

9/95

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : **GENIE MECANIQUE**

PROJET DE FIN D'ETUDE

SUJET:

**Application De La Méthodes
Des Contraintes Fictives
Aux Milieux Anisotropes**

Proposé par:
Y.BELKACEMI

Etudié par:
R.DILMI
H.BOUKRIA

Dirigé par:
Y.BELKACEMI

PROMOTION : 1995

E.N.P. 10 Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDE

SUJET:

**Application De La Méthodes
Des Contraintes Fictives
Aux Milieux Anisotropes**

Proposé par:
Y.BELKACEMI

Etudié par:
R.DILMI
H.BOUKRIA

Dirigé par:
Y.BELKACEMI

PROMOTION : 1995

E.N.P. 10 Avenue Hassen Badi - EL-HARRACH - ALGER

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 - GENERALITES	5
1.1 Contrainte	6
1.1.1 Equation d'équilibre	6
1.1.2 Contrainte plane	6
1.1.3 Vecteur contrainte	7
1.2 Déformation	8
1.2.1 Déformation plane	8
1.3 Loi de Hooke généralisée	8
1.4 Transformation de coordonnées	9
CHAPITRE 2 - METHODE DES CONTRAINTES FICTIVES	13
2.1 Introduction	14
2.2 Problème de Flamant	14
2.3 Problème de Kelvin en déformation plane	15
2.4 Traction simple sur un segment de droite	17
2.5 Procédure numérique	21
2.6 Relations de transformation	24
2.7 Coefficients d'influence	27
2.8 Problème intérieur / extérieur	35
2.9 Conditions de symétrie	35
CHAPITRE 3 - LES MILIEUX ANISOTROPES	40
3.1 Introduction	41
3.2 Equations de la théorie d'élasticité d'un milieu anisotrope	41
3.3 Symétrie élastique	46
3.4 L'orthotropie et l'isotropie transverse	47
3.5 Relations contraintes / déformations	48
3.6 Contrainte plane et déformation plane	50
CHAPITRE 4 - APPLICATION DE LA METHODE DES CONTRAINTES FICTIVES AUX MILIEUX ANISOTROPES	53
4.1 Introduction	54
4.2 Problème de Kelvin en déformation plane	54
4.3 Méthode des contraintes fictives	56
4.4 Organigramme du programme réalisé	59
CHAPITRE 5 - RESULTATS ET INTERPRETATIONS	61
Exemple 1: Plaque percée soumise à une traction à l'infini	62

Exemple 2: Influence des paramètres physiques	65
Exemple 3: Influence de l'orientation de l'axe des fibres	67
Exemple 4: Etude d'un chargement quelconque	68
Exemple 5: Plaque percée soumise un chargement tangentiel l'infini	70
Exemple 6: Plaque infinie percée et chargée radialement sur le contour	72
Exemple 7: Plaque infinie percée et chargée tangentiellment sur le contour	75
Exemple 8: L'influence du rapport r_i/r_e d'un anneau circulaire encastré et chargé tangentiellment sur le rayon intérieur	77
Exemple 9: Influence du rapport r/b d'une plaque finie percée	79
Exemple 10: Essai Brésilien	81
Exemple 11: Problème de fissure	83
Exemple 12: Etude d'une poutre sur appuis simples	85
CONCLUSION	89
Bibliographie	91

ملخص

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

عدة طرق عددية لتحديد حقل القوى و الانتقالات حلت و بسطت لحل المسائل المتعلقة بالأوساط الموحدة الخواص (مادة متساوية الخصائص في جميع الجهات).
تتمثل هذه الدراسة في تحليل إحدى طرق المعادلات التفاضلية على الحدود أو النهايات الغير مباشرة و التي هي طريقة القوى الإعتبارية في حل المسائل المتعلقة بالأوساط المتباينة الخواص (إختلاف الخصائص بإختلاف الجهات).

RESUME

Plusieurs méthodes numériques ont été développées pour l'étude de champ de contrainte et de déformation dans les solides isotropes. La présente étude est consacrée à l'application de la méthode des contraintes fictives pour la modélisation de matériaux anisotropes et homogènes. Un code de calcul a été développé en deux dimensions pour les problèmes en état de contrainte et de déformation planes. Des tests de validation ont été faits pour le cas de plaques de sapin, de contre plaqué et de graphite/époxyde. Les résultats obtenus sont très satisfaisants. L'influence de certains paramètres tels que l'axe des fibres (grain), le rapport des modules de Young sur la valeur de la contrainte tangentielle maximale sont discutés.

ABSTRACT

Many numerical methods for determination of the stresses and displacements field was developed to resolve problems of isotropic materials.

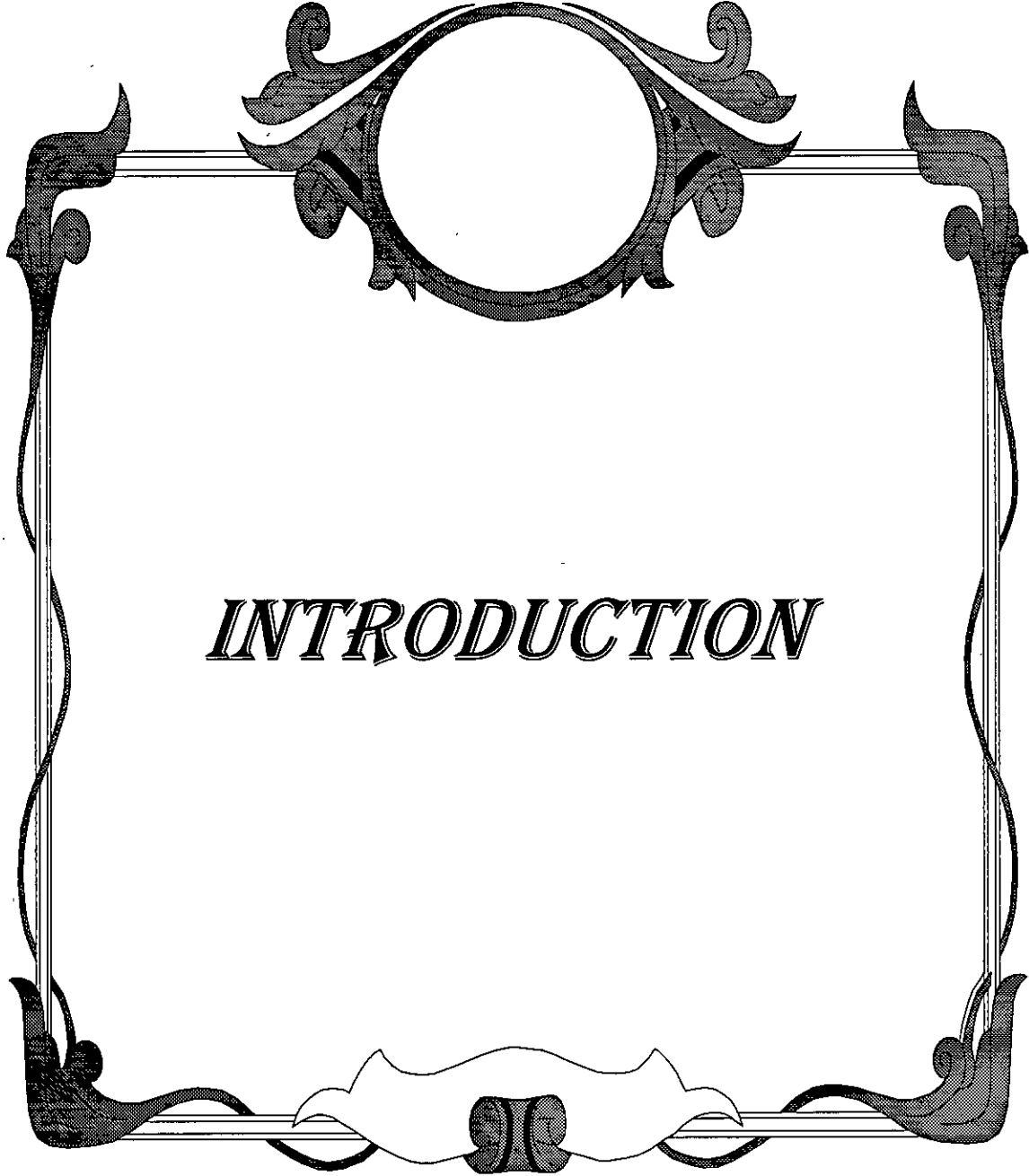
This work consists to develop one of the boundary integral methods (The Fictious Stress Method) in order to resolve problems of anisotropic materials.

REMERCIEMENTS

Nous remercions Monsieur le professeur Y.BELKACEMI d'avoir eu l'amabilité de nous consacrer son attention et de nous avoir soutenu et encourager tout au long de la période du projet.

Nos remerciements s'adressent également à toutes les personnes de l'École Nationale Polytechnique qui par leurs collaborations nous ont permis de mener à bien ce travail.

Enfin, nous sommes reconnaissants à tout le personnel de l'école: Service bibliographique, service informatique et à tous ce qui ont participé de près ou de loin à la réussite de ce travail.



INTRODUCTION

Le développement de l'économie d'un pays nécessite le regroupement et l'application d'idées diverses de techniciens travaillant dans tous les secteurs de l'industrie. L'ingénieur bien formé est considéré comme une source d'idées qui tend toujours à rendre efficaces et performantes les richesses naturelles qui l'entourent en exploitant au mieux celles-ci avec les techniques les plus avancées qui existent.

En effet, c'est cet esprit créatif qui a fait de l'industrie la colonne vertébrale de l'économie de tout pays développé dans ce siècle. Avec des applications très délicates, l'industrie moderne se montre plus exigeante, surtout dans les domaines où le droit à l'erreur est impardonnable, comme l'aéronautique, l'espace, la navigation et tous les domaines où l'erreur met en danger la vie de l'homme.

Pour toutes ces considérations les techniciens ont introduit les matériaux anisotropes dans les applications qui traitent des problèmes de l'aéronautique, les mines, la géophysique, etc. Il est possible de produire une anisotropie artificielle, par exemple, les milieux multicouches qui représente une anisotropie particulière produite à partir de milieux isotropes, ou des tôles ondulées et membranes produites à partir des matériaux de bases qui sont isotrope.

Cela dit, nous allons consacrer notre étude à la modélisation de ce type de matériaux, et aux problèmes pratiques qu'ils rencontrent.

A cette fin, on a choisi la méthode des contraintes fictives comme outils numérique pour la résolution de ces problèmes en essayant d'approximer au mieux leurs solutions analytiques pour ceux qui ont une solution analytique et de donner des solutions pour des problèmes plus complexes.

En effet, plusieurs problèmes pratiques rencontrés par l'ingénieur, tel que, mécanique des fluides, l'élastostatique, l'élasticité et autre, peuvent être représentés par des équations aux dérivées partielles régissant l'intérieur d'un domaine Ω délimité par un contour $\partial\Omega$ sur lequel des conditions aux limites sont prescrites. De tels problèmes sont appelés problèmes aux limites.

Pour approcher la solution analytique de ces problèmes, souvent difficile à obtenir directement, plusieurs méthodes numériques ont été développées. On peut noter la popularité de la M.E.F et de la méthode des différences finis dans la modélisation au cours de ces dernières années, une technique nouvelle est venue enrichir le domaine des méthodes numériques. Elle s'appelle méthode des équations intégrales aux frontières. Cette méthode s'illustre par sa simplicité et sa variété d'application. Elle se base sur la solution analytique d'un problème singulier simple, qui une fois obtenue (la solution), sera utilisée pour construire la solution numérique pour des problèmes plus complexes.

Le principe de cette méthode est la transformation des équations de volume en relations intégrales reliant les paramètres connus à ceux inconnus, et donc réduction d'un problème tridimensionnel en un autre bidimensionnel (ou d'un problème bidimensionnel en un autre unidimensionnel), et ainsi l'obtention de systèmes d'équations algébrique d'ordre inférieur (de plus en plus petit) facile à résoudre. Ce principe peut être structuré dans l'organigramme présenté sur la figure (1).

Le but de notre étude est de présenter un code de calcul qui nous permet de trouver les contraintes et les déplacements dans un milieu quelconque en utilisant une méthode numérique qui la méthode des contraintes fictives. C'est l'une des méthodes intégrales au frontière qui ressemble à la méthode déjà étudié (discontinuité des déplacements) mais elle ne traite pas les problème liés à la mécanique de rupture. Les matériaux utilisés dans notre étude sont les matériaux anisotropes qui sont étulisé dans de multiple application industrielle parcequ'il nous donne différentes caractéristiques dans des directions différentes.

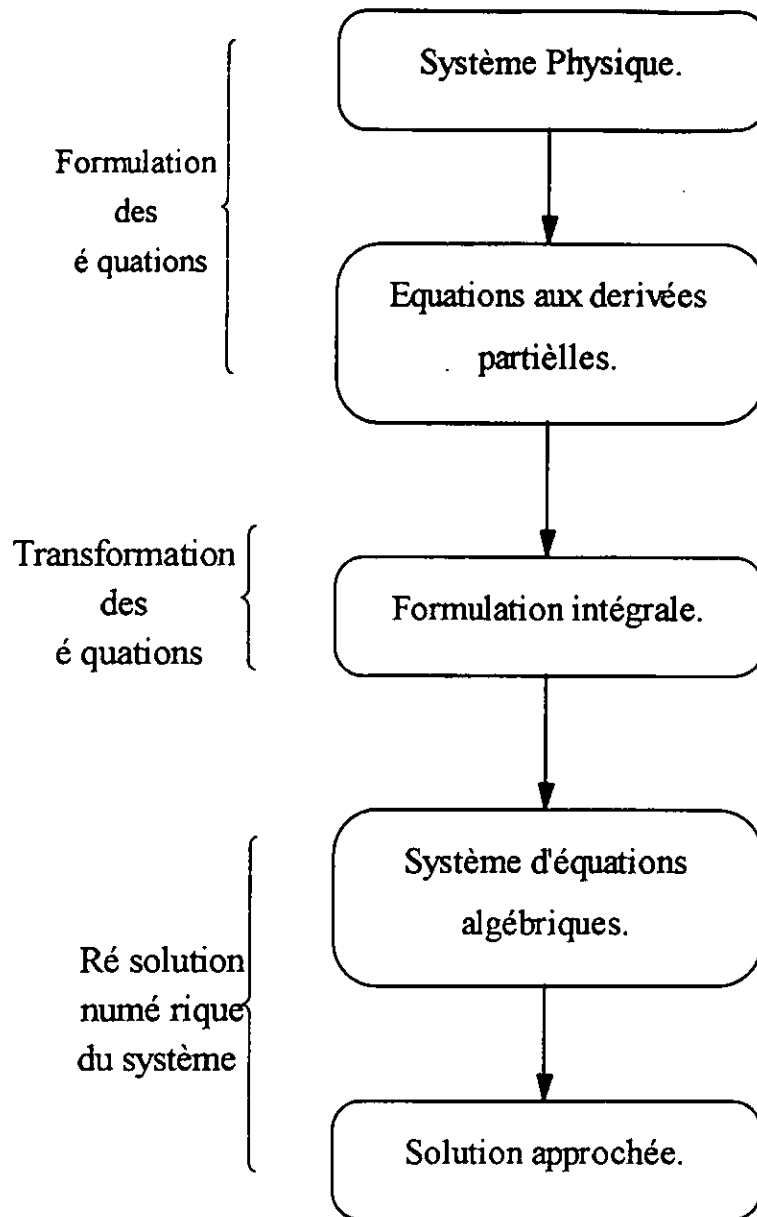


Figure 1 organigramme simplifier des methodes integrales au frontiere.

Ce document contient cinq chapitres. Dans le premier chapitre nous introduisons les equations de base de la mecanique des milieux continue. Ensuite, nous presenterons dans le deuxieme chapitre la methode des contraintes fictives pour le cas d'un milieu isotrope. Le troisieme chapitre decrit le comportement elastique des milieux anisotropes. Le chapitre suivant traite la methode des contraintes fictives pour le cas de milieux anisotropes. Enfin, dans le dernier chapitre consacree aux applications nous illustrons par le code de calcul les principes presentes dans les chapitres precedents.



CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

1.1 Contrainte

Le concept de contrainte est utilisé pour spécifier la façon par laquelle les forces sont transmises à travers un solide continu. Les contraintes agissantes sur les plans dont les normales sont parallèles aux axes du repère sont appelées les composantes du tenseur de contrainte σ_{ij} . Le premier indice (i) se rapporte à la direction de la normale au plan sur lequel la contrainte agit, le second (j) se rapporte à la direction de la contrainte. Les contraintes de traction sont comptées positives.

1.1.1 Équation d'équilibre

Un solide est en équilibre s'il satisfait les conditions:

- le tenseur de contrainte est symétrique $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.
- les composantes du tenseur de contrainte satisfait l'équation d'équilibre suivante:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad (1.1.1)$$

où $\sigma_{ji,j} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial j}$ et F_i sont les forces de volumes.

1.1.2 contrainte plane

Les composantes du tenseur de contrainte pour le cas de l'état de contrainte plane (pour un plan x,y) sont illustrées sur la figure (1.1). Pour ce cas nous avons $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$.

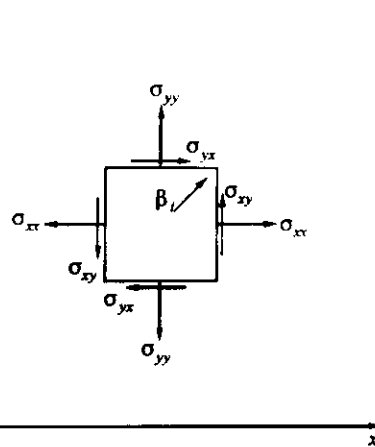


Figure 1.1 Contrainte plane.

1.1.3 Vecteur contrainte

Les contraintes peuvent être représentées par un vecteur appelé vecteur contrainte donné par $t_i = (t_x, t_y, t_z)$. Voir figure (1.2).

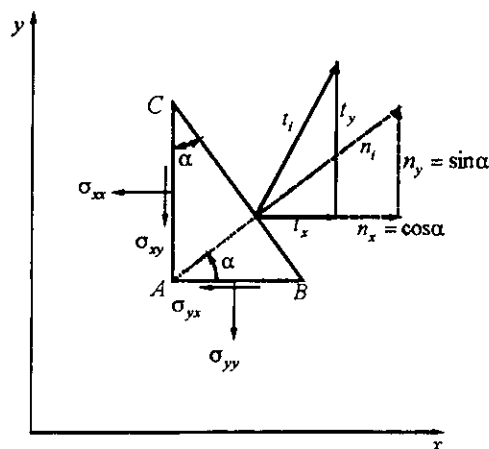


Figure 1.2 Vecteur contrainte t_i ; Contrainte plane

Les composantes du vecteur contrainte sont reliées aux composantes de la contrainte et la normale à la facette considérée par:

$$t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \tag{1.1.2}$$

1.2 Déformation

Le concept de déformation est utilisé pour spécifier la façon par laquelle un solide continu se déforme quand il est soumis à des contraintes. Dans plusieurs problèmes pratiques, les déformations sont des quantités infinitésimales. L'état de déformation en un point du solide est donné par les composantes du tenseur de déformation. Elles sont définies en termes des déplacements $u_i=(u_x, u_y, u_z)$ en un point (x, y, z) par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{yx} &= \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zy} &= \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$\text{Soit: } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

1.2.1 Déformation plane

Un solide est en état de déformation plane parallèle au plan x, y si les composantes du tenseur de déformation sont telles que $\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$. Des relations (1.2.1), on peut vérifier facilement qu'il existe une relation entre les composantes du tenseur de déformation qui est:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{2\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.2.2)$$

Cette équation est appelée équation de compatibilité (Sokolnikoff 1956, p. 28).

1.3 Lois de Hooke généralisée

Le comportement d'un solide est élastique s'il y a une correspondance biunivoque entre les contraintes et les déformations. Un solide est linéairement élastique si chacune des composantes des contraintes peuvent être exprimées par une

combinaison linéaire de toutes les composantes de déformations. La loi de comportement dans ce cas est appelée loi de Hooke généralisée est telle que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \text{trace} \overline{\overline{\sigma}} \delta_{ij} \quad (1.3.1)$$

où E est le module de Young, ν le coefficient de poisson et $G = \frac{1}{2} \frac{E}{(1+\nu)}$.

Une relation inverse peut être trouvée pour σ_{ij} en fonction de ε_{ij} .

La notation indicielle d'un problème d'élasticité peut être exprimé par:

$$\begin{aligned} \sigma_{j,i,j} + F_i &= 0 \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

$$\text{où } \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{pour } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

1.4 Transformation de coordonnées

En pratique, on travaille souvent avec deux systèmes de coordonnées cartésiens ou plus. Pour cela il est nécessaire d'introduire les relations qui permettent de passer d'un système à un autre. Prenons par exemple les systèmes x_i et \bar{x}_i illustrés sur la figure 1.3.

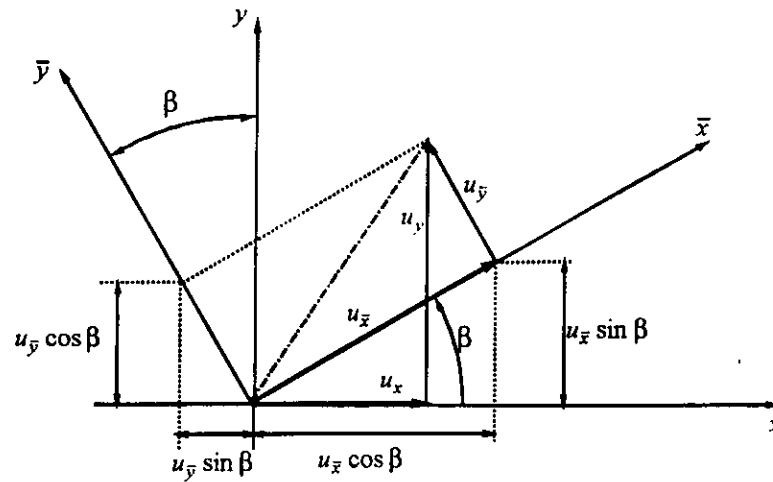


Figure 1.3 Transformation des déplacements.

En utilisant les relations géométriques indiquées sur la figure on aura les systèmes suivants pour les déplacements:

$$\begin{cases} u_x = u_{\bar{x}} \cos \beta - u_{\bar{y}} \sin \beta \\ u_y = u_{\bar{x}} \sin \beta + u_{\bar{y}} \cos \beta \end{cases} \quad (1.4.1)$$

et

$$\begin{cases} u_{\bar{x}} = u_x \cos \beta + u_y \sin \beta \\ u_{\bar{y}} = -u_x \sin \beta + u_y \cos \beta \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Les équations de transformations pour les contraintes peuvent être trouvées en cherchant les contraintes tangentielles et normales sur un plan dont la normale sortante fait un angle α avec l'axe \bar{x} (voir figure 1.4):

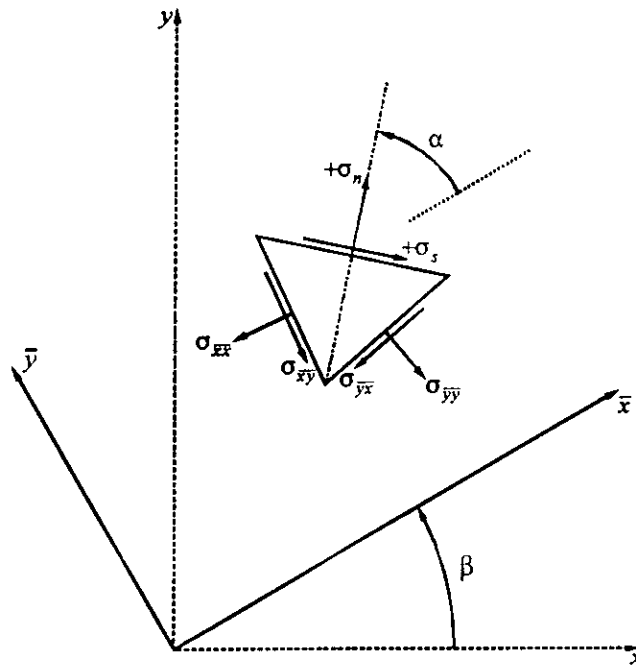


Figure 1.4 Transformation des contraintes.

Les contraintes tangentielle et normale dans le plan seront:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin\alpha \cos\alpha - \sigma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ \sigma_n &= \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin\alpha \cos\alpha - \sigma_{yy} \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Pour les deux cas particuliers où la normale sortante est parallèle aux axes x ou y on aura le schéma suivant:

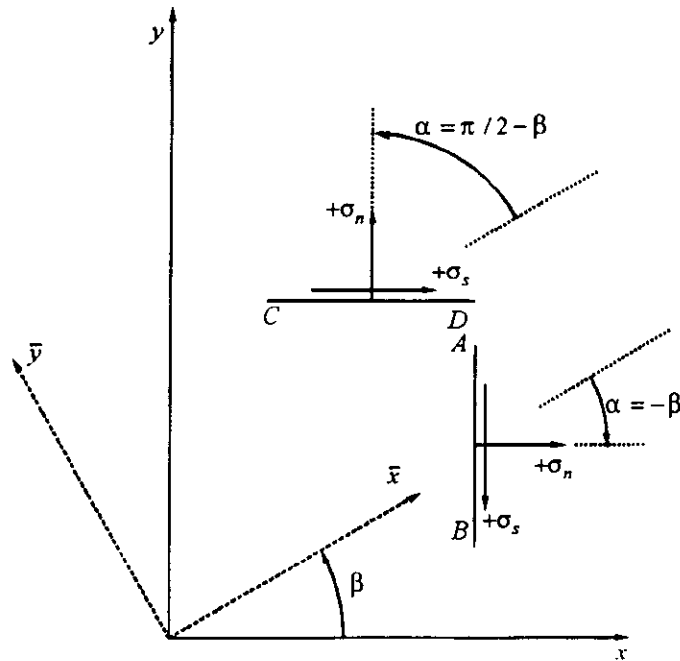


Figure 1.5 Cas particuliers.

On aura les relations suivantes:

$$\begin{aligned} (\sigma_n)_{\alpha=-\beta} &= +\sigma_{xx} \\ (\sigma_s)_{\alpha=-\beta} &= -\sigma_{xy} \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

En combinant les équations (1.4.3) et (1.4.4), nous trouvons:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \cos^2 \beta - 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \sin^2 \beta \\ \sigma_{xy} &= (\sigma_{\bar{x}\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{\bar{x}\bar{y}} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Pour le deuxième cas on aura les relations suivantes:

$$\begin{aligned} (\sigma_n)_{\alpha=\pi/2-\beta} &= +\sigma_{yy} \\ (\sigma_s)_{\alpha=\pi/2-\beta} &= +\sigma_{yx} \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Des équations (1.4.3) et (1.4.6), on trouve:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \sin^2 \beta + 2\sigma_{\bar{x}\bar{y}} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} \cos^2 \beta \\ \sigma_{yx} &= (\sigma_{\bar{x}\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}\bar{y}}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{\bar{x}\bar{y}} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Les relations de changement de repère pour les contraintes seront alors:

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= \sigma_{xx} \cos^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \sin^2 \beta \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= \sigma_{xx} \sin^2 \beta - 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \cos^2 \beta \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} &= \sigma_{\bar{y}\bar{x}} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)\end{aligned}\tag{1.4.8}$$



CHAPITRE 2

*MÉTHODE DES
CONTRAINTES
FICTIVES*

CHAPITRE 2

MÉTHODE DES CONTRAINTES FICTIVES

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons considérer différentes solutions singulières, et nous présenterons une méthode des éléments aux frontières pour l'analyse des problèmes plans en élasticité linéaire. La solution singulière en question provient de la résolution du problème d'une ligne de force concentrée appliquée dans un solide élastique infini. Dans ce chapitre nous présenterons la méthode dans le cas de milieux isotropes.

2.2 Problème de Flamant

C'est le problème d'une ligne de force concentrée appliquée le long de l'axe z perpendiculairement à la surface d'un demi- plan élastique isotropique et dont la solution est un exemple de solution singulière en élasticité.

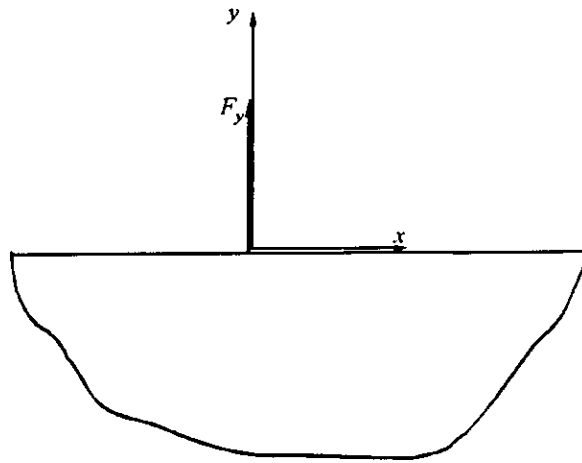


Figure 2.1 Problème de Flamant.

On voit que les contraintes sont nulles sur la surface du plan (x,y), exceptée au point zéro où elles sont indéterminées. Les contraintes sont singulières en ce point.

2.3 Problème de Kelvin en déformation plane

Le problème de Kelvin ((Sokolnikoff 1956, pp.336-9) Crouch 1983) pour des conditions de déformation plane est illustré sur la figure (2.2) où la force $F_i=(F_x, F_y)$ représente une ligne de force concentrée appliquée le long de l'axe (oz) dans un solide élastique infini.

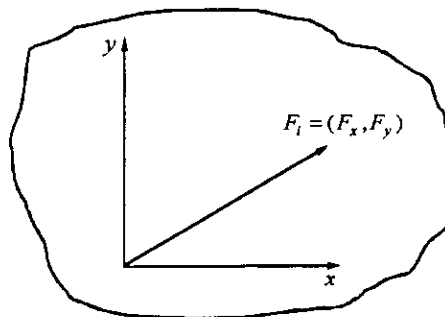


Figure 2.2 Problème de Kelvin, déformation plane.

La solution de ce problème est donnée par une combinaison de la fonction $g(x,y)$ définie par:

$$g(x,y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \ln(x^2 + y^2)^{1/2} \tag{2.3.1}$$

Les déplacements, par exemple, peuvent être écrits comme suit:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{F_x}{2G} [(3-4\nu)g - xg_{,x}] + \frac{F_y}{2G} [-yg_{,x}] \\ u_y &= \frac{F_x}{2G} [-xg_{,y}] + \frac{F_y}{2G} [(3-4\nu)g - yg_{,y}] \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

où $g_{,x}$ et $g_{,y}$ représentent $\partial g/\partial x$ et $\partial g/\partial y$. De la même façon, les contraintes en déformation plane pour le problème de Kelvin sont:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= F_x [2(1-\nu)g_{,x} - xg_{,xx}] + F_y [2\nu g_{,y} - yg_{,xx}] \\ \sigma_{yy} &= F_x [2\nu g_{,x} - xg_{,yy}] + F_y [2(1-\nu)g_{,y} - yg_{,yy}] \\ \sigma_{xy} &= F_x [(1-2\nu)g_{,y} - xg_{,xy}] + F_y [(1-2\nu)g_{,x} - yg_{,xy}] \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Les dérivées des fonctions $g(x,y)$ dans les expressions précédentes sont obtenues directement de l'équation (2.3.1) et sont:

$$\begin{aligned} g_{,x} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ g_{,y} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ g_{,xy} &= \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ g_{,xx} &= -g_{,yy} = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

On peut vérifier aisément que les contraintes (2.3.3) satisfont les équations d'équilibre en absence de forces de volume, c'est-à-dire, $\sigma_{j,i,j}=0$. Les contraintes sont singulières au point $x=y=0$ comme on peut le vérifier en inspectant (2.3.4).

Les équations (2.3.2) indiquent que les déplacements u_x et u_y sont illimités à de larges distances de l'origine à cause de la présence de la fonction logarithmique $g(x,y)$.

2.4 Traction simple sur un segment de droite

Ce problème peut être résolu en intégrant la solution de Kelvin.

La solution peut être écrite par une combinaison de la fonction:

$$F_i(\xi) = P_i d\xi \tag{2.4.1}$$

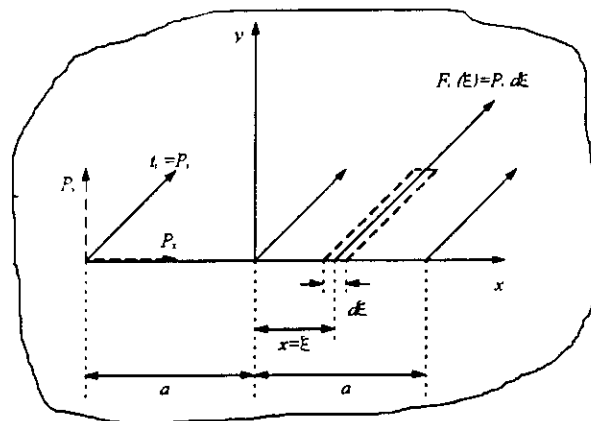


Figure 2.3 Intégration de la solution de Kelvin.

On écrit alors:

$$f(x,y) = \int_{-a}^a g(x - \xi, y) d\xi \tag{2.4.2}$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{P_x}{2G} [(3 - 4\nu)f - yf_{,y}] + \frac{P_y}{2G} [-yf_{,x}] \\ u_y &= \frac{P_x}{2G} [-yf_{,x}] + \frac{P_y}{2G} [(3 - 4\nu)f - yf_{,y}] \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= P_x \left[(3-2\nu)f_{,x} + yf_{,xy} \right] + P_y \left[2\nu f_{,y} + yf_{,yy} \right] \\ \sigma_{yy} &= P_x \left[-(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy} \right] + P_y \left[2(1-\nu)f_{,y} - yf_{,yy} \right] \\ \sigma_{xy} &= P_x \left[2(1-\nu)f_{,y} + yf_{,yy} \right] + P_y \left[(1-2\nu)f_{,x} - yf_{,xy} \right]\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

Où les fonction $f(x,y), f_{,x}(x,y), f_{,y}(x,y), f_{,xy}(x,y)$ et $f_{,xx}(x,y)$ ont les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \right. \\ &\quad \left. - (x-a) \ln \sqrt{[(x-a)^2 + y^2]} \right. \\ &\quad \left. + (x+a) \ln \sqrt{[(x+a)^2 + y^2]} \right]\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

$$\begin{aligned}f_{,x} &= \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \sqrt{[(x-a)^2 + y^2]} - \ln \sqrt{[(x+a)^2 + y^2]} \right] \\ f_{,y} &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\ f_{,xy} &= \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \\ f_{,xx} &= -f_{,yy} = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right]\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

Ces équations forment la base de la méthode intégrale étudiée dans ce sujet. Avant de détailler cette méthode, il faut mentionner d'importants aspects mathématiques de la solution analytique donnée ci-dessus.

1°/ Les déplacements u_x et u_y ont des valeurs infinies à des points éloignés de l'origine, les équations (2.4.3) donnent seulement les déplacements relatifs. Dans les problèmes particuliers, il faut définir un point de référence et calculer les déplacements par rapport à ce point.

2°/ Des équations (2.4.4) et (2.4.6), on voit que les contraintes ne sont pas définies aux points limites du segment ($x = \pm a, y = 0$), en posant $y=0$ dans (2.4.4) et (2.4.6), on trouve les relations:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\frac{(3-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 \\
 &\quad -\frac{2\nu}{4\pi(1-\nu)} P_y \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\
 \sigma_y &= +\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 \\
 &\quad -\frac{1}{2\pi} P_y \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\
 \sigma_{xy} &= -\frac{1}{2\pi} P_x \lim_{y \rightarrow 0_{\pm}} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\
 &\quad -\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2
 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

La limite est mentionnée parceque la fonction arctangente a plusieurs valeurs. On définit alors deux angles θ_1 et θ_2 (figure 2.4):

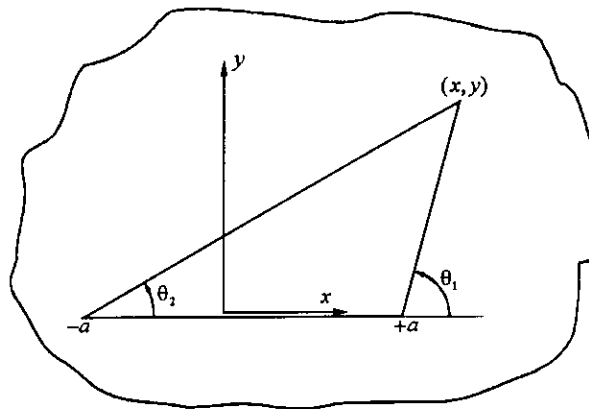


Figure 2.4 Les angles à partir des extrémités du segment.

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arctan \frac{y}{x-a} \\ \theta_2 &= \arctan \frac{y}{x+a}\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

On aura alors les limites suivantes:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, \quad y = 0_+ \text{ ou } y = 0_- \\ +\pi & |x| < a, \quad y = 0_- \\ -\pi & |x| < a, \quad y = 0_+ \end{cases}\tag{2.4.9}$$

Trois différents cas peuvent être considérés pour évaluer les contraintes le long de la ligne $y=0$.

(1) $|x| > a, y = 0_+$

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, 0) &= -\frac{(3-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^2 \\ \sigma_y(x, 0) &= +\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^2 \\ \sigma_{xy}(x, 0) &= -\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^2\end{aligned}\tag{2.4.10}$$

(2) $|x| < a, y = 0_+$

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, 0_+) &= -\frac{(3-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^2 - \frac{\nu}{2(1-\nu)} P_y \\ \sigma_y(x, 0_+) &= +\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^2 - \frac{1}{2} P_y \\ \sigma_{xy}(x, 0_+) &= -\frac{1}{2} P_x - \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^2\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

(3) $|x| < a, y = 0_-$

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, 0_-) &= -\frac{(3-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 + \frac{\nu}{2(1-\nu)} P_y \\ \sigma_y(x, 0_-) &= +\frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 + \frac{1}{2} P_y \\ \sigma_{xy}(x, 0_-) &= +\frac{1}{2} P_x - \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} P_y \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

La discontinuité de contrainte peut être spécifiée en calculant la différence $\sigma_{ij}(x, 0_-) - \sigma_{ij}(x, 0_+)$ des deux faces du segment représenté sur la figure (2.5):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, 0_-) - \sigma_{xx}(x, 0_+) &= \frac{\nu}{1-\nu} P_y \\ \sigma_{yy}(x, 0_-) - \sigma_{yy}(x, 0_+) &= P_y \\ \sigma_{xy}(x, 0_-) - \sigma_{xy}(x, 0_+) &= P_x \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

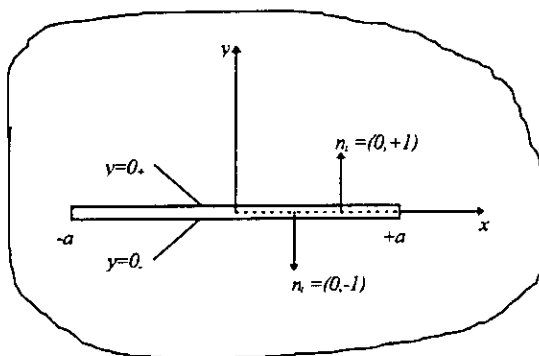


Figure 2.5 Ligne de discontinuité de contrainte dans un domaine infini.

2.5 Procédure numérique

La solution donnée antérieurement forme la base d'une méthode intégrale de frontière pour la recherche des solutions numériques pour des problèmes aux limites mixtes en élasticité. Les considérations physiques fondamentales de cette méthode sont expliquées en prenant comme exemple le problème d'une cavité dans un corps infini (on verra après que cette méthode peut être appliquée aux milieux finis (bornés)).

Le problème d'une cavité soumise à des contraintes sur le contour est représenté sur la figure (2.6a). Le contour de la cavité est désigné par C et supposé long pour qu'on puisse prendre une tranche représentative de profondeur unité

perpendiculaire au plan de la figure. Les coordonnées locales (n,s) sont respectivement perpendiculaires et tangentes au contour C.

On suppose que le contour de la cavité est partout soumis à une contrainte normale uniforme $\sigma_n = -P$ avec une contrainte de cisaillement nulle. On veut déterminer les déplacements et les contraintes dus à ce chargement en chaque point du corps.

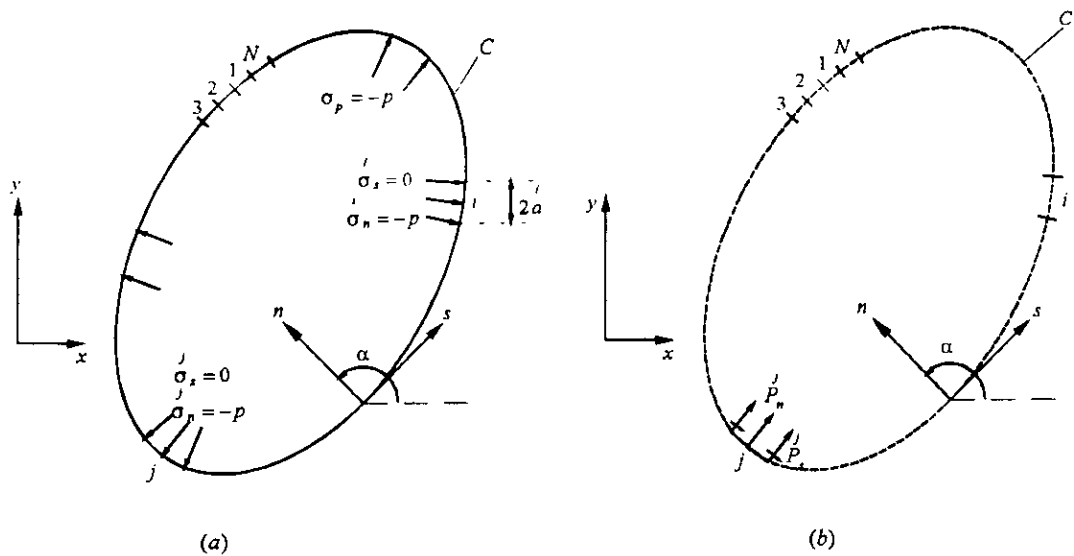


Figure 2.6 Illustration de la méthode des éléments aux frontières pour un problème de cavité: (a) problème physique; (b) modèle numérique.

Pour résoudre ce problème numériquement on suit la procédure suivante:

- premièrement: on divise le contour de la cavité en N segments de droites égales dont la longueur élémentaire d'un segment de droite "i" est " $2a^i$ ".
- deuxièmement: on considère que chaque élément est soumis à une contrainte normale $\sigma_n = -P$ sur toute sa longueur et qu'il est libre en cisaillement.

$$\sigma_n = -P, \sigma_s = 0 \quad \text{pour } i = 1, N \quad (2.5.1)$$

Le problème spécifié par ces conditions peut être résolu par l'intermédiaire du modèle représenté sur la figure (2.6b). Le contour C' représenté sur cette figure à la même forme que le contour C qui définit la limite de la cavité.

Le contour C' ne représente pas une limite; il indique seulement l'emplacement des segments de droite dans un domaine infini qui coïncident avec les éléments sur le contour de la cavité C .

-Troisièmement: On imagine maintenant qu'une contrainte normale et une contrainte de cisaillement soient appliquées sur chacun des N segments de droite tout le long du contour C' . On prendra par exemple le segment "j" et on désigne les deux contraintes, respectivement, par P_n^j et P_s^j .

Une importante remarque doit être observé: les contraintes actuelles sur l'élément "j" du contour C' ne sont pas P_n^j et P_s^j (à moins qu'il n'y aurait aucune contrainte sur les autres éléments). Il est nécessaire, en effet, de faire la différence entre deux types de contraintes appliquées sur chaque élément du contour C' . Sur l'élément "j", par exemple, on a les contraintes appliquées P_n^j et P_s^j , et les contraintes actuelles σ_n^j et σ_s^j , qui sont la résultante des contraintes appliquées sur tous les éléments du contour C' .

En utilisant la solution donnée dans le paragraphe précédent avec des transformations appropriées, on peut calculer les contraintes actuelles σ_n^j et σ_s^j au milieu de chaque élément du contour C' à partir du système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{cases} \sigma_s^i = \sum_{j=1}^n A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^n A_{sn}^{ij} P_n^j \\ \sigma_n^i = \sum_{j=1}^n A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^n A_{nn}^{ij} P_n^j \end{cases} \quad i = 1, N \quad (2.5.2)$$

où A_{ss}^{ij} ... etc., sont les coefficients d'influences. Le coefficient A_{sn}^{ij} , par exemple, donne la contrainte de cisaillement actuelle au milieu de l'élément "i" due à une contrainte normale appliquée ($P_n^j=1$) sur l'élément "j".

Pour notre exemple, en introduisant les conditions aux limites (2.5.1) sur le système (2.5.2), on aura résolu le problème physique décrit sur la figure (2.6a).

Il est important d'admettre que les contraintes $\overset{j}{P}_n$ et $\overset{j}{P}_s$ dans les équations précédentes sont des quantités fictives. Elles sont introduites pour faciliter la solution numérique à des problèmes particuliers et elles n'ont pas de signification physique pour notre problème. Les combinaisons linéaires des contraintes fictives spécifiées par (2.5.2), par contre, ont une signification physique pour le problème en question.

Nous avons pris l'avantage de ce fait pour établir le système d'équations (2.5.3) ($\overset{i}{\sigma}_s = 0, \overset{i}{\sigma}_n = -p$). Une fois ces équations résolues, on peut exprimer les déplacements et les contraintes en chaque point du domaine par d'autres combinaisons linéaires des contraintes fictives $\overset{j}{P}_s$ et $\overset{j}{P}_n, j=1, N$.

$$\begin{cases} 0 = \sum_{j=1}^n A_{ss}^{\overset{j}{i}} \overset{j}{P}_s + \sum_{j=1}^n A_{sn}^{\overset{j}{i}} \overset{j}{P}_n \\ -p = \sum_{j=1}^n A_{ns}^{\overset{j}{i}} \overset{j}{P}_s + \sum_{j=1}^n A_{nn}^{\overset{j}{i}} \overset{j}{P}_n \end{cases} \quad i = 1, N \quad (2.5.3)$$

2.6 Relations de transformation

La méthode des contraintes fictives est basée sur la solution analytique du problème d'un chargement normal et tangentiel appliqué sur un segment de droite fini d'orientation arbitraire dans un domaine infini.

Comme le montre la figure (2.7), les coordonnées d'un point quelconque dans le repère local (\bar{x}, \bar{y}) sont données par le système :

$$\begin{cases} \bar{x} = (x - c_x) \cos \beta + (y - c_y) \sin \beta \\ \bar{y} = -(x - c_x) \sin \beta + (y - c_y) \cos \beta \end{cases} \quad (2.6.1)$$

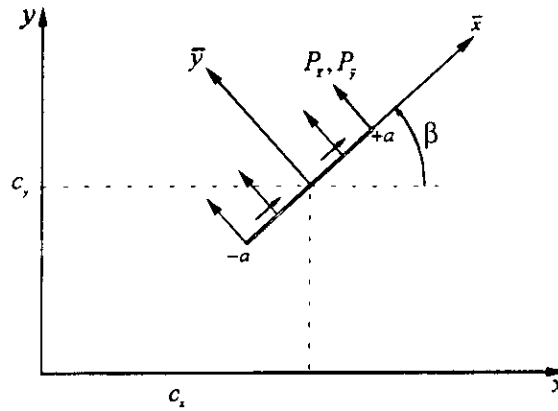


Figure 2.7 Contrainte sur un segment d'orientation arbitraire.

Les déplacements et les contraintes dans le repère local (\bar{x}, \bar{y}) dus au chargement $P_{\bar{x}}, P_{\bar{y}}$ sur le segment $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$ sont donnés par les relations:

$$u_{\bar{x}} = \frac{P_{\bar{x}}}{2G} [(3 - 4\nu)f + \bar{y}f_{,\bar{y}}] + \frac{P_{\bar{y}}}{2G} [-\bar{y}f_{,\bar{x}}] \quad (2.6.2)$$

$$u_{\bar{y}} = \frac{P_{\bar{x}}}{2G} [-\bar{y}f_{,\bar{x}}] + \frac{P_{\bar{y}}}{2G} [(3 - 4\nu)f - \bar{y}f_{,\bar{y}}]$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= P_{\bar{x}} [(3 - 2\nu)f_{,\bar{x}} + \bar{y}f_{,\bar{x}\bar{y}}] + P_{\bar{y}} [2\nu f_{,\bar{y}} + \bar{y}f_{,\bar{y}\bar{y}}] \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= P_{\bar{x}} [-(1 - 2\nu)f_{,\bar{x}} - \bar{y}f_{,\bar{x}\bar{y}}] + P_{\bar{y}} [2(1 - \nu)f_{,\bar{y}} - \bar{y}f_{,\bar{y}\bar{y}}] \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} &= P_{\bar{x}} [2(1 - \nu)f_{,\bar{y}} + \bar{y}f_{,\bar{y}\bar{x}}] + P_{\bar{y}} [(1 - 2\nu)f_{,\bar{x}} - \bar{y}f_{,\bar{x}\bar{y}}] \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Les fonctions $f(\bar{x}, \bar{y})$ dans ces équations sont:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = F_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\bar{y} \left(\arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}-a} - \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}+a} \right) - (\bar{x}-a) \ln \sqrt{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]} + (\bar{x}+a) \ln \sqrt{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]} \right] \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned} f_{,\bar{x}} &= F_2(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln \sqrt{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]} - \ln \sqrt{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]} \right] \\ f_{,\bar{y}} &= F_3(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[\arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}-a} - \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}+a} \right] \\ f_{,x\bar{y}} &= F_4(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\bar{y}}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{y}}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right] \\ f_{,x\bar{x}} &= -f_{,y\bar{y}} = F_5(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{+1}{4\pi(1-\nu)} \left[\frac{\bar{x}-a}{(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{x}+a}{(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Si on pose \bar{F}_k à la place de $F_k(\bar{x}, \bar{y}), k = 1, 5$, on aura les systèmes suivants:

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}} &= \frac{P_{\bar{x}}}{2G} [(3-4\nu)\bar{F}_1 + \bar{y}\bar{F}_3] + \frac{P_{\bar{y}}}{2G} [-\bar{y}\bar{F}_2] \\ u_{\bar{y}} &= \frac{P_{\bar{x}}}{2G} [-\bar{y}\bar{F}_2] + \frac{P_{\bar{y}}}{2G} [(3-4\nu)\bar{F}_1 - \bar{y}\bar{F}_3] \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= P_{\bar{x}} [(3-2\nu)\bar{F}_2 + \bar{y}\bar{F}_4] + P_{\bar{y}} [2\nu\bar{F}_3 - \bar{y}\bar{F}_5] \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= P_{\bar{x}} [-(1-2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}\bar{F}_4] + P_{\bar{y}} [2(1-\nu)\bar{F}_3 + \bar{y}\bar{F}_5] \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} &= P_{\bar{x}} [2(1-\nu)\bar{F}_3 - \bar{y}\bar{F}_5] + P_{\bar{y}} [(1-2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}\bar{F}_4] \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Les déplacements et les contraintes en un point arbitraire de coordonnées (x,y) peuvent être calculés en utilisant les relations (2.6.1), (2.6.4)-(2.6.7). Ils sont calculés

par rapport au repère local (\bar{x}, \bar{y}) et donc ne peuvent être utilisé pour un calcul plus général. On peut revenir au repère global (x, y) en utilisant les formules de transformations données dans le premier chapitre, en posant (2.6.6) dans (1.4.1), et (2.6.7) dans (1.4.5) et (1.4.7). On aura les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{P_{\bar{x}}}{2G} [(3-4\nu) \cos \beta \bar{F}_1 + \bar{y}(\sin \beta \bar{F}_2 + \cos \beta \bar{F}_3)] \\
 &\quad + \frac{P_{\bar{y}}}{2G} [-(3-4\nu) \sin \beta \bar{F}_1 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_2 - \sin \beta \bar{F}_3)] \\
 u_y &= \frac{P_{\bar{x}}}{2G} [(3-4\nu) \sin \beta \bar{F}_1 - \bar{y}(\cos \beta \bar{F}_2 - \sin \beta \bar{F}_3)] \\
 &\quad + \frac{P_{\bar{y}}}{2G} [(3-4\nu) \cos \beta \bar{F}_1 - \bar{y}(\sin \beta \bar{F}_2 + \cos \beta \bar{F}_3)]
 \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= P_{\bar{x}} [\bar{F}_2 + 2(1-\nu)(\cos 2\beta \bar{F}_2 - \sin 2\beta \bar{F}_3) + \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5)] \\
 &\quad + P_{\bar{y}} [\bar{F}_3 - (1-2\nu)(\sin 2\beta \bar{F}_2 + \cos 2\beta \bar{F}_3) + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5)] \\
 \sigma_y &= P_{\bar{x}} [\bar{F}_2 - 2(1-\nu)(\cos 2\beta \bar{F}_2 - \sin 2\beta \bar{F}_3) - \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5)] \\
 &\quad + P_{\bar{y}} [\bar{F}_3 + (1-2\nu)(\sin 2\beta \bar{F}_2 + \cos 2\beta \bar{F}_3) - \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5)] \\
 \sigma_{xy} &= P_{\bar{x}} [2(1-\nu)(\sin 2\beta \bar{F}_2 + \cos 2\beta \bar{F}_3) + \bar{y}(\sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5)] \\
 &\quad + P_{\bar{y}} [(1-2\nu)(\cos 2\beta \bar{F}_2 - \sin 2\beta \bar{F}_3) - \bar{y}(\cos 2\beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5)]
 \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Ces équations peuvent être utilisées maintenant pour le calcul des coefficients d'influences de la méthode des contraintes fictives.

2.7 Coefficients d'influences

Les coefficients d'influences de la méthode des contraintes fictives sont obtenus des résultats précédents en considérant un domaine infini contenant N segments de droites orientés arbitrairement par rapport au repère global (x, y) . (voir fig.2.8)

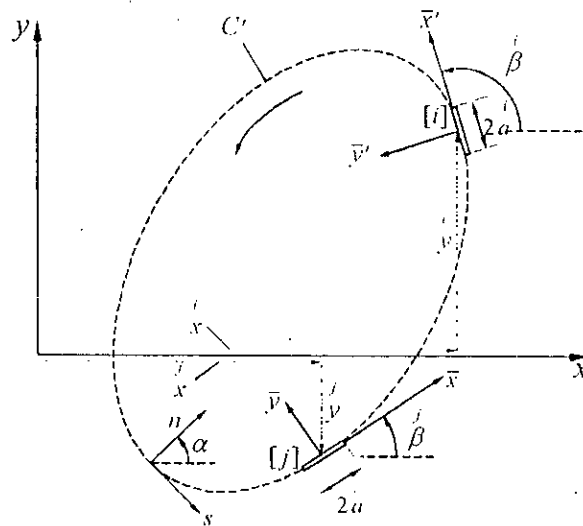


Figure 2.8 Position et orientation des éléments limites.

Les coordonnées locales \bar{x}, \bar{y} dans les équations (2.6.8) et (2.6.9) représentent celles du point (x, y) par rapport au milieu du $j^{\text{ème}}$ élément:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x - x^j) \cos \beta^j + (y - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x - x^j) \sin \beta^j + (y - y^j) \cos \beta^j \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Les déplacements et les contraintes en ce point dus aux contraintes fictives appliquées sur les N éléments sont obtenus par la sommation des contributions de chaque élément.

Les coefficients d'influences des éléments aux frontières pour la méthode des contraintes fictives sont obtenus en choisissant le point (x, y) comme étant le milieu du $i^{\text{ème}}$ élément, c'est-à-dire, $x = x^i$ et $y = y^i$. Les équations (2.7.1) deviennent:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x^i - x^j) \cos \beta^j + (y^i - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x^i - x^j) \sin \beta^j + (y^i - y^j) \cos \beta^j \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Les composantes des déplacements et des contraintes au point i relativement au repère local (\bar{x}, \bar{y}) au point j sont données directement par:

$$u_{\bar{x}}^i = \frac{P_{\bar{x}}^j}{2G} [(3-4\nu)\bar{F}_1 + \bar{y}\bar{F}_3] + \frac{P_{\bar{y}}^j}{2G} [-\bar{y}\bar{F}_2] \quad (2.7.3)$$

$$u_{\bar{y}}^i = \frac{P_{\bar{x}}^j}{2G} [-\bar{y}\bar{F}_2] + \frac{P_{\bar{y}}^j}{2G} [(3-4\nu)\bar{F}_1 - \bar{y}\bar{F}_3]$$

et

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i = P_{\bar{x}}^j [(3-2\nu)\bar{F}_2 + \bar{y}\bar{F}_4] + P_{\bar{y}}^j [2\nu\bar{F}_3 - \bar{y}\bar{F}_5]$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i = P_{\bar{x}}^j [-(1-2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}\bar{F}_4] + P_{\bar{y}}^j [2(1-\nu)\bar{F}_3 + \bar{y}\bar{F}_5] \quad (2.7.4)$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i = P_{\bar{x}}^j [2(1-\nu)\bar{F}_3 - \bar{y}\bar{F}_5] + P_{\bar{y}}^j [(1-2\nu)\bar{F}_2 - \bar{y}\bar{F}_4]$$

Nous sommes intéressés par les composantes des déplacements et des contraintes relativement au repère local au point i (x',y' indiqué sur la figure 2.8). Les deux repères locaux sont reliés par les relations suivantes:

$$\bar{x}' = \bar{x} \cos \gamma + \bar{y} \sin \gamma \quad (2.7.5)$$

$$\bar{y}' = -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma$$

où: $\gamma = \beta^i - \beta^j$. Les déplacements s'écrivent:

$$u_{\bar{x}'}^i = u_{\bar{x}}^i \cos \gamma + u_{\bar{y}}^i \sin \gamma \quad (2.7.6)$$

$$u_{\bar{y}'}^i = -u_{\bar{x}}^i \sin \gamma + u_{\bar{y}}^i \cos \gamma$$

et les contraintes seront:

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i = \sigma_{xx}^i \cos^2 \gamma + 2\sigma_{xy}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{yy}^i \sin^2 \gamma$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i = \sigma_{xx}^i \sin^2 \gamma - 2\sigma_{xy}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{yy}^i \cos^2 \gamma \quad (2.7.7)$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i = -(\sigma_{xx}^i - \sigma_{yy}^i) \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{xy}^i (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)$$

Les coefficients d'influences pour les déplacements et les contraintes sont obtenus des systèmes d'équations (2.7.3), (2.7.6), (2.7.4) et (2.7.7) après avoir posé

$\overset{j}{p}_s = \overset{j}{P}_s$ et $\overset{j}{p}_n = \overset{j}{P}_n$ et en notant que $\overset{i}{u}_x$ et $\overset{i}{u}_y$ sont équivalent à $\overset{i}{u}_s$ et $\overset{i}{u}_n$ et que $\overset{i}{\sigma}_s = \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i$ et $\overset{i}{\sigma}_n = \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i$:

$$\begin{aligned} \overset{i}{u}_s &= \frac{\overset{j}{P}_s}{2G} [(3-4\nu) \cos \gamma \bar{F}_1 - \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_2 - \cos \gamma \bar{F}_3)] \\ &\quad + \frac{\overset{j}{P}_n}{2G} [(3-4\nu) \sin \gamma \bar{F}_1 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_2 + \sin \gamma \bar{F}_3)] \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

$$\begin{aligned} \overset{i}{u}_n &= \frac{\overset{j}{P}_s}{2G} [-(3-4\nu) \sin \gamma \bar{F}_1 - \bar{y}(\cos \gamma \bar{F}_2 + \sin \gamma \bar{F}_3)] \\ &\quad + \frac{\overset{j}{P}_n}{2G} [(3-4\nu) \cos \gamma \bar{F}_1 + \bar{y}(\sin \gamma \bar{F}_2 - \cos \gamma \bar{F}_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{i}{\sigma}_s &= \overset{j}{P}_s [-2(1-\nu)(\sin 2\gamma \bar{F}_2 - \cos 2\gamma \bar{F}_3) - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_4 + \cos 2\gamma \bar{F}_5)] \\ &\quad + \overset{j}{P}_n [(1-2\nu)(\cos 2\gamma \bar{F}_2 + \sin 2\gamma \bar{F}_3) - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_4 - \sin 2\gamma \bar{F}_5)] \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

$$\begin{aligned} \overset{i}{\sigma}_n &= \overset{j}{P}_s [\bar{F}_2 - 2(1-\nu)(\cos 2\gamma \bar{F}_2 + \sin 2\gamma \bar{F}_3) - \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_4 - \sin 2\gamma \bar{F}_5)] \\ &\quad + \overset{j}{P}_n [\bar{F}_3 - (1-2\nu)(\sin 2\gamma \bar{F}_2 - \cos 2\gamma \bar{F}_3) + \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_4 + \cos 2\gamma \bar{F}_5)] \end{aligned}$$

On peut écrire les équations (2.7.8) et (2.7.9) sous la forme:

$$\overset{i}{u}_s = \sum_{j=1}^n \overset{ij}{B}_{ss} \overset{j}{P}_s + \sum_{j=1}^n \overset{ij}{B}_{sn} \overset{j}{P}_n \quad (2.7.10)$$

$$\overset{i}{u}_n = \sum_{j=1}^n \overset{ij}{B}_{ns} \overset{j}{P}_s + \sum_{j=1}^n \overset{ij}{B}_{nn} \overset{j}{P}_n$$

et

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^n A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^n A_{sn}^{ij} P_n^j \quad (2.7.11)$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^n A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^n A_{nn}^{ij} P_n^j$$

Élément ' auto-influence ' : Les termes diagonaux de la matrice des coefficients d'influences.

L'influence de l'élément sur lui même est appelée l'auto-influence. Elle est obtenue en évaluant (2.7.8) et (2.7.9) pour le cas où \bar{x}, \bar{v} et $\gamma = \beta^i - \beta^j$ sont tous nuls (voir fig 2.8).

Nous aurons dans ce cas:

$$u_s^i = \frac{(3-4\nu)}{2G} F_1(0,0) P_s^i \quad (2.7.12)$$

$$u_n^i = \frac{(3-4\nu)}{2G} F_1(0,0) P_n^i$$

et

$$\sigma_s^i = 2(1-\nu)F_3(0,0)P_s^i + (1-2\nu)F_2(0,0)P_n^i \quad (2.7.13)$$

$$\sigma_n^i = -(1-2\nu)F_2(0,0)P_s^i + 2(1-\nu)F_3(0,0)P_n^i$$

En se référant aux équations (2.6.4) et (2.6.5), les fonctions F_1, F_2 et F_3 ont les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned}
 F_1(0,0) &= \frac{-2a^i}{4\pi(1-\nu)} \ln(a^i) \\
 F_2(0,0) &= 0. \\
 F_3(0,0_+) &= \frac{-1}{4(1-\nu)}, \quad F_3(0,0_-) = \frac{+1}{4(1-\nu)}
 \end{aligned}
 \tag{2.7.14}$$

cf (2.4.9):

$$\begin{aligned}
 u_s^i &= \frac{-(3-4\nu)}{4\pi G(1-\nu)} a^i \ln(a^i) P_s^i \\
 u_n^i &= \frac{-(3-4\nu)}{4\pi G(1-\nu)} a^i \ln(a^i) P_n^i
 \end{aligned}
 \tag{2.7.15}$$

et

$$\sigma_s^i = \begin{cases} -\frac{1}{2} P_s^i & \bar{y} = 0_+ \\ +\frac{1}{2} P_s^i & \bar{y} = 0_- \end{cases}, \quad \sigma_n^i = \begin{cases} -\frac{1}{2} P_n^i & \bar{y} = 0_+ \\ +\frac{1}{2} P_n^i & \bar{y} = 0_- \end{cases}
 \tag{2.7.16}$$

Les termes diagonaux de la matrice des coefficients d'influences sont donnés par:

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0; \quad B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \frac{-(3-4\nu)}{4\pi G(1-\nu)} a^i \ln(a^i)
 \tag{2.7.17}$$

$$A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0; \quad A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = \mp \frac{1}{2} \text{ pour } \bar{y} = 0_{\pm}
 \tag{2.7.18}$$

On remarque des équations (2.6.18) que les coefficients A_{ss}^{ii} et A_{nn}^{ii} dépendent de la façon avec laquelle le contour C^i est approché.

Nous pouvons imaginer une coupe tout au long du contour et définir deux limites C'_+ et C'_- comme des limites de la région intérieure et extérieure du contour C^i

respectivement comme indiqué sur la figure (2.9). Il en résulte qu'il faut utiliser différentes valeurs des coefficients A_{ss}^{ii} et A_{nn}^{ii} selon la région considérée.

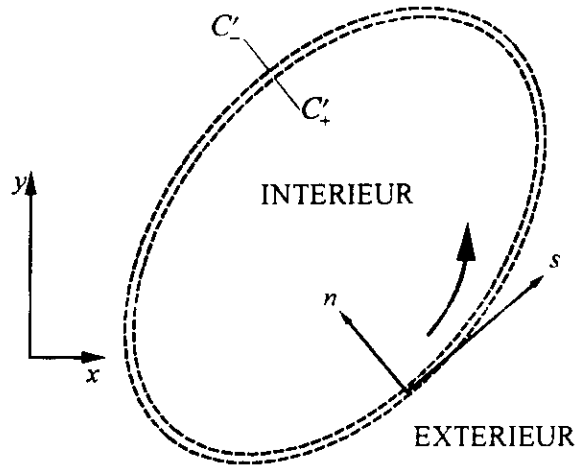


Figure 2.9 Région intérieure et extérieure du contour C'.

On adoptera la convention suivante : la limite d'un domaine fini est traversée dans le sens des aiguilles d'une montre alors que la limite d'une cavité est traversée dans le sens contraire. Cette convention conduit à quelques simplifications dans la programmation par ordinateur car les coefficients A_{ss}^{ii} et A_{nn}^{ii} sont tout égaux à $+1/2$ pour les deux types de problèmes.

Calcul de la contrainte tangentielle sur le contour:

La composante du tenseur $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i$ est appelée contrainte tangentielle et est notée σ_t^i sur la figure (2.10). La détermination de la contrainte tangentielle le long du contour est l'un des principaux objectifs de la résolution des problèmes d'élasticité. Les coefficients d'influences pour ce cas sont calculés à partir de (2.7.4) et (2.7.7):

$$\begin{aligned} \sigma_t^i = & P_s^j [\bar{F}_2 - 2(1-\nu)(\cos 2\gamma \bar{F}_2 + \sin 2\gamma \bar{F}_3) + \bar{y}(\cos 2\gamma \bar{F}_4 - \sin 2\gamma \bar{F}_5)] \\ & + P_n^j [\bar{F}_3 + (1-2\nu)(\sin 2\gamma \bar{F}_2 - \cos 2\gamma \bar{F}_3) - \bar{y}(\sin 2\gamma \bar{F}_4 + \cos 2\gamma \bar{F}_5)] \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

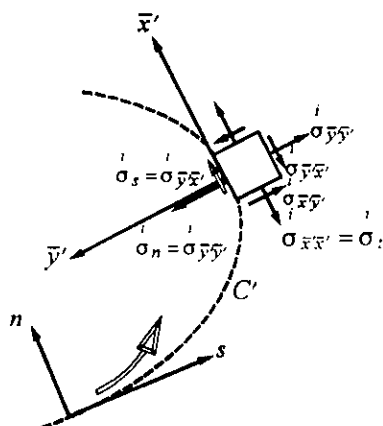


Figure 2.10 Contrainte normale, de cisaillement et tangentielle.

On peut écrire par exemple:

$$\sigma_t^i = \sum_{j=1}^n A_{ts}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^n A_{tn}^{ij} P_n^j \tag{2.7.20}$$

où A_{ts}^{ij} et A_{tn}^{ij} sont les coefficients d'influences pour les contraintes tangentielles.

Les termes diagonaux de la matrice des coefficients d'influences des contraintes tangentielles sont calculés en posant \bar{x}, \bar{y} et γ égales à zéro, les équations (2.7.14) et (2.7.19) donnent alors:

$$\sigma_t^i = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} P_n^i & \bar{y} = 0_+ \\ +\frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} P_n^i & \bar{y} = 0_- \end{cases} \tag{2.7.21}$$

de telle façon que:

$$A_{ts}^{ii} = 0, \quad A_{tn}^{ii} = \mp \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \quad \text{pour } \bar{y} = 0_{\pm} \tag{2.7.22}$$

En appliquant la convention précédente, A_m^{ii} devient $A_m^{ii} = +\frac{1}{2}\nu / (1-\nu)$.

(valeur unique)

2.8 Problème intérieur / extérieur

Trois exemples illustrent la convention de signe adoptée dans le paragraphe (2.6) pour différencier entre les problèmes intérieurs et extérieurs (voir fig.2.11).

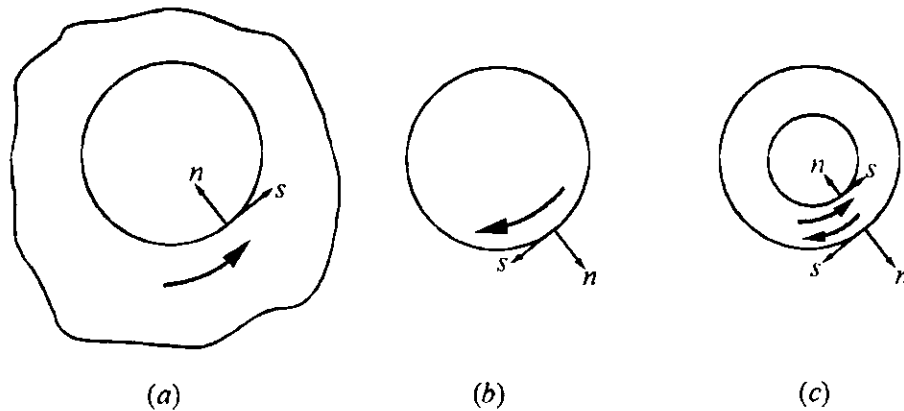


Figure 2.11 La convention pour la traversée des contours: (a) cavité; (b) disque; (c) anneau.

Les figures (2.11a) et (2.11b) définissent des contours circulaires pour, respectivement, un trou dans un domaine infini et un disque.

Le premier exige que le contour soit traversé dans le sens contraire des aiguilles d'une montre alors que le second exige le contraire. Le troisième exemple (fig.2.11c) montre un disque circulaire avec un trou circulaire concentrique dont les limites intérieures et extérieures doivent être traversées en sens opposés.

Finalement, dans le cas des problèmes intérieurs, on notera que quelques précautions doivent être prises pour éviter le mouvement de corps rigide.

2.9 Conditions de symétrie

On dit qu'un axe de symétrie existe pour certains problèmes quand les propriétés élastiques des matériaux, la configuration géométrique des limites et les conditions de chargement sont tout symétriques par rapport à cet axe.

Deux conséquences physiques d'un axe de symétrie doivent être notées. Premièrement, aucun déplacement normal ne se produit à travers l'axe de symétrie. Deuxièmement, aucune contrainte de cisaillement n'agit le long de l'axe de symétrie.

L'axe de symétrie agit comme un miroir et les contraintes qui s'appliquent sur l'image de l'élément se calculent en réfléchissant ceux qui s'appliquent sur l'élément à travers cet axe. Le résultat est:

- les composantes tangentielles des contraintes fictives qui s'appliquent sur l'élément actuel et son image sont égaux en grandeur et de signes opposés.
- les composantes normales sont toujours égales.

L'axe de symétrie peut être incorporé en incluant les effets de l'image des éléments dans les expressions des coefficients d'influences. En pratique, ceci est accompli par la génération de l'image des éléments et le calcul de leurs effets automatiquement par un programme informatique.

Pour expliquer cette procédure nous allons examiner le cas particulier pour lequel la droite $x=x^*$ est un axe de symétrie. Ce cas est illustré dans la figure 2.12.

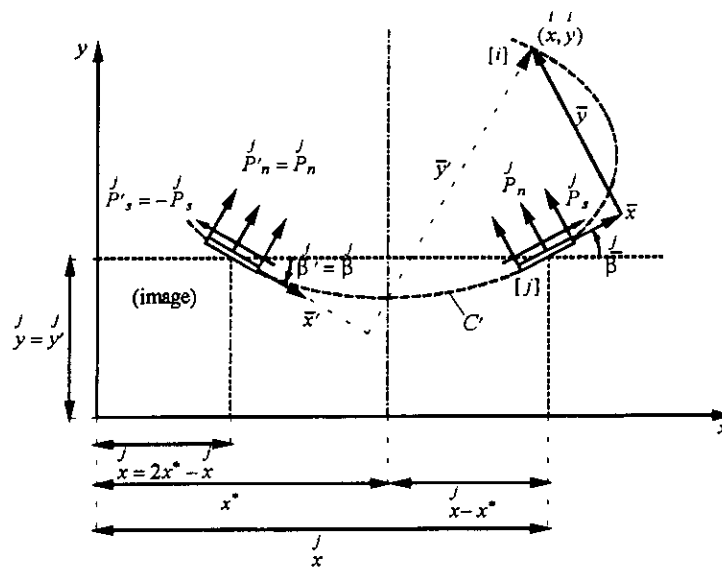


Figure 2.12 Condition de symétrie pour la droite $x=x^*$.

L'élément actuel est supposé centrer au point $x=x^j$, $y=y^j$ où $x^j > x^*$, et orienté selon un angle $+\beta^j$ par rapport à la direction x. Les contraintes fictives liées à cet élément sont P_s^j et P_n^j . Le milieu de l'élément image est localisé au point $x=x^j$, $y=y^j$. L'abscisse de l'élément image est obtenue en notant que les éléments actuels et leurs images sont équidistant de l'axe de symétrie $x=x^*$. En se référant à la figure 2.12 on écrit:

$$\begin{aligned} x^j &= x^* - (x^j - x^*) = 2x^* - x^j \\ y^j &= y^j \end{aligned} \tag{2.9.1}$$

Les déplacements (u_s^i et u_n^i) et les contraintes (σ_s^i , σ_n^i et σ_t^i) au point $x=x^i$, $y=y^i$ dus aux contraintes fictives P_s^j et P_n^j appliquées sur l'élément image peuvent être calculées maintenant en fonction des coordonnées locales:

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= (x^i - x^j) \cos \beta^j + (y^i - y^j) \sin \beta^j \\ &= (x^i - 2x^* + x^j) \cos(-\beta^j) + (y^i - y^j) \sin(-\beta^j) \\ \bar{y}^i &= -(x^i - x^j) \sin \beta^j + (y^i - y^j) \cos \beta^j \\ &= -(x^i - 2x^* + x^j) \sin(-\beta^j) + (y^i - y^j) \cos(-\beta^j) \end{aligned} \tag{2.9.2}$$

et les fonctions $F_k(\bar{x}^i, \bar{y}^i)$ de (2.6.4) et (2.6.5).

Les coefficients d'influences B_{ss}^{ij} etc., dans (2.7.10), A_{ss}^{ij} etc., dans (2.7.11) et A_{ts}^{ij} etc., dans (2.7.20), qui incorporent les effets de l'élément image sont alors calculés des équations (2.7.8), (2.7.9) et (2.7.19).

Une procédure similaire peut être suivie dans le cas où la droite $y=y^*$ est un axe de symétrie. Ce cas est illustré dans la figure 2.13. Les coordonnées x,y du milieu de l'élément image sont:

$$\begin{aligned} x^j &= x^j \\ y^j &= y^* - (y - y^*) = 2y^* - y \end{aligned} \tag{2.9.3}$$

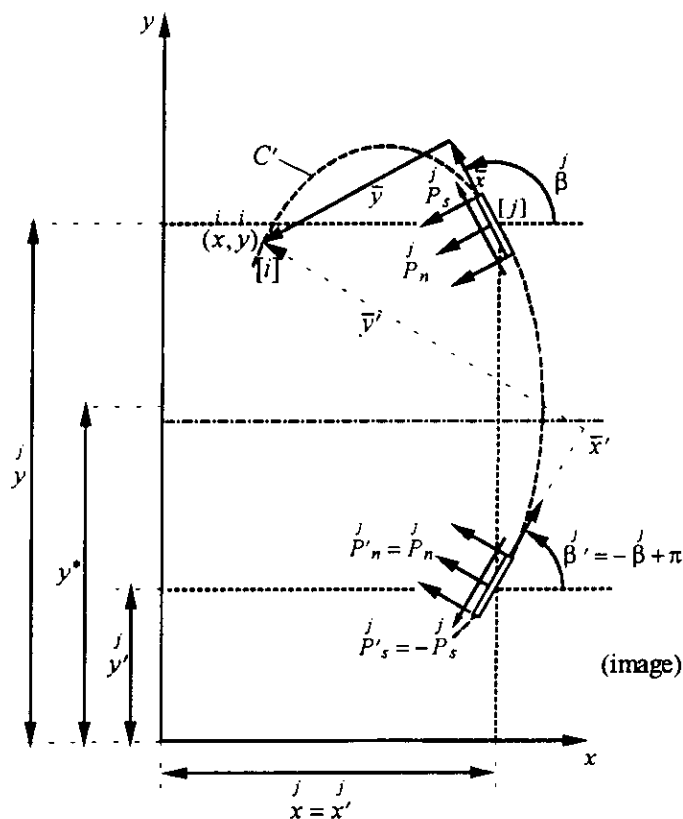


Figure 2.13 Condition de symétrie pour la droite $y=y^*$.

L'élément image est orienté selon un angle $\beta' = -\beta + \pi$ par rapport à la direction x , et a comme contraintes fictives $P'_s = -P_s$ et $P'_n = +P_n$. Les coordonnées locales du point $x=x', y=y'$ par rapport à cet élément sont:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= (x - x) \cos(\pi - \beta) + (y - 2y^* + y) \sin(\pi - \beta) \\ \bar{y}' &= -(x - x) \sin(\pi - \beta) + (y - 2y^* + y) \cos(\pi - \beta) \end{aligned} \tag{2.9.4}$$

Les coefficients d'influences maintenant peuvent être calculés par la procédure décrite précédemment.

Si les droites $x=x^*$ et $y=y^*$ sont des axes de symétrie alors les coefficients d'influences sont calculés en ajoutant trois images de l'élément actuel. Cette situation est montrée sur la figure 2.14. Les coordonnées locales associées à chacun des éléments images peuvent être écrites de la même manière qui a été expliquée au-dessus.

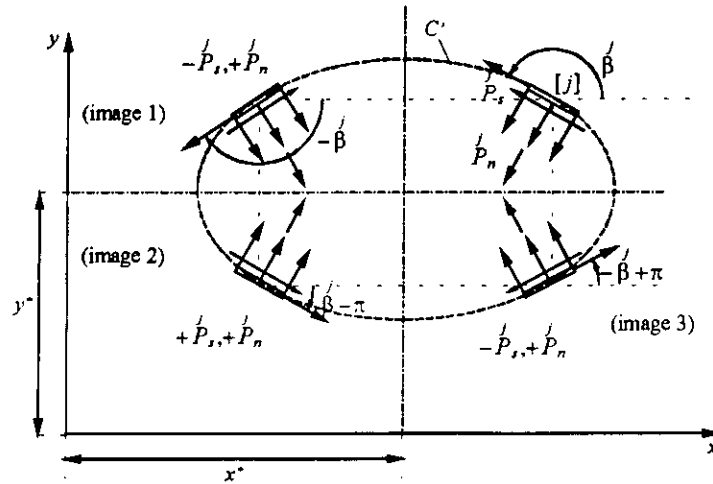


Figure 2.13 Conditions de symétrie pour les droites $x=x^*$ et $y=y^*$.

Remarque: les figures 2.11-2.13 ont été tracées en supposant un problème intérieur. Il est facile de vérifier que les mêmes résultats peuvent être obtenus pour un problème extérieur. Donc la procédure donnée dans ce paragraphe est valable pour l'étude des deux types de problèmes.



CHAPITRE 3

LES MILIEUX
ANISOTROPES

CHAPITRE 3

LES MILIEUX ANISOTROPES

3.1 Introduction

Dans le passé, plusieurs matériaux, vu leur composition, ont été simplement considérés comme homogènes et isotropes, ce qui conduisait à plusieurs simplifications dans le calcul. Aujourd'hui, par contre, ces hypothèses simplificatrices conduisent à des résultats inappropriés ou carrément fausses. La technologie moderne exige de prendre en considération l'anisotropie des matériaux, qui est la variation des propriétés élastiques du matériau suivant la direction.

3.2 Équations de la théorie d'élasticité d'un milieu anisotrope.

Quand il n'existe aucun élément qui a une symétrie élastique dans le cas général d'un milieu homogène anisotrope, la loi de Hooke généralisée en coordonnées cartésiennes est:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{13}\sigma_{zz} + s_{14}\tau_{yz} + s_{15}\tau_{zx} + s_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= s_{21}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} + \dots + s_{26}\tau_{xy}, \\ &\dots \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} &= s_{61}\sigma_{xx} + s_{62}\sigma_{yy} + \dots + s_{66}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{12}\epsilon_{yy} + c_{13}\epsilon_{zz} + c_{14}\gamma_{yz} + c_{15}\gamma_{xz} + c_{16}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= c_{21}\epsilon_{xx} + c_{22}\epsilon_{yy} + \dots + c_{26}\gamma_{xy}, \\ &\dots \\ \tau_{xy} &= c_{61}\epsilon_{xx} + c_{62}\epsilon_{yy} + \dots + c_{66}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

Ces équations contiennent 36 coefficients s_{ij} qui sont appelés les constantes élastiques.

Si un potentiel élastique existe, le nombre de constantes élastiques contenues dans (3.2.1) et (3.2.2) se réduit à 21. Un potentiel élastique existe quand la variation du milieu sous l'influence de la déformation se produit adiabatiquement ou à température constante.

On considère seulement le cas où les variations pour la déformation se produisent à température constante, c'est-à-dire, la température de chaque élément reste constante, donc les constantes s_i et c_i seront les constantes élastiques isothermes.

On notera par w le potentiel élastique (énergie de déformation élastique par unité de volume), on aura les relations suivantes:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{xx}}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{yy}}, \quad \dots, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial w}{\partial \gamma_{xy}} \quad (3.2.3)$$

En différentiant les expressions (3.2.3) par rapport à $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots$, on obtient:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{yy}} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \epsilon_{xx}}, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{zz}} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \epsilon_{xx}} \quad (3.2.4)$$

et ainsi de suite, on peut montrer la symétrie:

$$c_{12} = c_{21}, \quad c_{31} = c_{13}, \quad \dots, \quad c_{65} = c_{56}$$

et en général $c_{ij} = c_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$). Des relations similaires peuvent être trouvées pour les coefficients de déformation, tel que, $s_{ij} = s_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$).

En prenant en considérations les résultats précédents, on peut écrire les systèmes:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{13}\sigma_{zz} + s_{14}\tau_{yz} + s_{15}\tau_{xz} + s_{16}\tau_{xy} , \\ \epsilon_{yy} &= s_{12}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} + \dots + s_{26}\tau_{xy} , \\ &\dots \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_{xx} + s_{26}\sigma_{yy} + \dots + s_{66}\tau_{xy} ; \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{12}\epsilon_{yy} + c_{13}\epsilon_{zz} + c_{14}\gamma_{yz} + c_{15}\gamma_{xz} + c_{16}\gamma_{xy} , \\ \sigma_{yy} &= c_{12}\epsilon_{xx} + c_{22}\epsilon_{yy} + \dots + c_{26}\gamma_{xy} , \\ &\dots \\ \tau_{xy} &= c_{16}\epsilon_{xx} + c_{26}\epsilon_{yy} + \dots + c_{66}\gamma_{xy} . \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

Dans le cas général l'expression du potentiel élastique est:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{1}{2}s_{11}\sigma_{xx}^2 + s_{12}\sigma_{xx}\sigma_{yy} + s_{13}\sigma_{xx}\sigma_{zz} + s_{14}\sigma_{xx}\tau_{yz} + s_{15}\sigma_{xx}\tau_{xz} \\ &\quad + s_{16}\sigma_{xx}\tau_{xy} + \frac{1}{2}s_{22}\sigma_{yy}^2 + s_{23}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + s_{24}\sigma_{yy}\tau_{yz} \\ &\quad + s_{25}\sigma_{yy}\tau_{xz} + s_{26}\sigma_{yy}\tau_{xy} + \frac{1}{2}s_{33}\sigma_{zz}^2 + s_{34}\sigma_{zz}\tau_{yz} \\ &\quad + s_{35}\sigma_{zz}\tau_{xz} + s_{36}\sigma_{zz}\tau_{xy} + \frac{1}{2}s_{44}\tau_{yz}^2 + s_{45}\tau_{yz}\tau_{xz} \\ &\quad + s_{46}\tau_{yz}\tau_{xy} + \frac{1}{2}s_{55}\tau_{xz}^2 + s_{56}\tau_{xz}\tau_{xy} + \frac{1}{2}s_{66}\tau_{xy}^2 . \end{aligned} \right\} \quad (3.2.7)$$

Sur la base des équations (3.2.5), on peut écrire cette expression plus brièvement par:

$$w = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \dots + \tau_{xy}\gamma_{xy}) \quad (3.2.8)$$

En considérant les composantes de déformation, on obtient une expression analogue à (3.2.7) :

$$\left. \begin{aligned} w = & \frac{1}{2}c_{11}\epsilon_{xx}^2 + c_{12}\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \dots + c_{16}\epsilon_{xx}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}c_{22}\epsilon_{yy}^2 + \dots \\ & + c_{26}\epsilon_{yy}\gamma_{xy} + \dots + \frac{1}{2}c_{66}\gamma_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

On trouve le potentiel d'énergie de déformation pour tout le volume par une intégration sur son volume V:

$$W = \iiint_V w dv \quad (3.2.10)$$

On notera que le potentiel élastique est toujours positif.

Quand on étudie les problèmes de déformation et de stabilité des milieux qui ont une forme particulière d'anisotropie (par exemple, plaques orthotropiques), certains auteurs N.G.Chentsov et Ia. I.Sekerzhzenkovich (S.G.Lekhnitskii 1963) utilisent les constantes techniques qui sont une combinaison entre s_{ij} et c_{ij} , les modules de Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement. A.L.Rabinovich (S.G.Lekhnitskii 1963) a proposé un système de constantes techniques pour le cas général d'anisotropie. En utilisant ce système les relations de Hooke généralisées du système (3.2.5) deviennent:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_{xx}} \left[\sigma_{xx} - \nu_{yx} \sigma_{yy} - \nu_{zx} \sigma_{zz} + \eta_{yz,x} \tau_{yz} + \eta_{zx,x} \tau_{zx} + \eta_{xy,x} \tau_{xy} \right], \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_{yy}} \left[-\nu_{xy} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu_{zy} \sigma_{zz} + \eta_{yz,y} \tau_{yz} + \eta_{zx,y} \tau_{zx} + \eta_{xy,y} \tau_{xy} \right], \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E_{zz}} \left[-\nu_{xz} \sigma_{xx} - \nu_{yz} \sigma_{yy} + \sigma_{zz} + \eta_{yz,z} \tau_{yz} + \eta_{zx,z} \tau_{zx} + \eta_{xy,z} \tau_{xy} \right], \\
 \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} \left[\eta_{x,yz} \sigma_{xx} + \eta_{y,yz} \sigma_{yy} + \eta_{z,yz} \sigma_{zz} + \tau_{yz} + \mu_{zx,yz} \tau_{zx} + \mu_{xy,yz} \tau_{xy} \right], \\
 \gamma_{zx} &= \frac{1}{G_{zx}} \left[\eta_{x,zx} \sigma_{xx} + \eta_{y,zx} \sigma_{yy} + \eta_{z,zx} \sigma_{zz} + \mu_{yz,zx} \tau_{yz} + \tau_{zx} + \mu_{xy,zx} \tau_{xy} \right], \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \left[\eta_{x,xy} \sigma_{xx} + \eta_{y,xy} \sigma_{yy} + \eta_{z,xy} \sigma_{zz} + \mu_{yz,xy} \tau_{yz} + \mu_{zx,xy} \tau_{zx} + \tau_{xy} \right].
 \end{aligned} \right\} (3.2.11)$$

où E_{xx} , E_{yy} , E_{zz} sont les modules de Young (pour tension - compression) suivant les directions x,y,z ; G_{yz} , G_{zx} , G_{xy} sont les modules de cisaillement pour les plans parallèles aux coordonnées yOz , xOz , xOy ; ν_{yx} , ν_{zy} , ν_{zx} , ν_{xy} , ν_{yz} , ν_{zx} sont les coefficients de Poisson.

On appelle les constantes $\mu_{zx,yz}$, $\mu_{xy,yz}$, \dots , $\mu_{yz,xy}$ les coefficients de Chentsov.

Finalement, les coefficients $\eta_{yz,x}$, $\eta_{zx,x}$, \dots , $\eta_{xy,z}$ sont appelés les coefficients d'influence mutuelle de première espèce, et $\eta_{x,yz}$, $\eta_{y,yz}$, \dots , $\eta_{x,xy}$ les coefficients d'influences mutuelles de deuxième espèce.

Les équations du système (3.2.11) contiennent 36 constantes élastiques et 21 seulement sont indépendantes. P.Bekhterev a groupé les formules qui lient les constantes techniques aux coefficients de déformation comme suit:

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{I. } s_{11} = \frac{1}{E_{xx}}, \quad s_{22} = \frac{1}{E_{yy}}, \quad s_{33} = \frac{1}{E_{zz}}; \\
 & \text{II. } s_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_{xx}} = -\frac{\nu_{xy}}{E_{yy}}, \quad s_{23} = -\frac{\nu_{zy}}{E_{yy}} = -\frac{\nu_{yz}}{E_{zz}}; \\
 & \quad s_{13} = -\frac{\nu_{xz}}{E_{zz}} = -\frac{\nu_{zx}}{E_{xx}}; \\
 & \text{III. } s_{44} = \frac{1}{G_{yz}}, \quad s_{55} = \frac{1}{G_{zx}}, \quad s_{66} = \frac{1}{G_{xy}}; \\
 & \text{IV. } s_{56} = \frac{\mu_{xy,zx}}{G_{xz}} = \frac{\mu_{zx,xy}}{G_{xy}}, \\
 & \quad s_{46} = \frac{\mu_{xy,yz}}{G_{yz}} = \frac{\mu_{yz,xy}}{G_{xy}}, \\
 & \quad s_{45} = \frac{\mu_{zx,xy}}{G_{yz}} = \frac{\mu_{yz,zx}}{G_{xz}}; \\
 & \text{V. } s_{14} = \frac{\eta_{yz,x}}{E_{xx}} = \frac{\eta_{x,yz}}{G_{yz}}, \quad s_{25} = \frac{\eta_{zx,y}}{E_{yy}} = \frac{\eta_{y,zx}}{G_{xz}}, \\
 & \quad s_{36} = \frac{\eta_{xy,z}}{E_{zz}} = \frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}}; \\
 & \text{VI. } s_{24} = \frac{\eta_{yz,y}}{E_{yy}} = \frac{\eta_{y,yz}}{G_{yz}}, \quad s_{35} = \frac{\eta_{zx,z}}{E_{zz}} = \frac{\eta_{z,zx}}{G_{xz}}, \\
 & \quad s_{16} = \frac{\eta_{xy,x}}{E_{xx}} = \frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}}, \quad s_{34} = \frac{\eta_{yz,z}}{E_{zz}} = \frac{\eta_{z,yz}}{G_{yz}}, \\
 & \quad s_{15} = \frac{\eta_{zx,x}}{E_{xx}} = \frac{\eta_{x,zx}}{G_{xz}}, \quad s_{26} = \frac{\eta_{xy,y}}{E_{yy}} = \frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.12)$$

3.3 Symétrie élastique

Si la composition interne d'un matériau possède une symétrie quelconque, alors une symétrie de ces propriétés élastiques peut être observée. Cela provient quand les propriétés élastiques sont identiques par rapport aux directions de symétrie développées dans le corps.

3.4 L'orthotropie et l'isotropie transverse

Les deux cas simples de l'anisotropie sont connus par l'orthotropie et l'isotropie transverse. Plusieurs types de bois, matériaux composites et roches peuvent être considérés comme des matériaux homogènes orthotropiques ou isotropiques transverses.

Pour expliquer la différence entre l'orthotropie et l'isotropie transverse, considérons un prisme d'axe de base (x,y,z) . L'orthotropie se manifeste quand on considère trois plans orthogonaux de symétrie élastique qui passent en chaque point de ce prisme comme indiqué sur la figure (3.1).

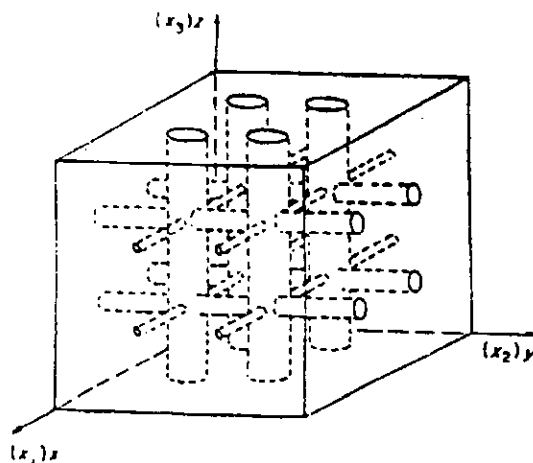


Figure 3.1 Matériau orthotropique

Cette représentation d'un milieu orthotropique est fictive. C'est une manière simple de représenter un matériau qui a des constantes élastiques dans différentes directions. Il apparaît de la figure qu'un milieu orthotropique répondra différemment à une contrainte normale et tangentielle appliquée aux faces du prisme qui ont les normales x , y et z . Par exemple, la déformation ϵ_{zz} associée avec la contrainte σ_{zz} sera différente de la déformation ϵ_{xx} associée avec la contrainte σ_{xx} . Similairement, la déformation tangentielle ϵ_{yz} due à la contrainte tangentielle σ_{yz} sera différente de la déformation tangentielle ϵ_{xy} due à la contrainte tangentielle σ_{xy} .

Un matériau orthotrope possède 9 constantes élastiques indépendantes, trois de ces constantes relient les déformations normales ϵ_{xx} , ϵ_{yy} et ϵ_{zz} respectivement aux contraintes normales σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} et sont appelées les modules de Young. Trois autres constantes sont appelées coefficients de Poisson, ils relient entre une déformation normale dans une direction et une déformation normale, dans une direction différente. Les autres constantes sont appelées les modules de cisaillements, ils relient entre les déformations tangentielles et les contraintes tangentielles qui les produisent.

Un matériau isotrope transverse peut être représenté sur la figure (3.2), il est parfois appelé isotrope dans le plan (sur la figure c'est le plan x,y) parce que les constantes élastiques sont indépendantes dans le plan considéré. Le cas de l'isotropie est considéré comme le cas limite de l'orthotropie ou l'isotropie transverse, c'est le cas où les trois plans sont identiques.

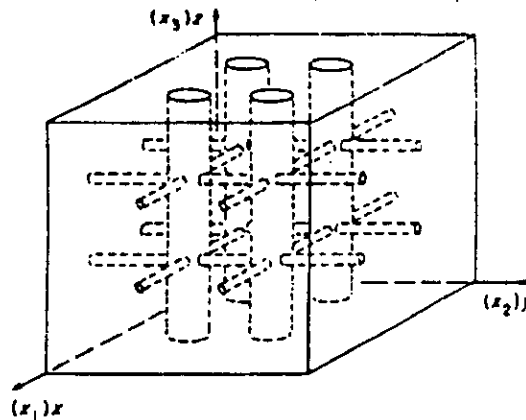


Figure 3.2 Matériau isotrope transverse

3.5 Relations contraintes-déformations

Le cas de l'isotropie transverse est considéré comme un cas spécial de l'orthotropie. Nous allons seulement donner les relations générales de l'orthotropie.

Les relations contraintes-déformations pour un matériau élastique orthotrope peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{yy} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{xx} + \frac{1}{E_y} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_{yy} + \frac{1}{E_z} \sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G_{yz}} \sigma_{yz} \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2G_{xz}} \sigma_{xz} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G_{xy}} \sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

où E_x , E_y et E_z sont les modules de Young par rapport aux directions x, y et z ;

ν_{xy} , . . . , ν_{xz} sont les coefficients de Poisson ; G_{xy} , G_{yz} , G_{xz} sont les modules de cisaillement.

Dans le cas général les constantes ν_{ij} et ν_{ji} ne sont pas égales, les relations (3.5.1), par contre, sont symétriques ($\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j$ ($i \neq j$)) et donc seulement trois coefficients de poisson dans ces équations sont indépendants.

Dans la littérature (3.5.1) est écrit sous la forme:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} + s_{13}\sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{yy} &= s_{21}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} + s_{23}\sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{zz} &= s_{31}\sigma_{xx} + s_{32}\sigma_{yy} + s_{33}\sigma_{zz} \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}s_{44}\sigma_{yz} \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}s_{55}\sigma_{xz} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}s_{66}\sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

3.6 Contrainte plane et déformation plane

Les relations contraintes-déformations pour un matériau orthotrope dans l'état de contrainte plane par rapport au plan (x,y) sont obtenues en posant: $\sigma_{zz}=\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0$ dans (3.5.2), on aura donc :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} \\
 \varepsilon_{yy} &= s_{12}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}s_{66}\sigma_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

avec le résultat auxiliaire $\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$ et $\varepsilon_{zz}=s_{13}\sigma_{xx}+s_{23}\sigma_{yy}$.

Ces équations peuvent être inversées et donneront:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= (s_{22}\varepsilon_{xx} - s_{12}\varepsilon_{yy}) / (s_{11}s_{22} - s_{12}^2) \\
 \sigma_{yy} &= (-s_{12}\varepsilon_{xx} + s_{11}\varepsilon_{yy}) / (s_{11}s_{22} - s_{12}^2) \\
 \sigma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} / s_{66}
 \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Les relations contraintes-déformations dans l'état de contrainte plane contiennent seulement 4 constantes élastiques.

L'état de déformation plane est défini par les conditions $\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0$.

On trouve de (3.5.2) dans ce cas :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = 0 \\ \sigma_{zz} &= -(s_{13}\sigma_{xx} + s_{23}\sigma_{yy}) / s_{33}\end{aligned}\quad (3.6.3)$$

et

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= (s_{11} - s_{13}^2 / s_{33})\sigma_{xx} + (s_{12} - s_{13}s_{23} / s_{33})\sigma_{yy} \\ \epsilon_{yy} &= (s_{12} - s_{13}s_{23} / s_{33})\sigma_{xx} + (s_{22} - s_{23}^2 / s_{33})\sigma_{yy} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}s_{66}\sigma_{xy}\end{aligned}\quad (3.6.4)$$

La forme inverse de ces équations est:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{12}\epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} &= c_{12}\epsilon_{xx} + c_{22}\epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} &= 2c_{66}\epsilon_{xy}\end{aligned}\quad (3.6.5)$$

où

$$\begin{aligned}c_{11} &= (s_{22} - s_{23}^2 / s_{33}) / s_0^2 \\ c_{12} &= -(s_{12} - s_{13}s_{23} / s_{33}) / s_0^2 \\ c_{22} &= (s_{11} - s_{13}^2 / s_{33}) / s_0^2 \\ c_{66} &= 1 / s_{66}\end{aligned}\quad (3.6.6)$$

avec

$$s_0^2 = s_{11}s_{22} - s_{12}^2 + (2s_{12}s_{13}s_{23} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{13}^2) / s_{33}\quad (3.6.7)$$

Comme dans l'état de contrainte plane, les relations contraintes-déformations pour le plan x,y peuvent être exprimées en fonction de 4 constantes élastiques seulement c_{11} , c_{12} , c_{22} , c_{66} . Pour calculer ces constantes pour un problème en déformation plane, la connaissance des neuf constantes élastiques indépendantes du matériau est nécessaire.

Les résultats précédents montrent qu'il y a une équivalence formelle entre les conditions en contrainte plane et en déformation plane pour un matériau orthotrope. Si, par exemple, on pose $s_{13}=s_{23}=0$ dans (3.6.4), alors ces équations sont formellement équivalentes à (3.6.1). En conséquence, il n'est pas nécessaire de considérer séparément les problèmes d'élasticité pour les cas de contraintes planes et de déformations planes, mais on passera d'un cas à un autre par de simples modifications des constantes élastiques. Il apparaît, en effet, qu'on peut représenter les résultats des deux cas par (3.6.5). Les constantes c_{11} , c_{12} et c_{22} pour un problème de contrainte plane sont calculées à partir des définitions (3.6.6) et (3.6.7) en posant $s_{13}=s_{23}=0$. C'est ce que nous adopterons pour notre étude.

Le cas de l'isotropie transverse est inclus dans ces équations comme un cas particulier.



CHAPITRE 4

*APPLICATION DE LA
MÉTHODE DES
CONTRAINTES
FICTIVES
AUX MILIEUX
ANISOTROPES*

CHAPITRE 4

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES CONTRAINTES FICTIVES AUX MILIEUX ANISOTROPES

4.1 Introduction

Dans le chapitre 2 nous avons présenté la méthode des contraintes fictives dans sa forme la plus simple. Dans ce chapitre, nous présentons cette méthode pour résoudre des problèmes qui traitent des problèmes dans le cas de la théorie des milieux élastiques anisotropes.

4.2 Problème de Kelvin en déformation plane

La solution du problème d'une ligne de force concentrée appliquée à un solide élastique orthotrope est donnée par Green (1943)(S.L Crouch 1983), et par Rizzo et Shippy (1970b). Les résultats peuvent être mis sous la forme :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{+q_1 q_2}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} F_x \left[\frac{\gamma_1}{q_1} \ln(x^2 + y_1^2)^{1/2} - \frac{\gamma_2}{q_2} \ln(x^2 + y_2^2)^{1/2} \right] \\ &\quad \frac{-1}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} F_y \left[\arctan y_1 / x - \arctan y_2 / x \right] \\ & \\ u_y &= \frac{-q_1 q_2}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} F_x \left[\arctan y_1 / x - \arctan y_2 / x \right] \\ &\quad \frac{-1}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} F_y \left[\frac{q_1}{\gamma_1} \ln(x^2 + y_1^2)^{1/2} - \frac{q_2}{\gamma_2} \ln(x^2 + y_2^2)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

et

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{+q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} F_x \left[\frac{(1+q_1)}{\gamma_1 q_1} \frac{x}{x^2 + y_1^2} - \frac{(1+q_2)}{\gamma_2 q_2} \frac{x}{x^2 + y_2^2} \right] \\
 &\quad \frac{+1}{2\pi (q_1 - q_2)} F_y \left[\frac{(1+q_1)}{\gamma_1^2} \frac{y_1}{x^2 + y_1^2} - \frac{(1+q_2)}{\gamma_2^2} \frac{y_2}{x^2 + y_2^2} \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{-q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} F_x \left[\frac{\gamma_1 (1+q_1)}{q_1} \frac{x}{x^2 + y_1^2} - \frac{\gamma_2 (1+q_2)}{q_2} \frac{x}{x^2 + y_2^2} \right] \\
 &\quad \frac{-1}{2\pi (q_1 - q_2)} F_y \left[(1+q_1) \frac{y_1}{x^2 + y_1^2} - (1+q_2) \frac{y_2}{x^2 + y_2^2} \right] \\
 \sigma_{xy} &= \frac{+q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} F_x \left[\frac{(1+q_1)}{q_1} \frac{y_1}{x^2 + y_1^2} - \frac{(1+q_2)}{q_2} \frac{y_2}{x^2 + y_2^2} \right] \\
 &\quad \frac{-1}{2\pi (q_1 - q_2)} F_y \left[\frac{(1+q_1)}{\gamma_1} \frac{x}{x^2 + y_1^2} - \frac{(1+q_2)}{\gamma_2} \frac{x}{x^2 + y_2^2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

où F_x et F_y sont les deux composantes de la force F , (voir figure 2.2), et y_1, y_2 les deux coordonnées définies par:

$$y_1 = y/\gamma_1 \quad \text{et} \quad y_2 = y/\gamma_2 \tag{4.2.3}$$

Les paramètres γ_1, γ_2, q_1 et q_2 dans les équations précédentes sont le résultat de certaines combinaisons des constantes élastiques du matériau. En particulier γ_1^2, γ_2^2 sont les deux racines de l'équation caractéristique suivante:

$$C_{11} C_{22} \gamma^4 + [C_{12} (C_{12} + 2C_{66}) - C_{11} C_{22}] \gamma^2 + C_{22} C_{66} = 0 \tag{4.2.4}$$

Les constantes q_1 et q_2 sont reliées à γ_1^2 et γ_2^2 par les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
 q_1 &= (C_{11} \gamma_1^2 - C_{66}) / (C_{12} + C_{66}) \\
 q_2 &= (C_{11} \gamma_2^2 - C_{66}) / (C_{12} + C_{66})
 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Il apparaît de ces résultats que les constantes γ_1^2 et γ_2^2 sont toutes les deux soit des réelles positives, soit des complexes conjuguées avec des parties réelles positives. Les équations (4.2.1) et (4.2.2) sont écrites avec l'hypothèse que les deux constantes γ_1^2 et γ_2^2 sont toutes les deux réelles et positives.

Des équations similaires peuvent être écrites dans le cas où les deux constantes sont des nombres complexes conjugués (Green 1943)(Crouch 1983), mais cette situation à une signification physique particulière et très limitée. On ne va pas la considérer dans notre étude. Le cas particulier de l'isotropie apparaît quand on a $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

4.3 Méthode des contraintes fictives

Pour développer la méthode des contraintes fictives pour un solide élastique anisotrope, on va chercher la solution du problème illustré sur la figure (4.1). La solution est obtenue en intégrant le résultat donné ci-dessus pour l'état de déformation plane (ou contrainte plane) du problème de Kelvin. La géométrie utilisée pour cette intégration est montrée sur la même figure.

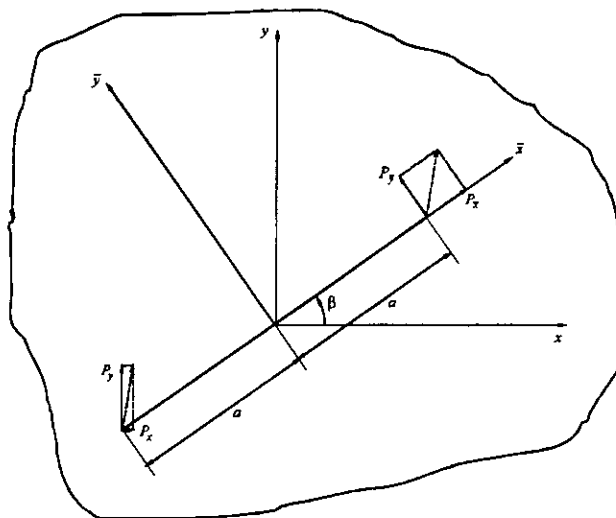


Figure 4.1 Contraintes constantes sur le segment $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$.

Les deux repères mentionnés sur la figure sont reliés entre eux par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta \\y &= \bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta\end{aligned}\quad (4.3.1)$$

et le segment de droite en question est défini par les conditions $|\bar{x}| \leq a$, $\bar{y} = 0$. Les contraintes appliquées sur ce segment peuvent être données dans l'un des deux repères indiqués sur la figure. Initialement on va les donner dans le repère global. On notera qu'on peut les spécifier par rapport au repère local en utilisant les transformations suivantes:

$$\begin{aligned}P_x &= P_{\bar{x}} \cos \beta - P_{\bar{y}} \sin \beta \\P_y &= P_{\bar{x}} \sin \beta + P_{\bar{y}} \cos \beta\end{aligned}\quad (4.3.2)$$

Les systèmes (4.2.1) et (4.2.2) indiquent que les déplacements et les contraintes pour l'état de contrainte plane du problème de Kelvin dépendent des fonctions $\ln(x^2 + y_i^2)^{1/2}$, $\arctan(y_i / x)$, $x / (x^2 + y_i^2)$ et $y_i / (x^2 + y_i^2)$ où $i = 1, 2$. En utilisant (4.3.1), on exprime ces fonctions par rapport au repère local par:

$$\begin{aligned}\ln(x^2 + y_i^2)^{1/2} &= \ln(A_i \bar{x}^2 + B_i \bar{x} \bar{y} + C_i \bar{y}^2)^{1/2} \\ \arctan \frac{y_i}{x} &= \arctan \frac{1}{\gamma_i} \frac{\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta}{\bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta} \\ \frac{x}{x^2 + y_i^2} &= \frac{\bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta}{A_i \bar{x}^2 + B_i \bar{x} \bar{y} + C_i \bar{y}^2} \\ \frac{y_i}{x^2 + y_i^2} &= \frac{1}{\gamma_i} \frac{\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta}{A_i \bar{x}^2}\end{aligned}\quad (4.3.3)$$

où

$$\begin{aligned}A_i &= (\gamma_i^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta) / \gamma_i^2 \\ B_i &= (1 - \gamma_i^2) \sin 2\beta / \gamma_i^2 \\ C_i &= (\gamma_i^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta) / \gamma_i^2\end{aligned}\quad (4.3.4)$$

pour $i = 1, 2$.

Les déplacements et les contraintes dus aux contraintes constantes P_x et P_y appliquées sur le segment de droite $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$ peuvent être maintenant calculés de la même manière utilisée dans le paragraphe 2.3. C'est, en résumé, la somme des effets des "forces" $F_x = P_x d\xi$ et $F_y = P_y d\xi$ sur une série d'éléments infinitésimaux du segment $|\bar{x}| \leq a, \bar{y} = 0$. Sans mentionner les étapes intermédiaires les déplacements sont:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{+q_1 q_2}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} P_x \left[\frac{\gamma_1}{q_1} I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{\gamma_2}{q_2} I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
 &\quad - \frac{-1}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} P_y \left[I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
 u_y &= \frac{-q_1 q_2}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} P_x \left[I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
 &\quad - \frac{-1}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)} P_y \left[\frac{q_1}{\gamma_1} I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{q_2}{\gamma_2} I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right]
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Et les contraintes sont:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{+q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} P_x \left[\frac{(1+q_1)}{\gamma_1 q_1} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{(1+q_2)}{\gamma_2 q_2} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
 &\quad - \frac{+1}{2\pi (q_1 - q_2)} P_y \left[\frac{(1+q_1)}{\gamma_1^2} I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{(1+q_2)}{\gamma_2^2} I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
 \sigma_{yy} &= \frac{-q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} P_x \left[\frac{\gamma_1 (1+q_1)}{q_1} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{\gamma_2 (1+q_2)}{q_2} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
 &\quad - \frac{-1}{2\pi (q_1 - q_2)} P_y \left[(1+q_1) I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - (1+q_2) I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
 \sigma_{xy} &= \frac{+q_1 q_2}{2\pi (q_1 - q_2)} P_x \left[\frac{(1+q_1)}{q_1} I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{(1+q_2)}{q_2} I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right] \\
 &\quad - \frac{-1}{2\pi (q_1 - q_2)} P_y \left[\frac{(1+q_1)}{\gamma_1} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_1) - \frac{(1+q_2)}{\gamma_2} I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_2) \right]
 \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Les fonctions $I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i)$ jusqu'à $I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i)$ dans ces équations sont définies par:

$$\begin{aligned}
 I_1(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i) &= \frac{\bar{y}}{\gamma_i A_i} [\theta_1(\gamma_i) - \theta_2(\gamma_i)] - \left(\bar{x} - a + \frac{B_i \bar{y}}{2A_i} \right) \ln r_1(\gamma_i) + \left(\bar{x} + a + \frac{B_i \bar{y}}{2A_i} \right) \ln r_2(\gamma_i) \\
 I_2(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i) &= \left(\bar{x} - a + \frac{B_i \bar{y}}{2A_i} \right) \theta_1(\gamma_i) - \left(\bar{x} + a + \frac{B_i \bar{y}}{2A_i} \right) \theta_2(\gamma_i) - \frac{\bar{y}}{\gamma_i A_i} \ln[r_1(\gamma_i) / r_2(\gamma_i)] \quad (4.3.7) \\
 I_3(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i) &= -\frac{\cos \beta}{A_i} \ln[r_1(\gamma_i) / r_2(\gamma_i)] - \frac{\sin \beta}{\gamma_i A_i} [\theta_1(\gamma_i) - \theta_2(\gamma_i)] \\
 I_4(\bar{x}, \bar{y}, \gamma_i) &= -\frac{\sin \beta}{\gamma_i A_i} \ln[r_1(\gamma_i) / r_2(\gamma_i)] + \frac{\cos \beta}{A_i} [\theta_1(\gamma_i) - \theta_2(\gamma_i)]
 \end{aligned}$$

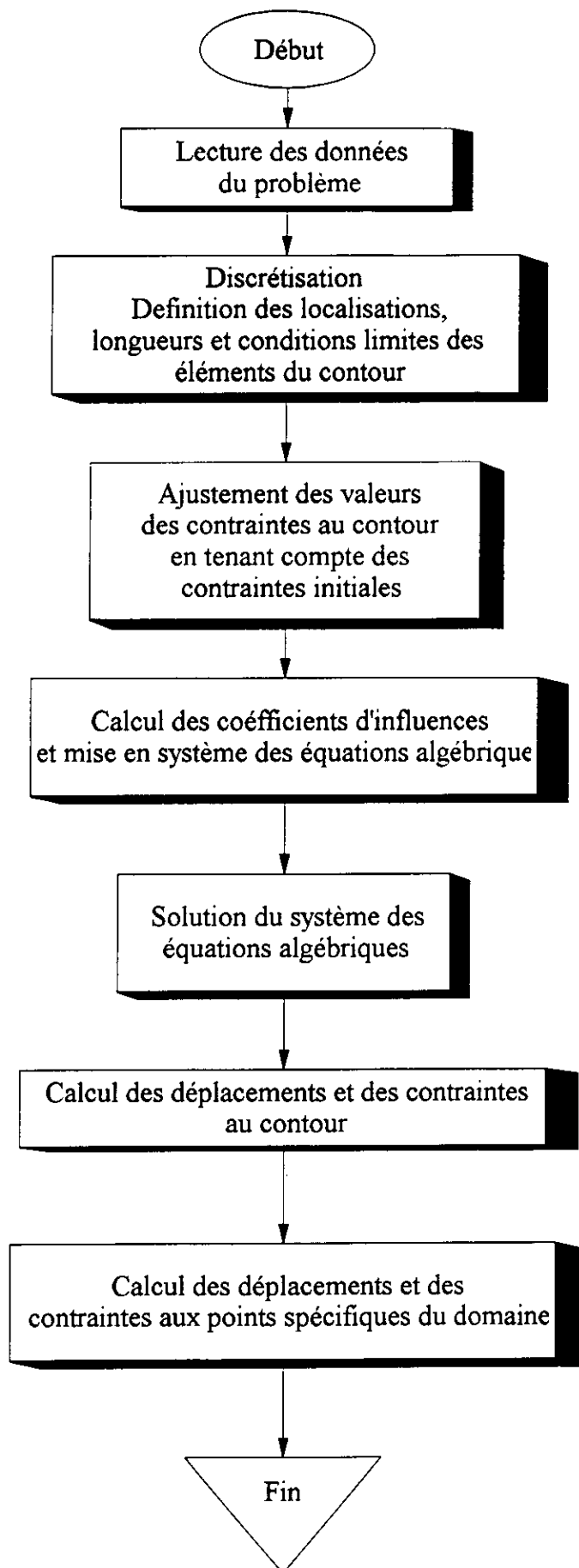
où nous avons utilisé les notations :

$$\begin{aligned}
 r_1(\gamma_i) &= [A_i (\bar{x} - a)^2 + B_i (\bar{x} - a) \bar{y} + C_i \bar{y}^2]^{1/2} \\
 r_2(\gamma_i) &= [A_i (\bar{x} + a)^2 + B_i (\bar{x} + a) \bar{y} + C_i \bar{y}^2]^{1/2} \\
 \theta_1(\gamma_i) &= \arctan \frac{\bar{y} / (\gamma_i A_i)}{(\bar{x} - a) + \frac{1}{2} B_i \bar{y} / A_i} \\
 \theta_2(\gamma_i) &= \arctan \frac{\bar{y} / (\gamma_i A_i)}{(\bar{x} + a) + \frac{1}{2} B_i \bar{y} / A_i} \quad (4.3.8)
 \end{aligned}$$

où A_i, B_i, C_i sont données par (4.3.4).

Finalement, on notera que les équations (4.3.5) et (4.3.6) peuvent être écrites en fonction des contraintes appliquées $P_{\bar{x}}$ et $P_{\bar{y}}$, parallèles et perpendiculaires au segment, en utilisant (4.3.2). Dans cette forme, les équations sont comparables à (2.5.8) et (2.5.9) et donc peuvent être utilisées pour calculer les coefficients d'influences de la méthode des contraintes fictives pour un solide élastique orthotropique. On utilise la même procédure que dans la section 2.6.

4.4 L'organigramme du programme réalisé :





CHAPITRE 5

*RÉSULTATS ET
INTERPRÉTATIONS*

CHAPITRE 5

RÉSULTATS ET INTERPRÉTATIONS

Remarque: Les exemples traités dans ce chapitre se limitent à l'état de contrainte plane. Le micro-ordinateur utilisé dans la partie numérique est un 80386 DX33 muni d'un coprocesseur mathématique. Le compilateur fortran utilisé est LAHEY (version 1990). Le temps d'exécution des exemples varie entre 3 secondes et 5 minutes.

Exemple 1: Plaque percée soumise à une traction à l'infini.

Cet exemple traite le problème d'une plaque orthotrope infinie percée d'un trou circulaire au centre de rayon R , et soumise à une traction simple P (pression hydrostatique) à l'infini (figure 5.1).

Les caractéristiques physiques de la plaque sont:

$$-E_1=6.45 \times 10^2 \text{ KPa}$$

$$-E_2=1.70 \times 10^4 \text{ KPa}$$

$$-v_{12}=0.021$$

$$-G_{12}=8.70 \times 10^2 \text{ Kpa.}$$

Ces constantes sont données par Green et Taylor 1945 (S.L.Crouch 1983) pour une planche à sapin.

Le rayon du trou est pris comme étant l'unité.

La valeur du chargement est $P=100$ Kpa.

La plaque est chargée perpendiculairement à l'axe des fibres (axe majeur d'anisotropie) qui est l'axe y dans cet exemple.

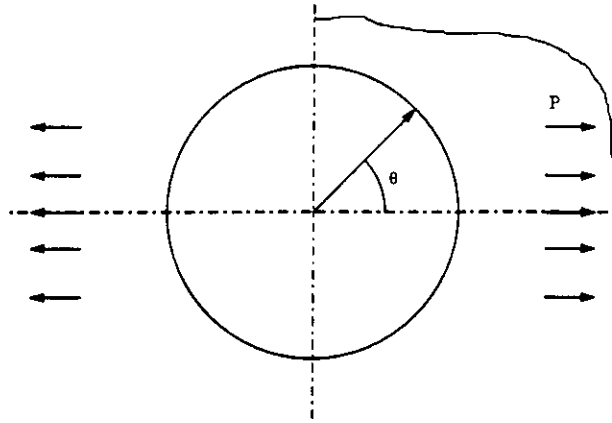


Figure 5.1 Plaque percée chargée à l'infini.

La solution analytique de ce problème pour la contrainte tangentielle (S.G.Lekhnitskii 1963) est donnée par la relation:

$$\sigma_{\theta} = P \frac{E_{\theta}}{E_1} [\mu_1 \mu_2 \cos^2 \theta + (1+n) \sin^2 \theta] \quad (5.1.1)$$

où μ_1 et μ_2 sont les solutions imaginaires pures de l'équation quadratique suivante:

$$\frac{\mu^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \mu^2 + \frac{1}{E_2} = 0 \quad (5.1.2)$$

Pour le cas de plaques orthotropes les nombres $\mu_1 \mu_2$, $\mu_1^2 + \mu_2^2$ et $n = -i(\mu_1 + \mu_2)$ sont toujours réels. Ils sont reliés aux constantes élastiques par les relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \mu_2 &= -\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \\ \mu_1^2 + \mu_2^2 &= 2\nu_{12} - \frac{E_1}{G_{12}}, \\ n = -i(\mu_1 + \mu_2) &= \sqrt{\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} + 2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.3)$$

Si R est le rayon du cercle et θ l'angle polaire mesuré à partir de l'axe x alors le module de Young E_θ selon l'axe \bar{x}_θ sera calculé à partir de l'équation:

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\cos^4 \theta}{E_2} \quad (5.1.4)$$

E_θ est positif pour toutes les valeurs de θ .

La distribution de la contrainte tangentielle est symétrique par rapport à l'axe de symétrie x et elle s'annule pour les valeurs suivantes $\theta=17^\circ 30'$, $\theta=162^\circ 30'$, $\theta=197^\circ 30'$ et $\theta=342^\circ 30'$. Pour $\theta=0$ la valeur de la contrainte tangentielle est maximale en valeur absolue et vaut $\sigma_\theta = -5.14 \times 10^2$ Kpa. Dans le ca isotrope nous avons $\sigma_{\theta \max} / p = 3$. Dans notre exemple nous trouvons $\sigma_{\theta \max} / p = 5.14$. Par conséquent nous pouvons conclure que le degré d'anisotropie joue un rôle important dans l'évolution de $\sigma_{\theta \max}$. C'est un paramètre dont il faut tenir compte si nous nous intéressons au facteur de concentration de contrainte.

Pour résoudre ce problème numériquement on a utilisé le fichier de données suivant:

- une double symétrie.
- nombre d'arc de cercle égal à 1 et son angle d'ouverture égale à 180° .
- nombre d'éléments à la frontière $N=50$.
- type du problème extérieur.

L'avantage de la double symétrie est de réduire d'un quart le nombre d'équations algébriques à résoudre (réduire le temps d'exécution du programme).

Le résultat donné par le code de calcul que nous avons construit est illustré sur la figure (5.2).

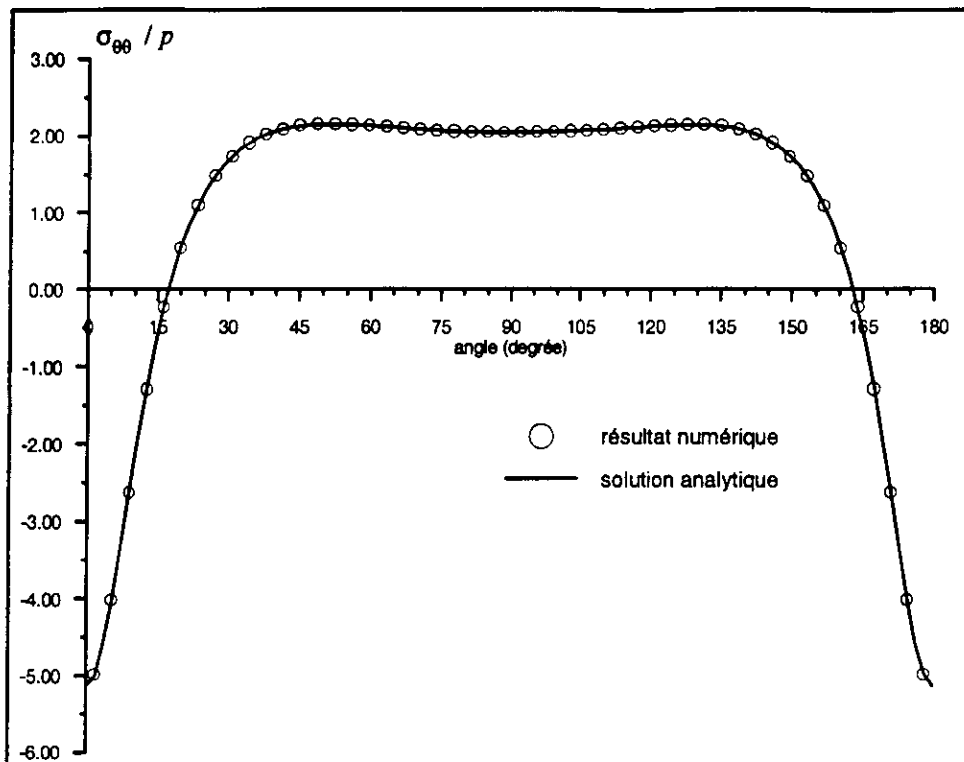


Figure 5.2 Contrainte tangentielle sur le contour d'un trou circulaire dans une plaque chargée à l'infini.

On voit de la figure (5.2) qu'il y a une très bonne convergence de la solution numérique vers la solution analytique. La variation de la contrainte tangentielle sur le contour est périodique et de période π .

Exemple 2: Influence des paramètres physiques.

Dans cet exemple nous allons illustrer l'influence du changement des paramètres physiques sur la variation de la contrainte tangentielle sur le contour. Pour cela, nous prenons la même plaque étudiée dans l'exemple précédent avec les paramètres physiques correspondants suivants:

- $E_1 = 0.6 \times 10^5$ KPa
- $E_2 = 1.2 \times 10^5$ KPa
- $\nu_{12} = 0.036$
- $G_{12} = 0.07 \times 10^5$ Kpa.

La valeur du chargement est $P = 100$ Kpa.

Ces constantes élastiques sont données par S.G.Lekhnitskii 1963 (Handbook of airplane construction, vol.III, "The stability of airplane," Ts.AGI,1939.) pour une planche de contre-plaqué.

Le résultat obtenu à partir du programme numérique élaboré est illustré sur la figure (5.3).

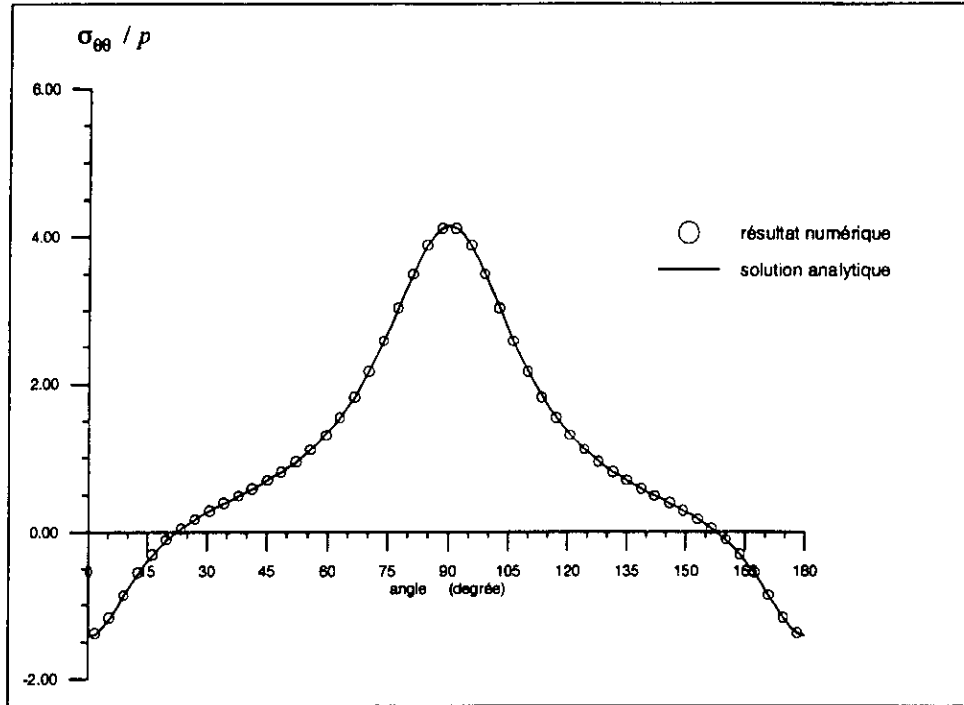


Figure 5.3 Contrainte tangentielle sur le contour d'un trou circulaire dans une plaque chargée à l'infini.

La même conclusion peut être faite en ce qui concerne la convergence de la solution numérique vers la solution analytique. Avec le changement des paramètres physiques, on remarque que la contrainte tangentielle maximale est une contrainte de traction alors qu'elle était une contrainte de compression dans l'exemple précédent. On peut noter aussi que $\sigma_{\theta \max} / p = 4$ est à $\theta = 90^\circ$ alors que dans l'exemple précédent $\sigma_{\theta \max} / p = 5.14$ était à $\theta = 0^\circ$. La facette où la contrainte tangentielle s'annule s'est déplacée. Par exemple, pour le premier quart de cercle de l'exemple 1, la section où la contrainte tangentielle s'annule se situe à $\theta = 17^\circ 30'$ alors que pour cet exemple elle se situe à $\theta = 22^\circ 30'$. La variation de la contrainte tangentielle est périodique et de période π .

Exemple 3: Influence de l'orientation de l'axe des fibres.

Dans cet exemple, nous allons illustrer l'influence du changement de l'axe des fibres sur la variation de la contrainte tangentielle sur le contour. Nous allons prendre comme axe de fibres l'axe x. Les paramètres physiques changeront alors et seront:

- $E_1=1.2 \times 10^5$ Kpa
- $E_2=0.6 \times 10^5$ Kpa
- $\nu_{12}=0.071$
- $G_{12}=0.07 \times 10^5$ Kpa

La valeur du chargement est $P=100$ Kpa.

Le résultat obtenu à partir du programme numérique élaboré est illustré sur la figure (5.4).

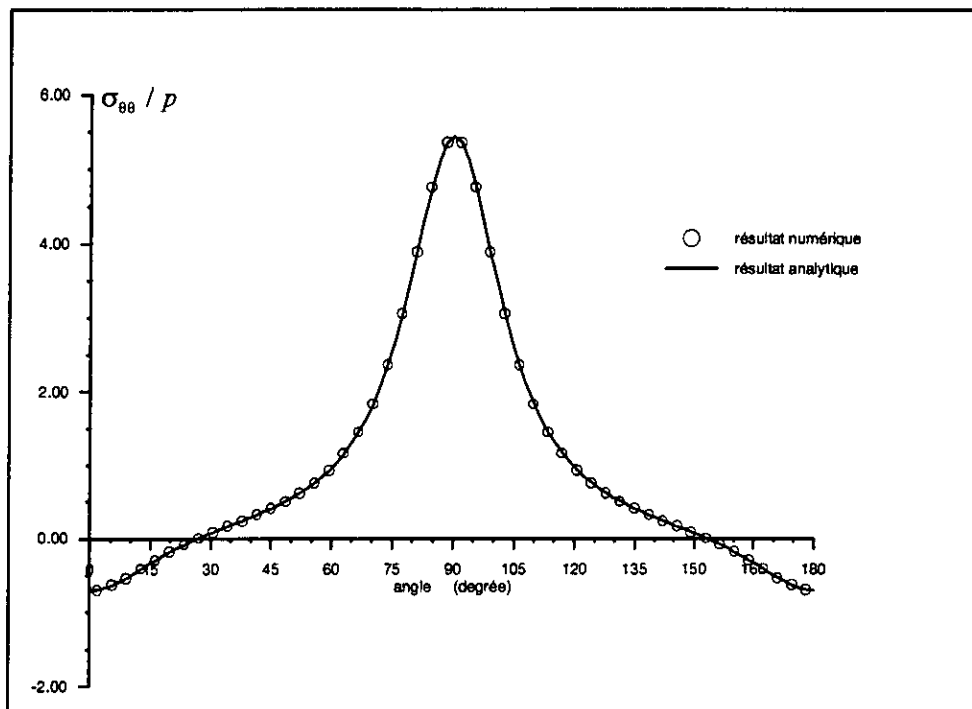


Figure 5.4 Contrainte tangentielle sur le contour d'un trou circulaire dans une plaque chargée à l'infini.

La même conclusion peut être faite en ce qui concerne la convergence de la solution numérique vers la solution analytique. De la figure (5.4) on peut faire les

remarques suivantes: la contrainte tangentielle maximale a augmenté pour atteindre $\sigma_{\theta \max} / p = 5.5$ mais elle est toujours obtenue pour $\theta = 90^\circ$. La section où la contrainte s'annule s'est déplacée et se situe maintenant à $\theta = 27^\circ$. La variation de la contrainte tangentielle est périodique et de période π .

Conclusion: Des trois exemples étudiés pour une plaque infinie percée et soumise à une traction simple à l'infini, on peut dire que le changement des paramètres physiques influe considérablement sur l'allure de la courbe, sur le signe et la valeur de la contrainte tangentielle maximale. Le changement de l'orientation de l'axe des fibres n'influe pas sur l'allure de la courbe mais sur la grandeur de la contrainte tangentielle maximale. Sur les trois exemples étudiés nous remarquons que le point où la contrainte s'annule dépend du problème spécifié.

Exemple 4: Étude d'un chargement quelconque.

Nous avons vu dans les exemples précédents l'influence des paramètres physiques et de l'axe de grain sur la contrainte tangentielle qui agit sur le contour. Dans cet exemple nous allons voir l'influence de l'orientation des axes principaux sur la contrainte et cela en prenant un chargement incliné d'un angle φ par rapport à un axe principal comme le montre la figure (5.5).

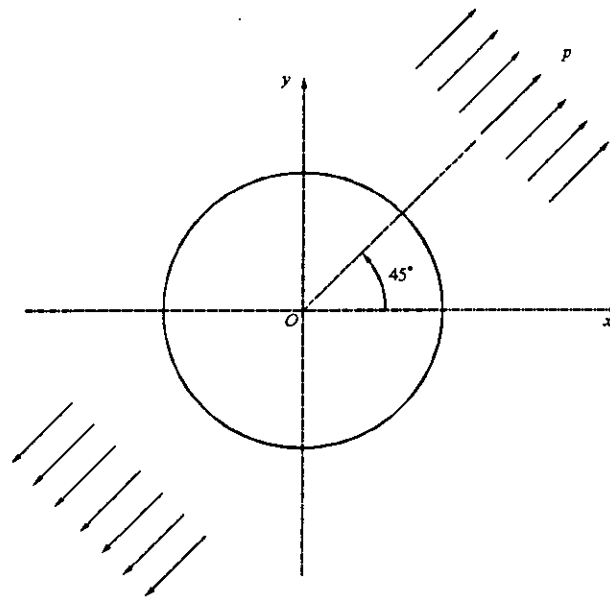


Figure 5.5 Plaque soumise à un chargement incliné à l'infini.

Les paramètres physiques sont:

- $E_1=1.2 \times 10^5$ Kpa
- $E_2=0.6 \times 10^5$ Kpa
- $\nu_{12}=0.071$
- $G_{12}=0.07 \times 10^5$ Kpa

La valeur du chargement est $P=100$ Kpa.

La distribution des contraintes n'est pas symétrique dans une plaque orthotrope par rapport à la direction du chargement, par contre, elle est symétrique par rapport au centre de la cavité. La solution analytique pour le cas d'une plaque isotrope est donnée par (S.G.Lekhnitskii 1963):

$$\sigma_\theta = P[1 - 2 \cos 2(\theta - \varphi)] \quad (5.4.1)$$

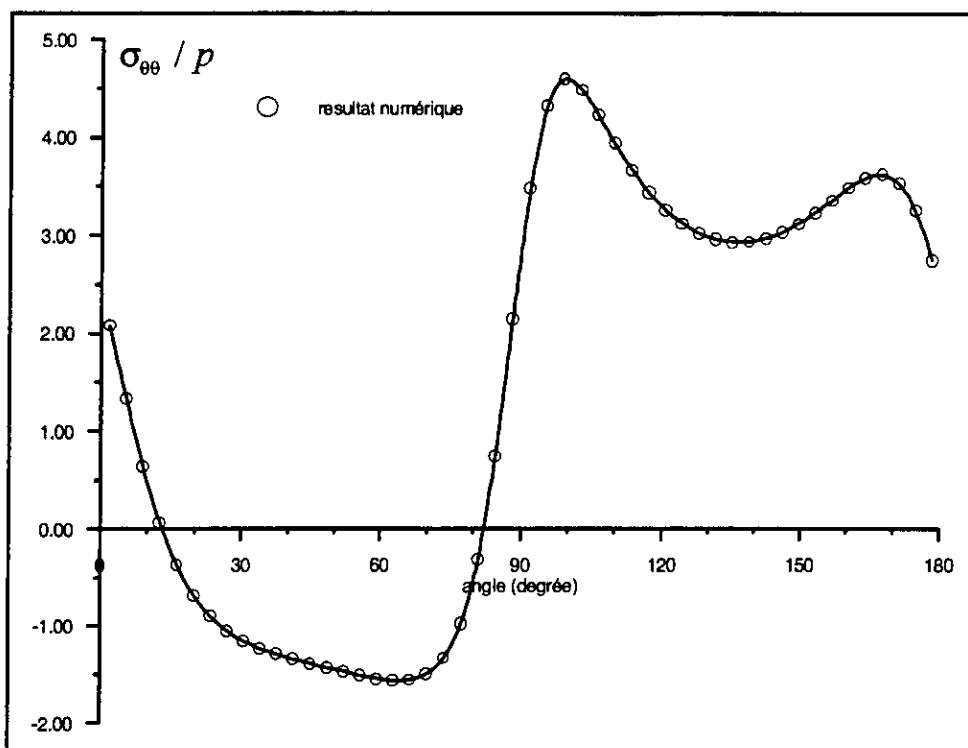


Figure 5.6 Contrainte tangentielle sur le contour d'un trou circulaire dans une plaque chargée à l'infini à 45° par rapport à l'axe x.

La solution numérique est obtenue en prenant $\varphi=45^\circ$, un chargement $P=100$ Kpa, nombre d'éléments sur la frontière $N=100$ (pas de symétrie).

La figure (5.6) montre la variation de la contrainte tangentielle le long du contour; la valeur maximale du rapport σ_θ/P est 4.55 alors que pour une plaque isotrope elle est 3.

Les points où σ_θ s'annule sont situés à: $\theta=13^\circ$, 82° , 193° et 262° .

Exemple 5: Plaque percée soumise à un chargement tangential à l'infini.

Nous allons prendre dans cet exemple la même plaque que dans l'exemple précédent en gardant les mêmes caractéristiques physiques, mais avec un chargement à l'infini tangential égal à $P_{xy}=s$.(figure 5.7). Les paramètres physiques sont:

- $E_1=1.2 \times 10^5$ Kpa
- $E_2=0.6 \times 10^5$ Kpa
- $\nu_{12}=0.071$
- $G_{12}=0.07 \times 10^5$ Kpa

La valeur du chargement est $s=100$ Kpa.

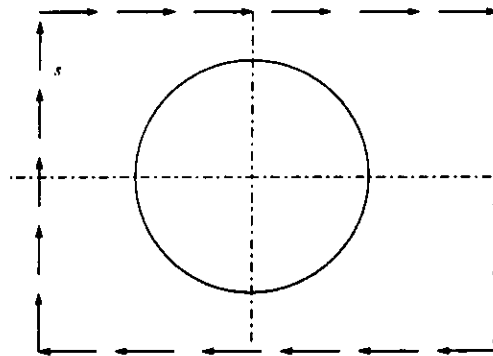


Figure 5.7 plaque infinie chargée tangentiellement à l'infini

La solution analytique de ce problème (S.G.Lekhnitskii 1963) est:

$$\sigma_\theta = -s \frac{E_\theta}{2E_1} n(1+n-\mu_1\mu_2) \sin 2\theta \quad \cdot \quad (5.5.1)$$

Dans le cas où la plaque est isotrope la contrainte tangentielle est:

$$\sigma_{\theta} = -4s \sin 2\theta \quad (5.5.2)$$

La distribution de la contrainte tangentielle n'est pas symétrique par rapport aux axes principaux, par contre, la contrainte tangentielle atteint sa valeur absolue maximale en quatre points du contour situés symétriquement par rapport à ces axes. Elle s'annule aux points d'intersection du contour avec les axes principaux.

Le résultat obtenu à partir du programme numérique élaboré est illustré sur la figure (5.8). Le problème étudié dans cet exemple ne requiert aucune symétrie. Pour le résoudre numériquement on a divisé l'arc de cercle d'angle d'ouverture 360° -le contour- en 100 éléments.

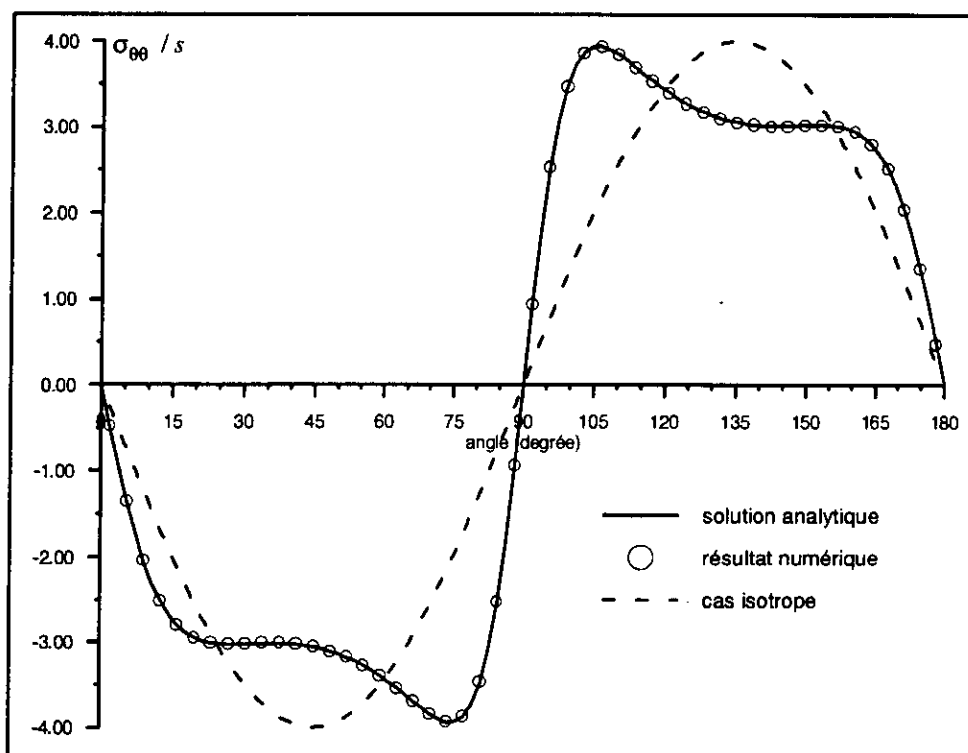


Figure 5.8 Contrainte tangentielle sur le contour d'un trou circulaire dans une plaque chargée tangentiellement à l'infini.

La solution numérique est clairement une bonne approximation de l'expression (5.5.1) sur tous les éléments du contour. La valeur maximale du rapport σ_{θ} / s vaut 3.95, elle est approximativement égale à la valeur du même rapport pour le cas d'une plaque

isotrope qui est égale à 4. La variation de la contrainte tangentielle sur le contour est périodique, de période π et s'alterne sur chaque quart de cercle une fois de compression et une fois de traction.

Exemple 6: Plaque infinie percée au centre et chargée radialement sur le contour.

On va reprendre la même plaque étudiée dans l'exemple 3 et on changera seulement le chargement qui sera maintenant radial et uniforme sur le contour comme le montre la figure (5.9). Les paramètres physiques sont:

- $E_1=1.2 \times 10^5$ Kpa
- $E_2=0.6 \times 10^5$ Kpa
- $\nu_{12}=0.071$
- $G_{12}=0.07 \times 10^5$ Kpa.

La valeur du chargement est $P=100$ Kpa.

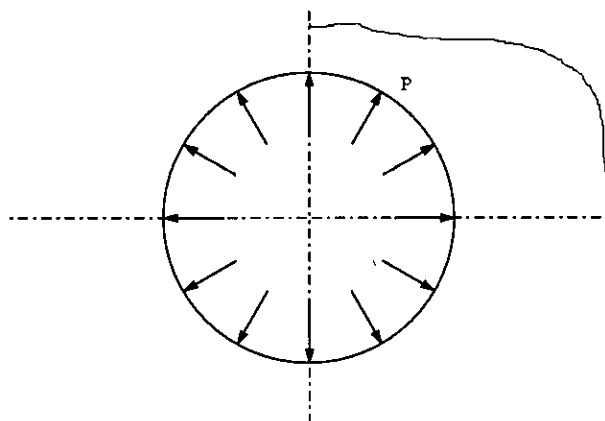


Figure 5.9 Plaque percée chargée radialement et uniformément.

La solution analytique (S.G.Lekhnitskii 1963) est donnée par la relation suivante:

$$\frac{\sigma_{\theta}}{P} = \frac{E_{\theta}}{E_1} \left[\mu_1 \mu_2 + n(\sin^2 \theta - \mu_1 \mu_2 \cos^2 \theta) + (1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \quad (5.6.1)$$

où μ_1 , μ_2 , n et E_{θ} sont donnés par les relations (5.1.3) et (5.1.4). La variation de la contrainte tangentielle est symétrique par rapport aux axes de symétrie x et y . La contrainte tangentielle maximale est obtenue pour $\theta=90^{\circ}$ égal à $P \left(n - \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right)$.

Le résultat obtenu montre que la distribution de la contrainte tangentielle sur le contour n'est pas uniforme pour une plaque orthotrope, alors qu'elle l'est pour une plaque isotrope et est constante $\overline{\sigma_{\theta}}=P$.

La limite de la cavité se déforme après application de la charge et se transforme en une ellipse de semi-axes principaux a' et b' égaux à :

$$\left. \begin{aligned} a' &= a \left[1 - P \left(\frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} - \frac{n + \nu_{12}}{E_1} \right) \right] \\ b' &= b \left[1 - P \left(\frac{1 - n}{\sqrt{E_1 E_2}} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.6.2)$$

Le résultat obtenu à partir du programme numérique élaboré est illustré sur la figure (5.10).

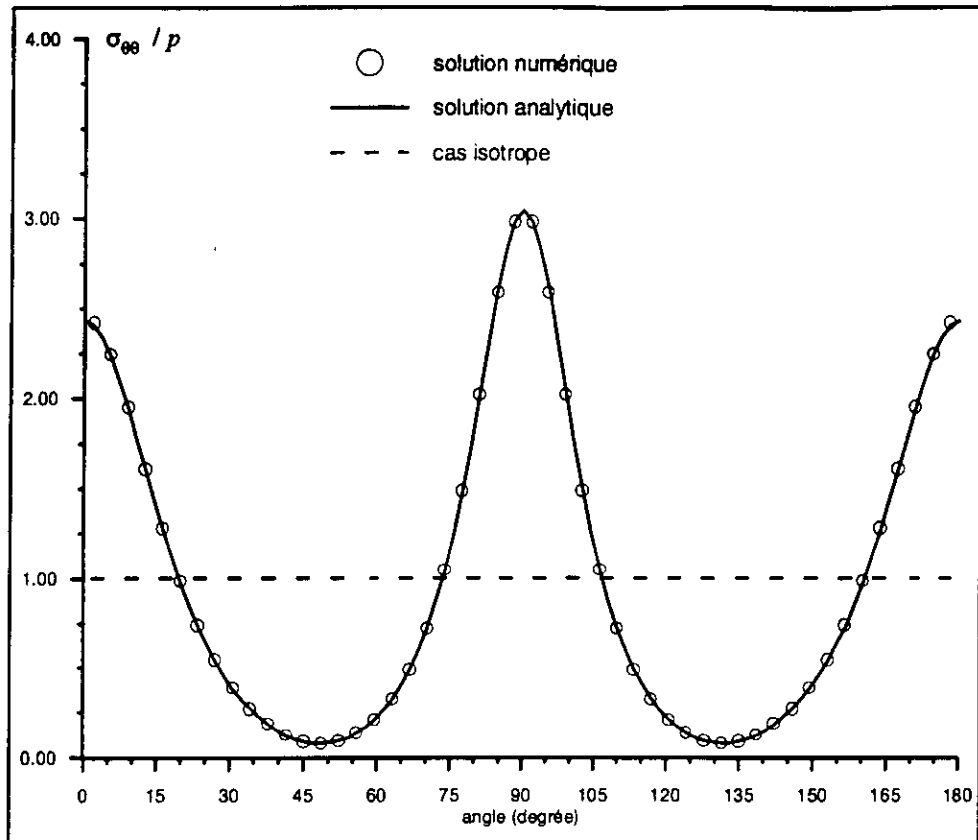


Figure 5.10 Contrainte tangentielle sur le contour d'un trou circulaire dans une plaque chargée radialement.

La figure 5.10 montre la distribution de la contrainte tangentielle le long du contour de la cavité dans une plaque infinie (l'axe de grain est parallèle à l'axe des x). La valeur maximale du rapport σ_θ/P est égale à 3.04 et est obtenue pour $\theta=90^\circ$ et $\theta=270^\circ$.

On voit aussi qu'il y a une très bonne convergence de la solution numérique vers la solution analytique. La variation de la contrainte tangentielle sur le contour est périodique et de période π . Dans cet exemple, on remarque qu'il n'existe pas une section où la contrainte tangentielle s'annule et que celle-ci est toujours de traction. Enfin on notera que la valeur minimale du rapport σ_θ/P est de l'ordre de 1/10. Le changement des paramètres physiques et de l'axe d'orientation des fibres conduiront aux mêmes conclusions que dans les exemples précédents.

Exemple 7: Plaque infinie percée et chargée tangentiellement sur le contour.9

On va reprendre la même plaque étudiée dans l'exemple 3 et on changera seulement le chargement qui sera maintenant tangential au contour comme le montre la figure (5.11).

Les paramètres physiques sont:

- $E_1=1.2 \times 10^5$ Kpa
- $E_2=0.6 \times 10^5$ Kpa
- $\nu_{12}=0.071$
- $G_{12}=0.07 \times 10^5$ Kpa.

La valeur du chargement est $P_s = t = 100$ Kpa.

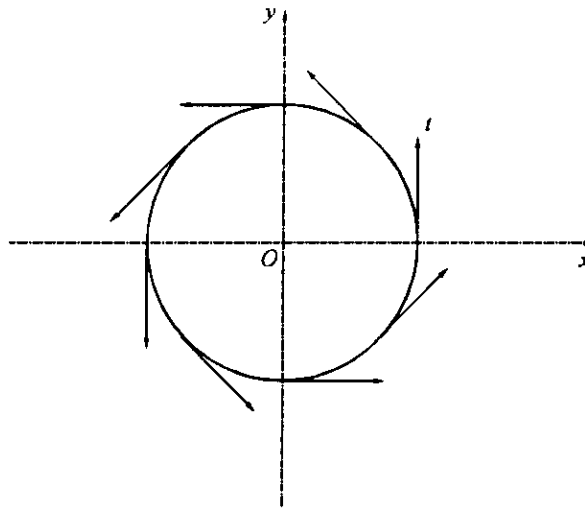


Figure 5.11 Plaque percée chargée tangentiellement sur le contour.

La solution analytique du problème (S.G.Lekhnitskii 1963) est donnée par la relation suivante:

$$\sigma_{\theta} = t \frac{E_0}{2E_1} \sin 2\theta \left[\mu_1^2 \mu_2^2 - 1 + n(1 + \mu_1 \mu_2) + (1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2) \cos 2\theta \right] \quad (5.7.1)$$

où t est la contrainte tangentielle.

Pour une plaque isotrope $\sigma_{\theta}=0$. La courbe de la variation de la contrainte tangentielle sur le contour est illustrée sur la figure (5.12). Elle montre que σ_{θ} change

de signe plusieurs fois sur la période qui est π . La valeur maximale de la contrainte sur le contour dépasse le chargement appliqué et est égale à $1.5t$.

Pour résoudre le problème numériquement on prend en considération tout le contour parce qu'il n'y a pas de symétrie. On a divisé le contour en $N=100$ éléments. Le résultat obtenu à partir du programme élaboré est illustré sur la figure 5.12.

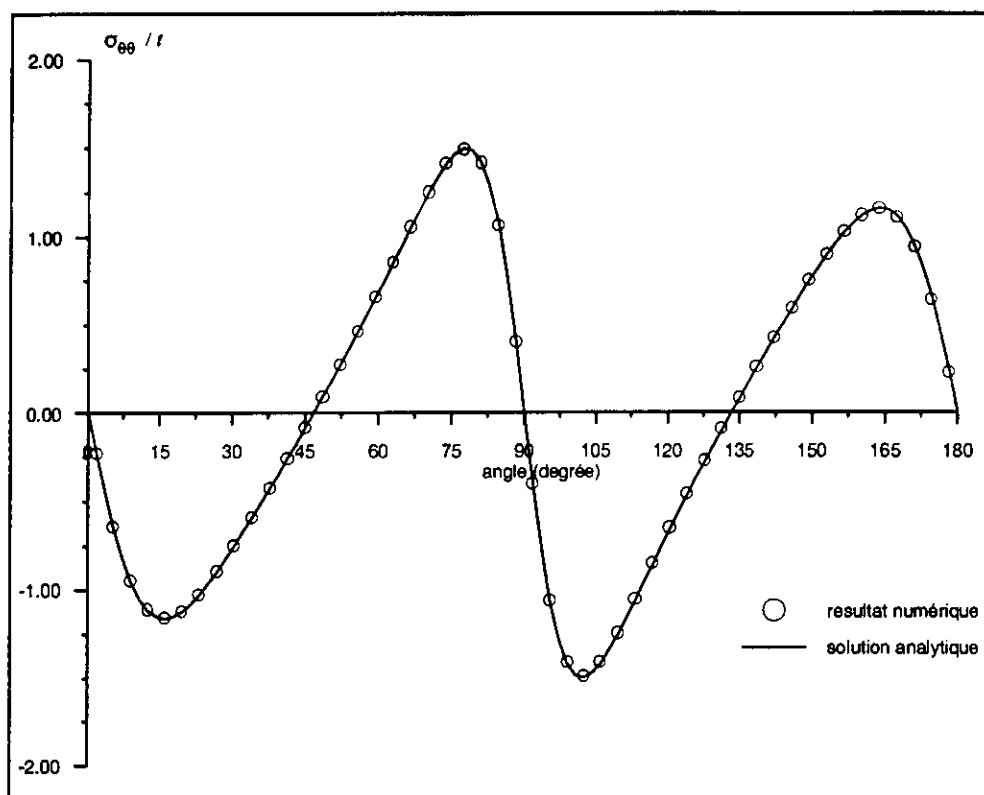


Figure 5.12 Contrainte tangentielle sur le contour d'un trou circulaire dans une plaque chargée tangentiellement.

La figure (5.12) montre que la solution numérique du problème converge vers la solution analytique. Les sections où la contrainte tangentielle s'annule sont situées en des points symétriques par rapport au centre du trou, $\theta=0^\circ, 47^\circ, 90^\circ, 133^\circ, 180^\circ, 227^\circ, 270^\circ, 313^\circ, 360^\circ$.

Exemple 8: L'influence du rapport r_i/r_e d'un anneau circulaire encasté et chargé tangentiellement sur le rayon intérieur.

Soit l'anneau circulaire illustré sur la figure (5.13). Les conditions aux limites sur cet anneau sont (F.J.Rizzo et D.J.Shippy 17 octobre 1969):

- un encastrement imposé sur le rayon extérieur $u_s = u_n = 0$
- un chargement tangentiel sur le rayon intérieur $P_s = 100 \text{ Kpa}$, $P_n = 0$
- Chaque contour est divisé en 100 éléments égaux.

Les paramètres physiques sont:

- $E_1 = 1.2 \times 10^5 \text{ Kpa}$
- $E_2 = 0.6 \times 10^5 \text{ Kpa}$
- $\nu_{12} = 0.071$
- $G_{12} = 0.07 \times 10^5 \text{ Kpa}$

La valeur du chargement est $P_s = t = 100 \text{ Kpa}$.

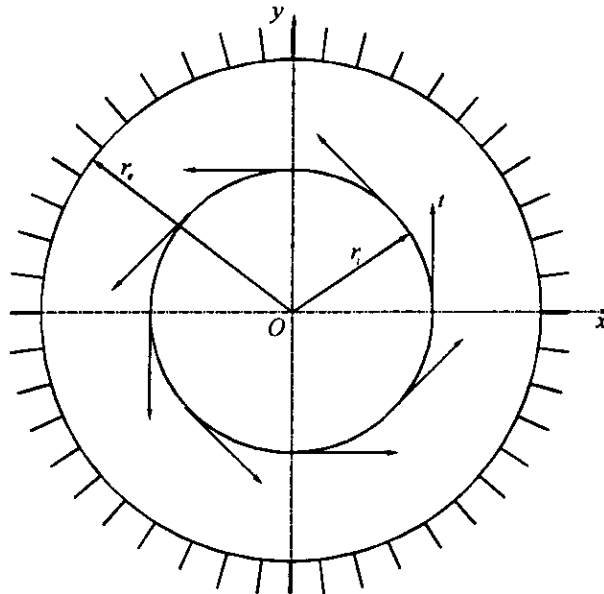


Figure (5.13) problème mixte pour un anneau circulaire

Avec cet exemple nous allons illustrer l'influence du rapport r_i/r_e (rayon intérieur/rayon extérieur) sur la contrainte tangentielle σ_θ qui agit sur la limite intérieure. Pour cela on va prendre comme exemple trois valeurs du rapport indiqué en maintenant le rayon intérieur constant. Ces valeurs sont:

- $r_i/r_e = 1/1.25$
- $r_i/r_e = 1/2$
- $r_i/r_e = 1/1000$.

Le dernier rapport $r_i/r_e = 1/1000$ approche le problème d'une plaque infinie percée soumise à un chargement tangentielle sur le contour. La solution analytique de ce problème est donnée dans l'exemple 7.

La distribution de la contrainte tangentielle sur le contour intérieur de l'anneau obtenue numériquement pour chaque valeur du rapport r_i/r_e est illustrée sur la figure (5.14). On observe qu'elle (la distribution de la contrainte) approche le cas limite ($r_i/r_e = 1/1000$).

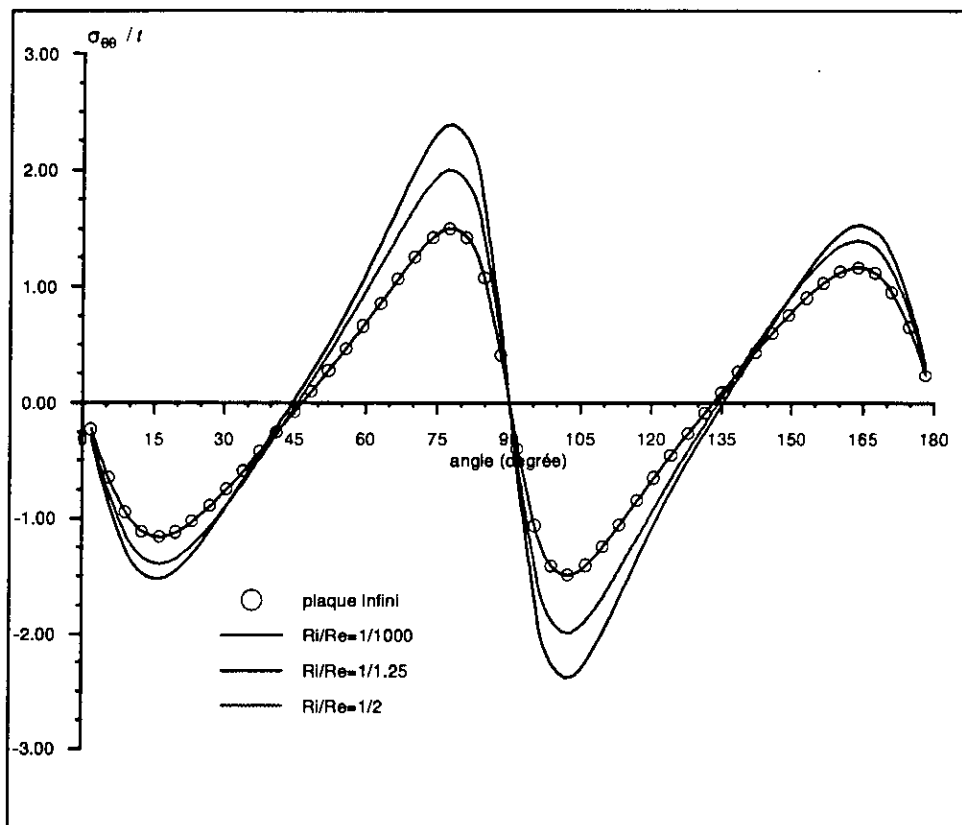


Figure 5.14 distribution de la contrainte tangentielle sur le contour intérieur d'un anneau circulaire.

Le résultat du cas limite converge vers la solution analytique du problème d'une plaque infinie percée et chargée tangentielle sur le contour. On remarque que la contrainte tangentielle varie proportionnellement avec le rapport r_i/r_e (quand le

rapport diminue la contrainte diminue). Les points d'intersection du contour avec les axes x,y ($0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$) sont les points communs où la contrainte s'annule. IL existe d'autre points où la contrainte s'annule mais ils varient d'un rapport à un autre.

Exemple 9: Influence du rapport r/b d'une plaque finie percée.

Soit une plaque finie de largeur b percée d'un trou circulaire de rayon r et soumise à une traction selon l'axe x à l'extrémité. Voir figure (5.15). Les paramètres physiques sont:

- $E_1=1.2 \times 10^5$ Kpa
- $E_2=0.6 \times 10^5$ Kpa
- $\nu_{12}=0.071$
- $G_{12}=0.07 \times 10^5$ Kpa

La valeur du chargement est $P=100$ Kpa.

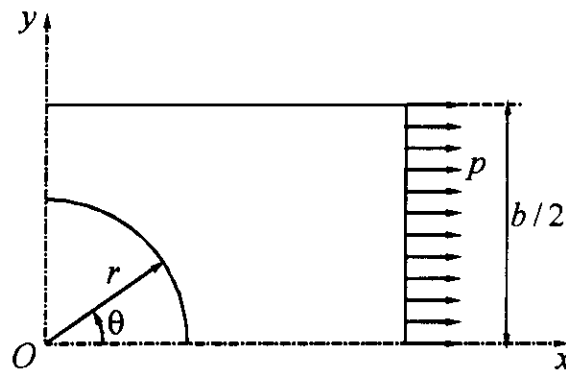


Figure 5.15 Plaque finie percée.

Pour résoudre ce problème numériquement on a introduit le fichier de donnée:

- Une double symétrie.
- Deux segments de droite définissant le contour extérieur de la plaque.
- Nombre d'éléments dans un segment $N_s=5$.
- Un arc de cercle d'angle d'ouverture 90° définissant le contour intérieur de la plaque.
- Nombre d'éléments de l'arc de cercle $N_c=25$.
- Les rapports r/b sont: $r/b=1/5, r/b=1/10, r/b=1/1000$.

Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure (5.16).

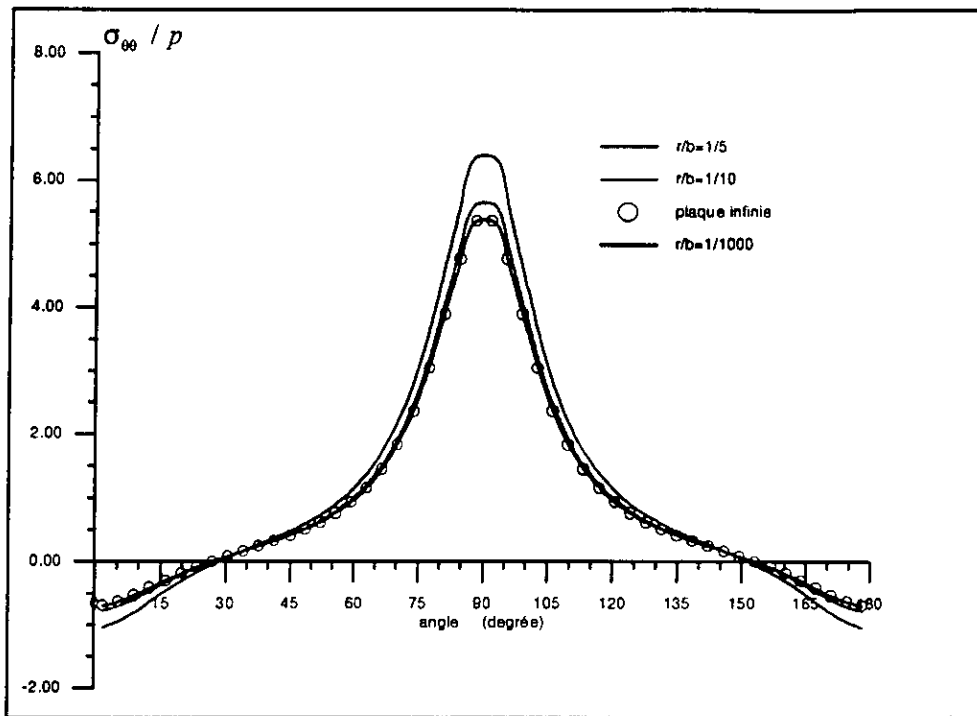


Figure 5.16 distribution de la contrainte tangentielle sur le contour intérieur d'une plaque infinie.

De la figure (5.16) on observe qu'il existe deux zones de contrainte pour un quart de cercle. La première est une zone de compression où la contrainte varie proportionnellement avec le rapport r/b (r/b diminue \Rightarrow la contrainte diminue). La deuxième est une zone de traction où la contrainte varie inversement proportionnelle avec le rapport jusqu'à un point spécifique $\theta = 34.2^\circ$, et proportionnellement dans le reste de la zone. Il n'existe pas de points communs où la contrainte s'annule. Enfin, on voit bien que Le résultat du cas limite converge vers la solution analytique du problème d'une plaque infinie percée au centre et soumise à une traction selon l'axe x à l'infini.

Exemple 10: Essai Brésilien

Cet exemple traite l'essai Brésilien qui consiste à soumettre un disque plein de rayon r à une compression radiale sur un arc de cercle d'angle d'ouverture α comme le montre la figure (5.17).

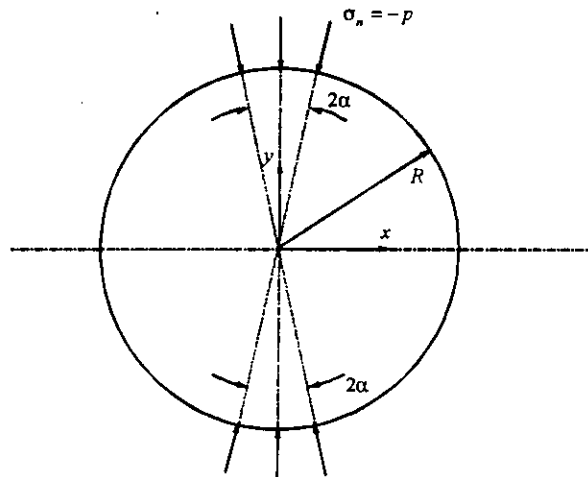


Figure 5.17 Essai Brésilien.

Pour illustrer la variation des contraintes σ_{xx} et σ_{yy} agissantes sur l'axe y nous allons prendre deux matériaux différents. Le premier isotrope de caractéristiques physiques suivantes (S.L.Crouch, A.M.Samerfield 1981):

- $E=0.7 \times 10^5$ Mpa
- $\nu=0.2$
- $G=0.29 \times 10^5$ Mpa.

Le deuxième orthotrope de caractéristiques physiques suivantes:

- $E_1=21 \times 10^6$ Kpa
- $E_2=1.7 \times 10^6$ Kpa
- $G_{12}=1.4 \times 10^6$ Kpa
- $\nu_{12}=0.21$

Ces derniers paramètres sont celles de graphite epoxy (M.D.Snyder, T.A.Cruse 1974).

La valeur du chargement est $P=100$ Kpa.

La solution analytique de ce problème est appelée (Hondros 1959). Le code de calcul numérique que nous avons construit est utilisé pour obtenir deux solutions numériques par la méthode des contraintes fictives. En premier lieu, un quart du contour du disque est divisé en 25 éléments de longueur $\pi R/50$ chacun et la contrainte normale $\sigma_n = -p$ est appliquée sur un seul élément. Dans la seconde approximation, la même portion du contour est divisée en 50 éléments et la contrainte normale $\sigma_n = -p$ est appliquée sur deux éléments.

On divise le segment de droite à étudier en 22 éléments. Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure (5.18).

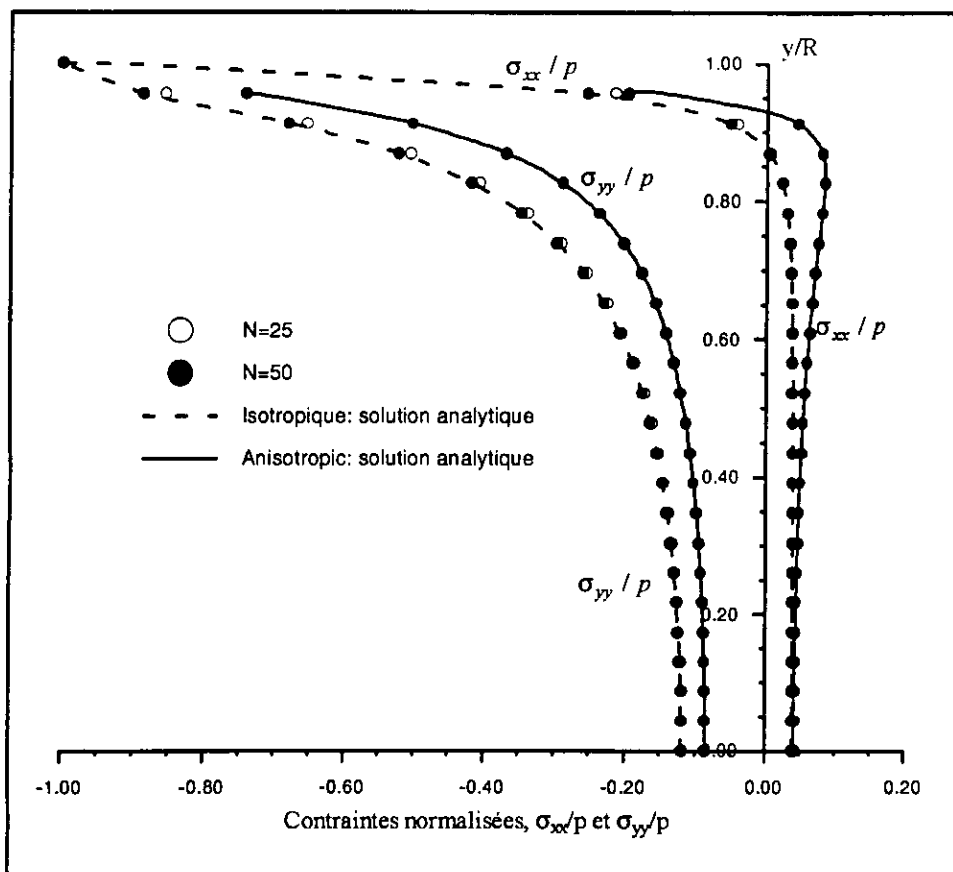


Figure 5.18 variation des contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sur l'axe y d'un disque plein de rayon r.

La figure (5.18) montre les comparaisons entre les valeurs approximatives et les valeurs exactes des contraintes σ_{xx} et σ_{yy} aux points le long de l'axe y du disque. Les résultats numériques sont en bonne exactitude près du centre du disque. Pour les

deux approximations $N=25$ et $N=50$. Les contraintes calculées dévient légèrement des valeurs exactes quand y/R est entre 0.6 et 1.0. La méthode est plus précise en augmentant le nombre d'éléments du contour.

La figure (5.18) montre aussi une comparaison entre la solution d'un problème isotrope et celle d'un problème anisotrope pour le calcul des contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sur l'axe y . La remarque importante pour cet essai est que la nature du milieu étudié n'influe pas sur l'allure de la courbe des deux rapports de contraintes σ_{xx}/p et σ_{yy}/p . On remarque que les deux milieux réagissent presque de la même façon près du centre pour le cas de σ_{xx} , et que σ_{xx} est toujours de traction sauf pour le dernier point en isotropie. La contrainte σ_{yy} est toujours de compression. Pour cet exemple on remarque que la contrainte σ_{yy} pour le cas isotrope est supérieure à celle pour le cas anisotrope alors qu'on avait toujours le contraire dans les exemples précédents.

Exemple 11: Problème de fissure.

Dans cet exemple, nous allons calculer les contraintes σ_{xx} qui agissent sur un segment de droite dans une plaque finie soumise à une traction uniforme sur son extrémité. La plaque comporte une fissure parallélogramme de dimension imposée dans la région centrale. Les dimensions de la plaque et de la fissure sont sur la figure (5.19). On prend les valeurs suivantes pour résoudre ce problème numériquement:

$$- 2L^*/W=3$$

$$- 2a/W=0.8$$

On a divisé le contour en 3 segments: (8,0)-(8,12) 225 éléments, (8,12)-(0,12) 75 éléments et (0,0.32)-(3.2,0) 100 éléments.

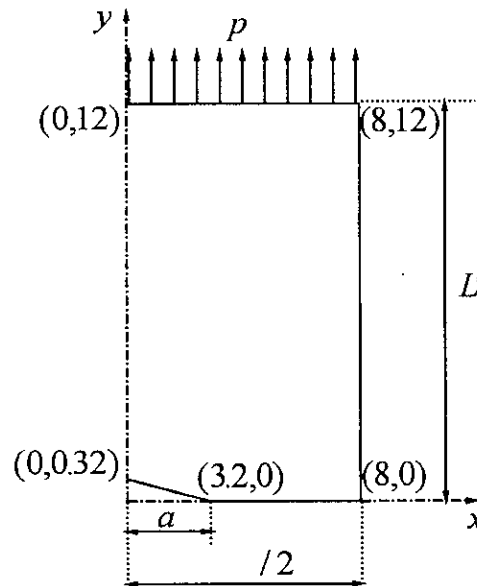


Figure 5.19 Plaque fine comportant une fissure parallélogramme au centre.

Les caractéristiques de la plaque sont (M.D.Snyder, T.A.Cruse 1974):

- $E_1=1.5 \times 10^6$ Kpa
- $E_2=0.12 \times 10^6$ Kpa
- $G_{12}=0.1 \times 10^6$ Kpa
- $\nu_{12}=0.21$

L'axe d'orientation des fibres est l'axe x. Le nombre d'éléments sur le segment de droite est $N=1000$. Le problème a une double symétrie.

Les caractéristiques d'une plaque isotrope sont (S.L.Crouch, A.M.Samerfield 1981):

- $E=0.7 \times 10^5$ Mpa
- $\nu=0.2$
- $G=0.29 \times 10^5$ Mpa

La valeur du chargement est $P=100$ Kpa.

Le résultat obtenu à partir du code de calcul élaboré est illustré sur la figure (5.20).

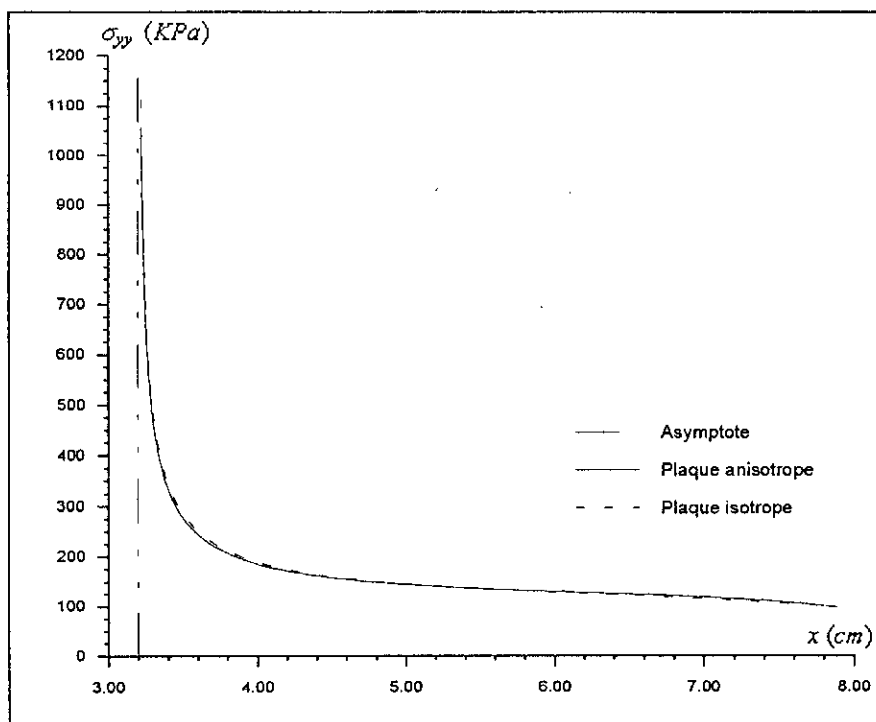


Figure 5.20 Variation de la contrainte σ_{yy} le long du segment de droite (3.2,0)-(8,0).

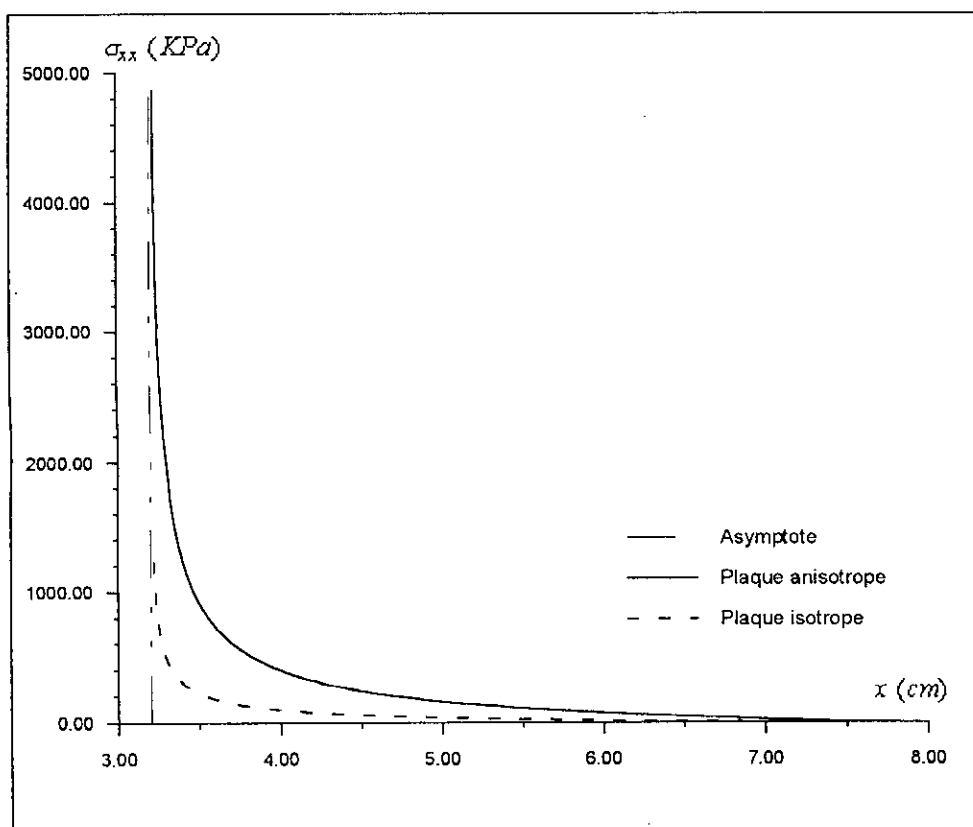


Figure 5.20bis Variation de la contrainte σ_{xx} le long du segment de droite (3.2,0)-(8,0).

Des figures (5.20) et (5.20bis) on remarque que la variation des contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sont continues et qu'elles tendent vers l'infini en s'approchant du point limite de la fissure. Ce résultat était prévisible puisqu'une fissure se produit quand la contrainte appliquée sur la portion où la fissure se produit devient très grande et dépasse la contrainte maximale admise pour le matériau utilisé. On remarque aussi des figures (5.20) et (5.20bis) que l'allure des courbes des contraintes σ_{xx} et σ_{yy} qui agissent sur un milieu isotrope sont similaires celles des contraintes σ_{xx} et σ_{yy} qui agissent un milieu anisotrope. Les contraintes σ_{yy} et σ_{xx} sont toujours de traction.

Exemple 12: étude d'une poutre sur appuis simple.

Dans cet exemple nous allons calculer la contrainte axiale qui agit sur deux segments de droite dans une poutre (d'épaisseur unité et de rapport

longueur/hauteur=10/1) sur appuis, portant une charge uniformément répartie $p=500$ Kpa/m, comme le montre la figure (5.21).

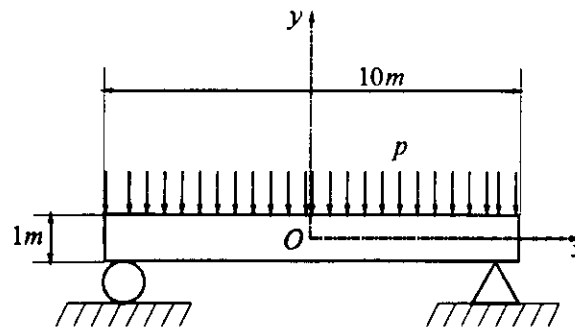


Figure 5.21 Poutre sur appuis.

Les paramètres physiques de la poutre sont:

Pour un matériau anisotrope (S.G.Lekhnitskii 1963)

- $E_1=1.2 \times 10^5$ Kpa
- $E_2=0.6 \times 10^5$ Kpa
- $\nu_{12}=0.071$
- $G_{12}=0.07 \times 10^5$ Kpa.

Pour un matériau isotrope (S.L.Crouch 1983)

- $E=0.7 \times 10^5$ Mpa
- $\nu=0.2$
- $G=0.29 \times 10^5$ Mpa.

Les réactions aux appuis sont: $R_1=R_2=250$ Kpa.

Pour la résolution numérique on divise le contour constitué de 10 segments de droites en 110 éléments de longueur 0.2m chacun. La surface supérieure de la poutre (60-110 éléments) est chargée par une force normale de compression $P_y = -10$ KN/m²; Les deux éléments 6 et 55 sont soumis à une traction (réaction) $P_y = +250$ KN/m² pour assurer l'équilibre de la poutre. Le mouvement de corps rigide (translation) est empêché en fixant les deux éléments 3 et 58 en déplacement selon y (notant que le déplacement u_x est nul le long de l'axe x). Les coordonnées des deux segments de droite où la contrainte σ_{xx} est calculée sont:

- (0,-0.5)_(0,+0.5) divisé en 22 éléments.
- (-5,0)_(+5,0) divisé en 50 éléments.

Les résultats obtenus par le code de calcul élaboré sont illustrés sur la figure (5.22). (pour le premier segment)

Pour le deuxième segment on a trouvé que la contrainte σ_{xx} est presque nul (σ_{xx} varie entre -0.003 et -0.011 KN/m²) pour tous les éléments.

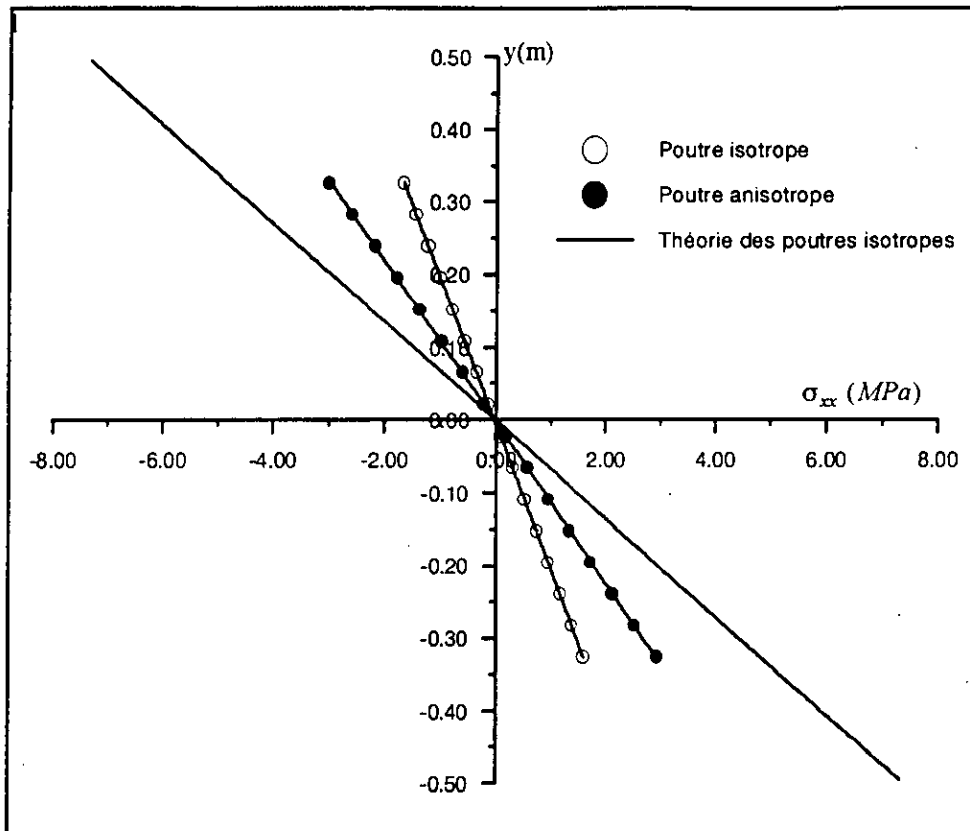


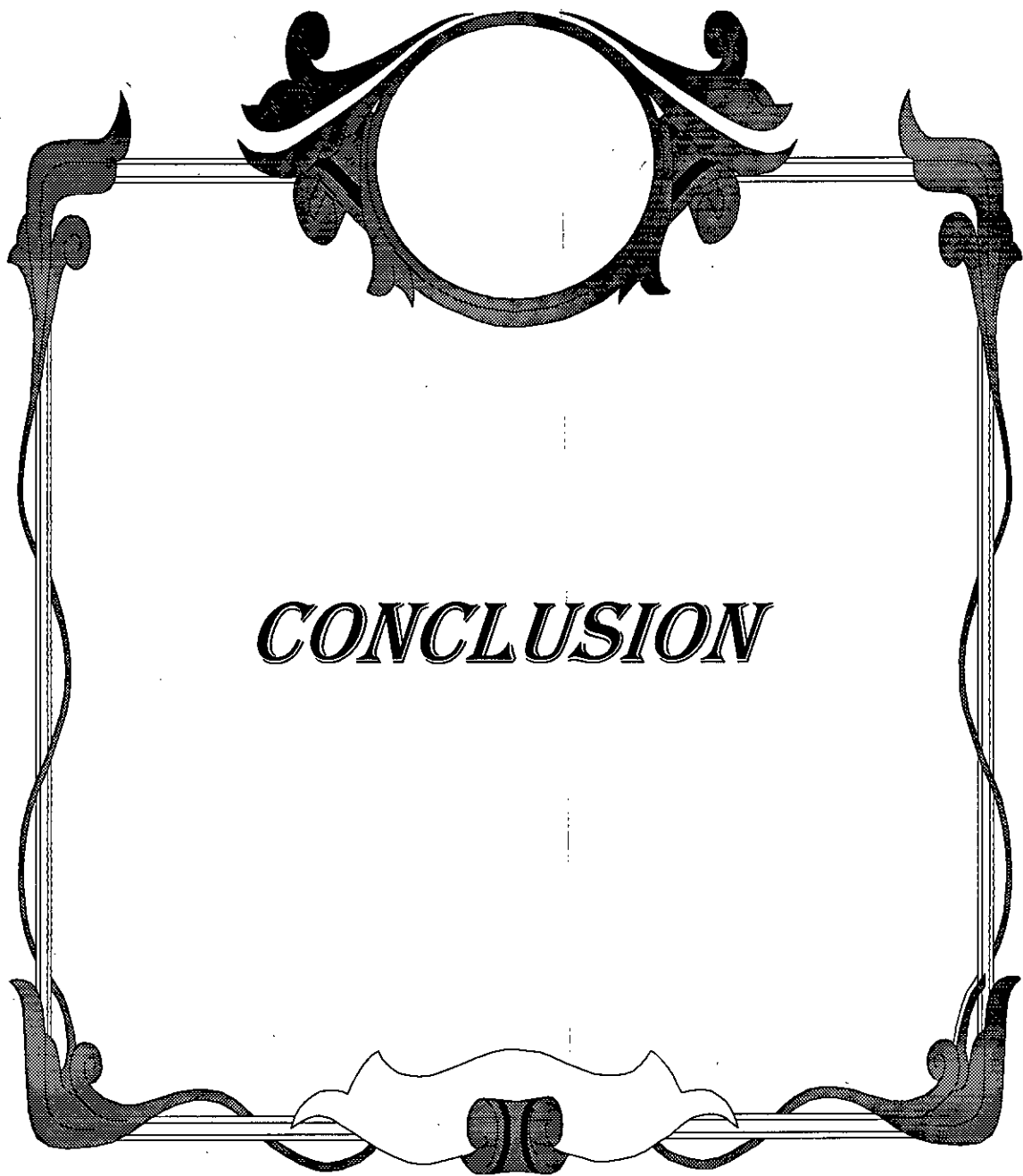
Figure 5.22 Variation de la contrainte σ_{xx} le long du segment de droite (0,-0.5)-(0,+0.5).

La variation de la contrainte σ_{xx} est linéaire le long du segment considéré. Ce résultat est cohérent avec la théorie élémentaire de la poutre.

Pour le deuxième segment le résultat obtenu est en bonne approximation à la solution théorique ($\sigma_{xx}=0$ sur l'axe neutre de la poutre).

L'erreur de la méthode des contraintes fictives est bien illustrée dans cet exemple. En effet, Cruse (1974) et Riccardella (1973) (S.L Crouch 1981) ont démontré que la méthode des contraintes fictives donne de grandes erreurs (57%) dans le calcul des poutres en flexion. Pour cela ils ont suggéré l'utilisation d'une méthode intégrale aux frontières directe d'ordre supérieur.

Conclusion: En conclusion générale pour ce chapitre, on peut dire que les résultats obtenus pour les différents exemples étudiés démontrent l'efficacité de la méthode des contraintes fictives dans la recherche des solutions des problèmes d'élasticités linéaires. Pour les problèmes qui ont des solutions analytiques on a vu la très bonne convergence de la solution numérique vers la solution analytique et de ce fait on peut dire que les résultats obtenus pour les problèmes qui n'ont pas de solutions analytiques (les problèmes pratiques en générale) représentent des données valables pour le dimensionnement des milieux étudiés.



CONCLUSION

CONCLUSION

Cette étude nous a permis d'apprendre deux notions importantes utiles pour l'ingénieur pour résoudre certains problèmes pratiques. La première concerne la méthode des contraintes fictives qui est une méthode efficace pour la résolution de problèmes en mécanique des solides. La seconde discipline porte sur la théorie des milieux élastiques anisotropes.

Nous avons pu grâce à ces deux acquis, construire un code de calcul pour la modélisation des milieux élastiques anisotropes en utilisant la méthode des contraintes fictives. Nous pouvons grâce à ce code traiter le cas de problèmes en deux dimensions, soit l'état de contrainte et de déformation planes. Le passage de l'un des problèmes à l'autre se fait aisément en introduisant certains paramètres. Nous sommes arrivés aussi à traiter un problème de la mécanique de la rupture en utilisant une plaque fissurée.

Pour tester la validité de notre code de calcul, nous avons lancé une série d'exemples. Par soucis de donner un caractère pratique à notre travail, nous avons choisi des matériaux tels que le bois de sapin, des plaques de contre plaqué et des plaques en graphite/époxyde. De même, et comme paramètres à étudier, nous avons opté pour l'étude du champ de contrainte étant donné que cette grandeur reste une préoccupation majeure pour l'ingénieur pour le dimensionnement. Nous avons pu mettre en évidence l'influence de paramètres tels que la direction des fibres (grain) et le rapport des modules de Young dans les directions principales d'anisotropie sur la valeur et la position de la contrainte tangentielle maximale calculée autour du contour du domaine. Cette contrainte a son importance puisqu'elle permet de faire apparaître le phénomène de concentration de contrainte. Il suffit pour cela de calculer le facteur de concentration de contrainte. La comparaison avec les résultats d'un matériau élastique isotrope montre que le rapport des modules de Young fait apparaître

que le facteur de concentration de contrainte peut être très important. Nous avons réalisé un test pour montrer l'influence de singularité géométriques dans la structure. Cet exemple a concerné le cas d'une plaque fissurée. Ce problème a été choisi pour montrer que nous pouvons traiter le cas d'un milieu élastique anisotrope fissuré. Cela peut être une introduction à la mécanique de la rupture à travers le calcul du facteur d'intensité de contrainte.

L'utilisation de la méthode des contraintes fictives nous a permis l'obtention d'excellents résultats en comparaison avec les solutions analytiques correspondantes pour la plupart des problèmes. Ceci confirme une fois de plus la précision de cette méthode (qualité de la solution, convergence). Néanmoins, cette méthode ne peut être exploitée dans certains problèmes comme c'est le cas pour les problèmes des poutres en flexion et ceci à cause des grandes erreurs survenant dans les calculs numériques. Ceci nous ramène à chercher d'utiliser d'autres méthodes d'intégrales aux frontières directes et d'ordre supérieur pour résoudre ces problèmes numériquement.

Nous espérons qu'avec ce modeste travail, avoir pu dégager un champ de travail pour ceux de nos camarades qui pourraient s'intéresser à la modélisation des milieux élastiques anisotropes et les méthodes des équations intégrales de frontière.

BIBLIOGRAPHIE

S.L.CROUCH- A.M.STARFIELD:"Boundary element method in solid mechanics."

Allen et Unwin. 1983.

S.G.LEKHNETSKI:"Theory of elasticity of anisotropic elastic body."

Holden-day, inc. 1963.

J.SALENÇON:"Mécanique des milieux continus." Tome 1-2

Edition Ecole Nationale Polytechnique France. 1987.

WILLIAM A.NASH:"Résistance des matériaux 1 cours et problèmes."

Mc Graw-Hill. 1984.

G.CAIGNAERT-J.P.HENRY:" Exercices d'élasticité."

Dunod university

F.J.RIZZO-D.J.SHIPPY:"A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies."

J.Composite Materials, vol.4 (Janvier 1970), (p.36-61)

M.D.SNYDER-T.A.CRUSE:"Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates."

Internatiol Journal of Fracture, vol.1, No.2, Avril 1975 (p.315-28)

N.NISHIMURA-S.KOBOYACHI:"A Boundary Integral Equation Formulation for Three Dimensionnel Anisotropic Elastostatics."

TIMOSHENKO:"Théorie de l'élasticité."

Librairie polytechnique. CH.BERANGER. 1948.

LAHEY COMPUTER SYSTEM.inc:"Lahey Tools and Librairies Reference Manual."

Juin. 1990.

M. GHOUALI:"Modélisation par la méthode des discontinuités des déplacements des milieux multicouches élastiques et viscoélastiques"

Juin. 1992.