

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Ecole Nationale Polytechnique

Département Génie Civil



Projet de fin d'études  
Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état  
en Génie Civil

Intitulé

Approche simplifiée pour l'analyse de  
l'Interaction Sol Structure sous chargements  
statique et dynamique:  
Application aux portiques autostables sous  
fondations filantes

Proposé et dirigé par

Mr. M. DEMIDEM

Présenté par

BENLAMEUR Sabah

KAHLERRAS Amina

Promotion 2015

ENP : 10, avenue Hacène Badi, El Harrache, Alger

---

## Résumé :

Ce Projet de Fin d'Etudes a pour objet l'étude de l'interaction entre le sol et la structure (ISS) afin de pouvoir la prendre en compte lors d'un dimensionnement parasismique

Afin de prendre en compte les effets de l'ISS une modélisation par ressorts peut-être adoptée. Le but de ce rapport est de présenter les effets de ce phénomène sous chargement statique et dynamiques.

Dans la partie statique, on analyse les effets en termes de déplacements et efforts. Tandis que dans la partie dynamique, on analyse les effets en termes de déplacements.

**Mots clés :** Interaction sol-structure, ressorts, chargement statique, chargement dynamique, déplacements, efforts.

## الملخص:

يهدف هذا العمل إلى دراسة التفاعل المتبادل بين التربة والبنية من أجل التمكن من أخذه بعين الاعتبار خلال عملية التصميم المضاد للزلازل.

من أجل اخذ التفاعل بين التربة والبنية بعين الاعتبار قمنا باستعمال نموذج النوابض.

الهدف من هذا العمل هو إظهار آثار هذه الظاهرة تحت تأثير التحميل الساكن والتحميل الحركي.

في مرحلة التحميل التوازني قمنا بدراسة الأثر بصيغة الانتقالات والأفعال. أما في مرحلة التحميل الحركي قمنا بدراسة الأثر بصيغة الانتقالات فقط.

**الكلمات المفتاحية :** التفاعل المتبادل بين التربة والبنية, نموذج النوابض, التحميل الساكن, التحميل الحركي, الانتقالات, الأفعال.

## Abstract :

In this work, we tried to study the soil structure interaction (SSI) in the purpose of considering it in the parasismique design.

To this end, a mass-spring model is adopted.

The aim of this work is to present the effects of this phenomenon under a static and dynamic loading.

In the static part, we analyzed the effects in term of displacements and efforts. While, in the dynamic part, we analyzed the effects in term of displacement only.

**Key words :** Soil structure interaction, mass-spring model, static, dynamic, displacements, efforts.

---

---

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tout d'abord **Dieu** le tout puissant qui nous a donné la santé, la force, la patience, le courage et la volonté pour entamer et finir ce travail.

Nous tenons à remercier vivement notre promoteur Mr DEMIDEM pour ses conseils éclairés et les entretus qu'il a daigné accorder.

Notre gratitude va également aux membres du jury pour honorer notre soutenance et pour l'effort fourni afin d'examiner ce travail.

Toute notre gratitude va aussi à l'ensemble des enseignants qui ont eu l'amabilité de nous accorder leur aide précieuse, ainsi que leurs valeureux conseils.

Nous remercions également l'ensemble du personnel du département, qui n'a guère tardé à nous soutenir.

Et tous ceux qui ont participé de loin ou de près pour aboutir à ce résultat.

---

---

*DEDICACES*

Je dédie ce travail :

A mes parents

A ma grand-mère et à la mémoire de mon grand-père

Mes sœurs et belles sœurs

Mes Frères et beaux frères

Mes neveux et nièces

A mes amis et camarades

Je le dédie également à toute personne qui m'a aidé et qui a cru en moi, spécialement mon binôme KAHLERRAS Amina, mes sœurs Meriem Naziha et Sarah ainsi que ma belle-sœur Samira.

*SABAH.*

---

---

*DEDICACES*

En signe de respect et de reconnaissance

Je dédie ce modeste travail à

Mes très chers PARENTS

A mes frère : *AHMED* et *SALAH ILYES*

A mes sœurs : *LYNDA*, *ZINEB* et *FATIMA ZOHRA*

A la « baraka » de la famille : ma grand-mère que Dieu la préserve

A mon beau-frère : *ABDELGHANI*

A mes neveux : *ISMAIL* et *IBRAHIM*

A toute ma famille

A tous (tes) mes amis (es).

Je le dédie spécialement à mon binôme *SABAH* avec laquelle j'ai partagé le plaisir de travailler.

*AMINA.*

---

---

# TABLE DES MATIERES

Liste des figures	
Liste des tableaux	
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	1
<b>CHAPITRE 1 : FORMULATION GENERALE DES PROBLEMES DYNAMIQUES</b> ..	2
1.1. Oscillateur à un degré de liberté .....	2
1.1.1. Introduction.....	2
1.1.2. Formulation de l'équation du mouvement.....	2
1.1.3. Oscillations libres.....	3
1.1.4. Oscillations forcées :.....	6
1.1.5. Excitation par déplacement d'appui (cas du séisme).....	9
1.2. Oscillateur multiple .....	12
1.2.1. Définition :.....	12
1.2.2. Formulation de l'équation du mouvement :.....	15
1.2.3. Oscillations libres : .....	16
1.2.4. Oscillations forcées .....	19
1.2.5. Excitation par déplacement d'appui (cas de séisme) .....	20
<b>CHAPITRE 2 : PRESENTATION DU PHENOMENE « INTERACTION »</b> .....	24
2.1. Introduction .....	24
2.2. Modélisation du phénomène.....	26
2.3. Description du phénomène :.....	27
2.4. Méthodes d'analyse .....	30
2.4.1. Méthodes directes .....	30
2.4.2. Méthodes de sous-structures .....	30
2.4.3. Méthodes hybrides .....	31
2.5. Conclusion.....	32
<b>CHAPITRE 3 : APPLICATION</b> .....	33
3.1. Présentation des structures.....	33
3.2. Caractéristiques des structures.....	33
3.2.1. Calcul des inerties .....	34
3.2.2. Calcul du module de Young .....	34
3.3. Calcul des charges .....	34

---

---

3.3.1. Les masses des planchers .....	34
3.3.2. Calcul de l'effort tranchant à la base .....	35
3.3.3. Répartition de l'effort tranchant : .....	35
3.4. Calcul des fondations.....	36
3.4.1. Calcul de l'effort normal.....	37
3.4.2. Calcul de l'effort tranchant .....	37
3.4.3. Calcul du moment renversant .....	37
3.4.4. Calcul de la capacité portante du sol.....	37
3.5. Calcul des raideurs du sol.....	41
3.5. Partie statique .....	41
3.5.1. Structure encastree .....	42
3.6. Partie dynamique .....	43
3.6.1. Structure encastree .....	44
3.6.2. Structure non encastree .....	46
<b>CHAPITRE 4 : INTERPRETATION DES RESULTATS .....</b>	<b>52</b>
4.1. partie statique.....	52
4.1.1. Déplacements .....	52
4.1.2 Efforts .....	52
4.2. partie DYNAMIQUE .....	56
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>57</b>
Références bibliographiques.....	58
ANNEXE A : FORMULES UTILISEES POUR LE CALCUL DES RAIDEUR DU SOL.....	59
ANNEXE B : MODELE ANALOGIQUE SIMPLIFIE.....	63
ANNEXE C : Résultats des déplacements et efforts de la partie statique.....	66

---

---

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Oscillateur simple. ....	2
Figure 1.2 : Oscillations libres non amorties.....	4
Figure 1.3 : Oscillations libres amorties. Amortissement critique.....	4
Figure 1.4 : Oscillations libres sous-amorties. ....	5
Figure 1.5 : Oscillations forcées. Cas de l'excitation harmonique. ....	7
Figure 1.6 : Excitation harmonique. Coefficient d'amplification de déplacement.....	7
Figure 1.7 : a) Force périodique. b) Impulsion. ....	8
Figure 1.8 : Oscillations forcées. Cas général.....	9
Figure 1.9 : Excitation par déplacements d'appui. ....	9
Figure 1.10 : Calcul statique à partir de la pseudo-accelération. ....	11
Figure 1.11: Exemples d'oscillateurs multiples. a) Portique plan. b) Console verticale.....	12
Figure 1.12 : Options possibles pour les modèles plans. ....	12
Figure 1.13 : Forces variables dans le temps. ....	15
Figure 1.14 : Modes propres de vibration d'une console.....	17
Figure 1.15 : Vibration libre suivant la mode J.....	18
Figure 1.16 : Modèles d'oscillateur multiple à base rigide.....	20
Figure 1.17 : Types de modèles.....	21
Figure 1.18 : Relation entre les déplacements.....	21
Figure 2.1 : Représentation d'un bâtiment à encastrement parfait.....	24
Figure 2.2 : Représentation d'un bâtiment souple et sol de très bonne résistance mécanique (Sans ISS).....	25
Figure 2.3 : Représentation d'un bâtiment raide et sol de très bonne résistance mécanique (Sans ISS).....	25
Figure 2.4 : Représentation d'un bâtiment raide et sol de faible ou moyenne résistance mécanique (Avec ISS).....	26
Figure 2.5 : Modélisation de l'ISS b) Ressorts ; c) Eléments finis.....	26
Figure 2.6 : Comparaison de la réponse d'une structure fondée au rocher ou sur un sol souple– Description du phénomène d'interaction sol structure.....	27
Figure 2.7: Schématisation du problème de l'interaction sol-structure. ....	28
Figure 2.8 : Représentation d'une fondation enterrée dans un demi-espace.....	29
Figure 2.9 : Système sol-fondation enterrée sous chargement sismique horizontal. ....	29
Figure 2.10 : Principe de superposition de Kausel.....	31
Figure 3.1: Les structures étudiées. a) sans ISS. b) avec ISS.....	33
Figure 3.2: Part de charges revenant au poteau central. ....	36
Figure 3.3 : Modèles traités par FORTRAN. a) sans ISS. b) avec ISS.....	42
Figure 3.4 : Déplacement du premier portique (sans ISS). ....	42
Figure 3.5: Déplacement total du premier portique (avec ISS).....	43
Figure 3.6: Structures étudiées en dynamique. a) sans ISS. b) avec ISS.....	43
Figure 3.7 Modèle de la structure encastree.....	44
Figure 3.8: Déplacements horizontaux des plachers en fonction du temps. ....	46
Figure 3.9 : Modèle de la structure avec ISS. ....	46

---

---

Figure 3.10 : Modèle simplifié de la structure avec ISS. ....	47
Figure 3.11: Déplacements horizontaux des plachers en fonction du temps. ....	51
Figure 4.1 : Représentation des déplacements horizontaux relatifs en fonction de la hauteur. ....	52
Figure 4.2 : Variation de l'effort normal en fonction de la hauteur.....	53
Figure 4.3: Comparaison du moment fléchissant sur les deux travées du portique (sans et avec ISS).....	54
Figure 4.4 : Comparaison de l'effort tranchant sur les deux travées du portique (sans et avec ISS).....	55
Figure B.1: Modèle simplifié. ....	63

---

---

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1: Valeurs des différents coefficients. ....	38
Tableau 3.2: Valeurs typiques des propriétés mécaniques des sols. ....	40
Tableau 3.3: Solutions du système ' $KU = \lambda MU$ ' sans ISS.....	45
Tableau 3.4: Solutions du système ' $KU = \lambda MU$ ' avec ISS. ....	49
Tableau 4.1 : Tableau récapitulatif des déplacements max des planchers des deux structures .....	56
Tableau A.1: Classification des sols suivant l'RPA 2003 .....	60
Tableau A.2 : Fonctions d'impédance de fondations enterrées dans un sol homogène sur substratum rocheux. ....	61
Tableau A.3 : Fonctions d'impédance de fondations à la surface d'un sol homogène sur substratum rocheux. ....	62

---

# INTRODUCTION GENERALE

### INTRODUCTION GENERALE [2] [5] [7]

Parmi tous les actes suscités par l'imagination créatrice de l'esprit humain, l'un des plus importants est certainement l'acte de construire, car c'est lui qui procure à l'homme l'abri et le confort. Mais si l'homme demeure maître des matériaux qu'il utilise pour élever une superstructure, il doit par contre appuyer sa contribution sur un élément naturel auquel il ne peut rien, le sol, et s'accommoder avec ce que lui offre une nature souvent imprévisible et trompeuse. C'est de là que vient la nécessité de prendre en compte ce paramètre clé.

Cependant, de nos jours, les pratiques courantes pour le dimensionnement parasismique des fondations, consistent dans un premier temps à calculer les efforts sismiques s'appliquant sur la fondation et dans un second temps à vérifier la résistance des fondations à ces efforts. Dans la plupart des règlements de construction, la réponse de la structure et les charges arrivant sur la fondation sont calculées en négligeant les effets de l'Interaction Sol-Structure (ISS).

La procédure la plus radicale pour contourner le problème de cette interaction sol-structure est de considérer la structure parfaitement encastree dans le sol ; cette hypothèse est d'autant plus valable que le sol de fondation est peu déformable vis-à-vis de la structure, par exemple dans le cas d'un bâtiment rigide sur un sol rocheux. L'analyse sismique d'une structure tenant compte des propriétés locales du site, diffère de celle considérée encastree à sa base. De ce fait, il est particulièrement important de considérer l'ISS dans les zones sismiques où la réponse dynamique des sols peut changer la réponse des structures soumises à l'excitation sismique. De plus, les sites meubles (sol mou) recevant des structures rigides et massives peuvent changer les caractéristiques dynamiques de ces dernières de manière significative.

Ce travail s'articule en deux étapes. On présente le phénomène qu'il est convenu d'appeler interaction sol structure selon deux approches : statique et dynamique. Les principaux concepts et conséquences, sont illustrés de manière concrète sur un exemple. Dans la partie statique, on fera une comparaison entre les efforts et les déplacements de deux structures, l'une fondée au rocher et la même structure construite sur un sol souple. Dans la partie dynamique, et à cause de la non disponibilité d'un accélérographe, l'étude se limitera à une analyse modale. Le phénomène est illustré à travers une comparaison détaillée entre la réponse sismique des deux structures traitées dans la partie statique. Mais d'abord le cadre théorique, aussi rigoureux que possible, est formulé en se limitant au domaine élastique.

L'interaction sol-structure en dynamique est caractérisée par les fonctions d'impédance qui doivent être étudiées dès la conception des ouvrages. Cependant, dans notre travail on ne prendra en considération que la partie réelle, soit la raideur.

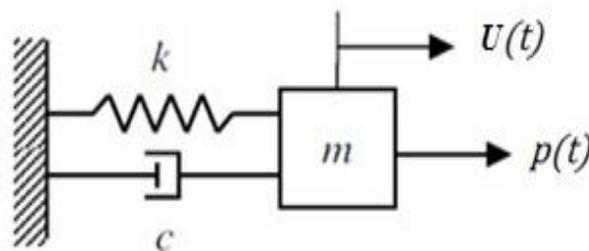
CHAPITRE I :  
FORMULATION  
GENERALE DES  
PROBLEMES  
DYNAMIQUES

## CHAPITRE 1 : FORMULATION GENERALE DES PROBLEMES DYNAMIQUES [2]

### 1.1. OSCILLATEUR A UN DEGRE DE LIBERTE

#### 1.1.1. Introduction

Un oscillateur simple ou à un degré de liberté est constitué d'une masse  $m$  reliée à un point fixe par un ressort et un amortisseur (fig.1.1) et pouvant se déplacer dans une seule direction. La masse est soumise à une force  $p(t)$  variable avec le temps, qui la met en mouvement.



**Figure 1.1: Oscillateur simple.**

L'étude de l'oscillateur simple est essentielle car le calcul dynamique d'une structure élastique comportant plusieurs masses se ramène à celui d'un certain nombre d'oscillateurs simples caractérisés chacun par une période de vibration et un coefficient d'amortissement.

#### 1.1.2. Formulation de l'équation du mouvement

Le ressort et l'amortisseur sont définis par les paramètres  $k$  et  $c$  respectivement. On note

- $U$  le déplacement de la masse par rapport à la position d'équilibre ;
- $\dot{U}$  sa vitesse ;
- $\ddot{U}$  son accélération.

Lors du mouvement, la masse est soumise aux forces suivantes, comptées positivement lorsqu'elles tendent à provoquer un déplacement positif :

- La force de rappel du ressort, supposée proportionnelle au déplacement :  $F_1 = -kU$  ;
- La force due à l'amortisseur, supposée proportionnelle à la vitesse :  $F_2 = -c\dot{U}$  ;
- La force imposée  $p(t)$ .

La loi fondamentale de la dynamique, reliant les forces aux accélérations s'écrit :

$$F_1 + F_2 + p(t) = m\ddot{U} \quad (1.1)$$

soit

$$m\ddot{U} + c\dot{U} + kU = p(t) \quad (1.2)$$

On en déduit l'équation de mouvement :

$$\ddot{U} + \frac{c}{m}\dot{U} + \omega^2 U = \frac{1}{m}p(t) \quad (1.3)$$

avec :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1.4)$$

Le coefficient  $\omega$  est appelé pulsation et se mesure en radian par seconde (*rad/s*).

### 1.1.3. Oscillations libres

En l'absence de la force extérieure  $p(t)$ , la masse oscille librement. Ce mouvement peut, par exemple, être obtenu en relâchant l'oscillateur après l'avoir écarté de sa position d'équilibre.

D'après (1.3), l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{U} + \frac{c}{m}\dot{U} + \omega^2 U = 0 \quad (1.5)$$

La solution prend une forme différente selon que l'oscillateur est amorti ou non.

#### 1.1.3.1. Oscillateur non amorti

Dans ce cas le coefficient  $c$  est nul, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{U} + \omega^2 U = 0 \quad (1.6)$$

qui a une solution de la forme :

$$U(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.7)$$

Les coefficients  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes que l'on détermine par des conditions aux limites.

Si l'on se donne par exemple, le déplacement  $U_0$  et la vitesse  $\dot{U}_0$  à l'origine des temps, le déplacement a pour expression :

$$U = U_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{U}_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (1.8)$$

Le mouvement est sinusoïdal, de période  $T$  mesurée en secondes :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.9)$$

La fréquence  $f$  du mouvement a pour valeur :

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.10)$$

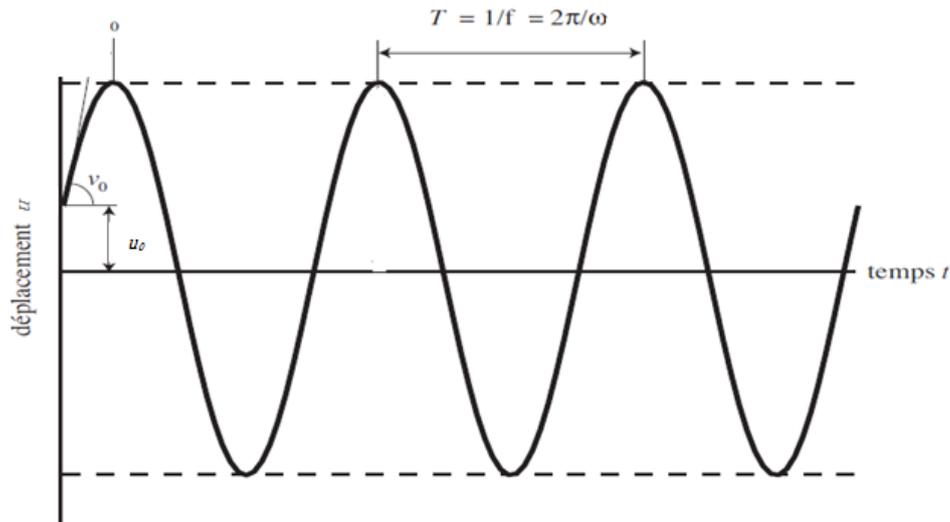


Figure 1.2 : Oscillations libres non amorties.

### 1.1.3.2. Oscillateur amorti :

La forme de la solution dépend de la valeur du coefficient d'amortissement  $c$ .

Si on pose :

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad (1.11)$$

On doit distinguer les cas suivant :

a) Amortissement critique :  $\xi = 1$

La solution de l'équation (1.5) est de la forme :

$$U(t) = (A + Bt)e^{-\omega t} \quad (1.12)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  peuvent s'exprimer en fonction du déplacement  $U_0$  et de la vitesse  $\dot{U}_0$  à l'origine des temps ; on obtient alors :

$$U(t) = [U_0(1 + \omega t) + \dot{U}_0 t]e^{-\omega t} \quad (1.13)$$

Le mouvement ne comporte pas d'oscillation.

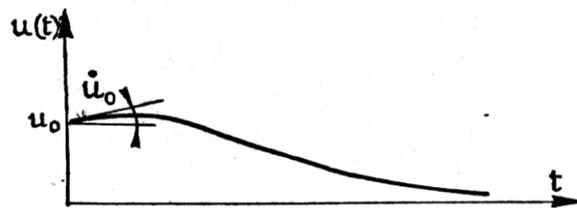


Figure 1.3 : Oscillations libres amorties. Amortissement critique.

b) Oscillateur suramorti :  $\xi > 1$

La solution est de la forme :

$$U(t) = (Ae^{\omega_D t} + Be^{-\omega_D t})e^{-\xi\omega t} \quad (1.14)$$

avec

$$\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (1.15)$$

Comme dans le cas précédent, le mouvement ne présente pas d'oscillations.

c) Oscillateur sous-amorti :  $\xi < 1$

C'est le seul cas intéressant en pratique pour le calcul dynamique des structures, celles-ci ayant un amortissement inférieur à l'amortissement critique.

La solution de l'équation (1.5) est de la forme :

$$U(t) = (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t)e^{-\xi\omega t} \quad (1.16)$$

avec

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.17)$$

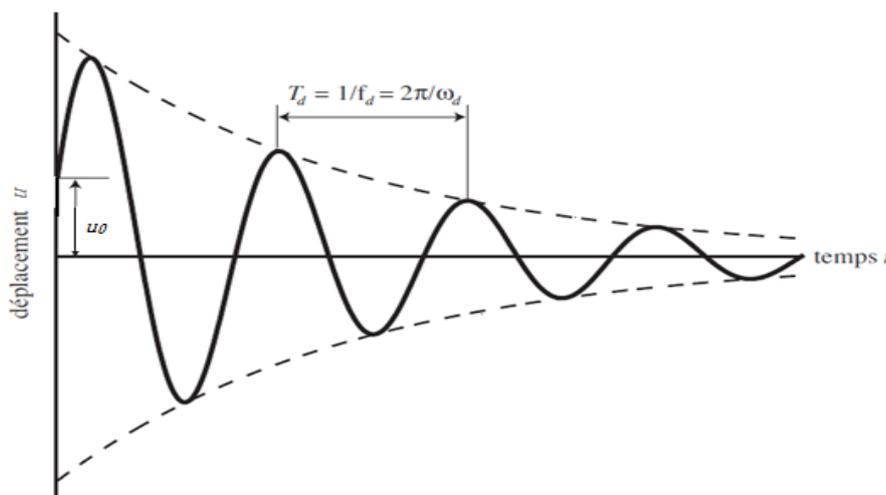
Si on introduit les conditions initiales  $u_0$  et  $\dot{u}_0$  à l'origine des temps, on obtient :

$$U(t) = \left(\frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + u_0 \cos \omega_D t\right)e^{-\xi\omega t} \quad (1.18)$$

Le mouvement est pseudo-périodique (fig. 1.4), l'amplitude des extrema décroissant avec le temps à cause de l'amortissement.

La pseudo-période a pour valeur :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_D} \quad (1.19)$$



**Figure 1.4 : Oscillations libres sous-amorties.**

Le rapport des amplitudes de deux maxima décalés d'un nombre entier  $j$  de pseudo-périodes est donné par :

$$\frac{U_n}{U_{n+j}} = e^{-j\xi\omega T} = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (1.20)$$

### 1.1.4. Oscillations forcées :

On considère un oscillateur simple initialement au repos ( $U_0 = 0, \dot{U}_0 = 0$ ) et soumis à une force variable  $p(t)$  qui peut avoir différentes formes :

#### 1.1.4.1. Cas particulier de l'excitation harmonique

Une excitation est harmonique si la force  $p(t)$  est une fonction sinusoïdale du temps :

$$p(t) = p_0 \sin \alpha t \quad (1.21)$$

Une telle force set par exemple, engendrée par une machine tournante avec une vitesse angulaire  $\alpha$ .

L'équation du mouvement est déduite de (1.3) :

$$\ddot{U} + 2\xi\omega\dot{U} + \omega^2 U = \frac{p_0}{m} \sin \alpha t \quad (1.22)$$

Dans le cas d'un oscillateur sous-amorti ( $\xi < 1$ ) la solution est de la forme :

$$U(t) = (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) e^{-\xi\omega t} + \frac{p_0}{k} \lambda \sin(\alpha t - \theta) \quad (1.23)$$

Avec

$$\beta = \frac{\alpha}{\omega} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \theta = \arctg \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Les coefficients  $A$  et  $B$  peuvent être calculés en exprimant qu'au temps  $t=0$ , le déplacement et la vitesse sont nuls.

On remarque que le déplacement est la somme de deux termes :

- Le premier terme définit le mouvement transitoire qui est amorti et disparaît donc rapidement (fig.1.5 a)
- Le deuxième terme définit le mouvement permanent qui s'effectue avec la même pulsation  $\alpha$  que la force excitatrice. (fig.1.5 b)

Après une phase transitoire, le régime permanent s'établit (fig.1.5 c), défini par la relation :

$$U = \frac{p_0}{k} \lambda \sin(\alpha t - \theta) \quad (1.24)$$

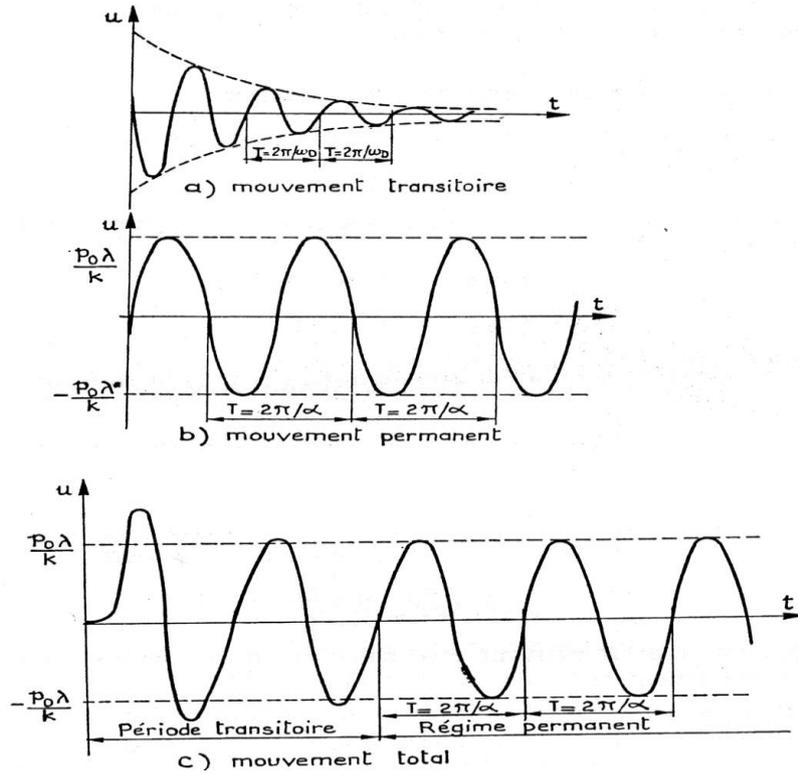


Figure 1.5 : Oscillations forcées. Cas de l'excitation harmonique.

Contrairement au cas des oscillations libres qui s'effectuent avec une pseudo-période propre à l'oscillateur, la pulsation du mouvement permanent est celle de la force excitatrice.

Le coefficient  $\frac{p_0}{k}$  représente le déplacement statique de ressort sous l'action de la force  $p_0$ , le coefficient  $\lambda$  est le coefficient d'amplification dynamique qui dépend de l'amortissement et du rapport  $\beta$  des pulsations (fig.1.6)

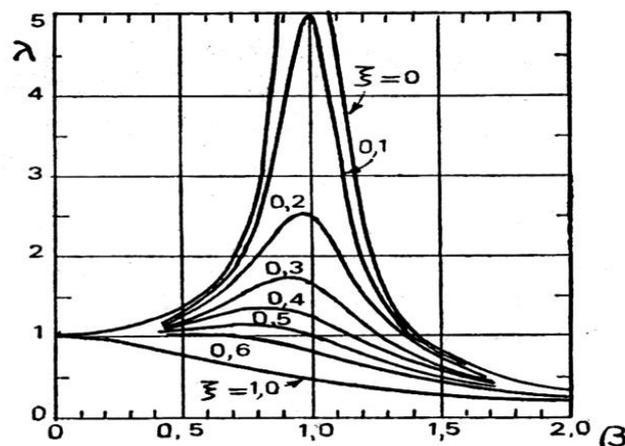


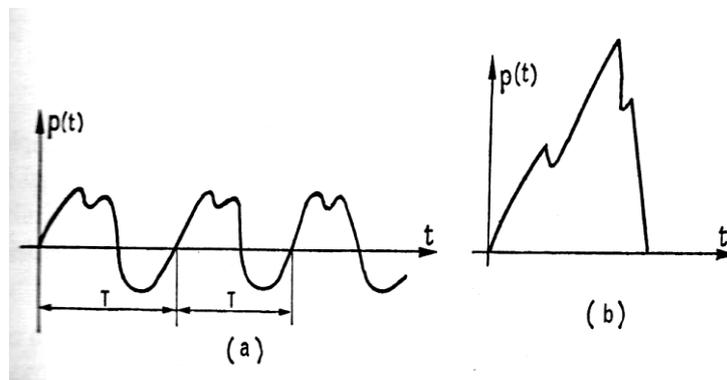
Figure 1.6 : Excitation harmonique. Coefficient d'amplification de déplacement.

On voit que la réponse d'un oscillateur à une excitation donnée dépend essentiellement de sa pulsation propre :

- Pour un oscillateur infiniment raide ( $\omega$  infini,  $\beta = 0$ ) il n'y a pas d'amplification de la déformée statique, le mouvement est sinusoïdal, le mouvement est sinusoïdal d'amplitude  $\frac{p_0}{k}$ .
- Pour un oscillateur très souple (grandes valeurs de  $\beta$ ) le coefficient d'amplification a une valeur très faible, le mouvement est sinusoïdal d'amplitude  $\frac{p_0}{m\alpha^2}$ .
- Lorsque la pulsation de l'oscillateur est égale à celle de la force excitatrice ( $\beta = 1$ ) celui-ci entre en résonance, le coefficient d'amplification ayant alors la valeur :  $\lambda = \frac{1}{2\xi}$

#### 1.1.4.2. Cas général :

On considère une force  $p(t)$  de forme quelconque. Il peut s'agir d'une force engendrée par une machine (fig.1.7 a) ou, d'une impulsion due à un choc (fig.1.7 b)

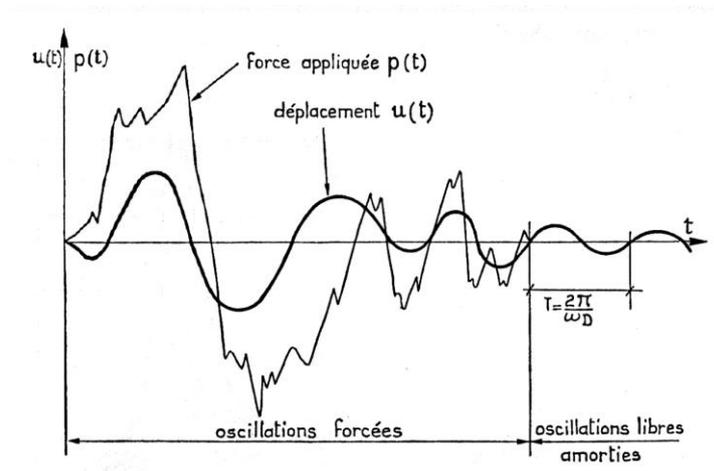


**Figure 1.7 : a) Force périodique. b) Impulsion.**

La solution de l'équation du mouvement (1.3) est fournie par l'intégrale de Duhamel :

$$U(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (1.25)$$

Pendant le temps d'application de la force  $p(t)$  la masse est soumise à des sollicitations forcées, auxquelles succèdent des oscillations libres amorties.



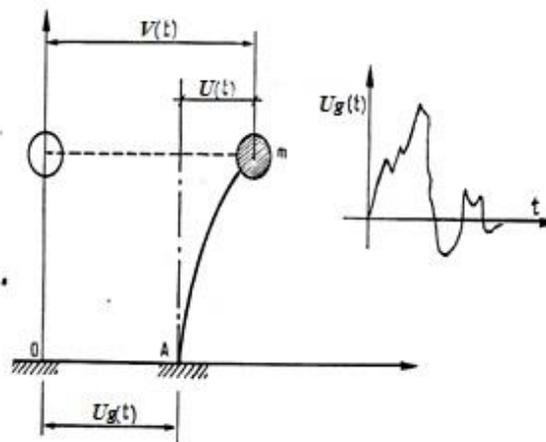
**Figure 1.8 : Oscillations forcées. Cas général.**

Dans le cas d'un oscillateur non amorti, l'intégrale de Duhamel prend la forme :

$$U(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau \quad (1.26)$$

### 1.1.5. Excitation par déplacement d'appui :(cas du séisme)

On considère une masse  $m$  liée à une console verticale encastree dans le sol en un point  $A$  (fig.1.9)



**Figure 1.9 : Excitation par déplacements d'appui.**

Pour tenir compte du mouvement du sol en cas de séisme, on impose au point  $A$  un déplacement horizontal  $U_g(t)$  variable avec le temps.

Les déplacements de la masse  $m$  sont mesurés, soit dans un repère relatif lié au point  $A$  (déplacement  $U(t)$ ) soit dans un repère absolu (déplacement  $V(t)$ ).

Ces déplacements sont liés par la relation :

$$V(t) = U(t) + U_g(t) \quad (1.27)$$

On en déduit par dérivation la relation les accélérations :

$$\ddot{V}(t) = \ddot{U}(t) + \ddot{U}_g(t) \quad (1.28)$$

### 1.1.5.1. Calcul du déplacement relatif

La masse est soumise aux forces horizontales suivantes :

- Une force de rappel due à la console qui est proportionnelle au déplacement relatif  $U$  :

$$F_1 = -k U;$$

- Une force d'amortisseur, supposée proportionnelle à la vitesse  $\dot{U}$  :

$$F_2 = -c\dot{U} ;$$

Ces forces sont liées à l'accélération absolue  $\ddot{v}$  par la relation :

$$F_1 + F_2 = m\ddot{V} \quad (1.29)$$

On en déduit l'équation du mouvement

$$\ddot{V} + \frac{c}{m}\dot{U} + \omega^2 U = 0 \quad (1.30)$$

Soit, compte tenu de (1.28) :

$$\ddot{U} + \frac{c}{m}\dot{U} + \omega^2 U = \frac{p(t)}{m} \quad (1.31)$$

avec

$$p(t) = -m\ddot{U}_g(t) \quad (1.32)$$

On voit qu'on se ramène à l'étude d'un oscillateur simple dans le repère relatif en supposant la masse soumise à une force fictive  $p(t) = -m\ddot{U}_g(t)$  proportionnelle à l'accélération absolue du point d'appui  $A$ .

La solution est donnée par l'intégrale de Duhamel (1.26) qui prend la forme particulière :

$$U(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{U}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad (1.33)$$

avec :

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

On constate que la valeur du déplacement ne dépend que de la pulsation  $\omega$ , du coefficient d'amortissement  $\xi$  et de l'accélération  $\ddot{v}_s$  du sol.

### 1.1.5.2. Pseudo-accélération

Lorsque le déplacement relatif  $u$  de la masse a été calculé, on peut en déduire la force de rappel du ressort :

$$F_1 = -K U \quad (1.34)$$

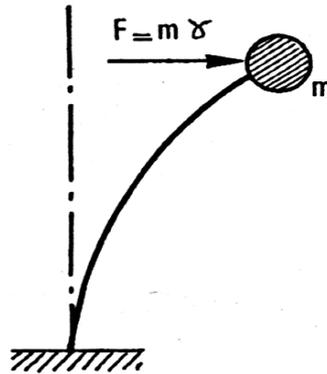
On peut aussi effectuer un calcul indirect en supposant la masse soumise à une accélération fictive dite « pseudo-accélération » ayant pour valeur :

$$\gamma = \omega^2 U \quad (1.35)$$

L'effort dans le ressort est ensuite évalué par un calcul statique sous l'action de la force :

$$F = m \gamma$$

Appliquée à la masse et supposée constante (fig. 1.10).



**Figure 1.10 : Calcul statique à partir de la pseudo-accélération.**

La force de rappel du ressort a donc pour valeur :

$$F_1 = -F = -m\omega^2 U$$

En tenant compte de la relation :

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

On retrouve bien la valeur calculée plus haut :

$$F_1 = -k U$$

Les deux méthodes sont donc équivalentes. On utilise donc ce modèle simple pour calculer les pseudo-accélération des masses qui constituent ensuite un cas de charge statique pour une structure modélisée plus finement, ce qui permet d'évaluer les efforts dans tous les éléments.

Dans le cas d'un oscillateur non amorti, l'équation du mouvement (1.30) s'écrit :

$$\ddot{V} = -\omega^2 U = -\gamma$$

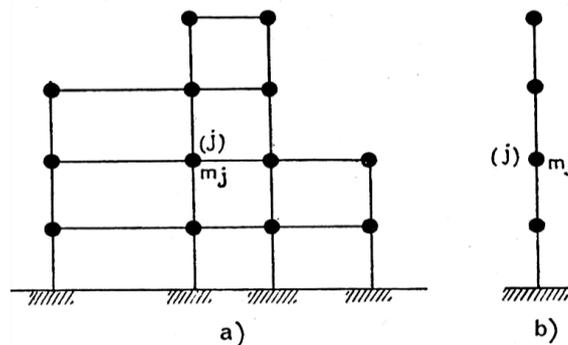
On constate donc que, pour l'oscillateur non amorti, la pseudo-accélération est égale à l'accélération absolue, au signe près.

## 1.2. OSCILLATEUR MULTIPLE

### 1.2.1. Définition :

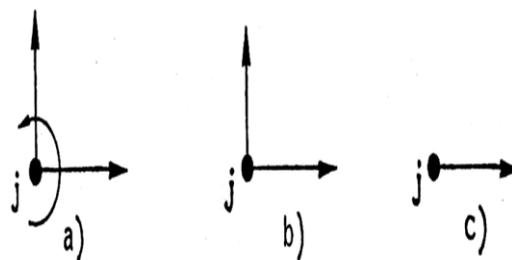
Un oscillateur multiple est composé de plusieurs masses reliées entre elles et à une base fixe par des ressorts et des amortisseurs.

On peut donc ranger dans cette catégorie toutes structure à comportement élastique linéaire, modélisée à l'aide de barres ou d'éléments finis et comportant une masse associée à chacun des nœuds (fig.1.11). Les masses réparties sur les barres sont dans ce cas supposées concentrées sur les nœuds les plus voisins.



**Figure 1.11: Exemples d'oscillateurs multiples. a) Portique plan. b) Console verticale.**

Chaque nœud possède au maximum six degrés de liberté, c'est-à-dire six mouvements possibles : trois translations et trois rotations, mais en pratique, on pourra souvent n'en considérer qu'un nombre réduit. Ainsi, dans le cas d'une structure plane, chaque nœud possède en principe trois degrés de liberté (deux translations et une rotation, (fig.1.12a), mais on peut toutefois considérer un modèle simplifié à deux degrés de liberté par nœud (les deux translations, (fig.1.12b), ou même un seul (une des translations, (fig.1.12c)



**Figure 1.12 : Options possibles pour les modèles plans.  
a) 3degrés de liberté. b) 2degrés de liberté. c) 1 degré de liberté.**

Les propriétés de l'oscillateur sont définies par un certain nombre de coefficients que l'on met sous forme de matrice.



**1.2.1.2. Matrice des masses :**

On suppose que toute la masse de la structure est concentrée aux nœuds ; à chaque nœud, on associe donc en général trois masses et trois moments d'inertie massique correspondant aux six degrés de liberté.

On note :

- $m_j$  la masse relative au degré de liberté  $j$ .
- $\ddot{U}_j$  l'accélération dans la direction de degré de liberté  $j$ .

Les masses étant concentrées, l'accélération d'une seule d'entre elles n'impose de force d'inertie qu'à elle-même, ce qui ne serait pas le cas s'il existait des masses réparties entre deux nœuds.

Lorsque toutes les masses sont accélérées, les forces d'inertie ont pour valeur :

$$\begin{aligned} f_1 &= m_1 \ddot{U}_1 \\ f_2 &= m_2 \ddot{U}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_j &= m_j \ddot{U}_j \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= m_n \ddot{U}_n \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ces relations s'écrivent :

$$F = M \cdot \ddot{U} \quad (1.42)$$

$\ddot{U}$  représente le vecteur des accélérations :

$$\ddot{U} = \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \vdots \\ \ddot{U}_j \\ \vdots \\ \ddot{U}_n \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$M$  est la matrice des masses, diagonale, et de dimension  $n \times n$  :

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

**1.2.1.3. Matrice d'amortissement :**

Pour un oscillateur simple, la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse relative  $\dot{u}$  :

$$f = -c \cdot \dot{U}$$

Pour un oscillateur multiple, cette relation est généralisée sous la forme :

$$F = -C \cdot \dot{U} \quad (1.45)$$

Où  $F$  représente le vecteur force,  $\dot{U}$  le vecteur des vitesses relatives :

$$\dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_j \\ \vdots \\ \dot{U}_n \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

et  $C$ , la matrice d'amortissement de dimension  $n \times n$  :

Le coefficient  $c_{ij}$  a pour valeur celle de la force développée dans la direction du degré de liberté  $i$  lorsque la vitesse  $\dot{u}_j$  est unitaire, toutes les autres vitesses étant nulles.

### 1.2.2. Formulation de l'équation du mouvement :

On considère un oscillateur multiple pouvant se déformer par rapport à sa base fixe, et caractérisé par des matrices  $K$ ,  $M$  et  $C$  de rigidité, de masse et d'amortissement.

On applique aux nœuds des forces  $p_j(t)$  variables dans le temps et regroupées sous forme d'un vecteur :

$$P = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_j(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

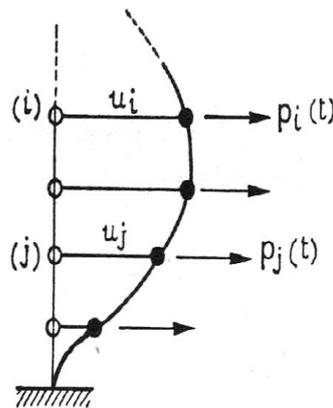


Figure 1.13 : Forces variables dans le temps.

Pour une déformation relative  $U$  donnée, les masses sont soumises aux forces suivantes :

- Les forces de rappel que l'on déduit de l'expression (1.39) :

$$F_R = -K \cdot U$$

- Les forces d'amortissement données par (1.45) :

$$F_A = -C \cdot \dot{U}$$

- Les forces extérieures  $P(t)$ .

L'équation du mouvement s'écrit :

$$F_R + F_A + P(t) = M \cdot \ddot{U}$$

Soit :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t) \quad (1.48)$$

### 1.2.3. Oscillations libres :

On cherche le mouvement de chacune des masses en l'absence de forces extérieures  $P(t)$  ; ce mouvement ce produit par exemple quand on relâche une masse de l'oscillateur après l'avoir écarté de sa position d'équilibre.

D'après la relation (1.48), l'équation du mouvement s'écrit :

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (1.49)$$

Une solution particulière est donnée par l'expression :

$$U = aD \sin(\omega t + \theta) \quad (1.50)$$

Où  $a$ ,  $\omega$  et  $\theta$  sont des constantes et  $D$  un vecteur constant dont les coordonnées  $d_j$  sont les  $n$  déplacements des nœuds :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Le vecteur des accélérations a pour valeur :

$$\ddot{U} = -\omega^2 aD \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 U \quad (1.51)$$

L'équation (1.49) s'écrit donc :

$$(-\omega^2 MD + KD)a \sin(\omega t + \theta) = 0 \quad (1.52)$$

Cette relation doit être vérifiée quelle que soit la valeur du temps  $t$  ; on en déduit donc :

$$(K - M\omega^2)D = 0 \quad (1.53)$$

L'expression (1.53) représente un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues qui sont les composantes du vecteur  $D$  ; une solution différente de zéro n'est possible que si le déterminant de la matrice  $[K - M\omega^2]$  est nul :

$$|K - M\omega^2| = 0 \quad (1.54)$$

Si on développe ce déterminant, on obtient une équation de degré  $n$  en  $\omega^2$ . La résolution de cette équation fournit les valeurs des pulsations  $\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_j \dots, \omega_n$  relatives aux  $n$  modes de vibration possibles.

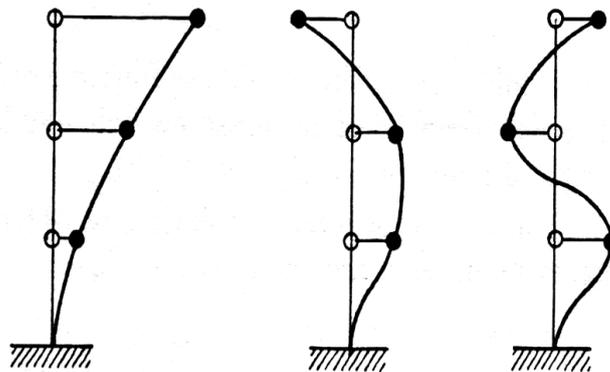
Le vecteur des déformations : 
$$D_J = \begin{pmatrix} d_1^J \\ \vdots \\ d_k^J \\ \vdots \\ d_n^J \end{pmatrix}$$

Qui correspond au mode de vibration  $J$ , de pulsation  $\omega_J$ , est donné par la relation (1.53)

$$(K - M \omega_J^2) D_J = 0 \quad (1.55)$$

Le déterminant de la matrice  $K - M \omega_J^2$  étant nul, il existe une solution différente de zéro pour le vecteur  $D_J$ , qui peut être calculée, en fixant arbitrairement une composante (par exemple la première).

Dans le cas d'une console verticale supportant des masses régulièrement réparties, lorsque seuls les mouvements horizontaux sont pris en compte, les modes propres de vibration classés par ordre croissant de pulsation ont l'allure indiquée sur la figure 1.14



**Figure 1.14 : Modes propres de vibration d'une console.**

La déformée de la structure en fonction du temps, lorsqu'elle vibre sur le mode  $J$ , est donnée par la relation (1.50) :

$$U(t) = a_J D_J \sin(\omega_J t + \theta_J) = \sin(\omega_J t + \theta_J) \begin{pmatrix} a_J d_1^J \\ \vdots \\ a_J d_k^J \\ \vdots \\ a_J d_n^J \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

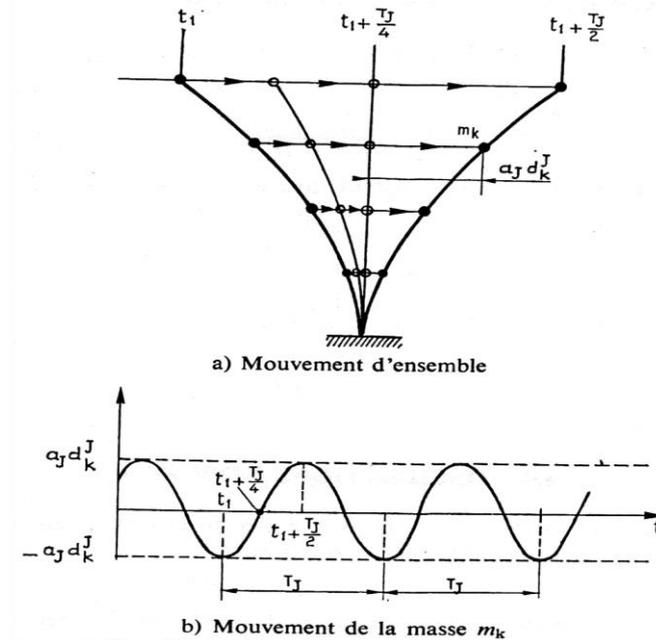


Figure 1.15 : Vibration libre suivant la mode J.

Le mouvement est périodique de période :

$$T_J = \frac{2\pi}{\omega_J} \tag{1.57}$$

L'allure de la déformation se conserve pendant le mouvement (fig. 1.15 a) et le déplacement de la masse  $m_k$  suit une loi sinusoïdale en fonction du temps, d'amplitude  $a_J d_k^J$  (fig. 1.15 b)

Dans le cas général, la solution est obtenue en superposant les mouvements selon les  $n$  modes de vibration,

$$U(t) = \sum_{J=1}^n a_J D_J \sin(\omega_J t + \theta_J) \tag{1.58}$$

Les coefficients  $a_J$  et  $\theta_J$  sont déterminés par les conditions aux limites.

Par exemple, si le mouvement est obtenu en relâchant l'oscillateur après l'avoir écarté de sa position d'équilibre, on écrira qu'à l'origine des temps la vitesse de chaque masse est nulle et le déplacement imposé.

Les vecteurs modaux  $D_J$  possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} D_J^t K D_J &= 0 & \text{si } l \neq J \\ D_J^t M D_J &= 0 & \text{si } l \neq J \end{aligned}$$

$$\omega_J^2 = \frac{D_J^t K D_J}{D_J^t M D_J} \tag{1.59}$$

$D_J^t$  est le vecteur transposé du vecteur modal  $D_J$ .

### 1.2.4. Oscillations forcées

Lorsque les masses sont soumises à des forces extérieures variables  $P(t)$ , le mouvement est défini par la relation (1.48) :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t)$$

Qui représente un système de  $n$  équations différentielles du deuxième ordre reliant les  $n$  composantes  $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n$  du vecteur déplacement  $U$ .

La matrice de rigidité  $K$  n'étant pas diagonale, contrairement à celle des masses, chacune de ces équations peut faire intervenir tous les déplacements  $u_j$  ; on ne peut donc résoudre directement.

On tourne cette difficulté en décomposant le vecteur  $U$  selon les  $n$  modes de vibration qui servent donc de base pour les déplacements :

$$U = \sum_{j=1}^n y_j D_j \quad (1.60)$$

Le problème se ramène alors au calcul des coefficients  $y_j$  qui sont des fonctions du temps.

Si on note  $\dot{y}_j$  et  $\ddot{y}_j$  les dérivées première et seconde de  $y_j$  par rapport au temps, l'équation (1.48) s'écrit :

$$M \sum_{j=1}^n \ddot{y}_j D_j + C \sum_{j=1}^n \dot{y}_j D_j + K \sum_{j=1}^n y_j D_j = P(t) \quad (1.61)$$

Pour calculer le coefficient  $y_j$  on multiplie les deux membres de cette équation par le vecteur  $D_j^t$  :

$$D_j^t M \sum_{i=1}^n \ddot{y}_i D_i + D_j^t C \sum_{i=1}^n \dot{y}_i D_i + D_j^t K \sum_{i=1}^n y_i D_i = D_j^t P(t) \quad (1.62)$$

D'après les relations (1.59) les termes  $\ddot{y}_i D_j^t M D_i$  et  $y_i D_j^t K D_i$  obtenus en développant la relation (1.62) sont nuls si  $i$  est différent de  $j$  ; on fera l'hypothèse qu'il en est de même pour les termes  $D_j^t C D_i$ .

Après le développement et élimination des termes nuls de l'équation (1.62), on obtient :

$$D_j^t M D_j \ddot{y}_j + D_j^t C D_j \dot{y}_j + D_j^t K D_j y_j = D_j^t P(t) \quad (1.63)$$

On définit de nouveaux paramètres relatifs au mode de vibration  $J$  en posant :

$$\left. \begin{aligned} m_j &= D_j^t M D_j \\ k_j &= D_j^t K D_j \\ \omega_j &= \sqrt{\frac{k_j}{m_j}} \\ c_j &= D_j^t C D_j = 2 \xi \omega_j m_j \\ P_j(t) &= D_j^t P(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

L'équation (1.63) s'écrit donc :

$$m_j (\ddot{y}_j + 2 \xi_j \omega_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j) = P_j(t) \quad (1.65)$$

On obtient une équation différentielle en  $y_j$  analogue à celle d'un oscillateur simple (1.2) qui est de la forme :

$$m_j(\ddot{U} + 2\xi\omega\dot{U} + \omega^2 U) = p(t) \quad (1.66)$$

La solution est donnée par l'intégrale de Duhamel (1.59) :

$$y_j(t) = \frac{1}{m_j\omega_{DJ}} \int_0^t p_j(\tau) e^{-\xi_j\omega_j(t-\tau)} \sin[\omega_{DJ}(t-\tau)] d\tau \quad (1.67)$$

avec  $\omega_{DJ} = \sqrt{1 - \omega_j^2}$

Le vecteur de déplacement  $U$  est ensuite obtenu par la superposition de toutes les réponses modales :

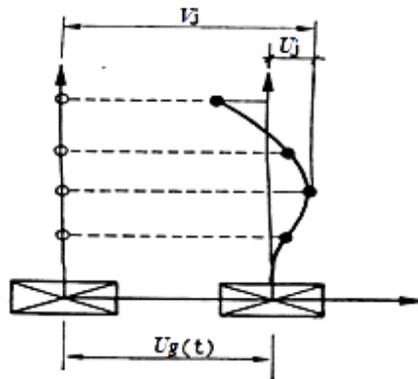
$$U = \sum_{j=1}^n y_j(t) D_j$$

On voit donc que l'étude d'un oscillateur multiple à  $n$  degrés de liberté peut se ramener à l'étude de  $n$  oscillateurs simples.

En pratique, on ne calcule toutefois que le nombre de coordonnées  $y_j$  nécessaires pour obtenir la précision souhaitée, la superposition d'un nombre réduit de modes suffisant en général pour représenter correctement le mouvement.

### 1.2.5. Excitation par déplacement d'appui

On considère un oscillateur multiple relié à une base rigide (fig. 1.16) à laquelle on impose un mouvement de translation, soit à l'horizontale, soit à la verticale.



**Figure 1.16 : Modèles d'oscillateur multiple à base rigide.**

Un tel modèle permet d'étudier l'effet sur une structure du mouvement du sol provoqué par un séisme.

La structure peut être supposée soit encadrée sur la base (fig. 1.17 a), soit reliée à celle-ci par des ressorts (fig. 1.17 b) ou des éléments finis (fig. 1.17 c) modélisant le sol.

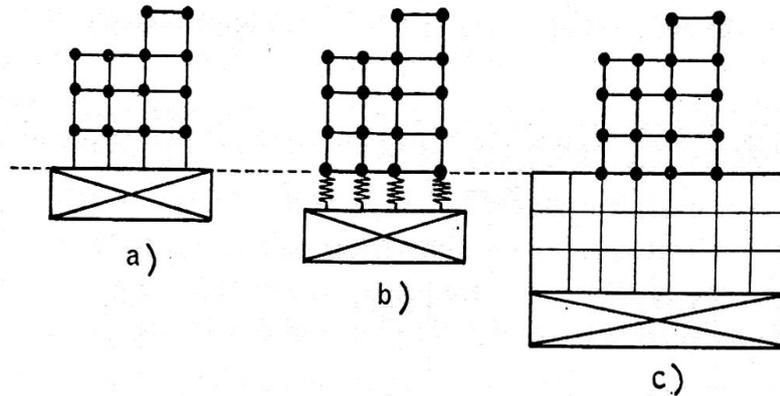


Figure 1.17 : Types de modèles.

La position de la masse  $m_j$  lors du mouvement peut être définie par :

- Son déplacement absolu  $V_j$  par rapport à un repère fixe ;
- Son déplacement relatif  $U_j$  par rapport à un repère lié à la base et se déplaçant avec celle-ci.

On note  $U_g(t)$  le déplacement absolu de la base, supposé se produire à l'horizontale.

Le repère relatif, lié à la base, se déduit du repère absolu par une translation d'ensemble d'amplitude  $U_g(t)$ .

On peut donc écrire la relation entre les déplacements :

$$V_j(t) = U_j(t) + U_g(t)\delta_j \tag{1.68}$$

Le coefficient  $\delta_j$  prend la valeur :

$\delta_j = 1$  pour les degrés de liberté correspondant à une translation de même direction pour celle de la base (fig.1.18 a).

$\delta_j = 0$  pour les autres degrés de liberté (fig.1.18 b) ; dans ce cas, les déplacements relatifs et absolu sont égaux.

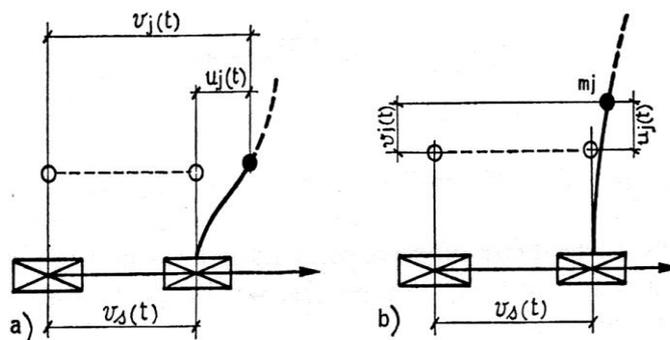


Figure 1.18 : Relation entre les déplacements.

La relation (1.68) généralisée à tous les degrés de liberté prend la forme :

$$V = U + \Delta v_s(t) \quad (1.69)$$

Avec :

$$V = \begin{bmatrix} V_1(t) \\ \vdots \\ V_2(t) \\ \vdots \\ V_n(t) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1(t) \\ \vdots \\ \delta_2(t) \\ \vdots \\ \delta_n(t) \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

Pour une déformation relative  $U$  donnée, les masses sont soumises aux forces suivantes :

- les forces élastiques de rappel :  $F_R = -K \cdot U$ ;
- les forces d'amortissement :  $F_A = -C \cdot \dot{U}$ ;

Si l'on note  $\ddot{V}$  le vecteur des accélérations absolues, l'équation du mouvement s'écrit :

$$F_R + F_A = M \cdot \ddot{V}$$

Soit :

$$M \cdot \ddot{V} + C \dot{U} + KU = 0 \quad (1.71)$$

On se ramène à une équation différentielle portant sur les déplacements relatifs en utilisant l'expression (1.69) que l'on dérive deux fois par rapport au temps :

$$\ddot{V} = \ddot{U} + \Delta \ddot{U}_g(t) \quad (1.72)$$

$\ddot{U}_g(t)$  représente l'accélération absolue de la base qui est donnée par l'accélérogramme de la secousse sismique considérée. En remplaçant dans (1.71)  $\ddot{V}$  par sa valeur, on obtient :

$$M \cdot \ddot{U} + C \dot{U} + KU = -M \Delta \ddot{U}_g(t) \quad (1.73)$$

On voit que l'on retrouve l'équation (1.48), à condition de poser :

$$P(t) = -\ddot{U}_g(t) M \Delta = -\ddot{U}_g(t) \begin{bmatrix} m_1 \delta_1 \\ \vdots \\ m_j \delta_j \\ \vdots \\ m_n \delta_n \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

$$\delta_j = 0 \text{ ou } 1.$$

On est donc ramené à l'étude d'un oscillateur multiple soumis à des forces extérieures variables dans le temps.

Ces forces sont les forces d'inertie qui agiraient sur les masses si la structure se déplaçait en bloc avec sa base, sans subir de déformations.

En effet, l'accélération absolue des masses est dans ce cas égale à  $\ddot{U}_g(t)$  dans la direction du déplacement, nulle dans les autres directions : la force d'inertie appliquée à la masse  $m_j$  est

donc soit égale à  $-m_j \ddot{U}_g(t)$ , soit nulle, ce qui correspond bien à la valeur donnée par l'expression (1.74).

La solution de l'équation du mouvement (1.73) est donnée par les expressions (1.60) et (1.67), prennent la forme :

$$U = \sum_{j=1}^n U_j(t) \Phi_j \quad (1.75)$$

$$U_j(t) = \frac{-1}{\omega_{Dj}} \int_0^t \ddot{U}_g(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin[\omega_{Dj}(t-\tau)] d\tau \quad (1.76)$$

$\Phi_j$  est un vecteur proportionnel au vecteur modal  $D_j$  ; ses termes sont sans dimension :

$$\Phi_j = a_j D_j \quad (1.77)$$

$$\text{Avec : } a_j = \frac{D_j^t M \Delta}{D_j^t M D_j}$$

L'expression (1.76) est identique à l'expression (1.33) qui donne le déplacement d'un oscillateur simple dont la base est soumise à une accélération  $\ddot{U}_g(t)$  :

$$U(t) = \frac{-1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{U}_g(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

Pour calculer la réponse selon le mode  $J$ , on se ramène à l'étude d'un oscillateur simple de pulsation  $\omega_j$  et de coefficient d'amortissement  $\xi_j$ .

Pour un accélérogramme donné, l'intégrale du Duhamel (1.76) permet le calcul du déplacement relatif en fonction du temps. La répartition des déplacements pour les diverses masses s'effectue ensuite à l'aide du vecteur  $\Phi_j$ .

Si, au lieu d'un accélérogramme, on utilise un spectre de déplacement on pourra calculer les déplacements relatifs maxima pour le mode  $J$  par la formule :

$$X_j = U_j \Phi_j \quad (1.78)$$

Où  $u_j$  représente la valeur lue sur le spectre.

Si on utilise un spectre d'accélération, le vecteur

$$\Gamma_j = \gamma_j \Phi_j \quad (1.79)$$

Où

$$\gamma_j = \omega_j^2 u_j \quad (1.80)$$

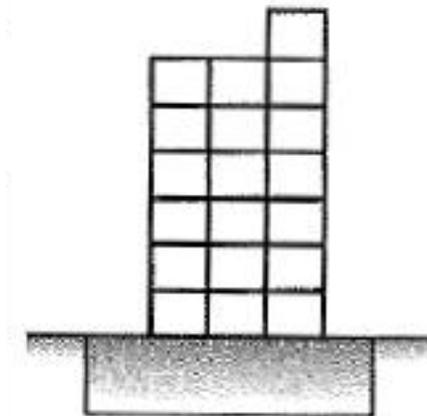
CHAPITRE II :  
PRESENTATION DU  
PHENOMENE  
INTERACTION

## CHAPITRE 2 PRESENTATION DU PHENOMENE « INTERACTION » [2] [5] [9] [13]

### 2.1. INTRODUCTION

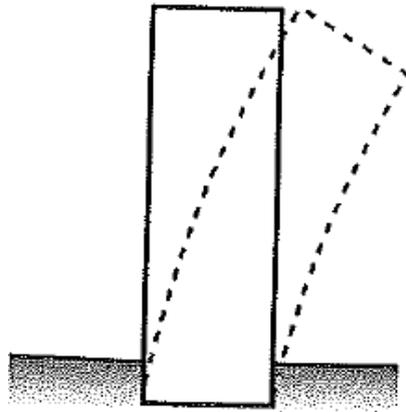
Les structures étant fondées sur les sols par lesquels sont transmises des sollicitations sismiques, il s'avère en conséquence essentiel de connaître le fonctionnement de l'ensemble du système sol-structure en cas de séisme. En effet, non seulement la nature des sols a une influence sur le comportement des structures, mais les structures mises en mouvement induisent aussi des chargements supplémentaires dans les sols qui modifieront à leur tour les composantes des sollicitations. Le terme générique décrivant l'étude de ces phénomènes porte le nom d'Interaction Sol-Structure (ISS).

La modélisation d'une structure ne doit pas se faire avec un encastrement parfait à sa base (fig. 2.1) si de grande déformation du sol son prévisibles. Cela est par exemple le cas de bâtiments très rigides fondés sur un sol de résistance mécanique moyenne, les déformations les plus importantes pouvant alors se produire dans le sol plutôt que dans la structure.



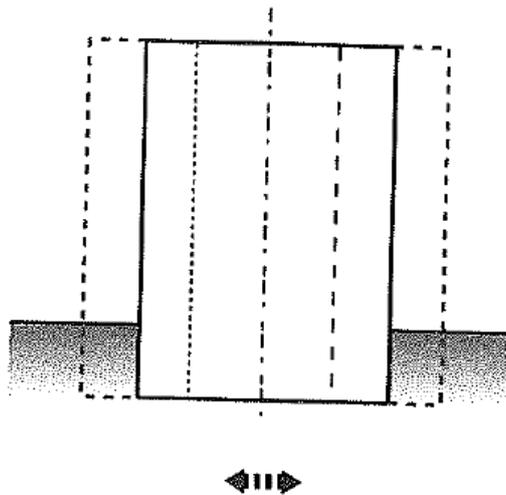
**Figure 2.1 : Représentation d'un bâtiment à encastrement parfait. [9]**

Cependant, Les bâtiments courants, réguliers et faisant l'objet des méthodes de calcul simplifiées sont en général considérés comme parfaitement encastres dans le sol de fondation.



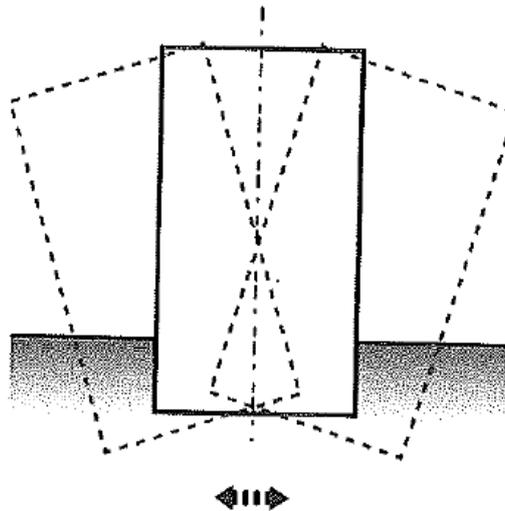
**Figure 2.2 : Représentation d'un bâtiment souple et sol de très bonne résistance mécanique (Sans ISS). [5]**

Il n'y a pas non plus d'interaction dans le cas d'un bâtiment rigide sur un sol rocheux. En effet, les déformations du sol au droit du bâtiment sont négligeables devant les déformations du bâtiment dues à l'action sismique (fig. 2.2)



**Figure 2.3 : Représentation d'un bâtiment raide et sol de très bonne résistance mécanique (Sans ISS). [5]**

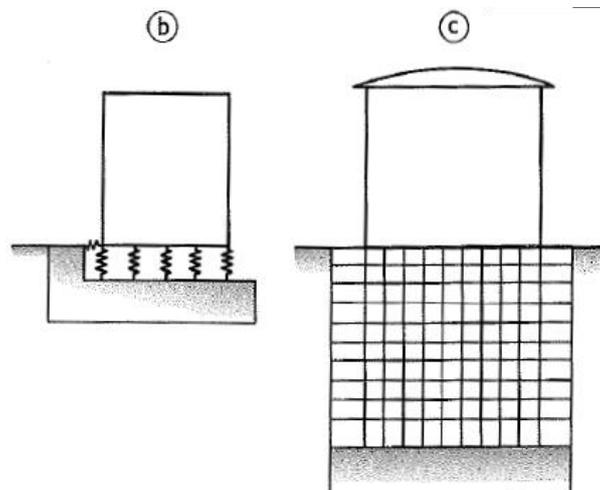
En général, et plus particulièrement dans le cas de bâtiments massifs sur des sols moyennement ou faiblement raides, les effets de l'ISS ne sont pas négligeables et modifient de façon considérable la réponse de la structure à une action sismique (fig. 2.3).



**Figure 2.4 : Représentation d'un bâtiment raide et sol de faible ou moyenne résistance mécanique (Avec ISS). [5]**

## 2.2. MODELISATION DU PHENOMENE

La modélisation est amenée à être faite en représentant le sol par des ressorts (fig. 2.5 b) ou des éléments finis (fig. 2.5 c).

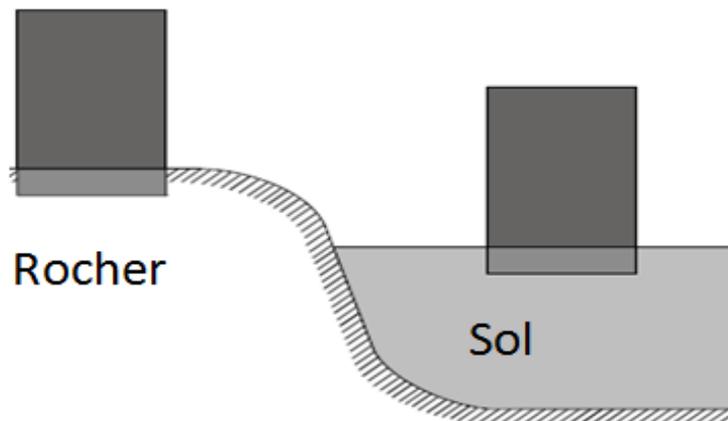


**Figure 2.5 : Modélisation de l'ISS b) Ressorts ; c) Eléments finis. [5]**

La manière la plus simple de prendre en compte le sol est de le représenter par des ressorts reliant un ou plusieurs nœuds à une base rigide, à laquelle on impose un mouvement. Dans le cas d'un modèle plan, une semelle sous point d'appui isolé est représentée par deux ressorts agissant à la translation et un ressort à la rotation; sous un radier, le sol est modélisé par un ressort horizontal et un ressort vertical en chaque nœud.

### 2.3. DESCRIPTION DU PHENOMENE :

Afin d'illustrer les principales caractéristiques de l'interaction sol structure, on compare la réponse à une excitation sismique d'une structure fondée directement sur le substratum rocheux (considéré comme infiniment rigide par rapport à la structure) à celle de la même structure fondée sur une couche de sol souple (fig. 2.6). Dans un premier temps l'analyse se fera de façon statique puis on s'intéressera au phénomène sous chargement dynamique.



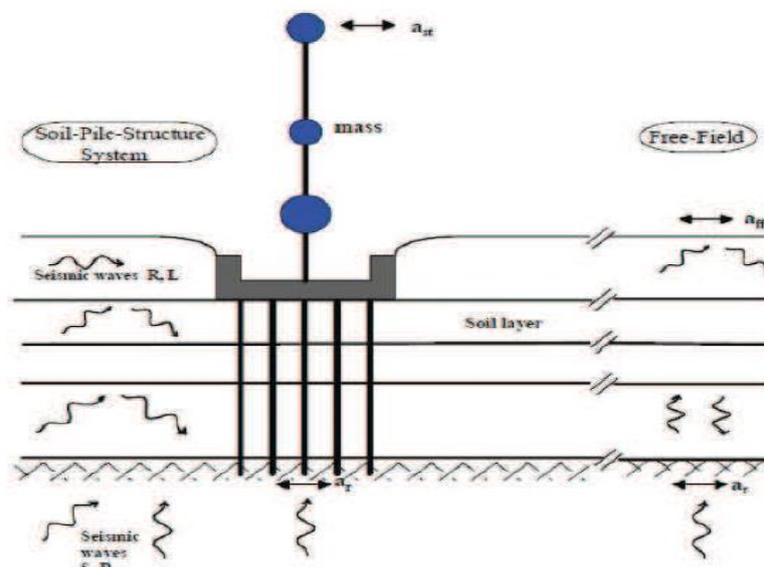
**Figure 2.6 : Comparaison de la réponse d'une structure fondée au rocher ou sur un sol souple– Description du phénomène d'interaction sol structure. [9]**

Les forces d'inertie qui résultent du mouvement de base développent un effort tranchant et un moment fléchissant, qui agissent à la base de la structure pendant la durée du séisme. La reprise de ces efforts résultants par le rocher de fondation n'induit aucune déformation de celui-ci. Au final, la différence entre le mouvement de la fondation et le mouvement du séisme de référence est négligeable ; la fondation est un appui rigide, parfaitement encasté, et l'excitation sismique correspond à une excitation par déplacement d'appui d'amplitude égale à celle du mouvement de référence déterminé en champ libre. Le plus souvent, en ingénierie parasismique, cette hypothèse d'encastrement parfait de la fondation est tacitement faite, et la prise en compte des caractéristiques mécaniques du sol n'apparaît que dans l'estimation du mouvement de référence (accélérogramme, spectre...).

Dans le domaine du génie civil, l'objectif fondamental des analyses d'interaction sol-structure, est de déterminer l'influence réciproque du sol et de la structure sur leur comportement mécanique lors d'un séisme. Nous considérons deux structures identiques dont l'une est encastée dans un rocher, et l'autre repose sur un massif de sol plus souple (figure 2.6). Nous pouvons imaginer que les deux structures se comportent de manière complètement différente sous chargement sismique. Dans le cas de la structure reposant sur un massif de sol souple, dont la rigidité et les fréquences propres s'avèrent moins importantes que celle

encastrée dans un rocher, il se peut que des déplacements plus amplifiés apparaissent. Ceci indique que les propriétés du sol ont un effet significatif sur le comportement dynamique de la structure. Réciproquement, le comportement du sol peut être modifié par la présence de la structure. En effet, le comportement du sol en champ libre peut différer significativement de celui en présence de la structure. L'influence de la structure sur le comportement du sol dépend fortement du contraste de leurs rigidités.

Prenons l'exemple montré ci-après, la structure encastrée dans le rocher n'aura aucun effet sur le comportement du sol en champ libre. Etant donné que la rigidité du rocher est infiniment grande, l'insertion de la structure dans le rocher ne modifie pratiquement pas la rigidité de l'ensemble sol-structure. De même, les efforts inertiels générés par la masse de la structure n'ont aucun effet sur le rocher très rigide.



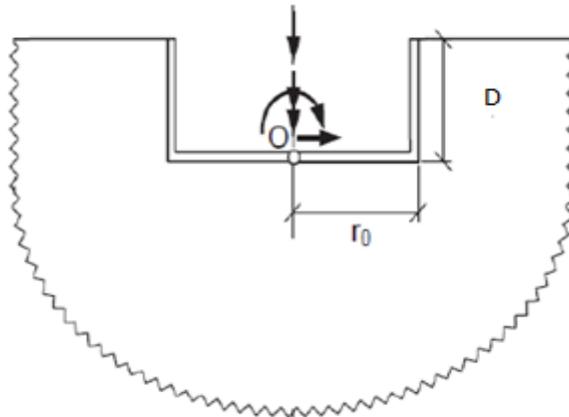
**Figure 2.7: Schématisation du problème de l'interaction sol-structure. [13]**

Pour une structure reposant sur un massif de sol plus souple, nous distinguons la notion d'interaction cinématique de celle d'interaction inertielle.

L'interaction cinématique, peut être considérée comme un effet du second ordre, ne se développant qu'à l'échelle des mouvements différentiels, alors que l'interaction inertielle apparaît avec le mouvement d'ensemble (moyen).

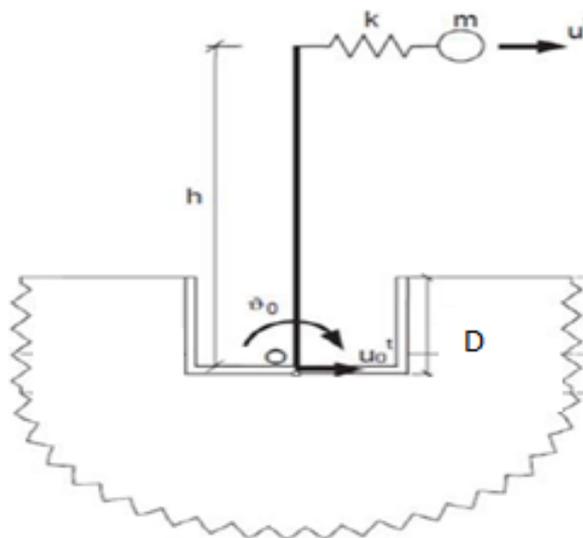
L'interaction cinématique se traduit par la différence entre le mouvement sismique en champ libre et celui dans un champ dont l'excavation et l'inclusion de la fondation ont changé les caractéristiques. Elle apparaît lorsque la raideur de la fondation empêche le développement du mouvement du champ libre. Elle ne résulte que de la différence de raideur entre le sol et la fondation, qui l'empêche de suivre les mouvements imposés par le sol. Au fait, les fondations forcées à suivre le mouvement du sol, tendent à résister par leur rigidité. Comme le montre la

figure ci-après, ce type d'interaction désigne l'interaction entre le sol et les fondations sous chargement sismique en l'absence de la structure.



**Figure 2.8 : Représentation d'une fondation enterrée dans un demi-espace. [13]**

L'interaction inertielle provient des efforts d'inertie engendrés par la masse de la structure à sa base et donc dans le sol sous effet du mouvement imposé à la fondation.



**Figure 2.9 : Système sol-fondation enterrée sous chargement sismique horizontal. [13]**

En plus de l'interaction cinématique, elle aussi modifiera le champ de déplacement.

Ainsi, l'influence de la structure sur le sol et celle du sol sur la structure existent de manière concomitante. En effet, l'étude de la réponse dynamique du système sol-fondation sous l'effet de l'interaction inertielle nécessite une analyse cinématique préalable en vue d'obtenir le mouvement à la base de la structure pour déduire les efforts d'inertie induits par la superstructure.

Généralement, l'interaction sol-structure résulte de l'interaction cinématique et de l'interaction inertielle. Cependant, l'interaction cinématique est souvent négligée dans les

codes parasismiques qui adoptent généralement une méthode simplifiée consistant à calculer les efforts sismiques à partir des forces inertielles.

## 2.4. METHODES D'ANALYSE

Pour prendre en compte l'effet de l'interaction sol-structure, nous distinguons trois catégories de méthodes qui sont respectivement les méthodes directes, les méthodes de sous-structures et les méthodes hybrides.

### 2.4.1. Méthodes directes

Les méthodes directes, appelées aussi méthodes globales, traitent le problème de l'interaction sol-structure dans sa globalité de façon à obtenir les réponses du sol et de la structure simultanément. Elles consistent à résoudre directement l'équation du mouvement dans l'ensemble du système sol-structure :

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + K u = F$$

Où  $M$ ,  $C$  et  $K$  désignent respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système,  $u$  représente le vecteur de déplacement du système,  $\dot{u}$  sa dérivée par rapport au temps dynamique, et  $F$  est le vecteur de charge appliquée à la frontière extérieure du système.

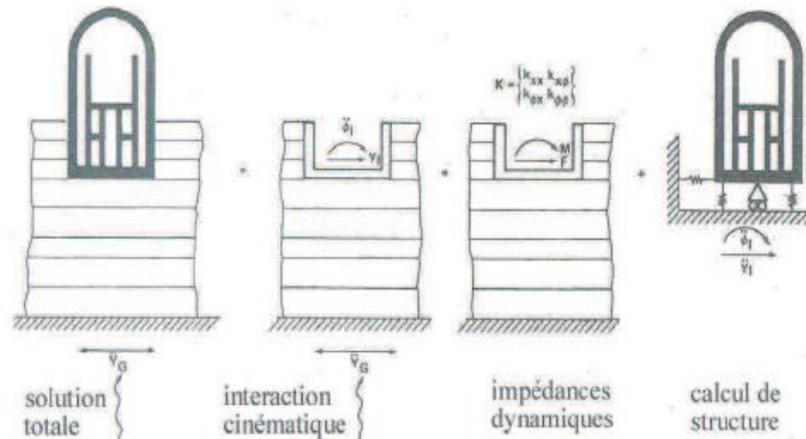
La résolution directe de ce système d'équation est tellement complexe que le recours aux méthodes numériques, comme les méthodes des éléments finis et des différences finies, est pratiquement inéluctable.

L'un des avantages principaux des méthodes directes est leur capacité d'intégrer dans le modèle numérique les hétérogénéités matérielles du sol et de la structure, les singularités géométriques du problème, et les lois de comportement bien adaptées pour la prise en compte des non linéarités dans le sol ou à l'interface sol-fondation du système. Ces méthodes requièrent une discrétisation plus étendue du massif de sol supportant la fondation afin de minimiser la réflexion numérique sur la frontière qui sollicite une nouvelle fois la structure. En conséquence, la mise en œuvre de ces méthodes reste une opération généralement coûteuse du point de vue numérique, surtout pour les problèmes tridimensionnels.

### 2.4.2. Méthodes de sous-structures

Les méthodes de sous-structures, contrairement aux méthodes directes, se basent sur la décomposition du problème global en plusieurs sous-problèmes plus simples à traiter avant de faire appel au principe de superposition afin d'obtenir les résultats globaux. Il est à noter que ces méthodes, comme tout problème de superposition, ne sont applicables que pour des problèmes entièrement linéaires.

L'approche, en utilisant le principe de superposition de [Kausel et al., 1978] illustré dans la figure 2.9 pour le cas des fondations rigides, consiste en trois étapes successives.



**Figure 2.10 : Principe de superposition de Kausel. [13]**

- Premièrement, nous effectuons une analyse de l'interaction cinématique. Nous considérons la sous-structure comportant le massif de sol et la fondation rigide sans masse. A partir du mouvement sismique à la base du massif de sol, nous déduisons l'accélération au niveau de l'interface sol-fondation.
- Deuxièmement, nous réalisons une analyse de l'interaction inertielle de façon à déterminer l'impédance dynamique de la fondation. Cette impédance caractérise les efforts dynamiques imposés à la fondation sans masse lorsqu'elle est soumise à une sollicitation harmonique d'amplitude unitaire. La partie réelle correspond à la raideur du système sol-fondation, alors que la partie imaginaire représente l'amortissement radiatif.
- Troisièmement, nous déterminons la réponse dynamique de la structure reliée au massif de sol par l'intermédiaire des ressorts d'impédances calculés dans la deuxième étape et soumise à la sollicitation sismique déduite de la première étape.

Bien que les méthodes de sous-structures soient limitées aux problèmes linéaires, de nombreux travaux montrent qu'elles donnent de très bons résultats ([Pitilakis et al., 2008]).

### 2.4.3. Méthodes hybrides :

Les méthodes hybrides constituent une troisième famille de méthodes qui réunissent les avantages des méthodes directes et des méthodes de sous-structures. Elles ont pour objectif de diviser le système en deux sous-domaines : un champ lointain et un champ proche.

Le champ lointain reste suffisamment éloigné de la fondation pour qu'il ne soit pas influencé par l'interaction sol-structure, et donc qu'il puisse être considéré comme élastique.

Il peut être modélisé par des méthodes adaptées aux problèmes linéaires, par exemple, les impédances dynamiques.

Le champ proche, à proximité de la fondation, inclut toutes les hétérogénéités et non linéarités du système. Il s'intègre dans le modèle de la superstructure et peut être traité par une méthode directe, par exemple la méthode des éléments finis.

## **2.5. CONCLUSION**

Les phénomènes qui viennent d'être décrits ont des conséquences différentes voire opposées sur la vulnérabilité sismique de la structure dont voici une description qualitative :

- L'amplification de l'excitation (référéncée au rocher) par les couches molles situées au-dessus du substratum a évidemment un effet catastrophique sur les constructions dont l'ampleur a été maintes fois constatée sur le terrain.
- La réponse de la structure dans l'interaction inertielle se partage entre mouvement de corps rigide, selon les modes de corps rigide de la fondation, et déformation structurelle. Plus le sol est souple, plus la part des mouvements de corps rigides est importante. De ce point de vue l'interaction sol structure joue dans le sens d'une diminution du risque de ruine interne de la structure.

Par ailleurs, les fréquences propres de la structure fondée sur sol souple sont plus basses que celles du système plus rigide constitué de la structure encastrée à sa base dans un milieu parfaitement rigide. Cette évidence théorique est corroborée par de nombreuses observations expérimentales (voir par exemple Stewart et coll., 1998, 1999b, pour une mise en évidence de ce phénomène sur un grand nombre de bâtiments). L'effet de cette réduction des fréquences, en particulier de la fréquence fondamentale, dépend du contenu fréquentiel du séisme (ou de toute autre sollicitation considérée). Dans certains cas, la valeur de la fréquence fondamentale passe en-dessous de la gamme dans laquelle l'excitation est la plus forte, et la réponse de la structure (en tout cas du premier mode) s'en trouve diminuée. L'effet contraire peut être envisagé.

En conclusion, il est difficile de savoir a priori si l'interaction sol structure a une influence positive ou négative sur le comportement de la structure. Elle peut théoriquement contribuer à amplifier ou diminuer les déplacements à l'intérieur de la structure.

# CHAPITRE III :

# APPLICATION

## CHAPITRE 3 : APPLICATION

### 3.1. PRESENTATION DES STRUCTURES

L'étude sera faite sur les deux structures identiques auto-stables à usage d'habitation, représentées ci-dessous (fig. 3.1), implantées dans la zone (II.a). La structure A est supposée encastree à sa base tandis que dans la figure B le sol est remplacé par des ressorts dans les trois directions (horizontal, vertical et en rotation). Les deux structures sont supposées avoir des planchers rigides. Afin d'illustrer l'effet de l'interaction sol structure on comparera les résultats des deux structures. Dans un premier temps l'analyse se fera de façon statique puis, on s'intéressera au phénomène sous chargement dynamique.

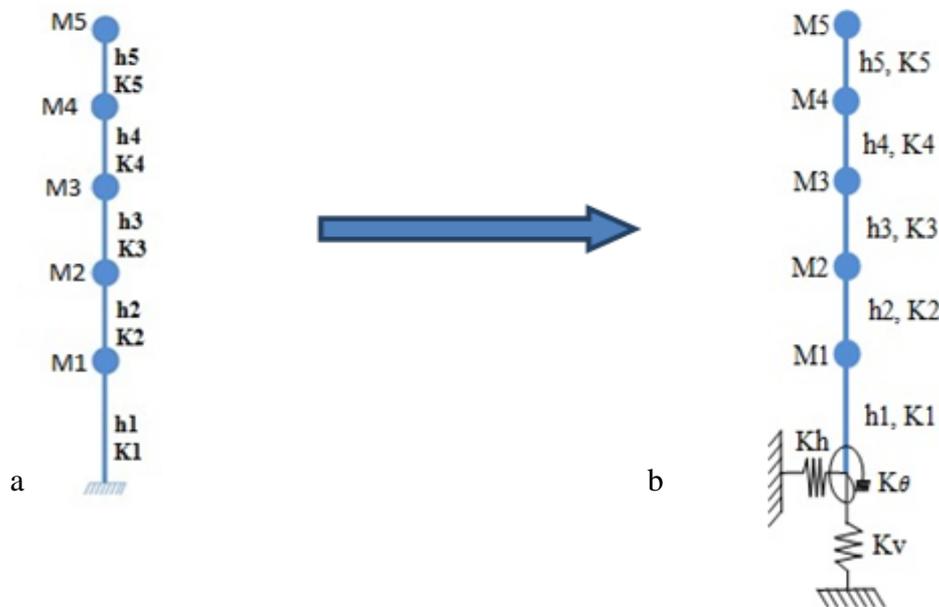


Figure 3.1: Les structures étudiées. a) sans ISS. b) avec ISS.

### 3.2. CARACTERISTIQUES DES STRUCTURES

1- Les poteaux :  $0.3 \times 0.3$  (m)

2- Les poutres principales :  $0.3 \times 0.4$  (m)

3- La hauteur des étages :

Le rez-de-chaussée :  $h1 = 3.4$  m

Les autres étages :  $h2 = h3 = h4 = h5 = 3$  m

4- Poids propre de la dalle :  $600$  Kg/m<sup>2</sup>

5- Cloison périphérique :  $120 \text{ Kg/m}^2$

6- Cloison de séparation :  $100 \text{ Kg/m}^2$

7- L'acrotère :  $100 \text{ Kg/ml}$

8- La charge d'exploitation :  $250 \text{ Kg/m}^2$

9- La résistance caractéristique du béton à la compression :  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$

### 3.2.1. Calcul des inerties

a) L'inertie des poteaux :

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = (0.3 \times 0.3^3) / 12 = 0.675 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

b) L'inertie des poutres :

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = (0.3 \times 0.4^3) / 12 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

### 3.2.2. Calcul du module de Young

Le calcul du module de Young se fait par la formule de l'RPA :

$$E = 11000 * \sqrt[3]{f_{c28}}$$

$$E = 32164 \text{ MPa}$$

## 3.3. CALCUL DES CHARGES

### 3.3.1. Les masses des planchers

Les masses sont calculées en tenant compte des charges réparties de chaque plancher (poids de la dalle et la charge d'exploitation), le poids des poutres, le poids des poteaux et des surfaces des murs (périphériques et de séparation) revenant à chacun des planchers. Les masses seront supposées concentrées au milieu de chaque plancher.

Les masses seront calculées suivant la formule de l'RPA :

$$m_i = m_G + \beta m_Q$$

Avec :  $\beta = 0.2$  (bâtiment à usage d'habitation)

Donc

$$m_1 = (600 * 4 * 8) + (0.3 * 0.4 * 2500 * (4 * 3 + 8)) + 3 * (0.3 * 0.3 * 2500 * 3.2) \\ + (120 * 2 * 4 * 3.2) + (100 * 3.2 * (8 + 4)) + 0.2 * (250 * 4 * 8) \\ m_1 = 36t$$

$$m_2 = (600 * 4 * 8) + (0.3 * 0.4 * 2500 * 20) + 3 * (0.3 * 0.3 * 2500 * 2.8) \\ + (120 * 2 * 2.8 * 4) + (100 * 2.8 * 12) + 0.2 * (250 * 4 * 8) \\ m_2 = 35t$$

$$m_2 = m_3 = m_4 = m = 35t$$

$$m_5 = (600 * 4 * 8) + (0.3 * 0.4 * 2500 * 20) + 3 * (0.3 * 0.3 * 2500 * 2.8) + (100 * 2 * 4 \\ * 1.5) + (100 * 1.5 * 12) + 0.2 * (250 * 4 * 8) \\ m_5 = 32t$$

### 3.3.2. Calcul de l'effort tranchant à la base

Le calcul de l'effort tranchant se fait suivant le Règlement Parasismique Algérien RPA99.

- $V = \frac{ADQ}{R} W$
- Zone II.a:
- $S_2 \Rightarrow \begin{cases} T_1 = 0.15s \\ T_2 = 0.40s \end{cases}$
- $A = 0.15$
- $\xi = 0.05$
- $R = 5$
- $Q = 1.1$

$$\begin{cases} D = 2.5\eta\left(\frac{T_2}{T}\right)^{\frac{2}{3}} \\ \begin{cases} T_1 = 0.15s \\ T_2 = 0.40s \end{cases} \\ \eta \approx 1 \end{cases} D = 1.553$$

- $W = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) * g = (36 + 3 * 35 + 32) * 10 \\ W = 1730 KN$

$$V = \frac{0.15 * 1.553 * 1.1}{5} * 1730 \Rightarrow V = 88.66 KN$$

### 3.3.3. Répartition de l'effort tranchant :

$$V = 88.66 KN$$

$T = 0.817s$  (Période de premier mode de vibration ; calculée dans la partie dynamique pour la structure encastree)

$$T = 0.817 s > 0.7 s \Rightarrow Ft = 0.07.T.V$$

$$F_t = 0.07.T.V = 0.07 * 0.817 * 88.66$$

$$F_t = 5.06 \text{ KN}$$

$$F_k = (V - F_t) \frac{m_k h_k}{\sum_1^n m_j h_j}$$

$$F_k = (88.66 - 5.06) * \frac{m_k h_k}{1602.2} = 83.6 * \frac{m_k h_k}{1602.2}$$

- $F_1 = 83.6 \left( \frac{36*3.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_1 = 6.386 \text{ KN}$
- $F_2 = 83.6 \left( \frac{35*6.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_2 = 11.688 \text{ KN}$
- $F_3 = 83.6 \left( \frac{35*9.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_3 = 17.166 \text{ KN}$
- $F_4 = 83.6 \left( \frac{35*12.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_4 = 22.645 \text{ KN}$
- $F_5 = 83.6 \left( \frac{32*15.4}{1602.2} \right) \Rightarrow F_5 = 25.713 \text{ KN}$

### 3.4.CALCUL DES FONDATIONS [4] [11]

Les fondations sont soumises aux efforts suivants :

N : l'effort normal ;

V : l'effort tranchant dû au séisme ;

M : le moment de renversement.

Le calcul de ces différentes charges sera fait pour les fondations sous le poteau central, conformément au règlement parasismique algérien RPA 2003 et le dimensionnement des fondations sera fait conformément au document technique réglementaire DTR-BC 2.331 calcul des fondations superficielles.

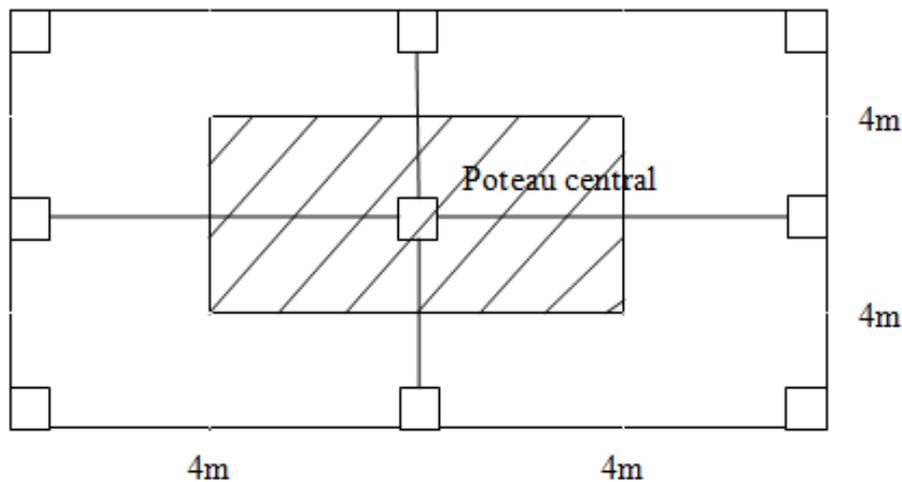


Figure 3.2: Part de charges revenant au poteau central.

### 3.4.1. Calcul de l'effort normal

$$N = G + Q + E$$

$$G = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - 5 * 0.2 * Q * A)$$

$$G = 825 \text{ KN}$$

- Descente des charges d'exploitation

Sous la terrasse :  $Q = Q_0 = 250 * 8 * 4 = 8000 \text{ KG} = 80 \text{ KN}$

Sous le 1<sup>er</sup> niveau :  $Q = Q_0 + Q_0 = 2 * Q_0 = 160 \text{ KN}$

Sous le 2<sup>ème</sup> niveau :  $Q = Q_0 * (1 + 0.9 + 0.8) = 216 \text{ KN}$

Sous le 3<sup>ème</sup> niveau :  $Q = Q_0 * (1 + 0.9 + 0.8 + 0.7) = 272 \text{ KN}$

Sous 4<sup>ème</sup> niveau :  $Q = Q_0 * (1 + 0.9 + 0.8 + 0.7 + 0.6) = 320 \text{ KN}$

$$Q = \frac{1}{2} * 320 = 160 \text{ KN}$$

$$N = G + Q + E = 825 + 160 + \frac{(88.66 - 5.06)}{3} = 1012.9 \text{ KN}$$

### 3.4.2. Calcul de l'effort tranchant

L'effort tranchant  $v$  qui revient au poteau central est le tiers de l'effort horizontal :

$$v = \frac{V}{3} = 27.87 \text{ KN}$$

### 3.4.3. Calcul du moment renversant

$$M = \frac{2}{3} * v * H = \frac{2}{3} * 27.87 * 15.4 = 286.1 \text{ KN.m}$$

### 3.4.4. Calcul de la capacité portante du sol

La capacité portante du sol est calculée par la formule (3.1) du DTR-BC 2.331

$$q_u = i_c * s_c * C * N_c + \frac{1}{2} * i_\gamma * s_\gamma * \gamma * B' * N_\gamma + i_q * s_q * \gamma * D * N_q \quad (3.1)$$

Tels que :

$i_c, i_\gamma, i_q$  : Coefficients d'inclinaison de charge.

$$\begin{cases} i_c = i_q = \left(1 - \frac{2\delta}{\pi}\right)^2 \\ i_\gamma = \left(1 - \frac{\delta}{\varphi}\right)^2 \end{cases}$$

$\delta$  : Angle d'inclinaison de la charge verticale (N) par rapport à la verticale.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \frac{N}{v}$$

$\varphi$  : Angle de frottement interne du sol.

$s_c, s_\gamma, s_q$  : Coefficients de forme.

$$\begin{cases} s_c = 1 + 0.2 \frac{B}{L} \\ s_\gamma = 1 - 0.2 \frac{B}{L} \\ s_q = 1 \end{cases}$$

$N_c, N_\gamma, N_q$  : Paramètres adimensionnels dépendant de  $\varphi$  donnés dans le tableau suivant :

**Tableau 3.1: Valeurs des différents coefficients. [11]**

$\varphi$	$N_c$	$N_\gamma$	$N_q$
0	5,14	0,00	1,00
5	6,50	0,10	1,60
10	8,40	0,50	2,50
15	11,00	1,40	4,00
20	14,80	3,50	6,40
25	20,70	8,10	10,70
30	30,00	18,10	18,40
35	46,00	41,10	33,30
40	75,30	100,00	64,20
45	134,00	254,00	135,00

$C$  : Terme de cohésion du sol.

$\gamma$ : Poids volumique des terres.

$B' = B - 2 * e$  : La largeur réduite de la semelle

$$e = \frac{M}{N}$$

$D$  : Profondeur d'encrage de la semelle.

On en déduit donc la contrainte admissible donnée par la relation suivante :

$$q_a = \frac{\gamma D + q_u}{F}$$

$F$  : Coefficient de sécurité = 2 [11]

Le dimensionnement des fondations est donné suivant les conditions suivantes :

- Limitation des contraintes du sol et des tassements différentiels sous la semelle ;
- Non poinçonnement ;

Dans le cas de semelles carrées sous poteau on a les conditions précédentes se traduisent comme suit :

- a) Pour la condition de tassements on admet qu'elle est satisfaite.

b) Critère de non poinçonnement du sol :

$$q_a \geq \frac{3\sigma_1 + \sigma_2}{4}$$

Avec :

$$\sigma_1 = \frac{N}{B^2} * \left(1 + \frac{6 * e}{B}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{B^2} * \left(1 - \frac{6 * e}{B}\right)$$

Nos structures reposent sur une argile ferme à module d'Young  $E = 15MPa$ , donc d'après le (tableau 3.2) on tire :

$$C = 43KN/m, \quad \varphi = 18^\circ$$

D'ou:

$$\begin{cases} N_c = 13 \\ N_\gamma = 2.6 \\ N_q = 5.5 \end{cases}$$

Tableau 3.2: Valeurs typiques des propriétés mécaniques des sols. [3]

Type de sol	Densité (t/m <sup>3</sup> )	Module de E (MPa)	Coeff. de Poisson V	Cohésion Cu Apparente (MPa)	Angle de frottement interne φ' degré
Sable limoneux		7 - 70	0,35	0	25
Sable peu compact	1,75	15 - 20	0,35	0	29
Sable dense	2,00	50 - 120	0,35	0	38
Sable dense et gravier	2,07	90 - 200	0,40	0	30
Argile molle	1,75	1 - 15	0,50	0 - 0,025	< 18
Argile ferme	2,00	10 - 20	0,50	0,025 - 0,100	18
Argile très ferme	2,07	25 - 200	0,50	0,100 - 0,200	> 18
Grès		≤ 50.000	0,35	60	
Craie		5000-20000	0,45	5	
Calcaire		25000-100000	0,47	83	
Basalte		15000-100000	0,45		

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = 36.34$$

D'où :  $\delta = 1.58^\circ$

$$\begin{cases} i_c = 0.931 \\ i_\gamma = 0.832 \\ i_q = 0.931 \end{cases}$$

Pour une semelle carrée :

$$\begin{cases} s_c = 1.2 \\ s_\gamma = 0.8 \\ s_q = 1 \end{cases}$$

Après itérations on obtient pour  $B = 2m$  et  $D = 1.5m$ :

$$q_u = 801.32 \text{ KN/m}^2$$

Donc :

$$q_a = 415.66 \text{ KN/m}^2$$

- Vérifications :

Poinçonnement du sol :

$$\sigma_1 = 528.68 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma_2 = 32.49 \text{ KN/m}^2$$

$$q_a = 415.66 \text{ KN/m}^2 \geq \frac{3 * \sigma_1 + \sigma_2}{4} = 404.63 \text{ KN/m}^2$$

Donc les structures sont supposées reposer sur des semelles filantes de  $2m$  de largeur ancrées à une profondeur  $D = 1.5 \text{ m}$

### 3.5. CALCUL DES RAIDEURS DU SOL :

Le calcul du  $K_h$  et  $K_v$  se fait avec les formules de GAZETAS, 1991 (Annexe A) pour une semelle filante de largeur  $2B$ , ancrée à une profondeur  $D$  :

$$K_h = \frac{2G}{2 - \nu} \left( 1 + 0.5 \frac{D}{B} \right)$$

$$K_v = \frac{0.73 G}{1 - \nu} \left[ 1 + 0.2 \left( \frac{D}{B} \right)^{2/3} \right]$$

A.N :

$$G = \frac{E}{2 * (1 + \nu)} = 5 \text{ MPa}$$

$$D = 1.5 \text{ m}$$

$$B = 1 \text{ m}$$

D'où :

$$K_h = 11667 \text{ KN/m}$$

$$K_v = 9.213 \text{ MN/m}$$

### 3.5. PARTIE STATIQUE

En plus du poids propre et des surcharges d'exploitation les structures sont supposées soumises aux efforts horizontaux calculés au paragraphe 3.3.3 : (fig. 3.3)

Pour obtenir les déplacements et les efforts induits dans la structure avec et sans ressorts, nous avons utilisé le programme Cadre.for élaboré avec le langage FORTRON.

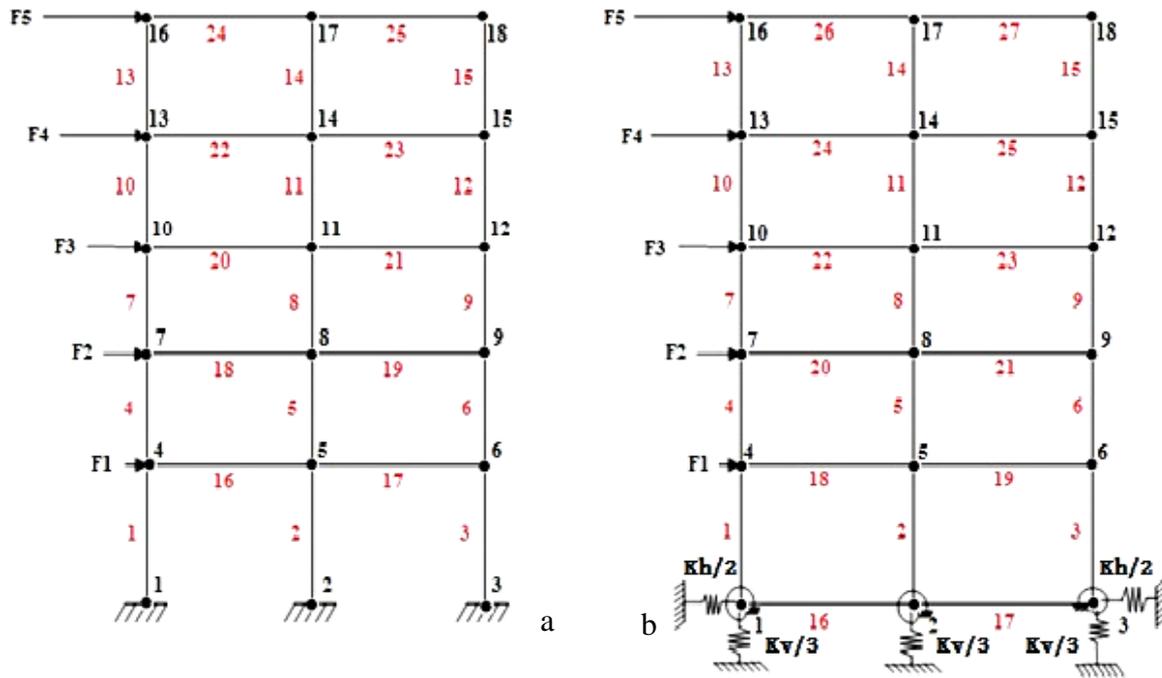


Figure 3.3 : Modèles traités par FORTRAN. a) sans ISS. b) avec ISS.

### 3.5.1. Structure encastree

Les déplacements du portique 1 (nœuds 1, 4, 7, 10, 13 et 16) sont représentés sur la figure suivante (fig. 3.4)

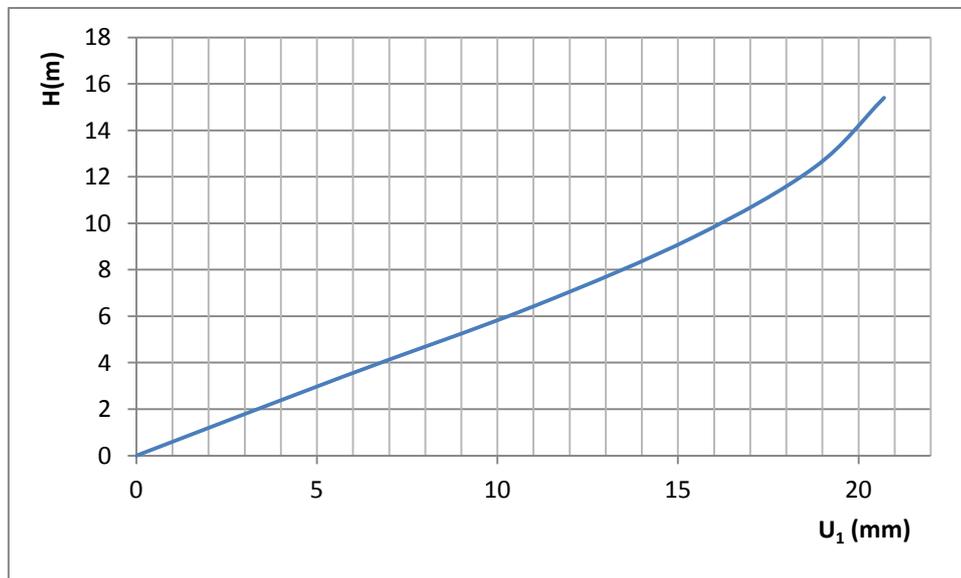


Figure 3.4 : Déplacement du premier portique (sans ISS).

### 3.5.2. Structure non encastree

Les déplacements du portique 1 (nœuds 1, 4, 7, 10, 13 et 16) sont représentés sur la figure suivante (fig. 3.5)

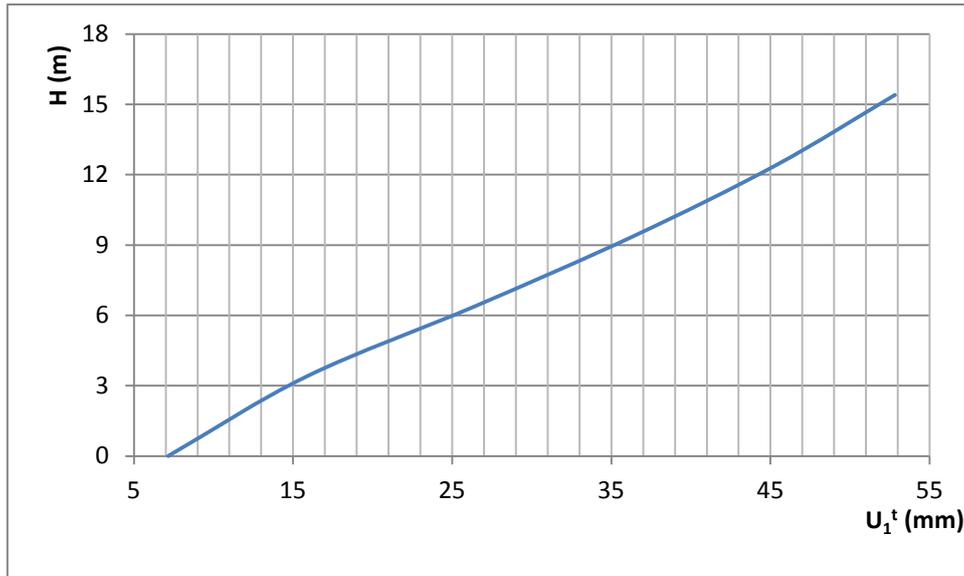


Figure 3.5: Déplacement total du premier portique (avec ISS).

### 3.6. PARTIE DYNAMIQUE

Les structures à étudier sont représentées sur la figure suivante. (fig. 3.6)

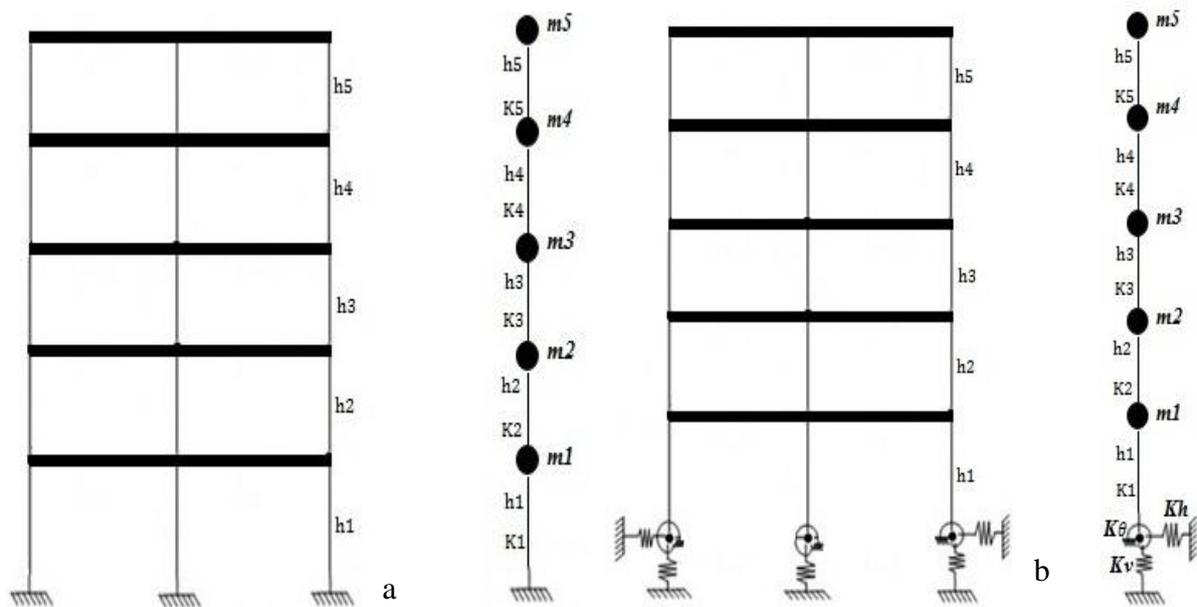


Figure 3.6: Structures étudiées en dynamique.  
a) sans ISS. b) avec ISS

### 3.6.1. Structure encastrée :

Les résultats utilisés dans cette partie sont extraits de l'étude faite dans le cadre de projet de fin d'études des étudiants AILANE Abdenour & MERZOUG Boumediene, intitulé « Analyse de la réponse statique et dynamique des structures compte tenu des paramètres incertains application aux tunnels et les portiques autostables ».

#### 3.6.1.1. Modélisation de la structure et équations de mouvement

Le modèle de la structure à étudier, est un système masse-ressort équivalent (fig.3.7), dont les masses simulent les masses des planchers et les coefficients de raideur des ressorts simulent les rigidités des poteaux.

Au fait, la structure est assimilée à un système de masses et de ressorts (K, M), placés en série.

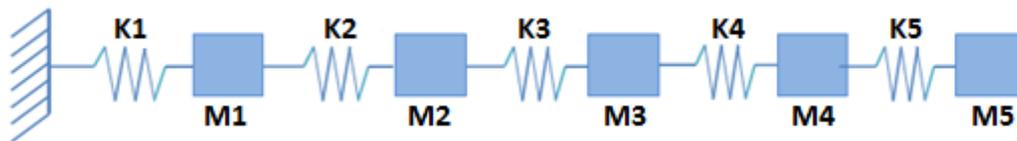


Figure 3.7 Modèle de la structure encastrée.

Le mouvement des masses est régi par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{U}_1 + K_1 U_1 - K_2 (U_2 - U_1) = 0 \\ m_2 \ddot{U}_2 + K_2 (U_2 - U_1) - K_3 (U_3 - U_2) = 0 \\ m_3 \ddot{U}_3 + K_3 (U_3 - U_2) - K_4 (U_4 - U_3) = 0 \\ m_4 \ddot{U}_4 + K_4 (U_4 - U_3) - K_5 (U_5 - U_4) = 0 \\ m_5 \ddot{U}_5 + K_5 (U_5 - U_4) = 0 \end{cases}$$

Ou sous forme simplifiée :

$$M \ddot{U} + K U = 0$$

Telle que :

$$K = \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 & 0 & 0 \\ 0 & -K_3 & (K_3 + K_4) & -K_4 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4 & (K_4 + K_5) & -K_5 \\ 0 & 0 & 0 & -K_5 & K_5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 48833.24 & -28947.6 & 0 & 0 & 0 \\ -28947.6 & 57895.2 & -28947.6 & 0 & 0 \\ 0 & -28947.6 & 57895.2 & -28947.6 & 0 \\ 0 & 0 & -28947.6 & 57895.2 & -28947.6 \\ 0 & 0 & 0 & -28947.6 & 28947.6 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

### 3.6.1.2. Calcul des périodes

La solution du système  $KU = \lambda MU$  donne les résultats représentés dans le tableau 3.3 suivant :

**Tableau 3.3: Solutions du système ' $KU = \lambda MU$ ' sans ISS [1].**

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
$\lambda_i$ (rad/s) <sup>2</sup>	59.069	517.882	1338.145	2281.685	3026.754
$\omega_i$ (rad/s)	7.68569	22.75703	36.58067	47.76699	55.01594
$T$ (s)	0.8175	0.2760	0.1718	0.1315	0.1142
$D_i$	0.0373	0.0902	0.1007	0.0794	0.0424
	0.0602	0.0941	0.0023	-0.0913	-0.0880
	0.0788	0.0390	-0.0999	-0.0101	0.1037
	0.0919	-0.0946	-0.0404	0.0989	-0.0841
	0.0983	-0.0404	0.0844	-0.0650	0.0358

### 3.6.1.3. Calcul des déplacements

Les déplacements de la structure sont représentés sur la figure 3.8.

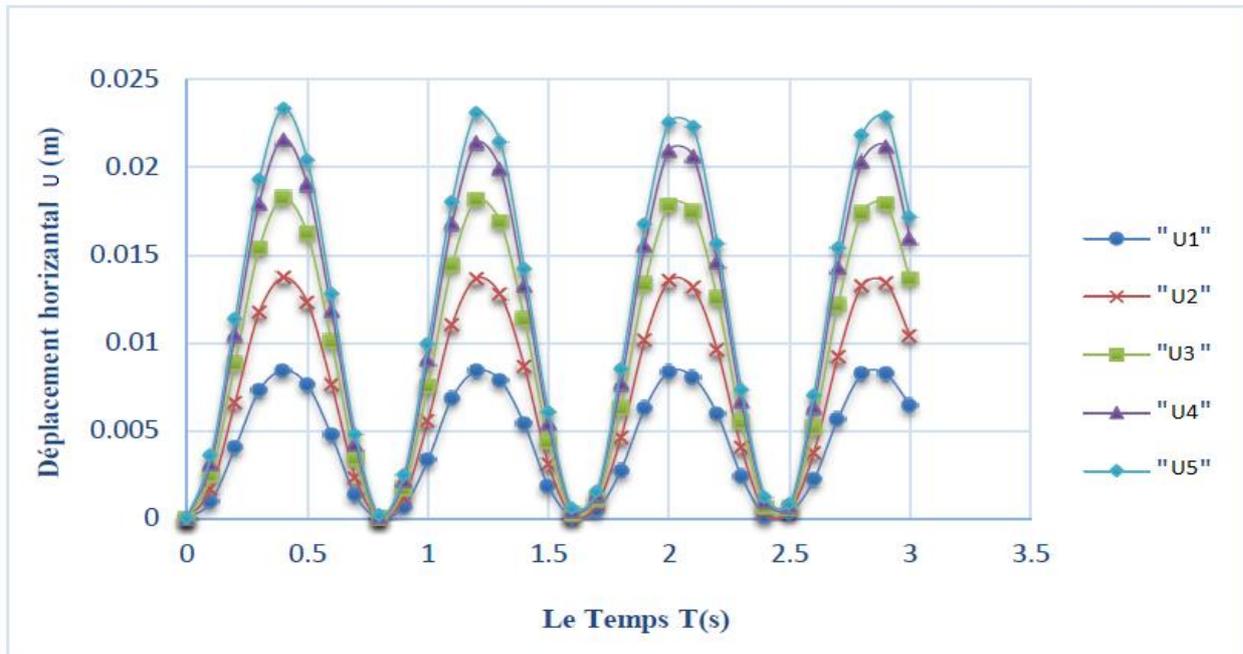


Figure 3.8: Déplacements horizontaux des plachers en fonction du temps. [1]

### 3.6.2. Structure non encastrée

#### 3.6.2.1. Modélisation de la structure et les équations de mouvement

La flexibilité du sol est modélisée avec un ressort horizontal ( $K_h$ ), un ressort vertical ( $K_v$ ), et un ressort en rotation ( $K_\theta$ ). La liaison entre la structure et la fondation est réalisée par une barre rigide.

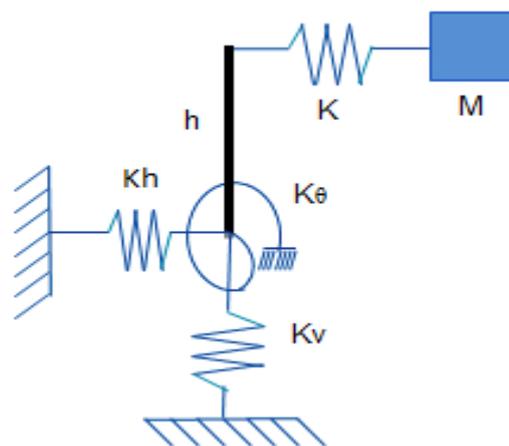


Figure 3.9 : Modèle de la structure avec ISS.

Ce système possède 3 degrés de liberté :

- Le déplacement horizontal  $U$  de la masse  $m$  ;
- Le déplacement horizontal  $U_0$  de la fondation;

- La rotation  $\theta$  de la fondation autour d'un axe horizontal.

Il est soumis à un déplacement horizontal du sol support, harmonique de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $U_g$ .

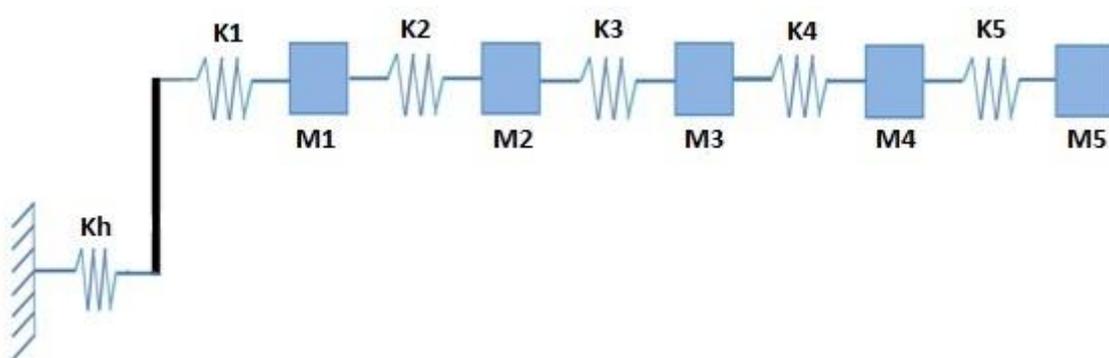
Les équations d'équilibre dynamique du système s'obtiennent aisément à partir des équations de Lagrange en prenant comme variables généralisées : (Annexe B)

- $q_1 = U$ , le déplacement relatif de la masse
- $q_2 = U_0$ , le déplacement de la fondation
- $q_3 = \theta$ , la rotation de la fondation

On a la relation entre le déplacement absolu de la masse  $m$  et les variables précédentes :

$$U^t = U_g + U + U_0 + h\theta$$

Dans notre étude, le sol est modélisé par un ressort horizontal uniquement.



**Figure 3.10 : Modèle simplifié de la structure avec ISS.**

Le système des équations du mouvement est le suivant :

$$\begin{cases} m_1(\ddot{U}_1 + \ddot{U}_0) + (K_1 + K_2)U_1 - K_2U_2 = 0 \\ m_2(\ddot{U}_2 + \ddot{U}_0) - K_2U_1 + (K_2 + K_3)U_2 - K_3U_3 = 0 \\ m_3(\ddot{U}_3 + \ddot{U}_0) - K_3U_2 + (K_3 + K_4)U_3 - K_4U_4 = 0 \\ m_4(\ddot{U}_4 + \ddot{U}_0) - K_4U_3 + (K_4 + K_5)U_4 - K_5U_5 = 0 \\ m_5(\ddot{U}_5 + \ddot{U}_0) - K_5U_4 + K_5U_5 = 0 \end{cases}$$

Ou de manière simplifiée :

$$M(\ddot{U} + \ddot{U}_0) + KU = 0$$

Où :

$$K = \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 & 0 & 0 \\ 0 & -K_3 & (K_3 + K_4) & -K_4 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4 & (K_4 + K_5) & -K_5 \\ 0 & 0 & 0 & -K_5 & K_5 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}$$

Pour réduire de nombre d'inconnues on utilise le système suivant qui nous donnera les relations entre les différents  $U_i$  est le  $U_0$  [8] [12]

$$\begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 & 0 & 0 \\ 0 & -K_3 & (K_3 + K_4) & -K_4 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4 & (K_4 + K_5) & -K_5 \\ 0 & 0 & 0 & -K_5 & K_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} K_h U_0$$

On obtient :

$$U_0 = \alpha_i U_i$$

Tel que :

$$\{\alpha_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_1}{5K_h} \\ \frac{K_1 K}{K_h(4K_1 + 5K)} \\ \frac{K_1 K}{K_h(7K_1 + 5K)} \\ \frac{K_1 K}{K_h(9K_1 + 5K)} \\ \frac{K_1 K}{K_h(10K_1 + 5K)} \end{array} \right\}$$

Ce qui donne :

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \left(1 + \frac{K_1}{5K_h}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 \left(1 + \frac{K_1 K}{K_h(4K_1 + 5K)}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \left(1 + \frac{K_1 K}{K_h(7K_1 + 5K)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \left(1 + \frac{K_1 K}{K_h(9K_1 + 5K)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_5 \left(1 + \frac{K_1 K}{K_h(10K_1 + 5K)}\right) \end{bmatrix}$$

### 3.6.2.3. Calcul des périodes

$$K = \begin{bmatrix} 48833.24 & -28947.6 & 0 & 0 & 0 \\ -28947.6 & 57895.2 & -28947.6 & 0 & 0 \\ 0 & -28947.6 & 57895.2 & -28947.6 & 0 \\ 0 & 0 & -28947.6 & 57895.2 & -28947.6 \\ 0 & 0 & 0 & -28947.6 & 28947.6 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 48.276 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 42.700 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 41.090 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40.320 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36.608 \end{bmatrix}$$

Les solutions propres du système  $KU = \lambda MU$  sont données dans le tableau (3.4).

**Tableau 3.4: Solutions du système ' $KU = \lambda MU$ ' avec ISS.**

	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
$\lambda_i$ (rad/s) <sup>2</sup>	50.4	421.8	1092.1	1884.3	2554.5
$\omega_i$ (rad/s)	7.0993	20.5378	33.0469	43.408	50.542
$T$ (s)	0.8850	0.3059	0.1901	0.1447	0.1243
$D_i$	-0.0350	-0.0833	0.0883	0.0632	-0.0274
	-0.0560	-0.0820	-0.0119	-0.0920	0.0704
	-0.0730	-0.0296	-0.0929	0.0085	-0.0971
	-0.0847	0.0405	-0.0300	0.0863	0.0875
	-0.0904	0.0868	0.0786	-0.0624	-0.0392

### 3.6.2.4. Calcul de la réponse

L'équation qui régit le mouvement de nos systèmes non amortis est :

$$M\ddot{U} + KU = F(t)$$

Cette équation fait intervenir les différents  $U_i$  dans chaque équation ce qui rend la résolution plus compliquée, de ce fait, un découplage du système à  $n$  équations à  $n$  degrés de liberté en un système de  $n$  équations à 1 degré de liberté dans la base modale doit être fait :

$$M_{diag}\ddot{y} + K_{diag}y = P_i \quad (3.2)$$

Avec:

$$\begin{cases} P_i = \Phi^T F_i \\ M_{diag} = \Phi^T M \Phi \\ K_{diag} = \Phi^T K \Phi \\ y = \Phi^{-1} U \end{cases}$$

$\Phi$ : La matrice modale

$y$ : La réponse dans la base modale

$U$ : La réponse dans la base physique

a) La réponse dans la base modale :

La solution de l'équation différentielle (3.1) est de la forme :

$$y_i(t) = \frac{2P_i}{M_{diag}\omega_i^2} * \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega_i t\right) \quad (3.3)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.0350 & -0.0833 & 0.0883 & 0.0632 & -0.0274 \\ -0.0560 & -0.0820 & -0.0119 & -0.0920 & 0.0704 \\ -0.0730 & -0.0296 & -0.0929 & 0.0085 & -0.0971 \\ -0.0847 & 0.0405 & -0.0300 & 0.0863 & 0.0875 \\ -0.0904 & 0.0868 & 0.0786 & -0.0624 & -0.0392 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 6.3860 \\ 11.688 \\ 17.1660 \\ 22.645 \\ 25.713 \end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{pmatrix} -6.3724 \\ 1.1505 \\ 0.1728 \\ -0.1762 \\ -0.0461 \end{pmatrix}$$

$$\omega^2 = \begin{pmatrix} 50.4 \\ 421.8 \\ 1092.1 \\ 1884.3 \\ 2554.5 \end{pmatrix} \rightarrow \omega = \begin{pmatrix} 7.0993 \\ 20.53777 \\ 33.0469 \\ 43.408 \\ 50.542 \end{pmatrix}$$

D'où :

- $y_1 = -2528.7302 \cdot 10^{-4} * \sin^2(3.5497 \cdot t)$
- $y_2 = 54.5519 \cdot 10^{-4} * \sin^2(10.2689 \cdot t)$
- $y_3 = 3.1645 \cdot 10^{-4} * \sin^2(16.5235 \cdot t)$
- $y_4 = -1.8702 \cdot 10^{-4} * \sin^2(21.704 \cdot t)$
- $y_5 = -0.3609 \cdot 10^{-4} * \sin^2(25.271 \cdot t)$

b) La réponse dans la base physique :

$$U = \phi \cdot y$$

Le calcul du déplacement d'un plancher dans la base physique se fait par la superposition des déplacements des différents modes :

$$U_i = \begin{pmatrix} 88 \\ 142 \\ 184 \\ 214 \\ 229 \end{pmatrix} * 10^{-4} * \sin^2(3.5497 . t) + \begin{pmatrix} -4.5462 \\ -4.4712 \\ -1.6143 \\ 2.2091 \\ 4.7347 \end{pmatrix} * 10^{-4} * \sin^2(10.2689 . t) \\ + \begin{pmatrix} 0.2795 \\ -0.0375 \\ -0.2941 \\ -0.0948 \\ 0.2487 \end{pmatrix} * 10^{-4} * \sin^2(16.5235 . t) + \begin{pmatrix} -0.1182 \\ 0.1721 \\ -0.0159 \\ -0.1614 \\ 0.1167 \end{pmatrix} * 10^{-4} * \sin^2(21.704 . t) \\ + \begin{pmatrix} 0.0099 \\ -0.0254 \\ 0.0350 \\ -0.0316 \\ 0.0142 \end{pmatrix} * 10^{-4} * \sin^2(25.271 . t)$$

La figure 3.11 représente le déplacement horizontal des planchers en fonction du temps dans la base physique.

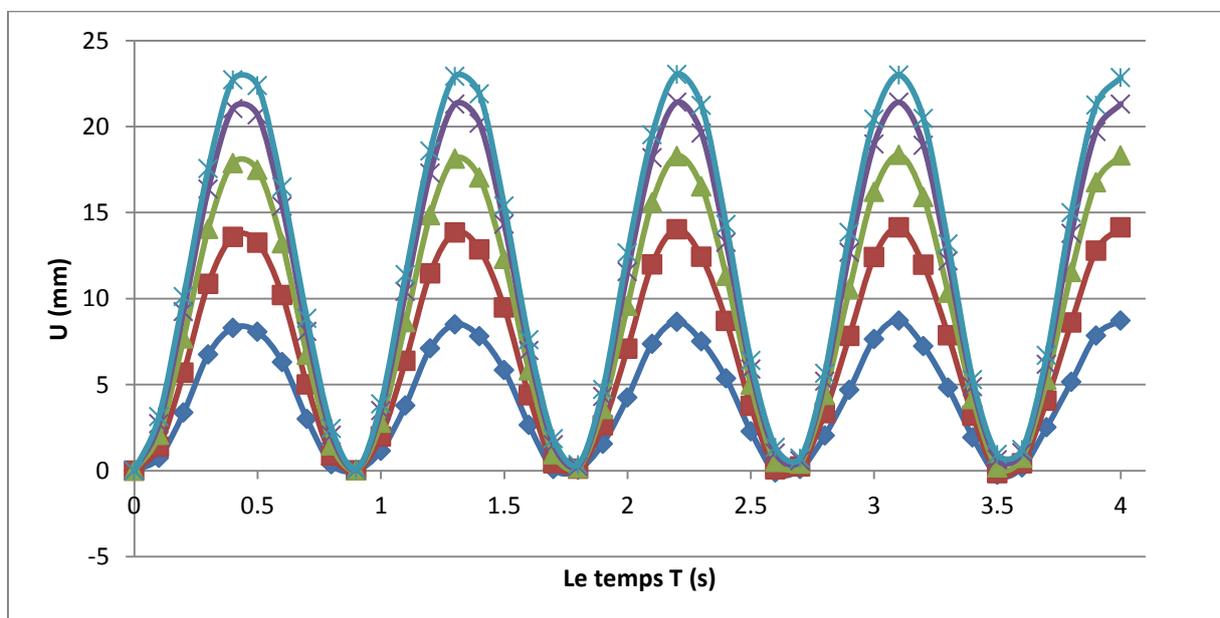


Figure 3.11: Déplacements horizontaux des planchers en fonction du temps.

CHAPITRE IV :  
INTERPRETATION DES  
RESULTATS

## CHAPITRE 4 : INTERPRETATION DES RESULTATS

### 4.1. PARTIE STATIQUE

#### 4.1.1. Déplacements

Dans la figure 4.1 on a représenté les déplacements horizontaux relatifs des planchers des deux structures (avec et sans ISS).

On remarque d'une part que la prise en compte de l'ISS a causé une augmentation des déplacements. D'autre part, cette augmentation s'amplifie pour les niveaux supérieurs.

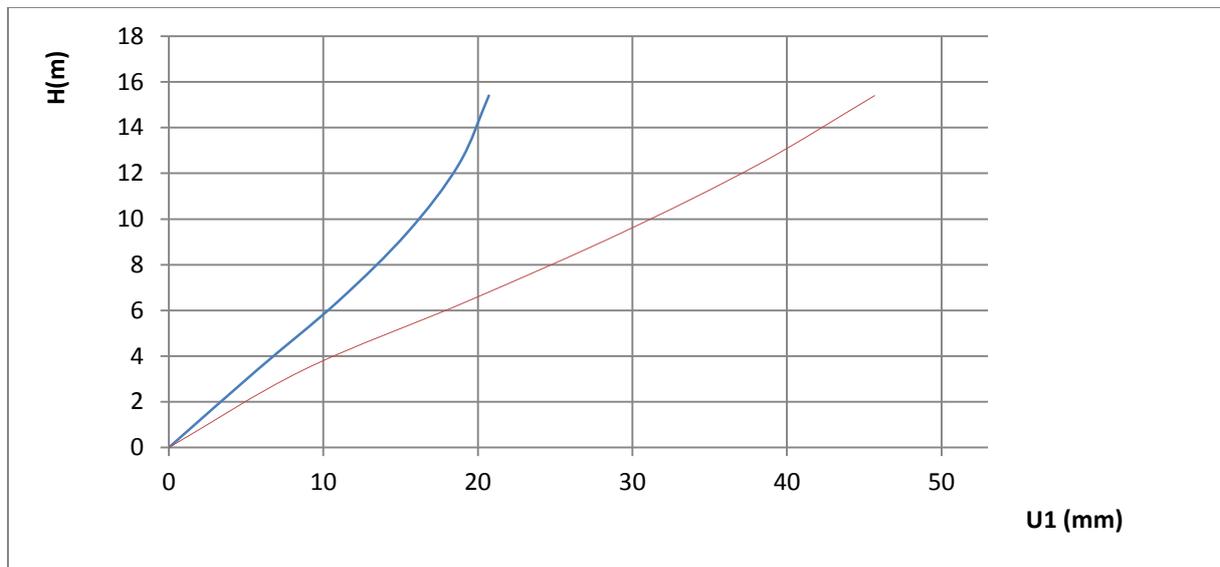


Figure 4.1 : Représentation des déplacements horizontaux relatifs en fonction de la hauteur.

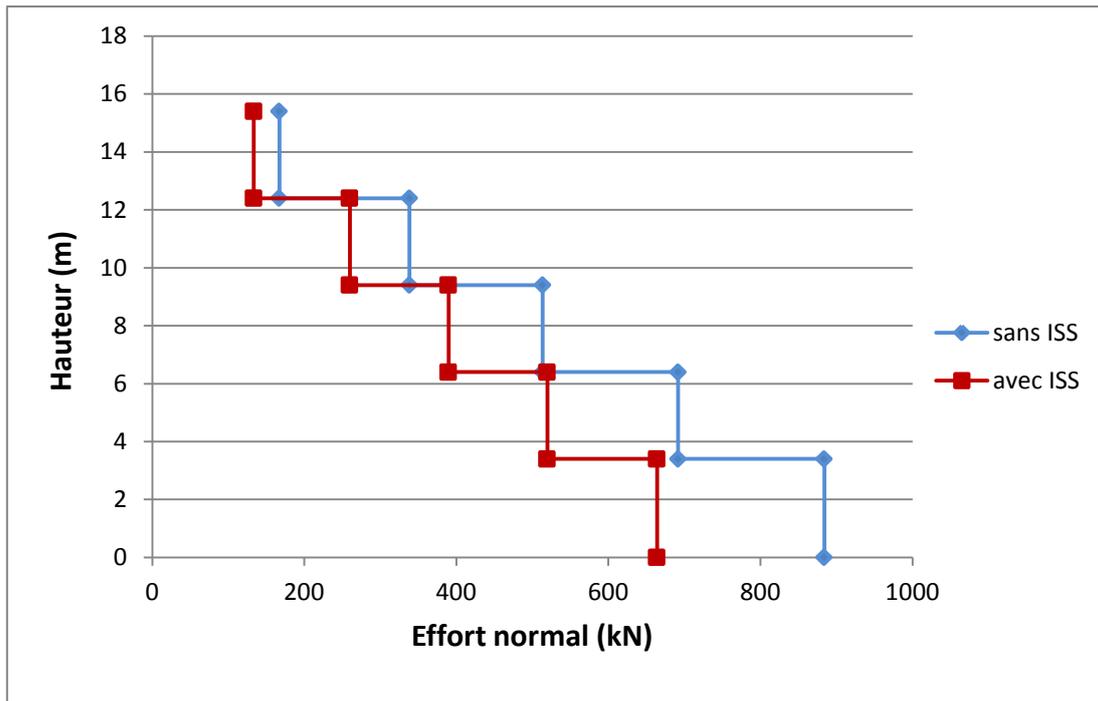
#### 4.1.2 Efforts

##### 4.1.2.1. Effort normal dans les poteaux ( $F_x$ )

La figure (4.2) représente la variation de l'effort normal dans les poteaux du portique central pour les deux structures.

On remarque que l'effort normal est plus petit dans la structure où on prend en compte l'ISS.

La différence entre ces efforts diminue en allant vers les niveaux supérieurs.



**Figure 4.2 : Variation de l'effort normal en fonction de la hauteur.**

#### **4.1.2.2. Moment fléchissant et effort tranchant des poutres**

La figure 4.3 représente la courbe du moment fléchissant et la figure 4.4 représente la courbe de l'effort tranchant le long des poutres.

On remarque que les effets de l'interaction sol-structure, ont tendance à être bénéfiques, puisqu'ils réduisent les moments fléchissants et les efforts tranchants agissant dans les différents éléments de la superstructure.

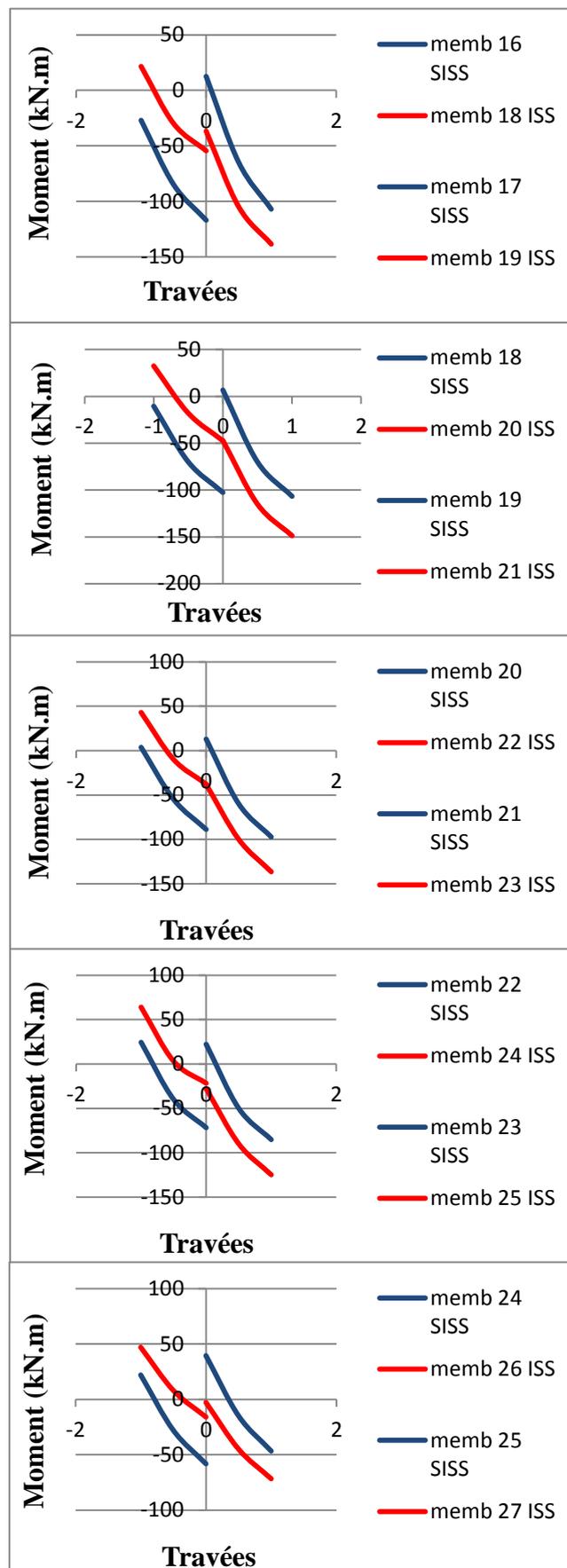


Figure 4.3: Comparaison du moment fléchissant sur les deux travées du portique (sans et avec ISS).

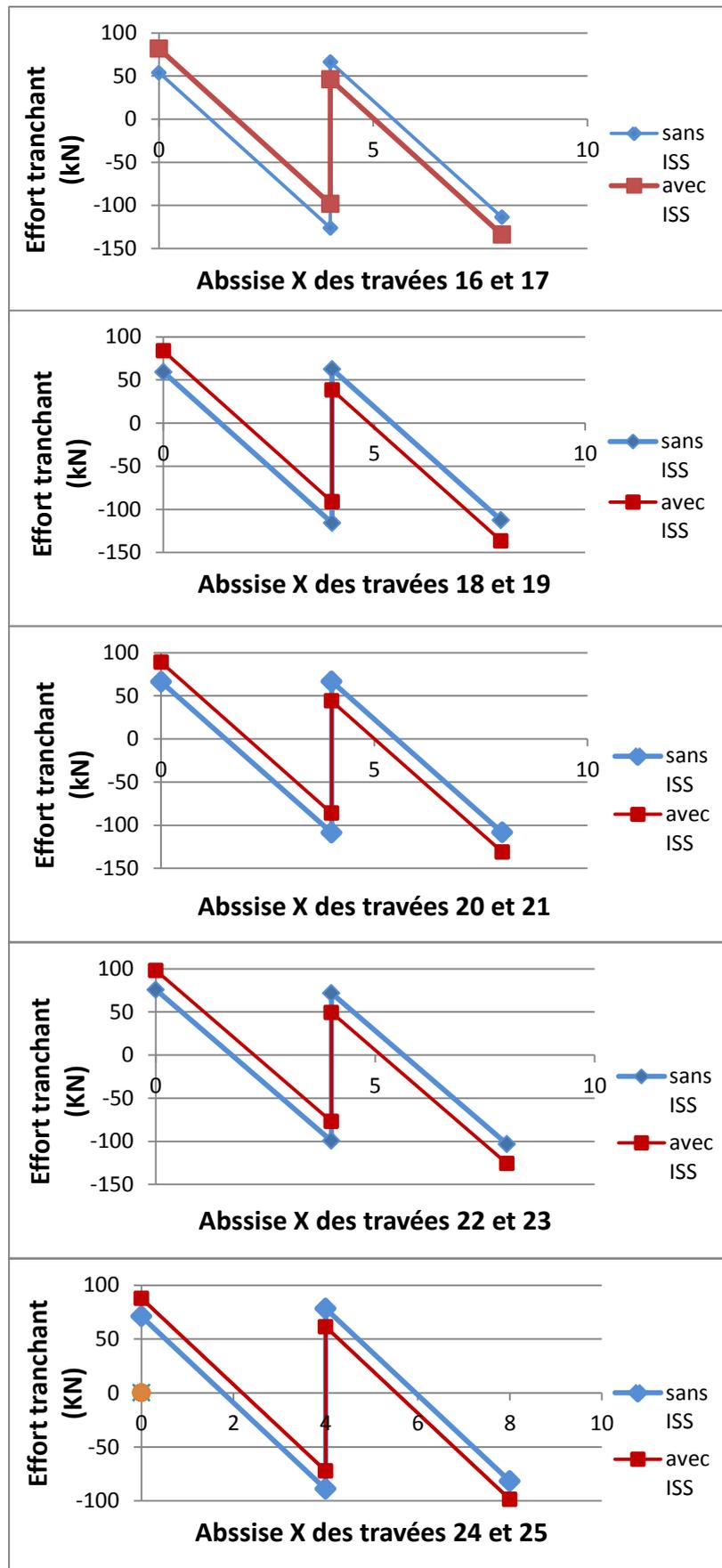


Figure 4.4 : Comparaison de l'effort tranchant sur les deux travées du portique (sans et avec ISS).

## 4.2. PARTIE DYNAMIQUE

Le tableau (4.1) regroupe les déplacements maximums des planchers des deux structures sous chargement dynamique harmonique d'équation (3.3).

On remarque que les déplacements de la structure avec ISS sont supérieurs à ceux de la structure sans ISS. Cela est dû à l'augmentation des périodes par rapport au celles de la structure encastrée.

**Tableau 4.1 : Tableau récapitulatif des déplacements max des planchers des deux structures**

Niveau	Déplacement max Structure encastrée (mm)	Déplacement max Structure non encastrée (mm)
1	8.401	8.733
2	13.744	14.139
3	18.272	18.351
4	21.613	21.413
5	23.390	23.034

**CONCLUSION**

**GENERALE**

### CONCLUSION GENERALE

Dans une analyse de l'interaction sol-structure, les coefficients dynamiques de la rigidité du sol à l'origine dépendent de la fréquence. Veletsos et al (1974, 1975) & Bielak (1975) étaient les premiers à proposer des formules pour la détermination de la période fondamentale de structure en considérant la flexibilité de la fondation. Pour un calcul simplifié, les matrices de rigidité et de masse sont obtenus en employant les formules classiques qui sont indépendantes de la fréquence. On calcule ces rigidités du sol par les formules de GAZETAS (1991).

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'influence de l'ISS sur la réponse dynamique des structures. Les résultats obtenus dans le cadre de ce travail convergent vers ce qu'on a trouvé dans la littérature spécialisée. Des simulations numériques effectuées par Jeremic et al (2004) ont montré que l'interaction sol-structure peut avoir des effets avantageux ou nuisibles sur le comportement de la structure, en fonction des caractéristiques du sol et de celles du chargement sismique. Des observations post-sismiques suggèrent que l'interaction sol-structure peut être nuisible (Gazetas et Mylonakis 1998, 2000).

Au fait, dans la partie statique, on remarque que les effets de l'interaction sol-structure, ont tendance à être bénéfique, puisque ils réduisent les moments fléchissant et les efforts tranchants agissants dans les différents éléments de la superstructure. On remarque d'une part, que la prise en compte le l'ISS a causé une augmentation des déplacements. D'autre part, cette augmentation s'amplifie pour les niveaux supérieurs.

Cependant, dans la partie dynamique, les calculs ont montré que les déplacements de la structure non encadrée sont supérieurs à ceux de la structure encadrée. Cela est dû à l'augmentation des périodes par rapport à celles de la structure encadrée.

### REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **A.AILANE, B.MERZOUG**; Analyse de la réponse statique et dynamique des structures compte tenu des paramètres incertains application aux tunnels et les portiques auto-stables ; Projet de fin d'études ; ENP Alger ; Juin 2014.
- [2]-**A. CAPRA, V. DAVIDOVICI** ; Calcul dynamique des structures en zone sismique ; Collection U.T.I. ; Editions Eyrolles ; PARIS; 1982.
- [3] **D. DIF** ; Influence des conditions de sol sur l'analyse sismique des structures ; Mémoire de magister en génie civil ; Université Hadj lakhdar –Batna.
- [4]-Document technique règlementaire DTRBC-2.331 : calcul des fondations superficielles.
- [5]-**E. BUCHI** ; Interaction Sol-Structure : calcul des impédances et effets sur les fondations ; Projet de fin d'études ; INSA de Strasbourg; Juin 2013.
- [6]-**G. GAZETAS**; Foundation engineering handbook, chapter 15:“foundation vibrations”; 2<sup>nd</sup>; Edited by HSAI-YANG FANG ; Edition Chapman & Hall; New York; 1991.
- [7]- **J. PENZIEN, R.W. CLOUGH**; Dynamics of Structures. Mc Graw Hill. 1993.
- [8]- **M. PAZE**; Structural dynamics ; Second edition ; Edited by Von Reinhold Company Inc ; USA; 1980.
- [9]- **P. ROUSSILLON** ; Interaction sol-structure et interaction site-ville : aspects fondamentaux et modélisation ; Thèse de doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon ; Janvier 2006.
- [10]-**P.MAUREL**; Formation ISS; 2007-2013.
- [11]-Règlement Parasismique Algérien, V2003 RPA2003
- [12]- **S. KRAMER**; Geotechnical earthquake engineering; Edited by Prentice Hall, USA; 1996.
- [13]- **X. ZHANG** ; Modélisation physique et numérique des interactions sol-structure sous sollicitations dynamiques transverses ; HAL Id ;19 Dec 2012.

---

## ANNEXE A : FORMULES UTILISEES POUR LE CALCUL DES RAIDEUR DU SOL [6]

La raideur du sol peut être calculée par différentes formules. Dans ce travail on a choisis de travailler avec les formules de GAZETAS, 1991.

Pour calculer les raideurs du sol, GAZETAS a pris en compte 3 paramètres :

- La forme de la fondation : circulaire, filante, rectangulaire ou de forme arbitraire.
- Le type de sol : couche profonde, sol multicouche profond, couche de sol sur un substratum rocheux.
- L'encrage des fondations : fondation superficielle, fondation encrée à petite profondeur D, fondation profonde (pieux).

GAZETAS a résumé ces travaux dans six (6) tableaux :

- 1- Les fondations de forme arbitraire reposant à la surface d'un demi-espace élastique et homogène.
- 2- Les fondations partiellement ou totalement enterrées dans un demi-espace élastique et homogène.
- 3- Fondations circulaires et filantes reposant à la surface d'un sol homogène sur un substratum rocheux.
- 4- Fondations circulaires et filantes partiellement ou totalement enterrées dans un sol homogène sur un substratum rocheux.
- 5- Fondations carrées à la surface d'un sol non-homogène.
- 6- Pieux traversant deux sols non homogènes et un sol homogène ou un demi-espace élastique.

Dans cette étude on a travaillé avec des fondations filantes du groupe 4 dont les formules sont données par les tableaux (A.2) et (A.3).

Pour les valeurs de  $E$  et  $\nu$  présentées sont dépendants de la classification des sites qui est données dans le (tableau A.1) (classification RPA 2003).

Tableau 4.1: Classification des sols suivant l'RPA 2003 [11]

Catégorie	Description	q(MPA) (c)	N (d)	pl.(MPA) (e)	E <sub>p</sub> (MPA) (e)	q <sub>u</sub> (MPA) (f)	V <sub>s</sub> (m/s) (g)
S <sub>1</sub>	Rocheux (a)	-	-	>5	>100-	>10	≥800
S <sub>2</sub>	Ferme	>15	>50	>2	>20	>0.4	≥400 - < 800
S <sub>3</sub>	Meuble	1.5 ~ 15	10 ~ 50	1 ~ 2	5 ~ 20	0.1 ~ 0.4	≥200 - < 400
S <sub>4</sub>	Très Meuble ou Présence de 3m au moins d'argile molle (b)	<1.5	<10	<1	<5	< 0.1	≥100 <200

Tableau 4.2 : Fonctions d'impédance de fondations enterrées dans un sol homogène sur substratum rocheux.

Foundation Shape		Circular Foundation of Radius $R$	Strip Foundation
Static stiffnesses, $K$	Vertical	$K_{z,emb} \approx K_{z,sur} \left(1 + 0.55 \frac{d}{R}\right) \left[1 + \left(0.85 - 0.28 \frac{D}{R}\right) \frac{D}{H-D}\right]^{\dagger}$	$K_{z,emb} \approx K_{z,sur} \left[1 + 0.2 \left(\frac{d}{B}\right)^{2/3}\right] \left(1 + 3.5 \frac{D}{H-D}\right)$
	Horizontal, $y$ or $x$	$K_{y,emb} \approx K_{y,sur} \left(1 + \frac{d}{R}\right) \left(1 + 1.25 \frac{D}{H}\right)^{\dagger}$	$K_{y,emb} \approx K_{y,sur} \left(1 + 0.5 \frac{d}{B}\right) \left(1 + 1.5 \frac{D}{H}\right)$
	Rocking, $rx$ or $ry$	$K_{rx,emb} \approx K_{rx,sur} \left(1 + 2 \frac{d}{R}\right) \left(1 + 0.65 \frac{D}{H}\right)$	$K_{rx,emb} \approx K_{rx,sur} \left(1 + \frac{d}{B}\right) \left(1 + 0.65 \frac{D}{H}\right)$
	Coupled swaying–rocking	$K_{yrx,emb} \approx \frac{1}{3} d K_{y,emb}$	$K_{yrx,emb} \approx \frac{1}{3} d K_{y,emb}$
	Torsional	$K_{t,emb} \approx K_{t,sur} \left(1 + 2.67 \frac{d}{R}\right)$	—
	Dynamic stiffness coefficients, $k(\omega)$	The relationships between $k_{emb}$ and $k_{sur}$ follow approximately the same pattern as those between embedded and surface foundation on a homogeneous halfspace. Therefore, use the results of Table 15.2 as a first approximation.	
Radiation dashpot coefficients, $C(\omega)$	$C_{emb}$ exceeds $C_{sur}$ by an amount that depends on the geometry of the sidewall–soil contact surface and is practically independent of the presence or absence of a rigid base at shallow depths. Therefore, use the results of Table 15.2, but with $C_{sur}$ corresponding to the layered profile and thus obtained according to Table 15.3 (approximate guideline).		

\* Sources are listed in the text.

†  $K_{z,sur}$ ,  $K_{y,sur}$ , ... are the stiffnesses for the corresponding surface foundations, and can be obtained from Table 15.3.

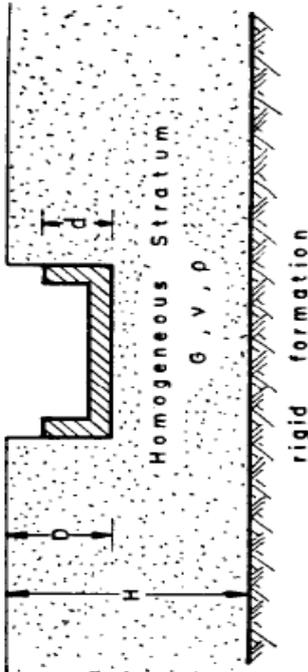
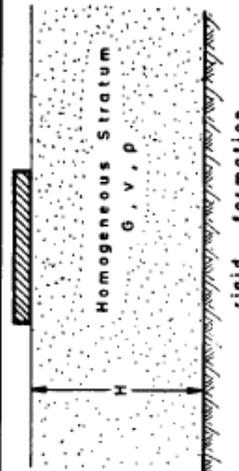


Tableau A.3 : Fonctions d'impédance de fondations à la surface d'un sol homogène sur substratum rocheux.



Foundation Shape	Circular Foundation of Radius $B = R$	Rectangular Foundation 2B by 2L ( $L > B$ )	Strip Foundation $2L \rightarrow \infty$
Static stiffnesses, $K$	<p>Vertical, <math>z</math>  <math>K_z = \frac{4GR}{1-\nu} \left( 1 + 1.3 \frac{R}{H} \right)</math></p> <p>Lateral, <math>y</math>  <math>K_y = \frac{8GR}{2-\nu} \left( 1 + 0.5 \frac{R}{H} \right)</math>  <math>K_x = K_y</math></p> <p>Lateral, <math>x</math>  <math>K_x = K_y</math></p> <p>Rocking, <math>rx</math>  <math>K_{rx} = \frac{8GR}{3(1-\nu)} \left( 1 + 0.17 \frac{R}{H} \right)</math></p> <p>Rocking, <math>ry</math>  <math>K_{ry} = K_{rx}</math></p> <p>Torsional, <math>t</math>  <math>K_t = \frac{16}{3} GR^3 \left( 1 + 0.10 \frac{R}{H} \right)</math></p>	<p>Vertical, <math>z</math>  <math>K_z = \frac{2GL}{1-\nu} \left[ 0.73 + 1.54 \left( \frac{B}{L} \right)^{3/4} \right] \left( 1 + \frac{\frac{B}{H}}{0.5 + \frac{B}{L}} \right)</math></p> <p>Lateral, <math>y</math>  <math>K_y = \frac{2G}{2-\nu} \left( 1 + 2 \frac{B}{H} \right)</math></p> <p>Lateral, <math>x</math>  <math>K_x = K_y</math></p> <p>Rocking, <math>rx</math>  <math>K_{rx} = \frac{\pi GB^2}{2(1-\nu)} \left( 1 + 0.2 \frac{B}{H} \right)</math></p> <p>Rocking, <math>ry</math>  <math>K_{ry} = K_{rx}</math></p> <p>Torsional, <math>t</math>  <math>K_t = \frac{\pi GB^2}{2(1-\nu)} \left( 1 + 0.2 \frac{B}{H} \right)</math></p>	<p>Vertical, <math>z</math>  <math>K_z = \frac{4GR}{1-\nu} \left( 1 + 1.3 \frac{R}{H} \right)</math></p> <p>Lateral, <math>y</math>  <math>K_y = \frac{8GR}{2-\nu} \left( 1 + 0.5 \frac{R}{H} \right)</math>  <math>K_x = K_y</math></p> <p>Lateral, <math>x</math>  <math>K_x = K_y</math></p> <p>Rocking, <math>rx</math>  <math>K_{rx} = \frac{8GR}{3(1-\nu)} \left( 1 + 0.17 \frac{R}{H} \right)</math></p> <p>Rocking, <math>ry</math>  <math>K_{ry} = K_{rx}</math></p> <p>Torsional, <math>t</math>  <math>K_t = \frac{16}{3} GR^3 \left( 1 + 0.10 \frac{R}{H} \right)</math></p>
Dynamic stiffness coefficients, $k(\omega)$	<p>Vertical, <math>z</math>  <math>k_z = k_z(H/R, \epsilon_0)</math>                      is obtained from Graph III-1</p> <p>Horizontal, <math>y</math> or <math>x</math>  <math>k_y = k_y(H/R, \epsilon_0)</math>                      is obtained from Graph III-1</p> <p>Rocking, <math>rx</math> or <math>ry</math>                      Torsional  <math>k_{rx} = k_{ry} = k_{rx}(H/R, \epsilon_0)</math>  <math>\alpha = rx, ry, t</math></p>	<p>Vertical, <math>z</math>  <math>k_z = k_z(H/B, L/B, \epsilon_0)</math> is plotted in Graph III-2 for rectangles and strip</p>	<p>Vertical, <math>z</math>  <math>k_z = k_z(H/B, \epsilon_0)</math>                      is obtained from Graph III-3</p> <p>Horizontal, <math>y</math> or <math>x</math>  <math>k_y = k_y(H/B, \epsilon_0)</math>                      is obtained from Graph III-3</p> <p>Rocking, <math>rx</math> or <math>ry</math>                      Torsional  <math>k_{rx} = k_{ry} = k_{rx}(H/R) \approx k_{rx}(\infty)</math></p>
Radiation dashpot coefficients, $C(\omega)$	<p>Vertical, <math>z</math>  <math>C_z(H/B) \approx 0</math> at frequencies <math>f &lt; f_c</math>, regardless of foundation shape  <math>C_z(H/B) \approx 0.8C_z(\infty)</math> at <math>f \geq 1.5f_c</math>                      At intermediate frequencies: interpolate linearly. <math>f_c = \frac{V_{Lz}}{4H}</math> <math>V_{Lz} = \frac{3.4V_s}{\pi(1-\nu)}</math></p> <p>Lateral, <math>y</math> or <math>x</math>  <math>C_y(H/B) \approx 0</math> at <math>f &lt; \frac{2}{3}f_c</math>; <math>C_y(H/B) \approx C_y(\infty)</math> at <math>f &gt; \frac{4}{3}f_c</math>                      At intermediate frequencies: interpolate linearly. <math>f_c = V_s/4H</math>. Similarly for <math>C_x</math></p> <p>Rocking, <math>rx</math> or <math>ry</math>                      Torsional, <math>t</math>  <math>C_{rx}(H/B) \approx 0</math> at <math>f &lt; f_c</math>; <math>C_{rx}(H/B) \approx C_{rx}(\infty)</math> at <math>f &gt; f_c</math>. Similarly for <math>C_{ry}</math>  <math>C_t(H/B) \approx C_t(\infty)</math></p>		

## ANNEXE B : MODELE ANALOGIQUE SIMPLIFIE [10]

L'influence de l'interaction sol structure sur la réponse d'un ouvrage peut être illustrée à l'aide du modèle analogique de la figure 4.3. La structure est assimilée à *une masse et un ressort*, placés à une hauteur  $h$  au-dessus de la fondation. La liaison entre *la structure* et la *fondation* est réalisée par une barre rigide. La fondation repose sur le sol et son interaction avec celui-ci est modélisée par *le biais des fonctions d'impédance*, c'est à dire les réactions exercées par le sol sur la fondation, peuvent être représentées par un ensemble de ressorts et d'amortisseurs indépendants de la fréquence.

Le système de la figure C.1 possède 3 degrés de liberté :

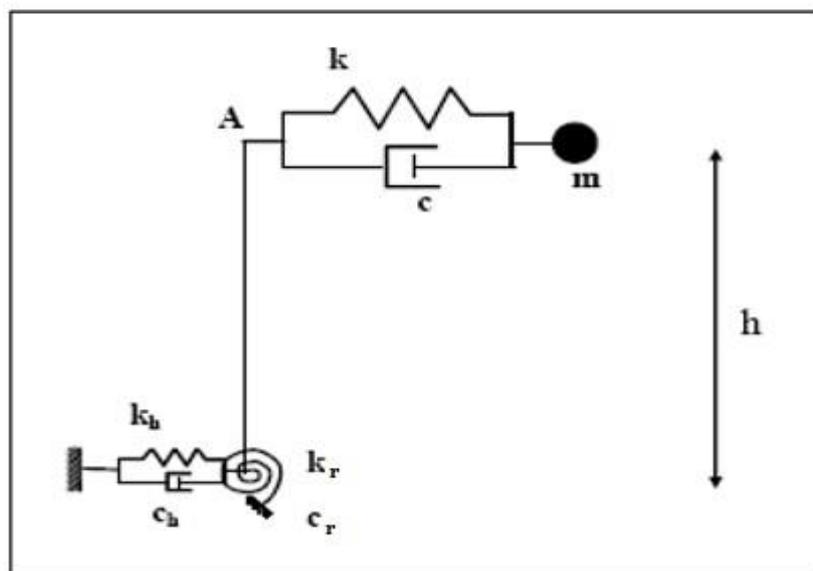


Figure 4.1: Modèle simplifié.

- Le déplacement horizontal  $U$  de la masse  $m$  ;
- Le déplacement horizontal  $U_0$  de la fondation ;
- La rotation  $\theta$  de la fondation autour d'un axe horizontal.

Il est soumis à un déplacement horizontal du sol support, harmonique de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $U_g$ .

D'où :

$$U^t = U_g + U + U_0 + h\theta$$

Les équations d'équilibre dynamique du système s'obtiennent aisément à partir des équations de Lagrange en prenant comme variables généralisées  $q_i$  :

- $q_1 = U$ , le déplacement relatif de la masse par rapport à  $A$ ;
- $q_2 = U_0$ , le déplacement de la fondation ;
- $q_3 = \theta$ , la rotation de la fondation.

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = \frac{\delta W}{\delta q_i}$$

Telles que :

T : énergie cinétique.

V : énergie potentielle.

W : travail des forces non conservatrices.

On aura :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{U}^t)^2 = \frac{1}{2} m (\dot{U}_g + \dot{U} + \dot{U}_0 + h\dot{\theta})^2$$

$$V = \frac{1}{2} (k U^2 + k U_0^2 + k_r \theta^2)$$

$$W = (-c \dot{U}) U + (-c_h \dot{U}_0) U_0 + (-c_r \dot{\theta}) \theta$$

$$\delta W = -(c \dot{U} \delta U + c_h \dot{U}_0 \delta U_0 + c_r \dot{\theta} \delta \theta)$$

Constitution des équations de Lagrange :

$$\frac{\partial T}{\partial U} = \frac{\partial T}{\partial U_0} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{U}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{U}_0} = \frac{1}{2} m (2\dot{U} + 2\dot{U}_g + 2\dot{U}_0 + 2h\dot{\theta}) = m (\dot{U}_g + \dot{U} + \dot{U}_0 + h\dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{U}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{U}_0} \right) = m (\ddot{U}_g + \ddot{U} + \ddot{U}_0 + h\ddot{\theta}) = -m \omega^2 (U_g + U + U_0 + h\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m (2h^2\dot{\theta} + 2h\dot{U}_0 + 2h\dot{U}_g + 2h\dot{U}) = m h (\dot{U}_g + \dot{U} + \dot{U}_0 + h\dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = m h (\ddot{U}_g + \ddot{U} + \ddot{U}_0 + h\ddot{\theta}) = -m \omega^2 h (U_g + U + U_0 + h\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial U} = k U$$

$$\frac{\partial V}{\partial U_0} = k_h U_0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k_r \theta$$

$$\frac{\delta W}{\delta U} = -c \dot{U} = -c i \omega U = -2k \xi i U$$

$$\frac{\delta W}{\delta U_0} = -c_h \dot{U}_0 = -i \omega U_0 = -2k_h \xi_h i U_0$$

$$\frac{\delta W}{\delta \theta} = -c \dot{\theta} = -c_r i \omega \theta = -2k_r \xi_r i \theta$$

Pour  $q_1 = U$  on a :

$$-m \omega^2 (U_g + U + U_0 + h\theta) + k U = -2k \xi i U$$

$$-m \omega^2 (U + U_0 + h\theta) + k (1 + 2 \xi i) U = m \omega^2 U_g$$

Pour  $q_2 = U_0$  on a :

$$\begin{aligned} -m \omega^2 (U_g + U + U_0 + h\theta) + k_h U_0 &= -2k_h \xi i U_0 \\ -m \omega^2 (U + U_0 + h\theta) + k_h (1 + 2 \xi i) U_0 &= m \omega^2 U_g \end{aligned}$$

Pour  $q_3 = \theta$  on a :

$$\begin{aligned} -m \omega^2 h (U_g + U + U_0 + h\theta) + k_r \theta &= -2k_r \xi i \theta \\ -m \omega^2 h (U + U_0 + h\theta) + k_r (1 + 2 \xi i) \theta &= m \omega^2 h U_g \end{aligned}$$

En résumé on a le système suivant :

$$\begin{cases} -m \omega^2 (U + U_0 + h\theta) + k (1 + 2 \xi i) U = m \omega^2 U_g \\ -m \omega^2 (U + U_0 + h\theta) + k_h (1 + 2 \xi i) U_0 = m \omega^2 U_g \\ -m \omega^2 h (U + U_0 + h\theta) + k_r (1 + 2 \xi i) \theta = m \omega^2 h U_g \end{cases}$$

Dans le cas d'une semelle filante la rotation due au séisme horizontal est négligeable et les deux premières équations donnent :

$$k U = k_h U_0$$

---

## ANNEXE C : RESULTATS DES DEPLACEMENTS ET EFFORTS DE LA PARTIE STATIQUE

### C.1. STRUCTURE ENCASTREE

#### C.1.1. Déplacement des nœuds

NO.NOEUD	DEPL.X (mm)	DEPL.Y (mm)	ROTA.Z (rad)
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	5.723	-0.383	-0.0016833
5	5.731	-1.039	-0.0000513
6	5.736	-0.611	-0.000498
7	10.958	-0.665	-0.001481
8	10.949	-1.756	-0.000529
9	10.947	-1.032	-0.000404
10	15.426	-.885	-0.001371
11	15.413	-2.288	-0.000433
12	15.409	-1.336	-0.000184
13	18.773	-1.037	-0.001105
14	18.760	-2.639	-0.000310
15	18.758	-1.528	0.000049
16	20.708	-1.111	-0.001174
17	20.666	-2.812	-0.000147
18	20.637	-1.613	0.000651

## C.1.2. Efforts

NO.NOEUD	EXTREMITÉ I			EXTREMITÉ J		
	FX (KN)	FY (KN)	MZ (KN.m)	FX (KN)	FY (KN)	MZ (KN.m)
1	325.980	18.975	43.001	-325.960	-18.975	21.512
2	884.205	32.209	58.031	-884.184	-32.209	51.481
3	519.815	32.414	58.282	-519.815	-32.414	51.926
4	272.004	4.720	5.624	-272.004	-4.720	8.537
5	691.777	30.532	53.025	-691.777	-30.532	52.798
6	406.179	37.217	55.151	-406.179	-37.217	56.501
7	212.787	1.819	1.929	-212.787	-1.819	3.527
8	513.528	29.158	43.043	-513.528	-29.158	44.430
9	293.685	34.548	50.223	-293.685	-34.548	53.421
10	146.563	-3.544	-7.239	-146.563	3.544	-3.393
11	338.332	21.537	31.421	-338.332	-21.537	33.192
12	185.105	30.364	43.866	-185.105	-30.364	47.227
13	70.931	-14.318	-20.980	-70.931	14.318	-21.976
14	167.234	11.776	16.477	-167.234	-11.776	18.850
15	81.835	28.256	38.024	-81.835	-28.256	46.743
16	-7.868	53.957	-27.136	7.868	126.043	-117.037
17	-4.803	66.364	12.532	4.803	113.636	-107.077
18	8.786	59.216	-10.465	-8.786	115.744	-102.589
19	2.669	62.506	6.747	-2.669	112.494	-106.724
20	11.803	66.224	3.712	-11.803	108.776	-88.815
21	4.183	66.420	12.965	-4.183	108.580	-97.287
22	11.870	75.632	24.372	-11.870	99.368	-71.844
23	2.109	71.731	22.174	-2.109	103.269	-85.252
24	40.031	70.931	21.976	-40.031	89.069	-58.252
25	28.256	78.165	39.402	-28.256	81.835	-46.743

---

## C.2. STRUCTURE NON ENCASTREE

### C.2.1. D2placement des nœuds

NO.NOEUD	DEPL.X (mm)	DEPL.Y (mm)	ROTA.Z (rad)
1	7.149	-179.028	-0.000027
2	7.18	-190.515	-0.000035
3	7.178	-193.791	-0.000014
4	15.871	-179.545	-4.003
5	15.888	-191.295	-2.298
6	15.902	-194.526	-1.59
7	26.473	-179.917	-3.79
8	26.462	-191.833	-2.362
9	26.457	-195.036	-1.777
10	36.461	-180.201	-3.673
11	36.448	-192.237	-2.277
12	36.443	-195.405	-1.568
13	45.336	-180.394	-3.355
14	45.326	-192.507	-2.154
15	45.327	-195.637	-1.389
16	52.822	-180.485	-3.688
17	52.764	-192.645	-1.991
18	52.719	-195.739	-0.523

## C.2.2. Efforts

NO.NOEUD	EXTREMITE I			EXTREMITE J		
	FX (KN)	FY (KN)	MZ (KN.m)	FX (KN)	FY (KN)	MZ (KN.m)
1	440.146	12.401	46.474	-440.146	-12.401	-4.312
2	664.05	31.436	67.893	-664.050	-31.436	38.99
3	625.804	39.761	77.655	-625.804	-39.761	57.533
4	358.378	-10.493	-17.284	-358.378	10.493	-14.194
5	519.662	29.806	52.336	-519.662	-29.806	51.404
6	491.96	53.125	81.041	-491.96	-53.125	78.334
7	274.618	-11.629	-18.293	-274.618	11.632	-16.597
8	389.895	29.207	43.193	-389.895	-29.207	44.426
9	355.487	47.947	70.411	-355.487	-47.944	73.429
10	185.798	-16.086	-26.426	-185.798	16.086	-21.833
11	259.865	21.527	31.403	-259.865	-21.527	33.18
12	224.337	42.917	63.083	-224.337	-42.917	65.669
13	87.745	-29.713	-42.158	-87.745	29.713	-46.980
14	133.607	11.777	16.480	-133.607	-11.777	18.851
15	98.649	43.649	59.2	-98.649	-43.649	71.746
16	-29.316	109.65	219.406	29.316	-109.651	219.194
17	2.120	30.672	61.075	-2.120	-30.672	61.612
18	-16.508	81.768	21.567	16.508	98.236	-54.523
19	-13.364	46.156	-36.803	13.364	133.844	-138.574
20	10.552	83.76	32.487	-10.552	91.238	-47.449
21	5.178	38.527	-47.149	-5.178	136.471	-148.745
22	12.709	88.82	43.021	-12.709	86.180	-37.741
23	5.03	43.850	-38.088	-5.03	131.150	-136.512
24	9.019	98.054	63.991	-9.019	76.946	-21.776
25	-0.732	49.312	-27.883	0.732	125.688	-124.869
26	55.426	87.745	46.980	-55.426	72.255	-16.002
27	43.649	61.351	-2.849	-43.649	98.649	-71.746