Les perturbations totales de position angulaire (angle de torsion total) pour une section sont supposées linéaires.

$$\theta_1^t = \Omega_1 t + \theta_1 \quad (\text{IV.3})$$

$$\theta_2^t = \Omega_2 t + \theta_2 \quad (\text{IV.4})$$

Avec Ω_1, Ω_2 les vitesses de rotation uniformes des engrenages rigides par la cinématique classique de l'engrènement dans le cas sans erreurs géométriques.

La variation des angles de torsion suivant la génératrice des cylindres de base est donnée par :

$$d\theta_1^t = \theta_1^t(t + dt) - \theta_1^t(t) \quad (\text{IV.5})$$

$$d\theta_1^t = \Omega_1(t + dt) + \theta_1 - \Omega_1 t - \theta_{ref} \quad (\text{IV.6})$$

Par rapport à l'état de référence, considérons le cas où les engrenages sont suffisamment rigides, sans erreurs géométriques et $\theta_{ref} = 0$.

On aura :

$$d\theta_1^t = \Omega_1 dt + \theta_1 \quad (\text{IV.7})$$

$$d\theta_2^t = \Omega_2 dt + \theta_2 \quad (\text{IV.8})$$

Une variation de l'angle total de torsion $\partial \theta_1^t$ entraîne un déplacement du point (M) appartenant au solide (S₁) donnée par l'équation suivante :

$$\partial^0 O_1 \vec{M} = -R_{b1} \cos \beta_b \partial \theta_1^t \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{IV.9})$$

$$\frac{\partial^0 O_1 \vec{M} \cdot \vec{n}_1}{\partial \theta_1^t} = -R_{b1} \cos \beta_b \quad (\text{IV.10})$$

Une variation de l'erreur de forme ∂e_1 entraîne un déplacement du point (M) appartenant au solide (S₁) donnée par l'équation suivante :

$$\partial^0 O_1 \vec{M} = \partial e_1 \cdot \vec{n} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^0 O_1 \vec{M} \cdot \vec{n}_1}{\partial e_1} = 1 \quad (\text{IV.11})$$

En reportant les équations (IV.3), (IV.10) et (IV.11) dans (IV.2), il vient :

Pour la première roue :

$$d^0 O_1 \vec{M} \cdot \vec{n}_1 = -R_{b1}(\theta_1 + \Omega_1 dt) \cos \beta_b + e_1 \quad (\text{IV.12})$$

de même pour la deuxième roue :

$$d^0 O_2 \vec{M} \cdot \vec{n}_2 = -R_{b2}(\theta_2 + \Omega_2 dt) \cos \beta_b + e_2 \quad (\text{IV.13})$$

Le point (M) peut être défini par les indices (i,j).

avec :

i: le numéro de ligne de contact contenant le point (M).

j: le numéro de segment contenant le point (M).

donc, on peut écrire :

$$\Delta(M) = \Delta(i, j) = -\cos \beta_b [R_{b1}\Omega_1 + R_{b2}\Omega_2] dt - \cos \beta_b [R_{b1}\theta_1 + R_{b2}\theta_2] + e_{12}(i, j) \quad (\text{IV.14})$$

$$\text{avec: } e_{12}(i, j) = e_1(i, j) + e_2(i, j) \quad (\text{IV.15})$$

Or, en un point de contact M_c , la variation de la vitesse de rotation de la roue menée est donnée par :

$$\Omega_2(t) = -\frac{R_{b1}}{R_{b2}} \Omega_1 + \frac{\dot{e}_{12}(M_c)}{R_{b2} \cos \beta_b} \quad (\text{IV.16})$$

En introduisant (IV.16) dans (IV.14), il vient :

$$\Delta(i, j) = -\cos \beta_b (R_{b1}\theta_1 + R_{b2}\theta_2) + e_{12}(i, j) - e_{12}(M_c) \quad (\text{IV.17})$$

Soit :

$$\delta e_{12}(i, j) = e_{12}(i, j) - e_{12}(M_c) \quad (\text{IV.18})$$

Du fait de la déformation élastique des dents lors du contact d'un ou plusieurs couples de dents, il est aisé d'écrire la relation cinématique au point de contact (M) sous la forme :

$$\Delta(i, j) = -\cos \beta_b (R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2) + \delta e_{12}(i, j) \tag{IV.19}$$

L'erreur de transmission dépend donc de petites perturbations (torsion) du pignon et de la roue ainsi que l'erreur géométrique δe_{12} , tel que $\delta e_{12}(i, j)$ représente l'erreur géométrique au point $\mathbf{M}(i, j)$ par rapport à un point de contact $\mathbf{Mc}(I_{Mc}, J_{Mc})$. Donc, le paramètre important n'est pas l'écart absolu du point (\mathbf{M}) par rapport à la développante de cercle théorique mais l'écart relatif à un point de contact dans les conditions des corps rigides.

IV.3. ETUDE DYNAMIQUE

IV.3.1. EQUATION DU MOUVEMENT

Les équations de **LAGRANGE** permettent l'écriture systématique des équations du mouvement d'un système. Elles sont particulièrement bien adaptées aux problèmes de vibrations où les déplacements généralisés sont souvent indépendants ; cependant, un problème se pose lorsqu'il existe une liaison non holonome entre les variables du système qui ne se présente pas dans notre cas [27],[35],[36],[37],[40].

Handwritten notes:
 θ_1, θ_2 : indépendants
 θ_1, θ_2 forme une somme à AD
 Les paramètres ne sont pas indépendants

Les équations de **Lagrange** qui donnent les équations du mouvement du système sont :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \tag{IV.20}$$

où

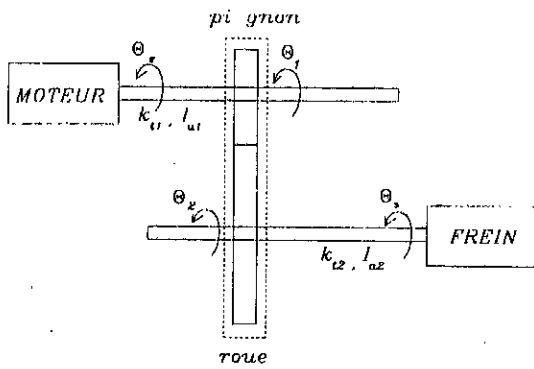
T : L'énergie cinétique

D : fonction de dissipation due au travail des forces visqueuses (amortissement).

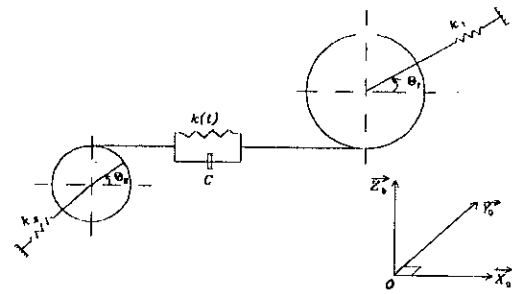
U : L'énergie de déformation (énergie potentielle)

W : travail virtuel des forces extérieures.

q_i : coordonnées généralisées du système.



Fig(IV.1): Modélisation du réducteur



Fig(IV.2): Modélisation masses-ressorts de l'engrènement

Notre système (fig.IV.1) possède quatre degrés libertés de torsion θ_1 et θ_2 , rotation instantanée de chacun des cylindres de base, θ_e et θ_s qui permettent d'introduire le couple moteur et résistant.

IV.3.2. CALCUL DES ENERGIES CINETIQUES ET DE DEFORMATION

Pour la modélisation proprement dite de notre système, nous utilisons cinq types d'éléments constituant le réducteur; (arbre moteur, arbre récepteur, moteur, frein, engrenages).

IV.3.2.1. Arbre Moteur (fig.IV.3)

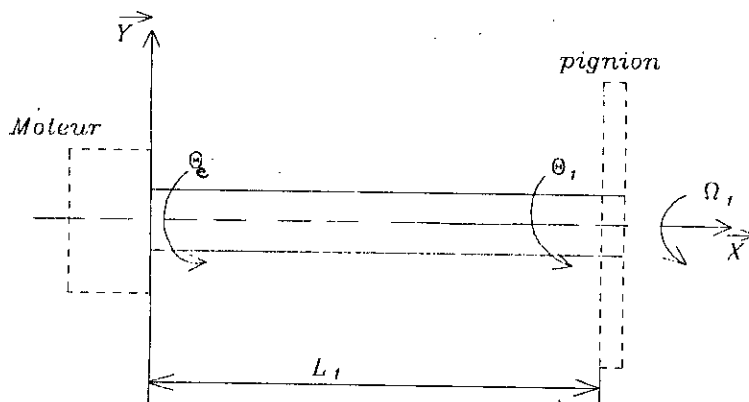


Fig.IV.3: MOTEUR, ARBRE et PIGNION

Les conditions aux limites sont :

$$\theta^t(x=0) = \theta_e$$

$$\theta^t(x=L_1) = \theta_1$$

$$\text{D'où } \theta^t(X) = \left(1 - \frac{X}{L_1}\right)\theta_e + \frac{X}{L_1}\theta_1 \quad 0 \leq X \leq L_1$$

L'énergie de déformation de l'arbre moteur en torsion simple s'exprime sous la forme :

$$U_1 = \frac{1}{2} G_1 J_1 \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial \theta^t}{\partial X}\right)^2 dX$$

$$U_1 = \frac{1}{2} G_1 J_1 \int_0^{L_1} \left(\frac{\theta_1 - \theta_e}{L_1}\right)^2 dX$$

$$U_1 = \frac{1}{2 L_1} G_1 J_1 \int_0^{L_1} (\theta_1 - \theta_e)^2 dX \quad (\text{IV.20.1})$$

L'énergie cinétique de l'arbre moteur est donnée par :

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} I_1 \left(\frac{\partial \theta^t}{\partial t}\right)^2 dX$$

$$T_1 = \frac{I_1}{2} \int_0^{L_1} \left[\left(1 - \frac{X}{L_1}\right) \dot{\theta}_e + \frac{X}{L_1} \dot{\theta}_1 \right]^2 dX$$

$$T_1 = \frac{I_1 L_1}{6} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_e^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_e) \quad (\text{IV.20.2})$$

On a pas introduit la vitesse de rotation de l'arbre moteur dans l'équation (IV.20.2) car elle disparaît après les dérivations dans les équations de Lagrange.

IV.3.3.2. Arbre récepteur (fig.IV.4)

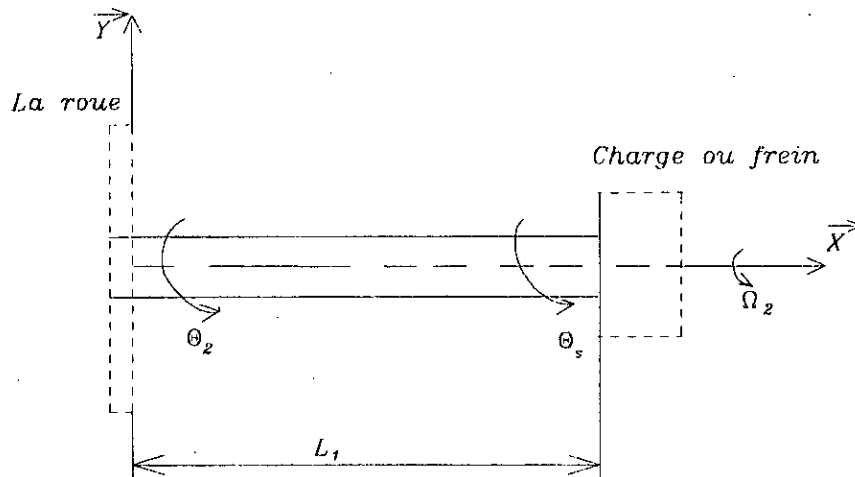


Fig.IV.4: ROUE, ARBRE et FREIN

Vu l'existence des écarts géométriques sur les dentures, la vitesse de rotation de l'arbre récepteur peut dépendre du temps, θ_2 et θ_s restent toujours des petites perturbations par rapport à l'état de fonctionnement des corps rigides.

Les conditions aux limites sont :

$$\theta'(x=0) = \theta_2$$

$$\theta'(x=L_1) = \theta_s$$

$$\theta'(x) = \left(1 - \frac{x}{L_2}\right)\theta_2 + \frac{x}{L_2}\theta_s \quad 0 \leq x \leq L_2$$

L'énergie de déformation de l'arbre récepteur est donnée par :

$$U_2 = \frac{1}{2} G_2 J_2 \int_0^{L_2} \left(\frac{\partial \theta^t}{\partial X}\right)^2 dX$$

$$U_2 = \frac{1}{2} G_2 J_2 \int_0^{L_2} \left(\frac{\theta_s - \theta_2}{L_2}\right)^2 dX$$

$$U_2 = \frac{1}{2 L_2} G_2 J_2 \int_0^{L_2} (\theta_s - \theta_2)^2 dX \quad (\text{IV.21.2})$$

L'énergie cinétique de l'arbre récepteur est donnée par :

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} I_2 \left(\frac{\partial \theta'}{\partial t} \right)^2 dt$$

$$T_2 = \frac{I_2}{2} \int_0^{L_2} \left[\left(1 - \frac{X}{L_2}\right) \dot{\theta}_2 + \frac{X}{L_2} \dot{\theta}_s + \Omega_2 \right]^2 dX$$

$$T_2 = \frac{I_2 L_2}{2} (\dot{\theta}_s^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_s \dot{\theta}_2) + \frac{I_2 L_2}{2} \Omega_2 (\dot{\theta}_s + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} I_2 L_2 \Omega_2^2 \quad (\text{IV.21.2})$$

IV.3.2.3. Moteur

L'énergie cinétique du moteur est donnée par :

$$T_m = \frac{1}{2} I_M \dot{\theta}_e^2 \quad \omega_1 = \omega_2 \text{ mais } \omega_2 = \frac{1}{2} \omega_1 \quad (\text{IV.23.1})$$

Le moteur est supposé rigide par suite :

$$U_m = 0 \quad (\text{IV.23.2})$$

IV.3.2.4. Frein (Charge résistante)

L'énergie cinétique du frein est donnée par :

$$T_F = \frac{1}{2} I_F (\dot{\theta}_s + \Omega_2)^2 \quad (\text{IV.24.1})$$

de même le frein est supposé indéformable par suite :

$$U_F = 0 \quad (\text{IV.24.2})$$

IV.3.2.5. Engrenages

L'énergie de déformation au niveau de l'engrènement est donnée par :

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} \Delta_{ij}^2 \quad (\text{IV.25.1})$$

$$\Delta_{ij} = -\cos \beta_b (R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2) + \delta e_{ij}$$

$$T_e = \frac{1}{2} I_{e1} (\dot{\theta}_1')^2 + \frac{1}{2} I_{e2} (\dot{\theta}_2')^2$$

$$T_e = \frac{1}{2} I_{e1} (\Omega_1 + \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_{e2} (\Omega_2 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (\text{IV.25.2})$$

IV.3.2.6. Réducteur

Pour tout le système mécanique :

L'énergie de déformation totale est donnée par :

$$U_T = \frac{G_1 J_1}{2 L_1} (\theta_1 - \theta_s)^2 + \frac{G_2 J_2}{2 L_2} (\theta_s - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} \sum_y k_y \Delta_y^2 \quad (\text{IV.26.1})$$

L'énergie cinétique totale est donnée par :

$$T_T = \frac{I_1 L_1}{6} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_e^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_e) + \frac{L_2 I_2}{6} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_s^2 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_s) + \frac{I_2 L_2}{2} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_s) \Omega_2 \\ + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}_e^2 + \frac{1}{2} I_F (\dot{\theta}_s + \Omega_2)^2 + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}_e^2 + \frac{1}{2} I_f (\dot{\theta}_s + \Omega_2)^2 + \frac{1}{2} I_{e1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{e2} \\ (\dot{\theta}_2 + \Omega_2)^2$$

(IV.26.2)

Certains termes d'énergie cinétique sont supprimés de l'équation (IV.26.2) car ils disparaissent au cours de dérivations par rapport aux coordonnées généralisées et au temps dans les équations de Lagrange.

IV.3.3. AMORTISSEMENT

IV.3.3.1. Introduction de la matrice d'amortissement

Vue l'existence de dissipation d'énergie dans l'ensemble des éléments du réducteur, il est nécessaire de prendre en compte les termes dissipatifs intervenant dans tous les mouvements possibles, afin d'obtenir des déplacements et des efforts finis pour les vitesses critiques[11].

En principe, ces termes d'amortissements pourraient être calculés par des procédures analogues à celles utilisées pour la détermination des raideurs et masses .

Malheureusement, les propriétés dissipatives de matériaux ne sont pas suffisamment définies pour permettre ces calculs directs, ainsi que la répartition d'énergie dissipée par frottement dans le mécanisme est inconnue. Par conséquent, l'amortissement est introduit d'une manière globale dans les équations du mouvement .

Pour définir l'amortissement équivalent (raisonnable) dans le réducteur, on pose deux hypothèses suivantes :

- La même énergie par cycle pour une excitation harmonique, dissipée par les efforts dissipatifs tels que : les frottements, les effets d'amortissements visqueux équivalents .

- Nous proposons que la matrice d'amortissement visqueux équivalente est orthogonale.

Il est possible de déterminer les modes propres réels $\{\phi_i\}$ du réducteur à l'arrêt qui correspondent à une matrice raideur constante (les termes de rigidité périodique d'engrènement disparaissent).

IV.3.3.2. Matrice d'amortissement visqueux équivalente

On se basant aux conditions précédentes on peut écrire

$$\{\phi_i\}^T [c] \{\phi_j\} = 0 \quad i \neq j \quad (IV.27)$$

$$\{\phi_i\}^T [c] \{\phi_i\} = 2 \varepsilon_{\phi_i} (K_{\phi_i} M_{\phi_i})^{1/2} = 2 \varepsilon_{\phi_i} M_{\phi_i} \omega_i \quad (IV.28)$$

avec :

$K_{\phi_i} = \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\}$ raideur modale.

$M_{\phi_i} = \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}$ masse modale

$\{\phi_i\}$: vecteurs propres (modes propres).

ω_i : pulsations propres

ε_{ϕ_i} : facteur d'amortissement modal peut être déterminé expérimentalement

$[C_{\phi_i}]$: matrice d'amortissement visqueux équivalente (diagonale) exprimée dans la base modale.

Dans la base modale la matrice d'amortissement s'écrit :

$$[C_{\phi_i}] = [\phi]^{-T} [C] [\phi] \quad (\text{IV.29})$$

par suite :

$$[C] = [\phi]^{-T} [C_{\phi}] [\phi]^{-1} \quad (\text{IV.30})$$

$$[M] = [\phi]^{-T} [M_{\phi}] [\phi]^{-1} \quad (\text{IV.31})$$

$$[\phi]^{-1} = [M_{\phi}]^{-1} [\phi]^{-T} [M] \quad (\text{IV.32})$$

$$[\phi]^{-T} = [M] [\phi] [M_{\phi}]^{-1} \quad (\text{IV.33})$$

remplaçons (IV.32) et (IV.33) dans (IV.30), il vient :

$$[C] = ([M] [\phi] [M_{\phi}]^{-1}) [C_{\phi}] ([M_{\phi}]^{-1} [\phi]^{-T} [M])$$

$$[C] = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{2 \varepsilon_{\phi_i} \omega_i}{m_{\phi_i}} \right\} ([M] \{\phi_i\}) ([M] \{\phi_i\})^T \quad (\text{IV.34})$$

On constate alors qu'il est possible d'obtenir une matrice d'amortissement dans la base modale et physique, à partir d'hypothèse raisonnable sur l'orthogonalité de la matrice d'amortissement par rapport aux modes propres de la structure connue sous le nom d'hypothèse de Basile [11], [36], [37].

IV.3.4. UTILISATION DES EQUATIONS DE LAGRANGE

IV.3.4.1. Energie de déformation

$$\frac{\partial U_T}{\partial \theta_1} = \frac{G_1 J_1}{L_1} (\theta_1 - \theta_e) + \cos^2 \beta_b R_{b1} (R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2) \sum_{ij} k_{ij} - \cos \beta_b R_{b1} \sum k_{ij} \delta e_{ij}$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial \theta_2} = \frac{G_2 J_2}{L_2} (\theta_2 - \theta_s) + \cos^2 \beta_b R_{b2} (R_{b1} \theta_1 + R_{b2} \theta_2) \sum_{ij} k_{ij} - \cos \beta_b R_{b2} \sum k_{ij} \delta e_{ij}$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial \theta_e} = \frac{G_1 J_1}{L_1} (\theta_e - \theta_1)$$

$$\frac{\partial U_T}{\partial \theta_s} = \frac{G_2 J_2}{L_2} (\theta_s - \theta_2)$$

soit : $\left\{ \frac{\partial U_T}{\partial \theta_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial U_T}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial U_T}{\partial \theta_2} \quad \frac{\partial U_T}{\partial \theta_e} \quad \frac{\partial U_T}{\partial \theta_s} \right\}^T$

$$\{X\} = \{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_e \quad \theta_s\}^T$$

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial \theta_i} \right\} = [k] \{X\} + \{F_1\} \tag{IV.35}$$

avec :

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{G_1 J_1}{L_1} + \cos^2 \beta_b R_{b1}^2 \sum_{ij} k_{ij} & \cos^2 \beta_b R_{b1} R_{b2} \sum_{ij} k_{ij} & -\frac{G_1 J_1}{L_1} & 0 \\ \cos^2 \beta_b R_{b1} R_{b2} \sum_{ij} k_{ij} & \frac{G_2 J_2}{L_2} + \cos^2 \beta_b R_{b2}^2 \sum_{ij} k_{ij} & 0 & -\frac{G_2 J_2}{L_2} \\ -\frac{G_1 J_1}{L_1} & 0 & \frac{G_1 J_1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{G_2 J_2}{L_2} & 0 & \frac{G_2 J_2}{L_2} \end{bmatrix}$$

et $\{F_1\} = -\cos \beta_b \sum_{ij} k_{ij} \delta e_{ij} \{R_{b1} \quad R_{b2} \quad 0 \quad 0\}^T$ (IV.36)

IV.3.4.2. Energie cinétique

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, e, s$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = \left[\frac{L_1 I_1}{3} + I_{e1} \right] \ddot{\theta}_1 + \frac{L_1 I_1}{6} \dot{\theta}_e$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = \left[\frac{L_2 I_2}{3} + I_{e2} \right] \ddot{\theta}_2 + \frac{L_2 I_2}{6} \ddot{\theta}_s + \left[\frac{L_2 I_2}{2} + I_{e2} \right] \dot{\Omega}_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_e} \right] = \frac{L_1 I_1}{6} \ddot{\theta}_1 + \left[\frac{L_1 I_1}{3} + I_m \right] \ddot{\theta}_e$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_s} \right] = \frac{L_2 I_2}{6} \ddot{\theta}_2 + \left[\frac{L_2 I_2}{3} + I_F \right] \ddot{\theta}_s + \left[\frac{L_2 I_2}{2} + I_F \right] \dot{\Omega}_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \left[\frac{\partial T}{\partial \theta_i} \right] = [M] \{ \ddot{X} \} + \{ F_2 \} \quad (\text{IV.37})$$

$$\{ \ddot{X} \} = \{ \ddot{\theta}_1 \ \ddot{\theta}_2 \ \ddot{\theta}_e \ \ddot{\theta}_s \}^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{L_1 I_1}{3} + I_{e1} & 0 & \frac{L_1 I_1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{L_2 I_2}{3} + I_{e2} & 0 & \frac{L_2 I_2}{6} \\ \frac{L_1 I_1}{6} & 0 & \frac{L_1 I_1}{3} + I_m & 0 \\ 0 & \frac{L_2 I_2}{6} & 0 & \frac{L_2 I_2}{3} + I_F \end{bmatrix}$$

$$\{ F_2 \} = \dot{\Omega}_2 \left\{ 0 \ \frac{L_2 I_2}{2} + I_{e2} \ 0 \ \frac{L_2 I_2}{2} + I_F \right\}^T \quad (\text{IV.38})$$

IV.3.4.3. Travail des forces extérieures

Le travail virtuel des forces extérieures est :

$$\delta w = -c_e \delta \theta_e - c_s \delta \theta_s \quad (\text{IV.39})$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta_e} = -c_e \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial \theta_s} = -c_s$$

$$\text{d'où : } \left\{ \frac{\partial w}{\partial \theta_i} \right\} = \{F_0\} = \{0 \quad 0 \quad -c_e \quad -c_s\}^T \quad (\text{IV.40})$$

IV.3.4.4. Energie dissipée

On propose une fonction de dissipation du travail des forces de viscosité équivalentes, on a justifié précédemment le choix de la matrice d'amortissement.

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_i} = [c] \{ \dot{X} \} \quad (\text{IV.41})$$

A partir des équations précédentes, nous formulons notre système comme suit :

$$\begin{aligned} [M] \{ \ddot{X} \} + \{ F_2 \} + [C] \{ \dot{X} \} + [k] \{ X \} + \{ F_1 \} &= \{ F_0 \} \\ [M] \{ \ddot{X} \} + [C] \{ \dot{X} \} + [k] \{ X \} &= \{ F_0 \} - \{ F_1 \} - \{ F_2 \} \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

avec :

$\{ F_0 \}$: représente les couples nominaux transmissent.

$\{ F_1 \}$: représente un effort supplémentaire causé par les écarts de forme.

$\{ F_2 \}$: représente un effort supplémentaire causé par l'erreur cinématique.

IV.4. CONCLUSION

Cette étude dynamique, nous a permis de modéliser le système physique étudié, à un modèle mathématique qui découle de la formulation des équations de **LAGRANGE**. Cette formulation nous a conduit à un système d'équations différentielles linéaires à quatre degrés de liberté.

La résolution du système par des méthodes analytique et numérique sera présentée au chapitre suivant.

CHAPITRE IV

PRESENTATION DES RESULTATS ET VALIDATION DU LOGICIEL GEAR4DOF

CHAPITRE V

PRESENTATION DES RESULTATS ET VALIDATION DU LOGICIEL

V.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous présentons les résultats numériques obtenus avec le code de calcul GEAR4DOF, élaboré au cours de cette étude, pour les deux cas sans ou avec erreurs géométriques en commençant par une étude analytique basée sur la méthode approchée appelée la méthode des perturbations [annexe II].

V.2. DONNEES GEOMETRIQUES DU REDUCTEUR

Pour faciliter la comparaison des résultats analytiques et numériques, on propose l'étude du réducteur possédant les paramètres géométriques suivants:

- Nombre des dents du pignon et de la roue : $Z_1 = Z_2 = 28$
- Largeurs des dentures du pignon et de la roue : $L_{ar1} = L_{ar2} = 0.04 \text{ m}$
- Longueur de l'arbre moteur : $L_1 = 0.15 \text{ m}$
- Longueur de l'arbre récepteur : $L_2 = 0.25 \text{ m}$
- Masses volumiques du pignon et de la roue : $\rho_1 = \rho_2 = 7800 \text{ kg/m}^3$

- Masses volumiques des arbres moteur et récepteur : $\rho_{a1} = \rho_{a2} = 7800 \text{ Kg/m}^3$
- Raideur d'un couple de dent : $K_c = 7.10^8 \text{ N/m}$
- Modules de cisaillement des arbres moteur et récepteur : $G_1 = G_2 = 8.10^{10} \text{ N/m}$
- Rayon de l'arbre moteur : $R_1 = 0.04 \text{ m}$
- Rayon de l'arbre récepteur : $R_2 = 0.08 \text{ m}$
- Inertie de masse du moteur : $I_m = 3 \text{ Kg m}^2$
- Inertie de masse du frein : $I_f = 20 \text{ Kg m}^2$
- Module réel des engrenages : $m_{r0} = 4.10^{-3} \text{ m}$
- Coefficients des saillies : $H_{a1} = H_{a2} = 1$
- Coefficients des creux : $H_{f1} = H_{f2} = 1$
- Angle de pression réel en degrés : $\alpha_0 = 20^\circ$
- Angle d'inclinaison d'hélice de taillage en degrés : β_b (variable)
- Couple moteur et couple résistant : $C_1 = C_2 = 700 \text{ N.m}$
- Vitesse de rotation du pignon : Ω_1 (variable) rd/s

A partir des relations géométriques existantes entre les différents paramètres géométriques des engrenages parfaits et en tenant compte des références [26], et [annexe I], on donne le tableau suivant:

Tableau I: Caractéristiques des engrenages en fonction des différents angles d'inclinaison primitif

β_b (en degrés)	0	10	18	22	30
$R_{b1,2}$ [m]	$5,262 \cdot 10^{-2}$	$5,334 \cdot 10^{-2}$	$5,499 \cdot 10^{-2}$	$5,622 \cdot 10^{-2}$	$5,961 \cdot 10^{-2}$
$R_{p1,2}$ [m]	$5,600 \cdot 10^{-2}$	$5,686 \cdot 10^{-2}$	$5,888 \cdot 10^{-2}$	$6,040 \cdot 10^{-2}$	$6,466 \cdot 10^{-2}$
$R_{a1,2}$ [m]	$6,000 \cdot 10^{-2}$	$6,086 \cdot 10^{-2}$	$6,288 \cdot 10^{-2}$	$6,440 \cdot 10^{-2}$	$6,866 \cdot 10^{-2}$
P_{ba} [m]	$1,181 \cdot 10^{-2}$	$1,197 \cdot 10^{-2}$	$1,234 \cdot 10^{-2}$	$1,262 \cdot 10^{-2}$	$1,338 \cdot 10^{-2}$
$T_1 T_2$ [m]	$3,831 \cdot 10^{-2}$	$3,943 \cdot 10^{-2}$	$4,209 \cdot 10^{-2}$	$4,414 \cdot 10^{-2}$	$5,011 \cdot 10^{-2}$
$T'_1 T'_2$ [m]	$1,934 \cdot 10^{-2}$	$1,921 \cdot 10^{-2}$	$1,889 \cdot 10^{-2}$	$1,867 \cdot 10^{-2}$	$1,804 \cdot 10^{-2}$
$T_1 T'_1$ [m]	$9,482 \cdot 10^{-3}$	$1,011 \cdot 10^{-2}$	$1,159 \cdot 10^{-2}$	$1,273 \cdot 10^{-2}$	$1,603 \cdot 10^{-2}$
$T_1 T'_2$ [m]	$2,882 \cdot 10^{-2}$	$2,932 \cdot 10^{-2}$	$3,049 \cdot 10^{-2}$	$3,140 \cdot 10^{-2}$	$3,407 \cdot 10^{-2}$
ϵ_t	1,638	2,157	2,515	2,672	2,940
N_{cmax}	2	3	3	3	3
$M_{1,2}$ [Kg]	2,714	2,788	2,964	3,098	3,483
$I_{1,2}$ [Kg.m ²]	$3,758 \cdot 10^{-3}$	$3,966 \cdot 10^{-3}$	$4,482 \cdot 10^{-3}$	$4,482 \cdot 10^{-3}$	$6,189 \cdot 10^{-3}$

V.3. ANALYSE DES RESULTATS SANS ERREURS GEOMETRIQUES

V.3.1. PERIODICITE DE LA RAIDEUR D'ENGRENEMENT

Le développement des lignes de contact dans le plan d'action et particulièrement dans la fenêtre de contact entraîne une variation de la longueur de contact en cours du temps, par conséquent la raideur d'engrènement dépend du temps.

La raideur d'engrènement se présente sous forme d'une fonction périodique de période d'engrènement (T_m).

La raideur d'engrènement peut s'écrire sous la forme:

$$k(t) = k_m + k_a \phi(t) = k_m \left(1 + \frac{k_a}{k_m} \phi(t)\right)$$

$$k(t) = k_m (1 + \alpha \phi(t)) \quad (\text{V.1})$$

avec

K_m : raideur moyenne

$$K_a = K_{\max} - K_m$$

$$\alpha = \frac{k_a}{k_m} = \frac{k_{m \max}}{k_m} - 1$$

$\phi(t)$: Fonction périodique de période T_m , représente la variation de la raideur d'engrènement en cours du temps. (Elle indique l'allure de la raideur) (fig.V.1).

$$k_m = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} k(t) dt \quad (\text{V.2})$$

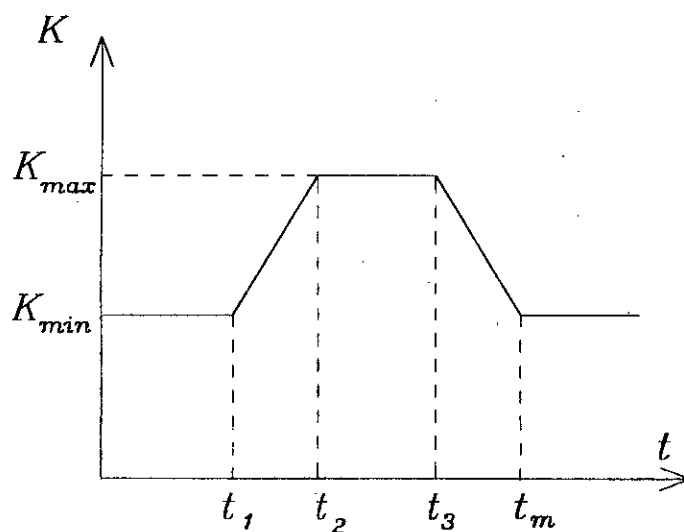


Fig.V.1: FONCTION PERIODIQUE

$$k_m = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} k(t) dt = \frac{1}{T_m} \left[\int_0^{t_1} k_{min} dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{dk}{t_2 - t_1} (t - t_1) + k_{min} \right] dt + \int_{t_2}^{t_3} k_{max} dt + \int_{t_3}^{T_m} \left[\frac{-dk}{t_m - t_3} (t - t_3) + k_{max} \right] dt \right] \quad (V.3)$$

avec

$$dk = k_{max} - k_{min}$$

$$k_m = k_{min} \frac{t_1}{T_m} + \frac{1}{2} dk \frac{(t_2 - t_1)}{T_m} + k_{min} \frac{(t_2 - t_1)}{T_m} + K_{max} \frac{(t_3 - t_2)}{T_m} - \frac{1}{2} dk \frac{(T_m - t_3)}{T_m} + K_{max} \frac{T_m - t_3}{T_m}$$

$$k_m = \left(-\frac{t_1}{2T_m} - \frac{t_2}{2T_m} + \frac{t_3}{2T_m} - \frac{1}{2} \right) dk + k_{max} \quad (V.4)$$

Tableau II : Application numérique

β_b (degré)	k_m (N/m)	ϵ_α	ϵ_β	ϵ_t	α
0	$11,55 \cdot 10^8$	1,638	0	1,638	0,212
10	$11,63 \cdot 10^8$	1,605	0,553	2,157	0,203
18	$10,7 \cdot 10^8$	1,531	0,984	2,515	0,010
30	$9,46 \cdot 10^8$	1,348	1,592	2,940	0,068
39	$8,1 \cdot 10^8$	1,162	2,003	3,165	0
44	$7,4 \cdot 10^8$	1,045	2,21	3,256	0,015

Le rapport de conduite total est ^{inversement} proportionnel à l'angle d'hélice, une augmentation du rapport de conduite entraîne:

- Une diminution de la raideur moyenne.
- Une meilleure continuité de la raideur (pas de variations brutales).

Pour les engrenages droits la variation de la raideur est en créneaux vue qu'il y a un ou deux couples de dents en prise, la longueur de contact passe brusquement d'une valeur minimale à une valeur maximale égale à deux fois la largeur de la denture (fig .V.1).

La fonction ϕ (t) dans ce cas est une fonction en créneaux . Elle est discontinue en certains points.

Pour les engrenages hélicoïdaux (à dentures droites inclinées), contrairement au engrenages droits, La longueur de contact passe progressivement de sa valeur minimale à sa valeur maximale (fig.V.2).

V.3.2. ETUDE ANALYTIQUE

Le système différentiel associé à notre modèle (non amorti) est:

$$[m] \left\{ \ddot{X} \right\} + [k(t)] \{x\} = \{F(t)\} \quad (V.5)$$

Notre système est linéaire car la matrice masse est constante et la matrice raideur ne dépend pas des variables d'états du système ($\theta_i, i = 1, 2, e, s$)[35].

$$\text{On peut écrire que : } [k(t)] = [k_c] + K(t) \quad [k_c] = [k_c] + (1 + \alpha \phi(t)) [k_m] \quad (V.6)$$

avec .

$[K_c]$: Matrice raideur constante correspondante aux termes de rigidité torsionnelles des arbres (moteur et récepteur).

$K(t)$: Fonction périodique de raideur d'engrènement

$$\{F(t)\} = \{F_0\} + \{F_1(t)\} + \{F_2(t)\} \quad (V.7)$$

$\{F_0\}$: vecteur des efforts extérieurs

$\{F_1(t)\}$: Représente un effort supplémentaire causé par les écarts de forme

$\{F_2(t)\}$: Représente un effort supplémentaire causé par l'erreur cinématique

Donc le système s'écrit :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [k_c]\{X\} + (1 + \alpha\phi(t))[k_m]\{X\} = \{F_0\} + \{F_1(t)\} + \{F_2(t)\} \quad (\text{V.8})$$

Dans ce cas (sans erreur géométrique) : on peut écrire (V.8)

$$[M]\{\ddot{X}\} + [k_c]\{X\} + [k_m](1 + \alpha\phi(t))\{X\} = \{F_0\} \quad (\text{V.9})$$

$\phi(t)$ est une fonction périodique de période $T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}$ (période d'engrènement)

donc, elle peut se transformer en série de Fourier [36],[41].

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos n\omega_m t + b_n \sin n\omega_m t \quad (\text{V.10})$$

Les équations différentielles à coefficients périodiques n'admettent pas de solution analytique exacte, cependant, une solution approchée peut être envisagée en utilisant des méthodes approchées dite la méthode des perturbations [annexe II].

La solution approchée, d'ordre 1 s'écrit:

$$\{X\} = \{X_0\} + \alpha \{X_1\} \quad (\text{V.11})$$

$$\text{soit : } [k_g] = [k_c] + [k_m] \quad (\text{V.12})$$

En remplaçant (V.11) dans (V.9) et en identifiant les termes de même ordre il vient :

$$\text{ordre } \alpha^0 : [M]\{\ddot{X}_0\} + [k_g]\{X_0\} = \{F\} \quad (\text{V.13})$$

La solution en régime permanent de cette équation coïncide avec la solution statique pour une raideur moyenne.

$$X_0(t) = \{X_{st}\} \quad (\text{V.14})$$

$$\text{ordre } \alpha^1 : [M] \{ \ddot{X}_1 \} + [k_g] \{ X_1 \} = -\phi(t) [k_m] \{ X_0 \} \quad (\text{V.15})$$

La solution en régime permanent de cette équation différentielle à excitation périodique est :

$$X_1(t) = \sum_n^{+\infty} A_n \cos(n\omega_m t + \phi_n) + \{ \beta_n \} \sin(n\omega_m t + \phi_n) \quad (\text{V.16})$$

d'où la solution générale en régime permanent sera :

$$\{X(t)\} = \{X_{st}\} + \alpha \sum_n^{+\infty} \{A_n\} \cos(n\omega_m t + \phi_n) + \{ \beta_n \} \sin(n\omega_m t + \phi_n) \quad (\text{V.17})$$

on peut écrire la solution comme suit :

$$\{X(t)\} = \{X_{st}\} + \alpha \{X_0(X_{st}, k_m)\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega_m t + \phi_n) + b_n \sin(n\omega_m t + \phi_n)}{k_m \left[1 - \left(n \frac{\omega_m}{\omega_i} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{V.18})$$

Si ω_i sont les fréquences propres du systèmes, on constate la possibilité de résonance en

$$\omega_m = \frac{\omega_i}{n} \quad \text{avec : } i = 1, 2, 3, \dots$$

L'erreur de transmission est donnée par :

$$\Delta(t) = -\cos \beta_b \{R_{b1}, R_{b2}, 0, 0\} \{X(t)\}$$

$$F_d(t) = k(t) \Delta(t) \quad (\text{V.19})$$

$$F_d(t) = k_m (1 + \alpha \phi(t)) \Delta(t)$$

$$F_d(t) = -k_m (1 + \alpha \phi(t)) \cos \beta_b \{R_{b1}, R_{b2}, 0, 0\} \{X(t)\}$$

$$F_d(t) = -k_m \cos \beta_b \{R_{b1}, R_{b2}, 0, 0\} (1 + \alpha \phi(t)) (\{X_0(t)\} + \alpha \{X_1(t)\})$$

$$F_d(t) = -k_m \cos \beta_b \{R_{b1}, R_{b2}, 0, 0\} [\{X_0(t)\} + \alpha \{X_1(t)\} + \alpha \phi(t) \{X_0(t)\} + \alpha^2 \phi(t) \{X_1(t)\}] \quad (V20)$$

$$\text{L'ordre } \alpha^0 : F_{d0}(t) = -k_m \cos \beta_b \{R_{b1}, R_{b2}, 0, 0\} \{X_0(t)\} \quad (V.21)$$

$$\text{L'ordre } \alpha^1 : F_{d1}(t) = -k_m \cos \beta_b \{R_{b1}, R_{b2}, 0, 0\} [\{X_1(t)\} + \phi(t) \{X_0(t)\}] \quad (V.22)$$

$$\text{L'ordre } \alpha^2 : F_{d2}(t) = -k_m \cos \beta_b \{R_{b1}, R_{b2}, 0, 0\} [\phi(t) \{X_1(t)\}] \quad (V.23)$$

$$F_d(t) = F_{d0}(t) + \alpha F_{d1}(t) + \alpha^2 F_{d2}(t) \quad (V.24)$$

Il y'a possibilité de résonance d'efforts pour les excitations vérifiant

$$n \omega_m = \omega_i \rightarrow \omega_m = \frac{\omega_i}{n} \quad i = 1, n$$

n= 1 correspond à l'excitation d'engrènement fondamentale

n= 2 correspond à l'excitation d'engrènement double

n= 3 correspond à l'excitation d'engrènement triple

.

.

.

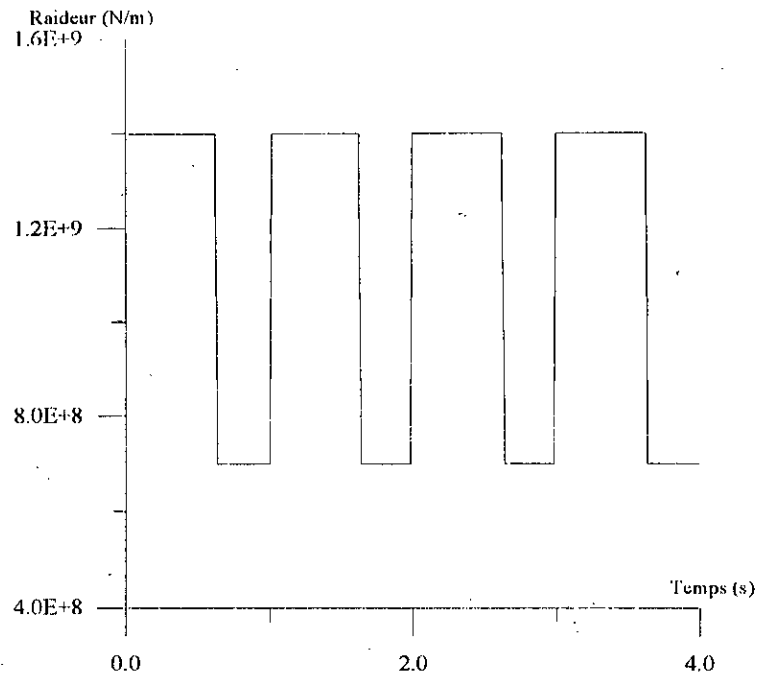


Fig. V.1: VARIATION EN CRENEAU DE LA RAIDEUR POUR LES ENGRENAGES DROITS

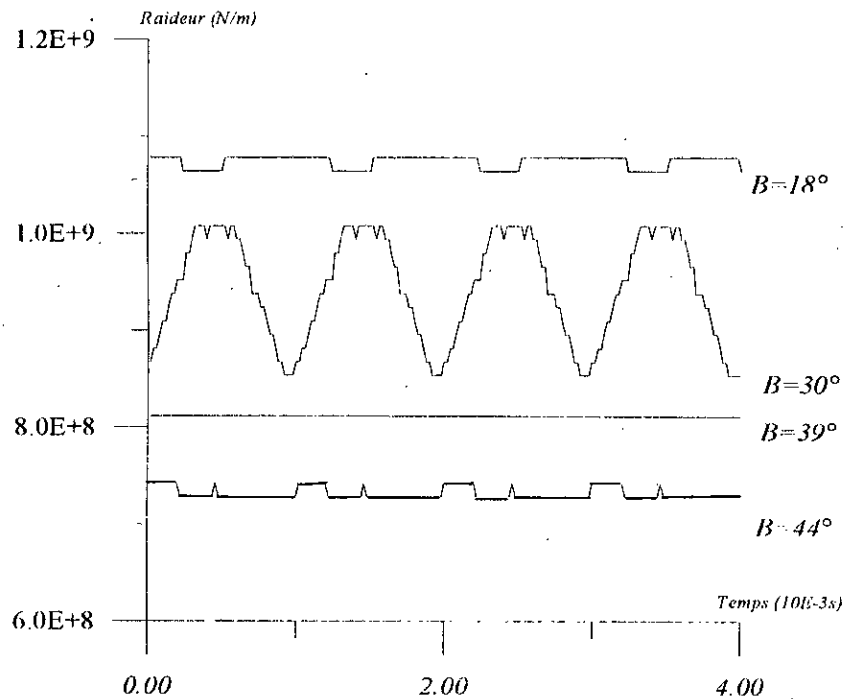


Fig. V.2: VARIATION DE LA RAIDEUR POUR DIFFERENTS ANGLES D'HELICE

V.3.3. ANALYSE DES RESULTATS NUMERIQUES

V.3.3.1. Effort dynamique

analytiquement L'étude analytique des équations du mouvement (équ.V.8) donne une solution approchée, numériquement, la réponse de cette équation est une fonction périodique de période T_m , qu'on a développé en série de Fourier (équ.V.18).

Au début de cette étude, on a effectué une analyse fréquentielle [annexe IV] de la réponse pour avoir une idée de l'importance des harmoniques qui la constituent (Fig.V.3) et (Fig.V.4).

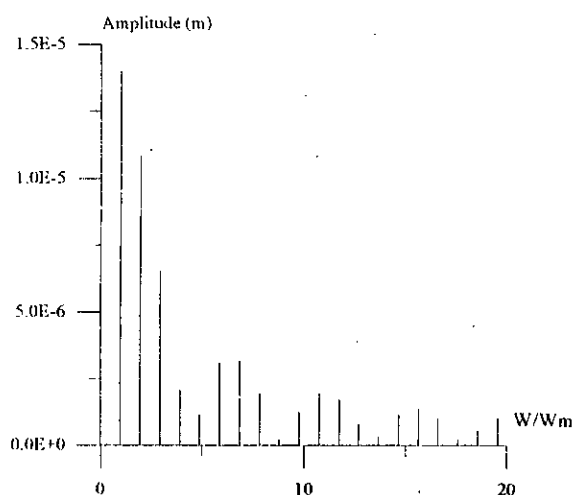


fig.V.3: Les 20 premières fréquences
pour $\beta_b = 0^\circ$

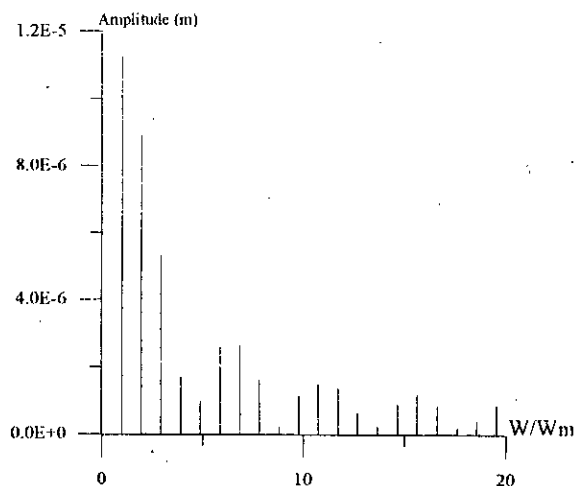


fig.V.4: Les 20 premières fréquences
pour $\beta_b = 30^\circ$

Cette analyse est relative à une vitesse de rotation donnée. Un changement d'angle d'hélice entraîne un changement du spectre de la réponse.

1- Pour les engrenages droits ($\beta_b = 0^\circ$) :

le spectre fréquentiel de la réponse montre l'importance décroissante des amplitudes pour ω_m , $2\omega_m$, $3\omega_m$ etc... (Fig.V.3). Ce qui explique l'apparition des pics plus ou moins importants dans la courbe $R(\Omega_1)$ (rapport de l'effort dynamique maximal sur l'effort statique en fonction de la vitesse de rotation du pignon) (Fig.V.5.a).

Le pic apparaît à une vitesse de rotation voisine de $\Omega_1 = 800 \text{rd/s}$ correspond à l'excitation d'engrènement fondamentale $\omega_m = \omega_i = 21424,285 \text{ rd/s}$ avec $\omega_m = \Omega_1 \cdot Z_1$

D'où : $\Omega_1 = \omega_m / Z_1 = 765,15 \text{ rd/s}$

fréquence fondamentale propre du système

4% d'erreur

Le pic qui apparaît à une vitesse de rotation voisine de $\Omega_1 = 350 \text{rd/s}$ correspond à l'excitation d'engrènement double $2 \omega_m = \omega_i = 20633,878 \text{ rd/s}$ par suite le pic apparaît précisément à $\omega_m = 10316,939 \text{ rd/s}$ d'où : $\Omega_1 = 738,92 \text{ rd/s}$

$368,462$

Le pic qui apparaît à une vitesse de rotation voisine de $\Omega_1 = 100 \text{rd/s}$ correspond à l'excitation d'engrènement triple de fréquence $3 \omega_m = \omega_i = 216,007 \text{ rd/s}$ par suite le pic apparaît précisément à $\omega_m = 72,002 \text{rd/s}$

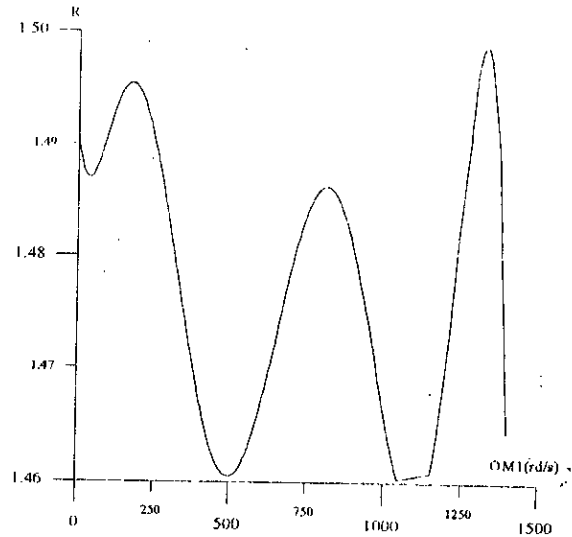
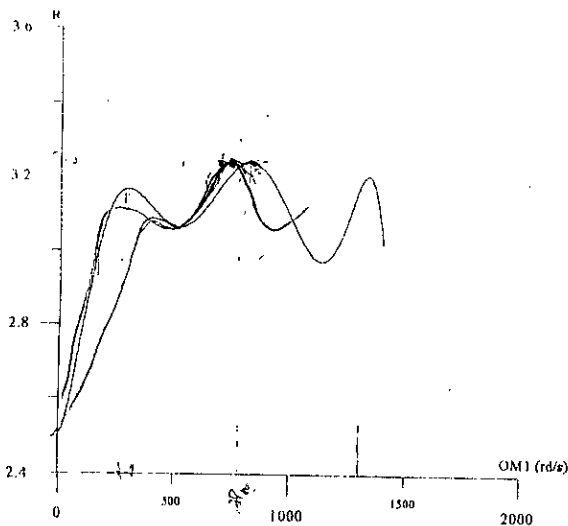
$= 54,001 \text{rd/s}$

d'où : $\Omega_1 = 2,714 \text{rd/s}$
 $\rightarrow \Omega_1 = 1,92156$

2- Pour les engrenages à denture hélicoïdales ($\beta_b = 30^\circ$):

Le spectre fréquentiel de la réponse montre la domination de l'excitation fondamentale ω_m . Les amplitudes des fréquences $2\omega_m$ et $3\omega_m$ sont moins importantes que celle qui correspond à ω_m contrairement aux engrenages droits ce qui explique l'existence, seulement, d'un pic nettement visible correspondant à l'excitation fondamentale et la réduction d'amplitudes des autres pics pour les autres harmoniques (fig. V.4).

La variation des pulsations propres est due à la variation de la raideur moyenne suite à la variation de l'angle d'hélice.



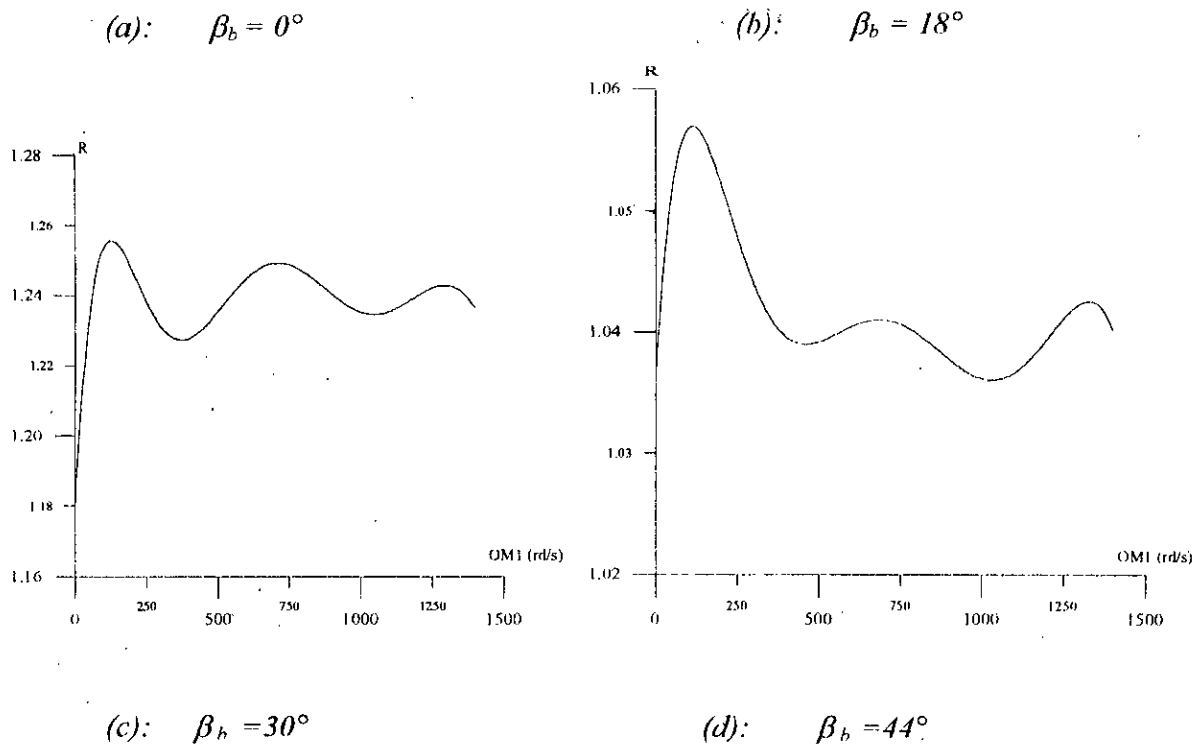


Fig. V.5: Rapport de l'effort dynamique maximal sur l'effort statique en fonction du rapport de conduite (angle d'hélice)

La figure(V.5) présente les courbes de réponse en vitesse de rotation pour différents angles d'hélice. On relève l'importance de l'angle d'hélice sur l'effort dynamique. Les valeurs théoriques ainsi obtenues sont présentées dans le tableau suivant :

Tableau III : Influence des angles d'hélices sur le rapport maximal.

Engrenages	β_b	ε_t	R_{\max}
Droits	0	1.638	3.27
Hélicoïdaux	18	2.515	1.50
	30	2.940	1.25
	44	3.256	1.065

En passant des engrenages droits aux engrenages hélicoïdaux, le rapport de conduite total augmente. Grâce au phénomène de recouvrement, le nombre maximal de couple de dents en prise passe de 2 à 3 et la continuité de la longueur de contact est assurée. Les efforts

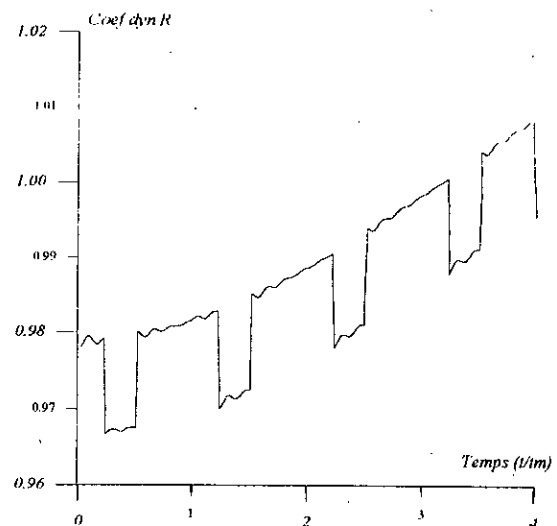
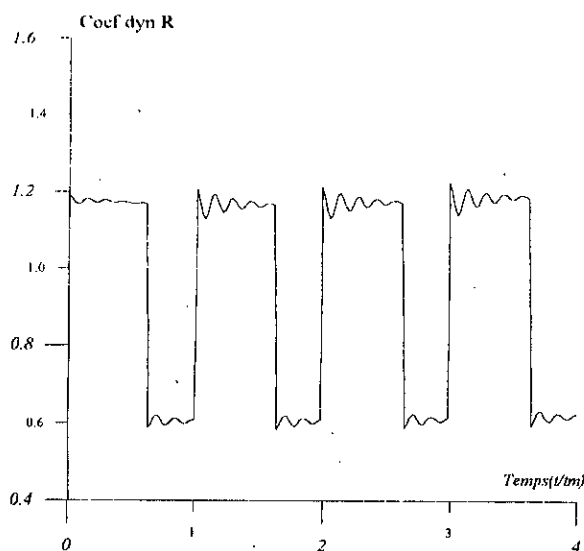
dynamiques par conséquent diminuent. On note que l'augmentation du rapport de conduite se traduit par une meilleure continuité de la raideur, le contact entre un couple de dents adjacents se fait d'une manière progressive, et par conséquent une réduction des perturbations du système ceci explique la réduction de l'effort dynamique quand le rapport de conduite total croit.

Cette figure montre également qu'il ne suffit pas d'augmenter l'angle d'hélice pour améliorer le comportement dynamique du réducteur mais, pour un engrenage sans défauts la situation souhaitée est d'avoir un rapport de conduite voisin d'un nombre entier et une valeur moyenne ^{moins} importante de l'erreur de transmission. Un rapport de conduite entier implique une longueur de contact constante par conséquent une matrice raideur indépendante du temps et le système n'est plus perturbé.

Mais ceci est beaucoup plus compliqué à réaliser car il faut tenir compte :

- 1- Des déformations élastiques et des corrections qui modifient sensiblement le rapport de conduite.
- 2- Des variations de couple en fonction de la vitesse (ou du temps).

La figure (V.6) présente les courbes de réponse temporelle pour différents angles d'hélice. On constate l'influence de l'angle d'hélice sur l'effort dynamique. Ainsi, les fonctions harmoniques du coefficients dynamiques ne sont plus périodiques.



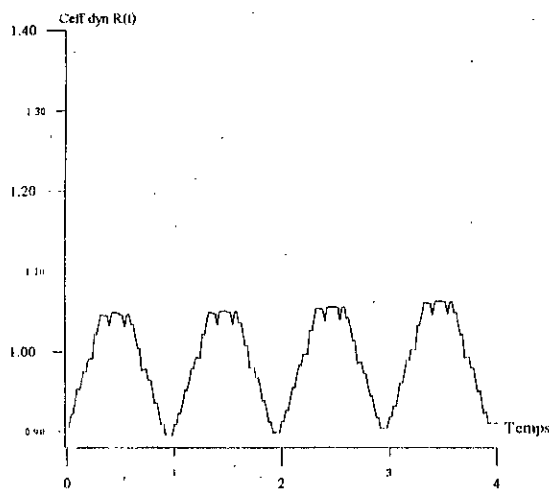
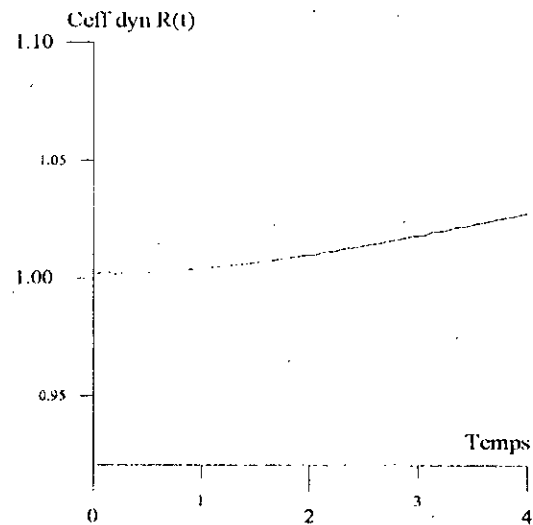
(a): $\beta_b = 0^\circ$ (b): $\beta_b = 18^\circ$ (c): $\beta_b = 30^\circ$ (d): $\beta_b = 39^\circ$

Fig.V.6: Variation du coefficient dynamique en fonction du rapport de conduite (angle d'hélice)

V.3.3.2. Erreur de transmission

Dans le cas sans erreur géométrique, l'erreur de transmission représente la déformation élastique (écrasement de matière) due aux efforts dynamiques de contact entre les deux solides.

La figure(V.7) montre l'influence des couples extérieurs sur l'erreur de transmission. Une augmentation des couples favorise l'écrasement de matière au contact donc la déformation élastique des deux solides.

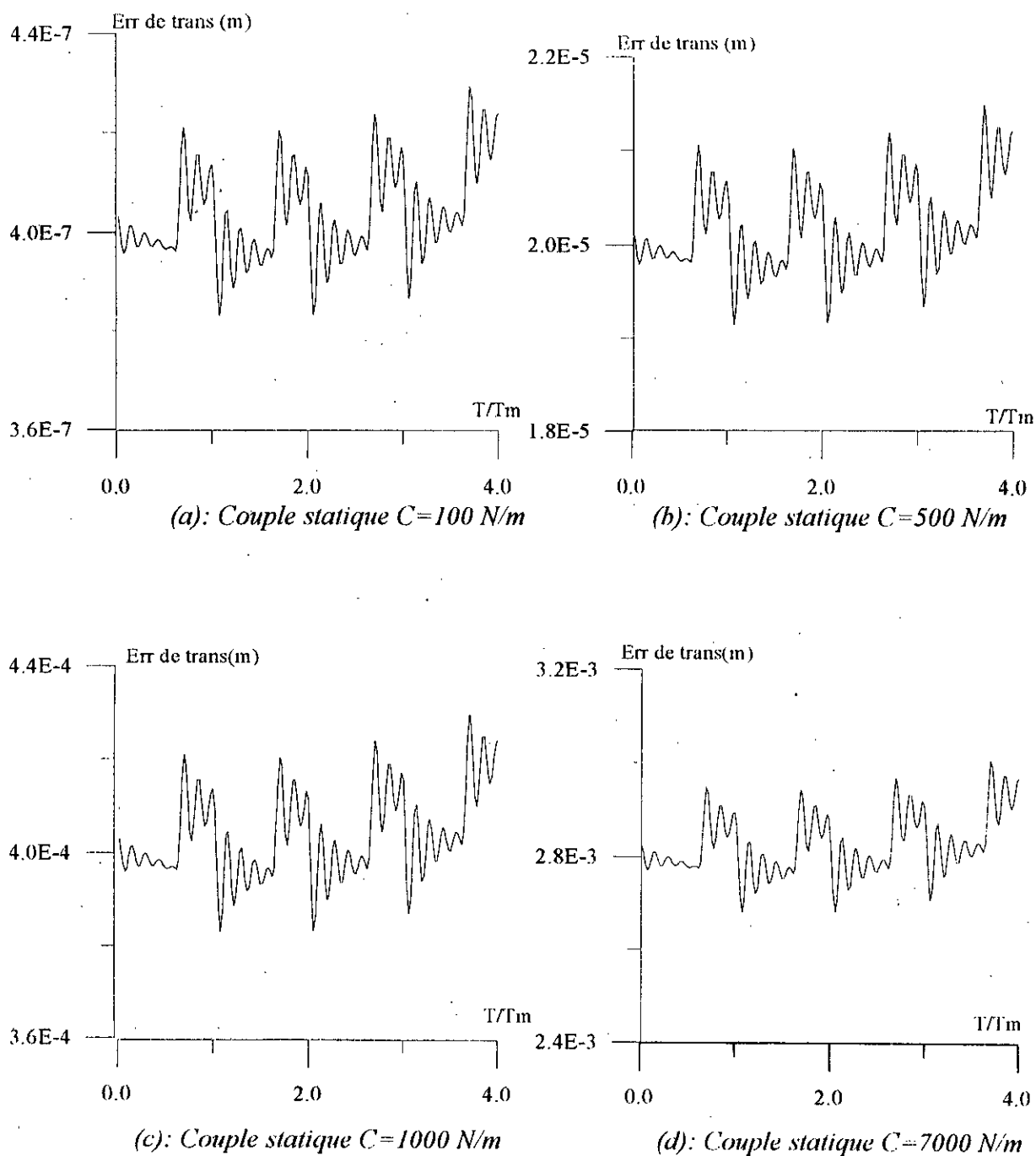


Fig. V.7: Variation de l'erreur de transmission en fonction des couples statiques

La figure (V.8) montre l'influence du rapport de conduite total (angle d'hélice β_b) sur la valeur moyenne de l'erreur de transmission. Une augmentation du rapport de conduite total assure une continuité meilleure de l'erreur de transmission mais augmente sa valeur moyenne.

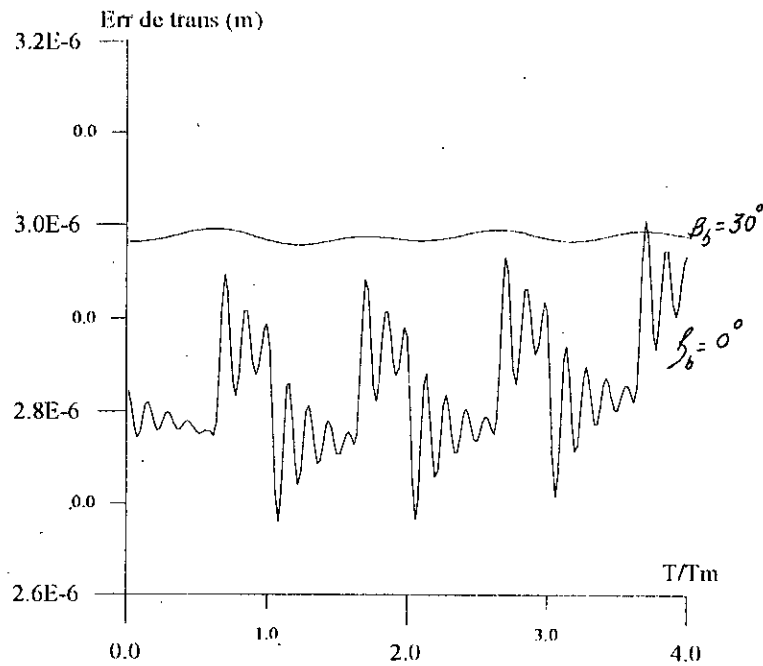


Fig. V.8: Influence du rapport de conduite sur l'erreur de transmission pour $\beta_b = 0^\circ$ et $\beta_b = 30^\circ$

V.3.3.3. Influence du coefficient d'amortissement sur l'effort dynamique

La figure(V.9) montre l'influence du coefficient d'amortissement sur l'effort dynamique, on constate qu'une diminution du coefficient d'amortissement entraîne une augmentation de l'effort dynamique.

A la résonance les pics deviennent plus fins et plus importants. D'autres pics, qui correspondent à d'autres harmoniques de moindre importance apparaissent.

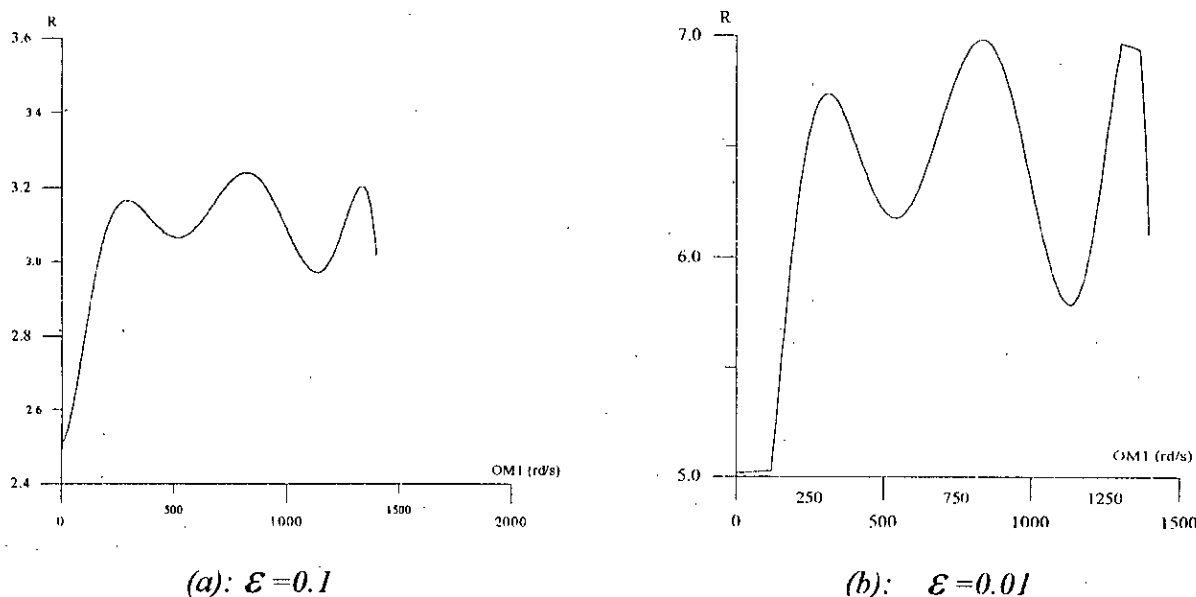


Fig. V.9: Influence du coefficient d'amortissement sur l'effort dynamique.

V.4. ANALYSE DES RESULTATS AVEC ERREURS GEOMETRIQUES

V.4.1. INTRODUCTION DES ERREURS GEOMETRIQUES

Dans cette étude, nous choisissons une erreur constante dans le plan d'action variant sinusoidalement suivant le profil.

La forme générale des erreurs géométriques retenue est la suivante :

$$e_1(i, j) = er_1(i, j). Z_1(t) = 5.10^{-6} \sin(\omega_e t + \varphi_i) \quad (V.25)$$

φ_i : déphasage du i ème ligne de contact (i ème couple de dents en prise)

$$e_2(i, j) = er_2(i, j). Z_2(t) = 0 \quad (V.26)$$

$$e_{12}(i, j) = e_1(i, j) + e_2(i, j)$$

$$\text{On a alors : } e_{12}(i, j) = 5.10^{-6} \sin(\omega_e t + \varphi_i) \quad (V.27)$$

Suite au type d'erreur qu'on a choisi deux cas différents sont présentés :

- Erreur géométrique constante ($\omega_e = 0$ et $\varphi_i = \varphi = \frac{\pi}{2}$)

Dans ce cas il ya un jeu entre les couples de dents adjacents, (translation d'erreur par rapport à la développante de cercle théorique).

Les résultats numériques et analytiques sont identiques au cas sans erreur géométrique car le contact s'effectue dans le plan d'action.

On suppose que le déphasage entre lignes de contacts est nul.

$\varphi_i = 0$ l'erreur géométrique s'écrit :

$$e_1(i, j) = a \sin \omega_e t$$

$$\text{et } e_2(i, j) = 0$$

$$\text{D'ou : } e_{12}(i, j) = a \sin \omega_e t$$

avec

$$a = 5.10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta e_{12}(i, j) = e_{12}(i, j) - e_{12}(i_m, j_m) = 0$$

dans ce cas on aura :

$$\sum_{i,j} k(i, j) \delta e_{ij}(i, j) = 0$$

Le cas le plus général est de prendre $\omega_e = \lambda \cdot \frac{2\pi}{TT}$

On choisi l'erreur géométrique pour $\lambda = 4$

$$\omega_e = \frac{8\pi}{TT} \quad \text{et} \quad T_e = \frac{1}{4} TT \quad (\text{fig.V.2})$$

$$TT = \frac{T_1 T_2}{R_{b1} \Omega_1} \quad : \text{ le temps du début jusqu'à la fin de l'engrènement.}$$

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T_m} = Z_1 \Omega_1 \quad : \text{ pulsation d'engrènement.}$$

$$T_m = \frac{2\pi}{Z_1 \Omega_1} = \frac{P_{b0}}{R_{b1} \Omega_1} \quad : \text{ la période d'engrènement.}$$

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e} \quad : \text{ pulsation d'erreurs géométriques.}$$

$$T_e \quad : \text{ période d'erreurs géométriques.}$$

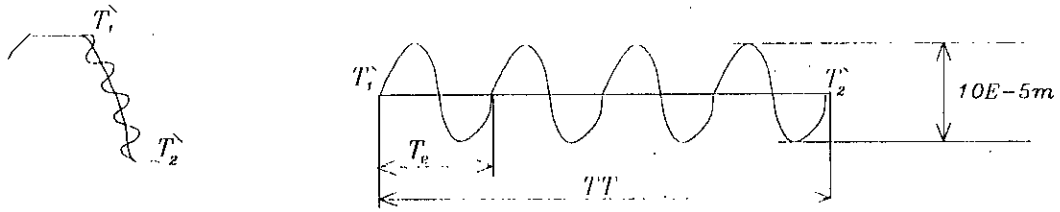


Fig.V.2: ERREUR GEOMETRIQUE 4P ($T_e = \frac{1}{4} TT$)

Tableau IV : Engrenage à denture droite avec erreur sinusoïdale ($T_e = \frac{1}{4} TT$)

Ω_1 (rd /s)	100	500	1000,0
TT (s)	$3,67563 \cdot 10^{-3}$	$7,3513 \cdot 10^{-4}$	$3,67567 \cdot 10^{-4}$
T_e (s)	$0,91892 \cdot 10^{-3}$	$1,8378 \cdot 10^{-4}$	$0,91892 \cdot 10^{-4}$
T_m (s)	$2,24399 \cdot 10^{-3}$	$4,4879 \cdot 10^{-4}$	$2,24399 \cdot 10^{-4}$
ω_c (rd/s)	6837,5892	34188,624	68375,890
ω_m (rd /s)	2800	14000	28000
ω_c/ω_m	2,44199	2,44199	2,44199
ω_c/Ω_1	68,37589	68,37589	68,37589

Tableau V : Engrenage à denture hélicoïdale avec erreur sinusoïdale

($\beta_b = 10^\circ$) ($T_e = \frac{1}{4} TT$)

Ω_1 (rd /s)	100	500	1000,0
TT (s)	$3,60140 \cdot 10^{-3}$	$7,2028 \cdot 10^{-4}$	$3,60140 \cdot 10^{-4}$
T_e (s)	$0,90035 \cdot 10^{-3}$	$1,8007 \cdot 10^{-4}$	$0,90035 \cdot 10^{-4}$
T_m (s)	$2,24399 \cdot 10^{-3}$	$4,4879 \cdot 10^{-4}$	$2,24399 \cdot 10^{-4}$
ω_c (rd/s)	6978,603	134393,016	69786,031
ω_m (rd /s)	2800	14000	28000
ω_c/Ω_1	69,7860	69,7860	69,7860

V.4.2. RAIDEUR D'ENGRENNEMENT

Pour les conditions de faibles couples nominaux et de fortes amplitudes d'erreur géométrique et pour les grandes vitesses de rotation du pignon, le système différentiel associé à notre modèle n'est plus linéaire[42]. La raideur d'engrènement dépend des variables θ_1 et θ_2 .

Le système différentiel s'écrit sous la forme suivante :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [k(t, \{X\})]\{X\} = \{F_0\} + \{F(t)\} \quad (V.28)$$

Pour les valeurs des couples et des erreurs choisies et pour des faibles vitesses de rotation des engrenages, la partie déformation élastique domine les erreurs géométriques. L'erreur de transmission restera toujours positive. Par conséquent la raideur d'engrènement instantanée est indépendante des variables du système θ_1 et θ_2 .

Le système différentiel est linéaire et les raideurs $k(t)$ sont celles données dans le cas sans erreurs géométriques.

V.4.3. ETUDE ANALYTIQUE

Dans ce cas, le système associé à notre modèle (non amorti) est :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [k_c]\{X\} + (1 + \alpha\phi(t))[k_m]\{X\} = \{F_0\} + \{F_1(t)\} + \{F_2(t)\} \quad (V.29)$$

Pour bien envisager la comparaison entre les résultats analytiques de ceux obtenus numériquement [17], on adopte un type d'erreur géométrique de la forme suivante :

$$\begin{aligned} e_1(i, j) &= a \sin \omega_e t \\ e_2(i, j) &= 0 \quad \rightarrow \quad e_{12} = a \sin \omega_e t \quad \text{avec} \quad a = 5.10^{-6} m \end{aligned}$$

L'erreur géométrique est la même en tout point de la discrétisation à un instant donné, par suite : $\delta e_{12}(i, j) = e_{12}(i, j) - e_{12}(i_m, j_m) = 0 \quad \forall i, j$

$$\sum_{i,j} k(i, j) \delta e_{12}(i, j) = 0$$

D'où : $\{F_2(t)\} = 0$

Le système non amorti peut s'écrire :

$$[M] \left\{ \ddot{X} \right\} + \left[(1 + \alpha \phi(t)) [k_m] + [k_e] \right] \{X\} = \{F_0\} + \{F_1\} \sin \omega_e t \quad (V.30)$$

Le système est linéaire à coefficients périodiques et à excitation harmonique de pulsation ω_e . La solution exacte du système est analytiquement indéterminée.

En utilisant une méthode approchée de perturbations (développée au annexe II), la solution approchée est donnée sous la forme :

$$\{X\} = \{X_0\} + \alpha \{X_1\} + \alpha^2 \{X_2\} + \dots \quad (V.31)$$

On se limite à l'ordre 1, il vient :

$$\{X\} = \{X_0\} + \alpha \{X_1\} \quad (V.32)$$

$$\text{soit :} \quad [k_g] = [k_m] + [k_e] \quad (V.33)$$

En remplaçant (V.32) dans (V.30) et identifiant les termes de même ordre, il vient :

$$\text{Ordre } \alpha^0 : M \{X\} + [k_g] \{X_0\} = \{F_0\} + \{F_1\} \sin \omega_e t \quad (V.34)$$

la solution en régime permanent (système non amorti) est :

$$\{X_0(t)\} = \{X_{st}\} + \{X_{\omega_e}(t)\} \quad (V.35)$$

$$\text{avec : } \{X_{\omega_e}(t)\} = \{G_1\} \sin \omega_e t$$

$\{X_{st}\}$: déformée statique du réducteur avec raideur de liaison moyenne.

$\{X_{\omega_e}(t)\}$: déformée temporelle supplémentaire introduite par l'erreur géométrique.

$$\text{Ordre } \alpha' : [M] \{\ddot{X}_1\} + [k_g] \{X_1\} = -\phi(t) [k_m] \{X_0(t)\} \quad (\text{V.36})$$

$$\text{avec : } \phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_m t) + b_n \sin(n\omega_m t) \quad (\text{V.37})$$

$$\begin{aligned} \phi(t) \{X(t)\} = & \{X_{st}\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_m t + b_n \sin(n\omega_m t) + \{G_1\} \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(\omega_e + n\omega_m t) + d_n \sin(\omega_e + n\omega_m t) \\ & + e_n \cos(\omega_e - n\omega_m t) + f_n \sin(\omega_e - n\omega_m t)] \end{aligned} \quad (\text{V.38})$$

La solution en régime permanent est :

$$\begin{aligned} \{X_1(t)\} = & \sum_{n=1}^{\infty} [\{P_n\} \cos(n\omega_m t) + \{q_n\} \sin(n\omega_m t)] + \sum_{n=1}^{\infty} [\{X_n\} \cos(\omega_e + n\omega_m t) + \{Y_n\} \sin(\omega_e + n\omega_m t) + \{z_n\} \cos(\omega_e - n\omega_m t) \\ & + \{t_n\} \sin(\omega_e - n\omega_m t)] \end{aligned} \quad (\text{V.39})$$

La solution totale s'écrira finalement :

$$\begin{aligned} \{X(t)\} = & \{X_{st}\} + \{G_1\} \sin \omega_e t + \alpha \left[\sum_{n=1}^{+\infty} [\{P_n\} \cos(n\omega_m t) + \{q_n\} \sin(n\omega_m t)] + \sum_{n=1}^{+\infty} [\{X_n\} \cos(n\omega_m t + \omega_e) + \{Y_n\} \sin(n\omega_m t + \omega_e) \right. \\ & \left. + \{Z_n\} \cos(\omega_e - n\omega_m t) + \{t_n\} \sin(\omega_e - n\omega_m t)] \right] \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

Pour la simplification on utilise la notation suivante :

$$F_{rn}(i\omega_e \pm j\omega_m t) = \sum_{i,j} [\{X_n^{ij}\} \cos(i\omega_e \pm j\omega_m t) + \{Y_n^{ij}\} \sin(i\omega_e \pm j\omega_m t)]$$

$$F_{rm}(i\omega_e \pm j\omega_m t) = \sum_{i,j} \left[a_n^{ij} \cos(i\omega_e \pm j\omega_m t) + b_n^{ij} \sin(i\omega_e \pm j\omega_m t) \right]$$

D'où :

$$\{X(t)\} = \{A\} + F_{r0}(\omega_e) + \alpha [F_{r1}(n\omega_m) + F_{r2}(\omega_e \pm j\omega_m)]$$

- L'erreur de transmission est donnée par :

$$\Delta(t) = -\cos \beta_b \{R_{b1}, R_{b2}, 0, 0\} \{X(t)\} \quad (V.41)$$

$$\Delta(t) = \Delta_0 + F_{r0}(\omega_e) + \alpha [F_{r1}(n\omega_m) + F_{r2}(\omega_e \pm j\omega_m)]$$

$$F_d(t) = k_m (1 + \alpha \phi(t)) \Delta(t)$$

$$F_d(t) = k_m [1 + \alpha F_3(i\omega_m)] [\Delta_0 + F_{r0}(\omega_e) + \alpha [F_{r1}(n\omega_m) + F_{r2}(\omega_e \pm j\omega_m)]]$$

$$F_d(t) = F_{d0} + k_m F_{r0}(\omega_e) + \alpha [F_{r1}(i\omega_m) + F_{r5}(\omega_e \pm j\omega_m)] + \alpha^2 [F_{r6}(i\omega_m) + F_{r7}(\omega_e \pm n\omega_m)] \quad (V.42)$$

$$\text{Pordre } \alpha^0 : F_{d0}(t) = F_{d0} + k_m F_{r0}(\omega_e) \quad (V.43)$$

$$\text{Pordre } \alpha^1 : F_{d1}(t) = F_{r4}(i\omega_m) + F_{r5}(\omega_e \pm j\omega_m) \quad (V.44)$$

$$\text{Pordre } \alpha^2 : F_{d2}(t) = F_{r6}(i\omega_m) + F_{r7}(\omega_e \pm n\omega_m) \quad (V.45)$$

$$F_d(t) = F_{d0}(t) + \alpha F_{d1}(t) + \alpha^2 F_{d2}(t) \quad (V.46)$$

$F_d(t)$: est une combinaison des harmoniques de pulsations $(\omega_e \pm j\omega_m)$

L'étude analytique par la méthode de perturbation montre la domination de la pulsation de l'erreur ω_e surtout pour α petit.

On peut envisagé la domination de ω_e à partir des résultats numériques donnés ultérieurement .

Pour le cas où l'angle d'hélice $\beta_b = 39^\circ$ ($\alpha = 0$) l'effort dynamique s'écrit :

$$F_d(t) = F_{d0} + k_m F_{r0}(\omega_e) \quad (V.47)$$

V.4.4. ANALYSE DES RESULTATS NUMERIQUE

L'analyse de l'influence des différents types d'écart sur le comportement dynamique du réducteur, et les modifications de forme rencontrés dans l'industrie de l'engrenage est l'objet de plusieurs études approfondies au cours des dernières décennies.

Les résultats présentés permettent d'analyser les effets négatifs et positifs sur le comportement dynamique du réducteur causé par les écarts de forme.

Dans cette partie d'étude, l'erreur géométrique est de la forme :

$$e_{12}(i, j) = a \sin(\omega_c t)$$

V.4.4.1. Erreur cinématique

La figure (V.10) présente la variation temporelle de l'erreur cinématique. L'erreur cinématique $\Omega_2(t)$ est sinusoïdale de période T_c .

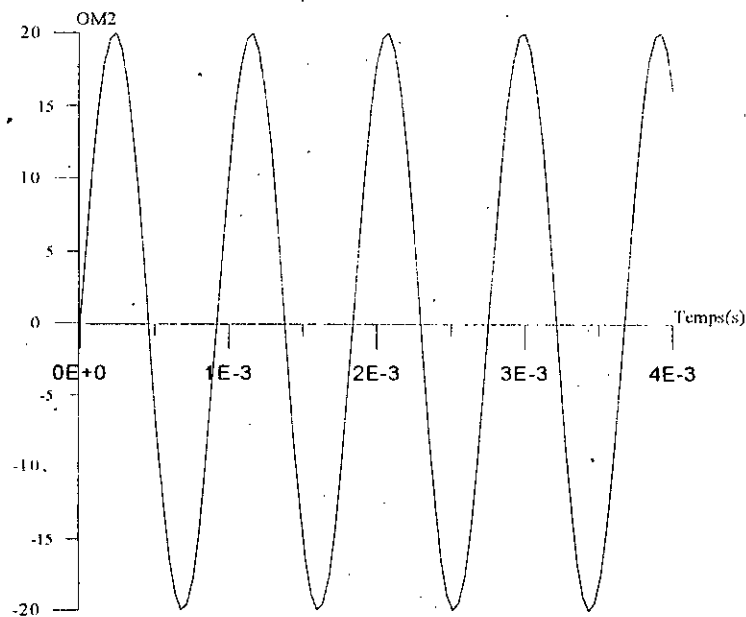
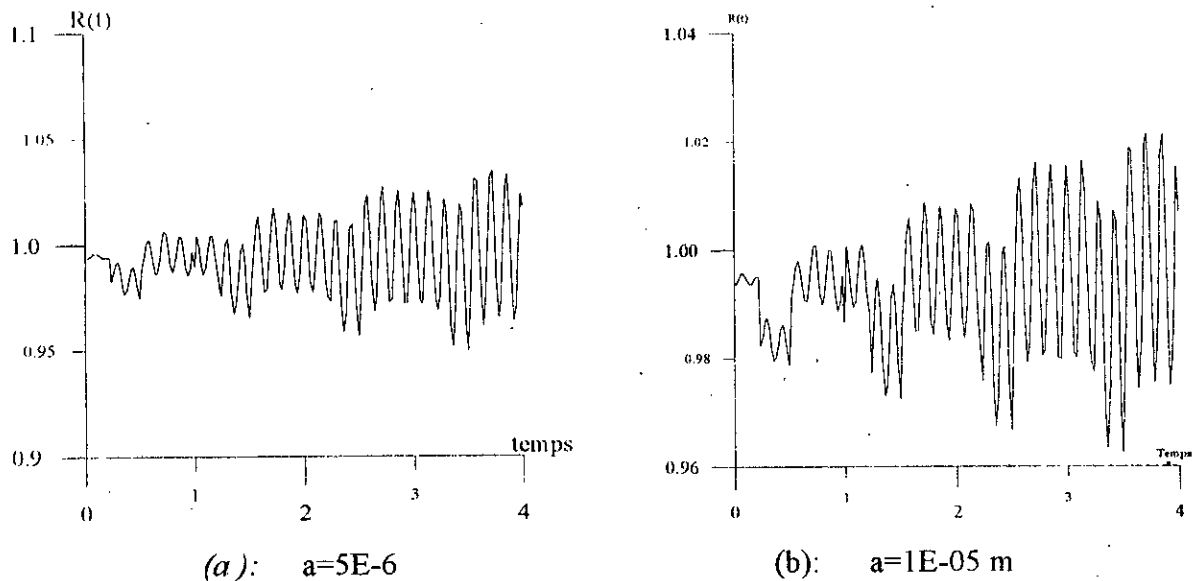


Fig.V.10: Variation de $\Omega_2(t)$ $e_{12}(i, j) = a \sin(\omega_c t)$, $a=5E-6$, $\beta_b=10^\circ$

V.4.4.2. Effort dynamique

On constate l'influence de l'amplitude des erreurs sur l'allure de l'effort dynamique $R(t)$ fig(V.11). La diminution de l'amplitude de l'erreur défavorise la domination de l'harmonique de pulsation ω_c . On constate aussi, que l'effort dynamique est voisin de l'effort statique ($R(t) < 1.5$) donc il n'y a pas de risque ^{de fortes} efforts dynamique sur les dentures.



FigV.11: Variation de $R(t)$ avec $\beta_b = 18^\circ$ et $e_{12}(i, j) = a \sin(\omega_c t)$

V.4.3. Erreur de transmission

Dans ce cas, avec erreurs géométriques, l'erreur de transmission représente la déviation de la position des engrenages au cours du fonctionnement, relative à la position qu'occuperaient les deux engrenages s'ils étaient indéformables et géométriquement parfaits. L'erreur de transmission est une conséquence des déformations et des erreurs géométriques.

La figure V.12, montre l'influence du rapport de conduite pour un couple nominal donné sur l'erreur de transmission. Une augmentation du rapport de conduite (angle d'hélice) favorise l'écrasement de matière (la valeur moyenne augmente) donc elle évite les pertes de contacts.

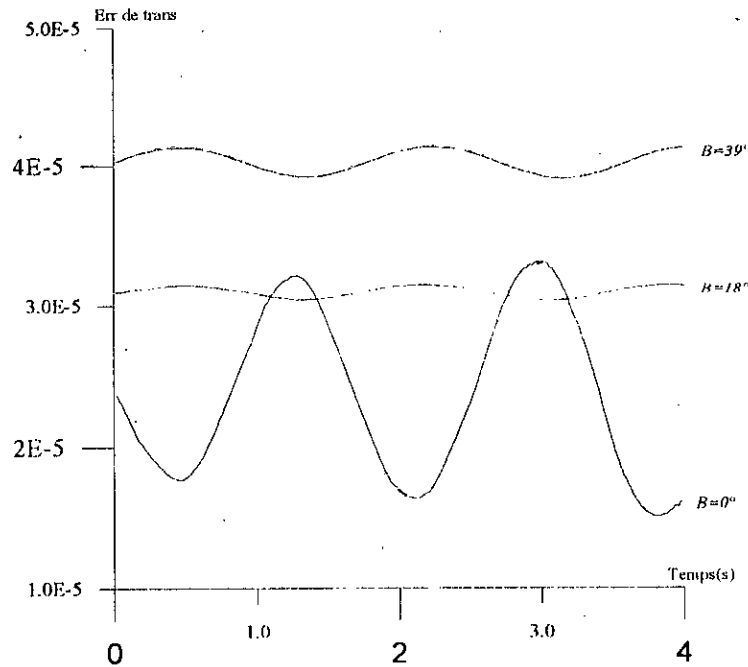
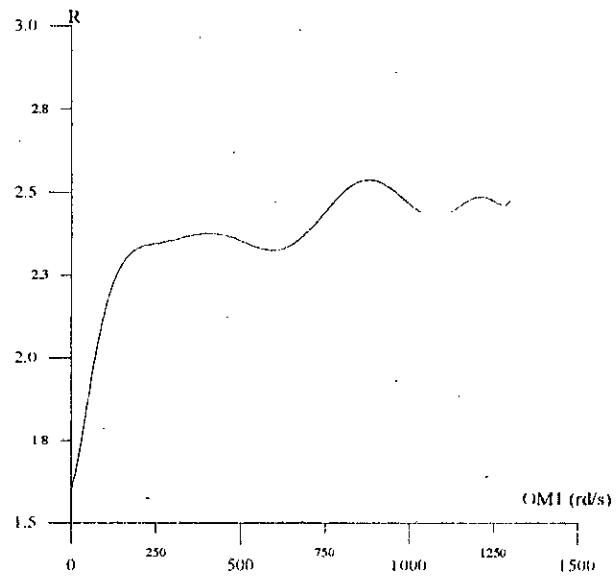


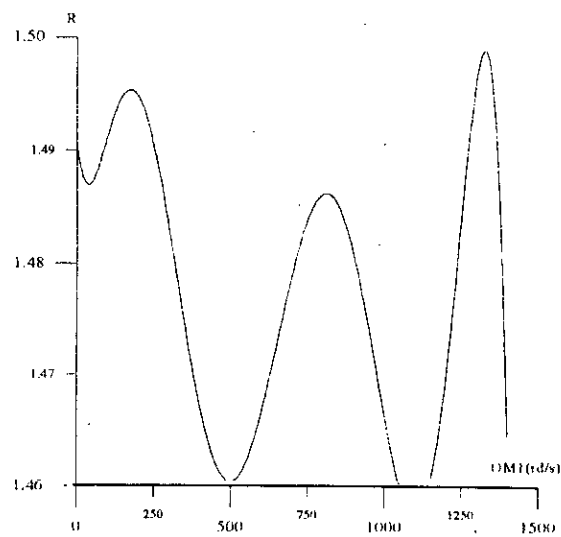
Fig. V.12: variation de l'erreur de transmission en fonction du rapport de conduite (angle d'hélice), avec $e_{12}(i, j) = a \sin(\omega_e t)$, $a = 5E-6$

V.5. CONCLUSION

L'existence des erreurs de ce type entraîne une amplification des efforts dynamiques existants entre un couple de dents en contact. Dans le cas sans erreur géométrique l'effort dynamique maximal peut atteindre, pour certaine pulsation d'engrènement une fois et demie de l'effort statique. Mais avec ce type d'erreurs géométriques l'effort dynamique dépasse deux fois et demie l'effort statique (Figure.V. 13). De même on constate l'existence de fortes amplitudes. *pic/σE* *faibles*



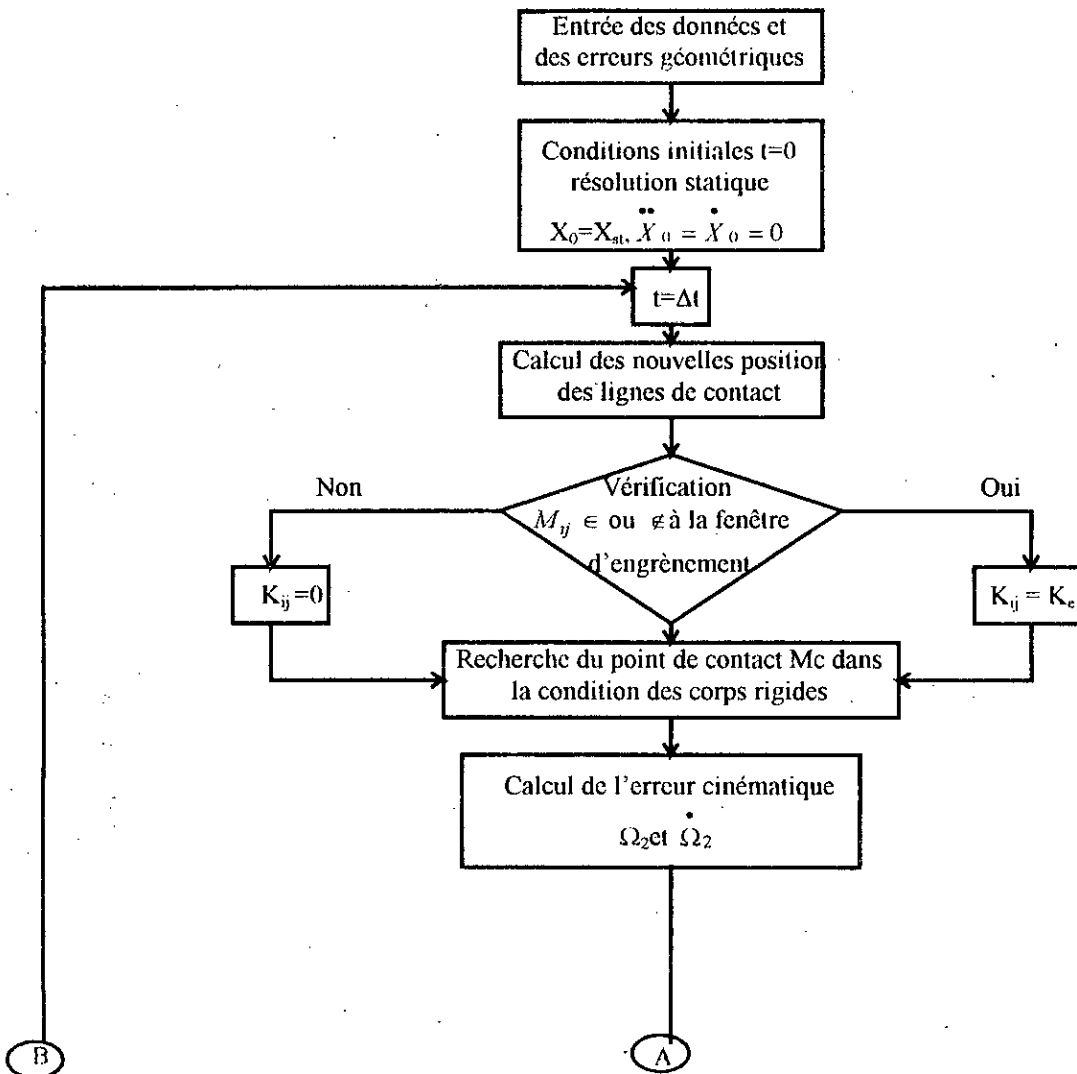
(a): cas avec erreur

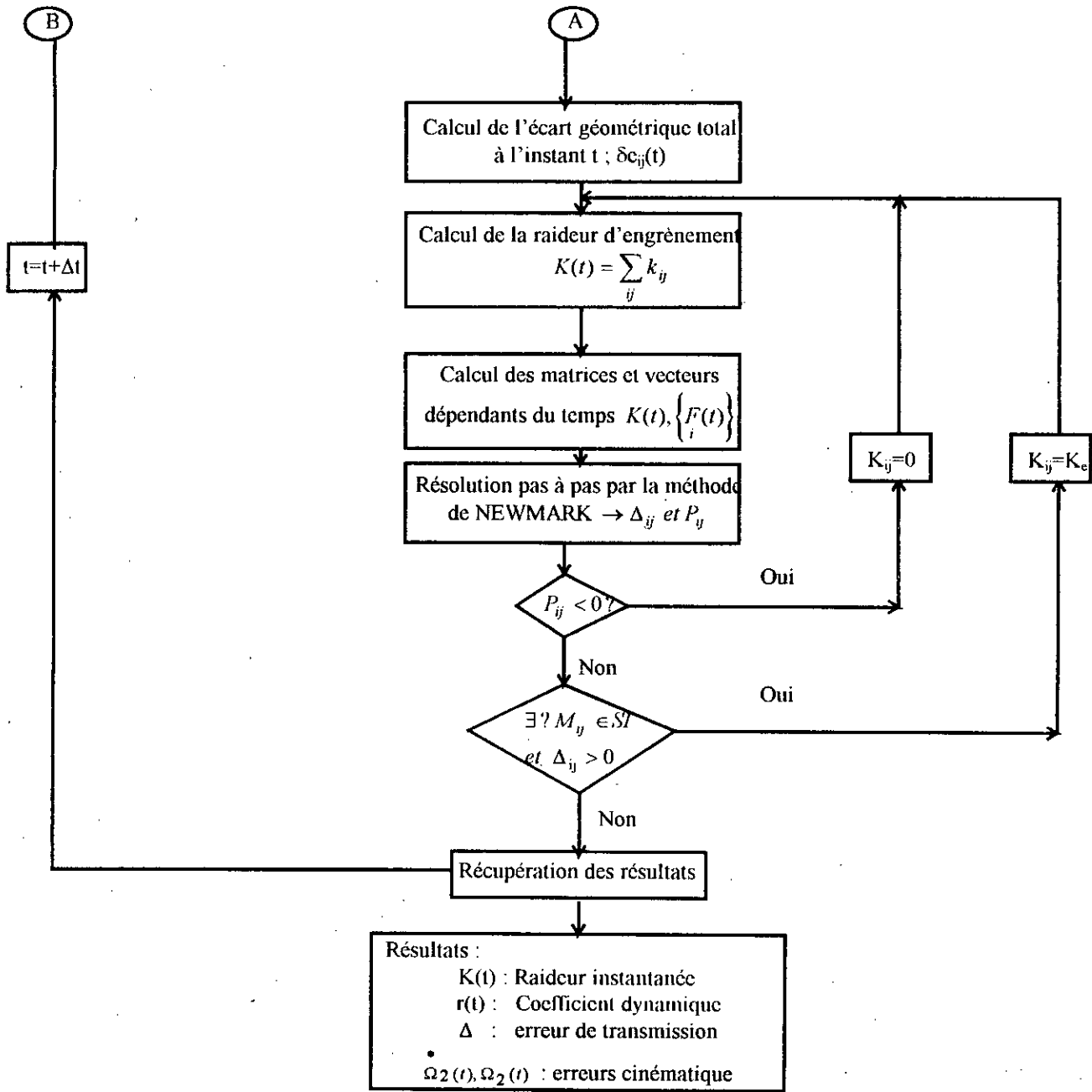


(b): cas sans erreur

Fig. V.13: Rapport de l'effort dynamique maximal en fonction des pulsations d'engrènement pour $\beta_b = 18^\circ$

ORGANIGRAMME DU LOGICIEL [GEAR4DOF]





CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE

Les vibrations sont sensibles au comportement dynamique des engrenages, bien que ce comportement a été largement étudié dans la littérature par utilisations des différentes approches.

Notons que, l'objectif principal de ce travail est d'élaborer un logiciel de calcul permettant la simulation du comportement dynamique des réducteurs à engrenages, à axes parallèles, avec et sans présence des écarts de forme par rapport à la développante de cercle théorique. Ce logiciel doit permettre une meilleure conception et conduire à l'élimination des essais sur prototypes souvent effectués avant chaque conception, cela suppose une facilité d'emploi et une large utilisation surtout au niveau du bureau d'étude.

Le code de calcul que nous avons développé aux prix d'un effort de conception important permet de traiter une grande variété le contact des engrenages à dentures droites et hélicoïdales par une simple modification des données et peut s'intégrer efficacement dans des logiciels d'études dynamiques ou de dimensionnement industriel.

Le modèle représentatif des différentes approches de l'analyse dynamique qu'on a adopté nous a permis d'aboutir aux résultats suivants :

- Les vitesses critiques de fonctionnement.
- L'influence du coefficient d'amortissement.
- Les charges dynamiques instantanées sur les dentures.
- Les déformations élastiques (erreurs de transmission) instantanées des dents en contact.
- L'influence du rapport de conduite sur la raideur et les efforts dynamiques.

La ^{comparaison} ~~comparaison~~ des résultats, obtenus par notre approche nous a révélé la concordance presque parfaite avec ceux obtenus par différentes approches citées dans la

bibliographie, plus particulièrement ceux obtenus par le docteur VELEX [11],[31] dans le même cadre.

Avec la présence des écarts de forme par rapport à la développante de cercle théorique, nous avons analysé l'effet de ces erreurs sur le comportement dynamique du réducteur et particulièrement sur :

- L'effort dynamique.
- L'erreur de transmission.
- ~~Couples statiques~~

Cette étude a montré la possibilité plus ou moins importante ^{de présence} des pertes de contact suivies par des chocs, ce qui est en accord avec les constatations expérimentales.

Au début de cette analyse on a supposé que les contacts entre profils adjacents se font dans le plan d'action (les dents corrigées), mais réellement le contact se fait hors du plan d'action (dents non corrigées).

La correction des dents d'engrenages est un problème de plusieurs recherches notamment celles faites par les bureaux d'études au cours des dernières décennies.

Il serait judicieux d'approfondir ce genre d'étude en tenant compte des hypothèses citées au début, et de la déformation due à la flexion des dents, donc il serait nécessaire en plus, de procéder au développement de ce programme de calcul [GEAR4DOF].

Notons, qu'à l'échelle industrielle des observations montrent qu'il y a un manque d'outils numériques, qui auraient pu nous servir dans notre étude.

Ce travail peut être complété par une analyse plus détaillée sur la correction des profils que nous proposons pour une éventuelle étude.

Enfin, Pour valider les résultats obtenus, il est indispensable d'envisager une analyse expérimentale.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **WINTER H.** "The measurement of setuat strains at gear teeth. Influence of fillet reduis on stress and tooth stringth". Journal of Engineering for Industry, Trans. A.S.M.E Feb. 1974.
- [2] **JACOBSON (M.A.)**. "Bending stresser in spur gear teeth: proposed new design factors based on photo-elastic investigation". Proceedings of Institution of MechanicalEngineers, n°169,(1955).
- [3] **BELHANECHÉ H.** "Contribution à l'étude du comportement statique et vibratoire des engrenages à axes parallèles a denture droite par speckle et holographie". Thèse docteur Ingénieur , I.N.S.A de lyon (1988).
- [4] **WALKER (M.H.)**. "Flexion des dents et modification du profil". Société d'étude de l'industrie de l'engrenage, N°11, 1938, page 24-40.
- [5] **WEBER C.** " The déformation of loaded gears and the effect of their load-carryingcapacity". Part I, département of scientice and industrial research, sponsored research (germany), n°3, London (1949).
- [6] **ATTIA (A.Y.)**. "Deflection of spur gear, cut in thin rims". Journal of Engineering for Idustry Trans. A.S.M.E , Nov.1964, page 333-342.
- [7] **DESAILLY R.** " Mesure des déplacements par méthodes optiques, synthèse des limitations". Journées extensométrie, G.A.M.C, C.A.S.T Lyon, 1985, page 1-25.
- [8] **SCIAMMRELLA (C. A.), GILBERT (J.A.)**. "A holmograhie moré technique to obtain separate patterns for components of displacement". Journal of Engineering for Industry, A.S.M.E Feb. 1974, p85-92.
- [9] **WANG (K.L.), CHENG (H.S.)**. " A Numerical solution to the dynamic load, film thickness, and surface temperatures in spur gears". Part I : analysis, Part II : Resolutions. Journal of Mecanical Design, AS.M.E, Trans, Jan.1981, vol.103, p177-193.
- [10] **WILCOX L., COLMAN W.** " Application of finite elements to the analysis of gear tooth stresses". Journal of Engineering for Industry,(1973).
- [11] **VELEX Ph.** " Contribution à l'analyse du comportement dynamique de réducteurs à engrenages à axes parallèles". Thèse de doctorat, i.n.s.a de lyon, (1988).
- [12] **SAINOT Ph.** "Analyse du contacte entre dentures d'engrenages cylindriques de réducteurs". Thèse de doctorat, I.N.S.A de lyon, 1989,205p.
- [13] **COY J., CHAO (C.H.C.)**. " A method of slicing grid size to account for Hertz déformation en finite element analysis spur gears". Journal of Mecanical Design, AS.M.E, Trans, 1982, vol. 104.

- [14] **OLAUORADE (A.A.) and PLAY D.** "Présentation de la méthode des prismes finis, Resultat avec des dentures droites". Rapport interne, Lab. C.A.S.M Dept. G.M.D. I.N.S.A de lyon Mais (1988).
- [15] **ABBA M.** "Elaboration d'un logiciel de calcul la flexion d'une dent d'engrenage droit par la méthode des éléments finis". Thèse d'ingénieur E.N.P, (1990).
- [16] **PREMILHAT A., TORDIONG V. et BARONET (C.N.).** "Animproved determination of the elastic compliance of spur gear tooth acted by a concentrated load".
- [17] **LIN H., OSWALD F., TOWNSD (D.P.).** "Dynamic loading of spur gears with lineaire or parabolic tooth profile modifications". Journal of Mecanical Stylique, AS.M.E, Trans.
- [18] **CORNELL (R.W.).** "Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth". Journal of Mecanical Design, 1981, vol. 103,p477-459.
- [19] **TOBE T., KATO M., INOUE K.** "Bending of stub cantiliver plate and some applications to strengh of gear teeth". Journal of Mecanical Design, AS.M.E, Trans, (1981).
- [20] **CARDOU A. and TORDION (G.V.).** "Numerical implementation of complex potentielles for gear tooth stress analysis". Journal of Mecanical Design, AS.M.E, Trans. April 1981, vol. 103.
- [21] **KAZUNORI I., FUJUO H.** "Dynamic behavior of heary-loaded spur gears". Journal of Engineering for Industry, May (1974).
- [22] **BOYER A., ASTRE P., CARACCI G.** "Géométrie et calcul de résistance, la flexion des dentures droites , Influence sur diverses caracteristiques d'engrenements". Lab.g. mec.,I.N.S.A.de Toulouse, Journal of Mecanical Design.
- [23] **CHABERT G., DANG T., MATHIS R.** "An evaluation of stresses and deflection of gear theeth under strain". Journal of Engineering for Industry, Feb. 1974, p85-92.
- [24] **DOWSON D., HIGGINSON (G.R.).** "A numerical solution to the hylastohydrodynamic problem". Journal of Mecanical Engineering Science, 1959, vol1, p6-15.
- [25] **BREBIA (C.A.), WALKER (M.A.).** "Bondary element technique in engineering". New york, Newnes, Butterworths, (1980).
- [26] **HENRIOT G.** "Traité théorique et pratique des engrenages". tome1: Théorie et technologie, tome2: étude complète du matériel, Paris Dunod 1983.
- [27] **BELHANECHÉ H.** "Mécanique analytique". cours et exercices corrigé 3émé année g.méc. E.N.P 92-93.
- [28] **DOWSON D., TAYLOR (C.M.), GODET M. and BERTHE D.** "Tribological design of machine elements tribology". series 14, proceedings of the 15th leeds-lyon symposium on tribology held at bodington Hall, the university of leeds, (1989).

- [29] **DALMAZ G.** "Le film mince visqueux dans les contacts hertziens en régimes hydrodynamique et elasto-hydrodynamique". Thèse de doctorat d'état es-sciences, I.N.S.A de Lyon, 221p, 1979.
- [30] **CARNEIRO (E.A.)**. "Résolution du contact élastique entre deux corps rugueux". Thèse de doctorat I.N.S.A de Lyon, 150p, (1987).
- [31] **VELEX Ph.** "Une modélisation du comportement dynamique de réducteur à engrenages à axes parallèles". 4ème journée d'études, Transmission mécanique E.C.A.M Lyon, 20-21- 22-07-1990.
- [32] **ROCHAT F.** "Lignes et surfaces d'actions des engrenages à axes parallèles et à axes concourants, Influence et dimensions des dents (S.E.I.E. Bull), n°56 Oct. 1968.
- [33] **HUGUES (J.G.), GUERITEY (P.M.), FAURE L.** "Etude dynamique torsionnelle, chaînes cinématique à engrenages".
- [34] **HIRAREFI A., RADZIMOVSKY E.** "Effects of torsional vibration on the efficiency and the coefficient of friction in gear transmission systems". America of Mechanical Engineering A.S.M.E. Aug. 1975.
- [35] **LALANNE H., BERTHIER P., DERHAGOPIAN J.** "Mécanique des vibrations linéaires". I.N.S.A de Lyon, Masson, (1980).
- [36] **WILLIAM T.**, "Theory of vibration with application". département of mechanical and Engineering. University of California, second édition.
- [37] **SETO W.** "Theory and problems of mechanical vibrations". Schum's outline. Hill book company-toronto-1964.
- [38] **ABUID (B.A.), BELNIKOVSKY (B.G.)**. "Study of the dynamic loads in machines with spur gears". Part I: Eighth world congress on the theory of machines and mechanisms, Prague Czechoslovakia, Aug. 26-31-1991.
- [39] **WILLIAM D. MARK** "Analysis of the vibration excitation of gear systems: Basic". Acoustical society of America, May 1978.
- [40] **GERADIN H., RUBERT G.** "Vibration de torsion et déflexion d'un train d'engrenages". I.N.S.A de Lyon, 1981, Dec. 1981, vol. B/370, 1-30.
- [41] **DJELLOULI R.** "Analyse mathématique". cours et exercices corrigés, 2ème année T.C. E.N.P., (1992).
- [42] **WANG (S.M.)**. "Analysis of nonlinear transient motion of a gear torsional". Journal of Engineering for Industry Feb. 1974, p 51-59.

ANNEXES

ANNEXE I

GEOMETRIE DES ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURE DROITE ET HELICOIDALE A PROFILS EN DEVELOPPANTE DE CERCLE

I. ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURE DROITE

En chaque point de l'engrènement, les géométries et les vitesses des surfaces de dentures ainsi que la charge transmise varient. Il a été montré que pour des engrenages cylindriques droits à axes parallèles, on peut représenter un point donné de l'engrènement en régime permanent par le contact entre deux cylindres d'axes parallèles munis des mêmes charges, géométrie et vitesses [26], figure (II.1).

Les paramètres de contact utilisé pour la simulation de l'engrènement sont généralement cinq points :

T_1' : Premier point de l'engrènement en pied de pignon avec deux couples de dent en prise.

T_1'' : Point de transition entre pied de pignon et primitif, de deux à un couple de dents en prise, la charge normale étant supposée transmise par un seul couple de dents.

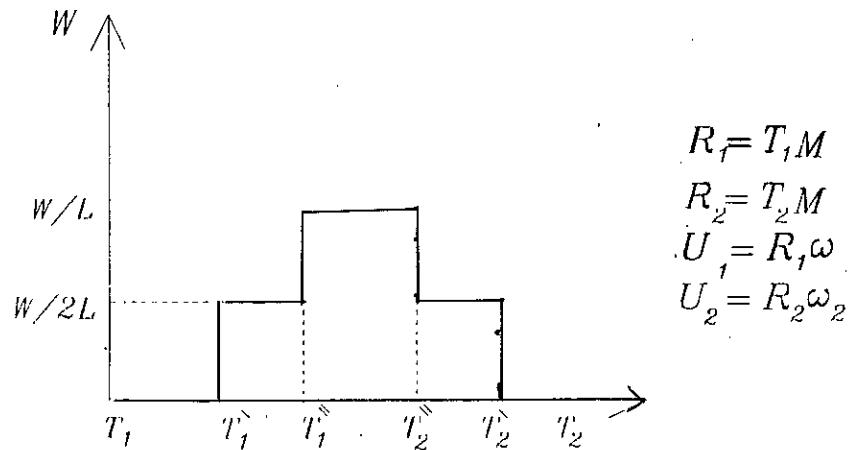
I : Point de contact confondu avec le primitif.

T_2'' : Point de transition entre primitif et sommet de pignon, de un à deux couples de dents en prise, ici encore la charge normale est supposée transmise par un seul couple de dents.

T_2' : Dernier point de l'engrènement au sommet du pignon avec deux couples de dents en prise.

En chaque point du profil, il faut définir :

- Les rayons de courbure des deux dents au point de contact R_1, R_2 .
- Les vitesses respectives des deux massifs U_1, U_2 .
- La charge par unité de longueur (normale en contact) w/l fig(A1).



Fig(A1): Digramme de charge

Afin de déterminer la géométrie d'un engrenage, il faut connaître les paramètres de taillages et de fonctionnement suivants :

- Le nombre de dents Z_1, Z_2 .
- Les coefficients de dépôts x_1, x_2 .
- L'angle de pression de taillage α_0 .
- Le module de taillage m_0 .
- La largeur de l'engrènement le plus étroit l .
- L'entraxe a .
- Les saillies des dents h_{a1}, h_{a2} .
- Les creux des dents h_{f1}, h_{f2} .
- La vitesse d'entrée ω_1 .

Ainsi que les caractéristiques du matériaux et du lubrifiant :

- Les coefficients de poisson ν_1, ν_2 .
- La viscosité à l'entrée du contact μ
- Le coefficient de piézoviscosité α
- Le coefficient de frottement f .
- Les masses volumiques ρ_1, ρ_2 .

Avec ces données, nous pouvons définir [26] :

- Les rayons primitifs nominaux :

$$r_i = \frac{m_0 Z_i}{2} \quad i=1,2$$

- Les rayons de base :

$$r_{bi} = r_i \cos \alpha_0 \quad i=1,2$$

- Les rayons de tête :

$$r_{ai} = r_i + x_i m_0 + h_{ai}$$

- Le pas de base :

$$P_b = \pi m_0 \cos \alpha_0$$

- L'angle de pression de fonctionnement :

$$\alpha' = \arccos \left(\frac{r_{b1} + r_{b2}}{a} \right)$$

- Le module de fonctionnement :

$$m' = m_0 \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha'}$$

- Les rayons primitifs de fonctionnement :

$$r_i' = \frac{m' Z_i}{2} \quad i=1,2$$

- L'effort normal aux dents :

$$w = \frac{Q}{r_{b1} w_1} \quad i=1,2$$

- Les longueurs :

$$\begin{cases} T_1 T_2 = \sqrt{a^2 - (r_{b1} - r_{b2})^2} \\ T_1 T_1' = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \\ T_2 T_2' = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \\ T_1' T_2' = T_1 T_2 - T_1 T_1' - T_2 T_2' \end{cases}$$

- Le module d'Young équivalent :

$$\frac{1}{E_q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

On peut calculer les caractéristiques de l'engrènement en $n + 1$ points du profil.

Pour cela, nous divisons la ligne d'action entre T_1' et T_2' en n segments de longueur $P = \frac{T_1' T_2'}{n}$

Nous avons alors en chaque point :

$$\begin{aligned} R_1 &= T_1' T_2' + ip \\ R_2 &= T_1 T_2 - R_1 \\ U_1 &= w_1 R_1 \\ U_2 &= w_2 R_2 \end{aligned} \quad i=1,2$$

- Le rayon de courbure équivalent est :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- L'épaisseur minimale est donnée par la formule de Dowson-Higginson :

$$h_m = 0,98 \alpha^{0,6} E_{eq}^{0,03} \mu^{0,7} (U_1 + U_2)^{0,7} R_{eq}^{0,43} \left(\frac{w}{L} \right)^{-0,13}$$

- Le glissement spécifique : *total absolue*

$$V_g = \frac{|U_1 - U_2|}{U_1 + U_2}$$

II. ENGRENAGES CYLINDRIQUES A DENTURE HELICOIDALE

Le contact entre deux dents d'engrenage hélicoïdal ne sera plus représenté par le contact entre deux cylindres, mais par le contact entre deux cônes de même conicité β_b .

Pour connaître les caractéristiques de l'engrenage, il faut connaître :

- Le nombre de dents des roues 1 et 2 : Z_1, Z_2 .
- Les coefficients de déport des roues 1 et 2 : x_1, x_2 .
- L'angle de pression normal de α_{no} ^{taillage}.
- Le module normal de taillage : m_{no} .
- L'inclinaison d'hélice : β_0 .
- La largeur de l'engrenage : l .
- L'entraxe : a .
- Les saillies des roues 1 et 2 : h_{a1}, h_{a2} .
- Les creux des roues 1 et 2 : h_{f1}, h_{f2} .
- La vitesse d'entrée de la roue 1 : ω_1 .
- La puissance transmise : Q .
- Les modules d'Young des roues 1 et 2 : E_1, E_2 .
- La viscosité à l'entrée du contact : μ .
- Le coefficient de frottement : f .
- Le coefficient de piezoviscosité : α .

Nous pouvons alors calculer :

- L'angle de pression apparent de taillage :

$$\alpha_{t0} = \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha_{n0}}{\cos \beta_0} \right]$$

- L'angle d'hélice de base :

$$\beta_b = \arctg \left[\operatorname{tg} \beta_0 \cdot \cos \alpha_{t0} \right]$$

- Le module apparent de taillage :

$$m_{t0} = \frac{m_{n0}}{\cos \beta_0}$$

- Les rayons primitifs nominaux :

$$r_i = \frac{m_{t0} \cdot Z_i}{2} \quad i=1,2$$

- Les rayons de base :

$$r_{bi} = r_i \cos \alpha_{t0} \quad i=1,2$$

- Les rayons de tête :

$$r_{ai} = r_i + x_i m_{n0} + h_{ai} \quad i=1,2$$

- Le pas de base réel :

$$P_{bn} = \pi m_{n0} \cos \alpha_{n0}$$

- Le pas de base apparent :

$$P_{bt} = \pi m_{t0} \cos \alpha_{t0}$$

- Le pas axial :

$$P_x = \frac{P_{bn}}{\sin \beta_b}$$

- L'angle de pression apparent de fonctionnement :

$$\alpha'_t = \arccos \left[\frac{(r_{b1} + r_{b2})}{a} \right]$$

- L'angle d'hélice de fonctionnement :

$$\beta' = \arctg \left[\frac{\operatorname{tg} \beta_b}{\cos \alpha'_t} \right]$$

- L'angle de pression normal de fonctionnement :

$$\alpha'_n = \arctg \left[\operatorname{tg} \alpha'_t \cdot \cos \beta' \right]$$

- Le module apparent de fonctionnement :

$$m'_t = \frac{m'_n}{\cos \beta'}$$

- Les rayons primitifs de fonctionnement :

$$r'_i = \frac{m'_t Z_i}{2} \quad i=1,2$$

- Les longueurs :

$$\begin{cases} T_1 T_2 = \sqrt{a^2 - (r_{b1} - r_{b2})^2} \\ T_1 T_1' = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \\ T_2 T_2' = T_1 T_2 - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \\ T_1' T_2' = T_1 T_2 - T_1 T_1' - T_2 T_2' \end{cases}$$

- Le rapport de conduite :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{T_1' T_2'}{P_{bt}}$$

- Le rapport de recouvrement :

$$\varepsilon_\beta = \frac{tg \beta'}{\pi m_i'}$$

- Le rapport de conduite total :

$$\varepsilon_t = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \frac{T_1' T_2'}{P_{bt}} + \frac{tg \beta'}{\pi m_i'}$$

- Le module d'Young équivalent :

$$\frac{1}{E_q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

Nous pouvons déterminer les caractéristiques de l'engrènement en $n + 1$ points du profil. Pour cela, nous divisons la ligne d'action entre T_1' et T_2' en segments de longueur

$$p = \frac{T_1' T_2'}{n}$$

Nous avons alors en chaque point :

$$R_1 = (T_1 T_1' + ip) / \cos \beta_b$$

$$R_2 = T_1 T_2 / \cos \beta_b - R_1$$

$$U_1 = w_1 R_1 \cos \beta_b$$

$i=0,n$

$$U_2 = w_2 R_2 \cos \beta_b$$

- Le rayon de courbure équivalent est :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Ainsi on peut déterminer :

- L'épaisseur minimale du film fluide (**DOWSON-HIGGINSON**).

$$h_m = 0,98 \alpha^{0,6} E_{eq}^{0,03} \mu^{0,7} (U_1 + U_2)^{0,7} R_{eq}^{0,43} \left(\frac{w}{L}\right)^{-0,13}$$

- La pression de Hertz au centre du contact :

$$P_0 = \frac{2}{\pi} \frac{w}{a} \frac{w}{L}$$

$$\text{avec } a = \sqrt{\frac{8 R_{eq} w}{\pi E_{eq} L}}$$

- Le glissement spécifique :

$$V_g = \frac{|U_1 - U_2|}{U_1 + U_2}$$

ANNEXE II

ETUDE VIBRATOIRE

METHODE DES PERTURBATIONS

On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$[M] \left\{ \ddot{X} \right\} + [C] \left\{ \dot{X} \right\} + [K] \left\{ X \right\} = \left\{ F(t) \right\}$$

1. Recherche des fréquences et des modes propres

L'amortissement est supposé négligeable de telle façon qu'il ne modifie pas beaucoup les fréquences propres.

Les valeurs propres sont déduites de l'annulation du déterminant de la matrice $[K] - \lambda_i [M]$. On suppose que toutes les valeurs propres sont distinctes et réelles positives ce qui est le cas de la majorité des systèmes réels.

Les fréquences propres sont déduites des relations suivantes :

$$\lambda_i = \omega_i^2$$

Les modes propres $\{\phi_i\}$ associés aux fréquences propres ω_i sont obtenus à partir des équations suivantes :

$$([K] - \lambda_i [M]) \{\phi_i\} = \{0\}$$

On norme les vecteurs propres par : $\|\{\phi_i\}\| = 1$

Soit $[\phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}]$ matrice de passage de la base de l'espace physique à la base modale.

$$\{X\} = [\phi] \{q\} \Leftrightarrow \{q\} = [\phi]^T \{X\}$$

Dans la base modale le système différentiel devient :

$$[\phi]^T [M] [\phi] \left\{ \ddot{q} \right\} + [\phi]^T [C] [\phi] \left\{ \dot{q} \right\} + [\phi]^T [K] [\phi] \left\{ q \right\} = [\phi]^T \{ F(t) \}$$

$$[M \phi] \left\{ \ddot{q} \right\} + [C \phi] \left\{ \dot{q} \right\} + [K \phi] \left\{ q \right\} = \{ F \phi \}$$

$[M \phi]$, $[C \phi]$ et $[K \phi]$ sont des matrices diagonales.

Pour résoudre une équation différentielle d'ordre N, il suffit de résoudre N équations différentielles de 2^{ème} ordre indépendamment (N équations découplées).

Le retour à la base de l'espace physique s'obtient facilement par l'exploitation de l'équation :

$$\{ X \} = [\phi] \{ q \}$$

Remarques :

- Dans le cas où les valeurs propres sont des réels positifs mais pas tous distincts le problème sera le même sauf que la dimension du système sera réduite.
- Dans le cas où les valeurs propres sont des réels négatifs, ce qui est plus rare à rencontrer, les solutions ne sont pas sinusoïdales avec risque d'instabilité.

Dans le cas où la matrice $[M]^{-1}[K]$ n'est pas diagonalisable on effectue une « Jordanisation » puis résolution analytique pas à pas en commençant du bas vers le haut.

2. Equation de 2eme ordre :

$$m \ddot{X} + c \dot{X} + kX = F(t) \quad (1)$$

2-1) Excitation Harmonique

$$F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$$

La solution en régime permanent est cherchée sous la forme :

$$X = A \sin(\Omega t + \varphi) \quad (2)$$

A : est l'amplitude de la réponse

φ : est le déphasage de la réponse par rapport à la force d'excitation.

En identifiant les termes en $\sin(\Omega t)$ et en $\cos(\Omega t)$

$$C\Omega \cos(\varphi) - (k - m\Omega^2) \sin(\varphi) = 0 \quad (3)$$

$$[(k - m\Omega^2) \cos(\varphi) + C\Omega \sin(\varphi)] A - F_0 = 0 \quad (4)$$

(3) permet d'exprimer $\sin(\varphi)$ en fonction de $\cos(\varphi)$

$$\sin(\varphi) = \frac{C \beta \Omega \cos(\varphi)}{k - m \Omega^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{F_0}{A} \frac{k - m\Omega^2}{(K - m\Omega^2)^2 + C^2\Omega^2}$$

en utilisant l'identité : $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$, il vient :

$$X = \frac{F_0}{[(K - m\Omega^2)^2 + C^2\Omega^2]^{1/2}} \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{C\Omega}{K - m^2\Omega}$$

Soit $\omega_n = (k/m)^{1/2}$ fréquence naturelle du système

soit $\xi = c / (2m\omega_n)$ facteur d'amortissement

$$X = \frac{F_0}{k \left[\left[1 - (\Omega / \omega_n)^2 \right]^2 + \left[2\xi\Omega / \omega_n \right]^2 \right]^{1/2}} \quad \text{tg}(\varphi) = \frac{2\xi(\Omega / \omega_n)}{1 - (\Omega / \omega_n)^2}$$

On peut démontrer que l'amplitude est maximale pour :

$$\Omega / \omega_n = (1 - 2\xi^2)^{1/2}$$

dans ce cas on obtient :

$$X = \frac{F_0}{2 K \xi [1 - \xi^2]^{1/2}} \quad ; \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{[1 - 2 \xi^2]^{1/2}}{\xi}$$

En effet pour un système réel on a couramment $\xi < 0,1$ auquel cas on obtient :

$$\Omega / \omega_n \cong 1 - \xi \cong 1$$

$$X = \frac{F_0}{2 K \xi} (1 + (\xi^2 / 2)) \cong F_0 / (2 K \xi)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) \cong 1 / \xi$$

La résonance de phase et la résonance d'amplitude sont pratiquement confondues.

On peut voir les cas quand $\Omega \ll \omega_n$, $\Omega = \omega_n$ et $\Omega \gg \omega_n$.

2-2) Excitation périodique

La force d'excitation périodique, de période $T=2\pi/\Omega$, peut se transformer en série de Fourier.

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\Omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\Omega t) dt$$

En régime permanent, on calcule la réponse correspondante à chaque harmonique et on reconstruit la réponse par simple superposition.

Prenant un cas simple où $F(t)$ est une fonction en créneau

$$\begin{cases} F(t) = 1 & \text{si } t < n(T/2), \quad n \text{ impair} \\ F(t) = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

Tous calculs conduit à :

$$F(t) = \frac{F_0}{2} + \frac{2F_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\Omega t)}{n}$$

Par suite la solution en régime permanent est :

$$X(t) = \frac{F_0}{2K} + \frac{2F_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\Omega t)}{n \left([k - m(n\Omega)^2]^2 + [Cn\Omega]^2 \right)^{1/2}}$$

On voit apparaître la possibilité de résonance pour :

$$K - mn^2\Omega^2 = 0 \quad \implies \quad \Omega = \frac{\omega_n}{n}$$

2-3) Equation différentielle à coefficients périodiques

On prend le cas où la matrice raideur est à coefficients périodiques dans le temps (de même période $T=2\pi/\omega_n$) et on néglige l'amortissement. La matrice masse est constante.

$$[M] \{ \ddot{X} \} + [K(t)] \{ X \} = \{ F_0 \} \quad (F_0 = \text{constante})$$

On se place dans le cas où :

$$[K(t)] = (1 + \alpha \phi(t)) [K_m]$$

$$[M] \{ \ddot{X} \} + [K_m] (1 + \alpha \phi(t)) \{ X \} = \{ F_0 \} \quad (5)$$

$\phi(t)$ est une fonction périodique de période $T = 2\pi/\omega_m$ donc transformable en série de Fourier.

$$\phi(t) = \sum_n a_n \cos(n\omega_m t) + b_n \sin(n\omega_m t)$$

Il a été prouvé que les équations différentielles à coefficients périodiques n'admettent pas de solutions exactes cependant une solution approchée peut être envisagée par l'utilisation des méthodes de perturbations.

En formulant l'hypothèse d'un α petit devant l'unité, ce qui est le cas des engrenages, il est possible de décomposer la solution de l'équation en une partie principale et une somme de perturbations de poids décroissants, soit :

$$\{X\} = \{X_0\} + \alpha\{X_1\} + \alpha^2\{X_2\} + \dots$$

On se limite à l'ordre 1

$$\{X\} = \{X_0\} + \alpha\{X_1\} \quad (6)$$

En introduisant (6) dans l'équation du mouvement (5) il vient :

$$[M]\{\ddot{X}_0\} + \alpha[M]\{\ddot{X}_1\} + [Km](1 + \alpha\phi)\{X_0\} + \alpha[Km](1 + \alpha\phi)\{X_1\} = \{F_0\}$$

$$[M]\{\ddot{X}_0\} + [Km]\{X_0\} + \alpha\left[[M]\{\ddot{X}_1\} + [Km]\{X_1\} + [Km]\phi\{X_0\}\right] + \alpha^2\left[[Km]\phi\{X_1\}\right] = \{F_0\}$$

En négligeant les termes en α^2 (α petit), en identifiant les termes de même ordre il vient :

Ordre α^0 :

$$[M] \left\{ \ddot{X}_0 \right\} + [Km] \left\{ X_0 \right\} = \left\{ F_0 \right\}$$

La solution en régime permanent de cette équation coïncide avec la solution statique pour raideur moyenne $\left\{ X_{st} \right\}$

■ **Ordre α^1 :**

$$[M] \left\{ \ddot{X}_1 \right\} + [Km] \left\{ X_1 \right\} = -[Km] \phi(t) \left\{ X_{st} \right\}$$

Posons $\left\{ A \right\} = [Km] \left\{ X_{st} \right\}$

$$[M] \left\{ \ddot{X}_1 \right\} + [Km] \left\{ X_1 \right\} = \left\{ A \right\} \sum_n a_n \cos(n \omega_m t) + b_n \sin(n \omega_m t)$$

On revient à une équation différentielle à excitation périodique dont on connaît la solution.

$$\left\{ X_1(t) \right\} = \sum_n \left\{ A_n \right\} \cos(n \omega_m t + \varphi_n) + \left\{ B_n \right\} \sin(n \omega_m t + \varphi_n)$$

avec :

$$\left\{ A_n \right\} = \left\{ A \right\} \frac{a_n}{\left[(K - m(n \omega_m)^2)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\left\{ B_n \right\} = \left\{ A \right\} \frac{b_n}{\left[(K - m(n \omega_m)^2)^2 \right]^{1/2}}$$

■ La solution générale en régime permanent sera :

$$\left\{ X(t) \right\} = \left\{ X_{st} \right\} + \alpha \sum_n \left\{ A_n \right\} \cos(n \omega_m t + \varphi_n) + \left\{ B_n \right\} \sin(n \omega_m t + \varphi_n)$$

- Si $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ sont les fréquences propres du système on constate la possibilité de résonance en $\omega_m = \Omega_i / n \quad i=1, 2, \dots$

Remarque :

Cela est très important pour expliquer les résonances (pics) pour les résultats obtenus par la méthode numérique.

ANNEXE III

**ALGORITHME DE LA METHODE IMPLICITE
DE
NEWMARK**

- Résolution pas à pas
- Méthode implicite de NEWMARK

Soit le système du seconde ordre :

$$\ddot{X} = F(X, \dot{X}, t)$$

Le schéma implicite de NEWMARK [24] est construit à partir de développement de Taylor de vecteurs déplacement, et vitesse à l'instant $t_1 = t_0 + \Delta t$

$$\{X_1\} = \{X_0\} + \Delta t \{\dot{X}_0\} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{X}_0\} + \frac{1}{6} (6\alpha) \Delta t^3 \{\dddot{X}_0\} + O(\Delta t^3)$$

$$\{\dot{X}_1\} = \{\dot{X}_0\} + \Delta t \{\ddot{X}_0\} + \frac{1}{2} 2\delta \Delta t^2 \{\dddot{X}_0\} + O(\Delta t^3)$$

α et δ sont des facteurs de pondération utilisés dans le but de stabiliser la solution.

En utilisant le fait que $\{\dddot{X}_1\} = \frac{\{\ddot{X}_1\} - \{\ddot{X}_0\}}{\Delta t}$

$$\begin{cases} \{X_1\} = \{X_0\} + \Delta t \{\dot{X}_0\} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{X}_0\} + \alpha \{\ddot{X}_1\} \right] \\ \{\dot{X}_1\} = \{\dot{X}_0\} + \Delta t \left[(1 - \delta) \{\ddot{X}_0\} + \delta \{\ddot{X}_1\} \right] \end{cases} \quad (I)$$

Le système (I) présenté sous la forme générale de NEWMARK. Nous utilisons son expression la plus connu « Loi Trapezoïdale ». Dans ce cas on prend $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\delta = \frac{1}{2}$

il vient :

$$\begin{cases} \{X_1\} = \{X_0\} + \Delta t \{\dot{X}_0\} + 0,25 \Delta t^2 (\{\ddot{X}_0\} + \{\ddot{X}_1\}) \\ \{\dot{X}_1\} = \{\dot{X}_0\} + 0,5 \Delta t [\{\ddot{X}_0\} + \{\ddot{X}_1\}] \end{cases} \quad (\text{II})$$

L'étude dynamique conduit à une équation différentielle de la forme suivante :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [c]\{\dot{X}\} + [k]\{X\} = \{F(t)\} \quad (\text{III})$$

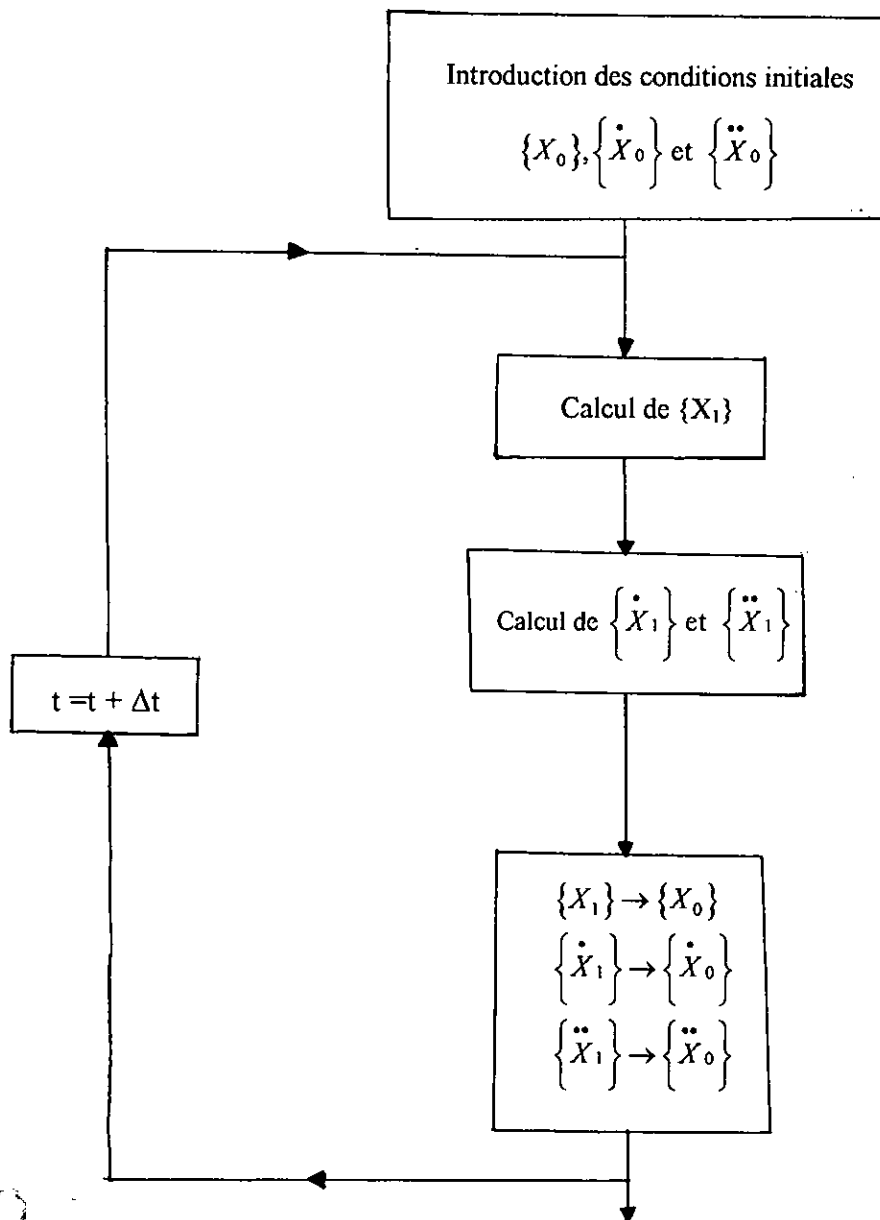
A l'instant $t = t_1$ on remplace dans (III) $\{X_1\}$ et $\{\dot{X}_1\}$ par leurs valeurs, il vient :

$$\left[\frac{4}{\Delta t^2} [M] + \frac{2}{\Delta t} [C] + [k] \right] \{X_1\} = [M] \left[\{\ddot{X}_0\} + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{X}_0\} + \frac{4}{\Delta t^2} \{X_0\} \right] + [c] \left[\{\dot{X}_0\} + \frac{2}{\Delta t} \{X_0\} + \{F(t_1)\} \right] \quad (\text{IV})$$

Les conditions initiales sont : $\{X_0\}$, $\{\dot{X}_0\}$ et $\{\ddot{X}_0\}$, on calcule $\{X_1\}$ et en remplaçant $\{X_1\}$ dans

(II), on trouve $\{\dot{X}_1\}$ et $\{\ddot{X}_1\}$.

ORGANNIGRAMME DE NEWMARK



ANNEXE IV

ANALYSE FREQUENTIEL

DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER

I. GAMME DE FREQUENCES

L'ensemble des fréquences est divisé arbitrairement en gammes dont les dénominations peuvent changer suivant les domaines physiques concernés par exemple:

BF: bases fréquences < 300 khz.

HF : Hautes fréquences.

II. DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER

Toute fonction périodique de période T ($\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\lambda = \frac{1}{T}$) peut être exprimée comme une somme finie ou infinie de fonctions sinusoïdales de pulsation ω , 2ω , $3\omega, \dots, n\omega, \dots$ appelée série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt ; a_0 \text{ est la valeur moyenne de } f(t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Les différentes fonctions sinusoïdales portent le nom d'harmoniques de rang (d'ordre) 1, 2, ..., n, ...; les harmoniques de rang 1 et 2 sont dites successivement fondamental et double.

Le développement de Fourier représente la fonction $f(t)$ avec une précision croissant avec le nombre de termes considérés.

III. SPECTRE FREQUENTIEL DE $f(t)$

On appelle le spectre discontinu de $f(t)$ l'ensemble des coefficients de Fourier a_n et b_n considéré comme fonction des pulsations ω_n (fréquences λ_n) ou de l'entier n .

Le spectre de fréquences (analyse fréquentiel) d'une fonction périodique $f(t)$ montre l'importance relative des différents harmoniques qui constituent $f(t)$

On peut superposer des différentes harmoniques de $f(t)$ et on compare la courbe obtenue avec celle de $f(t)$. Ce procédé permet de savoir l'importance des différentes harmoniques et l'ordre ou on peut s'arrêter dans le développement de Fourier.