

وزارة الجامعات والبحث العلمي  
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT: GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

COUPLAGE, CALCUL DE  
COUCHE LIMITE -  
METHODE INVERSE

Proposé par :

Mr. M. BOUDJEMAA

Etudié par :

Brahim  
B. MAHFOUD

M. AIT-TALEB

Mourad

Dirigé par :

Mr. M. BOUDJEMAA

PROMOTION: JUILLET 1992

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة الجامعات والبحث العلمي  
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT: GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

COUPLAGE, CALCUL DE  
COUCHE LIMITE -  
METHODE INVERSE

Proposé par :

Mr. M. BOUDJEMAA

Etudié par :

B. MAHFOUD

M. AIT-TALEB

Dirigé par :

Mr. M. BOUDJEMAA

PROMOTION: JUILLET 1992



## REMERCIEMENTS

Nous tenons vivement à remercier notre promoteur M<sup>r</sup> M. Boudjemâa pour l'aide précieuse qu'il nous a apporté et pour les conseils qu'il nous a prodigués pour la mise en oeuvre de ce projet de fin d'étude.

Nous remercions également M<sup>r</sup> Belhadj du département hydraulique pour nous avoir aidé et mis à notre disposition des documents indispensables pour notre projet.

D'autre part nous remercions les membres du jury que nous avons l'honneur de citer:

M<sup>r</sup> A. Gahmousse            professeur  
M<sup>r</sup> B. Benkoussas        chargé de cours  
M<sup>r</sup> Ait yahiaten  
M<sup>r</sup> Haoui

Finallement nous adressons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## DEDICACES

je dedis ce travail à :

- ma mère.
- mon père
- mes frères et sœurs

ainsi qu'à tous mes amis

MAHFOUD Brahim

Je dédis ce travail à :

- ma mère
- mon père
- mes frères et sœurs

ainsi qu'à tous mes amis

AIT. TALES elourad.

الملخص :

يهدف هذا العمل إلى صياغة قطع ريشة الدوارة باستخدام  
طريقة النموذج العكسي وقرنها مع حساب الطبقة المتاخمة

RESUME : Ce sujet a pour but la conception de profils d'aubages par la methode inverse en partant des hypotheses simplificatrices et le couplage avec le calcul de la couche limite pour obtenir un profil engraisé.

ABSTRACT : The purpose of this work is to concept blad profiles by using inverse method and to couple with calculation of boudary layer in order to obtain profiles of fatten blades

## SOMMAIRE

### \* PREMIERE PARTIE : Calcul des profils d'aubage par la méthode inverse

- Introduction

- CHAPITRE 1 : Propriétés d'un écoulement dans un espace périodique.

Application au calcul de l'écoulement et la conception pour les grilles d'aubes.

1-1: Introduction.....

1-2: Equation du mouvement.....

1-3: Cas d'un écoulement périodique dans la direction  $y$ .....

1-4: Calcul de l'écoulement moyen (harmoniques d'ordre zéro).....

1-5: calcul des harmoniques d'ordre supérieur à 1.....

1-6: Étude du comportement des solutions à l'infini.....

1-7: Application aux grilles d'aubes.....

1-8: Forme des solutions dans le cas d'une grille d'aubes.....

1-9: Conditions à imposer pour qu'une courbe  $y=y(x)$  soit ligne de courant.....

1-10: Ecriture des relations utilisées dans le programme.....

    Ecriture de la condition de glissement en chaque point du profil.....

1-11: Ecriture des conditions au bord d'attaque et au bord de fuite.....

1-12: Possibilité d'application pour l'écoulement dans les grilles d'aubes.....

-CHAPITRE 2 : Application de la méthode en mode inverse 2

2-1: Résolution du problème.....

2-2: Développement.....

### \*DEUXIEME PARTIE : ETUDE DE LA COUCHE LIMITE

-CHAPITRE 3 : Calcul de l'épaisseur de la couche limite

3-1: Introduction.....

3-2: Equations dynamiques de la couche limite.....

3-3: Méthode approximative due à T VANKARMAN ET K POHLHAUSEN pour des écoulement bidimensionnels.....

3-4: Solution de l'équation (4.2.16) .....

3-5: Résolution du problème .....

3\_6: Fermeture du profil engraissé .....

ANNEXE 1: Simplification des équations de NAVIER STOKES pour  
l'étude de la couche limite .....

ANNEXE 2: Méthode de NEWTON pour la résolution des systèmes non  
linéaires. ....

ANNEXE 3: Caractéristiques cinématiques et géométriques des profils  
NACA .....

## INTRODUCTION

Les problèmes d'écoulements sont généralement difficiles à résoudre car les équations de base sont non linéaires. Il est donc, mis à part quelques cas très simples, impossible de trouver des solutions, exactes.

L'évolution remarquable dans le domaine d'écoulement est due aux échanges étroits entre la théorie et l'expérience. cependant, beaucoup de problèmes subsistent. Les plus importants résident dans le choix des données nécessaires à la détermination d'un profil. Rien, sinon l'expérience de l'utilisateur ne permet de connaître au départ:

-quelles caractéristiques physiques de l'écoulement doivent être imposées plutôt que d'autres.

- comment ces données doivent être réparties pour obtenir une solution acceptable en pratique.

- comment choisir à la fois, la nature, et la répartition de ces données pour obtenir une solution optimale. Ce qui pose un réel problème quant au choix des hypothèses du problème à résoudre.

Dans le cas de notre travail, on aura à traiter deux problèmes:

\* le premier consistera en l'utilisation de la méthode inverse qui aura pour but, la détermination de la distribution du squelette sachant connues une loi d'épaisseur de l'aube et une répartition de la composante verticale de la vitesse moyenne.

Dans ce cas, les hypothèses qui seront posées sont les suivantes:

- 1- écoulement équipotentiel et stationnaire.
- 2- fluide idéal et incompressible.
- 3- écoulement plan.
- 4- régime subsonique
- 5- on néglige la couche limite.

Dans le second problème, on déterminera l'épaisseur de la couche limite en chaque point du profil obtenu dans le



premier problème. On assimilera ensuite le profil engraisé (par la couche limite) à un profil fictif auquel on appliquera la même procédure que celle utilisée dans le premier problème pour déterminer la distribution de sa ligne moyenne.

CHAPITRE 1

PROPRIETES D'UNJ ECOULEMENT DANS UN ESPACE

PERIODIQUE

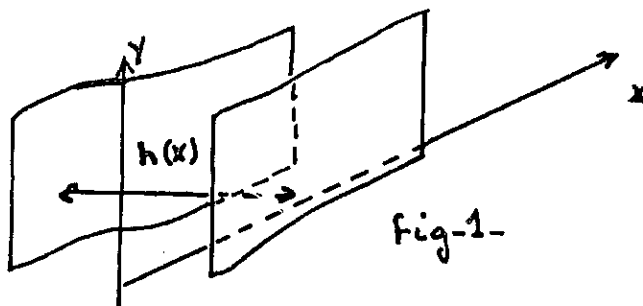
## 1.1:INTRODUCTION

Les méthodes numériques de calcul d'écoulement pour les grilles d'aubes introduisent généralement le caractère périodique de l'écoulement. Le domaine de calcul est fermé et correspond à un pas avec une extension amont et aval aussi large que possible pour pouvoir considérer l'écoulement uniforme aux limites correspondantes. La condition de périodicité est automatiquement remplie par l'introduction de conditions identiques sur les limites latérales.

Ainsi, dans l'étude qui suivra, on utilisera ce caractère périodique pour développer une méthode de calcul qui sera applicable aussi bien pour les problèmes directs que pour les problèmes inverses.

## 1.2:EQUATIONS DU MOUVEMENT

Considérons un écoulement bidimensionnel dans le plan de symétrie  $(x,y)$  du canal limité par deux solides distants de  $h(x)$  (Fig 1). L'écoulement est isentropique et non visqueux. Son énergie totale est constante.



Dans ce cas, les équations du mouvement sont les suivantes:

a-Equation de continuité

$$\frac{\text{div} \rho \mathbf{v}(x,y)}{\rho} = Q(x,y) \quad (1.2.1)$$

b-Equation de quantité de mouvement

$$\text{rot}v=R(x,y) \quad (1.2.2)$$

c-Equation d'énergie

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = H(x,y) \quad (1.2.3)$$

La divergence  $Q$  et le rotationnel  $R$  caractérisent l'effet des obstacles placés dans l'écoulement (ref [5] ).

(1.2.1) peut s'écrire sous la forme:

$$\text{div } \bar{v} + \bar{v} \frac{\text{div} \rho}{\rho} = Q(x,y)$$

ou bien  $\text{div } \bar{v} = Q(x,y) + F(x,y) \quad (1.2.4)$

(1.2.2) et (1.2.4) s'écrivent dans un repère cartésien

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x,y) + F(x,y) \quad (1.2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = R(x,y) \quad (1.2.6)$$

où  $F(x,y)$  est une fonction s'écrit tenant compte de (1.2.3)

$$F(x,y) = \frac{1}{\gamma-1} \left[ u \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln \left( 1 - \frac{V^2}{2} \right) \right] + v \frac{\partial}{\partial y} \left( 1 - \frac{V^2}{2} \right) \right]$$

avec  $V^2 = \frac{u^2 + v^2}{2}$  terme adimensionnel

### 1-3 CAS D'UN ECOULEMENT PERIODIQUE DANS LA DIRECTION Y

N.B: Dans les développements qui suivront, on ne donnera pas les détails des démonstrations. Le lecteur intéressé par celles ci pourra consulter la référence [5].

Dans le cas d'un espace périodique dans la direction  $y$ , toutes les caractéristiques de l'écoulement dans cette direction

peuvent être exprimées à partir des séries de Fourier. Donc U, V, Q, R et F peuvent se mettre sous la forme:

$$U(x,y) = \sum_k u(k,x)e^{ikwy}$$

$$V(x,y) = \sum_k v(k,x)e^{ikwy}$$

$$Q(x,y) = \sum_k q(k,x)e^{ikwy}$$

$$R(x,y) = \sum_k r(k,x)e^{ikwy}$$

$$F(x,y) = \sum_k f(k,x)e^{ikwy}$$

Les équations (1.2.5) et (1.2.6) se transforment en un système de deux équations différentielles:

$$\frac{du(k,x)}{dx} + ik\omega v(k,x) - q(k,x) - f(k,x) = 0 \quad (1.3.1.a)$$

$$\frac{dv(k,x)}{dx} - ik\omega u(k,x) + r(k,x) = 0 \quad (1.3.1.b)$$

Ces équations peuvent être résolues pour toute valeur significative de k, en utilisant la période de l'espace le long de oy comme unité de longueur.

#### 1-4 CALCUL DE L'ÉCOULEMENT MOYEN (HARMONIQUE D'ORDRE ZERO)

Pour k=0, les valeurs moyennes dans la direction y de u et v sont telles que:

$$\frac{du(0,x)}{dx} - q(0,x) - f(0,x) = 0 \quad (1.4.1.a)$$

$$\frac{dv(0,x)}{dx} - r(0,x) = 0 \quad (1.4.1.b)$$

qui donnent immédiatement:

$$u(0, x) = u(0, x_0) + \int_{x_0}^x (q(0, \tau) + f(0, \tau)) d\tau$$

$$v(0, x) = v(0, x_0) + \int_{x_0}^x r(0, \tau) d\tau$$

$u(0, x_0)$  et  $v(0, x_0)$  étant les composantes du vecteur vitesse moyen à l'abscisse  $x_0$  représentant par exemple, la frontière amont du domaine de calcul. (dans le développement qui suit on prendra  $x_0=0$ ).

### 1-5 CALCUL DES HARMONIQUES D'ORDRE SUPERIEUR A 1

Le système des deux équations (1.3.1.a) et (1.3.1.b) donne par transformation de Laplace:

$$p \tilde{u}(k, x) + ik\omega \tilde{v}(k, x) = \tilde{q}(k, x) + \tilde{f}(k, x) + u(k, 0)$$

$$p \tilde{v}(k, x) - ik\omega \tilde{u}(k, x) = \tilde{r}(k, x) + v(k, 0)$$

où  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{r}$  et  $\tilde{f}$  représentent les transformées de Laplace des fonctions respectives  $u$ ,  $v$ ,  $q$ ,  $r$  et  $f$ , et  $p$  la variable de Laplace.  $u(k, x)$  et  $v(k, x)$  sont donc données par:

$$u(k, x) = \int_0^x Z u(k, x, \tau) d\tau + u(k, 0) \text{ch}(k\omega x) - i v(k, 0) \text{sh}(k\omega x)$$

$$v(k, x) = \int_0^x Z v(k, x, \tau) d\tau + v(k, 0) \text{ch}(k\omega x) + i u(k, 0) \text{sh}(k\omega x)$$

avec

$$Z u(k, x, \tau) = [q(k, \tau) + f(k, \tau)] \text{ch}(k\omega(x-\tau)) + i r(k, \tau) \text{sh}(k\omega(x-\tau))$$

$$Z v(k, x, \tau) = -r(k, \tau) \text{ch}(k\omega(x-\tau)) + i [q(k, \tau) + f(k, \tau)] \text{sh}(k\omega(x-\tau))$$

Ces solutions sont valables en toute rigueur pour  $x > 0$  et pour  $x < 0$  il suffit de faire le changement de variable  $x' = -x$ .

### 1-6 ETUDE DU COMPORTEMENT DES SOLUTION A L'INFINI

En général,  $u(k, x)$  et  $v(k, x)$  sont illimitées quand  $x$  tend vers l'infini amont et l'infini aval. Cependant, si  $q(k, x)$ ,  $r(k, x)$  et  $f(k, x)$  prennent des valeurs constantes à partir d'une

distance D donnée de l'origine, il existe des conditions initiales  $u(k,0)$  et  $v(k,0)$  telles que  $u(k,x)$  et  $v(k,x)$  restent bornées à l'infini.

Cette hypothèse signifie que:

-pour  $x \geq D$

$$q(k,x) = q(k,D)$$

$$f(k,x) = f(k,D)$$

$$r(k,x) = r(k,D)$$

-pour  $x \leq -D$

$$q(k,x) = q(k,-D)$$

$$f(k,x) = f(k,-D)$$

$$r(k,x) = r(k,-D).$$

Ces conditions initiales ont à vérifier les corrélations suivantes:

$$u(k,0) - iv(k,0) = -\frac{Z_1(k,D) + Z_2(k,D)}{k\omega} + \int_0^d [Z_1(k,\tau) + Z_2(k,\tau)] d\tau$$

Ce qui donne une solution finie pour  $x > D$  (infini aval).

$$u(k,0) + iv(k,0) = \frac{Z_1(k,-D) - Z_2(k,-D)}{k\omega} - \int_0^d [Z_1(k,\tau) + Z_2(k,\tau)] d\tau$$

Ce qui donne une solution finie pour  $x < D$  (infini amont).  
avec

$$Z_1(k,\tau) = [q(k,\tau) + f(k,\tau)] \operatorname{ch}(k\omega\tau) - ir(k,\tau) \operatorname{sh}(k\omega\tau)$$

$$Z_2(k,\tau) = -[q(k,\tau) + f(k,\tau)] \operatorname{sh}(k\omega\tau) + ir(k,\tau) \operatorname{ch}(k\omega\tau)$$

Les expressions de  $u(k,x)$  et  $v(k,x)$  se réduisent donc aux relations très simples:

$$u(k,x) = \frac{X(k,x,-D) - X(k,x,D)}{k\omega} - \int_{-d}^d \delta(x,\tau) \cdot X(k,x,\tau) d\tau$$

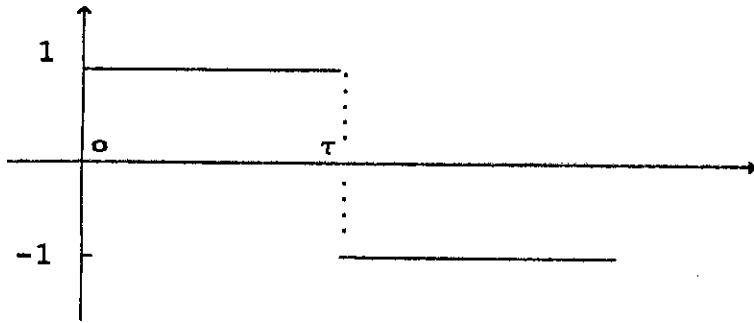
$$v(k, x) = -i \frac{X(k, x, D) + X(k, x, -D)}{k\omega} - i \int_{-d}^d X(k, x, \tau) d\tau$$

$$\text{avec } X(k, x, \tau) = \frac{1}{2} [q(k, \tau) + f(k, \tau) + i\delta(x, \tau) \cdot r(k, \tau)] e^{-k\omega|\tau-x|}$$

et  $\delta(x, \tau)$  fonction étagée telle que:

$$\delta(x, \tau) = 1 \text{ si } \tau > x$$

$$\delta(x, \tau) = -1 \text{ si } \tau < x$$



Les solutions introduisent des intégrales couvrant le domaine  $[-D, D]$ , où les solutions varient avec  $x$ , et qui est ainsi pris comme domaine de calcul. Du point de vue des calculs numériques, ce domaine devraient être le plus petit possible.

Tenant compte de (1.6.1.a) et (1.6.1.b) les composantes du vecteur vitesse deviennent:

$$U(x, y) = U_0(x) + \sum_{k \neq 0} \frac{X_k(x, -D) - X_k(x, D)}{k\omega} e^{ik\omega y} - \int_{-D}^D \delta(x, \tau) \sum_{k \neq 0} X_k(x, \tau) e^{ik\omega y} d\tau$$

$$V(x, y) = V_0(x) - i \sum_{k \neq 0} \frac{X_k(x, -D) - X_k(x, D)}{k\omega} e^{ik\omega y} - i \int_{-D}^D \sum_{k \neq 0} X_k(x, \tau) e^{ik\omega y} d\tau$$

$$\text{avec } X_k(x, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \frac{du_k}{dx}(\tau) + i \left[ 2\pi k v_k(\tau) + \delta(x, \tau) \cdot r_k(\tau) \right] e^{-2\pi k |\tau - x|} \right]$$



## 1-7 APPLICATION AUX GRILLES D'AUBES

Comme il a été signalé précédemment, la divergence  $Q$  et le rotationnel  $R$  caractérisent l'effet des obstacles placés dans l'écoulement. Il sont donc indépendants des caractéristiques de cet écoulement, et sont nuls à l'extérieur de ces obstacles. Leurs valeurs et leur domaine de variation peuvent donc être parfaitement définis dans le champ de calcul.

A l'opposé, la fonction  $F$  définie en (1.2.5) representative de la compressibilité, dépend de la vitesse en chaque point du champ de calcul. Ses valeurs ne peuvent donc être déterminées explicitement à partir des données du problème. Par conséquent, une technique de calcul basée sur le modèle théorique proposé ici doit donc être itérative en partant d'une solution de type incompressible ( $F=0$ ). Le domaine de variation de  $F$  doit cependant être au moins estimé pour pouvoir mettre en oeuvre la présente méthode.

Dans un écoulement autour d'une grille de profils, à partir d'une certaine distance, en amont du bord d'attaque et en aval du bord de fuite, les perturbations de l'écoulement deviennent indépendantes et la distance axiale (étant nulle si l'écoulement est subsonique, ce qui représente notre cas). On considère généralement que cette distance est inférieure à deux fois la corde.

Ce critère (arbitraire mais effectivement vérifié en pratique) permet de fixer une distance  $D$ , au delà de laquelle les fluctuations de  $F$  sont indépendantes de la distance axiale, situation correspondant à la l'hypothèse proposée au paragraphe précédant qui conduit à l'expression des composantes de la vitesse établies en (1.6.-1.a) et (1.6.1.b). Notons que cette distance  $D$  fixe l'extension maximale du champ de calcul, la vitesse en un point quelconque compris entre l'infini amont et l'infini aval ne dépendant que des quantités définies dans l'intervalle  $[-D, D]$ .

## 1-8 FORME DES SOLUTIONS DANS LE CAS D'UNE GRILLE D'AUBES

Compte tenu des considérations précédentes, les fonctions  $q(k,x)$  et  $r(k,x)$  ont leur support limité à l'intervalle  $[-c/2, c/2]$  ( $c$  représentant la corde des profils) et sont nulles au delà.

Les relations (1.6.1.a) et (1.6.1.b) peuvent s'écrire dans ce cas:

$$U(k,x) = \frac{f(k,-D) - f(k,D)}{k\omega} - \int_{-D}^D \delta(x,\tau) f(k,\tau) e^{-k\omega|\tau-x|} d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \left[ \delta(x,\tau) \cdot q(k,\tau) + ir(k,\tau) \right] e^{-k\omega|\tau-x|} d\tau \quad (1.8.1.a)$$

$$v(k,x) = -i \frac{f(k,D) + f(k,-D)}{k\omega} - i \int_{-D}^D f(k,\tau) \cdot e^{-k\omega|\tau-x|} d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \left[ q(k,\tau) + i\delta(x,\tau) \cdot r(k,\tau) \right] e^{-k\omega|\tau-x|} d\tau \quad (1.8.1.b)$$

$f(k,-D)$  et  $f(k,D)$  représentent les coefficients de Fourier de  $F$  sur les frontières amont et avale du champ de calcul (nuls dans le cas d'un écoulement localement subsonique).

Il convient alors d'examiner comment peuvent être définies les fonctions  $q(k,\tau)$  et  $r(k,\tau)$ , caractéristiques des profils de la grille.

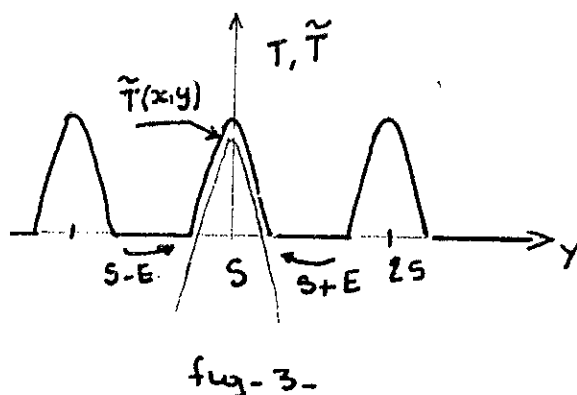
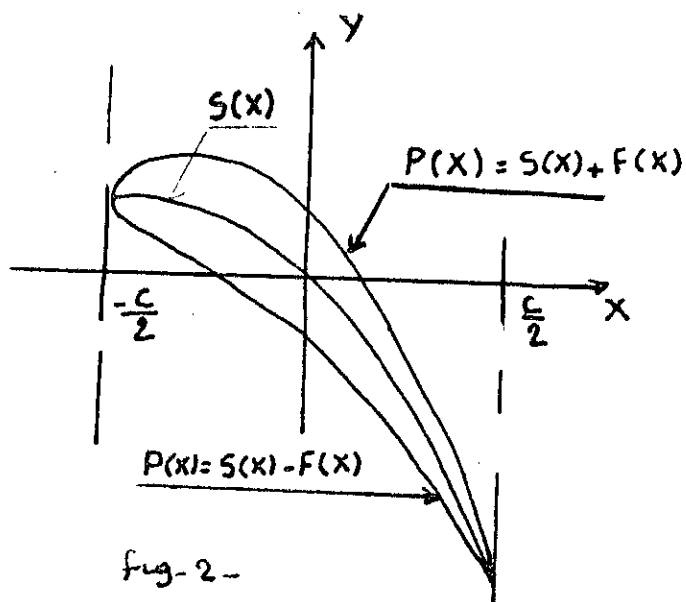
Les aubes localisées entre  $-c/2$  et  $c/2$  sont définies par leur ligne moyenne  $s(x)$ , et par la distribution de leur épaisseur  $e(x)$ , qui est symétrique par rapport à  $s(x)$  (fig.2).

Le profil d'une aube est ainsi défini par:

$$P(x) = S(x) + \lambda \cdot e(x).$$

avec  $\lambda=1$  sur l'extrados et,  $-1$  sur l'intrados.

La tangente au profil pour  $x = \pm c/2$  est parallèle à  $oy$  et la divergence et le rotationnel sont nuls en dehors du profil.  $Q(x,y)$  et  $r(x,y)$  donnés par (1.2.1) et (1.2.2) sont définis par des fonctions de la forme,  $\alpha(x) \cdot \bar{T}(x,y)$ ,  $\beta(x) \cdot \bar{T}(x,y)$ , respectivement, où  $\bar{T}(x,y)$  est une fonction périodique, qui est nulle à l'extérieur du profil, et coïncide avec une fonction  $T(x,y)$  choisie arbitrairement à l'intérieur du profil, mais qui est nulle pour  $y = s \pm \epsilon$  (fig.3).



Les series de Fourier correspondant à  $T$  peuvent s'écrire:

$$\bar{T}(x,y) = \sum_k t_k(\epsilon(x)) e^{i\omega_k(y-s(x))} \quad (1.8.2)$$

où  $t_k(\epsilon(x))$  est nul pour  $\epsilon(x) = 0$ .

$$\text{Ainsi } Q(x,y) = \sum_k q_k(x) e^{i\omega_k y} = \alpha(x) \cdot \sum_k t_k(\epsilon(x)) e^{i\omega_k(y-s(x))} \quad (1.8.3.a)$$

$$R(x,y) = \sum_k r_k(x) e^{i\omega_k y} = \beta(x) \cdot \sum_k t_k(\epsilon(x)) e^{i\omega_k(y-s(x))} \quad (1.8.3.b)$$

# 1-9 CALCUL DES COEFFICIENTS DE FOURIER DE LA FONCTION $T(x,y)$

Soit  $\tilde{t}_k(x) = \frac{\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[ \cos(2\pi k \varepsilon) - \frac{\sin(2\pi k \varepsilon)}{2\pi k \varepsilon} \right] e^{-i2\pi k s(x)}$

on aura

$$\Re \tilde{t}_k(x) = \frac{\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[ \cos(2\pi k \varepsilon) - \frac{\sin(2\pi k \varepsilon)}{2\pi k \varepsilon} \right] \cos(2\pi k s(x))$$

$$\Im \tilde{t}_k(x) = \frac{-2}{\pi^2 k^2} \left[ \cos(2\pi k \varepsilon) - \frac{\sin(2\pi k \varepsilon)}{2\pi k \varepsilon} \right] \sin(2\pi k s(x))$$

donc

$$\begin{aligned} a \tilde{t}_k(x) \cdot \cos(2\pi k y) + b \tilde{t}_k(x) \cdot \sin(2\pi k y) = \\ \frac{2\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[ \cos(2\pi k \varepsilon) - \frac{\sin(2\pi k \varepsilon)}{2\pi k \varepsilon} \right] \cos(2\pi k (y-s(x))) \end{aligned}$$

avec  $t_0 = -\frac{4}{3} \varepsilon^2$ , on peut écrire:

$$\tilde{T}(x,y) = -\frac{4}{3} \varepsilon^2 + \sum_{k=1} \frac{2\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[ \cos(2\pi k \varepsilon) - \frac{\sin(2\pi k \varepsilon)}{2\pi k \varepsilon} \right] \cos(2\pi k (y-s(x)))$$

et donc

$$Q(x,y) = -\frac{4}{3} \varepsilon^2 \alpha(x) + \alpha(x) \sum_{k=1} \frac{2\varepsilon}{\pi^2 k^2} \left[ \cos(2\pi k \varepsilon) - \frac{\sin(2\pi k \varepsilon)}{2\pi k \varepsilon} \right] \cos(2\pi k (y-s(x)))$$

ou d'après (1.4.1.a) et (1.4.1.b), on peut écrire:

$$\alpha(x) \cdot t(x_0) = q_0(x) = -\frac{du_0}{dx_0} - f(x)$$

$$\beta(x) \cdot t_0(x) = r_0(x) = -\frac{dvo}{dx}$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible, on a  $f_0(x) = 0$

La relation précédente devient donc

$$\alpha(x) = -\frac{1}{t_0(x)} \cdot \frac{du_0}{dx}$$

ou bien

$$\alpha(x) = -\frac{du_0}{dx} \cdot \frac{3}{4\varepsilon^3}$$

D'où:

$$Q(x, y) = \frac{du_0}{dx} \left[ 1 + \sum_{k=1} 2E(k, \varepsilon) \cos(2\pi k(y - s(x))) \right]$$

$$R(x, y) = \frac{-dvo}{dx} \left[ 1 + \sum_{k=1} 2E(k, \varepsilon) \cos(2\pi k(y - s(x))) \right]$$

$$\text{avec } E(k, x) = \frac{3}{4\varepsilon^2 \pi^2 k^2} \left[ \frac{\sin(2\pi k\varepsilon)}{2\pi k\varepsilon} - \cos(2\pi k\varepsilon) \right]$$

On démontre (voir ref5) que:

$$q(k, x) = \left[ \frac{du_0(x)}{dx} - f_0(x) \right] \frac{\sin(2\pi k\varepsilon)}{2\pi k\varepsilon} e^{-i2\pi k\varepsilon(x)} \quad (1.9.1.a)$$

$$R(k, x) = \frac{-dv_0(x)}{dx} \frac{\sin(2\pi k\varepsilon)}{2\pi k\varepsilon} e^{-i2\pi k\varepsilon(x)} \quad (1.9.1.b)$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible,  $f(k, x)$  est identiquement nul dans tout le domaine de calcul. Les composantes d'ordre  $k$  de la vitesse s'écrivent dans ces conditions:

$$u(k, x) = -\int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \frac{du(o, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau - i \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv(o, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau$$

$$v(k, x) = -i \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du(o, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \frac{dv(o, \tau)}{d\tau} g(k, x, \tau) d\tau$$

Les deux composantes u et v de la vitesse s'écrivent donc:

$$U(x, y) = u(o, x) - \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \frac{du(o, \tau)}{d\tau} G_1(y, x, \tau) d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv(o, \tau)}{d\tau} G_2(y, x, \tau) d\tau \quad (1.9.2.a)$$

$$V(x, y) = v(o, x) + \int_{-c/2}^{c/2} \delta(x, \tau) \frac{dv(o, \tau)}{d\tau} G_1(y, x, \tau) d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du(o, \tau)}{d\tau} G_2(y, x, \tau) d\tau \quad (1.9.2.b)$$

avec:

$$G_1(y, x, \tau) = \sum_{k \neq 0} g(k, x, \tau) e^{2\pi k i y}$$

$$G_2(y, x, \tau) = \sum_{k \neq 0} i g(k, x, \tau) e^{2\pi k i y}$$

et

$$g(k, x, \tau) = E(k, \tau) e^{-2\pi k (|\tau - x| + i\delta(\tau))}$$

#### 1-10 CONDITION A IMPOSER POUR COURBE $y=g(x)$ SOIT LIGNE DE COURANT

Cette condition s'écrit:

$$g'(x) = \frac{V(x, y)}{U(x, y)} \quad (1.10.1)$$

En introduisant (1.9.2.a) et (1.9.2.b) dans (1.10.1) on obtient

$$v(o, x) - g'(x)u(o, x) - \int_{-c/2}^{c/2} \left[ \frac{du(o, \tau)}{d\tau} (G_2 - \varepsilon g' G_1) - \frac{dv(o, \tau)}{d\tau} (\varepsilon G_1 - G_2) \right] d\tau = 0 \quad (1.10.2)$$

Cette équation doit être vérifiée en tout point (x,y) le long de la ligne de courant.

### 1-11 ECRITURE DES RELATIONS UTILISÉES DANS LE PROGRAMME

En prenant en la partie réelle de (1.9.2.a) et (1.9.2.b), obtient:

$$U(x,y) = u_0(-c/2) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0(\tau)}{d\tau} C_u(x,y,\tau) d\tau - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0(\tau)}{d\tau} C_v(x,y,\tau) d\tau \quad (1.11.1.a)$$

$$V(x,y) = v_0(-c/2) - \int_{-c/2}^{c/2} \frac{dv_0(\tau)}{d\tau} C_u(x,y,\tau) d\tau + \int_{-c/2}^{c/2} \frac{du_0(\tau)}{d\tau} C_v(x,y,\tau) d\tau \quad (1.11.2.a)$$

où  $C_u(x,y,\tau) = \delta(x,\tau) C_1(x,y,\tau) - 1/2$   
 $C_v(x,y,\tau) = C_2(x,y,\tau)$

avec:

$$C_1(x,y,\tau) = 1/2 + \sum_{k=1} E(k, \varepsilon(\tau)) e^{-2\pi k |\tau-x|} \cos 2\pi k (y-s(\tau))$$

$$C_2(x,y,\tau) = \sum_{k=1} E(k, \varepsilon(\tau)) e^{-2\pi k |\tau-x|} \sin 2\pi k (y-s(\tau))$$

Maintenant, en utilisant la méthode d'intégration de Gauss, les intégrales figurant dans (1.11.1.a) et (1.11.1.b) sont transformées d'après:

$$\int_{-c/2}^{c/2} F(\tau) d\tau = \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N W(i) \cdot F(\mu_i) \quad (\mu_i = i \cdot c/2) \quad (1.11.2)$$

où  $W(i)$ ,  $t(i)$  sont des coefficients dépendant du nombre de points le long de la corde axiale C. Ils sont donnés par des tables.

Donc les équations (1.11.1.a) et (1.11.1.b) deviennent:

$$U(x,y) = u_0(-c/2) - \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C_u(x,y,\mu_i) \frac{du_0}{d\tau}(\mu_i) - \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C_v(x,y,\mu_i) \frac{dv_0}{d\tau}(\mu_i) \quad (1.11.3.a)$$

$$V(x, y) = v_0(-c/2) - \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C u(x, y, \mu_i) \frac{d v_0}{d \tau}(\mu_i) +$$

$$+ \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N w(i) C v(x, y, \mu_i) \frac{d u_0}{d \tau}(\mu_i) \quad (1.11.3.b)$$

1-11-1 ECRITURE DE LA CONDITION DE GLISSEMENT EN CHAQUE POINT DU  
PROFIL.

Cette condition s'écrit:  $\frac{v(x, p(x))}{u(x, p(x))} = P'(x) \quad (1.11.4)$

Compte tenu de (1.11.3.a) et (1.11.3.b), (1.11.4) s'écrit:

$$\sum_{i=1}^N \frac{c}{2} W(i) \left[ P'(x) C u(x, y, \mu_i) + C v(x, y, \mu_i) \right] \frac{d u_0}{d \tau}(\mu_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{c}{2} W(i) \left[ P'(x) C v(x, y, \mu_i) - C u(x, y, \mu_i) \right] \frac{d v_0}{d \tau}(\mu_i) =$$

$$= P'(x) u_0(-c/2) - v_0(-c/2) \quad (1.11.5)$$

En posant:

$$H u(x, y, \mu_i) = \left[ P'(x) C u(x, y, \mu_i) + C v(x, y, \mu_i) \right] W(i)$$

$$H v(x, y, \mu_i) = \left[ P'(x) C v(x, y, \mu_i) - C u(x, y, \mu_i) \right] W(i)$$

$$B(x) = \frac{2}{c} \left[ P'(x) u_0(-c/2) - v_0(-c/2) \right]$$

$$\sum_{i=1}^n H u(x, y, \mu_i) \frac{d u_0}{d \tau}(\mu_i) + \sum_{i=1}^n H v(x, y, \mu_i) \frac{d v_0}{d \tau}(\mu_i) = B(x) \quad (1.11.6)$$



1-12 ECRITURE DES CONDITIONS AU BORD D'ATTAQUE ET AU BORD DE  
FUITE (Points NA et NF).

Au bord d'attaque et au bord de fuite, les relations précédentes ne peuvent pas s'appliquer, car  $P'(x)$  tend vers l'infini.

D'autre part, des relations supplémentaires doivent être utilisées pour imposer une vitesse finie au bord de fuite (condition de KUTTA JOUKOVSKI), puis les relations suivantes sont utilisées.

Au points NA et NF (FIG 4), la conservation du moment peut s'écrire:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V}{R}$$

où  $V$  représente le module de la vitesse,  $R$  le rayon de courbure de la paroi, et  $n$  la direction normale à la paroi.

En plus, la composante axiale de la vitesse,  $u_p$ , s'annule en ces points:

$$u_p(\mp c/2) = 0$$

Maintenant, tenant compte de la direction de la paroi en NA et NF, les équations précédentes peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\partial v_p}{\partial x} = \frac{\partial u_p}{\partial y} = \frac{v_p(\mp c/2)}{R} \quad (1.12.1)$$

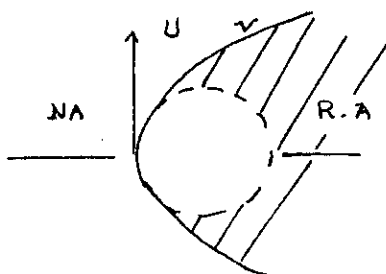
La dérivée  $\frac{\partial u_p}{\partial y}$  est évaluée pour  $x = \mp c/2$ ,  $y = s(\mp c/2)$ , telle que:

$$\left. \frac{\partial u_p}{\partial y} \right|_A = \frac{u(-c/2, y_A + \Delta y) - u(-c/2, y_A - \Delta y)}{2\Delta y} = \frac{v_p(-c/2)}{R_A} \quad (1.12.2.a)$$

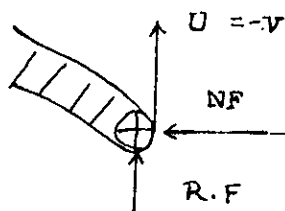
pour le bord d'attaque ( $y_A = P(-c/2)$ ).

$$\left. \frac{\partial u_p}{\partial y} \right|_A = \frac{u(c/2, y_F + \Delta y) - u(c/2, y_F - \Delta y)}{2\Delta y} = \frac{v_p(c/2)}{R_F} \quad (1.12.2.a)$$

pour le bord de fuite ( $y_F = P(c/2)$ ).



Bord d'attaque



Bord de fuite

-fig 4-

Ces relations s'écrivent, compte tenu de (1.11.3.a) et (1.11.3.b)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{C}{2} W(i) \left[ \frac{-RA}{2\Delta y} (Cu(-c/2, y_A + \Delta y, \mu_i) - Cu(-c/2, y_A - \Delta y, \mu_i)) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + Cv(-c/2, y_A, \mu_i) \right] \frac{duo}{d\tau}(\mu_i) + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{C}{2} W(i) \left[ \frac{-RA}{2\Delta y} (Cv(-c/2, y_A + \Delta y, \mu_i) - Cv(-c/2, y_A - \Delta y, \mu_i)) + \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + Cu(-c/2, y_A, \mu_i) \right] \frac{dvo}{d\tau}(\mu_i) = vo(-c/2) \quad (1.12.3.a) \end{aligned}$$

La relation (1.12.a) donne par ailleurs

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{C}{2} W(i) Cu(-c/2, y_A, \mu_i) \frac{duo}{d\tau}(\mu_i) + \sum_{i=1}^N \frac{C}{2} W(i) Cv(-c/2, y_A, \mu_i) \frac{dvo}{d\tau}(\mu_i) = \\ & \qquad \qquad \qquad = uo(-c/2) \quad (1.12.3.b) \end{aligned}$$

Des relations équivalentes à (1.12.3.a) et (1.12.3.b) peuvent être obtenues pour le bord de fuite ( $x=c/2, y_F=P(c/2)$ ) en changeant le signe du rayon de courbure.

### 1-13 POSSIBILITE D'APPLICATION POUR L'ÉCOULEMENT DANS UNE GRILLE D'AUBES.

Les équations (1.11.1.a) et (1.11.1.b) exprimées sur la paroi du profil relient:

a-les composantes  $u_p$  et  $v_p$  du vecteur vitesse en chaque point du profil.

b-les vitesses moyennes  $uo(x)$  et  $vo(x)$  sur le domaine  $[-c/2, c/2]$

c-les caractéristiques géométriques complètes de la grille, à savoir la courbure  $s(x)$  et l'épaisseur du profil  $\varepsilon(x)$ .

En partant de l'un des trois groupes d'informations ci dessus,

la solution de (1.11.1.a) et (1.11.1.b) en chaque point du profil nous donne les autres informations.

Par exemple, partant de la vitesse en chaque point du profil, les caractéristiques géométriques du profil peuvent être obtenues, ce qui correspond au mode inverse 1.

Au contraire, connaissant la géométrie du profil, il est possible d'obtenir les vitesses, et les vitesses locales (méthode directe).

Une autre possibilité peut être envisagée, elle consiste à donner la répartition de  $v_0$  et une loi d'épaisseur et obtenir la distribution de la courbure  $s(x)$ . Ce qui correspond au mode inverse 2.

## CHAPITRE 2

### APPLICATION DE LA METHODE EN MODE INVERSE 2.

Considérons la relation représentant la condition de glissement:

$$Hu(i, j) \frac{duo}{d\tau}(j) + Hv(i, j) \frac{dvo}{d\tau}(j) = B(i) \quad (2.1)$$

avec:

$$Hu(i, j) = \left[ P'(x_i) Cu(i, j) + Cv(i, j) \right] W(j) \quad (2.2)$$

$$Hv(i, j) = \left[ P'(x_i) Cu(i, j) + Cv(i, j) \right] W(j) \quad (2.3)$$

$$B(i) = \frac{2}{c} \left[ P'(x_i) uo(-c/2) - vo(-c/2) \right] \quad (2.4)$$

L'équation (2.1) écrite en chaque point  $x_i$  le long de la corde ( $i=1, N$ ), nous donne un système de  $2N$  équations non linéaires:

$N$  points sur l'extrados

$$[Hue]\{duo/d\tau\} + [Hve]\{dvo/d\tau\} = \{Be\} \quad (2.5)$$

$N$  points sur l'intrados

$$[Hui]\{duo/d\tau\} + [Hvi]\{dvo/d\tau\} = \{Bi\} \quad (2.6)$$

Pour mettre en évidence le mode inverse 2 on s'imposera une répartition de  $vo$ , et une loi d'épaisseur pour le profil.

Dans le système (2.5) et (2.6), exprimons  $\{duo/d\tau\}$  en fonction de tous les autres termes. On obtient ainsi:

$$\{duo/d\tau\} = [Hue]^{-1} \left[ \{Be\} - [Hve]\{dvo/d\tau\} \right] \quad (2.7)$$

$$\{d\omega/d\tau\} = [H_{ui}]^{-1} \left[ \{B_i\} - [H_{vi}] \{d\omega/d\tau\} \right] \quad (2.8)$$

En égalant (2.7) et (2.8), on obtient un système non linéaire de dimension N, de la forme:

$$\{F\} = \{0\} \quad (2.9)$$

avec  $F(i) = f_i(s_1, s_2, \dots, s_n) \quad i=1, n$   
 où  $s_1, s_2, \dots, s_n$  désignent respectivement  $s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n)$ .

### 2-1 RESOLUTION DU PROBLEME.

La résolution d'un système tel que (2.9) peut se faire par plusieurs méthodes (ref[5]).

Pour notre part, on a opté pour la méthode de Newton-Raphson qui permet le passage d'un système non linéaire tel que (2.9) à un système linéaire de la forme:

$$A^k \cdot \Delta X^K = B^k \quad (2.10)$$

lequel se résoud facilement par la méthode d'élimination de Gauss (par exemple)

### 2-2 DEVELOPEMENT

Le système (2.9) comporte des matrices inverses alors que le calcul de celles ci n'est pas très toléré vu l'énorme temps de calcul que cela nécessite. Pour contourner ce problème, on a adopté la méthode suivante:

Ecrivons le système (2.9) sous sa forme développée.  
 d'où:

$$[H_{ue}]^{-1} \{B_e\} - [H_{ui}]^{-1} \{B_i\} - \left[ [H_{ui}]^{-1} [H_{ve}] - [H_{ui}]^{-1} [H_{vi}] \right] \{d\omega/d\tau\} = \{0\} \quad (2.9.a)$$

En multipliant les deux termes par [Hue] à droite, on obtient

$$\{Be\} - [Hve]\{dvo/d\tau\} - [Hue][Hui]^{-1} \left[ \{Bi\} - [Hvi]\{dvo/d\tau\} \right] = \{0\} \quad (2.9.b)$$

avec:

$$\{x\} = \{Be\} - [Hve]\{dvo/d\tau\}$$

$$\{y\} = \{Bi\} - [Hvi]\{dvo/d\tau\}$$

l'équation (2.9.b) devient:

$$\{x\} - [Hue][Hui]^{-1}\{y\} = \{0\} \quad (2.9.c)$$

Ecrivons  $\{y\}$  en fonction de [Hui] tel que:

$$\{y\} = [Hui]\{z\} \quad (2.10)$$

où  $\{y\}$  et [Hui] sont connus et  $\{z\}$  est obtenu par la résolution du système (3.10).

Le système (2.9.c) devient alors:

$$\{x\} - [Hue]\{z\} = \{0\} \quad (2.11)$$

ou sous une forme plus compacte

$$\{Fz\} = \{0\} \quad (2.11.a)$$

Ainsi on a contourné le problème d'inversion de matrices.

Pour pouvoir remplir la matrice  $A^k$ , il faut dériver les termes du vecteur  $\{Fz\}$ .

D'après ce qui précède  $\{Fz\}$  s'écrit:

$$\{Fz\} = \{Be\} - [Hve]\{dvo/d\tau\} - [Hue]\{z\} \quad (2.12)$$

Soit  $\{Fz\}$  le vecteur des dérivées des éléments de  $\{Fz\}$ ,  $\{Fz\}$  s'écrit:

$$\{Fz\} = \{Be'\} - [Hve']\{dvo/d\tau\} - [Hue']\{z\} - [Hue]\{z'\} \quad (2.13)$$

La dérivation de (2.10) donne:

$$\{y'\} = [Hui']\{z\} + [Hui]\{z'\} \quad (2.14)$$

L'équation (2.10) nous donne  $\{z\}$  et (2.14) peut s'écrire sous la forme:

$$\{W\} = [Hui]\{z'\} \quad (2.15)$$

L'équation (2.15) est un système linéaire qui donne  $\{z'\}$ .

Finalement, on peut remplir la matrice  $A^k$ .

### 2-3 RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME

L'organigramme simplifié de la méthode est donné à la page 23. La méthode de résolution du système non linéaire (2.9) que l'on va utiliser est la méthode de Newton-Raphson (annexe 2) qui est une méthode itérative nécessitant un choix judicieux de la solution initiale. Très souvent, si cet estimé initial n'est pas très proche de la racine réelle, la méthode ne converge pas. En fait, le domaine de convergence de la méthode est très réduit.

Ce qui a donc poussé à choisir une solution initiale très proche de la solution exacte afin de vérifier l'applicabilité de la méthode.

### 2-4 RESULTATS ET COMMENTAIRES

après avoir lancé le programme avec une solution initiale très proche de la solution exacte et les données nécessaires à savoir:

- le nombre de points choisis,  $N=20$  points
- la corde  $c=60\text{mm}$
- la répartition de l'épaisseur de l'aube donnée dans le tableau 1
- les distributions de vitesses sur l'intrados et sur l'extrados de l'aube données dans la fig-5. à la page 26

on a remarqué que la méthode commençait à converger à partir de la 6ième itération. La solution exacte étant donnée dans le tableau 2

Le profil obtenu sera utilisé dans la 2ième partie de notre travail afin de calculer l'épaisseur de la couche limite autour de celui ci.

On a en plus lancè le programme avec 3 profils de naca et on a relevé que la methode converge en general au bout de 3 à 6 iterations tout dépend de la solution initiale injectée. on trouve dans l'annexe 3 les profils utilisées avec leur distribution de vitesse et les solutions obtenues par notre programme

Il faut noter que la méthode du mode inverse 2 permet la conception des profils d'aubes qui répondent à des utilisations bien déterminées par le concepteur .La difficulté réside dans le choix d'une solution approchée, ce n'est que l'expérience du concepteur qui peut trancher cette difficulté.

La convergence de la méthode du mode inverse dépend de la méthode choisie pour la résolution de systèmes d'équations non linéaire.

Le concepteur peut choisir la méthode de newton quand il estime que sa solution approchée est très proche de la solution exacte, parce que la méthode de newton exige une solution initiale proche de la solution exacte sinon elle diverge.Mais elle présente l'avantage de converger plus vite que les autres méthodes.

Les autres methodes de résolutions telles que les méthodes de gradient convergent lentement mais surement et n'exigent pas une solution initiale très proche.



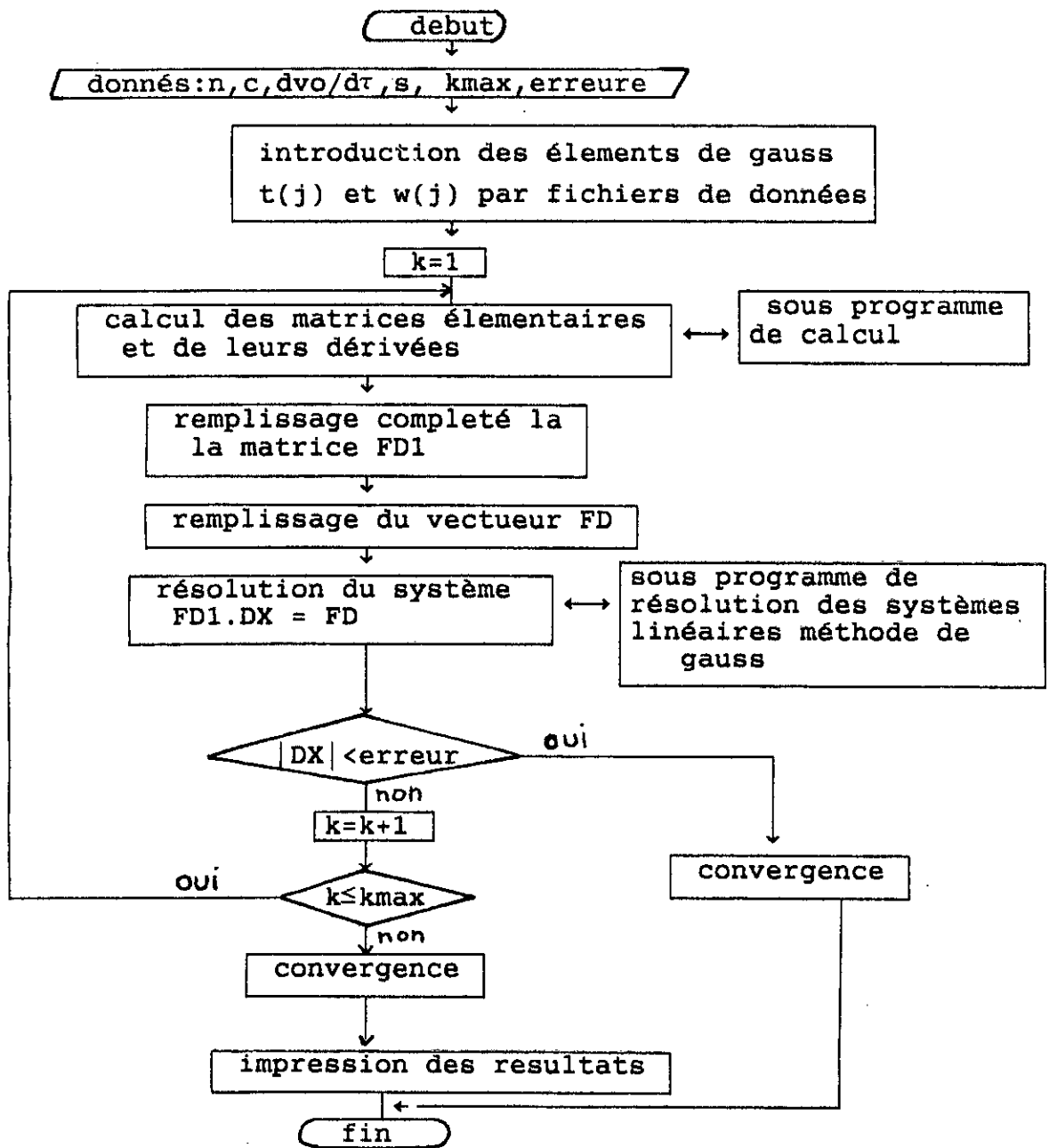


Tableau 1 : Repartition de l'épaisseur  
et de vitesse sur l'aube

i	x(i) (mm)	caractéristiques sur extradados			caractéristiques sur intrados		
		ye (mm)	ve (m/s)	dve/dxc (s <sup>-1</sup> )	yi (mm)	vi (m/s)	dvi/dxc (s <sup>-1</sup> )
1	0	11.0	1.316	1908.20	11	1.316	1908.20
2	0.54	12.0	22.90	1835.40	10	7.894	1444.03
3	3.79	15.0	24.72	1397.28	7.2	14.32	1091.11
4	7.11	17.0	42.36	950.4	5.5	16.06	514.64
5	10.66	18.0	46.32	852.6	3.5	17.62	404.11
6	14.21	17.8	48.94	669.4	1.5	18.36	293.62
7	18.00	16.8	50.94	459.6	-1.2	18.84	134.72
8	21.32	15.2	52.10	290.6	-3.0	19.20	67.62
9	24.71	13.5	52.90	129.6	-5.4	20.00	54.43
10	28.42	10.8	53.26	-26.0	-8.5	20.90	93.81
11	31.58	07.7	53.06	-273.6	-11.5	22.06	160.39
12	35.52	-3.0	51.78	-120.8	-15.0	23.20	268.51
13	38.68	-1.5	50.42	-189.0	-18.5	24.74	344.22
14	42.24	-6.0	49.36	-173.2	-22.8	27.10	438.67
15	45.80	-13.0	48.42	-147.6	-27.5	29.74	522.90
16	49.34	-21.5	47.10	-144.8	-32.5	32.00	608.41
17	52.90	-29.0	45.62	-168.72	-37.5	33.74	629.02
18	56.21	-36.0	44.48	-167.0	-43.5	38.16	792.34
19	60.00	-46.5	48.95		-46.5	47.37	

Tableau : Résultat donné par le programme

$x(I)$ en (mm)	Solution exacte $S(x)$ en (m)	Solution calculée $S(x)$ en (m)
-29,79	$1,100 \cdot 10^{-2}$	$1,099 \cdot 10^{-2}$
-28,92	$1,099 \cdot 10^{-2}$	$1,100 \cdot 10^{-2}$
-27,36	$1,102 \cdot 10^{-2}$	$1,103 \cdot 10^{-2}$
-25,17	$1,116 \cdot 10^{-2}$	$1,115 \cdot 10^{-2}$
-22,38	$1,120 \cdot 10^{-2}$	$1,122 \cdot 10^{-2}$
-19,08	$1,070 \cdot 10^{-2}$	$1,071 \cdot 10^{-2}$
-15,32	$9,535 \cdot 10^{-3}$	$9,532 \cdot 10^{-3}$
-11,21	$7,546 \cdot 10^{-3}$	$7,550 \cdot 10^{-3}$
-6,83	$5,263 \cdot 10^{-3}$	$5,262 \cdot 10^{-3}$
-2,29	$1,993 \cdot 10^{-3}$	$1,995 \cdot 10^{-3}$
+9,89	$-2,290 \cdot 10^{-3}$	$-2,289 \cdot 10^{-3}$
6,83	$-7,172 \cdot 10^{-3}$	$-7,177 \cdot 10^{-3}$
11,21	$-1,296 \cdot 10^{-3}$	$-1,296 \cdot 10^{-2}$
15,32	$-1,918 \cdot 10^{-3}$	$-1,918 \cdot 10^{-2}$
19,08	$-2,628 \cdot 10^{-3}$	$-2,629 \cdot 10^{-2}$
22,38	$-3,194 \cdot 10^{-3}$	$-3,194 \cdot 10^{-2}$
25,17	$-3,702 \cdot 10^{-2}$	$-3,700 \cdot 10^{-2}$
27,36	$-4,129 \cdot 10^{-2}$	$-4,128 \cdot 10^{-2}$
28,92	$-4,480 \cdot 10^{-2}$	$-4,416 \cdot 10^{-2}$
29,79	$-4,604 \cdot 10^{-2}$	$-4,605 \cdot 10^{-2}$

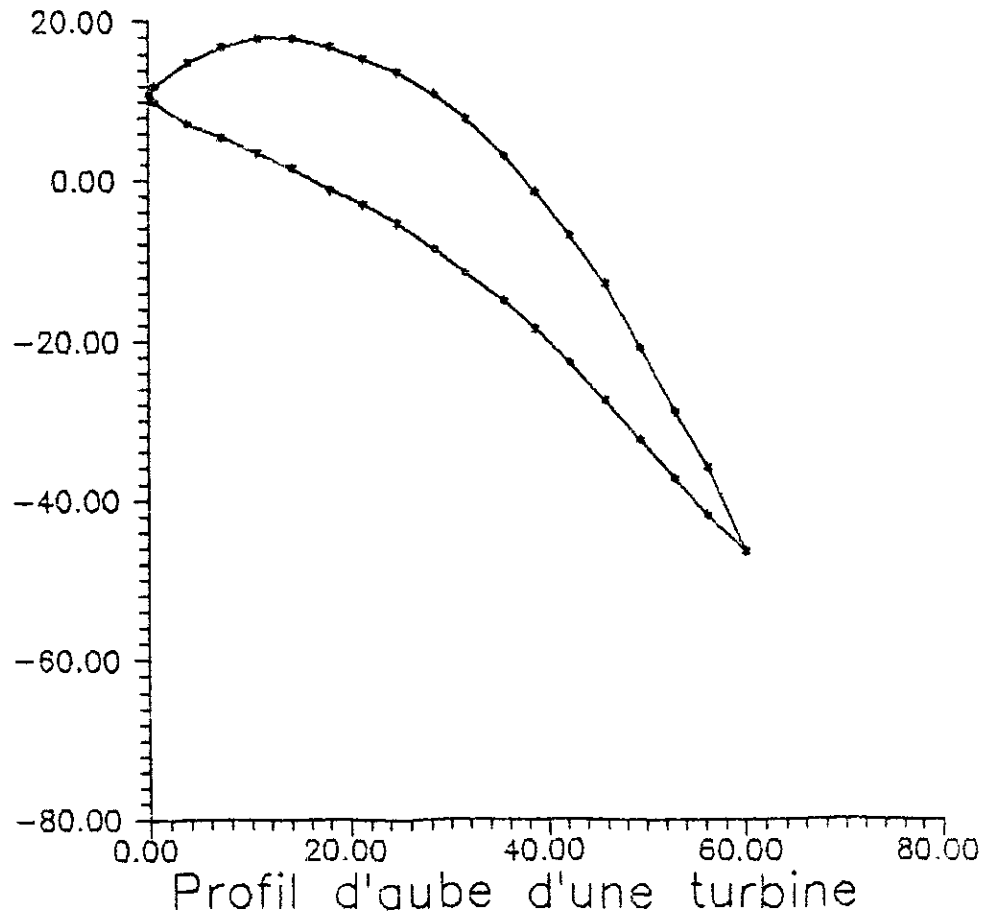
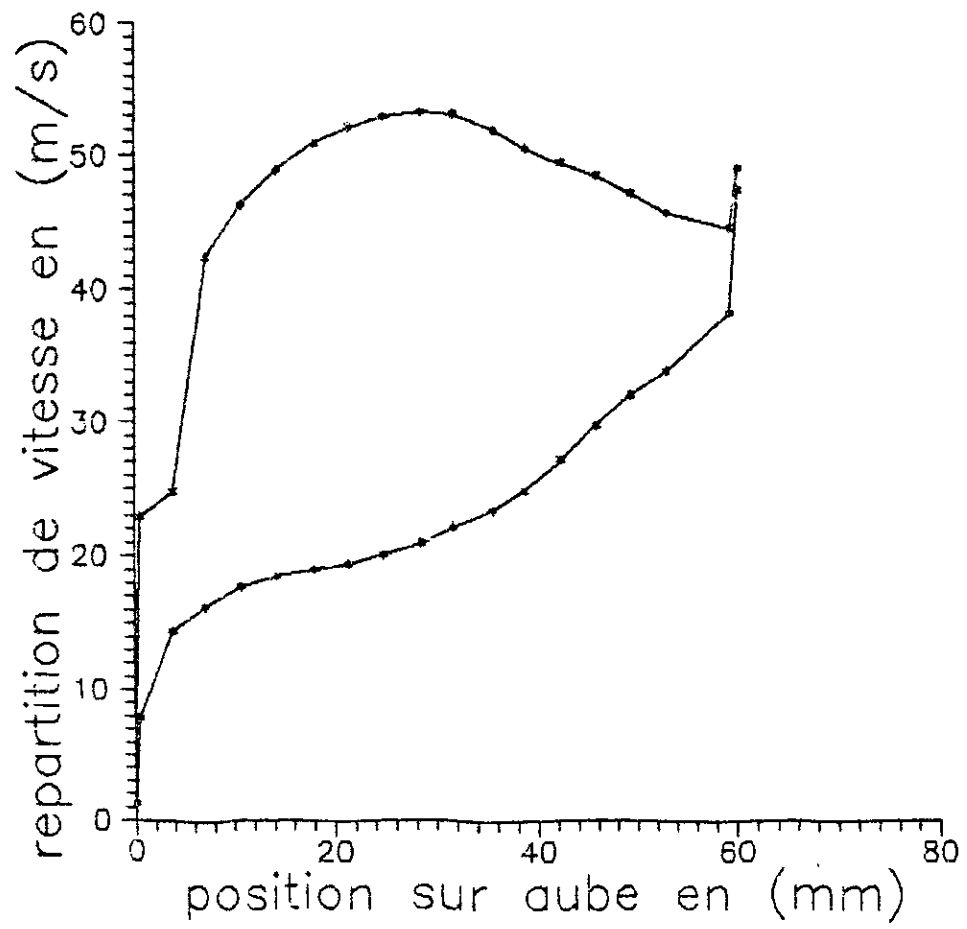


fig-5-

## CHAPITRE 3

### ETUDE DE LA COUCHE LIMITE AROUND DE L'AUBE

#### INTRODUCTION

A l'aube de l'apparition de la science de la mécanique des fluides, les écoulements de fluides visqueux causaient énormément de problèmes aux scientifiques de l'époque. En effet, même si les équations de NAVIER-STOKES furent connues bien avant, il n'y avait pas de bagage mathématique suffisant pour la résolution de celles-ci. Ainsi le chemin vers un traitement théorique des mouvements de fluides visqueux était barré.

Dans l'article "mouvement de fluides à faible frottement", L. Prandtl a montré comment il était possible d'analyser les écoulements de fluides visqueux précisément dans les cas ayant une grande importance pratique.

Il a montré que l'écoulement autour d'un solide pouvait être divisé en deux régions. Une très fine couche au voisinage du solide (couche limite) où le frottement joue un rôle très important, et une région extérieure à cette couche où le frottement peut être négligé.

Ainsi Prandtl a clarifié l'essentiel de l'influence de viscosité dans les écoulements à grands nombres de Reynolds et a montré que les équations de NAVIER-STOKES pouvaient être simplifiées et conduire à des solutions approchées.

Si l'on considère, par exemple, l'écoulement bidimensionnel d'un fluide avec une faible viscosité autour d'un corps cylindrique, alors, à l'exception du voisinage immédiat de la surface, les vitesses sont de l'ordre de la vitesse de l'écoulement libre. Cependant, des recherches détaillées révèlent que,

contrairement à l'écoulement potentiel, le fluide ne glisse pas sur la paroi, mais adhère à celle-ci.

La transition de la vitesse nulle au niveau de la paroi à celle de pleine magnitude à une certaine distance de celle-ci prend place dans une fine couche appelée : couche limite. Comme on l'a signalé précédemment, il y a deux régions à considérer :

1- une très fine couche dans le voisinage immédiat du corps dans laquelle le gradient de vitesse, normal à la paroi,  $\partial u / \partial y$ , est très grand (couche limite). Dans cette région, la faible viscosité  $\mu$  du fluide exerce une influence telle que la contrainte de cisaillement ( $\partial u / \partial y$ ) prend une grande valeur.

2- une autre région où le gradient de vitesse est très faible et où l'influence de la viscosité n'est pas importante. Dans cette région, l'écoulement est potentiel et sans frottement.

### 3-1 EQUATIONS DYNAMIQUES DE LA COUCHE LIMITE

Pour étudier l'écoulement dans la couche limite aux grands nombres de Reynolds, on utilise le système de coordonnées curvilignes représenté dans la figure-6-

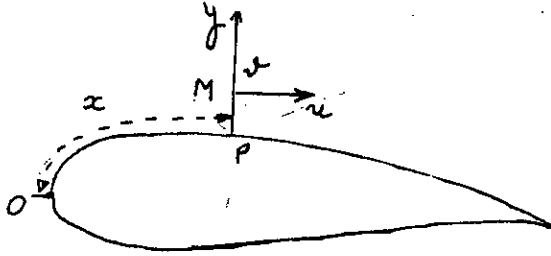


fig-6-

La position d'un point  $M$  dans la couche limite est définie par son ordonnée  $y$  comptée sur la normale  $PM$  à la paroi et par l'abscisse curviligne  $x$  du pied  $P$  de la normale, comptée suivant le périmètre de la section droite de l'obstacle. La projection du vecteur vitesse  $U$  en  $M$  sur la tangente à la surface de l'obstacle (située dans le plan de section droite) est désignée par  $u$  et la projection de  $U$  sur  $PM$  est désignée par  $v$ .

Les équations dynamiques de la couche limite ne seront autres que les équations de NAVIER-STOKES concernant l'écoulement laminaire tenant compte de certaines hypothèses appelées: hypothèses de couche limite, et l'équation de continuité.

Les hypothèses de couche limite sont les suivantes:

a- l'épaisseur de la couche limite étant très petite devant les dimensions de l'obstacle, c'est à dire que l'on néglige l'épaisseur de la couche limite devant le rayon de courbure de la surface de l'obstacle en  $P$ .

b-on admet que la composante v est partout u

c-les dérivées par rapport à x sont petites devant les dérivées correspondantes par rapport à y

Le lecteur intéressé par les détails de ces hypothèses pourra consulter les références [6] et [7] et l'annexe[1].

Ces hypothèses conduisent aux équations suivantes de l'écoulement laminaire permanent d'un fluide incompressible dans la couche limite:

$$s \left[ \begin{array}{l} \rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.2)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3.1.3)$$

D'après l'équation (3.1.2), la pression p est constante le long d'une normale PM et par conséquent la pression dans la couche limite est égale à la pression dans le fluide libre à la frontière de la couche limite.

En assimilant le fluide libre à un fluide parfait, l'équation de BERNOUILLI écrite le long de la frontière de la couche donne:

$$P + \frac{1}{2} \rho U_0^2 = \text{const} \quad (3.1.4)$$

où  $\rho$  et  $U_0$  sont respectivement la masse volumique et la vitesse du fluide libre.

En dérivant l'expression (3.1.4) par rapport à x, on obtient:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho \cdot U_0 \cdot \frac{dU_0}{dx} \quad (3.1.5)$$

Ce qui nous donne le gradient de pression dans la couche limite.

En reportant l'équation (3.1.5) dans l'équation (3.1.1), le système d'équation (s) devient:



$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \rho U_e \frac{dU_e}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (3.1.6) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 & (3.1.7) \end{aligned} \right.$$

La solution des équations (3.1.6) et (3.1.7) peut être calculée numériquement à l'aide d'un ordinateur en remplaçant les dérivées partielles par des équations de différences finies.

Elle peut être calculée aussi par des méthodes approchées qui utilisent l'équation de Karman obtenue en intégrant les deux membres de l'équation dynamique (3.1.6) entre 0 et H (distance à la paroi, supérieure à l'épaisseur de la couche limite). on obtient:

$$\int_{y=0}^H \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = \frac{\mu}{\rho} \int_{y=0}^H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \quad (3.1.8)$$

Le second membre de l'équation (3.1.8) s'exprime ainsi:

$$\frac{\mu}{\rho} \int_0^H \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \frac{1}{\rho} \left[ \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H} - \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right]$$

Le terme  $\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H}$  désigne la force de frottement par unité de surface en un point  $y=H$  du fluide qui est nulle dans ce cas.

Le terme  $\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau_0$  désigne la force de frottement par unité de surface sur la paroi.

Ainsi, l'équation (3.1.8) devient:

$$\int_{y=0}^H \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right) dy = - \frac{\tau_0}{\rho} \quad (3.1.9)$$

L'équation (3.1.9) peut être valide aussi bien pour un écoulement laminaire que pour un écoulement turbulent à condition que  $u$  et  $v$  désignent les moyennes des composantes respectives de vitesse. La composante normale  $v$  peut être remplacée d'après l'équation (3.1.7) par:

$$v = - \int_0^y (\partial u / \partial x) dy.$$

Par conséquent, on a :

$$\int_{y=0}^H (u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial y} dy - U_0 \frac{dU_0}{dx}) dy = - \frac{\tau_0}{\rho}$$

Pour intégrer cette équation on doit poser les conditions aux limites sur les vitesses  $u$  et  $v$ , qui sont :

$$u=0, \quad v=0 \quad \text{pour } y=0$$

$$u=U_0, \quad \quad \quad \text{pour } y=H$$

Ainsi en intégrant par parties, on obtient pour le second terme :

$$\int_{y=0}^H (\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} dy) dy = U_0 \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^H u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

D'où :

$$\int_0^H (2u \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{\partial u}{\partial x} - U \frac{dU}{dx}) dy = - \frac{\tau_0}{\rho}$$

qui peut être simplifiée en

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial x} [u(U_0 - u)] dy + \frac{dU}{dx} \int_0^H (u_0 - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (3.1.9.a)$$

On peut maintenant faire tendre  $H$  vers l'infini et introduire pour plus de commodité les épaisseurs :

$$\delta^* = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U_0}) dy \quad (3.1.10)$$

appelée épaisseur de déplacement

$$\text{et } \theta = \int_0^\infty \frac{u}{U_0} (1 - \frac{u}{U_0}) dy \quad (3.1.11)$$

appelée épaisseur de quantité de mouvement.

Où sous une autre forme:

$$\delta^* U_e = \int_{y=0}^{\infty} (U_e - u) dy \quad (3.1.10.a)$$

$$\theta U_e^2 = \int_{y=0}^{\infty} u(U_e - u) dy \quad (3.1.11.a)$$

Maintenant en reportant les équations (3.1.10.a) et (3.1.11.a) dans l'équation (3.1.9.a), on aboutit à:

$$\frac{\tau_o}{\rho} = \frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + \delta^* U_e \frac{dU_e}{dx}$$

$$\text{ou bien} \quad \frac{\tau_o}{\rho} = U_e^2 \frac{d\theta}{dx} + (2\theta + \delta^*) U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (3.1.12)$$

Cette équation est appelée :équation intégrale du moment pour une couche limite incompressible et bidimensionnelle. L'équation (5.1.12) s'applique aussi bien pour une couche limite laminaire que pour une couche limite turbulente.

### 3-2 METHODE APPROXIMATIVE DUE A TH.VON KARMAN ET K.POHLHAUSSEN POUR DES ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS.

Suivant K.Pohlhausen, pour intégrer l'équation (3.1.12) on doit se donner par exemple la forme de la fonction vitesse u:

$$\frac{u}{U_e} = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4$$

avec  $\eta = y/\delta(x)$  la distance adimensionnelle à partir de la paroi et  $\delta(x)$  l'épaisseur de la couche limite au point considéré.

Dans le but de déterminer les quatres constantes a,b,c et d nous allons poser les 4 conditions aux limites suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \quad ; \quad u=0 \quad , \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U_e \frac{dU_e}{dx} \\ y=\delta \quad ; \quad u=U_e \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\} \quad (3.2.1)$$

On obtient:

$a=2+A/6$  ;  $b=-A/2$  ,  $c=-2+A/2$  ,  $d=1-A/6$   
 et pour le profil de vitesse:

$$\frac{u}{U_0} = F(\eta) + A.G(\eta) = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \frac{1}{6} A(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \quad (3.2.3)$$

$$\text{où } \left. \begin{aligned} F(\eta) &= 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 = 1 - (1-\eta)^3(1+\eta) \\ G(\eta) &= \frac{1}{6} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) = \frac{1}{6} \eta(1-\eta)^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4)$$

En combinant les équations (3.1.10.a) et (3.1.11.a) avec l'équation (3.2.2), on obtient:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [1 - F(\eta) - A.G(\eta)] d\eta$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_{\eta=0}^1 [F(\eta) + A.G(\eta)][1 - F(\eta) - A.G(\eta)] d\eta$$

en remplaçant  $F(\eta)$  et  $G(\eta)$  d'après (3.2.4), on aura:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 3/10 - A/120 \quad , \quad \frac{\theta}{\delta} = (37/315 - A/945 - A^2/9072) \quad (3.2.4.a)$$

La force de frottement par unité de surface sur la paroi est:

$$\tau_0 = \mu(\partial u / \partial y)_{y=0} = \frac{\mu U_0}{\delta} (2 + A/6) \quad (3.2.5)$$

Dans le but de déterminer le facteur de forme  $A(x)$  et par conséquent la fonction  $\delta(x)$  à partir de (3.2.2), il est nécessaire de se référer à l'équation du moment (3.1.12). En multipliant les deux membres de celle ci par  $\theta/\nu U_0$  on obtient:

$$\frac{U_0 \cdot \theta \cdot \theta'}{\nu} + (2 + \frac{\delta^*}{\delta}) \frac{U_0 \theta^2}{\nu} = \frac{\tau_0 \theta}{\mu U_0} \quad (3.2.6)$$

Introduisons un second facteur de forme K défini par:

$$K = \frac{\theta^2}{\nu} \cdot \frac{dU_0}{dx} \quad (3.2.7)$$

et posons  $Z = \frac{\theta^2}{\nu}$  (3.2.8)

donc  $K = Z \frac{dU_0}{dx}$  (3.2.9)

Des équations (3.2.2) (3.2.7) et (3.2.4.a) on deduit:

$$K = (37/315 - A/945 - A^2/9072)^2 A \quad (3.2.10)$$

d'où  $\frac{\delta^*}{\theta} = \frac{3/10 - A/120}{37/315 - A/945 - A^2/9072} = f_1(K)$  (3.2.11)

$$\frac{\tau_0 \theta}{\mu U_0} = (2 + A/6) (37/315 - A/945 - A^2/9072) = f_2(K) \quad (3.2.12)$$

En combinant les équations (3.2.7) et (3.2.8) ensemble avec les équations (3.2.11) et (3.2.12), on obtient à partir de l'équation du moment (3.2.5) avec  $\frac{\theta \cdot \theta'}{\nu} = \frac{1}{2} \frac{dZ}{dx}$  l'équation:

$$\frac{1}{2} U_0 \frac{dZ}{dx} + [2 + f_1(K)] K = f_2(K) \quad (3.2.13)$$

Finalement, on introduit l'abréviation:

$$2f_2(K) - 4K - 2Kf_1(K) = F(K) \quad (3.2.14)$$

En substituant les expressions de K,  $f_1(K)$  et  $f_2(K)$  dans l'équation (3.2.14), on obtient:

$$F(K) = 2(37/315 - A/945 - A^2/9072) \left[ 2 - 116A/315 + (2/945 + 1/120)A^2 + \frac{2A^3}{9072} \right] \quad (3.2.15)$$

Avec toutes ces abréviations et substitutions, l'équation du moment (3.2.13) peut être réécrite sous la forme condensée suivante:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K)}{U_0} \quad ; \quad K = ZU_0' \quad (3.2.16)$$

Ce qui représente une équation différentielle non linéaire du premier ordre d'inconnue  $Z = \frac{\theta^2}{\nu}$  fonction de l'abscisse curviligne  $x$ . Le fait que la fonction  $F(K)$  soit complexe ne constitue pas une réelle difficulté pour la résolution de l'équation (3.2.16). Les fonctions  $K(A)$  de l'équation (3.2.10) aussi bien que les équations  $f_1(K)$ ,  $f_2(K)$  et  $F(K)$  données respectivement par les équations (3.2.11), (3.2.12) et (3.2.15) sont données dans le tableau-3.

### 3-2-a SOLUTION DE L'ÉQUATION (3.2.16)

En ce qui concerne la solution de l'équation (3.2.16), il est possible de faire les remarques suivantes:

Le calcul commencera à partir du point d'arrêt  $x=0$  où  $U_0=0$  et  $\frac{dU_0}{dx}$  est fini et est différent de zero. Donc d'après l'équation (3.2.16), la valeur initiale de la pente  $dZ/dx$  sera infinie en ce point et de ce fait,  $F(K)$  tendra à s'annuler. Le zéro de  $F(K)$  apparait pour des valeurs de  $A$  pour lesquelles le second terme à droite et entre parenthèses de l'équation (3.2.15) s'annule. Ainsi:

$$F(K)=0 \text{ pour } K=K_0=0.0770 \text{ ou pour } A=A_0=7.052.$$

De cette manière, la pente initiale  $(dZ/dx)_0$  au point d'arrêt se présente sous une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ , mais sa valeur peut être calculée par un simple passage à la limite. On obtient:

$$Z_0 = \frac{K_0}{U_0'} = \frac{0.0770}{U_0'} \quad , \quad (dZ/dx)_0 = -0.0652 \frac{U_0''}{U_0'^2}$$

où l'indice zéro fait référence au point d'arrêt.

Avec ces valeurs initiales, l'équation (3.2.16) peut facilement être intégrée, par exemple, par la méthode des isoclines. Le calcul commence à partir du point d'arrêt pour lequel  $A_0=7.052$  et  $K_0=0.0770$ . On poursuit l'intégration jusqu'à atteindre le point de décollement, correspondant à  $\tau_0=0$ , c'est à dire pour  $A=-12$  ou  $K=-0.1567$  et  $F(K)=1.7241$ .

La fonction de vitesse  $U_e(x)$  et leurs dérivées premières  $\frac{dU_e}{dx}$  sont données par la solution de l'écoulement potentiel.

La procédure de calcul peut être résumée comme suit:

1- la répartition de vitesses  $U_e(x)$  et leurs dérivées  $\frac{dU_e}{dx}$  sont données en fonction de l'abscisse curviligne  $x$ .

2- l'intégration de l'équation (3.2.16) donne  $Z(x)$  et le second facteur  $K(x)$ . Ce qui conduit au calcul de  $\theta(x)$  d'après l'équation (3.2.7).

3- la variation du premier facteur de forme  $A(x)$  est obtenu de l'équation (3.2.10) et du tableau (2.1).

4- l'épaisseur de la couche limite  $\delta(x)$  est finalement obtenue à partir de l'équation (3.2.4.a).

En pratique, l'intégration de l'équation (3.2.16) peut être effectuée par une simple quadrature, pour les valeurs positives de  $K$ . Pour cela, A. WALZ a introduit une approximation sans perte appréciable dans la précision. Il a trouvé que la fonction  $F(K)$  peut être approximée par la loi linéaire:

$$F(K) = a - bK$$

avec  $a = 0.470$  et  $b = 6$ . L'approximation est particulièrement valable entre le point d'arrêt et le point de vitesse maximale. L'équation (3.2.16) se réduit à:

$$U_e \frac{dZ}{dx} = a - bK$$

En substituant les expressions de  $Z$  et de  $K$ , on aboutit à:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{U_e \cdot \theta^2}{\nu} \right] = a - (b-1) \frac{U_e \theta^2}{\nu} \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$$

Cette équation différentielle peut être intégrée explicitement pour  $U_e \theta^2 / \nu$  pour obtenir:

$$\frac{U_e \theta^2}{\nu} = \frac{a}{U_e^{b-1}} \int_0^x U_e^{b-1} dx$$

Ou bien en utilisant les valeurs numériques de a et b données précédemment, on trouve:

$$\frac{U_0 \theta^2}{\nu} = \frac{0.470}{U_0^5} \int_0^x U_0^5 dx \quad (3.2.17)$$

En ce qui concerne notre travail, on essayera de résoudre l'équation (3.2.16) par la méthode des différences finies.

### 3-3 RESOLUTION DU PROBLEME

L'organigramme pour la résolution de l'équation (3.2.16) est donné à la page 40,41. Le profil d'aube utilisé est celui obtenu dans la première partie par le mode inverse 2.

Les données du problème sont les suivantes:

- 1- corde  $c=60\text{mm}$
- 2-  $N=19$  nombre de points choisis le long de la corde axiale.
- 3-  $V_e$  répartition de vitesse sur l'extrados de l'aube.
- 4-  $V_i$  répartition de vitesse sur l'intrados de l'aube.
- 5-  $X_i$  position d'un point quelconque  $i$  sur l'axe des  $x$ .
- 6-  $Y_e$  ordonnées des points choisis sur l'extrados.
- 7-  $Y_i$  ordonnées des points choisis sur l'intrados.

Le calcul des dérivées de vitesses le long de l'abscisse curviligne s'est fait par la méthode de spline cubique (ref(10)). On note  $dV_e/dx$  les dérivées sur l'extrados, et  $dV_i/dx$  celles sur l'intrados. Le profil étant donné à la page 26, et les données du problème à la page 24.

### 4-3-A RESULTATS

A partir de l'organigramme donné à la page 40,41, on a construit un programme Fortran. Les résultats obtenus sont ceux donnés dans la page 43.



-debut

-donnees : N, n

Introduction de :  
 $x(I), v(I), F(k), k, A, \frac{dV}{dx}, y(I)$

$$x(1) = 0$$
$$y_1(1) = \frac{y(2)}{x(2)}$$

$$y_1(I) = (y_{i+1} - y_{i-1}) / (x_i - x_{i-1})$$

$$F(1) = 0; k_k(1) = 0,077$$
$$z(1) = k_k(1) / \left(\frac{dV}{dx}\right)_1$$

$$z(2) = z(1) + h(1) \cdot F(1) / v(1)$$

$$\delta(1) = 0$$

$$I = 2$$

$$k_k i = z_i \cdot \frac{dV_i}{dx}$$

$$k_k i \leq -0,1567$$

oui

Non

Calculer  $F(I)$  et  $A(I)$  correspondant à  $k_k(I)$  à l'aide des tableaux  $F(k), k$  et  $A$  par interpolation linéaire

$$z_{i+1} = z_i + h_i \cdot F_i / v_i$$

2

7

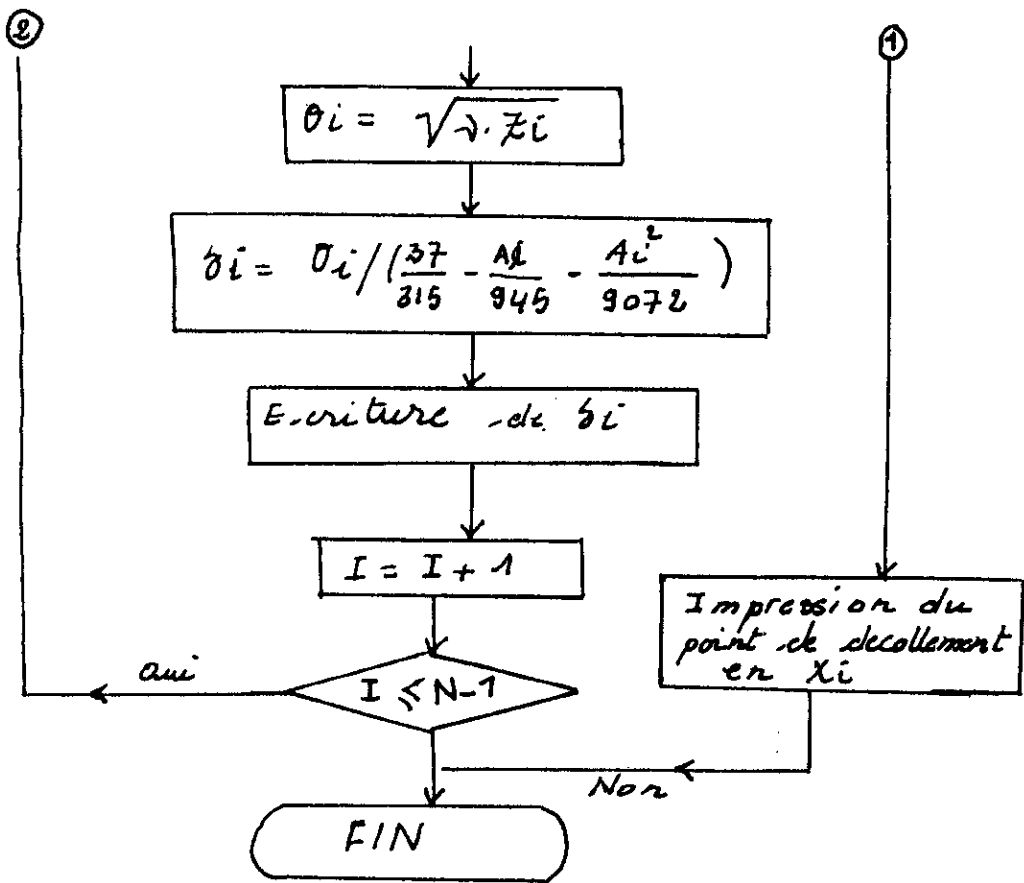


Tableau 3: Auxiliary functions for the approximate calculation of laminar boundary layers after Holstein and Bohlen [9]

$A$	$K$	$F(K)$	$f_1(K) = \frac{\delta^*}{\theta} = H$	$f_2(K) = \frac{\theta \tau_0}{\mu U}$
15	0.0884	-0.0658	2.279	0.346
14	0.0928	-0.0885	2.262	0.351
13	0.0941	-0.0914	2.253	0.354
12	0.0948	-0.0948	2.250	0.356
11	0.0941	-0.0912	2.253	0.355
10	0.0919	-0.0800	2.260	0.351
9	0.0882	-0.0608	2.273	0.347
8	0.0831	-0.0335	2.289	0.340
7.8	0.0819	-0.0271	2.293	0.338
7.6	0.0807	-0.0203	2.297	0.337
7.4	0.0794	-0.0132	2.301	0.335
7.2	0.0781	-0.0051	2.305	0.333
7.052	0.0770	0	2.308	0.332
7	0.0767	0.0021	2.309	0.331
6.8	0.0752	0.0102	2.314	0.330
6.6	0.0737	0.0186	2.318	0.328
6.4	0.0721	0.0274	2.323	0.326
6.2	0.0706	0.0363	2.328	0.324
6	0.0689	0.0459	2.333	0.321
5	0.0599	0.0979	2.361	0.310
4	0.0497	0.1579	2.392	0.297
3	0.0385	0.2300	2.427	0.283
2	0.0264	0.3004	2.466	0.268
1	0.0135	0.3820	2.508	0.252
0	0	0.4698	2.554	0.235
-1	-0.0140	0.5633	2.604	0.217
-2	-0.0284	0.6609	2.647	0.199
-3	-0.0429	0.7640	2.716	0.179
-4	-0.0575	0.8698	2.779	0.160
-5	-0.0720	0.9780	2.847	0.140
-6	-0.0862	1.0877	2.921	0.120
-7	-0.0999	1.1981	2.999	0.100
-8	-0.1130	1.3080	3.085	0.079
-9	-0.1254	1.4167	3.176	0.059
-10	-0.1369	1.5229	3.276	0.039
-11	-0.1474	1.6257	3.383	0.019
-12	-0.1567	1.7241	3.500	0
-13	-0.1648	1.8169	3.627	-0.019
-14	-0.1715	1.9033	3.765	-0.037
-15	-0.1767	1.9820	3.916	-0.054

\*\*\*\* epaisseur de la couche limite sur l'extrados  
 \*\*\*\* avec un point de décollement atteint au  
 \*\*\*\* point d'abscisse x=52.89mm et une vitesse  
 \*\*\*\* vinf=20m/s

i	x(m)	delta(m)
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	5.400009E-04	3.645828E-04
3	3.790001E-03	3.665764E-04
4	7.105000E-03	4.226466E-04
5	1.065800E-02	4.633288E-04
6	1.421000E-02	4.809885E-04
7	1.800000E-02	5.061904E-04
8	2.131600E-02	5.396336E-04
9	2.471100E-02	5.816219E-04
10	2.842100E-02	6.389779E-04
11	3.157900E-02	7.017993E-04
12	3.552600E-02	8.525285E-04
13	3.868400E-02	9.788378E-04
14	4.223700E-02	1.128916E-03
15	4.579000E-02	1.289174E-03
16	4.934200E-02	1.465708E-03

\*\*\*\* epaisseur de la couche limite sur l'intrados  
 \*\*\*\* sans point de décollement et pour une  
 \*\*\*\* vitesse vinf=20m/s

i	x(m)	delta(m)
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	5.400009E-04	3.506209E-04
3	3.790001E-03	5.602272E-04
4	7.105000E-03	6.519583E-04
5	1.065800E-02	6.657277E-04
6	1.421000E-02	7.077490E-04
7	1.800000E-02	7.619624E-04
8	2.131600E-02	8.574684E-04
9	2.471100E-02	9.680900E-04
10	2.842100E-02	1.103326E-03
11	3.157900E-02	1.247664E-03
12	3.552600E-02	1.250895E-03
13	3.868400E-02	1.253434E-03
14	4.223700E-02	1.256039E-03
15	4.579000E-02	1.258840E-03
16	4.934200E-02	1.261509E-03
17	5.289500E-02	1.264036E-03
18	5.621000E-02	1.266476E-03

#### 4-3 FERMETURE DU PROFIL ENGRAISSE

Le développement de couche limite se traduit par la présence d'un sillage sur une distance plus ou moins grande à l'aval du profil qui doit être représenté notamment par une épaisseur de déplacement de part et d'autre du bord de fuite.

Or les méthodes de calcul de l'écoulement de fluide parfait suppose un écoulement uniforme à l'infini aval. Il est donc nécessaire de refermer le profil "engraissé" en définissant un bord de fuite fictif. Ceci étant illustré dans la figure ci dessous.

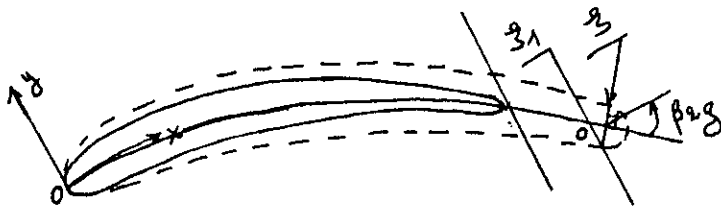


fig-7-

Le bord de fuite est ensuite affiné en définissant l'arc de cercle centré sur la ligne moyenne du profil fictif et de rayon  $RO$  défini par (voir fig-7-).

$$RO = \frac{\xi_1}{2} \cos \beta_{2g} \quad (4.4.1)$$

où  $\beta_{2g}$  est l'angle de sortie géométrique défini par la tangente à la ligne moyenne en  $o'$ .

$\xi_1$  est l'épaisseur du profil fictif calculée le long de la verticale précédant celle qui passe par  $o'$ .

### 5-3 APPLICATION : Couplage entre mode inverse 2 et couche limite

Pour pouvoir faire le couplage entre le mode inverse 2 et le calcul de couche limite il faudrait déterminer les caractéristiques géométriques du profil engraisé, à savoir la corde et l'épaisseur de celui-ci.

pour cela, on néglige le décollement de couche limite ayant apparu sur l'extrados de l'aube. L'épaisseur de la couche limite en aval du point de décollement est obtenue par extrapolation linéaire.

la détermination de la position du bord de fuite fictif se fera par un procédé graphique tel que ce point est déterminé par l'intersection des courbes définissant l'intrados et l'extrados du profil fictif.

Les résultats obtenus sont :

- corde du profil fictif:  $c=64$  mm
- angle de sortie géométrique  $\beta_{zg}=63.43^\circ$
- rayon du bord de fuite fictif  $R_0=0.61$  mm

avec ces nouvelles données (corde et épaisseur curviligne) on va relancer le programme du mode inverse 2 pour déterminer la nouvelle répartition du squelette. Le résultat obtenu ne diffère pas beaucoup du squelette du profil réel de fait de la très faible épaisseur de la couche limite, voir page-46-.

Tableau - 6- : Squelette - du profil  
engraissé

$x$ en (mm)	$S(x)$ en (mm)
- 29,46	0,0113
- 26,22	0,0114
- 22,90	0,0117
- 19,34	0,0113
- 15,79	0,0102
- 12,00	0,0085
- 8,68	0,0069
- 5,29	0,0049
- 1,58	0,0022
5,53	- 0,0011
8,68	- 0,0067
12,23	- 0,0106
15,79	- 0,0156
19,34	- 0,0211
22,90	- 0,0280
26,21	- 0,0342
28,92	- 0,04557
29,79	- 0,04741
32,00	- 0,05209
34,00	- 0,05632

## CONCLUSION

Parmi tout les problèmes qu'on a rencontré durant toute la période de préparation du projet, on peut citer celui relatif au manque de moyens informatiques, en occurrence des ordinateurs puissants, qui a eu une influence considérable lors du lancement du programme traitant le mode inverse 2. Cette influence apparait essentiellement dans le temps d'exécution du programme, car celui ci étant un programme basé sur une méthode itérative, or pour obtenir des résultats consistants, il faut travailler avec beaucoup d'iterations et d'exemples possibles.

Malgré tout ces problèmes, on a pu quand même obtenir d'assez bons résultats pour les deux parties de notre projet.

On ne manquera pas de noter que l'on a établi un programme qui traite le mode inverse 1, mais faute de temps on n'a pas pu achever ce travail.

Enfin nous estimons que l'on a tiré bénéfice de ce travail puisqu'entre autre, on a eu à faire plusieurs programmes intermédiaires moyennant des méthodes numériques adéquates pour pouvoir établir les données nécessaires pour le programme principal

Et c'est ainsi que nous espérons que ce modeste travail servira de base solide pour ceux qui auront à s'intéresser à des problèmes relatifs aux écoulements de fluides autour d'une aube.



ANNEXE-1:

SIMPLIFICATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES POUR L'ETUDE  
DE LA COUCHE LIMITE.

En général, il est possible d'avancer que l'épaisseur de la couche limite décroît avec la viscosité, ou plus généralement, que celle-ci décroît quand le nombre de Reynolds augmente.

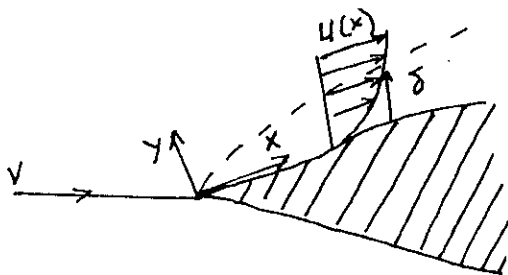
Il a été démontré d'après beaucoup de solutions exactes des équations de NAVIER-STOKES que l'épaisseur de la couche limite est proportionnelle à la racine carrée de la viscosité cinématique:

$$\delta \approx \nu^{1/2}$$

Parmi les simplifications qui sont à introduire dans les équations de NAVIER-STOKES figurera celle relative à l'épaisseur de la couche limite qui est considérée comme très petite comparée à la longueur caractéristique  $L$  du corps:

$$\delta \ll L$$

Nous allons maintenant procéder à la discussion des simplifications des équations de NAVIER-STOKES. Nous estimerons l'ordre de grandeur de chaque terme. Dans le problème bidimensionnel illustré dans la figure ci-dessous, nous commencerons par supposer la paroi comme ayant une forme plate et coïncidant avec la direction  $x$ , la direction  $y$  sera perpendiculaire à celle-ci.



On réécrit maintenant les équations de NAVIER-STOKES sous la forme adimensionnelle, en référant toutes les vitesses à la vitesse  $V$  de l'écoulement libre et les dimensions linéaires à la longueur caractéristique  $L$  du corps qui est choisie de telle sorte à ce que la dérivée adimensionnelle  $\partial u/\partial x$  ne dépasse pas l'unité dans la région considérée. La pression est rendue adimensionnelle avec  $\rho V^2$ , et le temps est referé à  $L/V$ . Ainsi, l'expression:

$$R = VL\rho/\mu = VL/\nu$$

représente le nombre de Reynolds qui est considéré très grand. Avec ces suppositions, et en retenant les mêmes symboles pour les quantités adimensionnelles, les équations de NAVIER-STOKES pour un écoulement plan deviennent:

$$\text{direction } x: \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\text{direction } y: \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

L'équation de continuité s'écrit alors:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Les conditions aux limites sont:

absence de glissement entr le fluide et la paroi.

i.e :  $u=v=0$  pour  $y=0$ , et  $u=U$  pour tendant vers l'infini

Nous retenons le symbole  $\delta$  pour l'épaisseur de la couche limite adimensionnelle  $\delta/L$ .

On a  $\delta \ll 1$ .

Nous allons maintenant estimer l'ordre de grandeur de chaque terme pour pouvoir négliger certains termes. Puisque  $\partial u/\partial x$  est d'ordre 1, nous voyant d'après l'équation de continuité que  $\partial v/\partial y$  est aussi d'ordre 1. Puisque à la paroi,  $v=0$ , alors dans la couche limite,  $v$  est d'ordre  $\delta$ . Ainsi  $\partial v/\partial x$  et  $\partial^2 v/\partial x^2$  sont aussi d'ordre  $\delta$ . Il en est donc de même pour  $\partial^2 u/\partial x^2$ .

Nous supposons que l'accélération instationnaire  $\partial u/\partial t$  est de même ordre que le terme convectif  $u\partial u/\partial x$ .

Puisque la composante de la vitesse parallèle à la paroi croît de zéro au niveau de la paroi à la valeur 1 dans le courant libre à travers l'épaisseur  $\delta$  de la couche, nous avons:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta} \quad \text{et} \quad \partial^2 u/\partial y^2 \sim \frac{1}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\delta}{\delta} \sim 1 \quad \text{et} \quad \partial^2 v/\partial y^2 \sim \frac{1}{\delta}$$

La première équation peut être simplifiée maintenant en négligeant  $\partial^2 v/\partial x^2$  devant  $\partial^2 u/\partial y^2$ . De la seconde équation, nous déduisons que  $\partial P/\partial y$  est d'ordre  $\delta$ .

L'accroissement de la pression à travers la couche limite, pouvant être obtenu par intégration de la seconde équation, est de l'ordre de  $\delta^2$ , i.e très petit. Ainsi la pression dans la direction normale à la couche limite est pratiquement constante.

Au bord extérieur de la couche limite, la composante parallèle  $u$  devient égale à celle du flux extérieur,  $u(x,t)$ .

Puisque le gradient de vitesse n'est pas grand, les termes visqueux de l'équation (1) s'annulent pour de grandes valeurs de  $R$ , et par conséquent, pour l'écoulement externe, on aboutit à:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{du}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4)$$

où les symboles représentent des quantités dimensionnelles.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, l'équation est simplifiée considérablement et la pression ne dépend que de  $x$ . Nous aurons alors:

$$P + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{Const.}$$

nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations de NAVIER-STOKES simplifiées, connues sous le nom de "équations de Prandtl pour la couche limite".

Nous revenons aux quantités dimensionnelles et on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$y=0 \quad ; \quad u=v=0 \quad , \quad y=\infty \quad ; \quad u=U(x,t) \quad (7)$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, le système ci dessus devient:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

## ANNEXE (2)

### METHODE DE NEWTON RAPHSON

\*Principes:

Notons  $X^* = [X_1^*; X_2^*; \dots; X_n^*]$  le vecteur linéaire:

$$f_i(x) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (1)$$

solution du système non linéaire

Si chaque fonction  $f_i$  est continue et continûment différentiable, alors, par développement en série de Taylor dans le voisinage d'un estimé  $x^{(k)}$  proche de  $x^*$  (obtenu à la k-ième itération), on obtient:

$$f_i(x^*) = f_i(x^{(k)} - (x^* - x^{(k)})) = f_i(x^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=x^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n (x_j^* - x_j^{(k)}) (x_r^* - x_r^{(k)}) \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_r} \Big|_{x=x^{(k)}} + \dots + 0 \quad (2)$$

pour  $i=1, \dots, n$

Si  $x^{(k)}$  est un estimé proche de  $x^*$ , les éléments  $(x_i^* - x_i^{(k)})^2$  sont négligeables, ainsi que les termes de degré supérieur, le système (2) s'écrira donc:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=x^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) = -f_i(x^{(k)}) \quad (3)$$

Definissons la matrice  $E^{(k)}$  des dérivées premières telle que:

$$E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=x^{(k)}} \quad \begin{array}{l} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n \end{array}$$

Le vecteur d'erreur  $\Delta x^{(k)}$  est défini par:

$$\Delta x_j^{(k)} = x_j^* - x_j^{(k)}$$

puis le vecteur  $F^{(k)}$  par:

$$F_i^{(k)} = -f_i(x^{(k)}) \quad (6)$$

Alors la relation matricielle (3) s'écrit:

$$E^{(k)} \cdot \Delta x^{(k)} = F^{(k)}$$

L'équation (7) est un système linéaire qui peut être facilement résolu.

$\Delta x^{(k)}$  est un estimé de l'erreur commise en approximant  $x^*$  par  $x^{(k)}$ . On peut donc obtenir un meilleur estimé  $x^{(k+1)}$  de  $x^{(k)}$  par:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$$

On continue jusqu'à ce que:

$$|x^* - x^{(k)}| \longrightarrow 0$$

\* Arrêt des itérations

En pratique,  $x^*$  étant l'inconnue, on arrête les opérations par le test suivant:

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|$$

où  $\epsilon_1$  est l'erreur fixée à priori.

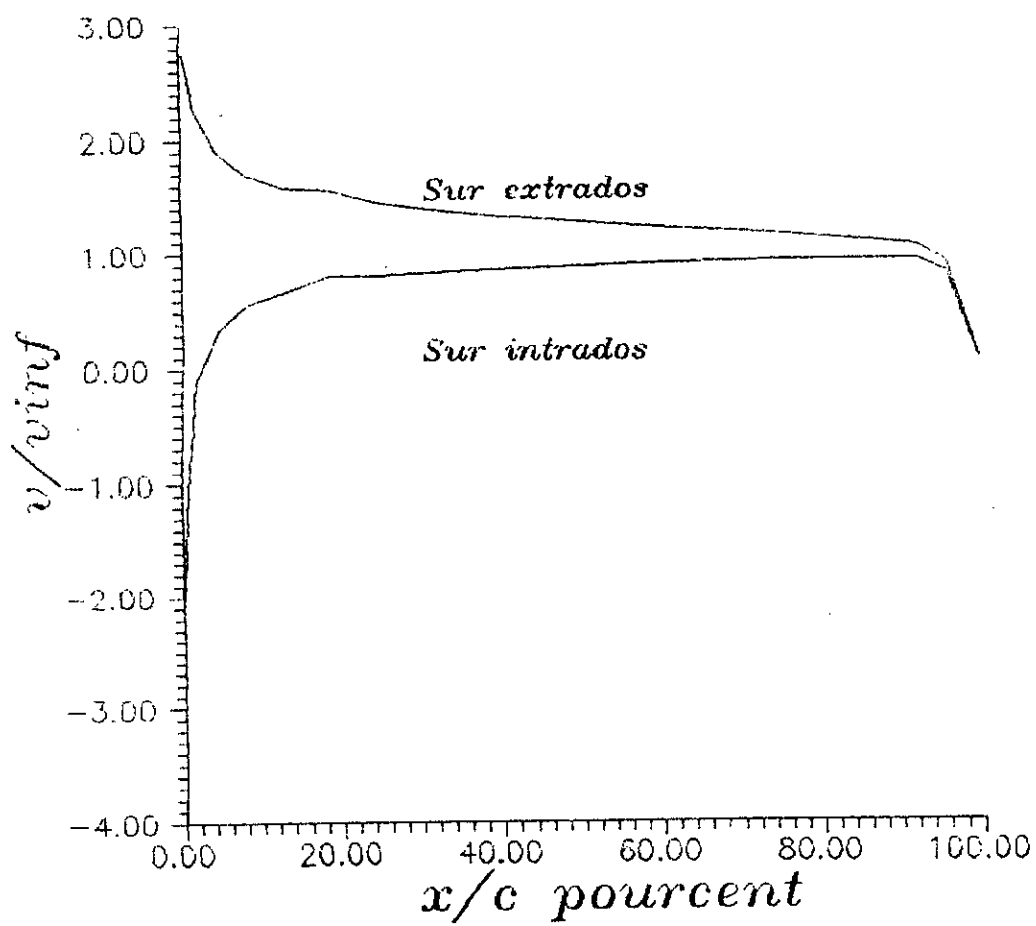
ANNEXE 3

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES ET CINEMATQUES

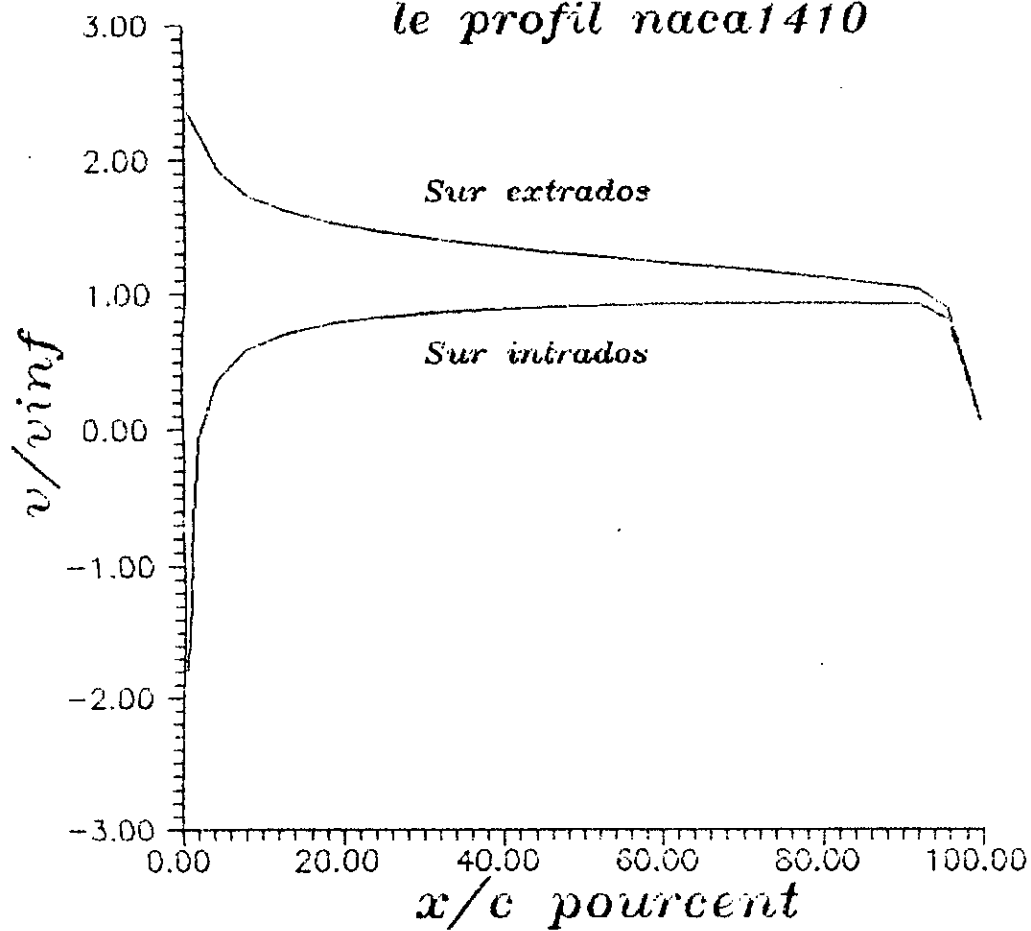
DES PROFILS NACA



*Distribution de vitesse pour  
le profil NACA1408.*



*Distribution de vitesse pour  
le profil naca1410*



Distribution de vitesse pour  
le profil NACA2421

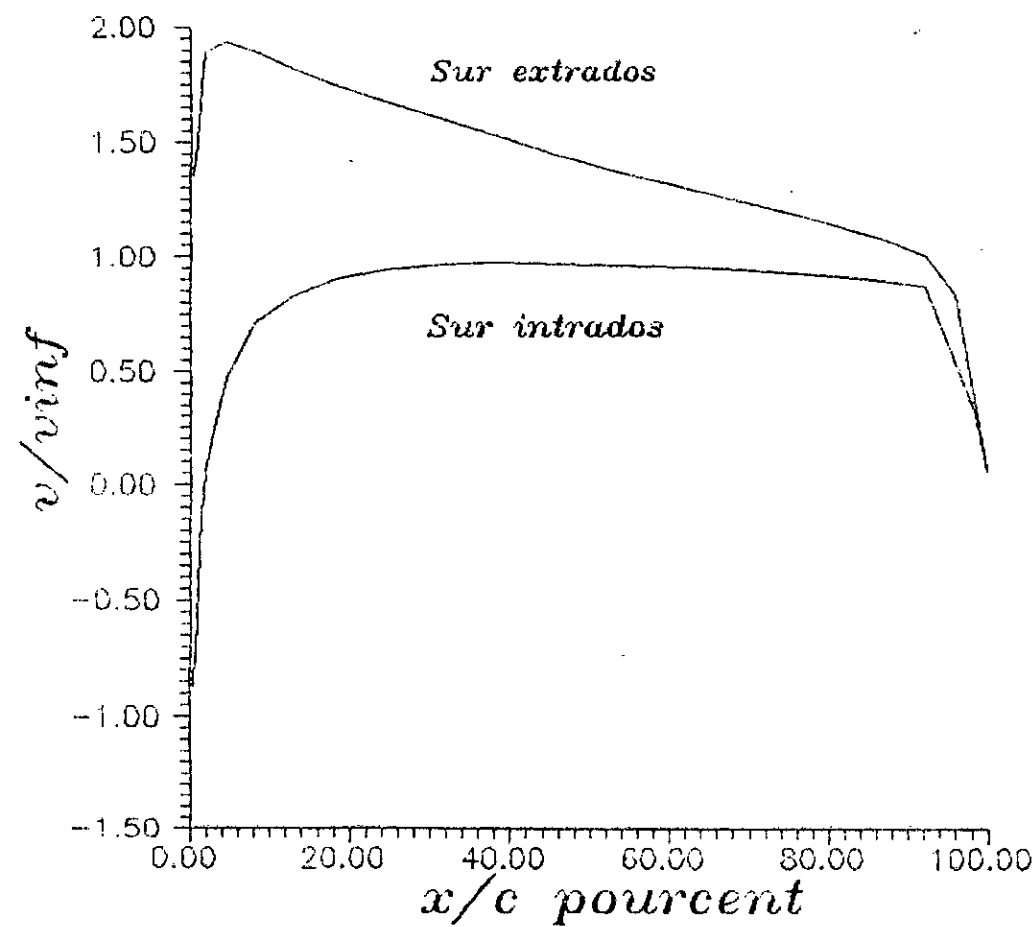


Tableau 7 : Caracteristiques geometriques  
du profil naca 1408

$x_c / c$ (%)	$y_c / c$ (%)	$x_i / c$ (%)	$y_i / c$ (%)
0	0	0	0
1,189	1,324	1,311	-1,200
2,418	1,862	2,582	-1,620
4,896	2,602	5,104	-2,134
7,396	3,138	7,614	-2,458
9,883	3,558	10,117	-2,682
14,889	4,177	15,111	-2,952
19,904	4,574	20,096	-3,074
24,926	4,819	25,074	-3,101
29,950	4,939	30,05	-3,063
40,000	4,869	40,00	-2,869
50,020	4,502	49,980	-2,556
60,034	3,931	59,966	-2,153
70,041	3,193	69,959	-1,693
80,039	2,305	79,961	-1,193
90,027	1,271	89,973	-0,659
95,016	0,698	94,984	-0,378
100,000	0,084	100,00	0,084

Tableau 8 : Caractéristiques géométriques  
du profil NACA 14-10

$x/c$ (%)	$y/c$ (%)	$x_i/c$ (%)	$y_i/c$ (%)
0	0	0	0
1,174	1,639	1,326	-1,515
2,398	2,297	2,602	-2,055
4,870	3,194	5,130	-2,726
7,358	3,837	7,642	-3,157
9,854	4,338	10,146	-3,462
14,861	5,062	15,139	-3,844
19,880	5,531	20,120	-4,031
24,907	5,809	25,093	-4,091
29,937	5,940	30,063	-4,064
40,000	5,836	40,000	-3,836
50,025	5,385	49,975	-3,439
60,042	4,692	59,958	-2,914
70,051	3,804	69,949	-2,304
80,049	2,741	79,951	-1,629
90,034	1,513	89,966	-0,901
95,021	0,832	94,979	-0,512
100,00	0,105	100,00	0,105

Tableau 9 : Caractéristiques géométriques  
du profil NACA 2421

$x/c$ en %	$y/c$ %	$y_i/c$ %
0	0	0
1,25	3,87	-2,82
2,5	5,21	-4,02
5,0	7,00	-5,51
7,5	8,29	-6,48
10	9,28	-7,18
15	10,70	-8,05
20	11,59	-8,52
25	12,15	-8,67
30	12,38	-8,62
40	12,16	-8,16
50	11,22	-7,31
60	9,79	-6,17
70	7,94	-4,87
80	5,74	-3,44
90	3,18	-1,88
95	1,76	-1,06
100	0,22	0,22

Tableau 10. : Resultat obtenu pour le  
profil NACA 1408

$X(I)$ en (mm)	Solution exacte $S(x)$ en (m)	Solution calculée $S(x)$ en (m)
-29,79	$1,85 \cdot 10^{-5}$	$4,27 \cdot 10^{-5}$
-28,92	$6,43 \cdot 10^{-5}$	$6,25 \cdot 10^{-5}$
-27,36	$1,35 \cdot 10^{-4}$	$1,32 \cdot 10^{-4}$
-25,17	$2,19 \cdot 10^{-4}$	$2,23 \cdot 10^{-4}$
-22,38	$3,11 \cdot 10^{-4}$	$3,23 \cdot 10^{-4}$
-19,08	$4,14 \cdot 10^{-4}$	$3,99 \cdot 10^{-4}$
-15,32	$5,07 \cdot 10^{-4}$	$5,03 \cdot 10^{-4}$
-11,21	$5,66 \cdot 10^{-4}$	$5,51 \cdot 10^{-4}$
-6,83	$5,94 \cdot 10^{-4}$	$5,91 \cdot 10^{-4}$
-2,29	$5,94 \cdot 10^{-4}$	$5,87 \cdot 10^{-4}$
2,29	$5,72 \cdot 10^{-4}$	$5,33 \cdot 10^{-4}$
6,83	$5,28 \cdot 10^{-4}$	$5,31 \cdot 10^{-4}$
11,21	$4,69 \cdot 10^{-4}$	$5,25 \cdot 10^{-4}$
15,32	$4,03 \cdot 10^{-4}$	$4,58 \cdot 10^{-4}$
19,08	$3,20 \cdot 10^{-4}$	$3,43 \cdot 10^{-4}$
22,38	$2,43 \cdot 10^{-4}$	$2,02 \cdot 10^{-4}$
25,17	$1,61 \cdot 10^{-4}$	$1,44 \cdot 10^{-4}$
27,36	$8,91 \cdot 10^{-5}$	$8,30 \cdot 10^{-5}$
28,92	$4,17 \cdot 10^{-5}$	$2,84 \cdot 10^{-5}$
29,79	$8,15 \cdot 10^{-6}$	$7,34 \cdot 10^{-6}$

Tableau 11 : Resultats obtenus pour le profil neca 1410

$x(I)$ en (mm)	Resultat exacte $S(x)$ en m	Resultat du calcul $S(x)$ en m
-29,79	$2,42 \cdot 10^{-5}$	$1,82 \cdot 10^{-5}$
-28,92	$4,31 \cdot 10^{-5}$	$6,28 \cdot 10^{-5}$
-27,36	$1,46 \cdot 10^{-4}$	$1,35 \cdot 10^{-4}$
-25,14	$2,23 \cdot 10^{-4}$	$2,14 \cdot 10^{-4}$
-22,38	$3,14 \cdot 10^{-4}$	$3,16 \cdot 10^{-4}$
-19,08	$4,16 \cdot 10^{-4}$	$4,12 \cdot 10^{-4}$
-15,32	$5,07 \cdot 10^{-4}$	$5,13 \cdot 10^{-4}$
-11,21	$5,66 \cdot 10^{-4}$	$5,66 \cdot 10^{-4}$
-6,83	$5,94 \cdot 10^{-4}$	$5,96 \cdot 10^{-4}$
-2,29	$5,94 \cdot 10^{-4}$	$5,91 \cdot 10^{-4}$
2,29	$5,73 \cdot 10^{-4}$	$5,72 \cdot 10^{-4}$
6,83	$5,28 \cdot 10^{-4}$	$5,26 \cdot 10^{-4}$
11,21	$4,70 \cdot 10^{-4}$	$4,69 \cdot 10^{-4}$
15,32	$4,04 \cdot 10^{-4}$	$3,98 \cdot 10^{-4}$
19,08	$3,20 \cdot 10^{-4}$	$3,18 \cdot 10^{-4}$
22,38	$2,44 \cdot 10^{-4}$	$2,41 \cdot 10^{-4}$
25,17	$1,61 \cdot 10^{-4}$	$1,61 \cdot 10^{-4}$
27,36	$8,96 \cdot 10^{-5}$	$8,45 \cdot 10^{-5}$
28,92	$4,20 \cdot 10^{-5}$	$4,22 \cdot 10^{-5}$
29,79	$8,22 \cdot 10^{-5}$	$1,41 \cdot 10^{-6}$



Tableau 12 : Resultat obtenu pour le profil naca 8421

$x (l)$ en (mm)	Solution exacte $S(x)$ en (m)	Resultat obtenu $S(x)$ en (m)
-29,79	$8,52 \cdot 10^{-5}$	$9,38 \cdot 10^{-5}$
-28,92	$3,27 \cdot 10^{-4}$	$3,28 \cdot 10^{-4}$
-27,36	$4,15 \cdot 10^{-4}$	$4,18 \cdot 10^{-4}$
-25,14	$5,55 \cdot 10^{-4}$	$5,55 \cdot 10^{-4}$
-22,38	$6,98 \cdot 10^{-4}$	$6,96 \cdot 10^{-4}$
-19,08	$8,61 \cdot 10^{-4}$	$8,57 \cdot 10^{-4}$
-15,32	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$
-11,21	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$1,12 \cdot 10^{-3}$
-6,83	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$1,18 \cdot 10^{-3}$
-2,29	$1,15 \cdot 10^{-3}$	$1,18 \cdot 10^{-3}$
2,29	$1,07 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-3}$
6,83	$9,54 \cdot 10^{-4}$	$9,62 \cdot 10^{-4}$
11,21	$8,24 \cdot 10^{-4}$	$8,25 \cdot 10^{-4}$
15,32	$6,61 \cdot 10^{-4}$	$6,65 \cdot 10^{-4}$
19,08	$5,06 \cdot 10^{-4}$	$5,05 \cdot 10^{-4}$
22,38	$3,42 \cdot 10^{-4}$	$3,38 \cdot 10^{-4}$
25,17	$1,93 \cdot 10^{-4}$	$1,75 \cdot 10^{-4}$
27,36	$9,07 \cdot 10^{-4}$	$8,83 \cdot 10^{-5}$
28,92	$1,77 \cdot 10^{-4}$	$2,26 \cdot 10^{-5}$

## REFERENCES

- [1] H.MITON :Properties of a space wise periodic flow.  
Application to flow computation design for blade cascades  
Institut mécanique des fluides de marseille (1986)
- [2] M.A GUELLATI :CALCUL DE PROFILS D'AUBAGES PAR LA METHODE INVERSE.  
P.F.E JUIN 1982
- [3] TECHNIQUES DE L'INGENIEUR:Mecanique des fluides
- [4] IRAH ABBOTT.A.E VON DOENHOFF :Theory of wing sections including a summary of aeorofoil data.  
Dover publication. NEW YORK
- [5] M.BOUMAH RAT :Methodes numeriques appliquées  
Edition O.P.U ALGER
- [6] SCHLICHTING  
Boundary layer theory
- [7] BRUN :Introduction à l'étude de la couche limite
- [8] INGE RYHMING :Dynamique des fluides
- [9] H.MITON .H.SANKALE: methode inverse de calcuk de profils d'aubages.  
Ecole centrale de lyon NOVEMBRE 1984
- [10] NOUGIER :Methodes de calcul numeriques.
- [11] R.ZGOULI :Contribution à l'etude de couplage ecoulement sain couche limite dans un calcul de grilles d'aubes.  
These de doctorat E.N.S.A. de LILLE 1984